

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک هسته‌ای

محاسبه انرژی بستگی ایزوتوپ های

لیتیم

دانشجو:

مهسا قزوینی

استاد راهنما:

دکتر علی اکبر رجبی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۹۲

تقدیم به

به پدر و مادر مهربانم

خدا را بسی سپاسگزارم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پر بار وجودشان بیاسایم و از ریشه های آنها شاخ و برگ گیرم و در سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش کنم. والدینی که وجودشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفته اند و راه رفتن در این وادی زندگی پر فراز و نشیب رابه من آموخته اند. عزیزانی که برایم زندگی کردن و انسان بودن را معنا کردند.

حال این برگ سبز تحفه ای است تقدیم به ایشان

با ژرفترین سپاس ها

- از لطف بی پایان الهی که مرا توفیق تحول دوباره عطا کرد و هدایتگر دورنم را شوق نگاشتن هدیه نمود
- از استاد ارجمند و فرزانه ام جناب آقای دکتر علی اکبر رجبی برای حضور گسترده صداقتش
- و از همه آموزگارانم، دوستان و دوستانانم که بر شادمانی و دانش و آگاهی ام افزوده اند.

تعهد نامه

اینجانب مهسا قزوینی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک هسته ای دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه محاسبه ی انرژی بستگی هسته لیتیم تحت راهنمایی دکتر علی اکبر رجبی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

هسته ها را می توان به کمک تعدادی از ویژگیهای استاتیکی تا حد قابل توجهی توصیف کرد. از مهمترین این ویژگی ها، انرژی بستگی می باشد. درک خواص استاتیکی و دینامیکی و تفسیر آنها بر پایه برهمکنش بین تک تک نوکلئونهای موجود در هسته، یکی از مهمترین اهداف فیزیک هسته ای می باشد. در این پایانامه ابتدا به بررسی ویژگی های هسته می پردازیم. سپس توضیحی راجع به انواع برهم کنش ها و پتانسیل ها می دهیم. به حل دقیق و تحلیلی معادله ی شرودینگر برای سیستم های ۶ ذره ای (به عنوان مثال هسته لیتیم) در حضور پتانسیل های مرکزی مختلف می پردازیم. بدین منظور از روش ابر تقارن استفاده نموده و انرژی بستگی هسته لیتیم را محاسبه می کنیم. انرژی بستگی برای پتانسیل های مختلف را با هم مقایسه می کنیم. تطابق بسیار نزدیک انرژی بستگی محاسبه شده در مدل پیشنهادی ما با مقدار تجربی انرژی بستگی هسته لیتیم نشان دهنده ی آن است که مدل و روش حل به کار گرفته شده از کارایی خوبی برخوردار است.

کلمات کلیدی

معادله شرودینگر، پتانسیل های هسته ای، روش ابر تقارن، انرژی بستگی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

✓ محاسبه انرژی بستگی هسته لیتیم در حضور پتانسیل وود-ساکسون با استفاده از روش ابرتقارن
(ششمین همایش ملی فیزیک دانشگاه پیام نور اصفهان-۱۳۹۲)

فصل اول : مفاهیم

۱-۱	مقدمه	۲
۲-۱	فرمیون ها و بوزون ها	۴
۳-۱	خواص هسته ای	۶
۴-۱	ویژگی های استاتیکی هسته	۹
۴-۱-۱	انرژی بستگی	۱۰
۴-۱-۲	شعاع هسته	۱۳
۴-۱-۳	اسپین هسته	۱۴
۴-۱-۴	پاریته	۱۴
۴-۱-۵	ایزو اسپین	۱۵
۵-۱	خواص عمومی هسته ها	۱۶
۶-۱	ویژگی های استاتیکی پروتون و نوترون	۱۷
۷-۱	نیروهای چهارگانه	۱۸
۸-۱	مدل های هسته ای	۱۹
۸-۱-۱	مروری بر مدل لایه ای هسته ای	۲۰
۸-۱-۲	مدل قطره مایع	۲۳
۸-۱-۳	مدل اپتیکی	۲۴
۸-۱-۴	مدل جمعی	۲۵

فصل دوم : پتانسیل ها و روش های حل معادله شرودینگر

۱-۲	پتانسیل های نوکلئون-نوکلئون	۲۸
۲-۲	مدل نیروی تبادل	۳۰
۲-۲-۱	پتانسیل بارتلت	۳۱
۲-۲-۲	نیروی ماژرونا	۳۱
۲-۲-۳	نیروی هایزنبرگ	۳۲

۳۲	۳-۲ توجیه حضور نیروی تبادل‌ی در هسته ها
۳۴	۴-۲ نظریه یوکاوا و ذره یوکاوا
۳۷	۵-۲ برهم کنش های دو و سه ذره ای
۳۷	۶-۲ پتانسیل شبه حلقوی کراتزر تعمیم یافته
۳۸	۷-۲ پتانسیل وودز-ساکسون
۳۸	۷-۲-۱ پتانسیل وودز-ساکسون استاندارد
۴۰	۸-۲ پتانسیل یوکاوا
۴۱	۹-۲ پتانسیل هولسن عمومی
۴۳	۱۰-۲ پتانسیل هلمن
۴۴	۱۱-۲ روش ابرتقارن
۴۵	۱۱-۲-۱ چگونگی ساخت هامیلتونی و پتانسیل های همتا
۴۷	۱۱-۲-۲ اصول ناوردایی شکل
۴۸	۱۲-۲ کلیات روش NU
۵۰	۱۳-۲ دستگاه مختصات ژاکوبی
۵۱	۱۴-۲ روش های رایانه ای و عددی
۵۲	۱۴-۲-۱ پتانسیل های بین ذره ای و روش های رایانه ای
۵۴	۱۵-۲ حل معادلات دیفرانسیل به روش Runge-Kutta
۵۶	۱۵-۲-۱ مراحل روش R-K4

فصل سوم : لیتیم

۵۸	۱-۳ مقدمه
۵۹	۲-۳ فیزیکی و اتمی
۶۱	۳-۳ شیمیایی و ترکیب ها
۶۱	۴-۳ ایزوتوپ
۶۲	۵-۳ پیشینه ی شناسایی
۶۳	۶-۳ کاربرد

فصل چهارم : محاسبه ی انرژی بستگی ایزوتوپ های لیتیم

۶۶	۱-۴ مقدمه
----	-----------

۶۶ ساکسون - حضور پتانسیل وود
۶۷ 6Li حل برای
۷۰ 7Li حل برای
۷۲ 8Li حل برای
۷۳ 9Li حل برای
۷۳ ${}^{10}Li$ حل برای
۷۴ ${}^{11}Li$ حل برای
۷۴ IQY حل معادله شرودینگر شش ذره ای با پتانسیل
۷۷ هولسن حل معادله شرودینگر شش ذره ای با پتانسیل
۷۹ یوکاوا حل معادله شرودینگر شش ذره ای با پتانسیل
۸۰ اصلاح شده حل معادله شرودینگر شش ذره ای با پتانسیل
۸۲ هلمن حل معادله شرودینگر شش ذره ای با پتانسیل
۸۳ نتیجه گیری
۸۴ مراجع

فهرست شکل ها

- شکل (۱-۱): انرژی بستگی میانگین هر نوکلئون در هسته های سبک..... ۱۱
- شکل (۲-۱): نمودار هسته های پایدار و ناپایدار. هسته های پایدار..... ۱۷
- شکل (۱-۲): سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون- پروتون..... ۳۳
- شکل (۲-۲): مقایسه شکل پتانسیل "تبادل تک پایونی" یوکاوا با پتانسیل کولنی..... ۳۵
- شکل (۳-۲): پتانسیل وودز-ساکسون بر حسب تابعی از r به ازای پارامترهایی خاص..... ۳۸
- شکل (۴-۲): پتانسیل وودز-ساکسون تعمیم یافته..... ۳۹
- شکل (۵-۲): پتانسیل وودز-ساکسون تعمیم یافته ۲..... ۴۰
- شکل (۶-۲): پتانسیل یوکاوا بر حسب تابعی از r بر حسب مقادیری خاص..... ۴۱
- شکل (۷-۲): پتانسیل نمایی بر حسب r (به ازای $\alpha = 5, v_0 = 11$)..... ۴۲
- شکل (۸-۲): پتانسیل هولسن استاندارد بر حسب تابعی از r (به ازای $\alpha = 5, v_0 = 3$)..... ۴۲
- شکل (۹-۲): پتانسیل وودز-ساکسون بر حسب تابعی از r (به ازای $\alpha = 10, v_0 = 20$)..... ۴۳
- شکل (۱-۳): لیتیم..... ۶۰

فهرست جدول ها

- جدول (۱-۱): انرژی بستگی و اسپین و پارینه ی چند هسته سبک..... ۱۲
- جدول (۲-۱): شعاع برخی از هسته های سبک..... ۱۳
- جدول (۳-۱): خواص عمومی هسته ها..... ۱۶
- جدول (۴-۱): ویژگی های استاتیکی پروتون و نوترون..... ۱۸
- جدول (۵-۱): نیروهای بنیادی شناخته شده در طبیعت..... ۱۹
- جدول (۱-۳): ویژگی های ایزوتوپ های لیتیم..... ۶۴
- جدول (۱-۴): انرژی بستگی لیتیم با پتانسیل IQY به ازای ثابتهای پتانسیل مختلف..... ۷۵
- جدول (۲-۴): انرژی بستگی ترازهای برانگیخته با پتانسیل IQY..... ۷۶
- جدول (۳-۴): انرژی بستگی لیتیم با پتانسیل هولسن با $I=0$ ۷۸
- جدول (۴-۴): انرژی بستگی در حالت های برانگیخته با پتانسیل هولسن..... ۷۸
- جدول (۵-۴): انرژی بستگی لیتیم با پتانسیل یوکاوا با $I=0$ ۸۰
- جدول (۶-۴): انرژی بستگی در حالت های برانگیخته با پتانسیل یوکاوا..... ۸۰
- جدول (۷-۴): انرژی بستگی لیتیم با پتانسیل تصحیح شده با $I=0$ ۸۱
- جدول (۸-۴): انرژی بستگی لیتیم با پتانسیل هلمن در $I=0$ ۸۲

فصل اول

مفاهيم

۱-۱ مقدمه

تلاش برای درک ماهیت اساسی ماده، ریشه در تفکرات فیلسوفان یونان باستان دارد یونانیان در سده چهارم پیش از میلاد، معتقد بودند هر نوع ماده را می توان به اجزای کوچکتر و کوچکتر تقسیم کرد تا حدی که دیگر ادامه کار میسر نباشد. در طی ۲۴۰۰ سال بعد نیز، همچنان این نظریه به عنوان اندیشه ای فلسفی باقی ماند تا آنکه پژوهشگران اوایل سده نوزدهم میلادی به کمک روشهای علوم تجربی درباره این مسئله به تحقیق پرداختند و تا به امروز جوابگویی به حس کنجکاوی این بشر کنکاشگر کامل نشده است بلکه روز به روز سوالاتش بیشتر و به مطالعه فیزیک حریص تر می شود و تا کنون جواب سوالاتی مانند این سوال که ماهیت نیروی قوی بین نوکلئون ها چیست به طور دقیق کامل نشده است.

سوال جالبی که می توان مطرح کرد این است که مطالعه هسته و فیزیک هسته ای به چه طریقی در زندگی ما و دنیای اطرافمان اثر می گذارد؟ مهمترین نقش هسته اتم، اثر غیر مستقیم آن به عنوان مرکز اتم می باشد. هر اتم شامل یک قسمت میانی کوچک و سنگین می باشد که این قسمت کوچک تعداد الکترونها را برای تشکیل اتم را تعیین می کند و این به نوبه خود کلیه رفتارهای شیمیایی و خواص فیزیکی مواد را مشخص می کند و در برخی از موارد ساختمان هسته، خواص و واپاشی آن و واکنش هایی که انجام می دهد اثرات مستقیم و تعیین کننده ای در جهان دارند. از طرف دیگر در هر مکانی فیزیک وقوانین آن درگیر است و انسان را قادر می سازد که پدیده های طبیعی را توجیه و تجزیه و تحلیل کند و حتی در قدم های بزرگتر پیشامدهای بعدی را پیش گوئی کند. از کهکشان ها سیارات، ستارگان و کوتوله ها گرفته تا درون ذرات اتم هسته و کوارک همه و همه با فیزیک و قوانین آن پابرجا هستند.

در این میان خود فیزیک نیز شاخه های متعددی دارد که هر یک نقش بسزایی را ایفا می کنند. یکی از مهمترین شاخه ها، فیزیک هسته ای می باشد. پس از کشف نوترون توسط چادویک در سال ۱۹۳۲ از نظر علمی پذیرفته شد که هسته ای با عدد اتمی Z از Z تا پروتون و N تا نوترون تشکیل شده است تا این زمان تصور می شد که پروتون و نوترون ذرات بنیادی اند اما امروزه همگان می دانیم که اینگونه نیست بلکه آنها خود از اجزای کوچکتری تشکیل شده اند.

سال ۱۸۹۶ را می توان زمان آغاز مبحث فیزیک هسته ای دانست. در این سال بکرل پرتو - زایی ترکیب های اورانیوم را کشف کرد پس از آن دانشمندان زیادی با انجام آزمایش های متعدد و ارائه مدل ها و نظریات متنوع در چارچوب مکانیک کوانتومی به گسترش و تکمیل این مبحث پرداختند. هسته اتم برای اولین بار در سال ۱۹۱۱ در آزمایشی که رادرفورد و دستیارانش با استفاده از پراکندگی ذرات آلفا توسط اتم انجام دادند کشف شد. رادرفورد متوجه شد که پراکندگی حاصل در صورتی قابل توجیه است که اتم از یک هسته کوچک سنگین با بار مثبت تشکیل شده باشد به طوری که الکترونیایی در مدارهایی در اطراف این هسته در حرکت باشند. پس از آن، تحقیقات و فرضیه ها و اختراعات و ابداعات مهمی در فیزیک هسته ای به ظهور رسید از آن جمله می توان به ظهور مکانیک کوانتومی، فرضیه نوترینو، کشف دوتریم، کشف نوترون، کشف شکافت هسته ای، کشف مزون π ، فرضیه شگفتی، فرضیه مدل جمعی بر ساختار هسته ای، مشاهده نقض CP در واپاشی k^0 ، فرضیه مدل کوارک برای هادرونها، کشف ذره J/ψ و تائید کوارک افسونگر، کشف بوزون های ضعیف w^{\pm}, z^0 را عنوان کرد. در هر حال به روشنی معلوم است که مطالعات تجربی و نظری فیزیک هسته ای نقش برجسته ای در توسعه فیزیک قرن بیست و یکم ایفا کرده است در نتیجه همین زحمات و تلاش هاست که ما امروزه درک نسبتا خوبی از خواص هسته ها و ساختاری که منشا این خواص است به دست آورده ایم. اکتشافات دهه های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ نشان دادند علاوه بر نوکلئونها مرتبه دیگری از ساختار ماده وجود دارد که از هسته هم بنیادی تر و ابتدائی تر است. امروزه بررسی و مطالعه اینگونه

ذرات را که عناصر اصلی ساختار هسته ای هستند را در شاخه خاصی به نام فیزیک ذرات بنیادی یا فیزیک انرژی بالا ادامه می دهند.

فیزیک هسته ای از طرفی به فیزیک اتمی و از طرف دیگر به فیزیک ذرات بنیادی متصل است. تحقیق در خواص هسته ها و قوانین حاکم بر ساختار هسته ای زمینه مهمی را در پژوهش های فیزیک هسته ای بنیان نهاده است.

می توان برای فیزیک هسته ای سه نقش عمده را در نظر گرفت:

الف) تحقیق و تفحص در قلمرو ذرات ماده و برهمکنش بین آنها

ب) مطالعه و تفسیر خواص هسته ای

ج) طراحی و پیش بینی روش ها و ابزارهایی برای مسائل پیش رو جهت خدمت به جامعه بشری.

۱-۲ فرمیون ها و بوزون ها

فیزیک ذرات بنیادی جهان را بر اساس فرمیون های بنیادی توصیف می کند. فرمیون ها ذراتی هستند که از اصل طرد پائولی پیروی می کنند. اگر مجموعه ای از فرمیون های یکسان بر حسب توابع موج تک ذره ای بیان شوند هیچ دو فرمیونی نمی توان یافت که توابع موج یکسان داشته باشند. به عنوان مثال الکترون ها فرمیون اند. فرمیون ها به دلیل اینکه از آمار فرمی-دیراک (F-D) در مکانیک آماری تبعیت می کنند به این نام خوانده می شوند [۱].

رابطه مشهودی هم بین اندازه حرکت مداری ذاتی یا اسپین ذره و آمار آن وجود دارد. برای فرمیون ها

$$\text{مقدار اسپین نیم صحیح است } \dots, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}.$$

بوزون ها ذراتی هستند که از آمار بوز-انیشیتین (B.E) پیروی می کنند و با این ویژگی مشخص می شوند که هر تعداد از این ذرات می توانند تابع موج تک ذره ای یکسانی داشته باشند. بنابراین در مورد بوزون ها امکان تشکیل امواج همدوس با دامنه ماکروسکوپی وجود دارد و چنین امواجی را می توان با

تقریب خوبی به طور کلاسیکی بیان کرد. همچنین برای بوزون ها مقدار اسپین یکی از مقادیر صحیح ۱،۲،۳... می باشد. به عنوان مثال فوتون ها بوزون هستند اگر بخواهیم بنیادی تر بحث کنیم باید گفت این ویژگی پیامد تقارن های ممکن تابع موج سیستمی از ذرات یکسان است که مختصات هر دو تای آن در تبادل با یکدیگرند. در مورد فرمیون ها تابع موج تغییر علامت می دهد و کاملا نامتقارن است. ارتباط بین اسپین و آمار تا آنجا که می دانیم یک قانون دقیق طبیعت بدون هیچ استثنای شناخته شده ای می باشد. یک نتیجه مهم از اینکه الکترون فرمیون است آن است که الکترون باید در اصل طرد پائولی صدق کند. در حقیقت پایداری جهان بر اساس اصل طرد پائولی و وجود فرمیون ها می باشد. اگر فرمیون ها وجود نداشتند جدول تناوبی مندلیف نیز بی معنا می بود. اصل طرد پائولی سنگ بنای فیزیک اتمی و مولکولی و تمام شیمی می باشد. فرمیون ها بیشتر منزوی هستند و کمتر به اجتماع علاقه مندند. آنها از یکدیگر دوری می جویند تا مطمئن شوند که در حالت یکسانی قرار نگرفته اند. در مقابل بوزون ها بسیار اجتماعی اند. آنها می خواهند در حالت یکسانی قرار گیرند. اختلاف بین فرمیون ها و بوزون ها به طور برجسته ای در دماهای پائین تجلی پیدا می کند. برای سیستمی متشکل از بوزون ها نظیر 4He مایع تمام ذرات تمایل دارند که در دماهای بسیار پائین به حالت پایه یکسانی بروند. این پدیده را به نام چگالش بوز- انیشتین می شناسیم خصوصیتی که به وسیله سیستم های متشکل از فرمیون ها پدیدار نمی شود.

فرمیون ها از طریق میدان هایی که خود سرچشمه آن هستند با یکدیگر برهمکنش می کنند. ذرات مرتبط با این برهمکنش همان بوزون ها هستند. مثال بسیار آشنای این موضوع الکترون است که فرمیونی بنیادی می باشد الکترون حامل بار الکتریکی e بوده و این بار میدان الکترومغناطیسی E, B را بوجود می آورد که نیرویی بر دیگر بارهای الکتریکی وارد می کنند. در واقع نخستین بار آمار بوز- انیشتین برای فوتون ها استفاده شد. در ادامه می خواهیم ویژگی های هسته ها را مورد بررسی قرار دهیم.

۳-۱- خواص هسته ای

فیزیک هسته ای مطالعه ساختار هسته و برهم کنش بین اجزای تشکیل دهنده آن است. هسته ها هم مانند بسیاری از سیستم های پیرو قوانین مکانیک کوانتومی، جسمی پیچیده و اسرار آمیز است که توصیف رفتار و خواص آن خیلی دشوارتر از اجسام ماکروسکوپی است. مثلا توصیف کامل یک هسته میان وزن ۵۰ نوکلئونی بر حسب کلیه برهم کنش های بین نوکلئون های موجود در هسته مستلزم ۵۰ عبارت یا در حدود 10^{64} جمله است [۲]. میتوان هسته ها را به کمک تعدادی از پارامترهای هسته ای، تا حد قابل توجهی توصیف کرد. این پارامترها به دو گروه عمده تقسیم می شوند: گروه اول، خواص استاتیکی^۱ هسته هستند که عبارتند از: بارالکتریکی، انرژی بستگی، جرم، شعاع، تکانه زاویه ای، پاریته، گشتاور دو قطبی مغناطیسی، گشتاور چار قطبی الکتریکی و انرژی حالت های برانگیخته. گروه دوم خواص دینامیکی^۲ هسته ها مثل: احتمال واپاشی و احتمال واکنش آنها هستند. درک و تفسیر خواص استاتیکی و دینامیکی هسته ها بر پایه برهم کنش بین تک تک نوکلئون های موجود در هسته، موضوع بسیار مهمی است که هر متخصص فیزیک هسته ای باید با آن دست و پنجه نرم کند. مطالعه فیزیک هسته ای را با بررسی برهم کنش بنیادی موجود در طبیعت آغاز می کنیم که در بخش های آینده مورد بررسی قرار می گیرد. هسته مجموعه ای مقید از نوترون ها و پروتون ها است ${}^A_Z X$ نشان دهنده هسته اتم عنصر شیمیایی X است که با A نوکلئون که Z تای آن پروتون و مقدار N= A-Z تای آن نوترون می باشد. به $A=Z+N$ عدد جرمی هسته می گویند. هسته هایی که تنها از لحاظ تعداد نوترون تفاوت دارند ایزوتوپ^۳ می گویند. به هسته هایی با A یکسان اما Z متفاوت ایزوبار^۴ گویند [۳]. رسیدن به یک تفسیر مناسب برای ایزوتوپ نیاز به گذشت زمان داشت. در ابتدا تصور بر این بود که هسته متشکل از پروتون ها و الکترون هاست و تعداد پروتون ها حدودا دو برابر

¹ Static Properties

² Dinamical Properties

³ Isotope

⁴ Isobar

تعداد الکترون هاست. با اینکه این موضوع مبنای آماری داشت اما تصور می شد با مشاهده گسیل الکترون از بعضی هسته های رادیو اکتیو، پشتیبانی می شود. همچنین انتظار می رفت که طول موج دوبروی^۵ هر الکترون دورن هسته، از مرتبه اندازه هسته باشد. این می طلبید که انرژی الکترون گسیلی (پرتوی β) از مرتبه بالاتر از 10 MeV باشد در حالیکه مقادیر اندازه گیری های تجربی انرژی تابش β ، فقط از مرتبه 2 MeV بود. ابهام فوق در سال 1932 با کشف نوترون توسط چادویک^۶ برطرف شد. این کشف به نقطه عطفی در پیشرفت فیزیک هسته ای تبدیل شد. نوترون به عنوان یک ذره دیگر در کنار پروتون در نظر گرفته شد که با هم هسته را می ساختند. آنگاه ایزوتوپ های مختلف به عنوان هسته هایی با تعداد پروتون برابر و نوترون متفاوت در نظر گرفته شدند. این مدل «نوترون – پروتون» بعدها با تعداد مختلفی از واکنش های هسته ای تایید شد [۴]. طبیعت دقیق نیروهای بستگی هسته ای، ناشناخته است. مع هذا این نیروها باید دارای برد کوتاه باشند و قوی تر از نیروهای الکتروستاتیکی که تمایل به دور کردن پروتون های همنام دارند باشند. به علاوه ماهیت این نیروها باید چنان باشد که از ترکیب ذرات با یکدیگر و به وجود آوردن یک جسم منسجم جلوگیری کند. از طرف دیگر نوترون های بدون بار نیز باید به طور محکم پیوند یابند. کلید درک نیروی قوی، که هسته اتم را نگه می دارد، ممکن است در ساختمان داخلی نوترون ها و پروتون ها نهفته باشد. نوترون ها و پروتون ها هر دو نسبت به نیروهای الکترومغناطیسی حساس اند. خواص نیروهای بین نوکلئون ها را می توان به دو شکل استخراج کرد:

الف) روش مستقیم: با مطالعه فرایندهای پراکندگی (برخوردهای میان دو نوکلئون)

ب) روش غیر مستقیم: با مطالعه سیستم های مقید مثل دوترون (هسته ها)

ویژگی های نیروی بین نوکلئون ها را بطور خلاصه به صورت زیر بیان می کنیم [۲،۵،۶].

⁵ L.de Broglie

⁶ J.Chadwick

۳-۱-۱ بر هم کنش بین دو نوکلئون از پایین ترین مرتبه پتانسیل مرکزی جاذبه حاصل می شود. این نیرو غالباً جاذبه است، در غیر این صورت دافعه ی کولنی بین نوکلئون ها موجب فروپاشی هسته می گردید و هسته های پایدار نمی توانستند وجود داشته باشند و همچنین این نیرو در برابر سایر نیروها بسیار قویتر است.

۳-۱-۲ برهم کنش بین نوکلئون- نوکلئون در فواصل خیلی کوتاه دافعه می شود. نیروی هسته ای در فواصلی که در حدود ابعاد اتمی است به حدی ضعیف می شود که می توان از آن صرفنظر کرد.

۳-۱-۳ نیروهای هادرونی اشباع پذیرند، اگر هر نوکلئون، تک تک نوکلئون های دیگر را جذب می کرد تعداد $\frac{A(A-1)}{2}$ زوج بر هم کنش متمایز وجود می داشت. در آن صورت انتظار می رفت که انرژی بستگی با $A(A-1) \approx A^2$ متناسب باشد و تمام هسته ها قطری برابر با برد نیروی هسته ای داشته باشند. هر دو پیش بینی یعنی: انرژی بستگی متناسب با A^2 و حجم هسته ای ثابت برای هسته های $A > 4$ شدیداً با تجربه مخالفت می کند. حجم و انرژی بستگی برای اغلب هسته ها با عدد جرمی A متناسب اند. پس هر ذره فقط تعداد محدودی از سایر ذرات اطراف خود را جذب می کند و نوکلئون های دیگر یا تحت تأثیر قرار نمی گیرند یا دفع می شوند.

۳-۱-۴ نیروی بین نوکلئون ها تقریباً مستقل از بار الکتریکی است.

۳-۱-۵ بر هم کنش نوکلئون - نوکلئون قویاً وابسته به اسپین است. این نتیجه گیری از عدم موفقیت مشاهده ی حالت مقید تک تایه دوترون و همچنین از اندازه گیری اختلاف سطح مقطع های حالت تک تایه و سه تایه حاصل می شود.

۳-۱-۶ پتانسیل بین نوکلئونی شامل یک جمله غیر مرکزی به نام پتانسیل تانسوری (غیر مرکزی) است [۲،۵،۶]. عمده ترین دلیل وجود نیروی تانسوری از مشاهده گشتاور چار قطبی در حالت پایه دوترون حاصل می شود. حالت پایه در یک پتانسیل مرکزی همیشه یک حالت S است بنابراین وجود

حالت d در دوترون حاکی از این واقعیت است که نیروی هسته ای به طور خالص نمی تواند مرکزی باشد.

۳-۱-۷ نیروهای هادرونی مستقل از بار هستند و پس از تصحیح برهمکنش الکترومغناطیسی نیروهای p-n و p-p بین نوکلئون هایی که در یک حالت باشند یکسان است.

۳-۱-۸ نیروی هادرونی به سرعت نسبی نوکلئون ها وابسته است. از آزمایشات برخورد شواهدی وجود دارد مبنی بر اینکه نیروی نوکلئون- نوکلئون به سرعت نسبی نوکلئون ها وابسته است.

۳-۱-۹ نیروی هادرونی در فواصل کوتاه تبدیل به دافعه می شود. اگر به طور ساده چگالی هسته ای را مورد مطالعه قرار دهیم متوجه می شویم که رشد هسته در اثر افزایش نوکلئون ها به صورتی است که چگالی مرکزی آن تقریباً ثابت است از این رو باید عاملی وجود داشته باشد که از تجمع و نزدیک شدن بیش از حد نوکلئون ها جلوگیری می کند.

۴-۱ ویژگی های استاتیکی هسته

ویژگی های هسته را که با گذشت زمان مقدار آنها تغییر نمی کند و ثابت است ویژگی های استاتیکی هسته می گویند. ویژگی های استاتیکی هسته شامل موارد زیر می باشد [۲]:

۱- انرژی بستگی هسته

۲- شعاع هسته

۳- اسپین هسته

۴- پارایته هسته

۵- ایزو اسپین هسته

۶- جرم هسته

۷- گشتاور دو قطبی مغناطیسی هسته

۸- چهار قطبی الکتربیکی هسته

از میان موارد بالا هدف ما در این کار بدست آوردن انرژی بستگی می باشد.

۴-۱-۱ انرژی بستگی

انرژی بستگی B یک هسته اختلاف بین جرم هسته ای و مجموع جرم اجزای تشکیل دهنده آن می باشد:

$$B(A, Z) = Nm_n c^2 + Zm_p c^2 - m(A, Z)c^2 \quad (۱-۱)$$

انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون با عبارت $\frac{B}{A}$ بیان می شود که خود تابعی از A می باشد. همانگونه

که در شکل (۱-۱) نشان داده شده است مقدار $\frac{B}{A}$ با افزایش A در هسته های سبک افزایش می یابد

و به یک پهن شدگی در حدود $55-60 \approx A$ می رسیم و در ادامه آن به آرامی به عنوان تابعی از A کاهش می یابد.

با توجه به شکل متوجه می شویم که با همجوشی هسته های سبک یا با شکافت هسته های سنگین

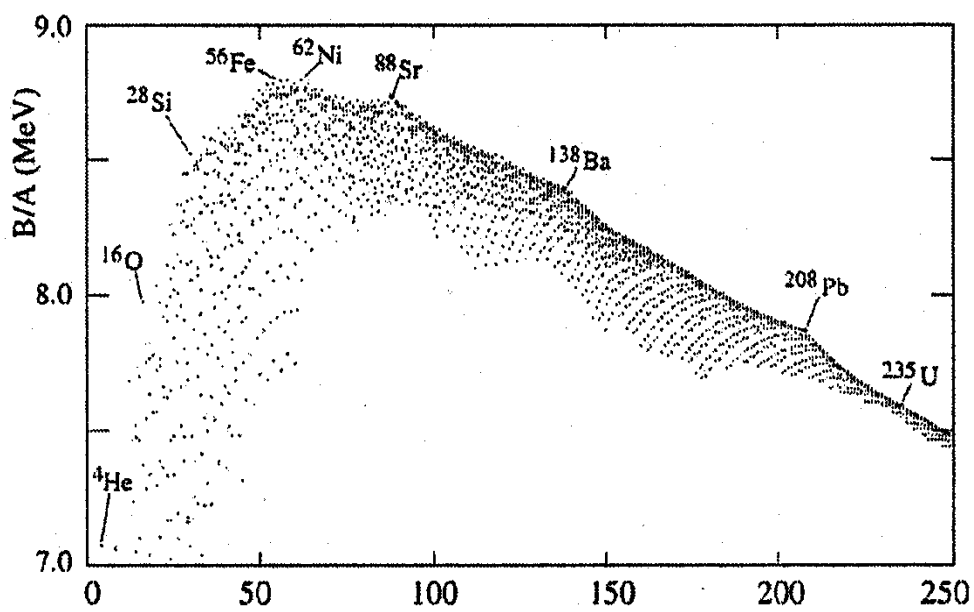
انرژی آزاد میشود. در هسته های پایدار که خیلی سبک نیستند ($A > 12$) انرژی بستگی B در

تقریب اول با عدد جرمی متناسب است یعنی $[7]$:

$$B(A, Z) \approx A \times 8 \text{ MeV} \quad (۲-۱)$$

و به طور دقیقتر:

$$7.7 \text{ MeV} < \frac{B(A, Z)}{A} < 8.8 \text{ MeV} \quad \text{for} \quad 12 < A < 225 \quad (۳-۱)$$



شکل (۱-۱): انرژی بستگی میانگین هر نوکلئون در هسته های سبک [۷]

همچنین در ادامه کار انرژی بستگی و پاریته ی چند هسته سبک آورده شده است.

جدول (۱-۱): انرژی بستگی و اسپین و پاریتته ی چند هسته سبک [۱]

اسپین و پاریتته	انرژی بستگی بر نوکلئون (MeV)	انرژی بستگی آخرین نوکلئون (MeV)	انرژی بستگی (MeV)	هسته
1^+	۱,۱	۲,۲	۲,۲۲	2_1H
$\frac{1^+}{2}$	۲,۸	۶,۳	۸,۴۸	3_1H
0^+	۷,۱	۱۹,۸	۲۸,۳۰	4_1He
$\frac{3^-}{2}$	۵,۵	-۱,۰	۲۷,۳۴	5_1He
1^+	۵,۳	۴,۷	۳۱,۹۹	6_3Li
$\frac{3^-}{2}$	۵,۶	۷,۳	۳۹,۲۵	7_3Li
0^+	۷,۱	۱۷,۳	۵۶,۵۰	8_4Be
$\frac{3^-}{2}$	۶,۵	۱,۷	۵۸,۱۶	9_4Be
3^+	۶,۵	۶,۶	۶۴,۷۵	${}^{10}_5B$
$\frac{3^-}{2}$	۶,۹	۱۱,۵	۷۶,۲۱	${}^{11}_5B$
0^+	۷,۷	۱۶,۰	۹۲,۱۶	${}^{12}_6C$
$\frac{1^-}{2}$	۷,۵	۵,۰	۹۷,۱۱	${}^{13}_6C$
1^+	۷,۵	۷,۶	۱۰۴,۶۶	${}^{14}_7N$
$\frac{1^-}{2}$	۷,۷	۱۰,۸	۱۱۵,۴۹	${}^{15}_7N$
0^+	۸,۰	۱۲,۱	۱۲۷,۶۲	${}^{16}_8O$

۴-۱-۲ شعاع هسته

با وجود اینکه اثرات کوانتومی درون هسته بسیار زیاد است ولی می توان نشان داد که حجم v هسته با تقریب خوبی با عدد جرمی A متناسب است و هر نوکلئونی حجمی در حدود $v_0 = 7.2 \text{ fm}^3$ را اشغال می کند. در تقریب اول هسته پایدار کروی است و حجمی در حدود $v \cong Av_0$ را اشغال می کند که در آن شعاع هسته از رابطه زیر بدست می آید [۷]:

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad r_0 = 1.2 \text{ fm} \quad (۴-۱)$$

می توان نشان داد که توزیع فضایی نوکلئون های درون هسته ها با پراکندگی الکترون ها مشخص می شود. الکترون ها به درون هسته نفوذ می کنند و مسیر حرکت آنها تعیین می شود.

در جدول (۲-۱) شعاع برخی هسته ها که توسط پراکندگی الکترون-نوکلئون مشخص شده است

آورده شده است. که در آن r_{ms} از رابطه $(r_{ms})^2 = \frac{\int d^3r r^2 \rho(r)}{\int d^3r \rho(r)}$ مشخص می شود و R از رابطه

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad r_0 = 1.2 \text{ fm} \quad (۵-۱)$$

جدول (۲-۱) شعاع برخی از هسته های سبک که از پراکندگی الکترون-نوکلئون بدست آمده است [۸]

هسته	$(\text{fm}) r_{ms}$	$(\text{fm}) R$	$(\text{fm}) \frac{R}{A^{\frac{1}{3}}}$	هسته	$(\text{fm}) r_{ms}$	$(\text{fm}) R$	$(\text{fm}) \frac{R}{A^{\frac{1}{3}}}$
^1H	۰,۷۷	۱,۰	۱,۰	^{16}O	۲,۶۴	۳,۴۱	۱,۳۵
^2H	۲,۱۱	۲,۷۳	۲,۱۶	^{24}Mg	۲,۹۸	۳,۸۴	۱,۳۳
^4He	۱,۶۱	۲,۰۸	۱,۳۱	^{40}Ca	۳,۵۲	۴,۵۴	۱,۳۲
^6Li	۲,۲۰	۲,۸	۱,۵۶	^{122}Sb	۴,۶۳	۵,۹۷	۱,۲۰
^7Li	۲,۲۰	۲,۸	۱,۴۹	^{181}Ta	۵,۵۰	۷,۱۰	۱,۲۵
^9Be	۲,۲	۲,۸۴	۱,۳۷	^{209}Bi	۵,۵۲	۷,۱۳	۱,۲۰
^{12}C	۲,۳۷	۳,۰۴	۱,۳۳				

۴-۱-۳ اسپین هسته

هر حالت هسته را با یک عدد کوانتومی اسپین منحصر بفرد I مشخص می کنند که نمایانگر تکانه کل (مداری و ذاتی) تمام نوکلئون های هسته می باشد. بردار I را می توان به صورت حاصل جمع مولفه های مداری و ذاتی تکانه زاویه ای در نظر گرفت:

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^A (\vec{I}_i + \vec{S}_i) = \vec{L} + \vec{S} = \sum_{i=1}^A \vec{J}_i \quad (۶-۱)$$

و همچنین عدد کوانتومی I رابطه ساده ای با بردار \vec{I} دارد:

$$|\vec{I}| = \sqrt{I(I+1)}\hbar \quad (۷-۱)$$

$$I_z = m_I \hbar \quad (m_I = I, I-1, \dots, -I+1, -I)$$

تنها علت اینکه در رابطه (۶-۱) از محاسبه بردارها و همچنین از ساختمان داخلی هسته صرف نظر شده است می تواند این باشد که برهمکنشی که هسته تحت تاثیر آن است مانند میدان های الکترومغناطیسی ایستا به اندازه کافی قوی نیست که ساختمان داخلی را تغییر دهد یا جفت شدگی نوکلئون ها را بگسلد.

۴-۱-۴ پارите

هامیلتونی های قوی هسته ای و الکترو مغناطیسی، پارите را پایسته نگه می دارند. بنابراین ویژه حالت ها به دو دسته از حالات که هر کدام پارите مشخص $\pi = +1$ یا $\pi = -1$ دارند تقسیم می شوند و هامیلتونی، این دو دسته را با هم مخلوط نمی کند. در ساختار هسته ای، پارите کل، از پارите ذاتی نوکلئون $\pi_{int} = +1$ و پارите مربوط به اندازه حرکت زاویه ای مداری نوکلئون $\pi_l = (-1)^l$ نشات می گیرد. پارите کل هسته، برابر حاصلضرب پارите کل نوکلئون های آن است

$$\pi = \prod_i \pi_{int}(i) \pi_l(i) = \prod_i (-1)^{l_i} \quad (۸-۱)$$

و معمولا حالت های پایه و ویژه حالت ها به گونه ای انتخاب می شوند که پارите مشخصی داشته باشند. هامیلتونی ضعیف هسته ای، پارите را پایسته نگه نمی دارد. به عنوان یک اختلال، عناصر

ماتریسی هامیلتونی ضعیف نوعاً از مرتبه چند eV یا کمتر هستند. بنابراین اختلال پارینه را میتوان از نظریه اختلال مرتبه اول محاسبه کرد [۸].

۴-۱-۵ ایزو اسپین

استقلال نیروهای هسته ای از بار منجر به معرفی عدد کوانتومی پایسته جدیدی به نام ایزواسپین می شود. در سال ۱۹۳۲، هایزنبرگ پروتون و نوترون را به عنوان دو حالت از یک ذره، نوکلئون، در نظر گرفت. برای توصیف دو حالت نوکلئون، یک فضای ایزو اسپینی معرفی می شود به طوریکه دو حالت یک ذره معمولی با اسپین $1/2$ نه به عنوان دو ذره، بلکه به صورت دو حالت از یک ذره تلقی می شود. بدین ترتیب پروتون به صورت حالت بالا و نوترون به صورت حالت پایین نوکلئون در نظر گرفته می شود. این وضعیت را به صورت یک کمیت جدید، ایزو اسپین T معرفی می کنند. نوکلئونی که دارای ایزواسپین $1/2$ است، تعداد $2I+1=2$ سمتگیری ممکن در فضای ایزو اسپینی دارد. بنابراین به هر دو نوکلئون، ایزو اسپین $1/2$ نسبت می دهیم که پروتون تصویر $T_z = 1/2$ و نوترون تصویر $T_z = -1/2$ آن است. عملگر ایزواسپین t برای درجات آزادی ایزو اسپین، شبیه عملگر اسپین s برای درجات آزادی اسپین است. برای چندین نوکلئون، ایزو اسپین کل و تصویر Z اش با روابط زیر داده می شود

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \sum_i \vec{t}(i) \\ T_z &= \sum_i t_z(i) \end{aligned} \quad (9-1)$$

تعداد $2T+1$ مقدار برای T_z ، از $T_z = -T$ تا $T_z = +T$ با گام های صحیح، وجود دارد. برای هسته

$$\text{ای با تعداد } Z \text{ پروتون و تعداد } N \text{ نوترون، } T_z = \frac{N-Z}{2} \text{ است [۹].}$$

۵-۱ خواص عمومی هسته ها

هسته حالت مقید سیستم شامل نوکلئون ها را می گویند همانگونه که اتم حالت مقید سیستم شامل نوکلئون ها و الکترون ها می باشد. واحدهایی که در فیزیک اتمی و فیزیک هسته ای بکار برده می شود باهم متفاوت می باشند [۷].

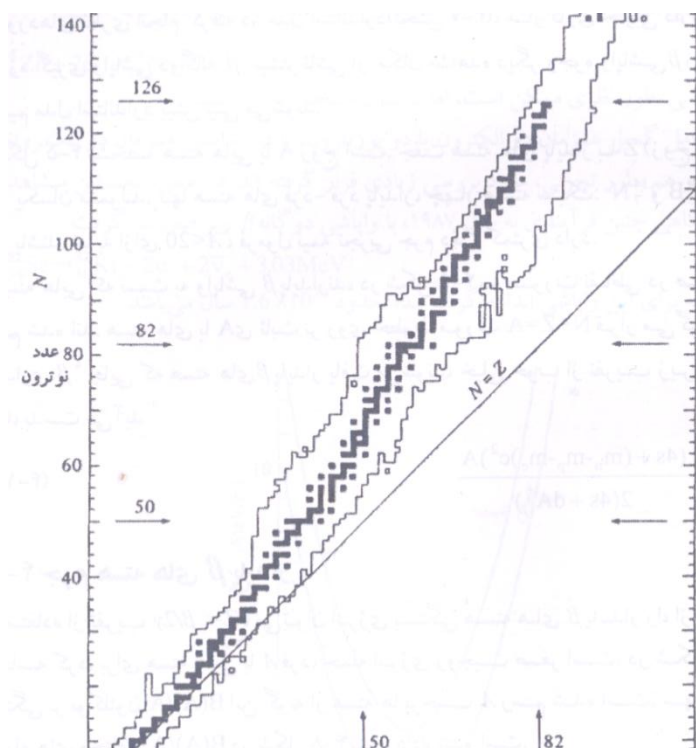
جدول (۱-۳) خواص عمومی هسته ها

	اتم	نوکلئون
فاصله	10^{-10} m	10^{-15} m
انرژی	eV	MeV

اندازه هسته ای 10^{-5} مرتبه کوچکتر از اندازه اتمی می باشد و اندازه انرژی بستگی هسته ای 10^6 مرتبه بزرگتر از انرژی های اتمی می باشد و همین اختلافات منشأ قدرت نسبی نیروهایی است که باعث انسجام اتم ها و هسته ها می باشد. قابل ذکر است که انرژی های بستگی هسته ای هنوز هم کوچک است زیرا آنها فقط ۱٪ انرژی سکون نوکلئون می باشد. از آنجایی که انرژی بستگی نوکلئون از مرتبه انرژی جنبشی آن $\frac{1}{2}mv^2$ می باشد پس با اطمینان می توان گفت نوکلئون ها با سرعت غیر نسبیتی در درون هسته حرکت می کنند $\frac{v^2}{c^2} \cong 10^{-2}$. هر هسته با عدد اتمی Z که تعداد پروتون های هسته و N تعداد نوترون ها می باشد مشخص می شود. هزاران ترکیب متفاوت از N و Z وجود دارد ولی تعداد محدودی از آنها از لحاظ پایداری و ناپایداری برای محققین حائز اهمیت می باشد.

در شکل (۱-۲) هسته های پایدار و هسته های ناپایدار بسیار دراز عمر (مربع های سیاه رنگ) در امتداد خاصی قرار می گیرند که به آن خط پایداری می گویند. هسته ای که بالاتر یا پایین تر از خط پایداری قرار بگیرد دارای جرم اتمی بزرگ تر از مقدار کمینه متناظر به عدد جرمی A خاص خودش

است و در نتیجه باید ناپایدار باشد. یک تحقیق جالب در فیزیک هسته ای تولید هسته های جدید است و این احتمال را باید بیشتر در طرفین هسته های پایدار جستجو کرد.



شکل (۲-۱): نمودار هسته های پایدار و ناپایدار. هسته های پایدار (و ناپایدار بسیار دراز-عمر) با مربع های سیاه نشان داده شده اند.

۶-۱ ویژگی های استاتیکی پروتون و نوترون

همه هسته ها از دو نوع ذره ی پروتون و نوترون موسوم به نوکلئون تشکیل شده اند. برخی از خواص استاتیکی نوکلئون ها در جدول (۴-۱) آورده شده است.

با توجه به جدول زیر نوترون بدون بار است اما دارای گشتاور مغناطیسی است و این اولین دلیلی است که نشان می دهد نوکلئون ها ذرات بنیادی نقطه ای شکلی مانند الکترون نیستند، بلکه ساختاری داخلی دارند.

جدول (۱-۴): ویژگی های استاتیکی پروتون و نوترون [۱]

	پروتون	نوترون
بار	$1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$	0 C
جرم سکون	$1.67252 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 938.256 MeV	$1.67482 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 939.550 MeV
اسپین	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
مولفه سوم ایزواسپین	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

۷-۱ نیروهای چهارگانه

چهار نیروی اصلی در طبیعت شناخته شده است: قوی، الکترومغناطیس، ضعیف و گرانش. به هر یک از این نیروها یک تئوری فیزیکی تعلق می گیرد. البته تئوری کلاسیکی غیر نسبیتی گرانش قانون های جاذبه نیوتون است و نتیجه تعمیم نسبیتی آن، تئوری نسبیت عام انیشتین است. برای دستیابی به یک تئوری کوانتومی گرانش، باید هنوز کار کرد چون گرانش خیلی ضعیف است، ولی فعلا، غالبا فرض می شود که نقش مهمی در فیزیک هسته ای ندارد.

تئوری فیزیکی که نیروهای الکترومغناطیس را توصیف می کند، الکترودینامیک نامیده می شود. فرمول کلاسیک الکترودینامیک صدها سال پیش بوسیله ماکسول کشف شد. تئوری ماکسول و تئوری نسبیت خاص باهم سازگاری داشتند. تئوری کوانتومی الکترومغناطیس در سال ۱۹۴۰ بوسیله توماناگا و فاینمن و شوینگر تکمیل شد. نیروهای ضعیفی که نحوه واپاشی هسته ای β را توصیف می کردند برای فیزیک کلاسیک امری ناشناخته محسوب می شدند و توصیف تئوری آنها مستلزم به کار بردن

فرمول های کوانتوم نسبیتی بود. نخستین تئوری نیروهای ضعیف در سال ۱۹۳۳ بوسیله فرمی ارائه شد. این تئوری در دهه ۵۰ توسط لی و یانگ و فاینمن و گلمن و دیگران مورد بازنگری و اصلاح قرار گرفت و در دهه ۶۰ توسط گلاشو واینبرگ و سلام بصورت کنونی ارائه شد. در طبیعت چهارگونه از میدان های برهمکنشی را می توان تشخیص داد. نیروی گرانشی برای مقیاس های بزرگ فیزیک و اجسام ماکروسکوپی مهم اند و در مقیاس کوچک فیزیک اتمی و هسته ای اثر نیروهای گرانشی ناچیز است [۱۰].

جدول (۱-۵) نیروهای بنیادی شناخته شده در طبیعت [۱۰،۱۱]

نیرو	قدرت	نظریه	واسطه
هسته ای قوی	10	دینامیک رنگ	گلوئون
الکترومغناطیس	10^{-2}	الکترو دینامیک	فوتون
هسته ای ضعیف	10^{-13}	دینامیک رنگ	Z^0, W^\pm
گرانشی	10^{-42}	دینامیک هندسی	گراویتون

همانگونه که از جدول بالا مشهود است همه ذرات تبدالی بوزون بوده و دارای اسپین صحیح می باشند.

۸-۱ مدل های هسته ای

برای بررسی هسته ها، عمدتاً یک نظریه فوق العاده ساده را که از لحاظ ریاضی بدون مشکل و از لحاظ فیزیکی غنی باشد، انتخاب می کنیم. اگر این نظریه در توصیف دستکم چند خاصیت هسته ای نسبتاً موفق باشد، آنگاه با افزودن جمله های اضافی آن را تکمیل می کنیم. بدین ترتیب، معیار موفقیت هر مدلی را باید در دو نکته دانست:

۱. مدل باید بتواند خواص هسته ای تا کنون اندازه گیری شده را به طور قابل قبولی توضیح دهد.

۲. مدل باید خواص دیگری را پیش بینی کند که در آزمایش های جدیدی قابل اندازه گیری باشد.

مدل های متعددی جهت توضیح خواص و واکنش های هسته ای پیشنهاد شده اند. از آنجا که هیچکدام از این مدل ها برای توضیح کل مشاهدات تجربی بطور کامل رضایت بخش نیستند، مدل های مختلفی برای تفسیر پدیده های گوناگون هسته ای بکار می روند. از جمله مفیدترین مدل ها در مورد ساختمان هسته ای عبارتند از مدل لایه ای، مدل قطره مایع، مدل جمعی، مدل اپتیکی.

۱-۱-۸ مروری بر مدل لایه ای هسته ای

هسته از پروتون ها و نوترون ها (نوکلئون ها) تشکیل شده اند که همدیگر را با برهم کنش قوی در داخل حجمی با شعاع چند فرمی نگه می دارند. میتوان چنین پنداشت که حرکت نوکلئون ها در چنین سیستم بسته ای به واسطه تعداد زیادی برخورد بین آنها، خیلی پیچیده است. نیلس بوهر حرکت نوکلئون ها را به حرکت توپ های بیلیارد تشبیه کرد [۹،۱۲] و گفت که تشبیه حرکت نوکلئون ها با حرکت الکترون های اتمی فاقد اعتبار لازم است [۹،۱۳]. در سال ۱۹۴۸ ماریا ج مایر موفق شد داده های تجربی را طبقه بندی کرده و نشان دهد که هسته هایی که تعداد پروتون ها یا نوترون های آنها برابر یکی از اعداد ۲۰ و ۵۰ و ۸۲ یا ۱۲۶ باشند، پایدارترند [۱۰،۱۴]. در سال ۱۹۴۹ نقش کلیدی شکافتگی اسپین مدار در پتانسیل تک جسمی هسته ای توسط مایر [۱۵،۹] و هاگسل، جنسن و سوئس [۱۶] معرفی شد. این پتانسیل تک جسمی نقطه شروع مدل لایه ای هسته ای است. در مدل لایه ای، مسئله مکانیک کوانتومی برای حرکت یک نوکلئون در هسته شبیه حرکت الکترون در اتم هیدروژن است، با این تفاوت که ابعاد به جای 10^{-10} در حدود 10^{-15} متر است. تفاوت مهم دیگر بین پتانسیل های هسته ای و اتمی، وابستگی بسیار قوی پتانسیل هسته ای به جهت گیری اندازه حرکت زاویه ای ذاتی و اندازه حرکت زاویه ای مداری نوکلئون است که از نظر علامت نیز مخالف وابستگی مشابه، در مورد اتمی است. پتانسیل تک ذره ای، ویژه حالت هایی دارد که با انرژی های تک - ذره ای و اعداد کوانتومی شان مشخص می شوند و خواص یک هسته با تعداد مشخصی

پروتون و نوترون، با پر کردن پایین ترین تراز های انرژی تک- ذره ای و با رعایت اصل طرد پائولی برای سیستمی متشکل از فرمیون های یکسان (در این مورد نوکلئون ها) تعیین می شود. اصل طرد پائولی ایجاب می کند که هر حالت با یک مجموعه اعداد کوانتومی، فقط با یک پروتون یا یک نوترون اشغال شود. متوسط پتانسیل هسته ای از برهم کنش کوتاه برد و جاذب نوکلئون - نوکلئون ناشی شده و توسط شکل توزیع چگالی هسته ای تعیین می شود. شواهد اعتبار مدل لایه ای هسته، از مشاهده پذیر های تجربی نظیر انرژی بستگی، اندازه، اسپین و چگالی ترازها نشات می گیرد. مخصوصا، ملاحظه می شود که انرژی بستگی هسته تابع همواری از تعداد پروتون ها و نوترون ها نبوده و نوسانات کوچکی دارد. انحراف انرژی های بستگی تجربی از مقادیر مدل قطره مایع دیده شده است. انرژی بستگی مدل قطره مایع، تابع همواری از تعداد پروتون ها و نوترون ها است. وقتیکه مقادیر انرژی بستگی مدل قطره مایع از مقادیر تجربی کم شوند، اختلاف ها قله هایی را در اعداد جادویی، $N_m = 2, 6, 8, 14, 16, 20, 32$ نشان می دهند. قله ها نشان می دهند که هسته ها با این اعداد جادویی از سایر هسته ها مقید ترند. هسته هایی که تعداد پروتون و نوترون آن برابر اعداد جادویی است را دو - جادویی گویند. ^{208}Pb با تعداد ۱۲۶ نوترون و ۸۲ پروتون مثالی از یک هسته دو - جادویی است. اگرچه از داده های انرژی بستگی خیلی واضح نیست، ولی $N_m = 2, 6, 8, 14, 16, 20, 32$ برای برخی هسته ها، عدد جادویی محسوب می شوند. بعلاوه $N_m = 34$ برای ^{54}Ca اخیرا به عنوان عدد جادویی گزارش شده است [۱۷]. اعداد جادویی در هسته، نقشی مشابه خواص الکترون ها در پر شدن تراز های اتمی دارند. به هر حال برای الکترون ها، مقادیر ۲ و ۱۵ و ۱۸ و ۳۴ و ۵۴ به عنوان عدد جادویی شناخته می شوند. مطابق اصل طرد پائولی، اگر نوترونی به یک هسته اضافه شود، به تراز اشغال نشده با کمترین انرژی می رود. اگر یک نوترون به هسته اضافه شود، در حالیکه تعداد نوترون های موجود با یکی از اعداد اشغال جمعی برابر باشد، در آن صورت نوترون بایستی به حالتی با انرژی بیشتر (و قید کمتر) برود. بنابراین هسته ها یی با انرژی بستگی نسبی بالا، آنهایی اند که تعداد پروتون ها یا تعداد نوترون های آنها برابر یکی از اعداد اشغال جمعی باشد. یک عدد جادویی هنگامی به وجود می آید که

شکافی نسبتاً بزرگ، بالای هرکدام از اعداد اشغال جمعی وجود داشته باشد. بنابراین اعداد جادویی به یک بقیچه از ترازهای انرژی مربوط اند. پتانسیل وود - ساکسون اعداد جادویی $N_m = 2, 8, 20$ را به درستی نتیجه می دهد ولی برای سایر اعداد جادویی نادرست است. در سال ۱۹۴۹ مایر و دیگران برای مشاهده اعداد جادویی وجود یک پتانسیل اضافی قوی اسپین - مدار را فرض کردند. پتانسیل اسپین - مدار به صورت $V_{so}(r)\vec{L}\cdot\vec{S}$ فرض شد که \vec{L} اندازه حرکت زاویه ای مداری نوکلئون و \vec{S} اندازه حرکت زاویه ای ذاتی نوکلئون است. با وجود پتانسیل اسپین - مدار، m و S_z اعداد کوانتومی خوبی محسوب نمی شوند. اندازه حرکت های زاویه ای مداری و ذاتی بایستی جفت شده و اندازه حرکت زاویه ای کل $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ را بسازند. ویژه حالت های پتانسیل اسپین - مدار توسط عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای کل $j = l \pm \frac{1}{2}$ (غیر از $j=1/2$ برای $l=0$) و عدد کوانتومی m_j مربوط به تصویر j ، تعیین می شوند. مقدار چشمداشتی $\vec{l}\cdot\vec{s}$ از رابطه عملگری زیر به دست می آید:

$$j^2 = (\vec{l} + \vec{s})^2 = l^2 + s^2 + 2\vec{l}\cdot\vec{s} \quad (10-1)$$

متوسط پتانسیل هسته ای در مقیاس میکروسکوپی با در نظر گرفتن برهم کنش نوکلئون - نوکلئون توسط نظریه هارتری- فوک و نظریه بروکتر (این نظریه، دافعه بین نوکلئون ها در فواصل خیلی کوتاه را وارد محاسبات می کند) محاسبه می شود. قدرت پتانسیل اسپین - مدار برای نوکلئون ها خیلی بزرگتر و از نظر علامت مخالف، پتانسیل اسپین - مدار الکترون های اتمی است. قسمت شعاعی پتانسیل اسپین - مدار $V_{so}(r)$ ، در سطح هسته بیشینه است و اغلب متناسب با مشتق تابع وود- ساکسون در نظر گرفته می شود. مهم ترین ایده فیزیکی نهفته در مدل لایه ای این است که برخورد های چند - نوکلئونی داخل هسته، عموماً در سطح انرژی پایه و چند تراز پایین روی می دهند زیرا نوکلئون ها پس از برخورد به حالت هایی پراکنده می شوند که عموماً از نظر اصل طرد پائولی ممنوع است. در انرژی های برانگیختگی بزرگتر، تعداد حالت های مجاز در دسترس نوکلئون، افزایش یافته و خواص هسته های پیچیده می شود. مدل لایه ای در ساده ترین شکل، به خوبی قادر به پیشگویی

خواص هسته هایی با یک نوکلئون بیشتر یا یک نوکلئون کمتر از اعداد جادویی است. مدل لایه ای همچنین می تواند به پیکر بندی های پیچیده مربوط به هسته هایی که تعداد نوکلئون های آن حد واسط اعداد جادویی است، نیز توسعه یابد. برای بسیاری از کاربردها، پیکر بندی پیچیده را می توان با قطری کردن ماتریس هامیلتونی، به طور دقیق محاسبه کرد. در سایر موارد، از روش های تقریبی استفاده می شود که شامل به کار بردن پتانسیل تک ذره ای تغییر شکل یافته و استفاده از نظریه گروه برای تجزیه و تحلیل پیکر بندی است. چنین پیکر بندی های پیچیده ای در کانون توجه بررسی های نظری جاری مدل لایه ای قرار دارند.

۲-۱-۸ مدل قطره مایع

به واسطه برهم کنش قوی جاذب بین نوکلئون ها، هسته ها به طور کلی مقید اند. برهم کنش قوی از تبادل مزون ها ناشی می شود. برهم کنش ها کوتاه برد اند و عموماً بین نوکلئون های همسایه رخ می دهد. بعلاوه، برهم کنش هسته ای اشباع می شود که نتیجه این امر چگالی نوکلئونی تقریباً ثابت داخل هسته و شعاعی است که به طور تقریبی با رابطه $1.2A^{1/3}$ داده می شود. تشابه این مسئله با قطره مایع، به مدل قطره مایع منجر می شود که از ایده هسته مرکب^۷ نیلز بوهر الهام گرفته شده بود که می گفت وقتی یک نوکلئون وارد یک هسته می شود ویژگی های حرکت انفرادی خود را به خاطر برهم کنش بسیار قوی نوکلئون - نوکلئون داخل هسته از دست می دهد مدل قطره مایع توسط وایزاکر^۸ و برای یافتن جرم های هسته ای و انرژی های بستگی برحسب پارامترهای ماکروسکوپی نظیر انرژی حجمی، انرژی سطحی، انرژی کولنی، انرژی تزویج و هسته با در نظر گرفتن هسته به صورت یک قطره مایع توسعه یافت که انرژی بستگی آن با رابطه زیر داده می شود:

^۷ Compound Nucleus

^۸ C.F.Von weisazaacker

$$B(A, Z) = \alpha_1 A - \alpha_2 A^{\frac{2}{3}} - \alpha_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} - \alpha_4 \frac{(N-Z)^2}{A} \pm \delta \quad (11-1)$$

جملات بالا از سمت راست، به ترتیب جمله انرژی حجمی، جمله انرژی سطحی، جمله انرژی کولونی و جمله انرژی تقارنی و جمله تصحیح انرژی زوجیت می باشند. اولین جمله بیانگر برهم کنش نوکلئون با نزدیکترین همسایه ها است. این بدان معناست که هر نوکلئون در هسته فقط نزدیکترین نوکلئون های اطرافش را جذب می کند و همه نوکلئون ها یکدیگر را جذب نمی کند (خاصیت اشباع پذیری). از آزمایش های پراکندگی الکترون معلوم شده است که چگالی هسته تقریباً ثابت است، یعنی تعداد نوکلئون های موجود در اطراف هر نوکلئون تقریباً ثابت می ماند. بدین ترتیب نتیجه می گیریم که سهم هر نوکلئون در انرژی بستگی هسته تقریباً مقداری ثابت است. دومین جمله تصحیحی است بر جمله اول مبنی بر این مضمون که نوکلئون های سطحی، همسایه کمتری دارد. به همین دلیل بستگی آن به هسته از نوکلئون های مرکزی کمتر است. سومین جمله ناشی از وجود دافعه کولونی بین پروتون ها است که این مولفه در جهت تضعیف انرژی بستگی هسته عمل می کند. چهارمین جمله که جمله انرژی تقارنی نامیده می شود، به این دلیل کم شده است که، اول: برهم کنش قوی نوترون - پروتون به طور متوسط جاذب تر از برهم کنش های قوی پروتون - پروتون و نوترون - نوترون است و دوم: انرژی جنبشی کل هسته هنگامی که تعداد پروتون هایش با تعداد نوترون هایش برابر است، کمینه می باشد. جمله تزویج تمایل نوکلئون های مشابه را به تشکیل زوج و تحکیم پیکر بندی پایدار هسته ای نشان می دهد. ثابت $\alpha_3 = 0.697 \text{ MeV}$ توسط برهم کنش کولنی و اندازه هسته، بهینه شده است. مقادیر نوعی ثابت های مدل قطره مایع که منحنی بهینه به داده های تجربی برازش می دهد به صورت $\alpha_1 = 15.49 \text{ MeV}$, $\alpha_2 = 17.23 \text{ MeV}$, $\alpha_4 = 22.6 \text{ MeV}$ به دست آمده اند [۹].

۳-۱-۸ مدل اپتیکی

این مدل در سالهای ۱۹۴۰ پیشنهاد گردید. هسته در این مدل به عنوان یک توپ کریستال مات دیده می شود که می تواند ذرات ورودی را منعکس، منحرف، جذب، یا عبور دهد. روش های ریاضی متداول

در اپتیک برای توضیح این پدیده‌ها که ممکن است در واکنش‌های هسته‌ای رخ دهند، بکار می‌روند. مدل اپتیکی از نظر توضیح نتایج پراکندگی ذرات ورودی بوسیله یک هسته بهترین مدل است. این مدل نمی‌تواند بطور دقیق نتایج را برای پراکندگی غیرالاستیک یا برای واکنشهایی که در آنها یک ذره به وسیله یک هسته جذب می‌گردد، پیش بینی نماید.

۴-۱-۸ مدل جمعی

این مدل در اوایل سال های ۱۹۵۰ بوسیله *A.Bohr* و *B.Mottelson* توسعه یافت. این مدل سعی دارد ویژگی های هر دو مدل پوسته ای و قطره مایع را با در نظر گرفتن هسته بطور کامل، حرکت‌های اختصاصی نوکلئون های خارجی تلفیق نماید. وقتی هسته های زوج - زوج را مورد بررسی قرار می دهیم به این واقعیت در خور توجه می رسیم: از کاربرد مدل پوسته ای در صدها مورد هسته ای زوج - زوج شناخته شده معلوم می شود که همگی آنها دارای یک حالت بیهنجار 2^+ هستند که انرژی آن معادل یا کوچکتر از نصف انرژی لازم برای شکستن یک زوج نوکلئونی است این حالت 2^+ ، جز در چند مورد استثنایی، در همه موارد پایین ترین حالت برانگیخته است. از این رو، ظهور این حالت یک امر تصادفی نیست بلکه از یک خاصیت کلی هسته های زوج - زوج ناشی می شود که صرفنظر از اشغال حالت های خاص مدل پوسته ای، در سراسر گستره جرم معتبر است. خواص کلی دیگری نیز وجود دارند که در همه هسته ها مشترک اند، پس بهتر است این خواص را نه با حرکت چند نوکلئون ظرفیت بلکه با تمام هسته مرتبط بدانیم. اینگونه خواص را که منشا آنها در حرکت دسته جمعی اجزای هسته است و بسیاری از نوکلئون های هسته در ایجادشان شرکت دارند، خواص جمعی گویند. این مدل در توضیح و تفسیر ترازها انرژی مشاهده شده در مورد هسته‌های دور از اعداد جادویی موفق بوده است. این مدل می‌تواند گشتاورهای مغناطیسی، گشتاورهای چهار قطبی، و گذارهای ایزومری مشاهده شده برای هسته‌های دور از اعداد جادویی را نیز توضیح دهد [۲].

فصل دوم

پتانسیل ها و روش های حل

معادله شرودینگر

۲-۱ پتانسیل های نوکلئون-نوکلئون

در چند دهه گذشته پتانسیل های نوکلئون-نوکلئون زیادی ارائه شده است. همه این پتانسیل ها به روش تطبیق با اطلاعات پراکندگی ساخته شده اند. به عبارت دیگر مقیاس یک پتانسیل تطابق اطلاعات پراکندگی با $1 \approx \frac{\chi^2}{N_{data}}$ است. اما از آنجایی که این مقیاس تا حدودی شکست خورده بود، این مقیاس تنها مقیاس اندازه گیری کیفی پتانسیل نیست. بنابراین مقایسه پتانسیل های نوکلئون-نوکلئون به روش های دیگر لازم خواهد بود. نتایج وقتی رضایت بخش خواهد بود که پتانسیل بتواند ساختمان نوکلئون را به خوبی توصیف کند. برای مقایسه پتانسیل ها ابتدا لازم است که سه جزء برهمکنش را در سیستم دو نوکلئونی در نظر بگیریم:

الف) بخش بلند برد ($r \geq 2\text{fm}$):

در اغلب مدل های پتانسیل، پتانسیل تبادل تک پیونی^۹ در نظر گرفته شده است و به دنبال اجزای پتانسیل های دیگر به عنوان بخش بلند برد اضافه می شود. در ساده ترین حالت بخش پتانسیل تک پیونی از رابطه زیر تبعیت می کند:

$$V_{ope}(r) = \frac{g^2 m_\pi}{12\pi} (\tau_1 \cdot \tau_2) \left[T_\pi(r) S_{12} + \left(Y_\pi(r) - \frac{4\pi}{m_\pi^3} \delta(r) \right) (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \right] \quad (1-2)$$

که در آن

$$S_{12} = 3 \left(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r} \right) \left(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r} \right) - \left(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right), \quad Y_\pi(r) = \frac{e^{-m_\pi r}}{m_\pi r}, \quad T_\pi(r) = \left(1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{m_\pi^2 r^2} \right) Y_\pi(r) \quad (2-2)$$

که S_{12} عملگر تانسوری معمولی، m_π جرم پیون، τ اپراتور ایزواسپین، σ اپراتور اسپین و g مقدار ثابت جفت شدگی است که از آزمایش بدست می آید. این پتانسیل با در نظر گرفتن مقدار اختلاف بین پیون های باردار و خنثی به خوبی برای p-n، p-p، n-n به صورت مناسب تری ارائه شده است.

⁹ One pion exchange Potential (opep)

ب) بخش متوسط برد ($1fm \leq r \leq 2fm$): که از تبادلات مزون های اسکالر بدست می آید (دو پیون و مزون های سنگین).

ج) بخش کوتاه برد ($r \leq 1fm$): که از تبادلات مزون های برداری بدست می آید (مزون های سنگین و تبادلات پیون های چندگانه که به خوبی در QCD مشهود است).

هدف ما در این کار بیشتر در نظر گرفتن بخش اول است یعنی بیشتر با فواصل بلند برد کار می کنیم. در ادامه سعی کردیم به بررسی برخی از پتانسیل های مهم که در چند سال اخیر بسیار به آنها پرداخته شده است بپردازیم.

شرایطی که پتانسیل هسته ای باید آن ها را دارا باشد:

۱-۲-۱ پتانسیل باید یک کمیت نرده ای باشد.

۱-۲-۲ از آنجا که دو نوترون یا دو پروتون غیر قابل تشخیص هستند، هرگاه جای دو ذره را با هم عوض می کنیم نباید پتانسیل تغییر کند.

۱-۲-۳ طبق اصل ناوردایی و ارونی زمانی، اگر جهت حرکت زمان معکوس شود، پتانسیل نباید تغییر کند.

۱-۲-۴ ابتدا نیروهایی را که مستقل از سرعت هستند در نظر می گیریم، به این نیروها، نیروهای استاتیکی می گویند. اگر پتانسیل استاتیکی باشد نمی تواند به \vec{P}, \vec{L} بستگی داشته باشد. زیرا این ها به سرعت وابسته هستند. بنابراین پتانسیل استاتیکی تنها شامل \vec{r}, \vec{s} است. بنابراین جمله ای که وابستگی پتانسیل استاتیکی به اسپین را نشان می دهد به صورت: $(\vec{s} \cdot \vec{r})^2$ را می توان به عنوان جمله ای که مولفه تانسوری را شامل می شود نشان دهیم.

۱-۲-۵ ویژگی دیگری که نیروی استاتیکی نوکلئون- نوکلئون می تواند به آن وابسته باشد، پاریده تابع موجی است که سیستم را توصیف می کند. از آن جا که پاریده به فرد یا زوج بودن L بستگی دارد، نیروی هسته ای برای L زوج و L فرد متفاوت است.

در نهایت با در نظر گرفتن اطلاعات بدست آمده پتانسیل های پدیده شناختی را می توان به شکل زیر در نظر گرفت [۲]:

$$V = V_C + V_{CS} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_T S_{12} + V_{LS} \vec{L} \cdot \vec{\sigma} \quad (۳-۲)$$

V_C انرژی پتانسیل مرکزی معمولی را توصیف می کند.

V_{CS} جمله مرکزی وابسته به اسپین است. V_T معرف نیروی تانسوری است. S_{12} عملگر تانسوری

است. V_{LS} نیروی اسپین - مداری را مشخص می کند.

۲-۲ مدل نیروی تبادل^{۱۰}

در نگاه اول شاید به نظر رسد که نیروی هسته ای نباید به اینک $s = 0$ یا $s = 1$ و زوج و فرد بود L

وابسته باشد ولی شواهدی دال بر وابستگی نیروی هسته ای به اسپین و تکانه مداری وجود دارد. موارد

مشاهده شده را به صورت زیر در نظر می گیریم [۲]:

۱. انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون مقدار اشباعی دارد.

۲. نوکلئون ها چگالی ثابت دارند.

۳. تحلیل های انتقال فاز و قطبیدگی در انرژی بالا مستلزم حضور نیروهای تبدالی می باشد.

این رفتار به این واقعیت مربوط می شود که نیروهای هسته ای از تبادل مزون نتیجه می شود و تبادل

مزون منجر به نیروهای تبدالی می شود. سه نوع نیروی تبدالی وجود دارد: تبادل فضایی یا نیروی

ماژرونا، تبادل اسپینی یا نیروی بارتلت، تبادل فضایی - اسپینی یا نیروی هایزنبرگ که در ادامه به

معرفی آنها می پردازیم.

¹⁰ Exchange Force Model

۲-۲-۱ پتانسیل بارتلت^{۱۱}

این پتانسیل به صورت زیر تعریف می شود:

$$V_B \psi = V_B(r) P^S \psi \quad (۴-۲)$$

که اسپین دو ذره را در تابع موجی که بر آن عمل می کند، عوض می کند. اگر $S=1$ (حالت سه تاییه) مبادله اسپین اثری بر تابع موج ندارد و اگر $S=0$ باشد (حالت تک تاییه) مبادله اسپین صرفاً علامت تابع موج را تغییر می دهد. بنابراین داریم:

$$V_B \psi = \begin{cases} +V_B(r)\psi & S = 1 \\ -V_B(r)\psi & S = 0 \end{cases} \quad (۵-۲)$$

۲-۲-۲ نیروی ماژرونا^{۱۲}

متغیر دیگری که پتانسیل به آن وابسته است و متغیر پارته حالت نامیده می شود را توسط اپراتور P_X نمایش می دهیم که به آن اپراتور تبدیل فضایی گویند و این اپراتور مختصات مکانی دو ذره را تغییر می دهد به این صورت که $P_X(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$. برای سیستم دو ذره ای به نظر می آید اگر پارته سیستم زوج باشد با تبدیل مختصات فضایی، تابع موج ثابت باقی می ماند. در غیر این صورت اگر تابع موج دارای پارته فرد باشد، علامت تابع موج تغییر می کند. از آنجا که زوج یا فرد بودن پارته، بستگی به زوج یا فرد بودن L دارد خواهیم داشت:

$$V_M \psi = \begin{cases} +V_M(r)\psi & L \text{ is even} \\ -V_M(r)\psi & L \text{ is odd} \end{cases} \quad (۶-۲)$$

که در آن پتانسیل ماژرونا را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$V_M \psi = V_M(r) P^X \psi \quad (۷-۲)$$

مشاهده می شود که نیروی ماژرونا بیان این واقعیت است که پتانسیل هسته ای بستگی به زوج یا فرد بودن L دارد.

¹¹ Bartlett Force

¹² Majorana Force

۲-۲-۳ نیروی هایزنبرگ

اپراتور دیگر ، اپراتور هایزنبرگ است

$$V_H = P^X P^S \quad (۸-۲)$$

که پتانسیل مربوط به آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$V_H \psi = V_H(r) P^X P^S \psi \quad (۹-۲)$$

همانطور که دیده می شود اپراتور هایزنبرگ هم مختصات فضایی و هم مختصات اسپینی را تغییر می دهد. علاوه بر این سه نیروی تبادلی، نیروی دیگری به نام نیروی وینگر یا نیروی بدون تبادل وجود دارد که آن را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$V_W \psi = V_W(r) \psi \quad (۱۰-۲)$$

برای خلاصه کردن این بحث، نیروها را به صورت زیر می نویسیم که به صورت ذاتی مرکزی هستند و وابستگی اسپین و پاریته را به صورت زیر نمایش می دهد

$$V = -V_0 [W(r) + B(r)P^S + M(r)P^X + H(r)P^H] \quad (۱۱-۲)$$

این معادله برای پتانسیل های متفاوت کاربرد دارد زیرا حالت های یک تاییه و سه تاییه و حالت هایی با پاریته زوج و فرد را در برمی گیرد.

۲-۳ توجیه حضور نیروی تبادلی در هسته ها

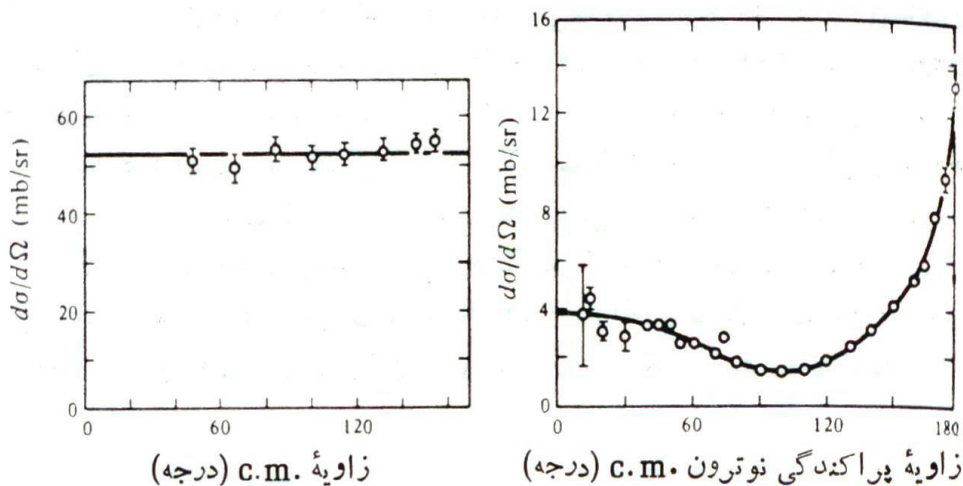
دو دلیلی را که حضور نیروی تبادلی را در هسته ها تأیید می کند به صورت زیر می باشد:

الف) خاصیت اشباع نیروی هسته ای: از تجربه می دانیم که چگالی هسته ای نسبتاً ثابت است و انرژی بستگی تقریباً به ازای هر نوکلئون $8MeV$ و ثابت است. به نظر می رسد که هر نوکلئون فقط تعداد کمی از همسایه های نزدیکش را جذب می کند و در فواصل خیلی کوتاه همین نوکلئون همان همسایه های نزدیکش را نیز دفع می کند تا از نزدیکی بیش از حد آنها جلوگیری کند که این را در

فیزیک هسته ای با انتخاب یک پتانسیل مرکزی مناسب که برد محدودی و مرکزیتی به صورت یک مغز دافعه داشته باشد توضیح می دهند. شباهت فیزیک اتمی و فیزیک هسته ای در این مورد قابل توجه است.

(ب) وجود قله بزرگ رو به عقب در پراکندگی نوترون- پروتون

از مطالعه پراکندگی نوترون- پروتون در انرژی های بالا دلایلی بدست می آید که به نوعی مدل نیروی تبادل را تأیید می کند. سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون-پروتون در شکل (۱-۲) نشان داده شده است [۲].



شکل (۱-۲): سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون- پروتون (الف) توزیع زاویه ای برای نوترون های با انرژی

۱۴ MeV همسانگرد است. (ب) برای پروتونهای با انرژی ۴۰۰ MeV یک قله برجسته در 180° وجود دارد.

سطح مقطع پراکندگی در زوایای نزدیک به صفر دارای قله ای بزرگ است و این یعنی اینکه انتقال تکانه در برخورد بین ذرات فرودی و هدف کوچک است ولی وجود قله ای بزرگ در زاویه پراکندگی 180° توجیهی می تواند داشته باشد؟ اگر فرض کنیم که در طی برخورد نوترون و پروتون جایشان را باهم عوض می کنند مدل تبادل می تواند توضیح قانع کننده ای ارائه کند، و این یعنی اینکه نوترونی که به طرف جلو در حرکت است به پروتون تبدیل می شود و پروتونی که به طرف عقب (از دیدگاه چارچوب مرکز جرم) در حرکت است به نوترون تبدیل می شود. به طور خلاصه اینکه نیروی تبادل هم

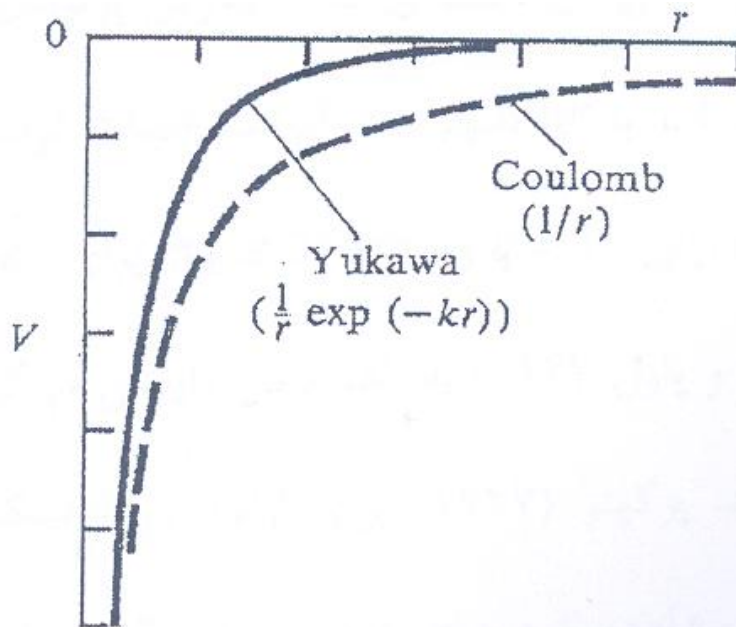
خصوصیت اشباع نیروهای هسته ای و هم وجود قله بزرگ رو به عقب را در پراکندگی نوترون- پروتون توجیه می کند. در مورد اولی می گوئیم که برای آن که نوعی پیوند اشباعی بین نوکلئون ها وجود داشته باشد باید بین آنها ذره ای (پیونی) رد و بدل شود و در مورد دومی هم می گوئیم که بین نوکلئون ها ذره ای (پیونی) مبادله می شود که عملاً خصوصیت آنها را تغییر می دهد.

۴-۲ نظریه یوکاوا و ذره یوکاوا

قانون عکس مجذوری میدان الکتروستاتیک، تقریبی از نظریه ظریف اما دشوار و بحث انگیز الکترودینامیک کوانتومی محسوب می شود. فرض اساسی این نظریه این است که برهمکنش ناشی از فوتون های رد و بدل شده بین بارهای الکتریکی است. فوتون دارای انرژی $h\nu$ است و ممکن است در نگاه اول موجب شکست ناوردایی انرژی سیستم به نظر برسد، با این حال اصل هایزنبرگ ، عدم قطعیت انرژی ΔE را در بازه Δt با شرط $\Delta E \Delta t \leq \hbar$ تائید می کند. برای برهمکنش تا فاصله r با سرعت نور، می توان نوشت: $\Delta t \approx \frac{r}{c}$ و بنابراین طول موج فوتون مجازی به صورت $\lambda = 2\pi r$ بدست می آید. یوکاوا در سال ۱۹۳۵ مشخص نمود که " نظریه کوانتومی میدان های هسته ای باید بر اساس کوانتوم جدیدی مرتب گردند." او با هوشیاری فراوان اضافه کرد "علاوه بر نیروی تبادل و نیروهای اولیه الکتریکی و مغناطیسی، نیروهای دیگری نیز ممکن است بین ذرات وجود داشته باشند." او عبارتی برای پتانسیل هسته ای به صورت زیر بدست آورد [۱۸]:

$$V = -\frac{g^2}{r} \exp(kr) \quad (۱۲-۲)$$

در شکل زیر نمودار پتانسیل کولنی و یوکاوا با یکدیگر مقایسه شده اند:



شکل (۲-۲): مقایسه شکل پتانسیل "تبادل تک پایونی" یوکاوا با پتانسیل کولنی (تبادل فوتونی)

یوکاوا با مقایسه نتایج بدست آمده و نتایج تجربی، تخمینی برای مقادیر k و g بدست آورد. در حال حاضر "ثابت جفت شدگی" نیروی هسته ای به صورت $\frac{g^2}{hc} \approx 1$ و نیروهای الکترومغناطیسی به صورت $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 hc} = \frac{1}{137}$ بدست آمده است. یوکاوا با فرض اینکه کوانتوم میدان هسته ای دارای بار الکتریکی e و $-e$ است دریافت که جرم M این ذرات باید در حدود 200 برابر جرم الکترون باشد. این مطلب به دنبال این واقعیت است که نیروهای نوکلئون-نوکلئون در یک دامنه کوتاه $r = 2 \text{ fm}$ که در حدود شعاع دوترون است عمل می کند. بنابراین ما می توانیم با استفاده مجدد از رابطه اصل عدم قطعیت هایزنبرگ $\Delta E \Delta t \leq \hbar$ و $\Delta t \approx \frac{r}{c}$ و $\Delta E = mc^2$ مقدار 200 MeV را برای کوانتوم میدان هسته ای بدست آوریم. همچنین یوکاوا فروتنانه و با اعتماد بنفس اظهار داشت که اگر ذراتی با جرم یاد شده و با بار مثبت یا منفی توسط آزمایش آشکار نشوند، به نظر می رسد نظریه فوق دارای اشکال است. دو سال بعد، با کشف میون با ویژگی های $m_\mu \approx 207m_e$ و $q = \pm e$ توسط ندرمایر و اندرسون (۱۹۳۷) به نظر می رسید که شک و تردید یوکاوا برطرف گردیده است. متأسفانه میون به هیچ طریقی به صورت قوی با پروتون، نوترون و یا هسته های دیگر برهمکنش نمی کند و بنابراین تا سال ۱۹۴۷ که پاول و

همکارانش مزون پای (یا پیون) را در امولسیون های هسته ای که در معرض پرتوهای کیهانی خارج از جو قرار گرفته بود مشاهده کردند، هویت ذره یوکاوا تأیید نشد. آنها مشخصات ذره پیشگویی شده توسط یوکاوا را به صورت $m_{\pi} \cong 264m_e$ برای $q=0$ و $m_{\pi} \cong 273m_e$ برای $q = \pm e$ بدست آوردند. مزون های باردار (لتیس، اوجیالینی و پاول ۱۹۴۷) به یک میون واپاشی می کردند که به نوبه خود به یک الکترون واپاشی می کرد. پرکینز (۱۹۴۷) برای اولین بار برهمکنش پیون و هسته را که موجب فروپاشی هسته می شد مشاهده کرد و در عرض چند سال بسیاری از ذرات ناپایدار جدید مشاهده شدند.

مدل ساده "پتانسیل تبادل تک پیونی" یوکاوا به عنوان یک راهنما، به خصوص برای نیروهای هسته ای فراتر از ۲ fm بسیار مفید است، اما دارای تعدادی ویژگی نامطلوب است. به عنوان مثال، در حال حاضر به طور کلی مشاهده شده است که به منظور توضیح پراکندگی نوکلئون- نوکلئون در انرژی بالا، نوعی از پتانسیل مغز دافعه هسته ای در محدوده زیر ۲ fm مورد نیاز است و چنین خاصیتی به توضیح "اشباع نیروهای هسته ای و چگالی تقریباً ثابت ماده هسته ای" کمک می کند. نظریه های مزونی در اوایل، با انواع خاصی از نیروی تبادل، جمله نیروی دافعه مورد نیاز برای ایجاد جلوگیری از فروپاشی ماده هسته ای به درون ابعاد نوکلئون را تولید کردند، اما این نظریه ها نمی توانند پراکندگی را در انرژی بالا توضیح دهند. معلوم شده است که بجز پیون سایر ذرات نیز با نوکلئون ها به صورت قوی برهمکنش می کنند و برای توضیح اثرات قطبش در طول پراکندگی های هسته ای مزون های برداری با اسپین غیر صفر هستند نیز لازم شناخته شده اند، با این حال پیون ها و کائون ها هنوز دارای اسپین صفر هستند. ممکن است که برهمکنش کامل نوکلئون- نوکلئون مشکلی فراتر از پیچیدگی اصولی باشد که اهمیت آن ساختار کوارک- گلوئون نوکلئون ها در انرژی های بالاتر، به طور فزاینده افزایش می یابد.

۵-۲ برهم کنش های دو و سه ذره ای

اشاره کردیم که برهمکنش های بنیادی در فیزیک معمولاً به صورت مرکزی و دو ذره ای است. از جمله این برهمکنش ها می توان به برهمکنش کولنی که بین ذرات باردار وجود دارد و برهمکنش گرانشی که بین اجسام مادی موجود است اشاره کرد. معروف ترین پتانسیل دو ذره ای که در شبیه سازی از آن استفاده می شود برهمکنش لنارد- جونز است. با توجه به این که تابع پتانسیل دو ذره ای ساده است و برای محاسبه آن تنها کافی است از پتانسیل کل نسبت به فاصله نسبی ذرات مشتق بگیریم. در ادامه به معرفی چند پتانسیل فیزیکی خواهیم پرداخت.

۶-۲ پتانسیل شبه حلقوی کراتزر تعمیم یافته^{۱۳}

در چند سال اخیر پتانسیل جدیدی را به نام پتانسیل مولکولی کراتزر تعمیم یافته معرفی کردند [۱۹]:

$$V(r) = D_e \left(\frac{r - r_e}{r} \right)^2 \quad (۱۳-۲)$$

به ترتیب فاصله تعادلی بین هسته ها و انرژی جدایی می باشد.

بعد از آن گروهی دیگر با اضافه کردن جمله زاویه ای پتانسیل جدیدی به نام پتانسیل شبه حلقوی کراتزر تعمیم یافته را ارائه دادند:

$$V(r, \theta) = D_e \left(\frac{r - r_e}{r} \right)^2 + \eta \frac{\cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (۱۴-۲)$$

که در آن η یک مقدار حقیقی مثبت می باشد هرچند در این پتانسیل هنگامی که مقدار آرگومان به صفر میل می کند جمله دوم پتانسیل به بینهایت میل می کند.

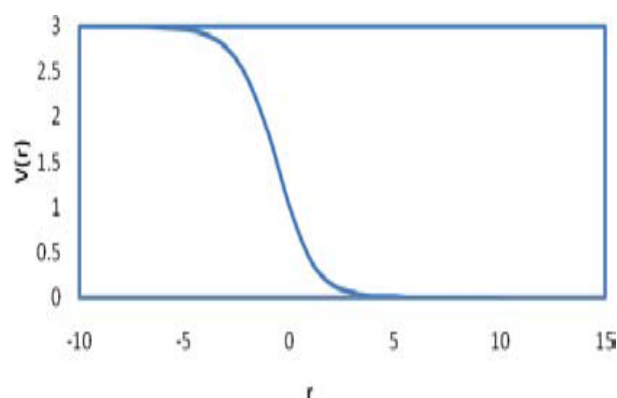
¹³ Ring shaped Kratzer potential

۷-۲ پتانسیل وودز-ساکسون^{۱۴}

یکی از پتانسیل های مهم در فیزیک هسته ای پتانسیل وودز-ساکسون است. این پتانسیل کوتاه برد که اولین بار توسط وودز و ساکسون در سال ۱۹۵۴ معرفی شد بخش اصلی مدل پوسته ای و مدل اپتیکی را که در پراکندگی هسته ای کاربرد دارد تشکیل می دهد. همچنین این پتانسیل به صورت گسترده ای برای توصیف برهمکنش نوترون با هسته های سنگین استفاده می شود. در حوزه پتانسیل میانگین جزئیات پتانسیل با پارامترهای آزادی مانند عمق پهنا و شیب پتانسیل تعریف می شود که باید با مشاهدات تجربی سازگار باشند. شکل این پتانسیل که برحسب فاصله از مرکز هسته است به صورت زیر می باشد [۲۰]:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}} \quad (۱۵-۲)$$

V_0 و R_0 و a به ترتیب عمق و پهنای پتانسیل و ضخامت سطح می باشد که اغلب با مقادیر تجربی در سازگاری می باشد.



شکل (۲-۳): پتانسیل وودز-ساکسون بر حسب تابعی از r به ازای پارامترهایی خاص

۷-۲-۱ پتانسیل وودز-ساکسون استاندارد^{۱۵}

پتانسیل وودز-ساکسون استاندارد با رابطه زیر تعریف می شود [۲۱، ۲۲]:

¹⁴ Woods-Saxon potential

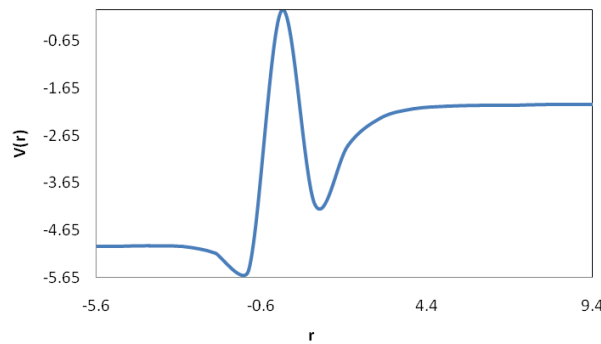
¹⁵ Standard woods-saxon

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}} + \frac{-V_1}{\left(1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}\right)^2} \quad (16-2)$$

به ترتیب عمق و پهنای پتانسیل و ضخامت سطح می باشد. این پتانسیل برای توصیف برهمکنش نوکلئون ها در هسته های سنگین به کار می رود. با اضافه کردن دو جمله به این پتانسیل، پتانسیل جدیدی ارائه شده است [۲۳]:

$$V_{\text{mod}}(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}} + \frac{\tau}{\left(1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}\right)^2} + \mu \coth\left(\frac{r-R_0}{a}\right) + \eta \coth^2\left(\frac{r-R_0}{a}\right) \quad (17-2)$$

که در آن پارامترهای حقیقی هستند، همچنین اشاره می شود که جملات سوم و چهارم رابطه بالا در حد $(r-R_0) \ll a$ به $\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r}$ میل می کند که با پتانسیل دافعه کولنی و توان دوم آن مطابقت دارد.



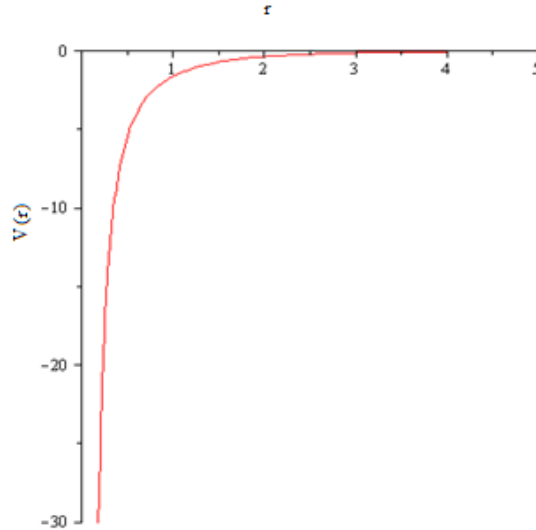
شکل (۲-۴): پتانسیل وودز-ساکسون تعمیم یافته

بعد از آن گروهی دیگر بر اساس استدلال و بدون از دست دادن کلیت پتانسیل وودز-ساکسون معکوس پتانسیل Manning-Rosen را به صورت زیر در نظر گرفته اند [۲۴]:

$$V_{\text{inverted}}(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}} + \frac{-V_1}{\left(1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}\right)^2} + V_2 \tan\left(\frac{r-R_0}{a}\right) + V_3 \tan^2\left(\frac{r-R_0}{a}\right) \quad (18-2)$$

و در آخر نوع دیگری از پتانسیل وودز-ساکسون تعمیم یافته در نظر گرفته شده است.

$$V(r) = -2.4 \frac{e^{-1.02r}}{1 - e^{-1.02r}} - 0.8 \left(\frac{e^{-1.02r}}{1 - e^{-1.02r}} \right)^2 \quad (19-2)$$



شکل (۵-۲): پتانسیل وودز-ساکسون تعمیم یافته ۲

۸-۲ پتانسیل یوکاوا^{۱۶}

حدود هفتاد سال پیش یوکاوا نظریه مزون را برای توضیح برهمکنش های میان نوکلئون ها پیشنهاد کرد و پتانسیل را به شکل زیر معرفی نمود [۲۵]:

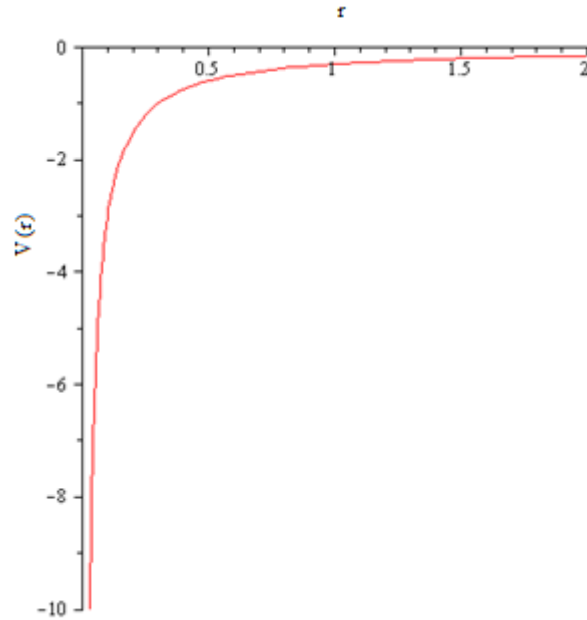
$$V_c(r) = -V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad (20-2)$$

که در آن α برد نیروی هسته ای و V_0 عمق پتانسیل می باشد.

بر خلاف نیروی کولنی که بستگی ساده ای به فاصله دارد، نیروی هسته ای به طور خیلی پیچیده ای به فاصله وابسته است. پتانسیل یوکاوا برای بیان این منظور یکی از بهترین پتانسیل ها می باشد. این پتانسیل تابع نمایی از فاصله است به همین علت، پتانسیل و نیروی سریعاً با افزایش فاصله به صفر میل

¹⁶ Yukawa potential

می کند. یکی از نکات مهم در مورد پتانسیل یوکاوا آن است که معادله شرودینگر با این پتانسیل به طور دقیق و تحلیلی قابل حل نمی باشد.



شکل (۶-۲): پتانسیل یوکاوا بر حسب تابعی از r بر حسب مقادیری خاص

۹-۲ پتانسیل هولسن عمومی^{۱۷}

پتانسیل هولسن عمومی به شکل:

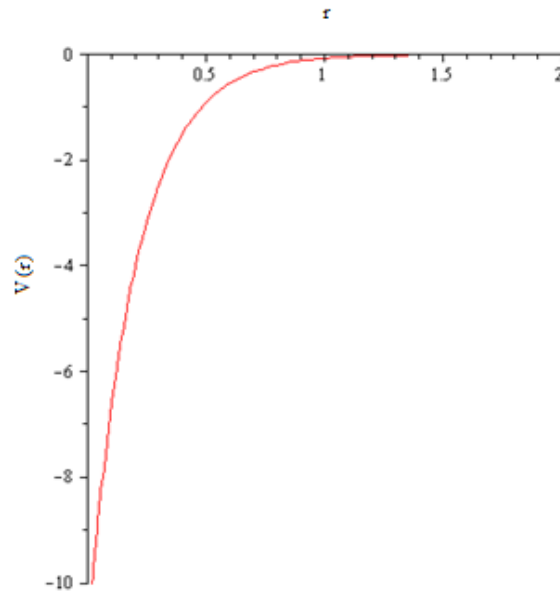
$$V_q(r) = -\frac{e^{-\alpha r}}{1 - qe^{-\alpha r}} \quad (۲۱-۲)$$

است که در آن پارامتر q شکل پتانسیل را تعیین می کند [۲۳]. قابل توجه است که به ازای مقادیر بخصوص پارامتر q پتانسیل معینی را نتیجه می دهد:

اگر $q = 0$ باشد پتانسیل نمایی حاصل می شود که در شکل (۷-۲) رسم شده است.

$$V_q(r) = -V_0 e^{-\alpha r} \quad (۲۲-۲)$$

¹⁷ Hulthén potential

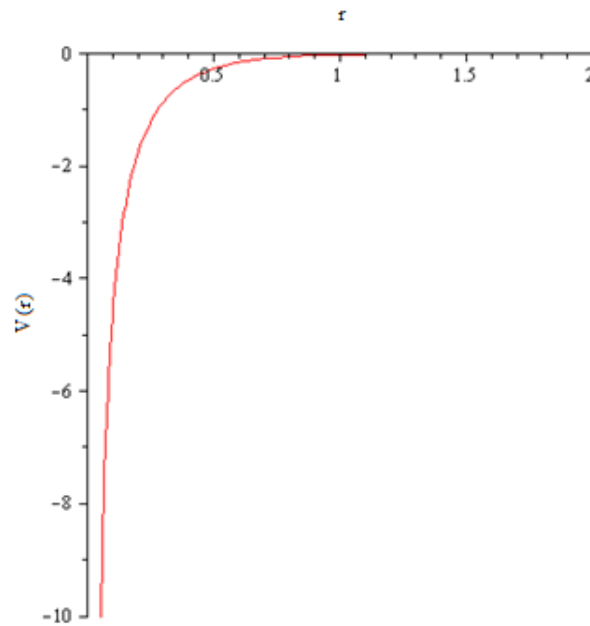


شکل (۷-۲): پتانسیل نمایی بر حسب r (به ازای $\alpha=5$, $v_0=11$)

اگر $q=1$ باشد شکل پتانسیل به صورت پتانسیل هولسن استاندارد در می آید که در شکل (۸-۲) رسم

شده است:

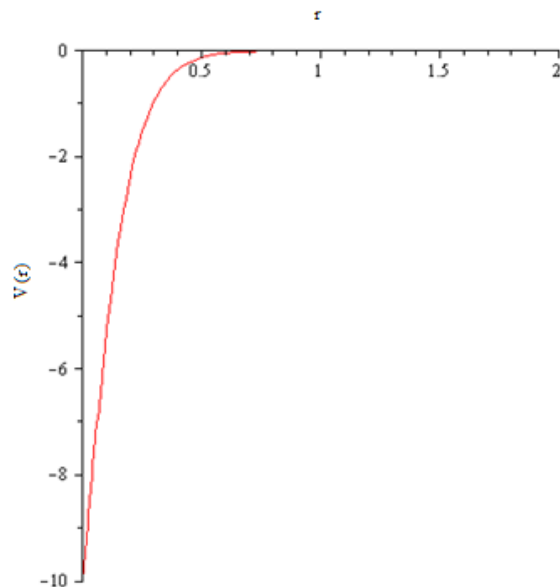
$$V_q(r) = -V_0 \frac{e^{-ar}}{1 - e^{-ar}} \quad (۲۴-۲)$$



شکل (۸-۲): پتانسیل هولسن استاندارد بر حسب تابعی از r (به ازای $\alpha=5$, $v_0=3$)

اگر $q = -1$ باشد شکل پتانسیل وودز- ساکسون را خواهیم داشت این پتانسیل را به ازای مقادیری خاص در شکل (۹-۲) رسم کرده ایم:

$$V_q(r) = -V_0 \frac{e^{-ar}}{1+e^{-ar}} \quad (۲۵-۲)$$



شکل (۹-۲): پتانسیل وودز-ساکسون بر حسب تابعی از r (به ازای $v_0 = 20$, $\alpha = 10$)

۱۰-۲ پتانسیل هلمن^{۱۸}

این پتانسیل به فرم زیر تعریف می شود:

$$V = \frac{V_0 e^{-ar}}{r} - \frac{k}{r} \quad (۲۶-۲)$$

که به صورت جمع پتانسیل های یوکاوا و کولنی است و V_0 و k به ترتیب عمق پتانسیل در پتانسیل یوکاوا و کولنی و a برد نیروی هسته ای است. این پتانسیل با V_0 مثبت توسط هلمن پیشنهاد شد [۲۶،۲۷] و به همین خاطر چه V_0 مثبت باشد چه منفی آن را پتانسیل هلمن نامیدند. این پتانسیل در فیزیک اتمی کاربرد زیادی دارد [۲۷،۳۷].

¹⁶ Hellmann potential

حال به معرفی روشهای حل معادله شرودینگر می پردازیم.

۱۱-۲ روش ابرتقارن

در طول ۲۰ سال گذشته، چارچوب مفهومی جدیدی برای درک مسائلی که در مکانیک کوانتومی به صورت بالقوه تحلیل پذیر هستند، با استفاده از ایده های گرفته شده از نظریه میدان کوانتومی توسعه داده شده است. این چارچوب جدید، ابرتقارن نام دارد [۳۸]. به صورت خلاصه، ابرتقارن، تقارنی است که فرمیون ها و بوزون ها را به هم مرتبط می سازد. بر طبق این نظریه، بوزون ها (یعنی مبادله کننده های برهمکنش) به فرمیون ها (یعنی سازندگان اصلی ماده) توسط یک ابرتقارن به یکدیگر وابسته اند. ابرتقارن (SUSY) به عنوان پاسخی به تلاش فیزیکدانان برای بدست آوردن توضیحاتی برای وحدت تمام فعل و انفعالات اساسی طبیعت به وجود آمد. SUSY با درجه های آزادی بوزونی و فرمیونی و ترکیب آنها که ظرافت بیشتری را از طبیعت فراهم می کند به صورت ابرمیدان مرتبط است.

جبر درگیر در SUSY جبر "لای مدرج" است که تحت ترکیبی از روابط بسته جابجایی و پاد جابجاییست. ابرتقارن در ساده ترین حالتش، یعنی به صورت مکانیک کوانتومی ابرتقارنی، اولین بار توسط کوپر، فریدمن و ویتن مورد بررسی قرار گرفت. این افراد نشان دادند زمانی که از مفهوم ابرتقارن در مکانیک کوانتومی استفاده شود منجر به یک روش جدید برای ایجاد هامیلتونین هایی با طیف مشابه می شود. در اینجا لازم به ذکر است که تاکنون هیچ شواهدی تجربی از ابرتقارن بودن در طبیعت مشاهده نشده است. با این وجود در پانزده سال گذشته، ایده های SUSY رویکردهای جدیدی را به دیگر شاخه های فیزیک مانند اتمی، مولکولی، هسته ای، آماری و فیزیک ماده چگال و همچنین مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی ایجاد کرده است. به طور ساده، SUSY شکسته نشده منجر به تبهگنی بین طیف بوزون ها و فرمیون ها در یک نظریه واحد می شود. از آنجایی که این پدیده در طبیعت مشاهده نشده است ما نیازمند یک ابرتقارنیم که به خودی خود شکسته شود. تنها در این صورت است که این مساله می تواند توجیه شود. هنگامی که دانشمندان شروع به مطالعه جنبه های

مختلف مکانیک کوانتومی ابرتقارن (SUSYQM) کردند، به زودی روشن شد که در این زمینه نه فقط به خودی خود بلکه به عنوان یک مدل برای تست روش های نظریه میدان جالب است. در آن زمان بود که دانشمندان متوجه شدند که SUSYQM دیدی نسبت به روش فاکتور گیری Hull و Infeld می دهد که اولین تلاش برای دسته بندی مسائلی بود که بالقوه قابل حل تحلیلی بودند [۳۸]. با استفاده از مکانیک کوانتومی ابرتقارنی، بسیاری از مسائل و پتانسیل هایی که به طور تحلیلی قابل حل نیستند و یا تحت شرایط خاصی قابل حل می باشند، به آسانی حل می شوند. با استفاده از اصول ناوردایی شکل براحتی پتانسیل هایی مانند پاش-تلر، اکارت، ویگنر-اکارت و روزن-مورس حل شده اند. همچنین می توان اختلاف انرژی ترازهای مختلف را با استفاده از ابرتقارن در روش هایی تقریبی مانند روش وردشی بدست آورد. علاوه بر این می توان معادلات پائولی و دیراک را با استفاده از آن حل کرد [۳۹].

در سال ۱۹۸۱ ویتن برای آنکه یک مدل ساده غیر نسبیتی برای سازوکار شکست خود بخودی ابرتقارن فراهم کند مکانیک کوانتومی ابرتقارن را بر پایه ساده ترین شکل ممکن جبری معرفی کرد. فرمول بندی ویتن از مکانیک کوانتومی ابرتقارنی توجه زیادی را در دو دهه گذشته به خود جلب کرده است. در این فصل ما به طور خلاصه این فرمول بندی و نماد گذاری را معرفی می کنیم.

۱-۲-۱ چگونگی ساخت هامیلتونی و پتانسیل های همتا

یکی از کاربردهای ابرتقارن در مکانیک کوانتومی (مکانیک کوانتومی ابرتقارنی) حل معادلات کوانتومی مانند معادله شرودینگر در حضور پتانسیل های مختلف می باشد. به این ترتیب که می توان با استفاده از پتانسیل های ساده، پتانسیل های مشکل را ساخت و ویژه توابع و ویژه مقادیر مربوط به پتانسیل های حل شده را با روش عملگری به ویژه توابع و ویژه مقادیر پتانسیل های حل نشده تبدیل کرد. این روش کم و بیش شبیه به حل نوسانگر هارمونیک یک بعدی است. در نوسانگر هارمونیک یک بعدی با استفاده از عملگرهای نردبانی A و A^+ و با داشتن یک تابع موج می توان توابع موج مراتب بالاتر را بدست آورد. در این قسمت هامیلتونین های ابرتقارنی و چگونگی کاربرد آنها را ذکر می کنیم.

هامیلتونی زیر را در نظر می گیریم:

$$H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (27-2)$$

که ویژه توابع را با $\psi_n^{(1)}(x)$ و ویژه مقادیر آن را با E_n نمایش می دهیم. برای حالت پایه داریم:

$$H\psi_0(x) = E\psi_0(x) \quad (28-2)$$

که در آن E_0 انرژی حالت پایه است. حال $V_1(x)$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$V_1(x) = V(x) - E_0 \quad (29-2)$$

در این صورت هامیلتونی متناظر با پتانسیل $V_1(x)$ عبارتست از:

$$H_1(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (30-2)$$

واضح است که مقدار انرژی حالت پایه این هامیلتونی صفر است و انرژی ترازهای دیگر نسبت به انرژی H به اندازه E_0 کاهش یافته است و چون $V(x)$ و $V_1(x)$ به جز در یک مقدار ثابت با یکدیگر یکسانند، بنابراین دارای ویژه توابع یکسانی هستند. اگر ویژه مقدار انرژی متناظر با پتانسیل $V_1(x)$ ، $E_n^{(1)}$ و ویژه توابع آن $\psi_n^{(1)}(x)$ باشند داریم:

$$E_n^{(1)} = E_n - E_0 \quad , \quad \psi_n^{(1)} = \psi_n \quad (31-2)$$

هامیلتونی H_1 را به صورت حاصلضرب دو عملگر می نویسیم:

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{d}{dx} + W(x) \right) \left(\frac{d}{dx} + W(x) \right) \quad (32-2)$$

که در آن $W(x)$ ابرپتانسیل است. اگر دو عملگر A و A^+ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (33-2)$$

هامیلتونی H_1 به صورت زیر بدست می آید:

$$H_1 = A^+ A = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (34-2)$$

با جایگذاری معادلات (۳۳-۲) در معادله (۳۴-۲)، پتانسیل $V_1(x)$ بر حسب ابرپتانسیل $W(x)$ به صورت زیر بدست می آید:

$$H = \left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (۳۵-۲)$$

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (۳۶-۲)$$

چون انرژی حالت پایه صفر است داریم:

$$A\psi_0^1(x) = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \psi_0^{(1)}(x) = 0 \quad (۳۷-۲)$$

از رابطه اخیر می توان $W(x)$ را بر حسب $\psi_0^{(1)}(x)$ و بالعکس بدست آورد:

$$W(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(1)}(x) \right) \quad (۳۸-۲)$$

$$\psi_0^1(x) = N_0 \exp \left(-\int^x W(x') dx' \right) \quad (۳۹-۲)$$

در این معادلات N_0 ضریب بهنجارش می باشد. هامیلتونی دیگری را به صورت زیر می سازیم:

$$H_2 = A^+ A = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (۴۰-۲)$$

با قرار دادن معادلات (۳۳-۲) در معادله (۴۰-۲)، $V_2(x)$ بر حسب $W(x)$ بدست می آید:

$$V_2(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (۴۱-۲)$$

پتانسیل های $V_1(x)$ و $V_2(x)$ را پتانسیل های همتا و H_1 و H_2 را هامیلتونی همتا می نامند.

۲-۲-۱۱ اصول نوردایی شکل

تاکنون اصول مربوط به ساختن هامیلتونی، ابرپتانسیل و پتانسیل های همراه را با استفاده از قوانین مکانیک کوانتومی ابرتقارنی بیان کردیم. حال به چگونگی استفاده از این قوانین برای بدست آوردن ویژه انرژی های معادله شرودینگر در حضور پتانسیل های مختلف می پردازیم. برای اینکار لازم است ابتدا اصول نوردایی شکل را که اولین بار توسط گلدشتاین بیان شد معرفی نماییم. اصول نوردایی

شکل، در سال ۱۹۳۰ توسط گلدشتاین به این صورت بیان شد که اگر بتوان پتانسیل های همراه را توسط نگاشت متغیرهای آن به صورتی تبدیل کرد که اختلاف آنها تنها در یک مقدار ثابت باشد. آنگاه ویژه انرژی های مراتب بالاتر به سادگی توسط رابطه زیر بدست می آیند [۳۸،۴۰،۴۱]:

$$V_+(a_0, x) = V_-(a_1, x) + R(a_1) \quad (۴۲-۲)$$

$$E_0^{(k)} = \sum_{i=0}^k R(a_i) \quad (۴۳-۲)$$

$$E_{nl} = E_{nl}^{(-)} + E_0 \quad (۴۴-۲)$$

در رابطه (۴۲-۲) a_1 تابعی از a_0 است. از معادلات بالا در بدست آوردن ویژه انرژی های پتانسیل های مختلف به طور وسیعی استفاده می شود.

۱۲-۲ کلیات روش ^{19}NU

این روش براساس تقلیل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، در اینجا معادله شرودینگر، به یک معادله از نوع فوق هندسی پایه ریزی شده است [۴۲]. پس از انتخاب یک تغییر متغیر مناسب، $s = s(r)$ معادله تبدیل یافته را به صورت زیر داریم:

$$\Psi_n''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \Psi_n'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \Psi_n(s) = 0 \quad (۴۵-۲)$$

که σ و $\tilde{\sigma}$ چند جمله ایهایی حداکثر از درجه دوم و $\tilde{\tau}$ یک چندجمله ای حداکثر از درجه اول است. با در نظر گرفتن تابع موج $\Psi_n(s)$ به صورت زیر داریم:

$$\Psi_n(s) = \phi_n(s) y_n(s) \quad (۴۶-۲)$$

معادله (۴۵-۲) به صورت یک معادله از نوع فوق هندسی تقلیل داده می شود [۴۶]:

$$\sigma(s) y_n''(s) + \tau(s) y_n'(s) + \lambda y_n(s) = 0 \quad (۴۷-۲)$$

که در آن

¹⁹ The Nikiforov-Uvarov

$$\sigma(s) = \pi(s) \frac{\phi(s)}{\phi'(s)} \quad (48-2)$$

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad , \quad \tau' < 0 \quad (49-2)$$

λ پارامتری است که به صورت زیر تعریف می شود [42]:

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2} \sigma''(s) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (50-2)$$

چندجمله ای $\tau(s)$ با علامت پریم نشان می دهد که باید مشتق مرتبه اولش منفی باشد.

باید به این نکته توجه کرد که λ و λ_n از یک جواب خاص شکل $y(s) = y_n(s)$ که چندجمله ای

درجه n است بدست می آیند، بعلاوه اینکه جمله $y_n(s)$ تابع موج معادله (2-46)، یک تابع از نوع فوق

هندسی که از رابطه ردیگز ذیل بدست می آید [42]:

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho_n} \frac{d^n}{ds^n} (\sigma^n(s) \rho(s)) \quad (51-2)$$

که در آن B_n ثابت نرمالیزاسیون است و $\rho(s)$ تابع وزنی است که باید شرط زیر را برآورده کند

$$\frac{d}{ds} \omega(s) = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \omega(s) \quad \omega(s) = \sigma(s) \rho(s) \quad (52-2)$$

تابع $\pi(s)$ و پارامتر λ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + K\sigma(s)} \quad (53-2)$$

$$\lambda = K + \pi'(s) \quad (54-2)$$

از آنجاییکه باید $\pi(s)$ حداکثر یک چندجمله ای درجه یک باشد، جملات زیر رادیکال در معادله (53-2)

(2) باید به صورت یک چند جمله ای درجه اول مرتب شوند که این در صورتی ممکن است که

مشخص کننده آن، $\Delta = b^2 - 4ac$ ، صفر باشد. در این حالت یک معادله برای K بدست می آید که

پس از حل معادله مقادیر بدست آمده برای K را در معادله (53-2) جایگذاری می کنیم و با مقایسه با

معادلات (50-2) و (54-2) ویژه مقادیر انرژی را بدست می آوریم. قابل ذکر است که ویژه مقادیر

انرژی و ویژه توابع وابسته اشان را برای سیستمی تحت یک پتانسیل غیر مرکزی معین به آسانی می

توان با بکار بستن روش NU بدست آورد البته باید توجه داشت همانطور که قبلا هم اشاره شد، این روش همچون روشهای دیگر در حل معادله شرودینگر با هر نوع پتانسیل غیرمرکزی دلخواه ناکارآمد است و تنها با نوع خاصی از پتانسیلها که الزامات روش را برآورده می کنند، می توان از این روش به نتیجه مطلوب رسید.

۱۳-۲ دستگاه مختصات ژاکوبی^{۲۰}

در یک سیستم دو نوکلئونی کمیت هایی که نیرو به آنها وابسته است عبارتند از: r_{12} یعنی برداری که مکان ذره ۱ را به ۲ ارتباط می دهد، $P_{12} = P_2 - P_1$ یعنی تکانه نسبی آنها و S که اسپین کل است و تکانه زاویه ای مداری آنها یعنی $L = r_{12} \times p_{12}$. حال اگر سیستم مورد مطالعه ما یک سیستم A ذره ای باشد در این صورت معادله ی شرودینگر مستقل از زمان آن به صورت $H\Psi = E\Psi$ نوشته می شود که در آن هامیلتونی به صورت زیر معرفی می شود [۴۳، ۴۴]:

$$H = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j \\ i < j}}^N \left(\frac{p_i}{2m_i} + V(r_i) + V(r_i, r_j) \right) \quad (۵۵-۲)$$

$i \neq j$ به این معنا که : هیچ ذره ای با خودش بر هم کنش ندارد.

$i < j$ از نوشتن جملات تکراری صرفنظر می شود.

$V(r_i)$ پتانسیل محبوس کننده که اثرات محیطی را شامل می شود، مثلا وقتی ذره ای تحت تأثیر میدان الکتریکی یا مغناطیسی باشد تأثیر این میدان های خارجی بر روی ذره را در $V(r_i)$ مشاهده می کنیم. $V(r_i, r_j)$ این جمله شامل بر هم کنش هر دو ذره با یکدیگر است. برای حل معادلات نیاز به دستگاه مختصات مناسب برای آن مسأله داریم. یکی از این دستگاه های مختصات که برای مجموعه ای A ذره ای مورد استفاده قرار می گیرد، مختصات ژاکوبی می باشد. برای یک سیستم A ذره ای میتوان $N=A-1$ بردار ژاکوبی و در نتیجه $3N$ مختصه ژاکوبی تعریف کرد و در هر تعریف هر

²⁰Jacobi coordinate

بردار ژاکوبی در واقع مرکز جرم یک زیر سیستم را به ذرات باقی مانده وصل می کند [۴۵]. وقتی ذرات مورد بررسی نوکلئون ها باشند میتوان با چشم پوشی از اختلاف جرم بین پروتون و نوترون، ذرات سیستم را هم جرم در نظر گرفت. برای چنین سیستمی میتوان N بردار ژاکوبی را به صورت زیر تعریف کرد [۴۶]:

$$\vec{\xi}_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \vec{r}_j - \vec{r}_{i+1} \right) \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (56-2)$$

$\vec{\xi}_i$ بردار مکان هر نقطه نسبت به مرکز نقاط قبلی است. بردار مرکز جرم برای هر A ذره به صورت زیر تعریف می شود:

$$R = \frac{1}{A} (r_1 + r_2 + \dots + r_A) = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A r_i = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} r_i \quad (57-2)$$

المان حجم در این مختصات به صورت زیر است:

$$\prod_{i=1}^N d\vec{r}_i = N^{\frac{3}{2}} dR \prod_{j=1}^{N-1} d\vec{\xi}_j = dx \quad (58-2)$$

اگر پتانسیل بین ذرات تنها وابسته به توان هایی از فاصله نسبی آنها باشند می توان آنها را بر حسب ابر شعاع نوشت. در این صورت به این پتانسیل ها، پتانسیل های فوق مرکزی می گویند.

۱۴-۲ روش های رایانه ای و عددی

یکی از بهترین روش های موجود برای بررسی ساختار و رفتار مواد روش های رایانه ای و عددی می باشد. روش های رایانه ای از لحاظ کم هزینه بودن، کنترل پذیر بودن و برخی مزایای دیگر نسبت به روش های آزمایشگاهی برترند. امروزه با پیشرفت فناوری رایانه ها روش های رایانه ای نقش به سزایی در پیشبرد و اثبات نظریه و فرضیه های علمی دارد. حتی جهت بررسی و تحلیل سیستم های چند ذره ای نیز می توان از روش های رایانه ای و عددی بهره جست. به این منظور در ابتدای امر باید

پتانسیلی میان ذرات در نظر بگیریم. این کار یعنی انتخاب پتانسیل بین ذرات که اصول و قواعد خاص خود را می طلبد.

۱-۲-۱۴ پتانسیل های بین ذره ای و روش های رایانه ای

شناخت پتانسیل بین ذرات یکی از پایه های اصلی برای شناخت و توصیف و پیش بینی رفتار ذرات می باشد. معمولا به دلیل وجود تعداد زیاد ذره ها در یک دستگاه تعیین شکل دقیق پتانسیل واقعی میسر نیست. در عمل پتانسیل با تقریب و بر اساس ملاحظات پدیده شناختی انتخاب می شود. اهمیت و درستی اکثر نتایج حاصل از محاسبات رایانه ای و آنچه آنها از رفتار واقعی حالت های مختلف مواد و گذار حالت تحت شرایط مختلف را نشان می دهند به انتخاب صحیح انرژی پتانسیل بستگی دارد. در شبیه سازی های کلاسیک همه اثر های کوانتومی دستگاه های بس ذره ای در پتانسیل بین ذره ای نهفته است. برای مدل سازی فیزیکی اقسام مختلف مواد مثل فلز ها، نیم رساناها و غیره پتانسیل های بس ذره ای مختلفی توسعه داده شده اند. پتانسیل های مورد استفاده در شبیه سازی ها اغلب مرکزی اند. یعنی فقط به فاصله ذرات وابسته اند. یک پتانسیل بس ذره ای را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$U_{pot} = \sum_i u_1(\vec{r}_i) + \sum_i \sum_{j>i} u_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \sum_i \sum_{j>i} \sum_{k>j>i} u_3(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k) \quad (۵۹-۲)$$

در این رابطه شاخص های i, j مشخص کننده ذره ها هستند. جمله اول سمت راست نشان دهنده وجود پتانسیل خارجی اعمال شده بر ذره های دستگاه است. این جمله معمولا در نظر گرفته نمی شود. جمله دوم عبارت است از برهمکنش های دو ذره ای بین ذره ها که معمولا مقدار آن فقط به فاصله نسبی دو ذره از یکدیگر یعنی $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ بستگی دارد. جمله های بالاتر برهمکنش های سه ذره ای و چهار ذره ای و ... را نشان می دهند. در اکثر شبیه سازی ها از برهمکنش های مراتب بالاتر صرف نظر می شود و در عوض از یک پتانسیل دو ذره ای موثر که می تواند به دما و چگالی وابسته باشد برای به حساب آوردن اثر متوسط جمله های صرف نظر شده استفاده می شود:

$$u(\vec{r}) = \sum_i \sum_{j>i} u(\vec{r}_{ij}) \quad (۶۰-۲)$$

که در آن $u(\bar{r}_{ij})$ انرژی پتانسیل برای جفت ذره های i, j با جدایی \bar{r}_{ij} است. استفاده از این تقریب بیشتر برای دستگاه های رقیق مناسب است. در فاز های متراکم مانند مایعات و جامدات برهمکنش های چند ذره ای بالاتری رخ می دهند که باید در انرژی پتانسیل کل آنها را لحاظ کرد.

در نظر گرفتن برهمکنش های چند ذره ای در تعیین بعضی خواص مایعات اتمی اهمیت ویژه ای دارد. مثلاً برای آرگون مایع صرف نظر کردن از برهمکنش های سه تایی در محاسبه کشش سطحی باعث ۲۵٪ خطا می شود. از آنجایی که اکثر محاسبات در نانو فناوری مرطوب روی فاز های رقیق است به نظر می رسد که استفاده از پتانسیل دو ذره ای موثر مناسب باشد. در حقیقت بیشتر تعیین پتانسیل به صورت پدیده شناختی در عمل دارای دو مرحله می باشد. در مرحله اول با توجه به نوع ذره های دستگاه و برهمکنش های بین آنها شکلی برای پتانسیل بین ذره ای دستگاه حدس زده می شود که با آن برخی شبیه سازی های اولیه انجام می شود. در مرحله بعد با مقایسه نتایج حاصل از شبیه سازی اولیه و نتایج تجربی شکل پتانسیل بهسازی می شود. این فرایند چندین بار تکرار می شود تا نتایج حاصل از شبیه سازی و تجربه یکسان شوند. در برخی شبیه سازی علاوه بر محاسبه پتانسیل بین ذره ای برای تعیین مسیر ذرات دستگاه نیاز به محاسبه نیروهای بین ذره ای هم داریم. برای محاسبه نیروی بین ذره ای باید از پتانسیل بین ذره ای نسبت به مکان ذرات دستگاه مشتق بگیریم. اگر شکل پتانسیل بین ذره ای پیچیده باشد و تعداد ذره های دستگاه نیز خیلی زیاد باشد محاسبه صریح مقدار پتانسیل و مشتق های آن در برنامه شبیه سازی بسیار زمان بر می شود. در چنین مواردی بهتر است به جای محاسبه صریح پتانسیل و مشتق های آن در برنامه اصلی از جدول جستجو استفاده کنیم. روش کار به این صورت است که قبل از اجرای برنامه اصلی شبیه سازی برنامه دیگری را اجرا می کنیم که فقط مقدار عددی پتانسیل و مشتق های مورد نیاز آن را از برنامه اصلی بر حسب r_{ij}^2 محاسبه و در جدولی ذخیره می کند. در هنگام اجرای برنامه اصلی با استفاده از الگوریتم های درونیابی از داده های عددی جدول ایجاد شده برای یافتن مقدار عددی پتانسیل و مشتق هایش

در هر مکان استفاده می کنیم. ولی بیشتر برهمکنش های بنیادی در فیزیک معمولاً به صورت مرکزی و دو ذره ای می باشد.

۱۵-۲ حل معادلات دیفرانسیل به روش Runge-Kutta

در بسیاری از مسائل علوم و مهندسی وقتی به صورت ریاضی مدل سازی می شوند، به سادگی در قالب یک معادله دیفرانسیل معمولی با مقدار اولیه یا شرایط مرزی بیان می گردند. شاید نتوان فرم کلی جواب ها را برای هر مسئله مدل سازی شده بدست آورد ولی با استفاده از کامپیوتر و روش هایی عددی می توان آنها را حل کرد. از نظر محاسباتی، اغلب روش های کارآمد از نظر دقت، توسط دو ریاضی دان مشهور رانگ و کوتا^{۲۱} توسعه یافته اند. این روش ها به رانگ کوتا R-K مشهورند. این روش ها با توجه به مرتبه ی شان تمیز داده می شوند، یعنی مطابقت آن ها با جواب های سری تیلور تا جمله h^r که مرتبه روش است. روش R-K4 برای حل عددی معادلات خطی و غیر خطی بطور گسترده استفاده می شود که بسط آن از نظر جبری پیچیده است. ایده ی اصلی این روش ها را با روش R-K2 بررسی می کنیم [۴۷]. ایده اصلی این روش، (میانگین شیب ها) است. یعنی:

$$y_{n+1} = y_n + hx \quad (۶۱-۲)$$

مسأله مقدار اولیه را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_n) = y_n \quad (۶۲-۲)$$

$$k_2 = hf(t_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \quad , \quad k_1 = hf(t_n, y_n) \quad (۶۳-۲)$$

میانگین وزنی k_1 و k_2 را انتخاب و برای تعیین y_{n+1} به y_n اضافه می کنیم.

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \quad (۶۴-۲)$$

α, w_2, w_1 و β مقادیر ثابتی هستند که باید تعیین شوند.

²¹ Runge-Kutta

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y'''(t_n) + \dots \quad (۶۵-۲)$$

رابطه (۶۵-۲) با استفاده از روابط (۶۳-۲) و (۶۱-۲) به صورت زیر در می آید:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} (f_t + ff_y) + \frac{h^3}{6} [f_{tt} + 2ff_{ty} + f^2 f_{yy} + f_y (f_t + ff_y)] + o(h^4) \quad (۶۶-۲)$$

در این جا همه مشتقات در نقطه (t_n, y_n) محاسبه شده اند [۴۷].

با قراردادن معادلات (۶۳-۲) معادله ی (۶۶-۲) به صورت زیر در می آید:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 hf(t_n, y_n) + w_2 hf(t_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \quad (۶۷-۲)$$

حال با استفاده از بسط سری تیلور دو متغیره، داریم:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 hf(t_n, y_n) + w_2 h \quad (۶۸-۲)$$

$$\left[f(t_n, y_n) + (\alpha hf_t + \beta k_1 f_y) + \left(\frac{\alpha^2 h^2}{2} f_{tt} + \alpha h \beta k_1 f_{ty} + \frac{\beta^2 k_1^2}{2} f_{yy} \right) \right] + o(h^3)$$

از قرار دادن عبارت K_1 در معادله ی بالا و سپس مرتب کردن بر حسب توان های صعودی h داریم:

$$y_{n+1} = y_n + (w_1 + w_2) hf + w_2 h^2 (\alpha f_t + \beta f f_y) + w_2 h^3 \left(\frac{\alpha^2}{2} f_{tt} + \alpha \beta f f_{ty} + \frac{\beta^2}{2} f_{yy} \right) + o(h^4) \quad (۶۹-۲)$$

با مساوی قراردادن ضرایب در معادلات (۶۹-۲) و (۶۶-۲) داریم:

$$w_1 + w_2 = 1 \quad w_2 (\alpha f_t + \beta f f_y) = \frac{f_t f_y}{2} \quad (۷۰-۲)$$

که نتیجه می شود:

$$k_2 = hf \left(t + \frac{3}{2} h, y + \frac{3}{2} k_1 \right) \longrightarrow \begin{aligned} w_1 &= 1 - w_2 \\ \alpha &= \frac{1}{2w_2} \\ \beta &= \frac{1}{2w_2} \end{aligned} \quad (۷۱-۲)$$

w_2 دلخواه است و مقادیر گوناگونی را می توان به آن اختصاص داد [۴۷].

حالت اول:

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow \alpha = \beta = 1 \quad (۷۲-۲)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (۷۳-۲)$$

$$k_1 = hf(t, y) \quad (۷۴-۲)$$

$$k_2 = hf\left(t + \frac{3}{2}h, y + \frac{3}{2}k_1\right) \quad (۷۵-۲)$$

حالت دوم:

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow \alpha = \beta = 1 \quad (۷۶-۲)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (۷۷-۲)$$

$$k_1 = hf(t, y) \quad (۷۸-۲)$$

$$k_2 = hf(t + h, y + k_1) \quad (۷۹-۲)$$

به روشی مشابه، فرمول R-K از هر مرتبه را می توان به دست آورد. هرچند که مشتقات آنها بسیار طولانی و پیچیده می شود. از بین آنها R-K4 متداول تر و مرسوم تر است [۴۶].

۱-۲-۱۵ مراحل روش R-K4

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (۸۰-۲)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n) \quad (۸۱-۲)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (۸۲-۲)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (۸۳-۲)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3) \quad (۸۴-۲)$$

فصل سوم

لېتيم

۳-۱ مقدمه

لیتیم (گرفته شده از واژه ی یونانی *lithos* به معنی سنگ) با نماد شیمیایی Li یک فلز قلیایی نقره‌ای-سفید و نرم با عدد اتمی ۳ است. این عنصر در شرایط استاندارد دما و فشار سبک ترین فلز و کم چگالی ترین عنصر جامد است. مانند دیگر فلزهای قلیایی، لیتیم هم بسیار واکنش پذیر و آتشگیر است به همین دلیل بیشتر آن را زیر روغن صنعتی نگاه می‌دارند. اگر بر روی آن برشی پدید آید، بخش بریده شده دارای جلای فلزی خواهد بود اما به دلیل واکنش پذیری زیاد آن خیلی زود با رطوبت هوا واکنش می‌دهد، هوا باعث خوردگی آن می‌شود و به رنگ نقره‌ای تیره مایل به خاکستری و سپس سیاه در می‌آید. به دلیل واکنش پذیری بالای لیتیم، هرگز نمی‌توان آن را به صورت عنصر آزاد در طبیعت پیدا کرد. بلکه همواره در بخشی از یک ترکیب شیمیایی که بیشتر یونی است، پیدا می‌شود. لیتیم در چندتا از کانی‌های پگماتیستی یافت می‌شود اما از آنجایی که در آب حل می‌شود، به صورت یون در آب اقیانوس‌ها و به صورت نمک در آب‌ها و رس دیده می‌شود. در رویکرد تجاری، لیتیم را از برق کافت آمیخته‌ای از لیتیم کلرید و پتاسیم کلرید بدست می‌آورند.

لیتیم و ترکیب‌های آن کاربردهای فراوانی دارند از آن جمله در شیشه و سرامیک پایدار در برابر گرما، آلیاژهای با مقاومت بالا نسبت به وزن که در فضاپیماها کاربرد دارد، باتری‌های لیتیم و لیتیم-یون. کاربردهای یاد شده بیش از نیمی از لیتیم تولیدی را از آن خود می‌کند.

در ظاهر این طور به نظر می‌رسد که لیتیم هیچ نقشی در زندگی حیوان‌ها و گیاهان ندارد و آنها بدون لیتیم هم می‌توانند زنده بمانند، اما در عمل در همه ی اندام‌های زنده می‌توان ردپای بسیار کم رنگ لیتیم را پیدا کرد. یون لیتیم که در قالب نمک‌های گوناگون پیدا می‌شود بر روی اعصاب انسان اثر می‌گذارد و می‌تواند به عنوان دارو در درمان اختلال دوقطبی کمک کند.

لیتیم فلز نایابی نیست. میزان لیتیم موجود در پوسته زمین برابر با ۰,۰۰۶ درصد است که بنظر کم می‌آید اما همین اندازه نیز از موجودی فلزات دیگر مانند قلع و جیوه بیشتر می‌باشد. تنها فرقی که میان لیتیم و دیگر فلزها وجود دارد، وضعیت پراکندگی آن بر روی کره زمین است. نخست آنکه مکانهایی که لیتیم در آنجا گرد آمده‌است زیاد نیستند. منابع قابل توجه و شناخته شده لیتیم بر روی زمین شیلی، آرژانتین، تبت، چین، ایالت نوادای آمریکا و بولیوی می‌باشند. این در حالیست که منابع بولیوی که معدن شناسان میزان ذخایرش را برابر با ذخایر افغانستان تخمین می‌زنند، هنوز آغاز به بهره برداری نکرده است.

۲-۳ فیزیکی و اتمی

مانند دیگر فلزهای قلیایی، لیتیم تنها یک الکترون در لایه ی ظرفیت دارد که دوست دارد آن را به آسانی از دست دهد و تبدیل به کاتیون شود [۴۸]. به همین دلیل لیتیم یک رسانای خوب گرما و جریان برق است و واکنش پذیری بسیار بالایی دارد. با این وجود از نظر واکنش پذیری در میان فلزهای قلیایی رتبه ی آخر را دارد. این واکنش پذیری کم نسبت به دیگر عنصرهای گروه، به دلیل نزدیکی زیاد الکترون‌های لایه ی ظرفیت به هسته ی اتم لیتیم است. چون دو الکترون باقی مانده در تراز ابر الکترونی 1s جای می‌گیرند که تراز انرژی بسیار پایینی دارد برای همین در پیوندهای شیمیایی شرکت نمی‌کنند.

فلز لیتیم آنقدر نرم است که با چاقو بریده شود. هنگامی که بریده شد یک سطح نقره‌ای-سفید از آن دیده می‌شود. این رویه خیلی زود اکسید می‌شود و به رنگ خاکستری در می‌آید. لیتیم دارای یکی از پایین ترین نقطه ی ذوب‌ها (180 °C) در میان همه ی فلزها است در حالی که در میان فلزهای قلیایی، بالاترین نقطه ی ذوب و جوش را دارد [۴۹].

لیتیم سبک ترین فلز جدول تناوبی است با چگالی نزدیک به $0.534 \frac{g}{cm^3}$ و یکی از سه فلزی است که روی آب و حتی روغن، شناور می ماند (دو فلز دیگر سدیم و پتاسیم است). لیتیم کم چگالی ترین عنصری است که در دمای اتاق گاز نیست. سبک ترین عنصر پس از لیتیم، پتاسیم است که بیش از ۶۰٪ آن چگالی دارد. برای نمونه لیتیم تنها ۲/۳ نیتروژن مایع چگالی دارد.

ضریب انبساط گرمایی لیتیم دو برابر آلومینیم و نزدیک به چهار برابر آهن است. می توان گفت لیتیم دارای بالاترین ظرفیت گرمایی در میان همه ی عنصرهای جامد است. لیتیم در فشار معمولی، در دمایی پایین تر از $400 \mu K$ ابررسانا می شود و در فشارهای بالا، بیش از ۲۰ گیگاپاسکال، در دمایی بیش از ۹ کلوین ابررسانا می گردد [۵۱،۵۰]. در فشارهای بالا، چندشکلی های گوناگونی از لیتیم گزارش شده است [۵۲].

لیتیم به دلیل ظرفیت گرمایی بسیار بالایی که نسبت به دیگر عنصرهای جامد دارد بیشتر در سردکننده ها برای جابجایی گرما به کار گرفته می شود.



شکل (۱-۳) لیتیم

۳-۳ شیمیایی و ترکیب ها

لیتیم به سادگی با آب واکنش می‌دهد ولی انرژی بسیار کمتری نسبت به دیگر فلزهای قلیایی در این واکنش پدید می‌آید. محصول‌های این واکنش گاز هیدروژن و هیدروکسید لیتیم در محلول آبی است. هنگامی که لیتیم در برابر آتش قرار گیرد، ترکیب‌های آن رنگ لاکه (قرمز سیر) از خود نشان می‌دهند اما در صورتی که این ماده آتش گیرد، شعله به رنگ نقره‌ای در خواهد آمد. هرگاه لیتیم در تماس با آب یا بخار آن، قرار گیرد شعله ور می‌شود و با اکسیژن می‌سوزد [۵۳].

لیتیم به خودی خود آتشگیر است و توان انفجار دارد بویژه هنگامی که در هوای آزاد و در تماس با آب قرار گیرد. با این حال این ویژگی لیتیم نسبت به دیگر فلزهای قلیایی، از همه کم‌رنگ تر است. واکنش لیتیم با آب در دمای معمولی، به تندی صورت می‌گیرد اما آسیب رسان نیست و هیدروژن تولیدی به خودی خود آتش نمی‌گیرد. مانند دیگر فلزهای قلیایی، خاموش کردن آتش لیتیم کمی دشوار است. لیتیم تنها فلزی است که در دمای معمولی و شرایط معمولی با نیتروژن واکنش می‌دهد. لیتیم یک سری همانندی‌های قطری هم با منیزیم دارد. این دو فلز دارای شعاع اتمی و یونی یکسان اند.

۳-۴ ایزوتوپ

6Li و 7Li دو ایزوتوپ پایدار لیتیم و دارای بیشترین فراوانی (۹۲,۵٪) است. این دو ایزوتوپ پایدار در مقایسه با دو عنصر سبک و سنگین همسایگی خود یعنی هلیم و بریلیم، به صورت غیر طبیعی، انرژی پیوستگی هسته‌ای پایینی به ازای هر هسته دارند. به جز دوتریوم و هلیم-۳، دو هسته ی لیتیم انرژی پیوستگی کمتری به ازای هر هسته، نسبت به هر هسته ی پایدار دیگری دارند [۵۴]. در نتیجه ی این پدیده، عنصر لیتیم با اینکه وزن اتمی کمی دارد اما در سامانه ی خورشیدی از دید فراوانی، در

میان ۳۲ عنصر، رتبه ی ۲۵ ام را دارد. هفت ایزوتوپ پرتوزا برای لیتیم پیدا شده است که پایدارترین آن‌ها ${}^8\text{Li}$ با نیمه عمر ۸۳۸ میلی ثانیه و ${}^9\text{Li}$ با نیمه عمر ۱۷۸ میلی ثانیه است. دیگر ایزوتوپ‌های پرتوزا نیمه عمری کمتر از ۸٫۶ میلی ثانیه دارند. ناپایدارترین ایزوتوپ این عنصر ${}^4\text{Li}$ با نیمه عمر 7.6×10^{-23} ثانیه است که در آن پروتون پرتوزایی می کند [۵۵].

${}^7\text{Li}$ یکی از عنصرهای بسیار کهن (یا دقیق تر بگوییم هسته‌های بسیار کهن) است که در جریان هسته‌زایی مهبانگ پدید آمده است. گمان آن می‌رود که مقدار اندکی از ${}^6\text{Li}$ و ${}^7\text{Li}$ در ستاره‌ها پدید می‌آید اما به همان سرعتی که ایجاد می‌شود به همان سرعت، می‌سوزد و دوباره مصرف می‌شود [۵۶]. علاوه بر این احتمالاً مقدار اندکی از ${}^6\text{Li}$ و ${}^7\text{Li}$ در اثر بادهای خورشیدی و برخورد پرتوهای کیهانی با اتم‌های سنگین ترو در نتیجه واپاشی ایزوتوپ‌هایی مانند ${}^7\text{Be}$ و ${}^{10}\text{Be}$ پدید می‌آیند. هنگامی که لیتیم در جریان هسته‌زایی ستاره‌ها پدید می‌آید دوباره سوخته و مصرف می‌شود. همچنین ${}^7\text{Li}$ در ستاره‌های کربنی هم می‌تواند تولید شود [۵۷]. فرایندهای طبیعی گوناگونی می‌توانند ایزوتوپ‌های لیتیم را تولید کنند. از جمله ی آن‌ها می‌توان به پدیده‌های شیمیایی هنگام ساخت کانی‌ها، دگرگشت و داد و ستدهای یونی اشاره کرد. یون لیتیم در کانی‌های رسی هشت وجهی جایگزین منیزیم و آهن می‌شود.

۳-۵ پیشینه ی شناسایی

شیمیدان برزیلی، خوزه بونیفاسیو جندراده نخستین کسی بود که کانی پتالیت ($\text{LiAlSi}_4\text{O}_{10}$) را شناسایی کرد. وی در سال ۱۸۰۰ میلادی در معدنی در یوتوی سوئد این کانی را پیدا کرد. هرچند، بر روی این کانی هیچ پژوهشی صورت نگرفت تا آنکه در سال ۱۸۱۷، شیمیدان سوئدی، یوهان آگوست آرفودسن که در آزمایشگاه یاکوب برسلیوس کار می‌کرد، دریافت که در این کانی عنصر تازه‌ای وجود دارد. این عنصر تازه، ترکیب‌هایی همانند سدیم و پتاسیم را می‌پذیرفت تنها با این

تفاوت که کربنات و هیدروکسید آن کمتر در آب حل می‌شود. برسلیوس این ماده ی قلیایی را لیتئون (*lithion/lithina*) نام نهاد، برگرفته از واژه ی یونانی لیتوس ($\lambda\iota\theta\omicron\varsigma$) به معنی «سنگ»؛ او به این دلیل این نام را برگزید تا نشان دهد که این عنصر را از یک کانی جامد بدست آورده‌است برخلاف پتاسیم که در میان خاکستر گیاهان شناسایی شد و همچنین در خون حیوانات هم به فراوانی یافت می‌شد. همچنین او به فلز درون ماده نام «لیتیم» را داد.

پس از چندی، آرفودسن نشان داد که این عنصر در کانی‌های دیگری هم وجود دارد. در ۱۸۱۸ کریستین گملین نخستین کسی بود که دریافت نمک‌های لیتیم شعله را به رنگ قرمز روشن در می‌آورند.

۳-۶ کاربرد

لیتیم یکی از اجزاء مهم در باطری‌های قابل شارژ است که در تلفن‌های همراه، رایانه‌های دستی و اتوموبیل‌های برقی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

آلیاژی از لیتیم و آلومینیوم هم اکنون در صنایع هواپیما سازی بکار گرفته می‌شود که سبک، قابل انعطاف و همزمان محکم و مقاوم است.

لیتیم نیروی کششی زیادی دارد، بخاطر کمی وزن خود گزینه بسیار مناسبی برای باتریهای کم وزن و پراثری می‌باشد. از این باتری ها در صنعت، پزشکی و نظامی کاربرد دارد. باتری های لیتیمی دارای سازگاری خاصی در خصوص شکل های غیرمعارف و کوچک ساخته شدن هستند که آنها را برای کاربرد در وسایل الکترونیکی ظریف مناسب می سازد.

لیتیم همراه با سرب آلیاژی را تولید می‌کند که در ساختن بلبرینگ چرخهای قطار بکار گرفته می‌شود. لیتیم حتی در صنایع داروسازی مورد مصرف دارد.

با این همه در مورد مصرف لیتیم هم در صنایع و همچنین در داروسازی توجه به یک نکته بسیار مهم می‌باشد. مرز میان سودمند بودن این ماده و سمی بودنش برای انسان و محیط زیست بسیار نازک و شکننده است.

فلز لیتیم برای احیا کردن به کار برده می‌شود.

لیتیم در عملیات متالوژی برای کارگیری و حذف ناخالصی‌ها بکار می‌رود.

در جدول (۱-۳) برخی از ویژگی‌های ایزوتوپ‌های لیتیم آورده شده است.

جدول (۱-۳) ویژگی‌های ایزوتوپ‌های لیتیم [۶۵]

گشتاور دو قطبی الکتریکی (b)	گشتاور تک قطبی مغناطیسی (nm)	اسپین (h/2 pi)	مد واپاشی / انرژی (MeV)	نیمه عمر	جرم اتمی	مقدار در طبیعت (%)
		3/2 ⁻		0.3*10 ⁻²¹ s	5.01254	⁵ Li
-0.0008b	0.82205nm	1 ⁺			6.015121	7.5 ⁶ Li
-0.041b	3.25644nm	3/2 ⁻			7.016003	92.5 ⁷ Li
0.032b	1.6536nm	2 ⁺	alpha/16.005 beta	0.84s	8.022458	⁸ Li
0.028b	3.439nm	3/2 ⁻	beta ⁻ /13.6068	0.177s	9.026789	⁹ Li
		1/2 ⁺	beta ⁻	8.7ms		¹¹ Li

فصل چهارم

محاسبه ی انرژی بستگی

ایزوتوپ های لیتیم

۴-۱ مقدمه

در این فصل حل دقیق و تحلیلی معادله‌ی شرودینگر را برای سیستم ۶ ذره‌ای (هسته لیتیم) در حضور پتانسیل‌های مرکزی مختلف ارائه داده‌ایم. بدین منظور از روش ابر تقارن استفاده نموده و انرژی بستگی هسته لیتیم را محاسبه کرده‌ایم. تطابق بسیار نزدیک انرژی بستگی محاسبه شده در مدل پیشنهادی ما با مقدار تجربی انرژی بستگی هسته لیتیم نشان دهنده‌ی آن است که مدل و روش حل به کار گرفته شده از کارایی خوبی برخوردار است.

در مکانیک کوانتومی معادله‌ی شرودینگر، معادله دیفرانسیلی است که نشان می‌دهد ترازهای کوانتومی بعضی از سیستم‌های فیزیکی با زمان تغییر می‌کند. این معادله در سال ۱۹۲۶ توسط فیزیکدان استرالیایی اروین شرودینگر منتشر شد. مشکل سیستم‌های کوانتومی چند ذره‌ای از سال ۱۹۲۶ در یک قالب ریاضی مختصر مطرح شد و معادله‌ی شرودینگر بر هم کنش چند ذره‌ای‌ها را به صورت جفت جفت با پتانسیل دو جسمی که در نهایت صفر می‌شود، بیان می‌کند.

از گذشته تاکنون روشهای حل مختلفی (از جمله روش $N-U$ ، روش Anzast و ...) برای معادله‌ی شرودینگر در سیستم‌های دو و سه ذره‌ای و در حضور پتانسیل‌های گوناگون ارائه شده است [۵۸]. یکی از مهمترین کارها در مکانیک کوانتومی، حل معادله شرودینگر با پتانسیل‌های فیزیکی است. در دهه گذشته، تلاشهای زیادی برای مطالعه معادله شرودینگر با پتانسیلهای مرکزی صورت گرفته است. ما در این پایانامه ابتدا به حل دقیق و تحلیلی معادله شرودینگر برای سیستمی شش ذره‌ای در حضور پتانسیل وودز - ساکسون و با استفاده از تقریب پکرینس و با بکارگیری روش ابر تقارن پرداخته‌ایم [۵۹-۶۳]. سپس این کار را با پتانسیل‌های دیگری نیز انجام داده ایم.

۴-۲ حل تحلیلی و دقیق معادله‌ی شرودینگر در حضور پتانسیل وودز - ساکسون

معادله‌ی شرودینگر در D بعد به شکل زیر است [۶۴]:

$$\left(\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\gamma(\gamma+D-2)}{r^2} \right) R + V(r)R = ER \quad , \quad D = 3N - 3 \quad (1-4)$$

که در آن N تعداد ذرات و γ عدد کوانتومی زاویه‌ای کل است.

۲-۴-۱ حل برای ${}^6\text{Li}$

معادله‌ی شرودینگر برای سیستم شش ذره‌ای ($D = 15$) به شکل زیر در می‌آید :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{14}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+13)}{r^2} \right) R + V(r)R = ER \quad (2-4)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{14}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+13)}{r^2} \right) R + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r))R = 0 \quad (3-4)$$

در ابتدا برای حل این معادله تابع موج را به صورت $U = Rr^{\frac{D-1}{2}} = Rr^7$ در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d^2 U}{dr^2} r^{-7} - 14r^{-8} \frac{dU}{dr} + 56r^{-9} U \quad , \quad \frac{dR}{dr} = \frac{dU}{dr} r^{-7} - 7r^{-8} U \quad (4-4)$$

با جایگذاری معادله (۴-۴) در معادله (۳-۴) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} r^{-7} - 42r^{-9} U - l(l+13)r^{-9} U + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) U r^{-7} = 0 \quad (5-4)$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \frac{\hbar^2 (l+6)(l+7)}{2\mu r^2} \right) U = 0 \quad (6-4)$$

که در آن l عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه‌ای و μ جرم کاهش یافته است. با جایگذاری پتانسیل وودز - ساکسون (رابطه (۲-۱۵)) در معادله‌ی شرودینگر (رابطه (۴-۶)) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} - \frac{\hbar^2 (l+6)(l+7)}{2\mu r^2} \right) U = 0 \quad (7-4)$$

پتانسیل موثر V_{eff} را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_{eff} = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} - \frac{\hbar^2(l+6)(l+7)}{2\mu r^2} \quad (۸-۴)$$

با استفاده از تغییر متغیرهای زیر:

$$r = R_0(x+1) \quad , \quad \frac{R_0}{a} = \alpha \quad (۹-۴)$$

و بسط زیر:

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots \quad (۱۰-۴)$$

معادله (۸-۴) به شکل زیر در می آید:

$$V_{eff} = \frac{V_0}{1 + \exp(\alpha x)} - \delta(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \dots) \quad (۱۱-۴)$$

که در آن متغیر δ به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\delta = \frac{\hbar^2(l+6)(l+7)}{2\mu R_0^2} \quad (۱۲-۴)$$

در سمت راست معادله (۸-۴) از تقریب پکرینس استفاده کرده و به جای $\frac{1}{r^2}$ عبارت زیر را جایگزین

می کنیم:

$$\left(d_0 + \frac{d_1}{1 + \exp(\alpha x)} + \frac{d_2}{(1 + \exp(\alpha x))^2} \right) \quad (۱۴-۴)$$

$F(x)$ و $G(x)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$G(x) = (1 + \exp(\alpha x))^{-2} \quad , \quad F(x) = (1 + \exp(\alpha x))^{-1} \quad (۱۵-۴)$$

حال با استفاده از بسط تیلور حول نقطه‌ی $x=0$ به سه معادله زیر دست می یابیم:

$$\left(d_0 + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4} \right) = 1 \quad , \quad \frac{\alpha}{4}(d_1 + d_2) = 2 \quad , \quad \frac{\alpha^2}{16}d_2 = 3 \quad (۱۶-۴)$$

از حل همزمان سه معادله‌ی رابطه‌ی (۱۶-۴) ضرایب d_2, d_1, d_0 بدست می آیند:

$$d_0 = 1 + \frac{12}{\alpha^2} - \frac{4}{\alpha} \quad , \quad d_1 = \frac{8}{\alpha} - \frac{48}{\alpha^2} \quad , \quad d_2 = \frac{48}{\alpha^2} \quad (۱۷-۴)$$

بنابراین برای پتانسیل مؤثر خواهیم داشت :

$$V_{eff} = \frac{V_0}{1 + \exp(\alpha x)} + \delta \left(d_0 + \frac{d_1}{1 + \exp(\alpha x)} + \frac{d_2}{(1 + \exp(\alpha x))^2} \right) \quad (18-4)$$

با جایگذاری معادله (18-4)، معادله‌ی شرودینگر به شکل زیر در می‌آید :

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{V_0}{1 + \exp(\alpha x)} - \delta d_0 - \frac{\delta d_1}{1 + \exp(\alpha x)} - \frac{\delta d_2}{(1 + \exp(\alpha x))^2} \right) U = 0 \quad (19-4)$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \left(\varepsilon + \frac{\beta}{1 + \exp(\alpha x)} - \frac{\gamma}{(1 + \exp(\alpha x))^2} \right) U = 0 \quad (20-4)$$

که در آن ε ، β و γ را به صورت زیر در نظر گرفته‌ایم :

$$\varepsilon = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - \delta d_0) \quad , \quad \beta = \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 - \delta d_1) \quad , \quad \gamma = \frac{2\mu}{\hbar^2} \delta d_2 \quad (21-4)$$

حال برای حل معادله شرودینگر از روش ابر تقارن بهره می‌گیریم که ابرپتانسیل (W_1) به صورت زیر

تعریف می‌شود [۶۳] :

$$W_1 = -\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(A + \frac{B}{1 + \exp(\alpha x)} \right) \quad (22-4)$$

که در آن μ جرم کاهش یافته، A و B پارامترهای ثابت معادله هستند. با قرار دادن این پتانسیل در

رابطه ریکاتی که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$W^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W' = \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_1 - E_0) \quad (23-4)$$

داریم:

$$\left(A^2 + \frac{B^2 - B\alpha}{(1 + \exp(\alpha x))^2} + \frac{2AB + B\alpha}{1 + \exp(\alpha x)} \right) = \left(-\varepsilon - \frac{\beta}{1 + \exp(\alpha x)} + \frac{\gamma}{(1 + \exp(\alpha x))^2} \right) \quad (24-4)$$

با مرتب کردن معادله‌ی (24-4) ضرایب ثابت در ابرپتانسیل و انرژی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$2AB - \alpha B = -\beta \quad , \quad A^2 = -\varepsilon \quad , \quad B^2 + B\alpha = \gamma \quad (25-4)$$

که با اندکی محاسبات برای انرژی بستگی سیستم شش ذره‌ای مورد نظر خواهیم داشت :

$$E = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{-\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \delta d_0 \quad (26-4)$$

با جایگذاری ثابت های $V_0 = 33MeV$ و $R_0 = 2.499 fm$ ، $l = 0$ ، $a = 0.48 fm$ ، مقدار انرژی بستگی

برای هسته لیتیم برابر با $E = 32.3394MeV$ بدست می آید که توافق خوبی با مقدار تجربی انرژی

بستگی لیتیم $E = 31.995MeV$ دارد [۶۵،۲].

۲-۴-۲ برای 7Li

حال معادله‌ی شرودینگر را برای سیستم هفت ذره ای ($D=18$) به شکل زیر در می آید :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{17}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1(1+16)}{r^2} \right) R + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) R = 0 \quad (27-4)$$

در اینجا معادله تابع موج را به صورت $U = Rr^{\frac{D-1}{2}} = Rr^{\frac{17}{2}}$ در نظر می گیریم. در این صورت معادله

داریم:

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \frac{\hbar^2(2l+15)(2l+17)}{8\mu r^2} \right) U = 0 \quad (28-4)$$

با جایگذاری پتانسیل وودز - ساکسون (رابطه (۲-۱۵)) در معادله‌ی بالا و تعریف پتانسیل موثر V_{eff} به

شکل زیر:

$$V_{eff} = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} - \frac{\hbar^2(2l+15)(2l+17)}{8\mu r^2} \quad (29-4)$$

با استفاده از روابط (۹-۴) و (۱۰-۴) داریم:

$$V_{eff} = \frac{V_0}{1 + \exp(\alpha x)} - \delta(1 - 2x + 3x^2 - 4x^2 \dots) \quad (30-4)$$

که در آن متغیر δ به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\delta = \frac{\hbar^2(2l+15)(2l+17)}{8\mu R_0^2} \quad (31-4)$$

در اینجا باز هم با استفاده از تقریب پکریس و بسط تیلور به روابط زیر می‌رسیم:

$$\left(d_0 + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4}\right) = 1, \quad \frac{\alpha}{4}(d_1 + d_2) = 2, \quad \frac{\alpha^2}{16}d_2 = 3 \quad (32-4)$$

از حل همزمان سه معادله‌ی رابطه‌ی (۳۲-۴) ضرایب d_2, d_1, d_0 بدست می‌آیند:

$$d_0 = 1 + \frac{12}{\alpha^2} - \frac{4}{\alpha}, \quad d_1 = \frac{8}{\alpha} - \frac{48}{\alpha^2}, \quad d_2 = \frac{48}{\alpha^2} \quad (33-4)$$

معادله‌ی شرودینگر را به شکل زیر در می‌نویسیم:

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \left(\varepsilon + \frac{\beta}{1 + \exp(\alpha x)} - \frac{\gamma}{(1 + \exp(\alpha x))^2} \right) U = 0 \quad (34-4)$$

که در آن ε, β و γ را به صورت زیر در نظر گرفته‌ایم:

$$\varepsilon = \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - \delta d_0), \quad \beta = \frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0 - \delta d_1), \quad \gamma = \frac{2\mu}{\hbar^2}\delta d_2 \quad (35-4)$$

حال برای حل معادله شرودینگر از روش ابر تقارن بهره می‌گیریم که ابرپتانسیل (W_1) به شکل رابطه

(۲۲-۴) تعریف می‌کنیم. با قرار دادن این پتانسیل در معادله ریکاتی (معادله (۲۳-۴)) داریم:

$$\left(A^2 + \frac{B^2 - B\alpha}{(1 + \exp(\alpha x))^2} + \frac{2AB + B\alpha}{1 + \exp(\alpha x)} \right) = \left(-\varepsilon - \frac{\beta}{1 + \exp(\alpha x)} + \frac{\gamma}{(1 + \exp(\alpha x))^2} \right) \quad (36-4)$$

با مرتب کردن معادله‌ی (۲۴-۴) ضرایب ثابت در ابرپتانسیل به صورت معادله (۲۵-۴) بدست می‌آیند.

با اندکی محاسبات برای انرژی بستگی سیستم هفت ذره‌ای مورد نظر خواهیم داشت:

$$E = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{-\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \delta d_0. \quad (37-4)$$

با جایگذاری ثابت‌های $V_0 = 50 \text{ MeV}$ و $R_0 = 2.661 \text{ fm}$ $l=0, a=0.48 \text{ fm}$ مقدار انرژی بستگی برای

هسته لیتیم برابر با $E = 39.3396 \text{ MeV}$ بدست می‌آید که توافق خوبی با مقدار تجربی انرژی بستگی

لیتیم $E = 39.25 \text{ MeV}$ دارد [۶۵،۲].

${}^8\text{Li}$ برای ۲-۴-۳

حال معادله‌ی شرودینگر را برای $D=21$ به شکل زیر در می‌آید :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{20}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+19)}{r^2} \right) R + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) R = 0 \quad (38-4)$$

در ابتدا برای حل این معادله تابع موج را به صورت $U = Rr^{10}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت معادله داریم:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \frac{\hbar^2(l+9)(l+10)}{2\mu r^2} \right) U = 0 \quad (39-4)$$

پتانسیل وودز - ساکسون (رابطه (۲-۱۵)) را در معادله‌ی بالا قرار می‌دهیم. در اینجا δ به صورت

$$\delta = \frac{\hbar^2(l+9)(l+10)}{2\mu R_0^2}$$

تعریف می‌شود. با انجام مراحل قبل خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \left(\varepsilon + \frac{\beta}{1 + \exp(\alpha x)} - \frac{\gamma}{(1 + \exp(\alpha x))^2} \right) U = 0 \quad (40-4)$$

که در آن ε ، β و γ را به صورت زیر در نظر گرفته‌ایم :

$$\varepsilon = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - \delta d_0) \quad , \quad \beta = \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 - \delta d_1) \quad , \quad \gamma = \frac{2\mu}{\hbar^2} \delta d_2 \quad (41-4)$$

حال برای حل معادله شرودینگر از روش ابر تقارن بهره می‌گیریم که ابرپتانسیل (W_1) به صورت

رابطه (۴-۲۲) تعریف می‌شود. سپس با حل روابط (۴-۲۵) و با اندکی محاسبات برای انرژی بستگی

سیستم هشت ذره‌ای مورد نظر خواهیم داشت :

$$E = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{-\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \delta d_0 \quad . \quad (42-4)$$

با جایگذاری ثابت‌های $V_0 = 49.2 \text{ MeV}$ و $R_0 = 2.796 \text{ fm}$ $l=0, a=0.48 \text{ fm}$ مقدار انرژی بستگی برای

${}^8\text{Li}$ برابر با $E = 41.3457 \text{ MeV}$ بدست می‌آید که توافق خوبی با مقدار تجربی انرژی بستگی لیتیم

$E = 41.278 \text{ MeV}$ دارد [۶۵،۲].

۹Li برای ۲-۴-۴

حال معادله‌ی شرودینگر را برای $D=24$ به شکل زیر در می‌آید:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{23}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1(1+22)}{r^2} \right) R + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) R = 0 \quad (۴۳-۴)$$

در ابتدا برای حل این معادله تابع موج را به صورت $U = Rr^{\frac{23}{2}}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

معادله داریم:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \frac{\hbar^2 (2l+21)(2l+23)}{8\mu r^2} \right) U = 0 \quad (۴۴-۴)$$

پتانسیل وودز-ساکسون (رابطه (۲-۱۵)) را در معادله‌ی بالا قرار می‌دهیم. در اینجا δ به صورت

$$\delta = \frac{\hbar^2 (2l+21)(2l+23)}{8\mu R_0^2}$$

تعریف می‌شود. با انجام مراحل قبل خواهیم داشت:

$$E = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{-\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \delta d_0 \quad (۴۵-۴)$$

با جایگذاری ثابت‌های $R_0 = 2.918 \text{ fm}$ ، $l = 0$ ، $a = 0.48 \text{ fm}$ و مقدار انرژی بستگی برای

${}^9\text{Li}$ برابر با $E = 45.2745 \text{ MeV}$ بدست می‌آید که توافق خوبی با مقدار تجربی انرژی بستگی لیتیم

دارد $E = 45.342 \text{ MeV}$ [۶۵،۲].

${}^{10}\text{Li}$ برای ۲-۴-۵

مشابه آنچه برای ${}^9\text{Li}$ ، ${}^7\text{Li}$ ، ${}^6\text{Li}$ و ${}^8\text{Li}$ انجام شد، در اینجا نیز انجام می‌دهیم. بنابراین می‌بینیم با

جایگذاری ثابت‌های $R_0 = 2.942 \text{ fm}$ ، $l = 0$ ، $a = 0.46 \text{ fm}$ و مقدار انرژی بستگی برای

${}^{10}\text{Li}$ برابر با $E = 45.6494 \text{ MeV}$ بدست می‌آید که توافق خوبی با مقدار تجربی انرژی بستگی لیتیم

دارد $E = 45.318 \text{ MeV}$ [۲،۶۵].

۶-۴-۲ برای ^{11}Li

مشابه آنچه برای ایزوتوپ های دیگر انجام شد، در اینجا نیز انجام می دهیم. بنابراین می بینیم با جایگذاری ثابت های $V_0 = 32.5\text{MeV}$ و $R_0 = 2.9\text{fm}$ ، $l = 0$ ، $a = 0.43\text{fm}$ ، مقدار انرژی بستگی برای ^{11}Li برابر با $E = 45.6258\text{MeV}$ بدست می آید که توافق خوبی با مقدار تجربی انرژی بستگی لیتیم $E = 45.642\text{MeV}$ دارد [۶۵،۲].

۴-۳ حل معادله شرودینگر شش ذره ای با پتانسیل IQY

از قسمت قبل داشتیم :

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \frac{\hbar^2(l+6)(l+7)}{2\mu r^2} \right) U = 0 \quad (46-4)$$

با نوشتن پتانسیل IQY به صورت زیر و با استفاده از بسط تیلور خواهیم داشت :

$$V = \frac{V_0 e^{-2ar}}{r^2} = V_0 \frac{(1 - 2ar + 4a^2 r^2)}{r^2} = \frac{V_0}{r^2} - \frac{2aV_0}{r} + 4a^2 V_0 \quad (47-4)$$

حال با قرار دادن این پتانسیل در معادله (۴۶-۴) داریم:

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - 4a^2 V_0 + \frac{2aV_0}{r} - \frac{(V_0 + \Omega)}{r^2} \right) U = 0 \quad (48-4)$$

که Ω به صورت زیر تعریف می شود :

$$\Omega = \frac{\hbar^2(l+6)(l+7)}{2\mu} \quad (49-4)$$

با انتخاب پارامترهای ε ، β و γ به صورت زیر

$$\varepsilon = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - 4a^2 V_0) \quad , \quad \beta = \frac{4\mu}{\hbar^2} V_0 a \quad , \quad \gamma = \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 + \Omega) \quad (50-4)$$

معادله ی (۴۸-۴) به صورت زیر در می آید :

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \left(\varepsilon + \frac{\beta}{r} - \frac{\gamma}{r^2} \right) U = 0 \quad (51-4)$$

اکنون ابر پتانسیل را در روش ابر تقارن به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$W_1 = -\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(A + \frac{B}{r} \right) \quad (52-4)$$

با جایگذاری ابر پتانسیل در معادله ی (۴-۲۳) خواهیم داشت :

$$\left(A^2 + \frac{B^2}{r^2} + \frac{2AB}{r} - \frac{B}{r^2} \right) = \left(-\varepsilon - \frac{\beta}{r} + \frac{\gamma}{r^2} \right) \quad (53-4)$$

با مساوی قرار دادن دو طرف معادله (۴-۵۳) به روابط زیر می رسیم :

$$A^2 = -\varepsilon \quad , \quad 2AB = -\beta \quad , \quad B^2 - B = \gamma \quad (54-4)$$

با حل این دستگاه انرژی بستگی بدست می آید :

$$E = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{-\beta}{1 \pm \sqrt{1+4\gamma}} \right)^2 + 4a^2V_0 \quad (55-4)$$

جدول (۴-۱) انرژی بستگی لیتیم با پتانسیل IQY به ازای ثابتهای پتانسیل مختلف

$a(\text{fm})^{-1}$	$V_0(\text{MeV} \cdot \text{fm}^2)$	B.E(MeV) Our model	B.E(MeV) experiment
۰,۴۹	۳۳	۳۱,۶۸	۳۱,۹۹۵
۰,۴	۵۰	۳۱,۹۸	۳۱,۹۹۵
۰,۵۵	۲۶	۳۱,۴۵	۳۱,۹۹۵

در جدول (۴-۱) مقادیر انرژی بستگی آمده است که با مقدار تجربی آن تطابق خوبی دارد.

از ابرتقارن می دانیم که پتانسیل به صورت زیر تعریف می شود :

$$V_{\pm} = W^2 \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \frac{dW}{dr} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[A^2 + \frac{B^2}{r^2} + \frac{2AB}{r^2} \pm \frac{B}{r^2} \right] \quad (56-4)$$

از معادله (۵۴-۴)، $A = \frac{-\beta}{2(B^2 - \gamma)}$ بدست می آید. با نگاشت $B_1 = B_0 - a$ در معادله (۵۶-۴) برای

V_+ و با قرار دادن A در آن برای V_- و استفاده از روابط (۴۲-۲) و (۴۳-۲) می توان نشان داد که

پتانسیل های همراه V_+ و V_- صرف نظر از یک مقدار ثابت با یکدیگر برابرند. بنابراین با استفاده از

رابطه (۴۲-۲) می توان برای آنها از اصول ناوردایی شکل استفاده نمود. به عبارت دیگر داریم:

$$B_1 = B_0 - a \quad , \quad B_n = B_0 - na \quad (57-4)$$

در این صورت بدست می آوریم:

$$R(a_1) = V_+(B, r) - V_-(B-a, r) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{-\beta}{2(B^2 - \gamma)} \right)^2 - \left(\frac{-\beta}{2((B-a)^2 - \gamma)} \right)^2 \right] \quad (58-4)$$

$$R(a_i) = V_+(B - (i-1)a, r) - V_-(B - ia, r) =$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{-\beta}{2((B-ia)^2 - \gamma)} \right)^2 - \left(\frac{-\beta}{2((B-(i-1)a)^2 - \gamma)} \right)^2 \right] \quad (59-4)$$

همانطور که مشاهده می شود $R(a_i)$ مستقل از r است. با استفاده از روابط (۴۳-۲) و (۴۴-۲) ویژه

انرژی ها به صورت زیر بدست می آیند:

$$E_{nl} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{-\beta}{2((B-na)^2 - \gamma)} \right)^2 - \left(\frac{-\beta}{2(B^2 - \gamma)} \right)^2 + \left(\frac{-\beta}{1 + \sqrt{1 + 4\gamma}} \right)^2 \right] + 4a^2 V_0 \quad (60-4)$$

جدول (۲-۴) انرژی بستگی ترازهای برانگیخته با پتانسیل IQY که تاکنون مقدار تجربی آن مشاهده نشده است.

n	l	انرژی بستگی (MeV) Our model
۱	۰	۳۱,۶۵۰,۵۹۰
۲	۰	۳۱,۶۳۰,۲۶۰
۲	۱	۳۱,۶۹۸,۱۹۰

۴-۴ حل معادله شرودینگر شش ذره ای با پتانسیل هولسن

با قرار دادن پتانسیل هولسن در رابطه (۴-۴۶)، به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2U}{d^2r} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{V_0 e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} - \frac{\hbar^2 (l+6)(l+7)}{2\mu r^2} \right) U = 0 \quad (۴-۶۱)$$

با تبدیل $\delta \rightarrow -2a$ و استفاده از بسط تیلور و با استفاده از رابطه $r = \frac{1}{2a}(e^{2ar} - 1)$ شکل پتانسیل

به صورت زیر در می‌آید [۶۶]:

$$V_{eff} = \frac{V_0}{1 - e^{2ar}} + \frac{2aV_0 \left[\frac{1}{2a}(e^{2ar} - 1) \right]}{1 - e^{2ar}} - \frac{4a^2\Omega}{(e^{2ar} - 1)^2} = \frac{V_0}{1 - e^{2ar}} - V_0 - \frac{4a^2\Omega}{(1 - e^{2ar})^2} \quad (۴-۶۲)$$

با جایگذاری رابطه (۴-۶۲) در رابطه (۴-۶۱) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2U}{d^2r} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - V_0 + \frac{V_0}{1 - e^{2ar}} - \frac{4a^2\Omega}{(1 - e^{2ar})^2} \right) U = 0 \quad (۴-۶۳)$$

می‌توان معادله بالا را به صورت:

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \left(\varepsilon + \frac{\beta}{1 - e^{2ar}} - \frac{\gamma}{(1 - e^{2ar})^2} \right) U = 0 \quad (۴-۶۴)$$

اگر ε و β و γ را به شکل زیر تعریف کرد:

$$\varepsilon = \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V_0) \quad , \quad \beta = \frac{4\mu}{\hbar^2}V_0 \quad , \quad \gamma = \frac{8\mu}{\hbar^2}a^2\Omega \quad (۴-۶۵)$$

اکنون ابرپتانسیل را در روش ابرتقارن به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$W_1 = -\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(A + \frac{B}{1 - e^{2ar}} \right) \quad (۴-۶۶)$$

با قرار دادن رابطه (۴-۶۶) در معادله ریکاتی، مشابه آنچه در قسمت‌های قبل انجام شد، به روابط زیر

می‌رسیم:

$$B^2 + 2aB = \gamma \quad , \quad 2AB - 2aB = -\beta \quad , \quad A^2 = -\varepsilon \quad (۴-۶۷)$$

سپس می توان انرژی بستگی را در این حالت بدست آورد:

$$E = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{-\beta}{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 4\gamma}} + a \right)^2 + V_0 \quad (68-4)$$

جدول (۳-۴) انرژی بستگی لیتیم با پتانسیل هولسن با $l=0$

$a \text{ (fm)}^{-1}$	$V_0(\text{MeV})$	B.E(MeV) Our model	B.E(MeV) experiment
۰,۴۸	۳۱,۲	۳۱,۹۴	۳۱,۹۹۵
۰,۲	۲۸	۳۱,۸۴	۳۱,۹۹۵
۰,۱۲	۲۳	۳۱,۷۶	۳۱,۹۹۵

با توجه به جدول (۳-۴) می بینیم که اختلاف محاسبات ما با تجربه بسیار کم است.

با انجام محاسبات مشابه خواهیم داشت:

$$E_{nl} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{\gamma - \beta}{2(B - na)} - \frac{B - na}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma - \beta}{2B} - \frac{B}{2} \right)^2 + \left(\frac{-\beta}{-2a + \sqrt{4a^2 + 4\gamma}} + a \right)^2 \right] + V_0 \quad (69-4)$$

جدول (۴-۴) انرژی بستگی در حالت‌های برانگیخته با پتانسیل هولسن که تاکنون مقدار تجربی آن مشاهده نشده است.

n	l	انرژی بستگی (MeV)
۱	۰	۳۴,۰۶۵۰۵۰
۲	۰	۲۳,۶۱۶۶۹۰
۲	۱	۲۳,۹۵۶۹۵۰

۵-۴ حل معادله شرودینگر شش ذره ای با پتانسیل یوکاوا

اکنون پتانسیلی که استفاده می کنیم پتانسیل یوکاوا است که پس از استفاده از بسط تیلور به شکل

زیر در می آید:

$$V = -\frac{V_0 e^{-ar}}{r} = -V_0 \frac{(1-ar)}{r} = -\frac{V_0}{r} + aV_0 \quad (۷۰-۴)$$

با تعریف $\Omega = \frac{\hbar^2(l+6)(l+7)}{2\mu}$ معادله شرودینگر در 6Li به صورت زیر در می آید:

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - aV_0 + \frac{V_0}{r} - \frac{\Omega}{r^2} \right) U = 0 \quad (۷۱-۴)$$

معادله (۷۱-۴) را می توان نوشت:

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \left(\varepsilon + \frac{\beta}{r} - \frac{\gamma}{r^2} \right) U = 0 \quad (۷۲-۴)$$

اگر داشته باشیم:

$$\varepsilon = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - aV_0) \quad , \quad \gamma = \frac{2\mu}{\hbar^2} \Omega \quad , \quad \beta = \frac{4\mu}{\hbar^2} V_0 \quad (۷۳-۴)$$

در اینجا باید ابرپتانسیل را مشخص کنیم که باز هم به شکل معادله (۷۲-۴) در نظر می گیریم. با

انتخاب ابرپتانسیل مشابه باز هم به معادلات (۷۳-۴) می رسیم که به ما معادله ای برای انرژی بستگی

می دهد:

$$E = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{-\beta}{1 \pm \sqrt{1+4\gamma}} \right)^2 + V_0 a \quad (۷۴-۴)$$

جدول (۵-۴) انرژی بستگی لیتیم با پتانسیل یوکاوا با $l=0$

$a \text{ (fm)}^{-1}$	$V_0 \text{ (MeV.fm)}$	B.E(MeV) Our model	B.E(MeV) Experiment
۰,۵۹	۵۰	۲۹,۳۹	۳۱,۹۹۵
۰,۷	۴۵	۳۱,۴۲	۳۱,۹۹۵
۱,۶	۲۰	۳۱,۹۸	۳۱,۹۹۵

باز هم در جدول (۵-۴) مقایسه ای بین مقدار تجربی و مقدار محاسبه شده خواهیم داشت.

برای بدست آوردن انرژی دیگر ترازها به روش قبل کار را انجام می دهیم که به رابطه ی زیر می

رسیم:

$$E_{nl} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{-\beta}{2((B-na)^2 - \gamma)} \right)^2 - \left(\frac{-\beta}{2(B^2 - \gamma)} \right)^2 + \left(\frac{-\beta}{1 + \sqrt{1+4\gamma}} \right)^2 \right] + aV_0 \quad (۷۵-۴)$$

جدول (۶-۴) انرژی بستگی در حالت های برانگیخته با پتانسیل یوکاوا

n	l	انرژی بستگی (MeV) Our model
۱	۰	۲۷,۳۹۷۵۵۰
۲	۰	۲۷,۴۰۲۸۱۰
۲	۱	۲۷,۵۱۲۶۴۰

۶-۴ حل معادله شرودینگر شش ذره ای با پتانسیل اصلاح شده

در این بخش می خواهیم ببینیم با اضافه کردن یک جمله اصلاحی به پتانسیل یوکاوا چه تغییری در

انرژی بستگی ایجاد می کند. بدین منظور پتانسیل را به صورت:

$$V_{\text{modified}} = -\frac{V_0 e^{-ar}}{r} + \frac{k}{r^2} \quad (76-4)$$

در نظر می گیریم. بنابراین معادله شرودینگر برای این پتانسیل به صورت:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - aV_0 + \frac{V_0}{r} - \frac{\Omega + k}{r^2} \right) U = 0 \quad (77-4)$$

در می آید که Ω به شکل $\Omega = \frac{\hbar^2(l+6)(l+7)}{2\mu}$ است. سپس معادله (77-4) را به صورت زیر می

نویسیم:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \left(\varepsilon + \frac{\beta}{r} - \frac{\gamma}{r^2} \right) U = 0 \quad (78-4)$$

که داریم:

$$\varepsilon = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - aV_0) , \quad \gamma = \frac{2\mu}{\hbar^2} (\Omega + k) , \quad \beta = \frac{4\mu}{\hbar^2} V_0 \quad (79-4)$$

با انتخاب W به صورت معادله (82-4)، ثابت بدست می آیند:

$$A^2 = -\varepsilon , \quad 2AB = -\beta , \quad B^2 - B = \gamma \quad (80-4)$$

که به ما معادله ی زیر را برای انرژی بستگی می دهد.

$$E = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{-\beta}{1 \pm \sqrt{1+4\gamma}} \right)^2 + V_0 a \quad (81-4)$$

جدول (7-4) انرژی بستگی لیتیم با پتانسیل تصحیح شده با $l=0$

$a \text{ (fm)}^{-1}$	$V_0 \text{ (MeV.fm)}$	B.E(MeV) Our model	B.E(MeV) experiment	$K \text{ (MeV.fm}^2)$
0,7	45	31,417	31,995	5
0,6	50	29,898	31,995	10
0,64	50	31,898	31,995	30

که در اینجا E_{nl} به صورت معادله (75-4) می شود.

۷-۴ حل معادله شرودینگر شش ذره ای با پتانسیل هلمن

پتانسیل هلمن به صورت معادله (۲-۲۶) تعریف می شود. بنابراین معادله شرودینگر با این پتانسیل را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{d^2U}{d^2r} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + V_0 a + \frac{k - V_0}{r} - \frac{\Omega}{r^2} \right) U = 0 \quad (۸۲-۴)$$

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \left(\varepsilon + \frac{\beta}{r} - \frac{\gamma}{r^2} \right) U = 0 \quad (۸۳-۴)$$

که ε ، β و γ به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\beta = \frac{2\mu}{\hbar^2} (k - V_0), \quad \varepsilon = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E + a V_0), \quad \gamma = \frac{2\mu}{\hbar^2} \Omega \quad (۸۴-۴)$$

انرژی بستگی به شکل زیر در می آید:

$$E = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{-\beta}{1 \pm \sqrt{1 + 4\gamma}} \right)^2 - V_0 a \quad (۸۵-۴)$$

جدول (۸-۴) انرژی بستگی لیتیم با پتانسیل هلمن در $l=0$

$a \text{ (fm)}^{-1}$	$V_0 \text{ (MeV.fm)}$	B.E(MeV) Our model	B.E(MeV) experiment	K(MeV.fm)
۰,۶	-۵۰	۳۱,۸۹۷	۳۱,۹۹۵	۲۰
۰,۶۵	-۵۰	۳۲,۳۷۶	۳۱,۹۹۵	۵
۰,۵۸	-۵۰	۲۸,۸۵۲	۳۱,۹۹۵	۱۰

برای انرژی کل به رابطه زیر می رسیم:

$$E_{nl} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{-\beta}{2((B - na)^2 - \gamma)} \right)^2 - \left(\frac{-\beta}{2(B^2 - \gamma)} \right)^2 + \left(\frac{-\beta}{1 + \sqrt{1 + 4\gamma}} \right)^2 \right] - V_0 a \quad (۸۶-۴)$$

نتیجه گیری

ما در این پایانامه با استفاده از روش ابرتقارن معادله‌ی شرودینگر را برای سیستمی شش ذره‌ای با پتانسیل‌های گوناگون حل نموده و انرژی بستگی هسته لیتیم را محاسبه کرده‌ایم. ملاحظه شد که محاسبات ما با پتانسیلهای وودز-ساکسون، IQY و هولسن جواب نزدیکتری را با تجربه می دهد. هر چند که با پتانسیل‌های یوکاوا و اصلاح شده آن، با تجربه اختلاف ناچیزی داشت. با اضافه کردن یک بخش به پتانسیل یوکاوا و اصلاح کردن آن، انتظار داشتیم جواب دقیقتری را بدهد اما اینگونه نشد. در مجموع می توان گفت تطابق بسیار خوب نتایج حاصل از محاسبات ما با مقادیر تجربی، حاکی از آن است که مدل به کار گرفته شده کارایی رضایت بخشی را داشته و می توان از این مدل برای محاسبه‌ی انرژی بستگی سیستم های چند نوکلئونی با پتانسیل های مختلف استفاده کرد.

مراجع

- [1] W.N.Cottingham,D.A.Greenwood, (2000), "**An introduction to nuclear physics**", Cambridge University Press.
- [2] Kenneth S. Krane, (1998), "**Introductory Nuclear Physics**", J. Willey & Sons, Vol 1,2.
- [۳] کاتینگهام، گرینوود، (۱۳۸۷)، **مبانی فیزیک هسته ای**، رحیمی ف، چاپ سوم ، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [4] H. S. Hans,(2001),"**Nuclear Physics-Experimental and Theoretical**", New Age International(P) Limited Publishers, New Dehli.
- [۵] س علمدار میلانی و م قرآن نویس، (۱۳۸۲)، **آشنایی با فیزیک هسته ای**، انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ص ۱۸۵.
- [6] B. L. Cohen, (1971), "**Concepts of Nuclear Physics**", McGraw-Hill, New York.
- [7] J.L.Basdevant,J. Rich,M. Spiro, (2005), "**Fundamentals In Nuclear Physics From Nuclear Structure to cosmology**", Springer, USA.
- [8] R. Hofstadter,(1957), Annu. Rev. Nucl. Sci. 7 231.
- [۹] ب الکس برون، (۱۳۹۱)، **"مباحثی در فیزیک ساختار هسته ای"** ، علی اکبر مهمان دوست خواجه داد، انتشارات مرنیز،مشهد.
- [10] Griffiths D. J, (1984), "**Introduction to Elementary Particles**", John Wiley & Sons, Inc, pp.27.
- [11] H. Frauenfelder, E. M. Henley, (1977), "**subatomic physics**", prentice – Hall. Vol 1.2.
- [12] N. Bohr, (1937), Science 86, 161.
- [13] N. Bohr, (1936), Nature, February.
- [14] M. G. Mayer, (1948), **Phys. Rev.** 74, 235.
- [15] M. G. Mayer, (1949), **Phys. Rev.** 75, 1969.
- [16] O. Haxel, J. H. D. Jensen, H. E. Suess, (1949), **Phys. Rev.** 75, 1766.
- [17]M. Honma, T. Otsuka, B. A. Brown, T. Mizusaki, (2002), **Phys. Rev. C** 65, 061301.

- [18] E. J. BURGE, (1988), "**atomic Nuclei and their particles**", Second Edition Clarendon press, oxford physics.
- [19] C. Berkdemir, A. Berkdemir, and J.G. Han, Chem, (2006), **Phys. Lett.** 417 326.
- [20] R. D. Woods and D. S. Saxon, (1954), **Phys. Rev.** 95, 577.
- [21] J. Sadeghi and M. R. Pahlavani, (2004), **Afr. J. Math. Phys.** 1 (2), 195.
- [22] M. R. Pahlavani, J. Sadeghi and M. Ghezelbash, (2009), **App. Sci.** 11, 106.
- [23] M. simsek, H. Egrifes, (2004), **J. Phys. A–Math. Gen.** 37, 4379.
- [24] A. N. Ikot1, L. E. Akpabio, and E. B. Umoren, (2011), Scientific Research, J. Sci. Res. 3 (1), 25-33.
- [25] H.Bahlouli, (2012), "**Analytical treatment of the oscillating Yukawa Potential**", Chemical Phys 393,153-156.
- [26] A. Arda, O. Aydogdu, R. Sever, (2011), **Math-Ph.** 3204 v1.
- [27] H. Hellmann and W. Kassatotchkin, Acta Physicochim. URSS 5, 23 (1936); J.Chem. Phys.4, 324 (1936).
- [28] H. Hellmann, Acta Physicochim. URSS 1, 913 (1935); 4, 225 (1936); 4, 324 (1936); J. Chem. Phys. 3, 61 (1935).
- [29] J. Adamowski, (1985), **Phys. Rev. A** 31, 43.
- [30] Y. P. Varshni and R. C. Shukla, (1963), **Rev Mod. Physi.** 35, 130.
- [31] V. K. Gryaznov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 78, 573 1980. [Sov. Phys. JETP 51,288 (1980)].
- [32] V. A. Alekseev, V. E. Fortov and I. T. Yakubov, USP. Fiz Nauk , 139, 193 1983[Sov. Phys.-USP. 26, 99 (1983)].
- [33] P. Gombas, Die Statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen (Springer, Berlin, 1949). p304.
- [34] J. Callaway, (1958), **Phys. Rev.** 112, 322; G. J. Iafrate, (1966), **J. Chem. Phys.** 45, 1072; J. Callaway and P. S. Laghos, (1969), **Phys. Rev.** 187, 192; G. McGinn, (1970), **J. Chem. Phys.** 53, 3635.
- [35] S. Bebnarek, J. Adamowski, and M. Saffczyński, (1977), Solid State Commun. 21, 1.
- [36] J. Pollmann and H. Buttner, (1977), **Phys. Rev. B** 16, 4480; H. Buttner and J. Pollmann, (1983), **Physica(Utrecht)**117/ 118 B, 278.
- [37] J. Adamowski, (1982), "in proceedings of the XII confrence on Physics of semiconducting

compounds”, Jaszowiec, Poland, Solineum, Wroclaw , (1983), p.139 and unpublished.

[38] F. Cooper, A. Khar, U. Sukhatme, (2001), “**Supersymmetry in Quantum Mechanics**”, World Scientific Publishing.

[۳۹] توکلی، م. (۱۳۸۶)، پایان نامه ارشد، "ابرتقارن در مکانیک کوانتومی".

[40] J. Junker, (1996), “**Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics**”, Springer, Germany.

[41] P. Binétruy, (2006), “**Supersymmetric, Theory, Experiment and Cosmology**”, Oxford Graduate Texts.

[42] A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov, (1988), “**Special Functions of Mathematical Physics**”, Birkhauser, Basel.

[43] A.A. Rajabi, (2005), “**Exact Analytical solution of the shrodinger equation for an N-identical body-force system**”, Few Body system ,37,267.

[44] M. Aiello, M. Ferrarries, M. MGiannini, M. Pizzo, E. Santopinto, (1996), **Phys.Lett.B** ,387,215.

[45] A. Kievshy, A. Viviani, L. Girlanda, L.E. Maecucci, S. Rosatti, (2009), “**Few body System**”, 45,115-118.

[46] A. Kievsky, M. Viviani, L. E. Marcucci and S. Rosati, (2006), “**Few body System**”, 38, 63-66.

[47] W. H. Press, (1992), “**Numerical Recipes in Fortran**”, 2th edition, Cambridge press.

[48] Krebs, Robert E, (2006), “**The History and Use of Our Earth's Chemical Elements: A Reference Guide**”. Westport, Conn.: Greenwood Press. ISBN 0-313-33438-2.

[49] Lide, D. R., ed, (2005), “**CRC Handbook of Chemistry and Physics**”, (86th ed.). Boca Raton (FL): CRC Press.

[50] Tuoriniemi, J. Juntunen-Nurmilaukas, K. Uusvuori, J. Pentti, E. Salmela, A. Sebedash, A, (2007), “**Superconductivity in lithium below 0.4 millikelvin at ambient pressure**”. Nature 447 (7141): 187–9.

- [51] Struzhkin, V. V. Eremets, M. I. Gan, W. Mao, H. K. Hemley, R. J, (2002), "**Superconductivity in dense lithium**". *Science* 298 (5596): 1213–5.
- [52] Overhauser, A. W, (1984), "Crystal Structure of Lithium at 4.2 K". **Physical Review Letters** 53: 64–65.
- [53] Kamienski, McDonald, Daniel P. Stark, Marshall W. Papcun, John R., Conrad W, (2004), "**Lithium and lithium compounds**". Kirk-Othmer Encyclopedia of Chemical Technology. John Wiley & Sons, Inc.
- [54] "Isotopes of Lithium". Berkeley National Laboratory, The Isotopes Project. Retrieved 2008-04-21.
- [55] Lodders, Katharina, (2003), "Solar System Abundances and Condensation Temperatures of the Elements", **The Astrophysical Journal (The American Astronomical Society)** 591 (2): 1220–1247.
- [56] Sonzogni, Alejandro, (2008), "**Interactive Chart of Nuclides**". National Nuclear Data Center: Brookhaven National Laboratory.
- [57] Denissenkov, P. A.; Weiss, A, (2000), "Episodic lithium production by extra-mixing in red giants", **Astrono-Ph.** L49–L52.
- [58] N. Salehi, A. A. Rajabi, Zahra Ghalehovi, (2012), **Chinese Journal of Physics**, vol. 50, No. 1.
- [59] O. Panella, S. Biondini, A. Arda, (2010), **Math-ph**,
- [60] C. L. Pekeris, (1934), **Phys. Rev.** 45.
- [61] S. Flügge, (1994), **Practical Quantum Mechanics**, Vol.1 (Berlin).
- [62] V. H. Badalov, H. I. Ahmadov, and S. V. Badalov, (2011), **Math-Ph**.
- [63] O. Bayrak, G. Kocak and I. Boztosun, (2006), **J. Phys. A: Math. Gen.** 39.
- [64] H. Hasanabadi, A. A. Rajabi, (2009), **Mod. Phys. Lett. A**.
- [65] cdfe.sinp.msu.ru/index.en.html.

- [66] M. R. Pahlavani, J. Sadeghi, M. Ghezelbash, (2009), **Geometry Balkan Press**, Vol. 11.
- [67] Altuğ Arda, R. Sever, (2009), **Quant-Phy**.
- [68] U. Myhrman, (1983), **J. Phys. A: Math.Gen.** 16. 263.
- [69] A. A. Rajabi, M. Hamzavi, 1828, (2012).
- [70] L. Hulthén, (1942), **Arkiv. Mat. Astr. Fysik.** 28A(5), 1-12.
- [71] C. S. Lam and Y. P. Varshni, (1971), **Phys. Rev. A**, 4. 1875-1881.
- [72] A. A. Berezin, (1972), **Phys. Status. Solidi (b)** , 50. 71.
- [73] P. Pyykko, J. Jokisaari, (1975), **Chem. Phys.** 10. pp. 293 - 301.
- [74] F. Benamira, L. Guechi and A. Zouache, (2007), **Phys. Lett. A**.
- [75] Wen-Chao Qiang, Run-Suo Zhou and Yang Gao, (2007), **Physics Letters A**.
- [76] Chang-Yuan Chen, Dong-Sheng Sun and Fa-Lin Lu, (2007), **Phys. Lett. A**, (2007).
- [77] D. Agboola, (2009), **Math-Ph.** 3626 v3.
- [78] A. Arda, R. Sever, C. Tezcan, (2010), **Quant-Ph.** 1250 v1.
- [79] L. Hulthén, M. Sugawara, S. Flügge (ed.), (1957), “**Handbuch der Physik**”, Springer.
- [80] E. D. Filho, R. M. Ricotta, (1995), **Mod. Phys. Let. A** 10. 1613.
- [81] F. Cooper, B. Freedman, (1983), **Ann. Phys.** 146, 262.
- [82] T. Tietz, Negative Hydrogen Ion, (1961), **J. Chem. Phys.** 35. 1917-1918.
- [83] A. K. Roy, A. F. Jalbout, E. I. Proynov, (2013), **Quant-Phys.** 2983v1.
- [84] J. McEnnan, L. Kissel, R. H. Pratt, (1976), **Phys. Rev. A** 13. 532.
- [85] C. H. Mehta, S. H. Patil, (1978), **Phys. Rev. A** 17. 34.
- [86] R. Dutt, Y. P. Varshni, (1983), **Z. Phys. A** 313. 143.
- [87] T. Imbo, A. Pagnamenta, U. Sukhatme, (1984), **Phys. Lett. A**105. 183.

Abstrac

In this paper, we calculated the Binding energy of lithium nucleus. The Schrödinger equation for 6-body system is studied. We solved this equation for lithium nucleus by using supersymmetry method with the specific potential. The potential that is used here is Hulthen potential, the IQY potential (Inversely Quadratic Yukawa Potential), Yukawa potential, the modified Yukawa potential and Hellmann potential. The results show that the calculated Binding energy of lithium nucleus with these potentials is comparable with the experiment results.

Key words

The Schrödinger equation, Nuclear potentials, Supersymmetry Method, Binding energy



Shahrood University of Technology

Faculty of Physics

Calculating the Binding Energy of Lithium Isotops

Mahsa Ghazvini

Supervisor:

Dr. Ali Akbar Rajabi

February(2014)