

دانشگاه شاهرود

دانشکده فیریک
گروه ذرات بنیادی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
فیریک، گرایش ذرات بنیادی

عنوان

واهمدوسی در ولگشتهای کوانتومی یک بعدی

استاد راهنما

دکتر مصطفی عنابستانی

دانشجو

زینب مرادی

۱۳۹۳

تقدیم بہ مادر و پدر عزیزم
بزرگ ترین مہمیت ہا می زندگی ام...

سپاس گزارمی... .

با سپاس از یگانہ معشوق ازلی و ابدی که اراده کرد من زیبا یا موزم تا به گونه ای زیبا زندگی کنم.
و با سپاس از:

استاد ارجمندم، آقای دکتر مصطفی عنایتانی که همواره راهنمای من بوده اند و این پرورش بدون کمک ایشان به پایان نمی رسید. و شاگردی در محضر این استاد عزیز، بی شک افتخاری بزرگ برای اینجانب است. همواره قدردان زحمات ایشان هستم.

مهندس حسن محمودی، که در این مسیر با هم فکری هایش و دل گرمی هایش مشوقم بود.
دوستان عزیزم

خانم ها: کزلی شیدایی، فاطمه بابایی، مهین محمدزاده، سوده مددی، زهرا محمدیان، ملیحه صلبی و پرینا هوشمند.

آقایان: مجید مرادی، احمد کاوه و محمد کشکولی

اینجانب زینب مرادی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیریک دانشکده فیریک دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان واهمدوسی در ولگشت‌های کوانتومی یک بعدی، تحت راهنمایی دکتر مصطفی عنابستانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زینب مرادی

۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

واهمدوسی یک پدیده فیزیکی است که از برهم‌کنش سیستم‌های کوانتومی و محیط ناشی می‌شود. از آنجایی که واهمدوسی معادل از دست رفتن اطلاعات کوانتومی شناخته شده است. به‌عنوان عامل مزاحم در نظر گرفته می‌شود. اما مشخص شده است که واهمدوسی در واقع در شرایطی می‌تواند نقش مفیدی در فرآیندهای طبیعی بازی کند. ولگشت کوانتومی در حقیقت همتای کوانتومی ولگشت کلاسیکی است که از خواص کوانتومی استفاده می‌کند. به‌عنوان مثال برهم‌نهی کوانتومی، به سیستم این اجازه را می‌دهد، که ذره کوانتومی بطور همزمان در تمام مسیرهای ممکن حضور داشته باشد. از تفاوت‌های قابل توجه بین ولگشت‌های کوانتومی و ولگشت‌های کلاسیکی می‌توان به وابستگی درجه دو واریانس توزیع احتمال در ولگشت‌های کوانتومی در مقابل واریانس خطی ولگشت‌های کلاسیکی و هم‌چنین توزیع احتمال نوسانی ولگشت کوانتومی در مقابل تابع توزیع احتمال دو جمله‌ای ولگشت کلاسیکی اشاره کرد. در این پایان نامه در ابتدا به معرفی و بررسی اجزای ولگشت کلاسیکی روی خط و سپس به بررسی ولگشت کوانتومی می‌پردازیم. با ذکر تفاوت‌های این دو نوع ولگشت، روش استاندار تبدیل فوریه برای حل تحلیلی ولگشت‌های کوانتومی را معرفی می‌کنیم. در فصل دو با استفاده از عملگرهای کراوس رابطه‌ای تحلیلی برای واریانس ولگشت‌های کوانتومی معرفی می‌کنیم. که استفاده از این روابط در قالب مثال‌هایی از کانال‌های کوانتومی متفاوت بصورت مفصل آورده شده است. در فصل سوم رابطه تحلیلی کلی برای واریانس معرفی شده است که برای هر سیستم کوانتومی دارای نوفه (چه نوفه روی مکان باشد و چه روی سکه) قابل کاربرد است. در این فصل با آوردن مثال‌های مشخصی از نوفه خالص روی فضای سکه و یا نوفه روی سکه و مکان و یا حتی نوفه خالص روی مکان نشان داده شده است که کوچک‌ترین نوفه روی فضای سکه باعث خطی شدن واریانس و حذف خصوصیات کوانتومی ولگشت می‌شود در حالی که نوفه خالص مکانی بصورت تونل زنی به نزدیک‌ترین همسایه مجاور خواص کوانتومی را حفظ می‌کند. این نتیجه جالب در مورد نوفه مکانی به‌شکل تونل‌زنی ما را برآن داشت که در فصل چهارم کلی‌ترین حالت تونل‌زنی به‌شکل تونل‌زنی نامحدود به تمام همسایه‌ها را بررسی کنیم. بررسی ما نشان داد که نه تنها تونل‌زنی به سایر همسایه‌ها خواص کوانتومی سیستم را حفظ می‌کند بلکه باعث افزایش اندکی در سرعت انتشار (واریانس) می‌شود.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. زینب مرادی، مصطفی عنابستانی، ”محاسبه سرعت انتشار ولگشت‌های کوانتومی یک بعدی در حضور تونل زنی نامحدود“. نهمین سمپوزیوم پیشرفت‌های علوم و تکنولوژی- موسسه آموزش عالی خاوران-۱۳ آذر ۱۳۹۳.
۲. زینب مرادی، مصطفی عنابستانی، ”تاثیر واهمدوسی سکه برضریب پخش ولگشت‌های کوانتومی یک بعدی“. دومین همایش ملی پژوهش‌های کاربردی در ریاضی و فیزیک-۲ بهمن ۱۳۹۳.

فهرست مطالب

۳	۱	انواع ولگشت
۳	۱.۱	ولگشت تصادفی کلاسیکی
۳	۱.۱.۱	ولگشت کلاسیکی روی خط
۸	۲.۱.۱	نقطه جذب کلاسیکی
۹	۳.۱.۱	ضریب پخش
۱۰	۲.۱	ولگشت کوانتومی
۱۰	۱.۲.۱	ولگشت کوانتومی روی خط
۱۲	۲.۲.۱	ساختار ولگشت کوانتومی روی خط
۱۶	۳.۲.۱	حل تحلیلی ولگشت کوانتومی روی خط
۱۸	۴.۲.۱	تبدیل فوریه گسسته:
۲۲	۵.۲.۱	ولگشت کوانتومی روی خط با سکه تعمیم یافته
۲۴	۲	اثر نوفه در ولگشت‌های کوانتومی
۲۴	۱.۲	ماتریس چگالی
۲۶	۲.۲	عملگرهای کراوس
۲۸	۳.۲	کانال‌های کوانتومی
۲۸	۱.۳.۲	کانال بیت برگردان
۲۸	۲.۳.۲	کانال فاز برگردان
۲۹	۳.۳.۲	کانال واقتبش
۳۰	۴.۳.۲	کانال میرایی دامنه
۳۱	۵.۳.۲	کانال میرایی فاز
۳۲	۴.۲	کاربردهای واهمدوسی
۳۵	۳	سیستم‌های کوانتومی در حضور نوفه
۳۵	۱.۳	تفسیر اثر نوفه روی سیستم
۳۶	۲.۳	نوفه روی سکه‌ی ولگشت کوانتومی
۵۰	۳.۳	نوفه روی مکان و سکه ولگشت کوانتومی

۴.۳	نوفه روی مکان ولگشت کوانتومی	۵۸
۴	تاثیر واهمدوسی سکه برضریب پخش ولگشت‌های کوانتومی یک بعدی	۶۲
۱.۰.۴	اندازه‌گیری بعد از هرگام	۶۲
۲.۰.۴	کانال بیت-برگردان	۶۴
۳.۰.۴	کانال میرایی فاز	۶۶
۱.۴	محاسبه سرعت انتشار ولگشت‌های کوانتومی یک بعدی در حضور تونل زنی نامحدود	۶۹
	مراجع	۸۴

پیش‌گفتار

پیوند میان نسخه‌های ولگشت تصادفی کلاسیکی و ولگشت کوانتومی، از مناظر مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است:

۱. شبیه‌سازی ولگشت‌های تصادفی کلاسیکی با استفاده از ولگشت‌های کوانتومی. مطالعات در این حوزه نه تنها جنبه‌های محاسباتی جالبی را از هر دو نوع ولگشت، بلکه دیدگاهی عمیق‌تر از شباهت‌های میان قوانینی که بر فرآیندهای محاسباتی در هر دو سیستم فیزیکی کلاسیکی و کوانتومی حاکم هستند، برای ما فراهم می‌کند [۱].

۲. گذار از ولگشت کوانتومی به ولگشت تصادفی کلاسیکی. این جنبه از حوزه‌های تحقیقاتی نه تنها به دلیل کاوش جنبه‌های محاسباتی هر دو نوع ولگشت جالب است، بلکه به این دلیل، که برای سازندگان رایانه‌های کوانتومی (مثلاً فیزیکدانان تجربی و مهندسين) معیارهایی برای بررسی میزان کوانتومی بودن یک رایانه کوانتومی فراهم می‌کند، جالب است. علاوه بر این، مطالعات به جامعه علمی این اجازه را داده است تا ماهیت کوانتومی ولگشت‌های کوانتومی و بعضی از مفاهیم آن را در توسعه الگوریتم‌ها استفاده کنند [۲].

واهمدوسی یک پدیده فیزیکی است که از برهم‌کنش سیستم‌های کوانتومی و محیط ناشی می‌شود. از آنجایی که واهمدوسی معادل از دست رفتن اطلاعات کوانتومی شناخته شده است. به‌عنوان عامل مزاحم در نظر گرفته می‌شود. اما مشخص شده است که واهمدوسی در شرایطی می‌تواند، نقش مفیدی در فرآیندهای طبیعی بازی کند [۳]. هم‌چنین نتایج جالبی را برای فرآیندهای پردازش داده کوانتومی فراهم می‌کند [۴]. علاوه بر این ویژگی‌ها، واهمدوسی از طریق برهم‌کنش با محیط، یک چهارچوب نوعی برای بررسی گذارها از ولگشت‌های کوانتومی به ولگشت‌های تصادفی کلاسیکی مهیا می‌کند. بنابراین، برای رسیدن به یک درک عمیق‌تر از روابط فیزیکی و ریاضیاتی میان سیستم‌های کوانتومی و محیط‌های آن‌ها به همراه جستجو برای الگوهای جدید برای ساخت الگوریتم‌های کوانتومی، مطالعه ویژگی‌ها و آثار واهمدوسی بر ولگشت‌های کوانتومی، زمینه‌ای مهم در محاسبات کوانتومی است.

ترگنا^۱ و کندون^۲ [۵]، اثر واهمدوسی را در ولگشت کوانتومی روی خط، چرخه و مکعب بررسی کرده‌اند و دریافته‌اند که بعضی از آثار واهمدوسی می‌تواند برای ساخت الگوریتم‌های کوانتومی مفید باشد.

^۱Tregenna

^۲Kendon

برن^۳ و همکارانش [۲]، نشان داده‌اند که گذار ولگشت کوانتومی-کلاسیکی علاوه بر انجام اندازه‌گیری می‌تواند از دو طریق ممکن به دست آید: واهمدوسی در سکه کوانتومی و استفاده از سکه‌هایی با ابعاد بالاتر. عنابستانی^۴ و همکارانش نتایج [۲]، را توسط ارائه عبارات تحلیلی برای انواع گوناگون واهمدوسی، عمومیت داده‌اند [۷].

نویسندگان بسیاری درباره ویژگی‌های محاسباتی و فیزیکی واهمدوسی در ولگشت‌های کوانتومی بحث کرده‌اند: چاندراشکار^۵ [۸]، تقارن‌ها و اثرات نوفه را بر سکه ولگشت کوانتومی گسسته بررسی کرده‌اند. اُبیوز^۶ و کاواکامی^۷ [۹]، ولگشت‌های کوانتومی یک بعدی با نقص‌های تصادفی مکانی و زمانی ناشی از برهم‌کنش تصادفی با محیط‌ها را مطالعه کردند و دریافتند که این نوع از ولگشت‌های کوانتومی می‌توانند از جایگزیدگی کامل پیشگیری کنند. هم‌چنین، کندون و همکارانش [۱۰] [۵]، به صورت گسترده نتایج محاسباتی واهمدوسی سکه را در ولگشت‌های کوانتومی بررسی کردند. کوشیک^۸ و همکارانش [۱۱]، گذار کوانتوم به کلاسیک یک ولگشت کوانتومی را از طریق وارد کردن جابه‌جایی فاز در سکه را مطالعه کردند. هم‌چنین، چیساک^۹ و همکارانش [۱۴]، گذارهای کوانتومی به کلاسیکی و گذارهای کلاسیکی به کوانتومی را با استفاده از ولگشت‌های تصادفی گسسته و کلاسیکی مطالعه کردند. ژانگ^{۱۰} اثر واهمدوسی در حال افزایش (ناشی از اندازه‌گیری احتمالی انجام شده روی مکان ولگشت و روی سکه) را در ولگشت کوانتومی با سکه را بررسی کرد، و روابط تحلیلی برای توزیع احتمال مرتبط با مکان به دست آورد [۱۵]. عنابستانی و همکارانش [۱۶]، اثر واهمدوسی را بر ولگشت‌های کوانتومی یک بعدی مطالعه کردند. سریکانث^{۱۱} و همکارانش [۱۷]، درجه «کوانتومی بودن» را در ولگشت‌های کوانتومی در حضور واهمدوسی را با استفاده از آشفتگی ناشی از اندازه‌گیری تعیین کردند. گونولول^{۱۲} همکارانش [۱۸]، پدیده واهمدوسی را در ولگشت‌های کوانتومی دو بعدی با تله بررسی کردند. راو^{۱۳} و همکارانش [۱۹]، ولگشت کوانتومی نوفه‌دار را با استفاده از آشفتگی ناشی از اندازه‌گیری، تحلیل کردند.

^۳Brun

^۴Anabestani

^۵Chandrashekar

^۶Obuse

^۷Kawakami

^۸Ko's'ik

^۹Chisaki

^{۱۰}Zhang

^{۱۱}Srikanth

^{۱۲}Gonulol

^{۱۳}Rao

فصل ۱

انواع ولگشت

ولگشت‌های کوانتومی^۱ را می‌توان، به‌عنوان همتای کوانتومی ولگشت‌های کلاسیکی^۲ در نظر گرفت [۱۶]. در واقع خواص کوانتومی در مکانیک کوانتوم مثل وجود برهم نهی و درهم تنیدگی، می‌تواند راه را برای طراحی الگوریتم‌های کوانتومی که بر پایه محاسبات موازی هستند هموار کند. الگوریتم‌های کوانتومی مثل الگوریتم شور^۳ که برای تجزیه اعداد مرکب به عامل‌های اول [۲۰] و الگوریتم گراور^۴ برای جستجو در پایگاه داده [۲۱]، نمونه‌هایی از الگوریتم‌های کوانتومی هستند که به شکل تصاعدی بهتر از بهترین الگوریتم‌های کلاسیکی هستند.

از آن جایی که الگوریتم‌های بسیار مفیدی بر پایه ولگشت‌های کلاسیکی وجود دارند، انتظار می‌رود الگوریتم‌های مبتنی بر ولگشت‌های کوانتومی از همتهای کلاسیکی آن بهتر باشند. تاکنون الگوریتم‌های متنوعی بر پایه ولگشت‌های کوانتومی طراحی شده‌اند که از آن میان می‌توان به الگوریتم جستجو بر پایه ولگشت کوانتومی [۲۲] و پیدا کردن نابهنجاری‌های گراف‌های ستاره‌ای بر پایه ولگشت‌های کوانتومی نام برد [۲۳].

۱.۱ ولگشت تصادفی کلاسیکی

۱.۱.۱ ولگشت کلاسیکی روی خط

ساده‌ترین نوع ولگشت کلاسیکی روی خط شامل حرکت ولگشت^۵ به سمت راست یا چپ است، که ولگشت این حرکت را با توجه به حالت سکه^۶ انجام می‌دهد. مثلاً اگر در پرتاب سکه، شیر بیاید ولگشت

^۱Quantum walk

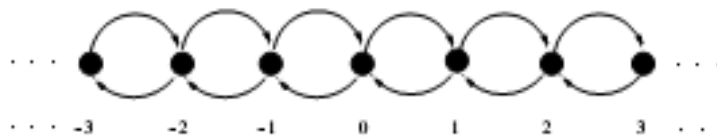
^۲Classical walk

^۳Shor

^۴Grover

^۵walker

^۶coin



شکل ۱.۱: حرکت تصادفی ولگشت کلاسیکی نامحدود روی خط

یک واحد به سمت راست حرکت می‌کند و اگر در پرتاب سکه، خط بیاید ولگشت یک واحد به سمت چپ حرکت می‌کند. بنابراین این ولگشت کاملاً متقارن است، چون احتمال شیر و خط آمدن سکه با هم برابر است، بنابراین توزیع احتمال برای ولگشت کلاسیکی به صورت نمودار گاوسی است. حرکت ولگشت یک فرآیند تصادفی است، بنابراین با قطعیت مکان ولگشت را در زمان‌های دیگر نمی‌توان پیش‌بینی کرد، اما با قطعیت ولگشت جابه‌جا می‌شود. چون همان‌طور که در جدول ۱.۱ مشاهده می‌شود در اولین گام، احتمال حضور ذره در مبدا صفر است.

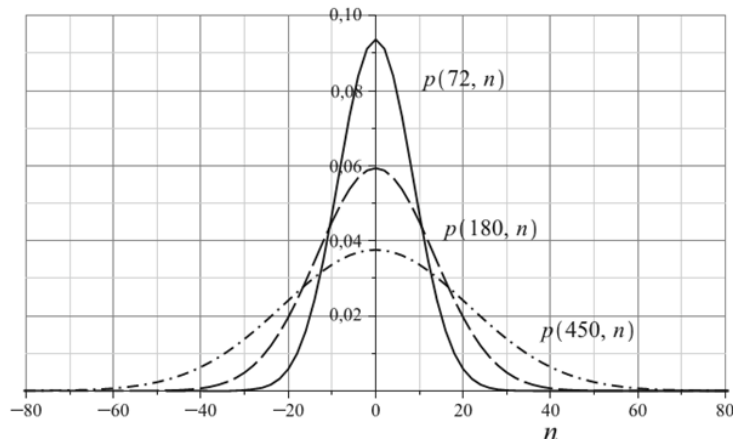
جدول ۱.۱: احتمال وجود ولگشت در مکان n در زمان t . نمودار برای ذره‌ای رسم شده است که حرکت خود را از مبدا آغاز کرده است.

گام	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۰	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{4}$	۰	۰	۰	۰	۰
۳	۰	۰	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{3}{8}$	۰	$\frac{3}{8}$	۰	$\frac{1}{8}$	۰	۰	۰	۰
۴	۰	$\frac{1}{16}$	۰	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{3}{8}$	۰	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{16}$	۰	۰	۰
۵	۰	$\frac{1}{32}$	۰	$\frac{5}{32}$	۰	$\frac{5}{16}$	۰	$\frac{5}{16}$	۰	$\frac{5}{32}$	۰	$\frac{1}{32}$	۰
۶	$\frac{1}{64}$	۰	$\frac{3}{32}$	۰	$\frac{15}{64}$	۰	$\frac{5}{16}$	۰	$\frac{15}{64}$	۰	$\frac{3}{32}$	۰	$\frac{1}{64}$

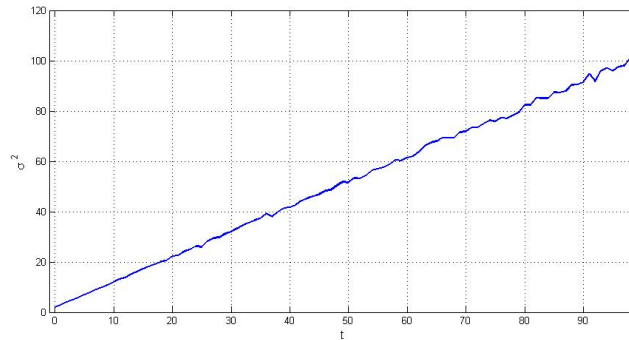
از جدول ۱.۱ مشاهده می‌شود که احتمال حضور ولگشت در مکان‌های فرد در گام‌های زوج صفر است، و همچنین احتمال حضور ولگشت در مکان‌های زوج در گام‌های فرد صفر است [۲۴]. احتمال پیدا کردن ولگشت در مکان n بعد از t گام، توسط رابطه زیر تعریف می‌شود [۲۵].

$$p(t, n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \binom{t}{\frac{n+t}{2}} \quad (1.1)$$

این رابطه زمانی درست است که، $t+n$ زوج باشد و $n \leq t$ باشد. یعنی اگر t زوج باشد باید n نیز زوج باشد، هم‌چنین اگر t فرد باشد باید n نیز فرد باشد.



شکل ۲.۱: توزیع احتمال ولگشت کلاسیکی تصادفی یک بعدی [۲۵]



شکل ۳.۱: واریانس ولگشت کلاسیکی [۲۵]

در حد t های بزرگ و n های کوچک توزیع احتمال رابطه ۱.۱ به یک توزیع نرمال منجر می شود. که به شکل زیر می توان اثبات کرد.

برای این اثبات از تقریب استرلینگ استفاده می کنیم.

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{۲.۱}$$

$$\ln n! \simeq n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n)$$

با استفاده از رابطه ۲.۱ رابطه ۱.۱ را به صورت زیر بسط می دهیم.

(۳.۱)

$$\begin{aligned}
 Ln p(t, n) &= -tLn \Psi + tLnt - t + \frac{1}{\Psi} Ln(\Psi \pi t) - \frac{1}{\Psi} (t+n) Ln \frac{1}{\Psi} (t+n) \\
 &+ \frac{1}{\Psi} (t+n) - \frac{1}{\Psi} Ln(\pi(t+n)) - \frac{1}{\Psi} (t-n) Ln \frac{1}{\Psi} (t-n) \\
 &+ \frac{1}{\Psi} (t-n) - \frac{1}{\Psi} Ln(\pi(t-n)) = -tLn \Psi + tLnt - t + \frac{1}{\Psi} Ln(\Psi \pi t) \\
 &- \frac{1}{\Psi} (t+n) [-Ln \Psi + Ln(t+n)] + \frac{1}{\Psi} t + \frac{n}{\Psi} - \frac{1}{\Psi} Ln(\pi(t+n)) \\
 &- \frac{1}{\Psi} (t-n) [-Ln \Psi + Ln(t-n)] + \frac{t}{\Psi} - \frac{n}{\Psi} - \frac{1}{\Psi} Ln \pi(t-n) \\
 &= -tLn \Psi + tLnt + \frac{1}{\Psi} Ln(\Psi \pi t) + \frac{t}{\Psi} Ln \Psi + \frac{n}{\Psi} Ln \Psi - \frac{1}{\Psi} (t+n) Ln(t+n) \\
 &- \frac{1}{\Psi} Ln \pi(t+n) + \frac{t}{\Psi} Ln \Psi - \frac{n}{\Psi} Ln \Psi - \frac{1}{\Psi} (t-n) Ln(t-n) - \frac{1}{\Psi} Ln \pi(t-n) \\
 &= tLnt + \frac{1}{\Psi} Ln(\Psi \pi t) - \frac{1}{\Psi} (t+n) Ln(t+n) - \frac{1}{\Psi} (t-n) Ln(t-n) \\
 &- \frac{1}{\Psi} Ln \pi(t+n) - \frac{1}{\Psi} Ln \pi(t-n)
 \end{aligned}$$

با استفاده از تقریب تیلور

$$Ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} \quad (۴.۱)$$

رابطه ۳.۱ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 & \text{(۵.۱)} \\
 \text{Ln } p(t, n) &= t \text{Ln } t + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \text{Ln}(\sqrt{\pi t}) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}(t+n) \text{Ln } t \left(1 + \frac{n}{t}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}(t-n) \text{Ln} \left(1 + \frac{n}{t}\right) \\
 & - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln} \pi(t+n) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln} \pi(t-n) = t \text{Ln } t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln}(\sqrt{\pi t}) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}(t+n) \text{Ln } t \\
 & - \frac{1}{\sqrt{\pi}}(t+n) \frac{n}{t} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}(t+n) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n}{t}\right)^{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}(t-n) \text{Ln } t + \frac{1}{\sqrt{\pi}}(t-n) \frac{n}{t} \\
 & + \frac{1}{\sqrt{\pi}}(t-n) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n}{t}\right)^{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln} \pi t \left(1 + \frac{n}{t}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln} \pi t \left(1 + \frac{n}{t}\right) \\
 & = t \text{Ln } t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln}(\sqrt{\pi t}) - \frac{t}{\sqrt{\pi}} \text{Ln } t - \frac{n}{\sqrt{\pi}} \text{Ln } t - \frac{t}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{t} - \frac{n}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{t} + \frac{t}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n}{t}\right)^{\sqrt{\pi}} \\
 & + \frac{n}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n}{t}\right)^{\sqrt{\pi}} - \frac{t}{\sqrt{\pi}} \text{Ln } t + \frac{n}{\sqrt{\pi}} \ln t + \frac{t}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{t} - \frac{n}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{t} + \frac{t}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n}{t}\right)^{\sqrt{\pi}} - \frac{n}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n}{t}\right)^{\sqrt{\pi}} \\
 & - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln} \pi t \left(\frac{n}{t} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n}{t}\right)^{\sqrt{\pi}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \pi t \left(-\frac{n}{t} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n}{t}\right)^{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln}(\sqrt{\pi t}) - \frac{n^{\sqrt{\pi}}}{t} \\
 & + \frac{t}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n}{t}\right)^{\sqrt{\pi}} + \frac{t}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n}{t}\right)^{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln} \pi t - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln} \left(1 + \frac{n}{t}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln} \pi t - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln} \left(1 - \frac{n}{t}\right) \\
 & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln}(\sqrt{\pi t}) - \frac{n^{\sqrt{\pi}}}{t} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{n^{\sqrt{\pi}}}{t} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln} \pi t - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n}{t} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n^{\sqrt{\pi}}}{t^{\sqrt{\pi}}}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln} \pi t \\
 & - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{n}{t} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{n^{\sqrt{\pi}}}{t^{\sqrt{\pi}}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln}(\sqrt{\pi t}) - \frac{n^{\sqrt{\pi}}}{\sqrt{\pi} t} - \text{Ln} \pi t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{n^{\sqrt{\pi}}}{t^{\sqrt{\pi}}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{n^{\sqrt{\pi}}}{t^{\sqrt{\pi}}} \\
 & = \text{Ln} \frac{\sqrt{\sqrt{\pi t}}}{\pi t} - \frac{n^{\sqrt{\pi}}}{\sqrt{\pi} t} = \text{Ln} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sqrt{\pi t}}} - \frac{n^{\sqrt{\pi}}}{\sqrt{\pi} t} = \text{Ln}(p(n, t)) = \text{Ln} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sqrt{\pi t}}} - \frac{n^{\sqrt{\pi}}}{\sqrt{\pi} t}
 \end{aligned}$$

که در آخر به رابطه زیر می‌رسیم.

$$p(n, t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{n^2}{2t}} \quad (6.1)$$

معادله بدست آمده، بسیار شبیه توزیع گاوسی است. در ولگشت کلاسیکی انحراف استاندارد \sqrt{N} متناسب با \sqrt{N} است، که N تعداد گام‌ها است [۳۳]. برای اثبات این ادعا می‌توان به صورت زیر عمل کرد. اگر ولگشت در هر گام به اندازه L جابه‌جا شود و با احتمال p به سمت راست حرکت کند و با احتمال $1-p$ به سمت چپ حرکت کند، مقدار چشمداشتی $\langle x \rangle$ و $\langle x^2 \rangle$ به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\langle x \rangle = p(+L) + (1-p)(-L) = pL - L + pL = (2p - 1)L \quad (7.1)$$

$$\langle x^2 \rangle = p(+L)^2 + (1-p)(-L)^2$$

بعد از N گام مقدار چشمداشتی $\langle x \rangle$ و $\langle x^2 \rangle$ به صورت زیر می‌باشند.

$$\langle x \rangle = Np(+L) + N(1-p)(-L) = NpL - NL + NpL = (2p - 1)NL \quad (8.1)$$

$$\langle x^2 \rangle = Np(+L)^2 + N(1-p)(-L)^2 = NpL^2 + NL^2 - NpL^2 = NL^2$$

برای ولگشتی که با احتمال یکسان $1/2$ به سمت چپ یا راست حرکت می‌کند $\langle x \rangle = 0$ است، بنابراین می‌توان واریانس و انحراف معیار را به شکل زیر حساب کرد.

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = NL^2 \quad (9.1)$$

$$\sigma = \sqrt{NL}$$

بنابراین در ولگشت‌های کلاسیکی انحراف معیار متناسب با \sqrt{N} است.

۲.۱.۱ نقطه جذب کلاسیکی

فرض کنید در مسیر شخصی که در حال ولگشت است، دیواره‌ای جذبی وجود دارد که شخص را متوقف کرده و اجازه ادامه ولگشت به او نمی‌دهد. حالتی را در نظر می‌گیریم که دیواره جذب در مکان صفر و

^۲Standard deviation

مکان شخص در نقطه یک از محور مختصات باشد. برای سادگی، سکه را متقارن با احتمالات برابر در نظر می‌گیریم.

احتمال رفتن به چپ و راست با هم برابر و مساوی $1/2$ است. فرض کنید p احتمال این است که شخص به دیواره رسیده و ولگشت متوقف شود. شخص از نقطه یک شروع به حرکت می‌کند. به احتمال $1/2$ به نقطه صفر رسیده و متوقف می‌شود. در غیر این صورت، با احتمال $1/2$ به نقطه دو می‌رسد. احتمال این که شخصی از نقطه دو به نقطه صفر برود را با p_{20} نشان می‌دهیم. این احتمال برابر با حاصل ضرب، احتمالات رفتن شخص از نقطه دو به نقطه یک p_{21} و سپس به نقطه صفر p_{10} است. چون ولگشت به صورت همگن انجام می‌شود، هر دو احتمال p_{21} و p_{10} برابر با p خواهد بود. پس

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_{21} p_{10} = \frac{1}{2} (1 + p^2) \quad (10.1)$$

با حل معادله درجه دوم رابطه بالا داریم، $p = 1$ است. یعنی ولگشت هر چقدر از مرز جاذب دور شده باشد دوباره به مرز جاذب برمی‌گردد [۳۳]، البته این نتیجه برای حالت یک بعدی و دو بعدی صادق است. اما در حالت سه بعدی و بالاتر ولگشت با یک احتمال مشخص از مرز جاذب فرار می‌کند [۳۸].

۳.۱.۱ ضریب پخش

در یک سیستم آماری که مولفه‌ای مثل x با احتمال $p(x)$ اتفاق می‌افتد، واریانس به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad (11.1)$$

$$\bar{x} = \int p(x) x dx$$

این تعریف در مکانیک کوانتومی به شکل زیر است.

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (12.1)$$

با استفاده از واریانس می‌توان کمیتی به نام ضریب پخش را تعریف کرد که [۲۶]

$$D = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \sigma^2}{\partial t} \quad (13.1)$$

این کمیت به نوعی سرعت متوسط دور شدن از مبدا را نشان می‌دهد. به همین دلیل به نام ضریب پخش یا سرعت پخش شناخته می‌شود.

در ولگشت کلاسیکی که ولگشت با احتمال برابر به چپ و راست می‌رود، مقدار چشمداشتی $\langle x \rangle$ برابر صفر است.

بنابراین

$$D = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle x^2 \rangle}{T} \quad (14.1)$$

ضریب پخش را برای ولگشت تصادفی کلاسیکی به صورت زیر به دست می آوریم:

$$D_{CRW}(T) = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle x^2 \rangle}{T} \sim \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{T} = \frac{1}{2} \quad (15.1)$$

همان طور که مشاهده می شود، ضریب پخش متناسب با یک عدد ثابت است.

۲.۱ ولگشت کوانتومی

تاکنون دو نوع ولگشت کوانتومی معرفی شده است: ولگشت کوانتومی گسسته [۲۷][۲۸] و ولگشت کوانتومی پیوسته [۲۹][۳۰].

تفاوت بین ولگشت کوانتومی و ولگشت کلاسیکی بدلیل خواص برهم نهی در ولگشت های کوانتومی بوجود آمده است. که برهم نهی باعث بوجود آمدن تداخل بین حالت های کوانتومی می شود. اگر در هر گام اندازه گیری روی سامانه انجام دهند، سامانه در یکی از حالت های خود پیدا می شود و تداخل کوانتومی از بین می رود و در نهایت تبدیل به ولگشت کلاسیکی می شود. دو راه برای به دست آوردن مجدد نتایج کلاسیکی وجود دارد [۲]:

۱. در هر گام روی سکه اندازه گیری انجام دهند.

۲. در هر گام به جای استفاده از همان سکه از یک سکه کوانتومی جدید استفاده کنند.

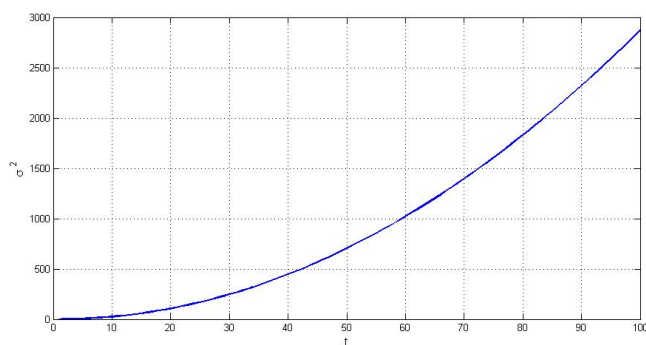
یکی از تفاوت های قابل توجه بین ولگشت های کوانتومی و ولگشت های کلاسیکی این است که، در ولگشت کوانتومی واریانس وابستگی درجه ی دوم دارد و توزیع احتمال نوسانی است، اما در ولگشت کلاسیکی واریانس به صورت خطی است و توزیع احتمال دو جمله ای است [۶].

۱.۲.۱ ولگشت کوانتومی روی خط

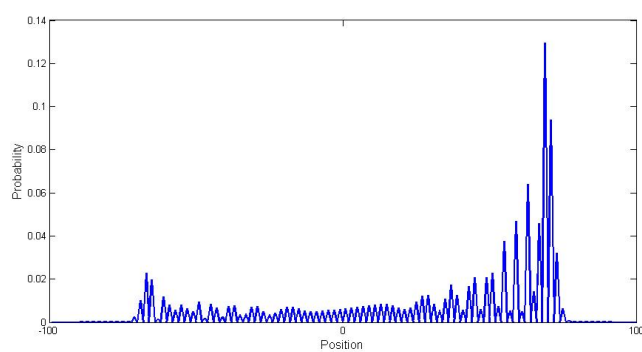
ولگشت کوانتومی روی خط ^۸ یکی از ساده ترین نوع ولگشت کوانتومی است. اهمیت مطالعه آن به دلایل زیر است:

۱. ولگشت کوانتومی روی خط می تواند برای ساخت مدل های پیچیده تری مثل ولگشت کوانتومی روی دایره [۳۱] مورد استفاده قرار بگیرد.

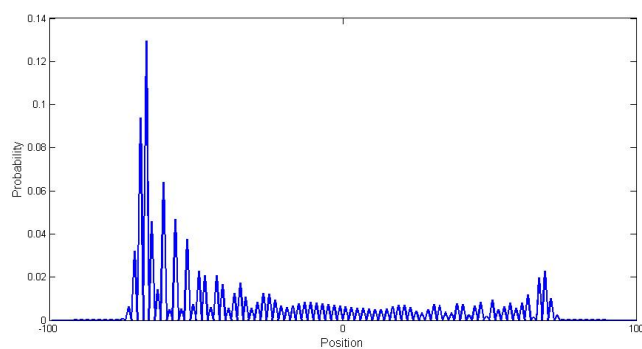
^۸Quantum walk on the line



شکل ۴.۱: واریانس ولگشت کوانتومی [۲۵]



شکل ۵.۱: توزیع احتمال ولگشت کوانتومی بعد از ۱۰۰ گام با حالت اولیه $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle |n=0\rangle$



شکل ۶.۱: توزیع احتمال ولگشت کوانتومی بعد از ۱۰۰ گام با حالت اولیه $|\Psi(0)\rangle = |1\rangle |n=0\rangle$

۲. مدل ساده و حل‌پذیر ولگشت کوانتومی روی خط می‌تواند در درک بهتر ساختار و خواص ولگشت‌های کوانتومی مفید باشد.

۳. از ولگشت کوانتومی روی خط می‌توان به‌عنوان آزمونی برای بررسی ماهیت کوانتومی در آزمایش‌های عملی محاسبات کوانتومی استفاده کرد.

۲.۲.۱ ساختار ولگشت کوانتومی روی خط

مهم‌ترین اجزای ولگشت کوانتومی روی خط شامل سکه، مکان ولگشت، عملگر تحول روی سکه و مکان ولگشت و مشاهده‌پذیرها هستند.

سکه و مکان ولگشت: مکان ولگشت، یک سیستم کوانتومی با فضای هیلبرت بی‌نهایت بعدی H_P است. که هر بردار در این فضا بر حالتی از ولگشت دلالت دارد که آن را با $|x\rangle$ نشان می‌دهند. سکه، یک سیستم کوانتومی با فضای هیلبرت دو بعدی H_c است. حالت سکه را با $|c\rangle$ نشان می‌دهیم. حالت سکه می‌تواند یکی از پایه‌های این فضا $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ و یا ترکیبی از آن‌ها باشد. حالت کلی ولگشت کوانتومی در فضای هیلبرت

$$H_t = H_c \otimes H_p \quad (16.1)$$

است.

حالت اولیه ولگشت کوانتومی به‌صورت

$$|\Psi\rangle_{initial} = |x\rangle_{initial} \otimes |c\rangle_{initial} \quad (17.1)$$

است.

عملگر تحول: تحول در ولگشت‌های کوانتومی شامل دو قسمت است که بسیار شبیه به ولگشت‌های کلاسیکی هستند. در ولگشت‌های کلاسیکی سکه را پرتاب می‌کنند و سپس براساس شیر یا خط آمدن سکه، که تصادفی اتفاق می‌افتد، ولگشت به سمت راست یا چپ حرکت می‌کند. اما در ولگشت‌های کوانتومی نقش انداختن سکه برعهده عملگر تحول در فضای سکه است. که نقش عملگر تحول در فضای سکه ایجاد ترکیب خطی از حالت‌های سکه است. که آن را با C نشان می‌دهند. عملگر C هر عملگر یکانی می‌تواند باشد، اما یکی از مشهورترین عملگرهای سکه، عملگر هادامارد^۹ است [۳۳]. که در این پایان نامه از عملگر هادامارد استفاده کرده‌ایم.

$$H = \frac{1}{\sqrt{4}} (|R\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L| + |L\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L|) \quad (18.1)$$

که نمایش ماتریسی آن به‌صورت زیر است.

^۹Hadamard operator

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (19.1)$$

اثر این عملگر روی پایه‌های فضای سکه تولید ترکیب خطی از آن‌ها با دامنه‌های یکسان است.

$$\begin{aligned} H |R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|R\rangle + |L\rangle) \\ H |L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|R\rangle - |L\rangle) \end{aligned} \quad (20.1)$$

عملگر دیگر، نقش حرکت به چپ و راست در ولگشت‌های کوانتومی را ایفا می‌کند، که عملگر انتقال^{۱۰} نام دارد که با S نشان می‌دهند. این عملگر با توجه به حالت سکه، ولگشت را یک گام به راست یا چپ می‌برد. این عملگر یک عملگر یکانی است.

$$S = \sum_x |x+1\rangle \langle x| \otimes |R\rangle \langle R| + |x-1\rangle \langle x| \otimes |L\rangle \langle L| \quad (21.1)$$

هر گام در ولگشت کوانتومی با عملگر زیر انجام می‌شود.

$$U = S \cdot (I_p \otimes H) \quad (22.1)$$

که برای هر گام باید این عملگر روی سیستم اثر کند. بنابراین حالت یک ولگشت کوانتومی را با حالت اولیه $|\Psi\rangle_{initial}$ بعد از t گام به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$|\Psi\rangle_t = U^t |\Psi\rangle_{initial} \quad (23.1)$$

به عنوان مثال با در نظر گرفتن حالت اولیه به صورت $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle |n=0\rangle$ برای سه گام حالت را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} |\Psi(1)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |-1\rangle + |0\rangle |1\rangle) \\ |\Psi(2)\rangle &= \frac{1}{2} (|0\rangle |0\rangle - |1\rangle |-2\rangle + |0\rangle |2\rangle + |1\rangle |0\rangle) \\ |\Psi(3)\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (|0\rangle |1\rangle - |0\rangle |-1\rangle + |0\rangle |3\rangle + |1\rangle |1\rangle + |0\rangle |1\rangle) \end{aligned} \quad (24.1)$$

برای گام‌های دیگر نیز به همین روش می‌توانیم کت‌های حالت را به دست آوریم. و با استفاده از همین کت‌های حالت می‌توان احتمال حضور ولگشت را در هر مکانی بدست آورد.

^{۱۰} Translation operator

مشاهده پذیرها: بر اثر اعمال مکرر U و ایجاد برهم‌نهی‌های مکرر، تداخل کوانتومی در سیستم ایجاد می‌شود. به‌منظور شناخت نتیجه تداخل‌ها باید اندازه‌گیری انجام دهیم. به‌عنوان مثال برای به‌دست آوردن اطلاعات در مورد سکه با مشاهده‌پذیرهایی مانند

$$M_c = \alpha |R\rangle \langle R| + \beta |L\rangle \langle L| \quad (25.1)$$

اندازه‌گیری روی سکه انجام می‌دهند. و برای به‌دست آوردن اطلاعات در مورد مکان از مشاهده‌پذیرهایی مانند

$$M_p = \sum_i a_i |i\rangle \langle i| \quad (26.1)$$

استفاده می‌کنند.

در واقع در ولگشت کوانتومی روی خط سیستم شامل مکان ولگشت و سکه است که عملگر سکه روی زیر فضای سکه عمل می‌کند و عملگر انتقال براساس حالت سکه، ولگشت را به چپ یا راست منتقل می‌کند.

جدول ۲۰.۱: احتمال وجود ولگشت در مکان n در زمان t . نمودار برای ذره‌ای رسم شده است که حرکت خود را از مبدا آغاز کرده است.

گام	۵	۴	۳	۲	۱	۰	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵
۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{4}$	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۰	۰	۰	۰	۰
۳	۰	۰	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۰	۰	۰	۰
۴	۰	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	۰	۰	۰
۵	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

با توجه به جدول ۲۰.۱ مشخص می‌شود که از گام سوم به بعد نتایج به‌دست آمده با نتایج ولگشت کلاسیکی متفاوت است. همان‌طور که می‌بینید ولگشت تمایل دارد تا به یکی از دو طرف متمایل شود. با استفاده از روابط بازگشتی و با استفاده از روش تبدیلات فوریه^{۱۱} می‌توانید احتمال حضور ولگشت را به‌دست آورید.

رابطه بازگشتی: عمومی‌ترین حالت ولگشت کوانتومی به‌صورت ترکیب خطی از پایه‌ها به‌صورت زیر است.

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n(t)|0\rangle + B_n(t)|1\rangle)|n\rangle \quad (27.1)$$

^{۱۱}Fourier Transform approach

با شرط

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |A_n(t)|^2 + |B_n(t)|^2 = 1 \quad (28.1)$$

باید عملگر U را روی آن اثر دهید.

(29.1)

$$|\Psi(t+1)\rangle = U|\Psi(t)\rangle = S(H \otimes I) \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n(t)|\circ\rangle + B_n(t)|\uparrow\rangle)|n\rangle$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} (A_n(t+1)|\circ\rangle + B_n(t+1)|\uparrow\rangle)|n\rangle$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} A_{n+1}(t) \frac{|\circ\rangle}{\sqrt{2}} |n+1\rangle + A_{n-1}(t) \frac{|\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} |n-1\rangle$$

$$+ \sum_{-\infty}^{\infty} B_{n+1}(t) \frac{|\circ\rangle}{\sqrt{2}} |n+1\rangle - B_{n-1}(t) \frac{|\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} |n-1\rangle$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(A_{n+1}(t) + B_{n+1}(t))}{\sqrt{2}} |n+1\rangle |\circ\rangle + \frac{(A_{n-1}(t) - B_{n-1}(t))}{\sqrt{2}} |n-1\rangle |\uparrow\rangle$$

که با مقایسه دو طرف رابطه بالا به رابطه زیر می‌رسید.

$$\begin{aligned} A_n(t+1) &= \frac{A_{n+1}(t) + B_{n+1}(t)}{\sqrt{2}} \\ B_n(t+1) &= \frac{A_{n-1}(t) - B_{n-1}(t)}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (30.1)$$

این رابطه یک رابطه بازگشتی است که در آن‌ها هر گامی بستگی به گام‌های قبلی و بعدی دارد. بنابراین احتمال یافتن ولگشت کوانتومی در یک موقعیت خاص بعد از t ، از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$P(t, n) = |A_n(t)|^2 + |B_n(t)|^2 \quad (31.1)$$

اگر تابع توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی رسم شود مشاهده می‌کنیم که چندین تفاوت بین نمودارهای ولگشت کوانتومی و ولگشت کلاسیکی وجود دارد:

۱. توابع توزیع احتمال ولگشت‌های کلاسیکی به صورت گاوسی است اما در ولگشت‌های کوانتومی پیچیده و نامتقارن است. که این عدم تقارن ارتباط مستقیم با حالت اولیه ولگشت کوانتومی دارد.

۲. احتمال یافتن ولگشت در مکان‌هایی نزدیک به مبدا در ولگشت کوانتومی کمتر از سایر نقاط است در حالی که در ولگشت کلاسیکی احتمال یافتن ولگشت در مبدا و اطراف آن بیش‌تر از سایر نقاط است.

۳.۲.۱ حل تحلیلی ولگشت کوانتومی روی خط

دو روش برای حل تحلیلی ولگشت‌های کوانتومی روی خط وجود دارد اولین روش بر پایه تبدیل فوریه است که به روش تبدیل فوریه معروف است و روش دوم روش شمارش مسیر نام دارد. که در این جا ما تبدیل فوریه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

استفاده از تبدیل فوریه گسسته برای حل تحلیلی ولگشت کوانتومی روی خط اولین بار توسط نایاک معرفی شد [۲۴].

اگر فرض کنیم حالت سیستم بعد از زمان t در مکان n به شکل زیر است.

$$|\psi(n, t)\rangle = \psi_R(n, t) |0\rangle + \psi_L(n, t) |1\rangle \quad (32.1)$$

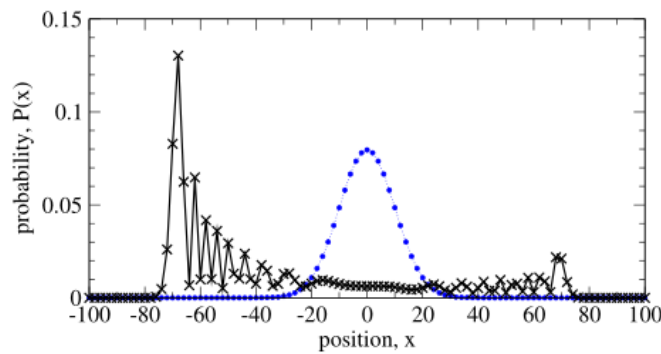
احتمال پیدا کردن ولگشت در مکان n به صورت زیر خواهد بود.

$$p(n, t) = |\langle n | \psi(n, t)\rangle|^2 = |\psi_R(n, t)|^2 + |\psi_L(n, t)|^2$$

اعمال عملگر تحول روی حالت $|\Psi\rangle_t$ را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$|\Psi\rangle_{t+1} = U |\Psi\rangle_t = S \cdot (I_p \otimes H) |\Psi\rangle_t \quad (33.1)$$

و نتیجه آن به صورت زیر است.



شکل ۷.۱: مقایسه توزیع احتمال کلاسیکی و کوانتومی [۲۵]

(۳۴.۱)

$$\begin{aligned}
 |\psi(t+1)\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\psi_R(t)|n\rangle H|0\rangle + \psi_L(t)|n\rangle H|1\rangle) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\psi_R(t)|n\rangle \left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \psi_L(t)|n\rangle \left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S}{\sqrt{2}} (\psi_R(t)|n\rangle|0\rangle + \psi_R(t)|n\rangle|1\rangle + \psi_L(t)|n\rangle|0\rangle - \psi_L(t)|n\rangle|1\rangle) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_R(t)|n+1\rangle|0\rangle + \psi_R(t)|n-1\rangle|1\rangle + \psi_L(t)|n+1\rangle|0\rangle \\
 &\quad - \psi_L(t)|n-1\rangle|1\rangle) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\psi_R(t)+\psi_L(t)}{\sqrt{2}} |n+1\rangle|0\rangle + \frac{\psi_R(t)-\psi_{n,1}(t)}{\sqrt{2}} |n-1\rangle|1\rangle \right)
 \end{aligned}$$

بنابراین دامنه احتمال حضور ولگشت در مکان n در گام $t+1$ به صورت زیر، به دامنه احتمال های مکان های قبل و بعد n بستگی دارد.

$$\Psi_R(n, t+1) = \frac{\Psi_R(n+1, t) + \Psi_L(n+1, t)}{\sqrt{2}} \tag{۳۵.۱}$$

$$\Psi_L(n, t+1) = \frac{\Psi_R(n-1, t) - \Psi_L(n-1, t)}{\sqrt{2}}$$

با استفاده از این روابط بازگشتی می توان احتمال حضور را به دست آورد، اما شکل تابع توزیع احتمال را نشان نمی دهد. می توان با استفاده از روابط تبدیل فوریه روابطی را برای تابع توزیع احتمال به دست آورد. برای این کار رابطه ۳۴.۱ را به صورت زیر بازنویسی می کنیم.

(۳۶.۱)

$$\begin{aligned} \Psi(n+1, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Psi_R(n+1, t) + \Psi_L(n+1, t) \\ \Psi_R(n-1, t) - \Psi_L(n-1, t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_R(n+1, t) \\ \Psi_L(n+1, t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_R(n-1, t) \\ \Psi_L(n-1, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi(n+1, t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Psi(n-1, t) \end{aligned}$$

یا

$$|\Psi\rangle_{t+1} = M_- \Psi(n+1, t) + M_+ \Psi(n-1, t) \quad (۳۷.۱)$$

که در آن M_+ و M_- به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} M_- &= |R\rangle \langle R|_H \\ M_+ &= |L\rangle \langle L|_H \end{aligned} \quad (۳۸.۱)$$

۴.۲.۱ تبدیل فوریه گسسته:

در این تبدیل تابع گسسته‌ی مانند $F(n)$ که $n \in \mathbb{Z}$ به تابع پیوسته متناوبی مانند $\tilde{F}(k)$ تبدیل می شود، فرض کنید $F: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ تابعی از اعداد صحیح به اعداد مختلط است در این صورت تبدیل گسسته آن $F: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ است [۳۴].

$$\tilde{F}(k) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F(n) e^{ink} \quad (۳۹.۱)$$

و عکس این تبدیل به صورت زیر خواهد بود.

$$F(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \tilde{F}(k) e^{-ink} \quad (۴۰.۱)$$

با استفاده از تبدیل فوریه گسسته داریم.

(۴۱.۱)

$$\tilde{\Psi}(t, k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t, n) e^{ink}$$

$$\tilde{\Psi}(t + 1, k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} [M_+ \Psi(t, n - 1) + M_- \Psi(t, n + 1)] e^{ink}$$

$$= M_+ e^{ik} \sum_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t, n - 1) e^{i(n-1)k} + M_- e^{-ik} \sum_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t, n + 1) e^{i(n+1)k}$$

$$= (M_+ e^{ik} + M_- e^{-ik}) \tilde{\Psi}(t, k) = M_K \tilde{\Psi}(t, k)$$

که در آن M_K به صورت زیر است:

$$M_K = M_+ e^{ik} + M_- e^{-ik} \quad (۴۲.۱)$$

بنابراین تحول سیستم در فضای n را می‌توان با اعمال عملگر M_k در فضای k نوشت. برای اعمال M_k روی سیستم بهتر است شکل قطری آن را داشته باشیم، برای قطری کردن ابتدا ویژه مقادیر را به دست می‌آوریم.

$$\begin{vmatrix} \frac{e^{-ik}}{\sqrt{\lambda}} - \lambda & \frac{e^{-ik}}{\sqrt{\lambda}} \\ \frac{e^{ik}}{\sqrt{\lambda}} & -\left(\frac{e^{ik}}{\sqrt{\lambda}} + \lambda\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (۴۳.۱)$$

و معادله مشخصه آن به صورت زیر است.

$$-\left(\frac{e^{-ik}}{\sqrt{\lambda}} - \lambda\right) \left(\frac{e^{ik}}{\sqrt{\lambda}} + \lambda\right) - \frac{1}{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} (e^{ik} - e^{-ik}) - \lambda^2\right) - \frac{1}{\lambda} = 0$$

(۴۴.۱)

$$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} (e^{ik} - e^{-ik}) - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} (2i \sin k) - 1 = 0$$

ویژه مقادیر آن برابر است [۲۴] با

$$\begin{aligned} \lambda_k^0 &= e^{-iw_k} \\ \lambda_k^1 &= e^{i(\pi+w_k)} \end{aligned} \quad (۴۵.۱)$$

که

$$\text{Sin}(w_k) = \frac{\text{Sin}(k)}{\sqrt{2}} \quad w_k \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad (۴۶.۱)$$

برای به دست آوردن ویژه حالات به صورت زیر عمل می کنند.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{-iw_k} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (۴۷.۱)$$

$$\Rightarrow (x + y) e^{-ik} = \sqrt{2} x e^{-iw_k}$$

$$\Rightarrow y = x (\sqrt{2} e^{-i(w_k-k)} - 1)$$

فرض می کنند که $x = 1$ پس $y = (\sqrt{2} e^{-i(w_k-k)} - 1)$ است. ویژه بردار مربوط به این ویژه مقدار به صورت زیر است.

$$|\Phi_0\rangle = \frac{1}{N_0} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} e^{-i(w_k-k)} - 1 \end{pmatrix} \quad (۴۸.۱)$$

که N_0 ضریب نرمالیزه است، که برابر است با

$$N_0 = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos^2 k) - 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}} \quad (۴۹.۱)$$

پس ویژه بردار متناظر با ویژه مقدار $\lambda_k^0 = e^{-iw_k}$ به صورت زیر است.

$$|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2[(1 + \text{Cos}^2 k) + \text{Cos} k \sqrt{1 + \text{Cos}^2 k}]}} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{2} e^{-iw_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (۵۰.۱)$$

ویژه بردار دوم را نیز با روشی تقریباً مشابه به دست می آورند.

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \left[(1 + \cos^2 k) - \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right]} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ -\sqrt{2} e^{iw_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (51.1)$$

M_k را برحسب ویژه بردارها و ویژه مقادیر بسط می دهند.

$$M_k = (\lambda_k^0) |\Phi_k^0\rangle \langle \Phi_k^0| + (\lambda_k^1) |\Phi_k^1\rangle \langle \Phi_k^1| \quad (52.1)$$

برای به دست آوردن حالت ولگشت کوانتومی بعد از t گام باید عملگر M_k^t را t بار اثر دهند.

$$\tilde{\Psi}(k, t) = M_k^t \tilde{\Psi}(k, 0) = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_R(k, t) \\ \tilde{\Psi}_L(k, t) \end{pmatrix} \quad (53.1)$$

که ماتریس M_k^t به صورت زیر است.

$$M_k^t = (\lambda_k^0)^t |\Phi_k^0\rangle \langle \Phi_k^0| + (\lambda_k^1)^t |\Phi_k^1\rangle \langle \Phi_k^1| \quad (54.1)$$

با فرض حالت اولیه $|\Psi\rangle_{initial} = |0\rangle \otimes |R\rangle$

$$\tilde{\Psi}_L(t, k) = \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \cos^2 k}} (e^{iw_k t} - (-1)^t e^{-iw_k t}) \quad (55.1)$$

$$\tilde{\Psi}_R(t, k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{iw_k t} + \frac{(-1)^t}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-iw_k t}$$

که دامنه احتمال در فضای k هستند. برای به دست آوردن دامنه در فضای مکان n از عکس تبدیل فوریه ۴۱.۱ استفاده می کنیم، بنابراین

$$\Psi_L(t, n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-ie^{ik}}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \cos^2 k}} (e^{-i(w_k t - kn)}) dk \quad (56.1)$$

$$\Psi_R(t, n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) (e^{-i(w_k t - kn)}) dk$$

احتمال یافتن ولگشت کوانتومی از رابطه زیر به دست می آید.

$$P(n, t) = |\Psi_L(n, t)|^2 + |\Psi_R(n, t)|^2 \quad (57.1)$$

۵.۲.۱ ولگشت کوانتومی روی خط با سکه تعمیم یافته

در مطالعه ولگشت کوانتومی روی خط می‌توان به‌جای استفاده از عملگر سکه هادامارد از عملگر سکه تعمیم یافته استفاده کرد. در این قسمت نشان می‌دهیم که در بررسی ولگشت‌های کوانتومی روی خط، ولگشت هادامارد نقش کلیدی را ایفا می‌کند. و بسیاری از خواص ولگشت‌های کوانتومی در حالت کلی از بررسی ولگشت‌های هادامارد به‌دست می‌آید. حالت اولیه به‌صورت زیر نشان داده می‌شود [۳۵].

$$|\Psi(x, \circ)\rangle = |x\rangle \otimes \left(\sqrt{\eta}|R\rangle + e^{i\alpha}\sqrt{1-\eta}|L\rangle \right) \quad (58.1)$$

عملگر سکه تعمیم یافته به شکل زیر است.

$$c_{\Psi} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & \sqrt{1-\rho}e^{i\theta} \\ \sqrt{1-\rho}e^{i\phi} & -\sqrt{\rho}e^{i(\phi+\theta)} \end{pmatrix} \quad (59.1)$$

$$\rho \in [0, 1] \text{ و } \phi, \theta \in [0, \pi]$$

با استفاده از تبدیل فوریه گسسته تحول حالت ولگشت کوانتومی را بعد از یک گام به‌صورت زیر می‌توان نوشت.

$$|\tilde{\Psi}(k, t+1)\rangle = \tilde{c}_k |\tilde{\Psi}(k, t)\rangle \quad (60.1)$$

که

$$\tilde{C}_k = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho}e^{ik} & \sqrt{1-\rho}e^{i(k+\theta)} \\ \sqrt{1-\rho}e^{i(-k+\theta)} & -\sqrt{\rho}e^{i(-k+\theta+\phi)} \end{pmatrix} \quad (61.1)$$

فرض می‌کنند ولگشت در ابتدا در مبدا مکان است. پس تبدیل فوریه آن به شکل زیر است.

$$|\tilde{\Psi}(k, \circ)\rangle = |k\rangle \otimes \begin{pmatrix} \sqrt{\eta} \\ e^{i\alpha}\sqrt{1-\eta} \end{pmatrix} \quad (62.1)$$

حالت ولگشت بعد از t گام به‌صورت زیر خواهد بود.

$$|\tilde{\Psi}(k, t)\rangle = \tilde{C}_k^t |\tilde{\Psi}(k, \circ)\rangle \quad (63.1)$$

با قطری کردن \tilde{C}_k ، ویژه مقادیر آن برابر است با:

$$\lambda_k^\pm = \pm e^{i\delta} e^{\pm iw_k} \quad (64.1)$$

و ویژه توابع آن برابر است با:

$$|\phi_k^\pm\rangle = \frac{1}{n_k^\pm} \begin{pmatrix} e^{ik} \\ e^{-i\theta} \frac{(\lambda_k^\pm - \sqrt{\rho} e^{ik})}{\sqrt{1-\rho}} \end{pmatrix} \quad (65.1)$$

که

$$\begin{aligned} \text{Sin}(w_k) &= \sqrt{\rho} \text{Sin}(k - \delta) \quad \delta = \frac{(\theta + \phi)}{2} \\ n_k^\pm &= \sqrt{\frac{2[1 \pm \sqrt{\rho} \cos(k - \delta \pm w_k)]}{1 - \rho}} \end{aligned} \quad (66.1)$$

حال \tilde{C}_k را برحسب ویژه مقادیر و ویژه توابع بسط می‌دهیم.

$$\tilde{C}_k^t = (\lambda_k^+)^t |\phi_k^+\rangle \langle \phi_k^+| + (\lambda_k^-)^t |\phi_k^-\rangle \langle \phi_k^-| \quad (67.1)$$

می‌توانیم رابطه $|\tilde{\Psi}(k, t)\rangle$ را به شکل زیر بنویسیم.

$$|\tilde{\Psi}(k, t)\rangle = (\lambda_k^+)^t |\phi_k^+\rangle \langle \phi_k^+| |\tilde{\Psi}(k, 0)\rangle + (\lambda_k^-)^t |\phi_k^-\rangle \langle \phi_k^-| |\tilde{\Psi}(k, 0)\rangle \quad (68.1)$$

با کمی محاسبه می‌توانیم به رابطه زیر برسیم.

$$(\lambda_k^\pm)^t \langle \phi_k^\pm | \tilde{\Psi}(k, 0) \rangle = \frac{(\lambda_k^\pm)^t}{n_k^\pm} e^{-ik} \left[\sqrt{\eta} - \sqrt{\frac{1-\eta}{1-\rho}} e^{i(\theta+\alpha)} (\sqrt{\rho} \pm e^{i(k-\delta)} e^{\pm iw_k}) \right] \quad (69.1)$$

حال عوامل فاز η ، α در حالت اولیه سکه و θ ، ρ در عملگر سکه را بررسی می‌کنیم. با توجه به رابطه بالا ρ ، η در تعیین حالت نهایی تاثیر مستقیم دارند. اما ما مقادیر مختلفی را برای (θ, α) می‌توانیم انتخاب کنیم، بطوری‌که $r = \theta + \alpha$ ، یعنی برای مقدار ثابت θ می‌توان حالت اولیه α را طوری در نظر بگیریم که فاز $r = \theta + \alpha$ ثابت باشد. بنابراین با انتخاب θ ثابت و انتخاب α مختلف می‌توان حالت‌های مختلف اولیه را مورد بررسی قرار داد.

می‌توانیم نتیجه بگیریم که در ولگشت‌های کوانتومی روی خط می‌توان عملگر سکه را با یک پارامتر حقیقی تعریف کرد، بخصوص ولگشت کوانتومی متعادل، تنها عملگر سکه قابل استفاده، عملگر سکه هادامارد است. و تحول تمام حالات را با تغییر حالت اولیه می‌توان به‌دست آورد.

فصل ۲

اثر نوفه در ولگشت‌های کوانتومی

۱.۲ ماتریس چگالی

حالت یک سیستم بسته^۱ با یک بردار، در فضای هیلبرت تعیین می‌شود، که این بردار توسط یک عملگر یکانی^۲ در طول زمان تحول می‌یابد، پس حالت یک سیستم کوانتومی $|\psi\rangle$ ، مطابق با معادله زیر تحول می‌یابد.

$$\psi(t) = U(t) |\psi(0)\rangle \quad (1.2)$$

در عمل یک سیستم کوانتومی به ندرت می‌تواند از محیط اطراف خود مستقل باشد. در بسیاری از موارد نیز ما نه به کلیت یک سیستم کوانتومی بلکه به اجزای آن علاقمندیم. به‌عنوان مثال در یک تله یونی که چندین اتم در یک حالت کوانتومی نگاه داشته است علاقمندیم که حالت یکی از یون‌ها را تعیین کنیم و روی آن اندازه‌گیری کنیم و تحول زمانی آن را بدست آوریم. پس هرگاه یک سیستم کوانتومی بسته با یک بردار توصیف شود، اجزای آن سیستم کوانتومی با ماتریس چگالی توصیف می‌شود. بنابراین در تمامی مواردی که دستگاه کوانتومی مورد نظر ما جزیی از یک دستگاه بزرگ‌تر است، حالت آن با یک ماتریس چگالی توصیف می‌شود. ماتریس چگالی در بردارنده‌ی تمام اطلاعاتی است که از یک سیستم کوانتومی به‌دست می‌آید. ماتریس چگالی یک ماتریس هرمیتی مثبت با رد واحد است. ماتریس چگالی مطابق با رابطه زیر بیان می‌شود.

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \quad (2.2)$$

که تحول آن به شکل زیر است.

^۱closed quantum system

^۲unitary operator

$$\rho(t) = U(t) \rho(\circ) U^\dagger(t) \quad (۳.۲)$$

این رابطه برای یک سیستم منزوی برقرار است، یعنی هنگامی که برهم‌کنش بین سیستم کوانتومی و محیط صفر باشد. برای این‌که این موضوع را به‌خوبی دریابیم فرض می‌کنیم که در لحظه صفر، تحول سیستم (s) با محیط (e) به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\rho_{se}(t) = U(t) \rho_{se}(\circ) U^\dagger(t) \quad (۴.۲)$$

اگر برهم‌کنش بین محیط و سیستم وجود نداشته باشد، هامیلتونی آن‌ها به شکل زیر است.

$$H_{se} = H_s \otimes I_e + I_s \otimes H_e \quad (۵.۲)$$

عملگر تحول سیستم و محیط به این صورت است.

$$U_{se}(t) = e^{-\frac{iH_{se}t}{\hbar}} = e^{-\frac{iH_s t}{\hbar}} \otimes e^{-\frac{iH_e t}{\hbar}} = U_s(t) \otimes U_e(t) \quad (۶.۲)$$

و اگر حالت اولیه محیط و سیستم حاصل ضربی باشد.

$$\rho_{se}(\circ) = \rho_s(\circ) \otimes \rho_e(\circ) \quad (۷.۲)$$

حالت ماتریس چگالی در زمان t به این شکل خواهد بود.

$$\rho_{se}(t) = (U_s(t) \rho_s(\circ) U_s^\dagger) \otimes (U_e(t) \rho_e(\circ) U_e^\dagger) \quad (۸.۲)$$

و برای به‌دست آوردن حالت سیستم، روی محیط ردگیری کرده و در نهایت داریم.

$$\rho_s(t) = U_s(t) \rho_s(\circ) U_s^\dagger \quad (۹.۲)$$

بنابراین رابطه ۳.۲ یک حالت خالص از تحول سیستم است و زمانی درست است که برهم‌کنش سیستم با محیط اطرافش صفر باشد. تحول یک سیستم کوانتومی را باید در حالت کلی بررسی کرد. کلی‌ترین حالت یک ذره با اسپین $1/2$ و یا هر ذره دیگری که فضای هیلبرت آن دو بعدی است، با یک ماتریس چگالی دو در دو داده می‌شود. این ماتریس را با ρ نشان می‌دهیم. از آن‌جا که ماتریس

واحد و ماتریس‌های پائولی یک پایه برای فضای ماتریس‌های دو در دو تشکیل می‌دهند. می‌توان این ماتریس را به شکل زیر نوشت.

$$\rho = \frac{1}{4} (r_0 \cdot I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} r_0 + z & x - iy \\ x + iy & r_0 - z \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

که در آن $\vec{\sigma}$ ماتریس‌های پائولی هستند.

ماتریس ۱۰.۲ یک ماتریس هرمیتی و دارای رد واحد است. شرط مثبت بودن این ماتریس این است مقادیر ویژه آن مثبت باشند، که اگر چنین شرطی را لحاظ کنیم معادل با عبارت زیر است.

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \leq 1 \quad (11.2)$$

که حالت $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$ متناظر با خالص بودن ماتریس چگالی است.

شرط ۱۱.۲ برای درایه‌های بردار \vec{r} در تصویر کره بلوخ توصیف زیبایی پیدا می‌کند. به این مفهوم که هر بردار \vec{r} که از مرکز کره به نقطه‌ای درون آن متصل شود، توصیف‌کننده یک حالت کوانتومی آمیخته است. اگر این نقطه روی سطح کره بلوخ باشد، توصیف‌کننده یک حالت خالص است.

۲.۲ عملگرهای کراوس

برهم‌کنش یک سیستم با محیط اطرافش باعث تغییر ناخواسته در حالت سیستم می‌شود، در واقع در این حالت سیستم کوانتومی یک سیستم باز خواهد بود یکی از روش‌های مهم برای توصیف تحول این سیستم‌ها استفاده از عملگرهای کراوس است [۳۷].

مجزا کردن سیستم از محیط اطرافش بطور کامل امکان‌پذیر نیست، و فضای هیلبرتی که تحول در آن اتفاق می‌افتد شامل سیستم و محیط است. فرض می‌کنند که حالت سیستم $\rho_A(\circ)$ است و محیط در حالت خالص $|e\rangle$ است، پس حالت کلی ماتریس چگالی سیستم و محیط به صورت زیر خواهد بود.

$$\rho_{AB}(t) = U(t) (\rho_A(\circ) \otimes |e\rangle \langle e|) U^\dagger(t) \quad (12.2)$$

برای به دست آوردن ماتریس چگالی سیستم باید روی محیط رد ^۳ گرفت.

$$\rho_A(t) = Tr_B(\rho_{AB}(t)) = Tr_B(U(t) (\rho_A(\circ) \otimes |e\rangle \langle e|) U^\dagger(t)) \quad (13.2)$$

فرض کردیم که سیستم قبل از تحول در حالت $|env_\circ\rangle \langle env_\circ| \otimes \rho(\circ)$ است، با ردگیری روی محیط $|e_n\rangle$ داریم.

^۳trace

$$\rho = \sum_{n=0}^m \langle en|U|env_0\rangle \rho_0 \langle env_0|U^\dagger|en\rangle = \sum_{n=0}^m E_n \rho E_n^\dagger \quad (14.2)$$

که

$$E_n = \langle en|U|env_0\rangle \quad n = 0, 1, \dots, m \quad (15.2)$$

به عملگرهای کراوس^۴ مشهور هستند و $|en\rangle$ پایه متعامد یکه برای محیط هستند. عملگرهای کراوس فقط روی سیستم اثر می‌کنند، و تعداد آن‌ها حداکثر برابر با بعد فضای هیلبرت محیط است. بنابراین برهم‌کنش با محیط ماتریس چگالی ρ را به ماتریس چگالی ρ' می‌نگارد.

$$\rho \rightarrow \rho' = \varepsilon(\rho) = \sum_{n=0}^m E_n \rho E_n^\dagger \quad (16.2)$$

که در آن شرط زیر برقرار است [۳۷].

$$\sum_n E_n^\dagger E_n = I \quad (17.2)$$

که به رابطه تمامیت^۵ معروف است.

این چنین نگاشتی دارای چهار خاصیت زیر است [۳۷].

۱. خطی است.

۲. ماتریس هرمیتی را به ماتریس هرمیتی می‌نگارد.

۳. ماتریس مثبت را به ماتریس مثبت می‌نگارد.

۴. رد ماتریس رو حفظ می‌کند.

در واقع این چنین نگاشتی یک نگاشت مثبت و رد نگه‌دار^۶ است. عملگرهای کراوس یکی از بهترین روش‌ها برای بررسی نوفه^۷ در سیستم‌های کوانتومی است. عملگرهای کراوس که یک ابرعملگر^۸ کوانتومی ایجاد می‌کنند یکتا نیستند، زیرا با توجه به رابطه $E_n = \langle en|U|env_0\rangle$ می‌دانیم که $\{|en\rangle\}$ ها تشکیل یک پایه برای فضای هیلبرت محیط می‌دهند که برای محاسبه رد روی این فضا به‌کار می‌رود و $|env_0\rangle$ هم حالت اولیه محیط است، از آن‌جا که پایه‌های متفاوتی را برای محاسبه رد می‌توان انتخاب کرد پس معلوم می‌شود که عملگرهای کراوس یکتا نیستند [۳۷].

^۴kraus operators

^۵completeness relation

^۶trace-preserving

^۷noise

^۸superoperator

۳.۲ کانال‌های کوانتومی

حال مثال‌هایی از این نگاهت که کانال کوانتومی هم نامیده می‌شود و در بخش قبل توضیح داده شده است را معرفی می‌کنیم.

۱.۳.۲ کانال بیت برگردان

در کانال بیت برگردان^۹ با احتمال $1 - p$ حالت یک کیوبیت تغییر نمی‌کند و با احتمال p عملگر σ_x روی آن اثر می‌کند و بیت را معکوس می‌کند. بنابراین اثر این کانال را با نگاهت زیر تعریف می‌کنند.

$$\varepsilon(\rho) = (1 - p)\rho + p(\sigma_x \rho \sigma_x) \quad (18.2)$$

عملگرهای کراوس آن به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} E_+ &= \sqrt{p} \sigma_x \\ E_- &= \sqrt{1 - p} I \end{aligned} \quad (19.2)$$

این عملگرهای کراوس باید در رابطه تمامیت صدق کنند. که بوضوح

$$E_+^\dagger E_+ + E_-^\dagger E_- = I \quad (20.2)$$

۲.۳.۲ کانال فاز برگردان

در کانال فاز برگردان^{۱۰} با احتمال $1 - p$ فاز یک کیوبیت تغییر نمی‌کند و با احتمال p عملگر σ_z روی آن اثر می‌کند و فاز را برمی‌گرداند. بنابراین اثر این کانال را با نگاهت زیر تعریف می‌کنند.

$$\varepsilon(\rho) = (1 - p)\rho + p(\sigma_z \rho \sigma_z) \quad (21.2)$$

عملگرهای کراوس آن به صورت زیر است.

^۹Bit flip channel

^{۱۰}Phase flip channel

$$\begin{aligned} E_+ &= \sqrt{p} \sigma_z \\ E_- &= \sqrt{1-p} I \end{aligned} \quad (22.2)$$

که این عملگرهای کراوس باید در رابطه‌ی ۲۰.۲ صدق کنند. اثر ابرعملگر مربوطه روی ρ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \rho \rightarrow \rho' &= p \begin{pmatrix} \rho_{00} & -\rho_{01} \\ -\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} + (1-p) \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{00} & (1-2p)\rho_{01} \\ (1-2p)\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23.2)$$

که با توجه به رابطه بالا برای $p = 1/2$ و اهمدوسی کامل اتفاق می‌افتد. به عبارتی تمام عناصر غیر قطری صفر می‌شوند.

۳.۳.۲ کانال واقطبش

در کانال واقطبش^{۱۱} با احتمال $1-p$ حالت اولیه تغییر نمی‌کند و با احتمال p تمام اطلاعات از بین می‌رود و به یک حالت کاملاً مخلوط تبدیل می‌شود. بنابراین اثر این کانال به صورت زیر است.

$$\varepsilon(\rho) = (1-p)\rho + p\frac{I}{4} \quad (24.2)$$

برای پیدا کردن عملگرهای کراوس به صورت زیر عمل می‌کنند.

$$\frac{\rho + \sigma_x \rho \sigma_x + \sigma_y \rho \sigma_y + \sigma_z \rho \sigma_z}{4} = \frac{I}{4} \quad (25.2)$$

حال با جای‌گذاری رابطه ۲۵.۲ در رابطه ۲۴.۲ دارند.

$$\varepsilon(\rho) = \frac{1-3p}{4}\rho + \frac{p}{4}\sigma_x \rho \sigma_x + \frac{p}{4}\sigma_y \rho \sigma_y + \frac{p}{4}\sigma_z \rho \sigma_z \quad (26.2)$$

بنابراین عملگرهای کراوس به صورت زیر هستند.

^{۱۱}Depolarizing channel

$$\begin{aligned}
 E_0 &= \frac{\sqrt{1-3p}}{2} I \\
 E_1 &= \frac{\sqrt{p}}{2} \sigma_x \\
 E_2 &= \frac{\sqrt{p}}{2} \sigma_y \\
 E_3 &= \frac{\sqrt{p}}{2} \sigma_z
 \end{aligned} \tag{۲۷.۲}$$

۴.۳.۲ کانال میرایی دامنه

یک اتم دو ترازه S^A را در نظر می‌گیریم که در کاواک S^B که در ابتدا خالی است قرار دهیم. اگر اتم در حالت برانگیخته $|1^A\rangle$ باشد، با احتمال p می‌تواند فوتونی را به داخل کاواک گسیل کند. بنابراین اتم به حالت پایه‌ی خود $|0^A\rangle$ انتقال می‌یابد. کاواک هم از حالت اولیه‌ی $|0^B\rangle = |i^B\rangle$ به حالت $|1^B\rangle$ گذار می‌کند. برای به‌دست آوردن عملگرهای کراوس کانال میرایی دامنه^{۱۲} از این واقعیت استفاده می‌کنیم که $|\langle \nu^A, \lambda^B | U^{AB} | \mu^A, \kappa^B \rangle|^2$ ، احتمال گذار $|\mu^A, \kappa^B\rangle \rightarrow |\nu^A, \lambda^B\rangle$ را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned}
 |\langle 0^A, 1^B | U^{AB} | 1^A, 0^B \rangle|^2 &= p \\
 |\langle 1^A, 0^B | U^{AB} | 1^A, 0^B \rangle|^2 &= 1 - p \\
 |\langle 0^A, 0^B | U^{AB} | 0^A, 0^B \rangle|^2 &= 1
 \end{aligned} \tag{۲۸.۲}$$

دیگر عناصر ماتریسی همگی صفر هستند، که این منجر به دو عملگر کراوس می‌شود.

$$\begin{aligned}
 E_0^A &= \langle 0^B | U^{AB} | 0^B \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \\
 E_1^A &= \langle 1^B | U^{AB} | 0^B \rangle = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{۲۹.۲}$$

که این عملگرهای کراوس باید در رابطه‌ی ۲۰.۲ صدق کنند. اثر ابرعملگر مربوطه روی حالت اتمی دلخواه ورودی ρ^A به‌صورت زیر است.

$$\varepsilon(\rho^A) = E_0^A \rho^A E_0^{A\dagger} + E_1^A \rho^A E_1^{A\dagger} = \begin{pmatrix} \rho_{00}^A + p\rho_{11}^A & \sqrt{1-p}\rho_{01}^A \\ \sqrt{1-p}\rho_{10}^A & (1-p)\rho_{11}^A \end{pmatrix} \tag{۳۰.۲}$$

^{۱۲}Amplitude damping

در این صورت احتمال پیدا کردن اتم در حالت پایه‌اش افزایش می‌یابد. و دیگر عناصر ماتریسی ρ^A همگی کاهش می‌یابند [۳۹].

۵.۳.۲ کانال میرایی فاز

حالت $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ را در نظر بگیرید. این حالت ترکیب خطی دو حالت پایه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ با یک فاز نسبی مشخص است. با ورود به این کانال، فاز نسبی این دو حالت بتدریج از بین می‌رود و حالت خروجی یک حالت مخلوط است. برای مدل‌سازی چنین کانالی فرض می‌کنیم یک عملگری مثل $R_z(\theta)$ که روی حالت‌های ورودی $|0\rangle$ و $|1\rangle$ اختلاف فاز θ ایجاد می‌کند، به‌طور نامنظم و با یک تابع توزیع گاوسی روی حالت اثر می‌کند. در نتیجه عمل کانال میرایی فاز^{۱۳} به‌شرح زیر است.

$$\varepsilon(\rho) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int R_z(\theta) |\psi\rangle \langle\psi| R_z^\dagger(\theta) e^{-\frac{\theta^2}{4\lambda}} d\theta \quad (31.2)$$

ماتریس چگالی حالت ورودی که یک ماتریس چگالی خالص است به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad |\psi\rangle \langle\psi| = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b} \\ b\bar{a} & b\bar{b} \end{pmatrix} \quad (32.2)$$

داریم

$$R_z(\theta) |\psi\rangle \langle\psi| R_z^\dagger(\theta) = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b}e^{i\theta} \\ b\bar{a}e^{-i\theta} & b\bar{b} \end{pmatrix} \quad (33.2)$$

با محاسبه انتگرال به‌دست می‌آوریم.

$$\varepsilon(\rho) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b}e^{i\theta} \\ b\bar{a}e^{-i\theta} & b\bar{b} \end{pmatrix} e^{-\frac{\theta^2}{4\lambda}} d\theta = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b}e^{-\lambda} \\ b\bar{a}e^{-\lambda} & b\bar{b} \end{pmatrix} \quad (34.2)$$

که نشان می‌دهد جملات غیرقطری ماتریس چگالی با پارامتر $e^{-\lambda}$ دچار میرایی می‌شود [۳۷]. و عملگرهای کراوس آن به‌صورت زیر هستند.

$$E_+ = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \sqrt{p} \end{pmatrix} \quad (35.2)$$

$$E_- = \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}$$

^{۱۳}Phase damping

۴.۲ کاربردهای واهمدوسی

کسب هر گونه اطلاعات از سیستم‌های کوانتومی مستلزم برقراری ارتباط فیزیکی بین دنیای کوانتومی و دنیای کلاسیک است، که می‌تواند موجب انتقال پدیده‌های کوانتومی به سطح ماکروسکوپی شود. اما از آن‌جا که این پدیده‌ها در سطح ماکروسکوپی هرگز مشاهده نشده‌اند. بنابراین باید نظریه‌ای را جستجو کرد که میرایی اثرات کوانتومی در گذار از کوانتوم به کلاسیک را توضیح دهد. نظریه واهمدوسی کوانتومی ادعا می‌کند که این امر را میسر می‌سازد.

اجسام ماکروسکوپی در دنیای کلاسیک و با قوانین شناخته شده آن زندگی می‌کنند. برقراری هر گونه ارتباط بین این دنیای کلاسیک و دنیای کوانتومی تنها به شرطی ممکن است که با شناخت کافی از قوانین مکانیک کوانتومی و با یک روش موجه، پل ارتباطی بین این دو دنیا گذارده شود. برخی از موضوعات اثبات شده در فیزیک کوانتوم، مانند برهم‌نهی کوانتومی، هرگز در دنیای کلاسیک مشاهده نشده‌اند بنابراین، با توجه به شناخت ما از دنیای کلاسیک، گذار از کوانتوم به کلاسیک تنها به شرط از بین رفتن اثرات کوانتومی مزبور ممکن است.

اثبات عملی این موضوع که چرا اثرات کوانتومی وارد دنیای کلاسیک نمی‌شود در سال‌های اولیه تولد نظریه کوانتوم به‌عنوان یک معما مطرح شد به‌طوری‌که هیچ دلیل عامه پسندی برای توجیه این پدیده وجود نداشت. در دهه ۱۹۸۰ این پدیده که محیط عامل اصلی میرایی اثرات کوانتومی در گذار از کوانتوم به کلاسیک است منجر به تولید نظریه واهمدوسی کوانتومی شد.

فرآیند اندازه‌گیری اصطلاح اندازه‌گیری در فیزیک به معنای کسب اطلاعات در مورد یک سیستم است و به عبارت دقیق‌تر روشی است برای تعیین یا خواندن مقدار یک خاصیت معین وابسته به یک سیستم منفرد. در فیزیک کلاسیک، اختلال حاصل از برهم‌کنش بین دستگاه اندازه‌گیر با سیستم مورد اندازه‌گیری را می‌توان به اندازه دلخواه کوچک نمود. به عبارت دیگر اصول فیزیک کلاسیک به ما اجازه می‌دهند که حالت جاری یک سیستم را با دقت دلخواه به دست آوریم، بدون آن‌که هیچ محدودیتی در دقت وجود داشته باشد. در واقع در فیزیک کلاسیک هرگونه اختلال یا ابهام در اندازه‌گیری به روش اندازه‌گیری نسبت داده می‌شود و همواره می‌توان روش جدیدی ارائه داد تا دقت بیشتر و بیشتر شود. اما در فیزیک کوانتوم وضعیت متفاوت است. به این دلیل است که در برهم‌کنش دو سیستم کوانتومی همواره سیستم مرکب به یک حالت درهم‌تنیده می‌رود.

به‌عنوان یک مثال از مشکل اندازه‌گیری، میکرو سیستم دو حالت‌های را در نظر بگیرید که با ویژه توابع ψ_+ و ψ_- مشخص شده است. علاوه بر این، یک دستگاه اندازه‌گیری بزرگ مقیاس (ماکرو سیستم) با ویژه توابع φ_+ و φ_- که بترتیب با ویژه توابع ψ_+ و ψ_- میکرو سیستم هستند، در اختیار داریم، از آن جایی‌که پیش از اندازه‌گیری از حالت میکرو سیستم اطلاعی نداریم، پس حالت میکرو سیستم یک برهم‌نهی از ویژه حالت‌های آن خواهد بود، بطوری‌که داریم

$$\psi_0 = \alpha\psi_+ + \beta\psi_- \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (۳۶.۲)$$

به دلیل خطی بودن معادله شرودینگر، حالت نهایی بعد از برهم‌کنش دو سیستم عبارت است

$$\psi_0 = \alpha\psi_+ + \beta\psi_- \rightarrow \psi_{out} = \alpha\psi_+\varphi_+ + \beta\psi_-\varphi_- \quad (۳۷.۲)$$

که در این جا فرض بر این است که دو سیستم در ابتدا دور از هم بوده و هیچ برهم کنشی با هم نداشته‌اند. واضح است که حالت ذکر شده در سمت راست معادله قبلی به هیچ وجه با یک حالت معین برای یک دستگاه اندازه‌گیری بزرگ مقیاس متناظر نیست. در واقع، دستگاه اندازه‌گیری‌کننده، نتیجه اندازه‌گیری را یک برهم‌نهی از هر دو حالت، مثلاً مثبت و منفی، نشان می‌دهد. چنین دستگاه اندازه‌گیری برهم‌نهی شده‌ای تاکنون مشاهده نشده است. که این همان مشکل اندازه‌گیری است. زیرا نظریه چیزی را پیش‌بینی می‌کند که در تضادی آشکار با مشاهده قرار دارد.

واهمدوسی در لغت به معنای از بین رفتن و عدم وجود همدوسی است. شاید اولین آشنایی ما با همدوسی، آزمایش دو شکافی یانگ بود. در این آزمایش، اثرات تداخلی به این علت به‌روزی پرده تشکیل می‌شود که امواجی که از دو شکاف به هر نقطه از پرده می‌رسند. یک رابطه فازی مشخص با هم دارند، بطوری‌که اختلاف فاز آن‌ها با تفاوت طول مسیر طی شده توسط دو موج رابطه مستقیم دارد.

در مکانیک کوانتومی، به‌عنوان یک اصل موضوعه، این رابطه فازی بین حالت‌های مجاز سیستم وجود دارد. به‌طوری‌که در نهایت منجر به تولید جملات برهم‌نهی می‌شود. که خاص مکانیک کوانتومی است و مشابه کلاسیک ندارد. واهمدوسی راه‌کاری است برای پاسخ به این سوال که چرا و چگونه این اثرات تداخلی وارد دنیای کلاسیک نمی‌شود. این موضوع در همان سال‌های ابتدایی تولد نظریه‌ی کوانتوم توسط فون نویمان و شرودینگر مطرح شد و هاینبرگ اولین کسی بود که بحث محیط و اثرات آن در میرایی جملات تداخلی را مطرح کرد.

محیط و واهمدوسی کوانتومی، اندازه‌گیری فرآیندی است که کوانتوم را به کلاسیک متصل می‌کند و از این طریق اثر تداخل کوانتومی را به‌دنیای کلاسیک منتقل می‌نماید. سوال اساسی این جا است که چرا این اثرات مشاهده نمی‌شود؟

در واقع نکته کلیدی که تا قبل از ۱۹۷۰ به آن پرداخته نشده بود وجود همه سیستم‌های فیزیکی در محیط است. نظریه واهمدوسی کوانتومی ادعا می‌کند که محیط عامل اساسی گذار از کوانتوم به کلاسیک است. در فیزیک کلاسیک محیط فقط می‌تواند با تولید آشفتگی دقت آزمایش را کم کند و همیشه می‌توان یک سیستم را ایده‌آل فرض کرد، به‌طوری‌که بتوان از وجود محیط چشم پوشید. اما در کوانتوم موضوع درهم‌تنیدگی چنین اجازه‌ایی را به ما نمی‌دهد و نظریه واهمدوسی بر همین مبنا شکل گرفته است. واهمدوسی در زمان بسیار کم‌تر از آن‌چه دستگاه‌های ما اندازه می‌گیرند، اتفاق می‌افتد و یک محیط بسیار کوچک هم می‌تواند سبب واهمدوسی یک سیستم شود. این پدیده عملاً بازگشت‌ناپذیر است، زیرا اگر هم بازگشت‌ناپذیری طبیعت را به حساب نیاوریم محیط با درجات آزادی بسیار خود این کار را غیر ممکن می‌کند.

مفهوم مشاهده و یا به تعبیری اندازه‌گیری در فیزیک کوانتوم با همبستگی و درهم‌تنیدگی حالت‌های دستگاه و سیستم گره خورده است. اما پیش فرض اساسی این است که می‌توان دو سیستم جداگانه کوانتومی یعنی دستگاه و سیستم مورد اندازه‌گیری را از هم تفکیک نمود، به‌طوری‌که این دو سیستم بتوانند درهم‌تنیده شوند. در واقع برای مشاهده یک سیستم باید بتوان خارج از آن ایستاد. در نظریه واهمدوسی

نیز به‌طور مشابه باید محیط و سیستم به‌عنوان دو موجود جداگانه در نظر گرفته شوند و در واقع محیط باقی‌مانده سیستم از دنیا است و درجات آزادی بسیار زیاد و غیر قابل کنترل دارد. تفکیک سیستم‌ها شرط اساسی واهمدوسی و ورود به‌دنیای کلاسیک است. اگر کل دنیا یک موجود بسته باشد هیچ درک کلاسیک نمی‌توان از آن داشت. یک ابزار مفید که واهمدوسی از آن استفاده بسیار می‌شود ماتریس چگالی است. برای گذار از کوانتوم به کلاسیک تنها کافی است عناصر غیرقطری صفر شوند، زیرا در این شرط هیچ حالتی به حالت‌های دیگر مربوط نمی‌شود و اصطلاحاً یک آمیخته آماری داریم.

فصل ۳

سیستم‌های کوانتومی در حضور نوفه

۱.۳ تفسیر اثر نوفه روی سیستم

تحول سیستم کوانتومی مادامی‌که با محیط برهم‌کنش داشته باشد، یکانی نیست. به بیان دیگر تحول سیستم ناشی از حالت محیط نیز هست. می‌توان این بیان را به این صورت در نظر گرفت که اگر حالت محیط برای مثال $|e_i\rangle$ باشد، تحول سیستم با عملگری به شکل A_i صورت می‌پذیرد. از طرفی محیط می‌تواند هر حالت $i = 1, \dots, r$ را داشته باشد. بنابراین بدون کم شدن از کلیت مسئله می‌توان حالت محیط را به شکل زیر نوشت.

$$|env.\rangle = \sqrt{p_1} |e_1\rangle + \sqrt{p_2} |e_2\rangle + \dots + \sqrt{p_r} |e_r\rangle \quad (1.3)$$

بنابراین احتمال این‌که محیط در حالت $|e_i\rangle$ قرار داشته باشد p_i است. با این رابطه می‌توان شکل کلی تحول سیستم و محیط را به شکل زیر نوشت.

$$U = |e_1\rangle \langle e_1| \otimes A_1 + |e_2\rangle \langle e_2| \otimes A_2 + \dots + |e_r\rangle \langle e_r| \otimes A_r \quad (2.3)$$

این شکل نوشتن U به این معنی است که اگر محیط در حالت $|e_i\rangle$ باشد، عملگر A_i روی سیستم اثر می‌کند. بنابراین عملگرهای کراوس را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$E_i = \langle e_i| U |env.\rangle = \langle e_i| \{ |e_i\rangle \langle e_i| A_i \} \sqrt{p_i} |e_i\rangle = \sqrt{p_i} A_i \quad (3.3)$$

بنابراین

$$\rho' = \varepsilon(\rho) = \sum_{i=1}^r E_i \rho E_i^\dagger = \sum_{i=1}^r p_i A_i \rho A_i^\dagger \quad (4.3)$$

این رابطه دقیقاً چیزی است که انتظار داریم، زیرا تحول ماتریس چگالی با عملگرهای A_i روی سیستم مشخص می‌شود. که هر کدام با احتمال p_i سیستم را متحول می‌کنند.

۲.۳ نوفه روی سکه‌ی ولگشت کوانتومی

در ولگشت کوانتومی سیستم شامل دو زیر فضای سکه و مکان است. اگر نوفه در سیستم اعمال نشده باشد، هر گام از تحول با یک بار اعمال $U = S \cdot (I_p \otimes U_c)$ به دست می‌آید. در حالت کلی با وجود محیط می‌توان فضای هیلبرت را به شکل زیر نوشت.

$$H_t = H_c \otimes H_p \otimes H_e \quad (5.3)$$

که H_e فضای هیلبرت محیط است. بنابراین می‌توان تحول یک گام از سیستم را به صورت زیر نشان داد.

$$\rho(t+1) = \sum_{n=0}^m E_n \rho E_n^\dagger \quad (6.3)$$

بعد از t گام حالت سیستم به صورت زیر خواهد بود.

$$\rho(t) = \sum_{n_t=0}^m \dots \sum_{n_2=0}^m \sum_{n_1=0}^m E_{n_t} \dots E_{n_2} E_{n_1} \rho(0) E_{n_1}^\dagger E_{n_2}^\dagger \dots E_{n_t}^\dagger \quad (7.3)$$

عملگرهای کراوس شامل همه اطلاعات تحول سیستم هستند. این عملگرها رد نگاه‌دار هستند، بنابراین

$$1 = Tr(\rho(t+1)) = Tr\left(\sum_n E_n \rho(t) E_n^\dagger\right) = Tr\left(\sum_n E_n^\dagger E_n \rho(t)\right) = Tr(\rho) \quad (8.3)$$

این رابطه برای هر ρ برقرار است.

رابطه ۷.۳ رابطه کلی است، که برای هر ρ برقرار است. $|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ را حالت اولیه ولگشت کوانتومی در نظر می‌گیریم که $|\psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |\varphi_0\rangle$ در ابتدا در مبدا مکان و حالت سکه $|\varphi_0\rangle$ است. می‌توان از رابطه ۷.۳ استفاده کرد، و تحول سیستم را به دست آورد. برای حل تحلیلی این تحول مجدداً از تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت.

$$|0\rangle = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} |k\rangle \quad (9.3)$$

ماتریس چگالی اولیه در پایه k به شکل زیر خواهد بود.

$$\rho_0 = \iint \frac{dk}{\sqrt{\pi}} \frac{dk'}{\sqrt{\pi}} |k\rangle \langle k'| \otimes |\varphi_0\rangle \langle \varphi_0| \quad (10.3)$$

از آنجایی که در این قسمت، منظور بررسی نوفه روی فضای سکه است. فرض می‌کنیم در هر گام U_k ، عملگری مثل A_n روی فضای سکه اثر کند، بنابراین $E_n = A_n U_k$. در نتیجه از رابطه ۶.۳ یک گام از تحول سیستم را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$\rho' = \iint \frac{dk}{\sqrt{\pi}} \frac{dk'}{\sqrt{\pi}} |k\rangle \langle k'| \otimes \sum_n U_k A_n \chi_{kk'} A_n^\dagger U_k^\dagger \quad (11.3)$$

که $|\varphi_0\rangle \langle \varphi_0| = \chi_{kk'}$ حالت اولیه سیستم است. از رابطه ۱۱.۳ می‌توان بعد از t گام حالت ولگشت به صورت زیر نوشت.

$$\rho_t = \iint \frac{dk}{\sqrt{\pi}} \frac{dk'}{\sqrt{\pi}} |k\rangle \langle k'| \otimes \sum_n U_k A_{n_t} \dots U_k A_{n_1} \chi_{kk'} A_{n_1}^\dagger U_{k'}^\dagger \dots A_{n_t}^\dagger U_{k'}^\dagger \quad (12.3)$$

با تعریف ابرعملگر زیر

$$\ell_{k,k'} \chi_{k,k'} = \sum_n U_k A_n \chi_{k,k'} A_n^\dagger U_{k'}^\dagger \quad (13.3)$$

می‌توان رابطه ۱۲.۳ را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\rho_t = \iint \frac{dk}{\sqrt{\pi}} \frac{dk'}{\sqrt{\pi}} |k\rangle \langle k'| \otimes \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \quad (14.3)$$

اگر $k = k'$ باشد ابرعملگر رد ماتریس را حفظ می‌کند.

$$\begin{aligned} Tr \{ \ell_{kk} \chi_{kk} \} &= Tr \left\{ \sum_n U_k E_n \chi_{kk} E_n^\dagger U_k^\dagger \right\} = Tr \left\{ \sum_n E_n^\dagger U_k^\dagger U_k E_n \chi_{kk} \right\} \\ &= Tr \left\{ \sum_n E_n^\dagger E_n \chi_{kk} \right\} = Tr \{ \chi_{kk} \} \end{aligned} \quad (15.3)$$

احتمال پیدا کردن مکان ولگشت در مکان x در زمان t از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 P(x, t) &= \text{Tr} \{ |x\rangle \langle x| \rho_t \} = \langle x | \rho_t | x \rangle \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \iint dk dk' \langle k | x \rangle \langle x | k' \rangle \text{Tr} \{ \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \} \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \iint dk dk' e^{-ix(k-k')} \text{Tr} \{ \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \}
 \end{aligned} \tag{۱۶.۳}$$

از رابطه ۱۶.۳ می‌توان استفاده کرد، و گشتاور^۱ m ام تابع توزیع احتمال را به شکل زیر تعریف کرد.

$$\langle x^m \rangle_t = \sum_x x^m P(x, t) \tag{۱۷.۳}$$

با جایگذاری رابطه ۱۶.۳ در رابطه ۱۷.۳ داریم.

$$\langle x^m \rangle_t = \frac{1}{4\pi^2} \sum_x x^m \iint dk dk' e^{-ix(k-k')} \text{Tr} \{ \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \} \tag{۱۸.۳}$$

با استفاده از رابطه زیر

$$\frac{1}{2\pi} \sum_x x^m e^{-ix(k-k')} = (-i)^m \delta^m(k-k') \tag{۱۹.۳}$$

می‌توان رابطه ۱۸.۳ را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\langle x^m \rangle_t = \frac{(-i)^m}{2\pi} \iint dk dk' \delta^m(k-k') \text{Tr} \{ \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \} \tag{۲۰.۳}$$

بنابراین گشتاور اول و دوم به صورت زیر خواهد بود.

$$\langle x \rangle_t = \frac{-i}{2\pi} \iint dk dk' \frac{d\delta(k-k')}{dk} \text{Tr} \{ \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \} \tag{۲۱.۳}$$

$$\langle x^2 \rangle_t = \frac{-1}{2\pi} \iint dk dk' \frac{d^2\delta(k-k')}{dk dk'} \text{Tr} \{ \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \}$$

از آن جایی که هدف ما به دست آوردن واریانس است، باید $\langle x \rangle$ و $\langle x^2 \rangle$ را به دست آوریم. برای به دست آوردن این مقادیر نیاز به روابط زیر داریم.

^۱moments

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} Tr \{ \ell_{kk'} \chi_{kk'} \} &= Tr \left\{ \left(\frac{d\ell_{kk'}}{dk} \right) \chi_{kk'} \right\} \\ &= \sum_n Tr \left\{ \left(\frac{dU_k}{dk} \right) A_n \chi_{kk'} A_n^\dagger U_{k'}^\dagger \right\} \end{aligned} \quad (22.3)$$

که در آن

$$\frac{dU_k}{dk} = -i(p_0 - p_1) U_k \equiv -iZU_k$$

$$\frac{dU_k^\dagger}{dk} = iU_k^\dagger (p_0 - p_1) \equiv iU_k^\dagger Z \quad (23.3)$$

$$Z = p_0 - p_1 = I - 2p_1$$

که

$$p_0 = |R\rangle \langle R|$$

$$p_1 = |L\rangle \langle L| \quad (24.3)$$

$$U_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{pmatrix}$$

با جایگذاری رابطه ۲۳.۳ در رابطه ۲۲.۳ خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} Tr \{ \ell_{kk'} \chi_{kk'} \} &= -i Tr \{ Z \ell_{kk'} \chi_{kk'} \} \\ &= -i Tr \{ (\ell_{kk'} \chi_{kk'}) Z \} = -\frac{d}{dk'} Tr \{ \ell_{kk'} \chi_{kk'} \} \end{aligned} \quad (25.3)$$

با استفاده از رابطه ۲۱.۳ و ۲۵.۳ و استفاده از حل انتگرال به روش جز به جز می‌توان، مقدار $\langle x \rangle$ و $\langle x^2 \rangle$ را به دست آورد.

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_t &= \frac{-i}{\sqrt{\pi}} \iint dk dk' \frac{d\delta(k-k')}{dk} \text{Tr} \{ \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \} \\ &= \frac{-i}{\sqrt{\pi}} \int dk' (\text{Tr} \{ \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \} \delta(k-k')) \end{aligned} \quad (26.3)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{i}{\sqrt{\pi}} \iint dk dk' \delta(k-k') \frac{d}{dk} (\text{Tr} \{ \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \}) \\ &= \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int dk \frac{d}{dk} (\text{Tr} \{ \ell_{kk}^t \chi_{kk} \}) \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dk} (\text{Tr} \{ \ell_{kk}^t \chi_{kk} \}) \\ &= \text{Tr} \left\{ \frac{d\ell_{kk}}{dk} \ell_{kk}^{t-1} \chi_{kk} \right\} + \text{Tr} \left\{ \ell_{kk} \frac{d\ell_{kk}}{dk} \ell_{kk}^{t-2} \chi_{kk} \right\} + \dots + \text{Tr} \left\{ \ell_{kk}^{t-1} \frac{d\ell_{kk}}{dk} \chi_{kk} \right\} \quad (27.3) \\ &= \text{Tr} \left\{ -iZ \ell_{kk}^t \chi_{kk} + \ell_{kk} (-iZ) \ell_{kk}^{t-1} \chi_{kk} + \dots + \ell_{kk}^{t-1} (-iZ) \ell_{kk} \chi_{kk} \right\} \end{aligned}$$

با استفاده از خاصیت ابرعملگرها که رد نگه‌دار هستند، می‌توان تمام عملگرهای ℓ_{kk} را قبل از Z حذف کرد. بنابراین

$$\frac{d}{dk} (\text{Tr} \{ \ell_{kk}^t \chi_{kk} \}) = (-i) \sum_{j=1}^t \text{Tr} \{ Z \ell_{kk}^j \chi_{kk} \} \quad (28.3)$$

با جایگذاری رابطه ۲۸.۳ در رابطه ۲۶.۳ خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= (-i) \left(\frac{i}{\sqrt{\pi}} \right) \int dk \sum_{j=1}^t \text{Tr} \{ Z \ell_{kk}^j \chi_{kk} \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^t \int dk \text{Tr} \{ Z \ell_{kk}^j \chi_{kk} \} \end{aligned} \quad (29.3)$$

به همان روشی که مقدار $\langle x \rangle$ را به دست آوردیم، می‌توان مقدار $\langle x^2 \rangle$ را نیز به دست آورد.

برای حل انتگرال زیر باید دو بار از روش انتگرال جز به جز استفاده کرد.

$$\begin{aligned}
 \langle x^2 \rangle_t &= \frac{-1}{2\pi} \iint dk dk' \frac{d^2 \delta(k-k')}{dk dk'} \text{Tr} \{ \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \} \\
 &= \frac{-1}{2\pi} \int dk' \left(\frac{d\delta(k-k')}{dk'} \text{Tr} \{ \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \iint dk dk' \frac{d\delta(k-k')}{dk'} \frac{d}{dk} (\text{Tr} \{ \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \iint dk dk' \frac{d\delta(k-k')}{dk'} \frac{d}{dk} (\text{Tr} \{ \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \}) \quad (30.3) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int dk \left((\delta(k-k')) \frac{d}{dk} (\text{Tr} \{ \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \}) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi} \iint dk dk' \delta(k-k') \frac{d}{dk'} \left(\frac{d}{dk} (\text{Tr} \{ \ell_{kk'}^t \chi_{kk'} \}) \right) \\
 &= \frac{-1}{2\pi} \int dk' \frac{d}{dk'} \left(\frac{d}{dk} (\text{Tr} \{ \ell_{kk}^t \chi_{kk} \}) \right)
 \end{aligned}$$

رابطه ۲۷.۳ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dk} (\text{Tr} \{ \ell_{kk}^t \chi_{kk} \}) \\
 &= \text{Tr} \left\{ \frac{d\ell_{kk}}{dk} \ell_{kk}^{t-1} \chi_{kk} \right\} + \text{Tr} \left\{ \ell_{kk} \frac{d\ell_{kk}}{dk} \ell_{kk}^{t-2} \chi_{kk} \right\} + \dots + \text{Tr} \left\{ \ell_{kk}^{t-1} \frac{d\ell_{kk}}{dk} \chi_{kk} \right\} \quad (31.3) \\
 &= \text{Tr} \left\{ -iZ \ell_{kk}^t \chi_{kk} + \ell_{kk} (-iZ) \ell_{kk}^{t-1} \chi_{kk} + \dots + \ell_{kk}^{t-1} (-iZ) \ell_{kk} \chi_{kk} \right\} \\
 &= (-i) \sum_{j=1}^t \text{Tr} \left\{ \ell_{kk}^{t-j} Z \ell_{kk}^j \chi_{kk} \right\}
 \end{aligned}$$

بنابراین داریم.

(۳۲.۳)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dk'} \left(\frac{d}{dk} (Tr \{ \ell_{kk}^t \chi_{kk} \}) \right) \\ &= Tr \left\{ \frac{d\ell_{kk}}{dk'} \ell_{kk}^{t-j-1} Z \ell_{kk}^j \chi_{kk} + \ell_{kk} \frac{d\ell_{kk}}{dk'} \ell_{kk}^{t-j-2} Z \ell_{kk}^j \chi_{kk} + \dots + \ell_{kk}^{t-j-1} \frac{d\ell_{kk}}{dk'} Z \ell_{kk}^j \chi_{kk} \right. \\ & \quad \left. + \ell_{kk}^{t-j} Z \frac{d\ell_{kk}}{dk'} \ell_{kk}^{j-1} \chi_{kk} + \ell_{kk}^{t-j} Z \ell_{kk} \frac{d\ell_{kk}}{dk'} \ell_{kk}^{j-2} \chi_{kk} + \dots + \ell_{kk}^{t-j} Z \ell_{kk}^{j-1} \frac{d\ell_{kk}}{dk'} \chi_{kk} \right\} \\ &= \ell_{kk} \left(\ell_{kk}^{t-j-1} Z \ell_{kk}^j \chi_{kk} \right) Z + \ell_{kk} \left(\ell_{kk}^{t-j-2} Z \ell_{kk}^j \chi_{kk} \right) Z + \dots + \ell_{kk} \left(Z \ell_{kk}^j \chi_{kk} \right) Z \\ & \quad + Z \ell_{kk} \ell_{kk}^{j-1} \chi_{kk} Z + Z \ell_{kk} \ell_{kk} \ell_{kk}^{j-2} \chi_{kk} Z + \dots + Z \ell_{kk}^{j-1} \ell_{kk} \chi_{kk} Z \\ &= Z \ell_{kk}^{t-j} Z \left(\ell_{kk}^j \chi_{kk} \right) + Z \ell_{kk}^{t-j-1} Z \left(\ell_{kk}^j \chi_{kk} \right) + \dots + Z \ell_{kk} Z \left(\ell_{kk}^j \chi_{kk} \right) \\ & \quad + Z \ell_{kk} \left(\left(\ell_{kk}^{j-1} \chi_{kk} \right) Z \right) + Z \ell_{kk}^2 \left(\left(\ell_{kk}^{j-2} \chi_{kk} \right) Z \right) + \dots + Z \ell_{kk}^{j-1} \left(\left(\ell_{kk} \chi_{kk} \right) Z \right) \end{aligned}$$

با جایگذاری رابطه ۳۲.۳ در رابطه ۳۰.۳ داریم.

$$\langle x^\nu \rangle_t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk \sum_{j=1}^t \sum_{j'=1}^j Tr \left\{ Z \ell_{kk}^{j-j'} \left(Z \ell_{kk}^{j'} \chi_{kk} \right) \right\} \quad (۳۲.۳)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk \sum_{j=1}^t \sum_{j'=1}^{j-1} Tr \left\{ Z \ell_{kk}^{j-j'} \left(\left(\ell_{kk}^{j'} \chi_{kk} \right) Z \right) \right\}$$

این روابط برای حالتی به دست آمده‌اند که نوفه فقط روی سکه باشد. برای مثال حالتی را در نظر می‌گیریم که نوفه به شکل اندازه‌گیری باشد. به این صورت که در هر گام با احتمال p اندازه‌گیری روی سکه انجام گیرد، به بیان دیگر با احتمال p سیستم بعد از اندازه‌گیری در یکی از حالت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ تصویر می‌شود. و با احتمال $1-p$ هیچ اثری روی سیستم ندارد. این نوع نوفه را می‌توان با عملگرهای زیر مدل‌سازی کرد. و براساس رابطه ۴.۳ داریم.

$$A_0 = \sqrt{P} |0\rangle \langle 0|$$

$$A_1 = \sqrt{P} |1\rangle \langle 1| \quad (34.2)$$

$$A_3 = \sqrt{1 - P} I$$

با در اختیار داشتن A ها و استفاده از رابطه ۱۳.۳ می‌توان ℓ_k را به دست آورد. از آن جایی که ℓ_k یک ابرعملگر است، و باید اثر آن را روی هر ماتریس چگالی بدانیم. ℓ_k را با استفاده از نگاشت افاین^۲ به صورت یک ماتریس چهار در چهار می‌نویسیم [۳۷]. برای این کار حالت کلی ماتریس چگالی را به شکل زیر می‌نویسیم.

$$\chi_{kk} = r_0 I + r_1 \sigma_1 + r_2 \sigma_2 + r_3 \sigma_3 \quad (35.2)$$

که σ_i همان ماتریس‌های پائولی هستند. $i = 1, 2, 3$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (36.2)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

با جایگذاری ماتریس‌های پائولی در رابطه ۳۵.۲ خواهیم داشت.

$$\chi_{kk} = \begin{pmatrix} r_0 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & r_0 - r_3 \end{pmatrix} \quad (37.2)$$

با جایگذاری رابطه ۳۴.۳ و ۳۷.۳ در رابطه زیر

^۲affine map

$$\begin{aligned} \ell_{kk}\chi_{kk} &= \sum_n U_k A_n \chi_{kk} A_n^\dagger U_k^\dagger \\ &= U_k A_\circ \chi_{kk} A_\circ^\dagger U_k^\dagger + U_k A_\sphericalangle \chi_{kk} A_\sphericalangle^\dagger U_k^\dagger + U_k A_\sphericaldot \chi_{kk} A_\sphericaldot^\dagger U_k^\dagger \end{aligned} \quad (38.3)$$

به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$\ell_{kk}\chi_{kk} = \begin{pmatrix} r_\circ + (1-p)r_\sphericalangle & r_\sphericaldot e^{-\sphericalangle ik} + i(1-p)r_\sphericaldot e^{-\sphericalangle ik} \\ r_\sphericaldot e^{\sphericalangle ik} - i(1-p)r_\sphericaldot e^{\sphericalangle ik} & r_\circ - (1-p)r_\sphericalangle \end{pmatrix} \quad (39.3)$$

این ماتریس در حقیقت اثر ℓ_{kk} روی کلی‌ترین حالت ممکن است، که با چهار پارامتر r_i $i = 0, 1, 2, 3$ مشخص می‌شود. با استفاده از خاصیت بدون تریس بودن ماتریس‌های پائولی می‌توانیم تعریف کنیم.

$$r'_i = \frac{1}{\sphericalangle} Tr(\sigma_i(\ell_{kk}\chi_{kk})) \quad (40.3)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} r'_\circ &= r_\circ \\ r'_\sphericalangle &= r_\sphericaldot \cos(\sphericalangle k) - (1-p)r_\sphericaldot \sin(\sphericalangle k) \\ r'_\sphericaldot &= -r_\sphericaldot \sin(\sphericalangle k) - (1-p)r_\sphericaldot \cos(\sphericalangle k) \\ r'_\sphericaldot &= (1-p)r_\sphericalangle \end{aligned} \quad (41.3)$$

بنابراین با توجه به رابطه 41.3 عملگر $\ell_{kk}\chi_{kk}$ برابر است با

$$\begin{pmatrix} r'_\circ \\ r'_\sphericalangle \\ r'_\sphericaldot \\ r'_\sphericaldot \end{pmatrix} = \ell_{kk}\chi_{kk} = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & -(1-p)\sin(\sphericalangle k) & \cos(\sphericalangle k) \\ \circ & \circ & -(1-p)\cos(\sphericalangle k) & \sin(\sphericalangle k) \\ \circ & 1-p & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_\circ \\ r_\sphericalangle \\ r_\sphericaldot \\ r_\sphericaldot \end{pmatrix} \quad (42.3)$$

همان‌طور که مشخص است $r_\circ = r'_\circ$ است، که نشان دهنده این واقعیت است که عملگر ℓ_{kk} یک عملگر رد نگاه‌دار است، زیرا

$$Tr(\ell_{kk}\chi_{kk}) = Tr(\chi_{kk}) = \sphericalangle r_\circ \quad (43.3)$$

با توجه به رابطه ۳۳.۳ مشخص است که عملگرهای Z از چپ و راست روی سیستم اثر می‌کنند، بنابراین باید شکل ابرعملگری Z_L و Z_R به مفهوم این‌که از چپ (L) و راست (R) اثر می‌کند را به دست آوریم.

برای به دست آوردن Z_L

$$\begin{pmatrix} r_0 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & r_0 - r_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 + r_3 & -r_1 + ir_2 \\ r_1 + ir_2 & -r_0 + r_3 \end{pmatrix} \quad (44.3)$$

و برای به دست آوردن Z_R

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & r_0 - r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ -r_1 - ir_2 & -r_0 + r_3 \end{pmatrix} \quad (45.3)$$

با استفاده از رابطه ۴۰.۳ و ۴۴.۳ داریم.

$$r'_0 = \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & r_0 - r_3 \end{pmatrix} \right] = r_3$$

$$r'_1 = \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & r_0 - r_3 \end{pmatrix} \right] = ir_2 \quad (46.3)$$

$$r'_2 = \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & r_0 - r_3 \end{pmatrix} \right] = -ir_1$$

$$r'_3 = \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & r_0 - r_3 \end{pmatrix} \right] = r_0$$

بنابراین

$$Z_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (47.3)$$

و با استفاده از ۴۵.۳ خواهیم داشت.

$$r'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} Tr \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & r_0 - r_3 \end{pmatrix} \right] = r_3$$

$$r'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} Tr \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & r_0 - r_3 \end{pmatrix} \right] = -ir_2$$
(۴۸.۳)

$$r'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} Tr \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & r_0 - r_3 \end{pmatrix} \right] = ir_1$$

$$r'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} Tr \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & r_0 - r_3 \end{pmatrix} \right] = r_0$$

بنابراین

$$Z_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (۴۹.۳)$$

بنابراین براساس روابط ۲۹.۳ و ۳۳.۳ تمام ابزار لازم برای به‌دست آوردن $\langle x \rangle$ و $\langle x^2 \rangle$ را در دست داریم. اما از آنجایی که اثر غیر بدیهی عملگر ℓ_{kk} فقط شامل زیر فضای سه در سه ماتریس M_k است

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & -(2p-1)\sin(2k) & -(2p-1)\cos(2k) \\ 0 & (2p-1)\cos(2k) & -(2p-1)\sin(2k) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (۵۰.۳)$$

و از آنجایی که ماتریس‌های پائولی بدون رد هستند. پس تنها سطر اول از ماتریس Z عبارتی غیر صفر می‌سازد. بنابراین رابطه ۲۹.۳ را به‌صورت زیر می‌توان نوشت.

$$\langle x \rangle_t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\sum_{j=1}^t M_k^j \right] \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad (۵۱.۳)$$

با استفاده از تصاعد حسابی زیر

$$\sum_{j=1}^t M_k^j = \frac{M_k (1 - M_k^t)}{(1 - M_k)} \quad (52.3)$$

$$= (M_k - M_k^{t+1}) (1 - M_k)^{-1}$$

می‌توان رابطه ۵۱.۳ را به شکل ساده‌تر نوشت.

$$\langle x \rangle_t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk \begin{pmatrix} \circ & \circ & 1 \end{pmatrix} [(M_k - M_k^{t+1}) (1 - M_k)^{-1}] \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad (53.3)$$

ما در این جا از M_k^t صرف نظر کرده‌ایم، چون تمام ویژه مقادیرهای M_k به صورت $1 > |\lambda| > \circ$ است، پس در حد $M_k^t \rightarrow \circ, t \rightarrow \infty$ است.

$$\langle x \rangle_t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk \begin{pmatrix} \circ & \circ & 1 \end{pmatrix} [(M_k) (1 - M_k)^{-1}] \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad (54.3)$$

برای به دست آوردن $\langle x \rangle$ باید $(1 - M_k)^{-1}$ را محاسبه کنیم.

$$(1 - M_k)^{-1} = \frac{1}{p(2-p)} \begin{pmatrix} 1 + \beta & \alpha & (1-p) + \cos(2k) \\ \alpha & 1 - \beta & -\sin(2k) \\ (1-p)(1 + \beta) & \alpha(1-p) & 1 + \beta \end{pmatrix} \quad (55.3)$$

که

$$\beta = (1-p) \cos(2k) \quad (56.3)$$

$$\alpha = -(1-p) \sin(2k)$$

فرض می‌کنیم حالت اولیه به صورت $|\varphi_0\rangle = |R\rangle$ است. با قرار دادن رابطه ۵۵.۳ در رابطه ۵۴.۳ داریم.

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_t &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-(1-p) \{ (1-p) + \cos(2k) \}}{p(p-2)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \frac{p^2 - 2p + 1}{p(p-2)} \end{aligned} \quad (57.3)$$

برای به دست آوردن $\langle x^2 \rangle$ از ۳۳.۳ استفاده می‌کنیم، بنابراین

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_t &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk \sum_{j=1}^t \sum_{j'=1}^j Tr \left\{ Z \ell_{kk}^{j-j'} \left(Z \ell_{kk}^{j'} \chi_{kk} \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk \sum_{j=1}^t \sum_{j'=1}^{j-1} Tr \left\{ Z \ell_{kk}^{j-j'} \left(\left(\ell_{kk}^{j'} \chi_{kk} \right) Z \right) \right\} \\ &= t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk \left(\begin{array}{cccc} \circ & \circ & \circ & 1 \end{array} \right) \left\{ \sum_{j=1}^t \sum_{j'=1}^{j-1} \ell_{kk}^{j-j'} (Z_L + Z_R) \ell_{kk}^{j'} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad (58.3) \\ &= t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk \left(\begin{array}{cccc} \circ & \circ & \circ & 1 \end{array} \right) \left\{ \sum_{j=1}^t \sum_{j'=1}^{j-1} \ell_{kk}^{j-j'} (Z_L + Z_R) \ell_{kk}^{j'} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

که

$$(Z_L + Z_R) = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & 2 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ 2 & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad (59.3)$$

ابریملگر ℓ_{kk} رد نگاه دار است، و مقدار r را تغییر نمی‌دهد.

$$\ell_{kk}^{j'} \begin{pmatrix} 1/2 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix} \quad (60.3)$$

هم‌چنین

$$(Z_L + Z_R) \ell_{kk}^{j'} \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(k, p, r') \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (61.3)$$

از آن‌جایی که

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ell_{kk}^{j'-j} \begin{pmatrix} f(k, p, r') \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (62.3)$$

دانستن مقدار صریح $f(k, p, r')$ نیاز نیست، بنابراین

$$\langle x^\nu \rangle_t = t + \sum_{j=1}^t \sum_{j'=1}^{j-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ell_{kk}^{j'-j} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (63.3)$$

$$= t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \sum_{j=1}^t \sum_{j'=1}^{j-1} M_k^{j-j'} \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

با استفاده از تصاعد حسابی داریم

$$\langle x^2 \rangle_t = t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk \left(\begin{matrix} \circ & \circ & \circ & 1 \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \\ 1 \end{pmatrix} \quad (64.3)$$

$$\left\{ \left[t - (1 - M_k)^{-1} M_k + (1 - M_k)^{-1} M_k^t \right] (1 - M_k)^{-1} M_k \right\}$$

که

$$\sum_{j=1}^t \sum_{j'=1}^{j-1} M_k^{j-j'} = M_k (1 - M_k)^{-1} \left\{ t - \frac{M_k (1 - M_k^t)}{(1 - M_k)} \right\} \quad (65.3)$$

$$= M_k (1 - M_k)^{-1} \left\{ t - M_k (1 - M_k)^{-1} + M_k^{t+1} (1 - M_k)^{-1} \right\}$$

ما در این جا از M_k^t صرف نظر کرده‌ایم چون تمام ویژه مقادیرهای M_k به صورت $1 > |\lambda| > 0$ است پس در حد $M_k^t \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ است. بنابراین با جایگذاری رابطه ۵۵.۳ و ۶۵.۳ در رابطه ۶۴.۳ داریم.

$$\langle x^2 \rangle = - \frac{(p^4 t + 2p^4 - 4p^3 t - 8p^3 + 6p^2 t + 17p^2 - 4pt - 18p + 7)}{p^2 (p^2 - 4p + 4)} \quad (66.3)$$

از رابطه ۵۷.۳ برای $\langle x \rangle$ و رابطه ۶۶.۳ برای $\langle x^2 \rangle$ می‌توان واریانس را محاسبه کرد.

$$(67.3)$$

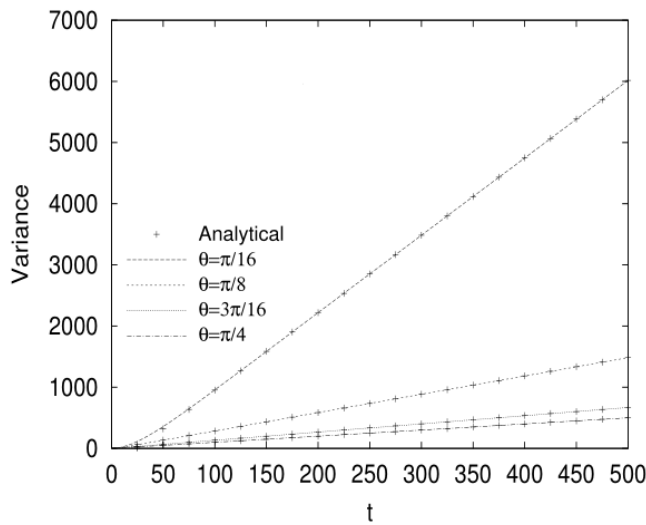
$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\sigma^2 = \frac{-1}{4} t \frac{(4p^4 - 16p^3 + 24p^2 - 16p)}{p^2 (p-2)^2} - \frac{1}{4} \frac{9p^4 - 36p^3 + 74p^2 - 76p + 29}{p^2 (p-2)^2}$$

که به وضوح نشان می‌دهد واریانس وابستگی خطی به t دارد و جمله t^2 از بین رفته است.

۳.۳ نوفه روی مکان وسکه ولگشت کوانتومی

در قسمت قبل با استفاده از روش ابرعملگری برای حالتی که نوفه روی فضای سکه باشد، توانستیم روابطی برای $\langle x \rangle$ و $\langle x^2 \rangle$ بیابیم، که ما را قادر می‌ساخت رابطه تحلیلی برای واریانس بیابیم. اما اگر نوفه فقط روی فضای سکه نباشد، چگونه می‌توان روابطی برای واریانس یافت؟



شکل ۱.۳: واریانس ولگشت کوانتومی در حضور نوفه روی فضای سکه [۶]

اگر فرض کنیم نوفه روی هر دو فضای مکان و سکه باشد، می‌توان عملگرهای کراوس را به شکل کلی در نظر بگیریم. که روی فضای سکه و مکان اثر می‌کنند، بنابراین E_n را به صورت کلی زیر می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned}
 E_n &= \sum_{x,x'} \sum_{i,j} a_{x,l,i,j}^n |x'\rangle \langle x| \otimes |i\rangle \langle j| \\
 &= \sum_x \sum_l \sum_{i,j} a_{x,l,i,j}^n |x+l\rangle \langle x| \otimes |i\rangle \langle j|
 \end{aligned} \tag{۶۸.۳}$$

با استفاده از تبدیل فوریه گسسته می‌توان E_n را به صورت زیر نوشت.

$$\tilde{E}_n = \sum_{x,l} \sum_{i,j} a_{x,l,i,j}^n \iint \frac{dkdk'}{2\pi^2} e^{-ilk} e^{-ix(k-k')} |k\rangle \langle k'| \otimes |i\rangle \langle j| \tag{۶۹.۳}$$

در این جا فرض کردیم که $a_{x,l,i,j}^n$ به x بستگی ندارد، به این معنی است که احتمال انتقال ولگشت از مکانی به مکان دیگر به طول l بستگی دارد نه مکانی که ولگشت در آن قرار دارد.

$$\tilde{E}_n = \sum_l \sum_{i,j} a_{l,i,j}^n \iint \frac{dkdk'}{2\pi} e^{-ilk} \delta(k-k') |k\rangle \langle k'| \otimes |i\rangle \langle j| \tag{۷۰.۳}$$

با استفاده از رابطه تعامد زیر

$$\sum_x e^{-ix(k-k')} = 2\pi \delta(k-k') \tag{۷۱.۳}$$

رابطه ۷۰.۳ به صورت زیر خواهد بود.

$$\tilde{E}_n = \int \frac{dk}{\sqrt{\pi}} |k\rangle \langle k| \otimes C_n(k) \quad (72.3)$$

که $C_n(k)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$C_n(k) = \sum_l \sum_{i,j} a_{l,i,j}^n e^{-ilk} |i\rangle \langle j| \quad (73.3)$$

باید C_n ها رابطه زیر را ارضا کنند.

$$\sum_n C_n^\dagger C_n = 1 \quad (74.3)$$

اگر ρ به صورت رابطه ۱۰.۳ در نظر بگیریم. اولین گام از تحول سیستم به شکل زیر است.

$$\begin{aligned} \rho' &= \iint \frac{dkdk'}{\sqrt{\pi}^2} |k\rangle \langle k'| \otimes \sum_n C_n(k) |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0| C_n^\dagger(k) \\ &= \iint \frac{dkdk'}{\sqrt{\pi}^2} |k\rangle \langle k'| \otimes \ell_{k,k'} |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0| \end{aligned} \quad (75.3)$$

اگر عملگر $\ell_{k,k'}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\ell_{k,k'} |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0| = \sum_n C_n(k) |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0| C_n^\dagger(k) \quad (76.3)$$

بعد از t گام $\rho(t)$ به صورت رابطه ۱۲.۳ خواهد بود. و احتمال پیدا کردن ولگشت به صورت رابطه ۱۶.۳ است.

گشتاور اول و دوم ولگشت کوانتومی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\langle x \rangle = \frac{-i}{\sqrt{\pi}} \iint dkdk' \frac{d\delta(k'-k)}{dk} Tr(\ell_{k,k'}^t |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|) \quad (77.3)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint dkdk' \frac{d^2\delta(k'-k)}{dkdk'} Tr(\ell_{k,k'}^t |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|)$$

این انتگرال‌ها را به روش جزبه جز می‌توان حل کرد، اما قبل از آن به یه سری روابط نیاز داریم.

$$\frac{d}{dk} Tr (\ell_{k,k'} |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|) = Tr \left(\sum_n \frac{dC_n(k)}{dk} |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0| C_n^\dagger(k') \right) \quad (78.3)$$

$$\frac{d}{dk'} Tr (\ell_{k,k'} |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|) = Tr \left(\sum_n C_n(k) |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0| \frac{dC_n^\dagger(k')}{dk'} \right)$$

که در آن

$$\frac{dC_n(k)}{dk} = -i \sum_l \sum_{i,j} l a_{l,i,j}^n e^{-ilk} |i\rangle \langle j| \quad (79.3)$$

$$\frac{dC_n^\dagger(k')}{dk'} = i \sum_l \sum_{i,j} l (a_{l,i,j}^n)^* e^{ilk'} |j\rangle \langle i|$$

و

$$\varsigma_{k,k'} |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0| = \sum_n \frac{dC_n(k)}{dk} |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0| C_n^\dagger(k') \quad (80.3)$$

با استفاده از روابط بالا می‌توان $\langle x \rangle$ را بدست آورد.

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{-i}{\sqrt{\pi}} \int dk' [\delta(k-k') Tr (\ell_{k,k'}^t |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|)] \\ &+ \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int dk \frac{d}{dk} Tr (\ell_{k,k'}^t |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|) \end{aligned} \quad (81.3)$$

که جمله اول صفر می‌شود.

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int dk \{ Tr (\varsigma_{k,k} \ell_{k,k}^{t-1} |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|) + Tr (\ell_{k,k} \varsigma_{k,k} \ell_{k,k}^{t-2} |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|) \dots \\ &+ Tr (\ell_{k,k}^{t-1} \varsigma_{k,k} |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|) \} \end{aligned} \quad (82.3)$$

چون $\ell_{k,k}$ ردنگهدار است، می‌توان همه عملگرهای $\ell_{k,k}$ قبل از ς_{kk} را حذف کرد.

$$\langle x \rangle_t = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int dk \sum_{m=1}^t Tr (\varsigma_{k,k} \ell_{k,k}^{m-1} |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|) \quad (83.3)$$

با کمی محاسبه و ساده سازی $\langle x^2 \rangle$ را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$\begin{aligned} \langle x^\nu \rangle_t = & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \sum_{m=1}^t \sum_{m'=1}^{m-1} Tr \left\{ \zeta_{kk}^\dagger \ell_{kk}^{m-m'-1} \left(\zeta_{kk} \ell_{kk}^{m'-1} \chi_{kk} \right) \dots \right. \\ & \left. + \zeta_{kk} \ell_{kk}^{m-m'-1} \left(\zeta_{kk}^\dagger \ell_{kk}^{m'-1} \chi_{kk} \right) \right\} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \sum_{m=1}^t Tr \left\{ \zeta_{kk} \left(\ell_{kk}^{m-1} \chi_{kk} \right) \right\} \end{aligned} \quad (۸۴.۳)$$

که در آن

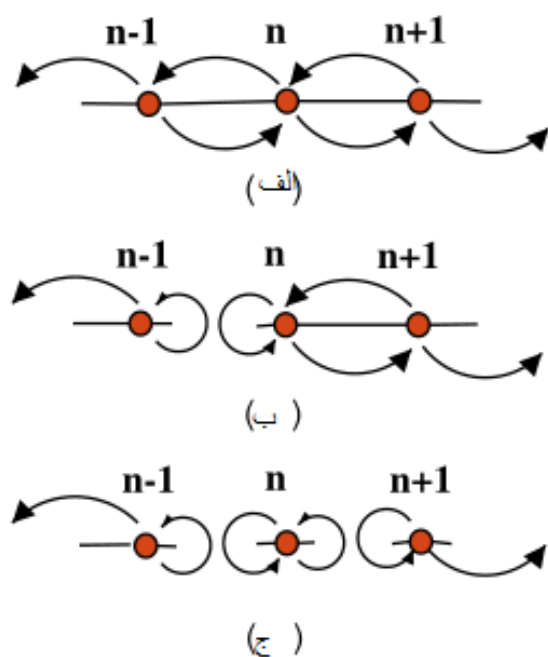
$$\zeta_{kk} = \left. \frac{d\zeta_{kk'}^\dagger}{dk} \right|_{k=k'} = \sum_n \frac{dC_n(k)}{dk} \chi_{kk} \frac{dC_n^\dagger(k')}{dk'} \Big|_{k=k'} \quad (۸۵.۳)$$

روابط به‌دست آمده از ۸۳.۳ و ۸۴.۳ برای $\langle x \rangle$ و $\langle x^2 \rangle$ برای نوفه کلی روی فضای سکه و مکان قابل کاربرد است. برای استفاده از این روابط کافی است ابرعملگرهای ℓ_{kk} و ζ_{kk} و ζ_{kk} را به‌دست آوریم. به‌عنوان مثال نوفه‌ای را در نظر می‌گیریم که روی هر دو فضای سکه و مکان وجود دارد. ولگشت کوانتومی یک بعدی را در نظر بگیرید که وجود نوفه باعث شود مسیر حرکت ولگشت کوانتومی با احتمال p از بین برود و با احتمال $1-p$ مسیر سالم بماند، در واقع حالت‌های مختلفی برای مسیر حرکت ممکن است اتفاق بی‌افتد، احتمال این‌که هر دو مسیر چپ و راست سالم بماند برابر با $(1-p)^2$ است، احتمال این‌که یکی از مسیرهای چپ یا راست از بین برود برابر است با $p(1-p)$ ، و اگر هر دو مسیر از بین برود احتمالش برابر با p^2 است. که در شکل ۲.۳ نشان داده شده است.

اگر مسیری از بین برود ولگشت در آن جهت نمی‌تواند حرکت کند، پس برای ثابت ماندن شار احتمال لازم است که حالت سکه در آن مکان تغییر کند. بنابراین سیستم با عملگرهای زیر انتقال می‌یابد.

$$\begin{aligned} S_1 = & \sum_x |x+1\rangle \langle x| \otimes |R\rangle \langle R| + e^{i\theta_1} |x-1\rangle \langle x| \otimes |L\rangle \langle L| \\ S_2 = & \sum_x |x+1\rangle \langle x| \otimes |R\rangle \langle R| + e^{i\theta_2} |x\rangle \langle x| \otimes |R\rangle \langle L| \\ S_3 = & \sum_x |x\rangle \langle x| \otimes |L\rangle \langle R| + e^{i\theta_3} |x-1\rangle \langle x| \otimes |L\rangle \langle L| \\ S_4 = & \sum_x |x\rangle \langle x| \otimes |R\rangle \langle L| + e^{i\theta_4} |x\rangle \langle x| \otimes |L\rangle \langle R| \end{aligned} \quad (۸۶.۳)$$

عملگر S_1 برای انتقال ولگشت بدون حضور نوفه است که در این صورت دو مسیر سالم باقی می‌ماند. عملگر S_2 برای حالتی است که مسیر چپ از بین رفته باشد. و عملگر S_3 برای حالتی است که مسیر



شکل ۳.۳: حالت‌های ممکن برای مکان n (الف) هیچ مسیری از بین نرفته باشد. (ب) مسیر سمت چپ از بین نرفته باشد. (ج) هر دو مسیر از بین نرفته باشد.

راست از بین نرفته باشد عملگر S_4 برای حالتی است که هر دو مسیر از بین نرفته باشد. در عملگرهای رابطه ۸۶.۳ فازهایی را تعریف کرده‌ایم که وجود این فازها برای تحول فیزیکی درست ضروری است. که در ادامه راجع به آن‌ها توضیح داده خواهد شد. می‌توان حالت محیط را به شکل زیر در نظر گرفت.

$$|env.\rangle = (\lambda - p) |e_1\rangle + \sqrt{p(\lambda - p)} (|e_2\rangle + |e_3\rangle) + p |e_4\rangle \quad (۸۷.۳)$$

بنابراین عملگر یکانی که روی محیط و سیستم عمل می‌کند، به صورت زیر تعریف شده است.

$$U = |e_1\rangle \langle e_1| \otimes S_1(I \otimes H) + |e_2\rangle \langle e_2| \otimes S_2(I \otimes H) \\ + |e_3\rangle \langle e_3| \otimes S_3(I \otimes H) + |e_4\rangle \langle e_4| \otimes S_4(I \otimes H) \quad (۸۸.۳)$$

پس عملگرهای کراوس به صورت زیر خواهد بود.

$$E_1 = (1-p) \sum_x |x+1\rangle \langle x| \otimes |R\rangle \langle R| H + e^{i\theta_1} |x-1\rangle \langle x| \otimes |L\rangle \langle L| H$$

$$E_2 = \sqrt{p(1-p)} \sum_x |x+1\rangle \langle x| \otimes |R\rangle \langle R| H + e^{i\theta_2} |x\rangle \langle x| \otimes |R\rangle \langle L| H$$

(۸۹.۳)

$$E_3 = \sqrt{p(1-p)} \sum_x |x\rangle \langle x| \otimes |L\rangle \langle R| H + e^{i\theta_3} |x-1\rangle \langle x| \otimes |L\rangle \langle L| H$$

$$E_4 = p \sum_x |x\rangle \langle x| \otimes |R\rangle \langle L| H + e^{i\theta_4} |x\rangle \langle x| \otimes |L\rangle \langle R| H$$

با استفاده از این E_i ها و روابط ۶۸.۳ و ۷۳.۳ می‌توان C_i ها را به شکل زیر نوشت [۷].

$$C_1 = \frac{1-p}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{i(k+\theta_1)} & -e^{i(k+\theta_1)} \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{1-p}{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} + e^{i\theta_2} & e^{-ik} - e^{i\theta_2} \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$$

(۹۰.۳)

$$C_3 = \sqrt{\frac{1-p}{2}} \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ 1 + e^{i(k+\theta_3)} & 1 - e^{i(k+\theta_3)} \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \frac{p}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{i\theta_4} & e^{i\theta_4} \end{pmatrix}$$

از آن جایی که این C_i ها باید در رابطه تمامیت صدق کند، روابط مشخصی باید بین θ_i ها برقرار باشد. با کمی محاسبه می‌توان نشان داد که $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ هر مقداری می‌تواند داشته باشد. فقط باید $\theta_2 - \theta_3 = \pi$ باشد. که برای ساده شدن فرض می‌کنیم که $\theta_2 = \pi$ و $\theta_1 = \theta_3 = \theta_4 = 0$ باشد. در [۷] با استفاده از این θ_i ها ابرعملگرهای l_{kk} و ζ_{kk} و s_{kk} محاسبه شده‌اند که

$$\ell_{kk}\chi_{kk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f+p^\dagger \\ 0 & 0 & -f+p^\dagger & e \\ 0 & 1-2p & -2g & -2h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$\zeta_{kk}\chi_{kk} = \begin{pmatrix} 0 & i(p-1) & ig & ih \\ 0 & 0 & f & -e \\ 0 & 0 & e & f \\ i(p-1) & 0 & -h & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad (91.3)$$

$$\zeta_{kk}\chi_{kk} = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e & -f \\ 0 & 0 & f & -e \\ 0 & 1-p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

و

$$\zeta_{kk}^\dagger \chi_{kk} = \zeta_{kk}^* \chi_{kk} \quad (92.3)$$

که

$$\begin{aligned} e(p, k) &= (p-1)^\dagger \sin(2k) \\ f(p, k) &= (p-1)^\dagger \cos(2k) \\ g(p, k) &= p(1-p) \sin(k) \\ h(p, k) &= p(1-p) \cos(k) \end{aligned} \quad (93.3)$$

با استفاده از این ابرعملگرها و روابط ۸۳.۳ و ۸۴.۳ می‌توان واریانس را محاسبه کرد. جزئیات این محاسبات در [۷] آورده شده است. که به‌وضوح نشان می‌دهد در آن مورد هم واریانس وابستگی خطی به t دارد.

۴.۳ نوفه روی مکان ولگشت کوانتومی

به‌عنوان آخرین مثال از کاربرد روابط ۸۳.۳ و ۸۴.۳، ولگشت کوانتومی در نظر بگیرید که بعد از هر گام با احتمال p به همسایه مجاور خود می‌رود. اهمیت این پدیده به این دلیل است که در آزمایش‌های عملی این امکان وجود دارد که ولگشت کوانتومی در اثر پدیده تونل زنی به همسایه مجاور خود برود. این پدیده بر اثر نوفه‌ای از محیط اتفاق می‌افتد، که در آن نوفه محیطی به شکل تلنگری ولگشت را جابجا می‌کند. در این جا برای سادگی فرض می‌کنیم که ولگشت کوانتومی فقط می‌تواند به همسایه‌های مجاور خود برود. فرض می‌کنیم که ذره با احتمال p توانایی تونل زنی به همسایه مجاور خود را دارد و با احتمال $1 - p$ قادر به تونل زنی نیست. از طرفی فرض می‌کنیم که احتمال تونل زنی به چپ و راست یکسان است. یک گام از حرکت ولگشت کوانتومی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \rho(t+1) = & (1-p) U_w \rho(t) U_w^\dagger \\ & + \frac{p}{2} \left(S_+ U_w \rho(t) U_w^\dagger S_+^\dagger + S_- U_w \rho(t) U_w^\dagger S_-^\dagger \right) \end{aligned} \quad (94.3)$$

که $S_\pm = \sum_x |x \pm 1\rangle \langle x| \otimes I_c$ و U_w عملگر تحول ولگشت کوانتومی بدون حضور نوفه است. به ازای $p = 0$ این رابطه برابر با تحول ولگشت کوانتومی بدون نوفه است. در نتیجه این تحول یکانی است اما به ازای $p \neq 0$ تحول سیستم به‌صورت یکانی نخواهد بود. با مقایسه رابطه ۴.۳ و ۹۴.۳ عملگرهای کراوس به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{1-p} U_w \\ E_2 &= \sqrt{\frac{p}{2}} S_+ U_w \\ E_3 &= \sqrt{\frac{p}{2}} S_- U_w \end{aligned} \quad (95.3)$$

با استفاده از رابطه ۷۳.۳ ماتریس‌های C_i به شکل زیر خواهد بود.

$$C_1 = \sqrt{\frac{1-p}{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{p}}{2} \begin{pmatrix} e^{-2ik} & e^{-2ik} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (96.3)$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{p}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{2ik} & -e^{2ik} \end{pmatrix}$$

که این C_i ها رابطه ۷۴.۳ را ارضا می‌کنند.
با استفاده از این C_i ها ابرعملگرهای ℓ_{kk} ، s_{kk} و ζ_{kk} به صورت زیر خواهند بود.

$$\ell_{kk}\chi_{kk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(2k) & \cos(2k) \\ 0 & 0 & -\cos(2k) & \sin(2k) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$s_{kk}\chi_{kk} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2k) & -\sin(2k) \\ 0 & 0 & \sin(2k) & \cos(2k) \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad (97.3)$$

$$\zeta_{kk}\chi_{kk} = \begin{pmatrix} 1+p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \sin(2k) & q \cos(2k) \\ 0 & 0 & -q \cos(2k) & q \sin(2k) \\ 0 & 1+p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

که $q = 1 - p$

و

$$s_{kk}^\dagger = s_{kk}^* \quad (98.3)$$

همان‌طور که در [۷] آورده شده است، به‌دست آوردن توان‌های ℓ_{kk} با استفاده از عملگر M_k و معکوس $(I - M)$ در این مورد امکان‌پذیر نیست. زیرا رابطه ۹۷.۳ دارای ویژه مقدار مضاعف یک است. بنابراین $\det(I - M) = 0$ خواهد بود، و $(I - M)$ معکوس‌پذیر نیست. در [۱۶] برای محاسبه توان‌های ℓ_{kk} از قطری‌سازی مستقیم ℓ_{kk} استفاده شده است، که ویژه مقادیر و ویژه حالات به شکل زیر به‌دست آمده‌اند.

ویژه مقادیر ابرعملگر ℓ_{kk} به‌صورت زیر هستند.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 &= e^{i(\theta+\pi)} \\ \lambda_4 &= e^{-i(\theta+\pi)} \end{aligned} \quad (99.3)$$

ویژه حالات آن به‌صورت زیر خواهد بود.

$$|e_1\rangle = \frac{1}{N_1} \begin{pmatrix} \sin(k) \\ \cos(k) \\ \sin(k) \\ \cos(k) \end{pmatrix}$$

$$|e_2\rangle = \frac{1}{N_2} \begin{pmatrix} -2(\cos^2(k) + 1) \\ \sin(2k) \\ 2\sin^2(k) \\ \sin(2k) \end{pmatrix} \quad (100.3)$$

$$|e_3\rangle = |e_4\rangle^* = \frac{1}{N_3} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2k) e^{2i\theta} \\ 2\sin^2(k) e^{2i\theta} \\ -\sin(2k) e^{2i\theta} \end{pmatrix}$$

که

$$\cos(\theta) = \cos^2(k) \quad (101.3)$$

و N_i ها ضرایب بهنجارش هستند.

با استفاده از ویژه حالات و ویژه مقادیر بالا، هر توانی از ℓ_{kk} را می‌توان به دست آورد. با استفاده از ۸۳.۳ و ۸۴.۳ و ویژه حالات و ویژه مقادیر ℓ_{kk} می‌توان، $\langle x \rangle$ و $\langle x^2 \rangle$ را محاسبه کرد. این کمیت در [۱۶] به دست آمده‌اند که در نهایت به شکل زیر ساده سازی می‌شوند.

$$\langle x \rangle_t = \left[(2 - \sqrt{2})t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right] r_1 + \left[(2 - \sqrt{2})t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] r_3 \quad (10.2.3)$$

که r_1 و r_3 مولفه‌های r در نمایش بلاخ حالت اولیه هستند و در این رابطه p وجود ندارد، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که وجود نوفه روی مکان ولگشت کوانتومی به شکل تونل زنی به اولین همسایه، تاثیری در مقدار $\langle x \rangle$ ندارد. از طرفی محاسبه $\langle x^2 \rangle$ نشان می‌دهد که

$$\langle x^2 \rangle = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) t^2 + tp + \frac{3\sqrt{2}}{8} \quad (10.3.3)$$

این رابطه نیز نشان می‌دهد که اولاً: $\langle x^2 \rangle$ به حالت اولیه بستگی ندارد. و دوماً: جمله شامل t^2 در این نوع نوفه حضور دارد. و جمله شامل t^2 متأثر از نوفه p نیست. این نتیجه بسیار حائز اهمیت است، زیرا نشان دهنده این است که وجود نوفه به شکل تونل زنی به همسایه نزدیک نه تنها وابستگی واریانس به t^2 را حفظ می‌کند، بلکه اندکی (به شکل جمله خطی t) باعث افزایش آن می‌شود. حفظ شدن جمله شامل t^2 به این مفهوم است که ویژگی کوانتومی سیستم در حضور نوفه بدون تغییر مانده است. در حالی که نشان دادیم وجود نوفه چه روی فضای سکه و چه روی فضای سکه-مکان باعث از بین رفتن وابستگی t^2 می‌شود و واریانس سیستم، کلاسیکی خواهد شد.

کوانتومی ماندن واریانس در حضور نوفه به شکل تونل زنی به نزدیک‌ترین همسایه این سوال را ایجاد خواهد کرد، که اگر ولگشت توانایی تونل زنی به همسایه‌های دورتر را داشته باشد، آیا باز هم سیستم، کوانتومی خواهد ماند یا خیر؟ در فصل بعد به عنوان مسئله‌ای جدید به این سوال پاسخ خواهیم داد.

فصل ۴

تاثیر واهمدوسی سکه بر ضریب پخش ولگشت‌های کوانتومی یک بعدی

در فصل پیش دیدیم که وجود نوفه می‌تواند واریانس ولگشت کوانتومی را تحت تاثیر قرار دهد. در حقیقت واریانس برای ولگشت کلاسیکی متناسب با t و برای ولگشت کوانتومی متناسب با t^2 است. همین وابستگی توان دو در ولگشت کوانتومی است، که نوید الگوریتم‌های کوانتومی را می‌دهد، که به صورت توانی از هم‌تاهای کلاسیک خود سریع‌تر باشند. یک کمیت مهم که براساس واریانس تعریف می‌شود و نشان دهنده سرعت انتشار ولگشت است، ضریب پخش D نام دارد. و به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$D = \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \sigma^2}{\partial t} \quad (1.4)$$

این کمیت در ولگشت‌های کلاسیکی $1/2$ است، در حالی‌که در ولگشت‌های کوانتومی در حضور نوفه با توجه به قدرت نوفه p می‌تواند از مقدار کلاسیکی بزرگ‌تر باشد. از آنجایی که وجود نوفه (هرچند ضعیف) در فضای سکه باعث حذف ویژگی‌های کوانتومی می‌شود، انتظار داریم D با گذشت زمان به $1/2$ میل کند. از طرفی فاصله این کمیت تا $1/2$ می‌تواند، مقدار کوانتومی بودن سیستم را مشخص کند. در این فصل تاثیر سه نوع مشهور از نوفه را بررسی کرده و مشخص می‌کنیم در چه نرخی از نوفه سیستم، به سیستم کلاسیکی نزدیک می‌شود و تاثیر نوفه کدام نوع بیش‌تر است. در ادامه با بررسی نوفه به شکل تونل زنی نامحدود به این سوال پاسخ خواهیم داد که آیا تونل زنی نامحدود سیستم را، کلاسیکی خواهد کرد یا خیر؟

۱.۰.۴ اندازه‌گیری بعد از هر گام

اگر در هر گام با احتمال p اندازه‌گیری روی سکه انجام گیرد، می‌توان عملگرهای زیر را برای این نوع نوفه در نظر گرفت.

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \sqrt{P} |R\rangle \langle R| \\
 A_1 &= \sqrt{P} |L\rangle \langle L| \\
 A_2 &= \sqrt{1-P} I
 \end{aligned} \tag{۲.۴}$$

در فصل سوم به صورت تحلیلی برای این کانال مقادیر ℓ_{kk} و M_k را به دست آوردیم. در این جا ما فقط نتایج آخر را بیان می‌کنیم.

$$\ell_{kk} \chi_{kk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-p) \sin(2k) & \cos(2k) \\ 0 & 0 & -(1-p) \cos(2k) & \sin(2k) \\ 0 & 1-p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \tag{۳.۴}$$

و

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & -(2p-1) \sin(2k) & -(2p-1) \cos(2k) \\ 0 & (2p-1) \cos(2k) & -(2p-1) \sin(2k) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{۴.۴}$$

و

$$(\mathbb{1} - M_k)^{-1} = \frac{1}{p(2-p)} \begin{pmatrix} 1+a & -b & (1-p) + \cos(2k) \\ -b & 1-a & -\sin(2k) \\ (1-p)(1+a) & -(1-p)b & 1+a \end{pmatrix} \tag{۵.۴}$$

که

$$\begin{aligned}
 a &= (1-p) \cos(2k) \\
 b &= (1-p) \sin(2k)
 \end{aligned} \tag{۶.۴}$$

مقدار $\langle x \rangle$ و $\langle x^2 \rangle$ برابر است با

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} \frac{p^2 - 2p + 1}{p(p-2)} \tag{۷.۴}$$

و

$$\langle x^2 \rangle = - \frac{(p^4 t + 2p^2 - 4p^2 t - 8p^2)}{p^2(p^2 - 4p + 4)} - \frac{(+6p^2 t + 17p^2 - 4pt - 18p + 7)}{p^2(p^2 - 4p + 4)} \quad (8.4)$$

بنابراین با استفاده از روابط ۱.۴ و ۸.۴ خواهیم داشت.

$$D = - \frac{1}{2} \frac{p^4 - 4p^2 + 6p^2 - 4p}{p^2(p^2 - 4p + 4)} \quad (9.4)$$

۲.۰.۴ کانال بیت-برگردان

اگر فرض کنیم وجود نوفه در فضای سکه باعث شود حالت سکه در هر گام با احتمال p معکوس شود، این نوع نوفه را با عملگرهای زیر مدل‌سازی می‌کنیم و آن را به نام کانال بیت-برگردان می‌شناسیم.

$$\begin{aligned} A_0 &= \sqrt{P}(|R\rangle \langle L| + |L\rangle \langle R|) \\ A_1 &= \sqrt{1-P}I \end{aligned} \quad (10.4)$$

ابری عملگر برای این کانال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\ell_{kk} \chi_{kk} = U_k A_0 \chi_{kk} A_0^\dagger U_k^\dagger + U_k A_1 \chi_{kk} A_1^\dagger U_k^\dagger \quad (11.4)$$

و

$$\chi_{kk} = \begin{pmatrix} r_0 + r_1 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & r_0 - r_1 \end{pmatrix} \quad (12.4)$$

رابطه ۱۰.۴ و ۱۲.۴ را در رابطه ۱۱.۴ جایگذاری می‌کنیم.

$$\ell_{kk} \chi_{kk} = \begin{pmatrix} r_0 + r_1 & -e^{-2ik} (ir_2(2p-1) + r_3(2p-1)) \\ e^{2ik} (ir_2(2p-1) - r_3(2p-1)) & r_0 - r_1 \end{pmatrix} \quad (13.4)$$

با توجه به رابطه زیر

$$r'_i = \frac{1}{\mathcal{V}} \text{Tr}(\sigma_i(\ell_{kk} \chi_{kk})) \quad (14.4)$$

داریم

$$\begin{aligned}
 r'_o &= r_o \\
 r'_\gamma &= -r_\gamma (\gamma p - 1) \cos(\gamma k) - (\gamma p - 1) r_\gamma \sin(\gamma k) \\
 r'_\psi &= -r_\psi (\gamma p - 1) \sin(\gamma k) + (\gamma p - 1) r_\psi \cos(\gamma k) \\
 r'_\varphi &= r_\varphi
 \end{aligned} \tag{۱۵.۴}$$

بنابراین ابرعملگر ℓ_{kk} به صورت زیر خواهد بود.

$$\ell_{kk} \hat{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\gamma p - 1) \sin \gamma k & -(\gamma p - 1) \cos \gamma k \\ 0 & 0 & (\gamma p - 1) \cos \gamma k & -(\gamma p - 1) \sin \gamma k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{۱۶.۴}$$

چون عملگر ℓ_{kk} یک عملگر رد نگه‌دار است. پس اثر غیر بدیهی آن را بوسیله یک ماتریس سه سه در سه نشان می‌دهیم.

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & -(\gamma p - 1) \sin(\gamma k) & -(\gamma p - 1) \cos(\gamma k) \\ 0 & (\gamma p - 1) \cos(\gamma k) & -(\gamma p - 1) \sin(\gamma k) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{۱۷.۴}$$

برای به دست آوردن مقدار $\langle x \rangle$ نیاز داریم که مقدار $(1 - M_k)^{-1}$ به دست آوریم.

$$(1 - M_k)^{-1} = \frac{1}{\gamma p (\gamma p - 1)} \begin{pmatrix} B - 1 & A & B - (\gamma p - 1)^2 \\ A & -B - 1 & A \\ B - 1 & A & B - 1 \end{pmatrix} \tag{۱۸.۴}$$

که

$$\begin{aligned}
 A &= (\gamma p - 1) \sin(\gamma k) \\
 B &= (\gamma p - 1) \cos(\gamma k)
 \end{aligned} \tag{۱۹.۴}$$

در رابطه ۵۳.۳، M_k و $(1 - M_k)^{-1}$ را جایگذاری می‌کنیم.

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk \frac{1}{\sqrt{p(p-1)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -(\sqrt{p-1})^2 + B & A & -(\sqrt{p-1})^2 + B \\ A & -(\sqrt{p-1})^2 - B & A \\ B-1 & A & -(\sqrt{p-1})^2 + B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (20.4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk \frac{1}{\lambda} \frac{(\sqrt{p-1})(-\sqrt{p+1} + \cos(\sqrt{2}k))}{p(p-1)}$$

$$= \frac{-1}{\lambda} \frac{\sqrt{p^2 - 4p + 1}}{p(p-1)}$$

بنابراین $\langle x \rangle$ برابر است با

$$\langle x \rangle = \frac{-1}{\lambda} \frac{\sqrt{p^2 - 4p + 1}}{p(p-1)} \quad (21.4)$$

برای به دست آوردن $\langle x^2 \rangle$ ، باید M_k و $(1 - M_k)^{-1}$ را در رابطه ۶۴.۳ جایگذاری کنیم. بنابراین

$$\langle x^2 \rangle = t - \frac{1}{16} \frac{(32p^4 t + 32p^4 - 64p^3 t - 64p^3 + 40p^2 t + 68p^2 - 8pt - 36p + 7)}{p^2(p^2 - 2p + 1)} \quad (22.4)$$

با استفاده از روابط ۱.۴ و ۲۲.۴ خواهیم داشت.

$$D = \frac{1}{2} - \frac{1}{32} \frac{(32p^4 - 64p^3 + 40p^2 - 8p)}{p^2(p^2 - 2p + 1)} \quad (23.4)$$

۳.۰.۴ کانال میرایی فاز

وجود این نوفه در فضای سکه باعث می‌شود، فاز نسبی اولیه با احتمال p به تدریج از بین برود، با توجه به رابطه ۳۵.۲ این نوع نوفه را با عملگرهای زیر مدل‌سازی می‌کنیم و آن را به نام کانال میرایی فاز می‌شناسیم.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \quad (24.4)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix}$$

با جایگذاری رابطه ۲۴.۴ و ۱۲.۴ در رابطه ۱۱.۴ خواهیم داشت.

$$\ell_{kk}\chi_{kk} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-pr_1} + r_0 & e^{-\imath ik} \left(ir_{\imath} \left(\sqrt{1-p} \right) + r_{\imath} \right) \\ -e^{\imath ik} \left(ir_{\imath} \left(\sqrt{1-p} \right) - r_{\imath} \right) & -\sqrt{1-pr_1} + r_0 \end{pmatrix} \quad (25.4)$$

با توجه به رابطه زیر

$$r'_i = \frac{1}{\imath} Tr(\sigma_i(\ell_{kk}\chi_{kk})) \quad (26.4)$$

داریم

$$\begin{aligned} r'_0 &= r_0 \\ r'_1 &= \cos(\imath k) r_{\imath} + \sqrt{1-p} \sin(\imath k) r_{\imath} \\ r'_2 &= \sin(\imath k) r_{\imath} - \sqrt{1-p} \cos(\imath k) r_{\imath} \\ r'_3 &= \sqrt{1-pr_1} \end{aligned} \quad (27.4)$$

بنابراین ابرعملگر ℓ_{kk} به صورت زیر خواهد بود.

$$\ell_{kk}\hat{O} = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \sqrt{1-p} \sin \imath k & \cos \imath k \\ \circ & \circ & -\sqrt{1-p} \cos \imath k & \sin \imath k \\ \circ & \sqrt{1-p} & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad (28.4)$$

چون عملگر ℓ_{kk} یک عملگر رد نگه‌دار است. پس اثر غیر بدیهی آن را بوسیله یک ماتریس سه سه در سه نشان می‌دهیم.

$$M_k = \begin{pmatrix} \circ & \sqrt{1-p} \sin(\imath k) & \cos(\imath k) \\ \circ & -\sqrt{1-p} \cos(\imath k) & \sin(\imath k) \\ \sqrt{1-p} & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad (29.4)$$

برای به دست آوردن مقدار $\langle x \rangle$ نیاز داریم که مقدار $(1 - M_k)^{-1}$ را به دست آوریم.

$$(1 - M_k)^{-1} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 1 + C & D & \sqrt{1-p} + \cos(\imath k) \\ D & -C + 1 & \sin(\imath k) \\ \sqrt{1-p}(1 + C) & (1-p) \sin(\imath k) & 1 + C \end{pmatrix} \quad (30.4)$$

که

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{1-p} \cos(2k) \\ D &= \sqrt{1-p} \sin(2k) \end{aligned} \quad (31.4)$$

در رابطه ۵۳.۳، M_k و $(1 - M_k)^{-1}$ را جایگذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[(1 - M_k)^{-1} M_k \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{-p+1+\sqrt{1-p} \cos(2k)}{p} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{p}} \frac{p-1}{p} \end{aligned} \quad (32.4)$$

مقدار $\langle x \rangle$ برابر است با

$$\langle x \rangle = \frac{-1}{\sqrt{p}} \frac{-1+p}{p} \quad (33.4)$$

برای به‌دست آوردن $\langle x^2 \rangle$ ، باید M_k و $(1 - M_k)^{-1}$ را در رابطه ۶۴.۳ جایگذاری کنیم. بنابراین

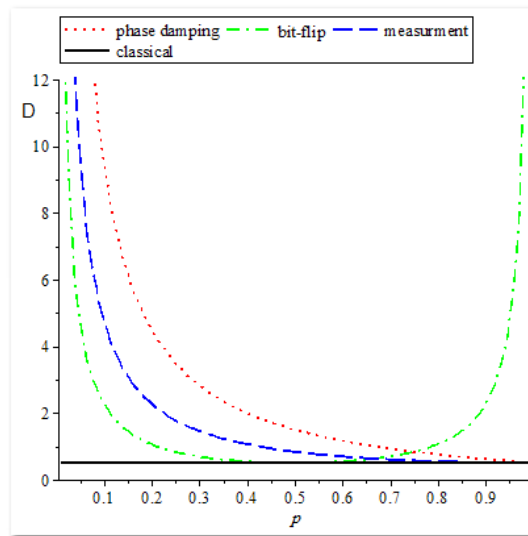
$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk \frac{2(p\sqrt{1-p} \cos(2k)t + \cos^2(2k)p + 2p\sqrt{1-p} \cos(2k))}{p^2} \\ &+ \frac{2(tp^2 - \cos^2(2k) - 4\sqrt{1-p} \cos(2k) - p^2 + tp + 4p - 2)}{p^2} \\ &= t - \frac{2p^2 t + 2p^2 - 2pt - 9p + 7}{p^2} \end{aligned} \quad (34.4)$$

مقدار $\langle x^2 \rangle$ برابر است با

$$\langle x^2 \rangle = t - \frac{2p^2 t + 2p^2 - 2pt - 9p + 7}{p^2} \quad (35.4)$$

بنابراین با استفاده از روابط ۱.۴ و ۳۵.۴ خواهیم داشت.

$$D = \frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{2P^2 - 2P}{P^2} \quad (36.4)$$



شکل ۱.۴: ضریب پخش بر حسب p

در ولگشت کوانتومی بدون حضور نوفه واریانس به صورت t^2 است که در این صورت $D \rightarrow \infty$ است، اما ضریب پخش‌شدگی در حضور نوفه بازاء هر مقدار p یک مقدار ثابت است، که بستگی به قدرت نوفه p دارد، ضریب پخش‌شدگی بازاء p های مختلف برای این سه نوع نوفه در شکل ۱.۴ رسم شده است. واهمدوسی اعمالی روی فضای سکه حتی اگر خیلی کوچک باشد باعث می‌شود که واریانس از حالت کوانتومی t^2 به حالت کلاسیکی t تبدیل شود. و باعث می‌شود که واریانس به‌طور خطی رشد کند و سرعت انتشار ولگشت کاهش پیدا کند.

حضور نوفه بیت-برگردان نسبت به اندازه‌گیری سریع‌تر، ضریب پخش را کاهش می‌دهد. و در نهایت در $p = 0.5$ این مقدار به ضریب پخش کلاسیک $D = 1/2$ می‌رسد. اگرچه این نوع کانال ضریب پخش را سریع‌تر کاهش می‌دهد، اما نکته جالب این‌جا است که بازاء نرخ‌های بزرگ‌تر $p > 0.5$ خواص کوانتومی مجدداً ظاهر می‌شود و ضریب پخش افزایش می‌یابد. در مقابل اندازه‌گیری روی سیستم در هر گام باعث می‌شود که سیستم به‌حالت کلاسیک خود میل کند. هرچه احتمال اندازه‌گیری بیشتر باشد سیستم به‌حالت کلاسیکی نزدیک‌تر شده و در حالتی که در تمام گام‌ها اندازه‌گیری صورت گیرد $p = 1$. سیستم کاملاً کلاسیکی می‌شود. همین موضوع در مورد میرایی فاز صادق است با این تفاوت که در این نوع نوفه سیستم با افزایش نرخ نوفه دیرتر کلاسیکی می‌شود.

۱.۴ محاسبه سرعت انتشار ولگشت‌های کوانتومی یک بعدی در

حضور تونل زنی نامحدود

در فصل سوم به‌عنوان مثالی از نوفه روی مکان، حالتی بررسی شد، که ولگشت قادر به تونل زنی به همسایه نزدیک خود بود. در این بخش ما به‌صورت تحلیلی روابط مربوط به ولگشتی که در هر گام به d

همسایه مجاور خود می‌تواند تونل بزند را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم ولگشت با احتمال p به سمت راست و با احتمال q به سمت چپ حرکت می‌کند. در ابتدا دو ابرعملگر به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathfrak{S}_+\hat{\sigma} = S_+\hat{\sigma}S_+^\dagger \quad (37.4)$$

$$\mathfrak{S}_-\hat{\sigma} = S_-\hat{\sigma}S_-^\dagger$$

که S_+ و S_- عملگرهای انتقال به راست و چپ هستند. وظیفه این ابرعملگرها این است که، حالت سیستم را یک گام به راست یا چپ ببرند. اگر فرض کنیم ذره با احتمال p به نزدیک‌ترین همسایه راست خود و با احتمال q به همسایه چپ خود برود، تحول یک گام از ولگشت را به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$\rho(t+1) = (1 - (p+q)) U_k \rho(t) U_k^\dagger + p \left(\mathfrak{S}_+ U_k \rho(t) U_k^\dagger \right) + q \left(\mathfrak{S}_- U_k \rho(t) U_k^\dagger \right) \quad (38.4)$$

حال اگر فرض کنیم ولگشت توانایی رفتن به دومین همسایه را داشته باشد، با احتمال p^2 در دومین همسایه راست خود و با احتمال q^2 در همسایه چپ خود و با احتمال $2pq$ در جایگاه اولیه خود خواهد بود، بنابراین می‌توان حالت سیستم را به شکل زیر نوشت.

$$\rho(t+1) = (1 - (p^2 + q^2 + 2pq)) U_k \rho(t) U_k^\dagger + p^2 \left(\mathfrak{S}_+^2 U_k \rho(t) U_k^\dagger \right) + q^2 \left(\mathfrak{S}_-^2 U_k \rho(t) U_k^\dagger \right) + 2pq \left(\mathfrak{S}_+ \mathfrak{S}_- U_k \rho(t) U_k^\dagger \right) \quad (39.4)$$

که

$$\mathfrak{S}_+^2 = \mathfrak{S}_+ \mathfrak{S}_+ \hat{\sigma} = S_+ S_+ \hat{\sigma} S_+^\dagger S_+^\dagger = S(2+) \hat{\sigma} S(2-) \quad (40.4)$$

$$\mathfrak{S}_-^2 = \mathfrak{S}_- \mathfrak{S}_- \hat{\sigma} = S_- S_- \hat{\sigma} S_-^\dagger S_-^\dagger = S(2-) \hat{\sigma} S(2+)$$

اگر فرض کنیم ولگشت توانایی رفتن به سومین همسایه را داشته باشد. می‌توان حالت سیستم را به شکل زیر نوشت.

$$\rho(t+1) = (1 - (p^3 + q^3 + 3p^2q + 3q^2p)) U_k \rho(t) U_k^\dagger + p^3 \left(\mathfrak{S}_+^3 U_k \rho(t) U_k^\dagger \right) + q^3 \left(\mathfrak{S}_-^3 U_k \rho(t) U_k^\dagger \right) + 3p^2q \left(\mathfrak{S}_+^2 \mathfrak{S}_+ U_k \rho(t) U_k^\dagger \right) + 3q^2p \left(\mathfrak{S}_-^2 \mathfrak{S}_- U_k \rho(t) U_k^\dagger \right) + 6pq^2 \left(\mathfrak{S}_+ \mathfrak{S}_+ \mathfrak{S}_- U_k \rho(t) U_k^\dagger \right) + 6p^2q \left(\mathfrak{S}_- \mathfrak{S}_- \mathfrak{S}_+ U_k \rho(t) U_k^\dagger \right) \quad (41.4)$$

به‌همین ترتیب برای ولگشتی که توانایی رفتن به d همسایه را داشته باشد، حالت سیستم به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \rho(t+1) = & \left(1 - \sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j \right) U_k \rho(t) U_k^\dagger \\ & + \sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} (p \mathfrak{S}_+)^{d-j} (q \mathfrak{S}_-)^j U_k \rho(t) U_{k'}^\dagger \end{aligned} \quad (42.4)$$

با توجه به رابطه $\mathfrak{S}_+^{d-j} \mathfrak{S}_-^j = \mathfrak{S}_+^{d-2j}$ می‌توان این رابطه را به شکل زیر خلاصه کرد.

$$\begin{aligned} \rho(t+1) = & \left(1 - \sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j \right) U_k \rho(t) U_k^\dagger \\ & + \sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j (\mathfrak{S}_+^{d-2j}) U_k \rho(t) U_{k'}^\dagger \\ & = \left(1 - \sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j \right) U_k \rho(t) U_k^\dagger \\ & + \sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j S_+(d-2j) U_k \rho(t) U_{k'}^\dagger S_+^\dagger(d-2j) \end{aligned} \quad (43.4)$$

از آن‌جا که اثر $U_k (d-2j) S_+$ در فضای k معادل $e^{i(d-2j)k} U_k$ است. پس رابطه ۴۳.۴ به شکل زیر ساده می‌شود.

$$\begin{aligned} \rho(t+1) = & \left(1 - \sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j \right) U_k \rho(t) U_k^\dagger \\ & + \sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j e^{i(d-2j)k} U_k \rho(t) U_{k'}^\dagger e^{-i(d-2j)k'} \end{aligned} \quad (44.4)$$

پس عملگرهای کراوس آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$E_0 = \sqrt{1 - (p + q)^d} U_k$$

$$E_j = \sqrt{\binom{d}{j} p^{d-j} q^j} S_+ (d - 2j) U_k \quad (45.4)$$

ماتریس‌های C_i را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$C_0 = \sqrt{\frac{1 - (p + q)^d}{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{pmatrix} \quad (46.4)$$

$$C_j = \sqrt{\frac{1}{2} \binom{d}{j} p^{d-j} q^j} e^{-i(d-2j)k} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{pmatrix}$$

برای به‌دست آوردن گشتاورهای اول و دوم باید ابرعملگرهای ℓ_{kk} ، ς_{kk} ، ζ_{kk} را به‌دست آوریم. از رابطه ۷۶.۳ داریم

$$\begin{aligned} \ell_{k,k} |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| &= \sum_j C_j(k) |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| C_j^\dagger(k) \\ &= (1 - (p + q)^d + (p + q)^d) U_w |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| U_w^\dagger \\ &= U_w |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| U_w^\dagger \end{aligned} \quad (47.4)$$

بنابراین ابر عملگر ℓ_{kk} به‌صورت زیر است.

$$\ell_{kk} \chi_{kk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(2k) & \cos(2k) \\ 0 & 0 & -\cos(2k) & \sin(2k) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad (48.4)$$

که دقیقاً با ℓ_{kk} برای حالتی که به اولین همسایه تونل زنی داشته باشیم یکسان است. برای به‌دست آوردن ς_{kk} به‌صورت زیر باید عمل کنیم.

$$\begin{aligned} \varsigma_{k,k} |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| &= \frac{dC_0(k)}{dk} |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| C_0^\dagger(k) \\ &+ \sum_{j \neq 0} \frac{dC_j(k)}{dk} |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| C_j^\dagger(k) \end{aligned} \quad (49.4)$$

با جایگذاری C_i ها در رابطه ۴۹.۴ داریم.

$$\begin{aligned} \varsigma_{k,k} |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| &= (\lambda - (p+q)^d) \begin{pmatrix} -i & \circ \\ \circ & i \end{pmatrix} U_w |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| U_w^\dagger \\ &+ \sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j \begin{pmatrix} -i(\lambda + d - 2j) & \circ \\ \circ & i(\lambda - d + 2j) \end{pmatrix} U_w |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| U_w^\dagger \end{aligned} \quad (50.4)$$

که

$$\frac{dC_0}{dk} = (-i) \sqrt{\lambda - (p+q)^d} \begin{pmatrix} \lambda & \circ \\ \circ & -\lambda \end{pmatrix} U_w \quad (51.4)$$

$$\frac{dC_j}{dk} = \sqrt{\sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j} e^{-i(d-2j)k} \begin{pmatrix} -i(\lambda + d - 2j) & \circ \\ \circ & i(\lambda - d + 2j) \end{pmatrix} U_w$$

در رابطه ۵۰.۴ باید جمع روی j ها را نیز به دست آوریم.

$$\sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j (-i(\lambda + d - 2j)) = -i(\lambda + d)(p+q)^d + 2iqd(p+q)^{d-1} \quad (52.4)$$

$$\sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j (i(\lambda - d + 2j)) = i(\lambda - d)(p+q)^d + 2iqd(p+q)^{d-1}$$

با جایگذاری رابطه ۵۲.۴ در رابطه ۵۰.۴ داریم.

$$\varsigma_{k,k} |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| = \begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & B \end{pmatrix} U_w |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| U_w^\dagger \quad (53.4)$$

که

$$\begin{aligned} A &= -i + i(p+q)^d - i(\lambda + d)(p+q)^d + 2iqd(p+q)^{d-1} \\ B &= i - i(p+q)^d + i(\lambda - d)(p+q)^d + 2iqd(p+q)^{d-1} \end{aligned} \quad (54.4)$$

با جایگذاری رابطه

$$U_w |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0| U_w^\dagger = \begin{pmatrix} r_0 + r_1 & r_1 e^{-2ik} + i r_1 e^{-2ik} \\ r_1 e^{2ik} - i r_1 e^{2ik} & r_0 - r_1 \end{pmatrix} \quad (55.4)$$

در رابطه ۵۳.۴ داریم.

$$\begin{aligned} S_{k,k} |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0| &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 + r_1 & r_1 e^{-2ik} + i r_1 e^{-2ik} \\ r_1 e^{2ik} - i r_1 e^{2ik} & r_0 - r_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A(r_0 + r_1) & A(r_1 e^{-2ik} + i r_1 e^{-2ik}) \\ B(r_1 e^{2ik} - i r_1 e^{2ik}) & B(r_0 - r_1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (56.4)$$

و با استفاده از رابطه زیر

$$r'_i = \frac{1}{\gamma} Tr(\sigma_i S_{k,k}) \quad (57.4)$$

می‌توانیم ابرعملگر $S_{k,k}$ را به دست آوریم.

$$r'_0 = (-id(p+q)^d + 2iqd(p+q)^{d-1}) r_0 - i r_1$$

$$\begin{aligned} r'_1 &= (\cos(2k) - id(p+q)^d \sin(2k) + 2iqd(p+q)^{d-1} \sin(2k)) r_1 \\ &+ (-\sin(2k) - id(p+q)^d \cos(2k) + 2iqd(p+q)^{d-1} \cos(2k)) r_2 \end{aligned} \quad (58.4)$$

$$\begin{aligned} r'_2 &= (\sin(2k) + id(p+q)^d \cos(2k) - 2iqd(p+q)^{d-1} \cos(2k)) r_1 \\ &+ (\cos(2k) - id(p+q)^d \sin(2k) + 2iqd(p+q)^{d-1} \sin(2k)) \end{aligned}$$

$$r'_3 = (-id(p+q)^d + 2iqd(p+q)^{d-1}) r_1 - i r_0$$

با فرض

$$f = -d(p+q)^d + 2iqd(p+q)^{d-1} \quad (59.4)$$

داریم

$$\zeta_{k,k} |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| = \begin{pmatrix} if & -i & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \cos(\gamma k) + if \sin(\gamma k) & -\sin(\gamma k) + if \cos(\gamma k) \\ \circ & \circ & \sin(\gamma k) - if \cos(\gamma k) & \cos(\gamma k) + if \sin(\gamma k) \\ -i & if & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad (60.4)$$

و در پایان برای به دست آوردن ζ_{kk}

$$\zeta_{kk} |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| = \frac{dC_0(k)}{dk} |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| \frac{dC_0^\dagger(k)}{dk} + \sum_{j \neq 0} \frac{dC_j(k)}{dk} |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| \frac{dC_j^\dagger(k)}{dk} \quad (61.4)$$

با جایگذاری C_i در رابطه ۶۱.۴ به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$\zeta_{kk} |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| = (1 - (p+q)^d) \begin{pmatrix} -i & \circ \\ \circ & i \end{pmatrix} U_w \rho U_w^\dagger \begin{pmatrix} i & \circ \\ \circ & -i \end{pmatrix} + \sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j \begin{pmatrix} -i(1+d-2j) & \circ \\ \circ & i(1-d+2j) \end{pmatrix} \quad (62.4)$$

$$U_w \rho U_w^\dagger \begin{pmatrix} i(1+d-2j) & \circ \\ \circ & -i(1-d+2j) \end{pmatrix}$$

با جایگذاری رابطه ۵۵.۴ در رابطه ۴۹.۴ داریم.

$$\zeta_{kk} |\Psi_0\rangle \langle\Psi_0| = (1 - (p+q)^d) \begin{pmatrix} r_0 + r_1 & -r_1 e^{-2ik} - i r_2 e^{-2ik} \\ -r_1 e^{2ik} + i r_2 e^{2ik} & r_0 - r_1 \end{pmatrix} \quad (63.4)$$

$$+ \sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 + d - 2j)^2 (r_0 + r_1) \\ \beta &= \left((d - 2j)^2 - 1 \right) e^{-2ik} (r_3 + ir_2) \\ \gamma &= - \left((d - 2j)^2 - 1 \right) e^{2ik} (-r_3 + ir_2) \\ \eta &= (1 - d + 2j)^2 (r_0 - r_1) \end{aligned} \tag{۶۴.۴}$$

برای جمع روی زها در این رابطه، باید کمیت‌های زیر را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j (1 + d - 2j)^2 &= (1 + d)^2 (p + q)^d - 2d^2 q (p + q)^{d-1} \\ &+ 2q^2 d (d - 1) (p + q)^{d-2} \\ \sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j (1 - d + 2j)^2 &= (1 - d)^2 (p + q)^d + 2d^2 q (p + q)^{d-1} \\ &+ 2qd (d - 1) (p + q)^{d-1} + 2qd (p + q)^{d-1} \end{aligned} \tag{۶۵.۴}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq 0}^d \binom{d}{j} p^{d-j} q^j \left((d - 2j)^2 - 1 \right) &= (d^2 - 1) (p + q)^d - 2d^2 q (p + q)^{d-1} \\ &+ 2qd (p + q)^{d-1} + 2q^2 d (d - 1) (p + q)^{d-2} \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم.

$$\begin{aligned} R &= 1 + d^2 (p + q)^d - 2d^2 q (p + q)^{d-1} + 2qd (p + q)^{d-1} + 2q^2 d^2 (p + q)^{d-2} \\ &- 2q^2 d (d - 1) (p + q)^{d-2} \end{aligned}$$

$$T = 2d (p + q)^d - 2dq (p + q)^{d-1} \tag{۶۶.۴}$$

$$\begin{aligned} F &= \sin(2k) \left(1 - d^2 (p + q)^d + 2d^2 q (p + q)^{d-1} - 2qd (p + q)^{d-1} \dots \right. \\ &\left. - 2q^2 d (d - 1) (p + q)^{d-2} \right) \end{aligned}$$

$$G = \cos(\gamma k) \left(-1 + d^\gamma (p+q)^d - \gamma d^\gamma q (p+q)^{d-1} + \gamma q d (p+q)^{d-1} \dots \right. \\ \left. + \gamma q^\gamma d (d-1) (p+q)^{d-2} \right)$$

$$M = \sin(\gamma k) \left(1 - d^\gamma (p+q)^d - \gamma d^\gamma q (p+q)^{d-1} + \gamma q d (p+q)^{d-1} \dots \right. \\ \left. - \gamma q^\gamma d (d-1) (p+q)^{d-2} \right) \tag{۶۷.۴}$$

$$N = \cos(\gamma k) \left(1 - d^\gamma (p+q)^d + \gamma d^\gamma q (p+q)^{d-1} - \gamma q d (p+q)^{d-1} \dots \right. \\ \left. - \gamma q^\gamma d (d-1) (p+q)^{d-2} \right)$$

در نتیجه ζ_{kk} به صورت زیر است.

$$\zeta_{kk} |\Psi_\circ\rangle \langle \Psi_\circ| = \begin{pmatrix} R & T & \circ & \circ \\ \circ & \circ & F & G \\ \circ & \circ & N & M \\ T & R & \circ & \circ \end{pmatrix} \tag{۶۸.۴}$$

با استفاده از رابطه ۸۳.۳، $\langle x \rangle$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\langle x \rangle_t = \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \begin{pmatrix} if & -i & \circ & \circ \end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix} 1/2 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \\ = \frac{-1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \left\{ \begin{pmatrix} f & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ & -i & \circ & \circ \end{pmatrix} \right\} \Gamma \begin{pmatrix} 1/2 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \tag{۶۹.۴}$$

$$= -tf + \left[(2 - \sqrt{2})t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right] r_1 + \left[(2 - \sqrt{2})t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] r_3$$

(۷۰.۴)

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{m=1}^t \ell_{kk}^{m-1} \\ &= \sum_{m=1}^t \{ |e_1\rangle \langle e_1| + |e_2\rangle \langle e_2| + e^{i(\theta+\pi)(m-1)} |e_3\rangle \langle e_3| + e^{-i(\theta+\pi)(m-1)} |e_4\rangle \langle e_4| \} \\ &= t (|e_1\rangle \langle e_1| + |e_2\rangle \langle e_2|) + \left(\frac{1-e^{it(\theta+\pi)}}{1+e^{i\theta}} \right) |e_3\rangle \langle e_3| + \left(\frac{1-e^{-it(\theta+\pi)}}{1+e^{-i\theta}} \right) |e_4\rangle \langle e_4| \\ &= t (|e_1\rangle \langle e_1| + |e_2\rangle \langle e_2|) + 2\Re \left(\frac{1}{1+e^{i\theta}} |e_3\rangle \langle e_3| \right) \end{aligned}$$

و $|e_i\rangle$ ها همان ویژه مقادیر روابط ۱۰۰.۳ هستند.

برای به دست آوردن مقدار $\langle x^2 \rangle$ نیاز به روابط $\sum_{m=1}^t \sum_{m'=1}^{m-1} \ell_{kk}^{m-m'-1}$ و $\sum_{m=1}^t \sum_{m'=1}^{m-1} \ell_{kk}^{m'-1}$ داریم.

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^t \sum_{m'=1}^{m-1} \ell_{kk}^{m-m'-1} \\ &= \sum_{m=1}^t \sum_{m'=1}^{m-1} \left\{ \begin{array}{l} |e_1\rangle \langle e_1| + |e_2\rangle \langle e_2| + e^{i(\theta+\pi)(m-m'-1)} |e_3\rangle \langle e_3| \\ + e^{-i(\theta+\pi)(m-m'-1)} |e_4\rangle \langle e_4| \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (۷۱.۴)$$

$$= \frac{t}{4} (t-1) (|e_1\rangle \langle e_1| + |e_2\rangle \langle e_2|) + 2\Re \left\{ \left(\frac{t}{1+e^{i\theta}} - \frac{1}{(1+e^{i\theta})^2} \right) |e_3\rangle \langle e_3| \right\}$$

و

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^t \sum_{m'=1}^{m-1} \ell_{kk}^{m'-1} \\ &= \sum_{m=1}^t \sum_{m'=1}^{m-1} \left\{ \begin{array}{l} |e_1\rangle \langle e_1| + |e_2\rangle \langle e_2| + e^{i(\theta+\pi)(m'-1)} |e_3\rangle \langle e_3| \\ + e^{-i(\theta+\pi)(m'-1)} |e_4\rangle \langle e_4| \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (۷۲.۴)$$

$$= \frac{t}{4} (t-1) (|e_1\rangle \langle e_1| + |e_2\rangle \langle e_2|) + 2\Re \left\{ \left(\frac{t}{1+e^{i\theta}} - \frac{1}{(1+e^{i\theta})^2} \right) |e_3\rangle \langle e_3| \right\}$$

برای به دست آوردن $\langle x^2 \rangle$ با استفاده از رابطه ۸۴.۳ داریم.

(۷۳.۴)

$$\begin{aligned}
 I_{\lambda} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \sum_{m=1}^t \text{Tr} \{ \zeta_{kk} (\ell_{kk}^{m-1} \chi_{kk}) \} \\
 &= \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \begin{pmatrix} R & T & \circ & \circ \end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \left(\begin{pmatrix} R & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ & T & \circ & \circ \end{pmatrix} \right) \Gamma \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \\
 &= tR + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \left(\frac{\lambda}{2} \frac{(\sin(2k)r_2 t + 2 \cos^2(k)r_1 t + 2 \cos^2(k)r_3 t + r_1 - r_3) T}{1 + \cos^2(k)} \right) \\
 &= tR - \frac{T}{2} \left((t(2\sqrt{2} - 4) - \sqrt{2}) r_1 + (t(2\sqrt{2} - 4) + \sqrt{2}) r_3 \right)
 \end{aligned}$$

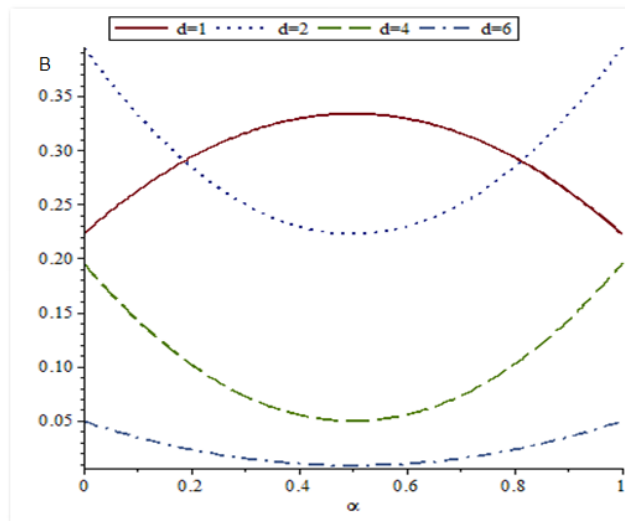
و دو جمله اول $\langle x^2 \rangle$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$\frac{-\lambda}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \sum_{m=1}^t \sum_{m'=1}^{m-1} \begin{pmatrix} if & -i & \circ & \circ \end{pmatrix} \ell_{kk}^{m-m'-1} (s_{kk} - s_{kk}^{\dagger}) \ell_{kk}^{m'-1} \begin{pmatrix} 1/2 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad (74.4)$$

که

$$(s_{kk} - s_{kk}^{\dagger}) \tilde{O} = 2(if) \ell_{kk} + \begin{pmatrix} \circ & -2i & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ -2i & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad (75.4)$$

قسمت اول از رابطه ۷۵.۴ را به صورت زیر می‌نویسیم.



شکل ۲.۴: ضریب B در واریانس بر حسب α برای ولگشت‌های کوانتومی در حضور تونل زنی بازا d های مختلف با $P = 1/3$

$$I_2 = \frac{-2if}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \sum_{m=1}^t \sum_{m'=1}^{m-1} \begin{pmatrix} if & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \ell_{kk}^{m-m'-1} \ell_{kk} \ell_{kk}^{m'-1} \begin{pmatrix} 1/2 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-2if(if)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \sum_{m=1}^t \sum_{m'=1}^{m-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ell_{kk}^{m-1} \begin{pmatrix} 1/2 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

(۷۶.۴)

$$+ \frac{-2if(-i)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \sum_{m=1}^t \sum_{m'=1}^{m-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ell_{kk}^{m-1} \begin{pmatrix} 1/2 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$= t(t-1)f^2 + \frac{f}{4} \left\{ t^2 (4\sqrt{2}-8) - t(4\sqrt{2}-8) + 3\sqrt{2} \right\} r_1$$

$$+ \frac{f}{4} \left\{ t^2 (4\sqrt{2}-8) - t(4\sqrt{2}-8) - \sqrt{2} \right\} r_3$$

و قسمت دوم از رابطه ۷۵.۴ را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{-1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \sum_{m=1}^t \sum_{m'=1}^{m-1} \begin{pmatrix} if & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -2i & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ -2i & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \ell_{kk}^{m-m'-1} \begin{pmatrix} 1/2 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad (77.4) \\
 &+ \frac{-1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \sum_{m=1}^t \sum_{m'=1}^{m-1} \begin{pmatrix} \circ & -i & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ -2i & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \ell_{kk}^{m-m'-1} \begin{pmatrix} 1/2 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{f}{4} \left\{ t^2 (4\sqrt{2} - 8) - t (8\sqrt{2} - 8) + \sqrt{2} \right\} r_1 \\
 &+ \frac{f}{4} \left\{ t^2 (4\sqrt{2} - 8) - 8t - 3\sqrt{2} \right\} r_2 \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) t^2 - t + \frac{3\sqrt{2}}{8}
 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\langle x^2 \rangle = I_1 + I_2 + I_3 \quad (78.4)$$

بنابراین واریانس در حضور این نوفه را برای حالت اولیه $|\psi_0\rangle = |R\rangle$ می‌توان به شکل زیر خلاصه کرد.

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = At^2 + Bt + C \quad (79.4)$$

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$B = 4P^d d^2 \alpha^2 - 4P^{2d} d^2 \alpha^2 - 4P^d d^2 \alpha - 4P^d d \alpha^2 + 4P^{2d} d^2 \alpha + P^d d^2 + 4P^d d \alpha - P^{2d} d^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۸۰.۴)$$

$$C = \left(\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{8} \right)$$

که در آن

$$p = \alpha P \quad (۸۱.۴)$$

$$q = (1 - \alpha) P$$

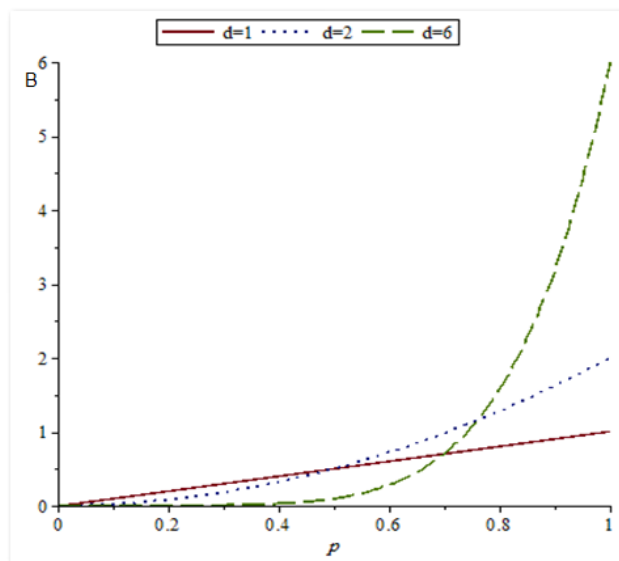
که α برابر است با احتمال این‌که ولگشت به سمت راست برود، و $(1 - \alpha)$ احتمال این است که ولگشت به سمت چپ برود. و P احتمال این است که واهمدوسی با چه احتمالی اتفاق بیافتد. همان‌طور که از رابطه ۷۹.۴ می‌بینیم جمله t^2 ظاهر شد که وابستگی به p هم ندارد، یعنی نوفه مکانی به شکل تونل زنی خاصیت کوانتومی سیستم را حفظ می‌کند. نکته جالب در این محاسبات این است که نه تنها وجود نوفه به شکل تونل زنی تا همسایه d ام سرعت انتشار کوانتومی سیستم (متناسب با t^2) را حفظ می‌کند بلکه با جمله‌ای به شکل زیر

$$g = 4P^d d^2 \alpha^2 - 4P^{2d} d^2 \alpha^2 - 4P^d d^2 \alpha - 4P^d d \alpha^2 + 4P^{2d} d^2 \alpha + P^d d^2 + 4P^d d \alpha - P^{2d} d^2 \quad (۸۲.۴)$$

ضریب خطی بر حسب t را افزایش می‌دهد.

g کمیتی مثبت است بنابراین تونل زنی به همسایه‌ها می‌تواند سرعت انتشار را افزایش دهد. از طرفی g با افزایش d کوچک می‌شود. بنابراین اثر همسایه‌های دور بسیار کمتر از همسایه‌های نزدیک است. کمیت g به سه پارامتر P ، d ، α وابسته است. که می‌توان با تنظیم این پارامترها به سرعت انتشار ماکزیمم دست یافت.

همان‌طور که در شکل ۲.۴ مشخص است g فقط به ازای $d = 1$ دارای ماکزیمم است که این ماکزیمم در $\alpha = 1/2$ رخ می‌دهد. بنابراین در ولگشتی که فقط به نزدیک‌ترین همسایه خود تونل می‌زند، اگر احتمال چپ و راست رفتن برابر باشد، g ماکزیمم می‌شود و سرعت انتشار بیشینه می‌شود. از طرفی بازای d های بزرگتر از ۲، فقط دارای مینیمم است که آن هم در $\alpha = 1/2$ اتفاق می‌افتد. نکته جالب



شکل ۳.۴: ضریب B در واریانس بر حسب P برای ولگشت کوانتومی در حضور تونل زنی بازا d های مختلف با $\alpha = 1/2$

این جا است که بازای d های بزرگتر از ۳، بازای هر α ، g ، از حالت $d = 1$ کمتر است. این به این معنی است که اگر ولگشت اجازه تونل زنی به سه همسایه و یا بیشتر را داشته باشد، هیچ‌گاه سرعتی بیش‌تر از وقتی که به یک همسایه تونل می‌زند نخواهد داشت. از طرفی همان‌طور که از شکل ۳.۴ مشخص است با افزایش d ، g به سمت صفر میل می‌کند. نکته دیگری که قابل توجه است این است که فقط در $d = 2$ وقتی که $\alpha > 1 + \beta$ و $\alpha < 1 - \beta$ ($\beta = \sqrt{\frac{2p^2 - p}{4p^2 - 3}}$) باشد، بزرگ‌تر از حالتی است که $d = 1$ است که آن هم فقط در صورتی اتفاق خواهد افتاد که $p < 1/2$. بنابراین می‌توان نتیجه محاسبات را این‌گونه خلاصه کرد که در ولگشت‌های کوانتومی یک بعدی در حضور نوفه مکانی به شکل تونل زنی، نیازی به نگرانی در مورد نوفه مکانی نیست و همیشه سیستم کوانتومی باقی می‌ماند. سیستم با تونل زنی به بیش از دو همسایه هیچ‌گاه سریع‌تر از وقتی که به یک همسایه می‌رود نخواهد بود. فقط یک استثنا وجود دارد که در آن سیستم کمی سریع‌تر انتشار می‌یابد و آن هم وقتی است که سیستم فقط به دو همسایگی تونل زنی داشته باشد که آن هم محدود به حالتی می‌شود که احتمال وقوع تونل زنی کمتر از $1/2$ باشد. در این شرایط با تنظیم احتمال چپ و راست به گونه‌ای که $|\alpha - 1| > \beta$ می‌توان سرعت انتشار سیستم را افزایش داد.

مراجع

- [1] J. Watrous. Quantum simulations of classical random walks and undirected graph connectivity. *Journal of computer and system sciences*, **62**,376–391, 2001.
- [2] T.A. Brun, H.A. Carteret, and A. Ambainis. Quantum to classical transition for random walks, *Phys. Rev. Lett.* **91**,130602, 2003.
- [3] M. Mohseni, P. Rebentrost, S. Lloyd, and A. Aspuru-Guzik. Environment-assisted quantum walks in energy transfer of photosynthetic complexes. *J Chem Phys.* **129**,174106,2008.
- [4] A. Romanelli, R. Siri, G. Abal, A. Auyuanet, and R. Donangelo. Decoherence in the quantum walk on the line. *Phys. A* **347**,137–152, 2005.
- [5] V. Kendon and B. Tregenna. Decoherence can be useful in quantum walks. *Phys. Rev. A* **67**,042315, 2003.
- [6] T.A. Brun, H.A. Carteret, and A. Ambainis. Quantum random walks with decoherent coins. *Phys. Rev. A* **67**,032304, 2003.
- [7] M. Annabestani, S.J. Akhtarshenas, and M.R. Abolhasani. Decoherence in one-dimensional quantum walk. *Phys. Rev. A* **81**,032321, 2010.
- [8] C.M. Chandrashekar, R. Srikanth, and S. Banerjee. Symmetries and noise in the quantum walk. *Phys. Rev. A* **76**,022316, 2007.
- [9] H. Obuse and N. Kawakami. Topological phases and delocalization of quantum walks in random environments. *Phys. Rev. B* **84**,195139, 2011.
- [10] N. Konno, N. Inui and E. Segawa. One-dimensional three-state quantum walk. *Phys. Rev. E* **72**,056112, 2005.

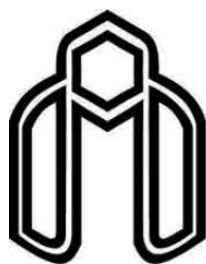
- [11] J. Koř s'ík, V. Buř zek, and M. Hillery. Quantum walks with random phase shifts. *Phys.Rev. A* **74**,022310, 2006.
- [12] A. Romanelli. Measurements in the Lévy quantum walk. *Phys. Rev. A* **76**,054306, 2007.
- [13] A.C. Oliveira, R. Portugal, and R. Donangelo. Decoherence in two-dimensional quantum walks. *Phys. Rev. A* **74**,012312, 2006.
- [14] K. Chisaki, N. Konno, E. Segawa, and Y. Shikano. Crossovers induced by discrete-time quantum walks. *Quantum Information and Computation* **11**,741–760, 2011.
- [15] K. Zhang. Limiting distribution of decoherent quantum random walks. *Phys. Rev. A* **77**,062302, 2008.
- [16] M. Annabestani, S.J. Akhtarshenas, and M.R. Abolhassani. Tunneling effects in a one-dimensional quantum walk. arXiv:1004.4352v1, 2010.
- [17] R. Srikanth, S. Banerjee, and C.M. Chandrashekar. Quantumness in a decoherent quantum walk using measurement-induced disturbance. *Phys. Rev. A* **81**,062123, 2010.
- [18] M. G'önülol, E. Aydiner, and 'O. E. Müstecaplı' glu. Decoherence in two-dimensional quantum random walks with traps. *Phys. Rev. A* **80**,022336, 2009.
- [19] B.R. Rao, R. Srikanth, C.M. Chandrashekar, and S. Banerjee. Quantumness of noisy quantum walks: A comparison between measurement-induced disturbance and quantum discord. *Phys. Rev. A* **6**,064302, 2011.
- [20] P.shor. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. *Proceeding of the 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, Edited by S.Goldwasser, (Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society Press), 1994.
- [21] L.K.Grover. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack.*Phys. Rev. Lett.* **79**,325, 1997.
- [22] Shenvi, Neil, Kempe, Julia, and Whaley, K. Quantum random-walk search algorithm. *Phys. Rev. A* **67**,052307, May 2003
- [23] Mark Hillery, Hongjun Zheng, Edgar Feldman, Daniel Reitzner, Vladimir Buzek, Quantum walks as a probe of structural anomalies in graphs, *Phys. Rev. A* **85**, 062325 (2012)

- [24] Nayak, Ashwin and Vishwanath, Ashvin. Quantum Walk on the Line (Extended Abstract). pp. 1–20.
- [25] E. Salvado, A. Venegas. Quantum walks: a comprehensive review. *Quantum Information Processing* **11**, pp. 1015–1106, 2012.
- [26] M. Annabestani, S.J. Akhtarshenas, and M.R. Abolhasani. Decoherence in one-dimensional quantum walk. *Phys. Rev. A* **81**, 032321, 2010.
- [27] D. Meyer. On the absence of homogeneous scalar unitary cellular automata. *Phys. Lett. A*, 1996.
- [28] D. A. Meyer, *J. Stat. Phys* **85**, 551 (1996).
- [29] E. Farhi and S. Gutmann, *Phys. Rev. A* **58**, 915 (1998).
- [30] A.M. Childs. An example of the difference between quantum and classical random walks. *Quantum Information Processing* **1**, 35 .2002.
- [31] Bednarska, Małgorzata, Grudka, Andrzej, and Kurzy, Paweł. Quantum walks on cycles. *Phys. Lett. A* **317**, 21–25, 2003.
- [32] V. Kendon and B. Tregenna. Decoherence in discrete quantum walks. *Selected Lectures from DICE 2002. Lecture Notes in Physics* **633**, 253–267, 2003.
- [33] Kempe, J. Quantum random walks - an introductory overview. *Contemporary Physics*, **44** p.307–327, 2003
- [34] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous. One-dimensional quantum walks. In *Proceedings of the 33th ACM Symposium on The Theory of Computation (STOC'01) ACM*, pages 60–69, 2001.
- [35] B. Tregenna, W. Flanagan, R. Maile, and V. Kendon. Controlling discrete quantum walks: coins and initial states. *New J. Phys.* **5**, 83, 2003.
- [36] T. MacKay, S. Bartlett, L. Stephenson, and B. Sanders, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 2745, 2002.
- [37] M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

-
- [38] Stefanak, Martin. *Interference Phenomena in Quantum Information*. A thesis for the degree of doctor of philosophy, CZECH Technical University in PRAGUE ,Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering, September 2010.
- [39] J. Audretsch, F.Physik, U.Konstanz, Entangled Systems New Directions in Quantum Physics (WILEY-VCH Verlag GmbH Co. KGaA) pp 273-307. 2007

Aabstract

Decoherence is a physical phenomenon that arises from the interaction of quantum systems and their environment. Decoherence used to be thought of as an annoyance as it used to be equated with loss of quantum information. However, it has been found that decoherence can indeed play a beneficial role in natural processes. The quantum walk is the quantum version of the classical random walk. The superposition property of quantum systems allows us to define quantum walker which can walking in all possible path, simultaneously and the interference of these paths makes some important differences between the quantum walk and the classical random walk. Notable differences between the quantum walk and classical random walk are the quadratic dependency of the variance on the number of step and the complex oscillatory probability distribution in the quantum walk instead of the linear variance dependency and the binomial probability in the classical random walk. In this thesis, we introduce and study classical random walk and the quantum walk on a line. We will compare probability distribution and variance of quantum walk with classical one. We introduce the Fourier transformation as a standard method to map the evolution operator into k space. In chapter two, we will introduce Kraus operators method and analytic formula for variance which is based on this method. We will find variance of various types of channels as examples of coin decoherency. In chapter three, by introducing general form of variance formula the effects of noise in coin space, position space and coin-position space has been studied, we will see that the existence of noise (even a weak noise) in coin space will eliminate quantum properties, while noise on position space as a tunneling to nearest neighbor can preserve it. The preservation of variance in tunneling decoherency motivates us to check other types of tunneling which we deal with it in chapter four. We have introduced most general form of tunneling effects in which the walker will be able to jump to any other neighbors and show that this type of decoherency not only doesn't fade quantum properties but also increase variance a bit.



دانشگاه شاهرود

Shahrood University
Faculty Of Physics

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Applied Physics

Decoherency in one-dimensional Quantum Walk

Supervisor

Dr. Mostafa Annabestani

by

Zeinab Moradi

2015