

الله اعلم
بما نزلنا من
القرآن
وما كنا
بالغافلين



دانشکده : فیزیک

گروه : ذرات بنیادی

پایان نامه کارشناسی ارشد

اطلاعات جزئی منفی در نظریه کوانتومی

حمید گیاه

استاد راهنما :

دکتر حسین موحدیان

ماه و سال انتشار:

بهمن ماه ۱۳۹۲

تعهد نامه

اینجانب حمید گیاه دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک ذرات بنیادی دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه اطلاعات جزئی منفی در نظریه اطلاعات کوانتومی تحت راهنمایی دکتر حسین موحدیان متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

تقدیم بہ

پدر و مادر مہربانم

چکیده

در نظریه اطلاعات، میزان دانسته‌هایمان از یک سیستم فیزیکی را اطلاعات می‌نامیم و نظریه پردازان برای کمی کردن این عبارت از مفهوم آنتروپی استفاده کردند. اطلاعات می‌تواند کلاسیکی یا کوانتومی باشد.

اطلاعات کلاسیکی توسط شانون و اطلاعات کوانتومی توسط نیومن کمی شد. حال یک سیستم دوقسمتی را در نظر می‌گیریم که زیرسیستم‌های آن با یکدیگر در ارتباط هستند. مقدار اطلاعات مورد نیاز برای ارسال کامل حالت سیستم به یکی از زیرسیستم‌ها را اطلاعات جزئی مشروط می‌نامند.

تفاوت بین سیستم‌های کلاسیکی و سیستم‌های کوانتومی در نوع همبستگی یا ارتباط بین زیر-سیستم‌هایشان مشخص می‌شود. زیرسیستم‌های یک سیستم کوانتومی می‌توانند دارای نوعی همبستگی باشند که از نظر کلاسیکی غیر ممکن است. این همبستگی درهم‌تنیدگی نام دارد.

در نظریه اطلاعات کوانتومی برخلاف نظریه اطلاعات کلاسیکی شانون، هنگامی که سیستم‌های کوانتومی مد نظر درهم‌تنیده باشند آنگاه آنتروپی‌های جزئی مشروط کوانتومی می‌توانند منفی شوند.

ما در اینجا نظریه اطلاعات کوانتومی را معرفی می‌کنیم که بتوانیم یک تعریف مناسبی از درهم‌تنیدگی ارائه دهیم. همچنین نشان می‌دهیم که درهم‌تنیدگی سیستم‌های کوانتومی را می‌توان بطور موفقیت‌آمیزی با آنتروپی‌های مشروط منفی توصیف کرد. از اینرو می‌توانیم با استفاده از ماتریس چگالی مشروط کوانتومی و آنتروپی مشروط کوانتومی درهم‌تنیدگی یک سیستم کوانتومی را بررسی کنیم.

کلمات کلیدی: اطلاعات، آنتروپی، آنتروپی جزئی مشروط، درهم‌تنیدگی.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

گیاه، حمید ؛ موحدیان، حسین " کرمچاله‌ها در نظریهٔ اطلاعات کوانتومی " ، چهارمین کنفرانس فیزیک ذرات و میدان‌ها، دانشگاه آزاد تهران مرکز، ۲-۳ بهمن ماه ۱۳۹۲.

فهرست مطالب

فصل ۱	۱
۱ - ۱ - احتمالات مشروط	۴
۱ - ۲ - آنتروپی شانون و متراکم سازی اطلاعات	۷
۱ - ۳ - وابستگی آنتروپی شانون به توزیع احتمال	۱۱
۱ - ۳ - ۱ - آنتروپی مشروط شانون	۱۲
۱ - ۴ - خواص آنتروپی شانون	۱۶
۱ - ۵ - نتیجه گیری	۱۷
فصل ۲	۱۹
۲ - ۱ - مقدمه	۲۰
۲ - ۲ - اطلاعات کوانتومی	۲۰
۲ - ۲ - ۱ - ذخیره اطلاعات در فیزیک کوانتومی	۲۱
۲ - ۲ - ۲ - مشکلات تعیین محتوای اطلاعات یک سیستم کوانتومی	۲۲
۲ - ۳ - آنتروپی فون نیومن	۲۴

۲۶ $S(\rho)$ خواص ریاضیاتی ۱ - ۳ - ۲

۲۹ اطلاعات مشروط کوانتومی ۲ - ۳ - ۲

۳۰ اطلاعات متقابل کوانتومی ۳ - ۳ - ۲

۳۱ همبستگی در مقابل درهم تنیدگی، سیستمهای دوقسمتی و سه قسمتی ۴ - ۲

۳۲ سیستم های دوقسمتی: ۱ - ۴ - ۲

۳۵ سیستم های سه قسمتی: ۲ - ۴ - ۲

۳۹ اندازه گیری ۵ - ۲

۴۲ نتیجه گیری ۶ - ۲

۴۵ فصل ۳

۴۶ مقدمه ۱ - ۳

۴۷ ماتریس چگالی ۲ - ۳

۴۸ ماتریس چگالی در نمایش کلی ۱ - ۲ - ۳

۴۹ حالت های درهم تنیده ۳-۳

۵۱ همدوسی ۱ - ۳ - ۳

۳ - ۳ - ۲ - زوجهای *EPR* جداناپذیر ۵۲

۳ - ۳ - ۳ - آنتی کیوبیت ها ۵۹

۳ - ۳ - ۴ - نمودارهای اطلاعات کوانتومی فاینمن ۶۰

۳ - ۴ - ماتریس چگالی آماری کوانتومی ۶۵

۳ - ۵ - شواهد درهم تنیدگی ۶۷

۳ - ۶ - نتیجه گیری ۶۹

فصل ۴ ۷۱

۴ - ۱ - مقدمه ۷۲

۴ - ۲ - همرسی ۷۲

۴ - ۲ - ۱ - از بین رفتن درهم تنیدگی ۷۶

۴ - ۳ - ناسازگاری کوانتومی ۷۹

۴ - ۴ - ظرفیت گرمایی ۸۲

۴ - ۵ - بررسی درهم تنیدگی سیستم‌های اسپین - ۱/۲ مدل هایزنبرگ ۸۳

۴ - ۵ - ۱ - همرسی و ناسازگاری کوانتومی ۸۳

۴ - ۵ - ۱ - ۱ - سیستم های اسپین-۱/۲ مدل XXZ ، XX و XXX ۸۴

۴ - ۵ - ۲ - ظرفیت گرمایی سیستم اسپین-۱/۲ مدل هایزنبرگی ۹۴

۴ - ۵ - ۳ - آنتروپی کوانتومی نیومن برای سیستم های اسپین-۱/۲ مدل هایزنبرگی ۹۷

۴ - ۵ - ۳ - ۱ - آنتروپی توأم $S(AB)$ و آنتروپیهای جزئی $S(A)$ و $S(B)$: ۹۷

۴ - ۵ - ۳ - ۲ - آنتروپی جزئی مشروط ۱۰۰

۴ - ۶ - نتیجه گیری ۱۰۵

پیشنهادات ۱۰۷

پیوست ها ۱۰۸

مراجع ۱۱۳

فهرست اشکال

- شکل (۱-۱) آزمایش دو شکاف. (a) احتمالات کلاسیکی و (b) احتمالات کوانتومی..... ۳
- شکل (۲-۱) یک درخت احتمال برای دو رویداد A, B ۶
- شکل (۳-۱) نمودار آنتروپی شانون برای یک سیستم دو حالته بیان شده در رابطه (۱-۱۴)..... ۹
- شکل (۱-۲) نمودار وین مربوط به آنتروپی کل برای یک سیستم دو قسمتی AB و حالت‌های مختلف..... ۳۲
- شکل (۲-۲) نمودار وین آنتروپی برای یک سیستم سه قسمتی ABC ۳۶
- شکل (۳-۲) نمودار وین آنتروپی برای یک سیستم سه قسمتی در حالت GHZ (رابطه (۲-۴۸))..... ۳۸
- شکل (۱-۳) نمودار اطلاعات کوانتومی فاینمن برای دوربری کوانتومی..... ۶۱
- شکل (۲-۳) نمودار فیزیکی فضا- زمان برای دوربری کوانتومی..... ۶۳
- شکل (۱-۴) آنتروپی جزئی (آنتروپی درهم‌تنیدگی) $S(\rho_A)$ (منحنی خط چین) و هم‌رسی C (منحنی خط پیوسته) برای ρ_3 (رابطه (۴-۹)) بعنوان یک تابعی از دوران φ ۷۵
- شکل (۲-۴) وابستگی زمانی ویژه‌مقادیر ρ_2 (رابطه (۴-۱۹) - (۴-۲۱)) برای $T_1 = T_2 = 1$. خط چین P_+ نقطه- خط چین P_- و خط پیوسته λ_3 ۷۸
- شکل (۳-۴) هم‌رسی و ناسازگاری کوانتومی برای مدل XX بصورت تابعی از دما و میدان مغناطیس..... ۸۸
- شکل (۴-۴) هم‌رسی و ناسازگاری کوانتومی برای مدل XXX با، در تعادل گرمایی، بر حسب دما و میدان مغناطیسی..... ۸۹

شکل (۴-۵) ناسازگاری کوانتومی و همرسی برای مدل های (a) XX و (b) XXX برحسب دما که در آن خط پیوسته و خط چین به ترتیب D و C ، با $B/J=0$ را نشان می دهند. در حالی که نقطه-خط چین و نقطه چین به ترتیب D و C ، با $B/J=4$ را نشان می دهند..... ۹۰

شکل (۴-۶) نمودار ویژه مقدار ماتریس چگالی مدل XX بر حسب دما بازای میدان های مغناطیسی مختلف (رابطه (۴-۵۱))..... ۹۲

شکل (۴-۷) نمودار دومین ویژه مقدار ماتریس چگالی مدل XXX برحسب دما در میدان های مغناطیسی مختلف (رابطه (۴-۵۳))..... ۹۴

شکل (۴-۸) نمودار ظرفیت گرمایی برای مدل XXX برحسب دما و میدان مغناطیسی خارجی..... ۹۶

شکل (۴-۹) نمودار آنتروپی توأم AB (معادله (۴-۵۶)) و آنتروپی زیرسیستم B (معادله (۴-۵۸)) مربوط به سیستم مدل XXX ۹۹

شکل (۴-۱۰) نمودار مربوط به آنتروپی توأم و آنتروپی جزئی زیرسیستم یک سیستم مدل XX ۹۹

شکل (۴-۱۱) نمودار آنتروپی جزئی مشروط نیومن (معادله (۴-۶۰)) مربوط به سیستم اسپینی مدل XXX با ماتریس چگالی کل بیان شده در رابطه (۴-۴۳)..... ۱۰۰

شکل (۴-۱۲) نمودار آنتروپی جزئی مشروط برای سیستم اسپینی مدل XX با ماتریس چگالی معرفی شده در معادله (۴-۴۵)..... ۱۰۱

شکل (۴-۱۳) نمودار ویژه مقدار چهارم λ_4 ماتریس چگالی مشروط بیان شده در رابطه (۲-۳۸) سیستم های: (a) مدل XX و (b) XXX ۱۰۲

شکل (۴-۱۴) مقایسه نمودار آنتروپی جزئی مشروط کوانتومی و ناسازگاری کوانتومی برای سیستم های اسپینی (a) مدل XX و (b) مدل XXX با $B/J=0$ ۱۰۳

فهرست جداول

جدول (۱-۲) تفاوت بین دو نوع تعبیر احتمالاتی دربارهٔ یک حالت کوانتومی..... ۴۱

فصل ۱

مقدمه

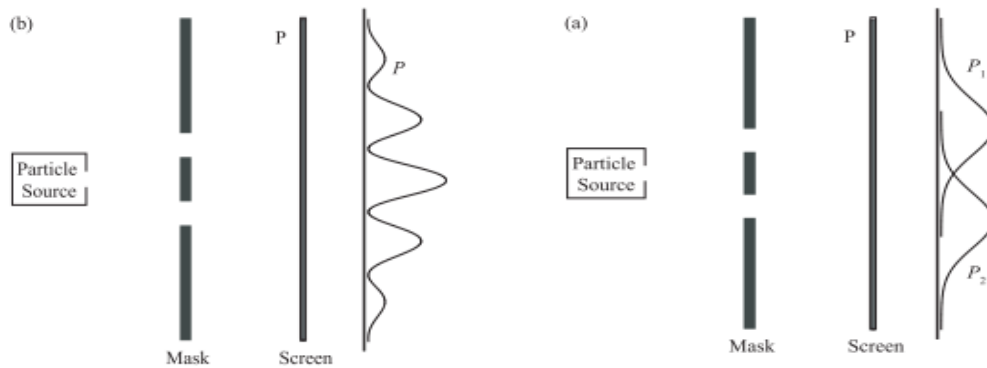
- ✓ احتمال و اطلاعات
- ✓ احتمالات مشروط
- ✓ آنتروپی شانون و متراکم‌سازی اطلاعات
- ✓ وابستگی آنتروپی شانون به توزیع احتمال
- ✓ خواص آنتروپی شانون
- ✓ نتیجه‌گیری

قبل از این که ما بتوانیم آنتروپی فون نیومن و همچنین رابطه آن با اطلاعات کوانتومی را درک کنیم، باید آنتروپی شانون و همچنین ارتباط آن با اطلاعات کلاسیکی را مورد بحث و بررسی قرار دهیم.

یکی از کارآمدترین بینش‌های شانون در کمی کردن اطلاعات، تعریف آنتروپی بود. شانون با مقاله‌ای که در زمینه نظریه اطلاعات ارائه داد، خود را یکی از تأثیرگذارترین افراد در این زمینه معرفی کرد. نتایج مطالعات شانون در زمینه کامپیوترهای کلاسیکی و نظریه اطلاعات او در حل مشکلات این شاخه از علوم هنوز هم اهمیت بسزایی دارد. در این فصل درباره آنتروپی شانون به عنوان رابطه‌ای که محتوای اطلاعاتی یک سیستم کلاسیکی را تعیین می‌کند صحبت کرده و ویژگی‌های مهم آن را بیان می‌کنیم.

اطلاعات، تابعی از احتمالات است، و آنتروپی مربوط به توزیع احتمال می‌باشد. این نتیجه‌ای از تحقیقات در سرشت فیزیکی آنتروپی توسط بولتزمن و پیروانش است و تمام قدرت آنتروپی به عنوان کمیت اطلاعات توسط شانون در نظریه ارتباطاتش آشکار شده است.

از آن جایی که مکانیک کوانتومی یک نظریه احتمالی است، بنابراین بدیهی بود تا یک نظریه اطلاعات کوانتومی مانند نظریه اطلاعات کلاسیکی پایه گذاری شود. در نظریه کوانتومی، احتمالات کمیت‌های ثانویه محاسبه شده از طریق به توان دو رساندن قدرمطلق دامنه‌های احتمال می‌باشند و این به اثرهای تداخلی می‌انجامد. به عنوان مثال آزمایش دو شکاف معروف که در شکل (۱-۱) نشان داده شده است را در نظر بگیرید.



شکل (۱-۱) آزمایش دو شکاف (a) احتمالات کلاسیکی و (b) احتمالات کوانتومی برای حالتی که یک تک ذره روی پرده آشکار می‌شود.

یک ذره پرتابی به سمت شکاف‌ها می‌تواند با عبور از هر شکاف، به نقطه P روی پرده برسد. در

مکانیک آماری کلاسیکی این به یک احتمال

$$P = P_1 + P_2 \quad (1-1)$$

منجر می‌شود و P_1 و P_2 به ترتیب عبارتند از احتمالاتی که ذره از طریق شکافهای 1 یا 2 عبور می‌کند و به نقطه P می‌رسد. اما در نظریه کوانتومی، ما یک دامنه احتمال مختلط ψ_1 و ψ_2 را به هر یک از شکافها نسبت می‌دهیم پس برای احتمال کل داریم:

$$P = |\psi_1 + \psi_2|^2 \quad (2-1)$$

که $P_1 = |\psi_1|^2$ و $P_2 = |\psi_2|^2$. به وضوح این کمیت که می‌تواند از همتای کلاسیکی‌اش (معادله (۱-۱)) بیشتر یا کمتر باشد به فاز کمیت مختلط $\psi_1 \psi_2^*$ وابسته است و این فاز به فاصله بین P و دو شکاف بستگی دارد. این اثر تداخل کوانتومی است. قاعده دامنه‌های احتمال، نظریه کوانتومی را از مکانیک آماری کلاسیکی بسیار متفاوت می‌سازد. رابطه بنیادی بین احتمال و اطلاعات باعث می‌شود که یک نفر پیش‌بینی کند

اطلاعات کوانتومی به طور بنیادی رفتاری متفاوت از اطلاعات کلاسیکی خواهد داشت. اطلاعات کوانتومی علم نظریه اطلاعات و نظریه کوانتومی را با هم ادغام می کند.

۱ - ۱ - احتمالات مشروط

یک رویداد را در نظربگیرید، به عنوان مثال یک اندازه گیری یا نتیجه یک بازی شانسی (بخت و اقبال) که می تواند یک تعداد خروجی ممکن داشته باشد. ما این رویداد را A و مجموعه خروجی ها را با $\{a_i\}$ نشان می دهیم. احتمال این که a_i اتفاق بیافتد ($A = a_i$) $P(a_i)$ است که $0 \leq P(a_i) \leq 1$. اگر مجموعه $\{a_i\}$ شامل تمام خروجی های ممکن باشد آنگاه:

$$\sum_i P(a_i) = 1 \quad (3-1)$$

این مجموعه احتمالات، تعریف آماری کاملی را از یک تک رویداد فراهم می کند. اگر ما یک رویداد دومی به نام B با خروجی های $\{b_j\}$ را در نظر بگیریم آنگاه احتمال های $P(a_i)$ و $P(b_j)$ ، همه آنچه که ما برای دانستن نیاز داریم را بیان نمی کنند. لذا یک تعریف کاملتر توسط احتمال های توأم $\{P(a_i, b_j)\}$ ارائه شده است. $P(a_i, b_j)$ یعنی احتمالی که $A = a_i$ و $B = b_j$. اگر A, B مستقل از هم باشند آنگاه:

$$P(a_i, b_j) = P(a_i)P(b_j) \quad (4-1)$$

به طور کلی رابطه $P(a_i, b_j) \leq P(a_i)P(b_j)$ برقرار است. با استفاده از احتمال های توأم داریم:

$$P(a_i) = \sum_j P(a_i, b_j) \quad (5-1)$$

$$P(b_j) = \sum_i P(a_i, b_j) \quad (6-1)$$

و این نتیجه را بیان می‌دارد که: احتمال آن که $A = a_i$ با احتمال آنکه $A = a_i$ و B یکی از مقایر مجازش را اختیار کند، برابر است.

اگر ارزش A را بدانیم آنگاه این چه چیزی را راجع به مقادیر مجاز B به ما می‌گوید؟ واضح است که اطلاعات بدست آمده از فرا گرفتن ارزش A می‌تواند احتمالات را برای هر یک از مقادیر B تغییر دهد، اما مایلیم که بتوانیم این تغییرات را کمی کنیم و ارزش احتمالات جدید را بدست آوریم. فرض کنید که $A = a_0$ را بدست می‌آوریم، کمیت‌های مورد علاقه ما عبارتند از احتمالات مشروط $\{P(b_j | a_0)\}$. عبارت $P(b_j | a_0)$ را اینگونه می‌خوانیم: احتمال آنکه $B = b_j$ بشرطی که $A = a_0$ باشد. احتمال مشروط $P(b_j | a_0)$ به رخدادهایی که $B = b_j$ و $A = a_0$ می‌باشند، وابسته است بنابراین بایستی با احتمال توأم $P(a_i, b_j)$ متناسب باشد. پس:

$$P(b_j | a_0) = K(a_0)P(a_0, b_j) \quad (7-1)$$

می‌توانیم ضریب تناسب $K(a_0)$ را با جمع بستن این معادله روی مجموعه خروجی‌های $\{b_j\}$ بدست آوریم. جمع روی j برای $P(a_0, b_j)$ دقیقاً برابر $P(a_0)$ است و $K(a_0) = [P(a_0)]^{-1}$ را نتیجه می‌دهد. ازاینرو می‌توانیم احتمال‌های مشروط و توأم را با معادله زیر به هم مربوط کنیم:

$$P(a_0, b_j) = P(b_j | a_0)P(a_0) \quad (8-1)$$

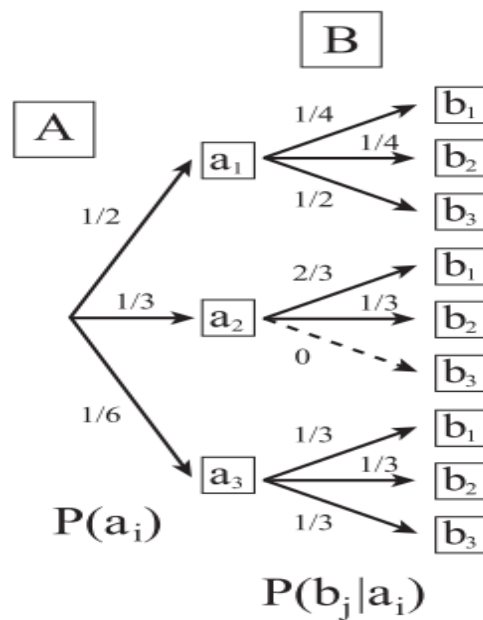
بنابراین در کل داریم:

$$P(a_i, b_j) = P(b_j | a_i)p(a_i) \quad (9-1)$$

با تکرار تحلیل‌های قبلی برای $P(a_i | b_j)$ داریم

$$P(a_i, b_j) = P(a_i | b_j)P(b_j) \quad (10-1)$$

توضیحات بالا را در شکل (۲-۱) خلاصه کردیم. از سمت چپ اولین خطوط مطابق با مجموعه مقادیر ممکن A و خطوط باقی مانده مربوط به مقادیر B می باشند.



شکل (۲-۱) یک درخت احتمال برای دو رویداد A, B . دقت کنید که خط بریده نشان دهنده احتمال مشروط صفر است.

اعداد روی خطوط، احتمالات مربوطه را نشان می دهند و از چپ به راست خوانده می شوند. بنابراین

$$\text{احتمالات مربوط به مقادیر } A \text{ عبارتند از } P(a_1) = \frac{1}{2}, P(a_2) = \frac{1}{3}, P(a_3) = \frac{1}{6}.$$

با پیش رفتن به سمت راست، مسیرهای خروجی از گره a_1 با احتمالات شرطی زیر همراه می شود:

$$P(b_1 | a_1) = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad P(b_2 | a_1) = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad P(b_3 | a_1) = \frac{1}{2}$$

احتمال پیمودن هر مسیر داده شده در شکل را می توان با ضرب کردن احتمالات تعیین شده برای هر یک از مسیرها، محاسبه کرد [۳].

۱ - ۲ - آنتروپی شانون و متراکم سازی اطلاعات

یک متن^۱ عبارت است از رشته ای^۲ از حروف انتخاب شده مطابق با یک الفبایی متشکل از k حرف به صورت زیر:

$$\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \quad (11-1)$$

فرض می کنیم که حروف داخل متن به طور آماری مستقل از هم هستند و هر حرف a_i با احتمال $p(a_i)$ اتفاق می افتد در جایی که $\sum_{i=1}^k p(a_i) = 1$. به عنوان مثال: ساده ترین مورد الفبای باینری است که در این مورد با احتمال $1-P$ و 1 با احتمال P به ترتیب اتفاق می افتند و برای P داریم $0 \leq P \leq 1$.

حال یک متن طولانی متشکل از n حرف را در نظر بگیرید که $n \gg 1$. می پرسیم آیا ممکن است یک متن را به یک رشته کوتاهتری فشرده کرد که همان اطلاعات ضروری را حمل کند؟

برای n های خیلی بزرگ، رشته هایی از این نوع (در مورد حروف باینری) شامل $n(1-p)$ تا 0 و np تا

1 خواهند بود. تعداد رشته های مجزا (ترکیبات) که به این فرم هستند از مرتبه ضریب دو جمله ای $\binom{n}{np}$

می باشند. از تقریب استرلینگ

$$\log n! = n \log n - n + O(\log n) \quad (12-1)$$

داریم:

$$\log \binom{n}{np} = \log \left(\frac{n!}{(np)![n(1-p)]!} \right) \cong \quad (13-1)$$

$$n \log n - n - [n p \log n p - n p + n(1-p) \log n(1-p) - n(1-p)] = n H(p)$$

که

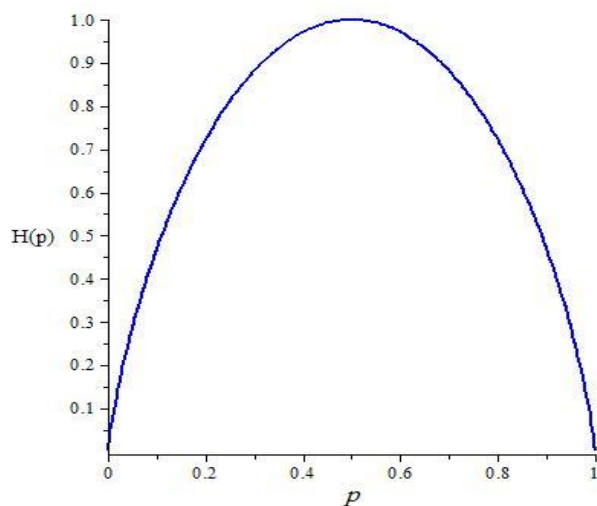
$$H(p) = -p \log p - (1-p) \log(1-p) \quad (14-1)$$

تابع آنتروپی می‌باشد. شکل (۳-۱) رابطه (۱۴-۱) را توصیف می‌کند.

لذا تعداد رشته‌های از این نوع (تعداد ترکیبات $\binom{n}{np}$) از مرتبه $2^{nH(p)}$ هستند. در اینجا \log ها (مطابق

با تعداد حروف باینری متفاوت) در مبنای ۲ تعریف می‌شوند مگر این که از قبل طور دیگری تعریف شده - باشند. برای انتقال قطعی همه اطلاعات حمل شده توسط یک رشته از n بیت، کفایت یک بلوک حاوی k را انتخاب کنیم که نشان دهنده یک عدد صحیح مثبت مربوط به هر کدام از رشته‌های نوعی می‌باشد.

این بلوک حدود $2^{nH(p)}$ حرف را شامل می‌شود بنابراین بایستی هر یک از حروف را با استفاده از یک رشته باینری با طول $nH(p)$ مشخص کنیم. از اینرو $0 \leq H(p) \leq 1$ برای $0 \leq p \leq 1$ ، و $H(p) = 1$ متناسب با $p = \frac{1}{2}$. بلوک حاوی k ، متن را به ازای هر $p \neq \frac{1}{2}$ کوتاه می‌کند (هرگاه احتمال رخداد 0 و 1 با هم برابر نباشد). این نتیجه شانون می‌باشد.



شکل (۳-۱) نمودار آنتروپی شانون برای یک سیستم دو حالتی بیان شده در رابطه (۱۴-۱).

در رشته‌ای از n حرف، به عنوان مثال اگر x با احتمال $np(x)$ مرتبه اتفاق بیافتد تعداد رشته‌های

نمونه از مرتبه:

$$\frac{n!}{\prod_x (n p(x))!} \approx 2^{-nH(X)} \quad (15-1)$$

می‌باشند. اگر x از مجموعه $\{0, 1\}$ انتخاب شود آنگاه از رابطه بالا به رابطه (۱۳-۱) می‌رسیم. و دوباره با

استفاده از تقریب استرلینگ داریم:

$$H(X) = \sum_x -p(x) \log p(x) \quad (16-1)$$

که آنتروپی شانون برای آنسامبل $X = \{x, p(x)\}$ می‌باشد. با پذیرفتن یک بلوک حاوی کد، اطلاعات

در رشته‌ای از n حرف می‌تواند در $H(X)$ بیت فشرده شود. در این موقع یک حرف x منتخب از آنسامبل،

به طور متوسط، $H(X)$ بیت از اطلاعات را حمل می‌کند. بیان مجدد این استدلال در قالب یک زبان دیگر

با کمی تفاوت مفید می‌باشد. یک متن n حرفی به صورت $x_1 x_2 \dots x_n$ را در نظر بگیرید داریم:

$$P(x_1 \dots x_n) = p(x_1) p(x_2) \dots p(x_n) \quad (17-1)$$

$$\log P(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n \log p(x_i) \quad (18-1)$$

نتیجه می‌گیریم که برای بیشترین ترتیب‌ها یعنی: $(x_1 = x_2 = \dots = x_n)$ داریم:

$$-\frac{1}{n} \log P(x_1, \dots, x_n) \approx \langle -\log p(x) \rangle \equiv H(X) \quad (19-1)$$

جایی که براکت‌ها بر مقدار میانگین تابع لوگاریتمی توزیع احتمال متغیر x دلالت دارند.

حال اگر P یک توزیع احتمال برای تعداد محدودی از N خروجی ممکن باشد آنگاه یک بردار \vec{P} با N

مؤلفه داریم که در آن $p_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. همان‌طور که بیان شد آنتروپی شانون برای این توزیع

احتمال عبارت‌است از:

$$H(P) = -k \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i \quad (20-1)$$

k یک کمیت مثبت (ثابت بولتزمن¹ در مکانیک آماری) می‌باشد و معمولاً آن را برابر ۱ قرار می‌-

دهیم. در مبحث نظریه اطلاعات از $k = \frac{1}{\ln 2}$ استفاده می‌کنیم چون با این تعریف یکای آنتروپی اطلاعات

برحسب بیتها تعریف می‌شود. توجه کنید که آنتروپی به یک متغیر تصادفی X مربوط می‌شود و می‌توان

آن را به صورت $H(X)$ نوشت. اما تنها خاصیت متغیر تصادفی که حائز اهمیت است توزیع احتمال P

است. دلیل این که چرا توسط شانون آنتروپی نامیده شد در زیر بیان شده است:

1 Boltzmann

"بیشترین نگرانی من این بود که آن را چه نامم. فکر کردم آن را اطلاعات نامم اما این کلمه بارها استفاده شده بود. بنابراین تصمیم گرفتم آن را ابهام (عدم قطعیت) بنامم. هنگامی که در مورد آن با جان فون نیومن مذاکره کردم او یک ایده بهتری داشت. فون نیومن به من گفت به دو دلیل تو باید آن را آنتروپی بنامی اولاً تابع عدم قطعیت شما تحت همین نام در مکانیک آماری استفاده شده است پس تاکنون یک نامی برای آن وجود دارد. ثانیاً و مهمتر از اولی هیچ کس نمی‌داند که آنتروپی واقعا چیست. پس در یک مباحثه شما همیشه یک برتری دارید" [۱۲].

۱ - ۳ - وابستگی آنتروپی شانون به توزیع احتمال

شانون را پدر علم اطلاعات می‌نامند و آنتروپی شانون، مفهوم کلیدی نظریه اطلاعات کلاسیکی می‌باشد. فرض کنید مقدار متغیر تصادفی X را می‌دانیم، آنتروپی شانون X ، میانگین مقدار اطلاعات بدست آمده از متغیر تصادفی X را به صورت کمی بیان می‌کند. یا از دیدی دیگر قبل از دانستن مقدار X آنتروپی شانون میزان ابهام یا عدم قطعیت درباره آن را مشخص می‌کند. این دو دیدگاه مکملند [۵].

محتوای اطلاعاتی یک متغیر تصادفی نباید بستگی به برچسب‌های مختلفی که آن متغیر می‌تواند بگیرد داشته باشد، و اگر یک متغیر تصادفی را به عنوان نمادی برای نشان دادن توزیع‌های احتمالی متفاوت به کار بریم اطلاعات کسب شده نباید به نوع آن متغیر وابسته باشد. مثلاً متغیر تصادفی که می‌تواند شیر یا خط را با احتمال‌های $۳/۴$ و $۱/۴$ بگیرد، همان مقدار اطلاعاتی را در بردارد که اگر مقادیر 0 یا 1 را با احتمال‌های $۳/۴$ و $۱/۴$ اختیار می‌کرد. به همین دلیل بنا به تعریف، آنتروپی متغیر تصادفی تابعی از احتمال مقادیر ممکن و مختلف است که متغیر تصادفی می‌تواند اختیار کند. همان طور که اشاره کردیم شانون نشان داد که آنتروپی متناسب با این توزیع احتمال را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [۵ و ۶]:

$$H(X) \equiv H(p_1, \dots, p_n) \equiv -\sum_x p_x \log p_x \quad (21-1)$$

شانون برای سازگاری رابطه‌اش با سیستم‌های دودویی پیشنهاد کرد که مبنای لگاریتم ۲ در نظر گرفته شود. در مورد $P_x = 0$ می توان گفت: به طور شهودی حادثه‌ای که هیچ گاه اتفاق نمی افتد سهمی در آنتروپی ندارد، بنابراین برای $0 \log 0$ داریم: $0 \log 0 \equiv 0$. یا به طور واضح تر $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$. [۵]. از رابطه شانون مشخص است که مقدار ماکزیمم $H(X)$ هنگامی است که همه خروجی‌های یک رویداد دارای احتمالات مساوی باشند. در این صورت ناآگاهی ما از سیستم بیشینه است. در صورتی که همه احتمال‌ها به جز یکی صفر باشند عدم یقین ما از سیستم کمینه بوده و برابر صفر می شود که امری کاملاً طبیعی است. اکنون رویدادی مانند X را در نظر بگیرید که پیشامدها یا نتایج ممکنه آن با مجموعه‌ $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ نشان داده می شود. اگر نتیجه حاصل از رخ دادن این رویداد به ما گزارش شود، مثلاً به طریقی بفهمیم که نتیجه x_i رخ داده است، در این صورت می توان پرسید که چقدر اطلاعات کسب کرده ایم یا چه اندازه از ناآگاهی یا جهل ما کاسته شده است. کاملاً قابل درک است که هرچه پیش آمد رخ داده متحمل تر باشد اطلاعاتی که کسب کرده ایم کمتر و هرچه آن اتفاق دور از انتظار باشد، تعجب ما از وقوع آن بیشتر و در نتیجه اطلاعاتی که کسب کرده ایم بیشتر است. بنابراین میزان اطلاعات بدست آمده نسبتی معکوس با احتمال رخ دادن آن پیش آمد دارد. این نتایج با رابطه شانون سازگار است.

۱ - ۳ - ۱ - آنتروپی مشروط شانون

حال X, Y را به عنوان دو متغیر تصادفی در نظر بگیرید. محتوای اطلاعاتی X, Y چگونه به هم مربوط می شوند؟ دو مفهوم آنتروپی مشروط و آنتروپی متقابل ما را در پاسخ دادن به این پرسش کمک می کنند.

آنترپی شانون $H(X)$ اطلاعات منتقل شده توسط آنسامبل X و تعداد بیت لازم برای رمزنگاری اطلاعات را مشخص می‌کند. اطلاعات متقابل^۱ $I(X:Y)$ نحوه ارتباط بین دو متن را مشخص می‌کند. فرض کنید می‌خواهیم یک متن را از یک فرستنده به یک گیرنده ارسال کنیم. اما کانال ارتباطی نوفحه‌دار^۲ است، بنابراین متن دریافتی (y) می‌تواند با متن فرستاده شده متفاوت باشد. کانال ارتباطی نوفحه‌ای را می‌توان به صورت آنترپی مشروط مربوط به $p(y|x)$ (احتمالی که با ارسال x ، y دریافت شود) تعریف کرد. فرض می‌کنیم که حرف x با احتمال $p(x)$ مشخص می‌شود، ما قصد داریم مقدار اطلاعاتی را که در مورد x توسط دریافت y بدست می‌آوریم را کمی کنیم، یا به طور ساده‌تر اینکه: با دریافت y چه مقدار اطلاعات کسب می‌کنیم؟

همان‌طور که بیان شد، آنترپی $H(X)$ مقدار ابهام و جهل ما را نسبت به X نشان می‌دهد. قبل از دریافت هر متن، شما نیازمند ارسال nH بیت (بدون نوفه) هستید تا یک متن خاص متشکل از n حرف به طور کامل مشخص شود. اما بعد از پی‌بردن به ارزش y ، می‌توانیم با استفاده از قانون بای^۳، توزیع احتمال - x را دوباره فرمولبندی کنیم یعنی:

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} \quad (۲۲-۱)$$

آنترپی توأم^۴ یک جفت از متغیرهای تصادفی، به صورت $H(X,Y)$ تعریف می‌شود و در واقع میزان اطلاعاتی است که از این دو متغیر تصادفی به دست می‌آوریم، یا عدم قطعیت کل دو متغیر تصادفی X و Y را مشخص می‌کند.

1 Mutual information
 2 Noisy
 3 Bayes rule
 4 Joint entropy

همان گونه که پیش از این گفته شد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(X, Y) = -\sum_{x, y} p(x, y) \log p(x, y) \quad (23-1)$$

با استفاده از $p(x | y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}$ خواهیم دید که

$$H(X | Y) = \langle -\log p(x | y) \rangle = \langle -\log p(x, y) + \log p(y) \rangle = H(X, Y) - H(Y) \quad (24-1)$$

دو متغیر تصادفی X و Y را در نظر بگیرید، آنتروپی جزئی مشروط به طور متوسط میزان عدم یقین

ما را درباره X ، به شرط دانستن مقدار Y ، مشخص می‌کند. رابطه

$$H(X | Y) = H(X, Y) - H(Y) \quad (25-1)$$

آنتروپی مشروط را نشان می‌دهد. به طور مشابه:

$$H(Y | X) = \langle -\log p(y | x) \rangle = \left\langle -\log \left(\frac{p(x, y)}{p(x)} \right) \right\rangle = H(X, Y) - H(X) \quad (26-1)$$

$H(X | Y)$ عبارت است از تعداد بیت‌های مورد نیاز برای مشخص کردن زیرسیستم x در صورتی که y

کاملاً شناخته شده باشد. بدیهی است که این کمیت نمی‌تواند منفی باشد.

با استفاده از احتمالات می‌توان رابطه جالب و حائز اهمیت دیگری از آنتروپی مشروط شانون بدست

آورد. این رابطه و روش بدست آوردنش را در زیر توضیح می‌دهیم.

با استفاده از رابطه (25-1) و روابط (4-1) تا (10-1) داریم:

$$H(A | B) = -\sum_{ij} P(a_i, b_j) \log_2 P(a_i, b_j) + \sum_j P(b_j) \log_2 P(b_j) \quad (27-1)$$

طبق رابطه (6-1) داریم:

$$H(A|B) = -\sum_{ij} P(a_i, b_j) \log_2 P(a_i, b_j) + \sum_j \sum_i P(a_i, b_j) \log_2 P(b_j) \quad (28-1)$$

$$H(A|B) = -\sum_{ij} P(a_i, b_j) \log_2 P(a_i | b_j) \quad (29-1)$$

اطلاعاتی که راجع به X بدست می‌آوریم در حالی که Y برای ما کاملاً مشخص باشد توسط تعداد بیت‌های مورد نیاز که برای مشخص کردن X به کار می‌رود، توصیف می‌شود. بنابراین:

$$\begin{aligned} H(X : Y) &= H(X) - H(X | Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \\ &= H(Y) - H(Y | X) \end{aligned} \quad (30-1)$$

که $H(X : Y)$ اطلاعات متقابل نام دارد. بدیهی است که با تقارن تحت تعویض X و Y ، همان مقدار اطلاعات راجع به X توسط دریافت Y را بدست می‌آوریم که با دریافت X راجع به Y بدست خواهیم آورد. پی‌بردن به Y دانسته‌های ما را راجع به X کاهش نخواهد داد، در نتیجه $H(X : Y)$ به وضوح نامنفی خواهد بود. در نتیجه کمینه مقدار آن عبارت است از :

$$p(x, y) = p(x)p(y) \Rightarrow H(X : Y) = \left\langle \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right\rangle = 0 \quad (31-1)$$

به طور طبیعی اگر هیچ ارتباطی بین X و Y نباشد آنگاه با دریافت Y هیچ اطلاعاتی در مورد X بدست نخواهد آمد [۳]. برای آنتروپی متقابل هم می‌توان رابطه‌ای مشابه معادله (۲۹-۱) با همان روش بدست آورد.

۱ - ۴ - خواص آنتروپی شانون

بعضی از خاصیت‌های آنتروپی شانون عبارتند از:

- مثبت بودن: برای تمام توزیع‌های احتمال به وضوح $H(P) \geq 0$.
- پیوستگی: $H(P)$ یک تابع پیوسته از توزیع احتمال است.
- قابلیت انبساط: با توجه به رابطه $0 \ln 0 = 0$ ، عبارت $H(p_1, \dots, p_N) = H(p_1, \dots, p_N, 0)$ صادق خواهد بود.
- تقعر^۱: برهم‌نهی سیستم‌ها، آنتروپی را افزایش می‌دهند.
- افزایشی: اگر ما یک توزیع احتمال توأم P_{12} برای دو متغیر تصادفی داشته باشیم و همچنین اگر آنها مستقل از هم باشند، بنابراین احتمال‌های توأم از حاصل ضرب احتمال‌های مربوط به آنها بدست می‌آید
لذا:

$$H(P_{12}) = H(P_1) + H(P_2) \quad (۳۲-۱)$$

به عبارت دیگر اطلاعات مورد نیاز برای توصیف دو متغیر تصادفی مستقل از هم عبارت‌است از جمع اطلاعات مورد نیاز برای توصیف تک تک آنها.

- زیر افزایشی: اگر دو متغیر تصادفی به هم وابسته باشند آنگاه:

$$H(P_{12}) \leq H(P_1) + H(P_2) \quad (۳۳-۱)$$

تساوی هنگامی صادق است که دو متغیر تصادفی کاملاً مستقل از هم باشند [۱۰].

1 Concavity

۱ - ۵ - نتیجه گیری

در این فصل ضمن معرفی آنتروپی شانون به چند ویژگی مهم این آنتروپی اشاره کردیم و برخی از کاربردهای مهم آن را بیان کردیم. از اینرو می توان نتیجه گرفت که در فیزیک کلاسیک، بهترین و مفیدترین رابطه ای که برای کمی کردن اطلاعات بکار می رود، آنتروپی شانون می باشد. لازم به ذکر است که چون آنتروپی شانون به احتمال رویدادهای مختلف وابسته است، محتوای اطلاعات سیستمی که بر اساس آن به دست می آید همواره تحت اندازه گیری های مختلف ناوردا باقی می ماند.

موضوع دیگر اینکه اگر احتمال رویدادهای مختلف به زمان وابسته نباشد، محتوای اطلاعات سیستمی که بر اساس آن به دست می آید همواره تحت اندازه گیری های محتوای اطلاعات به دست آمده از آنتروپی شانون در زمان بقا دارد. این دو ویژگی از مهم ترین ویژگی هایی است که اندازه^۱ اطلاعات باید داشته باشد. همان طور که گفتیم آنتروپی شانون به خوبی در این شرطها صدق می کند. همچنین از روابط بدست آمده در مورد آنتروپی مشروط شانون، می توان نتیجه گرفت که این کمیت همیشه مثبت بوده و حداقل مقداری که به خود می گیرد صفر می باشد که این مقدار کمینه از آنتروپی جزئی مشروط، بیان گر آن است که، دو زیرسیستم از یک سیستم کلاسیکی با هم بیشینه همبستگی را داشته باشند [۱۲].

1 Measure

فصل ۲

آنتروپی فون نیومن

- ✓ مقدمه
- ✓ اطلاعات کوانتومی
- ✓ آنتروپی فون نیومن
- ✓ همبستگی در مقابل درهم‌تنیدگی، سیستم‌های دوجزئی و سه‌جزئی
- ✓ ذخیره و انتقال اطلاعات در کانال‌های کوانتومی بدون نوفه
- ✓ اندازه‌گیری
- ✓ نتیجه‌گیری

اطلاعات کوانتومی به گونه‌ای از اطلاعات گفته می‌شود که سیستم‌های کوانتومی حامل آنها می‌باشد. برای دانستن میزان اطلاعات هر منبع باید آن را به صورت کمی درآوریم. گفتیم که در فیزیک کلاسیک بهترین روش برای کمی کردن اطلاعات استفاده از آنتروپی شانن است، اما در مکانیک کوانتومی استفاده از این آنتروپی ما را با مشکل مواجه می‌کند و به دلایلی غیر قابل کاربرد است که ما به چند مورد از آنها اشاره کرده و سرانجام سعی می‌کنیم آنتروپی‌هایی را معرفی کنیم، که در مکانیک کوانتومی مفید و قابل استفاده باشند.

۲ - ۲ - اطلاعات کوانتومی

در اوایل ظهور تئوری کوانتومی نظریه پردازان پی برده بودند که ایده‌های کلاسیکی در مورد اطلاعات، تحت قوانین فیزیک جدید نیاز به اصلاح دارد.

در نظریه کوانتومی، متغیرهای جابه‌جا ناپذیر نمی‌توانند به طور هم‌زمان اندازه‌گیری شوند (اصل عدم قطعیت)، در حقیقت اگر A , B با هم جابه‌جا نشوند آنگاه اعمال یک اندازه‌گیری روی مشاهده‌پذیری به نام A روی خروجی اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر دیگری به نام B ، تأثیر خواهد گذاشت. از اینرو عملکرد اطلاعات دست‌یافتنی در مورد یک سیستم فیزیکی به ناچار حالت سیستم را مختل می‌کند. برای این ویژگی در فیزیک کلاسیکی هیچ همتایی وجود ندارد.

در اندازه‌گیری یک سیستم کوانتومی، خروجی یک اندازه‌گیری دارای مؤلفه تصادفی است لذا ما قادر به استنباط حالت اولیه سیستم از خروجی اندازه‌گیری نیستیم. اطلاعات دست‌یافتنی که باعث ایجاد اختلال می‌شود نیز با دیگر خواص اطلاعات کوانتومی در ارتباط است مانند: از اطلاعات کوانتومی نمی‌توان

کپی‌برداری کرد (قانون غیر قابل کپی برداری^۱ که توسط ووترز ، زوریخ و دیکس در سال ۱۹۸۲ منتشر شد). اگر می‌توانستیم یک کپی کامل از یک حالت کوانتومی بسازیم، می‌توانستیم یک مشاهده‌پذیر از همان کپی را بدون مختل کردن اصلش، اندازه بگیریم بنابراین می‌توانستیم قانون اختلال را نقض کنیم. از طرف دیگر، هیچ چیزی ما را از کپی کردن کامل اطلاعات کلاسیکی منع نمی‌کند.

این خواص اطلاعات کوانتومی مهم هستند اما در واقع مسیری که در آن اطلاعات کوانتومی از اطلاعات کلاسیکی متمایز می‌شود، در کار جان بل^۲ (۱۹۶۸) رؤیت شد. او نشان داد که پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی را نمی‌توان با هیچ نظریه‌ی متغیرهای پنهان موضعی دوباره ایجاد کرد. بل نشان داد که اطلاعات کوانتومی را می‌توان در قالب همبستگی‌های غیرموضعی بین اعضای مختلف یک سیستم فیزیکی رمزنگاری کرد، همبستگی‌هایی که همتای کلاسیکی ندارند.

۲ - ۱ - ذخیره‌ی اطلاعات در فیزیک کوانتومی

در فیزیک کوانتومی اطلاعات به وسیله‌ی دنباله‌ای از کیوبیت‌ها نمایش داده می‌شود. هر کیوبیت در یک فضای هیلبرت دوبعدی تعریف می‌شود. یک کیوبیت مقدار اطلاعاتی است که یک سیستم کوانتومی دوحالتی مانند ذره‌های اسپین-۱/۲ می‌تواند حمل کند. بنابراین کیوبیت یکی از واحدهای اطلاعات کوانتومی است. اگر بخواهیم اطلاعاتی را که یک کیوبیت حمل می‌کند بازخوانی کنیم مجبوریم حالت کیوبیت را روی پایه‌های اندازه‌گیری $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ، تصویر کنیم که مقادیر بیتی 0 تا 1 را به ما می‌دهد. تنها در موردی که کیوبیت نام برده یک ویژه‌حالت ابزار اندازه‌گیری باشد آنگاه مقدار بیتی که از اندازه‌گیری به دست می‌آید یک ویژگی سیستم را که پیش از اندازه‌گیری نیز وجود داشته است، آشکار می‌کند. ولی به

1 Non cloning
2 John Bell

طور کلی می‌توان گفت که نتیجه اندازه‌گیری تصادفی است و نمی‌توان به هیچ روشی فرض کرد که آنچه در اندازه‌گیری حاصل می‌شود یک ویژگی سیستم را نشان می‌دهد. عدم وجود مقادیر بیتی خوش تعریف و مستقل از مشاهده، بیانگر این است که اندازه‌گیری اطلاعاتی شانون در مکانیک کوانتومی غیرقابل استفاده است و پیش از انجام دادن اندازه‌گیری نمی‌توان عدم قطعیت یک سیستم کوانتومی را با آنتروپی شانون محاسبه کرد.

این یعنی ما نمی‌توانیم برای برخی از حالت‌های کوانتومی، قبل از اندازه‌گیری احتمال مشخص کنیم و ما راجع به طرز آماده‌سازی سیستمی با این حالتها قبل از اندازه‌گیری هیچ چیزی نمی‌توانیم بگوییم.

۲ - ۲ - ۲ - مشکلات تعیین محتوای اطلاعات یک سیستم کوانتومی

به طور کلی محتوای اطلاعاتی سیستم باید تحت اندازه‌گیری‌های متفاوت ناوردا باشد. همچنین اگر جابه‌جایی اطلاعات با محیط صورت نگیرد محتوای اطلاعاتی سیستم باید در بستر زمان پایسته باشد. آنتروپی شانون این دربايست‌ها را در تعیین محتوای اطلاعات کوانتومی برآورده نمی‌کند.

جهان کلاسیکی از ذره‌ها و میدان‌ها تشکیل شده‌است و ویژگی‌های همه این ذرات تشکیل‌دهنده، از روشی که آزمایشگر برای اندازه‌گیری انتخاب می‌کند کاملاً مستقل است. در این صورت گفته می‌شود که جهان کلاسیکی یک جهان مستقل از قرائن عینی است. اما دنیای کوانتومی یک دنیای وابسته به قرائن عینی می‌باشد و محتوای اطلاعاتی سیستم دقیقاً به زمینه آزمایشی انجام شده روی آن بستگی دارد (شکل (۱-۱) را ببینید). در صورتی از یک سیستم کوانتومی بیشینه اطلاعات را کسب می‌کنیم که دستگاه اندازه‌گیری با عملگر ماتریس چگالی سیستم، ویژه‌کتهای هم‌زمان داشته باشد یعنی $\rho|i\rangle = \omega_i|i\rangle$ که ویژه‌کت دستگاه اندازه‌گیری هم می‌باشد. بعنوان مثال سیستمی را در نظر بگیرید

که در مجاورت یک میدان مغناطیسی ثابت در راستای محور z قرار دارد. با اندازه‌گیری عملگر S_z برای این سیستم بیشترین اطلاعات را می‌توانیم راجع به سیستم کسب کنیم چون ماتریس چگالی این سیستم در پایه‌های S_z قطری است یعنی ρ در پایه‌های دستگاه اندازه‌گیری قطری است و ω_i عناصر قطر اصلی می‌باشند. در نتیجه در این حالت خاص آنتروپی شانون با آنتروپی فون نیومن، $S(\rho) = -Tr(\rho \log \rho)$ ، که برای سیستم‌های کوانتومی بکار می‌رود برابر است.

$$H = -\sum_i \omega_i \log \omega_i = -Tr(\rho \log \rho) \quad (1-2)$$

در اینجا H تحت تبدیلات یکانی ناورداست. یعنی اگر پایه‌های آزمایش را تغییر دهیم ρ تحت تغییر پایه-ها، ناوردا باقی می‌ماند و بنابراین H نیز ناوردا باقی می‌ماند. همچنین:

$$H(t) = -\sum_i \omega_i(t) \log \omega_i(t) = -\sum_i \omega_i \log \omega_i \quad (2-2)$$

که نشان می‌دهد در این حالت H در بستر زمان پایسته می‌باشد. اگر ویژه‌بردارهای ماتریس چگالی را ندانیم، آنگاه آنتروپی شانون برای سیستم‌های کوانتومی قابل استفاده نیست. بنابر اصل تمامیت کوانتومی¹، محتوای اطلاعات سیستم در یک دنباله کامل از مشاهده‌پذیرهای دو به دو جابجا ناپذیر نهفته است. ویژگی این مشاهده‌پذیرها آن است که دانش کامل درباره یکی، ما را از داشتن هر دانشی در مورد دیگری محروم می‌سازد. اگر بخواهیم با استفاده از آنتروپی شانون محتوای اطلاعاتی یک سیستم اسپین $1/2$ با

حالت $|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$ را حساب کنیم، عبارت زیر برقرار می‌شود:

1 Completeness principle

$$\begin{cases} |S_x^\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |S_x^\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} |S_y^\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) \\ |S_y^\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle) \end{cases} \quad (۳-۲)$$

$$H_{total} = H_1(p_x^\uparrow, p_x^\downarrow) + H_2(p_y^\uparrow, p_y^\downarrow) + H_3(p_z^\uparrow, p_z^\downarrow) \quad (۴-۲)$$

$$\begin{aligned} H_{total} = & -\frac{1+\sin\theta}{2} \log\left(\frac{1+\sin\theta}{2}\right) - \frac{1-\sin\theta}{2} \log\left(\frac{1-\sin\theta}{2}\right) \\ & - \cos^2\frac{\theta}{2} \log\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\frac{\theta}{2} \log\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (۵-۲)$$

از طرفی اگر $|\psi\rangle$ حول محوری مفروض به اندازه زاویه φ دوران داده شود و محتوای اطلاعاتی سیستم با استفاده از آنتروپی شانون محاسبه گردد، H به دست آمده به φ وابسته است. بنابراین محتوای اطلاعاتی سیستم اسپین ۱/۲ اگر با رابطه شانون محاسبه شود، ناوردا نمی‌باشد و با φ تغییر می‌کند که تأکیدی دوباره بر رد آنتروپی شانون در نظریه کوانتومی است.

۲ - ۳ - آنتروپی فون نیومن^۱

ارتباط بین دو آنسامبل X, Y توسط احتمالات مشروط $p(x|y)$ بیان می‌شود. از قبل دیدیم که اطلاعات متقابل کلاسیکی به صورت:

$$H(X : Y) = H(X) - H(X | Y) = H(Y) - H(Y | X) \quad (۶-۲)$$

تعریف می‌شود، که عبارت است از تعداد بیت‌های اطلاعاتی X که ما توسط خواندن Y بدست می‌آوریم و برعکس.

¹ Von Neumann

مایلم که این ملاحظات را به صورت اطلاعات کوانتومی توصیف کنیم. حال یک منبع که متن‌های n حرفی آماده می‌کند را در نظر می‌گیریم. اطلاعات قابل ارسال شامل یک مجموعه از حالات کوانتومی ρ_x می‌باشد، هر رویداد با احتمال p_x رخ می‌دهد.

همان‌گونه که تا کنون بحث کرده‌ایم، احتمال خروجی هر اندازه‌گیری مربوط به یک حرف انتخاب شده از این آنسامبل (اگر مشاهده‌کننده هیچ اطلاعاتی راجع به حرفی که آماده‌سازی شده‌است نداشته باشد) می‌تواند توسط ماتریس چگالی زیر نشان داده شود.

$$\rho = \sum_x p_x \rho_x \quad (7-2)$$

با استفاده از این ماتریس چگالی (یا هر ماتریس چگالی دیگر)، آنتروپی فون نیومن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho) \quad (8-2)$$

البته اگر پایه‌های عمود برهم $\{|a\rangle\}$ را انتخاب کنیم که ρ را قطری می‌کند در این صورت

$$\rho = \sum_x \lambda_x |a\rangle\langle a| \quad (9-2)$$

که λ_x ها ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی ρ در پایه‌های $\{|a\rangle\}$ می‌باشند، بنابراین:

$$S(\rho) = H(A) \quad (10-2)$$

که $H(A)$ آنتروپی شانون مربوط به آنسامبل $A = \{a, \lambda_x\}$ می‌باشد.

در حالتی که اطلاعات ارسالی به طور کلی شامل حالت‌های آمیخته باشد، سیستم کوانتومی به همتای کلاسیکی خود تبدیل می‌شود. همهٔ حالت‌ها از هم تمیز داده می‌شوند و $S(\rho) = H(X)$. بیان خواهیم داشت که آنتروپی فون نیومن، محتوای اطلاعاتی منبع کوانتومی را تعیین می‌کند همچنان که

آنتروپی شانون محتوای اطلاعاتی یک منبع کلاسیکی را توصیف می‌کند. در واقع پی می‌بریم که آنتروپی فون نیومن نقش دوگانه‌ای را بازی می‌کند. آن نه تنها محتوای اطلاعات کوانتومی مربوط به آنسامبل را توصیف می‌کند (حداقل تعداد کیوبیت‌های مورد نیاز برای کدکردن اطلاعات) بلکه محتوای اطلاعات کلاسیکی را هم توضیح می‌دهد. بنابراین نظریهٔ اطلاعات کوانتومی تا حد زیادی با تفسیر و کاربرد آنتروپی فون نیومن مرتبط می‌باشد، همچنان که نظریهٔ اطلاعات کلاسیکی تا درجهٔ زیادی با تفسیر و کاربرد آنتروپی شانون در ارتباط است.

دستگاه ریاضیاتی که ما برای توسعهٔ نظریهٔ اطلاعات کوانتومی نیاز داریم بسیار مشابه ریاضیات شانون در نظریهٔ اطلاعات کلاسیکی می‌باشد. موضوع اساسی در نظریهٔ اطلاعات کوانتومی این است که حالت‌های کوانتومی خالص غیرعمود را نمی‌توان به طور کامل از هم تشخیص داد، این یک خصوصیتی است که نظیر کلاسیکی ندارد و کاملاً کوانتومی می‌باشد و آنتروپی شانون از توصیف اطلاعات حمل شده توسط این گونه حالتها عاجز است.

۲ - ۳ - ۱ - خواص ریاضیاتی $S(\rho)$

چند خاصیت جالب توجه از $S(\rho)$ وجود دارد که بسیار مفیدند (تعداد زیادی از آنها مشابه خواص همتای کلاسیکی خود یعنی $H(X)$ می‌باشند). ما بعضی از این خواص را در زیر بیان کرده‌ایم.

• **خلوص!** یک حالت خالص $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ دارای آنتروپی $S(\rho) = 0$ می‌باشد. که در قسمت‌های بعدی آن را اثبات می‌کنیم.

• **ناوردایی:** آنتروپی تحت تبدیلات یکانی ناورد است یعنی:

$$S(U \rho U^{-1}) = S(\rho) \quad (11-2)$$

که U یک تبدیل یکانی (مانند عملگر هادامارد) است.

• **ماکزیمم مقدار:** اگر ρ ، تعداد d ویژه مقدار غیرصفر داشته باشد آنگاه:

$$S(\rho) \leq \log_2 d \quad (12-2)$$

تساوی هنگامی اتفاق می افتد که همه ویژه مقادیر غیرصفر مساوی باشند (هنگامی که حالت کوانتومی به طور کاملاً تصادفی انتخاب شود آنتروپی ماکزیمم می شود).

• **تقعر:** برای $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$ و $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ داریم:

$$S(p_1 \rho_1 + \dots + p_n \rho_n) \geq p_1 S(\rho_1) + \dots + p_n S(\rho_n) \quad (13-2)$$

هرچه دانسته های ما از آماده سازی یک حالت کوانتومی کمتر باشد، آنتروپی فون نیومن بزرگ تر خواهد بود. این خاصیت، یک پیامدی از تقعر تابع لوگاریتمی می باشد.

• **آنتروپی اندازه گیری:** فرض کنید در یک حالت ρ مشاهده پذیر A را اندازه می گیریم.

$$A = \sum_y |a_y\rangle a_y \langle a_y| \quad (14-2)$$

بنابراین خروجی a_y با احتمال:

$$p(a_y) = \langle a_y | \rho | a_y \rangle \quad (15-2)$$

برابر است پس آنتروپی شانون برای آنسامبل خروجی های $Y = \{a_y, p(a_y)\}$ نامساوی زیر را ارضاء می کند.

$$H(Y) \geq S(\rho) \quad (16-2)$$

تساوی هنگامی برقرار است که A و ρ با هم جابجا شوند. در قالب ریاضیات، این بیان می‌دارد که اگر تمام عناصر غیر قطری ماتریس ρ را با صفر عوض کنیم، در هر پایه‌ای آنتروپی فون نیومن $S(\rho)$ افزایش خواهد یافت.

• **زیرافزایشی:** یک سیستم دو قسمتی AB با ماتریس چگالی ρ_{AB} را در نظر بگیرید. در این صورت:

$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B) \quad (۱۷-۲)$$

که $\rho_A = Tr_B \rho_{AB}$ و $\rho_B = Tr_A \rho_{AB}$ ، و برای $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ حالت تساوی را داریم. پس آنتروپی برای سیستم‌های مستقل از هم افزایشی است، در غیر این صورت آنتروپی کل کمتر از جمع آنتروپی تک تک اعضای سیستم است این خاصیت شبیه خاصیت:

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y) \quad (۱۸-۲)$$

(یا $H(X:Y) \geq 0$) از آنتروپی شانون می‌باشد. و آن به این دلیل اتفاق می‌افتد که برخی از اطلاعات در XY (یا AB) در مورد همبستگی بین X, Y (B, A) کد می‌شوند.

• **زیرافزایشی قوی:** برای هر حالت ρ_{ABC} از یک سیستم سه قسمتی:

$$S(\rho_{ABC}) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{AB}) + S(\rho_{BC}) \quad (۱۹-۲)$$

• **نامساوی مثلثی (نامساوی آراکی-لیب^۱):** برای یک سیستم کوانتومی دو قسمتی داریم:

$$|S(\rho_A) - S(\rho_B)| \leq S(\rho_{AB}) \quad (۲۰-۲)$$

نامساوی آراکی-لیب به طور صریح با خاصیت:

1 Araki - Lieb

$$H(X, Y) \geq \{H(X), H(Y)\} \quad (21-2)$$

یا با:

$$\{H(X|Y), H(Y|X)\} \geq 0 \quad (22-2)$$

در خصوص آنتروپی شانون در تضاد است. آنتروپی شانون یک سیستم کلاسیکی دو قسمتی بیشتر از آنتروپی شانون هر یک از اعضای آن سیستم است (یعنی اطلاعات موجود در کل سیستم از تک تک اعضای آن بیشتر است) بدلیل خاصیت افزایشی موجود درباره آنتروپی شانون که برای آنتروپی فون نیومن این خاصیت صادق نیست. در نهایت برای یک حالت کوانتومی خالص دو قسمتی داریم $S(\rho_A) = S(\rho_B)$ (و غیر صفر اگر حالت درهم تنیده باشد) در حالی که $S(\rho_{AB}) = 0$. این حالت یک آماده سازی معین و قطعی دارد، در حالی که اگر ما روی مشاهده پذیرهای زیرسیستمها اندازه گیری انجام دهیم خروجی های اندازه گیری به ناچار تصادفی و کاملاً غیرقابل پیش بینی هستند. نمی توانیم تشخیص دهیم که با مشاهده ی دو زیرسیستم به طور جداگانه، حالت سیستم چطور آماده سازی شده است، ترجیحاً اطلاعات به صورت همبستگی های کوانتومی غیرموضعی کدگذاری می شود. رفتار متفاوت آنتروپی مشروط شانون (در حوزه کلاسیکی) با نامساوی آراکی - لیب (در حوزه کوانتومی) به خوبی یک تفاوت مهم بین اطلاعات کوانتومی و اطلاعات کلاسیکی را نشان می دهد.

۲ - ۳ - ۲ - اطلاعات مشروط کوانتومی

مشابه تعریفی که برای آنتروپی مشروط کلاسیکی شانون داشتیم می توانیم آنتروپی مشروط کوانتومی را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$S(\rho_{A|B}) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) \quad (23-2)$$

مانند روابط (۴-۱) تا (۶-۱)، برای ماتریس‌های چگالی داریم:

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB}) \quad \rho_B = Tr_A(\rho_{AB}) \quad \text{و} \quad \rho_{AB} = \rho_{A|B} (1_A \otimes \rho_B) \quad (24-2)$$

$$S(\rho_{A|B}) = -Tr_{AB}(\rho_{AB} \log_2 \rho_{AB}) + Tr_B(\rho_B \log_2 \rho_B) \quad (25-2)$$

$$S(\rho_{A|B}) = -Tr_{AB}(\rho_{AB} \log_2 \rho_{AB}) + Tr_B(Tr_A(\rho_{AB}) \log_2 \rho_B) \quad (26-2)$$

$$S(\rho_{A|B}) = -Tr_{AB}(\rho_{AB} \log_2 \rho_{A|B}) \quad (27-2)$$

۲ - ۳ - ۳ - اطلاعات متقابل کوانتومی

اطلاعات متقابل کوانتومی بین دو زیرسیستم که توسط حالت‌های ρ_A و ρ_B از یک سیستم مرکب با

ρ_{AB} توصیف می‌شوند، عبارت است از:

$$\begin{aligned} I(A : B) &= S(A : B) = S(A) + S(B) - S(A B) \\ &= S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \end{aligned} \quad (28-2)$$

که با همتای کلاسیکی خود مطابق است. این کمیت کوانتومی از حد اطلاعات متقابل کلاسیکی تجاوز می‌کند. به طور خاص اطلاعات متقابل کوانتومی می‌تواند به دو برابر ماکزیمم مقدار بدست آمده در مورد وضعیت کلاسیکی برسد یعنی:

$$I(A : B) = 2 \min\{S(A), S(B)\} \quad (29-2)$$

که نتیجه‌ای از نامساوی آراکی-لیب $S(A, B) \geq |S(A) - S(B)|$ است یا به عبارت دیگر، برای یک سیستم کوانتومی با حالت توأم خالص، رابطه $S(AB) = 0$ برقرار است که ایجاب می‌کند سیستم‌های

کوانتومی در وضعیت اَبَرارتباط^۱ باشند. خصوصاً توجه کنید هنگامی که یک سیستم کوانتومی دو قسمتی در یک حالت خالص باشد آنگاه:

$$I(A : B) = 2S(A) = 2S(B) \quad (۳۰-۲)$$

یک نظریه مهم، که بعنوان نظریه لیب شناخته می شود اساس نتایج بسیار زیادی است که به اندازه-گیری های آنتروپی کوانتومی مربوط می باشد. نامساوی زیرافزایشی قوی که یکی از خواص آنتروپی فون نیومن است، یک نتیجه بسیار مفیدی است که آنتروپی فون نیومن را مورد استفاده قرار می دهد. این نامساوی اجازه می دهد تا یک نفر چندین خاصیت مفید از آنتروپی های معرفی شده در این فصل مانند آنتروپی مشروط و آنتروپی متقابل را در مورد حالت های کاملاً کوانتومی شرح دهد، همچنین ساختار نامساوی ها را تعبیر کند [۱۲].

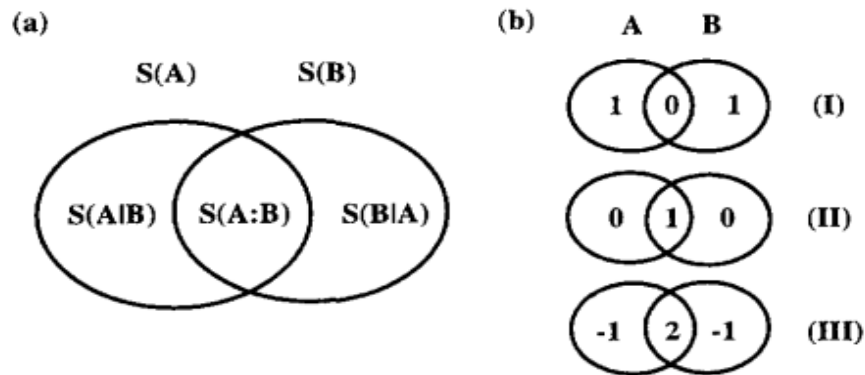
۲ - ۴ - همبستگی در مقابل درهم تنیدگی، سیستم های دو قسمتی و سه قسمتی

همبستگی نوعی ارتباط بین دو یا چند زیرسیستم می باشد که هم در سیستم های کلاسیکی و هم در سیستم های کوانتومی (یک سیستم کوانتومی که دارای حالت آمیخته است) وجود دارد. اما درهم تنیدگی نوعی ارتباط است که فقط بین زیرسیستم های یک سیستم کوانتومی وجود دارد و سیستم های کلاسیکی مجاز به داشتن این نوع ارتباط نمی باشند. درهم تنیدگی کوانتومی را می توان به عنوان همبستگی های کوانتومی در نظریه اطلاعات کوانتومی در نظر گرفت.

1 super correlation

۲-۴-۱ - سیستم‌های دو قسمتی:

همان‌طور که در ادامه خواهیم دید، فرمالیسمی که براساس ماتریس‌ها برای سیستم‌های کوانتومی در نظر گرفته‌ایم را می‌توان به‌طور موفقیت‌آمیزی برای درهم‌تنیدگی کوانتومی به‌کاربرد. در مورد یک سیستم دو قسمتی AB رابطه‌های $S(A), S(B), S(AB), S(A|B), S(B|A), S(A:B)$ به راحتی توسط نمودار وین^۱ آنتروپی (شکل (۲-۱)) نشان داده می‌شود.



شکل (۲-۱) نمودار وین مربوط به آنتروپی کل برای یک سیستم دو قسمتی AB و حالت‌های مختلف آن (a) نمودار وین برای یک سیستم دو قسمتی. (b) (I) دو سیستم مستقل از هم. (II) دو سیستم با بیشترین ارتباط کلاسیکی. (III) دو سیستم با بیشترین درهم‌تنیدگی

مهم‌ترین تفاوت بین نمودارهای آنتروپی کلاسیکی و آنتروپی کوانتومی آن است که قدرت نامساوی‌ها در مورد سیستم‌های کوانتومی ضعیف‌تر است. به عنوان مثال، حد بالای آنتروپی متقابل شانون در نظریه اطلاعات کلاسیکی عبارت است از:

$$H(A:B) \leq \min[H(A), H(B)] \quad (۲-۳۱)$$

که پیامدی از نامساوی

¹ Venn diagram

$$H(AB) \geq \max[H(A), H(B)] \quad (32-2)$$

است. در حالی که برای آنتروپی فون نیومن در نظریه اطلاعات کوانتومی داریم:

$$S(A : B) \leq 2 \min[S(A), S(B)] \quad (33-2)$$

که نتیجه‌ای از نامساوی آراکی - لیب (رابطه (2-19)) است.

این یعنی آنتروپی متقابل در یک کانال کوانتومی می‌تواند به دو برابر حد بالای آنتروپی متقابل شانون برسد. همچنین توجه کنید که خاصیت زیرافزایشی آنتروپی‌های کوانتومی بر نامساوی $S(A : B) \geq 0$ دلالت دارد، درست مانند آنتروپی متقابل کلاسیکی. در شکل (2-1) (b) نمودار آنتروپی را مطابق با سه وضعیت مختلف برای یک سیستم دوقسمتی نشان دادیم: زیرسیستم‌ها مستقل از هم (مورد I)، زیرسیستم‌ها با بیشترین ارتباط کلاسیکی (مورد II) و زیرسیستم‌ها با درهم‌تنیدگی کوانتومی (مورد III). در هر سه مورد هر زیرسیستم به طور مجزا در وضعیت آمیخته با آنتروپی $S(A) = S(B) = 1$ می‌باشد. موارد I و II مطابق با حالت‌های کلاسیکی‌اند (که می‌توان آنها را در فرمالیسم مبنی بر ماتریس‌ها، با استفاده از ماتریس‌های قطری به خوبی تعریف کرد)، در حالی که مورد III به طور خالص یک حالت کوانتومی است که قوانین آنتروپی‌های کلاسیکی شانون برای آن صادق نیست. اجازه دهید تا روی مورد III تمرکز کنیم. این مورد مطابق است با یک زوج EPR که با حالت خالص زیر توصیف می‌شود:

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (34-2)$$

که مطابق است با یک آنتروپی کل صفر، یعنی $S(AB) = 0$. با استفاده از ماتریس چگالی توأم سیستم

$$\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}| \quad (35-2)$$

می‌بینیم که ماتریس چگالی زیر سیستم (B) عبارت است از:

$$\rho_A = Tr_B[\rho_{AB}] = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \quad (36-2)$$

بنابراین در یک حالت آمیخته با آنتروپی مثبت است. این حالت کوانتومی خالص مطابق است با نمودار آنتروپی (III) که در شکل (1-2) نشان داده شده است. در نتیجه EPR را نمی‌توان به طور کلاسیکی بررسی کرد. ماتریس‌های چگالی توأم و هر یک از زیرسیستم‌ها عبارت است از:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \rho_A = \rho_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (37-2)$$

بنابراین برای ماتریس چگالی مشروط همانند رابطه‌های (1-9) و (1-10) برای احتمالات مشروط و همچنین با استفاده از شکل (1-2(a)) و داریم:

$$\rho_{A|B} = \rho_{AB} (\mathbf{1}_A \otimes \rho_B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (38-2)$$

توجه کنید که به طور خاص در مورد حالت‌های بل ماتریس چگالی توأم و ماتریس چگالی تک تک زیرسیستم‌ها با یکدیگر جابه جا می‌شوند از اینرو استفاده از رابطه (2-38) همانند احتمالات ضربی در فصل گذشته صحیح می‌باشد. با قراردادن رابطه‌های (2-37) و (2-38) در تعریف:

$$S(\rho_{A|B}) = -Tr_{AB} [\rho_{AB} \log_2 \rho_{A|B}] \quad (39-2)$$

منجر به $S(\rho_{A|B}) = -1$ می‌شود. رابطه (2-39) با استفاده از تعریف $S(\rho_{A|B}) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$ و

$$\rho_{A(B)} = Tr_{B(A)} \rho_{AB}$$

به سادگی قابل اثبات است که در بخش پیوست آن را اثبات کرده‌ایم.

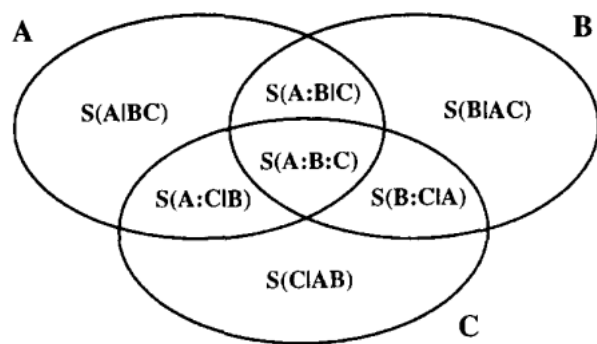
برای رسیدن به $S(\rho_{A|B}) = -1$ در ابتدا باید ویژه مقادیر $\rho_{A|B}$ را بدست آوریم و این ماتریس را در پایه‌های قطری کنیم سپس ماتریس چگالی توأم ρ_{AB} را در پایه‌های ماتریس $\rho_{A|B}$ بنویسیم و در انتها عبارت $S(\rho_{A|B})$ را محاسبه کنیم. در نتیجه:

$$S(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_{A|B}) = 1 - 1 = 0 \quad (40-2)$$

همان طور که انتظار داشتیم. این یک نتیجه مستقیمی از آن حقیقت است که $\rho_{A|B}$ یک ویژه مقدار غیر کلاسیکی (بزرگتر از یک) یعنی ۲ دارد. بنابراین نمی‌توان یک زوج *EPR* (یا هر کدام از حالت‌های بل) را مانند یک حالت همبسته کلاسیکی در نظریه اطلاعات شانون تعریف کرد.

۲ - ۴ - ۲ - سیستم‌های سه‌قسمتی:

به طور کلی‌تر، مفهوم آنتروپی مشروط منفی برای توصیف سیستم‌های کوانتومی سه-قسمتی، بسیار مفید واقع می‌شود و بینش جدیدی را در ایجاد همبستگی‌های کلاسیکی از طریق درهم‌تنیدگی کوانتومی فراهم می‌کند. در مورد سیستم‌های سه‌قسمتی، آنتروپی‌های کوانتومی مربوطه را می‌توان به وسیله نمودار وین همانند شکل (۲-۲) نشان داد.



شکل (۲-۲) نمودار وین آنترپیی برای یک سیستم سه قسمتی ABC .

آنترپیی‌های مشروط عبارتند از: $S(A|BC)$ ، $S(B|AC)$ و $S(C|AB)$ که تعمیمی از آنترپیی‌های مشروط، در یک سیستم دو قسمتی است. این آنترپیی‌ها مانند رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$S(A|BC) = S(ABC) - S(BC) \quad (۴۱-۲)$$

آنترپیی‌های $S(A:B|C)$ ، $S(A:C|B)$ و $S(B:C|A)$ مطابق با آنترپیی‌های متقابل مشروط‌اند که آنترپیی مشروط بین دو زیرسیستم، هنگامی که زیرسیستم سوم مشخص باشد را نشان می‌دهند. مطابق تعریف آنترپیی کلاسیکی، می‌توان نوشت:

$$S(A:B|C) = S(A|C) - S(A|BC) \quad (۴۲-۲)$$

با اندکی محاسبه می‌توان آنترپیی متقابل مشروط را در چارچوب آنترپیی‌های توأم، به صورت زیر بیان کرد.

$$S(A:B|C) = S(AC) + S(BC) - S(C) - S(ABC) \quad (۴۳-۲)$$

این تعبیر نشان می‌دهد که آنتروپی‌های متقابل مشروط همیشه مثبت هستند، که نتیجه ای از خاصیت زیرافزایشی قوی در مورد آنتروپی سیستم‌های کوانتومی یا آنتروپی نیومن است. آنتروپی که در مرکز نمودار شکل (۲-۱) قرار دارد یک آنتروپی متقابل سه‌گانه می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(A : B : C) = S(A : B) - S(A : B | C) \quad (۴۴-۲)$$

با استفاده از معادله (۲۳-۱) رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$S(A : B : C) = S(A) + S(B) + S(C) - S(AB) - S(AC) - S(BC) + S(ABC) \quad (۴۵-۲)$$

به طور کلی‌تر، روابط بین آنتروپی‌های یک سیستم چندقسمتی را می‌توان به روش زیر مانند قواعد زنجیره‌ای برای آنتروپی‌های کوانتومی نوشت.

$$S(A_1 \cdots A_n) = S(A_1) + S(A_2 | A_1) + S(A_3 | A_1 A_2) + \cdots \quad (۴۶-۲)$$

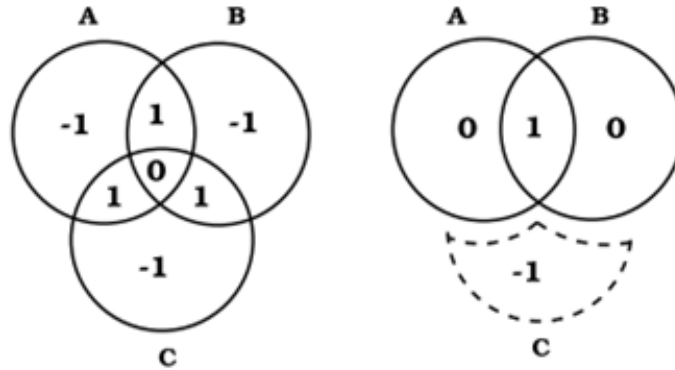
و برای آنتروپی‌های متقابل کوانتومی داریم:

$$S(A_1 \cdots A_n : B) = S(A_1 : B) + S(A_2 : B | A_1) + S(A_3 : B | A_1 A_2) + \cdots \quad (۴۷-۲)$$

به عنوان مثال یک سیستم سه قسمتی ABC را در حالت GHZ به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$|\psi_{ABC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \quad (۴۸-۲)$$

نمودار وین آنتروپی این حالت در شکل (۳-۲) نشان داده شده.



شکل (۳-۲) نمودار وین آنتروپی برای یک سیستم سه قسمتی در حالت GHZ مربوط به رابطه (۲-۴۷).

ماتریس چگالی کاهش یافته ρ_{AB} با اعمال رد جزئی روی ماتریس چگالی کل برای حالت GHZ

(رابطه (۲-۴۷)) بر حسب C بدست می‌آید. یعنی:

$$\rho_{ABC} = \frac{1}{2}(|000\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111|) \quad (۲-۴۹)$$

$$\rho_{AB} = Tr_C(\rho_{ABC}) = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \quad (۲-۵۰)$$

این مطابق است با یک سیستمی که اجزایش با یکدیگر همبستگی کلاسیکی دارند درست مانند سیستمی که در شکل (۳-۱) و همچنین مورد (II) در شکل (۲-۱) نشان داده شده است.

از آنجایی که حالت کل سیستم (رابطه (۲-۴۷)) بیانگر یک حالت خالص است و طبق تعریف آنتروپی

نیومن برای یک حالت خالص، آنتروپی کل برای این سیستم صفر است یعنی $S(\rho_{ABC}) = 0$ بنابراین:

$$S(\rho_{C|AB}) = S(\rho_{ABC}) - S(\rho_{AB}) = -1 \quad (۲-۵۱)$$

که اطلاعات جزئی کوانتومی در یک سیستم سه قسمتی درهم تنیده منفی می‌شود [۲۰].

۲ - ۵ - اندازه گیری

اندازه گیری نوعی تحوّل است که یک سیستم کوانتومی می تواند دستخوش آن شود. این نوع تحوّل در نظریه کوانتومی بی نظیر است و اجازه می دهد تا اطلاعات کلاسیکی را از حالت های کوانتومی بازیابی کنیم. فرض کنید می خواهیم اطلاعاتی را در مورد یک سیستم کوانتومی با حالت $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ یاد بگیریم. فرض کنید عملگر S_z را اندازه بگیریم آنگاه سیستم به حالت $|0\rangle$ با احتمال $|\alpha|^2$ و به حالت $|1\rangle$ با احتمال $|\beta|^2$ رمبش می شود. بعد از اندازه گیری، دستگاه اندازه گیری این را به ما می گوید که اگر حالت به $|0\rangle$ رمبش کند آنگاه نتیجه آزمایش +1، و اگر به $|1\rangle$ رمبش کند آنگاه نتیجه آزمایش -1 خواهد بود. این مقادیر بدست آمده ویژه مقادیر عملگر S_z می باشد. اگر $|\psi\rangle$ را در پایه های $|+\rangle$ و $|-\rangle$ اندازه بگیریم نتیجه اندازه گیری چه خواهد بود؟ توجه کنید که $|\psi\rangle$ را می توانیم همانند برهم نهی از حالت های $|+\rangle$ و $|-\rangle$ نشان دهیم.

اصل موضوع اندازه گیری بیان می دارد که یک اندازه گیری توسط عملگر S_x ، حالت $|+\rangle$ با احتمال $\frac{|\alpha + \beta|^2}{2}$ و حالت $|-\rangle$ با احتمال $\frac{|\alpha - \beta|^2}{2}$ اتفاق می افتد. اکنون در این جا تداخل کوانتومی نقش مهمی را ایفا می کند زیرا دامنه های α, β با یکدیگر تداخل می کنند. حالت ذره ما (الکترون) قبل از اندازه گیری $|\psi\rangle$ چیست؟ در این جا فقط می توانیم بگوییم که آن در یک حالت برهم نهیده یا نامعلوم می باشد، ممکن است گفته شود که الکترون در هر دو وضعیت مختلف به طور هم زمان قرار دارد. همچنین باید تأکید کنیم که نمی توانیم اصل موضوع اندازه گیری را به آن معنی که حالت $|\psi\rangle$ ، قبل از اندازه گیری با احتمال $|\alpha|^2$ در حالت پایه $|0\rangle$ و با احتمال $|\beta|^2$ در حالت پایه $|1\rangle$ قرار دارد، تفسیر کنیم یعنی قبل از اندازه گیری احتمالاتی را برای حضور سیستم کوانتومی مانند الکترون در ویژه حالت های پایه اش مشخص کنیم، زیرا این تفسیر کاملاً کلاسیکی است.

حالت برهم‌نهیده $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ به طور بنیادی دارای رفتاری متفاوت از تعبیر احتمالی از یک حالت (که با احتمال $|\alpha|^2$ در حالت پایه $|0\rangle$ و با احتمال $|\beta|^2$ در حالت پایه $|1\rangle$ قرار دارد) می‌باشد. فرض کنید که ما دو تعریف متفاوت از یک حالت فیزیکی (برهم‌نهیده خالص) یا آمیخته) در اختیار داریم و عملگر S_z را اندازه می‌گیریم. ما نتیجه یکسانی برای هر دو مورد (آنکه حالت در $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ به ترتیب با احتمال‌های $|\alpha|^2$ و $|\beta|^2$ است) بدست می‌آوریم. اکنون فرض کنید که عملگر S_x را اندازه‌گیری کنیم. حالت برهم‌نهیده (در نظر گرفتن حالت سیستم به صورت خالص) نتیجه $|+\rangle$ را با احتمال $\frac{|\alpha+\beta|^2}{2}$ و $|-\rangle$ را با احتمال $\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}$ بدست می‌دهد. تعبیر احتمالاتی (در نظر گرفتن حالت سیستم به صورت آمیخته) یک نتیجه بسیار متفاوت را بدست می‌دهد. فرض کنید که حالت سیستم $|0\rangle$ باشد. ما می‌دانیم که $|0\rangle$ یک برهم‌نهی یکسان از $|+\rangle$ و $|-\rangle$ به صورت زیر است:

$$|0\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \quad (52-2)$$

در این مورد حالت سیستم به $|+\rangle$ و $|-\rangle$ با احتمال‌های یکسان رمبش می‌کند. اگر حالت سیستم $|1\rangle$ باشد آنگاه باز هم به $|+\rangle$ یا $|-\rangle$ با احتمال‌های مساوی رمبش می‌کند ($|1\rangle = \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}$). جمع روی این احتمال‌ها نتیجه می‌دهد که یک اندازه‌گیری از عملگر S_x حالت $|+\rangle$ را با احتمال:

$$\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) = \frac{1}{2} \quad (53-2)$$

و حالت $|-\rangle$ را با احتمالی مشابه بدست دهد. این نتایج به طور بنیادی متفاوت از آن است که حالت سیستم، حالت برهم‌نهیده (خالص) $|\psi\rangle$ باشد. جدول (۱-۲) نتایج بیان شده در پاراگراف بالا را به طور خلاصه نشان می‌دهد توضیحات بیشتر را در بخش پیوست‌ها آورده‌ایم.

جدول (۱-۲). تفاوت بین دو نوع تعبیر احتمالاتی دربارهٔ یک حالت کوانتومی

احتمال $\langle - \rangle$	احتمال $\langle + \rangle$	حالت کوانتومی
$\frac{ \alpha - \beta ^2}{2}$	$\frac{ \alpha + \beta ^2}{2}$	حالت برهم‌تنیده (خالص)
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	توزیع احتمالی (حالت آمیخته)

در این جدول با اندازه‌گیری S_x تفاوت بین دو نوع تعبیر احتمالاتی دربارهٔ یک حالت کوانتومی: (۱) برهم‌نهی^۱ از حالت‌های پایه به صورت $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ که بیان‌گر یک حالت خالص می‌باشند، (۲) یک وضعیت کلاسیکی با اختلاطی^۲ از $|0\rangle$ و $|1\rangle$ که بیان‌گر یک حالت آمیخته می‌باشد، نشان داده شده است.

اکنون یک دستگاه اشترن - گرلاخ^۳ را بعنوان یک مثال دیگر برای روشنتر شدن رفتار کوانتومی، در نظر بگیرید. آزمایش اشترن - گرلاخ یک آزمایش حیاتی برای مشخص کردن رفتار عجیب حالت‌های اسپینی کوانتومی است. فرض کنید ما حالت $|0\rangle$ را آماده‌سازی می‌کنیم. اگر ما این حالت را در پایه‌های S_z اندازه بگیریم، نتیجه‌ای که ما بدست می‌آوریم $|0\rangle$ است. حتی بعد از اندازه‌گیری‌های متوالی در این پایه‌ها باز هم همان نتیجه $|0\rangle$ را بدست می‌آوریم زیرا آن یک ویژه حالت عملگر S_z است. اکنون فرض کنید که ما عملگر S_x را اندازه بگیریم. حالت $|0\rangle$ عبارت است از یک برهم‌نهی یکسان از $|+\rangle$ و $|-\rangle$. اصل موضوع اندازه‌گیری بیان می‌دارد که ما حالت $|+\rangle$ یا $|-\rangle$ را بعد از اندازه‌گیری با احتمال یکسان بدست می‌آوریم. اگر دوباره عملگر S_z را اندازه بگیریم، نتیجه کاملاً تصادفی خواهد بود یعنی اگر نتیجه اندازه‌گیری S_x ، $|+\rangle$ باشد آنگاه نتیجه اندازه‌گیری S_z ، $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ با احتمال مساوی می‌باشد. اگر نتیجه

1 Superposition
2 Mixture
3 Stern-Gerlach

اندازه‌گیری S_x ، $\langle - \rangle$ باشد آنگاه همان توزیع برای نتیجه اندازه‌گیری S_x اتفاق می‌افتد. این استدلال نشان می‌دهد که اندازه‌گیری عملگر S_x ، نتیجه اندازه‌گیری عملگر S_z را از بین می‌برد. آزمایش اشترن - گراخ یکی از نخستین آزمایش‌هایی بود که پیش‌بینی‌های نظریه کوانتومی را تأیید کرد [۸].

۲ - ۶ - نتیجه‌گیری

در اینجا تمایز بین اطلاعات کوانتومی و اطلاعات کلاسیکی در چند مورد نشان داده شده است. یکی از این موارد به کار بردن آنتروپی برای اندازه‌گیری محتوای اطلاعاتی می‌باشد. شکل تابع آنتروپی کوانتومی $S(\rho)$ توسط فون نیومن بدست آمد. فون نیومن نشان داد هنگامی که اندازه‌گیری‌ها حالت یک سیستم را مختل کنند آنگاه برگشت‌ناپذیرند. آنتروپی مشروط فون نیومن $S(A|B)$ مشابه آنتروپی شانون $H(A|B)$ تعریف می‌شود.

در این فصل نشان دادیم که این کمیت برخلاف همتای کلاسیکی‌اش به مقادیر بزرگتر یا مساوی صفر محدود نمی‌شود. در واقع آن می‌تواند هر مقداری بین $S(B)$ و $-S(A)$ را اختیار کند. تعریف‌های موجود در این جا شبیه تعریف‌های آنتروپی در نظریه اطلاعات کلاسیکی می‌باشد. اما به یک انحراف بنیادی از تصوّرات کلاسیکی که در فصل قبل بیان شد برخوردیم: آنتروپی مشروط کوانتومی برای برخی حالتها (حالت‌های خالص) می‌تواند منفی باشد که در حوزه کلاسیکی این طور نیست.

سپس چند معیار از اطلاعات کوانتومی مانند اطلاعات متقابل کوانتومی را تعریف کردیم. این معیار همانند اطلاعات متقابل کلاسیکی اما با این تفاوت که در سیستم‌های دوجزئی کوانتومی این اندازه از اطلاعات به دو بیت هم می‌رسد اما در مورد کلاسیکی فقط یک بیت است آن هم در وضعیت ماکزیمم همبستگی کلاسیکی بین اجزای سیستم.

همچنین نشان دادیم در مورد سیستم‌های سه‌قسمتی که اجزایش با یکدیگر درهم‌تنیده هستند مانند حالت نشان داده شده در رابطه (۲-۳۴)، آنتروپی جزئی مشروط نیومن همانند یک سیستم دوقسمتی درهم‌تنیده، منفی می‌شود.

در این فصل در مورد چندتا از نامساوی‌های اطلاعات کوانتومی بحث کردیم که در پردازش اطلاعات کوانتومی نقش مهمی بازی می‌کنند. اساسی‌ترین نامساوی‌های اطلاعات کوانتومی عبارتند از: زیرافزایشی قوی، نامساوی پردازش اطلاعات کوانتومی (نامساوی آراکی - لیب) [۸].

فصل ۳

حالت‌های فیزیکی و درهم‌تنیدگی کوانتومی

✓ مقدمه

✓ ماتریس چگالی

✓ حالت‌های درهم‌تنیده

✓ درهم‌تنیدگی کوانتومی

✓ ماتریس چگالی آماری کوانتومی

✓ شاهد‌های درهم‌تنیدگی

✓ نتیجه‌گیری

در خیلی از موارد به جای بررسی یک تک سیستم کوانتومی، ما به مطالعه تعداد زیادی از سیستم‌ها یا مجموعه‌ای از آنها نیاز داریم که آنسامبل نام دارد.

سؤال این است که چطور یک سیستم کوانتومی را از نظر فیزیکی تعریف کنیم؟ در این جا به محاسبه کمیتهایی مانند مقادیر چشم‌داشتی عملگرها و احتمال بدست آوردن نتایج اندازه‌گیری‌های مختلف که برای هر سیستم کوانتومی مدّ نظر داریم، نیازمندیم. اما در مورد یک ترکیب آماری از حالتها باید کمیت‌های قابل محاسبه را توسط احتمالات بسنجیم. راه مناسب برای انجام این کار استفاده از عملگر چگالی است.

یکی از متداول‌ترین و جذاب‌ترین جنبه‌های مکانیک کوانتومی این است که ذرات یا سیستم‌ها می‌توانند درهم‌تنیده باشند. حتی اگر دو سیستم کوانتومی درهم‌تنیده از هم دور باشند باز هم با یکدیگر مرتبطند. ریشه این ایده به سال ۱۹۳۵ برمی‌گردد یعنی هنگامی که اینشتین، پودلسکی و روزن یک مقاله با عنوان: " آیا می‌توان توصیف مکانیک کوانتومی از واقعیت را کامل در نظر گرفت؟" منتشر کردند. در حقیقت این مقاله برای نشان دادن آنکه نظریه کوانتومی ناقص است، طراحی شده بود [۲].

در این فصل ابتدا عملگر چگالی را تعریف می‌کنیم و سپس به مطالعه انواع حالتها پرداخته و همچنین روابط بین آنها را بررسی می‌کنیم. این فصل بیشتر برای آشنایی با خواص مختلف ماتریس چگالی بیان شده است و برخی از کاربردهای آن را در فصل بعدی معرفی خواهیم کرد.

۳ - ۲ - ماتریس چگالی

سیستم‌های کوانتومی می‌توانند در حالت‌هایی باشند که نمی‌توان آنها را توسط توابع موج کلی تعریف کرد. مانند حالت‌هایی که آمیخته نامیده می‌شوند. حالت‌هایی که توسط توابع موج تعریف می‌شوند حالت‌های خالص نامیده می‌شوند. در این مورد ما نیازمندیم که از ماتریس چگالی به جای توابع موج برای توصیف یک سیستم کوانتومی استفاده کنیم.

یک حالت آمیخته را می‌توان به صورت جمعی از پایه‌های بهنجار ناهم‌دوس $|\psi_i\rangle$ به شکل:

$$|\psi\rangle_{mix} = \begin{cases} |\psi_1\rangle & ; & p_1 \\ |\psi_2\rangle & ; & p_2 \\ \vdots & & \\ |\psi_n\rangle & ; & p_n \end{cases} \quad (1-3)$$

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (2-3)$$

تعریف کرد، که p_i عبارت است از احتمال این که سیستم در حالت ψ_i باشد، و ψ_i ها پایه‌های قطری عمود برهم ρ می‌باشند. p_i ها ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی ρ نامیده می‌شوند. توجه کنید که معادله بالا برهم‌نهی از حالت‌های $|\psi_i\rangle$ نیست یعنی هیچ برهم‌نهی بین $|\psi_i\rangle$ ها وجود ندارد

اگر یکی از p_i ها مساوی با 1 باشد آنگاه می‌توانیم بگوییم که $p_1 = 1$ و همه احتمالات دیگر $p_i = 0$ ($i \neq 1$)، پس داریم $\rho = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$. به این معنی که سیستم در حالت خالص $|\psi_1\rangle$ می‌باشد، پس حالت خالص را هم می‌توان به گونه‌ای با ماتریس چگالی نشان داد. رد ماتریس ρ^2 نامساوی زیر را ارضاء می‌کند:

$$Tr \rho^2 = \sum_i p_i^2 \leq 1 \quad (3-3)$$

تساوی هنگامی اتفاق می‌افتد که ρ نمایان‌گر حالت خالص باشد. همچنین برای یک حالت خالص داریم:

$$\rho^2 = \rho$$

۳-۲-۱ - ماتریس چگالی در نمایش کلی

اکنون می‌توانیم از یک نمایش کلی در پایه‌های عمود بر هم $|\varphi\rangle$ برای نشان دادن ماتریس چگالی به

شکل زیر استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \\ &= \sum_{i,a,b} p_i |\varphi_a\rangle\langle\varphi_a|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\varphi_b\rangle\langle\varphi_b| = \sum_{ab} |\varphi_a\rangle\langle\varphi_b| \rho_{ab} \end{aligned} \quad (۴-۳)$$

که در آن

$$\rho_{ab} = \langle\varphi_a|\rho|\varphi_b\rangle = \sum_i p_i \langle\varphi_a|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\varphi_b\rangle \quad (۵-۳)$$

عناصر قطری ماتریس چگالی عبارتند از $\rho_{aa} = \sum_i p_i |\langle\varphi_a|\psi_i\rangle|^2$ که نامنفی باقی می‌مانند و می‌تواند

بعنوان احتمال برای سیستم در حالت $|\varphi_a\rangle$ تفسیر شود. عناصر غیر قطری ماتریس به طور کلی مختلط

می‌باشند. چون رد^۱ ماتریس تحت پایه‌های مختلف ناوردا است مقدار چشم‌داشتی یک مشاهده‌پذیر مانند

A عبارت است از:

$$\langle A \rangle = Tr[\rho A] = \sum_{ab} \rho_{ab} A_{ab} = \sum_{ab} \rho_{ab} \langle\varphi_b|A|\varphi_a\rangle \quad (۶-۳)$$

1 Trace

۳ - ۳ - حالت‌های درهم‌تنیده

طبق تعریف شرودینگر حالت‌های درهم‌تنیده همان حالت‌های خالص کوانتومی مربوط به سیستم‌های دو یا چند قسمتی می‌باشند که نمی‌توان آنها را به صورت یک ضرب تانسوری از حالت زیرسیستم‌ها نوشت یعنی:

$$|\Psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle \quad (۷-۳)$$

که در آن $|\psi_i\rangle$ حالت زیرسیستم‌های یک سیستم کوانتومی می‌باشند. بقیه حالت‌های خالص سیستم-های چندقسمتی، که می‌توان آنها را به صورت ضربهای تانسوری ساده از حالات زیرسیستم‌های مستقل از هم نمایش داد، حالت‌های ضربی یا جداپذیر نام دارند. تعریف حالت‌های درهم‌تنیده را می‌توان با ایجاد حالت‌های آمیخته، گسترش داد. حالت‌های آمیخته‌ای که با آنها درهم‌تنیدگی آسان‌تر درک می‌شود، حالت‌های سیستم‌های دو قسمتی با ماتریس چگالی ρ_{AB} می‌باشند. حالت‌های آمیخته را جداپذیر می‌نامند اگر بتوان آنها را به صورت حاصل ضربهای ترکیبی نوشت یعنی:

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_{A_i} \otimes \rho_{B_i} \quad (۸-۳)$$

که در آن $p_i \in [0,1]$ و $\sum_i p_i = 1$ ، ρ_A و ρ_B عملگرهای چگالی روی زیرسیستم‌ها به ترتیب در فضا‌های هیلبرت H_A و H_B می‌باشند. حالت‌های کوانتومی درهم‌تنیده جزء آن دسته حالت‌هایی هستند که جدا ناپذیر می‌باشند. حالت‌های آمیخته جداپذیر شامل درهم‌تنیدگی نمی‌شوند و می‌توان آنها را به وسیله عملگرهای موضعی (مانند عملگر هادامارد) از حالت‌های جداپذیر خالص، تولید کرد. در مورد یک مجموعه از زیرسیستم‌های داده شده، مسئله تعیین کردن این که آیا حالت توأم آنها درهم‌تنیده است یا خیر بعنوان مسئله جداپذیری شناخته می‌شود.

ساده‌ترین حالتها در مجموعه حالت‌های جداپذیر، حالت‌های ضربی به شکل $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ هستند که در آن ρ_A و ρ_B عملگرهای چگالی کاهش‌یافته^۱ برای دو زیرسیستم می‌باشد و مستقل از هم هستند. اگر همبستگی‌های بین زیرسیستم‌های یک سیستم کوانتومی توسط حالت‌های جداپذیر تعریف شده باشد، آنگاه این همبستگی‌ها به طور کامل می‌توانند موضعی محسوب شوند زیرا حالت‌های کوانتومی جدا از هم ρ_A و ρ_B در آزمایشگاه‌های فضاگونه مجزا، توصیف‌های کافی از خاصیت‌های حالت توأم A, B را ارائه می‌دهند.

حالت‌های کوانتومی که در آنها همبستگی بین A, B نامساوی بل را نقض می‌کنند به حالت‌های همبسته بل (همبسته EPR) اشاره دارند و نمی‌توان آنها را با تعابیر علیتی توصیف کرد. اگر یک حالت خالص، درهم‌تنیده باشد آنگاه آن حالت، همبسته بل محسوب می‌شود. پس حالت‌های درهم‌تنیده خالص، تعبیر علیتی: هر تغییری روی یک زیرسیستم نباید بی دلیل روی زیرسیستم دیگر تأثیر بگذارد، را قبول نمی‌کنند.

تنها در صورتی که حالت $|\psi_{12}\rangle$ را بتوان به فرم $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ نوشت در حالی که $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ حالت‌های خالص برای زیرسیستم‌های ۱ و ۲ باشند آنگاه $\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ توصیف‌کننده‌ی یک حالت خالص می‌باشد. در این مورد هیچ درهم‌تنیدگی بین زیرسیستم‌های ۱ و ۲ وجود ندارد. در غیر این صورت زیر-سیستم‌های ۱ و ۲ درهم‌تنیده‌اند و ρ_1 توصیف‌کننده‌ی یک حالت آمیخته برای زیرسیستم ۱ می‌باشد.

بعنوان مثال یک سیستم دو ذره‌ای اسپین - ۱/۲ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\left(|0\rangle_A |1\rangle_A \right) \times \left(|0\rangle_B |1\rangle_B \right) \quad (۹-۳)$$

آلیس کیوبیت A و باب کیوبیت B را در اختیار دارند این حالت یک حالت خالص جداپذیر است یعنی اندازه‌گیری آلیس روی حالت خود هیچ تأثیری روی اندازه‌گیری باب نمی‌گذارد. حالت

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B) \quad (10-3)$$

درهم‌تنیده است، قبل از اینکه آلیس σ_z^A را اندازه بگیرد، باب می‌تواند هر یک از نتایج $\sigma_z^B = \pm 1$ را بدست آورد، اما بعد از اندازه‌گیری آلیس، حالت باب رمبش می‌کند و باب می‌تواند فقط یک نتیجه را بدست آورد یعنی اندازه‌گیری آلیس روی اندازه‌گیری باب تأثیر گذاشته است.

حالتی که اجزایش با هم ارتباط کلاسیکی دارند (با ماتریس چگالی زیر) را در نظر بگیرید:

$$\rho = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \quad (11-3)$$

شبهت بین این حالت با یک حالت درهم‌تنیده این است که در هر دو مورد $\langle \sigma_z^A \sigma_z^B \rangle = 1$. اما برای حالت درهم‌تنیده $\langle \sigma_x^A \sigma_x^B \rangle = 1$ و برای حالتی که اجزایش با هم همبستگی کلاسیکی دارند (حالت آمیخته) $\langle \sigma_x^A \sigma_x^B \rangle = 0$ [۱۸]. اثبات این عبارات در بخش پیوست‌ها بیان شده است.

۳ - ۱ - همدوسی^۱

مؤلفه‌های غیر قطری ماتریس چگالی را همدوسی می‌نامند. این اعضا نمایانگر اثرهای تداخلی بین حالت‌های مختلف است. بنابراین در اینجا حالت خالصی داریم که مؤلفه‌های یاد شده غیر صفر می‌باشند. پس اگر شما ماتریس چگالی سیستمی با مؤلفه‌های غیر قطری را مشاهده کردید، آنگاه حالت آن سیستم همدوس می‌باشد و دارای برخی اثرات تداخلی است که مشابه آن در ترکیب آماری کلاسیکی وجود ندارد.

1 Coherence

یک راه مشخص نمودن وضعیت یک حالت دلخواه که آیا خالص است یا آمیخته، وجود اعضای غیرقطری در ماتریس چگالی آن حالت است.

به طور خلاصه:

- یک حالت آمیخته عبارت است از یک ترکیب آماری ساده از دو یا چند حالت. این حالت دارای هم‌دوسی نیست بنابراین اعضای غیر قطری ماتریس چگالی صفر هستند یعنی $\rho_{mm} = 0$ اگر $m \neq n$.
- یک حالت خالص، دارای برخی اعضای غیر قطری غیر صفر خواهد بود.

با توجه به گفته‌های بالا می‌توانیم یک عملگر را مانند یک ماتریس نمایش دهیم. همچنین می‌توانیم برای نمایاندن عملگر مورد نظر، استفاده از مجموعه پایه‌ی مربوط به همان عملگر یا هر مجموعه پایه‌ی معتبر در فضای مربوطه را انتخاب کنیم، بنابراین نمایش ماتریسی همیشه یک جور نخواهد بود. از اینرو امکان یافتن یک نمایش قطری از عملگر چگالی وجود دارد. بنابراین برای مشخص نمودن اینکه آیا عملگر چگالی نمایانگر یک حالت آمیخته است یا خیر بایستی یک معیار قویتری نسبت به در نظر گرفتن اعضای غیر قطری ماتریس استفاده شود. مثلاً تعریف دیگر برای یک حالت خالص این است که آن را بعنوان یک عملگر تصویر در نظر بگیریم یعنی $\rho^2 = \rho$ [۲].

۳ - ۳ - ۲ - زوج‌های *EPR* جداناپذیر

راه‌هایی که اطلاعات کوانتومی را از اطلاعات کلاسیکی متفاوت می‌سازد، خواص، کاربردها و فواید درهم‌تنیدگی کوانتومی است. طبق تعریف، اگر عدد اشمیت یک حالت خالص دو قسمتی بزرگتر از یک باشد آنگاه آن حالت، درهم‌تنیده است. حالت‌های درهم‌تنیده بسیار جالب هستند زیرا نمایانگر همبستگی‌هایی هستند که مانند کلاسیکی ندارند. ما در این قسمت این همبستگی‌ها را مطالعه خواهیم کرد.

درهم‌تنیدگی به خاطر رفتار ذاتاً متفاوتش با همبستگی‌هایی که به طور کلاسیکی توصیف می‌شوند، مورد توجه فیزیکدانها قرار گرفته است. اینشتین، پودولسکی و روزن^۱ در ابتدا بیان داشتند که اگر مکانیک کوانتومی را بعنوان یک نظریه واقع‌گرایانه موضعی مطرح کنیم ناکامل است. این مکانیک کوانتومی روی حالتی به صورت زیر پایه‌گذاری شده است:

$$|\psi(x_1, x_2)\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i |\psi(x_1)\rangle_i |\phi(x_2)\rangle_i \quad (12-3)$$

بعداً دیوید بوهم^۲ درهم‌تنیدگی را با تعبیری مشابه اینگونه بیان کرد که یک جفت اسپین در حالت تکتایه زیر:

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \quad (13-3)$$

بنیانی برای بررسی پایه‌های مکانیک کوانتومی و اطلاعات کوانتومی بوده. در ادامه، جان بل به طور عمده بررسی درهم‌تنیدگی کوانتومی را با تعیین حد و مرز بین رفتار موضعی که به طور کلاسیکی قابل توضیح است و انواع رفتارهای غیرموضعی که از نظر کلاسیکی کمتر قابل درک هستند، توسط یک نامساوی، پیش برد. از این نامساوی برای تعبیر همبستگی‌های قوی بین دو زیرسیستم جدا از هم، که یک سیستم مرکب را تشکیل می‌دهند، استفاده می‌شود. مانند همان سیستم‌های کوانتومی توصیف شده توسط حالت تکتایه در معادله (۱۳-۳).

حالت ماکزیمم درهم‌تنیده زیر را در نظر بگیرید:

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (14-3)$$

1 Einstein, Podolsky, Rosen

2 David Bohm

ماکزیمم درهم‌تنیدگی به این معنی است که هرگاه ما از حالت بالا بر مبنای کیوبیت B رد جزئی بگیریم، ماتریس چگالی ρ_A مربوط به کیوبیت A را بدست می‌آوریم یا به عبارتی دیگر یک ضربی از عملگر همانی را بدست می‌آوریم یعنی:

$$\rho_A = Tr_B (|\phi^+\rangle\langle\phi^+|) = \frac{1}{2}I_A \quad (۱۵-۳)$$

و به طور مشابه $\rho_B = \frac{1}{2}I_B$. پس اگر اسپین A را در هر راستایی اندازه بگیریم، نتیجه کاملاً تصادفی است یعنی اسپین بالا را با احتمال $1/2$ و اسپین پایین را با احتمال $1/2$ یافت می‌کنیم. بنابراین اگر هر اندازه‌گیری موضعی را روی A یا B اعمال کنیم هیچ اطلاعاتی راجع به آماده‌سازی حالت توأم سیستم بدست نمی‌آوریم. این وضعیت به صراحت با مورد یک حالت خالص تک کیوبیتی در تضاد است، اما در حالت $|\phi^+\rangle_{AB}$ اطلاعات مخفی است یعنی نمی‌توانیم آن را با اندازه‌گیری A یا B بدست آوریم. در حقیقت، یکی از چهار پایه عمود برهم بل زیر است که همه آنها ماکزیمم درهم‌تنیدگی را دارند

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \quad (۱۶-۳)$$

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \quad (۱۷-۳)$$

فرض کنید آلیس و باب با چارلی بازی می‌کنند. چارلی یکی از این چهار حالت را آماده‌سازی می‌کند، بنابراین دو بیت را در حالت سیستم دو کیوبیتی رمزنگاری می‌کند. در رابطه‌های (۱۶-۳) و (۱۷-۳) یک بیت، بیت پاریته^۱ است ($|\phi\rangle$ یا $|\psi\rangle$)، برای مشخص کردن اینکه آیا دو اسپین هم‌جهتند یا خیر؟ بیت دیگر، بیت فاز است (+ یا -). سپس چارلی کیوبیت A را به آلیس و کیوبیت B را به باب می‌فرستد. برای بردن

1 Parity bit

بازی، آلیس (باب) باید تشخیص دهند کدام یک از چهار حالت را چارلی آماده‌سازی کرده است. البته اگر آلیس و باب کیویت‌هایشان را به یکدیگر برسانند، می‌توانند حالت آماده‌سازی شده را با اعمال یک اندازه-گیری متعامد در پایه‌های $\{|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle\}$ ، تشخیص دهند. اما فرض کنید که آلیس و باب در مکان‌های متفاوتی قرار دارند و به هیچ عنوان قادر به برقرار کردن ارتباط با یکدیگر نیستند. نه آلیس نه باب نمی‌توانند هیچ اطلاعاتی را در مورد تشخیص حالت توأم خود بدست آورند.

آنچه آنها می‌توانند انجام دهند، دست‌کاری کردن این اطلاعات است. ممکن است آلیس σ_z را به منظور تغییر فاز نسبی $|0\rangle_A$ و $|1\rangle_A$ برای کیوبیت A به کار برد. این عمل، بیت فاز آماده‌سازی شده توسط چارلی را در حالت درهم‌تنیده به صورت زیر تغییر می‌دهد:

$$|\psi^+\rangle \leftrightarrow |\psi^-\rangle \quad \text{و} \quad |\phi^+\rangle \leftrightarrow |\phi^-\rangle \quad (18-3)$$

از طرفی او می‌تواند σ_x را به کار برد که اسپینش را تغییر دهد $(|0\rangle_A \leftrightarrow |1\rangle_A)$ بنابراین بیت پارینه، حالت درهم‌تنیده را به صورت زیر تغییر می‌دهد:

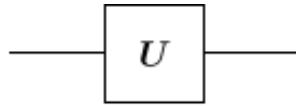
$$|\phi^-\rangle \leftrightarrow |\psi^+\rangle \quad \text{و} \quad |\phi^+\rangle \leftrightarrow |\psi^-\rangle \quad (19-3)$$

به طور مشابه باب می‌تواند حالت درهم‌تنیده را تغییر دهد. در حقیقت، هم آلیس و هم باب می‌توانند یک تبدیل یکانی موضعی اعمال کنند تا یک حالت ماکزیمم درهم‌تنیده را به هر حالت ماکزیمم درهم-تنیده دیگر تغییر دهند. آنچه آنها نمی‌توانند انجام دهند تغییر در $\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2}I$ می‌باشد (اطلاعاتی که آنها دستکاری می‌کنند اطلاعاتی است که هیچ کدام از آنها قادر به خواندن آن نیستند).

اکنون اجازه دهید تا آلیس و باب را به یکدیگر برسانیم، بنابراین آنها می‌توانند روی کیوبیت‌هایشان مشترکاً عمل کنند. آنها چه مقدار اطلاعات دربارهٔ بیت پارینه و بیت فاز از حالت توأم‌شان بدست می

آورند؟ با به کار بردن یک تبدیل یکانی مناسب، آنها می‌توانند پایه‌های درهم‌تنیده $\{|\phi^\pm\rangle, |\psi^\pm\rangle\}$ را به پایه های غیر درهم‌تنیده $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ دوران دهند. پس آنها می‌توانند کیوبیت‌های A, B را برای بدست آوردن بیت‌هایی که در پی‌شان هستند به طور جداگانه اندازه بگیرند. ساختار این تبدیل چگونه است؟

اکنون فرصت خوبی است برای معرفی نمادگذاری که کاربرد بسزایی در ادامه بحث دارد، و آن نمادگذاری مدار کوانتومی است. کیوبیت‌ها با خطوط افقی نشان داده می‌شوند و تبدیل یکانی U برای یک تک کیوبیت با نماد زیر نشان داده می‌شود



ماتریس هادامارد¹ عبارت است از:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x + \sigma_z) \quad (20-3)$$

که دارای خصوصیت‌های زیر می‌باشد:

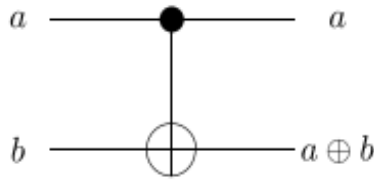
$$H^2 = I \quad H \sigma_x H = \sigma_z \quad H \sigma_z H = \sigma_x \quad (21-3)$$

همچنین تبدیل بازگشتی XOR یا همان کنترل - NOT هم مفید است که به صورت زیر عمل می‌کند:

$$CNOT : |a, b\rangle \rightarrow |a, a \oplus b\rangle \quad (22-3)$$

که مدار مشخصه آن عبارت است از:

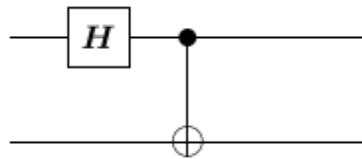
¹ Hadamard



پس این تبدیل، بیت دوم را اگر بیت اول 1 باشد، وارون می‌کند ولی اگر بیت اول 0 باشد آنگاه عمل خاصی انجام نمی‌دهد. آن همچنین دارای خاصیت زیر می‌باشد:

$$(CNOT)^2 = I \otimes I \quad (23-3)$$

را a در $CNOT$ ، بیت کنترل و b را بیت هدف¹ می‌نامیم. با ادغام این تبدیلات اولیه یا این گیت‌های کوانتومی می‌توانیم تبدیلات یکانی دیگری را بسازیم. بعنوان مثال مدار



مشخص است که این مدار پایه‌های استاندارد را به پایه‌های درهم‌تنیده تبدیل می‌کند یعنی:

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \xrightarrow{\oplus} |\phi^+\rangle & |01\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle \xrightarrow{\oplus} |\psi^+\rangle \\ |10\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle \xrightarrow{\oplus} |\phi^-\rangle & |11\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|1\rangle \xrightarrow{\oplus} |\psi^-\rangle \end{aligned} \quad (24-3)$$

بنابراین در پایه‌های درهم‌تنیده اولین بیت، بیت فاز است و دومین بیت، بیت پارته است.

به طور مشابه می‌توانیم با برگشت به عقب در مدار کوانتومی، تبدیل را وارونه کنیم، اگر مدار معکوس را برای یک حالت درهم‌تنیده به کار بریم سپس هر دو بیت را اندازه بگیریم، آنگاه ارزش هر دو بیت فاز و

1 Target

بیت پاریده را بدست خواهیم آورد. البته H فقط روی یکی از کیوبیت‌ها عمل می‌کند، قسمت غیر موضعی مدار ما گیت کنترل - NOT است که باعث بوجود آمدن یا از بین رفتن درهم‌تنیدگی می‌شود.

درهم‌تنیدگی کوانتومی اینشتین، پودلسکی و روزن (EPR) را بر آن داشت که تعبیر درهم‌تنیدگی را به صورت یک پارادکس ابراز کنند. یک حالت ماکزیمم درهم‌تنیده دو کیوبیتی که توسط آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده است را در نظر بگیرید، آلیس می‌تواند یکی از چندین اندازه‌گیری ممکن را روی اسپینش اعمال کند تا به اطلاعات موجود در ماتریس چگالی باب پی برد. آلیس و باب برای دست یافتن به این پدیده نمی‌توانند با سرعت بیشتر از نور با یکدیگر ارتباط برقرار کنند. اینشتین این را می‌دانست اما او هنوز قانع نشده بود. به اعتقاد اینشتین و دیگر واقع‌گراها:

فرض کنید A, B به طور فضا گونه سیستم‌های جدا از هم هستند. بنابراین در قالب یک تعریف کامل از واقعیت فیزیکی، یک عمل انجام شده روی سیستم A نباید ساختار سیستم B را تغییر دهد. اما اگر A, B درهم‌تنیده باشند آنگاه هر اندازه‌گیری A که منجر به خروجی خاصی می‌شود، ماتریس چگالی B را تغییر می‌دهد. بنابراین بر اساس معیار اینشتین، تعریف یک سیستم کوانتومی توسط یک تابع موج یا عملگر ماتریس چگالی نمی‌تواند کامل باشد. اینشتین وانمود کرد که برای داشتن یک تعریف کاملتر بایستی نامعلومی و غیرموضعی بودن مکانیک کوانتومی برطرف شود. نظریه‌هایی با این خصوصیت، نظریه‌های متغیرهای پنهان^۱ موضعی نامیده می‌شود. هنگامی که آلیس نیمه خودش، از حالتی که با باب به اشتراک گذاشته است را اندازه می‌گیرد، او اطلاعاتی را در مورد متغیرهای پنهان بدست می‌آورد در نتیجه توانایی پیش‌بینی اینکه باب هنگام اندازه‌گیری چه خروجی را بدست می‌آورد، را کسب می‌کند [۱۲].

1 Hidden variable

۳ - ۳ - ۳ - آنتی کیوبیت‌ها

در این قسمت ما آنتی کیوبیت‌ها را مشابه پادذرات، بعنوان یک حالت کوانتومی از فضای هیلبرت دوبعدی تعریف می‌کنیم که توانایی حضور در یک برهم‌نهی از حالت‌های بولینی را دارند و با حالت‌های دیگر درهم‌تنیده می‌شوند. آنتی کیوبیت‌ها همان اطلاعات منفی کوانتومی نامیده می‌شوند که عبارتند از کیوبیت‌هایی که در زمان به عقب برگردانده شده باشند. ویژگی‌های پادذرات توسط دیراک بعنوان حفره-های انرژی تعریف شده است بنابراین می‌توانیم پادذرات را بعنوان حفره‌های اطلاعات تعریف کنیم. در اینجا کیوبیت و آنتی کیوبیت علامت‌های مخالف دارند. مانند ایده دیراک برای اسپینورهای دو مؤلفه‌ای می‌توانیم آنتی کیوبیت $|\bar{\psi}\rangle$ را به صورت زیر بدست آوریم:

$$|\psi\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (25-3)$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\alpha^* \quad \beta^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-\beta^* \quad \alpha^*) = \alpha^* \langle 1| - \beta^* \langle 0| \quad (26-3)$$

ماتریس چگالی مطابق با آنتی کیوبیت $|\bar{\psi}\rangle$ عبارت است از:

$$\rho_{kl} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & -\alpha\beta^* \\ -\alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad k, l = 0, 1 \quad (27-3)$$

دو عضو از یک زوج EPR ، دارای کیوبیت‌هایی هستند که در وضعیت ماکزیمم درهم‌تنیدگی می‌باشند بنابراین آنها را e - بیت می‌نامیم. زوج EPR ، $e\bar{e}$ (مانند الکترون - پوزیترون در فیزیک ذرات بنیادی) از اطلاعات خلأ بوجود آمده است که یک حالت خالص کوانتومی بدون اطلاعات است، یعنی:

$$S(\psi_e \psi_{\bar{e}}) = S(\psi_e \bar{\psi}_e) = S(e \bar{e}) = S(|v\rangle) = 0 \quad (28-3)$$

بنابراین زوج $e\bar{e}$ پس از بوجود آمدن از خلأ، حاوی اطلاعاتی است که قابل خواندن نمی باشد، در نتیجه نمایان گر اطلاعات مجازی ذرات بنیادی هستند. آنتروپی کوانتومی مشروط بین e, \bar{e} عبارت است از:

$$S(e|\bar{e}) = S(e\bar{e}) - S(\bar{e}) = 0 - (-1) = 1 \quad (29-3)$$

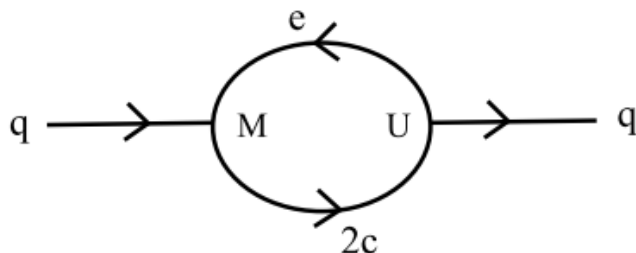
$$S(\bar{e}|e) = S(\bar{e}e) - S(e) = 0 - 1 = -1 \quad (30-3)$$

فرایندهای اطلاعات کوانتومی را می توان توسط نمودارهای اطلاعات کوانتومی شبیه نمودارهای فاینمن در فیزیک ذرات بنیادی، تعریف کرد. در این جا ذرات بنیادی برهم کنش می کنند. جریان اطلاعات در هر رأس این نمودارها ذخیره می شود. نکته جالب این جاست که قانون بقای اطلاعات در نظریه کوانتومی همتای کلاسیکی ندارد. ذرات بنیادی در دینامیک اطلاعات کوانتومی (QID) می توانند حاوی q - بیت ها، e - بیت ها و \bar{e} - بیت ها باشند.

۳ - ۳ - ۴ - نمودارهای اطلاعات کوانتومی فاینمن

در اینجا ما QID را برای فرایندهای اطلاعاتی از جمله دوربری کوانتومی نشان می دهیم. در دوربری کوانتومی (شکل (۱-۳)) یک کیوبیت q بین دو رأس M و U در طی ارسال دو بیت کلاسیکی $2c$ ، بعد از این که فرستنده و گیرنده یک زوج $e\bar{e}$ را به اشتراک گذاشته اند، ارسال می شود. در اینجا فرض می کنیم

که q یک حالت ماکزیمم آمیخته باشد یعنی فرض می کنیم که با یک ذره دیگر مانند چارلی درهم تنیده باشد بنابراین آنتروپی نیومن آن برابر یک است یعنی $S(q) = 1$:



شکل (۱-۳). نمودار اطلاعات کوانتومی فاینمن برای دوربری کوانتومی.

M (اندازه گیری) و U (تبدیل یکانی رابطه (۳-۳۱)) دو فرایند کارآمد در QID می باشد. در رأس M کیوبیت q با e بیت برهم کنش می کند که حاصل آن چهار حالت ماکزیمم درهم تنیده $|eq\rangle$ است که اطلاعات آنها از طریق دو بیت کلاسیکی ($2c$) ارسال می شود.

در رأس U بازسازی q ، ابتدا با ارسال $2c$ و به کار بردن یکی از چهار تبدیل یکانی

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x \cdot \sigma_z = -i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (۳۱-۳)$$

روی \bar{e} بیت اتفاق می افتد. جریان اطلاعات در هر رأس شکل (۱-۳) ذخیره شده است. قانون بقای آنتروپی برای رأس M عبارت است از:

$$S(2c) = S(qe) = S(q) + S(e) = 1 + 1 = 2 \quad (۳۲-۳)$$

از اینرو کیوبیت q و e بیت در ابتدا مستقل از هم هستند زیرا طبق شکل (۱-۲) آنتروپی توأم $S(eq)$ با جمع آنتروپی های تک تک زیرسیستم ها برابر است که نشان دهنده مستقل بودن دو زیرسیستم می باشد. در رأس U داریم:

$$S(q) = S(qe\bar{e}) = S(qe) + S(\bar{e} | qe) = 1 \quad (33-3)$$

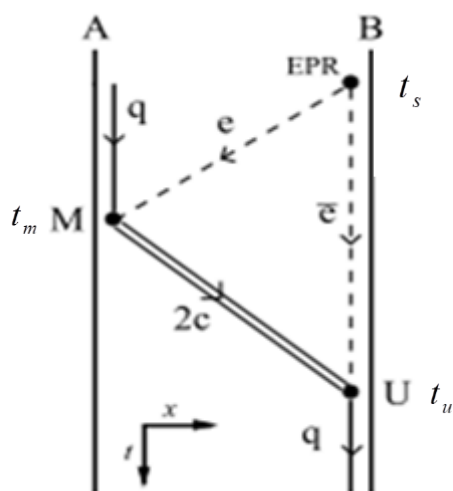
با توجه به رابطه (34-3) می‌توانیم مقدار آنتروپی مشروط $S(\bar{e} | qe)$ را بدست آوریم.

$$S(\bar{e} | qe) = S(q) - S(qe) = 1 - 2 = -1 \quad (34-3)$$

با توجه به معادله $|\psi\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ مشاهده می‌کنیم که خروجی e از رأس U برابر با ورودی \bar{e} به رأس U است.

شکل (3-2) دوربری کوانتومی را نشان می‌دهد. در زمان t_s زوج e و \bar{e} یکی از چهار حالت بل را به اشتراک می‌گذارند. این زوج با گذشت زمان از یکدیگر دور می‌شوند، فرض کنید حالت e در دست آلیس و \bar{e} در دست باب باشد.

در زمان t_m آلیس روی حالت خود اندازه‌گیری انجام می‌دهد. با ارسال دو بیت کلاسیکی به باب و با اعمال یکی از چهار عملگر یکانی بیان شده در رابطه (31-3) توسط باب روی حالت خودش، کیوبیت q به باب ارسال می‌شود.



شکل (۳-۲). نمودار فیزیکی فضا-زمان برای دوربری کوانتومی.

اغلب مفاهیم نظریهٔ شانون همتای کوانتومی دارد. سومین نمودار از شکل (۲-۱) یعنی (III) (b) فصل قبل نشان می‌دهد که چطور آنتروپی مشروط منفی یک عضو از یک جفت EPR یعنی $S(A|B) = -1$ توسط آنتروپی غیرمشروط $S(B) = 1$ از عضو دیگر همان جفت، متوازن می‌شود. برای تشخیص کیوبیت-هایی که در وضعیت ماکزیمم درهم‌تنیدگی قرار دارند، آنها را e - بیت نام‌گذاری کردیم. طبق این تصویر بیان شده در فیزیک ذرات بنیادی، e - بیت و \bar{e} - بیت را می‌توان به عنوان ذرات مزدوج مجازی در نظر گرفت و آماده‌سازی یک جفت EPR مانند ایجاد یک جفت $e\bar{e}$ از آنتروپی خلاً $S(e\bar{e}) = 0$ پدیدار می‌شود. نکته اساسی این است که محتوای اطلاعاتی یک e - بیت می‌تواند در برهم‌کنش با کیوبیت‌ها و بیت‌های کلاسیکی آشکار شود همانگونه که در ادامه خواهیم دید.

در اینجا فرستنده (آلیس) یک اندازه‌گیری در پایه‌های بل روی کیوبیت و e - بیتی که در اختیار دارد اعمال می‌کند. در نتیجه دو c - بیت را بدست می‌آورد. گیرنده (باب) کیوبیت ارسالی را با به کار بردن یکی از چهار تبدیل یکانی (U) بیان شده در رابطه (۳-۳۱) روی \bar{e} - بیت در فضای هیلبرت خودش،

بازسازی می‌کند. به زبان فیزیک ذرات اگر e^- را با یک e که در زمان به عقب برگردانده شده است، تعویض کنیم (شکل (۳-۱)) کل فرایند برابر است با ارسال یک کیوبیت از طریق $2c$.

تعبیر مکانیک کوانتومی سفر در زمان را توجیح می‌کند. بعنوان مثال تعبیر معروف فاینمن از پوزیترون. او پوزیترون را الکترونی در نظر گرفت که در زمان به عقب برگشته است. خصوصیت مهم مکانیک کوانتومی که چنین تفاسیری را توجیح می‌کند، درهم‌تنیدگی است [۲۱]. درهم‌تنیدگی پدیده‌ی اساسی در مکانیک کوانتومی است که نقش بسزایی در نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی مانند دوربری کوانتومی، بازی می‌کند [۵]. بنابراین درهم‌تنیدگی را می‌توان نوعی ماشین زمان در نظر گرفت که الکترون را به گذشته‌ی خودش ارسال می‌کند.

مفهوم این که اطلاعات مجازی منفی می‌تواند توسط ذرات درهم‌تنیده حمل شود، بینش جالبی را در مورد جریان اطلاعات در فرایندهای ارتباط کوانتومی، مانند دوربری و ابرفشرده‌سازی، ایجاد می‌کند. عملگرهای M , U مطابق با رئوس نمودارهای فاینمن در فیزیک ذرات است و فرایندهای دوگانه‌ی بقای اطلاعات که به صورت زیر تعریف شده‌اند را نشان می‌دهند.

$$\begin{aligned} (U) \quad & 2c + e^- \rightarrow q \\ (M) \quad & q + e \rightarrow 2c \end{aligned} \tag{۳-۳۵}$$

هنگامی که محتوای اطلاعات e^- قابل خواندن نباشد، فرایندهای بالا نمی‌توانند در خطوط خارجی ظاهر شوند [۱۷ و ۱۸].

۳ - ۴ - ماتریس چگالی آماری کوانتومی

در آنسامبل کانونی، ماکرو حالت یک سیستم نوعی از طریق پارامترهای N, V, T که به ترتیب نشان دهندهٔ دما، حجم و تعداد ذرات سیستم می‌باشند، توصیف می‌شود. اکنون انرژی E یک کمیت متغیر است. احتمال آنکه یک سیستم، که به طور تصادفی از آنسامبل انتخاب شده است، دارای یک انرژی E_r باشد، توسط ضریب بولتزمن $\exp(-\beta E_r)$ تعیین می‌شود، که در آن $\beta = \frac{1}{k_B T}$. ماتریس چگالی در نمایش انرژی به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\rho_{mn} = \rho_n \delta_{mn}$$

$$\rho_n = C \exp(-\beta E_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (36-3)$$

در مکانیک آماری کلاسیکی، ضریب بهنجارش C یا همان تابع پارش تعادلی، عبارت از :

$$Z = \sum_n \rho_n = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad (37-3)$$

که شاخص ترکیبات سیستم است، E_n انرژی ترکیب n ام سیستم است و $\beta = \frac{1}{T}$. حالت یک سیستم

آماری کوانتومی که به یک منبع گرمایی متصل است، را می‌توان یک حالت آمیخته در نظر گرفت. در

حالت تعادل ماتریس چگالی عبارت است از :

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_n |\varphi_n\rangle \frac{1}{Q_N(\beta)} e^{-\beta E_n} \langle \varphi_n | = \frac{1}{Q_N(\beta)} e^{-\beta \hat{H}} \sum_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n | \\ &= \frac{1}{Q_N(\beta)} e^{-\beta \hat{H}} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{\text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}})} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \Rightarrow \\ \hat{\rho} &= \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \end{aligned} \quad (38-3)$$

اگر ما تمام ویژه‌حالت‌های $|\varphi_n\rangle$ از H را بدانیم آنگاه ماتریس چگالی عبارت است از:

$$\rho_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n} \quad (39-3)$$

از آن جایی که محاسبه انرژی ویژه حالت‌های یک سیستم مکانیک کوانتومی n - ذره‌ای بسیار سخت است، باید از یک مجموعه پایه مناسب استفاده کنیم که اغلب، ضرب تانسوری پایه‌های یک تک ذره می‌باشد. پایه‌های تک‌ذره‌ای را می‌توان به طور دلخواه چه از فضای تکانه، چه از فضای مکان انتخاب کرد. در یک سیستم چند ذره‌ای با پایه‌های $|\varphi_n\rangle$ داریم:

$$\rho = \frac{1}{Z} \sum_{n,m} |\varphi_n\rangle \langle \varphi_m| \langle n| e^{-\beta H} |m\rangle \quad (40-3)$$

که در آن مجموعه پایه‌های متعامد $\{|n\rangle, |m\rangle\}$ ، ویژه‌حالت‌های هامیلتونی است و پایه‌های $\{|\varphi_n\rangle, |\varphi_m\rangle\}$ پایه‌هایی هستند که ماتریس چگالی را توصیف می‌کنند. اگر $\{|n\rangle, |m\rangle\} \neq \{|\varphi_n\rangle, |\varphi_m\rangle\}$ آنگاه ماتریس چگالی دارای برخی از عناصر غیر قطری می‌باشد. تابع پارش سیستم عبارت است از ضریب بهنجارش دستگاه و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Z = \sum_n \langle n| e^{-\beta H} |n\rangle = \text{Tr}(e^{-\beta H}) = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad (41-3)$$

برای دست آوردن آنتروپی سیستم داریم:

$$P_r = Q^{-1} \exp(-\beta E_r) \quad (42-3)$$

$$\langle \ln P_r \rangle = -\ln Q - \beta \langle E_r \rangle = \beta(A - U) = -\frac{S}{k} \quad (43-3)$$

که نتیجه آن عبارت است از:

$$S = -k_B \langle \ln P_r \rangle = -k_B \sum_r P_r \ln P_r = -k_B \text{Tr}(\rho \ln \rho) \quad (44-3)$$

که نشان می‌دهد آنتروپی یک سیستم فیزیکی فقط با مقادیر احتمالی P_r تعیین می‌شود.

بنابراین با $\rho = Z^{-1} e^{-\beta H}$ ، آنتروپی را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$S = k_B Z^{-1} \text{Tr}(\beta H e^{-\beta H}) + k_B \ln Z = -(\partial_T F)_{V, N} \quad (45-3)$$

که انرژی آزاد هلمهولتز عبارت است از:

$$F = -kT \ln Z \quad (46-3)$$

معادله لیوویل عبارت است از:

$$\partial_i \rho = -i [H, e^{-\beta H}] = 0 \quad (47-3)$$

که اثبات می‌کند آنسامبل کانونی، یک حالت متعادل است. بنابراین در فصل بعد سیستمی که مورد بررسی قرار می‌دهیم بایستی در حالت تعادل ترمودینامیکی باشد، در نتیجه از آنسامبل کانونی برای توصیف سیستم استفاده می‌کنیم [۱۱ و ۱۵].

۳ - ۵ - شواهد درهم‌تنیدگی^۱

یک شاهد درهم‌تنیدگی عبارت است از یک عملگر هرمیتی که مقدار چشم‌داشتی آن برای هر حالت جداپذیری مثبت است اما برای حالت‌های درهم‌تنیده منفی می‌باشد. با این خواص داده شده درهم‌تنیدگی را می‌توان از طریق مقدار چشم‌داشتی یک شاهد درهم‌تنیدگی کشف کرد زیرا یک ویژه‌مقدار منفی بر سیستم درهم‌تنیده اشاره دارد. به طور دقیق‌تر یک عملگر آماری ρ روی فضای سیستم مخلوط $H_A \otimes H_B$ درهم‌تنیده است اگر و فقط اگر یک شاهد درهم‌تنیدگی وجود داشته باشد، یعنی یک ماتریس هرمیتی W

1 Entanglement witnesses

که $Tr(W\rho) < 0$ اما برای تمام حالت‌های جداپذیر $\rho^{(s)}$ ، $Tr(W\rho^{(s)}) \geq 0$. اینطور عملگری حداقل یک ویژه مقدار منفی خواهد داشت.

بنابراین با اندازه‌گیری ویژه مقادیر شاهد درهم‌تنیدگی برای حالت یک سیستم داده شده، می‌توانیم تعیین کنیم که آیا آن یک سیستم درهم‌تنیده است یا خیر: اگر یک ویژه مقدار منفی بدست آمد آنگاه آن سیستم نمی‌تواند دارای یک حالت جداپذیر باشد [۴۱].

بنابراین شواهد درهم‌تنیدگی عبارتند از عملگرهایی که حالت‌های درهم‌تنیده را از تمام حالت‌های جداپذیر، متمایز می‌کنند. همچنین توابعی که رفتار درهم‌تنیدگی را در یک سیستم فیزیکی نشان می‌دهند را می‌توانیم بعنوان یک شاهد درهم‌تنیدگی در نظر بگیریم که در فصل بعد بیشتر در مورد آنها بحث خواهیم کرد.

۳ - ۶ - نتیجه‌گیری

در این فصل ما نشان دادیم که درهم‌تنیدگی کوانتومی را می‌توان با استفاده از آنتروپی مشروط منفی، توصیف کرد. از یک دید کلی‌تر، حقیقت آنکه آنتروپی‌های مشروط کوانتومی می‌توانند منفی باشند نشان‌دهنده آن است که مکانیک آماری کوانتومی از نظر کیفیت خیلی متفاوت‌تر از مکانیک آماری کلاسیکی است اگر چه اکثر فرمول‌ها شبیه هم هستند.

همچنین ما در این فصل تعریف آنتی‌کیوبیت‌ها را از طریق پادحالتها در فیزیک ذرات ارائه دادیم. و به برخی از کاربردهای جدید آنتی‌کیوبیت‌ها و قانون بقای اطلاعات کوانتومی اشاره کردیم. این آنالیز امکان وجود آنتی‌کیوبیت (یک بسته از اطلاعات منفی) برای هر کیوبیتی را پیشنهاد می‌کند.

در بخش ۳-۳-۴ با استفاده از تعابیر مکانیک کوانتومی از سفر در زمان نتیجه می‌گیریم که درهم‌تنیدگی کوانتومی را می‌توانیم بعنوان ماشین زمان در نظر بگیریم و با استفاده از این پدیده ذرات را به گذشته و یا آینده‌شان منتقل کنیم.

فصل ۴

سیستم‌های اسپین-۱/۲ مدل هایزبرگی

- ✓ همرسی
- ✓ از بین رفتن درهم‌تنیدگی
- ✓ ناسازگاری کوانتومی
- ✓ بررسی درهم‌تنیدگی سیستم‌های اسپین-۱/۲ مدل هایزبرگی
- ✓ آنروپی کوانتومی نیومن برای سیستم‌های اسپین-۱/۲ مدل هایزبرگی

۴ - ۱ - مقدمه

در این فصل ما بعنوان یک نتیجه و کاربردی از منفی شدن آنتروپی جزئی مشروط کوانتومی و یا همان اطلاعات جزئی کوانتومی، ابتدا درهم‌تنیدگی را برای سیستم‌های مدل هایزنبرگ بررسی می‌کنیم و سپس آنتروپی‌های کوانتومی را برای آن سیستم‌ها بدست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که ماتریس‌های چگالی مشروط کوانتومی را می‌توان بعنوان شاهد درهم‌تنیدگی در نظر گرفت و درهم‌تنیدگی سیستم‌ها را به وسیله آنها بررسی کرد.

۴ - ۲ - همرسی^۱

همرسی عبارت است از میزان همپوشانی میان یک حالت $|\psi\rangle$ و یک حالت $|\tilde{\psi}\rangle$ بنابراین:

$$C(\psi) = |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle| \quad (۱-۴)$$

که $|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\psi^*\rangle$ و ψ^* مزدوج مختلط حالت می‌باشد. $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ماتریس پاؤلی در راستای y می‌باشد. همرسی برای حالت‌های خالص دو کیوبیتی

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle \quad (۲-۴)$$

عبارت است از:

$$C = 2|\alpha\delta - \beta\gamma| \geq 0 \quad (۳-۴)$$

اگر ما حالت ضربی خاصی را به صورت زیر در نظر بگیریم؛

$$\psi_1 = |00\rangle = (1, 0, 0, 0) \quad (۴-۴)$$

¹ Concurrence

آنگاه $C(\psi_1) = 0$ چون حالت درهم‌تنیده نیست، همچنین برای حالت؛

$$\psi_2 = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \quad (5-4)$$

و باز هم عبارت $C(\psi_2) = 0$ را خواهیم یافت. اکنون یک گیت درهم‌تنیده کننده مانند:

$$CN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\varphi}{2} & -\sin \frac{\varphi}{2} \\ 0 & 0 & \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \quad (6-4)$$

را در نظر می‌گیریم که اگر $\varphi = \pi$ همان گیت $CNOT$ است. حال اثر این گیت بر حالت ψ_2 را بررسی می‌کنیم

$$\psi_3 = CN \cdot \psi_2 = \frac{1}{2} \left(1, 1, \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}, \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad (7-4)$$

برای این حالت هم‌رسی عبارت است از:

$$C(\psi_3) = \sin \frac{\varphi}{2} \quad (8-4)$$

بنابراین حالت برای هر زاویه کوچک φ درهم‌تنیده است. درهم‌تنیدگی به ازای $\varphi = \pi$ به مقدار

بیشینه‌اش یعنی $\frac{1}{2}$ می‌رسد که در اینجا $CN = CNOT$. همچنین آنتروپی درهم‌تنیدگی را برای این

حالت محاسبه می‌کنیم. عملگر چگالی کلی برای حالت ψ_3 به شکل زیر است:

$$\rho_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & c_- & c_+ \\ 1 & 1 & c_- & c_+ \\ c_- & c_- & 1 - \sin \varphi & \cos \frac{\varphi}{4} \\ c_+ & c_+ & \cos \frac{\varphi}{4} & 1 + \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (9-4)$$

که در آن

$$c_{\pm} = \cos \frac{\varphi}{2} \pm \sin \frac{\varphi}{2} \quad (10-4)$$

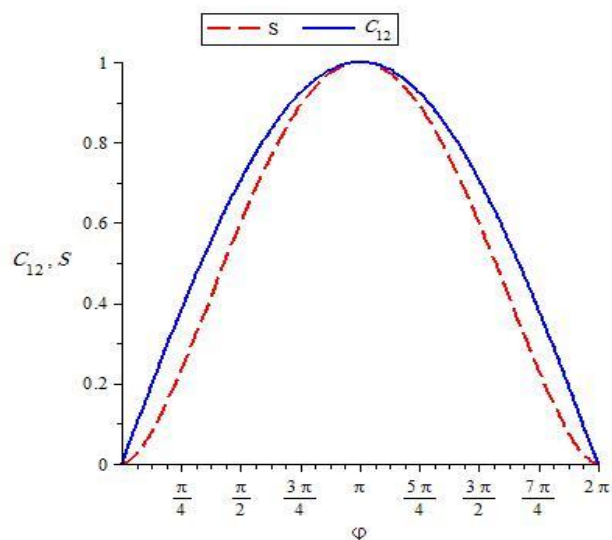
برای زیرسیستم‌ها این منجر به رابطه:

$$\rho_B = Tr_A(\rho) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \sin \varphi & \cos^2 \frac{\varphi}{2} \\ \cos^2 \frac{\varphi}{2} & 1 + \frac{1}{2} \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \rho_A = Tr_B(\rho) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos \frac{\varphi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (11-4)$$

می‌شود. تفاوت بین ρ_B و ρ_A ، نمایانگر نقش نامتقارنی است که بیت کنترل و هدف^۱ در *CNOT* بازی می‌کنند.

شکل (۱-۴) نتیجه آنتروپی درهم‌تنیدگی $E(\rho_3) = S(\rho_A) = S(\rho_B)$ ، بعنوان یک تابعی از دوران زاویه φ را نشان می‌دهد. به طور واضح، وابستگی آن نسبت به φ متفاوت از هم‌رسی $C(\psi_3)$ برای یک حالت یکسان می‌باشد، که به طور خطی نسبت به φ شروع شده و به ماکزیمم مقدار خود یعنی ۱ می‌رسد.

1 Target bit



شکل (۱-۴) آنترویی جزئی (آنترویی درهم‌تنیدگی) $S(\rho_A)$ (منحنی خط چین) و همرسی C (منحنی خط پیوسته) برای ρ_3 (رابطه (۴-۹)) بعنوان یک تابعی از دوران φ .

اما هر دو نمودار که مقدار درهم‌تنیدگی را نشان می‌دهند در حالت یکسان به ماکزیمم مقدار خود می‌رسند و هنگامی که حالت جداپذیر باشد، صفر می‌شوند.

همرسی بین حالت‌های کوانتومی دواسپینی در فضای هیلبرت، مربوط به یک ماتریس چگالی 4×4 ،

توسط فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$C = \max \left\{ 0, 2\lambda - \sum_{i=1}^4 \lambda_i \right\} \quad (12-4)$$

که در آن $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ و λ_i که عبارتند از ریشه دوم (جذر) ویژه‌مقادیر

حاصل ضرب:

$$R = \rho \tilde{\rho} \quad (13-4)$$

که در آن:

$$\tilde{\rho} = \rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^\dagger(\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad \text{و} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (14-4)$$

راه دوم محاسبه همرسی بررسی ویژه مقادیر ماتریس زیر است:

$$R = \sqrt{\sqrt{\rho} \tilde{\rho} \sqrt{\rho}} \quad (15-4)$$

که توسط $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ ها مشخص می‌شوند [۶۲].

در کل همرسی عبارت است از:

$$C(\rho) = \max(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}) \quad (16-4)$$

که $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ ویژه مقادیر ماتریس $\rho \tilde{\rho}$ می‌باشند.

مقدار این کمیت عبارت است از: $0 \leq C(\rho) \leq 1$ ، که $C = 0$ مطابق با یک حالت جداپذیر و $C = 1$ مطابق

با یک حالت درهم‌تنیده است [۲۲].

۴ - ۲ - ۱ - از بین رفتن درهم‌تنیدگی

برهم‌نهی حالت‌هایی شبیه $\rho(\psi_2)$ (رابطه (۴-۵)) در بخش قبل، به طور کلی پایدار نیستند و با گذشت

زمان از بین می‌روند. یک تحوّل نوعی آن است که جمعیت‌ها به حالت تعادل درآیند در حالی که اعضای

غیر قطری ماتریس چگالی به صفر کاهش یابند. بعنوان مثال فرض کنید حالتی که بایستی متحوّل شود

عبارت است از:

$$\rho_2(t) = \begin{pmatrix} p_+ & 0 & 0 & \frac{e^{-t/T_2}}{2} \\ 0 & p_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_- & 0 \\ \frac{e^{-t/T_2}}{2} & 0 & 0 & p_+ \end{pmatrix} \quad (17-4)$$

که در آن

$$p_{\pm} = \frac{1}{4} (1 \pm e^{-t/T_1}) \quad (18-4)$$

برای مدت زمان به اندازه کافی طولانی، این حالت به $\rho_2(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{4} I$ میل می کند که مطابق با

حالت بیشینه آمیختگی می باشد و به طور واضح درهم تنیده نیست. اگر ما ترانهاد جزئی¹ را برای $\rho_2(t)$ به کار بریم آنگاه عبارت زیر بدست می آید:

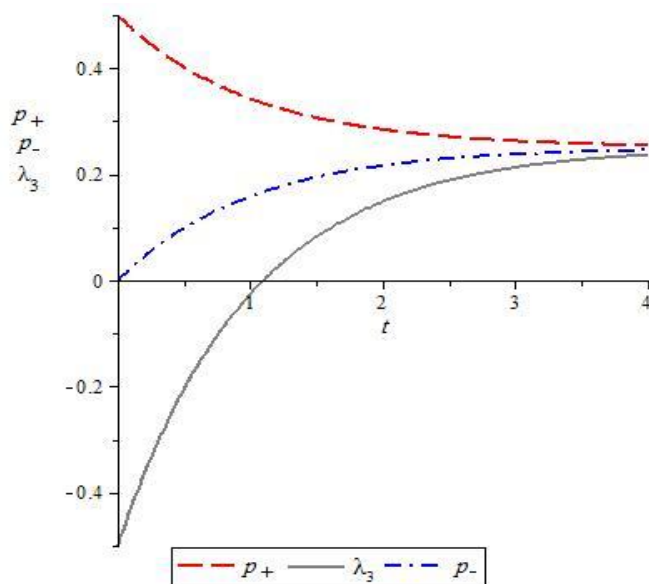
$$\rho_2(t) = \begin{pmatrix} p_+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_- & \frac{e^{-t/T_2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-t/T_2}}{2} & p_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_+ \end{pmatrix} \quad (19-4)$$

که دارای ویژگی مقادیر زیر می باشد:

$$\lambda_i = \left(p_+, p_- + \frac{e^{-t/T_2}}{2}, p_- - \frac{e^{-t/T_2}}{2}, p_+ \right) ; \quad i = 1, \dots, 4 \quad (20-4)$$

$$\lambda_3 = p_- - \frac{e^{-t/T_2}}{2} \quad (21-4)$$

¹ Partial transpose



شکل (۲-۴) وابستگی زمانی ویژه مقادیر ρ_2 (رابطه (۴-۱۹) - (۴-۲۱)) برای $T_1 = T_2 = 1$. خط چین- P_+ ، نقطه- خط چین P_- و خط پیوسته- λ_3 .

شکل (۲-۴) وابستگی زمانی جمعیت‌ها (نمودار خط چین و نقطه- خط چین) و سومین ویژه مقدار (منفی) $\lambda_3(t)$ (نمودار خط پیوسته) را نشان می‌دهد. جمعیت‌ها به مقادیر تعادل‌شان یعنی p_∞ نزدیک می‌شوند. در ابتدا، برای مثال ذکر شده ویژه مقدار منفی $\lambda_3(t)$ افزایش پیدا می‌کند و بعد از یک مدت زمان (≈ 1) صفر می‌شود که در آن ما به طور اختیاری فرض کردیم که $T_1 = T_2 = 1$. در این نقطه سیستم درهم‌تنیده نیست. این اثر که سیستم در یک مقیاس زمانی محدود جداپذیر می‌شود، " مرگ ناگهانی درهم‌تنیدگی " ^۱ گفته می‌شود.

1 Entanglement sudden death

۴ - ۳ - ناسازگاری کوانتومی^۱

سنجش دیگری از همبستگی‌های غیر کلاسیکی بین دو زیرسیستم، ناسازگاری کوانتومی است. این موضوع در سال ۲۰۰۱ توسط اویلر، زوریخ، هندرسون و ودرال^۲ معرفی شد. ناسازگاری، ارتباط‌هایی که می‌توانند در حالت‌های جداپذیر آمیخته کوانتومی، موجود باشند را می‌سنجد. این ناسازگاری بر روی اطلاعات متقابل کوانتومی استوار است. به طور واضح‌تر ناسازگاری عبارت است از اختلاف بین اطلاعات متقابل کل^۳ مربوط به زیرسیستم‌ها و اطلاعات متقابلی را که می‌توان توسط اندازه‌گیری‌های موضعی بدست آورد. در مورد حالت‌های خالص، ناسازگاری کوانتومی، آنتروپی درهم‌تنیدگی را می‌سنجد.

در ابتدا آنتروپی فون نیومن یا آنتروپی اطلاعات $S(\rho) = -Tr(\rho \log_2 \rho)$ را به خاطر می‌آوریم. اگر این رابطه را برای یک زیرسیستم بوجود آمده از دو کیوبیت A و B تعریف کنیم، می‌توانیم آنتروپی زیر-سیستم‌های $S(\rho_A)$ و $S(\rho_B)$ را مانند آنتروپی کل سیستم $S(\rho)$ تعریف کنیم. بنابراین داریم:

$$I(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \quad (۲۲-۴)$$

که بعنوان اطلاعات متقابل نیومن بین دو زیرسیستم شناخته می‌شود که در فصل قبل در رابطه (۲-۲۷)

توضیح دادیم. بعنوان مثال حالت ضربی $|\psi\rangle = |00\rangle$ را در نظر می‌گیریم. در اینجا

$S(\rho_A) = S(\rho_B) = S(\rho) = 0$ و اطلاعات متقابل صفر می‌شود. برای حالت بل

$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ آنتروپی کل صفر است اما آنتروپی زیرسیستم‌ها به مقدار ماکزیمم یعنی 1 می‌-

رسد (چون در وضعیت ماکزیمم آمیختگی هستند). بنابراین:

1 Quantum discord

2 Ollivier, Zurek, Henderson, Vedral

$$I(|\psi_2\rangle\langle\psi_2|) = 2 \quad (23-4)$$

حال فرض کنید که مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌های تصویری $\{B^k\}$ را روی زیرسیستم B اعمال کنیم، بنابراین احتمال آن که خروجی k را بدست آوریم به صورت زیر است:

$$p_k = \text{Tr}_{AB} \left[(I^A \otimes B^k) \rho_{AB} (I^A \otimes B^k) \right] \quad (24-4)$$

که I^A عملگر یکانی مربوط به زیر سیستم A می‌باشد. بعد از این اندازه‌گیری، ماتریس چگالی مشروط زیرسیستم A توسط عملگر چگالی:

$$\rho_k = \frac{1}{p_k} \left[(I^A \otimes B^k) \rho_{AB} (I^A \otimes B^k) \right] \quad (25-4)$$

تعیین می‌شود [۱۶]. آنتروپی مشروط کوانتومی مربوط به زیرسیستم A را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$S(\rho | \{B^k\}) = \sum_k p_k S(\rho_k) \quad (26-4)$$

همبستگی کلاسیکی بین دو زیرسیستم را می‌توان با استفاده از تعریف بالا به صورت زیر بیان کرد:

$$CC(\rho_{AB}) = J(\rho_{AB}) = \sup_{\{B^k\}} \left[S(\rho_A) - S(\rho | \{B^k\}) \right] \quad (27-4)$$

بیشینه مقدار آن برای تمام اندازه‌گیری‌های ممکن اتفاق می‌افتد.

از اینرو می‌توانیم تفاضل زیر را محاسبه کنیم:

$$J(\rho_{AB}) = S(\rho_A) - S(\rho_A | \rho_B) \quad (28-4)$$

که در آن آنتروپی مشروط کوانتومی بیان شده عبارت است از:

$$S(\rho_A | \rho_B) = \min \left\{ \sum_k p_k S(\rho_k) \right\} \quad (29-4)$$

J اطلاعات بدست آمده در مورد B ، بعنوان نتیجه‌ای از یک اندازه‌گیری روی بعضی از مجموعه مشاهده-پذیرهای A را تعیین می‌کند. برای یک سیستم کلاسیکی $I(\rho_{AB}) = J(\rho_{AB})$.

در انتها، ناسازگاری کوانتومی بصورت تفاضل بین همبستگی کل و همبستگی کلاسیکی، تعریف می‌شود یعنی:

$$D(\rho_{AB}) = I(\rho_{AB}) - J(\rho_{AB}) \quad (30-4)$$

که برای سیستم‌های کلاسیکی صفر می‌باشد، اما این در مورد سیستم‌های کوانتومی عمومیت ندارد. برای تعبیری مناسب، I ارتباط بین دو زیرسیستم و J اطلاعات بدست آمده در مورد B توسط اندازه‌گیری روی A را توصیف می‌کنند. همچنین تفاضل $D(\rho_{AB})$ اطلاعاتی که نمی‌توان توسط اندازه‌گیری‌های موضعی بدست آورد را اندازه می‌گیرد. اگر از تعریف‌های I و J استفاده کنیم، داریم؛

$$\begin{aligned} D(\rho_{AB}) &= I(\rho_{AB}) - J(\rho_{AB}) \\ &= S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) + S(\rho_A | \rho_B) \end{aligned} \quad (31-4)$$

اولین دو جمله در عبارت بالا نمایان‌گر آنروپی درهم‌تنیدگی قبل از اندازه‌گیری می‌باشند و جمله آخر آنروپی مشروط بین دو زیرسیستم را نشان می‌دهد.

توجه کنید که تعریف ارتباط کلاسیکی توسط رابطه (4-27) در بالا متناسب با انتخاب بهینه اندازه-گیری‌های تصویری $\{B^k\}$ می‌باشد. برای یک سیستم تک کیوبیتی می‌توان این مسئله را حل کرد. برای کیوبیت زیرسیستم B ، یک مجموعه کلی از اندازه‌گیری‌های تصویری را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت:

$$B^k = V |k\rangle_B \langle k| V^\dagger \quad ; \quad k = 0,1 \quad (۳۲-۴)$$

و V یک تبدیل یکانی از زیر سیستم B و $V \in U(2)$ است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad ; \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad , \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (۳۳-۴)$$

برای یک دمای T و میدان مغناطیسی B مشخص، کافی است که بیشینه مقدار رابطه (۲۷-۲)، نسبت به پارامترهای θ, φ را حساب کنیم. برای سیستم‌های مدل هایزنبرگ بیشینه مقدار V با توجه به محاسباتمان در نرم افزار *Maple*، بازای $\theta = 0$ اتفاق می افتد.

اگر $D_A(\rho) \neq 0$ ، به این معنی است که اندازه‌گیری‌ها روی زیرسیستم B ، زیرسیستم A را مختل می کند. این برای سیستم‌های کلاسیکی اتفاق نمی افتد اما برای سیستم‌های کوانتومی حتی اگر درهم-تنیده نباشند اتفاق می افتد. از اینرو ناسازگاری را می توان بعنوان تفاضل بین اطلاعات متقابل کل و اطلاعات متقابلی که توسط اندازه‌گیری‌های موضعی بدست می آید تفسیر کرد. همچنین ناسازگاری برای سیستم‌های کوانتومی در حالت‌های جداپذیر می تواند غیر صفر باشد. بنابراین آن یک میزانی از کوانتومی بودن مستقل از درهم‌تنیدگی را نشان می دهد [۱۳و۲].

۴ - ۴ - ظرفیت گرمایی

ظرفیت گرمایی یک سیستم کوانتومی دو قسمتی که در تعادل گرمایی قرار دارد با استفاده از تابع پارش دستگاه که در رابطه (۳۸-۳) فصل قبل معرفی شد به صورت بدست می آید [۵]:

$$C = k_B \beta^2 \frac{\partial^2 (\ln Z)}{\partial \beta^2} \quad (۳۴-۴)$$

در ادامه نشان می‌دهیم که ظرفیت گرمایی یک سیستم کوانتومی در تعادل گرمایی می‌تواند رفتار درهم-تنیدگی آن سیستم را نشان دهد و همچنین ارتباط آن را با همرسی و آنتروپی جزئی مشروط بیان می‌کنیم.

۴ - ۵ - بررسی درهم‌تنیدگی سیستم‌های اسپین-۱/۲ مدل هایزنبرگ

در این فصل به خاطر رفتار جالب توجه سیستم‌های اسپین-۱/۲ مدل هایزنبرگ در مقابل تغییرات دما و میدان مغناطیسی این گونه سیستم‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین همرسی، ناسازگاری و ظرفیت گرمایی را برای بررسی درهم‌تنیدگی این سیستم‌ها مورد مطالعه قرار می‌دهیم و ارتباط آنها را با آنتروپی مشروط کوانتومی بیان می‌داریم.

۴ - ۵ - ۱ - همرسی و ناسازگاری کوانتومی

در اینجا ما همرسی و ظرفیت گرمایی را برای سیستم‌های اسپینی مدل هایزنبرگ در تعادل گرمایی، برحسب دما و میدان مغناطیسی موجود، مورد مطالعه قرار می‌دهیم و روی وابستگی همرسی و ظرفیت گرمایی تمرکز می‌کنیم. و همچنین رفتار ناسازگاری کوانتومی برای این مدل‌ها را بررسی می‌کنیم. در این قسمت بر اساس محاسبات عددی در می‌یابیم که در دماهای پایین، ناسازگاری کوانتومی صفر نمی‌شود هرچند همرسی در یک دمای بحرانی کاملاً صفر می‌شود.

ناسازگاری کوانتومی یک مقیاسی از همبستگی‌های کوانتوم-گونه می‌باشد و چنین همبستگی کوانتومی، از درهم‌تنیدگی کلی‌تر است و از آن جهت که ناسازگاری کوانتومی برای حالت‌هایی که جداپذیر هستند می‌تواند غیر صفر باشد، حضور همبستگی‌های کوانتومی را برای حالت‌های غیر درهم‌تنیده، نشان می‌دهد.

تاکنون کارهای زیادی در مورد ناسازگاری کوانتومی، در جهت مطالعه گذار فاز کوانتومی، همبستگی-های کوانتومی در سیستم‌های دوکیوبیتی همچون در الگوریتم جست‌وجوی گروور^۱، عمل ناهمدوسی^۲، اثر غیر مارکووینی^۳ و قوانین ناسازگاری کوانتومی برای محاسبات کوانتومی و دوربری کوانتومی، انجام شده است. از اینرو توانایی ناسازگاری کوانتومی، نقش مهمی را در نظریه اطلاعات کوانتومی بازی می‌کند. در این مبحث، وابستگی دمایی ناسازگاری کوانتومی برای یک سیستم دو اسپینی مدل هایزنبرگ، در تعادل گرمایی و در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

ناسازگاری گرمایی کوانتومی دارای ویژگی‌های مشابه بسیار زیادی با درهم‌تنیدگی گرمایی کوانتومی دارد، و در حالت پایه، بدون توجه به میدان مغناطیسی، با هم برابرند. هنگامی که دما از صفر بیشتر می‌شود، روی هم رفته، رفتارها هنوز مشابه هم هستند ولی اندک اندک رفتار ناسازگاری تغییر خواهد کرد. به هر حال ناسازگاری کوانتومی از هم‌رسی کلی‌تر است زیرا ناسازگاری گرمایی کوانتومی با افزایش دما، به طور مجانبی به صفر میل می‌کند، اما هم‌رسی در یک دمای بحرانی، رفتار مرگ ناگهانی را از خود نشان می‌دهد. همان گونه که بیان شد، این رفتار مجانبی نشان‌گر حضور ناسازگاری کوانتومی در حالت‌های غیر درهم‌تنیده می‌باشد.

۴ - ۵ - ۱ - ۱ - سیستم اسپین-۱/۲ مدل XXZ ، XX و XXX

ابتدا با معرفی یک مدل XXZ اسپین-۱/۲، با هامیلتونی زیر که در یک میدان مغناطیسی خارجی

B قرار دارد، شروع می‌کنیم:

1 Grover
2 Decoherence
3 Non-Markovian effect

$$H_s = \frac{1}{2} \left[J \sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + J \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} + J_z \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} + B (\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}) \right] \quad (35-4)$$

که در آن J, J_z ، ثابت‌های جفت‌شدگی بین دو اسپین هستند و $\sigma_i^{(n)}$ ها عملگرهای پاولی هستند. ثابت-های جفت‌شدگی ممکن است مثبت یا منفی باشند که به ترتیب مطابق با موارد پاد- فرومغناطیسی و فرومغناطیسی می‌باشد. B میدان مغناطیسی خارجی در راستای دلخواه می‌باشد.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}J_z + B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}J_z & J & 0 \\ 0 & J & -\frac{1}{2}J_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}J_z - B \end{pmatrix} \quad (36-4)$$

چهار ویژه‌بردار هامیلتونی بالا عبارتند از:

$$\left\{ |\varphi_1\rangle = |00\rangle, |\varphi_2\rangle = |11\rangle, |\varphi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|01\rangle + |10\rangle), |\varphi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \right\} \quad (37-4)$$

با ویژه‌مقادیر:

$$\left\{ E_1 = \left(-B + \frac{1}{2}J_z \right), E_2 = \left(B + \frac{1}{2}J_z \right), E_3 = \left(-J - \frac{1}{2}J_z \right), E_4 = \left(J - \frac{1}{2}J_z \right) \right\} \quad (38-4)$$

ماتریس چگالی سیستم در تعادل گرمایی در پایه‌های $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ عبارت است از:

$$\rho_{AB}(T) = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-\beta\left(B + \frac{1}{2}J_z\right)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & w & 0 \\ 0 & w & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\beta\left(-B + \frac{1}{2}J_z\right)} \end{pmatrix} \quad (39-4)$$

که در آن

$$u = \frac{1}{2} \left(e^{-\beta \left(-\frac{1}{4}J_z - \frac{1}{2}J \right)} + e^{-\beta \left(-\frac{1}{4}J_z + \frac{1}{2}J \right)} \right) \quad w = \frac{1}{2} \left(-e^{-\beta \left(-\frac{1}{4}J_z - \frac{1}{2}J \right)} + e^{-\beta \left(-\frac{1}{4}J_z + \frac{1}{2}J \right)} \right) \quad (40-4)$$

$$Z = \text{Tr}(\rho_{AB}) = e^{-\beta \left(B + \frac{1}{2}J_z \right)} + 2u + e^{-\beta \left(-B + \frac{1}{2}J_z \right)} \quad (41-4)$$

که Z تابع پارش سیستم است. برای سادگی، در ادامه ما فقط سیستم پاد- فرومغناطیسی را در نظر می‌گیریم یعنی، $J, J_z > 0$. (توجه کنید که سیستم فرومغناطیسی را می‌توان به روش مشابه، مورد مطالعه قرار داد و رفتارهایی همانند سیستم پاد- فرومغناطیسی بدست آورد). ادامه بحث به دو بخش تقسیم می‌شود:

• مدل XXX با $J_z = J$ با هامیلتونی

$$H_s = \frac{1}{2} \left[J \sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + J \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} + J \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} + B \left(\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)} \right) \right] \quad (42-4)$$

و ماتریس چگالی:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-\beta J \left(\frac{B+1}{J+2} \right)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{\beta J}{2} \right)} + \frac{1}{2} e^{\left(\frac{3\beta J}{2} \right)} & \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{\beta J}{2} \right)} - \frac{1}{2} e^{\left(\frac{3\beta J}{2} \right)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{\beta J}{2} \right)} - \frac{1}{2} e^{\left(\frac{3\beta J}{2} \right)} & \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{\beta J}{2} \right)} + \frac{1}{2} e^{\left(\frac{3\beta J}{2} \right)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\beta J \left(-\frac{B+1}{J+2} \right)} \end{pmatrix} \quad (43-4)$$

که در آن $Z = e^{-\beta J \left(\frac{B+1}{J+2} \right)} + e^{-\beta J \left(-\frac{B+1}{J+2} \right)} + e^{-\left(\frac{\beta J}{2} \right)} + e^{\left(\frac{3\beta J}{2} \right)}$

• مدل XX ($J_z = 0$) با هامیلتونی

$$H_s = \frac{1}{2} \left[J \sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} + J \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} + B \left(\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)} \right) \right] \quad (44-4)$$

و ماتریس چگالی:

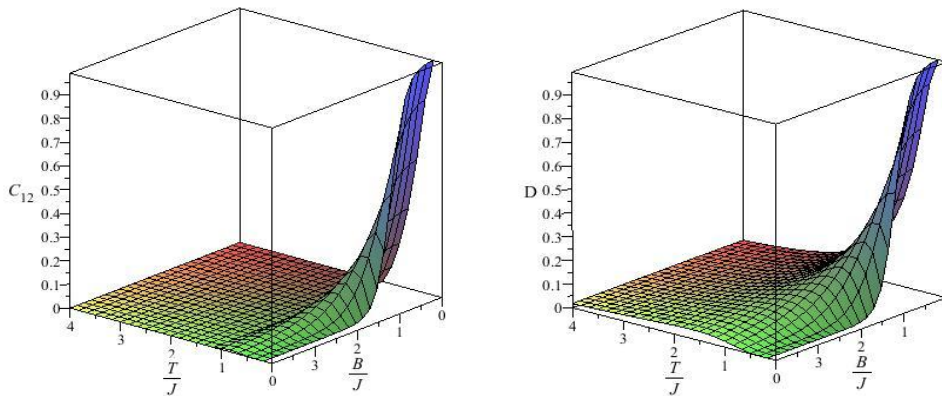
$$\rho_{AB} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-(\beta J)\left(\frac{B}{J}\right)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-(\beta J)} + \frac{1}{2}e^{(\beta J)} & -\frac{1}{2}e^{(\beta J)} + \frac{1}{2}e^{-(\beta J)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}e^{(\beta J)} + \frac{1}{2}e^{-(\beta J)} & \frac{1}{2}e^{(\beta J)} + \frac{1}{2}e^{-(\beta J)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{(\beta J)\left(\frac{B}{J}\right)} \end{pmatrix} \quad (45-4)$$

که در آن

$$Z = e^{-(\beta J)\left(\frac{B}{J}\right)} + e^{(\beta J)\left(\frac{B}{J}\right)} + e^{-(\beta J)} + e^{(\beta J)} \quad (46-4)$$

ناسازگاری کوانتومی و همرسی یک حالت که در تعادل گرمایی است، بعنوان تابعی از دمای T و میدان مغناطیسی B در شکل (۳-۴)، برای سیستم مدل XX نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که تمام رفتارهای ناسازگاری و همرسی مشابه هستند. برای $0 < B/J < 1$ ، هنگامی که دما از صفر افزایش یابد، هم D و هم C به طور یکنواخت از 1 کاهش می‌یابند. برای $B/J > 1$ ، در ابتدا آنها از صفر تا برخی از مقادیر بیشینه افزایش می‌یابند سپس با افزایش دما کاهش پیدا می‌کنند.

تفاوت بارز بین ناسازگاری و همرسی عبارت است از: D در یک مسیر یکنواخت کاهش می‌یابد اما C رفتار "مرگ ناگهانی" را در یک دمای بحرانی T_c از خود نشان می‌دهد. هنگامی که $T \rightarrow 0$ ، سیستم بایستی در حالت پایه، با کمینه انرژی باشد.



شکل (۳-۴) همرسی و ناسازگاری کوانتومی برای مدل XX بصورت تابعی از دما و میدان مغناطیسی.

بر طبق معادله (۳۷-۴) و (۳۸-۴)، برای $E_1 < E_3, B > J + J_z$ و حالت پایه سیستم عبارت است از

$|\varphi_1\rangle = |00\rangle$ ، که یک حالت جداپذیر با $C = 0$ می باشد. برای $E_1 > E_3, B < J + J_z$ و حالت پایه

سیستم $|\varphi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ می باشد که داریم $D = C = 1$. بنابراین:

$$B_c = J + J_z \quad (۴۷-۴)$$

یک میدان مغناطیسی بحرانی برای گذار فاز از حالت پایه محسوب می شود. برای مدل پاد-فرومغناطیسی

XXX ، میدان مغناطیسی بحرانی^۱ برای گذار از حالت پایه عبارت است از $B_c = 2J$ و برای مدل XX

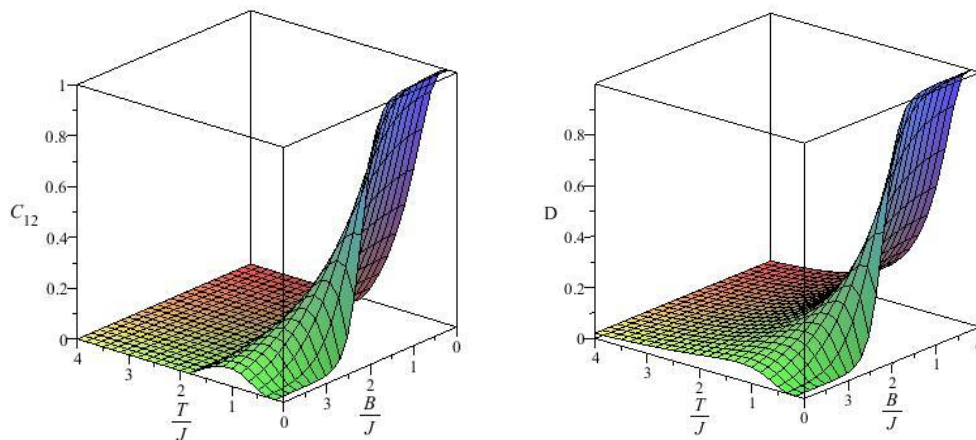
عبارت است از $B_c = J$.

برای مدل XXX ، ناسازگاری کوانتومی و همرسی را بعنوان توابعی از دمای T و میدان مغناطیسی

B را در شکل (۴-۴) رسم کرده ایم. به صراحت می توان دید که برای $(B_c = 2J)B < B_c$ ، هر دو D و C

آهسته تر از شکل (۳-۴) کاهش می یابند.

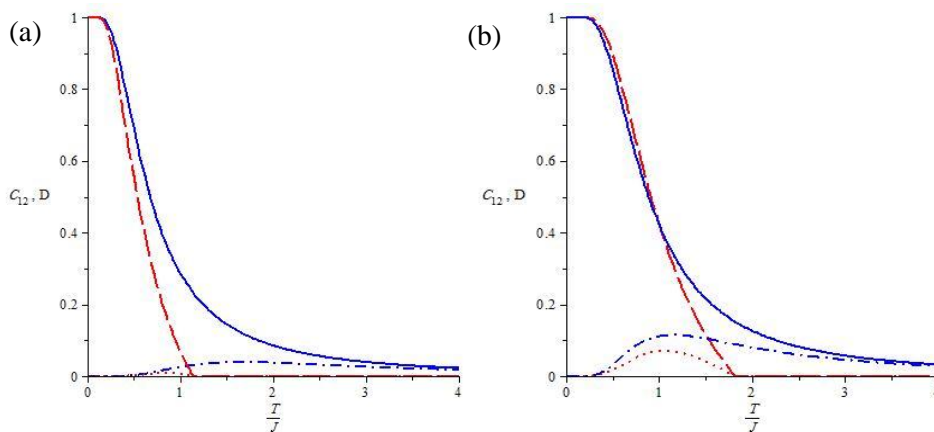
¹ Critical magnetic field



شکل (۴-۴) همرسی و ناسازگاری کوانتومی برای مدل XXX با، در تعادل گرمایی، برحسب دما و میدان مغناطیسی.

با استفاده از تحلیل‌های بالا ما نتیجه می‌گیریم: (۱) یک میدان مغناطیسی بحرانی برای گذار فاز حالت پایه به میزان $B_c = J + J_z$ وجود دارد. پایین B_c ، حالت پایه بیشترین ارتباط کوانتومی و درهم-تنیدگی را دارد یعنی $D = C = 1$. بالای B_c ، حالت پایه یک حالت جداپذیر با $C = 0$ می‌باشد. (۲) هنگامی که دما از صفر بیشتر می‌شود، C و D بطور یکنواخت از مقدار ۱ کاهش پیدا می‌کنند (بازای $B < B_c$)، یا در ابتدا از صفر به سمت برخی از بیشینه‌ها افزایش و سپس کاهش می‌یابند (بازای $B > B_c$). (۳) D در حد بینهایت دما صفر نمی‌شود، در حالی که C در یک دمای بحرانی محدود T_c به طور کامل صفر می‌شود.

بنابراین ناسازگاری کوانتومی و همرسی انواع همبستگی بین دو زیرسیستم از یک سیستم کوانتومی را نشان می‌دهند. مقادیر آن دو در کل با هم یکسان نیست. بعنوان تعبیری از گفته‌های بالا، ناسازگاری کوانتومی و همرسی سیستم‌های مدل XX و XXX که در تعادل گرمایی قرار دارند را در میدان‌های مشخص در شکل (۴-۵) رسم کرده‌ایم.



شکل (۴-۵) ناسازگاری کوانتومی و همرسی برای مدل های (a) XX و (b) XXX بر حسب دما که در آن خط پیوسته و خط چین به ترتیب D و C ، با $B/J=0$ را نشان می‌دهند. در حالی که نقطه-خط چین و نقطه چین به ترتیب C و D با $B/J=4$ را نشان می‌دهند.

در اینجا ناسازگاری کوانتومی و همرسی را برای سیستم‌های اسپینی مدل XX و XXX در دمای T و میدان مغناطیسی B مورد بررسی قرار دادیم. برای حالت پایه این سیستم‌ها، یک میدان مغناطیسی بحرانی برای گذار فاز از حالت جداپذیر به درهم تنیده به مقدار $B_c = J + J_z$ وجود دارد (شکل (۴-۵)). در مقادیر زیر B_c ، حالت پایه، بیشینه مقدار ناسازگاری و درهم‌تنیدگی را دارد، سپس با افزایش دما از این بیشینه به طور یکنواخت افت می‌کند. ناسازگاری کوانتومی به طور مجانبی افت می‌کند، اما درهم‌تنیدگی در حدود یک دمای بحرانی T_c به طور کامل صفر می‌شود. در بالای B_c ، حالت پایه یک حالت ضربی (جداپذیر) است که هیچ درهم‌تنیدگی و ناسازگاری ندارد. در انتها، مطابق شکل (۴-۵)، ناسازگاری کوانتومی و همرسی رفتار مشابه‌ای را نشان نمی‌دهند [۱۳].

یک راه برای بدست آوردن دمای بحرانی برای این مدل‌ها این است که ابتدا ترانهاد جزئی روی ماتریس‌های چگالی مربوطه اعمال کنیم، سپس ویژه‌مقادیر ماتریس‌های حاصل را بدست آوریم و در انتها دمایی که در آن ویژه‌مقادیر ماتریس‌های حاصله منفی می‌شود را با برابر صفر قرار دادن این ویژه‌مقادیر بدست می‌آوریم.

ماتریس حاصل از اعمال ترانهاد جزئی برای مدل XX عبارت است از:

$$(\rho_{AB})^{T_B} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}e^{(\beta J)} + \frac{1}{2}e^{-(\beta J)} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-\beta J} + \frac{1}{2}e^{\beta J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{(\beta J)} + \frac{1}{2}e^{-(\beta J)} & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{(\beta J)} + \frac{1}{2}e^{-(\beta J)} & 0 & 0 & e^{\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} \end{pmatrix} \quad (48-4)$$

ویژه مقادیر این ماتریس عبارتند از:

$$\lambda_1 = \frac{1}{e^{-\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} + e^{\beta J} + e^{-\beta J} + e^{\beta J \left(\frac{B}{J}\right)}} \left(\frac{1}{2}e^{-\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} + \frac{1}{2}e^{\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(e^{-\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} \right)^2 - 2e^{\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} e^{-\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} + \left(e^{\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} \right)^2 + \left(e^{-\beta J} \right)^2 - 2e^{(\beta J)} e^{-(\beta J)} + e^{(\beta J)^2}}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{e^{-\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} + e^{\beta J} + e^{-\beta J} + e^{\beta J \left(\frac{B}{J}\right)}} \left(\frac{1}{2}e^{-\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} + \frac{1}{2}e^{\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(e^{-\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} \right)^2 - 2e^{\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} e^{-\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} + \left(e^{\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} \right)^2 + \left(e^{-\beta J} \right)^2 - 2e^{(\beta J)} e^{-(\beta J)} + e^{(\beta J)^2}}$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{e^{-\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} + e^{\beta J} + e^{-\beta J} + e^{\beta J \left(\frac{B}{J}\right)}} \left(\frac{1}{2}e^{\beta J} + \frac{1}{2}e^{-\beta J} \right) \quad (49-4)$$

در دماها و میدان‌های مشخص فقط λ_2 می‌تواند مقادیر منفی را به خود بگیرد بنابراین دمای بحرانی با

استفاده از رابطه $\lambda_2 = 0$ بدست می‌آید.

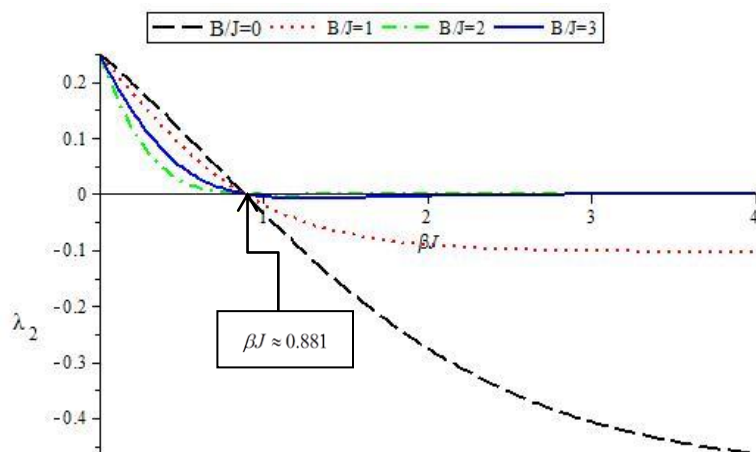
دمای بحرانی برای این مدل، یعنی دمایی که در آن درهم‌تنیدگی از بین می‌رود یا به عبارت دیگر ویژه مقدار ماتریس چگالی تغییر علامت می‌دهد، به میدان مغناطیسی بستگی ندارد و مقدار آن به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\lambda_2 = \frac{1}{e^{-\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} + e^{\beta J} + e^{-\beta J} + e^{\beta J \left(\frac{B}{J}\right)}} \left(\frac{1}{2} e^{-\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} + \frac{1}{2} e^{\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(e^{-\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} \right)^2 - 2e^{\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} e^{-\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} + \left(e^{\beta J \left(\frac{B}{J}\right)} \right)^2 + \left(e^{-\beta J} \right)^2 - 2e^{(\beta J)} e^{(-\beta J)} + e^{(\beta J)^2}} \right) = 0 \quad (50-4)$$

بازای هر مقدار معینی از میدان مغناطیسی، به عنوان مثال: $B/J = 0$ داریم:

$$\frac{1}{2 + e^{\beta J} + e^{-\beta J}} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\left(e^{\beta J} \right)^2 + \left(e^{-\beta J} \right)^2 - 2e^{\beta J} e^{-\beta J}} \right) = 0 \Rightarrow \beta J = \begin{cases} \ln(1 + \sqrt{2}) \\ \ln(1 - \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\frac{T_c}{J} = 1.135 \quad (51-4)$$



شکل (۴-۶) نمودار ویژه مقدار ماتریس چگالی مدل XX بر حسب دما بازای میدان‌های مغناطیسی مختلف (رابطه (۴-۵۱)).

و برای مدل XXX داریم:

$$(\rho_{AB})^{T_B} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-(\beta J)\left(\frac{B+1}{J+2}\right)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{\beta J}{2}\right)} - \frac{1}{2}e^{\left(\frac{3\beta J}{2}\right)} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{\beta J}{2}\right)} + \frac{1}{2}e^{\left(\frac{3\beta J}{2}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{\beta J}{2}\right)} + \frac{1}{2}e^{\left(\frac{3\beta J}{2}\right)} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{\beta J}{2}\right)} - \frac{1}{2}e^{\left(\frac{3\beta J}{2}\right)} & 0 & 0 & e^{-(\beta J)\left(-\frac{B+1}{J+2}\right)} \end{pmatrix}$$

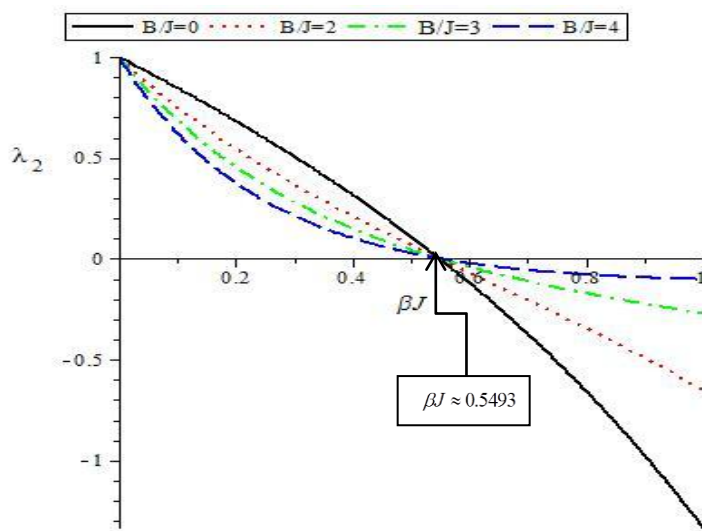
(۵۲-۴)

در هر مقداری از میدان مغناطیسی مانند $B/J=0$ ، با برابر صفر قرار دادن دومین ویژه مقدار یعنی λ_2

داریم:

$$e^{-\frac{1}{2}\beta J} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(e^{-\frac{1}{2}\beta J}\right)^2 - 2e^{-\frac{1}{2}\beta J} e^{\frac{3}{2}\beta J} + \left(e^{\frac{3}{2}\beta J}\right)^2} = 0 \quad (۵۳-۴)$$

$$\beta J = -2 \ln\left(\frac{\sqrt[4]{27}}{3}\right) = 0.5493 \Rightarrow \frac{T_c}{J} = 1.82 \quad (۵۴-۴)$$



شکل (۷-۴) نمودار دومین ویژه مقدار ماتریس چگالی مدل XXX بر حسب دما در میدان‌های مغناطیسی مختلف (رابطه (۴-۵۳)).

شکل (۷-۴) تغییرات ویژه مقدار دوم ماتریس چگالی، یعنی λ_2 برای مدل XXX را بر حسب معکوس دما نشان می‌دهد.

این ویژه مقدار، در دماهای منفی هم یک تغییر علامت دارد و آن را اینگونه می‌توان تعبیر کرد که، در دماهای منفی هم مرگ ناگهانی درهم تنیدگی وجود دارد و سیستم از حالت درهم تنیده به حالت جداپذیر تغییر می‌یابد و این یعنی در دماهای زیر صفر، سیستم گرما بدست می‌آورد و به حالت تعادل می‌رسد [۲۳]. برای مطالعه بیشتر در مورد رفتار درهم تنیدگی، همرسی و مقادیر آنتروپی در دماهای منفی می‌توان به مرجع [۲۳] رجوع کرد.

۴ - ۵ - ۲ - ظرفیت گرمایی^۱ سیستم اسپین - ۱/۲ مدل هایزنبرگ

حال ظرفیت گرمایی را برای مدل‌های اسپینی هایزنبرگ شرح می‌دهیم.

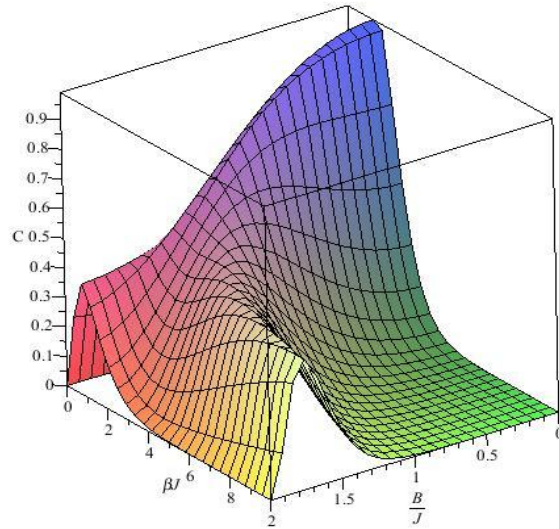
برای مدل $(J = J_z)$ داریم:

$$Z = Tr_{AB}(\rho_{AB}) = e^{-\beta(-B + \frac{1}{2}J)} + e^{-\beta(B + \frac{1}{2}J)} + e^{\frac{3}{2}\beta J} + e^{-\frac{1}{2}\beta J} \quad (۵۵-۴)$$

نمودار ظرفیت گرمایی طبق رابطه $C = k_B \beta^2 \frac{\partial^2 (\ln Z)}{\partial \beta^2}$ در شکل (۴-۸) نشان داده شده است [۵].

همان‌گونه که از شکل پیدا است، ظرفیت گرمایی با افزایش دما متناسب می‌باشد. در دماهای کم این کمیت فیزیکی به صفر میل می‌کند و در دماهای بالا به بیشینه مقدار خود می‌رسد. با مقایسه این نمودار با نمودارهای همرسی می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش دما، همرسی کاهش یافته و همان‌طور که در بالا توضیح داده شد، در یک دمای بحرانی، گذار فاز حالت، از جداپذیر به درهم‌تنیده، اتفاق می‌افتد، لذا در این جا هم، نمودار ظرفیت گرمایی برای حالت‌های جداپذیر و درهم‌تنیده، متفاوت می‌باشد.

یعنی در دماهای بالا و میدان‌های کم، ظرفیت گرمایی یک بیشینه دارد که نمایان‌گر بیشترین مقدار ظرفیت گرمایی است. با افزایش میدان و کاهش دما، ظرفیت گرمایی سیستم کاهش می‌یابد و با کاهش مجدد دما بیشینه مذکور به دو بیشینه تبدیل می‌شود.



شکل (۴-۸) نمودار ظرفیت گرمایی برای مدل XXX بر حسب دما و میدان مغناطیسی خارجی (رابطه (۴-۵۵)).

با توجه به شکل بالا، در دما و میدان‌های پایین، مقدار ظرفیت گرمایی به کمینه مقدار خود میل می‌کند. نتیجه‌ای که از نمودارهای مربوط به همرسی و ظرفیت گرمایی سیستم‌های اسپینی می‌گیریم این است که ظرفیت گرمایی و همرسی نسبت به یکدیگر رفتار عکس دارند. یعنی مقدار بیشینه ظرفیت گرمایی نشان دهنده سیستم در حالت جداپذیر است در حالی که مقدار بیشینه همرسی نمایانگر سیستم در حالت درهم‌تنیده می‌باشد. این نتیجه برای تمام مدل‌های اسپینی هایزنبرگ یکسان است.

همان‌گونه که از روابط، نمودارها و محاسبات عددی پیداست می‌توان همرسی را برای این گونه سیستم‌ها، یک شاهد درهم‌تنیدگی در نظر گرفت. با مقایسه‌های انجام شده درباره همرسی و ظرفیت گرمایی و نتایج بدست آمده از محاسباتمان با استفاده از نرم افزار *Maple*، نتیجه می‌گیریم که ظرفیت گرمایی برای سیستم‌های اسپینی مدل هایزنبرگی را می‌توان بعنوان شاهد درهم‌تنیدگی در نظر گرفت.

مشابه همین نتیجه را می‌توانیم در مورد سیستم اسپینی مدل XX با ماتریس چگالی بیان شده در

رابطه (۴-۴۵) و رد آن یعنی رابطه (۴-۴۶) بگیریم.

۴ - ۵ - ۳ - آنتروپی کوانتومی نیومن برای سیستم‌های اسپین - ۱/۲ مدل هایزنبرگی

در این قسمت در مورد آنتروپی‌های کوانتومی، برای سیستم‌های اسپینی مدل هایزنبرگی بحث کرده و رابطه آنها را با هم‌رسی و ظرفیت گرمایی بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که آنتروپی کوانتومی در این سیستم‌ها هم می‌تواند منفی شود و همچنین نشان می‌دهیم که می‌توانیم آنتروپی منفی کوانتومی را برای این گونه سیستم‌ها، همانند هم‌رسی، ظرفیت گرمایی و ناسازگاری، یک شاهد درهم‌تنیدگی در نظر بگیریم.

برای بدست آوردن آنتروپی توأم، آنتروپی زیرسیستم‌های A و B و آنتروپی مشروط فون نیومن، برای سیستم‌های اسپینی مدل هایزنبرگی، با استفاده از روابط بیان شده در فصل ۲، ماتریس چگالی کل را در پایه‌های هامیلتونی سیستم بسط می‌دهیم. حال با استفاده از این ماتریس آنتروپی کل و همچنین با استفاده از ردهای جزئی ماتریس چگالی کل، آنتروپی‌های جزئی زیرسیستم‌ها را بدست می‌آوریم.

۴ - ۵ - ۳ - ۱ - آنتروپی توأم $S(AB)$ و آنتروپی‌های جزئی $S(A)$ و $S(B)$:

ماتریس چگالی توأم (رابطه (۴-۴۳)) در پایه‌های هامیلتونی، برای سیستم مدل XXX عبارت است از:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{\left(e^{-\beta J \left(\frac{B+1}{J+2} \right)} + e^{-\frac{\beta J}{2}} + e^{\frac{3\beta J}{2}} + e^{-\beta J \left(\frac{B+1}{J+2} \right)} \right)} \begin{pmatrix} e^{-\beta J \left(\frac{B+1}{J+2} \right)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\beta J}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{3\beta J}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\beta J \left(\frac{B+1}{J+2} \right)} \end{pmatrix}$$

(۵۶-۴)

آنتروپی توأم برای این ماتریس عبارت است از:

$$S(\rho_{AB}) = -Tr \rho_{AB} \log \rho_{AB} \quad (57-4)$$

آنتروپی جزئی زیرسیستم‌های A و B با استفاده از رد ماتریس چگالی توأم بیان شده در رابطه (4-43) عبارتند از:

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB}) = \frac{1}{e^{-\beta J \left(\frac{B+1}{J+2}\right)} + e^{-\frac{\beta J}{2}} + e^{-\beta J \left(\frac{B+1}{J+2}\right)} + e^{\frac{3\beta J}{2}}} \times \begin{pmatrix} e^{-\beta J \left(\frac{B+1}{J+2}\right)} + \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{\beta J}{2}} + e^{\frac{3\beta J}{2}} \right) & 0 \\ 0 & e^{-\beta J \left(\frac{B+1}{J+2}\right)} + \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{\beta J}{2}} + e^{\frac{3\beta J}{2}} \right) \end{pmatrix} \quad (58-4)$$

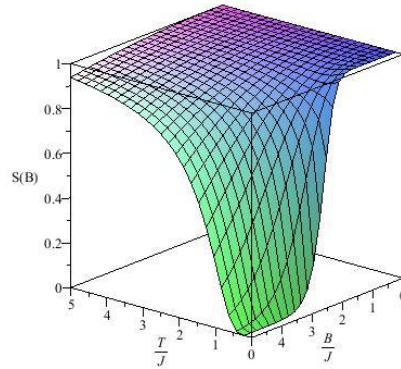
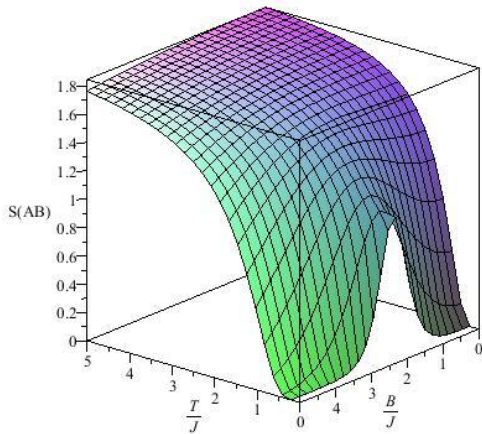
$$Tr_B(\rho_{AB}) = Tr_A(\rho_{AB}) \Rightarrow \rho_A = \rho_B$$

$$S(\rho_{A(B)}) = -Tr \rho_{A(B)} \log(\rho_{A(B)}) \quad (59-4)$$

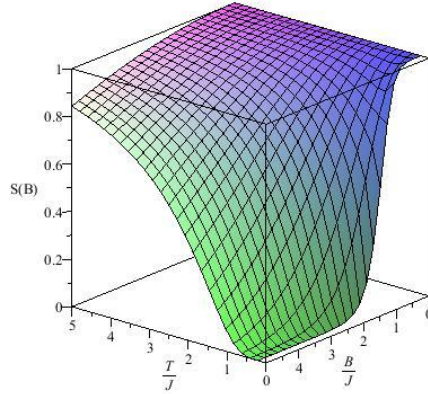
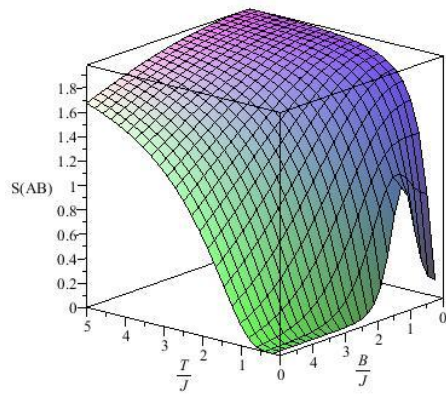
نمودار مربوط به آنتروپی توأم و آنتروپی جزئی زیر سیستم‌های A , B مربوط به سیستم مدل XXX در شکل (4-9) نشان داده شده است.

همان‌طور که از شکل پیداست، دامنه تغییرات آنتروپی کل سیستم، از صفر (مربوط به حالت‌های ماکزیمم درهم‌تنیده) تا 2 (مربوط به حالت‌های کاملاً جداپذیر) می‌باشد و دامنه تغییرات آنتروپی زیر-سیستم‌ها، از صفر تا 1 می‌باشد.

بطور مشابه برای سیستم اسپینی مدل XX می‌توانیم دامنه آنتروپی‌های نیومن را با استفاده از نرم-افزار *Maple* بدست آوریم. با استفاده از روابط آنتروپی کوانتومی فون نیومن، نمودار مربوط به آنتروپی‌های مختلف این مدل را در شکل (4-10) نشان داده‌ایم.



شکل (۹-۴) نمودار آنتروپی توأم AB (معادله ۴-۵۶) و آنتروپی زیرسیستم B (معادله ۴-۵۸) مربوط به سیستم مدل XXX .



شکل (۱۰-۴) نمودار مربوط به آنتروپی توأم و آنتروپی جزئی زیرسیستم یک سیستم مدل XX .

همانند نمودارهای بیان شده در مدل XXX ، دامنه تغییرات آنتروپی توأم و آنتروپی جزئی زیر-

سیستم‌ها، متناسب با گفته‌هایمان در فصل‌های قبلی است.

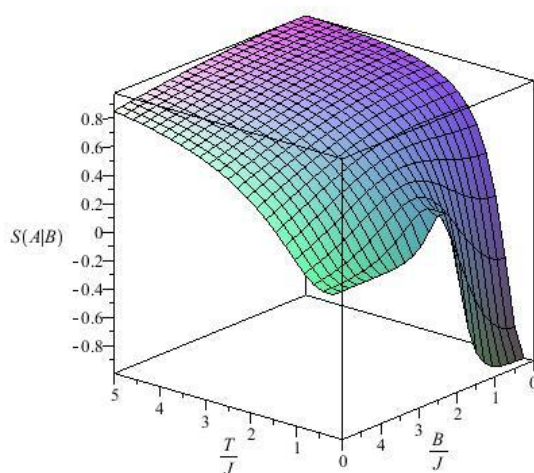
۴ - ۵ - ۳ - ۲ - آنروپی جزئی مشروط

برای بررسی آنروپی‌های مشروط یک سیستم توأم داریم:

$$S(\rho_A | \rho_B) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) \quad (۴-۶۰)$$

برای سیستم مدل XXX طبق روابط ((۴-۵۶) تا ((۴-۵۹))، نمودار این کمیت در شکل (۴-۱۱) نشان

داده شده است.

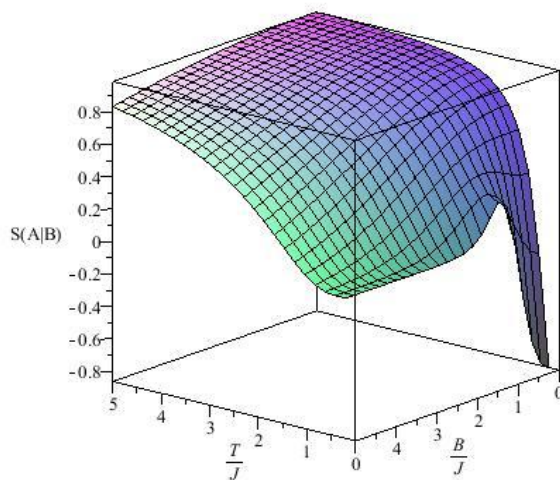


شکل (۴-۱۱) نمودار آنروپی جزئی مشروط نیومن (معادله (۴-۶۰)) مربوط به سیستم اسپینی مدل XXX با ماتریس چگالی کل بیان شده در رابطه (۴-۴۳).

همان طور که از شکل پیداست، آنروپی جزئی مشروط در یک سیستم کوانتومی مقادیر منفی را هم در بر می‌گیرد که با توجه به فصل اول، که در مورد سیستم‌های کلاسیکی با استفاده از روابط آنروپی شانون، بحث کردیم، این کمیت فیزیکی در حوضه فیزیک کلاسیکی، فقط مقادیر مثبت را شامل می‌شود. در این جا، بار دیگر مرز بین فیزیک کلاسیکی و جهان کوانتومی مشخص می‌شود.

مقادیر منفی این کمیت، حضور درهم‌تنیدگی را نشان می‌دهد و $S(\rho_A | \rho_B) = -1$ یعنی سیستم ما در دماهای بسیار پایین در حالت ماکزیمم درهم‌تنیدگی قرار دارد، مشابه هم‌رسی سیستم که در دماهای پایین به بیشینه مقدار خود می‌رسد و بیانگر بیشینه درهم‌تنیدگی سیستم می‌باشد. اما اگر $S(A) = S(B) = 0$ ، یعنی حالت زیرسیستم‌ها، حالت خالص باشد، آنگاه آنتروپی مشروط ما منفی نمی‌شود، و این عدم حضور درهم‌تنیدگی را نشان می‌دهد، یعنی سیستم کل ما در حالت خالص کاملاً جداپذیر است مانند حالت کلی $|0^A 0^B\rangle = |0^A\rangle \otimes |0^B\rangle$.

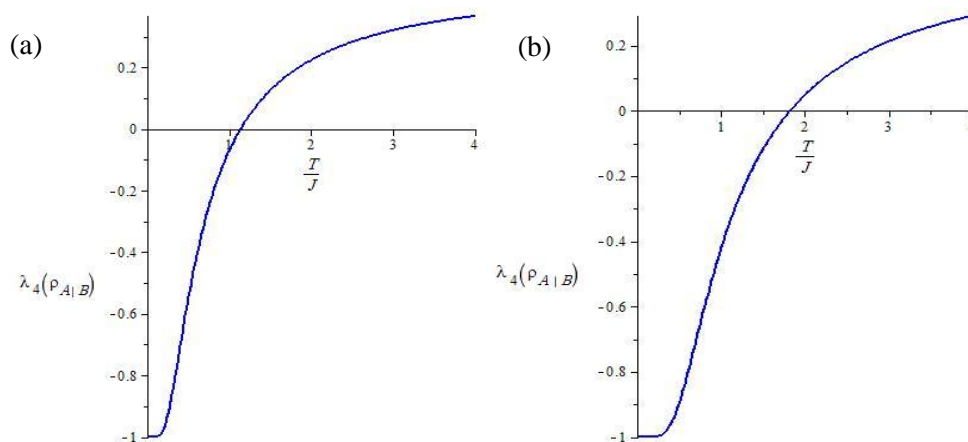
برای مدل XX نمودار آنتروپی جزئی مشروط فون نیومن در شکل (۴-۱۲) نشان داده شده است. همان طور که از شکل پیداست، دامنه تغییرات این کمیت مشابه مدل قبل می‌باشد یعنی شامل مقادیر منفی هم می‌باشد که نمایان‌گر حضور درهم‌تنیدگی در این مدل اسپینی می‌باشد.



شکل (۴-۱۲) نمودار آنتروپی جزئی مشروط برای سیستم اسپینی مدل XX با ماتریس چگالی معرفی شده در معادله (۴-۴۵).

برای مدل XXZ هم نتایج مشابه‌ای بدست خواهیم آورد.

دمای بحرانی یا دمایی که گذار فاز از حالت درهم‌تیده به جداپذیر اتفاق می‌افتد در ماتریس چگالی مشروط برای مدل XX با استفاده از رابطه (۲-۳۸) بدست می‌آید. یعنی ابتدا ماتریس چگالی مشروط را برای این مدل با استفاده از رابطه (۲-۳۸) بدست می‌آوریم سپس ترانهاد جزئی را روی این ماتریس اعمال می‌کنیم. با بدست آوردن ویژه‌مقادیر ماتریس حاصل و رسم نمودار برای ویژه‌مقداری که شامل مقادیر منفی هم می‌شود (شکل (۴-۱۳).a) می‌توانیم دمای بحرانی را برای این سیستم بدست آوریم که همان مقدار $T/J = 1.135$ می‌باشد. این همان دمایی است که در مورد همرسی (شکل (۴-۶)) بدست آوردیم.

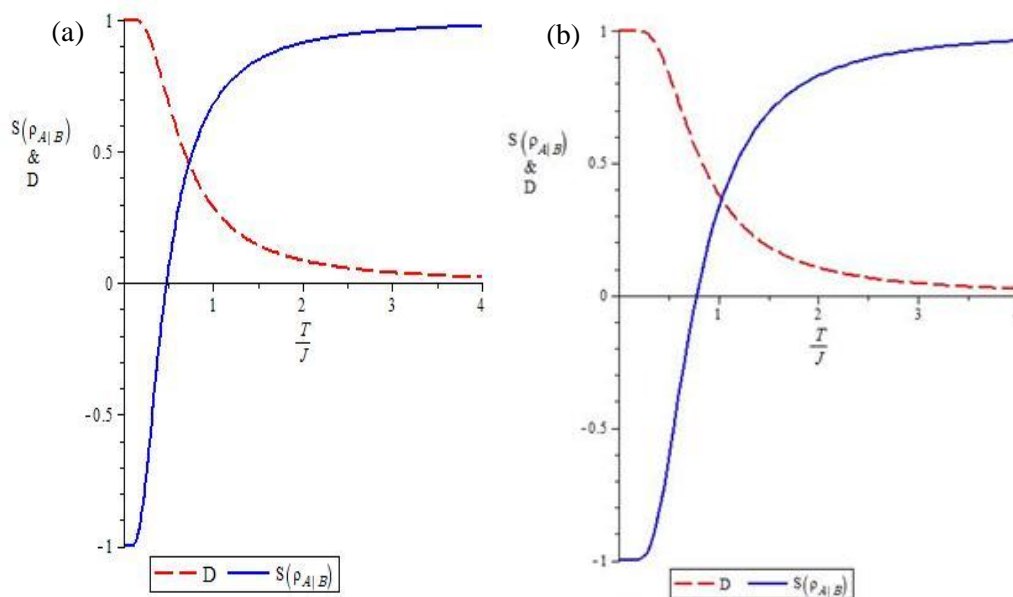


شکل (۴-۱۳) نمودار ویژه مقدار چهارم λ_4 ماتریس چگالی مشروط بیان شده در رابطه (۲-۳۸) سیستم‌های: (a) مدل XX و (b) XXX .

برای سیستم اسپینی مدل XXX به همین طریق عمل می‌کنیم و نتیجه‌ای که از محاسباتمان در این مورد می‌گیریم (شکل (۴-۱۳).b) با نتایجی که در مورد همرسی گرفتیم یکسان است یعنی دمایی که در آن با مقادیر منفی مواجه می‌شویم عبارت است از $T_c/J = 1.82$ که همان مقدار دمایی است که در رابطه (۴-۵۳) بدست آوردیم.

در نتیجه با استفاده از ویژه مقادیر ماتریس چگالی جزئی مشروط سیستم‌های اسپین - ۱/۲ مدل هایزبرگی می‌توانیم دمای بحرانی درهم‌تنیدگی این سیستم‌ها را بدست آوریم. همانگونه که با استفاده از ویژه مقادیر ماتریس چگالی توأم و ماتریس بیان شده در رابطه (۴-۱۳) قادر به انجام این کار هستیم.

در این فصل در مورد ناسازگاری کوانتومی و ظرفیت گرمایی برای سیستم‌های مدل هایزبرگی بحث کردیم و در انتها رفتار آنتروپی جزئی مشروط نیومن را برای این سیستم‌ها توضیح دادیم. اکنون فرصت خوبی است تا رابطه بین آنتروپی جزئی مشروط نیومن و ناسازگاری کوانتومی با استفاده از شکل (۴-۱۴) و همچنین رابطه آن با ظرفیت گرمایی را برای اینگونه سیستم‌ها بیان کنیم.



شکل (۴-۱۴) مقایسه نمودار آنتروپی جزئی مشروط کوانتومی و ناسازگاری کوانتومی برای سیستم‌های اسپینی (a) مدل XX و (b) مدل XXX با $B/J = 0$.

همان طور که از شکل پیداست سیستم‌ها در دماهای پایین دارای یک حالت درهم‌تنیده ($|\varphi_3\rangle$) یا ($|\varphi_4\rangle$) بیان شده در رابطه (۴-۳۷) می‌باشند که متناسب با افزایش ناسازگاری تا بیشینه مقدار آن ($D = 1$) و کاهش آنتروپی مشروط کوانتومی تا کمینه مقدار آن ($S(p_{A|B}) = -1$) می‌باشد. در دماهای بالا سیستم

ها دارای یک حالت جداپذیر ($|\varphi_1\rangle$ یا $|\varphi_2\rangle$) بیان شده در رابطه (۴-۳۷) می‌باشند که متناسب با کاهش ناسازگاری ($D \rightarrow 0$) و افزایش آنتروپی مشروط کوانتومی ($S(\rho_{A|B}) \rightarrow 1$) می‌باشد.

بنابراین در اینجا با کاهش آنتروپی مشروط کوانتومی، ناسازگاری افزایش و با افزایش آنتروپی مشروط کوانتومی، ناسازگاری کاهش می‌یابد یعنی عکس هم رفتار می‌کنند.

صفر نشدن ناسازگاری کوانتومی در دماهای بالا معادل با یک نشدن آنتروپی مشروط کوانتومی در دماهای بالا است (در دماهای بالا آنتروپی مشروط کوانتومی به یک میل می‌کند). در دماهای خیلی بالا $T/J \gg 1$ سیستم هایمان به سیستم‌های کاملاً جداپذیر تبدیل می‌شوند و آنتروپی مشروط کوانتومی به مقدار یک و ناسازگاری کوانتومی به مقدار صفر میل خواهند کرد ولی هرگز به این مقادیر نمی‌رسند و این تفاوت بین حالت‌های کلاسیکی و کوانتومی را کاملاً مشخص می‌کند.

اکنون با توجه به شکل‌های (۴-۸) و (۴-۱۱) می‌توان رابطه بین آنتروپی مشروط کوانتومی و ظرفیت گرمایی را برای سیستم مدل XXX بیان کرد. همان طور که از شکل (۴-۸) پیداست ظرفیت گرمایی با افزایش دما زیاد و با کاهش دما کم می‌شود (دقت کنید که شکل (۴-۸) تغییرات ظرفیت گرمایی سیستم برحسب معکوس دما است). به همین نحو آنتروپی مشروط کوانتومی (شکل (۴-۱۱)) با افزایش دما زیاد و با کاهش دما کم می‌شود. برای سیستم مدل XX و XXZ هم رفتارهای مشابه‌ای را مشاهده خواهیم کرد.

بنابراین می‌توانیم رفتار ظرفیت گرمایی را با استفاده از آنتروپی مشروط کوانتومی برای این نوع سیستم‌ها مورد بررسی قرار داد.

۴ - ۶ - نتیجه گیری

نتیجه‌ای که در فصل قبل، در مورد رابطه بین آنتروپی کوانتومی و درهم‌تنیدگی، در سیستم‌های کوانتومی دوقسمتی گرفتیم، در اینجا هم صادق بود، یعنی آنتروپی جزئی مشروط یک سیستم دوقسمتی مثبت است اگر درهم‌تنیدگی بین زیرسیستم‌ها وجود نداشته باشد و زیرسیستم‌ها با یکدیگر همبستگی کلاسیکی داشته باشند. این کمیت صفر است اگر دو زیرسیستم بیشترین همبستگی کلاسیکی را با هم داشته باشند و منفی است هنگامی که دو زیرسیستم با یکدیگر همبستگی کوانتومی داشته باشند یا به عبارت دیگر درهم‌تنیده باشند.

در این فصل با استفاده از محاسبات انجام شده در مورد آنتروپی‌های توأم، آنتروپی‌های جزئی، و آنتروپی‌های جزئی مشروط برای سیستم‌های اسپین- $1/2$ مدل هایزنبرگ، نتیجه می‌گیریم که آنتروپی جزئی مشروط برای اینگونه سیستم‌ها با تغییرات دما متناسب است.

همچنین نتیجه دیگری که در این فصل گرفتیم این است که با استفاده از هم‌رسی، ناسازگاری کوانتومی و ظرفیت گرمایی، می‌توانیم درهم‌تنیدگی سیستم‌های اسپین- $1/2$ مدل هایزنبرگ را بررسی کنیم. با توجه به رفتارهای آنتروپی جزئی مشروط کوانتومی برحسب دما، نتیجه می‌گیریم که این کمیت در سیستم‌های کوانتومی که در تعادل گرمایی قرار دارند، با کاهش دما مقادیر منفی را هم در بر می‌گیرد که این خصوصیت در مورد سیستم‌های کلاسیکی صادق نمی‌باشد، بنابراین آنتروپی جزئی مشروط کوانتومی معیاری از وجود درهم‌تنیدگی در سیستم‌های اسپینی در تعادل گرمایی می‌باشد.

با بررسی ماتریس چگالی مشروط کوانتومی در این فصل و رفتار ویژه مقادیر آن در دماهای مختلف، نتیجه می‌گیریم که با استفاده از ویژه مقادیر این عملگر دمای بحرانی را برای سیستم‌های کوانتومی بیان

شده بدست آوریم. در انتها با استفاده از شکل (۴-۱۴) نشان دادیم که رفتار ناسازگاری کوانتومی در دماهای مختلف و همچنین ظرفیت گرمایی را در اینگونه سیستم‌ها می‌توان از روی تغییرات آنتروپی مشروط کوانتومی برحسب دما، مورد بررسی قرار داد.

نتیجه دیگری که از مطالب این فصل می‌گیریم این است که آنتروپی مشروط کوانتومی در دماهای خیلی بالا به مقدار دقیقا یک نخواهد رسید ولی در فصلهای گذشته در مورد آنتروپی مشروط کلاسیکی بیان داشتیم که این کمیت در یک سیستم دو قسمتی می‌تواند بیشینه مقدار خود یعنی یک را داشته باشد اما آنتروپی مشروط کوانتومی در سیستم‌های مدل هایزنبرگ که در تعادل گرمایی قرار دارند به این مقدار میل می‌کند. و این تفاوت بین حالت‌های کوانتومی و کلاسیکی را در این سیستم‌ها بیان می‌دارد.

پیشنهادات

با توجه گفته‌های این متن و نتایج بدست آمده در مورد هم‌رسی، ناسازگاری، ظرفیت گرمایی و آنتروپی‌های کوانتومی نیومن اعم از توأم و جزئی برای سیستم‌های اسپین - ۱/۲ مدل هایزنبرگی، می‌توان ظهور حالت‌های درهم‌تنیده، همدوسی و ناهمدوسی را برای هر سیستم اسپینی کوانتومی، مورد مطالعه قرار داد. مانند زنجیره اسپینی هسته‌های دو قطبی جفت شده در شرایط تعادل گرمایی.

در مورد این دسته از سیستم‌های کوانتومی، درهم‌تنیدگی با استفاده از یک میدان مغناطیسی خارجی پایین که انرژی برهم‌کنش زمین هم مرتبه یا کمتر از انرژی برهم‌کنش بین دو قطبی‌ها می‌باشد رؤیت می‌شود. همچنین می‌توان با تغییر فرم جمله میدان مغناطیسی در سیستم‌های مدل هایزنبرگی، هامیلتونی‌های جدیدی ایجاد کرد و عبارات بالا را برای بررسی رفتار کوانتومی اینگونه از سیستم‌ها محاسبه کرد. مانند سیستم زنجیره اسپینی مدل XXZ با برهم‌کنش دیالوشینسکی - موریای (DM) در راستای محور - z (D_z).

پیوست‌ها

پیوست ۱

• اثبات رابطه (۲-۳۹):

از آنجایی که $\rho_{A(B)}$ و ρ_{AB} برای حالت‌های بل جابجا پذیرند داریم:

$$S(\rho_{A|B}) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$$

$$\rho_{A(B)} = \text{Tr}_{B(A)}[\rho_{AB}]$$

$$\begin{aligned} S(\rho_{A|B}) &= -\text{Tr}_{AB}[\rho_{AB} \log_2 \rho_{AB}] + \text{Tr}_B[\rho_B \log_2 \rho_B] \\ &= -\text{Tr}_{AB}[\rho_{AB} \log_2 \rho_{AB}] + \text{Tr}_{AB}[\rho_{AB} \log_2 \rho_B] \\ &= -\text{Tr}_{AB}\left[\rho_{AB} \log_2 \frac{\rho_{AB}}{(1_A \otimes \rho_B)}\right] = -\text{Tr}_{AB}[\rho_{AB} \log_2 \rho_{A|B}] \end{aligned} \quad (1)$$

• اثبات رابطه (۲-۵۲):

اگر حالت $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ را آمیخته در نظر بگیریم یعنی قبل از اندازه‌گیری مقدار احتمالات

$|\alpha|^2$ و $|\beta|^2$ معلوم باشد بنابراین حالت $|\psi\rangle$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$|\psi\rangle = \begin{cases} |0\rangle & |\alpha|^2 \\ |1\rangle & |\beta|^2 \end{cases} \quad (2)$$

که هر یک از ویژه حالات $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را می‌توانیم به صورت زیر بسط دهیم:

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \quad \text{و} \quad |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \quad (3)$$

بر اساس این دوران داریم:

$$|\psi\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) & |\alpha|^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) & |\beta|^2 \end{cases} \quad (4)$$

با اعمال عملگر σ_x روی حالت بالا هر یک از ویژه‌حالت‌های $|+\rangle$ و $|-\rangle$ را احتمال $\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{\sqrt{2}}$ بدست می‌-

آوریم. و با استفاده از شرط بهنجارش

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (5)$$

بنابراین هر یک از ویژه‌حالات $|+\rangle$ و $|-\rangle$ با احتمال $1/2$ بدست می‌آید و رابطه (۲-۵۲) برقرار می‌شود.

• توضیحات بیشتر در مورد پاراگراف آخر بخش ۳-۳ :-

$$\rho_{mixed} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\rho_{pure} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00|) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\sigma_z^A \sigma_z^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\sigma_x^A \sigma_x^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

برای حالت آمیخته داریم:

$$\langle \sigma_z^A \sigma_z^B \rangle = Tr \left[\rho_{mixed} \cdot (\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B) \right] = Tr \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1 \quad (10)$$

$$\langle \sigma_x^A \sigma_x^B \rangle = Tr \left[\rho_{mixed} \cdot (\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B) \right] = Tr \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad (11)$$

و برای حالت خالص داریم:

$$\langle \sigma_z^A \sigma_z^B \rangle = Tr \left[\rho_{pure} \cdot (\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B) \right] = Tr \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1 \quad (12)$$

$$\langle \sigma_x^A \sigma_x^B \rangle = Tr \left[\rho_{pure} \cdot (\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B) \right] = Tr \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1 \quad (13)$$

که صحت گفته‌هایمان را در این بخش اثبات می‌کند.

پیوست ۲

• برخی از رابطه های بدست آمده از فصل ۴ با استفاده از نرم افزار *Maple*

رابطه آنالیز مشروط کوانتومی برای مدل های (a) *XXX* و (b) *XX*

مراجع

- [1] Nicolas J. Cerf, “Information theory of quantum entanglement and measurement”, *Physica D. Elsevier*. 120 (1998) 62-81.
- [2] David McMahon, “Quantum Computing Explained”, Wiley – Interscience, 2008 .
- [3] Stephen M. Barnett, “Quantum information”, Oxford university press 2009.
- [4] Gregg Jaeger , “Entanglement, information, and the interpretation of quantum mechanics”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009.
- [5] Furman, G.B., Meerovich, V.M. Sokolofsky, V.L., “Entanglement in dipolar coupling spin system in equilibrium state”, *Quantum Inf Process*, 11-1603 (2012).
- [6] Furman, G.B., Meerovich, V.M., Sokolovsky, V.L., “Entanglement of dipolar coupling spins”. *Quantum Inf. Process*. 10, 307 (2011)
- [7] N. J. Cerf, C. Adami, “Negative entropy and information in quantum mechanics” , *Phys. Rev. A* 55 (1997) 3371-3374.
- [8] Mark M. Wilde, “From Classical to Quantum Shannon Theory”, McGill University, H3A 2A7 Canada, 2012.
- [9] Michal Horodecki, Jonathan Oppenheim, Andreas Winter, “Quantum information can be negative”, arXiv:0505062v1 [quant-ph] 9May 2005.
- [10] Ingemar. Bengtsson, Karol. Zyczkowski, “Geometry of quantum states an introduction to quantum entanglement”, Cambridge University Press, 2006.

- [11] Gottfried & Yan, “Mixed states and entangled states”, Chapter 1, 2.1, 2.2.
- [12] John .Preskill, “Quantum information and computation”, California Institute of Technology, September, 1998.
- [13] Wang Qiong, Liao Jie-Qiao, Zeng Hao-Sheng, “Quantum thermal discord in a two-spin-1/2 XXZ model”, Chin. Phys. B Vol. 19, No. 10 (2010) 100311.
- [14] Gregg Jaeger, “Quantum information an overview”, Library of Congress, 2006.
- [15] R. K. Pthria, “Statistical mechanics”, Second edition, 1996.
- [16] C. J. Shan, W. W. Cheng, T. K. Liu, Y. X. Huang, and H. Li, “The entanglement in one-dimensional random XY spin chain with Dzyaloshinskii - Moriya interaction”, Chines. Phys. Letter, 2008.
- [17] J. Hruby, “A role of antiquantum bits for superdense coding and quantum computing”, Union of Czech Mathematicians and Physicists , P.O.B.21 OST, 170 34 PRAHA 7, Czech Republic, 1997.
- [18] John. Cardy, “Measuring Quantum Entanglement”, Max Born Lecture, University of Göttingen, December 2012.
- [19] R.F. Werner, “Quantum Information Theory - an Invitation”, October 30, 2000.
- [20] N. J. Cerf, C. Adami, “Negative entropy and information in quantum information theory”, Phys. Rev. Lett. 79 (1997) 5194-5197.
- [21] Timothy C. Ralph, Tony G. Downes, “Relativistic quantum information and time machines”, Contemporary Physics-CONTEM PHYS, vol. 53, 2012.
- [22] L.C. Kwek, Y. Takahashi, K.W. Choo, “Spin chain under next nearest neighbor interaction”,IOP (Statistical-Mechanical Informatics), 2008.
- [23] G. B. Furman, V. M. Meerovich, V. L. Sokolovsky, “Quantum entanglement at negative temperature”, J. Phys. A: Math. Theor ,2013.

[24] M. Tursun , A. Abliz, “Various Correlations in Anisotropic Heisenberg XYZ Model with Dzyaloshinskii-Moriya Interaction”, arXiv:1207.0277v4 [quant-ph].

Abstract

In information theory, amount of our information about a physical system is named information and theoretical scientists used concept of entropy for quantified it. Information can be classical or quantum.

Classical information quantified by Shannon and quantum information quantified by Neumann. Here we consider a bipartite system that its subsystems correlated together. Amount of required information for send total state of system to one of subsystems is named conditional information.

Difference between classical systems and quantum systems is specified at kind of correlation between their subsystems. Subsystems of a quantum system can have a kind of correlation that is classically forbidden. This correlation is named entanglement.

Unlike in classical information theory, quantum conditional entropy can be negative when considering quantum entangled systems.

Here we introduce a quantum information theory that allows us for a consistent description of entanglement. Also we present that entanglement of quantum systems can be successfully described by negative quantum conditional entropies.

Thereby we can verify the entanglement of a quantum system by quantum conditional entropy and quantum conditional density matrix.

Key words: entropy, entanglement, conditional entropy.



Shahrood University of Technology

Faculty of physics

Master of Science Thesis

Negative partial information in quantum theory

Hamid Gyah

Supervisor :

Dr. H. Movahhedian

February - 2014