

دانشگاه شاهرود

دانشکده فیزیک
گروه ذرات بنیادی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
فیزیک، گرایش محاسبات کوانتومی

عنوان

مطالعه‌ی الگوریتم‌های جستجو بر پایه‌ی ولگشت‌های کوانتومی

استاد راهنما

دکتر مصطفی عنابستانی

دانشجو

احمد کاوه

بهمن ۱۳۹۳

عزیز ما، ای وصی عشق؛

آنان که معنای ولایت را نمی‌دانند در کار ما سخت درمانده‌اند، سر ما و

قدمتان، که وصی امام عشق هستید و نایب امام زمان (عج)

تعمدنامه

اینجانب احمد کاوه دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک دانشکده فیزیک دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان مطالعه الگوریتم‌های جستجو بر پایه‌ی ولگشت‌های کوانتومی، تحت راهنمایی دکتر مصطفی عنابستانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه شاهرود” یا “Shahrood University” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

احمد کاوه

بهار ۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

مسئله‌ی جستجو همواره یکی از مهمترین مسائل در حوزه‌های مختلف علوم بوده است. در حالت کلاسیکی برای یافتن داده‌ای مشخص در پایگاه داده نامرتب، جستاری از مرتبه‌ی $O(N)$ نیاز است، گرآور با ارائه‌ی الگوریتم جستجوی کوانتومی خود نشان داد برای انجام این جستجو جستاری از مرتبه‌ی $O(\sqrt{N})$ نیاز است. یعنی الگوریتم گرآور افزایش سرعت توانی را در پی دارد. ولگشت کوانتومی که همتای کوانتومی ولگشت کلاسیکی است، به دلیل امکان استفاده از برهم‌نهی حالت‌ها و کار با دامنه‌ی احتمال (به جای خود احتمال) و در نتیجه امکان تداخل‌های سازنده و مخرب بین دامنه‌های احتمال، و نیز درهم‌تنیدگی کوانتومی بین گشت‌ها و سکه‌ها، دارای رفتار متفاوتی نسبت به ولگشت کلاسیکی است. یکی از مهمترین کاربردهای ولگشت‌های کوانتومی در حوزه‌ی طراحی الگوریتم‌های کوانتومی است. در این نوشتار ابتدا مروری کوتاه بر ولگشت کلاسیکی و ولگشت کوانتومی خواهیم داشت. توزیع احتمال و انحراف معیار هر دو نوع را رسم می‌کنیم و نشان می‌دهیم سرعت انتشار ولگرد کوانتومی از مبدا در قیاس با همتای کلاسیکی‌اش افزایش مربعی دارد و این ویژگی در طراحی الگوریتم جستجو بسیار حائز اهمیت است. در ادامه‌ی فصل اول به بیان تفاوت‌های دیگر دو نوع ولگشت می‌پردازیم و یک رهیافت تحلیلی برای بدست آوردن توزیع احتمال کوانتومی معرفی می‌کنیم. همچنین ولگشت کوانتومی یک بعدی با سکه‌ی تعمیم‌یافته و ولگشت در ابعاد بالاتر را نیز بررسی نمودیم. در فصل دوم مرور کوتاه بر چند الگوریتم کوانتومی خواهیم داشت، الگوریتم جستجوی گرآور را به تفصیل شرح می‌دهیم و نشان می‌دهیم چگونه این الگوریتم افزایش سرعت مربعی را در پی دارد، الگوریتم شر نیز به عنوان یکی از مهمترین الگوریتم‌های کوانتومی شرح داده شده است. در بخش سوم به بررسی الگوریتم جستجو بر روی یک شبکه‌ی مکعبی به کمک ولگشت سکه‌ای خواهیم پرداخت و یک رهیافت برای بهینه‌سازی الگوریتم معرفی می‌نماییم. در ادامه به معرفی نوع دیگری از ولگشت با تحول گسسته، مرسوم به ولگشت پراکندگی خواهیم پرداخت، در این ولگشت ذره‌ی کوانتومی (ولگرد) روی یال‌های گراف قرار می‌گیرد و رئوس گراف همانند مراکز پراکندگی رفتار می‌کنند. عملگر تحول و حالت سیستم بعد از گام‌های مشخص برای این نوع ولگشت و ارتباط یکانی آن با ولگشت سکه‌ای نیز بررسی شده است. نشان می‌دهیم با انتخاب حالت اولیه‌ی مناسب و تعداد گام مشخص، این نوع ولگشت ابزار مناسبی در تشخیص ناهنجاری‌های گراف می‌باشد. سپس یک رهیافت کلی در گراف‌های ستاره‌ای که دارای تقارن زیادی هستند ارائه می‌دهیم و نشان می‌دهیم با تقلیل فضای هیلبرت مسئله می‌توان هدف مورد جستجو را در زمانی بهتر از حالت کلاسیکی یافت.

فهرست مطالب

۱	معرفی ولگشت کوانتومی	۱
۱	از ولگشت‌های کلاسیکی تا ولگشت کوانتومی	۱.۱
۲	ولگشت کلاسیکی روی خط	۲.۱
۳	نقطه جذب کلاسیکی	۱.۲.۱
۵	ولگشت کوانتومی در یک بعد	۳.۱
۹	مرز جاذب	۱.۳.۱
۱۰	تفاوت‌های گشت کلاسیکی و کوانتومی	۲.۳.۱
۱۱	حل تحلیلی گشت کوانتومی در یک بعد	۳.۳.۱
۱۶	ولگشت کوانتومی یک بعدی با سکه‌ی تعمیم یافته	۴.۳.۱
۱۸	ولگشت کوانتومی یک بعدی با سکه‌ی وابسته به زمان	۵.۳.۱
۱۹	ولگشت کوانتومی در ابعاد بالاتر	۶.۳.۱
۲۲	ولگشت کوانتومی غیریکنواخت	۷.۳.۱
۲۵	الگوریتم‌های کوانتومی	۲
۲۵	مقدمه	۱.۲
۲۶	الگوریتم کوانتومی دوپیچ	۲.۲
۲۷	الگوریتم کوانتومی دوپیچ جوزا	۳.۲
۲۹	الگوریتم جستجوی کوانتومی گراور	۴.۲
۳۰	مسئله‌ی جستجو	۱.۴.۲
۳۲	اوراکل و وارونی فاز	۲.۴.۲
۳۳	انعکاس نسبت به متوسط (جابه‌جایی فاز شرطی)	۳.۴.۲
۳۹	الگوریتم جستجوی ولگشت کوانتومی	۳
۳۹	جستجو بر مبنای ولگشت گسسته	۱.۳
۴۰	جستجو بر روی یک ابر مکعب	۲.۳
۵۷	مقایسه الگوریتم ولگشت با الگوریتم گراور، تفاوت‌ها و شباهت‌ها	۱.۲.۳

۵۸	بهینه‌سازی الگوریتم جستجوی ولگشت کوانتومی روی ابرمکعب	۲.۲.۳
۶۲	ولگشت کوانتومی پراکندگی	۳.۳
۶۹	گراف گراور	۱.۳.۳
۷۲	گراف ستاره‌ای با یک پال اضافه	۲.۳.۳
۷۷	جستجو برای یک حلقه‌ی اضافه	۳.۳.۳
۷۹	حلقه‌ی مفقوده	۴.۳.۳
۸۲	گراف ستاره‌ای با یک زیر گراف مثلثی	۵.۳.۳
۸۶	دو گراف ستاره‌ای	۶.۳.۳
۸۹	هم‌ارزی یکانی بین مدل‌های ولگشت کوانتومی گسسته	۴.۳

۹۵	اثبات روابط	
۹۵	محاسبه‌ی انحراف معیار در ولگشت کلاسیکی روی خط	۱.آ
۹۶	اثبات رابطه‌ی (۶.۱)	۱.۱.آ
۹۶	حالت اولیه و ویژه‌حالت عملگر تحول یکانی است	۲.آ
۹۷	اثبات رابطه‌ی (۵۲.آ)	۳.آ
۹۷	اثبات رابطه‌ی (۹۷.۳)	۴.آ
۹۸	اثبات رابطه‌ی (۱۱۸.۳)	۵.آ
۹۸	اندازه‌گیری کامل	۶.آ
۹۸	اثبات جابه‌جایی پذیری عملگر تحول اختلالی و عملگر جایگشتی	۷.آ
۹۹	عملگر جابه‌جایی در پایه‌های $ R, x\rangle, L, x\rangle$	۸.آ
۹۹	شکل عملگر سکه در پایه‌های $ R, x\rangle, L, x\rangle$	۹.آ
۱۰۱	شکل عملگر تحول یکانی در پایه‌های $ R, x\rangle, L, x\rangle$	۱۰.آ
۱۰۱	نمایش حالت اولیه‌ی ولگشت در پایه‌های $ R, x\rangle, L, x\rangle$	۱۱.آ
۱۰۲	اثبات قضیه‌ی ۱.۲.۳	۱۲.آ
۱۰۴	اثبات قضیه‌ی ۲.۲.۳	۱۳.آ
۱۰۶	اثبات قضیه‌ی ۳.۲.۳	۱۴.آ
۱۰۹	اثبات قضیه‌ی ۴.۲.۳	۱۵.آ

معرفی ولگشت کوانتومی

۱.۱ از ولگشت‌های کلاسیکی تا ولگشت کوانتومی

اصطلاح ولگشت تصادفی اولین بار در سال ۱۹۰۵ توسط پیرسون^۱، به عنوان فرمالیسم ریاضیاتی، برای بررسی مسیر حرکت ذره‌ای که شامل گام‌های تصادفی است، معرفی شد. اندکی بعد کاربردهای فراوانی از این نوع ولگشت در حوزه‌های مختلف علوم، مثل فیزیک، کامپیوتر، اقتصاد و... مورد مطالعه قرار گرفت [۱]، [۲]. ولگشت کوانتومی به عنوان تعمیم ولگشت کلاسیکی در حوزه‌ی کوانتومی، نخستین بار توسط زاگوری [۳] پیشنهاد شد، توانایی استفاده از جنبه‌های گوناگون مکانیک کوانتومی نظیر تداخل دامنه‌های احتمال و برهم‌نهی آنها، باعث بروز رفتارهای متفاوتی در ولگشت کوانتومی می‌شود. بهره‌گیری صحیح از خواص غیرکلاسیکی این نوع ولگشت، مزایای فراوانی در حوزه‌هایی مثل رمزنگاری، الگوریتم‌ها و شبیه‌سازی‌های کوانتومی در اختیار ما قرار می‌دهد [۴]. تا کنون چندین مدل مختلف ولگشت کوانتومی معرفی و مورد بررسی قرار گرفته است، دو نوع عمده‌ی آن شامل:

۱- ولگشت کوانتومی گسسته^۲ که با نام ولگشت سکه^۳ نیز شناخته می‌شود

۲- ولگشت کوانتومی پیوسته^۴

می‌باشد. جالب است بدانید ایده‌ی مشابهی نیز در کارهای فاینمن یافت می‌شود [۵]. تا کنون بین این دو نوع ارتباط‌هایی کشف شده است [۶]، اخیراً نیز نشان داده شده است که هر دو نوع گسسته و پیوسته می‌تواند به عنوان پایه‌ای برای محاسباتی جهانی^۵ در نظر گرفته شوند [۷]. اخیراً نوع خاصی از ولگشت کوانتومی تصادفی^۶ معرفی شده است که علاوه بر اینکه در بردارنده‌ی نتایج ولگشت کلاسیکی و کوانتومی است، بلکه ارائه دهنده‌ی

^۱Pearson

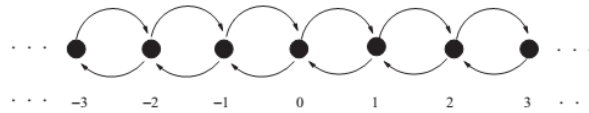
^۲discrete time Quantum Walk

^۳Coined Quantum Walk

^۴Continous time Quantum Walk

^۵Universal Computational Primitive

^۶quantum stochastic walk



شکل ۱.۱: ولگشت یک بعدی

مفهومی جامع تر نیز هست [۸]. در این پایان نامه هدف ما بررسی الگوریتم‌های جستجو بر پایه‌ی ولگشت‌های کوانتومی است، برای این منظور ولگشت گسسته بسیار مفید و پرکاربرد است [۹]. تا کنون چندین الگوریتم بر مبنای ولگشت کوانتومی پیشنهاد شده است و نشان دهنده‌ی سرعت بیشتر این الگوریتم‌ها در قیاس با نمونه‌ی کلاسیکی است [۱۰]، [۱۱] و [۱۲]

۲.۱ ولگشت کلاسیکی روی خط

ساده‌ترین نوع ولگشت تصادفی، حرکت یک ذره‌ی کلاسیکی در یک بعد است، که جهت حرکت آن توسط یک سکه‌ی متعادل^۷ تعیین می‌شود. در هر گام، ذره می‌تواند از موقعیت کنونی خود (n) به نقاط مجاورش ($n \pm 1$) با احتمال‌های برابر حرکت نماید. فرض کنید در زمان $t = 0$ ذره در مبدأ ($n = 0$) باشد، یعنی $p(0, 0) = 1$ باشد، بعد از t گام، احتمال حضور ذره در مکان n به صورت رابطه‌ی زیر داده می‌شود [۱۳]:

$$p(t, n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \binom{t}{(t+n)/2} \quad (1.1)$$

این رابطه با این فرض اساسی نوشته شده است که ما آن را مدولاریتی^۸ می‌نامیم، بدان مفهوم که، بعد از تعداد گام‌های زوج (فرد) احتمال یافتن ولگرد در مکان‌های فرد (زوج) همواره صفر است، به عبارت دیگر این رابطه زمانی درست است که، $t + n$ زوج و $n \leq t$ باشد [۱۴]. در پایان بعد از معرفی ولگشت کوانتومی به مقایسه آن با مشابه کلاسیکی خواهیم پرداخت. در حد t های بزرگ و n های کوچک این توزیع احتمال به توزیع نرمال (گوسی) منجر می‌شود

$$p(t, n) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{n^2}{2t}\right) \quad (2.1)$$

البته این هنوز توزیع نرمال نیست، چون به ۲ بهنجار است، ولی با تکیه بر شرط مدولاریتی می‌توان نوشت [۱۵]:

$$p(t, n) \simeq \frac{1 + (-1)^{t-n}}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{n^2}{2t}\right) \quad (3.1)$$

پهنای تابع توزیع نرمال به صورت نصف فاصله‌ی بین نقاط عطف تعریف می‌شود، برای این کار با دوبار مشتق‌گیری از تابع توزیع داریم:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial n^2} = 0 \quad (4.1)$$

^۷non-biased coin

^۸modularity

که نتیجه می دهد پهنا متناسب است با \sqrt{t} [۱۴].

در ولگشت کلاسیکی توزیع احتمال متقارن است و مکان متوسط^۹ عبارت است از:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n p(t, n) = 0 \quad (5.1)$$

و این ایجاب می کند که انحراف استاندارد^{۱۰} به صورت زیر باشد:

$$\sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 p(t, n)} = \sqrt{t} \quad (6.1)$$

جدول ۱.۱: احتمال حضور ولگرد در مکان n در زمان t . نمودار برای ذره ای رسم شده است که حرکت خود را از مبدا آغاز کرده است.

گام	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۰	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{4}$	۰	۰	۰
۳	۰	۰	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{3}{8}$	۰	$\frac{3}{8}$	۰	$\frac{1}{8}$	۰	۰
۴	۰	$\frac{1}{16}$	۰	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{3}{8}$	۰	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{16}$	۰
۵	$\frac{1}{32}$	۰	$\frac{5}{32}$	۰	$\frac{5}{16}$	۰	$\frac{5}{16}$	۰	$\frac{5}{32}$	۰	$\frac{1}{32}$

همانطور که در جدول ۱.۱ مشاهده می نمایید، ولگشت کلاسیکی که از مبدا آغاز کرده باشد در هر گام نسبت به مبدا رفتار کاملاً متقارن دارد، در گام های زوج (فرد) در مکان های زوج (فرد) است. توزیع احتمال را در شکل ۲.۱ می بینید، مشاهده می شود که با افزایش تعداد گام ها ارتفاع نمودار کمتر و میزان پهن شدگی بیشتر می شود.

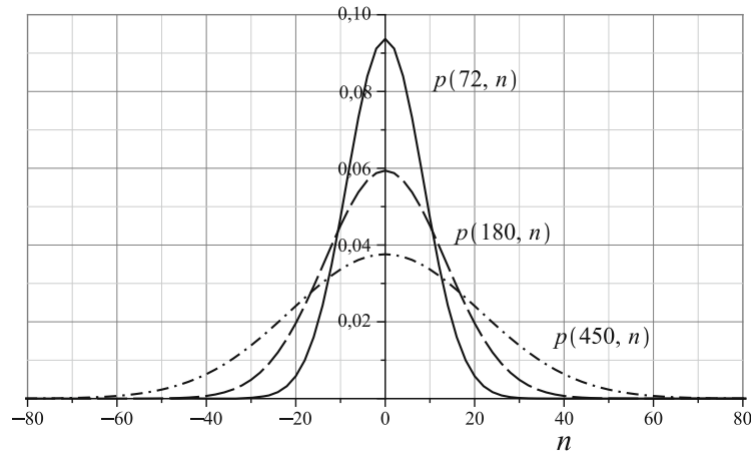
۱.۲.۱ نقطه جذب کلاسیکی

بحث آخر ما در مورد ولگشت کلاسیکی یک بعدی در ارتباط با احتمال جذب (احتمال بازگشت^{۱۱}) ذره کلاسیکی، توسط یک مرز جاذب است. در مورد ولگشت های کلاسیکی در سه بعد یا بیشتر، احتمال بازگشت همواره کوچکتر از یک است و به طور خاص به ابعاد فضا بستگی دارد در حالی که در مورد گشت یک و دوبعدی این عدد برابر

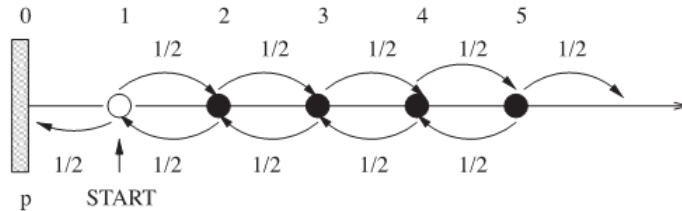
^۹average position

^{۱۰}standard deviation

^{۱۱}Recurrence probability



شکل ۲۰۱: توزیع احتمال ولگشت کلاسیکی به ازای چند گام مختلف



شکل ۳۰۱: ولگشت تصادفی کلاسیکی متقارن روی خط، با یک مرز جاذب در نقطه‌ی ۰. نقطه شروع ولگشت $x = 1$ است

یک است. به عنوان یک نتیجه‌ی منطقی، در سه بعد یا بیشتر ذره‌ی کلاسیکی با یک احتمال غیر صفر امکان فرار از مرز جاذب را دارد [۱۶]. حال به دنبال محاسبه‌ی این احتمال در مورد ولگشت کلاسیکی یک بعدی هستیم. ولگشت کلاسیکی متقارن یک بعدی را در نظر بگیرید که از نقطه‌ی $x = 1$ آغاز به حرکت می‌کند، همچنین در مبدا یک مرز جاذب تعبیه شده است (شکل ۳۰۱). با شروع از نقطه‌ی ۱ ذره‌ی کلاسیکی با احتمال $1/2$ به نقطه‌ی ۰ می‌رسد (که در این صورت جذب شده است)، در غیر این صورت با احتمال $1/2$ به نقطه‌ی ۲ می‌رود. احتمال آنکه از نقطه‌ی ۲ به مبدا بازگردد به صورت حاصلضرب احتمال رفتن از ۲ به ۱ و p_{10} رفتن از ۱ به ۰، تعریف می‌شود. از آنجائیکه هیچ جهت ارجحی وجود ندارد (ولگشت در فضا همگن است)، $p_{21} = p_{10} = p$. فرض این است که مهم نیست گشت چه میزان از مبدأ دور شده باشد، مهم این است که در هر زمان با احتمال برابر به جلو یا عقب می‌رود. بنابراین با احتساب تمام مسیرهای ممکن، رابطه‌ی بازگشتی زیر را خواهیم داشت:

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_{21} p_{10} = \frac{1}{2} (1 + p^2) \tag{۷.۱}$$

که خواهیم داشت: $p = 1$ یعنی هر چقدر هم که ذره از نقطه جاذب فاصله بگیرد، با گذشت زمان به میزان کافی در نهایت حتماً به درون مرز جاذب خواهد افتاد. این رفتار با مورد کوانتومی متفاوت است [۱۵].

۳۰۱ ولگشت کوانتومی در یک بعد

در اینجا به بررسی مختصری از ولگشت کوانتومی گسسته در یک بعد، به عنوان ساده‌ترین نوع ولگشت کوانتومی، خواهیم پرداخت. عناصر اصلی این نوع ولگشت را می‌توان به ۴ دسته تقسیم کرد:

۱- ولگرد^{۱۲}: یک سیستم کوانتومی است که در فضای هیلبرت بی‌نهایت بعدی قابل شمارش^{۱۳} قرار دارد.

۲- حالت سکه^{۱۴}: موجودی فیزیکی است که در اینجا در فضای هیلبرت دوبعدی است. حالت سکه هر سیستم دو حالت نظیر اسپین فرمیون، قطبش فوتون و... می‌تواند باشد، به طور معمول از پایه‌های استاندارد $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ یا $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ استفاده می‌شود. از آنجاییکه دینامیک خالص کوانتومی باید یکانی باشد، بدان معنی که باید کاملاً دترمینیستیک و برگشت پذیر باشد [۱۷]، وجود فضای سکه الزامی می‌شود.

۳- عملگر تحول

۴- مجموعه‌ای از مشاهده‌پذیرها

در مورد گشت کوانتومی روی خط، فضای هیلبرت مکان را روی مجموعه‌ی اعداد صحیح به صورت $\mathcal{H}_p = l^2(\mathbb{Z})$ که حالت‌های $|n\rangle$ پایه‌های متعامد بهنجار فضای موقعیت^{۱۵} را تشکیل می‌دهند. به جای کار با ماتریس تصادفی^{۱۶} تحول سیستم را با یک ماتریس یکانی توصیف می‌کنیم (زیرا با توجه به اینکه مجموع احتمالات باید برابر ۱ باشد و تحول سیستم کوانتومی بسته، خطی است، بنابر این تحول زمانی سیستم کوانتومی با عملگرهای یکانی توصیف می‌شود [۱۸]). درجه آزادی دیگری به نام فضای سکه^{۱۷} که توصیف کننده‌ی جهت حرکت است تعریف می‌کنیم، این فضا به صورت $\mathcal{H}_c = l^2(\{0, 1\})$ است. پس فضای هیلبرت کل سیستم به صورت $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \otimes \mathcal{H}_p$ است. و حالت سکه به شکل $|\psi\rangle = |c\rangle \otimes |n\rangle$ توصیف می‌گردد. تأکید می‌کنیم تمام $|n\rangle$ ها، که فضای هیلبرت \mathcal{H}_p را جاروب می‌کنند و نیز هر برهم‌نهی به شکل $\sum_n a_n |n\rangle$ که مقید به شرط $\sum_n |a_n|^2 = 1$ باشند، حالت‌های مجاز موقعیت می‌باشند. همچنین هر برهم‌نهی خطی از $|c\rangle$ ها که شرط مشابهی را ارضاء کنند، حالت مجاز فضای سکه هستند [۱]. برای گشت یک بعدی، عملگر سکه، یک ماتریس یکانی 2×2 دلخواه به شکل زیر است

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (۸.۱)$$

با این شروط که $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}$ هستند، نیز

$$|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1, \quad ac^* + bd^* = 0, \quad c = -\Delta b^*, \quad d = \Delta a^* \quad (۹.۱)$$

^{۱۲}Walker

^{۱۳}infinite countable dimension

^{۱۴}coin operator

^{۱۵}position

^{۱۶}stochastic matrix

^{۱۷}coin space

که $\Delta = \det U = ad - bc$ و یکانی بودن ایجاب می‌کند که $|\Delta| = 1$ باشد [۱۹]. گفتیم که ولگشت کوانتومی، تعمیم ولگشت کلاسیکی به دنیای کوانتومی است با یک درجه‌ی آزادی اضافه، به نام کایرالیته^{۱۸} که در واقع نشان دهنده‌ی جهت حرکت ولگرد است. در اینجا کایرالیته را با $|0\rangle$ و $|1\rangle$ نشان می‌دهیم. بنابر این خواهیم داشت

$$C|0\rangle = a|0\rangle + c|1\rangle, \quad C|1\rangle = b|0\rangle + d|1\rangle \quad (10.1)$$

علیرغم انتخاب‌های متعددی که برای انتخاب گزینش سکه وجود دارد، یک انتخاب معمول سکه‌ی هادامارد^{۱۹} است، هدف از اعمال این عملگر، تولید برهم‌نهی برابر از حالات ممکن است و در قسمت‌های بعد دلیل اهمیت این انتخاب را خواهیم گفت. هادامارد به شکل زیر است:

$$C \equiv H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \quad (11.1)$$

اثر این عملگر روی حالت‌های سکه به صورت

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), \quad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \quad (12.1)$$

است، ملاحظه می‌شود که سکه‌ی هادامارد یک سکه‌ی متعادل است، زیرا حالت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ به طور مساوی در برهم‌نهی‌های برابر، تا حد یک ضریب فاز اختلاف، توزیع شده‌اند. تحول گشت کوانتومی به شکل زیر داده می‌شود [۲۰]:

$$U = S(C \otimes I) \quad (13.1)$$

عملگر انتقالی^{۲۰}، S ، که یکانی نیز است، روی فضای هیلبرت \mathcal{H}_p و به عنوان عملگر جابجایی شرطی، عمل می‌کند، یعنی با توجه به حالت سکه، موقعیت گشت را یک واحد بع راست یا چپ می‌برد، این عملگر می‌تواند بعد بی‌نهایت داشته باشد.

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (|n+1\rangle\langle n| \otimes |0\rangle\langle 0| + |n-1\rangle\langle n| \otimes |1\rangle\langle 1|) \quad (14.1)$$

فرض کنید سیستم در حالت $|c\rangle \otimes |n\rangle$ یا بطور خلاصه $|c\rangle|n\rangle$ باشد. بعد از یک گام، سیستم در حالت

$$U|c\rangle|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|n+1\rangle \pm |1\rangle|n-1\rangle) \quad (15.1)$$

خواهد بود. حال اگر یک اندازه‌گیری برای بدست آوردن موقعیت گشت انجام دهیم، همبستگی^{۲۱} بین مکان‌های مختلف را از بین می‌بریم، ولی اگر فقط یک اندازه‌گیری در آخر کار انجام دهیم، این همبستگی و برهم‌نهی بین حالت‌های مختلف، تداخل‌های سازنده یا مخرب ایجاد می‌کند، که باعث بروز رفتارهای متفاوتی می‌شود.

^{۱۸}Chirality

^{۱۹}Hadamard

^{۲۰}translation operator

^{۲۱}correlation

با این وجود، در بعضی نقاط ممکن است بخواهیم بدانیم خروجی گشت چیست، بدین منظور مجموعه‌ای از مشاهده‌پذیرها را تعریف می‌کنیم، راههای گوناگونی برای استخراج اطلاعات از گشت کوانتومی وجود دارد، برای مثال ابتدا به کمک مشاهده‌پذیر $|1\rangle\langle 1| + \alpha_1 |1\rangle\langle 0| + \alpha_0 |0\rangle\langle 0|$ یک اندازه‌گیری روی سکه انجام می‌دهیم، سپس به کمک مشاهده‌پذیر $M_p = \sum_n a_n |n\rangle\langle n|$ موقعیت را اندازه‌گیری کنیم. اگر موقعیت ابتدایی ولگشت را به صورت $|\psi\rangle = |0\rangle$ فرض کنیم، بعد از t گام، داریم: $|\psi_t\rangle = U^t |\psi\rangle$ حال فرض کنید می‌خواهیم $p(100, n)$ را بدانیم، ابتدا باید $|\psi_{100}\rangle$ را پیدا کنیم، برای این کار چند روش وجود دارد، یک روش خوب، استفاده از فرمول بازگشتی است. کلی‌ترین حالت ولگشت کوانتومی به صورت زیر است

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n(t)|0\rangle + B_n(t)|1\rangle)|n\rangle \quad (16.1)$$

با این شرط که

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n(t)|^2 + |B_n(t)|^2 = 1 \quad (17.1)$$

از طرفی داریم

$$|\psi(t+1)\rangle = U |\psi(t)\rangle = S(H \otimes I) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n(t)|0\rangle + B_n(t)|1\rangle)|n\rangle \quad (18.1)$$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n(t+1)|0\rangle + B_n(t+1)|1\rangle)|n\rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S \left(A_n(t) \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) + B_n(t) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right) |n\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+1}(t)|0\rangle|n+1\rangle + A_{n-1}(t)|1\rangle|n-1\rangle) \\ &\quad + (B_{n+1}(t)|0\rangle|n+1\rangle - B_{n-1}(t)|1\rangle|n-1\rangle) \end{aligned} \quad (19.1)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب در دو سمت رابطه خواهیم داشت:

$$A_n(t+1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{n+1}(t) + B_{n+1}(t)) \quad (20.1)$$

$$B_n(t+1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{n-1}(t) - B_{n-1}(t)) \quad (21.1)$$

و در نهایت توزیع احتمال به شکل زیر می‌شود [۱۴]

$$p(t, n) = |A_n(t)|^2 + |B_n(t)|^2$$

این رهیافت برای برنامه‌نویسی مناسب می‌باشد. چون راجع به حالت نهایی سکه اطمینانی نداریم، برای فهمیدن احتمال حضور در مکان n ام بعد از t گام، روی ثبت کننده^{۲۲} سکه رد می‌گیریم [۱۵]

$$p(t, n) = |(\langle \cdot | \otimes \langle n |) U^t |\psi(\cdot)\rangle|^2 + |(\langle 1 | \otimes \langle n |) U^t |\psi(\cdot)\rangle|^2 \quad (22.1)$$

مثلا بعد از ۳ گام

$$|\psi(3)\rangle = U^3 |0\rangle |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} (|1\rangle |-3\rangle - |0\rangle |-1\rangle + (2|0\rangle + |1\rangle) |1\rangle + |0\rangle |3\rangle) \quad (23.1)$$

گرچه ما از سکه‌ی متعادل استفاده کردیم ولی مشاهده می‌شود گام سوم نسبت به مبدأ متقارن نیست.

جدول ۲.۱: احتمال حضور ولگرد در مکان n در زمان t . نمودار برای ذره‌ای رسم شده است که حرکت خود را از مبدأ آغاز کرده است.

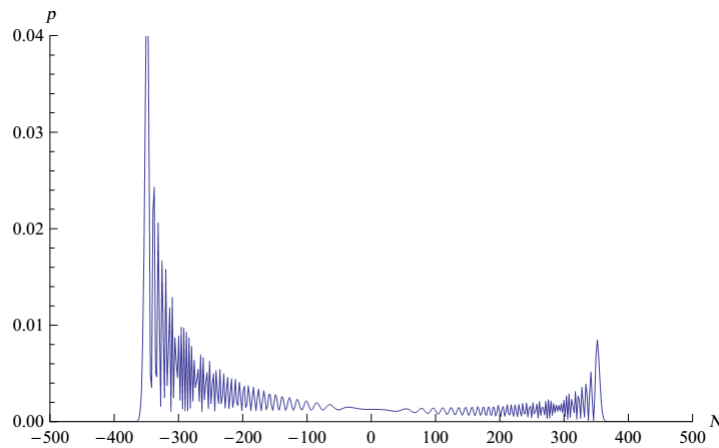
گام	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۰	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{4}$	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۰	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{4}$	۰	۰	۰
۳	۰	۰	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{5}{8}$	۰	$\frac{1}{8}$	۰	۰
۴	۰	$\frac{1}{16}$	۰	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{5}{8}$	۰	$\frac{1}{16}$	۰
۵	$\frac{1}{32}$	۰	$\frac{5}{32}$	۰	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{17}{32}$	۰	$\frac{1}{32}$

در جدول شماره ۲.۱ احتمال حضور ذره‌ی کوانتومی در مکان‌های مختلف به ازای چند گام آورده شده است، ملاحظه می‌شود هنگامی که با حالت اولیه‌ی $|n=0\rangle = |0\rangle$ شروع کنیم، عدم تقارن توزیع احتمال به سمت راست بیشتر است، این عدم تقارن که در شکل شماره‌ی ۴.۱ نیز واضح است، ناشی از تداخل‌های سازنده و مخرب بین دامنه‌های احتمال و در واقع اثر عملگر هادامارد روی سکه است. برای متقارن سازی باید جلوی تداخل حالت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را بگیریم، یک روش برای این کار این است که حالت اولیه را به صورتی بنویسیم که دارای یک بخش موهومی باشد، مانند

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad |n=0\rangle \quad (24.1)$$

در این صورت بخش موهومی و حقیقی تداخل نمی‌کنند و جملات آن حذف نمی‌شود و توزیع احتمال شکل متقارن می‌گیرد، همچنین می‌توانیم از عملگر سکه‌ی $Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ به جای سکه‌ی هادامارد استفاده کنیم. از

^{۲۲}register



شکل ۴.۱: توزیع احتمال گشت کوانتومی با سکه‌ی هادامارد و حالت اولیه‌ی $|0, L\rangle$ به ازای ۵۰۰ گام

سوی دیگر صرفنظر از تقارن نمودار، برای t های بزرگ، احتمال یافتن ذره در خارج از محدوده‌ی $\left[-\frac{t}{\sqrt{t}}, \frac{t}{\sqrt{t}}\right]$ به صورت نمایی کوچک می‌شود و توزیع احتمال مکان ولگشت به یک توزیع یکنواخت میل می‌کند [۲۱]. در این مورد اثبات می‌شود ([۲۲]) که انحراف استاندارد با تعداد گام‌ها متناسب است، یا با یک محاسبه‌ی ساده داریم:

$$\langle n \rangle = 0 \implies \langle \sigma^2 \rangle = \langle n^2 \rangle = \frac{1}{2t/\sqrt{t}} \int_{-t/\sqrt{t}}^{t/\sqrt{t}} x^2 dx = \frac{t^2}{6} \implies \sigma(t) \propto t \quad (25.1)$$

همچنین نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها موید این نکته است [۲۳]. همچنین شایان ذکر است که افزایش توانی سرعت انتشار ولگشت کوانتومی در قیاس با مشابه کلاسیکی، وابسته به انتخاب حالت اولیه و عملگر سکه نیست [۲۴].

۱.۳.۱ مرز جاذب

مشابه مورد کلاسیکی، می‌خواهیم احتمال آن را حساب کنیم که: اگر گشت کوانتومی از حالت $|\psi(0)\rangle = |0\rangle \otimes |n=1\rangle$ شروع به حرکت کند، بعد از تعداد گام دلخواه، به یک مرز جاذب در $n=0$ برسد. این احتمال به کمک دو عملگر تصویر به شکل زیر توصیف شدنی است [۲۵]

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= I_c \otimes |0\rangle\langle 0| \\ \Pi_1 &= I - \Pi_0 \end{aligned} \quad (26.1)$$

که در آن I_c عملگر واحد در فضای سکه و I عملگر واحد در فضای کل سیستم است. فرض کنید ولگشت در حالت زیر قرار گرفته باشد

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|0\rangle + |0\rangle|2\rangle + |1\rangle|4\rangle) \quad (27.1)$$

برای دانستن احتمال حضور ذره در $n = 0$ باید عملگر Π را اعمال کنیم، خواهیم داشت:

$$\left| \Pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|0\rangle + |0\rangle|2\rangle + |1\rangle|4\rangle) \right) \right|^2 = \frac{1}{4} \quad (28.1)$$

و بعد اندازه‌گیری سیستم به حالت زیر رمبش^{۲۳} می‌کند

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|0\rangle) \quad (29.1)$$

این بیانگر این است که ذره با یک احتمال غیر صفر می‌تواند از مرز جاذب فرار کند [۲۶]. نشان داده می‌شود برای ولگشت کوانتومی یک بعدی، که حاصلضرب تانسوری هادامارد در عملگر سکه است، احتمال جذب مستقل از شرایط اولیه است [۱۶]. محاسبات عددی نشان می‌دهد ([۲۵]) که برای ولگشت هادامارد روی خط، با یک مرز جاذب در نقطه‌ی $x = 0$ ، که از حالت اولیه‌ی $|1, R\rangle$ شروع به حرکت می‌کند، احتمال جذب توسط مرز جاذب $0.637 \approx 2/\pi = p_{quantum}$ است، که این متفاوت از $p_{classic} = 1$ است. بنابراین ذره با احتمال 0.363 می‌تواند از مرز جاذب فرار کند. همچنین برای ولگشت کوانتومی روی هر گراف دلخواه، که با فضای هیلبرت $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_V$ نمایش داده می‌شود، دو عملگر زیر معرفی می‌شوند

$$P = I_A \otimes \sum_{v \in \text{absorb}(V)} |v\rangle\langle v|, \quad P' = I_A \otimes \sum_{v \notin \text{absorb}(V)} |v\rangle\langle v| \quad (30.1)$$

که در آن $\text{absorb}(V) \subset V$ مجموعه‌ی رئوس جاذب، و I_A عملگر همانی در فضای \mathcal{H}_A است. بنابراین احتمال جذب به صورت، احتمال اینکه ذره از یک حالت اولیه آغاز به حرکت کند و به یکی از رئوس جاذب برسد، تعریف می‌شود. به صورت ریاضی

$$\text{prob} = \sum_{t=0}^{\infty} p(t) \quad (31.1)$$

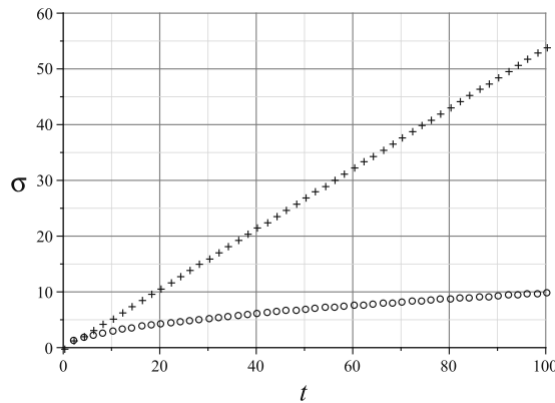
و $p(t)$ احتمال رسیدن ذره، برای اولین بار، به یکی از رئوس جاذب، در زمان t است. جزئیات کاملتر را در مرجع [۲۷] میتوانید مشاهده نمایید.

۲.۳.۱ تفاوت‌های گشت کلاسیکی و کوانتومی

گفتیم که ولگشت کوانتومی مشابه کوانتومی ولگشت کلاسیکی است، اما به دلیل ترکیب خطی حالت‌ها و کار با دامنه‌های احتمال (به جای خود احتمال) منجر به بروز رفتارهای متفاوتی نسبت به مشابه کلاسیکی خود می‌شود. تفاوت‌های میان ولگشت کلاسیکی و کوانتومی عبارت‌اند از:

۱- در حالت کلاسیکی، توزیع احتمال با گذشت زمان به یک توزیع حدی مشخصی میل می‌کند، اما در کوانتومی چنین نیست.

^{۲۳}Collapse



شکل ۵.۱: انحراف معیار ولگشت کلاسیکی (دایره) و کوانتومی (ضربدر) نسبت به تعداد گام‌ها

۲- انحراف معیار که میزان پهن‌شدگی توزیع احتمال را نشان می‌دهد، در حالت کلاسیکی به ریشه دوم زمان تغییر می‌کند ولی در کوانتومی رابطه‌ی خطی با تعداد گام‌ها دارد، که این به معنی امکان دسترسی ولگرد به نقاط دورتر، به ازای تعداد گام‌های کمتر در مقایسه با ولگشت کلاسیک است.

۳- در ولگشت کوانتومی به دلیل برهم‌نهی دامنه‌های احتمال و در نتیجه وقوع تداخل‌های سازنده و مخرب بین دامنه‌های احتمال، شاهد رفتار متفاوتی از ولگشت در قیاس با مشابه کلاسیکی خود هستیم.

۴- تفاوت در احتمال بازگشت به مرز جاذب

در انتها ذکر این نکته حائز اهمیت است که در مواردی می‌توان از ولگشت کوانتومی به مورد کلاسیکی رسید، برای این کار روش‌های مختلفی پیشنهاد شده است، یک راه ساده این است که در هر بار اعمال عملگر سکه، برهم‌نهی حالت‌ها را از طریق اندازه‌گیری در پایه‌های $|0\rangle$, $|1\rangle$ می‌توان از بین برد و سپس عملگر جابه‌جایی را اعمال نمود.

$$|\psi_{in}\rangle = |0\rangle \otimes |n\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |n\rangle \quad (32.1)$$

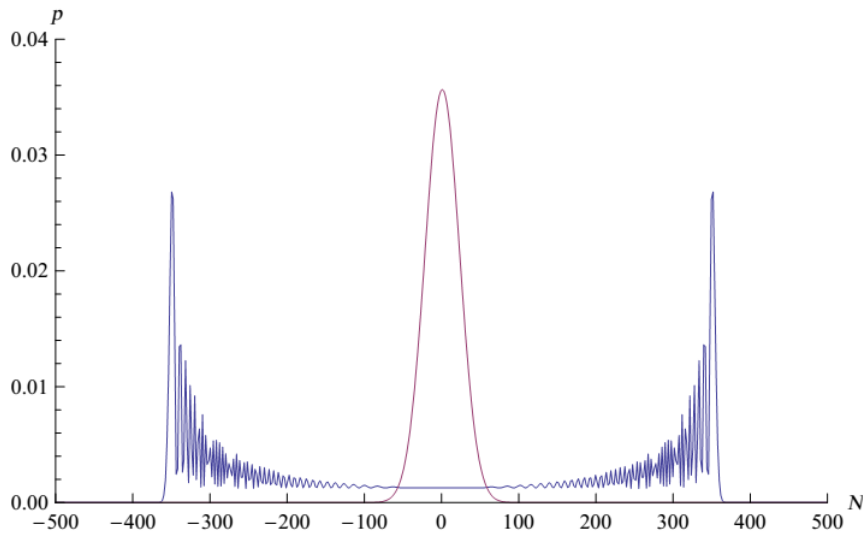
با اندازه‌گیری با احتمال برابر ولگشت را در یکی از دو حالت محتمل بدست خواهیم آورد. در ولگشت کوانتومی سکه‌ی کوانتومی در هر بار پرتاب می‌تواند برهم‌نهی حالت‌ها را داشته باشد، بنابراین نمی‌توان به مسیر حرکت ذره پی برد، حال اگر بتوان در هر گام نتیجه‌ی پرتاب سکه را با اندازه‌گیری تعیین کرد در واقع مسیر حرکت ولگرد مشخص شده است، این دقیقاً همان چیزی است که در ولگشت کلاسیکی رخ می‌دهد.

۳.۳.۱ حل تحلیلی گشت کوانتومی در یک بعد

برای حل تحلیلی گشت هادامارد، دو رهیافت عمده وجود دارد:

۱- رهیافت شرودینگری^{۲۴}: در این روش یک مؤلفه‌ی دلخواه $|\psi\rangle_n = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |n\rangle$ از گشت کوانتومی را در نظر می‌گیریم، سپس از تبدیل فوریه گسسته استفاده می‌کنیم تا به شکلی شبیه به دامنه‌ی سکه

^{۲۴}Schrodinger approach



شکل ۶.۱: مقایسه توزیع احتمال گشت کلاسیکی و کوانتومی به ازای ۵۰۰ گام. ولگشت کوانتومی با سکه‌ی \mathcal{Y} و حالت اولیه‌ی $|0, L\rangle$

نزدیک شویم، سپس از ابزارهای استاندارد آنالیز مختلط استفاده کرده تا ویژگی‌های آماری توزیع احتمال، بررسی شود.

۲- رهیافت ترکیبی^{۲۵}: در این شیوه، دامنه‌های مؤلفه‌ی مکانی خاص مثل $|n\rangle_p$ را به کمک جمع دامنه‌های تمام مسیرهایی که در حالت اولیه مشخص شروع و در $|n\rangle_p$ خاتمه می‌یابد پیدا می‌کنیم. این شیوه می‌تواند به عنوان نسخه‌ی گسسته‌ی انتگرال مسیر فرض شود [۱].

ما در اینجا از روش تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم. تبدیل فوریه گسسته، تابعی مثل $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ را به تابع دیگری مثل $\tilde{f}: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ به صورت زیر تبدیل می‌کند

$$\tilde{f}(k) = \sum_n f(n)e^{ink} \quad (۳۳.۱)$$

و

$$f(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k)e^{-ink} \quad (۳۴.۱)$$

تحول گشت کوانتومی توسط عملگر U صورت می‌گیرد، که شامل عملگر جابجایی شرطی نیز است و این عملگر در پایه‌های مکان غیر قطری است، U می‌تواند یک ماتریس بی‌نهایت بعدی باشد و قطری کردن آن دشوار است، ولی در فضای تکانه به صورت ماتریس یکانی 2×2 است و قطری کردن آن ساده‌تر است.

$f(n) = \langle n | \alpha \rangle$ و $\tilde{f}(k) = \langle k | \alpha \rangle$ در نتیجه داریم:

$$\langle k | \alpha \rangle = \sum_n \langle n | \alpha \rangle e^{ink} = \left(\sum_n \langle n | e^{ink} \right) |\alpha\rangle \Rightarrow |k\rangle = \sum_n |n\rangle e^{-ink} \quad (۳۵.۱)$$

^{۲۵}Combinatorial approach

حالت اولیه را به صورت

$$|\psi(\cdot)\rangle = |\cdot\rangle |\cdot\rangle \quad (۳۶.۱)$$

در نظر می‌گیریم، تعریف می‌کنیم:

$$\psi(n, t) = \begin{pmatrix} \psi_R(n, t) \\ \psi_L(n, t) \end{pmatrix} \quad (۳۷.۱)$$

یا به شکل عملگری، معادل با

$$|\psi(n, t)\rangle = \psi_R(n, t) |\cdot\rangle + \psi_L(n, t) |\uparrow\rangle \quad (۳۸.۱)$$

و طبق تعریف داریم: $\langle n | \psi(n, t) \rangle = \psi(n, t)$

و در نتیجه:

$$p(n, t) = |\langle n | \psi(n, t) \rangle|^2 = |\psi_R(n, t)|^2 + |\psi_L(n, t)|^2 \quad (۳۹.۱)$$

حال به بررسی رفتار ولگشت هادامارد، در حالت اولیه‌ی داده شده با رابطه‌ی (۳۶.۱) خواهیم پرداخت، توجه کنید که:

$$H |\psi(n, t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_R(n, t) (|\cdot\rangle + |\uparrow\rangle) + \psi_L(n, t) (|\cdot\rangle - |\uparrow\rangle)] \quad (۴۰.۱)$$

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} H [|\psi(n-1, t)\rangle + |\psi(n, t)\rangle + |\psi(n+1, t)\rangle] = & \quad (۴۱.۱) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_R(n-1, t) |\cdot\rangle + \psi_R(n-1, t) |\uparrow\rangle + \psi_L(n-1, t) |\cdot\rangle - \psi_L(n-1, t) |\uparrow\rangle \\ + \psi_R(n, t) |\cdot\rangle + \psi_R(n, t) |\uparrow\rangle + \psi_L(n, t) |\cdot\rangle - \psi_L(n, t) |\uparrow\rangle \\ + \psi_R(n+1, t) |\cdot\rangle + \psi_R(n+1, t) |\uparrow\rangle + \psi_L(n+1, t) |\cdot\rangle - \psi_L(n+1, t) |\uparrow\rangle] \end{aligned}$$

حال با اعمال عملگر جابجایی شرطی، خواهیم دید جملات زیر تولید می‌شوند

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_R(n+1, t) |\cdot\rangle + \psi_L(n+1, t) |\cdot\rangle + \psi_R(n-1, t) |\uparrow\rangle - \psi_L(n-1, t) |\uparrow\rangle] \quad (۴۲.۱)$$

که این معادل $\psi(n, t + 1)$ است، به عبارت دیگر داریم:

$$\begin{aligned} \psi(n, t + 1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_R(n + 1, t) + \psi_L(n + 1, t) \\ \psi_R(n - 1, t) - \psi_L(n - 1, t) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R(n + 1, t) \\ \psi_L(n + 1, t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R(n - 1, t) \\ \psi_L(n - 1, t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \psi(n + 1, t) + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \psi(n - 1, t) \end{aligned} \quad (43.1)$$

یا به شکل خلاصه تر زیر

$$\psi(n, t + 1) = M_- \psi(n + 1, t) + M_+ \psi(n - 1, t) \quad (44.1)$$

توجه داشته باشید که حالت اولیه ۳۶.۱ ایجاب می کند که

$$\psi(\cdot, \cdot) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (45.1)$$

باشد. حال با انجام تبدیل فوریه ی گسسته، می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k, t + 1) &= \sum_n \psi(n, t + 1) e^{ikn} \\ &= \sum_n (M_- \psi(n + 1, t) + M_+ \psi(n - 1, t)) e^{ikn} \\ &= (M_- e^{-ik} + M_+ e^{ik}) \tilde{\psi}(k, t) = M_k \tilde{\psi}(k, t) \end{aligned} \quad (46.1)$$

و نیز $\tilde{\psi}(k, t) = M_k^t \tilde{\psi}(k, \cdot)$

که در آن

$$M_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{pmatrix} \quad (47.1)$$

هدف بعدی ما قطری کردن این ماتریس است، این کار را با یافتن ویژه توابع و ویژه مقادیر انجام می دهیم. برای به دست آوردن ویژه مقادیر، معادله مشخصه را نوشته و در آن جاگذاری $\sin \omega_k = \sin k / \sqrt{2}$ را انجام می دهیم، خواهیم داشت:

$$\lambda^2 + 2i\lambda \sin \omega_k - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} e^{-i\omega_k} \\ -e^{i\omega_k} \end{cases} \quad (48.1)$$

متناظر با این دو ویژه مقدار، دو ویژه حالت $|\varphi\rangle_+$ و $|\varphi\rangle_-$ را بدست می آوریم. با اندکی محاسبه، متناظر با ویژه مقدار $\lambda_- = e^{-i\omega_k}$ خواهیم داشت:

$$|\varphi\rangle_- = \frac{1}{N_-} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}e^{i(k-\omega_k)} - 1 \end{pmatrix} \quad (49.1)$$

و متناظر با ویژه مقدار $\lambda_+ = -e^{i\omega_k}$ داریم:

$$|\varphi\rangle_+ = \frac{1}{N_+} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}e^{i(k+\omega_k)} - 1 \end{pmatrix} \quad (50.1)$$

و ضرایب بهنجارش به صورت زیر هستند:

$$|N_{\pm}|^2 = 2 \left(1 + \cos^2 k \pm \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right) \quad (51.1)$$

توانستیم ماتریس M_k را قطری کنیم، با توجه به قطری بودن این ماتریس می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} M_k^t &= (\lambda_k^+)^t |\varphi_k^+\rangle \langle \varphi_k^+| + (\lambda_k^-)^t |\varphi_k^-\rangle \langle \varphi_k^-| \\ \Rightarrow \tilde{\psi}(k, t) &= (\lambda_k^+)^t \langle \varphi_k^+ | \tilde{\psi}(k, \cdot) \rangle |\varphi_k^+\rangle + (\lambda_k^-)^t \langle \varphi_k^- | \tilde{\psi}(k, \cdot) \rangle |\varphi_k^-\rangle \end{aligned} \quad (52.1)$$

و در پایان با جاگذاری عبارات بدست آمده در رابطه ی بالا، و با توجه با این که

$$\tilde{\psi}(k, t) = M_k^t \tilde{\psi}(k, \cdot) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_R(k, t) \\ \tilde{\psi}_L(k, t) \end{pmatrix} \quad (53.1)$$

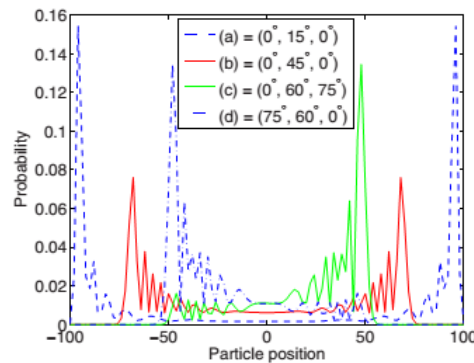
بدست می آوریم:

$$\tilde{\psi}_R(k, t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{i\omega_k t} + \frac{(-1)^t}{2} \left(1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-i\omega_k t} \quad (54.1)$$

$$\tilde{\psi}_L(k, t) = \frac{e^{-ik}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} (e^{i\omega_k t} - (-1)^t e^{-i\omega_k t}) \quad (55.1)$$

حال برای اینکه شکل تابع موج را در فضای حقیقی داشته باشیم از تبدیل فوریه ی معکوس استفاده می کنیم. در نتیجه خواهیم داشت [۲۸]

$$\psi_R(n, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-i(\omega_k t - kn)} \quad (56.1)$$



شکل ۷.۱: توزیع احتمال ولگشت به ازای مقادیر مختلف ξ, θ, ζ در ۱۰۰ گام [۲۹]

$$\psi_L(n, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{-ie^{ik}}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} e^{-i(\omega_k t - kn)} \quad (57.1)$$

احتمال حضور ولگرد نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$p(n, t) = |\psi_R(n, t)|^2 + |\psi_L(n, t)|^2 \quad (58.1)$$

۴.۳.۱ ولگشت کوانتومی یک بعدی با سکه‌ی تعمیم یافته

در مطالعه‌ی ولگشت کوانتومی روی خط می‌توان به جای استفاده از عملگر سکه‌ی هادامارد از عملگر سکه تعمیم یافته استفاده کرد و انحراف میانگین و توزیع احتمال و سایر خواص این نوع ولگشت را برحسب پارامترهای دخیل در عملگر سکه مورد بررسی قرار داد.

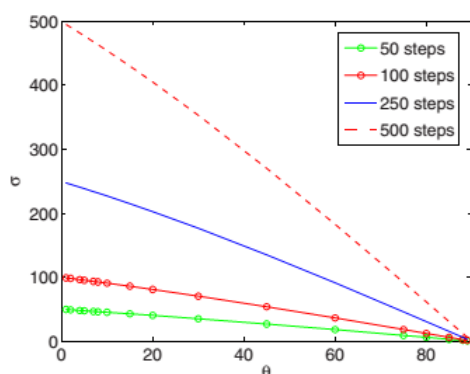
عملگر سکه‌ی تعمیم یافته در کلی‌ترین حالت به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۹]:

$$U_{\xi, \theta, \zeta} = \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos \theta & e^{i\zeta} \sin \theta \\ e^{-i\zeta} \sin \theta & -e^{-i\xi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (59.1)$$

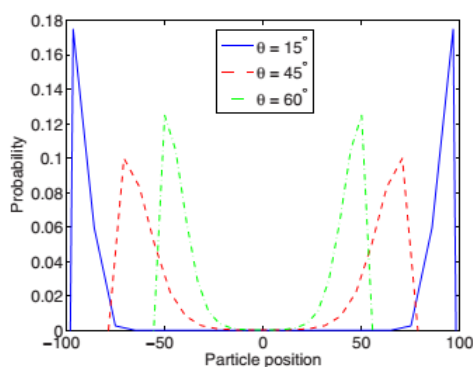
در رابطه‌ی بالا ζ, θ و ξ پارامترهای وردش هستند. توجه کنید که $H = U_{\cdot, \pi/4, \cdot}$ و $Z = U_{\cdot, \cdot, \cdot}$ و $X = U_{\cdot, \pi/2, \cdot}$ است.

شکل ۷.۱ نمودار توزیع احتمال ولگشت کوانتومی را پس از ۱۰۰ گام به ازای مقادیر مختلف ζ, ξ, θ نشان می‌دهد. همچنین می‌توان تمایل ولگرد به سمت راست یا چپ را از طریق انتخاب مقادیر مناسب برای پارامترها تعیین نمود.

از آنجا که در الگوریتم‌های جستجو به روش ولگشت کوانتومی میزان تغییرات انحراف میانگین ولگشت نسبت به پارامترهای وردش بسیار مهم است، شکل ۸.۱ یک نمونه تغییرات انحراف میانگین σ را نسبت به پارامتر θ به ازای گام‌های مختلف را نشان می‌دهد. اگر چه تغییر پارامترهای موجود، σ را تغییر می‌دهد، ولی تاثیر آن‌ها



شکل ۸.۱: مقایسه انحراف از میانگین ولگشت بر حسب پارامتر θ به ازای تعداد گام‌های متفاوت [۲۹]



شکل ۹.۱: توزیع احتمال ولگشت بر حسب θ [۲۹]

در مرتبه‌ی پیچیدگی الگوریتم مورد استفاده تنها محدود به یک ضریب ثابت می‌شود و مرتبه الگوریتم را بهبود نمی‌بخشد [۲۹]. شکل ۹.۱ افزایش σ را به ازای کاهش θ در توزیع احتمال ولگشت نشان می‌دهد. همچنین با صرف نظر از یک فاز کلی، و تغییر متغیرهای زیر

$$\cos \theta = \sqrt{\rho}, \quad \zeta - \xi = \theta', \quad \zeta + \xi = -\varphi \quad (۶۰.۱)$$

می‌توان عملگر سکه‌ی تعمیم‌یافته را به صورت زیر نوشت:

$$C_{\varphi}^{(gen)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & \sqrt{1-\rho} e^{i\theta'} \\ \sqrt{1-\rho} e^{i\varphi} & -\sqrt{\rho} e^{i(\theta'+\varphi)} \end{pmatrix} \quad (۶۱.۱)$$

که در آن $0 \leq \varphi, \theta' \leq \pi$ زوایای فاز دلخواه و $0 \leq \rho \leq 1$ پارامتر تعادل^{۲۶} سکه است. [۳۰] در حالت ولگشت کوانتومی یک بعدی زوایای فاز φ, θ' در تحول ولگشت فقط به صورت ترکیب $\theta' + \varphi$ ظاهر می‌شوند [۲۵] که

^{۲۶}Bias

اثر آنها معادل ورودش^{۲۷} زاویه β در حالت اولیهی سکه است

$$|\psi.\rangle = \sqrt{\eta}|L\rangle + \sqrt{1-\eta} e^{i\beta}|R\rangle \quad (۶۲.۱)$$

این بدان معنا است که مقدار پارامترهای η و ρ در تعیین حالت نهایی ولگشت کوانتومی و تحول آن تاثیر مستقیم دارد. برای مطالعهی بیشتر رک به [۲۹] همچنین مراجع [۳۱] و [۲۴] شامل بحث تفصیلی و تحلیلی است. مجموع این مطالعات نشان می‌دهد که در مورد ولگشت کوانتومی روی خط، بدون کم شدن از کلیت مسئله عملگر سکه را می‌توان با یک پارامتر حقیقی (ρ) تعریف کرد و تمام حالات ممکن و ویژگی‌های ولگشت را با تغییر در حالت اولیهی سکه مورد بررسی قرار داد. پس می‌توان نوشت:

$$C_{\uparrow}^{(bias)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & \sqrt{1-\rho} \\ \sqrt{1-\rho} & -\sqrt{\rho} \end{pmatrix} \quad (۶۳.۱)$$

بویژه در عملگر سکه‌ی متعادل ($\rho = 1/2$) تنها عملگر سکه‌ی موجود، سکه‌ی هادامارد ($\theta, \phi = 0$) خواهد بود و تمام ویژگی‌های ولگشت و تحولات ممکن با تغییر در حالت اولیه امکان‌پذیر خواهد بود.

۵.۳.۱ ولگشت کوانتومی یک بعدی با سکه‌ی وابسته به زمان

در ولگشت کوانتومی استاندارد روی خط، تحول ولگرد به کمک دو عملگر یکانی گسسته صورت می‌پذیرد. نشان دادیم حالت ولگرد بعد از زمان دلخواه (تعداد گام دلخواه) t با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n (R_n(t)|n, R\rangle + L_n(t)|n, L\rangle) = SC|\psi(t-1)\rangle \quad (۶۴.۱)$$

عملگر سکه عموماً با رابطه‌ی (۶۳.۱) داده می‌شود و عملگر جابه‌جایی نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S|n, R\rangle = |n+1, R\rangle, \quad S|n, L\rangle = |n-1, L\rangle \quad (۶۵.۱)$$

بنابراین تحول یکانی سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$|\psi(t)\rangle = SC|\psi(t-1)\rangle \quad (۶۶.۱)$$

در مرجع [۳۲] ولگشت کوانتومی روی خط با سکه‌ی وابسته به زمان معرفی شده است. بدان معنا که در حین تحول عملگر سکه نیز تغییر می‌کند. در این حالت تحول سیستم با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$|\psi(t)\rangle = SC(t)|\psi(t-1)\rangle \quad (۶۷.۱)$$

اثر زمان را به روش‌های گوناگونی می‌توان مورد بررسی قرار داد از جمله اینکه عملگر سکه را به صوت خاص زیر در نظر گرفت:

$$C(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} e^{-i\Phi(t)} & \sqrt{1-\rho} e^{-i\Phi(t)} \\ \sqrt{1-\rho} e^{i\Phi(t)} & -\sqrt{\rho} e^{i\Phi(t)} \end{pmatrix} = C.(t)C \quad (۶۸.۱)$$

^{۲۷}Varying

که C با رابطه‌ی (۶۳.۱) داده می‌شود و نیز

$$C.(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\Phi(t)} & \cdot \\ \cdot & e^{i\Phi(t)} \end{pmatrix} \quad (۶۹.۱)$$

می‌باشد. این نوع تعریف از ولگشت کوانتومی در پیاده‌سازی فرآیند موضعی کردن دینامیک تحول و نیز دینامیک‌های شبه‌متناوب کاربرد دارد. برای مطالعه‌ی بیشتر به مراجع [۳۲] و [۳۳] مراجعه کنید.

۶.۳.۱ ولگشت کوانتومی در ابعاد بالاتر

ولگشت کوانتومی محدود به خط و یک سکه نیست. ولگشت کوانتومی با سکه‌ی چندگانه به صورت مفصل در مرجع [۲۴] مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین در مرجع [۳۵] تعمیم ولگشت کوانتومی به ابعاد بالاتر از طریق تعمیم فضای سکه مورد مطالعه قرار گرفته است. فضای هیلبرت موقعیت ذره به صورت $\{|x\rangle\}_{x=-N/2}^{N/2-1}$ در نظر می‌گیریم که N تعداد مکان‌هایی است که ذره در طول یک خط طی می‌کند، و فضای هیلبرت سکه به صورت $\{|c\rangle\}_{c=\pm 1}^{\pm}$ می‌باشد، بطوری که بردار حالت در فضای سکه به صورت $|\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_d\rangle = |\epsilon_1\rangle \otimes \dots \otimes |\epsilon_d\rangle$ می‌شود، که $\epsilon = \pm 1$ است. بنابراین فضای هیلبرت ولگشت $H = H_x \otimes H_c$ مانند قبل توسط پایه‌های $\{|x\rangle \otimes |c\rangle\}$ جاروب می‌شود. بردار حالت ولگشت به صورت برهم‌نهی خطی از این پایه‌ها و به صورت زیر خواهد بود [۳۶]:

$$|\psi\rangle = \sum_{x=-N/2}^{N/2-1} \sum_{c=-}^{c=+} \alpha_{x,c} |x, c\rangle \quad (۷۰.۱)$$

یا به طور معادل با بردار $2N$ بعدی به شکل زیر نمایش داده می‌شود

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_{-1,-} \\ \alpha_{-1,+} \\ \alpha_{0,-} \\ \alpha_{0,+} \\ \alpha_{1,-} \\ \alpha_{1,+} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (۷۱.۱)$$

عملگر سکه‌ی عمومی به صورت یک ماتریس بلوکی قطری $N \times N$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$C = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & C_{-1} & & & \\ & & C_0 & & \\ & & & C_1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (۷۲.۱)$$

که هر بلوک 2×2 ، C_x یک عملگر سکه‌ی موضعی است که به صورت زیر داده می‌شود

$$C_x = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & e^{i\phi_1} \sin(\theta) \\ e^{i\phi_2} \sin(\theta) & -e^{i(\phi_1+\phi_2)} \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (۷۳.۱)$$

عملگر سکه در فضای سکه و محل x به صورت زیر اثر می‌کند

$$\begin{aligned} C|\psi\rangle &= \sum_{x=-N/2}^{N/2-1} C_x \sum_{c=-}^{+} \alpha_{xc} |x, c\rangle \\ &= \sum_{x=-N/2}^{N/2-1} \sum_{c=-}^{+} \alpha'_{xc} |x, c\rangle \end{aligned} \quad (۷۴.۱)$$

اثر عملگر سکه‌ی موضعی روی یک حالت ولگشت به طور معادل با نگاشت زیر نیز تعریف می‌شود

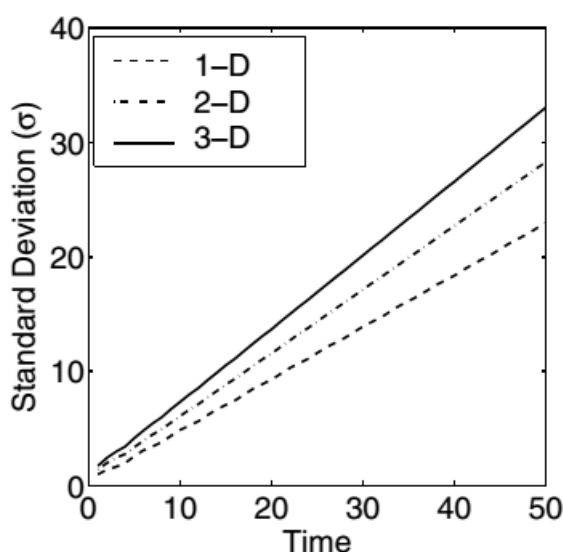
$$|x, \pm\rangle \xrightarrow{C_x} \gamma_{+, \pm} |x, +\rangle + \gamma_{-, \pm} |x, -\rangle \quad (۷۵.۱)$$

که γ ها عناصر ستونی C_x می‌باشند. با فرض $C_{-N/2} = \dots = C_{N/2-1} = C$ عملگر عمومی سکه را می‌توان به صورت جدایی‌پذیر $C = I \otimes C$ نوشت، که I عملگر همانی با بعد N است. حال اگر از عملگر سکه‌ی متداول هادامارد استفاده کنیم، آنگاه فضای سکه را می‌توان به صورت

$$H_{coin} = H_2 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_2 = \otimes^N H_2 \quad (۷۶.۱)$$

نوشت. اثر عملگر انتقال شرطی به شکل زیر قابل فرمول‌بندی است

$$\begin{aligned} T|\psi\rangle &= (T \otimes P_+ + T^\dagger \otimes P_-) |\psi\rangle \\ &= \sum_{x=-N/2}^{N/2-1} \left(T|x\rangle \otimes |+\rangle \langle +| \sum_{c=-}^{+} \alpha_{xc} |c\rangle + T^\dagger|x\rangle \otimes |-\rangle \langle -| \sum_{c=-}^{+} \alpha_{xc} |c\rangle \right) \\ &= \sum_{x=-N/2}^{N/2-1} T|x, +\rangle + \alpha_{x,-} T^\dagger|x, -\rangle \\ &= \sum_{x=-N/2}^{N/2-1} \alpha_{x+} |x+1, +\rangle + \alpha_{x-} |x-1, -\rangle \end{aligned} \quad (۷۷.۱)$$



شکل ۱۰.۱: انحراف میانگین بر حسب زمان برای ولگشت کوانتومی ۱، ۲ و ۳ بعدی با عملگر سکه هادامارد و حالت اولیه $|-\rangle \otimes^d$ [۳۵]

که T و مزدوج هرمیتی آن، عملگرهای جابه‌جایی هستند، بطوری که $T|x, \pm\rangle = |x \pm 1, \pm\rangle$ و $P_+ = |+\rangle\langle+|$ و $P_- = |-\rangle\langle-|$ عملگرهای تصویر هستند. در نهایت عملگر تحول یکانی ولگشت بعد n گام به صورت $|\psi_n\rangle = (TC)^n |\psi\rangle$ داده می‌شود.

یا اینکه چنانچه کت حالت در فضای سکه به صورت $1 - 2^d, 1, 2, \dots, \mu$ در نظر گرفته شود می‌توان از تبدیل فوریه‌ی کوانتومی d بعدی به صورت زیر به عنوان عملگر سکه استفاده کرد:

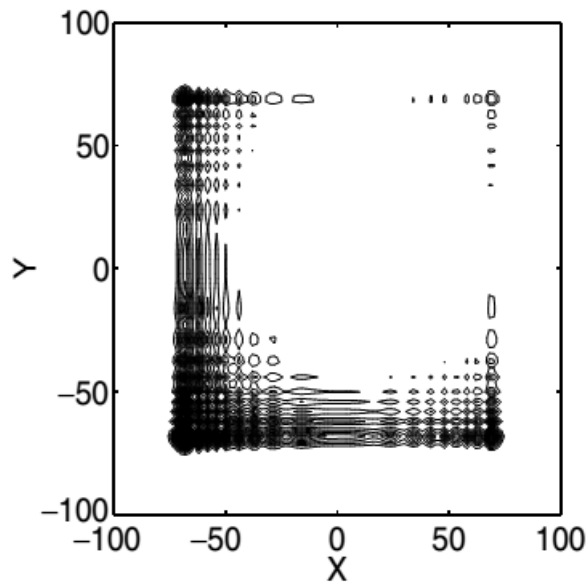
$$D_d|\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^d}} \sum_{\nu=0}^{2^d-1} e^{2\pi i \mu \nu / 2^d} |\nu\rangle \quad (78.1)$$

نیز می‌توان از عملگر گراور d بعدی استفاده کرد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G_d|\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^d}} \left(-2|\mu\rangle + \sum_{\nu=0}^{2^d-1} |\nu\rangle \right) \quad (79.1)$$

در شکل‌های ۱۱.۱ و ۱۰.۱ توزیع احتمال و انحراف میانگین ولگشت کوانتومی با تبدیل هادامارد نشان داده شده است. همان‌طور که شکل نشان می‌دهد بازهم انحراف میانگین رابطه خطی با زمان دارد و افزایش بعد رفتار کلی ولگشت را تغییر نمی‌دهد.

همچنین در جدول ۳.۱ شیب انحراف معیار بر حسب تابعی از زمان به ازای تبدیلات مختلف در ولگشت کوانتومی دوبعدی نشان داده شده است. در این جدول $|\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + i|-\rangle)$ و $|\psi_-\rangle = |+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle$ است. همچنین G_2 و D_2 از روابط (۷۸.۱) و (۷۹.۱) به ازای $d = 2$ بدست می‌آیند. برای مطالعه‌ی کامل‌تر خواننده را به مرجع [۳۵] ارجاع می‌دهیم.



شکل ۱۱.۱: توزیع احتمال ولگشت دوبعدی با عملگر دسکه هادامارد و حالت اولیه $|-\rangle \otimes |-\rangle$ [۳۵]

جدول ۳.۱: شیب انحراف معیار بر حسب زمان به ازای تبدیلات مختلف [۳۵]

$\Delta\sigma/\Delta t$	حالت اولیه	عملگر سکه
0.06427 ± 0.0017	$ -\rangle \otimes -\rangle$	$H \otimes H$
0.05569 ± 0.0006	$ -\rangle \otimes -\rangle$	D_{ψ}
0.05569 ± 0.0006	$ +\rangle \otimes +\rangle$	D_{ψ}
0.05418 ± 0.0020	$ -\rangle \otimes -\rangle$	G
0.05418 ± 0.0020	$ +\rangle \otimes +\rangle$	G
0.06234 ± 0.0005	$ \psi_s\rangle \otimes \psi_s\rangle$	D_{ψ}
0.05988 ± 0.0006	$ \psi_s\rangle \otimes \psi_s\rangle$	G
0.06009 ± 0.0006	$ \psi_-\rangle$	D_{ψ}
0.05440 ± 0.0008	$ \psi_-\rangle$	G

۷.۳.۱ ولگشت کوانتومی غیریکنواخت

تا کنون بحث خود را به ولگشت کوانتومی یکنواخت^{۲۸} محدود کردیم، یعنی ولگشتی که در آن عملگر سکه‌ی مورد استفاده مستقل از موقعیت مکانی یا فضای سکه، اثر می‌کند. ولگشت هادامارد روی خط نمونه‌ی خوبی

^{۲۸}homogeneous

از این قبیل ولگشت کوانتومی یکنواخت است. در ولگشت هادامارد، عملگر سکه با توجه به حالت سکه (که می‌توانست $|R\rangle$ و $|L\rangle$ باشد) بعد از هر گام حالت سکه را در یک برهم‌نهی مساوی از حالت ممکن قرار می‌داد و عملگر انتقال ذره را در راستای مشخص به نقطه‌ی مجاور منتقل می‌نمود. نشان داده شد که سرعت انتشار این نوع ولگشت با زمان به صورت خطی تغییر می‌کند و شکل توزیع احتمال و نیز انحراف استاندارد برای این نوع ولگشت ترسیم شد.

در این بخش به معرفی نوع دیگری از ولگشت کوانتومی خواهیم پرداخت که به ولگشت کوانتومی غیریکنواخت ^{۲۹} شهرت دارد. در این نوع ولگشت، عملگر سکه دارای این خصوصیت است که می‌تواند وابسته به حالت سکه و نیز موقعیت ذره باشد. این تعریف به نتایج جالبی منجر می‌شود، از جمله اینکه ولگرد می‌تواند مقید به یک ناحیه‌ی خاص در فضا در تمام زمان‌ها شود [۳۷]. ولگشت کوانتومی غیریکنواخت را همانند ولگشت استاندارد تعریف می‌کنیم با این تفاوت که حالا عملگر سکه وابسته به موقعیت کنونی ذره خواهد بود. بنابر این تحول یکانی ولگشت با رابطه‌ی زیر توصیف می‌شود [۳۸]:

$$U = S \left(\sum_m |m\rangle \langle m| \otimes C_m \right) \quad (۸۰.۱)$$

در حالت ولگشت کوانتومی یک‌بعدی، C_m هر عملگر یکانی دلخواه در فضای دوبعدی، می‌تواند باشد و در واقع هیچگونه محدودیتی وجود ندارد که ذره فقط به نقاط مجاور منتقل شود، به عبارت دیگر امکان گذار ذره از یک نقطه به سایر نقاط روی خط وجود دارد.

به عنوان مثال عملگر سکه‌ی متناوب را در نظر می‌گیریم که در پایه‌های $|L\rangle$ و $|R\rangle$ با ماتریس یکانی زیر توصیف می‌شود:

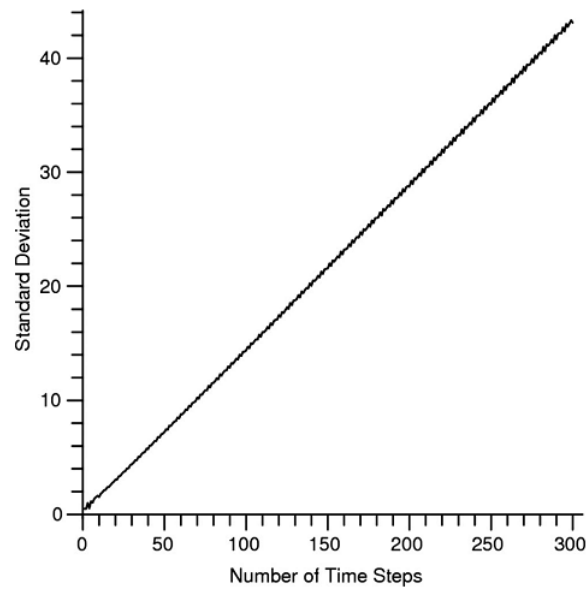
$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) & -\sin\left(\frac{n\pi}{k}\right) \\ \sin\left(\frac{n\pi}{k}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) \end{pmatrix} \quad (۸۱.۱)$$

که k یک عدد صحیح دلخواه است و دوره‌ی این ولگشت $2k$ می‌باشد. اثر عملگر فوق در فضای سکه به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} C_n |n, L\rangle &= \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) |n, L\rangle + \sin\left(\frac{n\pi}{k}\right) |n, R\rangle \\ C_n |n, R\rangle &= -\sin\left(\frac{n\pi}{k}\right) |n, L\rangle + \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) |n, R\rangle \end{aligned} \quad (۸۲.۱)$$

در شکل ۱۲.۱، انحراف معیار برای این نوع ولگشت نمایش داده شده است. برای مطالعه‌ی جزئیات بیشتر و نتایج حاصله، خواننده را به مرجع [۳۷] ارجاع می‌دهیم. به عنوان نمونه اثبات می‌شود برای ولگشت داده شده با رابطه‌ی (۸۱.۱) به ازای k های زوج، ولگشت کران‌دار خواهد بود و برای k های فرد بدون کران می‌باشد.

^{۲۹}inhomogeneous



شکل ۱۲.۱: انحراف معیار ولگشت کوانتومی یک بعدی با عملگر سکه‌ی (۸۱.۱) و حالت اولیه‌ی $\frac{1}{\sqrt{4}}(|0, L\rangle + |0, R\rangle)$ و $k = 4$ [۳۷]

فصل ۲

الگوریتم‌های کوانتومی

۱.۲ مقدمه

یک الگوریتم مجموعه‌ای از دستورالعمل‌هایی است که به منظور اجرای برخی عملیات خاص در یک کامپیوتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. بخش عظیمی از تلاش‌ها برای توسعه‌ی کامپیوترهای کوانتومی ناشی از ظهور الگوریتم‌های جدید کوانتومی است که در بیشتر موارد به طور قابل توجهی کارآمدتر از نمونه‌های کلاسیکی است [۳۹]. این امر ناشی از ماهیت سیستم‌های کوانتومی و ویژگی‌هایی مثل برهم‌نهی، تداخل کیوبیت‌ها و... است که امکان محاسبات موازی^۱ را به کامپیوترهای کوانتومی می‌دهد. به بیان دیگر از آنجایی که سیستم کوانتومی می‌تواند در برهم‌نهی خطی از تمام حالات ممکن باشد امکان پردازش همزمان داده‌ها را فراهم می‌کند. به منظور وارد کردن مسائل به درون یک کامپیوتر ما نیاز داریم تا الگوریتم‌ها را به دقت تعریف و بنیانگذاری کنیم، و برای نشان دادن برتری محاسبات کوانتومی و بهره‌گیری از پدیده‌های کوانتومی، لازم است تا الگوریتم‌های کوانتومی را پایه‌گذاری کنیم. درحالی که فرموله کردن الگوریتم‌های کوانتومی آسان نیست، آن‌ها نتایج جالبی را پدید می‌آورند.

به طور کلی الگوریتم‌های کوانتومی را می‌توان در پنج گروه اصلی دسته‌بندی کرد [۴۰]

۱- الگوریتم‌هایی که بر پایه‌ی تبدیل فوری‌ی کوانتومی هستند

۲- الگوریتم‌های بر مبنای تقویت دامنه^۲

۳- الگوریتم‌های شبیه‌سازی کوانتومی^۳

۴- الگوریتم‌های آدیاباتیک^۴

۵- الگوریتم‌های ولگشت کوانتومی

^۱Parallel computing

^۲Amplitude amplification

^۳quantum simulation algorithm

^۴Adiabatic algorithm

الگوریتم‌های شبیه‌سازی کوانتومی مبنا و انگیزه‌ی اصلی کارهای فاینمن برای محاسبات کوانتومی بود [۵]. ایده‌ی اصلی به صورت تجزیه‌ی یک هامیلتونی مشخص به مجموع چند هامیلتونی ساده‌تر و سپس شبیه‌سازی این هامیلتونی است. در اینجا به ذکر جزئیات نمی‌پردازیم و خواننده را به مقاله‌ی مروری [۴۱] ارجاع می‌دهیم. الگوریتم‌های آدیباتیک یک دسته‌ی پیشرفته از الگوریتم‌های کوانتومی است که توسط [۴۲] پیشنهاد شد. ایده‌ی اصلی بدین صورت است که یک مسئله‌ی دشوار را به حالت پایه‌ی یک هامیلتونی که به آسانی قابل شبیه‌سازی است تصویر^۵ می‌کنیم آنگاه به سیستم اجازه می‌دهیم که بسیار آرام تحول یابد. شرط اساسی این الگوریتم تحول به قدر کافی آرام است و سرانجام سیستم به حالتی ختم می‌شود که جواب مسئله است. ولگشت‌های کوانتومی نیز به عنوان ابزاری کارآمد برای مقاصد الگوریتمی توسط گروه‌های مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته است (به عنوان نمونه [۴۳]).

۲.۲ الگوریتم کوانتومی دویچ

تابع مفروض $\{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\} : f$ داده شده است، می‌خواهیم بدانیم این تابع متوازن^۶ است یا ثابت^۷ (تابع ثابت تابعی است که خروجی‌اش همواره یک عدد ثابت و مستقل از ورودی است، اما تابع متوازن به ازای نیمی از ورودی‌ها دارای مقدار ۰ و به ازای نیم دیگر مقدار ۱ را می‌دهد). در ساده‌ترین حالت فرض کنید این تابع یک تابع تک‌بیتی است. در حالت کلاسیکی حداقل یک بار باید $f(0)$ و یک بار باید $f(1)$ را محاسبه کنیم، یعنی دوبار فراخوانی تابع لازم است. نخستین بار دویچ نشان داد که کمک توازی کوانتومی و تداخل کوانتومی می‌توان الگوریتمی ارائه داد که این مسئله را فقط با یک بار فراخوانی تابع حل کند. الگوریتم دویچ، نخستین و شاید ساده‌ترین الگوریتم کوانتومی ارائه شده می‌باشد که دویچ در خلال مطالعاتش در مورد معرفی مدلی از محاسبات کوانتومی شامل مدل مداری^۸ و مدل ماشین تورینگ^۹ ارائه داد [۴۴]. کلید طلایی الگوریتم دویچ در قابلیت غیرکلاسیکی وارد کردن برهم‌نهی کیوبیت‌ها به عنوان کیوبیت دوم ورودی می‌باشد. اولین گام معرفی یک عملگر یکانی است که روی دو کیوبیت اثر می‌کند و دو کیوبیت دیگر را به عنوان خروجی تولید می‌کند. برای تابع تک‌کیوبیتی f این عملگر با U_f نشان داده می‌شود و به صورت زیر اثر می‌کند [۴۵]:

$$U_f|x\rangle|y\rangle = |x\rangle|f(x) \oplus y\rangle \quad (۱.۲)$$

بنابراین اگر $|y\rangle = |0\rangle$ باشد، اثر عملگر فوق به صورت $|x\rangle|f(x)\rangle$ خواهد بود. الگوریتم عملگر فوق را روی حالت دو کیوبیته $|+\rangle|-\rangle$ اعمال می‌کند، یعنی داریم:

$$\begin{aligned} U_f(|+\rangle|-\rangle) &= U_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle(|0 \oplus f(0)\rangle - |1 \oplus f(0)\rangle) + |1\rangle(|0 \oplus f(1)\rangle - |1 \oplus f(1)\rangle)) \quad (۲.۲) \end{aligned}$$

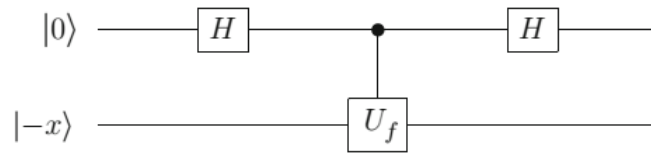
^۵Encode

^۶Balanced

^۷Constant

^۸Circuit model

^۹Turing machine



شکل ۱.۲: مدار کوانتومی برای الگوریتم دویچ

به بیان دیگر خواهیم داشت

$$U_f(|+\rangle|-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=0}^1 |x\rangle(|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle) \quad (3.2)$$

اگر $f(x) = 0$ باشد، $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle)$ تبدیل می‌شود به $|-\rangle$ و $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ را هادامارد را روی کیوبیت اول اعمال کنیم سپس آن را اندازه‌گیری کنیم. در حالت اول $|0\rangle$ و در حالت دوم $|1\rangle$ را بدست خواهیم آورد. بنابراین فقط با یک بار فراخوانی U_f توانستیم با اطمینان بگوییم تابع f ثابت است یا خیر.

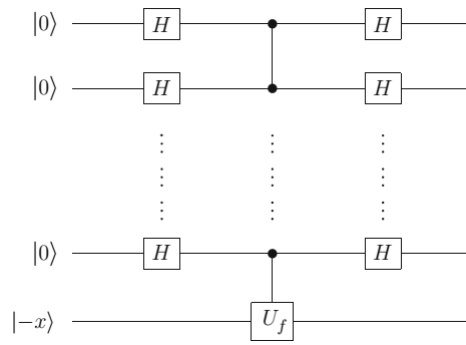
$$U_f \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=0}^1 |x\rangle|-\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=0}^1 (-1)^{f(x)} |x\rangle|-\rangle \quad (4.2)$$

برای تابع ثابت، $(-1)^{f(x)}$ یک فاز کلی است و فاقد اثرات فیزیکی است، و حالت سیستم $|+\rangle|-\rangle$ می‌شود. اما اگر تابع f ثابت نباشد، تا حد یک فاز کلی، حالت سیستم به صورت $|-\rangle|-\rangle$ خواهد بود. حالا اگر تبدیل هادامارد را روی کیوبیت اول اعمال کنیم سپس آن را اندازه‌گیری کنیم. در حالت اول $|0\rangle$ و در حالت دوم $|1\rangle$ را بدست خواهیم آورد. بنابراین فقط با یک بار فراخوانی U_f توانستیم با اطمینان بگوییم تابع f ثابت است یا خیر. در شکل ۱.۲ مدار کوانتومی این الگوریتم نشان داده شده است.

۳.۲ الگوریتم کوانتومی دویچ جوزا

در این بخش به تعمیم الگوریتم دویچ به سیستم n کیوبیتی می‌پردازیم. اکنون فرض کنید تابع بولین به شکل $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ داده شده است و هدف این است بدانیم تابع ثابت است یا خیر، آن هم با کمترین میزان فراخوانی تابع. در حالت کلاسیکی در بدترین حالت باید $2^{(n-1)} + 1$ بار تابع را فراخوانی کنیم ($2^n + 1$ بار) ولی نشان می‌دهیم با الگوریتم کوانتومی تنها یک بار فراخوانی تابع لازم است. این فرآیند در مدار شکل ۲.۲ نمایش داده شده است. یادآوری می‌کنیم که اثر عملگر هادامارد روی سیستم n کیوبیتی $\otimes |x_{n-1}\rangle = |x\rangle$ در پایه‌های محاسباتی به صورت زیر خلاصه می‌شود [۴۶]

$$H|x_j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (-1)^{x_j}|1\rangle) \quad (5.2)$$



شکل ۲.۰۲: مدار کوانتومی برای مسئله‌ی دوپیچ جوزا

که $x_j = 0$ یا $x_j = 1$ می‌تواند باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{n-1} |x_j\rangle &\xrightarrow{H^{\otimes n}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \prod_{j=0}^{n-1} (|\cdot\rangle + (-1)^{x_j} |1\rangle) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{z=0}^{2^{n-1}} \left(\prod_{j; z_j=1} (-1)^{x_j} \right) |z\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{z=0}^{2^{n-1}} \left(\prod_{j=0}^{n-1} (-1)^{x_j z_j} \right) |z\rangle \end{aligned} \quad (6.2)$$

توجه داشته باشید که $\prod_{j=0}^{n-1} (-1)^{x_j z_j} = (-1)^{\sum_{j=0}^{n-1} x_j z_j} = (-1)^{[\sum_{j=0}^{n-1} x_j z_j \bmod 2]}$ را به صورت $x \cdot z = \sum_{j=0}^{n-1} x_j z_j$ تعریف می‌کنیم، بنابراین

$$|x\rangle \longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{z=0}^{2^{n-1}} (-1)^{x \cdot z} |z\rangle \quad (7.2)$$

به عبارت دیگر، حالت معرف یک عدد بایناری n تاییه، به یک برهم‌نهی همسنگ از تمام 2^n حالات بایناری n کیوبیت تبدیل می‌شود و علامت هر جمله بوسیله‌ی پاریمته‌ی ضرب نقطه‌ای بین حالت مفروض و حالت بایناری تعیین می‌شود. با اعمال این نتیجه به n کیوبیت کنترلی، $|\psi_{in}\rangle = |0\rangle$ ، حالت سیستم n کیوبیتی را بعد از اولین هادامارد به صورت زیر خواهیم داشت

$$|\psi_1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{z=0}^{2^{n-1}} |z\rangle \quad (8.2)$$

حالا به بررسی اثر گیت $f - CNOT$ روی این حالت می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که این گیت به صورت $|x\rangle|y\rangle \longrightarrow |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$ عمل می‌کند، که $|x\rangle$ حالت n کیوبیت کنترلی، و $|y\rangle$ حالت تک کیوبیت هدف است. بنابراین

$$\begin{aligned} |x\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|\cdot\rangle - |1\rangle) &\longrightarrow |x\rangle \otimes (|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle) \\ &= (-1)^{f(x)} |x\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|\cdot\rangle - |1\rangle) \end{aligned} \quad (9.2)$$

با ترکیب این رابطه و رابطه‌ی (۸.۲) حالت سیستم بعد از گیت $f - CNOT$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$|\psi\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)/2} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \quad (10.2)$$

در نهایت با اعمال رابطه‌ی (۷.۲) به این حالت، حالت نهایی سیستم بعد از مجموعه گیت‌های هادامارد به نتیجه‌ی زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} |\psi_{in}\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) &\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1/2} \sum_{x,z=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)+x \cdot z} |z\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\ &= |\psi_{out}\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \end{aligned} \quad (11.2)$$

برای تابع ثابت داریم: $(-1)^{f(x)} = (-1)^{f(\cdot)}$ ، در نتیجه خواهیم داشت:

$$(12.2)$$

$$|\psi_{out}\rangle = (-1)^{f(\cdot)} \frac{1}{2^n} \sum_z \left(\sum_x (-1)^{x \cdot z} \right) |z\rangle = (-1)^{f(\cdot)} \frac{1}{2^n} \sum_x (-1)^{x \cdot \cdot} |0\rangle = (-1)^{f(\cdot)} |0\rangle$$

$$\left(\sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot y} \right) = \begin{cases} 2^n & y = \cdot \\ \cdot & y \neq \cdot \end{cases} \quad \text{(توجه داشته باشید که:)}$$

در حالی که برای تابع متوازن داریم:

$$|\psi_{out}\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_z \left(\sum_{x \in X} (-1)^{x \cdot z} - \sum_{x \notin X} (-1)^{x \cdot z} \right) |z\rangle \quad (13.2)$$

که $X = \{x | f(x) = \cdot\}$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\langle \cdot | \psi_{out} \rangle = \begin{cases} \cdot & \text{balanced} \\ (-1)^{f(\cdot)} & \text{Constant} \end{cases} \quad (14.2)$$

بنابراین با اندازه‌گیری هرکدام از n کیوبیت خروجی، متوجه خواهیم شد که:

۱. تابع ثابت است اگر تمام کیوبیت‌ها را در حالت \cdot پیدا کنیم
 ۲. تابع متوازن است اگر تمام کیوبیت‌ها را در حالت \cdot آنها پیدا نکنیم
- توجه داشته باشید که این فرآیند فقط با یکبار فراخوانی تابع انجام می‌پذیرد.

۴.۲ الگوریتم جستجوی کوانتومی گراور

در این بخش به عنوان یکی از مهمترین الگوریتم‌های کوانتومی به توصیف الگوریتم جستجوی گراور می‌پردازیم که اولین بار در سال ۱۹۹۷ توسط گراور ارائه شد. [۴۷] این الگوریتم با یک برهم‌نهی مساوی^{۱۰} از تمام حالات

^{۱۰}Equal superposition

پایه آغاز کرده، با بهره‌گیری از توازی کوانتومی دامنه‌ی احتمال آیتم مورد جستجو را افزایش می‌دهد. یعنی بر خلاف الگوریتم جستجوی کلاسیکی که دامنه‌ی غیرجواب‌ها مدام کاهش می‌یابد، در الگوریتم کوانتومی دامنه‌ی جواب‌ها مدام تقویت می‌شود. ایده‌ی اصلی الگوریتم به صورت دوران بردار حالت در فضای هیلبرت دوبعدی است که این فضا توسط بردارهای حالت اولیه و نهایی جاروب می‌شود. نشان داده شده است [۴۸] که الگوریتم گراور بهینه است بدان معنی که هیچ الگوریتم دیگری قادر به حل مسئله‌ی جستجو با سرعتی بهتر از الگوریتم گراور نیست.

۱.۴.۲ مسئله‌ی جستجو

یک پایگاه داده‌ی بزرگ و نامرتب شامل N عضو بدون هیچ‌گونه اطلاعات اولیه موجود است، هدف یافتن M مولفه است که شرایط خاصی را ارضا می‌کنند. از نگاه ریاضیاتی این پایگاه داده را می‌توان در قالب یک جدول یا به عبارت دیگر به صورت یک تابع f نمایش داد. برای راحتی اعضای این مجموعه را با یک اندیس $q_i \in Q$ که $Q = \{1, 2, \dots, N\}$ برچسب‌گذاری می‌کنیم، در این صورت تابع بولین^{۱۱} به صورت زیر قابل بیان است

$$f : Q \rightarrow \{0, 1\} \quad (۱۵.۲)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = x. \\ 0 & x \neq x. \end{cases} \quad (۱۶.۲)$$

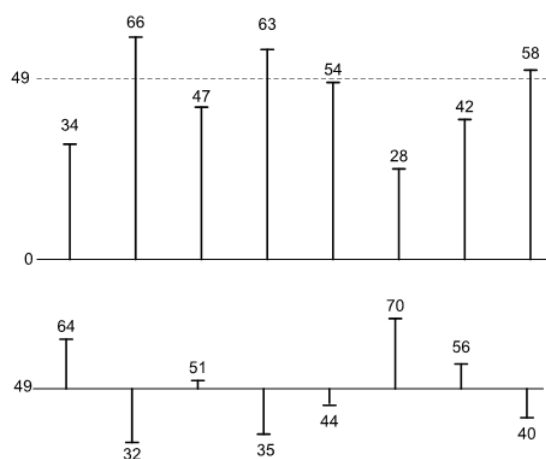
رهیافت کلاسیکی برای حل این مسئله چنین است که به طور مکرر یک عضو از این مجموعه را انتخاب می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که آیا جواب هست یا خیر، اگر جواب باشد الگوریتم متوقف می‌شود در غیر این صورت تا رسیدن به جواب الگوریتم ادامه می‌یابد. احتمال موفقیت این الگوریتم از مرتبه‌ی $O\left(\frac{N}{M}\right)$ است و هدف مورد جستجو بعد از تعداد گام مناسب با احتمال $1 - O(1/N)$ یافت می‌شود. الگوریتم گراور بر پایه‌ی دو تبدیل اساسی است، یکی انعکاس نسبت به میانگین و دیگری وارونی فاز^{۱۲}، و عمل جستجوی گفته شده را در زمانی از مرتبه‌ی $\sqrt{N/M}$ انجام می‌دهد. برای مجموعه‌ی صحیح $Q = \{q_i\}$ با مقدار متوسط $\bar{q} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i$ انعکاس نسبت به متوسط به صورت زیر توصیف می‌شود [۴۹]

$$P : q_i \rightarrow q'_i = \bar{q} + (\bar{q} - q_i) = 2\bar{q} - q_i \quad (۱۷.۲)$$

به عنوان یک نمونه از انعکاس نسبت به مقدار میانگین به شکل ۳.۲ نگاه کنید. مقدار میانگین این مجموعه

^{۱۱} Boolean function

^{۱۲} Phase inversion



شکل ۳.۲: انعکاس حول مقدار متوسط

$\bar{q} = 49$ است و داده‌ها به صورت زیر تبدیل می‌شوند

$$34 \mapsto 98 - 34 = 64$$

$$54 \mapsto 98 - 54 = 44$$

$$66 \mapsto 98 - 66 = 32$$

$$28 \mapsto 98 - 28 = 70$$

$$47 \mapsto 98 - 47 = 51$$

$$42 \mapsto 98 - 42 = 56$$

$$63 \mapsto 98 - 63 = 35$$

$$58 \mapsto 98 - 58 = 40$$

انعکاس نسبت به متوسط به شکل ماتریسی زیر قابل بیان است

$$Q' = 2PQ - Q = (2P - I)Q \quad (18.2)$$

که در آن

$$P = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (19.2)$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad (20.2)$$

$$Q' = \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ \vdots \\ q'_n \end{pmatrix} \quad (21.2)$$

گفته شد که الگوریتم گراور بر پایه‌ی دو تبدیل اصلی استوار است، وارونی فاز و انعکاس نسبت به متوسط. حال به توصیف این دو تبدیل و چگونگی پیاده‌سازی آنها توسط عملگرهای کوانتومی می‌پردازیم.

۲.۴.۲ اوراکل و وارونی فاز

اوراکل^{۱۳} یک موجود انتزاعی و ابزار کارآمد در طراحی الگوریتم‌ها است. اوراکل قادر است تا جواب‌ها را تشخیص^{۱۴} دهد حتی اگر از قبل آنها را نشناسد^{۱۵} [۵۰].

اوراکل (جعبه سیاه کوانتومی) با یک تبدیل یکانی قابل پیاده‌سازی است، سازوکار درونی اوراکل در حال حاضر برای ما فاقد اهمیت است، چیزی که حائز اهمیت است چگونگی تشخیص جواب‌ها به کمک کیوبیت اوراکل (که در فضای اوراکل تعریف می‌شود) است. در پایه‌های محاسباتی می‌توان اوراکل را به صورت زیر نوشت

$$\hat{O} |x\rangle |y\rangle = |x\rangle |y \oplus f(x)\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle |y\rangle \quad (22.2)$$

در اینجا $|y\rangle$ کیوبیت اوراکل و $|x\rangle$ شمارنده‌ی اندیس‌ها در فضای جستجو است و \oplus جمع در مبنای دو یا همان عملگر XOR می‌باشد. کیوبیت اوراکل می‌تواند $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ یا هر ترکیب خطی از آنها باشد. اگر کیوبیت اول همان آیتم مورد جستجو باشد آنگاه کیوبیت اوراکل توسط عملگر اوراکل فلیپ می‌شود. طبق روال معمول کیوبیت اوراکل را به صورت $|y\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ انتخاب میکنیم، در نتیجه خواهیم داشت

$$\hat{O} \left(|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = (-1)^{f(x)} |x\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \begin{cases} -|x\rangle |-\rangle & x = x. \\ |x\rangle |-\rangle & x \neq x. \end{cases} \quad (23.2)$$

^{۱۳}Oracle

^{۱۴}Recognize

^{۱۵}Know

یعنی اوراکل جواب را تشخیص می‌دهد، فاز آنرا معکوس می‌کند و در نهایت کیوبیت اوراکل بدون تغییر باقی می‌ماند. بنابر این اثر این عملگر روی فضای جستجو به صورت یک انعکاس ظاهر می‌شود. در بسیاری از متون عملگر اوراکل را به صورت $|\beta\rangle\langle\beta| - 2|\beta\rangle\langle\beta|$ نشان می‌دهند که $|\beta\rangle$ ترکیب خطی تمام حالت‌هایی است که جواب می‌باشند.

۳.۴.۲ انعکاس نسبت به متوسط (جابه‌جایی فاز شرطی)

برای حالت اولیه $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$ که برهم‌نهی همسنگ از تمام حالات ممکن است عملگری که توصیف‌کننده‌ی جابه‌جایی فاز شرطی یا انعکاس نسبت به متوسط است به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$D_\psi = 2P_\psi - I = 2|\psi\rangle\langle\psi| - I \quad (24.2)$$

یا به صورت ماتریسی

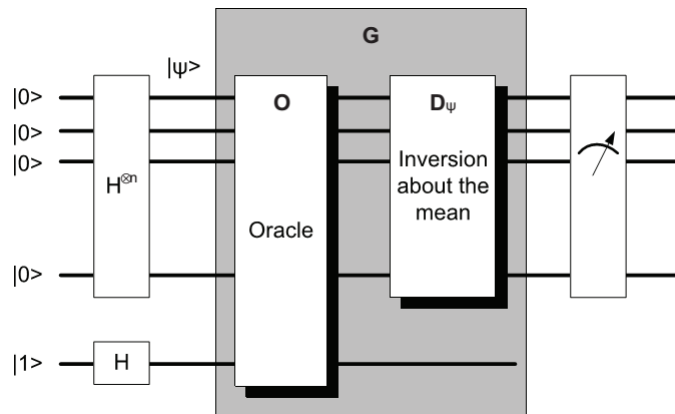
$$D_\psi = \begin{pmatrix} \frac{2}{N} - 1 & \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N} \\ \vdots & \frac{2}{N} - 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N} - 1 & \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N} \\ \vdots & \frac{2}{N} & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N} & \cdots & \cdots & \frac{2}{N} \\ \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N} & \cdots & \cdots & \frac{2}{N} - 1 \end{pmatrix}_{N \times N} \quad (25.2)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $D_\psi D_\psi^\dagger = D_\psi^\dagger D_\psi = I$ یعنی عملگر جابه‌جایی فاز شرطی یکانی است. می‌توان این عملگر را روی حالت دلخواه $|a\rangle = [a_0, a_1, \dots, a_{N-1}]^T$ اثر داد و دامنه‌ی k امین بردار پایه (برداری که همه‌ی مولفه‌هایش ۰ هستند به جز مولفه‌ی k ام که ۱ می‌باشد) را مشاهده کرد، یعنی:

$$\begin{aligned} \langle k | D_\psi | a \rangle &= \frac{2}{N} a_0 + \cdots + \left(\frac{2}{N} a_k - a_k \right) + \cdots + \frac{2}{N} a_{N-1} \\ &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} a_i - a_k = 2\bar{a} - a_k \end{aligned} \quad (26.2)$$

یعنی، اثر عملگر جابه‌جایی فاز شرطی روی حالت عمومی $\sum_k a_k |k\rangle$ به صورت $\sum_k (-a_k + 2\bar{a}) |k\rangle$ است، که $\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_k a_k$ متوسط دامنه‌ها است. این رابطه نشان می‌دهد که دامنه‌ی a_k حول مقدار متوسط دامنه‌ها انعکاس یافته است. به همین دلیل عملگر جابه‌جایی فاز شرطی را "انعکاس حول متوسط" می‌نامند. در شکل ۳.۲ نمونه‌ای از این انعکاس نشان داده شده است. در شکل ۴.۲ مراحل الگوریتم گراور نمایش داده شده است. الگوریتم گراور حاصل از اعمال متوالی عملگر گراور

$$G = (2|\psi\rangle\langle\psi| - I) O \quad (27.2)$$



شکل ۴.۲: مدار کوانتومی الگوریتم گراور

روی حالت ورودی اولیه است که شرایطی را فراهم میکند تا دامنه‌ی احتمال حالت مورد جستجو نسبت به سایر حالت‌ها مدام افزایش یابد و در نهایت با اندازه‌گیری در پایه‌های محاسباتی جواب را با بیشترین احتمال بدست آوریم. جستار گراور ۲۷.۲ حاصلضرب دو انعکاس متوالی در فضای اقلیدسی دو بعدی است و معادل یک دوران (تبدیل یکانی) در این فضا می‌باشد. [۴۹] الگوریتم گراور را به صورت مختصر می‌توان بدین صورت توصیف کرد: ابتدا یک تبدیل هادامارد n بعدی را به منظور ایجاد برهم‌نهی همسنگ از تمام حالات پایه (تمام اعضای پایگاه داده)، اعمال می‌کنیم. سپس به تعداد \sqrt{N} بار از جستار گراور استفاده می‌کنیم، در هر مرحله از الگوریتم فاز جواب‌ها به اندازه‌ی θ رادیان دوران می‌کند و در نتیجه باعث تقویت دامنه‌ی جواب‌ها می‌شود. فرض کنید در پایگاه داده D تعداد $M \leq N$ جواب برای مسئله وجود دارد، اگر S مجموعه‌ی حالاتی باشد که جواب هستند و \bar{S} مجموعه‌ی حالاتی که جواب نیستند در این صورت روابط زیر را داریم

$$D = S \cup \bar{S}$$

$$|D| = N, |S| = M, |\bar{S}| = N - M \quad (28.2)$$

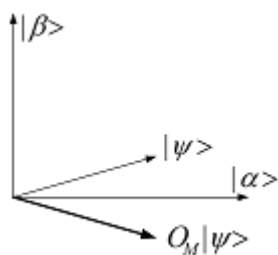
با در نظر گرفتن حالت اولیه به صورت

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle \quad (29.2)$$

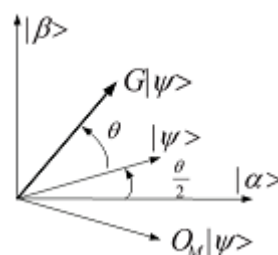
حالت‌های متعامد بهنجار α و β را به صورت زیر تعریف می‌کنیم، که این حالت‌ها به ترتیب نمایش دهنده‌ی برهم‌نهی حالت‌های غیر جواب و جواب هستند.

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{N - M}} \sum_{x \in \bar{S}} |x\rangle \quad (30.2)$$

$$|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x \in S} |x\rangle \quad (31.2)$$



شکل ۵.۲: وارونی فاز



شکل ۶.۲: نمایش هندسی جستار گراور

در اینجا ذکر دو نکته حائز اهمیت است که در مسئله‌ی جستجو در پایگاه داده‌ی مرتب (مثلاً دفترچه تلفن)، با پیشروی الگوریتم، فضای جستجو کوچک و کوچکتر می‌شود و رسیدن به جواب آسان‌تر است. همچنین هنگامی که هیچ‌گونه اطلاعات اولیه‌ای از پایگاه در اختیار نیست، الگوریتم با یک برهم‌نهی از تمام حالات اولیه آغاز می‌کند. با توجه به نقش عملگرهای گفته شده و انعکاس‌های موجود و با توجه به شکل‌های ۵.۲ و ۶.۲ می‌توان نوشت

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{N-M}{N}} |\alpha\rangle + \sqrt{\frac{M}{N}} |\beta\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |\alpha\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |\beta\rangle \quad (۳۲.۲)$$

و بسادگی می‌توان نشان داد

$$G^k |\psi\rangle = \cos \left(\frac{2k+1}{2} \theta \right) |\alpha\rangle + \sin \left(\frac{2k+1}{2} \theta \right) |\beta\rangle \quad (۳۳.۲)$$

یعنی هرگاه روی حالت اولیه‌ی (۲۹.۲) به تعداد k بار عملگر گراور را اثر دهیم، این حالت به اندازه‌ی $k\theta$ چرخانده می‌شود، برای اینکه ببینیم این حالت چه مقدار به حالت مطلوب β نزدیک شده است باید عناصر ماتریسی $\langle \beta | G^k | \psi \rangle$ را حساب کنیم که برابر است با $\sin(k\theta + \frac{\theta}{2})$ از طرفی با توجه به اینکه $O|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ و $O|\beta\rangle = -|\beta\rangle$ ، و رابطه‌ی (۳۲.۲) شکل ماتریسی عملگر گراور را می‌توان در پایه‌های $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ به صورت زیر نوشت:

$$G = (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)O = \begin{pmatrix} \langle\beta|G|\beta\rangle & \langle\beta|G|\alpha\rangle \\ \langle\alpha|G|\beta\rangle & \langle\alpha|G|\alpha\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (۳۴.۲)$$

حال سوال اساسی که مطرح می‌شود این است که: چند جستار لازم است که بتوانیم به حد کافی و مطلوب به جواب نزدیک شویم؟

با توجه به شکل ۶.۲ هرگاه حالت اولیه را به اندازه‌ی $(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})$ دوران دهیم به جواب خواهیم رسید. پس داریم

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{M}{N}} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} = \cos^{-1}\sqrt{\frac{M}{N}} \quad (35.2)$$

در نتیجه تعداد دفعات مورد نیاز برای تکرار الگوریتم تا رسیدن به جواب قانع کننده به صورت

$$R = CI\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}}{\theta}\right) = CI\left(\frac{\cos^{-1}\sqrt{\frac{M}{N}}}{\theta}\right) \quad (36.2)$$

است. که عملگر CI عمل رندسازی به نزدیکترین عدد را انجام می‌دهد. در حالی که $M \leq N$

$$R \leq \left\lceil \frac{\frac{\pi}{2}}{\theta} \right\rceil \Rightarrow R \leq \left\lceil \frac{\pi}{2\theta} \right\rceil \quad (37.2)$$

از طرفی

$$\sin\frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{M}{N}} \Rightarrow \theta \simeq 2\sqrt{\frac{M}{N}} \quad (38.2)$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$R \leq \left\lceil \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{N}{M}} \right\rceil \Rightarrow R = O\left(\sqrt{\frac{N}{M}}\right) \quad (39.2)$$

می‌توان نشان داد الگوریتم گراور نسبت به حالت اولیه وابستگی چندانی ندارد و با تغییر جزئی حالت اولیه کیفیت الگوریتم به قوت خود باقی می‌ماند [۵۱].

الگوریتم گراور را با یک مثال به پایان می‌رسانیم:

یک سیستم کوانتومی چهارکیوبیته را در نظر بگیرید، در این پایگاه داده $N = 2^4 = 16$ عضو، دنبال یافتن یک عضو خاص هستیم. پایه‌های محاسباتی ما حالا مجموعه‌ی زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} & \{|0000\rangle, |0001\rangle, |0010\rangle, |0011\rangle, |0100\rangle, |0101\rangle, |0110\rangle \\ & , |0111\rangle, |1000\rangle, |1001\rangle, |1010\rangle, |1011\rangle, |1100\rangle \\ & , |1101\rangle, |1110\rangle, |1111\rangle\} \end{aligned} \quad (40.2)$$

و فرض کنید عضو مورد جستجو عبارت است از $|11\rangle = |0111\rangle$. گام به گام مراحل الگوریتم را اجرا می‌کنیم: ابتدا کیوبیت اول را به صورت $|0000\rangle$ و ثابت‌کننده‌ی دوم را در حالت $|1\rangle$ انتخاب می‌کنیم (یادآوری می‌کنیم که تعداد کیوبیت‌های ثابت‌کننده‌ی اول به تعداد $\log(N)$ کیوبیت باید باشد [۵۲]). حالا عملگر هادامارد را اعمال می‌کنیم

$$|\psi\rangle = H^{\otimes 4}|0000\rangle = \frac{1}{\sqrt{16}} \sum_{i=0}^{15} |i\rangle = \frac{1}{\sqrt{16}} (\sqrt{15}|\xi\rangle + |1011\rangle) \quad (41.2)$$

که $|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}} \sum_{i=0, i \neq 11}^{15} |i\rangle$. همچنین

$$H|1\rangle = |- \rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (42.2)$$

از رابطه‌ی (۳۹.۲) حداقل ۳ جستار نیاز است. در جستار اول:

$$|\psi_1\rangle = \hat{O}|\psi\rangle|- \rangle = \left(\sqrt{\frac{15}{16}}|\xi\rangle - \sqrt{\frac{1}{16}}|1011\rangle \right) |- \rangle \quad (43.2)$$

$$|\psi_2\rangle = \hat{D}_\psi|\psi_1\rangle = \left(\frac{3}{16}\sqrt{15}|\xi\rangle + \frac{11}{16}|1011\rangle \right) |- \rangle \quad (44.2)$$

در گام دوم:

$$|\psi_3\rangle = \hat{O}|\psi_2\rangle = \left(\frac{3}{16}\sqrt{15}|\xi\rangle - \frac{11}{16}|1011\rangle \right) |- \rangle \quad (45.2)$$

$$|\psi_4\rangle = \hat{D}_\psi|\psi_3\rangle = \left(\frac{5}{64}\sqrt{15}|\xi\rangle + \frac{61}{64}|1011\rangle \right) |- \rangle \quad (46.2)$$

در گام سوم:

$$|\psi_5\rangle = \hat{O}|\psi_4\rangle = \left(\frac{5}{64}\sqrt{15}|\xi\rangle - \frac{61}{64}|1011\rangle \right) |- \rangle \quad (47.2)$$

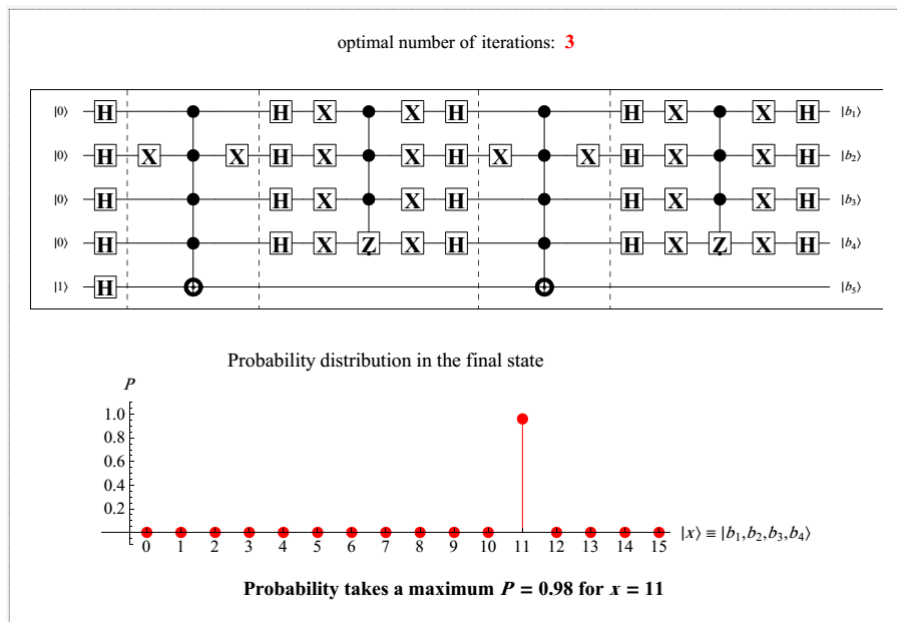
$$|\psi_6\rangle = \hat{D}_\psi|\psi_5\rangle = \left(\frac{-13}{256}\sqrt{15}|\xi\rangle + \frac{251}{256}|1011\rangle \right) |- \rangle \quad (48.2)$$

بنابراین با اندازه‌گیری حالت سیستم بعد از سه جستار با احتمال $0.96 \approx \left| \frac{251}{256} \right|^2$ به حالت مورد جستجو

دست خواهیم یافت. و این افزایش سرعت مربعی در حد N های بزرگ بسیار مشهود خواهد بود [۵۳].

در شکل ۷.۲ شبیه‌سازی رایانه‌ای و مدار کوانتومی جستجوی گراور برای ۴ کیوبیت و در حالتی که مورد

جستجو عدد ۱۱ است بعد از ۳ گام نمایش داده شده است.



شکل ۰.۲: مدار کوانتومی و توزیع احتمال الگوریتم گراور در حالت ۴ کیوبیتی (پایگاه داده با ۱۶ عضو): <http://demonstrations.wolfram.com>

[//demonstrations.wolfram.com](http://demonstrations.wolfram.com)

الگوریتم جستجوی ولگشت کوانتومی

۱.۳ جستجو بر مبنای ولگشت گسسته

در بخش‌های قبل دیدیم که الگوریتم گراور قادر است تا یک هدف خاص را در میان پایگاه داده‌ی نامرتب با افزایش سرعت مربعی نسبت به الگوریتم‌های کلاسیکی جستجو کند. تکنیک اصلی مورد استفاده در این الگوریتم "تقویت دامنه" ^۱ است [۵۴]. اما الگوریتم گراور قادر به تحلیل همه مسائل نیست و در مواردی حتی سرعت کندتری نسبت به الگوریتم‌های کلاسیکی دارد، به عنوان مثال بنیوف ^۲ در مقاله‌ی خود تحت عنوان "جستجوی مکان با روپات کوانتومی" [۵۵]، نشان داده است که در مسئله‌ی جستجو به منظور یافتن یک ناحیه‌ی فضایی مشخص در فضا، هنگامی که در یک شبکه‌ی دوبعدی با ابعاد $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ جستجو را انجام می‌دهیم، اعمال مستقیم الگوریتم گراور در قیاس با مسئله‌ی کلاسیکی هیچ گونه بهبودی در روند الگوریتم را در بر ندارد. ولگشت‌های کوانتومی به طور موفقیت‌آمیز به چندین الگوریتم کوانتومی اعمال شده است ([۱۱]، [۵۶] و [۵۷]). همچنین یک "الگوریتم جستجوی انتزاعی" ^۳، بوسیله‌ی ولگشت کوانتومی گسسته، به منظور یافتن یک راس مشخص، روی هر گراف منتظم و دلخواه، با انجام یک اصلاحیه در عملگر سکه‌ی ولگشت استاندارد، پیشنهاد شده است [۹].

نخستین بار شنوی ^۴ و همکارانش، نسخه‌ای از الگوریتم جستجوی کوانتومی بر مبنای ولگشت کوانتومی سکه‌ای روی یک ابرمکعب n بعدی ارائه دادند [۱۰]. از این پس این الگوریتم را با عبارت مخفف SKW ^۵ خواهیم شناخت. الگوریتم ارائه شده به منظور یافتن یک (یا چند) راس مشخص (که توسط یک اوراکل نشان‌دار شده‌اند)، در یک شبکه‌ی مکعبی طراحی شده است و تعداد فراخوانی اوراکل برای یافتن راس نشان‌دار مشابه الگوریتم گراور است. علیرغم این شباهت، الگوریتم SKW از این جهت داری اهمیت است که، در شرایطی که

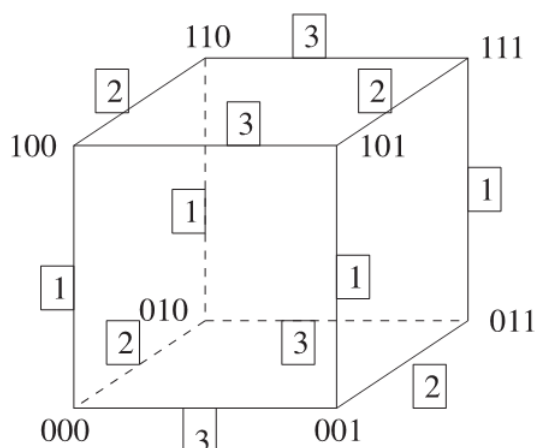
^۱Amplitude Amplification

^۲Beniof

^۳abstract search algorithm

^۴Shenvi

^۵Shenvi, Kempe and Whaley



شکل ۱.۳: نحوه‌ی نگاشت یک پایگاه داده روی مکعب سه‌بعدی

امکان پیاده‌سازی کارآمد عملگر انتشار^۶ در الگوریتم گراور وجود ندارد (زیرا این عملگر در الگوریتم گراور دارای ابعاد $2^n \times 2^n$ است)، در الگوریتم SKW این عملگر دارای بعد $n \times n$ است و امکان پیاده‌سازی آن با سهولت بیشتری فراهم است [۵۸]. در بخش زیر به توصیف کامل این الگوریتم خواهیم پرداخت.

۲.۳ جستجو بر روی یک ابر مکعب

در بخش‌های قبل گفتیم که یکی از مهمترین مزایای استفاده از ولگشت گسسته در طراحی الگوریتم‌های کوانتومی این است که، می‌توان آن را به کمک مجموعه‌ای از گیت‌ها و مدارهای کوانتومی، به صورت کارآمد پیاده‌سازی نمود (به عنوان نمونه به مرجع [۵۹] مراجعه کنید)، و بنابراین تحلیل مسائل را آسانتر کرد. الگوریتم جستجوی SKW بر مبنای ولگشت کوانتومی گسسته، روی یک ابر مکعب^۷ است و یک الگوریتم مناسب برای جستجو در پایگاه داده‌ی نامرتب می‌باشد. در این الگوریتم ولگشت بر روی یک ابر مکعب n بعدی انجام می‌شود و تعداد داده‌های مسئله $N = 2^n$ است. N داده مشخص را بر روی رؤس ابر مکعب قرار می‌دهیم و هر راس را بوسیله‌ی یک رشته‌ی n بیتی نمایش می‌دهیم. دو راس x و y فقط در صورتی بهم متصل هستند که اختلاف وزن همینگ^۸ آن‌ها یک باشد، یعنی $|\vec{x} - \vec{y}| = 1$. در شکل ۱.۳ نحوه‌ی نگاشت داده‌ها روی شبکه‌ی ابر مکعب در $d = 3$ بعد نمایش داده شده است. رؤس با رشته‌های بیتی سه مولفه‌ای نشان داده می‌شوند و یال‌ها نیز بر اساس اینکه کدام بیت باید وارو^۹ شود تا به راس مجاور برسیم، برچسب‌گذاری شده‌اند. برای رشته‌ی n کیوبیتی

^۶Diffusion

^۷Hypercube

^۸Hamming weight

^۹flip

$\vec{x} = (0 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 0)$ وزن همینگ به صورت زیر تعریف می‌شود [۶۰]:

$$|\vec{x}| = \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.3)$$

از آنجائیکه ابر مکعب متقارن است و هر راس به n یال متصل است، ولگشت با سکه‌ی n بعدی انجام می‌شود و فضای هیلبرت و حالت سیستم به ترتیب به صورت $\mathcal{H} = \mathcal{H}^n \otimes \mathcal{H}^n$ و $|d, \vec{x}\rangle$ تعریف می‌شوند که، d حالت سکه را مشخص می‌کند. همچنین عملگر جابه‌جایی شرطی^{۱۰} حالت $|d, \vec{x}\rangle$ را به حالت $|d, \vec{x} \oplus \vec{e}_d\rangle$ نگاشت می‌کند، که \vec{e}_d نشان دهنده‌ی d امین بردار پایه‌ی ابرمکعب است (بردارای که تمام مولفه‌های آن صفر است به جز مولفه‌ی d آن). بنابراین عملگر جابه‌جایی یکانی به صورت زیر تعریف می‌شود [۶۱]:

$$S = \sum_{\substack{d, \vec{x} \\ d=}}^{n-1} |d, \vec{x} \oplus \vec{e}_d\rangle \langle d, \vec{x}| \quad (2.3)$$

این رابطه می‌گوید اگر ولگرد در مکان \vec{x} باشد و حالت سکه مقدار d را داشته باشد آنگاه ذره در راستای یال d به راس مجاور منتقل می‌شود ولی حالت سکه همچنان بدون تغییر باقی می‌ماند. برای تحقق تحول یکانی باید عملگر سکه نیز انتخاب شود. در ولگشت کوانتومی استاندارد، تنها یک عملگر سکه مورد استفاده قرار می‌گیرد که به همهی رئوس گراف اعمال می‌شود (یعنی عملگر سکه از یک راس به راس دیگر تغییر نمی‌کند)، بنابراین میتوان عملگر سکه را به صورت جدایی‌پذیر زیر نوشت:

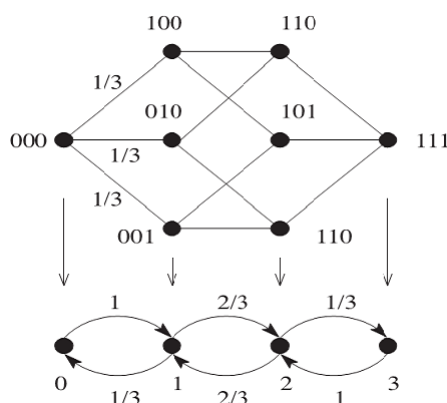
$$C = C. \otimes I \quad (3.3)$$

در این مورد (ولگشت استاندارد) اثر عملگر سکه روی فضای حالت خودش، به حالت ذره در فضای موقعیت بستگی ندارد، به عبارت دیگر، عملگر سکه مستقل از مکان است. اگر عملگر سکه را به صورت رابطه‌ی (۳.۳) بنویسیم، آنگاه ویژه‌حالت‌های عملگر تحول U را می‌توان به صورت ضرب تانسوری ویژه‌حالت‌های عملگر $C_{\vec{k}}$ در فضای سکه و مد فوریه‌ی ابرمکعب (رشته‌ی n بیتی \vec{k}) نوشت [۶۲]. انتخاب عملگر سکه‌ی مناسب حائز اهمیت زیادی در پیشبرد الگوریتم است، با توجه به اینکه تمایل داریم تمام یال‌های منتهی به راس هدف هم‌ارزش در نظر گرفته شوند، بنابراین احتمال ماندن ولگرد در همان حالت کنونی $|d, \vec{x}\rangle$ برای تمام مقادیر d باید یکسان باشد، همچنین برای تمام $d' \neq d$ دامنه‌ی انتقال از حالت $|d, \vec{x}\rangle$ به حالت $|d', \vec{x}\rangle$ باید یکسان باشد. تنها ماتریس‌های یکانی که این شرایط را ارضا می‌کنند عبارتند از: $I, -I, G, -G$. در این میان یک انتخاب مناسب و کارآمد، سکه‌ی گراور^{۱۱} است که یک عملگر یکانی حقیقی است و با این انتخاب، دامنه‌های احتمال بواسطه‌ی گشت کوانتومی با بیشینه آهنگ ممکن انتشار می‌یابند [۶۳]. این عملگر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C. = G = -I_n + 2|s^c\rangle\langle s^c| \quad (4.3)$$

^{۱۰}shift operator (propagator)

^{۱۱}Grover diffusion operator



شکل ۲.۳: نحوه‌ی نگاشت ولگشت بر روی ابر مکعب به ولگشت یک بعدی به ازای حالت $n = 3$

یا به شکل ماتریسی:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{2}{n} - 1 & \dots & \frac{2}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{2}{n} & \dots & \frac{2}{n} - 1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

که در آن

$$|s^c\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{d=1}^n |d\rangle \quad (6.3)$$

برهم نهی مساوی از تمام حالات ممکن در فضای سکه است و $\sum_{d=1}^n |d\rangle \langle d| = I_n$. ولگشت کلاسیکی روی ابرمکعب دارای تقارن بزرگی است، مثلاً اگر از راس 1 آغاز کنیم، تمام رئوس با وزن همینگ یکسان می‌توانند با هم جابه‌جا شوند، بدون آنکه نیاز به اصلاح ولگشت باشد، این جایگشت برای سایر رئوس با وزن همینگ یکسان هم صدق می‌کند. این تقارن ایجاب می‌کند که تمام رئوس با وزن همینگ یکسان در توزیع احتمال ولگشت کلاسیکی، دارای وزن یکسان باشند، بنابراین می‌توان رئوس با وزن همینگ یکسان را در یک راس جمع کنیم^{۱۲} و ولگشت تصادفی روی ابرمکعب را به یک ولگشت متعادل روی خط تقلیل دهیم [۶۴] . شکل ۲.۳ نحوه‌ی تقلیل ولگشت روی مکعب سه بعدی به ولگشت روی خط را نشان می‌دهد. برای حالت کلی ابرمکعب n بعدی ولگشت به یک گراف خطی با $n + 1$ نقطه کاهش می‌یابد. احتمال انتقال از راس i به راس $i + 1$ برابر با $p_{i,i+1} = \frac{d-i}{d}$ و در راستای معکوس به صورت $p_{i+1,i} = \frac{i+1}{d}$ می‌باشد. انتخاب عملگر سکه از آنجایی دارای اهمیت است که ما می‌خواهیم این تقارن را برای مورد کوانتومی نیز حفظ کنیم. سکه‌ی گراور علاوه بر یکانی بودن و بیشترین انتشارگری، تقارن جایگشتی را نیز حفظ می‌کند. سکه‌ی گراور نسبت به جایگشت همزمان سطر و ستون‌ها ناورداست، همچنین یک سکه‌ی متوازن^{۱۳} نیست، بدان معنی که احتمال عدم تغییر راستای حرکت توسط سکه، با احتمال تغییر راستای سکه برابر نیست [۶۴] . (برای سکه‌ی متوازن d بعدی داریم: $|C_{ij}|^2 = 1/d$. به منظور

^{۱۲}comulate

^{۱۳}Balance

تحلیل دینامیک ولگشت، نیاز داریم تا طیف عملگر تحول $(U = S \cdot (C \otimes I))$ را بررسی کنیم. بدین منظور می‌توان حالت عمومی سیستم بعد از t گام را به صورت زیر نوشت:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{d=1}^n \sum_{\vec{x}=0}^{2^n-1} \psi_{d,\vec{x}}(t) |d, \vec{x}\rangle \quad (۷.۳)$$

که در آن $\psi_{d,\vec{x}}(t)$ دامنه‌ی احتمال است و در شرط بهنجارش $\sum_{d,\vec{x}} |\psi_{d,\vec{x}}(t)|^2 = 1$ صدق می‌کند. از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned} |\psi(t+1)\rangle &= U |\psi(t)\rangle = S \cdot (G \otimes I) |\psi(t)\rangle = \sum_{d=1}^n \sum_{\vec{x}=0}^{2^n-1} \psi_{d,\vec{x}}(t) S(G|d) \otimes |\vec{x}\rangle \\ &= \sum_{d=1}^n \sum_{\vec{x}=0}^{2^n-1} \psi_{d,\vec{x}}(t) S \left(\sum_{d'} G_{dd'} |d'\rangle \otimes |\vec{x}\rangle \right) \\ &= \sum_{d,d'} \sum_{\vec{x}} \psi_{d,\vec{x}}(t) G_{dd'} |d'\rangle |\vec{x} \oplus \vec{e}_{d'}\rangle \\ &= \sum_{d,d'} \sum_{\vec{x}} \psi_{d,\vec{x} \oplus \vec{e}_{d'}}(t) G_{dd'} |d'\rangle |\vec{x}\rangle \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

یعنی داریم:

$$\psi_{d,\vec{x}}(t+1) = \sum_d G_{dd'} \psi_{d,\vec{x} \oplus \vec{e}_{d'}}(t) \quad (۹.۳)$$

در حالت کلی حل این معادله بسیار دشوار است، ولی تجربه‌ی ما در قطری‌سازی عملگر جابه‌جایی در ولگشت روی خط، ما را بر آن می‌دارد تا از همان روش کارآمد تبدیل فوریه، برای قطری‌سازی این عملگر استفاده کنیم. در پایه‌های محاسباتی، تبدیل فوریه گسسته روی فضای مکان به صورت زیر است:

$$|\vec{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{\vec{x}=0}^{2^n-1} (-1)^{\vec{k} \cdot \vec{x}} |\vec{x}\rangle \quad (۱۰.۳)$$

که $\{|\vec{k}\rangle; 0 \leq \vec{k} \leq 2^n - 1\}$ پایه‌های فوریه‌اند. در این پایه‌ها تحول سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{d=1}^n \sum_{\vec{k}} \tilde{\psi}_{d,\vec{k}}(t) |d, \vec{k}\rangle \quad (۱۱.۳)$$

که در آن

$$\tilde{\psi}_{d,\vec{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{\vec{x}=0}^{2^n-1} (-1)^{\vec{k} \cdot \vec{x}} \psi_{d,\vec{x}}(t) \quad (۱۲.۳)$$

این روابط نشان می‌دهد دامنه‌ی احتمال یک حالت در پایه‌های فوریه، به صورت تبدیل فوریه یافته‌ی دامنه‌ی آن

پس فقط کافی است عملگر \tilde{G} را قطری کنیم. شکل ماتریسی این عملگر به صورت زیر است:

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} (-1)^{k_1} \left(\frac{2}{n} - 1\right) & \cdots & (-1)^{k_1} \left(\frac{2}{n}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{k_n} \left(\frac{2}{n}\right) & \cdots & (-1)^{k_n} \left(\frac{2}{n} - 1\right) \end{pmatrix} \quad (18.3)$$

از آنجائیکه ماتریس گراور تقارن جایگشتی دارد، می‌توان ماتریس را طوری مرتب کرد که سطرها (ستون‌ها) با $k_i = 0$ به بالا (چپ) و با $k_i = 1$ به پایین (راست) جابه‌جا شوند. نتیجه یک ماتریس بلوکی به شکل زیر خواهد بود

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{n} - 1 & \frac{2}{n} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{2}{n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \frac{2}{n} & \cdots & \frac{2}{n} - 1 & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{2}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{2}{n} + 1 & -\frac{2}{n} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{2}{n} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{2}{n} + 1 \end{pmatrix} \quad (19.3)$$

بلوک ۱ (بالا چپ) یک بلوک $(n-k) \times (n-k)$ بعدی است، به همین ترتیب بلوک ۲ (بالا راست) و ۳ (پایین چپ) $k \times (n-k)$ بعدی و بلوک ۴ (پایین راست) $k \times k$ است. این ماتریس از روی ماتریس گراور بدین صورت به دست آمد که، سطرهای متناظر با مولفه‌هایی از \vec{k} که برابر ۱ هستند تغییر علامت یافته‌اند. بنابراین سطر k از ماتریس \tilde{G} در قیاس با ماتریس G تغییر علامت داده‌اند. بردار \vec{k} با وزن همینگ $0 < k < n$ را در نظر بگیرید. این بردار دارای k عضو ۱ و $n-k$ عضو ۰ است. برای یافتن ویژه‌بردارهای متناظر با ویژه‌مقادیر ± 1 فضای هیلبرت کلی سیستم را به صورت مجموع دو فضای هیلبرت در نظر می‌گیریم، زیرفضای اول مربوط به سطرهایی که تغییر علامت نداده‌اند، زیرفضای دوم مربوط به سطرهایی که تغییر علامت داده‌اند. یادآوری می‌کنیم که ویژه‌مقادیر عملگرهای یکانی فاز خالص هستند (عدد مختلط با نرم ۱). برای بدست آوردن ویژه‌کت‌های

متناظر با ویژه مقدار ۱ باید معادله $(\tilde{G} - I)|\alpha\rangle = 0$ را حل کنیم، که به صورت ماتریسی زیر است:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{n} - 2 & \frac{2}{n} & \dots & \dots & \dots & \frac{2}{n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{2}{n} & \dots & \frac{2}{n} - 2 & \frac{2}{n} & \dots & \frac{2}{n} \\ \hline -\frac{2}{n} & \dots & \dots & -\frac{2}{n} & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ -\frac{2}{n} & \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{2}{n} \end{pmatrix} \quad (20.3)$$

در حالت کلی جواب این معادله به صورت زیر می‌باشد [۱۴]:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, \dots, 0 | 1, -1, 0, \dots, 0) \quad (21.3)$$

بردار $|\alpha\rangle$ به جز در دو مکان که متناظر با سطرهای تغییر علامت داده شده‌اند دارای مولفه‌های ۰ است. $k - 1$ بردار با این شرایط می‌توان یافت. به همین طریق تعداد $n - k - 1$ بردار میتوان یافت که در آن دو مکان ذکر شده متناظر با سطرهای تغییر علامت نداده‌اند. در مجموع به تعداد $(k - 1) + (n - k - 1)$ ویژه‌بردار میتوان یافت. برای یافتن دوتای باقی‌مانده که دارای ویژه‌مقادیر غیرحقیقی هستند به صورت زیر عمل می‌کنیم: اگر یک ماتریس دارای این خاصیت باشد که مجموع عناصر روی یک سطر برای تمام سطرها ناوردا باشد آنگاه بردار با مولفه‌های برابر ۱ ویژه‌بردار با ویژه‌مقدار ۱ است. در ماتریس \tilde{G} در دو بلوک دارای این خاصیت می‌باشد، بلوک اول شامل $n - k$ سطر و بلوک دوم شامل k سطر باقی‌مانده، بنابراین شکل کلی ویژه‌بردار باید به صورت زیر باشد

$$|\alpha\rangle = \left(\overbrace{a, \dots, a}^{n-k} \mid \overbrace{b, \dots, b}^k \right) \quad (22.3)$$

بدون کم شدن از کلیت مسئله $b = 1$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید ویژه‌مقدار مربوطه به صورت $e^{i\omega_k}$ باشد،

پس باید معادله‌ی ماتریسی زیر را حل کنیم

$$(23.3) \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{n} - 1 - e^{i\omega_k} & \frac{2}{n} & \dots & \dots & \dots & \frac{2}{n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{2}{n} & \dots & \frac{2}{n} - 1 - e^{i\omega_k} & \frac{2}{n} & \dots & \frac{2}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{2}{n} & \dots & \dots & -\frac{2}{n} + 1 - e^{i\omega_k} & -\frac{2}{n} & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ -\frac{2}{n} & \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{2}{n} + 1 - e^{i\omega_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \\ \dots \\ b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} = 0$$

با فرض $k > n/2$ داریم

$$(24.3) \quad (\tilde{G} - e^{i\omega_k} I)|\alpha\rangle = 0$$

برای بلوک اول داریم

$$(25.3) \quad \left(\frac{2}{n} - 1\right) a + (n - k - 1) \left(\frac{2}{n}\right) a + \left(\frac{2}{n}\right) (1) k = a e^{i\omega_k}$$

نتیجه می‌دهد

$$(26.3) \quad \left(1 - \frac{2k}{n} - e^{i\omega_k}\right) a + \frac{2k}{n} = 0$$

برای بلوک دوم نیز داریم

$$(27.3) \quad \left(-\frac{2}{n}\right) (n - k) a + \left(-\frac{2}{n} + 1\right) a + \left(-\frac{2}{n}\right) (k - 1) = e^{i\omega_k} a$$

که نتیجه می‌دهد

$$(28.3) \quad -2a \left(1 - \frac{k}{n}\right) + 1 - \frac{2k}{n} - e^{i\omega_k} = 0$$

با حل همزمان معادلات (۲۶.۳) و (۲۸.۳) بدست می‌آید

$$(29.3) \quad \begin{cases} a = \pm i \frac{\sqrt{k/n}}{\sqrt{1-(k/n)}} \\ e^{\pm i\omega_k} = 1 - \frac{2k}{n} \mp 2i \sqrt{\frac{k}{n} (1 - (k/n))} \end{cases}$$

که در آن

$$\begin{cases} \cos(\omega_k) = 1 - \frac{2k}{n} \\ \sin(\omega_k) = \frac{2}{n} \sqrt{k(n-k)} \end{cases} \quad (30.3)$$

در نتیجه ویژه‌کتهای بهنجار مربوطه به صورت زیر می‌باشد:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ \dots \\ b \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mp \frac{i}{\sqrt{n-k}} \\ \vdots \\ \dots \\ \frac{1}{\sqrt{k}} \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{d=1}^n \left(\frac{k_d}{\sqrt{k}} \mp i \frac{1-k_d}{\sqrt{n-k}} \right) |d\rangle \quad (31.3)$$

در این رابطه $k_d = 0$ (سطر d ام تغییر علامت نداده باشد) و $k_d = 1$ (سطر d ام تغییر علامت داده باشد) می‌تواند باشد. با ترکیب این رابطه با رابطه (۱۰.۳)، ویژه‌بردارهای بهنجار عملگر تحول را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|\vec{v}_k\rangle, |\vec{v}_k\rangle^* = \sum_{\vec{x}, d} (-1)^{\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{2}} |d, \vec{x}\rangle \times \begin{cases} 1/\sqrt{k} & k_d = 1 \\ \mp i/\sqrt{n-k} & k_d = 0 \end{cases} \quad (32.3)$$

توجه داشته باشید که حالت اولیه‌ی

$$|\psi\rangle = |s^c\rangle \otimes |s^s\rangle \quad (33.3)$$

که در آن $|s^s\rangle$ برهم‌نهی مساوی از تمام 2^n راس است، ویژه‌حالت عملگر U با ویژه‌مقدار ۱ است (رک پیوست ۲.۰). بنابراین اثر عملگر تحول روی حالت اولیه آنرا بدون تغییر رها می‌کند. بنابراین برای انجام یک جستجو به کمک ولگشت کوانتومی، باید یک اختلال کوچک در عملگر تحول یکانی اعمال کنیم. در الگوریتم جستجوی استاندارد یک اوراکل داریم که آیتم مورد جستجو را نشان‌دار می‌کند، ولی در اینجا برای نشان‌دار کردن یک راس، سکه‌ی C_1 را به راس مورد جستجو و سکه‌ی C را به سایر رئوس اعمال می‌کنیم. بدین ترتیب راس مورد جستجو از سایر رئوس قابل تفکیک می‌شود. به سکه‌ی C_1 اصطلاحاً سکه‌ی نشان‌زن^{۱۴} گفته می‌شود.

به دلیل وجود تقارن در ابرمکعب، رئوس می‌توانند طوری برچسب‌گذاری شوند که همواره راس نشان‌دار $\vec{x}_{tg} = \vec{0}$ باشد، پس بدون کم شدن از کلیت مسئله همواره فرض می‌کنیم راس مورد جستجو $\vec{0}$ است. پس محل قرارگیری این راس مورد جستجو فاقد اهمیت است. در نتیجه اختلال در عملگر سکه که نشان‌دهنده‌ی وابستگی مکانی در عملگر جدید است به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$C' = C \otimes (\mathcal{I}_{2^n} - |\vec{x}_{tg}\rangle \langle \vec{x}_{tg}|) + C_1 \otimes |\vec{x}_{tg}\rangle \langle \vec{x}_{tg}| \quad (34.3)$$

^{۱۴}marking coin

که در این عبارت، جمله‌ی اول یعنی سکه‌ی C به تمام رؤوس به‌جز راس هدف اعمال شود. توجه داشته باشید که در اینجا عملگر سکه مشروط به مکان ذره است و دیگر نمی‌توان آنرا به صورت جدایی‌پذیر $C \otimes \mathcal{I}$ نوشت. سکه‌ی C_1 هر عملگر یکانی $n \times n$ می‌تواند باشد، ولی برای سادگی در تحلیل ما $C_1 = -\mathcal{I}$ انتخاب می‌کنیم. محاسبات عددی نشان می‌دهد انتخاب‌های مختلف نتایج مشابه دارند. پس سکه‌ی مختل شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$C' = C \otimes \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n} + (C_1 - C) \otimes |\vec{\cdot}\rangle\langle\vec{\cdot}| \quad (۳۵.۳)$$

سکه‌ی (۳۵.۳) یک ترکیب یکانی است و اثر آن وابسته به ثبت‌کننده‌ی راس^{۱۵} است. در حالت کلی‌تر، هنگامی که به دنبال یافتن بیش از یک راس هستیم، عملگر سکه‌ی مختل شده در محل راس v_i (با مرتبه‌ی d_i) به صورت زیر خواهد بود [۶۵]:

$$(C'_i)_{mn} = \begin{cases} -\delta_{mn} + 2/d_i & v_i \notin M \\ -\delta_{mn} & v_i \in M \end{cases} \quad (۳۶.۳)$$

که $d_i, m, n = 1, \dots$ است. و M نمایش دهنده‌ی مجموعه‌ی رؤوس هدف هستند. با این توصیفات عملگر تحول یکانی مختل شده به صورت زیر می‌شود:

$$U' = S \cdot C' = S \cdot (G \otimes \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}) - S \cdot (G + \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}) \otimes |\vec{\cdot}\rangle\langle\vec{\cdot}| \quad (۳۷.۳)$$

از طرفی می‌دانیم که $G = -\mathcal{I}_n + 2|s^c\rangle\langle s^c|$ و نیز $G|s^c\rangle = |s^c\rangle$ پس رابطه‌ی فوق به شکل زیر می‌شود:

$$U' = U - 2S(|s^c\rangle\langle s^c| \otimes |\vec{\cdot}\rangle\langle\vec{\cdot}|) = U(\mathcal{I} - 2|s^c\rangle\langle s^c| \otimes |\vec{\cdot}\rangle\langle\vec{\cdot}|) = UR \quad (۳۸.۳)$$

تحلیل اثر این اختلال منجر به تعریف الگوریتم جستجوی ولگشت کوانتومی خواهد شد. به طور خلاصه در این الگوریتم با اعمال یک اختلال کوچک شرایطی فراهم می‌شود تا ذره‌ای که از یک توزیع یکنواخت در کل فضا شروع به گام زدن می‌کند در نهایت به راس مورد جستجو همگرا شود. این روند بر خلاف ولگشت استاندارد است که در آن ذره از یک نقطه شروع به حرکت می‌کند و در سرتاسر فضا انتشار می‌یابد. الگوریتم شامل دو تبدیل یکانی R و U و دو حالت $|\psi\rangle$ و $|\psi_{good}\rangle$ است و شرایط زیر را برآورده می‌کند [۹]:

$$R = \mathcal{I} - 2|\psi_{good}\rangle\langle\psi_{good}| \implies R|\psi_{good}\rangle = -|\psi_{good}\rangle \bullet$$

$$U|\psi\rangle = |\psi\rangle \bullet \text{ و هیچ ویژه‌بردار دیگری با ویژه‌مقدار } 1 \text{ وجود ندارد}$$

$$\bullet U \text{ یک ماتریس یکانی حقیقی است}$$

در اینجا داریم:

$$|\psi_{good}\rangle = |s^c\rangle \otimes |\vec{\cdot}\rangle \quad (۳۹.۳)$$

^{۱۵}node register

هدف الگوریتم یافتن t_f است به نحوی که $U^{t_f}|\psi\rangle$ بیشترین فیدلیتی^{۱۶} را با $|\psi_{good}\rangle$ داشته باشد. برای بدست آوردن t_f باید از تجزیه ی طیفی U' استفاده کنیم. بدست آوردن طیف یک عملگر غالباً کار ساده‌ای نیست ولی از آنجایی که طیف U برای ما شناخته شده است به کمک آن می‌توان طیف تقریبی U' را نیز بدست آورد. برای سهولت کار ابتدا نشان می‌دهیم ولگشت مختل شده روی ابرمکعب به ولگشت روی خط قابل تقلیل است. عملگر جایگشتی P_{ij} را معرفی می‌کنیم که در هر دو فضای مربوط به سکه و موقعیت، جای دو بیت i ام و j ام را تعویض می‌کند. اثر این عملگر روی حالت $|d, \vec{x}\rangle$ بدین صورت است که جای دو بیت i و j در رشته ی بیتی \vec{x} عوض می‌شود و همچنین راستاهای $d = i$ و $d = j$ نیز جابه‌جا می‌شوند. از آنجایی که ولگشت روی ابرمکعب دارای تقارن جایگشتی است و تمام راستاها هم‌ارزش هستند به طور آشکار $[U, P_{ij}] = 0$ است. نشان می‌دهیم (ر.ک پیوست آ.۷) که $[U', P_{ij}] = 0$ است و نیز $P_{ij}|\psi\rangle = |\psi\rangle$

بنابراین حالت اولیه ویژه حالت عملگر جایگشتی با ویژه مقدار $+1$ است و از آنجایی که $[U', P_{ij}] = 0$ است، هر حالت دیگر $|\psi_t\rangle$ نیز ویژه حالت عملگر جایگشتی با ویژه مقدار -1 خواهد بود. یعنی اینکه عملگر تحول اختلافی تقارن حالت اولیه را حفظ می‌کند. حال به دنبال معرفی پایه‌هایی هستیم که تحت تعویض بیت‌ها ناوردا باشند و بتوانیم ولگشت را به ابعاد پایین‌تر تقلیل دهیم، این پایه‌ها در زیر فضای $\mathcal{H}_{inv} \subset \mathcal{H}$ به شکل زیر قابل دستیابی هستند:

یک بردار داخله در پایه‌های محاسباتی در فضای هیلبرت \mathcal{H} را در نظر بگیرید، به عنوان مثالی در فضای سه بعدی، بردار حالت $|1\rangle|100\rangle$ را فرض کنید، حال تمام جایگشت‌ها ممکن تعویض بیت را روی این حالت مفروض اعمال می‌کنیم، به شکل زیر

$$\begin{cases} |1\rangle|100\rangle \\ |2\rangle|010\rangle \\ |3\rangle|001\rangle \end{cases} \quad (40.3)$$

حالا یک بردار دلخواه از برهم‌نهی خطی این سه بردار تعریف می‌کنیم، مثلاً:

$$|L, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1\rangle|100\rangle + |2\rangle|010\rangle + |3\rangle|001\rangle) \quad (41.3)$$

که به وضوح تحت تاثیر P_{ij} ناوردا است. حالا بردار دیگری در این فضا انتخاب می‌کنیم و همین کار را انجام می‌دهیم، نتیجه یک مجموعه ی ناوردا در زیر فضایی از فضای کلی خواهد بود.

در مورد ولگشت روی ابرمکعب این $2n$ پایه ی ناوردا به صورت زیر قابل تعریف هستند $[10]$:

$$|R, x\rangle = \frac{1}{\sqrt{(n-x) \binom{n}{x}}} \sum_{|\vec{x}|=x} \sum_{x_d=0} |d, \vec{x}\rangle \quad (42.3)$$

$$|L, x\rangle = \frac{1}{\sqrt{x \binom{n}{x}}} \sum_{|\vec{x}|=x} \sum_{x_d=1} |d, \vec{x}\rangle \quad (43.3)$$

^{۱۶}Fidelity

در این رابطه $n \geq |\vec{x}| \geq 0$ نشان دهندهی وزن همینگ رشتهی بیتی است و مجموعهی متعامد بهنجار $S' = \{|R, 0\rangle, |L, 1\rangle, \dots, |R, n-1\rangle, |L, n\rangle\}$ را تشکیل می‌دهند. در نوشتن ضرایب بهنجارش توجه کنید که، یک رشتهی n بیتی \vec{x} دارید که وزن همینگ آن x است، یعنی x تا مولفه ۱ و $n-x$ مولفه ۰ دارد. به $\binom{n}{x}$ طریق می‌شود این ۱ها را در این رشته جای داد. از طرف دیگر شرط دیگری داریم که $x_d = 0$ باشد، $n-x$ حالت وجود دارد که این شرط را برآورده می‌کند، پس در کل تعداد $\binom{n}{x} (n-x)$ حالت داریم که دارای وزن همینگ x هستند و نیز $x_d = 0$ دارند. به همین طریق ضرایب بهنجارش دیگر نیز بدست می‌آید. مجموعهی S' دارای خواص زیر است:

۱. بردارهای واحد هستند

۲. تحت جایگشت بیت‌ها ناوردا هستند

۳. ویژه فضایی از P_{ij} با ویژه مقدار ۱ را جاروب می‌کنند

۴. مجموعهی متعامد بهنجار است که نشان می‌دهد بعد فضای \mathcal{H}_{inv} ، $2n$ است

بیاد بیاورید که $x_d = 0, 1$ نمایش دهندهی دو بلوک در ماتریس گراور بودند که شرایط مسئله را برآورده می‌نمودند.

حال باید شکل عملگرهای موجود را در این پایه‌های جدید بنویسیم. دقت داشته باشید راس مورد جستجو که همان $\vec{x} = \vec{0}$ در پایه‌های جدید به صورت زیر می‌شود:

$$|s^c\rangle \otimes |\vec{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_d |d, \vec{0}\rangle = |R, 0\rangle \quad (44.3)$$

می‌توان نشان داد که عملگر جابه‌جایی به صورت زیر خواهد شد (رک پیوست ۸.۰):

$$S = \sum_{x=0}^{n-1} |R, x\rangle \langle L, x+1| + |L, x+1\rangle \langle R, x| \quad (45.3)$$

تعبیر فیزیکی عملگر جابه‌جایی نشان می‌دهد که ولگشت کوانتومی در یک شبکه‌ی یک بعدی با $n+1$ نقطه رخ می‌دهد، که موقعیت مکانی ذره با n و کایرالیتهی آن با R و L نمایش داده شده است که نشان دهندهی جهت انتقال هستند. در روی مرزها یعنی نقاط $x=0$ و $x=n$ انعکاس کشسان حکمفرماست یعنی:

$$\begin{aligned} S|R, 0\rangle &= |L, 1\rangle \\ S|L, n\rangle &= |R, n-1\rangle \end{aligned} \quad (46.3)$$

در پایه‌های جدید عملگر سکه را می‌توان به شکل زیر نوشت (رک پیوست ۹.۰):

$$C = G = \sum_{x=0}^n \begin{pmatrix} \cos \omega_x & \sin \omega_x \\ \sin \omega_x & -\cos \omega_x \end{pmatrix} \otimes |x\rangle \langle x| \quad (47.3)$$

که $\cos\omega_x = 1 - 2x/n$ و $\sin\omega_x = (2/n)\sqrt{x(n-x)}$.

قسمت اول روی فضایی اثر می‌کند که توسط $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ جاروب می‌شود، و قسمت دوم روی فضای موقعیت یعنی نقاط $\{|0\rangle, \dots, |n\rangle\}$ اثر می‌کند. توجه کنید که این سکه وابسته به موقعیت ذره هست. این رابطه می‌گوید: اثر عملگر سکه روی ولگشت کوانتومی مختل شده (تقلیل یافته به ولگشت روی خط) به صورت دوران به اندازه ω_x است، که وابسته به مکان ذره این زاویه تغییر می‌کند و این متفاوت از ولگشت استاندارد روی خط است. از طرفی داریم:

$$|R, \cdot\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum |d\rangle \otimes |\cdot\rangle = |s^c\rangle \otimes |\cdot\rangle \quad (48.3)$$

و با توجه به رابطه‌ی (۳۵.۳) می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} C' &= C. - 2 (2 |s^c\rangle \langle s^c| \otimes |\cdot\rangle \langle \cdot|) \\ &= C. - 2 |R, \cdot\rangle \langle R, \cdot| \end{aligned} \quad (49.3)$$

همچنین می‌توان نشان داد عملگر تحول یکانی در پایه‌های مذکور را به صورت زیر می‌توان نوشت (برای اثبات ر.ک به پیوست ۱۰.آ):

$$U' = U - 2 |L, 1\rangle \langle R, \cdot| = U + \Delta U \quad (50.3)$$

و نیز حالت اولیه را می‌توان به شکل زیر نوشت (ر.ک به پیوست ۱۱.آ):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left[|R, \cdot\rangle + |L, n\rangle + \sum_{x=1}^{n-1} \left(\sqrt{\binom{n-1}{x-1}} |L, x\rangle + \sqrt{\binom{n-1}{x}} |R, x\rangle \right) \right] \quad (51.3)$$

گفتیم که U و P_{ij} جابه‌جاپذیرند و همزمان می‌توان آنها را قطری نمود، ویژه‌بردارهای U در زیرفضای کاهش یافته نیز تحت چرخش بیت^{۱۷} ناوردا هستند. بنابراین یک برهم‌نهی مساوی از ویژه‌بردارهای با وزن همینگ یکسان، خود ویژه‌برداری است که تحت چرخش بیت ناوردا است. بنابراین تعریف می‌کنیم [۶۶]:

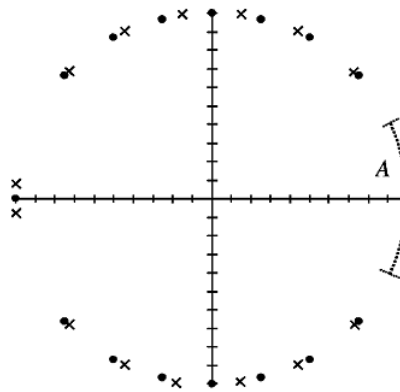
$$|\omega_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{\binom{n}{k}}} \sum_{|\vec{k}|=k} |v_{\vec{k}}\rangle \quad (52.3)$$

که ویژه‌بردار U با ویژه‌مقدار $e^{i\omega_k}$ در فضای متقارن کاهش یافته است.

از آنجائیکه هر دو عملگر U و U' با ماتریس‌های یکانی حقیقی نمایش داده می‌شوند، بنابراین ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای آنها به صورت زوج‌های مزدوج مختلط ظاهر می‌شوند [۹].

با این توصیفات هدف بعدی ما یافتن طیف U' است. کمان A را قسمتی از یک دایره به شعاع واحد در نظر بگیرید که شامل تمام اعداد مختلط با اندازه‌ی واحد و قسمت حقیقی بزرگتر از $1 - \frac{2}{3n}$ است. یعنی:

$$A = \{Z, |ReZ| > 1 - \frac{2}{3n}, |Z| = 1\} \quad (53.3)$$



شکل ۳.۳: تحلیل طیفی عددی U و U' برای $n = 8$ ، دایره نشان‌دهنده‌ی ویژه مقادیر U و ضربدر نمایش ویژه مقادیر U' می‌باشد [۱۰].

شکل ۳.۳ نمایش هندسی A به همراه طیف ویژه مقادیر U و U' را نشان می‌دهد. نشان می‌دهیم که این کمان شامل دقیقاً دو ویژه مقدار $e^{\pm i\omega'}$ از U' است، این دو ویژه مقدار برای ما بسیار حائز اهمیت است زیرا نشان داده می‌شود که حالت اولیه را می‌توان برحسب ترکیب خطی از ویژه بردارهای متناظر آن‌ها نوشت، بنابراین می‌توان تحول سیستم را با مطالعه‌ی این دو ویژه بردار متناظر بررسی کرد. به عبارت دیگر:

چون U' حقیقی و یکانی است ویژه مقادیر (غیر ± 1) آن، به صورت زوج‌های مزدوج $\{e^{\pm i\theta_1}, \dots, e^{\pm i\theta_m}\}$ ظاهر می‌شوند، فرض کنید $\theta_{min} = \min(\theta_1, \dots, \theta_m)$ باشد، کمان A به صورت مجموعه‌ی تمام $e^{i\theta}$ هایی تعریف می‌شود که شرط $-\theta_{min} < \theta < \theta_{min}$ را برآورده می‌کنند، آنگاه U' دقیقاً دو ویژه مقدار در این کمان دارد.

قضیه ۱.۲.۳. حداکثر دو ویژه مقدار از U' درون A وجود دارد.

برهان. برای اثبات به پیوست ۱۲.۰ مراجعه نمایید. □

قضیه ۲.۲.۳. حداقل دو ویژه مقدار از U' درون A وجود دارد.

برهان. اثبات در پیوست ۱۳.۰ □

از قضایای ۱.۲.۳ و ۲.۲.۳ نتیجه می‌گیریم که دقیقاً دو ویژه مقدار از U' درون کمان A وجود دارند. قبلاً اشاره نمودیم که ویژه بردارها و ویژه مقادیر U' به صورت زوج‌های مزدوج مختلط ظاهر می‌شوند، بویژه اینکه دو ویژه مقدار درون کمان باید مزدوج باشند. فرض کنید $e^{\pm i\omega'}$ دو ویژه مقدار مورد نظر باشند، پس ویژه بردارهای متناظر در شرط $\langle \omega' \rangle^* = | - \omega' \rangle = 1$ (اگر $e^{i\omega'} = e^{-i\omega'} = 1$ باشد، همواره می‌توان ترکیب خطی از $|\pm \omega'\rangle$ ساخت که شرط مذکور را برآورده نمایند). حالا نشان خواهیم داد که $|\pm \omega'\rangle$ را می‌توان با تقریب خوبی به صورت ترکیب خطی از $|\psi_0\rangle$ و $|\psi_1\rangle$ (رابطه‌ی (۴۸.۰)) نوشت.

^{۱۱}bit-flip

قضیه ۳.۲.۳. دو ویژه‌بردار متناظر با دو ویژه‌مقدار نزدیک ۱، با ترکیب خطی از حالت اولیه $|\psi\rangle$ و حالت $|\psi_1\rangle$ به خوبی قابل تقریب است، مانند

$$|\pm \omega'\rangle \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi\rangle \pm i|\psi_1\rangle) \quad (۵۴.۳)$$

به طور دقیق‌تر

$$\begin{aligned} |\omega'\rangle &= \sqrt{p}\cdot|\psi\rangle + \sqrt{p_1}e^{i\eta}|\psi_1\rangle + \sqrt{1-p-p_1}|r\rangle \\ |-\omega'\rangle &= \sqrt{p}\cdot|\psi\rangle + \sqrt{p_1}e^{-i\eta}|\psi_1\rangle + \sqrt{1-p-p_1}|r\rangle^* \end{aligned} \quad (۵۵.۳)$$

که $p = |\langle \omega' | \psi \rangle|^2 = |\langle -\omega' | \psi \rangle|^2$ و $p_1 = |\langle \omega' | \psi_1 \rangle|^2 = |\langle -\omega' | \psi_1 \rangle|^2$ و $|r\rangle$ یک بردار بهنجار و عمود بر $|\psi\rangle$ و $|\psi_1\rangle$ است. بعلاوه داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \geq p &\geq \frac{1}{2} - \frac{3n}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{2} \geq p_1 &\geq \frac{1}{2} - \frac{3n}{\lambda c^2 \binom{n-1}{n/2}} \end{aligned} \quad (۵۶.۳)$$

$$\cdot |\Delta| = O\left(\frac{n}{\binom{n-1}{n/2}}\right) \text{ و } e^{i\eta} = i + \Delta$$

□

برهان. اثبات در پیوست ۱۴.آ

بنابراین نتیجه می‌گیریم که حالت اولیه را می‌توان به طور تقریبی به شکل زیر نوشت:

$$|\psi\rangle \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(|\omega'\rangle + |-\omega'\rangle) \quad (۵۷.۳)$$

و به صورت زیر متحول می‌شود:

$$(U')^t |\psi\rangle \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{it\omega'} |\omega'\rangle + e^{-it\omega'} |-\omega'\rangle \right) \quad (۵۸.۳)$$

در این مرحله باید محدوده‌ی زاویه‌ی ω' را تعیین کنیم.

قضیه ۴.۲.۳. هر گام از تحول ولگشت کوانتومی (متناظر با اثر عملگر U') معادل یک دروان با زاویه‌ی تقریبی $1/\sqrt{2^n-1}$ در فضایی است که توسط بردارهای $|\pm \omega'\rangle$ جاروب می‌شود. به طور دقیق‌تر $\beta = O(n^{3/2}/2^n)$ که در آن $-1/(c\sqrt{2^n-1}) - \beta \leq \omega' \leq -1/(c\sqrt{2^n-1}) + \beta$

□

برهان. اثبات در پیوست ۱۵.آ

اکنون در جایگاهی هستیم که کارکرد کلی الگوریتم را توصیف کنیم:

از یک حالت اولیه‌ی $|\psi\rangle$ شروع می‌کنیم، حالت سیستم بعد از t جستار را به صورت $U'^t |\psi\rangle$ در نظر می‌گیریم، سپس حالت اولیه را به صورت بسط:

$$|\psi\rangle = \sqrt{p}\cdot(|\omega'\rangle + |-\omega'\rangle) + \delta|r\rangle \quad (۵۹.۳)$$

می‌نویسیم، که $\delta = \sqrt{1 - 2p} = O(\sqrt{n/2^n})$ است و $|r\rangle$ یک بردار اضافی بهنجار و عمود بر $|\pm \omega'\rangle$ می‌باشد. بنابراین :

$$\begin{aligned} (U')^t |\psi.\rangle &= \sqrt{p} \cdot \left(e^{i\omega't} |\omega'\rangle + e^{-i\omega't} |-\omega'\rangle \right) + \delta |r'\rangle \\ &= 2p \cdot \cos \omega't |\psi.\rangle - 2\sqrt{p \cdot p} \left(\sin \omega't + \text{Re } e^{i\omega't} \Delta \right) |\psi.\rangle \\ &\quad + \sqrt{1 - p} \cdot \sqrt{p} \left(e^{i\omega't} |r.\rangle + e^{-i\omega't} |r.*\rangle \right) + \delta |r\rangle \\ &= \cos \omega't |\psi.\rangle - \sin \omega't |\psi.\rangle + O\left(\frac{n^{3/4}}{\sqrt{2^n}}\right) |\tilde{r}\rangle \end{aligned} \quad (۶۰.۳)$$

که $|\tilde{r}\rangle$ یک بردار بهنجار دیگر است که لزوماً بر $|\pm \omega'\rangle$ عمود نیست. با شروع از حالت اولیه $|\psi.\rangle$ و اعمال U' به تعداد $t_f = \frac{\pi}{2|\omega'|}$ جستار، حالت $|\psi.\rangle$ را تقریباً به حالت $|\psi.\rangle$ دوران می‌دهیم. سپس به کمک رابطه‌ی (۴۸.آ) و این واقعیت که $1 + 1/(2n) \leq c^2 \leq 1 + 2/n$ را با احتمال بالا استخراج کرد:

$$\begin{aligned} p &= \sum_d |\langle d, \cdot | \psi.\rangle|^2 = |\langle R, \cdot | \psi.\rangle|^2 = \frac{1/2}{c^2} \\ &\geq \frac{1/2}{1 + 2/n} = \frac{1}{2} - O(1/n) \end{aligned} \quad (۶۱.۳)$$

نهایتاً برای بدست آوردن t_f برحسب n از حد ω' استفاده می‌کنیم، داریم:

$$t_f = \frac{\pi c}{2} \sqrt{2^{n-1}} \left(1 \pm O\left(\frac{n^{3/4}}{\sqrt{2^n}}\right) \right) \quad (۶۲.۳)$$

و به کمک نامساوی مربوط به c^2 که در فوق ذکر شد، خواهیم داشت : $1 + 1/(4n) \leq c \leq 1 + 1/n$ ، بنابراین داریم:

$$t_f = \frac{\pi}{2} \sqrt{2^{n-1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad (۶۳.۳)$$

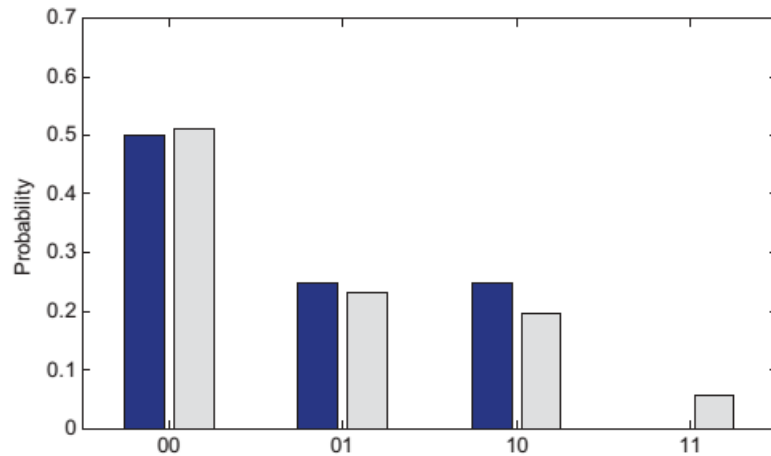
پس اگر قرار دهیم $t_f = (\pi/2) \sqrt{2^{n-1}}$ (یا نزدیکترین عدد صحیح به آن)، خواهیم داشت:

$$-\sin \omega't_f = \sin \frac{\pi}{2} \left(1 - O\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 1 - O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (۶۴.۳)$$

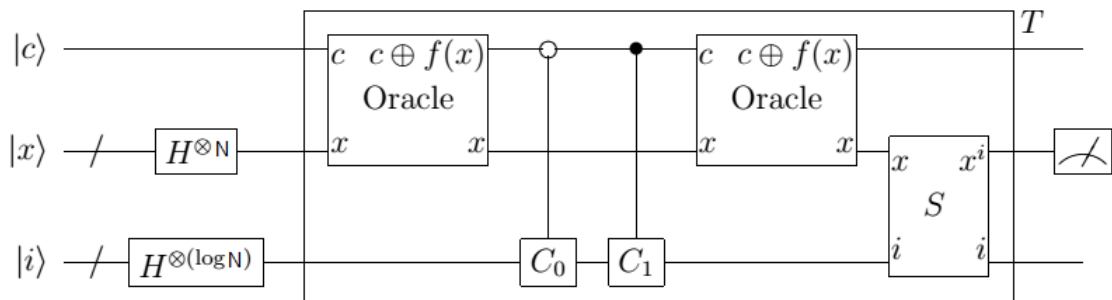
بنابراین احتمال موفقیت در یافتن $|\vec{x}_{target}\rangle$ بعد از t_f گام، به صورت زیر است:

$$p_{success} = \frac{1}{2} - O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (۶۵.۳)$$

و با تکرار الگوریتم می‌توان احتمال خطا را به مقدار دلخواه کوچک کرد. با توجه به ماهیت پربودیک تحول سیستم تحت تاثیر U' (رابطه‌ی (۶۰.۳))، خواهیم فهمید که اگر در زمان $t > t_f$ حالت سیستم را اندازه‌گیری کنیم، احتمال موفقیت ابتدا کاهش می‌یابد و سپس روند صعودی به خود می‌گیرد. نتیجه‌ی نهایی ما چنین است

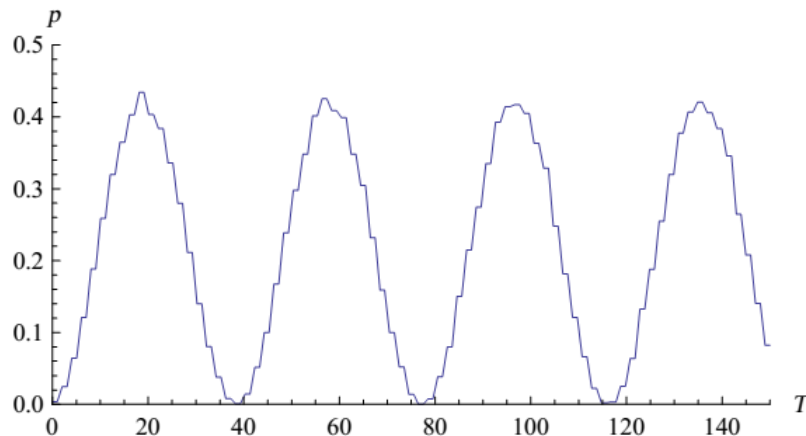


شکل ۴.۳: شبیه‌سازی الگوریتم جستجو بر روی ابرمکعب، در حالت $n = 2$ ، هنگامی که راس مورد جستجو می‌باشد [۵۸].



شکل ۵.۳: مدار کوانتومی الگوریتم جستجوی ولگشت کوانتومی روی شبکه‌ی فرامکعب n بعدی [۶۳].

که بعد از $O(\sqrt{N})$ بار فراخوانی اوراکل، حالت نشان‌دار بدست می‌آید. یادآوری می‌کنیم که ما از $C_1 = -I$ استفاده کردیم، لیکن نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها برای انتخاب‌های مختلف، نتایج مشابهی را در پی دارد [۶۶]. در شکل ۴.۳ نتایج حاصل از شبیه‌سازی الگوریتم جستجوی ولگشت سکه‌ای در حالتی که $n = 2$ می‌باشد نمایش داده شده است. در حالت کلی $\log(2^n)$ کیوبیت برای فضای موقعیت و $\log(n)$ کیوبیت نیز برای فضای سکه به منظور شبیه‌سازی الگوریتم مورد نیاز است. در این شکل ستون‌های پررنگ نتایج حاصل از تئوری، و ستون‌های کم‌رنگ نتایج محاسبات عددی را نشان می‌دهد. همچنین در شکل ۵.۳، مدار کوانتومی این الگوریتم نمایش داده شده است. در این شکل کیوبیت $|x\rangle$ نمایانگر فضای موقعیت، کیوبیت $|i\rangle$ نماینده‌ی فضای سکه، و $|c\rangle$ کیوبیت اوراکل (کیوبیت کنترل) است و در حالت $|0\rangle$ آماده‌سازی می‌شود. همچنین عملگر انتقال شرطی به صورت $S|x, i\rangle = |x^i, i\rangle$ می‌باشد. اگر $\vec{x} = \vec{x}_{tg}$ باشد، کیوبیت اوراکل وارو می‌شود در غیر اینصورت تغییری نمی‌کند. هر گام از تحول ولگشت با کادر نشان داده شده است و تعداد دفعات اعمال این مدار $T = O(\sqrt{N})$ بار است. در شکل ۶.۳ نیز ماهیت تناوبی بودن احتمال موفقیت دست یافتن به جواب نمایش داده شده است. مشاهده می‌نمایید که در $n = 8$ بعد، متوسط تعداد گام‌های مناسب رای رسیدن به جواب، با بیشینه احتمال ممکن،



شکل ۶.۳: احتمال بدست آوردن جواب در الگوریتم جستجوی ولگشت، بر روی شبکه‌ی فرامکعبی $n = 8$ بعدی [۶۳].

تعداد ۲۰ گام است.

۱.۲.۳ مقایسه الگوریتم ولگشت با الگوریتم گراور، تفاوت‌ها و شباهت‌ها

علیرغم ماهیت متفاوت الگوریتم جستجو به روش ولگشت کوانتومی نسبت به الگوریتم گراور، این دو الگوریتم دارای تفاوت‌ها و شباهت‌هایی نیز هستند. در این بخش به بررسی این تفاوت‌ها و شباهت‌ها خواهیم پرداخت. شباهت‌های دو الگوریتم:

۱. هر دو الگوریتم با یک برهم‌نهی مساوی از تمام حالات ممکن آغاز می‌شوند.
 ۲. در هر دو الگوریتم از عملگر انتشارگری گراور (G) استفاده می‌کنیم.
 ۳. هر دو الگوریتم را می‌توان به عنوان یک دوران در فضای دوبعدی در نظر گرفت.
 ۴. هر دو از یک اوراکل برای دادن فاز -1 به جواب و در نتیجه نشان‌دار کردن هدف مورد جستجو استفاده می‌کنند.
 ۵. هر دو به زمانی از مرتبه‌ی $O(\sqrt{N})$ برای رسیدن به جواب نیاز دارند.
 ۶. در هر دو الگوریتم در یک زمان مشخص روی حالت سیستم اندازه‌گیری انجام می‌دهیم تا راس هدف را با بیشینه احتمال ممکن پیدا کنیم.
- با این وجود، تفاوت‌ها آشکاری نیز بین دو الگوریتم وجود دارد. حال به بیان این تفاوت‌ها و تاثیر آن بر عملکرد و پیاده‌سازی الگوریتم می‌پردازیم.

به خاطر بیاورید که الگوریتم گراور به طور دقیق به یک دوران در فضای دوبعدی نگاشت می‌شود، که این زیرفضای دوبعدی توسط بردارهای $|\psi\rangle$ (حالت اولیه)، و بردار $|0\rangle$ (آیتم مورد جستجو)، جاروب می‌شود. هر جستار از الگوریتم گراور معادل یک دوران در این زیرفضا خواهد بود. در الگوریتم ولگشت نیز نشان دادیم که این الگوریتم را نیز می‌توان به عنوان یک دوران دوبعدی نگاه کرد، لکن دو تفاوت اساسی وجود دارد:

۱. برخلاف الگوریتم گراور که یک نگاشت دقیق به دوران در زیرفضای دوبعدی است، الگوریتم ولگشت یک نگاشت تقریبی به دوران دوبعدی است.

۲. زیرفضای دوبعدی که الگوریتم ولگشت در آن رخ می‌دهد توسط بردارهای $|\psi\rangle$ و $|\psi_1\rangle$ جاروب می‌شود، و نه با بردارهای $|\psi\rangle$ و $|0\rangle$. بنابراین حالت نهایی الگوریتم، به طور دقیق و خالص فقط شامل آیتم هدف نیست، بلکه شامل یک توزیع کوچک از راس‌های همسایه‌ی نزدیک و همسایه‌های دورتر خواهد بود.

۳. تفاوت سوم در نحوه‌ی استفاده از عملگر گراور در طی الگوریتم است. در الگوریتم گراور، این عملگر به تمام فضای جستجوی 2^n بعدی (متناظر با فضای رؤس در الگوریتم ولگشت) اعمال می‌شود. در حالی که در الگوریتم ولگشت، اثر عملگر گراور به عنوان عملگر سکه فقط به فضای یال‌ها (فضای سکه) محدود می‌شود. از آنجاییکه غالب پیاده‌سازی‌های مربوط به کامپیوترهای کوانتومی شامل انواع چندگانه‌ی کیوبیت‌ها هستند، که مجموعه گیت‌های مختلفی را دارند، این حقیقت می‌تواند در پیاده‌سازی فیزیکی الگوریتم بسیار نکته‌ی کاربردی باشد. ما می‌توانیم از این نکته استفاده کنیم و فضای سکه را با کیوبیت‌هایی انتخاب کنیم که برای پیاده‌سازی عملگر انتشاری گراور مناسب باشد [۱۰].

۲.۲.۳ بهینه‌سازی الگوریتم جستجوی ولگشت کوانتومی روی ابرمکعب

الگوریتم جستجوی ولگشت کوانتومی روی ابرمکعب (الگوریتم SKW)، به تعداد $O(\sqrt{N})$ بار فراخوانی اوراکل نیازمند است تا بتواند یک داده‌ی خاص را در فضای جستجوی N عضوی پیدا کند. پیچیدگی زمانی کلی این الگوریتم، در قیاس با بهترین الگوریتم جستجوی در دسترس، تنها در حد یک عدد ثابت، متفاوت است. نشان دادیم تنها با یک بار اجرای الگوریتم و تعداد $O(\sqrt{N})$ فراخوانی الگوریتم، با احتمال نزدیک به $1/2$ راس هدف را خواهیم یافت. همچنین می‌توان با تکرار الگوریتم به تعداد دفعات مناسب احتمال موفقیت را به 1 نزدیک ساخت. حالا با انجام یک اصلاحیه، تعداد دفعات تکرار الگوریتم به منظور رسیدن به درصد موفقیت بالا را به طور قابل توجهی کاهش خواهیم داد. همانطور که قبلاً گفته شد، حالت نهایی الگوریتم عمدتاً شامل حالت هدف می‌باشد اما یک توزیع کوچک از رؤس مجاور و مجاور بعدی را نیز در بر دارد. می‌توان ولگشت کوانتومی مذکور را به دو ولگشت مستقل، مجزا کنیم، بدین صورت که \mathcal{H}_e نمایش دهنده‌ی زیرفضایی باشد که توسط بردارهای $|d, \vec{x}\rangle$ جاروب می‌شود با این شرط که $|\vec{x}\rangle$ زوج باشد و \mathcal{H}_o نمایانگر زیرفضای جاروب شده با همان بردارها و شرط $|\vec{x}\rangle$ فرد باشد. جملات زوج و فرد اشاره به نحوه‌ی برچسب‌گذاری رؤس دارد، که در اینجا این برچسب‌گذاری به نحوی است که همواره $\vec{x}_{tg} = 0$ است. در حالت کلی این دو زیرفضا بر مبنای پارته‌ی $\vec{x} \oplus \vec{x}_{tg}$ تعریف می‌شوند (پارته‌ی رشته‌ی بیتی \vec{x} به صورت $|\vec{x}\rangle \bmod 2$ تعریف می‌شود). دو ولگرد فوق در فضای هیلبرت خودشان آغاز به حرکت کرده و به صورت مستقل متحول می‌شوند. دو عملگر تصویری متعامد P_o و P_e که هر

حالت عمومی را به زیر فضای متناظر عملگر مربوطه تصویر می‌کنند تعریف می‌کنیم. همچنین در زیر فضای کاهش یافته (ولگشت روی خط)، زیر فضای زوج و فرد توسط بردارهای حالت (۴۳.۳) و (۴۲.۳) با x های زوج یا فرد، جاروب می‌شوند. با توجه به اینکه

$$[P_{o/e}, C.] = [P_{o/e}, C'] = \cdot \quad (۶۶.۳)$$

و با توجه به تعریف S (رابطه‌ی (۲.۳)) و نیز رابطه‌ی (۶۶.۳) میتوان نوشت:

$$\begin{aligned} P_o U' &= P_o (S C') = \sum_{|\vec{x}'|=odd} |d, \vec{x}'\rangle \langle d, \vec{x}'| \left(\sum_{|\vec{x}|=even} |d, \vec{x} \oplus \vec{e}_d\rangle \langle d, \vec{x}| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{|\vec{x}|=odd} |d, \vec{x} \oplus \vec{e}_d\rangle \langle d, \vec{x}| \right) C' \\ &= \left(\sum_{|\vec{x}'|=odd} \sum_{|\vec{x}|=odd} |d, \vec{x}'\rangle \langle d, \vec{x}'| d, \vec{x} \oplus \vec{e}_d\rangle \langle d, \vec{x}| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{|\vec{x}'|=odd} \sum_{|\vec{x}|=even} |d, \vec{x}'\rangle \langle d, \vec{x}'| d, \vec{x} \oplus \vec{e}_d\rangle \langle d, \vec{x}| \right) C' \quad (۶۷.۳) \end{aligned}$$

از طرفی با توجه به رابطه‌ی تعامد بین دو عملگر تصویر معرفی شده و نیز با توجه به این حقیقت که، اگر $|\vec{x}'|$ زوج باشد آنگاه $|\vec{x} \oplus \vec{e}_d|$ فرد است و بالعکس، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P_o U' &= \left(\sum_{|\vec{x}'|=odd} \sum_{|\vec{x}|=even} |d, \vec{x}'\rangle \langle d, \vec{x}'| d, \vec{x} \oplus \vec{e}_d\rangle \langle d, \vec{x}| \right) C' \\ &= \left(\sum_{|\vec{x}|=even} |d, \vec{x} \oplus \vec{e}_d\rangle \langle d, \vec{x}| \right) C' \quad (۶۸.۳) \end{aligned}$$

با یک محاسبه‌ی مشابه برای $U' P_e$ به روابط زیر می‌رسیم:

$$P_o U' = U' P_e \quad , \quad P_e U' = U' P_o \quad (۶۹.۳)$$

حال حالت‌های بهنجار زیر را معرفی می‌کنیم:

$$|\psi^{(e)}\rangle = \sqrt{2} P_e |\psi.\rangle \quad , \quad |\psi^{(o)}\rangle = \sqrt{2} P_o |\psi.\rangle \quad (۷۰.۳)$$

ضریب $\sqrt{2}$ ناشی از این حقیقت است که:

$$\sum_{|\vec{x}|=even} |d, \vec{x}\rangle \langle d, \vec{x}| = 1 \implies \sum_{|\vec{x}|=even} |d, \vec{x}\rangle \langle d, \vec{x}| + \sum_{|\vec{x}|=odd} |d, \vec{x}\rangle \langle d, \vec{x}| = 1 \quad (۷۱.۳)$$

از طرفی داشتیم:

$$|\psi.\rangle = |s^c\rangle \otimes |s^s\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{d=1}^n \sum_{\vec{x}} |d, \vec{x}\rangle \quad (۷۲.۳)$$

بنابراین می‌توانیم حالت اولیه را به صورت بسط زیر بنویسیم:

$$|\psi.\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi.\langle e\rangle\rangle + |\psi.\langle o\rangle\rangle) \quad (۷۳.۳)$$

با توجه به رابطه‌ی (۵۰.۳) و یادآوری این نکته که $|\psi.\rangle$ ویژه‌بردار تقریبی U' می‌باشد، خواهیم داشت:

$$U'|\psi.\langle o\rangle\rangle = U|\psi.\langle o\rangle\rangle = \sqrt{2}U'P_o|\psi.\rangle = \sqrt{2}P_eU'|\psi.\rangle = |\psi.\langle e\rangle\rangle \quad (۷۴.۳)$$

$$U'|\psi.\langle e\rangle\rangle = U|\psi.\langle e\rangle\rangle = |\psi.\langle o\rangle\rangle \quad (۷۵.۳)$$

با اعمال مکرر روابط (۶۹.۳) و (۷۴.۳) و (۷۵.۳) و به کمک رابطه‌ی (۷۰.۳) می‌بینیم که U' دارای خاصیت زیر است:

$$P_e(U')^{2r}|\psi.\rangle = P_e(U')^{2r+1}|\psi.\rangle \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \quad (۷۶.۳)$$

$$P_o(U')^{2r}|\psi.\rangle = P_o(U')^{2r-1}|\psi.\rangle \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (۷۷.۳)$$

بنابراین حالت ولگشت را در گام t ام می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(U')^t|\psi.\rangle = \sum_{x=0}^{n-1} \alpha_{R,x}^t |R, x\rangle + \sum_{x=1}^n \alpha_{L,x}^t |L, x\rangle \quad (۷۸.۳)$$

و تعریف می‌کنیم:

$$P_x^t = |\alpha_{L,x}^t|^2 + |\alpha_{R,x}^t|^2 \quad (۷۹.۳)$$

و برای سادگی $\alpha_{R,n}^t = \alpha_{L,0}^t = 0$ در نظر گرفته‌ایم. تعبیر فیزیکی P_x^t چنین است: P^t احتمال حضور داشتن ولگرد در راس هدف بعد از t گام است، و P_1^t مجموع احتمالات یافتن ولگرد در نزدیکترین رئوس مجاور به راس هدف می‌باشد. که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$p. = \sum_{d=0}^n |\langle d, \cdot | \psi_f \rangle|^2, \quad p_1 = \sum_{d, |\vec{x}|=1}^n |\langle d, \vec{x} | \psi_f \rangle|^2 \quad (۸۰.۳)$$

با دوبخشی سازی انجام شده در بالا برای ولگشت کوانتومی، می‌توان نشان داد برای هر $t > 0$ نامساوی زیر برقرار است:

$$P_1^{t+1} \leq P_1^t, \quad P_1^{t-1} \leq P_1^t \quad (۸۱.۳)$$

برای اثبات: $\alpha_{R,0}^{t-1}$ دلخواهی را در نظر بگیرید (بر اساس تعریف انجام شده $\alpha_{L,0}^{t-1}$ برابر ۰ است). در یک جستار، $\alpha_{R,0}^{t-1}$ بواسطه‌ی عملگر سکه‌ی C' به $\beta_{R,0}^{t-1}$ و $\beta_{L,0}^{t-1}$ دیگری تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} (U')^{t-1}|\psi.\rangle &= \alpha_{R,0}^{t-1}|R, 0\rangle + \dots \\ \rightarrow U^t|\psi.\rangle &= U'((U')^{t-1}|\psi.\rangle) = \alpha_{R,0}^{t-1}U'|R, 0\rangle + \dots \\ &= \beta_{R,0}^{t-1}S|R, 0\rangle + \dots = \alpha_{L,1}^t|L, 1\rangle + \dots \end{aligned} \quad (۸۲.۳)$$

بنابر تعریف $|R, 0\rangle$ و شرط یکانی بودن C' (رابطه‌ی (۴۹.۳)) خواهیم داشت:

$$|\beta_{R,\cdot}^{t-1}\rangle^2 = |\alpha_{R,\cdot}^{t-1}\rangle^2 = P^{t-1}, \quad \beta_{L,\cdot}^{t-1} = 0 \quad (۸۳.۳)$$

با در نظر گرفتن اثر S (رابطه‌ی (۱۸.آ))، بدست می‌آوریم که: $\alpha_{L,\cdot}^t = \beta_{R,\cdot}^{t-1}$ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$P_{\setminus}^t = |\alpha_{R,\cdot}^t\rangle^2 + |\alpha_{L,\cdot}^t\rangle^2 \geq |\alpha_{L,\cdot}^t\rangle^2 = |\alpha_{R,\cdot}^{t-1}\rangle^2 = P^{t-1} \quad (۸۴.۳)$$

به روش مشابه و براساس یکانی بودن سکه، همواره داریم:

$$|\beta_{R,\cdot}^t\rangle^2 + |\beta_{L,\cdot}^t\rangle^2 = |\alpha_{R,\cdot}^t\rangle^2 + |\alpha_{L,\cdot}^t\rangle^2 \quad (۸۵.۳)$$

و برطبق تعریف S داریم: $\alpha_{R,\cdot}^{t+1} = \beta_{L,\cdot}^t$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$P^{t+1} = |\alpha_{R,\cdot}^{t+1}\rangle^2 = |\beta_{L,\cdot}^t\rangle^2 \leq |\beta_{R,\cdot}^t\rangle^2 + |\beta_{L,\cdot}^t\rangle^2 = P_{\setminus}^t \quad (۸۶.۳)$$

از طرفی با توجه به رابطه‌ی (۷۶.۳) برای x های زوج نتیجه می‌گیریم: $P_x^{2r} = P_x^{2r+1}$ و از رابطه‌ی (۷۷.۳) برای x های فرد خواهیم داشت: $P_x^{2r} = P_x^{2r-1}$. با ترکیب این نامساوی‌ها با رابطه‌ی (۸۱.۳) نتیجه می‌گیریم که:

$$P_{\setminus}^t \geq P^t \quad (۸۷.۳)$$

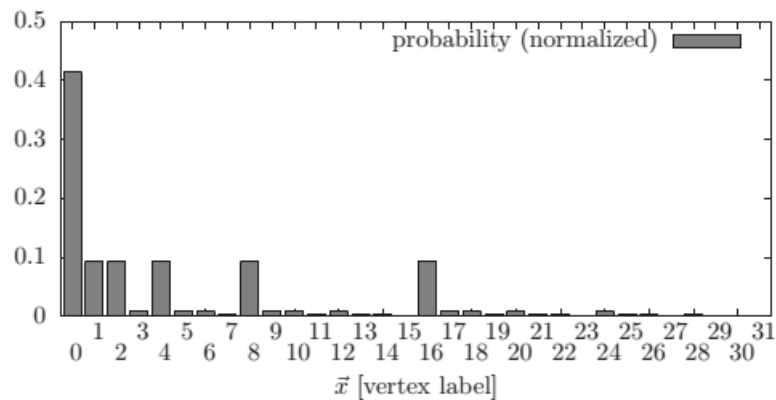
بنابراین و با توجه به اینکه $p_{\setminus} = 1/2 - O(1/n)$ ، احتمال کل اندازه‌گیری راس هدف، یا رئوسی که همسایه‌ی مستقیم راس هدف می‌باشند، به صورت زیر است:

$$p_c = p_{\setminus} + p_{\setminus} \geq 1 - O(1/n) \quad (۸۸.۳)$$

با توجه به اینکه حد بالای p_c ، ۱ است، در حد n های بزرگ احتمال کل به $p_c = 1$ نزدیک می‌شود. معادله‌ی (۸۸.۳) چه می‌گوید؟

بر طبق الگوریتم SKW تایید صحت خروجی اندازه‌گیری، یعنی \vec{x}_m بعد از t_f جستار، توسط یک اوراکل بررسی می‌شود. اگر خروجی همان راس مورد جستجو بود که الگوریتم با موفقیت پایان یافته است، در غیر اینصورت نتایج حاصل دور ریخته می‌شود و الگوریتم تکرار می‌شود. اما این کار (تکرار الگوریتم) غیر ضروری است، زیرا بر طبق رابطه‌ی (۸۸.۳) اگر نتیجه‌ی اندازه‌گیری راس مورد جستجو نبود، احتمال آنکه \vec{x}_m همسایه‌ی مستقیم راس هدف باشد، بزرگتر است از $1 - O(1/n)$. بنابراین شایسته است که تحقیق اوراکل را با مقادیری از مجموعه‌ی $\{\vec{x}_m \oplus \vec{e}_d \mid d = 0, 1, \dots, n-1\}$ انجام دهیم، که از این مجموعه می‌توان عضو نشان‌دار را به سادگی با یک پروتوکل کلاسیکی و به طور متوسط با $(\log_2 N)/2$ بار فراخوانی اوراکل، پیدا کرد. در شکل ۷.۳ نمودار توزیع احتمال (حاصل از شبیه‌سازی) برای موقعیت مکانی ولگرد، در الگوریتم بهینه شده، در ابعاد $n = 5$ بعد از تعداد جستار مناسب، نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که احتمال یافتن داده مورد نظر که همان $\vec{x}_{tg} = 0$ است، نزدیک $1/2$ می‌باشد، همچنین واضح است که رئوس مجاور با احتمال‌های زیاد در توزیع احتمال ظاهر می‌شوند، و مجموع ان احتمالات با احتمال یافتن راس هدف قابل مقایسه است.

در این قسمت ما نشان دادیم که، همسایه‌های بعدی راس هدف با احتمال زیاد قابل دستیابی است، بنابراین می‌توان تعداد دفعات تکرار الگوریتم را کاهش داد.



شکل ۷.۳: توزیع احتمال ولگرد به ازای $n = 5$ [۶۹]

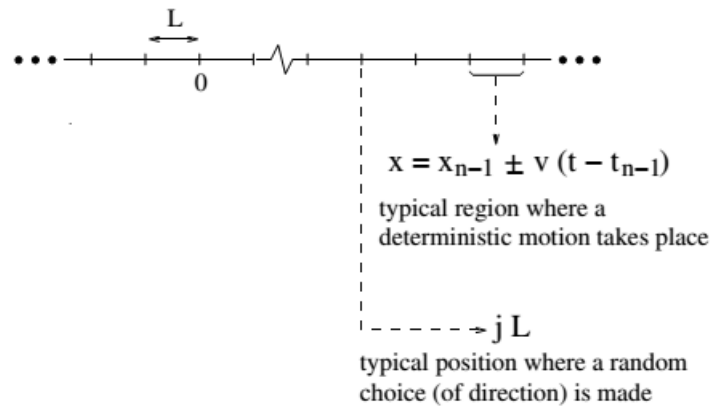
۳.۳ ولگشت کوانتومی پراکندگی

گفته شد ولگشت‌های کوانتومی بر دو نوع عمده‌ی ولگشت گسسته و ولگشت پیوسته دسته‌بندی می‌شوند. همچنین ولگشت‌های گسسته در دو نوع ولگشت سکه‌دار و ولگشت پراکندگی طبقه‌بندی می‌شوند. در ولگشت کوانتومی سکه‌دار، ذره‌ی کوانتومی روی رئوس گراف قرار می‌گیرد و یک درجه آزادی دیگری به نام "فضای سکه" به منظور یکانی بودن دینامیک ذره مورد استفاده قرار می‌گیرد [۷۰] و [۷۱]. ولگشت پراکندگی نوع دیگری از ولگشت کوانتومی نوع گسسته است که از ایده‌ی پراکندگی ذرات نشأت می‌گیرد. این ولگشت نخستین بار توسط هیلری^{۱۸} و همکارانش معرفی شد [۷۲] که در آن ذره‌ی کوانتومی روی یال‌های گراف جایگزیده است. در این نوع ولگشت فضای سکه غیر ضروری است و هر یال توصیف‌کننده‌ی دو حالت متمایز و متعامد بهنجار است، که یک حالت متناظر با حضور ذره روی یال مذکور و حرکت در یک راستای مشخص و حالت دیگر توصیف‌کننده‌ی حضور ذره روی همان یال و حرکت در راستای مخالف است. به عبارت دیگر اگر دو راس a و b با یک یال بهم متصل باشند، این یال نمایش دهنده‌ی دو حالت $|a, b\rangle$ (حرکت از راس a به راس b) و $|b, a\rangle$ است. این ساختار به ما امکان مطالعه‌ی ولگشت کوانتومی از دیدگاه نظریه‌ی پراکندگی را می‌دهد. خواص کلی این نوع ولگشت از روی ماتریس پراکندگی یا به عبارتی توابع انتقال و انعکاس (که از مشخصه‌های یک گراف محسوب می‌شوند) قابل مطالعه است. این رهیافت دارای مزایای عمده‌ای است از جمله اینکه امکان تعمیم ولگشت به هر نوع گراف پیچیده و بزرگی به کمک ترکیب گراف‌های کوچکتر را فراهم می‌آورد.

ولگشت کلاسیکی یک بعدی را در نظر بگیرید، که از مبدا حرکت خود در $x = 0$ و در لحظه‌ی $t = 0$ حرکت خود را آغاز می‌کند، در هر گام از تحول، ذره مسافت یکسان L را با سرعت ثابت v طی می‌کند. دینامیک این سیستم را می‌توان اینگونه توصیف کرد:

در لحظه‌ی t ولگشت در مکان $x(t = n\tau) = x_n = \pm jL$ قرار دارد (که $n, j = 0, 1, \dots$ و $\tau = \frac{L}{v}$)

^{۱۸}Mark Hillery



شکل ۸.۳: ولگشت کلاسیکی روی خط از دو منظر

می‌باشد) و به صورت کاملاً تصادفی^{۱۹} و آنی^{۲۰} یک راستای جدید به سمت راست $\sigma = +1$ با احتمال p یا به سمت چپ $\sigma = -1$ با احتمال $1 - p$ انتخاب می‌کند. این سیستم یک بعدی را در می‌توان با دو فرآیند مشخصه‌سازی نمود:

- فرآیند کاملاً تصادفی انتخاب راستا که در نقاط شبکه^{۲۱} یعنی نقاط $\pm jL$ واقع می‌شود.
- فرآیند کاملاً دترمینیستیک^{۲۲} حرکت بالستیک $x(t) = x_{n-1} + \sigma v(t_n - t_{n-1})$ که روی پیوندهای شبکه (یال‌های گراف) رخ می‌دهد.

با تصویر ارائه شده در فوق، قادر به تجسم ساختار ولگشت کوانتومی یک بعدی خواهیم بود. این دو فرآیند در شکل ۸.۳ نشان داده شده است. فرآیند اول متناظر با ولگشت کوانتومی سکه‌ای است. ذره‌ی کوانتومی در رئوس شبکه جای‌گزیده خواهد بود و حالت‌های کوانتومی توصیف‌کننده‌ی سیستم، مجموعه بردارهای متعامد بهنجار $\{|j\rangle\}$ هستند، علاوه بر این متناظر با هر راس j یک فضای هیلبرت درونی دو حالته به نام فضای سکه نسبت می‌دهیم تا دینامیک ذره یکانی باشد. بنابراین فضای هیلبرت کل سیستم $H = H_p \otimes H_c$ توسط پایه‌های $\{|j\rangle \otimes |\sigma\rangle\}$ جاروب می‌شود. تحول یکانی سیستم با تعریف عملگر جابه‌جایی به شکل $S|j\rangle = |j+1\rangle$ و $S^\dagger|j\rangle = |j-1\rangle$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U_c = (S \otimes |+\rangle\langle +| + S^\dagger \otimes |-\rangle\langle -|) \left(\sum_j |j\rangle\langle j| \otimes C^{(j)} \right) \quad (۸۹.۳)$$

این عملگر به شرط یکانی بودن $C^{(j)}$ ها، یکانی خواهد بود. در فرآیند دوم که متناظر با ولگشت کوانتومی پراکندگی است، ذره‌ی کوانتومی روی یال‌های گراف قرار می‌گیرد، به طوریکه به ازای هر یال جهت‌دار از راس v_1 به راس v_2 یک یال جهت‌دار دیگر در جهت عکس وجود خواهد داشت، و در مرجع [۷۲] و [۷۳] نشان

^{۱۹}Random

^{۲۰}instantaneously

^{۲۱}lattice sites

^{۲۲}deterministic

داده شده است که وجود فضای سکه غیر ضروری است و این نوع ولگشت برای هر نوع گرافی به سادگی قابل تعریف است. متناظر با هر یال دو حالت متعامد بهنجار وجود خواهد داشت (که نمایش دهنده‌ی حضور ذره در یال مورد نظر و حرکت در یک جهت و جهت مخالف آن است) و مجموعه‌ی این حالت‌های یالی فضای هیلبرت مسئله را تشکیل می‌دهند. بنابراین اگر بین دو راس a و b یک یال وجود داشته باشد، دو حالت متعامد بهنجار $|a, b\rangle$ و $|b, a\rangle$ قابل تعریف می‌باشد. اگر رئوس را با اعداد $1, \dots, m$ برچسب‌گذاری کنیم، حالت سیستم با بردار حالت $|\psi\rangle = \sum_{j,k=1}^m \alpha_{j,k} |j, k\rangle$ نمایش داده می‌شود. در این مدل از ولگشت کوانتومی، رئوس گراف به عنوان مراکز پراکندگی عمل می‌کنند و هر راس معادل یک عملگر یکسانی موضعی است که تمام حالت‌های وارد شده به راس را به حالت‌های خروجی از راس نگاشت می‌کند. یعنی برای راس v مجموعه‌ی a_j نمایش دهنده‌ی تمام رئوس متصل به این راس است و عملگر یکسانی تعریف شده در این راس که با U_v نشان داده می‌شود، نگاشت $U_v : \{|a_j, v\rangle\} \rightarrow \{|v, a_j\rangle\}$ را انجام می‌دهد. عملگر تحول زمانی (یکسانی) کل سیستم، به صورت جمع مستقیم تک تک این عملگرهای موضعی تعریف می‌شود، یعنی:

$$U = \bigoplus_v U_v \quad (90.3)$$

برای بررسی دینامیک سیستم، همچون گذشته بایست در مورد طیف عملگر تحول بحث کنیم. بدین منظور با استفاده از تقارن‌های گراف، ابعاد سیستم را کاهش می‌دهیم و تحلیل مسئله را در یک زیرفضای کاهش یافته انجام می‌دهیم. این نوع کاهش بعد مسئله نخستین بار در مرجع [۷۴] مورد استفاده قرار گرفت. رهیافت کلی چنین است:

اگر دسته‌ای از یال‌ها را بتوان به کمک نگاشت کوانتومی به ترکیب دیگری از یال‌ها تبدیل کرد، می‌توان گفت این حالت‌ها در یک کلاس معادل قرار می‌گیرند و یک برهم‌نهی یکنواخت از حالت‌های یالی را می‌توان به عنوان یک حالت واحد در گراف کاهش یافته در نظر گرفت. قبلاً این کار را در الگوریتم جستجوی ولگشت سکه روی ابرمکعب پیاده کردیم، حالا به مثال دیگری از این دست توجه کنید.

گراف کامل K_3 با رئوس A, B, C را در نظر بگیرید. راس A یک راس بازتابنده و رئوس دیگر عبوردهنده هستند، به طوریکه $U|B, A\rangle = |A, B\rangle$ و $U|B, C\rangle = |C, A\rangle$. نگاشت مورد نظر تغییر زیر را ایجاد می‌کند:

$$\begin{aligned} |A, B\rangle &\leftrightarrow |A, C\rangle \\ |B, A\rangle &\leftrightarrow |C, A\rangle \\ |B, C\rangle &\leftrightarrow |C, B\rangle \end{aligned} \quad (91.3)$$

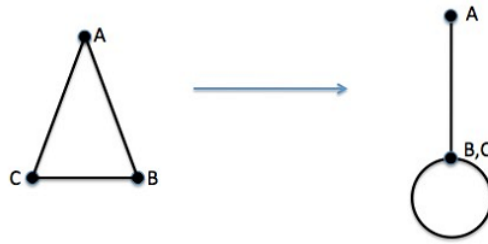
گراف اولیه دارای ۶ حالت زیر است:

$$G = \{|A, B\rangle, |B, A\rangle, |A, C\rangle, |C, A\rangle, |C, B\rangle, |B, C\rangle\} \quad (92.3)$$

در حالی که گراف کاهش یافته فقط دارای سه حالت زیر خواهد بود:

$$G_A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (|A, B\rangle + |A, C\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}} (|B, A\rangle + |C, A\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}} (|B, C\rangle + |C, B\rangle) \right\} \quad (93.3)$$

این فرآیند در شکل ۹.۳ نمایش داده شده است. در اینجا ذکر دو نکته حائز اهمیت است:



شکل ۹.۳: فرآیند کاهش ابعاد گراف

۱. مجموعه‌ی گفته شده تحت تاثیر U ناوردا است

۲. هر حالت در G_A تحت تاثیر نگاشت کوانتومی ϕ به خودش نگاشت می‌شود

تعریف زیر را داریم:

برای هر گراف G با عملگر تحول یکانی U میتوانیم یک گراف کاهش یافته تعریف کنیم، به طوریکه:

$$G_A \equiv \{|\psi\rangle; \phi|\psi\rangle = |\psi\rangle, \forall \phi \mid U = \phi^{-1}U\phi\} \quad (۹۴.۳)$$

یعنی گراف کاهش یافته از ترکیب حالت‌هایی بوجود می‌آید که تحت نگاشت (که این نگاشت با U جابه‌جاپذیر است) مربوطه، ناوردا باشند. به عبارت دیگر داریم:

$$|\psi\rangle \in G_A$$

$$\phi|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

$$U\phi|\psi\rangle = U|\psi\rangle$$

$$\phi U|\psi\rangle = U|\psi\rangle$$

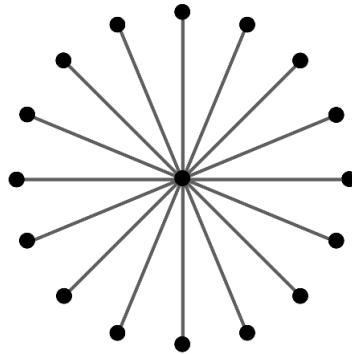
$$\Rightarrow U|\psi\rangle \in G_A \quad (۹۵.۳)$$

نتیجه اینکه با این ترفند، بسته به میزان تقارن موجود در مسئله می‌توان ابعاد فضای هیلبرت را کاهش داد و تحلیل مسئله را آسان نمود. به دلیل تقارن بسیار بزرگی که در گراف‌های ستاره‌ای وجود دارد، توجه خود را به این نوع گراف‌ها معطوف می‌کنیم.

گراف ستاره‌ای متشکل از یک راس مرکزی^{۲۳} و N راس خارجی است. راس مرکزی را با 0 و رئوس خارجی را با اعداد 1 تا N برچسب‌گذاری می‌نماییم، با این شرط که راس مرکزی به تمام یال‌های خارجی متصل است، لیکن فرض کنونی ما این است که رئوس خارجی به یکدیگر متصل نیستند. فرض عمومی دیگر ما این است که راس مرکزی یک راس بخش‌کننده‌ی استاندارد^{۲۴} است، بدان مفهوم که ضرایب عبور و بازتاب برای تمام N یال یکسان

^{۲۳}hub vertex

^{۲۴}standard diffusive



شکل ۱۰.۳: گراف ستاره‌ای

است و هیچ تمایز و ارجحیتی در برخورد با رئوس خارجی وجود ندارد. نمونه‌ای از این گراف را در شکل ۱۰.۳ مشاهده می‌نمایید. بنابر این فضای هیلبرت مسئله را می‌توان با مجموعه‌ی $\{|0, j\rangle, |j, 0\rangle; j = 1, 2, \dots, N\}$ توصیف نمود. هر حالت ورودی $|j, 0\rangle$ به راس مرکزی به صورت زیر نگاشت می‌شود [۷۵]:

$$U|j, 0\rangle = r|0, j\rangle + t \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N |0, k\rangle \quad (۹۶.۳)$$

یکانی بودن U دو شرط زیر را به مسئله تحمیل می‌کند [۷۶] (رک به پیوست ۴.۰):

$$|r|^2 + (N - 1)|t|^2 = 1$$

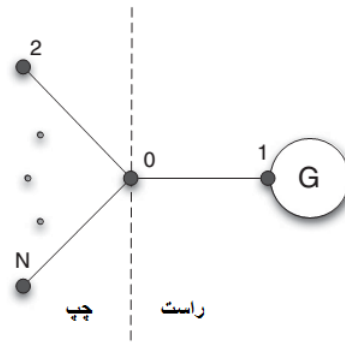
$$2\text{Re}(r^*t) + (N - 2)|t|^2 = 0 \quad (۹۷.۳)$$

ضرایب r و t حقیقی هستند و شرط $r + t = 1$ را برآورده می‌کنند. در خلال این پایان‌نامه ما شروط $\arg(r) = \pi$ و $\arg(t) = 0$ را فرض می‌کنیم و در نتیجه حل عمومی معادله‌ی (۹۷.۳) به جواب‌های زیر منجر می‌شود [۷۷]:

$$\begin{aligned} r &= -1 + \frac{2}{N} = -1 + 2\epsilon \\ t &= \frac{2}{N} = 2\epsilon \end{aligned} \quad (۹۸.۳)$$

که $\epsilon = \frac{1}{N}$ است. هدف ما در این بخش، یافتن ناهنجاری‌های گراف^{۲۵} است. حالت عمومی یک گراف ستاره‌ای با یک ناهنجاری نامشخص در یکی از یال‌ها را در نظر بگیرید (شکل ۱۱.۳)، در حالت کلی این ناهنجاری را G می‌نامیم. هدف الگوریتم، یافتن ناهنجاری G با بیشترین احتمال ممکن است. زیرگراف G به هر کدام از رئوس خارجی می‌تواند متصل باشد، بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم این راس شماره ۱ باشد، یعنی راس نشان‌دار ما راس ۱ است. رئوس ۰ و ۱ و حالات مابین آنها و هرآنچه درون G است، سمت راست گراف، و

^{۲۵}graph anomalies



شکل ۱۱.۳: نمونه‌ای از یک گراف ستاره‌ای با یک ناهنجاری عمومی، متصل به یکی از رئوس خارجی

رئوس ۲ تا N سمت چپ را تشکیل می‌دهند. رئوس ۲ تا N ذره‌ی ورودی را با فاز دلخواه ϕ منعکس می‌کنند، یعنی :

$$U|0, j\rangle = e^{i\phi}|j, 0\rangle, \quad \forall j \geq 2 \quad (99.3)$$

هدف از جستجوی کوانتومی در گراف‌های ستاره‌ای به دست آوردن بیشترین دامنه‌ی احتمال ممکن برای حالات $|0, 1\rangle$ و $|1, 0\rangle$ است، به طوری که بعد از اندازه‌گیری حالت سیستم بعد از n گام، با بیشترین احتمال ممکن به راس نشان‌دار برسیم. توجه به این نکته حائز اهمیت است که، فرض ما این است که به زیرگراف G دسترسی نداریم و بنابراین اندازه‌گیری روی خود G قابل تعریف نیست. با توجه به تقارن موجود در سمت چپ شکل ۱۱.۳ از تعریف زیر برای ساده‌سازی استفاده می‌کنیم [۷۸] :

$$\begin{aligned} |in\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=2}^N |j, 0\rangle \\ |out\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=2}^N |0, j\rangle \end{aligned} \quad (100.3)$$

بنابراین در راس مرکزی خواهیم داشت:

$$U|in\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=2}^N U|0, j\rangle \quad (101.3)$$

از طرفی به کمک رابطه‌ی (۹۶.۳) خواهیم داشت:

$$U|in\rangle = [r + (N-2)t]|out\rangle + t\sqrt{N-1}|0, 1\rangle$$

$$U|1, 0\rangle = r|0, 1\rangle + t\sqrt{N-1}|out\rangle \quad (102.3)$$

بازنویسی روابط بالا بر حسب پارامتر اختالی ϵ منجر به روابط زیر خواهد شد:

$$U|in\rangle = (1-2\epsilon)|out\rangle + 2\sqrt{\epsilon-\epsilon^2}|0, 1\rangle$$

$$U|1, 0\rangle = r|0, 1\rangle + t\sqrt{N-1}|out\rangle \quad (103.3)$$

توجه داشته باشید که U تابعی از ϵ است، یعنی $U = U(\epsilon)$ ، زیرا عناصر ماتریسی آن تابعی از ϵ هستند. تعریف میکنیم $U. = U|_{\epsilon=0}$ و در حد $\epsilon \rightarrow 0$ که معادل $N \rightarrow \infty$ است، داریم:

$$\begin{aligned} U. |in\rangle &= |out\rangle \\ U. |1, 0\rangle &= -|0, 1\rangle \end{aligned} \quad (10.4.3)$$

یعنی تحت تاثیر $U.$ حالت‌های موجود در سمت چپ $(\{|in\rangle, |out\rangle\})$ و سمت راست $(\{|G, |0, 1\rangle, |1, 0\rangle\})$ همچنان غیرمخلوط باقی می‌مانند.

به طور خلاصه مسئله چنین است: مسئله‌ی اصلی شامل دسته‌ای از گراف‌ها با تعداد بسیار زیاد حالت‌های یالی است، که دارای فضای هیلبرتی با بعد $2N + |G|$ است ($|G|$ تعداد حالت‌های موجود در G است) ولی با کمک تقارن، مسئله را به فضای هیلبرت $4 + |G|$ بعدی کاهش می‌دهیم و تحلیل آن را در این زیرفضای ناورد انجام می‌دهیم.

با توجه به نامشخص بودن موقعیت راس نشان‌دار، حالت اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} |\psi.\rangle &= \frac{\alpha}{N} \sum_{j=1}^N |j, 0\rangle + \frac{\beta}{N} \sum_{j=1}^N |0, j\rangle \\ \Rightarrow |\psi.\rangle &= \alpha |in\rangle + \beta |out\rangle + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \end{aligned} \quad (10.5.3)$$

از سوی دیگر با یک نگاه به ساختار $U.$ در سمت چپ میبینیم که:

$$U. = \begin{pmatrix} \cdot & e^{i\phi} \\ 1 & \cdot \end{pmatrix} \quad (10.6.3)$$

ویژه‌مقادیر آن به صورت $\pm e^{\frac{i\phi}{2}}$ ظاهر می‌شود و ویژه‌توابع متناظر به صورت $\frac{1}{\sqrt{2}}(|out\rangle \pm e^{\frac{i\phi}{2}} |in\rangle)$ هستند. نشان داده شده است [۷۹] اگر سمت راست، یکی یا هر دوی این ویژه‌مقادیر را با سمت چپ به اشتراک بگذارد، آنگاه یک دوران رخ می‌دهد و حالت اولیه‌ای به شکل $|l.\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|out\rangle \pm e^{\frac{i\phi}{2}} |in\rangle)$ در سمت چپ، به یک ویژه‌حالت دیگر در سمت راست، با همان ویژه‌مقدار منتقل خواهد شد. بنابراین جستجو به منظور یافتن G تبدیل به تلاش به یافتن یکی از ویژه‌مقادیر و ویژه‌دارهای سمت راست می‌شود، و همواره می‌توان ϕ را طوری کنترل کرد که سمت راست و چپ یک ویژه‌مقدار به اشتراک بگذارند. حال به چند مثال توجه کنید:

۱.۳.۳ گراف گراور

اگر زیرگراف G تنها یک راس باشد که ذره‌ی ورودی را با فاز π منعکس کند، منجر به همان الگوریتم گراور خواهد شد و همین نام را برای این مسئله انتخاب کرده‌ایم. تعاریف زیر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |out\rangle \\ |\psi_2\rangle &= |in\rangle \\ |\psi_3\rangle &= |0, 1\rangle \\ |\psi_4\rangle &= |1, 0\rangle \end{aligned} \quad (10.7.3)$$

عملگر تحول یکانی همانند پیش تعریف می‌شود، با این تبصره که $U|0, 1\rangle = -|1, 0\rangle$ در پایه‌های تعریف شده خواهیم داشت:

$$U(\epsilon) = \begin{pmatrix} \cdot & 1 - 2\epsilon & \cdot & 2\sqrt{\epsilon - \epsilon^2} \\ e^{i\phi} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2\sqrt{\epsilon - \epsilon^2} & \cdot & 2\epsilon - 1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix} \quad (10.8.3)$$

و نیز خواهیم داشت:

$$U(\epsilon = \cdot) = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ e^{i\phi} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{pmatrix} \quad (10.9.3)$$

معادله مشخصه‌ی U به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} C(\lambda) &= \lambda^4 - (e^{i\phi} + 1)\lambda^2 + e^{i\phi} \\ &= (\lambda^2 - e^{i\phi})(\lambda^2 - 1) \end{aligned} \quad (11.0.3)$$

چهار ویژه‌مقدار به صورت $\pm 1, \pm e^{\frac{i\phi}{2}}$ بدست می‌آید. اگر $\phi = 0$ باشد، ریشه‌ی مضاعف خواهیم داشت و معادله‌ی مشخصه‌ی U به صورت $C(\lambda) = \lambda^4 - 2(1 - 2\epsilon)\lambda^2 + 1$ می‌شود، جواب‌های این معادله به صورت $\lambda(\epsilon) = \pm\sqrt{1 - 2\epsilon} \pm 2i\sqrt{\epsilon - \epsilon^2}$ است. برای یافتن ویژه‌بردارهای متناظر باید معادلات زیر را حل

کنیم:

$$\begin{aligned} (1 - 2\epsilon)x_1 + 2\sqrt{\epsilon - \epsilon^2}x_2 &= \lambda x_1 \\ x_1 &= \lambda x_2 \\ 2\sqrt{\epsilon - \epsilon^2}x_2 + (2\epsilon - 1)x_1 &= \lambda x_2 \\ -x_2 &= \lambda x_1 \end{aligned} \tag{۱۱۱.۳}$$

از این معادلات نتیجه می‌گیریم:

$$(1 - 2\epsilon - \lambda^2 + 2\sqrt{\epsilon - \epsilon^2})x_1 + (2\epsilon - 1 + \lambda^2 + 2\sqrt{\epsilon - \epsilon^2})x_2 = 0 \tag{۱۱۲.۳}$$

با فرض $x_2 = 1$ مقادیر زیر را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda(\epsilon) \\ x_2 &= \frac{1 - 2\epsilon - \lambda^2 + 2\sqrt{\epsilon - \epsilon^2}}{2\epsilon - 1 + \lambda^2 + 2\sqrt{\epsilon - \epsilon^2}} = i \\ x_1 &= i\lambda(\epsilon) \end{aligned} \tag{۱۱۳.۳}$$

در نتیجه متناظر با $\lambda^{(1)}(\epsilon) = \sqrt{1 - 2\epsilon + 2i\sqrt{\epsilon - \epsilon^2}}$ ویژه‌بردار زیر را داریم:

$$|v^{(1)}(\epsilon)\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - 2\epsilon + 2i\sqrt{\epsilon - \epsilon^2}} \\ 1 \\ -i\sqrt{1 - 2\epsilon + 2i\sqrt{\epsilon - \epsilon^2}} \\ i \end{pmatrix} \tag{۱۱۴.۳}$$

به همین طریق متناظر با $\lambda^{(2)}(\epsilon) = \sqrt{1 - 2\epsilon - 2i\sqrt{\epsilon - \epsilon^2}}$ و $\lambda^{(3)}(\epsilon) = -\sqrt{1 - 2\epsilon + 2i\sqrt{\epsilon - \epsilon^2}}$ ویژه‌بردارهای زیر را خواهیم داشت

$$|v^{(2)}(\epsilon)\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - 2\epsilon - 2i\sqrt{\epsilon - \epsilon^2}} \\ 1 \\ i\sqrt{1 - 2\epsilon - 2i\sqrt{\epsilon - \epsilon^2}} \\ -i \end{pmatrix} \tag{۱۱۵.۳}$$

و

$$|v^{(r)}(\epsilon)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-2\epsilon+2i\sqrt{\epsilon-\epsilon^2}} \\ -1 \\ -i\sqrt{1-2\epsilon+2i\sqrt{\epsilon-\epsilon^2}} \\ -i \end{pmatrix} \quad (116.3)$$

و

$$|v^{(l)}(\epsilon)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-2\epsilon-2i\sqrt{\epsilon-\epsilon^2}} \\ -1 \\ i\sqrt{1-2\epsilon-2i\sqrt{\epsilon-\epsilon^2}} \\ i \end{pmatrix} \quad (117.3)$$

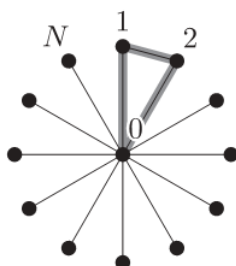
از طرف دیگر می‌توان به صورت ساده‌تر نوشت (ر.ک پیوست ۵.آ)

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)}(\epsilon) &= e^{i\sqrt{\epsilon}} + O(\epsilon) \\ \lambda^{(2)}(\epsilon) &= e^{-i\sqrt{\epsilon}} + O(\epsilon) \\ \lambda^{(3)}(\epsilon) &= -e^{i\sqrt{\epsilon}} + O(\epsilon) \\ \lambda^{(4)}(\epsilon) &= -e^{-i\sqrt{\epsilon}} + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (118.3)$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$|v^{(1)}(\epsilon)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix} + O(\sqrt{\epsilon}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|l^{(1)}\rangle - i|\tau^{(1)}\rangle) + O(\sqrt{\epsilon}) \quad (119.3)$$

که $|l^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|out\rangle + |in\rangle)$ و $|\tau^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 1\rangle - |1, 0\rangle)$ و سایر ویژه‌بردارها را نیز می‌توان به همین ترکیب مشابه نوشت. همانطور که قبلاً ذکر شد، موقعیت راس نشان‌دار مشخص نیست از اینرو حالت اولیه‌ی قابل قبول باید به صورت یک برهم‌نهی یکسان از تمام حالات ممکن باشد، این بدان مفهوم است که غالب اوقات (صرفنظر از یک مقدار جزئی) حالت اولیه تماماً در سمت چپ واقع است. حالت اولیه را به صورت زیر انتخاب



شکل ۱۲.۳: گراف ستاره‌ای با یک یال اضافه

می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{j=1}^N (|0, j\rangle + |j, 0\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|in\rangle + |out\rangle) + O(\sqrt{\epsilon}) \\
 &= |l^{(1)}\rangle + O(\sqrt{\epsilon})
 \end{aligned} \tag{۱۲.۰.۳}$$

بنابراین حالت ولگشت بعد از m گام به صورت زیر خواهد شد

$$\begin{aligned}
 U^m |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} U^m (|v^{(1)}\rangle + |v^{(2)}\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{im\sqrt{\epsilon}} |v^{(1)}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-im\sqrt{\epsilon}} |v^{(2)}\rangle + O(\sqrt{\epsilon}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(m\sqrt{\epsilon}) \\ \cos(m\sqrt{\epsilon}) \\ -i \sin(m\sqrt{\epsilon}) \\ i \sin(m\sqrt{\epsilon}) \end{pmatrix} + O(\sqrt{\epsilon})
 \end{aligned} \tag{۱۲.۱.۳}$$

بنابراین اگر $m = \frac{\pi}{2\sqrt{\epsilon}} = \frac{\pi}{4} \sqrt{N}$ باشد، آنگاه با یک خطا از مرتبه $\sqrt{\epsilon}$ ($O(\frac{1}{\sqrt{N}})$) ولگشت در حالت $|0, 1\rangle$ یا $|1, 0\rangle$ پیدا خواهد شد.

۲.۳.۳ گراف ستاره‌ای با یک یال اضافه

مورد دیگری را بررسی می‌کنیم که یک گراف ستاره‌ای با N راس خارجی داریم، اما بین دوتا از راس‌های خارجی یک یال اضافی وجود دارد (شکل ۱۲.۳). فرض می‌کنیم این یال اضافی بین رئوس ۱ و ۲ باشد، هدف ما یافتن این یال اضافه با بیشترین احتمال ممکن است. روند حل مسئله چنین است: ابتدا یک زیرفضای ناورد (تحت اثر U) با ابعاد کوچک پیدا می‌کنیم که ولگشت در این زیرفضا اتفاق بیوفتد، سپس عملگر تحول یکانی را در این

زیرفضا قطری سازی می‌کنیم، این کار را نوعاً از رهیافت اختلالی برای یافتن ویژه مقادیر و ویژه توابع مربوطه انجام می‌دهیم، جواب‌های مرتبه صفر اختلال در حد $N \rightarrow \infty$ بدست آیند و بسط اختلالی بر اساس توان‌های پارامتر کوچک $\frac{1}{N}$ خواهد بود. ویژه‌حالاتی یافت می‌شود که در مرتبه صفر اختلال دارای تبهگنی هستند و منجر به یک فضای هیلبرت جالب برای مسئله می‌شوند. در نهایت با انتخاب یک حالت اولیه مناسب و محاسبه‌ی حالت ولگشت بعد از n گام و اندازه‌گیری، عمل جستجو پایان می‌یابد. عملگر تحول یکانی به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\begin{aligned} U|0, j\rangle &= |j, 0\rangle, \quad \forall j > 2 \\ U|0, 1\rangle &= |1, 2\rangle \\ U|0, 2\rangle &= |2, 1\rangle \\ U|1, 2\rangle &= |2, 0\rangle \\ U|2, 1\rangle &= |1, 0\rangle \end{aligned} \quad (122.3)$$

توجه داشته باشید که فرض ما این است که رئوس ۱ و ۲ کاملاً عبور دهنده هستند و هیچ‌گونه بازتابی ندارند، لیکن در نظر گرفتن یک مقدار بازتاب جزئی نتایج را به صورت محسوسی تغییر نمی‌دهد [۸۰]. پایه‌های زیر را معرفی می‌کنیم که فضای هیلبرت ۵ بعدی S را جاروب می‌کنند:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle + |0, 2\rangle) \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |2, 0\rangle) \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N-2}} \sum_{j=3}^N |0, j\rangle \\ |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N-2}} \sum_{j=3}^N |j, 0\rangle \\ |\psi_5\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 2\rangle + |2, 1\rangle) \end{aligned} \quad (123.3)$$

اثر عملگر تحول روی این پایه‌ها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} U|\psi_1\rangle &= |\psi_5\rangle \\ U|\psi_2\rangle &= -(r-t)|\psi_1\rangle + 2\sqrt{rt}|\psi_3\rangle \\ U|\psi_3\rangle &= |\psi_4\rangle \\ U|\psi_4\rangle &= (r-t)|\psi_2\rangle + 2\sqrt{rt}|\psi_1\rangle \\ U|\psi_5\rangle &= |\psi_2\rangle \end{aligned} \quad (124.3)$$

بنابراین ماتریس U به شکل زیر می‌باشد:

$$U = \begin{pmatrix} \cdot & t-r & \cdot & 2\sqrt{rt} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 2\sqrt{rt} & \cdot & r-t & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (۱۲۵.۳)$$

معادله مشخصه‌ی این ماتریس به صورت $\lambda^5 + 2t\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda^2 - 2t\lambda^2 - 1 = 0$ در حد $N \gg 1$ ماتریس U به شکل زیر می‌شود:

$$U = \begin{pmatrix} \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (۱۲۶.۳)$$

و معادله مشخصه‌ی آن به صورت $\lambda^5 - \lambda^3 + \lambda^2 - 1 = 0$ است. ویژه‌مقادیر آن $\lambda = +1, -1, -1, e^{\pm \frac{i\pi}{3}}$ هستند. حالا تصحیح مرتبه اول را بدست می‌آوریم، یعنی قرار می‌دهیم $\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda$. محاسبات ما نشان می‌دهد فقط برای ویژه‌مقدار -1 ، تصحیح مرتبه اول از مرتبه‌ی $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ خواهد بود و برای سایر ویژه‌مقادیر این تصحیح از مرتبه‌ی $O(\frac{1}{N})$ است. و نشان داده شده است [۸۱] برای نائل شدن به افزایش سرعت مربعی در الگوریتم جستجوی کوانتومی، لازم است حالت کوانتومی بر مبنای $O(\sqrt{N})$ تغییر کند، و این فقط برای برهم‌نهی از حالت‌های رخ می‌دهد که ویژه‌مقادیر آن به صورت $\lambda = \lambda_0 + O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ باشد. (برای اثبات دقیق این موضوع رک مرجع [۷۹]). بنابراین برای ویژه‌مقدار -1 با جای‌گذاری مقدار $\lambda = -1 + \delta\lambda$ در معادله مشخصه‌ی ماتریس U و نگاه‌داشتن جملات تا مرتبه دوم پارامترهای کوچک مسئله، تصحیح مرتبه اول را به صورت $\delta\lambda = \pm i\sqrt{\frac{2t}{3}}$ بدست آوردیم. متناظر با دو ویژه‌مقدار $\lambda = -1 \pm i\Delta$ (که $\Delta = \sqrt{\frac{2t}{3}}$) دو ویژه‌حالت داریم که برای بدست آوردن آن‌ها باید معادلات زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} -(r-t)x_2 + 2\sqrt{rt}x_4 &= (-1 \pm i\Delta)x_1 \\ x_5 &= (-1 \pm i\Delta)x_2 \\ 2\sqrt{rt}x_2 + (r-t)x_4 &= (-1 \pm i\Delta)x_3 \\ x_3 &= (-1 \pm i\Delta)x_4 \\ x_1 &= (-1 \pm i\Delta)x_5 \end{aligned} \quad (۱۲۷.۳)$$

$x_2 = 1$ در نظر می‌گیریم، با این فرض خواهیم داشت:

$$x_1 = 1 - O(\Delta) \quad (128.3)$$

$$x_5 = -1 + O(\Delta)$$

$$x_4 = i\sqrt{\frac{3}{2}} + O(\Delta)$$

$$x_3 = -i\sqrt{\frac{3}{2}} + O(\Delta)$$

پس ویژه‌کت متناظر با ویژه‌مقدار $\lambda = -1 + i\Delta$ را با صرفنظر از جملات $O(\Delta)$ و بزرگتر، به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i\sqrt{\frac{3}{2}} \\ i\sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 \end{pmatrix} + O(\Delta) \quad (129.3)$$

و متناظر با $\lambda = -1 - i\Delta$ داریم

$$|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i\sqrt{\frac{3}{2}} \\ -i\sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 \end{pmatrix} + O(\Delta) \quad (130.3)$$

با توجه به ناوردایی زیرفضای ۵ بعدی S تحت U ، اگر حالت اولیه را طوری برگزینیم که درون این زیرفضا باشد، آنگاه مطمئن خواهیم بود که ولگشت به طور کامل در این زیرفضا اتفاق می‌افتد. حالت اولیه برهم‌نهی برابر از

حالات ممکن باید باشد، حالت اولیه را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 |\psi_{init}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{j=1}^N (|0, j\rangle - |j, 0\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} (|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle) + \sqrt{\frac{N-2}{2N}} (|\psi_3\rangle - |\psi_4\rangle) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} \\ -\frac{1}{\sqrt{N}} \\ \sqrt{\frac{N-2}{N}} \\ -\sqrt{\frac{N-2}{N}} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (131.3)
 \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$|\psi_{init}\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|v_1\rangle - |v_2\rangle) + O(N^{-\frac{1}{2}}) \quad (132.3)$$

همچنین می‌توانیم بنویسیم $-1 \pm i\Delta = e^{\mp i\Delta}$. بنابراین:

$$\begin{aligned}
 U^n |\psi_{init}\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}} (-1)^n (e^{-in\Delta} |v_1\rangle - e^{in\Delta} |v_2\rangle) \\
 &\simeq \frac{(-1)^n}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sin(n\Delta) \\ \sin(n\Delta) \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \cos(n\Delta) \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \cos(n\Delta) \\ -\sin(n\Delta) \end{pmatrix} \quad (133.3)
 \end{aligned}$$

رابطه‌ی (۱۳۳.۳) نشان دهنده‌ی حالت تقریبی ولگشت بعد از n گام است. با توجه به این رابطه و تعاریف $|\psi_1\rangle$ تا $|\psi_5\rangle$ مشاهده می‌کنیم، هنگامی که $n\Delta = \frac{\pi}{4}$ باشد، ذره در یکی از حالت‌های $|\psi_1\rangle$ یا $|\psi_2\rangle$ یافت می‌شود، یعنی با احتمال $\frac{1}{2}$ ذره روی یکی از یال‌های منتهی به یال اضافه جای‌گزیده خواهد بود و این در شرایطی رخ می‌دهد که $n = O(\sqrt{N})$ باشد. مجدداً یادآوری می‌کنیم که با توجه به نامشخص بودن موقعیت یال اضافه، این یال خارج از دسترس ما خواهد بود و اگر ذره روی یال اضافه باشد، قادر با آشکارسازی آن نخواهیم بود.

جستجوی کلاسیکی برای یافتن یال اضافه در گراف ستاره‌ای به صورت زیر است:

هر گراف با یک ماتریس مجاورت گراف شناخته می‌شود، به طوری‌که برای هر راس، مجموعه‌ی رئوس متصل به آن راس را لیست می‌کنیم. و جستجو در این لیست انجام می‌گیرد و تعداد گام‌های مورد نیاز برای این جستجو از مرتبه‌ی $O(N)$ است.

۳.۳.۳ جستجو برای یک حلقه‌ی اضافه

گراف ستاره‌ای را در نظر بگیرید که به یکی از رئوس خارجی آن، یک حلقه اضافه شده است. فرض می‌کنیم این راس که به آن حلقه اضافه شده است، راس ۱ باشد، لیکن موقعیت این راس معلوم نیست. اگر حالت نمایش دهنده‌ی حلقه را با $|\ell_1\rangle$ نشان دهیم، عملگر تحول یکانی به صورت زیر اثر می‌کند:

$$\begin{aligned} U|0, 1\rangle &= |\ell_1\rangle \\ U|\ell_1\rangle &= |1, 0\rangle \\ U|0, j\rangle &= |j, 0\rangle; j \geq 2 \end{aligned} \quad (134.3)$$

پایه‌های زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=2}^N |0, j\rangle \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=2}^N |j, 0\rangle \end{aligned} \quad (135.3)$$

بنابراین اگر S زیرفضایی باشد که توسط بردارهای $\{|0, 1\rangle, |\ell_1\rangle, |1, 0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ جاروب می‌شود، و حالت اولیه را طوری انتخاب کنیم که در این زیرفضا باشد، مطمئن خواهیم بود که تمام ولگشت در این زیرفضا رخ می‌دهد و مسئله را به بعد کاهش داده‌ایم. اثر عملگر تحول روی این پایه‌ها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} U|1, 0\rangle &= -r|0, 1\rangle + t\sqrt{N-1}|\psi_1\rangle \\ U|\psi_1\rangle &= |\psi_2\rangle \\ U|\psi_2\rangle &= t\sqrt{N-1}|0, 1\rangle + r|\psi_1\rangle \end{aligned} \quad (136.3)$$

بنابراین ماتریس تحول در این زیرفضا به شکل زیر خواهد بود:

$$U = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -r & \cdot & t\sqrt{N-1} \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & t\sqrt{N-1} & \cdot & r \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix} \quad (137.3)$$

معادله‌ی مشخصه‌ی این ماتریس به شکل $\lambda^5 - r\lambda^3 + r\lambda^2 - 1 = 0$ است. در حد $N \rightarrow \infty$ داریم:

$$U = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix} \quad (138.3)$$

و معادله مشخصه‌ی آن به شکل $\lambda^5 - \lambda^3 + \lambda^2 - 1 = 0$ است، بنابراین ویژه‌مقادیر عبارتند از $\lambda = 1, -1, -1, e^{\pm \frac{i\pi}{3}}$. همانند قبل می‌توانیم نشان دهیم فقط برای ویژه‌مقدار -1 تصحیح مرتبه اول از مرتبه‌ی $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ خواهد بود و در نتیجه این ویژه‌مقدار برای ما مهم است. به همان شیوه‌ی قبل با فرض $\lambda = -1 + \delta\lambda$ و جای‌گذاری در معادله مشخصه‌ی U و صرف‌نظر از جملات مرتبه دوم و بالاتر از پارامترهای کوچک، بدست می‌آوریم:

$$\lambda = -1 \pm i\sqrt{\frac{t}{3}} \quad (139.3)$$

و ویژه‌بردارهای متناظر به شکل زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} -rx_\gamma + t\sqrt{N-1}x_\delta &= (-1 \pm i\Delta)x_1 \\ x_1 &= (-1 \pm i\Delta)x_\gamma \\ x_\gamma &= (-1 \pm i\Delta)x_\gamma \\ t\sqrt{N-1}x_\gamma + rx_\delta &= (-1 \pm i\Delta)x_4 \\ x_4 &= (-1 \pm i\Delta)x_\delta \end{aligned} \quad (140.3)$$

در نهایت بدست می‌آوریم:

$$|v_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \mp i\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \pm i\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \quad (141.3)$$

باتوجه به نکات گفته شده و اینکه باید $|\psi_{init}\rangle \in S$ باشد، حالت اولیه را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |\psi_{init}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{j=1}^N (|0, j\rangle - |j, 0\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2N}} (|0, 1\rangle - |1, 0\rangle) + \sqrt{\frac{N-1}{2N}} (|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2N}} \\ \cdot \\ -\frac{1}{\sqrt{2N}} \\ \sqrt{\frac{N-1}{2N}} \\ -\sqrt{\frac{N-1}{2N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + O(\Delta) \end{aligned} \quad (142.3)$$

یا به عبارت دیگر:

$$|\psi_{init}\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|v_+\rangle - |v_-\rangle) + O(N^{-\frac{1}{2}}) \quad (143.3)$$

همچنین با تغییر متغیر $-1 \pm i\sqrt{\frac{t}{\hbar}} = -e^{\mp i\Delta}$ حالت ولگشت بعد از n گام به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} U^n |\psi_{init}\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}} (-1)^n (e^{-in\Delta} |v_+\rangle - e^{in\Delta} |v_-\rangle) \\ &\simeq \frac{(-1)^n}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sin(n\Delta) \\ -\sin(n\Delta) \\ \sin(n\Delta) \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \cos(n\Delta) \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \cos(n\Delta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (144.3)$$

وقتی $n\Delta = \frac{\pi}{4}$ (که لازمی آن این است که $n = O(\sqrt{N})$ باشد) نتیجه‌ی اندازه‌گیری روی حالت سیستم با احتمال $\frac{2}{3}$ به یکی از رئوس منتهی به حلقه می‌انجامد.

جستجوی کلاسیکی برای یافتن حلقه‌ی اضافه نیز بدین صورت است که لیستی از رئوس متصل به راس مذکور تهیه می‌کنیم، اگر در این لیست خود آن راس نیز باشد یعنی حلقه داریم. جستجو در این لیست از مرتبه‌ی $O(N)$ گام لازم دارد.

۴.۳.۳ حلقه‌ی مفقوده

فرض کنید تمام رئوس خارجی به‌جز یکی (که فرض می‌کنیم راس ۱ باشد) دارای حلقه هستند. هدف ما یافتن راس ۱ است اما در اینجا نیاز به توجه بیشتری هست زیرا فرض ما این است که به حلقه‌ها دسترسی داریم و

بنابراین اگر یکی از حلقه‌ها مفقود باشد، می‌دانیم کجاست. فرض ما چنین است که همه‌ی رئوس به حلقه‌های واقعی متصل هستند و فقط راس ۱ به یک حلقه‌ی مجازی وصل است. عملگر تحول به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall j \geq 2 \rightarrow \begin{cases} U|0, j\rangle = |\ell_j\rangle \\ U|\ell_j\rangle = |j, 0\rangle \end{cases}$$

$$U|0, 1\rangle = e^{i\phi}|1, 0\rangle$$

$$U|\ell_1\rangle = |\ell_1\rangle \quad (145.3)$$

نشان می‌دهیم فقط به ازای مقادیر خاص ϕ افزایش سرعت کوانتومی حاصل می‌شود. تعریف زیر را انجام می‌دهیم:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=2}^N |\ell_j\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=2}^N |0, j\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=2}^N |j, 0\rangle \quad (146.3)$$

بنابراین زیرفضای ناوردای ما توسط بردارهای $\{|0, 1\rangle, |1, 0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$ جاووب می‌شود. در این زیرفضا اثر عملگر تحول به صورت زیر است:

$$U|1, 0\rangle = -r|0, 1\rangle + \sqrt{N-1}|\psi_1\rangle$$

$$U|\psi_1\rangle = |\psi_3\rangle$$

$$U|\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle$$

$$U|\psi_3\rangle = r|\psi_2\rangle + t\sqrt{N-1}|0, 1\rangle \quad (147.3)$$

و شکل ماتریسی U به صورت زیر می‌شود:

$$U = \begin{pmatrix} \cdot & -r & \cdot & \cdot & t\sqrt{N-1} \\ e^{i\phi} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & t\sqrt{N-1} & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & r \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (148.3)$$

و معادله مشخصه‌ی آن به شکل $\lambda^5 + re^{i\phi}\lambda^3 - r\lambda^2 - t^2(N-1)\lambda e^{i\phi} - r^2 e^{i\phi}$ خواهد بود. در حد $N \rightarrow \infty$ این معادله به شکل $\lambda^5 + \lambda^3 e^{i\phi} - \lambda^2 - e^{i\phi}$ می‌شود. و جواب‌های آن $\lambda = 1, e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}, \mp i e^{i\frac{\phi}{3}}$

است. در حالت $\phi = \pi$ ویژه مقدار ۱ ریشه‌ی دوگانه خواهد بود، و تصحیح مرتبه اول آن $\lambda = 1 \pm i\sqrt{\frac{t}{\gamma}}$ می‌باشد. با حل معادلات زیر، ویژه بردارهای متناظر را خواهیم یافت ($\Delta = \sqrt{\frac{t}{\gamma}}$)

$$\begin{aligned} -rx_{\gamma} + t\sqrt{N-1}x_{\delta} &= (1 \pm i\Delta)x_{\delta} \\ -x_{\delta} &= (1 \pm i\Delta)x_{\gamma} \\ t\sqrt{N-1}x_{\gamma} + x_{\delta} &= (1 \pm i\Delta)x_{\gamma} \\ rx_{\delta} &= (1 \pm i\Delta)x_{\delta} \\ x_{\gamma} &= (1 \pm i\Delta)x_{\delta} \end{aligned} \quad (149.3)$$

با همان ملاحظات گذشته، ویژه بردارها را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$|v_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \pm i\sqrt{\frac{\gamma}{t}} \\ \pm i\sqrt{\frac{\gamma}{t}} \\ \pm i\sqrt{\frac{\gamma}{t}} \end{pmatrix} \quad (150.3)$$

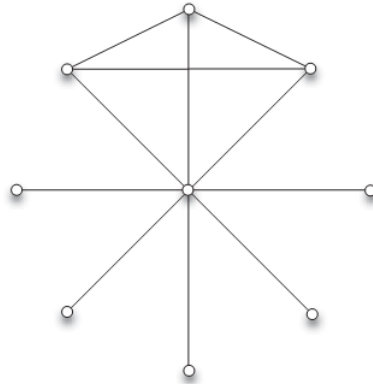
حالت اولیه را به شکل زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |\psi_{init}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3N}} \sum_{j=1}^N (|0, j\rangle + |j, 0\rangle + |l_j\rangle) \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (|v_{+}\rangle + |v_{-}\rangle) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \end{aligned} \quad (151.3)$$

بنابراین حالت ولگشت بعد از n گام به صورت زیر می‌باشد:

$$U^n |\psi_{init}\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}} (e^{in\Delta} |v_{+}\rangle - e^{-in\Delta} |v_{-}\rangle) \quad (152.3)$$

$$\Rightarrow U^n |\psi_{init}\rangle \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin(n\Delta) \\ -\sin(n\Delta) \\ \sqrt{\frac{\gamma}{t}} \cos(n\Delta) \\ \sqrt{\frac{\gamma}{t}} \cos(n\Delta) \\ \sqrt{\frac{\gamma}{t}} \cos(n\Delta) \end{pmatrix} + O(N^{-\frac{1}{2}}) \quad (153.3)$$



شکل ۱۳.۳: گراف ستاره‌ای با یک زیرگراف مثلثی

مشاهده می‌کنیم هنگامی که $n\Delta = \frac{\pi}{4}$ باشد ذره با احتمال نزدیک به ۱ در راس با حلقه‌ی مجازی^{۲۶} جای‌گزیده خواهد بود. اگر از همان ابتدا حالت $\phi = \pm\frac{\pi}{4}$ را برمی‌گزیدیم، به ویژه مقادیر و ویژه‌حالات دیگری منجر می‌شود و نیازمند یک حالت اولیه دیگر است، اما نتایج مشابه است.

۵.۳.۳ گراف ستاره‌ای با یک زیرگراف مثلثی

مورد دیگری را که بررسی خواهیم کرد، چندین یال به گراف اصلی اضافه می‌کنیم، به طوری‌که مجموعه‌ی یال‌های اضافه شده، یک زیرگراف کامل تشکیل می‌دهند که به آن *clique* می‌گوییم. به‌ویژه فرض می‌کنیم رئوس ۱ تا M تشکیل زیرگراف کامل می‌دهند، به طوری‌که مجموعه‌ی $q = \{1, \dots, M\}$ به تمام رئوس دیگر متصل باشد، همچنانی که تمام آن‌ها به راس مرکزی متصل هستند. فرض دیگر ما این است که $M \ll N$ است. هدف مسئله یافتن اعضای مجموعه‌ی q با کمترین جستار و بیشترین سرعت است. در شکل ۱۳.۳ نمونه‌ای از این مسئله نشان داده شده است. در اینجا اثر عملگر U به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
 U|j, \cdot\rangle &= -r|\cdot, j\rangle + t \sum_{k=1, k \neq j}^N |\cdot, k\rangle \\
 U|\cdot, j\rangle &= -\tilde{r}|j, \cdot\rangle + \tilde{t} \sum_{k=1, k \neq j}^M |j, k\rangle \quad , \quad 1 \leq j \leq M \\
 U|\cdot, j\rangle &= |j, \cdot\rangle \quad , \quad M+1 \leq j \leq N \\
 U|j, k\rangle &= -\tilde{r}|k, j\rangle + \tilde{t}|k, \cdot\rangle + \tilde{t} \sum_{l=1, l \neq j, k}^M |k, l\rangle \quad , \quad 1 \leq j, k \leq M \quad (154.3)
 \end{aligned}$$

که ضرایب r و t همانند قبل تعریف می‌شوند و نیز $\tilde{r} = (M-2)/M$ و $\tilde{t} = 2/M$.

^{۲۶}dummy loop

اکنون پایه‌های زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=1}^M |0, j\rangle \\
 |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=1}^M |j, 0\rangle \\
 |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{M(N-1)}} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1, k \neq j}^M |j, k\rangle \\
 |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N-M}} \sum_{j=M+1}^N |0, j\rangle \\
 |\psi_5\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N-M}} \sum_{j=M+1}^N |j, 0\rangle
 \end{aligned} \tag{۱۵۵.۳}$$

در توضیح روابط بالا می‌توان گفت، در کل ۴ نوع حرکت برای ولگرد ممکن است:

۱. به زیرگراف وارد شود

۲. از زیرگراف خارج شود

۳. درون زیرگراف حرکت کند

۴. خارج زیرگراف حرکت کند

موارد بالا، ترکیب خطی یکسان این چهار گروه از حالت‌هاست.

این پایه‌های متعامد بهنجار، تشکیل دهنده‌ی یک زیرفضای ناوردای ۵ بعدی است. عملگر تحول در این پایه‌ها به صورت زیر رفتار می‌کند:

$$\begin{aligned}
 U|\psi_1\rangle &= -\tilde{r}|\psi_2\rangle + \tilde{t}\sqrt{N-1}|\psi_3\rangle \\
 U|\psi_2\rangle &= (tM-1)|\psi_1\rangle + t\sqrt{M(N-M)}|\psi_4\rangle \\
 U|\psi_3\rangle &= \tilde{t}\sqrt{M-1}|\psi_1\rangle + \tilde{r}|\psi_2\rangle \\
 U|\psi_4\rangle &= |\psi_5\rangle \\
 U|\psi_5\rangle &= t\sqrt{M(N-M)}|\psi_1\rangle + (1-tM)|\psi_2\rangle
 \end{aligned} \tag{۱۵۶.۳}$$

در نتیجه شکل ماتریسی عملگر تحول در زیر فضای ۵ بعدی به صورت زیر است:

$$U = \begin{pmatrix} \cdot & tM - 1 & \cdot & \cdot & t\sqrt{M(N-M)} \\ -\tilde{r} & \cdot & \tilde{t}\sqrt{M-1} & \cdot & \cdot \\ \tilde{t}\sqrt{M-1} & \cdot & \tilde{r} & \cdot & \cdot \\ \cdot & t\sqrt{M(N-M)} & \cdot & \cdot & 1-tM \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix} \quad (157.3)$$

معادله مشخصه‌ی این ماتریس به صورت زیر است:

$$(158.3)$$

$$\lambda^5 + (\tilde{t} - 1)\lambda^4 + [2(M-1)t + \tilde{t} - 2]\lambda^3 - [2(M-1)t + \tilde{t} - 2]\lambda^2 - (\tilde{t} - 1)\lambda - 1 = 0$$

که در حد $N \rightarrow \infty$ به صورت زیر می‌گردد:

$$\lambda^5 + (\tilde{t} - 1)\lambda^4 + (\tilde{t} - 2)\lambda^3 - (\tilde{t} - 2)\lambda^2 - (\tilde{t} - 1)\lambda - 1 = 0 \quad (159.3)$$

ریشه‌های آن نیز به شکل زیر می‌باشد:

$$\lambda = -1, -1, 1, -\frac{1}{2}\tilde{t} + 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\tilde{t}^2 - 4\tilde{t}} \quad (160.3)$$

ریشه‌ی مهم برای ما $\lambda = -1$ خواهد بود. با جاگذاری $\lambda = -1 + \delta\lambda$ در رابطه‌ی (۱۵۸.۳) و صرف نظر از جملات مرتبه دوم به بعد از پارامترهای کوچک، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\left(\frac{4M-2}{M}\right)\delta\lambda^2 - 5t(M-1)\delta\lambda + 2t(M-1) = 0 \quad (161.3)$$

با توجه به اینکه $t \ll 1$ جمله‌ی دوم نیز قابل اغماض می‌شود، و در نهایت خواهیم داشت:

$$\delta\lambda = \pm i\sqrt{\frac{2M(M-1)}{N(2M-1)}} = \pm i\Delta \quad (162.3)$$

حالا باید متناظر با دو ویژه مقدار $-1 \pm i\Delta$ دو ویژه بردار را پیدا کنیم. پس باید معادلات زیر را حل کنیم:

$$(tM - 1)x_\Upsilon + t\sqrt{M(N-M)}x_\Delta = (1 \pm i\Delta)x_\lambda$$

$$-\tilde{r}x_\lambda + \tilde{t}\sqrt{M-1}x_\Upsilon = (1 \pm i\Delta)x_\Upsilon$$

$$\tilde{t}\sqrt{M-1}x_\lambda + \tilde{r}x_\Upsilon = (1 \pm i\Delta)x_\Upsilon$$

$$t\sqrt{M(N-M)}x_\Upsilon + (1 - tM)x_\Delta = (1 \pm i\Delta)x_\Upsilon$$

$$x_\Upsilon = (1 \pm i\Delta)x_\Delta \quad (163.3)$$

با حل این معادلات، دو ویژه‌بردار متناظر با دو ویژه‌مقدار $\lambda = -1 \pm i\theta$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$|v_+\rangle = \sqrt{\frac{M-1}{2(2M-1)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/\sqrt{M-1} \\ -i\sqrt{(2M-1)/(2M-2)} \\ i\sqrt{(2M-1)/(2M-2)} \end{pmatrix} \quad (164.3)$$

و

$$|v_-\rangle = \sqrt{\frac{M-1}{2(2M-1)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/\sqrt{M-1} \\ i\sqrt{(2M-1)/(2M-2)} \\ -i\sqrt{(2M-1)/(2M-2)} \end{pmatrix} \quad (165.3)$$

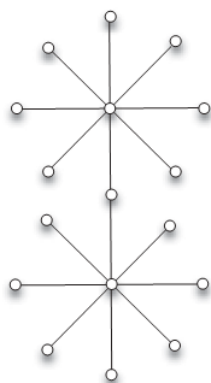
حالت اولیه را نیز به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |\psi_{init}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{j=1}^N (|0, j\rangle - |j, 0\rangle) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} (|v_+\rangle - |v_-\rangle) + O(\sqrt{M/N}) \end{aligned} \quad (166.3)$$

در نهایت بدست خواهیم آورد:

$$U^n |\psi_{init}\rangle = (-1)^n \sqrt{\frac{M-1}{2M-1}} \begin{pmatrix} \sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) \\ -(M-1)^{-1/2} \sin(n\theta) \\ \sqrt{\frac{2M-1}{2(M-1)}} \cos(n\theta) \\ -\sqrt{\frac{2M-1}{2(M-1)}} \cos(n\theta) \end{pmatrix} + O(M/N)^{1/2} \quad (167.3)$$

بنابراین هنگامی که $n\theta = \pi/2$ باشد، با احتمال $(2M-2)/(2M-1)$ ذره را بر روی یکی از یال‌های خروجی از راس مرکزی و منتهی به زیرگراف، خواهیم یافت. فرض ما این است که به ال‌های درون زیرگراف دسترسی نداریم، بنابراین بعد از اندازه‌گیری، ذره را روی یکی از یال‌های منتهی به زیرگراف خواهیم یافت، یا اینکه اصلاً ذره را پیدا نمی‌کنیم، که در اینصورت یعنی ذره روی یکی از یال‌های زیرگراف قرار گرفته است.



شکل ۱۴.۳: دو گراف ستاره‌ای با یک راس به اشتراک گذاشته شده

۶.۳.۳ دو گراف ستاره‌ای

ناهنجاری دیگری که مورد بررسی قرار خواهیم داد، اندکی متفاوت‌تر از ناهنجاری‌های بررسی شده تاکنون است. دو گراف ستاره‌ای که هر کدام مشتمل بر N راس خارجی هستند، داریم. آن‌ها یک راس خارجی را با یکدیگر به اشتراک می‌گذارند، بنابراین به هم متصل هستند. لیکن ما نمی‌دانیم کدامین راس بین آن‌ها به اشتراک گذاشته شده است (شکل ۱۴.۳). هدف ما یافتن این راس مشترک است.

راس مرکزی دو گراف را با A و B نمایش می‌دهیم، و فرض می‌کنیم راس مشترک بین آن‌ها راس ۱ است. رئوس خارجی گراف اول (با راس مرکزی A) مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, N\}$ ، و برای گراف دوم (به مرکزیت B) مجموعه‌ی $\{1, N+1, \dots, 2N-1\}$ می‌باشد. پایه‌های زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 |\psi_1\rangle &= |A, 1\rangle \\
 |\psi_2\rangle &= |1, A\rangle \\
 |\psi_3\rangle &= |B, 1\rangle \\
 |\psi_4\rangle &= |1, B\rangle \\
 |\psi_5\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=2}^N |A, j\rangle \\
 |\psi_6\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=2}^N |j, A\rangle \\
 |\psi_7\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=N+1}^{2N-1} |B, j\rangle \\
 |\psi_8\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{j=N+1}^{2N-1} |j, B\rangle
 \end{aligned} \tag{۱۶۸.۳}$$

این ۸ بردار متعامد بهنجار، یک زیرفضای ناوردای ولگشت ما را می‌دهند. تمام رئوس مانند مسائل قبلی رفتار

می‌کنند، به جز راس ۱، فرض ما اکنون چنین است که: ذره‌ی کوانتومی، از راس ۱ به طور کامل عبور می‌کند، و هیچ مقداری برای بازتاب وجود ندارد. این جمله بدان معنی است که:

$$U|\psi_1\rangle = |\psi_4\rangle, \quad U|\psi_2\rangle = |\psi_2\rangle \quad (۱۶۹.۳)$$

اثر عملگر تحول یکانی روی سایر پایه‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$U|\psi_2\rangle = -r|\psi_1\rangle + t\sqrt{N-1}|\psi_5\rangle$$

$$U|\psi_3\rangle = -r|\psi_3\rangle + t\sqrt{N-1}|\psi_6\rangle$$

$$U|\psi_5\rangle = |\psi_6\rangle$$

$$U|\psi_6\rangle = r|\psi_5\rangle + t\sqrt{N-1}|\psi_1\rangle$$

$$U|\psi_6\rangle = |\psi_8\rangle$$

$$U|\psi_8\rangle = r|\psi_6\rangle + t\sqrt{N-1}|\psi_3\rangle \quad (۱۷۰.۳)$$

که ضرایب r و t مانند سابق تعریف می‌شوند. این مسئله را می‌توانیم به ۴ بعد کاهش دهیم، اگر پایه‌های زیر را معرفی کنیم:

$$|w_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle - |\psi_3\rangle)$$

$$|w_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_5\rangle - |\psi_6\rangle)$$

$$|w_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_2\rangle - |\psi_4\rangle)$$

$$|w_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_6\rangle - |\psi_8\rangle) \quad (۱۷۱.۳)$$

بنابراین اثر عملگر تحول یکانی به شکل زیر خواهد شد:

$$U|w_1\rangle = -|w_3\rangle$$

$$U|w_2\rangle = |w_4\rangle$$

$$U|w_3\rangle = -|w_1\rangle + t\sqrt{N-1}|w_2\rangle$$

$$U|w_4\rangle = |w_2\rangle + t\sqrt{N-1}|w_1\rangle \quad (۱۷۲.۳)$$

حالت اولیه را به صورت یک برهم‌نهی خطی از حالت‌های ممکن در گراف اول، منهای یک ترکیب خطی از تمام حالات ممکن در گراف دوم در نظر می‌گیریم. یعنی داریم:

$$|\psi_{init}\rangle = \frac{1}{\sqrt{4N}} \left[\sum_{j=1}^N (|A, j\rangle + |j, A\rangle) - (|1, B\rangle + |B, 1\rangle) - \sum_{j=N+1}^{2N-1} (|B, j\rangle + |j, B\rangle) \right] \quad (۱۷۳.۳)$$

بنابراین می توان نوشت:

$$|\psi_{init}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N}} (|w_1\rangle + |w_2\rangle) + \sqrt{\frac{N-1}{2N}} (|w_3\rangle + |w_4\rangle) \quad (174.3)$$

از آنجاییکه حالت اولیه به طور کامل در زیرفضای ۴ بعدی قرار می گیرد، مسئله را توانستیم به ۴ بعد کاهش دهیم. بر خلاف روند کلی که تا به حال داشتیم الان به جای یافتن ویژه مقدار مهم و ویژه توابع متناظر، و بدست آوردن حالت ولگشت بعد از n گام، میخواهیم باز هم فضای هیلبرت را کاهش دهیم. اثر U^2 را روی این چهار پایه در نظر بگیریم. داریم:

$$\begin{aligned} U^2|w_1\rangle &= r|w_1\rangle - t\sqrt{N-1}|w_2\rangle \\ U^2|w_2\rangle &= r|w_2\rangle + t\sqrt{N-1}|w_1\rangle \\ U^2|w_3\rangle &= r|w_3\rangle + t\sqrt{N-1}|w_4\rangle \\ U^2|w_4\rangle &= r|w_4\rangle - t\sqrt{N-1}|w_3\rangle \end{aligned} \quad (175.3)$$

بنابراین زیرفضای ۴ بعدی S' به دو زیرفضای دوبعدی مجزا می شود. زیرفضای اول توسط بردارهای $\{|w_1\rangle, |w_2\rangle\}$ و زیرفضای دوم توسط بردارهای $\{|w_3\rangle, |w_4\rangle\}$ جاووب می شود. در زیرفضای اول داریم:

$$U^2 = \begin{pmatrix} r & t\sqrt{N-1} \\ -t\sqrt{N-1} & r \end{pmatrix} \quad (176.3)$$

و در زیرفضای دوم:

$$U^2 = \begin{pmatrix} r & -t\sqrt{N-1} \\ t\sqrt{N-1} & r \end{pmatrix} \quad (177.3)$$

در قیاس با الگوریتم گراور

$$G = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (178.3)$$

هر یک از این دو حالت، هم ارز جستجوی گراور خواهند بود. ویژه مقادیر هر دوی آنها به صورت $\lambda = r \pm it\sqrt{N-1}$ است، که به صورت $e^{\pm i\theta}$ نمایش می دهیم. همچنین ایجاب می کند که $\theta \simeq \frac{2}{\sqrt{N}}$ (همانطور که در گراور داشتیم $\theta \simeq 2\sqrt{\frac{M}{N}}$). ویژه بردارهای ماتریس (۱۷۶.۳) به صورت

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|w_1\rangle \pm i|w_2\rangle) \quad (179.3)$$

است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} U^{2n}|w_1\rangle &= \cos(n\theta)|w_1\rangle - \sin(n\theta)|w_2\rangle \\ U^{2n}|w_2\rangle &= \sin(n\theta)|w_1\rangle + \cos(n\theta)|w_2\rangle \end{aligned} \quad (180.3)$$

به طور مشابه، برای ماتریس (۱۷۷.۳) نیز بدست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} U^{2n}|w_3\rangle &= \cos(n\theta)|w_3\rangle + \sin(n\theta)|w_4\rangle \\ U^{2n}|w_4\rangle &= -\sin(n\theta)|w_3\rangle + \cos(n\theta)|w_4\rangle \end{aligned} \quad (181.3)$$

از طرفی با توجه به رابطه‌ی (۱۷۴.۳) داریم:

$$\begin{aligned} U^{2n}|\psi_{init}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2N}} (\cos(n\theta)(|w_1\rangle + |w_2\rangle) - \sin(n\theta)(|w_3\rangle - |w_4\rangle)) \\ &+ \sqrt{\frac{N-1}{2N}} (\sin(n\theta)(|w_1\rangle - |w_2\rangle) + \cos(n\theta)(|w_3\rangle + |w_4\rangle)) \end{aligned} \quad (182.3)$$

با توجه به رابطه‌ی فوق، هنگامی که $n\theta = \pi/2$ باشد، حالت اولیه، به حالت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} |\psi_n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4}} (|w_1\rangle - |w_2\rangle) + O(N^{-1/2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4}} (|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle - |\psi_3\rangle + |\psi_4\rangle) + O(N^{-1/2}) \end{aligned} \quad (183.3)$$

این بدان معنی است که احتمال حضور ذره در یالی که محل اتصال دو گراف است، برابر $1 - O(n^{-1/2})$ است. شرط $n\theta = \pi/2$ ایجاب می‌کند که $n = \pi\sqrt{N}/4$ باشد و تعداد گام‌های ولگرد، دو برابر این مقدار یعنی $\pi\sqrt{N}/2$ خواهد بود. بنابراین به کمک ولگشت کوانتومی، با تعداد $O(\sqrt{N})$ گام، به راس مورد جستجو خواهیم رسید. برای حل کلاسیکی این مسئله، باید در یک لیست بزرگ، شامل رئوس خارجی یکی از گراف‌ها، که شامل $N + 1$ داده است (یک داده به ازای هر کدام از رئوسی که به راس مرکزی متصل است، و دو داده به ازای راسی که به هر دو راس مرکزی متصل است)، جستجو شود. بنابراین جستجوی کوانتومی، افزایش سرعت مربعی را در پی خواهد داشت.

۴.۳ هم‌ارزی یکانی بین مدل‌های ولگشت کوانتومی گسسته

در مرجع [۸۲] نشان داده شده است که دو فرمالیسم ولگشت کوانتومی گسسته (سکه‌ای و پراکندگی) برای هر هندسه‌ی دلخواه و دامنه‌های دلخواه وابسته به مکان، از یک هم‌ارزی یکانی برخوردار است. در اینجا به تفصیل به هم‌ارزی این دو مدل در ساختار یک بعدی خواهیم پرداخت و برای سایر ابعاد و گراف‌ها خواننده را به مرجع [۸۲] و [۸۳] ارجاع می‌دهیم. در بخش‌های گذشته، توصیف کاملی از ولگشت‌های کوانتومی نوع تحول گسسته، ارائه دادیم. همچنین در چارچوب دو نوع دیدگاه از ولگشت کلاسیکی، توانستیم به دو نوع فرمالیسم و تعریف از

ولگشت کوانتومی پراکندگی برسیم. در این قسمت ابتدا نگاهی کوتاه جهت یادآوری مباحث گذشته و نتیجه گیری در مورد مبحث جدید، خواهیم داشت.

در ولگشت کوانتومی سکه دار، حالت های کوانتومی روی نقاط شبکه j (در اینجا یک خط) تعریف می گردد. بنابراین پایه های توصیف کننده ی فضای هیلبرت مکان به صورت مجموعه ی $\{|j\rangle\}$ می باشند. بعلاوه متناظر با هر j یک فضای هیلبرت درونی دو حالته، با عنوان فضای سکه که بردارهای پایه ی آن، حالات $|\pm\rangle$ است، وجود دارد. بنابراین فضای هیلبرت توصیف کننده ی سیستم به صورت

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_c, \quad (L^2(\mathbb{Z}) \otimes L^2(\mathbb{Z}_2)) \quad (184.3)$$

تعریف می شود. و پایه های متعامد بهنجار این فضا مجموعه ی

$$\{|j\rangle \otimes |\sigma\rangle\}, \quad \sigma = \pm, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (185.3)$$

می باشد. عملگر انتقال و مزدوج هرمیتی آن نیز به شکل زیر تعریف می شود [۸۴]:

$$S|j\rangle = |j+1\rangle, \quad S^\dagger|j\rangle = |j-1\rangle \quad (186.3)$$

بنابراین عملگر تحول یک گام از ولگشت به صورت زیر معرفی می شود

$$U_c = (S \otimes |+\rangle\langle +| + S^\dagger \otimes |-\rangle\langle -|) \left(\sum_j |j\rangle\langle j| \otimes C^{(j)} \right) \quad (187.3)$$

در این رابطه $C^{(j)}$ عملگر سکه در محل راس j می باشد، و عملگر تحول، به شرط یکانی بودن عملگر سکه در تمام رئوس، یکانی خواهد بود. علیرغم انتخاب های متعددی که برای عملگر سکه وجود دارد (رک مرجع [۸۵])، متداول ترین انتخاب، سکه ی هادامارد H_2 است، به طوریکه:

$$H_2|\sigma\rangle = (|-\sigma\rangle - \sigma|\sigma\rangle) / \sqrt{2} \quad (188.3)$$

لیکن عمومی ترین انتخاب، با در نظر گرفتن مولفه های ماتریسی به شکل $c_{\sigma''\sigma'}^{(j)} = \langle \sigma'' | C^{(j)} | \sigma' \rangle$ است، و برای اطمینان از یکانی بودن، شروط زیر را برقرار خواهیم کرد

$$|c_{++}^{(j)}|^2 + |c_{-+}^{(j)}|^2 = |c_{--}^{(j)}|^2 + |c_{+-}^{(j)}|^2 = 1, \quad |c_{+-}^{(j)}|^2 = |c_{-+}^{(j)}|^2 \\ c_{++}^{(j)} [c_{-+}^{(j)}]^* + c_{+-}^{(j)} [c_{--}^{(j)}]^* = 0 \quad (189.3)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$U_c|j\rangle \otimes |\sigma\rangle = c_{\sigma\sigma}^{(j)}|j+\sigma\rangle \otimes |\sigma\rangle + c_{-\sigma\sigma}^{(j)}|j-\sigma\rangle \otimes |-\sigma\rangle \quad (190.3)$$

حالا تعریف زیر را (برخلاف تعریف مرسوم اسپین بالا و اسپین پایین) انجام می دهیم:

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |+\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (191.3)$$

بنابراین عمومی‌ترین شکل عملگر سکه را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$C^{(j)} = e^{i\gamma_j} \begin{pmatrix} e^{i\xi_j} \cos(\theta_j) & e^{i\zeta_j} \sin(\theta_j) \\ e^{-i\zeta_j} \sin(\theta_j) & -e^{-i\xi_j} \cos(\theta_j) \end{pmatrix} \quad (192.3)$$

که $0 \leq \gamma_j, \zeta_j, \xi_j, \theta_j < 2\pi$. بنا بر این معادله (۱۸۹.۳) نتیجه می‌دهد:

$$U_c |j\rangle \otimes |\sigma\rangle = -\sigma e^{i(\gamma_j - \sigma \xi_j)} \cos(\theta_j) |j + \sigma\rangle \otimes |\sigma\rangle + e^{i(\gamma_j + \sigma \zeta_j)} \sin(\theta_j) |j - \sigma\rangle \otimes |-\sigma\rangle \quad (193.3)$$

حالا یادآوری مختصری هم روی ولگشت پراکندگی خواهیم داشت. متناظر با هر یال بین رئوس $j - 1$ و j ، دو حالت ممکن $|j, 1\rangle$ و $|j - 1, -1\rangle$ را خواهیم داشت. که در اینجا عدد کوانتومی $\sigma = \pm 1$ متناظر با جهت حرکت ذره‌ی کوانتومی روی یال مذکور است. بردارهای پایه‌ی $|\sigma, j\rangle$ در فضای $L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2)$ قرار می‌گیرند و شرط $\langle j', \sigma | \sigma, j \rangle = \delta_{j'j} \delta_{\sigma'\sigma}$ را برآورده می‌کنند.

عملگرهای T و R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T|\sigma, j\rangle = t_\sigma^{(j)} |\sigma, j + \sigma\rangle, \quad R|\sigma, j\rangle = r_\sigma^{(j)} |-\sigma, j - \sigma\rangle \quad (194.3)$$

و

$$T^\dagger |\sigma, j\rangle = t_\sigma^{(j-\sigma)*} |\sigma, j - \sigma\rangle, \quad R^\dagger |\sigma, j\rangle = r_\sigma^{(j-\sigma)*} |-\sigma, j - \sigma\rangle \quad (195.3)$$

با این تعاریف، یک گام تحول ولگشت با عملگر $U_s = T + R$ داده می‌شود، بنابراین داریم:

$$U_s |\sigma, j\rangle = t_\sigma^{(j)} |\sigma, j + \sigma\rangle + r_\sigma^{(j)} |-\sigma, j - \sigma\rangle \quad (196.3)$$

یکانی بودن عملگر فوق ایجاب می‌کند که [۸۶]:

$$|t_\sigma^{(j)}|^2 + |r_\sigma^{(j)}|^2 = 1, \quad |r_\sigma^{(j)}|^2 = |r_{-\sigma}^{(j)}|^2, \quad r_{-\sigma}^{(j)} t_\sigma^{(j)*} + r_\sigma^{(j)*} t_{-\sigma}^{(j)} = 0. \quad (197.3)$$

که دقیقاً همان روابطی هستند که رابطه‌ی بین دامنه‌های انتقال و عبور را در پراکندگی کوانتومی یک بعدی برآورده می‌کنند، و ناشی از یکانی بودن ماتریس پراکندگی S می‌باشند. رابطه‌ی (۱۹۷.۳) برای هر j (با $0 \leq \rho_j \leq 1$ و $0 \leq \lambda_j, \phi_j, \Phi_j < 2\pi$) برقرار است، اگر داشته باشیم [۸۴]:

$$t_\sigma^{(j)} = e^{i\lambda_j} \sqrt{1 - \rho_j} e^{i\sigma\Phi_j}, \quad t_\sigma^{(j)} = e^{i\lambda_j} \sigma \sqrt{\rho_j} e^{i\sigma\phi_j} \quad (198.3)$$

اگر به ازای تمام مقادیر j داشته باشیم $\lambda_j = \lambda$ ، آنگاه بدون کم شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $\lambda = 0$. شایان ذکر است که عبارت موجود در رابطه‌ی (۱۹۸.۳) تنها حالت ممکن نیست. مثلاً برای j های مستقل از ضرایب پراکندگی، رابطه‌ی بالا (با $\Phi = \phi = 0$)، رابطه‌ی موجود در ایده‌ی اصلی ولگشت پراکندگی تبدیل می‌شود که در مرجع [۷۲] معرفی شده است.

حالا فرض کنید به دنبال یافتن احتمال حضور ذره در حالت مکانی j و در گام n هستیم، یعنی به دنبال یافتن $P^{(j)}(n)$ می‌باشیم، صرفنظر از عدد کوانتومی سکه (σ) . بنابراین این دو عملگر تصویری زیر را متناظر با ولگشت سکه‌ای و ولگشت پراکندگی معرفی می‌کنیم [۸۳]:

$$P_c^{(j)} = |j\rangle\langle j| \otimes \sum_{\sigma} |\sigma\rangle\langle\sigma|, \quad P_s^{(j)} = \sum_{\sigma} |\sigma, j + \frac{\sigma-1}{2}\rangle\langle j + \frac{\sigma-1}{2}, \sigma| \quad (199.3)$$

بنابراین احتمال مذکور برابر است با

$$P^{(j)}(n) = \langle\psi(n)|P^{(j)}|\psi(n)\rangle \quad (200.3)$$

حالا به توصیف هم‌ارزی یکانی بین این دو مدل (در یک بعد) می‌پردازیم. با توجه به تناظر یک‌به‌یک موجود بین فضاها هیلبرت این دو نوع ولگشت $(L^2(\mathbb{Z}) \otimes L^2(\mathbb{Z}_2) \equiv L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2))$ ، یک عملگر یکانی متناظر (همریخت) 27 به شکل $E: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ وجود خواهد داشت [۷۲]، بطوریکه:

$$E|\sigma, j\rangle = |j\rangle \otimes |\sigma\rangle, \quad E^\dagger|j\rangle \otimes |\sigma\rangle = |\sigma, j\rangle \quad (201.3)$$

با بررسی روابط مربوط به این دو مدل ولگشت گسسته، فهمیده می‌شود که ضرایب زیر نقش‌های کاملا مشابه ایفا می‌کنند

$$c_{\sigma\sigma}^{(j)} \leftrightarrow t_{\sigma}^{(j)}, \quad c_{-\sigma\sigma}^{(j)} \leftrightarrow r_{\sigma}^{(j)} \quad (202.3)$$

بنابراین با اعمال تساوی $C_{\sigma\sigma}^{(j)} = t_{\sigma}^{(j)}$ و $c_{-\sigma\sigma}^{(j)} = r_{\sigma}^{(j)}$ به ازای تمام مقادیر j ، در هر دو مدل، دامنه‌های یکسانی برای تحول زمانی ولگشت خواهیم داشت. بنابراین با توجه به روابط (۱۹۰.۳)، (۱۹۶.۳) و (۲۰۱.۳) و اعمال تساوی ذکر شده، نتایج دینامیکی دو مدل دارای هم‌ارزی یکانی زیر هستند

$$EU_s = U_c E \iff U_s = E^\dagger U_c E \quad (203.3)$$

با یک مثال نتیجه‌ی بالا را واضح‌تر می‌کنیم:

اگر در تمام رئوس ولگشت سکه‌ای از یک سکه‌ی یکسان G (که لزوماً $G \in U(2)$) استفاده کنیم، رابطه‌ی (۱۸۷.۳) به صورت زیر می‌شود:

$$U_c = (S \otimes |+\rangle\langle +| + S^\dagger \otimes |-\rangle\langle -|)(I \otimes G) \quad (204.3)$$

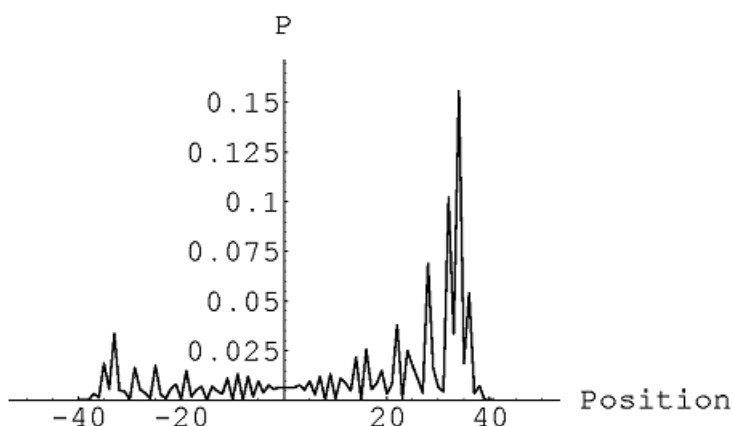
همچنین داریم:

$$G|+\rangle = t|+\rangle + r|-\rangle, \quad G|-\rangle = -r^*|+\rangle + t^*|-\rangle \quad (205.3)$$

در مورد ولگشت پراکندگی، در مکان راس j نیز خواهیم داشت:

$$U_s|+\rangle = t|+\rangle + r|-\rangle, \quad U_s|-\rangle = t^*|-\rangle - r^*|+\rangle \quad (206.3)$$

²⁷isomorphic



شکل ۱۵.۳: توزیع احتمال برای ولگشت سکه‌ای بعد از ۵۰ گام

در این صورت عملگر یکانی E بدین صورت عمل می‌کند که:

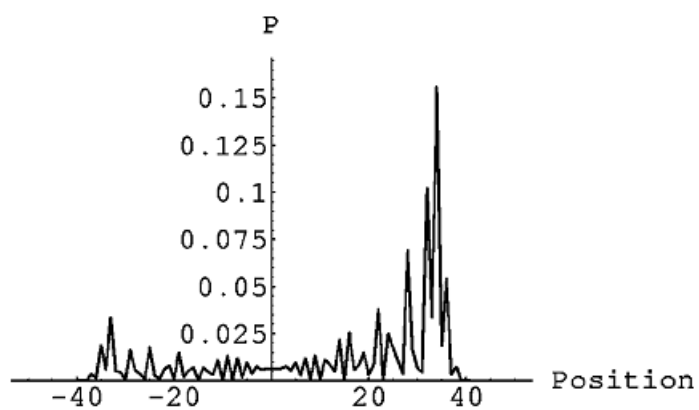
$$\begin{aligned} E|+\rangle, j\rangle &= |j\rangle \otimes |+\rangle \\ E|-\rangle, j\rangle &= |j\rangle \otimes |-\rangle \end{aligned} \quad (20.7.3)$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} E^\dagger U_c E|+\rangle, j\rangle &= E^\dagger U_c (E|+\rangle, j\rangle) \\ &= E^\dagger (U_c |j\rangle \otimes |+\rangle) = E^\dagger (t|j+1, +\rangle + r|j-1, -\rangle) \\ &= t|+\rangle, j+1\rangle + r|-\rangle, j-1\rangle \\ &= U_s |+\rangle, j\rangle \end{aligned} \quad (20.8.3)$$

علیرغم هم‌ارزی یکانی موجود بین سطح دامنه‌ها، که در رابطه‌ی (۲۰.۳.۳) به آن رسیدیم، یک تفاوت نیز وجود دارد. در ولگشت سکه‌ای، احتمال حضور در راس j ، با ترکیب دامنه‌های حالات $|j\rangle \otimes |+\rangle$ و $|j\rangle \otimes |-\rangle$ بدست می‌آید. تحت نگاهت E^\dagger ، این حالت‌ها، متناظر با یال‌های $|+\rangle, j+1\rangle$ و $|-\rangle, j-1\rangle$ خواهند شد. در حالی که در ولگشت پراکندگی، احتمال حضور در یال، بوسیله‌ی ترکیب دامنه‌های احتمال حضور ذره در همان یال (یعنی دامنه‌ی حالات $|+\rangle, j+1\rangle$ و $|-\rangle, j-1\rangle$) محاسبه می‌شود. بنابراین یک اختلاف در احتمال بین دو مدل وجود خواهد داشت. این نتیجه را با در نظر گرفتن توزیع احتمال برای حالت $t = r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و شروع از حالت $|+\rangle, 0\rangle$ به وضوح خواهیم دید.

در هر دو شکل به ذره‌ی کوانتومی اجازه‌ی تحول تا ۵۰ گام را داده‌ایم، با این تفاوت که در شکل ۱۵.۳ ذره روی رئوس گراف جای‌گزیده است، در حالی که در شکل ۱۶.۳ ذره‌ی کوانتومی روی یال‌های گراف جای‌گزیده است. علیرغم تفاوت در جزئیات گفته شده مشاهده می‌کنیم که هر دو شکل دارای کلیات یکسانی هستند. (شکل‌ها برگرفته شده از مرجع [۷۲] می‌باشد).



شکل ۱۶.۳: توزیع احتمال برای ولگشت پراکندگی بعد ۵۰ گام

پیوست آ

اثبات روابط

آ.۱ محاسبه‌ی انحراف معیار در ولگشت کلاسیکی روی خط

در مورد ولگشت کلاسیکی در یک بعد مشاهده کردیم که تابع توزیع احتمال به صورت رابطه‌ی زیر است:

$$p(t, n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^t \binom{t}{(t+n)/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^t \frac{t!}{((t+n)/2)!((t-n)/2)!} \quad (1. \bar{A})$$

حال ثابت می‌کنیم این توزیع احتمال به یک توزیع نرمال (گوسی)^۱ منجر خواهد شد. برای اثبات از تقریب استرلینگ^۲ $n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ یا به فرم معادل $\ln n! \simeq n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n)$ استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \ln p(t, n) = & -t \ln \sqrt{2\pi} + t \ln t - t + \frac{1}{2} \ln(2\pi t) - \left\{ \frac{1}{2} (t+n) \ln \frac{1}{2} (t+n) - \frac{1}{2} (t+n) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \ln \pi(t+n) \right\} - \left\{ \frac{1}{2} (t-n) \ln \frac{1}{2} (t-n) - \frac{1}{2} (t-n) + \frac{1}{2} \ln \pi(t-n) \right\} \quad (2. \bar{A}) \end{aligned}$$

با بسط دادن این رابطه می‌رسیم به رابطه‌ی زیر:

$$p(t, n) = t \ln t + \frac{1}{2} \ln(2\pi t) - \frac{1}{2} (t+n) \ln(t+n) - \frac{1}{2} (t-n) \ln(t-n) - \frac{1}{2} \ln \pi(t+n) - \frac{1}{2} \ln \pi(t-n)$$

^۱Normal Distribution

^۲Stirling's Approximation

بنابراین

$$\begin{aligned}
 U|\psi.\rangle &= [S(G \otimes I)] [|s^c\rangle \otimes |s^s\rangle] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{d,\vec{x}} S |d, \vec{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{d,\vec{x}} |d, \vec{x} \oplus \vec{e}_d\rangle = |\psi.\rangle \quad (5.آ)
 \end{aligned}$$

۳.آ اثبات رابطه‌ی (۵۲.آ)

$$\begin{aligned}
 c^r &= \sum_{x=0}^{n/2-1} \frac{1}{\binom{n-1}{x}} = \frac{1}{\binom{n-1}{0}} + \dots + \frac{1}{\binom{n-1}{n/2-1}} \\
 &= 1 + \frac{1}{n-1} + \frac{2!}{(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{(n/2)!(n/2-1)!}{(n-1)!} \\
 &= 1 + \frac{1}{2m+1} + \dots < 1 + \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{n/2-1} = 1 + \frac{2}{n} \\
 \implies c^r &< 1 + \frac{2}{n} \quad (6.آ)
 \end{aligned}$$

۴.آ اثبات رابطه‌ی (۹۷.۳)

داریم:

$$U|j, \cdot\rangle = r|\cdot, j\rangle + t \sum_{k \neq j} |\cdot, k\rangle \quad (7.آ)$$

از سوی دیگر با توجه به رابطه‌ی تعامد بردارهای پایه، و نیز شرط یکانی بودن عملگر تحول، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 \langle j, \cdot | U^\dagger U |j, \cdot\rangle &= 1 \\
 \implies \left(r^* \langle \cdot, j | + t^* \sum_{k \neq j} \langle \cdot, k | \right) \left(r |\cdot, j\rangle + t \sum_{j \neq k} |\cdot, k\rangle \right) &= 1 \\
 \implies |r|^2 + |t|^2 \sum_{K \neq j, k=1}^N 1 &= 1 \\
 \implies |r|^2 + (N-1) |t|^2 &= 1 \quad (8.آ)
 \end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
 \langle j, \cdot | U^\dagger U |\cdot, j\rangle &= \cdot \\
 \implies \left(r^* \langle \cdot, j | + t^* \sum_{k \neq j} \langle \cdot, k | \right) \left(r |j, \cdot\rangle + t \sum_{j \neq k} |k, \cdot\rangle \right) &= \cdot
 \end{aligned}$$

۵. آ. اثبات رابطه‌ی (۱۱۸.۳)

داریم:

$$\lambda^{(1)}(\epsilon) = \sqrt{1 - 2\epsilon + 2i\sqrt{\epsilon - \epsilon^2}} \quad (۹.آ)$$

و می‌دانیم که ϵ پارامتر کوچکی است، بنابراین می‌توان بسط زیر را نوشت:

$$\cos(2\sqrt{\epsilon}) = 1 - \frac{2\epsilon}{2} + \dots = 1 - 2\epsilon + \dots \Rightarrow \cos(2\sqrt{\epsilon}) \simeq 1 - 2\epsilon \quad (۱۰.آ)$$

و

$$\sin^2(2\sqrt{\epsilon}) = 1 - (1 - 2\epsilon)^2 = 2\sqrt{\epsilon - \epsilon^2} + O(\epsilon) \quad (۱۱.آ)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\lambda^{(1)}(\epsilon) = \sqrt{\cos(2\sqrt{\epsilon}) + i \sin(2\sqrt{\epsilon})} = (e^{2i\sqrt{\epsilon}})^{1/2} + O(\epsilon) \quad (۱۲.آ)$$

۶. آ. اندازه‌گیری کامل

برای یک سیستم کوانتومی n کیوبیتی (متشکل از n سیستم تک کیوبیتی)، حالت سیستم همواره با یک بردار حالت در فضای $N = 2^n$ بعدی توصیف می‌شود. در پایه‌های محاسباتی، یعنی $\{|0\rangle, \dots, |N-1\rangle\}$ ، حالت سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i |i\rangle = \alpha_1 |1\rangle + \dots = \alpha_1 (\overbrace{|0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle}^n) + \dots \quad (۱۳.آ)$$

بر طبق قوانین مکانیک کوانتومی اندازه‌گیری کامل روی حالت سیستم با احتمال $|\alpha_i|^2$ منجر به حالت $|i\rangle$ خواهد شد. منظور از یک اندازه‌گیری کامل این است که تمام n کیوبیت اندازه‌گیری شود (که یا ۰ یا ۱ یافت می‌شوند یا ۱) ولی اندازه‌گیری جزئی یعنی فقط بخشی از کیوبیت‌ها اندازه‌گیری شوند یا به عبارت دیگر فقط روی یکی از زیرسیستم‌ها اندازه‌گیری انجام گیرد [۸۷].

۷. آ. اثبات جابه‌جایی پذیری عملگر تحول اختلالی و عملگر جایگشتی

$$P_{ij}^\dagger U' P_{ij} = P_{ij}^\dagger U P_{ij} - \frac{2S}{\sqrt{n}} \sum_d P_{ij}^\dagger |d, \cdot\rangle \langle d, \cdot| P_{ij} = U' \quad (۱۴.آ)$$

در اثبات این قضیه از رابطه‌ی (۳۸.۳) استفاده کردیم. از طرف دیگر

$$|\psi.\rangle = |s^c\rangle \otimes |s^s\rangle = \frac{1}{\sqrt{n} 2^n} \sum_{d, \vec{x}} |d, \vec{x}\rangle$$

$$\Rightarrow P_{ij} |\psi.\rangle = |\psi.\rangle \quad (۱۵.آ)$$

۸.آ عملگر جابه‌جایی در پایه‌های $|R, x\rangle, |L, x\rangle$

برای نوشتن عملگر جابه‌جایی در این پایه‌ها به طریق زیر عمل می‌کنم:

$$S |R, x\rangle = \frac{1}{\sqrt{(n-x) \binom{n}{x}}} \sum_{|\vec{x}|=x} \sum_{x_d=0} S |d, \vec{x}\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(n-x) \binom{n}{x}}} \sum_{|\vec{x}|=x} \sum_{x_d=0} |d, \vec{x} \oplus \vec{e}_d\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(n-x) \binom{n}{x}}} \sum_{|\vec{x}|=x+1} \sum_{x_d=1} |d, \vec{x}\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x+1) \binom{n}{x+1}}} \sum_{|\vec{x}|=x+1} \sum_{x_d=1} |d, \vec{x}\rangle$$

$$\Rightarrow S |R, x\rangle = |L, x+1\rangle \quad (۱۶.آ)$$

به طریق مشابه خواهیم دید که:

$$S |L, x\rangle = |R, x-1\rangle \quad (۱۷.آ)$$

در نتیجه می‌توان عملگر جابه‌جایی را به صورت زیر نوشت:

$$S = \sum_{x=0}^{n-1} |R, x\rangle \langle L, x+1| + |L, x+1\rangle \langle R, x| \quad (۱۸.آ)$$

۹.آ شکل عملگر سکه در پایه‌های $|R, x\rangle, |L, x\rangle$

بخاطر بیاورید که:

$$C. = G = 2|s^c\rangle \langle s^c| - \mathcal{I}_n$$

و

$$\mathcal{I}_{2^n} = \sum_{\vec{x}} |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}|$$

حال ببینیم عملگر G در این فضا چگونه اثر می‌کند. داریم

$$G \otimes \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n} = \left(\sqrt{2} |s^c\rangle \langle s^c| \otimes \sum_{\vec{x}'} |\vec{x}'\rangle \langle \vec{x}'| \right) - (\mathcal{I}_n \otimes \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}) \quad (19. \bar{A})$$

$$(G \otimes \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}) |R, x\rangle = \left(\sqrt{2} \sum_{\vec{x}'} |s^c, \vec{x}'\rangle \langle s^c, \vec{x}'| - \mathcal{I} \right) |R, x\rangle \quad (20. \bar{A})$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned} \langle s^c, \vec{x}' | R, \vec{x} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{(n-x) \binom{n}{x}}} \sum_{\substack{\vec{x}, d \\ |\vec{x}|=x \\ x_d=\cdot}} \sum_{d'} \langle d', \vec{x}' | d, \vec{x} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{(n-x) \binom{n}{x}}} \sum_{\substack{\vec{x}, d \\ |\vec{x}|=x \\ x_d=\cdot}} \langle d, \vec{x}' | d, \vec{x} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{(n-x) \binom{n}{x}}} \sum_{\substack{\vec{x}, d \\ |\vec{x}|=|\vec{x}'|=x \\ x_d=\cdot}} \delta_{xx'} \\ &= \frac{n-x}{\sqrt{n(n-x) \binom{n}{x}}} \delta_{xx'} \\ &= \sqrt{\frac{n-x}{n \binom{n}{x}}} \delta_{xx'} \quad (21. \bar{A}) \end{aligned}$$

همچنین رابطه‌ی زیر را نیز داریم:

$$\sum_{\substack{\vec{x}' \\ |\vec{x}'|=x'}} |s^c, \vec{x}'\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{\vec{x}' \\ |\vec{x}'|=x'}} |d, \vec{x}'\rangle = \sqrt{\frac{n-x'}{n} \binom{n}{x'}} |R, x'\rangle + \sqrt{\frac{x'}{n} \binom{n}{x'}} |L, x'\rangle \quad (22. \bar{A})$$

در نتیجه رابطه‌ی (۲۰.آ) به شکل زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} &\sqrt{2} \sqrt{\frac{n-x}{n \binom{n}{x}}} \left(\sqrt{\frac{n-x}{n} \binom{n}{x}} |R, x\rangle + \sqrt{\frac{x}{n} \binom{n}{x}} |L, x\rangle \right) - |R, x\rangle \\ &= \left(\sqrt{2} \left(\frac{n-x}{n} \right) - 1 \right) |R, x\rangle + \sqrt{2} \sqrt{\frac{(n-x)x}{n^2}} |L, x\rangle \quad (23. \bar{A}) \end{aligned}$$

که می‌توان به صورت خلاصه‌ی زیر نوشت:

$$(G \otimes \mathcal{I}) |R, x\rangle = \cos \omega_x |R, x\rangle + \sin \omega_x |L, x\rangle \quad (24. \bar{A})$$

و نیز

$$(G \otimes \mathcal{I}) |L, x\rangle = \sin \omega_x |R, x\rangle - \cos \omega_x |L, x\rangle \quad (25. \bar{A})$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$C. = G = \sum_{x=\cdot}^n \begin{pmatrix} \cos \omega_x & \sin \omega_x \\ \sin \omega_x & -\cos \omega_x \end{pmatrix} \otimes |x\rangle \langle x| \quad (۲۶.آ)$$

که $\sin \omega_x = (\sqrt{2/n}) \sqrt{x(n-x)}$ و $\cos \omega_x = 1 - \sqrt{2x/n}$

۱۰.آ شکل عملگر تحول یکانی در پایه‌های $|R, x\rangle, |L, x\rangle$

$$\begin{aligned} U = S \cdot C. &= \left[\sum_{x=\cdot}^{n-1} |R, x\rangle \langle L, x+1| + |L, x+1\rangle \langle R, x| \right] \times \\ &\left[\sum_{x'=\cdot}^{n-1} (\cos \omega_{x'} |R\rangle \langle R| - \cos \omega_{x'} |L\rangle \langle L| + \sin \omega_{x'} |R\rangle \langle L| + \sin \omega_{x'} |L\rangle \langle R|) \otimes |x'\rangle \langle x'| \right] \\ &= \sum_{x=\cdot}^{n-1} |R, x\rangle (-\cos \omega_x \langle L, x+1| + \sin \omega_x \langle R, x+1|) \\ &+ \sum_{x=\cdot}^n |L, x\rangle (\sin \omega_{x-1} \langle L, x-1| + \cos \omega_{x-1} \langle R, x-1|) \quad (۲۷.آ) \end{aligned}$$

و همچنین داریم

$$\begin{aligned} U' = S \cdot C' &= S \cdot (C. \otimes I_{\sqrt{n}} - \sqrt{2} (|R, \cdot\rangle \langle R, \cdot|)) \\ &= U - \sqrt{2} |L, 1\rangle \langle R, \cdot| = U + \Delta U \quad (۲۸.آ) \end{aligned}$$

۱۱.آ نمایش حالت اولیه و لگشت در پایه‌های $|R, x\rangle, |L, x\rangle$

$$\begin{aligned} |\psi.\rangle &= |s^c\rangle \otimes |s^s\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}} \sum_{\vec{x}} |s^c\rangle \otimes |\vec{x}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}} \left(|s^c\rangle \otimes |\vec{\cdot}\rangle + |s^c\rangle \otimes |\vec{n}\rangle + \sum_{|\vec{x}|=1}^{n-1} |s^c\rangle \otimes |\vec{x}\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}} \left(|R, \cdot\rangle + |L, n\rangle + \sum_{|\vec{x}|=1}^{n-1} |s^c\rangle \otimes |\vec{x}\rangle \right) \quad (۲۹.آ) \end{aligned}$$

حال جمله‌ی سوم این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

جمع روی حالت‌هایی بسته می‌شود که $|\vec{x}| = x$ و $1 \leq x \leq n-1$ است. یعنی از این رشته‌ی n بیتی x تا مولفه ۱ و بقیه ۰ هستند. این حالات در مجموعه‌ی $|R, x\rangle$ جای می‌گیرند اگر $x_d = 0$ باشد، یعنی حتماً یک مولفه ۰ باید باشد، $\binom{n}{x-1}$ انتخاب می‌توانیم داشته باشیم تا این ۰ و ۱‌ها را داخل رشته‌ی بیتی بچینیم. به استدلال مشابه برای مجموعه‌ی $|L, x\rangle$ هم تعداد $\binom{n-1}{x-1}$ انتخاب خواهد بود. پس حالت اولیه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$|\psi.\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left[|R, \cdot\rangle + |L, n\rangle + \sum_{x=1}^{n-1} \left(\sqrt{\binom{n-1}{x-1}} |L, x\rangle + \sqrt{\binom{n-1}{x}} |R, x\rangle \right) \right] \quad (30.A)$$

۱۲.آ اثبات قضیه‌ی ۱.۲.۳

قضیه: حداکثر دو ویژه‌مقدار از U' درون \mathcal{A} وجود دارد.

اثبات از طریق برهان خلف: فرض کنید سه ویژه‌مقدار $e^{i\omega'_1}$ ، $e^{i\omega'_2}$ و $e^{i\omega'_3}$ با قسمت حقیقی بزرگتر از $1 - \frac{2}{3n}$ وجود دارد. فرض کنید $|\omega'_1\rangle$ ، $|\omega'_2\rangle$ و $|\omega'_3\rangle$ ویژه‌بردارهای متناظر باشند. بنابراین

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\sum_i \langle \omega'_i | U' | \omega'_i \rangle \right) &= \operatorname{Re} \left(\sum_i e^{i\omega'_i} \langle \omega'_i | \omega'_i \rangle \right) = \operatorname{Re} \left(e^{i\omega'_1} + e^{i\omega'_2} + e^{i\omega'_3} \right) \\ &= \cos \omega'_1 + \cos \omega'_2 + \cos \omega'_3 > 3 \left(1 - \frac{2}{3n} \right) = 3 - \frac{2}{n} \end{aligned} \quad (31.A)$$

Ω را زیرفضایی در نظر بگیرید که توسط $|\omega'_1\rangle$ و $|\omega'_2\rangle$ و $|\omega'_3\rangle$ جاروب می‌شود. پس رابطه‌ی فوق را می‌توان به صورت رد جزئی U' روی Ω نوشت، یعنی

$$\operatorname{Re}(\operatorname{Tr}_\Omega U') > 3 - \frac{2}{n} \quad (32.A)$$

حالا تعریف زیر را بیان می‌کنیم:

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|R, \cdot\rangle - |L, 1\rangle) \quad (33.A)$$

پس می‌توان $|\omega'_1\rangle$ و $|\omega'_2\rangle$ و $|\omega'_3\rangle$ را برحسب بردارهای $|\psi.\rangle$ و $|\psi_-\rangle$ و یک بردار باقی‌مانده بسط داد (زیرا $\langle \psi_-\ | \psi.\rangle = 0$ یعنی نوشت:

$$\begin{aligned} |\omega'_1\rangle &= c'_{1.} |\psi.\rangle + c'_{1-} |\psi_-\rangle + c'_{1r} |r'_1\rangle \\ |\omega'_2\rangle &= c'_{2.} |\psi.\rangle + c'_{2-} |\psi_-\rangle + c'_{2r} |r'_2\rangle \\ |\omega'_3\rangle &= c'_{3.} |\psi.\rangle + c'_{3-} |\psi_-\rangle + c'_{3r} |r'_3\rangle \end{aligned} \quad (34.A)$$

^rpartial trace

که $|r'_i\rangle$ یک بردار بهنجار و عمود بر $|\psi.\rangle$ و $|\psi_-\rangle$ است. با توجه به ناوردایی رد ماتریس تحت تبدیل پایه‌ها [۶۷] رابطه‌ی (۳۲.آ) به ازای هر ترکیب خطی از $|\omega'\rangle$ و $|\omega'_-\rangle$ و $|\omega'_\pm\rangle$ برقرار است. پس می‌توانیم سه بردار متعامد بهنجار $|\alpha.\rangle$ ، $|\alpha_1\rangle$ و $|\alpha_2\rangle$ را به کمک ترکیب خطی $|\omega'_i\rangle$ طوری بسازیم که:

$$\langle \alpha_2 | \psi.\rangle = \langle \alpha_2 | \psi_-\rangle = 0 \quad (35. \bar{A})$$

به عبارت دیگر می‌توان $|\alpha.\rangle$ ، $|\alpha_1\rangle$ و $|\alpha_2\rangle$ را به صورت بسط زیر بنویسیم:

$$|\alpha.\rangle = c_{.1} |\psi.\rangle + c_{.2} |\psi_-\rangle + c_{.3} |r.\rangle$$

$$|\alpha_1\rangle = c_{11} |\psi.\rangle + c_{12} |\psi_-\rangle + c_{13} |r.\rangle$$

$$|\alpha_2\rangle = |r_2\rangle \quad (36. \bar{A})$$

از آنجائیکه $|\alpha_i\rangle$ ها هنوز پایه‌های فضای Ω را شکل می‌دهند از رابطه‌ی (۳۲.آ) نتیجه می‌گیریم که

$$3 - \frac{2}{n} < \text{Re} \sum_i \langle \alpha_i | U' | \alpha_i \rangle \quad (37. \bar{A})$$

اما با توجه به یکانی بودن U' و اینکه ویژه‌مقادیر عملگر یکانی فاز خالص هستند میدانیم به ازای تمام $|\alpha_i\rangle$ ها رابطه‌ی $\text{Re} \langle \alpha_i | U' | \alpha_i \rangle \leq 1$ برقرار است، با اعمال این نامساوی به دو جمله‌ی اول جمع داریم:

$$\text{Re} \sum_i \langle \alpha_i | U' | \alpha_i \rangle \leq 2 + \text{Re} \langle \alpha_2 | U' | \alpha_2 \rangle \quad (38. \bar{A})$$

از طرف دیگر داریم $U' = U + \Delta U$ بنابراین:

$$\text{Re} \langle \alpha_2 | U' | \alpha_2 \rangle = \text{Re} \langle \alpha_2 | U | \alpha_2 \rangle + \text{Re} \langle \alpha_2 | \Delta U | \alpha_2 \rangle \quad (39. \bar{A})$$

با بسط $|\alpha_2\rangle$ برحسب ویژه‌کت‌های مختل نشده، می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{Re} \langle \alpha_2 | U | \alpha_2 \rangle = \text{Re} \left(\sum_i b_i b_j \langle \omega_i | U | \omega_j \rangle \right) = \sum_j |b_j|^2 \cos \omega_j \quad (40. \bar{A})$$

از طرفی قبلا گفتیم که $\langle \alpha_2 | \psi.\rangle = 0$ است، یعنی هیچ سهمی از ویژه‌مقدار ۱ وجود ندارد. به ازای ویژه‌مقدار بعدی، که بزرگترین قسمت حقیقی را دارد، یعنی $e^{i\omega_1} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2i}{n} \sqrt{n-1}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{Re} \langle \alpha_2 | U | \alpha_2 \rangle &= |b_1|^2 \cos \omega_1 + |b_2|^2 \cos \omega_2 + \dots \\ &= |b_1|^2 \left(1 - \frac{2}{n} \right) + |b_2|^2 \left(1 - \frac{4}{n} \right) + \dots \\ &= (|b_1|^2 + |b_2|^2 + \dots) - \frac{2}{n} (|b_1|^2 + 2|b_2|^2) \\ &= \left(1 - \frac{2}{n} \right) (|b_1|^2 + |b_2|^2 + \dots) - \frac{2}{n} (|b_2|^2 + \dots) \leq 1 - \frac{2}{n} \quad (41. \bar{A}) \end{aligned}$$

یعنی $1 - \frac{2}{n}$. $Re\langle\alpha_r|U|\alpha_r\rangle \leq 1 - \frac{2}{n}$. حالا به سراغ جمله‌ی دوم یعنی $Re\langle\alpha_r|\Delta U|\alpha_r\rangle$ می‌رویم. با استفاده از رابطه‌ی (۳۳.آ) و تعریف زیر

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R, \cdot\rangle + |L, 1\rangle) \quad (42. \bar{A})$$

و با استفاده از رابطه‌ی (۵۰.۳) می‌توان ΔU را بر حسب $|\psi_-\rangle$ و $|\psi_+\rangle$ نوشت، خواهیم داشت:

$$\Delta U = |\psi_-\rangle\langle\psi_-| + |\psi_-\rangle\langle\psi_+| - |\psi_+\rangle\langle\psi_-| - |\psi_+\rangle\langle\psi_+| \quad (43. \bar{A})$$

ولی با توجه به $\langle\alpha_r|\psi_-\rangle = 0$ داریم

$$\langle\alpha_r|\Delta U|\alpha_r\rangle = (-|\langle\psi_+|\alpha_r\rangle|^2) \leq 0 \quad (44. \bar{A})$$

بنابراین $Re\langle\alpha_r|U'|\alpha_r\rangle \leq 1 - \frac{2}{n}$ با ترکیب رابطه‌ی فوق و رابطه‌ی (۳۸.آ) خواهیم داشت

$$Re \sum_i \langle\alpha_i|U'|\alpha_i\rangle \leq 3 - \frac{2}{n} \quad (45. \bar{A})$$

که با رابطه‌ی (۳۷.آ) در تناقض است، پس فرض خلف باطل و قضیه اثبات می‌شود. یعنی حداکثر دو ویژه‌مقدار از U' در A وجود دارد.

آ.۱۳ اثبات قضیه‌ی ۲.۲.۳

قضیه: حداقل دو ویژه‌مقدار از U' درون A وجود دارد.

دو ویژه‌بردار تقریبی از U' به نام‌های $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ را تشکیل می‌دهیم. $|\psi_1\rangle$ که با رابطه‌ی (۵۱.۳) داده می‌شود، پس داریم

$$U'|\psi_1\rangle = U|\psi_1\rangle - 2|L, 1\rangle\langle R, \cdot|\psi_1\rangle = |\psi_1\rangle - \frac{2}{\sqrt{2n}}|L, 1\rangle \quad (46. \bar{A})$$

و

$$\langle\psi_1|U'|\psi_1\rangle = \langle\psi_1|\psi_1\rangle - \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{2n-1} \quad (47. \bar{A})$$

بنابراین با صرف‌نظر از یک مقدار کوچک تفاوت، $|\psi_1\rangle$ همچنان یک ویژه‌بردار تقریبی U' با ویژه‌مقدار ۱ است. حال به دنبال یافتن ویژه‌بردار تقریبی دوم هستیم، $|\psi_2\rangle$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{c} \left(\sum_{x=0}^{n/2-1} \frac{1}{\sqrt{2\binom{n-1}{x}}} |R, x\rangle - \frac{1}{\sqrt{2\binom{n-1}{x}}} |L, x+1\rangle \right) \quad (48. \bar{A})$$

که c ضریب بهنجارش است و به شکل زیر می‌باشد :

$$c = \sqrt{\sum_{x=0}^{n/2-1} \frac{1}{\binom{n-1}{x}}} \quad (49. \bar{A})$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$U'|\psi_1\rangle = |\psi_1\rangle - \frac{1}{c\sqrt{2\binom{n-1}{n/2}}}(|R, n/2 - 1\rangle + |L, n/2 + 1\rangle) \quad (50. \bar{A})$$

بنابراین داریم:

$$\langle \psi_1 | U' | \psi_1 \rangle = 1 - \frac{1}{2c^2 \binom{n-1}{n/2}} \quad (51. \bar{A})$$

از طرف دیگر با بسط ضریب بهنجارش c خواهیم دید (رک پیوست ۳.آ) که برای n های به حد کافی بزرگ

$$1 < c^2 < 1 + 2/n \quad (52. \bar{A})$$

می‌باشد. بنابراین این قطع نظر از یک مقدار ناچیز باقی مانده، $|\psi_1\rangle$ نیز ویژه بردار تقریبی U' با ویژه مقدار $+1$ است. حالا نشان می‌دهیم که حداقل یک ویژه مقدار U' درون کمان A قرار می‌گیرد. این کار را به کمک برهان خلف انجام می‌دهیم، بدین شکل که فرض می‌کنیم هیچ ویژه مقداری درون کمان قرار ندارد، بنابراین برای تمام مقادیر ممکن j داریم $\cos \omega'_j < 1 - 2/3n$ (زیرا کمان مذکور فقط شامل آن ویژه مقادیری است که دارای قسمت حقیقی بزرگتر از این مقدار باشد). نشان داده شد که $\langle \psi | U' | \psi \rangle = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ ، پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle \psi | U' | \psi \rangle &= \sum_j |\langle \psi | \omega'_j \rangle|^2 (\cos \omega'_j + i \sin \omega'_j) \\ &= \sum_j |\langle \psi | \omega'_j \rangle|^2 \cos \omega'_j + i \sum_j |\langle \psi | \omega'_j \rangle|^2 \sin \omega'_j \\ \implies \operatorname{Re} \langle \psi | U' | \psi \rangle &= \sum_j |\langle \psi | \omega'_j \rangle|^2 \cos \omega'_j = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< (1 - \frac{2}{3n}) \sum_j |\langle \psi | \omega'_j \rangle|^2 \\ \implies 1 - \frac{1}{2^{n-1}} &< 1 - \frac{2}{3n} \end{aligned} \quad (53. \bar{A})$$

که این عبارت برای $n > 3$ صحیح نیست. پس فرض خلف باطل است و حداقل یک ویژه مقدار درون کمان قرار دارد. مجدداً یک فرض خلف دیگر انجام می‌دهیم و فرض می‌کنیم دقیقاً یک ویژه مقدار (مثلاً $e^{i\omega'}$) درون

کمان قرار دارد، بنابراین:

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1}{2^{n-1}} &= \text{Re}\langle \psi | U' | \psi \rangle = |\langle \psi | \omega' \rangle|^2 \cos \omega' + \sum_{j \neq \cdot} |\langle \psi | \omega'_j \rangle|^2 \cos \omega'_j \\
 &\leq |\langle \psi | \omega' \rangle|^2 + (1 - |\langle \psi | \omega' \rangle|^2) \left(1 - \frac{2}{3n}\right) \\
 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^{n-1}} &\leq |\langle \psi | \omega' \rangle|^2 \left(1 - 1 + \frac{2}{3n}\right) + 1 - \frac{2}{3n} \\
 \Rightarrow |\langle \psi | \omega' \rangle|^2 &\geq \frac{3n}{2} \left(\frac{2}{3n} - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
 \Rightarrow |\langle \psi | \omega' \rangle|^2 &\geq 1 - \frac{3n}{2^n} \quad (54. \bar{1})
 \end{aligned}$$

حالا اگر عملیات فوق را با این فرض تکرار کنیم که $|\psi_1\rangle$ بردار بدیهی باشد، و با توجه به

$$\text{Re}\langle \psi_1 | U' | \psi_1 \rangle = 1 - \frac{1}{2c^2 \binom{n-1}{n/2}} \quad (55. \bar{1})$$

به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم

$$|\langle \psi_1 | \omega' \rangle|^2 \geq 1 - \frac{3n}{4c^2 \binom{n-1}{n/2}} \quad (56. \bar{1})$$

از طرف دیگر می‌دانیم که $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ دو بردار متعامد بهنجار هستند، که خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 |\omega' \rangle &= \sum \alpha_i |\psi_i \rangle = \sum \langle \psi_i | \omega' \rangle |\psi_i \rangle \\
 \Rightarrow \langle \omega' | \omega' \rangle &= \sum |\langle \psi_i | \omega' \rangle|^2 \langle \psi_i | \psi_i \rangle \\
 &= |\langle \psi_1 | \omega' \rangle|^2 + |\langle \psi_2 | \omega' \rangle|^2 + \dots = 1 \\
 &\geq |\langle \psi_1 | \omega' \rangle|^2 + |\langle \psi_2 | \omega' \rangle|^2 \\
 &\geq 2 - \frac{3n}{2^n} - \frac{3n}{4c^2 \binom{n-1}{n/2}} \quad (57. \bar{1})
 \end{aligned}$$

که این عبارت برای n های بزرگ صحیح نمی‌باشد. پس فرض خلف باطل است و حداقل دو ویژه‌مقدار درون کمان قرار دارند.

آ. ۱۴. اثبات قضیه‌ی ۳.۲.۳

قضیه: دو ویژه‌بردار متناظر با دو ویژه‌مقدار نزدیک ۱، با ترکیب خطی از حالت اولیه $|\psi_0\rangle$ و حالت $|\psi_1\rangle$ به خوبی قابل تقریب است، مانند

$$|\pm \omega' \rangle \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_0 \rangle \pm i |\psi_1 \rangle) \quad (58. \bar{1})$$

به طور دقیق‌تر

$$\begin{aligned} |\omega'\rangle &= \sqrt{p}\cdot|\psi\rangle + \sqrt{p\lambda}e^{in}|\psi_\lambda\rangle + \sqrt{1-p-p\lambda}|r\rangle \\ |-\omega'\rangle &= \sqrt{p}\cdot|\psi\rangle + \sqrt{p\lambda}e^{-in}|\psi_\lambda\rangle + \sqrt{1-p-p\lambda}|r\rangle^* \end{aligned} \quad (59. \bar{A})$$

که $p = |\langle\omega'|\psi\rangle|^2 = |\langle-\omega'|\psi\rangle|^2$ و $p_\lambda = |\langle\omega'|\psi_\lambda\rangle|^2 = |\langle-\omega'|\psi_\lambda\rangle|^2$ یک بردار بهنجار و عمود بر $|\psi\rangle$ و $|\psi_\lambda\rangle$ است. بعلاوه داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \geq p &\geq \frac{1}{4} - \frac{3n}{4^{n+1}} \\ \frac{1}{4} \geq p_\lambda &\geq \frac{1}{4} - \frac{3n}{8c^2 \binom{n-1}{n/2}} \end{aligned} \quad (60. \bar{A})$$

و $e^{in} = i + \Delta$ که $|\Delta| = O\left(\frac{n}{\binom{n-1}{n/2}}\right)$ اثبات: داریم

$$\begin{aligned} |\langle\omega'|\psi\rangle|^2 + |\langle-\omega'|\psi\rangle|^2 + \sum_{j \neq \cdot} |\langle\omega'_j|\psi\rangle|^2 &= 1 \\ \Rightarrow |\langle\omega'|\psi\rangle|^2 + |\langle-\omega'|\psi\rangle|^2 &\leq 1 \end{aligned} \quad (61. \bar{A})$$

از طرفی با توجه به حقیقی بودن $|\psi\rangle$ و $|\psi_\lambda\rangle$ و نیز تساوی $|\omega'\rangle = |-\omega'\rangle^*$ داریم (نکته: در مکانیک کوانتومی حاصلضرب اسکالر دو بردار حالت، یک عدد مختلط است و بنابراین ترتیب بردارها در ضرب داخلی دارای اهمیت است، به طوری که $\langle\psi|\phi\rangle^* = \langle\phi|\psi\rangle$ ولی اگر این دو بردار حقیقی باشند، آنگاه خواهیم داشت $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$). [۶۸]

$$\begin{aligned} \langle\psi|\omega'\rangle^* &= \langle\omega'|\psi\rangle = \langle\psi|-\omega'\rangle \\ \Rightarrow |\langle\omega'|\psi\rangle|^2 &= |\langle-\omega'|\psi\rangle|^2 \end{aligned} \quad (62. \bar{A})$$

بنابراین از رابطه‌ی (۶۱. آ) نتیجه می‌گیریم:

$$|\langle\omega'|\psi\rangle|^2 = |\langle-\omega'|\psi\rangle|^2 \leq \frac{1}{4} \quad (63. \bar{A})$$

و به طریق مشابه:

$$|\langle\omega'|\psi_\lambda\rangle|^2 = |\langle-\omega'|\psi_\lambda\rangle|^2 \leq \frac{1}{4} \quad (64. \bar{A})$$

همچنین روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1}{2^{n-1}} &= \operatorname{Re}\langle \psi | U' | \psi \rangle = \sum_j \cos \omega'_j |\langle \omega'_j | \psi \rangle|^2 \\
 &= 2p \cos \omega'_1 + \sum_{j \neq 1} \cos \omega'_j |\langle \omega'_j | \psi \rangle|^2 \\
 &\leq 2p + \left(1 - \frac{2}{2^n}\right)(1 - 2p) \\
 \Rightarrow p &\geq \frac{1}{2} - \frac{2^n}{2^{n+1}} \quad (65. \bar{A})
 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{2}{2c^2 \binom{n-1}{n/2}} &= \operatorname{Re}\langle \psi_\wedge | U' | \psi_\wedge \rangle = \sum_j \cos \omega'_j |\langle \omega'_j | \psi_\wedge \rangle|^2 \\
 &= 2p_\wedge \cos \omega'_1 + \sum_{j \neq 1} \cos \omega'_j |\langle \omega'_j | \psi_\wedge \rangle|^2 \\
 &\leq 2p_\wedge + (1 - 2p_\wedge) \left(1 - \frac{2}{2^n}\right) \\
 \Rightarrow p_\wedge &\geq \frac{1}{2} - \frac{2^n}{\lambda c^2 \binom{n-1}{n/2}} \quad (66. \bar{A})
 \end{aligned}$$

در نتیجه تا حد یک فاز کلی می توان نوشت:

$$|\omega'\rangle = |\langle \omega' | \psi \rangle| |\psi\rangle + |\langle \omega' | \psi_\wedge \rangle| e^{i\eta} |\psi_\wedge\rangle + \sqrt{1 - p - p_\wedge} |r\rangle \quad (67. \bar{A})$$

حالا باید فاز نسبی $e^{i\eta}$ را تخمین بزنیم. برای این منظور با توجه به رابطه‌ی تعامد ویژه بردارهای عملگر یکانی $(|\pm \omega'\rangle)$ خواهیم داشت:

$$\langle \omega' | -\omega' \rangle = 0 = p + p_\wedge (e^{i\eta})^2 + (1 - p - p_\wedge) \langle r^* | r \rangle \quad (68. \bar{A})$$

جواب این معادله به صورت زیر خواهد بود

$$\operatorname{Re}(e^{i\eta})^2 = \frac{-p - (1 - p - p_\wedge) \operatorname{Re}\langle r^* | r \rangle}{p_\wedge} \quad (69. \bar{A})$$

با فرض اینکه $\operatorname{Re}\langle r^* | r \rangle \geq 0$ و به کمک روابط (65. \bar{A}) و (66. \bar{A}) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 (p + p_\wedge - 1) \operatorname{Re}\langle r^* | r \rangle &\geq \left(-\frac{2^n}{2^{n+1}} - \frac{2^n}{\lambda c^2 \binom{n-1}{n/2}} \right) \operatorname{Re}\langle r^* | r \rangle \\
 \Rightarrow [-p + (p + p_\wedge - 1) \operatorname{Re}\langle r^* | r \rangle] / p_\wedge &\geq \left[\left(-\frac{2^n}{2^{n+1}} - \frac{2^n}{\lambda c^2 \binom{n-1}{n/2}} \right) \operatorname{Re}\langle r^* | r \rangle - p \right] / p_\wedge \\
 &\quad (70. \bar{A})
 \end{aligned}$$

یعنی:

$$Re(e^{in})^2 \geq -\frac{p \cdot + \left(\frac{2n}{2^{n+1}} + \frac{2n}{\lambda c^2 \binom{n-1}{n/2}} \right)}{p_1} \quad (71. \bar{A})$$

از طرف دیگر با در نظر گرفتن حد بالای p و p_1 خواهیم داشت:

$$Re(e^{in})^2 \leq -\frac{p \cdot}{p_1} \quad (72. \bar{A})$$

همچنین:

$$Re(e^{in})^2 \geq -1 - 2 \left(\frac{2n}{2^{n+1}} + \frac{2n}{\lambda c^2 \binom{n-1}{n/2}} \right) - 4 \left(\frac{2n}{\lambda c^2 \binom{n-1}{n/2}} \right) \quad (73. \bar{A})$$

این رابطه ایجاب می‌کند که $e^{in} = i + \Delta$ باشد که در آن $|\Delta| = O\left(\frac{n}{\binom{n-1}{n/2}}\right)$ نتیجه‌ی مشابه برای حالتی که $Re\langle r^* | r \rangle \leq 0$ برقرار است.

۱۵.آ اثبات قضیه‌ی ۴.۲.۳

قضیه: هر گام از تحول ولگشت کوانتومی (متناظر با اثر عملگر U') معادل یک دروان با زاویه‌ی تقریبی $1/\sqrt{2^n - 1}$ در فضایی است که توسط بردارهای $|\pm \omega'\rangle$ جاروب میشود. به طور دقیق تر $-1/(c\sqrt{2^n - 1}) - \beta \leq \omega' \leq -1/(c\sqrt{2^n - 1}) + \beta$ که در آن $\beta = O(n^{2/2}/2^n)$.
اثبات: هدف ما این است که $\langle \omega' | U' | \omega' \rangle = e^{i\omega'}$ را به کمک $\langle \alpha | U' | \alpha \rangle$ تقریب بزیم، که در آن

$$|\alpha\rangle = 1/\sqrt{2}(|\psi_0\rangle + e^{i\eta}|\psi_1\rangle) \quad (74. \bar{A})$$

برای این کار ابتدا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\left| e^{i\omega'} - \langle \alpha | U' | \alpha \rangle \right| = \left| e^{i\omega'} - \sum_j |\langle \omega'_j | \alpha \rangle|^2 e^{i\omega'_j} \right| \quad (75. \bar{A})$$

زیرا با توجه به تعامد و کاملیت بردارهای $|\omega'_j\rangle$ ها، هر بردار دیگری را می‌توان بر حسب آن‌ها بسط داد، از جمله می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_j \langle \omega'_j | \alpha \rangle |\omega'_j\rangle \\ \implies U' |\alpha\rangle &= \sum_j \langle \omega'_j | \alpha \rangle e^{i\omega'_j} |\omega'_j\rangle \end{aligned} \quad (76. \bar{A})$$

از طرف دیگر با توجه به رابطه‌ی (۵۹.آ) نتیجه می‌گیریم :

$$|\langle \omega' | \alpha \rangle|^2 = |\sqrt{p./2} + \sqrt{p_./2}| \quad (۷۷.آ)$$

بنابراین :

$$|e^{i\omega'} - \langle \alpha | U' | \alpha \rangle| = |e^{i\omega'} - (\sqrt{p./2} + \sqrt{p_./2})e^{i\omega'} + \sum_{|\omega'_j \rangle \neq |\omega' \rangle} |\langle \omega'_j | \alpha \rangle|^2 e^{i\omega'_j}| \quad (۷۸.آ)$$

از طرفی با توجه به رابطه $|A + B| \leq |A| + |B|$ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} |e^{i\omega'} - \langle \alpha | U' | \alpha \rangle| &\leq |e^{i\omega'} (\mathbf{1} - \sqrt{p./2} - \sqrt{p_./2})| + \sum_{|\omega'_j \rangle \neq |\omega' \rangle} |\langle \omega'_j | \alpha \rangle|^2 \\ &\leq |e^{-i\omega'} (\mathbf{1} - \sqrt{p./2} - \sqrt{p_./2})| \end{aligned} \quad (۷۹.آ)$$

همچنین داریم :

$$\begin{aligned} |e^{-i\omega'} (\mathbf{1} - \sqrt{\frac{p.}{2}} - \sqrt{\frac{p_.}{2}})| &= \mathbf{1} + (\sqrt{p./2} + \sqrt{p_./2})^2 - 2(\sqrt{\frac{p.}{2}} + \sqrt{\frac{p_.}{2}}) \\ &= \mathbf{1} + \frac{p. + p_.}{2} - 2(\sqrt{p./2} + \sqrt{p_./2}) + \sqrt{p. p_.} \\ &\leq \mathbf{1} + (\frac{\mathbf{1}/2 + \mathbf{1}/2}{2}) - 2(\sqrt{\frac{p.}{2}} + \sqrt{\frac{p_.}{2}}) + \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{2} \times \frac{\mathbf{1}}{2}} \\ &\leq 2 (\mathbf{1} - \sqrt{p./2} - \sqrt{p_./2}) \\ &\leq 2 \left(\frac{3n}{2^{n+1}} + \frac{3n}{\lambda c^2 \binom{n-1}{n/2}} \right) \end{aligned} \quad (۸۰.آ)$$

توجه داشته باشید برای $\mathbf{1} \geq x \geq 0$ داریم $\mathbf{1} - x \geq \sqrt{\mathbf{1} - x}$ و نیز داریم :

$$\mathbf{1} - p. - p_. \geq \frac{3n}{2^{n+1}} + \frac{3n}{\lambda c^2 \binom{n-1}{n/2}} \quad (۸۱.آ)$$

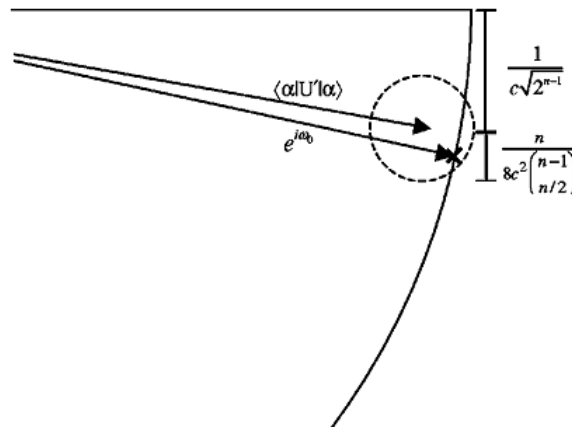
یادآوری می‌کنیم که در n های بزرگ داریم :

$$\binom{n}{x} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{x-n/2}{n/2}} 2^n \quad (۸۲.آ)$$

و نیز با توجه به اینکه $c > \mathbf{1}$ ، نتیجه می‌گیریم :

$$|e^{i\omega'} - \langle \alpha | U' | \alpha \rangle| = O\left(\frac{n^{3/2}}{2^n}\right) \quad (۸۳.آ)$$

شکل ۱.آ نمایش هندسی قضیه‌ی ۴.۲.۳ می‌باشد، که نشان می‌دهد ویژه‌مقدار $e^{i\omega'}$ در یک قرص به شعاع $n/\lambda c^2 \binom{n-1}{n/2}$ و مرکزیت $\langle \alpha | U' | \alpha \rangle$ جای‌گزیده است. موقعیت ویژه‌مقدار با علامت ضربدر مشخص شده است.



شکل آ.۱۰: نمایش هندسی قضیه‌ی ۴.۲.۳ [۱۰]

دقت داشته باشید که:

$$\begin{aligned} |\sin \omega' - \text{Im} \langle \alpha | U' | \alpha \rangle| &= \left| \text{Im} \left(e^{i\omega'} - \langle \alpha | U' | \alpha \rangle \right) \right| \\ &\leq \left| e^{i\omega'} - \langle \alpha | U' | \alpha \rangle \right| \end{aligned} \quad (۸۴. \bar{A})$$

حال به محاسبه‌ی $\langle \alpha | U' | \alpha \rangle$ می‌پردازیم. با توجه به تعریف $|\alpha\rangle$ (رابطه‌ی (۷۴. \bar{A})) داریم:

$$\langle \alpha | U' | \alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle \psi. | U' | \psi. \rangle + \langle \psi_{\backslash} | U' | \psi_{\backslash} \rangle + e^{i\eta} \langle \psi. | U' | \psi_{\backslash} \rangle + e^{-i\eta} \langle \psi_{\backslash} | U' | \psi. \rangle \right) \quad (۸۵. \bar{A})$$

از طرفی با توجه به روابط (۵۰. \bar{A}) و (۴۶. \bar{A}) و نیز $e^{i\eta} = i + \Delta$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \alpha | U' | \alpha \rangle &= \text{Im} \left(e^{i\eta} \langle \psi. | U' | \psi_{\backslash} \rangle - e^{-i\eta} \langle \psi_{\backslash} | U' | \psi. \rangle \right) \\ &= \text{Im} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{e^{i\eta}}{c\sqrt{2^{\binom{n-1}{n/2}}}} \left(\langle \psi. | R, n/2 - 1 \rangle + \langle \psi. | L, n/2 + 1 \rangle \right) \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\eta} \left(-\frac{2}{\sqrt{2^n}} \langle \psi_{\backslash} | L, 1 \rangle \right) \right) = -\text{Im} \frac{e^{i\eta}}{c\sqrt{2^{n-1}}} \\ &= -\frac{1}{c\sqrt{2^{n-1}}} - O \left(\frac{n}{\sqrt{2^n \binom{n-1}{n/2}}} \right) \end{aligned} \quad (۸۶. \bar{A})$$

در رابطه‌ی فوق از جاگذاری $\langle \psi_{\backslash} | L, 1 \rangle = -\frac{1}{c\sqrt{2}}$ استفاده کرده‌ایم. بنابراین:

$$\left| \sin \omega' + \frac{1}{c\sqrt{2^{n-1}}} + O \left(\frac{n}{\sqrt{2^n \binom{n-1}{n/2}}} \right) \right| = O \left(\frac{n^{r/2}}{2^n} \right) \quad (۸۷. \bar{A})$$

حال با استفاده از بسط تابع سینوس ($\sin x = x + O(x^2)$) تا جملات مرتبه اول، و حل معادله‌ی بالا برای ω' خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{c\sqrt{2^{n-1}}} - O \left(\frac{n^{r/2}}{2^n} \right) \leq \omega' \leq -\frac{1}{c\sqrt{2^{n-1}}} + O \left(\frac{n^{r/2}}{2^n} \right) \quad (۸۸. \bar{A})$$

- [1] Venegas-Andraca, Salvador Elías. Quantum walks: a comprehensive review. *Quantum Information Processing*, **11**:1015–1106, 2012.
- [2] K. Manouchehri and J B. Wang. Quantum random walks without walking. *Physical Review A*, **80**:060304, December 2009.
- [3] Y. Aharonov, L. Davidovich , and N. Zagury. Quantum random walks. *Physical Review A*, **48**:1687, 1993.
- [4] T. Brun ,H. Carteret and A. Ambainis. Quantum to classical transition for random walks. *Phys. Rev. Lett.*, **91**:130602, Sep 2003.
- [5] R P. Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, **21**:467–488, June 1982.
- [6] A M. Childs. On the Relationship Between Continuous- and Discrete-Time Quantum Walk. *Communications in Mathematical Physics*, **294**:581–603, October 2009.
- [7] M S. Underwood. *Quantum Walk Schemes for Universal Quantum Computation*. A thesis for the degree of doctor of philosophy, University of Calgary, 2013.
- [8] J D. Whitfield , R. Rodríguez , A. César and A. Aspuru-Guzik . Quantum stochastic walks: A generalization of classical random walks and quantum walks. *Physical Review A*, **81**:022323, February 2010.
- [9] A. Ambainis , J. Kempe and A. Rivosh. Coins Make Quantum Walks Faster. *Proceedings of the Sixteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '05:1099—1108, 2005.

- [10] N. Shenvi , J. Kempe and K. Whaley . Quantum random-walk search algorithm. *Physical Review A*, **67**:052307, May 2003.
- [11] A. Ambainis . Quantum walk algorithm for element distinctness. *SIAM Journal on Computing*, **37**:210–239, 2007.
- [12] S. Aaronson and A. Ambainis. Quantum Search of Spatial Regions. *Theory of Computing*, **1**:47–79, 2005.
- [13] W. Dür, R. Raussendorf , V. Kendon and H J. Briegel. Quantum walks in optical lattices. *Physical Review A*, **66**:052319, November 2002.
- [14] R. Portugal. *Quantum Walks and Search Algorithm*. Springer New York Heidelberg, 2013.
- [15] D. Reitzner, D. Nagaj and V. Bužek. Quantum Walks. *Acta Physica Slovaca. Reviews and Tutorials*, **61**:603–725, January 2011.
- [16] Stefanak, Martin. *Interference Phenomena in Quantum Information*. A thesis for the degree of doctor of philosophy, CZECH Technical University in PRAGUE ,Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering, September 2010.
- [17] V M. Kendon. A random walk approach to quantum algorithms. *Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences*, **364**:3407–22, December 2006.
- [18] D. Emms, R C. Wilson and E R. Hancock. Graph matching using the interference of discrete-time quantum walks. *Image and Vision Computing*, **27**:934–949, June 2009.
- [19] N. Konno , T. Namiki , T. Soshi and A. Sudbury. Absorption problems for quantum walks in one. *J.Phys. A: Math. Gen*, **36**:241–253, 2003.
- [20] D. Aharonov , A. Ambainis , J. Kempe and U. Vazirani. Quantum Walks On Graphs. p. 10, December 2000.
- [21] W H. Brady. *Quantum random-walks on Z_2* . A thesis for the degree of doctor of philosophy, University of Pennsylvania, 2007.

- [22] V. Kendon and O. Maloyer. Optimal computation with non-unitary quantum walks. *Theoretical Computer Science*, **394**:187–196, April 2008.
- [23] J. Košík , V. Bužek and M. Hillery. Quantum walks with random phase shifts. *Physical Review A*, **74**:022310, August 2006.
- [24] B. Tregenna , W. Flanagan , R. Maile and V. Kendon. Controlling discrete quantum walks: coins and initial states. pp. 1–11, 2003.
- [25] E. Bach , S. Coppersmith , M. Goldschen , R. Joynt and J. Watrous. One-dimensional quantum walks with absorbing boundaries. *Journal of Computer and System Sciences*, **69**:562–592, December 2004.
- [26] A. Nayak , A. Vishwanath and J. Laboratories. Quantum Walk on the Line (Extended Abstract). pp. 1–20.
- [27] T. Yamasaki , H. Kobayashi and H. Imai. Analysis of absorbing times of quantum walks. *Physical Review A*, **68**:012302, July 2003.
- [28] A. Nayak and A. Vishwanath. Quantum Walk on the Line. p. 20, October 2000.
- [29] C. Chandrashekar , R. Srikanth and R. Laflamme. Optimizing the discrete time quantum walk using a $SU(2)$ coin. *Physical Review A*, **77**:032326, March 2008.
- [30] I. Carneiro , M. Loo, X. Xu , M. Girerd , V. Kendon and P. Knight. Entanglement in coined quantum walks on regular graphs. *New Journal of Physics*, **7**:23, April 2005.
- [31] M. Montero. Quantum walk with a general coin: Exact solution and asymptotic properties. (2):13, October 2013.
- [32] M. Bañuls , C. Navarrete , A. Pérez , E. Roldán and J. Soriano. Quantum walk with a time-dependent coin. *Physical Review A*, **73**:062304, June 2006.
- [33] A. Wójcik , T. Łuczak , P. Kurzyński , A. Grudka and M. Bednarska. Quasiperiodic Dynamics of a Quantum Walk on the Line. *Physical Review Letters*, **93**:180601, October 2004.

- [34] T. Brun , H. Carteret and A. Ambainis. Quantum to Classical Transition for Random Walks. *Physical Review Letters*, **91**:130602, September 2003.
- [35] T.D. Mackay, S.D. Bartlett , L.T. Stephenson and B.C. Sanders. Quantum walks in higher dimensions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **35**:2745–2753, March 2002.
- [36] K. Manouchehri and W. Jingbo. *Physical Implementation of Quantum Walks*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2014.
- [37] N. Linden and J. Sharam. Inhomogeneous quantum walks. *Physical Review A*, **80**:052327, November 2009.
- [38] Y. Shikano and H. Katsura. Localization and Fractality in Inhomogeneous Quantum Walks with Self-Duality. p. 8, April 2010.
- [39] R.E. Cleve C. Macchiavello and M. Mosca. Quantum algorithms revisited. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **454**:339–354, January 1998.
- [40] N.B. Lovett. *Application of quantum walks on graph structures to quantum computing*. A thesis for the degree of doctor of philosophy, University of Leeds ,School of Physics Astronomy, 2011.
- [41] K.L. Brown, W.J. Munro and V. Kendon. Using Quantum Computers for Quantum Simulation. *Entropy*, *12*:2268–2307, 2010.
- [42] E. Farhi, J. Goldstone, S. Gutmann and M. Sipser. Quantum computation by adiabatic evolution. *Arxiv preprint arXiv:000.1106*, 2001.
- [43] A. Ambainis. Quantum Walks and their Algorithmic Applications. *International Journal of Quantum Information*, **01**:507–518, December 2003.
- [44] D. Deutsch. Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **400**:97–117, July 1985.
- [45] Rieffel, Eleanor and Polak, Wolfgang. *Quantum Computing , A Gentle Introduction*. The MIT Press Cambridge, Massachusetts, London, first ed. , 2011.

- [46] J.A. Bergou and M. Hillery. *Introduction to the Theory of Quantum Information Processing*. Graduate Texts in Physics. Springer New York, New York, NY, 1 ed. , 2013.
- [47] L.K. Grover, B. Labs, M. Avenue and N. Murray. A fast quantum mechanical algorithm for database search. pp. 212–219, 1996.
- [48] C. Zalka. Grover’s quantum searching algorithm is optimal. *Physical Review A*, **60**:2746–2751, October 1999.
- [49] D.C. Marinescu. and G.M. Marinescu. , in *Classical and Quantum Information*. Academic Press, Boston, 2 ed. , 2012.
- [50] J. Preskill. *Quantum Information and Computation*. California Institute of Technology, Pasadena, CA, 1998.
- [51] E. Biham and D. Kenigsberg. Grover’s quantum search algorithm for an arbitrary initial mixed state. *Physical Review A*, **66**:062301, December 2002.
- [52] G.F. Viamontes , I.L. Markov, and J.P. Hayes. Is quantum search practical? *Computing in science & engineering*, **7**:62–70, 2005.
- [53] Z. Sakhi , A. Tragha , R. Kabil and M. Bennai. Grover Algorithm Applied to Four Qubits System. *Computer and Information Science*, **4**:125–130, 2011.
- [54] F. Marquezino , R. Portugal and S. Boettcher. Spatial search algorithms on Hanoi networks. *Physical Review A*, **87**:012329, January 2013.
- [55] P. Benioff. Space searches with a quantum robot. *arXiv preprint quant-ph/0003006*, 2000.
- [56] M. Szegedy. Quantum speed-up of markov chain based algorithms. in *Foundations of Computer Science, 2004. Proceedings. 45th Annual IEEE Symposium on*, pp. 32–41. IEEE, 2004.
- [57] F. Magniez, M. Santha and M. Szegedy. Quantum algorithms for the triangle problem. *SIAM Journal on Computing*, **37**:413–424, 2007.
- [58] Lu, Dawei, Zhu, Jing, Zou, Ping, Peng, Xinhua, Yu, Yihua, Zhang, Shanmin, Chen, Qun, and Du, Jiangfeng. Experimental implementation of a quantum

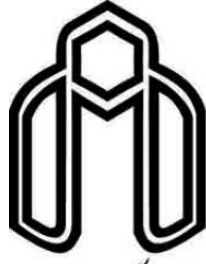
- random-walk search algorithm using strongly dipolar coupled spins. *Physical Review A*, **81**:022308, February 2010.
- [59] A. Chakrabarti , Lin, Chiachun, and Jha, Niraj K. Design of Quantum Circuits for Random Walk Algorithms. in *2012 IEEE Computer Society Annual Symposium on VLSI*, no. 1, pp. 135–140. IEEE, August 2012.
- [60] F. Marquezino , R. Portugal , G. Abal and R. Donangelo. Mixing times in quantum walks on the hypercube. *Physical Review A*, **77**:042312, April 2008.
- [61] J. Kempe. Quantum random walks hit exponentially faster. *arXiv preprint quant-ph/0205083*, 2002.
- [62] C. Moore and A. Russell. Quantum Walks on the Hypercube. *RANDOM 2002, LNCS 2483*, pp. 164–178, April 2002.
- [63] S. Hoyer. *Quantum random walk search on satisfiability problems*. A thesis for the degree of doctor of philosophy, Swarthmore College ,Department of Physics and Astronomy, 2008.
- [64] J. Kempe. Quantum random walks: An introductory overview. *Contemporary Physics*, **44**:307–327, July 2003.
- [65] S.D. Berry and J.B. Wang. Quantum-walk-based search and centrality. *Physical Review A*, **82**:042333, October 2010.
- [66] B. Hein and G. Tanner. Quantum search algorithms on the hypercube. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **42**:085303, February 2009.
- [67] McMahan, David. *Quantum computing explained*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, IEEE Computer Society, 1 ed. , 2008.
- [68] Zettili, Nouredine. *Quantum Mechanics Concepts and Applications*. John Wiley and Sons, Ltd., Publication, second ed. , 2009.
- [69] V. Potoček , A. Gábris , T. Kiss and I. Jex. Optimized quantum random-walk search algorithms on the hypercube. *Physical Review A*, **79**:012325, January 2009.
- [70] D. Meyer From quantum cellular automata to quantum lattice gases. *Journal of Statistical Physics*, **85**:551–574, December 1996.

- [71] A. Ambainis, E. Bach , A.Nayak , A.Vishwanath and J. Watrous. One-dimensional quantum walks. in *Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing - STOC '01*, pp. 37–49, New York, New York, USA, 2001. ACM Press.
- [72] M. Hillery , J. Bergou and E. Feldman. Quantum walks based on an interferometric analogy. *Physical Review A*, **68**:032314, September 2003.
- [73] D. Evans, J. Holt, C. Jones K. Klintworth B. Parshall O. Pfister and Ward, H. Quantum walks on graphs and quantum scattering theory. *Coding Theory and Quantum Computing, Contemporary Mathematics*, **381**:71, 2005.
- [74] H. Krovi and T. Brun Quantum walks on quotient graphs. *Physical Review A*, **75**:062332, June 2007.
- [75] M. Hillery , D. Reitzner , and V. Bužek. Searching via walking: How to find a marked clique of a complete graph using quantum walks. *Physical Review A*, **81**:062324, June 2010.
- [76] E. Feldman and M. Hillery. Scattering theory and discrete-time quantum walks. *Physics Letters A*, **324**:277–281, April 2004.
- [77] D. Reitzner, M. Hillery , E. Feldman and V. Bužek. Quantum searches on highly symmetric graphs. *Physical Review A*, **79**:012323, January 2009.
- [78] S. Cottrell and M. Hillery. Finding Structural Anomalies in Star Graphs Using Quantum Walks. *Physical Review Letters*, **112**:030501, January 2014.
- [79] S. Cottrell. Finding Structural Anomalies in Star Graphs Using Quantum Walks: A General Approach. p. 57, April 2014.
- [80] E. Feldman , M. Hillery, H.W. Lee , D.Reitzner, H. Zheng and V. Bužek. Finding structural anomalies in graphs by means of quantum walks. *Physical Review A*, **82**:040301, October 2010.
- [81] M. Hillery , H. Zheng , E. Feldman, D. Reitzner and V. Bužek. Quantum walks as a probe of structural anomalies in graphs. *Physical Review A*, **85**:062325, June 2012.

-
- [82] F. Andrade , and M. da Luz. Equivalence between discrete quantum walk models in arbitrary topologies. *Physical Review A*, **80**:052301, November 2009.
- [83] B.F. Venancio , F. Andrade and M. da Luz. Unveiling and exemplifying the unitary equivalence of discrete time quantum walk models. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **46**:165302, April 2013.
- [84] F. Andrade and M. da Luz. Green-function approach for scattering quantum walks. *Physical Review A*, **84**:042343, October 2011.
- [85] P. Ribeiro , P. Milman and R. Mosseri. Aperiodic Quantum Random Walks. *Physical Review Letters*, **93**:190503, November 2004.
- [86] A. Schmidt , B. Cheng and M. da Luz. Green functions for generalized point interactions in one dimension: A scattering approach. *Physical Review A*, **66**:062712, December 2002.
- [87] G. Abal , R. Donangelo , F. Marquezino , A. Oliveira and R. Portugal. Decoherence in search algorithms. *arXiv preprint arXiv:0912.1523*, 2009.

Aabstract

The issue of searching was always one of the most important problems in different areas of science. searching an unstructured set of N items requires $O(N)$ queries in the worst case. In the quantum domain, however, Grover's algorithm can perform unstructured search by making only $O(\sqrt{N})$ queries, a quadratic speedup over the classical case. Quantum walk is quantum counterpart of classical Random walk which has a different behavior due to the quantum phenomena such as quantum interference, entanglement and superposition. One of the most important applications of quantum walks is in quantum algorithms designs. we organize our thesis as follows: first of all, we make a short review of classical and quantum walks. We compare the probability distribution and standard deviation of CRW and QW and show that standard deviation in QW is quadratic while classical one is linear which is the most important difference of these two types of walk.. Following the first chapter we express other differences between these two types of walks and introduce an analytical approach to find quantum probability distribution. Also we mentioned one dimensional quantum walk with generalized coin and quantum walk of higher dimensions. In second chapter one can study a brief review on several quantum algorithms, Grover search algorithm in details and proving that how the algorithm leads in quadratic speedup. In chapter three we deal with search algorithm on a hypercube lattice using coined walk and introduce an approach for optimizing the algorithm. In continue we introduce a new walk with discrete evolution, namely scattering walk in which the quantum particle (walker) takes place on the edges of a graph and the graph vertices act as scattering centers. The evolution operator and state of system after certain number of steps for this type of walk and a unitary equivalence between discrete models has been studied. We show that by using an appropriate initial state and certain number of steps, this type of walk can find a structural anomaly in a graph more efficiently than a classical search can. Then we provide a general approach in star graphs which have high symmetries and show that it is possible to find the target item within a better time interval than classical mode through reducing Hilbert space.



دانشگاه شاهرود

Shahrood University
Faculty Of Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Physics

Study of Quantum Walks search Algorithms

Supervisor

Dr. Mostafa Annabestani

by

Ahmad Kaveh

February 2015