

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک هسته‌ای

مطالعه و بررسی واپاشی دو بتایی در هسته‌های

$^{76}\text{Ge}$  و  $^{48}\text{Ca}$  از طریق فرآیند  $2\nu\beta\beta$

دانشجو:

فاطمه رنجبر

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا شجاعی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ماه ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد فاطمه رنجبر

تحت عنوان : مطالعه و بررسی واپاشی دو بتایی در هسته های  $^{76}\text{Ge}$  و  $^{48}\text{Ca}$  از طریق فرآیند  $2\nu\beta\beta$

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد  
مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی
			نام و نام خانوادگی:

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

الحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتدي لولا ان هدانا الله

ضمن حمد و سپاس از استعانت و الطاف کریمانه حضرت حق (جلّ و علی)، بر خود فرض می دانم به مصداق حدیث شریف «من لم یسکر المخلوق لم یسکر الخالق»، تقدیر و تشکر خود را به عزیزانی که در این مهم مشوق و یاریگر اینجانب بودند ابراز نمایم.

استاد کرامت‌دور جناب آقای دکتر محمد رضا شجاعی که راه‌پیمایی روشنگرانه و بی دریغ ایشان راه را بر من هموار نمود؛ همچنین خانواده عزیزم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمودند تا با حمایت‌های همه‌جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه درسی را به اتمام برسانم و نیز از کلیه مسئولین و اساتید محترم و معزوم دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود که به نوعی با اینجانب همکاری داشتند، صمیمانه و خالصانه سپاسگذاری می‌نمایم.

فاطمه ربخبر

بهمن ماه ۱۳۹۲

## تعهد نامه

اینجانب **فاطمه رنجبر** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد، رشته فیزیک هسته ای دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده‌ی پایان نامه **"مطالعه و بررسی واپاشی دو بتایی در هسته های  $^{48}\text{Ca}$  و  $^{76}\text{Ge}$  از طریق فرآیند  $2\nu\beta\beta$ "** تحت راهنمایی دکتر محمدرضا شجاعی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

امضای دانشجو

تاریخ

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

واپاشی دو بتایی یک گذار نادر بین دو هسته با عدد جرمی یکسان است که در این گذار بار هسته ای به اندازه دو واحد تغییر می کند. این گذار زمانی اتفاق می افتد که واپاشی تک بتایی از نظر پایستگی انرژی یا عدم تطابق اندازه حرکت زاویه ای ممنوع باشد. واپاشی دو بتایی دارای دو مد متفاوت است. یکی از این مدها شامل گسیل دو آنتی نوترینو و دو الکترون است ( $2\nu\beta\beta$ ) که به صورت یک برهم کنش ضعیف مرتبه دوم در مدل استاندارد اتفاق می افتد و مستقل از جرم نوترینو است. در مد دیگر هیچ نوترینوای گسیل نمی شود و تنها دو الکترون گسیل می شود ( $0\nu\beta\beta$ )، که این واپاشی پایستگی عدد لپتونی را نقض می کند و به نوترینو با جرم غیر صفر نیاز دارد.

در این پایان نامه ابتدا واپاشی تک بتایی و ویژگی های آن را بررسی کردیم و سپس به بحث در مورد واپاشی دو بتایی و روش های محاسبه نیمه عمر و عنصر ماتریس هسته ای این گذار پرداختیم. در نهایت با استفاده از حل معادله شرودینگر و به دست آوردن توابع موج هسته ای اولیه و نهایی، نیمه عمر واپاشی  $2\nu\beta\beta$  هسته های  $^{48}\text{Ca}$  و  $^{76}\text{Ge}$  را محاسبه نمودیم، که نتایج به دست آمده هم خوانی خوبی با داده های تجربی و محاسبات انجام شده در این زمینه دارد.

## مقالات مستخرج از پایان نامه

- ۱- "محاسبه نیمه عمر واپاشی بتا در هسته  $^{48}\text{Ca}$ " فاطمه رنجبر، محمد رضا شجاعی، بیستمین کنفرانس بهاره فیزیک، ۱ و ۲ خرداد ماه ۱۳۹۲، پژوهشگاه دانش های بنیادی، تهران.
- ۲- "مطالعه و بررسی نقش نوترینوهای ماژورانا در واپاشی دوتایی" فاطمه رنجبر، محمد رضا شجاعی، چهارمین کنفرانس فیزیک ذرات و میدانها، ۲ و ۳ بهمن ماه ۱۳۹۲، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز.
- ۳- "محاسبه نیمه عمر واپاشی دوتایی با گسیل دو نوترینو در هسته  $^{48}\text{Ca}$ " فاطمه رنجبر، محمد رضا شجاعی، بیستمین کنفرانس هسته ای ایران، ۷ و ۸ اسفند ماه ۱۳۹۲، دانشگاه گیلان، رشت.



## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
ک.....	فهرست اشکال
م.....	فهرست جداول
۱.....	<b>فصل اول: واپاشی های رادیو اکتیو</b>
۲.....	۱-۱ مقدمه
۲.....	۲-۱ قانون واپاشی رادیو اکتیو
۶.....	۳-۱ انواع واپاشی ها و نسبت انشعاب
۷.....	۴-۱ عنصر ماتریسی گذار
۹.....	۵-۱ احتمال گذار در نظریه اختلال وابسته به زمان
۱۳.....	<b>فصل دوم: برهم کنشهای ضعیف و واپاشی بتا</b>
۱۴.....	۱-۲ برهم کنشهای ضعیف و انواع آن
۱۹.....	۲-۲ ناپایستگی پاریته در برهم کنشهای ضعیف
۲۵.....	۳-۲ عملگرهای فرمی و گاموف - تلر
۲۷.....	۴-۲ واپاشی بتا
۲۸.....	۱-۴-۲ محاسبه مقدار $Q$ واپاشی $\beta$
۳۰.....	۲-۴-۲ آهنگ گذار واپاشی $\beta$
۳۱.....	۳-۴-۲ عناصر ماتریس گذار هسته ای
۳۳.....	۴-۴-۲ چگالی حالت های نهایی
۳۶.....	۵-۴-۲ اندازه گیری جرم نوترینو
۳۸.....	۶-۴-۲ احتمال گذار کل
۴۱.....	۷-۴-۲ واپاشی مجاز $\beta$
۴۳.....	۸-۴-۲ واپاشی ابر مجاز $\beta$
۴۴.....	۹-۴-۲ واپاشی ممنوع $\beta$
۴۶.....	۱۰-۴-۲ واکنش تبادل بار

۴۹.....	<b>فصل سوم: واپاشی دو بتایی</b>
۵۰.....	۱-۳ مقدمه
۵۵.....	۲-۳ آهنگ واپاشی $2\nu\beta\beta$
۵۵.....	۱-۲-۳ بر هم کنش ضعیف باردار مؤثر
۵۷.....	۲-۲-۳ فرمول بندی آهنگ واپاشی مد $2\nu\beta\beta$
۶۲.....	۳-۳ مدل‌های ساختار هسته ای مورد استفاده در محاسبات واپاشی $2\nu\beta\beta$
۶۲.....	۱-۳-۳ همبستگی های حالت پایه
۶۸.....	۲-۳-۳ مدل پوسته ای
۷۴.....	۳-۳-۳ مدل شبه ذره ای
۷۶.....	۴-۳-۳ تقریب فاز تصادفی برای شبه ذره ( QRPA )
۸۵.....	<b>فصل چهارم: واپاشی <math>2\nu\beta\beta</math> در هسته های <math>^{76}\text{Ge}</math> و <math>^{48}\text{Ca}</math></b>
۸۶.....	۱-۴ واپاشی $2\nu\beta\beta$ در هسته $^{48}\text{Ca}$
۸۶.....	۱-۱-۴ مقدمه
۸۸.....	۲-۱-۴ محاسبه توابع موج با پتانسیل Woods-Saxon
۹۵.....	۳-۱-۴ محاسبه توابع موج با پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده
۹۸.....	۳-۱-۴ محاسبه نیمه عمر واپاشی
۱۰۰.....	۲-۴ واپاشی $2\nu\beta\beta$ در هسته $^{76}\text{Ge}$
۱۰۶.....	پیوست الف : مکانیک کوانتومی ابرتقارن
۱۰۹.....	مراجع

## فهرست اشکال

عنوان	صفحه
شکل ۱-۱ انواع مختلف فرایندهای واپاشی در هسته $^{226}_{89}Ac$ .....	۷
شکل ۱-۲ نمودار واپاشی بتا.....	۱۶
شکل ۲-۲ برهم کنشهای ضعیف جریان خنثی به واسطه مبادله $Z^0$ .....	۱۷
شکل ۳-۲ واپاشی ضعیف کوارک ها.....	۱۸
شکل ۴-۲ نمودار واپاشی $^{60}Co$ به $^{60}Ni$ .....	۲۱
شکل ۵-۲ آزمایش های هسته های قطبیده $^{60}Co$ در آینه های C، P و ترکیب CP.....	۲۵
شکل ۶-۲ نمودار کوری $\{W(p_e)/p_e^2 F(Z, E_e)\}^{1/2}$ بر حسب $E_e$ .....	۳۶
شکل ۷-۲ نمودار کوری نزدیک انرژی نقطه پایان برای واپاشی $\beta^-$ تریتیوم.....	۳۸
شکل ۸-۲ انتگرال فرمی $f(Z, E_0)$ ، انتگرال از تابع فرمی $F(Z, E_e)$ روی انرژی $E_e$ است.....	۳۹
شکل ۹-۲ توزیع تجربی مقادیر $\log ft$ برای انواع مختلف واپاشی های $\beta$ .....	۴۰
شکل ۱-۳ طیف جرمی ایزوبارها با عدد جرمی $A=76$ .....	۵۰
شکل ۲-۳ نمودار فاینمن واپاشی دو بتایی.....	۵۱
شکل ۳-۳ طیف مجموع انرژی دو الکترون گسیل شده برای دو مد واپاشی $0\nu\beta\beta$ و $2\nu\beta\beta$ در هسته $^{76}Ge$ .....	۵۳
شکل ۴-۳ نمودار و تصویر واپاشی $2\nu\beta\beta$ در هسته $^{76}Ge$ .....	۵۸
شکل ۵-۳ پیکربندی حالت‌های پایه $^{76}Ge$ و $^{76}Se$ در ساده ترین مدل پوسته ای.....	۶۳
شکل ۶-۳ مقایسه توزیع نوکلئونها بین مدارهای تک- ذره ای در یک هسته با جفت شدگی و بدون جفت شدگی.....	۶۵
شکل ۷-۳ تابع موج حالت پایه در مدل شبه ذره پروتون - نوترون RPA.....	۶۶
شکل ۸-۳ همبستگی های چارقطبی - چارقطبی (QQ) در تابع موج حالت پایه ..	۶۷
شکل ۹-۳ ترازهای انرژی در مدل پوسته ای.....	۷۰
شکل ۱۰-۳ طرح کلی از پیکربندی نوکلئونها در مدل پوسته ای ساده ..	۷۱
شکل ۱۱-۳ برهم کنش ذره - حفره (ph) بین حالت‌های ذره پروتون - حفره نوترون (یا ذره نوترون - حفره پروتون) و برهم کنش ذره - ذره (pp) بین حالت‌های دو ذره ای یا حالت‌های دو حفره ای.....	۷۸
شکل ۱۲-۳ عنصر ماتریس هسته ای محاسبه شده برای واپاشی $2\nu\beta\beta$ بر حسب تابعی از شدت برهم کنش ذره - ذره.....	۷۹

- شکل ۳-۱۳ یک برانگیختگی فونونی از حالت پایه (حالت تهی QRPA) به یک حالت تک - فونونی در پروتون -  
 نوترون QRPA ..... ۸۰
- شکل ۴-۱ نمودار واپاشی  $2\nu\beta\beta$  هسته  $^{48}\text{Ca}$  ..... ۸۸
- شکل ۴-۲ پتانسیل Woods-Saxon. a "ضخامت پوست" هسته را نشان می دهد، چنان که فاصله ای که در آن  
 پتانسیل از  $0.9V_0$  به  $0.1V_0$  کاهش می یابد برابر  $4a \ln 3$  است. .... ۹۰
- شکل ۴-۳ تابع موج حالت پایه و اولین حالت برانگیخته پتانسیل نوسانی ..... ۹۸
- شکل ۴-۴ تابع موج دومین حالت برانگیخته پتانسیل نوسانی ..... ۹۸
- شکل ۴-۵ نمودار واپاشی دو بتایی  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$  ..... ۱۰۰

## فهرست جداول

عنوان	صفحه
جدول ۱-۲ مقادیر نوعی $\log ft$ برای واپاشی $\beta$ هسته ای. ....	۴۶
جدول ۱-۳ نیمه عمر تجربی واپاشی $2\nu\beta\beta$ به همراه مقادیر $Q$ و $G^{2\nu}$ در این واپاشی در هسته های مختلف. ...	۵۲
جدول ۱-۴ عنصر ماتریسی گاموف - تلر برای واپاشی $2\nu\beta^- \beta^-$ هسته $^{48}\text{Ca}$ به حالت پایه هسته $^{48}\text{Ti}$ محاسبه شده در مدل پوسته ای. ....	۸۷
جدول ۲-۴ نیمه عمر تجربی و تئوری برای واپاشی دو بتایی هسته $^{48}\text{Ca}$ .	۹۹
جدول ۳-۴ نیمه عمر تجربی و تئوری برای واپاشی تک بتایی هسته $^{48}\text{Ca}$ .	۹۹
جدول ۴-۴ عناصر ماتریس گاموف - تلر محاسبه شده با روش QRPA و نیمه عمرهای مربوط به واپاشی $2\nu\beta\beta$ هسته $^{76}\text{Ge}$ به حالت پایه و حاتهای برانگیخته $2_1^+$ ، $0_1^+$ و $2_2^+$ هسته $^{76}\text{Se}$ .	۱۰۱
جدول ۵-۴ مقادیر محاسبه شده و تجربی عناصر ماتریسی گاموف - تلر واپاشی دوبتایی در هسته های مختلف	۱۰۴
جدول ۶-۴ نیمه عمر تجربی و تئوری برای واپاشی دو بتایی هسته $^{76}\text{Ge}$ .	۱۰۵



# فصل ۱

## واپاشی های رادیو اکتیو

## ۱-۱ مقدمه

واپاشی رادیواکتیو کانیهای طبیعی و حاوی اورانیوم و توریم تا حدود زیادی منشأ مطالعات اولیه فیزیک هسته ای بوده است. این واپاشی ها دارای نیمه عمرهایی در حدود عمر زمین اند، که این امر نمایانگر باقی ماندن این مواد از دوران اولیه پیدایش ماده در اثر گردهمایی نوکلئونهاست. هسته هایی با عمر کوتاهتر مدتها قبل واپاشیده و ناپدید شده اند، و امروز ما فقط واپاشی هایی با عمر طولانی را مشاهده می کنیم. علاوه بر رادیواکتیویته طبیعی، هسته های رادیواکتیو را از طریق واکنشهای هسته ای در آزمایشگاه نیز می توانیم تولید کنیم. این عمل اولین بار در سال ۱۹۳۴ توسط ایرن کوری و فردریک ژولیو، با بمباران کردن آلومینیوم به وسیله ذرات آلفای حاصل از واپاشی پولونیوم رادیواکتیو، انجام شد. در این واکنش ایزوتوپ  $^{30}P$  تولید می شود که از طریق گسیل پوزیترون با نیمه عمر ۲/۵ دقیقه واپاشیده خواهد شد.

در این فصل، ابتدا قوانین حاکم بر واپاشی مواد پرتوزا را بررسی خواهیم کرد، در این جا منظور از مواد پرتوزا، موادی است که هسته های آنها در اثر گسیل خود به خود تابش تغییر حالت می دهند. سپس در مورد عنصر ماتریس گذار و محاسبه احتمال گذار در واپاشی ها با استفاده از نظریه اختلال وابسته به زمان بحث می کنیم.

## ۱-۲ قانون واپاشی رادیواکتیو

اگر ما یک نمونه از  $N$  هسته رادیواکتیو داشته باشیم، احتمال آنکه هر یک از آنها در یک زمان معین واپاشی کنند مستقل از وضعیت سایر هسته های موجود در نمونه است. بنابراین تعداد واپاشی که در حال وقوع است متناسب با  $N(t)$ ، یعنی تعداد هسته رادیواکتیو موجود در زمان  $t$ ، است:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t) \quad (1-1)$$



ثابت تناسب  $W$  احتمال گذار یا ثابت واپاشی نامیده می شود و مقدار آن به ماهیت احتمالی که باعث این واپاشی شده است و به خصوصیات حالت های اولیه و نهایی درگیر در واپاشی بستگی دارد. به همین دلیل ثابت واپاشی کمیت مورد علاقه اصلی در بررسی گذارهای هسته ای است. از رابطه (۱-۱) قانون آشنای واپاشی نمایی به دست می آید:

$$N(t) = N_0 e^{-Wt} \quad (۲-۱)$$

که در آن  $N_0$  تعداد هسته های رادیواکتیو در زمان  $t = 0$  است. نیمه عمر  $T_{1/2}$  مدت زمانی است که طول می کشد تا فعالیت یک نمونه به نصف کاهش یابد، همچنین این کمیت متناسب با عکس آهنگ گذار است.:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{W} = \frac{0.693}{W} \quad (۳-۱)$$

طول عمر یا عمر متوسط یک حالت برانگیخته، میانگین مدت زمانی است که لازم است تا یک هسته رادیواکتیو واپاشی کند که از طریق معادله زیر با احتمال گذار و نیمه عمر مرتبط می شود:

$$\bar{T} = \frac{\int_0^{\infty} t e^{-Wt} dt}{\int_0^{\infty} e^{-Wt} dt} = \frac{1}{W} = \frac{T_{1/2}}{0.693} \quad (۴-۱)$$

این سه کمیت یعنی احتمال گذار، نیمه عمر و عمر متوسط راه های متفاوتی برای توصیف یک مشاهده پذیر فیزیکی هستند.

اگر هسته ای در یک حالت برانگیخته باشد باید انرژی اضافی خود را از طریق یک واپاشی از دست بدهد. اما پیش بینی اینکه واپاشی دقیقاً چه زمانی اتفاق می افتد غیر ممکن است در نتیجه ما یک عدم قطعیتی در زمان  $\Delta t = \bar{T}$  داریم که به وجود حالت برانگیخته مربوط می شود. بنابراین نیمه عمر محدود یک حالت به ما اجازه نمی دهد که انرژی اش را با دقت نامحدودی اندازه بگیریم. این نتیجه مستقل از دقت وسایل اندازه گیری است: برای هدف کنونی می توانیم با توجه به عدم قطعیت های شناخته شده دستگاه اندازه گیری که به اندازه کافی کوچک هستند از آنها صرف نظر کنیم.

در مکانیک کوانتومی مقدار انتظاری یک مشاهده پذیر به صورت میانگین تمام مقادیر اندازه گیری شده تعداد زیادی از نمونه های یکسان موجود بیان می شود به عبارت دیگر اگر ما اندازه گیری انرژی را برای یک تعداد زیادی از هسته ها، مثلاً  $N$  هسته، در همان حالت برانگیخته انجام دهیم، مقادیر به دست آمده با همدیگر یکسان نیستند. اگر مقدار اندازه گیری شده برای هسته برانگیخته  $i$ ام برابر  $E_i$  باشد میانگین  $\langle E \rangle$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_i \quad (5-1)$$

ایده پهن شدن مقادیر اندازه گیری شده از طریق ریشه دوم واریانس فراهم می شود:

$$\Gamma = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (E_i^2 - \langle E \rangle^2) \right\}^{1/2} \quad (6-1)$$

طبق اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، حاصلضرب  $\Gamma$  و  $\bar{T}$  تحت بهترین شرایط برابر  $\hbar$  است و یا داریم:

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\bar{T}} = \hbar \mathcal{W} \quad (7-1)$$

کمیت  $\Gamma$  پهنای خط طبیعی یا به اختصار، پهنای یک حالت نامیده می شود. هم چنین رابطه بالا نشان می دهد که احتمال گذار یک حالت با طول عمر و نیمه عمر به طور معکوس متناسب است. چون  $\hbar = 6.6 \times 10^{-22} \text{ MeV-s}$  است، یک حالت با پهنای  $1 \text{ MeV}$  دارای عمر متوسط  $6.6 \times 10^{-22} \text{ s}$  است. همچنین می توان رابطه  $\Gamma$  با احتمال پیدا کردن یک حالت برانگیخته با انرژی مشخص  $E$  را به دست آورد. ثابت واپاشی  $\mathcal{W}$  برحسب توابع موج به صورت زیر تعریف می شود:

$$|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = |\Psi(\mathbf{r}, t=0)|^2 e^{-\mathcal{W}t} \quad (8-1)$$

برای یک حالت مانا، می توان تابع موج مستقل از زمان را به صورت حاصلضرب قسمت مکانی و زمانی نوشت:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-iEt/\hbar} \quad (9-1)$$

با انجام چنین جداسازی هایی روی یک حالت (برانگیخته) که واپاشی میکند، انرژی  $E$  باید به یک کمیت مختلط تبدیل شود یعنی  $\mathcal{W} \rightarrow \langle E \rangle - \frac{1}{2}i\hbar$ . حال تابع موج مستقل از زمان به شکل زیر نوشته می شود، که در این صورت در معادله (۸-۱) نیز صدق می کند.

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-i\langle E \rangle t / \hbar - \mathcal{W} t / 2} \quad (10-1)$$

حال می توان با توجه به اینکه که حالت برانگیخته انرژی معینی ندارد، تابع موج را به صورت یک برهم نهی از حالت هایی که انرژی های مختلفی دارند نوشت:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \int a(E) e^{-iEt/\hbar} dE \quad (11-1)$$

که در آن دامنه احتمال پیدا کردن حالتی با انرژی  $E$  است. با مقایسه این معادله و معادله (۱۰-۱) ما به رابطه ای بین ثابت واپاشی  $\mathcal{W}$  و دامنه احتمال  $a(E)$  می رسیم:

$$e^{-\mathcal{W}t/2} = \int a(E) e^{-i(E-\langle E \rangle)t/\hbar} dE \quad (12-1)$$

که در آن  $e^{-\mathcal{W}t/2}$  تبدیل فوریه  $a(E)$  است. با معکوس کردن معادله بالا نتیجه زیر حاصل می شود:

$$a(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^\infty e^{i\left\{\frac{E-\langle E \rangle}{\hbar} - \frac{1}{2}\mathcal{W}\right\}t} dt = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{(E - \langle E \rangle) + i\frac{1}{2}\hbar\mathcal{W}} \quad (13-1)$$

احتمال پیدا کردن حالت برانگیخته با انرژی  $E$  از مربع قدر مطلق دامنه به دست می آید:

$$|a(E)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(E - \langle E \rangle)^2 + (\frac{1}{2}\hbar\mathcal{W})^2} \quad (14-1)$$

که در آن از معادله (۷-۱) استفاده شده است. شکل چنین توزیعی، لورنتسی است و پهنای  $\Gamma$  میتواند به صورت پهنای کل نصف بیشینه (FWHM) این گونه توزیع ها باشد. از آنجا که مسئله عدم قطعیت وسایل اندازه گیری در اینجا مطرح نشده، پهنای همان "پهنای خط طبیعی" توزیع در انرژی حالت برانگیخته است [۱].

### ۳-۱ انواع واپاشی ها و نسبت انشعاب

سه نوع عمده واپاشی عبارت است از: واپاشی آلفا، بتا و گاما. در فرایندهای واپاشی آلفا و بتا، به ترتیب یک هسته ناپایدار برای رسیدن به هسته پایدارتر یک ذره آلفا (هسته  ${}^4_2\text{He}$ ) و یک ذره بتا ( $e^-$  یا  $e^+$ ) گسیل می کند. در واپاشی گاما، یک حالت برانگیخته بدون هیچگونه تغییر هسته ای به حالت پایه واپاشیده می شود.

بعضی از هسته ها فقط طی یک فرایند واپاشیده می شوند، ولی غالباً نمودار واپاشی بسیار پیچیده و شامل گسیل آلفا، بتا و گاما در مدهایی است که با هم رقابت می کنند. بنابراین یک حالت برانگیخته ممکن است به بیشتر از یک حالت نهایی واپاشی کند. اگر احتمال گذار برای هر حالت نهایی  $W(i)$  باشد، احتمال گذار کل برای حالت اولیه با جمع همه گذارهای ممکن به حالت نهایی برابر است:

$$W = \sum_i W(i) \quad (15-1)$$

به طور مشابه، پهنای کل  $\Gamma$  برابر با جمع همه پهنای جزئی است:

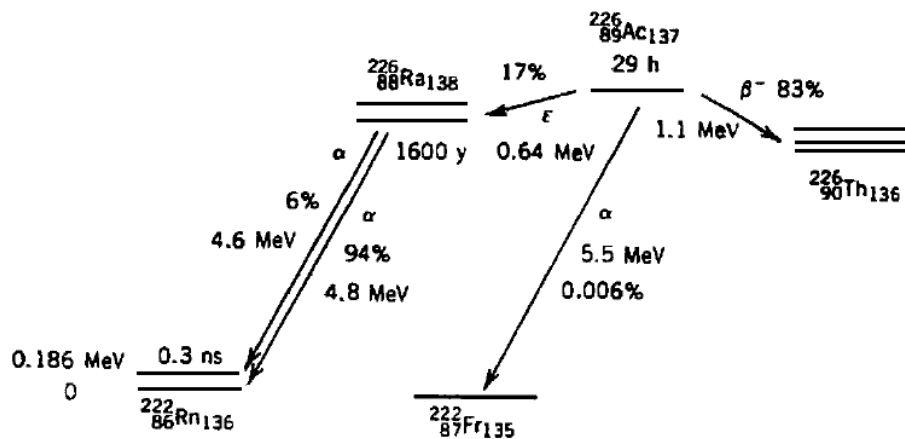
$$\Gamma = \sum_i \Gamma(i) \quad (16-1)$$

با توجه به معادله (۱۵-۱)، رابطه بین نیمه عمر  $T_{1/2}$  و نیمه عمر جزئی  $T_{1/2}(i)$  عبارت است از:

$$\frac{1}{T_{1/2}} = \sum_i \frac{1}{T_{1/2}(i)} \quad (17-1)$$

نسبت انشعاب، احتمال گذار جزئی مربوط به یک حالت نهایی خاص را به صورت کسری از احتمال گذار کل از یک حالت اولیه معین به ما می دهد. برای مثال طول عمر میانگین مزون  $\pi^0$  برابر با  $10^{-17} \times 8/4$  ثانیه است، این مزون  $98/8$  درصد زمان به  $2$  پرتو  $\gamma$ ،  $1/17$  درصد زمان به یک  $\gamma$  و یک جفت الکترون - پوزیترون و  $2 \times 10^{-7}$  زمان به تنها یک جفت الکترون - پوزیترون واپاشی می کند. پس نسبت های انشعاب برای این سه کانال واپاشی به ترتیب عبارت اند از:  $98/8\%$ ،  $1/17\%$  و  $2 \times 10^{-7}$ . در میان هسته های رادیواکتیو، حالت پایه هسته فرد - فرد  ${}^{226}_{89}\text{Ac}$  در ابتدای سری

آکتینید، دارای نیمه عمر ۲۹ ساعت است و می تواند با گسیل یک الکترون به  $^{226}_{90}Th$  واپاشی کند و با گیراندازی یک الکترون اتمی به  $^{229}_{88}Ra$  تبدیل شود یا با گسیل یک ذره  $\alpha$  به  $^{222}_{87}Fr$  واپاشی کند که نسبت انشعاب هر کدام از این مدهای واپاشی به ترتیب ۰.۸۳٪، ۰.۱۷٪ و ۰.۰۰۶٪ است [۱].



شکل (۱-۱) انواع مختلف فرایندهای واپاشی در هسته  $^{226}_{89}Ac$  [۲]

#### ۴-۱ عنصر ماتریسی گذار

احتمال گذار با مربع عنصر ماتریس هسته ای متناسب است:

$$\mathcal{M}_{fi}(M_f, M_i) = \langle J_f M_f \xi | O_{\lambda\mu} | J_i M_i \zeta \rangle \quad (18-1)$$

که در آن  $\langle J_i M_i \zeta \rangle$  و  $\langle J_f M_f \xi \rangle$  به ترتیب تابع موج حالت های اولیه و نهایی هستند و  $O_{\lambda\mu}$  قسمت هسته ای عملگر گذار است که یک تانسور کروی از مرتبه  $(\lambda, \mu)$  است. در این رابطه نمادهای  $\xi$  و  $\zeta$  نشان دهنده اعداد کوانتومی دیگری غیر از  $J$  و  $M$ ، که به اندازه حرکت زاویه ای مربوط می شوند، هستند که برای مشخص کردن حالات هسته ای مورد نیاز هستند. چون ممکن است گذار شامل گسیل یک ذره مانند یک الکترون یا یک نوکلئون باشد، لزوماً حالت های اولیه و نهایی در همان هسته نیستند: عنصر ماتریسی  $\mathcal{M}_{fi}$ ، عوامل مربوط به حالت های هسته ای در گذار را بیان می کند. وابستگی عنصر ماتریسی  $\mathcal{M}_{fi}$  به  $M_f$  و  $M_i$ ، تصاویر اندازه حرکت زاویه ای کل

روی محور کوانتتش، را می توان با استفاده از قضیه ویگنر - اِکارت بیان کرد:

$$\mathcal{M}_{f_i}(M_f, M_i) = (-1)^{J_f - M_f} \begin{pmatrix} J_f & \lambda & J_i \\ -M_f & \mu & M_i \end{pmatrix} \langle J_f \xi \| \mathbf{O}_\lambda \| J_i \zeta \rangle \quad (19-1)$$

که در آن  $\begin{pmatrix} J_f & \lambda & J_i \\ -M_f & \mu & M_i \end{pmatrix}$  نماد  $3j -$  و  $\langle J_f \xi \| \mathbf{O}_\lambda \| J_i \zeta \rangle$  عنصر ماتریسی کاهش یافته است. هدف اصلی ما بررسی  $\langle J_f \xi \| \mathbf{O}_\lambda \| J_i \zeta \rangle$  خواهد بود، چون یک کمیت ناورد تحت چرخش سیستم مختصات است.

اگر اندازه گیری به جهت اسپین در حالت نهایی حساس نباشد، این گذار همه حالت های نهایی ممکن را که تنها در مقدار  $M_f$  با هم تفاوت دارند در برمی گیرد. بنابراین در هنگام بررسی گذار، اگر عملگر گذار فقط به جهت خاصی در فضا محدود نشده باشد، باید همه مقادیر مجاز  $\mu$  را شامل شود. تحت این شرایط مربع عنصر ماتریس گذار کاهش یافته به شکل زیر نوشته می شود :

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{f_i}|^2 &= \sum_{\mu M_f} \left| (-1)^{J_f - M_f} \begin{pmatrix} J_f & \lambda & J_i \\ -M_f & \mu & M_i \end{pmatrix} \langle J_f \xi \| \mathbf{O}_\lambda \| J_i \zeta \rangle \right|^2 \\ &= \left| \langle J_f \xi \| \mathbf{O}_\lambda \| J_i \zeta \rangle \right|^2 \sum_{\mu M_f} \left| \begin{pmatrix} J_f & \lambda & J_i \\ -M_f & \mu & M_i \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \frac{\Delta(J_f, \lambda, J_i)}{2J_i + 1} \left| \langle J_f \xi \| \mathbf{O}_\lambda \| J_i \zeta \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (20-1)$$

در رسیدن به شکل نهایی از رابطه تعامد بین نمادهای  $3j -$  استفاده شده است:

$$\sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j'_3 \\ m_1 & m_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \frac{\Delta(j_1, j_2, j_3)}{2j_3 + 1} \delta_{j_3, j'_3} \delta_{m_3, m'_3} \quad (21-1)$$

که در آن

$$\Delta(J_f, \lambda, J_i) = \begin{cases} 1 & \text{for } J_f = \lambda + J_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22-1)$$

$\Delta(J_f, \lambda, J_i)$ ، قاعدهٔ گزینش اندازه حرکت زاویه ای را برای گذارهای ممنوع یعنی گذارهایی که در آنها رابطه مثلثی بین بردارهای اندازه حرکت زاویه ای  $J_f$ ،  $\lambda$  و  $J_i$  رعایت نشده باشد، بیان می کند. توجه کنید که  $|\mathcal{M}_{fi}|^2$  تعریف شده در معادله (۲۰-۱) مستقل از  $M_i$  می باشد [۱].

## ۵-۱ احتمال گذار در نظریه اختلال وابسته به زمان

رابطهٔ بین احتمال گذار و عنصر ماتریس هسته ای با استفاده از نظریهٔ اختلال وابسته به زمان ایجاد می شود. یک هامیلتونی وابسته به زمان را در نظر بگیرید:

$$H(t) = H_0 + H'(t) \quad (23-1)$$

که  $H_0$  مستقل از زمان است و همه وابستگی زمان در  $H'(t)$  است. به طور خاص در اینجا موردی را بررسی کنیم که در آن شدت  $H'(t)$  به اندازه کافی ضعیف باشد به گونه ای که بتوان آن را به صورت اختلالی نسبت به  $H_0$  در نظر گرفت. ویژه توابع  $H_0$  را با  $\phi_n(r)$  نشان می دهیم:

$$H_0 \phi_n(\mathbf{r}) = E_n \phi_n(\mathbf{r}) \quad (24-1)$$

فرض می کنیم که همه  $\phi_n(\mathbf{r})$  ها با هم یک مجموعهٔ کامل از توابع متعامد را تشکیل می دهند. به دلیل سادگی در نمادگذاری از هر گونه نمادی که نشان دهندهٔ وابستگی احتمالی  $\phi_n(\mathbf{r})$  به اسپین، ایزواسپین و سایر متغیرها باشد، صرف نظر شده است. ویژه تابع  $\psi(\mathbf{r}, t)$  فقط برای  $H_0$  جواب معادله شرودینگر وابسته به زمان است:

$$i \hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_0 \psi(\mathbf{r}, t) \quad (25-1)$$

که می تواند برحسب  $\phi_n(\mathbf{r})$  نیز بیان شود:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n \phi_n(\mathbf{r}) e^{-i E_n t / \hbar} \quad (26-1)$$

در اینجا ضرایب بسط عبارتند از:

$$c_n = \int \phi_n^*(\mathbf{r}) e^{-i E_n t / \hbar} \psi(\mathbf{r}, t) dV \quad (27-1)$$

که مستقل از زمان هستند چون هنوز  $H'(t)$  را در نظر نگرفته ایم.

برای هامیلتونی کل، ویژه توابع  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  ممکن است هنوز برحسب  $\phi_n(\mathbf{r})$  بیان شوند با این تفاوت که حالا ضرایب بسط وابسته به زمان هستند:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n(t) \phi_n(\mathbf{r}) e^{-i E_n t / \hbar} \quad (28-1)$$

ضریب  $c_n(t)$  می تواند به صورت دامنه احتمال پیدا کردن سیستم در حالت مختل نشده  $n$  در زمان  $t$  توصیف شود. با جاگذاری معادله (28-1) در معادله شرودینگر وابسته به زمان برای  $H(t)$  داریم:

$$i \hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \{H_0 + H'(t)\} \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (29-1)$$

به این ترتیب معادله حاکم بر ضرایب  $c_n(t)$  به دست می آید:

$$i \hbar \sum_n \left\{ \frac{dc_n(t)}{dt} - c_n(t) i \frac{E_n}{\hbar} \right\} \phi_n(\mathbf{r}) e^{-i E_n t / \hbar} = \{H_0 + H'(t)\} \sum_n c_n(t) \phi_n(\mathbf{r}) e^{-i E_n t / \hbar} \quad (30-1)$$

با ضرب کردن  $\phi_k^*(\mathbf{r}) \exp\{i E_k t / \hbar\}$  در دو طرف معادله و انتگرال گیری روی همه متغیرهای مستقل به غیر از  $t$ ، نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} i \hbar \sum_n \left\{ \frac{dc_n(t)}{dt} - i c_n(t) \frac{E_n}{\hbar} \right\} e^{i(E_k - E_n)t / \hbar} \langle \phi_k(\mathbf{r}) | \phi_n(\mathbf{r}) \rangle \\ = \sum_n c_n(t) \left\{ \langle \phi_k(\mathbf{r}) | H_0 | \phi_n(\mathbf{r}) \rangle + \langle \phi_k(\mathbf{r}) | H'(t) | \phi_n(\mathbf{r}) \rangle \right\} e^{i(E_k - E_n)t / \hbar} \end{aligned} \quad (31-1)$$

چون  $\phi_n(\mathbf{r})$  عضو یک مجموعه متعامد از ویژه توابع  $H_0$  است برای به دست آوردن معادله بالا از شرایط زیر استفاده شده است:

$$\langle \phi_k(\mathbf{r}) | \phi_n(\mathbf{r}) \rangle = \delta_{kn} \quad , \quad \langle \phi_k(\mathbf{r}) | H_0 | \phi_n(\mathbf{r}) \rangle = E_n \delta_{kn} \quad (32-1)$$



با جایگذاری این نتایج در (۳۱-۱) یک معادله دیفرانسیل برای  $c_k(t)$  به دست می آید:

$$i\hbar \frac{dc_k(t)}{dt} = \sum_n \langle \phi_k | H'(t) | \phi_n(t) \rangle e^{i\omega_{kn}t} \quad (۳۳-۱)$$

که در آن  $\omega_{kn} \equiv (E_k - E_n)/\hbar$  است. به عنوان شرایط اولیه، فرض می کنیم که در  $t=0$  سیستم در حالت  $\phi_0(\mathbf{r})$  است:

$$c_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{for } n=0 \\ 0 & \text{for } n \neq 0 \end{cases} \quad (۳۴-۱)$$

و اگر اختلال به اندازه کافی ضعیف باشد در همه زمان های مورد بررسی، انتظار داریم که:

$$c_k(t) \approx \begin{cases} 1 & \text{for } k=0 \\ 0 & \text{for } k \neq 0 \end{cases} \quad (۳۵-۱)$$

در نتیجه می توان معادله (۳۰-۱) را با نگه داشتن تنها یک جمله در جمع طرف راست این معادله، یعنی جمله  $n=0$ ، تقریب زد. با این کار نتیجه زیر به دست می آید:

$$i\hbar \frac{dc_k(t)}{dt} = \langle \phi_k | H'(t) | \phi_0(t) \rangle e^{i\omega_{k0}t} \quad (۳۶-۱)$$

به علاوه، اگر متغیر زمانی  $H'(t)$  در مقایسه با  $\exp\{i\omega_{k0}t\}$  کند باشد می توان  $H'$  را ثابت در نظر گرفت. با این تقریب معادله (۳۶-۱) به سادگی حل می شود و نتیجه به صورت زیر بیان می شود

$$c_k(t) = \frac{\langle \phi_k | H' | \phi_0(t) \rangle}{E_k - E_0} (1 - e^{i\omega_{k0}t}) \quad (۳۷-۱)$$

$$|c_k(t)|^2 = 2 \left| \langle \phi_k(\mathbf{r}) | H' | \phi_0(\mathbf{r}) \rangle \right|^2 \frac{1 - \cos(\omega_{k0}t)}{(E_k - E_0)^2} \quad (۳۸-۱)$$

اگر سیستم از حالت  $n=0$  در زمان  $t=0$  شروع شده باشد، عبارت بالا بیان کننده احتمال یافتن سیستم در حالت  $k$  و در زمان  $t$  است. احتمال کل برای گروهی از حالتها در بازه هایی که با  $f$  نشان داده می شوند، از طریق جمع روی احتمال همه حالت های نهایی  $k$  در این بازه ها داده می شود:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in f} |c_k(t)|^2 &= 2 \sum_{k \in f} \left| \langle \phi_k(\mathbf{r}) | H' | \phi_0(\mathbf{r}) \rangle \right|^2 \frac{1 - \cos(\omega_{k0}t)}{(E_k - E_0)^2} \\ &= \frac{2}{\hbar^2} \int \left| \langle \phi_k(\mathbf{r}) | H' | \phi_0(\mathbf{r}) \rangle \right|^2 \frac{1 - \cos(\omega_{k0}t)}{\omega_{k0}^2} \rho(E_k) dE_k \end{aligned} \quad (39-1)$$

در آخرین مرحله، جمع روی همه حالات نهایی ممکن به انتگرال روی حاصلضرب انرژی در چگالی حالت های نهایی  $\rho(E_k)$  تبدیل می شود که دلایل آن در ادامه خواهد آمد.

ثابت واپاشی یا احتمال گذار بر واحد زمان  $\mathcal{W}$ ، به آهنگ پیدا کردن سیستم در گروهی از حالات نهایی با نماد  $f$  مربوط است و به شکل زیر بیان می شود:

$$\mathcal{W} = \frac{d}{dt} \sum_{k \in f} |c_k(t)|^2 = \frac{2}{\hbar^2} \int \left| \langle \phi_k(\mathbf{r}) | H' | \phi_0(\mathbf{r}) \rangle \right|^2 \frac{\sin(\omega_{k0}t)}{\omega_{k0}^2} \rho(E_k) dE_k \quad (40-1)$$

چون تابع  $(\omega_{k0}t)/\omega_{k0}^2$  به جز در  $\omega_{k0} \approx 0$  خیلی سریع نوسان می کند، فقط یک ناحیه کوچک در اطراف  $E_k = E_0$  می تواند در انتگرال سهم داشته باشد. در این بازه کوچک انرژی می توانیم از عنصر ماتریسی  $\langle \phi_k(\mathbf{r}) | H' | \phi_0(\mathbf{r}) \rangle$  صرف نظر کنیم و چگالی حالت  $\rho(E_k) = \rho(E_f)$  را به صورت یک ثابت در نظر بگیریم، پس می توان آن را از انتگرال بیرون آورد. علاوه بر این حدود انتگرال گیری روی  $E_k$  می تواند تحت شرایطی و بدون از دست دادن دقت خیلی زیاد با  $\pm\infty$  جایگزین شود. شکل نهایی احتمال گذار بر واحد زمان به صورت زیر به دست می آید:

$$\mathcal{W} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \phi_f(\mathbf{r}) | H' | \phi_0(\mathbf{r}) \rangle \right|^2 \rho(E_f) \quad (41-1)$$

که در آن از رابطه  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega_{k0}t)}{\omega_{k0}} d\omega_{k0} = \pi$  استفاده شده است. این فرمول نقطه آغاز محاسبات مربوط به احتمال گذار است که در ادامه از آن استفاده خواهیم کرد. چون فرمی آن را «قاعده طلایی نظریه اختلال وابسته به زمان» نامید، این فرمول اغلب با نام قاعده طلایی فرمی شناخته می شود [۳].

## فصل ۲

### برهم کنش ضعیف و واپاشی بتا

## ۱-۲ برهم کنشهای ضعیف و انواع آن

واپاشی بتای هسته ای شکلی از برهم کنش ضعیف است که علاوه بر گذار بین حالت های هسته ای، پدیده های متنوع دیگری شامل هادرون ها و لپتون ها نیز در این نوع برهم کنش شرکت می کنند. در اغلب موارد این فرایندهای ضعیف نمی توانند مشاهده شوند چون آنها در مقایسه با واکنشهای رقیبی که از طریق برهم کنش های الکترومغناطیسی و قوی انجام می شوند چندین مرتبه بزرگی کُندتر اتفاق می افتند. در نتیجه مطالعه برهم کنش های ضعیف باید در مواردی انجام شود که در آنها فرایندهای سریع تر یا ممنوع باشند و یا قواعد انتخاب مانع از وقوع آنها شوند.

واکنش ضعیف اساسی در هسته ها با واپاشی یک نوترون آزاد و یک پروتون مقید توصیف می شود:



این گذارها مثال هایی از یک طبقه بندی کلی از واپاشی هاست که در سایر هادرون ها نیز اتفاق می افتند. برای نمونه:



واکنش هایی نظیر آنهایی که با روابط (۱-۲ و ۲-۲) و (۳-۲ و ۴-۲) داده شده اند " فرایندهای نیمه لپتونی " نامیده می شوند، چون هم هادرون ها و هم لپتون ها را شامل می شوند. نمونه های داده شده در (۲-۵ و ۲-۶) " فرایندهای غیر لپتونی " یا " فرایندهای هادرونی " هستند چون لپتون ها در

حالت‌های اولیه یا نهایی وارد نشده اند. همچنین " فرایندهای کاملاً لپتونی " نیز وجود دارد:



هدف اصلی ما بررسی مدهای نیمه لپتونی است که واپاشی بتای هسته ای یک قسمت از آنها است. غالباً به فرایندهای برهم کنش ضعیف "جهانی" گفته می شود چون شدت برهم کنش ها در هر کدام از سه نوع واکنش توصیف شده در پاراگراف قبل، یکسان است. این نکته به وسیله ثابت جفت شدگی  $G_F$ ، که به صورت کلی ثابت جفت شدگی فرمی نامیده می شود، بیان می شود؛  $G_F$  دارای مقداری یکسان در هر کدام از سه نوع واکنش است:

$$G_F = 1.43572(3) \times 10^{-62} \text{ J-m}^3 = 1.16639(2) \times 10^{-11} (\hbar c)^3 \text{ MeV}^{-2} \quad (8-2)$$

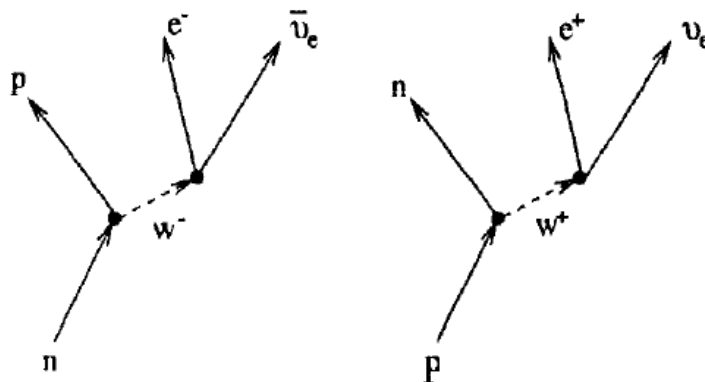
علیرغم اینکه این ثابت از طریق واپاشی ابر مجاز  $\beta$  در هسته ها اندازه گیری شده است با استفاده از واپاشی میون در (7-2) یا سایر فرایندهای برهم کنش ضعیف نیز این اندازه گیری امکانپذیر است.

همان طور که برهم کنش الکترومغناطیسی از طریق تبادل فوتونهای مجازی صورت می گیرد برهم-کنش ضعیف نیز به واسطه بوزون های برداری  $W^\pm$  و  $Z^0$  انجام می شود که جرم آنها عبارتند از:

$$m_W c^2 = 80.36 \pm 0.12 \text{ GeV} \quad , \quad m_Z c^2 = 91.187 \pm 0.007 \text{ GeV} \quad (9-2)$$

به دلیل جرم زیاد این ذرات واسطه، برد برهمکنشهای ضعیف خیلی کوتاه است یعنی حدود سه مرتبه بزرگی کوچکتر از بخش بلند برد نیروی هسته ای است. به همین دلیل برهم کنش ضعیف در بسیاری از اوقات ممکن است به صورت یک برهم کنش با برد - صفر یا برهم کنش " تماسی " در نظر گرفته شود. (در واقع نظریه فرمی برای واپاشی بتا که در بخش های بعد مطرح می شود بر همین اساس به دست آمده است).

چون بوزون های  $W^\pm$  باردار هستند، می توانند وضعیت بار یک ذره را تغییر دهند که نمونه هایی از این واکنش ها در معادلات (1-2) و (2-2) داده شده است و با نمودارهایی در شکل (1-2) نمایش



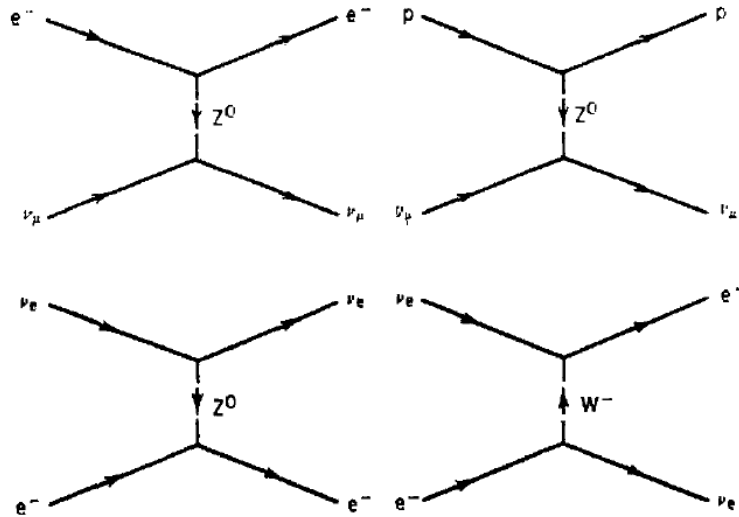
(شکل ۲-۱) نمودار واپاشی بتا. نمودار سمت چپ نشان دهنده واپاشی  $\beta^-$  یک نوترون به یک پروتون از طریق گسیل یک بوزون  $W^-$  است. نمودار سمت راست نشان دهنده واپاشی  $\beta^+$  یک پروتون به یک نوترون از طریق گسیل یک بوزون  $W^+$  است. در هر دو مورد بوزون  $W$  به یک جفت لپتون واپاشی می کند: یک الکترون و یک آنتی نوترینوی الکترون در مورد اول و یک پوزیترون و یک نوترینوی الکترون در مورد دوم [۴].

داده شده اند. اغلب فرایندهای واپاشی ضعیف به واسطه بوزون های باردار  $W^\pm$  انجام می شوند، مانند مثال هایی که در معادلات (۲-۳) تا (۲-۷) داده شده است. این موارد، برهم کنش های ضعیف جریان باردار نامیده می شوند. نوع دیگر از برهم کنش ضعیف که در ارتباط با تبادل بوزون خنثی  $Z^0$  است برهم کنش ضعیف جریان خنثی نام دارد، نمونه ای از آن پراکندگی نوترینو است:

$$\begin{aligned} \nu_\mu + e^- &\rightarrow \nu_\mu + e^- \\ \nu_\mu + p &\rightarrow \nu_\mu + p \end{aligned} \quad (۲-۱۰)$$

که آن در شکل (۲-۲) نشان داده شده اند. با قابل دسترس شدن پرتوهای پرشدت نوترینوها با انرژی بالا ( $\sim 100 \text{ GeV}$ ) در اوایل دهه ۱۹۷۰ در سرن، مشاهده این رویدادهای پراکندگی نوترینو و تصدیق وجود جریان های خنثای ضعیف ممکن شد [۵].

در یک سطح بنیادی تر، می توان واپاشی  $\beta$  هادرون ها را به صورت تبدیل یک نوع کوارک به نوع دیگر، از طریق تبادل جریان باردار ضعیف در نظر بگیریم. همان طور که می دانیم طعم کوارک ها در برهم کنش قوی پایسته است. اما در برهم کنش های ضعیف ممکن است طعم کوارک تغییر کند.



شکل (۲-۲) برهم کنشهای ضعیف جریان خنثی به واسطه مبادله  $Z^0$  صورت می گیرد. بعضی از فرایندها، مانند پراکندگی  $\nu_e e$  که در پایین نمایش داده شده اند می توانند در هر دو برهم کنش جریان باردار و جریان خنثی صورت گیرند [۵].

برای مثال در تبدیل یک کوارک  $d$  به یک کوارک  $u$  داریم:

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e \quad (۱۱-۲)$$

این همان چیزی است که در واپاشی  $\beta^-$  یک نوترون اتفاق می افتد؛ یعنی واپاشی نوترون برحسب کوارک ها می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$(udd) \rightarrow (uud) + e^- + \bar{\nu}_e \quad (۱۲-۲)$$

و واپاشی  $\beta^+$  یک پروتون مقید به یک نوترون، شامل تبدیل یک کوارک  $u$  به یک کوارک  $d$  است:

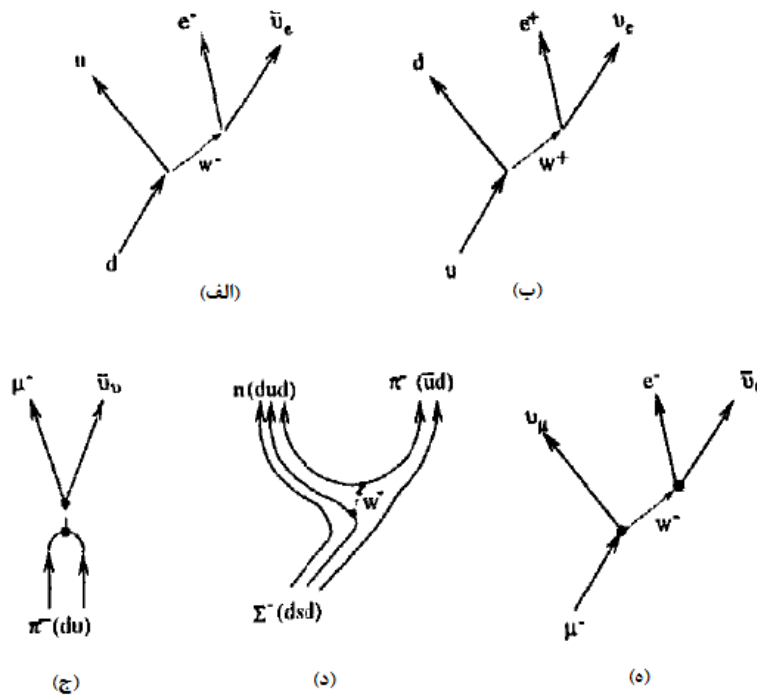
$$u \rightarrow d + e^+ + \nu_e \quad (۱۳-۲)$$

فرایندهای داده شده در (۱۱-۲ و ۱۳-۲) به صورت نموداری در شکل (۲-۳-الف و ب) نمایش داده شده اند. گذارهای ضعیف دیگر در معادلات (۲-۳) تا (۲-۷) نیز در شکل (۲-۳-ج) تا (۲-۳-ه) نشان داده شده اند. وقتی که یک کوارک واپاشی می کند لازم نیست که نتیجه این واپاشی یک کوارک با طعم معین باشد. در موارد ساده واپاشی ضعیف میان چهار کوارک  $u, d, s, c$ ، ترکیب طعم های تولید شده در واپاشی می تواند تنها برحسب یک پارامتر یعنی زاویه کبیو  $\theta_c$  بیان شود:

$$\begin{aligned} u &\rightarrow d' = d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \\ c &\rightarrow s' = -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c \end{aligned} \quad (۱۴-۲)$$

اما گذارهای ضعیف مشاهده شده، بین کوارک ها با طعم معین اتفاق می افتند مثلاً تبدیل کوارک  $u$  به کوارک  $d$  در واپاشی یک نوترون به یک پروتون. معادله (۱۴-۲) نشان می دهد که شدت واپاشی  $\beta$  مشاهده شده از واکنش ها، فقط برابر با ثابت جفت شدگی برهم کنش ضعیف  $G_F$  نیست بلکه مقدار آن باید با وارد کردن زاویه ترکیبی اصلاح شود. مرسوم است که تبدیل (۱۴-۲) به شکل یک جریان باردار بیان شود

$$J_{\text{weak}}^+ = (\bar{u} \ \bar{c}) \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (۱۵-۲)$$



(شکل ۲-۳) واپاشی ضعیف کوارک ها. در نمودار (الف) یک کوارک  $d$  با گسیل یک بوزون  $W^-$  به یک کوارک  $u$  تبدیل می شود، همان طور که یک نوترون به یک پروتون واپاشیده می شود. در نمودار (ب) یک کوارک  $u$  به یک کوارک  $d$  تبدیل می شود، همان طور که یک پروتون مقید به یک نوترون واپاشی می کند. نمودار (ج) نمونه ای از واپاشی ضعیف یک هادرون به یک حالت نهایی است که فقط شامل لپتون هاست، همان طور که در معادله (۴-۲) آمده است. نمودار (د) نمونه ای از واپاشی ضعیف غیر لپتونی است که در معادله (۵-۲) نوشته شده و نمودار (ه) مثالی از واپاشی کاملاً لپتونی داده شده در معادله (۷-۲) است [۴].



در حالت خیلی کلی تر که همه شش کوارک را دربرگیرد، داریم:

$$J_{\text{weak}}^+ = (\bar{u} \quad \bar{c} \quad \bar{t}) \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (16-2)$$

در این رابطه، ماتریس  $3 \times 3$  را ماتریس CKM می نامند. ۹ عنصر ماتریسی توابعی از سه زاویه ترکیبی و یک عامل فاز هستند. برای تعیین دقیق تمامی عناصر ماتریسی مستقل باید واپاشی ضعیف کوارک های سنگین را نیز در نظر بگیریم.

برای واپاشی  $\beta$  هسته ای، تنها گذار بین کوارک های  $u$  و  $d$  برای ما اهمیت دارد، در نتیجه فقط حاصلضرب ثابت جفت شدگی فرمی  $G_F$  و  $\theta_c$  در این مرحله وارد می شود. زاویه ترکیبی به اندازه کافی کوچک است و ما می توانیم در اغلب موارد از آن صرف نظر کنیم. به منظور ساده سازی در نمادها و اجتناب از هر گونه اشتباه از نماد  $G_V$ ، ثابت جفت شدگی برداری، برای نمایش حاصلضرب و حذف حضور صریح زاویه ترکیبی استفاده می کنیم. اما باید به اختلاف بین شدت اندازه گیری شده واپاشی ضعیف در هسته ها و مقدار  $G_F$  توجه کنیم [۴].

## ۲-۲ ناپایستگی پاریته در برهم کنشهای ضعیف

یکی از ویژگی های قابل توجه واپاشی های ضعیف، ناپایستگی پاریته در این نوع واپاشی ها است. اهمیت بررسی این موضوع در ارتباط نزدیک آن با شکل عملگر واپاشی  $\beta$  هسته ای است. عملکرد پاریته را می توان به صورت انعکاس مختصات فضایی بیان کرد یعنی:

$$(x, y, z) \xrightarrow{\text{parity}} (-x, -y, -z) \quad (17-2)$$

غالباً عملکرد پاریته به صورت یک تصویر آینه ای از دستگاه مختصات در نظر گرفته می شود. تحت عملگر پاریته یک اسکالر معمولی (S) تغییر نمی کند. اما یک بردار معمولی (V) تغییر علامت

می دهد. به منظور تمایز با بردار محوری که بعداً تعریف می شود، بردار معمولی را بردار قطبی می نامیم. بردارهای مکان  $\mathbf{r}$  و اندازه حرکت  $\mathbf{p}$  نمونه هایی از بردارهای قطبی هستند.

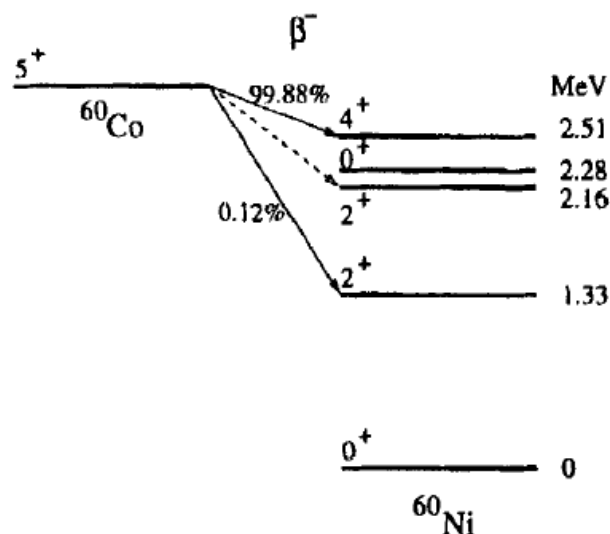
همچنین می توانیم بردارهایی بسازیم که علامت آنها تحت تبدیل پارایته تغییر نکند. برای مثال بردار اندازه حرکت زاویه ای  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  تحت عملگر پارایته علامتش تغییر نمی کند چون هر دو بردار  $\mathbf{r}$  و  $\mathbf{p}$  تغییر علامت می دهند. بردارهایی که تحت انعکاس دستگاه مختصات تغییر علامت نمی دهند را بردارهای محوری (A) می نامند. همه عملگرهای اندازه حرکت زاویه ای که عملگر اسپین ذاتی را در بر می گیرند، بردارهای محوری هستند. حاصلضرب اسکالر یک بردار محوری و یک بردار قطبی یک اسکالر است که تحت عملکرد پارایته تغییر علامت می دهد. این گونه اسکالرها را شبه اسکالر (P) می نامند. علاوه بر این دسته پنجم کمیت ها، تانسور نامیده می شوند (البته نباید آنها را با تانسورهای کروی که در جبر اندازه حرکت زاویه ای استفاده می شود اشتباه گرفت). که این کمیتها نسبت به کمیتهای  $P, A, V, S$  تحت تبدیل پارایته رفتار متفاوتی دارند، اما در اینجا به آنها نمی پردازیم.

عملگری که از ترکیب اسکالرها و شبه اسکالرها ساخته می شود یا عملگری که از ترکیب بردارها و بردارهای محوری تولید می شد یک پارایته معین ندارد، در نتیجه پارایته در رفتار این گونه عملگرها پایسته نیست. در برهم کنش های قوی و الکترومغناطیس پارایته اکیداً پایسته است چون تمام این فرایندها تحت انعکاس فضایی ناوردا هستند. در حالی که این مطلب در مورد فرایند های برهم کنش ضعیف صادق نیست [۴].

تردید در نقض پارایته در برهم کنش ضعیف از مشاهده واپاشی مزون  $K^+$  به وجود آمد. برای این واپاشی دو مد متفاوت مشاهده شده بود که یک مد دو پیون و دیگری سه پیون در حالت نهایی داشت، که در معادله (۲-۶) نشان داده شده است. چون این دو مد پارایته های متفاوتی دارند، ناپایستگی پارایته در واپاشی های ضعیف به عنوان یک راه حل پیشنهاد شد و این پیشنهاد با مشاهده واپاشی  $\beta^-$  در  $^{60}\text{Co}$  تأیید شد، که این واپاشی عبارت است از:



حالت پایه هسته فرد - فرد  ${}^{60}\text{Co}$  دارای اسپین - پاریته  $J^{\pi} = 5^{+}$  است که در شکل (۲-۴) نشان داده شده است، حالت پایه غالباً ( با نسبت انشعاب ۹۹/۸۸٪) به حالت  $J^{\pi} = 4^{+}$  هسته  ${}^{60}\text{Ni}$  با انرژی برانگیخته 2.51 MeV واپاشی می کند، این واپاشی یک گذار گاموف - تدر خالص است.



شکل (۲-۴) نمودار واپاشی  ${}^{60}\text{Co}$  به  ${}^{60}\text{Ni}$ . انشعاب اصلی به سمت حالت  $4^{+}$  با انرژی 2.51 MeV در هسته  ${}^{60}\text{Ni}$  است که یک گذار گاموف-تدر است و در یکی از اولین آزمایش های اثبات ناپایداری پاریته در واپاشی  $\beta^{-}$  مورد استفاده قرار گرفت [۴].

در سال ۱۹۵۷ وو و همکارانش با استفاده از واپاشی بتای  ${}^{60}\text{Co}$  یک آزمایش موفقیت آمیز را در زمینه نشان دادن ناپایداری پاریته به نتیجه رساندند. آنها نمونه ای از  ${}^{60}\text{Co}$  را در داخل یک سیم پیچ مغناطیسی قرار دادند و آن را تا دمای ۰/۰۱ K سرد کردند در چنین درجه حرارتی، حرکت گرمایی نمی تواند همسویی گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی هسته ها را برهم زند و در نتیجه اسپین هسته ها در جهت موازی با جهت میدان مغناطیسی قرار می گیرند. هسته های  ${}^{60}\text{Co}$  قطبیده شده به حالت برانگیخته هسته  ${}^{60}\text{Ni}$  واپاشیده می شود که این واکنش در معادله (۲-۱۸) آمده است [۶]. معکوس سازی جهت میدان مغناطیسی، اسپین ها را معکوس می کرد و بدین گونه عمل انعکاس تحقق

می یافت. اگر تعداد ذرات بتای گسیل شده در جهت میدان مغناطیسی و خلاف آن با هم مساوی می شد، ناوردایی واپاشی بتا نسبت به عملکرد پارितه به اثبات می رسید. در واقع آنچه مشاهده شد، این بود که دست کم ۷۰٪ ذرات  $\beta$  در خلاف جهت اسپین هسته گسیل می شدند. می توان نشان داد آنچه که مشاهده شده به معنای نقض پارितه است: اگر اسپین همه هسته های  $^{60}\text{Co}$  در یک جهت قرار گیرند ما یک جهت ثابت در فضا داریم. می توان این جهت را با بردار یکه  $\sigma$ ، که با جهت اسپین  $\mathbf{J}$  حالت پایه  $^{60}\text{Co}$  موازی است، نشان داد. توزیع زاویه ای الکترون های گسیلی با اندازه حرکت  $\mathbf{p}$  و انرژی  $E$ ، به شکل زیر بیان شود:

$$W(\theta) = 1 + a \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}c}{E} = 1 + a \frac{v}{c} \cos \theta \quad (19-2)$$

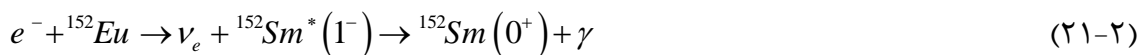
که در آن  $\theta$  زاویه بین  $\mathbf{J}$  و راستای گسیل الکترون است.  $E$  انرژی (نسبیتی) کل الکترون ها و پارامتر  $a$  نشان دهنده شدت وابستگی زاویه است. تحت عملکرد پاریته،  $\mathbf{p}$  که یک بردار قطبی است علامتش تغییر می کند و  $\sigma$  که یک بردار محوری است تغییر علامت نمی دهد بنابراین حاصلضرب  $\sigma \cdot \mathbf{p}$  در جمله دوم معادله (۱۹-۲) یک کمیت شبه اسکالر است و علامت آن تحت انعکاس دستگاه مختصات فضایی تغییر می کند. از طرف دیگر اولین جمله (واحد)، یک اسکالر است که ناوردا باقی می ماند. اگر پاریته پایسته باشد با در نظر گرفتن این حقیقت که  $\sigma \cdot \mathbf{p} \rightarrow -\sigma \cdot \mathbf{p}$ ، جمله دوم معادله (۱۹-۲) باید حذف شود. در نتیجه انتظار داریم که  $a=0$  باشد و توزیع زاویه ای الکترون های گسیلی همسانگرد باشد. اما طبق نتایج آزمایش باید  $a=-1$  شود و این امر حداکثر نقض پاریته را نشان می دهد. بعداً همین نتایج از طریق اندازه گیری هایی که با استفاده از واپاشی پیون ها و میون ها انجام شد، مورد تأیید قرار گرفت.

نتیجه  $a=-1$  می تواند از دیدگاه هلیسیته لپتون های درگیر در واپاشی نیز بررسی شود. هلیسیته

یک ذره به صورت تصویر  $\sigma$ ، دو برابر اسپین ذاتی  $S$ ، در راستای جهت حرکت آن تعریف می شود:

$$h = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (20-2)$$

برای ذرات بدون جرم، ویژه مقدار  $h$  فقط می تواند  $\pm 1$  باشد به عنوان مثال فوتون ذره ای است که تنها دو جهت ممکن را اختیار می کند و می تواند تنها دو جهت قطبش متقاطع مستقل خطی داشته باشد. برای الکترون ها و سایر ذرات با جرم سکون غیر صفر مقدار هلیستی برابر  $\pm v/c$  است. غالباً ذرات با هلیسیتی مثبت را ذرات "راست دست" و ذرات با هلیسیتی منفی را ذرات "چپ دست" می نامند. اگر نوترینوها بدون جرم باشند، رفتاری شبیه فوتون ها دارند و  $h$  می تواند مقادیر  $\pm 1$  را داشته باشد. از نظر تجربی، هلیسیتی نوترینو اولین بار توسط Goldhaber، Grodzins و Sunyan از طریق گیراندازی الکترون در حالت پایه  $0^+$  هسته  $^{152}\text{Eu}$  که به حالت برانگیخته  $1^-$  هسته  $^{152}\text{Sm}$  در انرژی  $963\text{keV}$  منجر می شود، تعیین شد:



با اندازه گیری قطبش پرتو  $\gamma$  خارج شده از واپاشی  $^{152}\text{Sm}$  به حالت پایه  $0^+$  این هسته، هلیسیتی نوترینوی گسیلی در فرایند گیراندازی الکترون، برابر  $-1$  تعیین شد. در سایر واپاشی های  $\beta$  هسته ای هلیسیتی آنتی نوترینو  $+1$  به دست آمد، همچنین برای الکترون های گسیل شده  $h = -v/c$  و برای پوزیترون های گسیل شده  $h = +v/c$  می باشد.

از این نتایج تجربی دو نتیجه مهم به دست می آید. اولین نتیجه از این مشاهده تجربی که همه لپتون های گسیلی در واپاشی  $\beta$  چپ دست ( $h < 0$ ) و همه آنتی لپتون ها راست دست ( $h > 0$ ) هستند، ناشی می شود. به دلایلی که ما در اینجا به آنها نمی پردازیم عملگرهایی که اسکالر، شبه اسکالر و تانسور هستند تحت یک تبدیل پارته لپتون هایی (و همین طور آنتی لپتون هایی) تولید می کنند که هر دو مقدار هلیسته را می توانند داشته باشند. فقط عملگرهای برداری  $V$  و شبه برداری  $A$  می توانند تطبیق خوبی با نتایج مشاهده شده، درباره اینکه هلیسته همه لپتون ها یک مقدار و هلیستی آنتی لپتون ها مقدار دیگر است، داشته باشند. به علاوه چون  $V$  و  $A$  پارته های متفاوتی

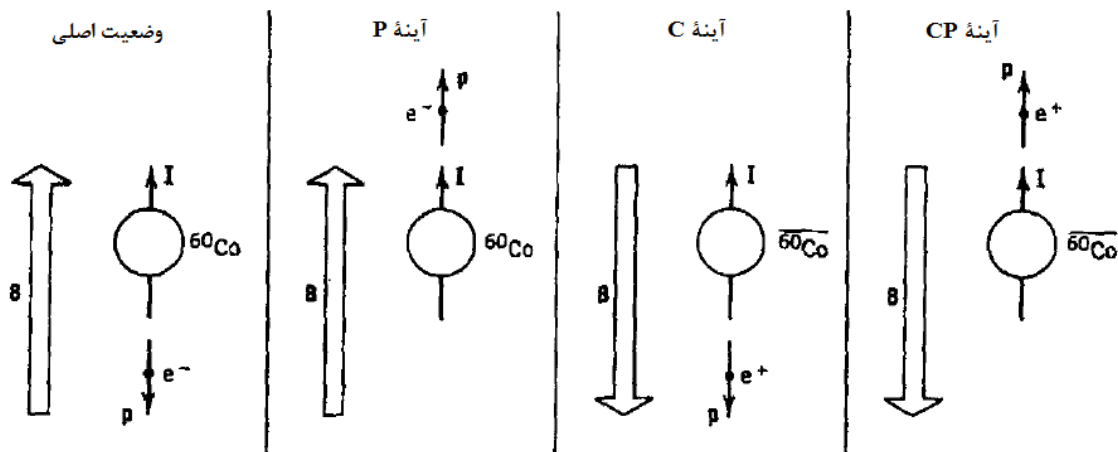
دارند به یک ترکیب خطی از  $V$  و  $A$  به عنوان عملگر واپاشی  $\beta$  نیاز داریم. این موضوع به نظریه  $(V-A)$  در واپاشی  $\beta$  منجر می شود. (علامت منفی ناشی از آن است که  $a = -1$  در معادله (۲-۱۹) به  $a = +1$  ترجیح دارد)

دومین نتیجه این امر که نوترینوها فقط با هلیسیتته  $h = -1$  و آنتی نوترینوها فقط با هلیسیتته  $h = +1$  مشاهده شده اند، این است که نوترینوها می توانند با یک تابع موج دو مؤلفه ای توصیف شوند. در نظریه دیراک تابع موج های ذرات با اسپین  $\frac{1}{2}$ ، چهار مؤلفه دارند که هر کدام از این مؤلفه ها بیان کننده دو تصویر اسپینی ممکن در راستای محور کوانتس یعنی  $\pm \frac{1}{2}$  برای هر کدام از ذرات و پاد ذرات هستند. اگر نوترینوها همیشه یک هلیسیتته و آنتی نوترینوها همیشه هلیسیتته مخالف آن را داشته باشند، آنگاه نظریه دو مؤلفه ای برای آنها پذیرفته خواهد شد چون ذرات  $h = -1$  و پاد ذرات  $h = +1$  دارند. اما چنین ساده سازی هایی نیز حاکی از آن است که نوترینوها بدون جرم هستند و تعیین تجربی اینکه نوترینو جرم سکون غیر صفر دارد یا نه موضوع مورد علاقه فیزیکدانان تجربی است [۴].

در حقیقت سه نوع تقارن گسسته در طبیعت وجود دارد اولین آنها انعکاس فضایی  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$  است که آن را حوزه عمل پاریته ( $P$ ) می دانیم که در بندهای قبل درباره آن توضیح دادیم. دومین تقارن به صورت جایگزینی تمام ذرات با پاد ذره های متناظرشان مطرح می شود که آن را همیونی بار ( $C$ ) می نامند. در برهم کنش های قوی و الکترومغناطیس  $C$  پایسته است اما در برهم کنش ضعیف پایستگی آن نقض می شود. سومین تقارن برگشت زمان ( $T$ ) است، که در آن  $-t$  جایگزین  $t$  می شود و در عمل، جهت زمان در تمام فرایندهای سیستم وارونه می شود. شکل (۲-۵) آزمایش  $^{60}Co$  و انعکاس آن را در آینه  $P$  و آینه  $C$  و ترکیب  $CP$  نشان می دهد. در آزمایش انعکاسی  $P$  الکترون ها به جای خلاف میدان مغناطیسی ترجیحاً در جهت آن گسیل می شوند. چون این حالت در طبیعت مشاهده نمی شود باید نتیجه گرفت که حداقل تا آن جا که به واپاشی بتا مربوط می شود

عملکرد P تقارن معتبری نیست. نتیجه شگفت دیگری از این آزمایش حاصل می شود، انعکاس آزمایش اصلی در آینه C را در شکل (۵-۲) در نظر بگیرید. الکترون های جاری در سیم ها که میدان مغناطیسی را به وجود می آورند به پوزیترون تبدیل می شوند و در نتیجه جهت میدان مغناطیسی معکوس می شود. در آزمایش انعکاسی C، ذرات  $\beta$  اکنون ترجیحاً در جهت میدان مغناطیسی گسیل می شوند. بنابراین ماده و پاد ماده در واپاشی  $\beta$  رفتاری متفاوت دارند، که نقض تقارن C است.

اما اگر انعکاس آزمایش را مطابق شکل (۵-۲) در آینه ای به دست آوریم که عملکردهای P و C را همزمان انجام دهد، به حالت آزمایش اصلی برمی گردیم حتی اگر عملکردهای P و C به طور جداگانه تقارن های معتبری نباشند ترکیب CP تقارن معتبری است. برخی واپاشی های مزون K که مشابه واپاشی های  $\beta$  هستند، حتی ناوردایی CP را تا حدی نقض می کنند تاکنون مدرکی دال بر نقض تقارن CP در واپاشی های بتازای معمولی به دست نیامده است [۲].



شکل (۵-۲) آزمایش های هسته های قطبیده  $^{60}\text{Co}$  در آینه های P، C، و ترکیب CP [۲].

### ۳-۲ عملگرهای فرمی و گاموف – تلمر

از آنجا که واپاشی  $\beta$  شامل دو بخش برداری و بردار محوری است، انتظار داریم که دو عملگر مستقل که هر کدام دارای شدت و وابستگی شعاعی مخصوص به خود هستند، وجود داشته باشند. تا آنجا که

به واپاشی  $\beta$  هسته ای مربوط می شود، این وضعیت به دو دلیل ساده شده است. اولین دلیل از این حقیقت ناشی می شود که برهم کنش ضعیف، برد خیلی کوتاهی دارد و همان طور که قبلاً دیدیم این برد خیلی کوچکتر از ابعاد هسته است. بنابراین وابستگی شعاعی عملگرها ممکن است با یک تابع دلتا تقریب زده شود و این تقریب به ما اجازه می دهد که تنها شدت ها یا ثابت های جفت شدگی هر کدام از عملگرها را تعیین کنیم. دو ثابت جفت شدگی برای واپاشی  $\beta$  هسته ای می تواند به شکل یک ثابت جفت شدگی برداری  $G_V$  برای قسمت برداری عملگر و یک ثابت جفت شدگی گاموف – تکر  $G_A$  برای قسمت بردار محوری آن در نظر گرفته شود. قبلاً دیدیم که  $G_V$  با  $G_F$ ، که یک ثابت جفت شدگی عمومی برای همه فرایندهای برهم کنش ضعیف است، رابطه دارد. دومین ویژگی که فرایندهای واپاشی  $\beta$  هسته ای را ساده می کند، رابطه  $G_V$  با  $G_A$  است. اختلاف بین  $G_V$  و  $G_A$  ناشی از تغییر عملگر بردار محوری در حضور برهم کنش قوی است. جریان برداری که ممکن است با چهار بردار  $V_\mu$  نمایش داده شود به عنوان یک کمیت پایسته شناخته می شود، یعنی:

$$\sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial V_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (22-2)$$

این رابطه در حالت کلی، فرضیه جریان برداری پایسته (CVC) نامیده می شود و رابطه فوق مشابه معادله پیوستگی در الکترومغناطیس است.

از طرف دیگر جریان بردار محوری  $A_\mu$  در چنین رابطه ای صدق نمی کند یعنی دیورژانس  $A_\mu$  صفر نمی شود. (این موضوع به واپاشی پیون ها که ذرات شبه اسکالرنند مربوط می شود). چون  $A_\mu$  یک شبه بردار است، دیورژانس آن یک شبه اسکالر است. پیون یک ذره شبه اسکالر است و بنابراین با یک میدان شبه اسکالر توصیف می شود. این امر به فرضیه جریان برداری محوری تقریباً پایسته (PCVC) منجر می شود:

$$\sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = a\phi_\pi \quad (23-2)$$



که در این رابطه،  $\phi_\pi$  نمایش دهنده میدان پیون و  $a$  یک ثابت است. به عبارت دیگر جریان محوری پایسته نیست اما دیورژانس آن با میدان پیون متناسب است. حالا جریان شبه برداری ضعیف از طریق PCVC به میدان برهم کنش قوی مرتبط می شود.

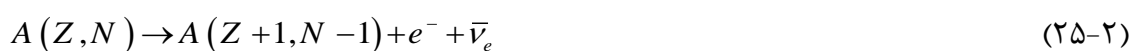
می توان با یک روش ساده رابطه ای بین دو ثابت جفت شدگی ضعیف  $G_A$  و  $G_V$  ایجاد کرد. این رابطه به عنوان رابطه Goldberger-Trieman شناخته می شود که در اینجا به صورت زیر بیان شود:

$$g_A \equiv \frac{G_A}{G_V} = \frac{f_\pi g_\pi N}{M_N c^2} \quad (24-2)$$

در این رابطه  $M_N$  جرم نوکلئون است، مقدار  $f_\pi = F_\pi / \sqrt{2}$  تقریباً  $93 \text{ MeV}$  اندازه گیری شده است که در آن  $F_\pi$  ثابت واپاشی پیون است. کمیت  $g_\pi N$  ثابت جفت شدگی پیون - نوکلئون است که مقدار آن به طور تجربی برابر  $|g_\pi N|^2 / 4\pi \approx 14$  به دست آمده است. با استفاده از این مقادیر، از رابطه (24-2) نتیجه  $|g_A| \approx 1.31$  حاصل می شود. مقدار اندازه گیری شده از واپاشی  $\beta$  هسته ای عبارت است از  $g_A = -1.259 \pm 0.004$ ، که با نتیجه ای که از رابطه Goldberger-Trieman به دست می آید تطابق دارد. این مطلب فرضیه PCVC را تأیید می کند [4].

## ۴-۲ واپاشی بتا هسته ای

واپاشی  $\beta$  هسته ای فرایندی است که در آن یک هسته که از  $Z$  پروتون و  $N$  نوترون تشکیل شده است به هسته دیگری با همان تعداد نوکلئون  $A$  اما با  $(Z \pm 1, N \mp 1)$  تبدیل می شود. یک واپاشی  $\beta^-$  می تواند به صورت تبدیل یکی از نوترون های داخل هسته به یک پروتون در نظر گرفته شود:



در واپاشی  $\beta^+$  یک پروتون به یک نوترون تبدیل می شود:



همچنین، ممکن است یک الکترون اتمی توسط هسته گیراندازی شود:



به جز یک اختلاف کوچک در انرژی های موجود، که بعداً به آن می پردازیم، فرایند گیراندازی الکترون همان قواعد گزینش واپاشی  $\beta^+$  را دارد و معمولاً با این نوع واپاشی رقابت می کند. احتمال گیراندازی الکترون به صورت  $Z^3$  افزایش می یابد، چون با افزایش تعداد پروتون ها شدت میدان کولنی هسته ای افزایش و شعاع مدارهای الکترونی در اتم کاهش می یابد [۴].

### ۲-۴-۱ محاسبه مقدار $Q$ واپاشی $\beta$

در محاسبه مقدار  $Q$  برای واپاشی  $\beta$  هسته ای و گیراندازی الکترون باید نکاتی را در نظر بگیریم. مقدار  $Q$  یک واکنش برابر با اختلاف انرژی جنبشی کل سیستم قبل و بعد از واکنش است:

$$Q = T_f - T_i \quad (28-2)$$

برای یک واپاشی  $\beta$  هسته ای، اگر هسته مادر در چارچوب مرجع آزمایشگاه به صورت ساکن در نظر گرفته شود، انرژی جنبشی اولیه کل  $T_i$  در این سیستم صفر خواهد بود. برای آن که فرایند واپاشی  $\beta$  اتفاق بیفتد باید مقدار  $Q$  مثبت باشد. چون در این فرایندها یا یک الکترون و یا یک پوزیترون گسیل می شود، مقدار  $Q$  به سادگی برابر اختلاف بین انرژی های حالت های هسته ای اولیه و نهایی نیست. (اگر جرم نوترینو را غیر صفر در نظر بگیریم، نقش مهمی در این بررسی ها دارد.) پیچیدگی بیشتر محاسبه مقدار  $Q$  از این حقیقت ناشی می شود، که جرم یک هسته  $M_{\text{nucl}}(A, Z)$ ، برحسب جرم یک اتم خنثی  $M(A, Z)$ ، جرم و انرژی بستگی الکترون های اتمی تعریف می شود:

$$M_{\text{nucl}}(Z, N)c^2 = M(Z, N)c^2 - Zm_e c^2 + \sum_{i=1}^Z B_i \quad (29-2)$$

بنابراین، مقدار  $Q$  واپاشی  $\beta^-$  و  $\beta^+$  با روابط زیر بیان می شود:

$$Q_{\beta^-} = (M(Z, N) - M(Z + 1, N - 1))c^2 \quad (30-2)$$

$$Q_{\beta^+} = (M(Z, N) - M(Z - 1, N + 1))c^2 - 2m_e c^2 \quad (31-2)$$

برای فرایند گیراندازی الکترون رابطه زیر را داریم:

$$Q_{EC} = (M(Z, N) - M(Z - 1, N + 1))c^2 - B_e \quad (32-2)$$

که در آن  $B_e$  انرژی یونش الکترون اتمی گیراندازی شده است. چون  $B_e$  از مرتبه 10eV است می توان از آن صرف نظر کرد مگر آن که دقتی از همان مرتبه برای ما اهمیت داشته باشد، مثلاً در اندازه گیری جرم نوترینو باید  $B_e$  را در نظر بگیریم. اما اختلاف  $2m_e c^2$  بین مقادیر  $Q$  واپاشی  $\beta^+$  و گیراندازی الکترون، مهم است. برای مثال اختلاف جرمی بین  ${}^7Li$  و  ${}^7Be$  برابر  $0.86 \text{ MeV}/c^2$  است که این مقدار کمتر از  $2m_e c^2$  است. در نتیجه واپاشی  $\beta^+$  از  ${}^7Be$  به  ${}^7Li$  غیر ممکن است و گذار انجام شده کاملاً از طریق گیراندازی الکترون و با نیمه عمر  $53/4$  روز می باشد. در هر فرایند گیراندازی الکترون تنها یک نوترینو گسیل می شود. چون آشکارسازی نوترینوها مشکل است، برجسته ترین علامتی که نشان دهنده انجام فرایند گیراندازی الکترون است، گسیل پرتو  $x$  است؛ گیراندازی الکترون از یک پوسته داخلی مانند پوسته K انجام می شود و بنابراین یک جای خالی الکترون در آن پوسته به وجود می آید. جای خالی با گذارهای نزولی الکترون پوسته های بالاتر به سرعت پر می شود و در نتیجه پرتوهای  $x$  مشخصه گسیل می شوند.

آنچه گذشت مربوط به واپاشی بین حالات پایه هسته ای است. اگر حالت هسته ای نهایی یک حالت برانگیخته باشد مقدار  $Q$  باید با در نظر گرفتن انرژی برانگیختگی آن حالت کاهش یابد [۲، ۴].

$$Q_{ex} = Q_{gr} - E_{ex} \quad (33-2)$$

## ۲-۴-۲ آهنگ گذار واپاشی $\beta$

فرمی در سال ۱۹۳۴ بر مبنای فرضیهٔ پاولی دایر بر وجود نوترینو نظریه ای موفق را برای واپاشی  $\beta$  پیشنهاد کرد. اما قبل از پرداختن به جزئیات این نظریه لازم است نکات زیر را هم یادآور شویم:

(۱) الکترون و نوترینو قبل از فرایند واپاشی وجود ندارند و بنابراین باید تولید آنها را در هسته در نظر بگیریم. (۲) الکترون و نوترینو باید به طور نسبیتی بررسی شوند. (۳) از این محاسبات باید توزیع پیوسته ای برای انرژی الکترون ها حاصل شود [۲].

به منظور ساده سازی بحث، فرایند گیراندازی الکترون را در نظر نمی گیریم. با توجه به قاعدهٔ طلایی فرمی که در فصل اول آن را با استفاده از نظریهٔ اختلال وابسته به زمان به دست آوردیم، داریم:

$$\mathcal{W} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \phi_k(\mathbf{r}) | H' | \phi_0(\mathbf{r}) \rangle \right|^2 \rho(E_f) \quad (۳۴-۲)$$

حالت اولیه ساده است، چون تنها شامل حالت هسته ای مادر است که فرض کردیم در چارچوب مرجع آزمایشگاه ساکن است:

$$|\phi_0(\mathbf{r})\rangle = |J_i M_i \zeta\rangle \quad (۳۵-۲)$$

حالت نهایی شامل سه ذره است یک لپتون خنثی، یک لپتون باردار و هستهٔ دختر. به منظور ساده سازی، از هر گونه تأثیر کولنی بین لپتون باردار و هستهٔ دختر صرف نظر می کنیم. در این حد، لپتونها ذرات آزادی هستند که با امواج تختی که با اعداد موج  $k_e$  و  $k_\nu$  در حال حرکت هستند توصیف می شوند. بنابراین تابع موج حالت نهایی برابر با حاصل ضرب این سه بخش است:

$$|\phi_k(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ik_e \cdot r} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ik_\nu \cdot r} |J_f M_f \xi\rangle \quad (۳۶-۲)$$

که در آن  $|J_f M_f \xi\rangle$  تابع موج حالت هسته ای دختر است. دو عامل  $V^{-1/2}$  برای بهنجار کردن دو تابع موج لپتونی مورد نیاز است. می توان امواج تخت را برحسب هماهنگ های کروی بسط داد:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\lambda+1)} i^{\lambda} j_{\lambda}(kr) Y_{\lambda 0}(\theta, 0) \quad (37-2)$$

که در آن  $k = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_\nu|$  و  $\theta$  زاویه بین  $\mathbf{k}$  و  $\mathbf{r}$  است. هماهنگی های کروی  $Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$  به ازای  $\mu=0$  مستقل از زاویه سمتی  $\phi$  است.  $j_{\lambda}(kr)$  تابع بسل کروی از مرتبه  $\lambda$  است که می توان آن را به صورت یک سری توانی بسط داد:

$$j_{\lambda}(kr) = \frac{(kr)^{\lambda}}{(2\lambda+1)!!} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{(kr)^2}{(2\lambda+3)} + \dots \right) \quad (38-2)$$

در این جا می توانیم از تقریب طول موج بلند استفاده کنیم، چون مقدار  $Q$  گذار نوعاً از مرتبه چند MeV است و در نتیجه طول موج مربوط به این مقدار انرژی از مرتبه  $10^2$  fm است که خیلی بزرگتر از ابعاد هسته ای است. بنابراین آرگومان بدون بعد  $(kr)$  تابع بسل کروی برای مقادیر  $Q$  آزاد شده در واپاشی  $\beta$  هسته ای بسیار کوچکتر از واحد است. پس سری (2-41) سریع به یک همگرا می شود و  $j_{\lambda}(kr)$  ممکن است تنها با جمله اولش تقریب زده شود:

$$j_{\lambda}(kr) \approx \frac{(kr)^{\lambda}}{(2\lambda+1)!!} \quad (39-2)$$

با در نظر گرفتن این تقریب، تابع موج حالت نهایی به شکل زیر نوشته می شود:

$$|\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{V} \left\{ 1 + i \sqrt{\frac{4\pi}{3}} (kr) Y_{10}(\theta, \phi) + O((kr)^2) \right\} |J_f M_f \xi\rangle \quad (40-2)$$

### ۳-۴-۲ عناصر ماتریس گذار هسته ای

قبل از آنکه به یافتن عناصر ماتریس گذار بپردازیم ابتدا شکل های ممکن قسمت هسته ای عملگر واپاشی  $\beta$  را بررسی می کنیم. از آنجا که در واپاشی  $\beta^-$  یک نوترون به یک پروتون تبدیل می شود و در واپاشی  $\beta^+$  یک پروتون به یک نوترون تبدیل می شود، در اصل عملگر هسته ای باید یک جسمی

باشد؛ یعنی در هر زمان تنها یک نوکلئون را شامل شود، هم چنین باید شامل عملگر تک - ذره ای بالابرنده یا پایین آورنده ایزواسپین  $\tau_{\pm}$  نیز باشد. علاوه بر این، براساس نظریه  $(V - A)$  در برهم کنش ضعیف دو جمله وجود دارد، یک بخش بردار قطبی با ثابت جفت شدگی  $G_V$  و بخش دیگر، بردار محوری با ثابت جفت شدگی  $G_A$ . در حد غیر نسبیتی، بخش برداری با عملگر  $\tau_{\pm}$  و بخش بردار محوری با حاصلضرب عملگر اسپین ذاتی  $\sigma$  و  $\tau_{\pm}$  نمایش داده می شود. به دست آوردن روابط ریاضی صحیح و مناسب این نتایج، نیازمند انجام محاسبات ماهرانه با استفاده از توابع موج دیراک و ماتریس های  $\gamma$  می باشد که در اینجا به این مباحث نمی پردازیم.

بنابراین با کنار هم قرار دادن نتایج مربوط به عملگر هسته ای واپاشی بتا و آنچه که قبلاً برای توابع موج در روابط (۲-۳۵) و (۲-۴۰) به دست آمده، عنصر ماتریس گذار واپاشی  $\beta^{\pm}$  که در رابطه (۲-۳۴) آمده است به شکل زیر نوشته می شود:

$$\langle \phi_k(\mathbf{r}) | H' | \phi_0(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V} \langle J_f M_f \xi | \sum_{j=1}^A \{ G_V \tau_{\mp}(j) + G_A \sigma(j) \tau_{\mp}(j) \} \times \left\{ 1 + i \sqrt{\frac{4\pi}{3}} (kr) Y_{10}(\theta, \phi) + O((kr)^2) \right\} | J_i M_i \zeta \rangle \quad (41-2)$$

در این فصل غالباً، دو جمله مرتبه پایین تر در عبارت بالا بررسی می شود که آنها را به صورت کلی به عنوان عملگرهای " گذار مجاز " می شناسیم. جملات مرتبه بالاتر که شامل هماهنگ های کروی با مرتبه های بزرگتر از صفر هستند به " واپاشی های ممنوع " مربوط می شوند.

برای واپاشی های مجاز، عملگر گذار واپاشی  $\beta^{\pm}$  به شکل زیر است:

$$\mathbf{O}_{\lambda\mu}(\beta) = G_V \sum_{j=1}^A \tau_{\mp}(j) + G_A \sum_{j=1}^A \sigma(j) \tau_{\mp}(j) \quad (42-2)$$

اندازه حرکت زاویه ای حمل شده توسط جمله اول  $\lambda = 0$  است و توسط جمله دوم برابر با  $\lambda = 1$  است. عنصر ماتریس گذار برای این شکل از عملگر واپاشی  $\beta$  عبارت است از:

$$\langle \phi_k(\mathbf{r}) | H' | \phi_0(\mathbf{r}) \rangle = \frac{G_V}{V} \sum_{\mu M_f} \left\{ \left\langle J_f M_f \xi \left| \sum_{j=1}^A \tau_{\mp}(j) \right| J_i M_i \zeta \right\rangle \right. \\ \left. + g_A \left\langle J_f M_f \xi \left| \sum_{j=1}^A \sigma(j) \tau_{\mp}(j) \right| J_i M_i \zeta \right\rangle \right\} \quad (43-2)$$

که در آن  $g_A = G_A / G_V$ . اولین جمله در عبارت بالا را معمولاً با نام *واپاشی فرمی* و دومین جمله را با نام *واپاشی گاموف - تلر* می‌شناسند. عناصر ماتریس گذار برای عملگرهایی با  $\lambda > 1$  معمولاً مقادیر کوچکتري دارند چون آنها از جملات مرتبه بالاتر رابطه (۲-۴۱) ناشی می‌شوند: سهم آنها تنها در گذارهایی مهم است که دو جمله با پایین‌ترین مرتبه، از نظر قواعدگزینش اندازه حرکت زاویه ای و پاریته، ممنوع باشند [۴].

#### ۴-۴-۲ چگالی حالت های نهایی

چگالی حالت های نهایی در واپاشی  $\beta$  هسته ای به دلیل حالت نهایی سه جسمی تا حدی پیچیده است. در یک مورد دو جسمی، انرژی و اندازه حرکت یک ذره از طریق قوانین پایستگی، به مقادیر به دست آمده از ذره دیگر محدود می‌شود. در واپاشی  $\beta$  هسته ای، انرژی جنبشی قابل دسترس، با نادیده گرفتن انرژی پس زنی هسته ای، بین نوترینو و الکترون (یا پوزیترون) تقسیم می‌شود و در نتیجه طیف پیوسته ای از انرژی لپتون باردار و نوترینو حاصل می‌شود؛ تنها به این شرط که لپتون باردار، نوترینو و هستهٔ پس زن پایستگی انرژی - تکانه را برای واپاشی رعایت کنند. علاوه بر این لپتون باردار در میدان کولنی هستهٔ دختر گسیل می‌شود و تابع موج آن در اثر برهم کنش الکترومغناطیسی تغییر شکل می‌دهد، که این امر بر چگالی حالت های نهایی قابل دسترس لپتون باردار تاثیر می‌گذارد.

چون یک نوترینو با محیط اطرافش به سختی برهم کنش می‌کند، می‌توان آن را در لحظهٔ خلق شدن به صورت یک ذرهٔ آزاد در نظر گرفت. تعداد حالت ها با تکانهٔ  $p_\nu$  ( $p_\nu = \hbar k_\nu$ ) برای چنین ذراتی، بدون هیچ گونه توجهی به جهت حرکت ذره، در مکانیک آماری به صورت زیر داده می‌شود:

$$dn_v = \frac{V}{2\pi^3 \hbar^3} p_v^2 dp_v \quad (44-2)$$

که در آن  $V$  همان حجم است که برای بهنجار کردن موج تخت سه بعدی در رابطه (۳۶-۲) به کار رفته است. اگر جرم سکون نوترینو برابر  $m_\nu$  باشد انرژی کل از رابطه نسبیتی زیر به دست می آید:

$$E_\nu^2 = (m_\nu c^2)^2 + p_\nu^2 c^2 \quad (45-2)$$

$E_\nu$  برابر قسمتی از انرژی آزاد شده توسط هسته در حین گذار از حالت اولیه به حالت نهایی است، بقیه این انرژی مربوط به انرژی لپتون باردار و هسته دختر است.

برای بیان انرژی موجود در واپاشی  $\beta$  مرسوم است که به جای استفاده از مقدار  $Q$ ، از بیشینه انرژی جنبشی لپتون باردار گسیل شده، استفاده شود. علت انتخاب این ذره آن است که انرژی الکترون یا پوزیترون، کمیتی است که می توان آن را به طور مستقیم مشاهده کرد. به طور کلی بیشینه انرژی جنبشی ( $E_0$ )، انرژی نقطه پایان نامیده می شود و آن نقطه ای است که در نمودار تعداد لپتون های باردار مشاهده شده بر حسب تابعی از انرژی جنبشی، فراتر از آن نقطه هیچ ذره ای آشکارسازی نشده باشد. بر حسب انرژی نقطه پایان، رابطه زیر را داریم:

$$E_\nu = E_0 - E_e \quad (46-2)$$

که در آن  $E_e$  انرژی جنبشی لپتون باردار است. در این رابطه به منظور ساده سازی، از تغییرات انرژی نقطه پایان ناشی از اختلافات کوچک در انرژی پس زنی هسته دختر در حالت نهایی سه جرمی صرف نظر کردیم. چون جرم هسته ای خیلی بزرگتر از جرم لپتون هاست، حضور انرژی پس زنی هسته فقط در جایی که دقت بالایی مورد نظر باشد ضرورت دارد. چگالی حالت های نوترینو در (۴۴-۲) بر حسب  $E_0$  و  $E_e$  به شکل زیر بیان می شود:

$$dn_\nu = \frac{V}{2\pi^3 \hbar^3} \frac{(E_0 - E_e)}{c^3} \left\{ (E_0 - E_e)^2 - (m_\nu c^2)^2 \right\}^{1/2} dE_e \quad (47-2)$$



که در آن از رابطه  $p_v c = \sqrt{E_v^2 + (m_v c^2)^2}$  که از (۲-۴۵) به دست می آید، استفاده شده است.

لپتون های باردار گسیل شده در واپاشی نمی توانند به صورت ذرات آزاد رفتار کنند، چون واپاشی در میدان کولنی هسته دختر اتفاق می افتد. یک تقریب خوب با شروع از شکل ذره آزاد و آمیختن آن با یک عامل تغییر شکل  $F(Z, E_e)$  به منظور اصلاح تأثیرات کولنی به دست می آید:

$$dn_e = \frac{V}{2\pi^3 \hbar^7} F(Z, E_e) p_e^2 dp_e \quad (۲-۴۸)$$

عامل اصلاح  $F(Z, E_e)$  را تابع فرمی می نامند. در حد غیر نسبیتی، یعنی زمانی که سرعت لپتونها خیلی کمتر از سرعت نور باشد ( $v \ll c$ )، این تابع به شکل مربع قدر مطلق تابع موج کولنی در مبدأ بیان می شود و شکل تقریبی زیر را دارد:

$$F(Z, E_e) = \frac{x}{1 - e^{-x}} \quad (۲-۴۹)$$

که در آن  $x = \mp 2\pi \alpha Zc/v$  برای واپاشی  $\beta^\pm$  است و  $\alpha$  ثابت ساختار ریز است. شکل کلی تابع خیلی پیچیده تر است و یک نمایش تحلیلی ساده ندارد. تابع فرمی  $F(Z, E_e)$  به ازای مقادیر مختلف  $Z$  و  $E_e$  در جداول یافت می شود که این مقادیر معمولاً در کاربردهای عملی استفاده می شوند.

حال می توانیم روابط (۲-۴۳)، (۲-۴۷) و (۲-۴۸) را در (۲-۳۴) جایگزین کنیم و احتمال گذار برای یک الکترون یا پوزیترون گسیل شده با تکانه  $p_e = |\mathbf{p}_e|$  را به دست آوریم:

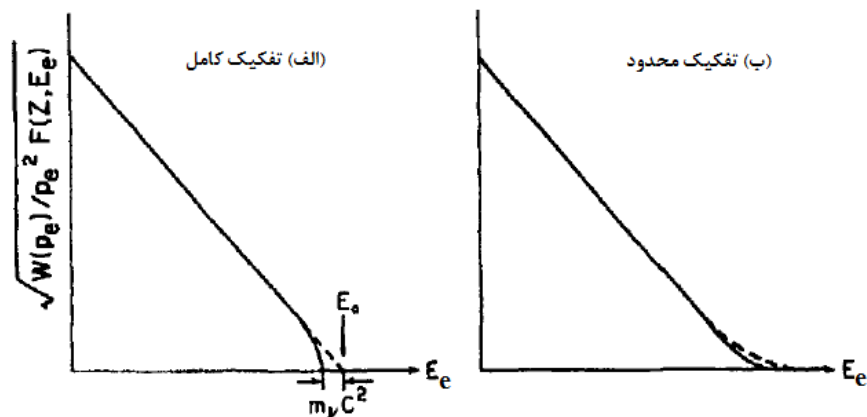
$$\begin{aligned} \mathcal{W}(p_e) = & \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \sum_{\mu M_f} \left| \langle J_f M_f \xi | \mathbf{O}_{\lambda\mu}(\beta) | J_i M_i \zeta \rangle \right|^2 \\ & \times F(Z, E_e) p_e^2 (E_0 - E_e) \left\{ (E_0 - E_e)^2 - (m_v c^2)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (۲-۵۰)$$

که در آن همه عوامل مربوط به  $V$  که حجم (اختیاری) بهنجار شده است، همدیگر را حذف کردند و جمع روی  $M_f$  نشان دهنده در نظر گرفتن همه حالت های نهایی ممکن است. با صرف نظر از جرم کوچک نوترینو، عبارت مربوط به  $\mathcal{W}(p_e)$  به صورت زیر ساده می شود:

$$W(p_e) = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \sum_{\mu M_f} \left| \langle J_f M_f \xi | \mathbf{O}_{\lambda\mu}(\beta) | J_i M_i \zeta \rangle \right|^2 F(Z, E_e) p_e^2 (E_0 - E_e) \quad (51-2)$$

تأثیرات این تقریب عمدتاً مربوط به ناحیه ای است که در آن  $E_e$  به انرژی نقطه پایان  $E_0$  خیلی نزدیک باشد و تأثیر  $m_\nu$  در این ناحیه کاملاً آشکار است [۴].

با توجه به رابطه (51-2)،  $\left\{ \mathcal{W}(p_e) / p_e^2 F(Z, E_e) \right\}^{1/2}$  متناسب با  $(E_0 - E_e)$  است. بنابراین نمودار  $\left\{ \mathcal{W}(p_e) / p_e^2 F(Z, E_e) \right\}^{1/2}$  به صورت تابعی از  $(E_0 - E_e)$  یک خط راست می شود (البته به جز ناحیه انرژی نقطه پایان) که شیب آن با عنصر ماتریس هسته ای متناسب است. چنین نموداری در شکل (6-2) نشان داده شده است که نمودار کوری نامیده می شود.



انرژی الکترونها گسیل شده

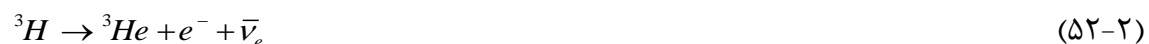
شکل (6-2) طرحی از یک نمودار کوری که تغییرات ریشه دوم تعداد الکترون ها یا پوزیترون ها با تکانه  $p_e$  تقسیم بر  $p_e^2 F(Z, E_e)$  را به صورت تابعی از  $E_e$  نشان می دهد. خطوط پر برای موردی است که جرم نوترینو  $m_\nu$  محدود باشد و خط چین ها برای  $m_\nu = 0$  است. نمودار با تفکیک کامل آشکار ساز: اگر  $m_\nu = 0$  باشد، این نمودار یک خط راست است که محور افقی را در انرژی نقطه پایان  $(E_0)$  قطع می کند. نمودار با تفکیک محدود آشکار ساز: در این حالت ناحیه نزدیک به انرژی نقطه پایان اصلاح شده است [۴].

## ۲-۴-۵ اندازه گیری جرم نوترینو

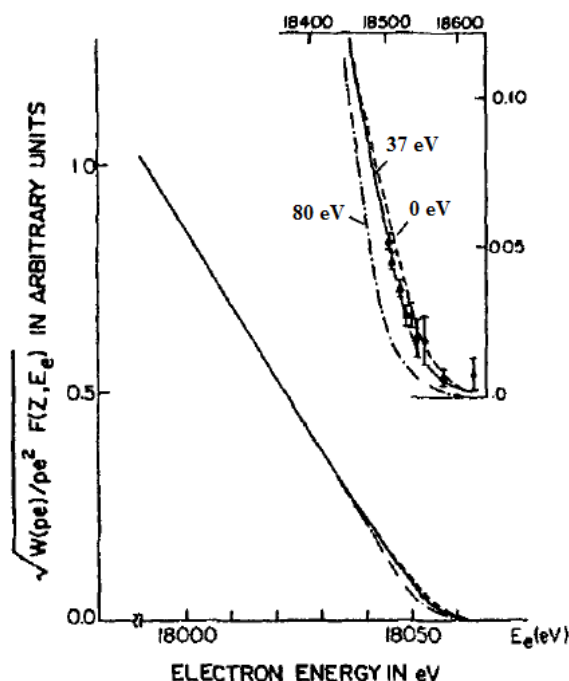
در اینجا مناسب است که کمی از موضوع اصلی منحرف شویم و تعدادی از اظهار نظرها درباره اندازه گیری جرم نوترینوی الکترون ( $m_\nu$ ) را بیان کنیم. تمامی شواهد تا به امروز نشان می دهد که  $m_\nu$

کوچک و از مرتبه چند الکترون – ولت است، هر چند هنوز احتمال  $m_\nu = 0$  رد نشده است. انتظار می رود که جرم دو نوترینوی دیگر یعنی  $\nu_\mu$  و  $\nu_\tau$  بسیار بزرگتر باشد، حد بالای کنونی این دو نوترینو به ترتیب عبارت است از  $0.5 \text{ MeV}/c^2$  و  $70 \text{ MeV}/c^2$ .

جالب ترین اندازه گیری تجربی  $m_\nu$ ، انتخاب یک مورد واپاشی با مقدار  $Q$  کوچک است (به طوری که بزرگی نسبی اثر محسوس تر شود) و نیز موردی که حالت های اتمی قبل و بعد از واپاشی به خوبی شناخته شده باشند که در این صورت تصحیحات مهم ناشی از تأثیر حالت های مختلف اتمی قابل محاسبه اند. (اثرات حالت های اتمی در بیشتر آزمایش های مربوط به واپاشی  $\beta$  ناچیزند ولی در مواردی که در جستجوی اثر کوچکی هستیم این اثرات حائز اهمیت می شوند). واپاشی  $\beta^-$  تریتون که از یک پروتون و دو نوترون تشکیل شده است با توجه به هر دو معیار، مورد مناسبی برای بررسی است. مقدار  $Q$  در این واپاشی نسبتاً کوچک است ( $18.6 \text{ keV}$ ) بنابراین جرم کوچک نوترینو بسیار تأثیر گذار خواهد بود که این اثر در نمودار کوری قابل مشاهده است، همچنین توابع موج اتم های تک الکترونی هم به خوبی شناخته شده اند. (در حقیقت محاسبه حالت یون حاصل ( $^3\text{He}$ ) یک مسئله استاندارد در مکانیک کوانتومی مقدماتی است). شکل (۲-۷) بخشی از نتایج تجربی خیلی دقیق را نشان می دهد.



لانگر و موفات که نخستین پژوهشگران در این زمینه بودند حد بالای  $m_\nu c^2 < 200 \text{ eV}$  را گزارش کردند، اما برگوسیت در دو دهه بعد این حد را به  $60 \text{ eV}$  تقلیل داد. نتیجه آزمایش دیگری که چند سال بعد انجام شد جرم غیر صفر احتمالی نوترینو را بین 14 تا  $46 \text{ eV}$  برآورده کرده است، در حالی که سایر نتایج حد بالاتر، حدود  $20 \text{ eV}$  را مطرح می کنند. در حال حاضر چند آزمایش برای حل این مسئله و کاهش احتمالی حد بالای جرم نوترینو در دست اجراست [۴،۲].



شکل (۷-۲) نمودار کوری نزدیک انرژی نقطه پایان برای واپاشی  $\beta^-$  تریتیوم. این فرایند غالباً در اندازه گیری جرم نوترینو استفاده می شود. منحنی هایی که با خط چین رسم شده اند برای  $m_\nu = 0 \text{ eV}/c^2$  و منحنی با خط تیره- نقطه برای  $m_\nu = 80 \text{ eV}/c^2$  است. بهترین برازش، مقدار  $m_\nu = 37 \text{ eV}/c^2$  است که با منحنی با خطوط پر نشان داده شده است [۴].

## ۲-۴-۶ احتمال گذار کل

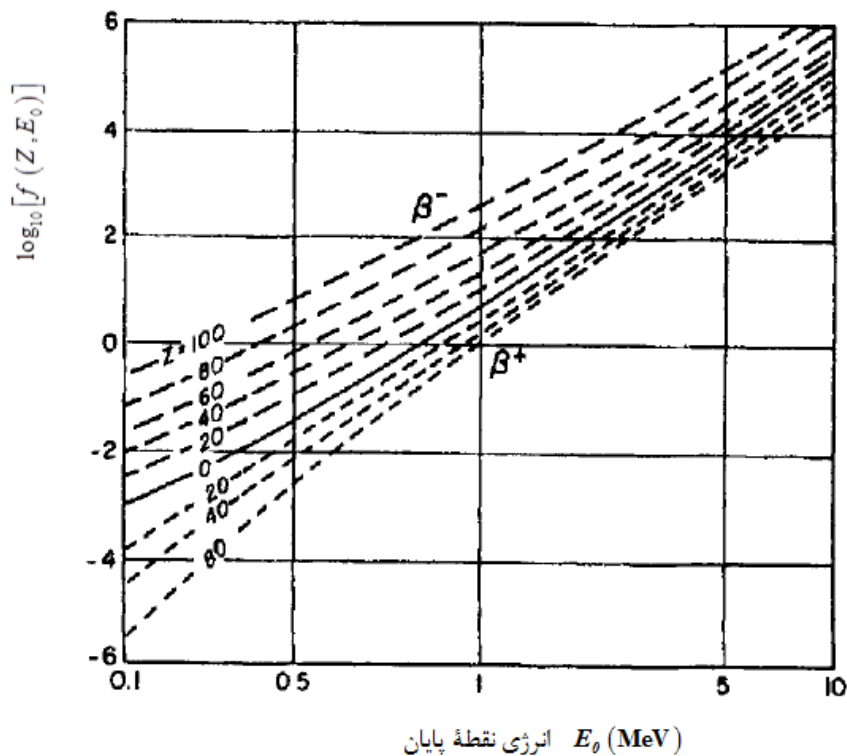
حال به مبحث اصلی خودمان یعنی واپاشی  $\beta$  هسته ای برمی گردیم. اگر توزیع لپتون های باردار گسیلی را به صورت تابعی از  $E_e$  مورد توجه قرار ندهیم، می توانیم احتمال گذار کل  $\mathcal{W}$  را با انتگرال گیری از  $\mathcal{W}(p_e)$ ، در رابطه (۲-۵۱)، روی همه مقادیر ممکن تکانه  $p_e$  به دست آوریم:

$$\mathcal{W} = \int \mathcal{W}(p_e) dp_e = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} f(Z, E_0) \sum_{\mu M_f} \left| \langle J_f M_f \xi | \mathbf{O}_{\lambda\mu}(\beta) | J_i M_i \xi \rangle \right|^2 \quad (۲-۵۳)$$

که در آن تابع بدون بعد  $f(Z, E_0)$  را *انتگرال فرمی* می نامند که به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} f(Z, E_0) &= \int F(Z, E_e) \left( \frac{p_e}{m_e c} \right)^2 \left( \frac{E_0 - E_e}{m_e c^2} \right)^2 \frac{dp_e}{m_e c} \\ &= \frac{1}{m_e^5 c^7} \int F(Z, E_e) p_e^2 (E_0 - E_e)^2 dp_e \end{aligned} \quad (۲-۵۴)$$

به استثناء مورد جزئی  $Z = 1$  برای هسته دختر، این انتگرال باید به صورت عددی محاسبه شود که نتایج این محاسبات در جداول گسترده ای قابل دسترسی است و برخی مقادیر خاص آن در شکل (۸-۲) رسم شده است.



شکل (۸-۲) انتگرال فرمی  $f(Z, E_0)$ ، انتگرال از تابع فرمی  $F(Z, E_e)$  روی انرژی  $E_e$  است.  $f(Z, E_0)$  تابعی از انرژی نقطه پایان برای مقادیر مختلف عدد اتمی هسته دختر  $Z$  است. خط چین های بلند در نیمه بالایی نمودار برای واپاشی  $\beta^-$  هستند و خط چین های کوتاه در نیمه پایینی نمودار مربوط به واپاشی  $\beta^+$  هستند [۴].

با استفاده از احتمال گذار می توان عبارتی برای نیمه عمر واپاشی  $\beta$  به دست آورد:

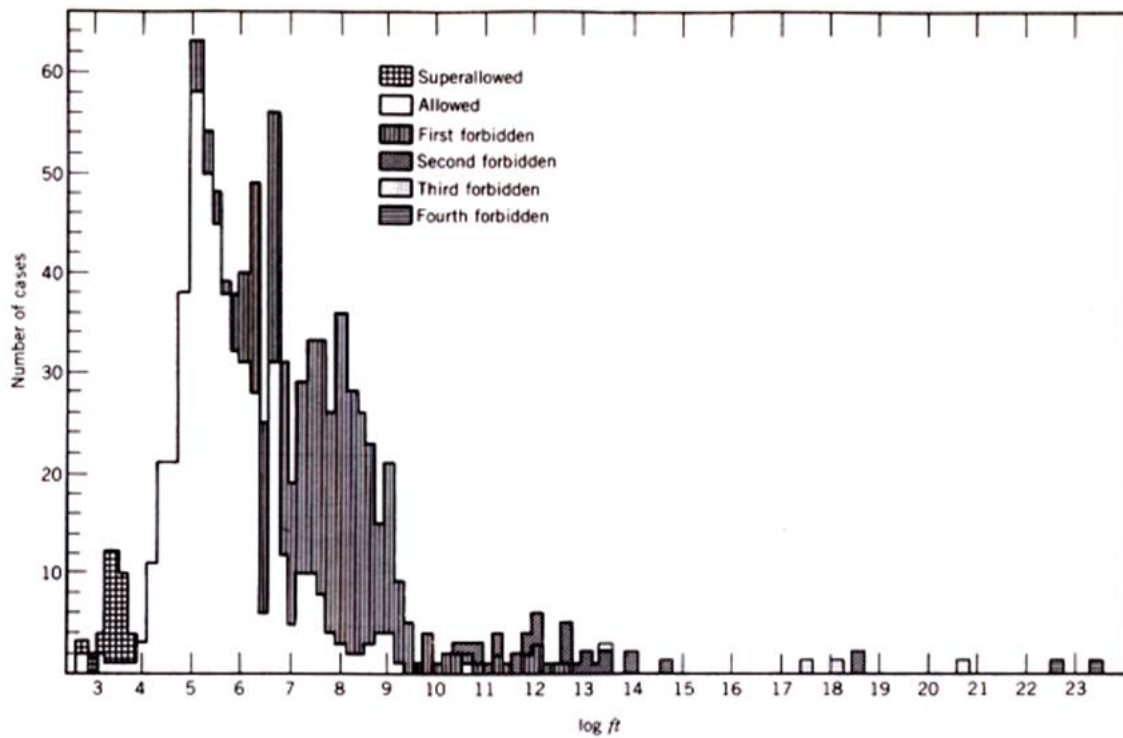
$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{W} = \frac{1}{f(Z, E_0)} \frac{2\pi^3 \hbar^7}{m_e^5 c^4} \frac{\ln 2}{\sum_{\mu M_f} |\langle J_f M_f \zeta | \mathbf{O}_{\lambda\mu}(\beta) | J_i M_i \zeta \rangle|^2} \quad (۵۵-۲)$$

غالباً به جای استفاده از نیمه عمر برای بیان آهنگ واپاشی  $\beta$  هسته ای، از مقدار  $ft$  استفاده می شود

که برابر با حاصل ضرب انتگرال فرمی  $f(Z, E_0)$  در  $T_{1/2}$  است:

$$ft \equiv f(Z, E_0) T_{1/2} = \frac{2\pi^3 \hbar^7}{m_e^5 c^4} \frac{\ln 2}{\sum_{\mu M_f} |\langle J_f M_f \xi | \mathbf{O}_{\lambda\mu}(\beta) | J_i M_i \zeta \rangle|^2} \quad (56-2)$$

همان طور که در این تعریف دیده می شود، مقدار  $ft$  یک کمیت فیزیکی پرمعنا در مطالعات واپاشی  $\beta$  هسته است، چون این کمیت رابطه مستقیمی با مربع عنصر ماتریس گذار هسته ای دارد و از طرف دیگر، شامل  $f(Z, E_0)$  است که آن نیز به شکل پیچیده ای به تعداد پروتون های هسته دختر و انرژی نقطه پایان وابسته است.



شکل (۹-۲) توزیع تجربی مقادیر  $\log ft$  برای انواع مختلف واپاشی های  $\beta$  [۴].

اگر هم واپاشی های مجاز و هم واپاشی های ممنوع را در نظر بگیریم، در می یابیم که گستره نیمه عمرهای واپاشی  $\beta$  بسیار وسیع است به طوری که مقادیر  $ft$  از حدود  $10^3$  تا  $10^{20}$  ثانیه تغییر می کنند. به این دلیل غالباً از مقادیر  $\log_{10} ft$  (برحسب ثانیه) استفاده می شود. یک توزیع پیچیده از مقادیر تجربی  $\log ft$  در شکل (۹-۲) نشان داده شده است.

## ۲-۴-۷ واپاشی مجاز $\beta$

حال به عملگر مربوط به واپاشی مجاز که در معادله (۲-۴۲) داده شده است بر می گردیم. بخش فرمی این عملگر تنها شامل عملگر بالابرنده یا پایین آورنده ایزواسپین است. در نتیجه این بخش ممکن است به صورت صریح روی همه نوکلئون ها جمع زده شود:

$$\sum_{j=1}^A \tau_{\mp}(j) = T_{\mp} \quad (۵۷-۲)$$

که در آن  $T_{\mp}$  مؤلفه سوم بالابرنده یا پایین آورنده ایزواسپین هسته است. اکنون می توان مقدار عنصر ماتریسی عملگر فرمی را بدون دانستن شکل صریح توابع موج هسته ای ارزیابی کرد:

$$\begin{aligned} \langle J_f M_f T_f T_{of} \left| \sum_{j=1}^A \tau_{\mp}(j) \right| J_i M_i T_i T_{oi} \rangle \\ = \sqrt{T_i(T_i+1) - T_{oi}(T_{oi} \mp 1)} \delta_{J_f J_i} \delta_{M_f M_i} \delta_{T_f T_i} \delta_{T_{of}(T_{oi} \mp 1)} \end{aligned} \quad (۵۸-۲)$$

این نتیجه با در نظر گرفتن این فرض که ایزواسپین یک عدد کوانتومی دقیق است، به دست آمده است. همان طور که می دانیم هم نیروی کولنی و هم اختلاف جرم بین پیون های باردار و خنثی تقارن ایزواسپین را نقض می کند که نتیجه آن روی مقادیر واقعی عنصر ماتریس فرمی تأثیر می گذارد. در موارد تجربی دیده شده که عوامل تصحیحی لازم برای هسته های سبک واقعاً کوچک هستند و توانسته اند دقت کافی را برآورد کنند بنابراین نتایج نهایی با عدم قطعیت ۰/۱٪ یا کمتر ممکن است معتبر باشد. از نتایج داده شده در معادله (۲-۵۸) به این مطلب پی می بریم که قواعد گزینش اندازه حرکت زاویه ای و ایزواسپین برای نوع فرمی واپاشی  $\beta^{\pm}$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} J_f = J_i & \quad (\Delta J = 0) \\ T_f = T_i \neq 0 & \quad (\Delta T = 0, \text{ but } T_i = 0 \rightarrow T_f = 0 \text{ forbidden}) \\ T_{of} = T_{oi} \mp 1 & \quad (\Delta T_0 = 1) \\ \Delta \pi = 0 & \quad \text{no parity change} \end{aligned} \quad (۵۹-۲)$$

به عبارت دیگر اثر اصلی واپاشی فرمی، ایجاد گذار بین حالت های ایزوباری است که تنها تفاوت بین حالت های اولیه و نهایی در این گذار، جایگزینی یک پروتون با یک نوترون (یا برعکس) است [۴].

برای عملگر گاموف - تلر،  $\sum_j \sigma(j) \tau_{\mp}(j)$ ، نمی توان به صراحت روی تمام نوکلئون ها جمع بست چون این عملگر به طور همزمان هم روی اسپین و هم روی ایزو اسپین یک نوکلئون عمل می کند. برخلاف واپاشی فرمی، عناصر ماتریسی عملگر گاموف - تلر را نمی توانیم ارزیابی کنیم مگر اینکه توابع موج اولیه و نهایی را داشته باشیم. قواعد گزینش اندازه حرکت زاویه ای و ایزواسپین را نمی توان تنها از خواص خود عملگر استنباط کرد. چون مرتبه های تانسور کروی این عملگر هم در فضای اسپین و هم در فضای ایزو اسپین برابر واحد است، لازم است که حالت های اولیه و نهایی به شکل زیر با هم رابطه داشته باشند:

$$\begin{aligned} \Delta J = 0, 1 & \quad \text{but } J_i = 0 \rightarrow J_f = 0 \text{ forbidden} \\ \Delta T = 0 & \quad \text{but } T_i = 0 \rightarrow T_f = 0 \text{ forbidden} \\ T_{0f} = T_{0i} \mp 1 & \quad (\Delta T_0 = 1) \\ \Delta \pi = 0 & \quad \text{no parity change} \end{aligned} \quad (۶۰-۲)$$

شرط آخر قاعده گزینش پاریته از این حقیقت ناشی می شود که  $\sigma$  یک عملگر شبه برداری است و به همین دلیل پاریته حالت های اولیه و نهایی را نمی تواند تغییر دهد. مقادیر مطلق عناصر ماتریسی عملگر گاموف - تلر در حالت کلی از عناصر ماتریسی مربوط به گذارهای فرمی کوچکتر هستند، چون این عملگر هم اسپین و هم ایزو اسپین را همزمان شامل می شود.

برای واپاشی های مجاز، مربع عنصر ماتریسی گذار به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu M_f} \left| \langle J_f M_f \xi | \mathbf{O}_{\lambda\mu}(\beta) | J_i M_i \zeta \rangle \right|^2 \\ & = G_V^2 \left\{ \sum_{M_f} \left| \langle J_f M_f \xi | T_{\mp} | J_i M_i \zeta \rangle \right|^2 + g_A^2 \sum_{\mu M_f} \left| \langle J_f M_f \xi | \sum_{j=1}^A \sigma(j) \tau_{\mp}(j) | J_i M_i \zeta \rangle \right|^2 \right\} \\ & = G_V^2 \left\{ \langle F \rangle^2 + g_A^2 \langle GT \rangle^2 \right\} \end{aligned} \quad (۶۱-۲)$$



به منظور ساده سازی در نوشتن فرمول، می توان برای نشان دادن عناصر ماتریسی مربوط به هر بخش از شکل اختصاری که در آخرین رابطه (۲-۶۱) اتخاذ شده است استفاده کرد. بنابراین، برای واپاشی های مجاز، مقدار  $ft$  می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$ft = \frac{K}{\langle F \rangle^2 + g_A^2 \langle GT \rangle^2} \quad (۲-۶۲)$$

ثابت جفت شدگی برداری  $G_V$ ، مانند سایر ثابت های جهانی، در تعریف ثابت  $K$  جذب شده است:

$$K = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m_e^5 c^4 G_V^2} = 6141.2 \pm 3.2 \text{ s} \quad (۲-۶۳)$$

در میان عوامل موجود در معادله بالا، مقدار  $G_V$  به خوبی شناخته شده است. تعیین مقدار  $K$  یکی از روش های به دست آوردن مقدار مطلق ثابت جفت شدگی برداری  $G_V$  است. در حال حاضر، بهترین مقدار اندازه گیری شده  $K$  برابر  $6141.2 \pm 3.2 \text{ s}$  است که از واپاشی ابر مجاز بعد از بکار بردن چند تصحیح درباره اندازه محدود و توزیع بار هسته به دست آمده است. در این روش مقدار ثابت جفت شدگی برداری عبارت است از  $G_V = 1.41546 \times 10^{-49} \text{ erg-cm}^3$ . البته می توان  $G_V$  را به شکل  $G_V / (\hbar c^3) = 1.1493 \times 10^{-11} \text{ MeV}^{-2}$  که رایج تر است، نیز بیان کرد. برای به دست آوردن ثابت جفت شدگی فرمی  $G_F / (\hbar c^3) = 1.16637 \times 10^{-11} \text{ MeV}^{-2}$ ، به عوامل تصحیحی بیشتری نیاز است [۴].

## ۲-۴-۸ واپاشی ابر مجاز $\beta$

واپاشیهای ابر مجاز  $\beta$ ، گذار از یک حالت هسته ای اولیه با  $J_i^\pi = 0^+$  به یک حالت نهایی با  $J_f^\pi = 0^+$  است که یک گروه خاص از واپاشی های  $\beta$  را تشکیل می دهند؛ چون بخش گاموف-تلا در این گذارها هیچ سهمی ندارد. این گذارها فرمی خالص هستند و در نتیجه نسبت به جزئیات توابع موج هسته ای کمترین حساسیت را دارند. چنین واپاشی های مفید هستند، برای مثال همان طور که در پاراگراف قبلی گفتیم در تعیین مقدار  $K$ ، و بنابراین  $G_V$ ، از واپاشیهای ابر مجاز استفاده

می کنند. در این گذارها هسته های سبک ترجیح داده می شوند، چون تأثیرات شکست ایزواسپین در آنها حداقل است؛ اما تعداد مواردی که قابل دسترسی هستند محدود است. غالباً واپاشی ابر مجاز  $\beta^-$  از نظر شرایط مقدار  $Q$  ممنوع است، چون برای هسته هایی با یک پروتون بیشتر، انرژی کولنی بیشتر است. بنابراین اغلب نمونه های یافت شده، گسیل کننده پوزیترون هستند مانند واکنش زیر:



که به اولین حالت برانگیخته  $^{14}\text{N}$  با  $J^\pi = 0^+$  و انرژی  $2.311 \text{ MeV}$  منجر می شود. نیمه عمر  $^{14}\text{O}$  برابر ۷۴ ثانیه و مقدار  $Q$  واکنش  $1.12 \text{ MeV}$  است. مقدار  $ft$  این واپاشی  $3109$  ثانیه است که از جمله کوچکترین مقادیر شناخته شده است. اگر حالات هسته ای ابتدایی و نهایی به درستی حالت های مانسته ایزوباری یکدیگر باشند، مقدار عنصر ماتریسی فرمی با استفاده از معادله (۲-۵۸) بدون استفاده صریح از توابع موج هسته ای به دست می آید.

مقدار  $g_A$  که همان نسبت بین ثابت جفت شدگی شبه برداری و برداری است، باید با استفاده از واپاشی گاموف – تلر به دست آید. شناخته شده ترین مقدار آن عبارت است از:

$$g_A = \frac{G_A}{G_V} = -1.259 \pm 0.004 \quad (65-2)$$

در اصل واکنش ایده آل برای استفاده در این مورد، واپاشی  $\beta^-$  نوترون هاست چون فقط تابع موج اسپین ذاتی یک نوترون آزاد در محاسبات وارد می شود [۴].

## ۲-۴-۹ واپاشی ممنوع $\beta$

از قوانین گزینش (۲-۵۹) و (۲-۶۰) در می یابیم که برای واپاشی های مجاز  $\beta$ ، اسپین حالت های اولیه و نهایی می توانند حداکثر به اندازه واحد با هم اختلاف داشته باشد و پاریته آنها باید یکسان باشد. اما گذار بین حالت ها با پاریته متفاوت و  $\Delta J > 1$  نیز اتفاق می افتد که مقادیر  $ft$  برای آنها خیلی بزرگتر از واپاشی های مجاز است و این بدان معنی است که احتمال وقوع کوچکتری دارند، از

این رو این گذارها را واپاشی های ممنوع می نامند. همان طور که از معادله (۲-۴۳) می توان دید عملگرهای واپاشی های ممنوع شامل هماهنگ های گروهی از مرتبه بزرگتر از صفر هستند.

واپاشی های ممنوع به وسیله مقدار  $l$  هماهنگ های گروهی به گروه های مختلفی تقسیم می شوند. به ازای یک مرتبه مشخص  $l$ ، عملگرهای ممکن برای واپاشی ممنوع عبارتند از  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  و  $(Y_{lm}(\theta, \phi) \times \sigma)_{\lambda, \mu}$ . بنابراین قواعد گزینش اندازه حرکت زاویه ای و پاریته برای گذارهای ممنوع مرتبه  $l$  ام به صورت زیر است:

$$\Delta J = l \text{ or } l \pm 1, \quad \Delta \pi = (-1)^l \quad (۲-۶۶)$$

قاعده گزینش ایزواسپین برای واپاشیهای ممنوع، همان قاعده گزینش واپاشی های مجاز است، چون هیچ تفاوتی بین ساختار ایزواسپینی عملگر واپاشی ممنوع و عملگر واپاشی مجاز وجود ندارد. بنابراین

$$\Delta T_0 = 1 \quad \Delta T = 0 \text{ or } 1 \quad \text{but } T_i = 0 \rightarrow T_f = 0 \text{ forbidden} \quad (۲-۶۷)$$

برای گذارهای ممنوع مرتبه اول، عملگرها عبارتند از  $rY_{1\mu}(\theta, \phi)$  (متناسب با  $\mathbf{r}$ ) و  $(\sigma \times rY_1(\theta, \phi))_{\lambda, \mu}$  با  $\lambda = 0, 1, 2$ . چون پاریته  $Y_{1\mu}(\theta, \phi)$  برابر  $-1$  است، تغییر پاریته بین حالت های اولیه و نهایی در این نوع واپاشی ضروری است.

علت بزرگ بودن مقادیر  $ft$  در واپاشی های ممنوع  $\beta$  این است که در این نوع واپاشی ها  $l > 0$  است، بنابراین یک سد اندازه حرکت زاویه ای وجود دارد که مانع گسیل لپتون ها می شود و این امر باعث کاهش اندازه عنصر ماتریس هسته ای و در نتیجه افزایش مقادیر  $ft$  می شود. مقادیر نوعی برای واپاشی های  $\beta$  مراتب مختلف در جدول زیر نمایش داده شده است. اما همان طور که در شکل (۲-۹) دیده می شود، تفکیک مقادیر تجربی  $ft$  برای گذارهای مراتب مختلف همانند تفکیک این مقادیر در جدول (۲-۱) واضح نیست. به طور کلی محاسبه عناصر ماتریس هسته ای برای واپاشی های ممنوع  $\beta$  واقعاً مشکل است، در نتیجه تعداد تحقیقات تئوری در این زمینه بسیار اندک است [۴].

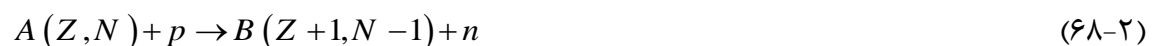
جدول (۲-۱) مقادیر نوعی  $\log ft$  برای واپاشی  $\beta$  هسته ای. [۴]

نوع واپاشی	$\log_{10} ft_{1/2}$
ابر مجاز	۲/۹ - ۳/۷
مجاز	۴/۴ - ۶/۰
ممنوع اول	۶ - ۱۰
ممنوع دوم	۱۰ - ۱۳
ممنوع سوم	> ۱۵

## ۲-۴-۱۰ واکنش های تبادل بار

واکنش های تبادل بار نیز می توانند یک پروتون در یک هسته را با یک نوترون یا یک نوترون در یک هسته را با یک پروتون جایگزین کنند. اگر چه این فرایند عمدتاً شامل برهم کنش های هسته ای است، عناصر ماتریسی که در آهنگ واکنش وارده شده اند ضرورتاً شبیه همان چیزی است که در واپاشی  $\beta$  از طریق برهم کنش های ضعیف به دست می آید. روابط بین واپاشی  $\beta$  و واکنش های تبادل بار از دو جهت قابل توجه هستند: اول از جهت ایجاد یک رابطه بین این دو برهم کنش و دوم از نظر مطالعه عناصر ماتریس هسته ای موجود در آنها.

یک واکنش تبادل بار نوعی می تواند به صورت واکنش  $(p, n)$  یا  $(n, p)$  بیان شود، در مورد اول هسته  $A$  به وسیله پرتوی از پروتون ها بمباران می شود. در میان واکنش های مختلفی که در این جا اتفاق می افتد موردی که در آن پروتون توسط هسته جذب می شود و یک نوترون در این تبادل گسیل می شود مورد توجه است. هسته باقی مانده  $B$  یک پروتون بیشتر و یک نوترون کمتر از هسته هدف  $A$  (هسته اولیه) دارد. چنین فرایندهایی به شکل زیر:



یا به صورت خلاصه  $A(p, n)B$  نمایش داده می شوند. قسمت ساختار هسته ای این واکنش به واپاشی  $\beta^-$  که در معادله (۲-۲۵) بیان شده شباهت زیادی دارد. غیر از دینامیک پراکندگی، تفاوت

اصلی بین این دو فرایند آن است که واکنش  $(p, n)$  به واسطه ملاحظات مقدار  $Q$  به منظور رسیدن به حالت نهایی با انرژی کمتر، آن طور که در معادله  $(2-30)$  برای واپاشی  $\beta^-$  داده شده است، محدودیتی ندارد. مشابه رابطه بین واکنش  $(p, n)$  و واپاشی  $\beta^-$ ، رابطه ای هم بین واکنش  $(n, p)$  که به صورت زیر بیان می شود و واپاشی  $\beta^+$  وجود دارد:

$$A(Z, N) + n \rightarrow B(Z-1, N+1) + p \quad (2-69)$$

بررسی این واکنش از نقطه نظر تجربی مشکل است، چون پرتوهای نوترون انرژی دار کمیاب هستند. اما ترکیبی از واکنش های  $(p, n)$  و  $(n, p)$ ، گستره تحقیقاتی کاملی در این زمینه را فراهم می سازد.

همچنین ممکن است فرایندهای تبادل بار از طریق واکنش هایی انجام شود که در آنها هسته ها به عنوان ذرات پرتابی و پراکنده شونده شرکت می کنند، مانند واکنش های  $(^3He, ^3H)$  و  $(^6Li, ^6He)$  و معکوس این واکنش ها. استفاده از  $^3He$  و یون های سنگین تر عواقبی دارد و آن این است که هم ذره برخورد کننده و هم ذره پراکنده شونده همانند هسته هدف، ممکن است در این فرایند برانگیخته شوند که این موضوع تحلیل و بررسی واکنش را پیچیده تر می کند. علاوه بر این، واکنش های  $(\pi^+, \pi^0)$  و  $(\pi^-, \pi^0)$  نیز برای مطالعه فرایندهای تبادل بار مورد استفاده قرار می گیرند.

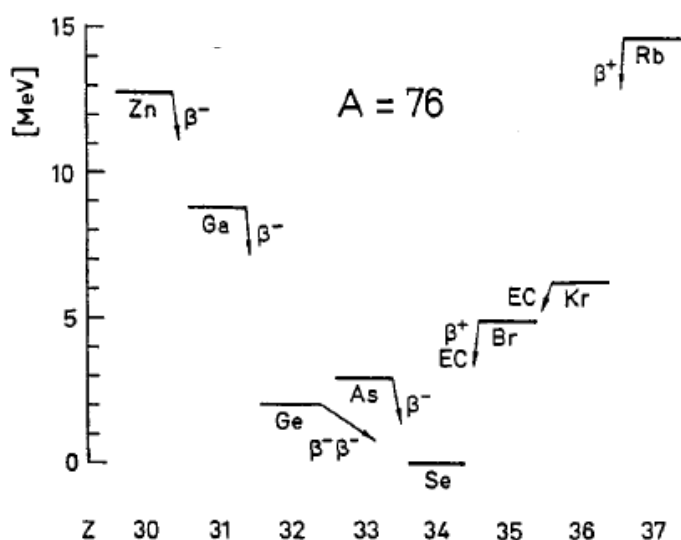
همچنین با استفاده از پیون ها و یونهای سنگین، مطالعه فرایندهای دو - تبدالی مانند  $(\pi^-, \pi^+)$  و  $(\pi^+, \pi^-)$  نیز امکانپذیر است. در این گونه واکنش ها، حالت های باری یک جفت نوکلئون تغییر می کنند. این واکنش ها به تصحیحات دو جسمی در هسته ها، که موضوع مهمی در مطالعات ساختار هسته ای است حساس هستند [4].



## فصل ۳

### واپاشی دوتایی

واپاشی دوتایی هسته ای ( $\beta\beta$ ) یکی از نادرترین فرایندها در طبیعت است که نیمه عمرهای طولانی از مرتبه  $10^{20}$  سال و بالاتر دارد. این فرایند شامل یک سه گانه ایزوباری  $(A, Z)$ ،  $(A, Z+1)$  و  $(A, Z+2)$  است، که در آن واپاشی تک بتایی از هسته زوج - زوج اولیه به هسته میانی به دلیل عدم پایستگی انرژی (یا حداقل مقدار خیلی کوچک انرژی آزاد شده در گذار) و یا اختلاف بسیار زیاد اندازه حرکت زاویه ای بین حالت‌های هسته ای ممنوع است (مانند  $^{48}\text{Ca}$ ). همه گسیلنده های  $\beta\beta$  و هسته های دختر آنها هسته های زوج - زوج هستند و به خاطر نیروی جفت شدگی که یک ویژگی مهم برهم کنش نوکلئون - نوکلئون در واکنش بین دو نوکلئون مشابه است، این هسته ها نسبت به هسته های فرد-فرد همسایه شان بسیار مقیدتر هستند. برای مثال طیف جرمی ایزوبارهای  $A=76$  را در شکل (۳-۱) نظر بگیرید. برای  $^{76}\text{Ge}_{44}$  واپاشی  $\beta^-$  به  $^{76}\text{As}_{43}$  و واپاشی  $\beta^+ / EC$  به  $^{76}\text{Ga}_{45}$  هر دو ممنوع است و در نتیجه واپاشی  $\beta\beta$  به  $^{76}\text{Se}_{42}$  تنها مد واپاشی ممکن است، چون جرم اتمی  $^{76}\text{Se}$  از  $^{76}\text{Ge}$  بیشتر است [۷].



شکل (۳-۱) طیف جرمی ایزوبارها با عدد جرمی  $A=76$ . مدهای واپاشی حالت پایه داده شده اند. واپاشی  $\beta^-\beta^-$  تنها مد واپاشی ممکن برای  $^{76}\text{Ge}$  است [۷].





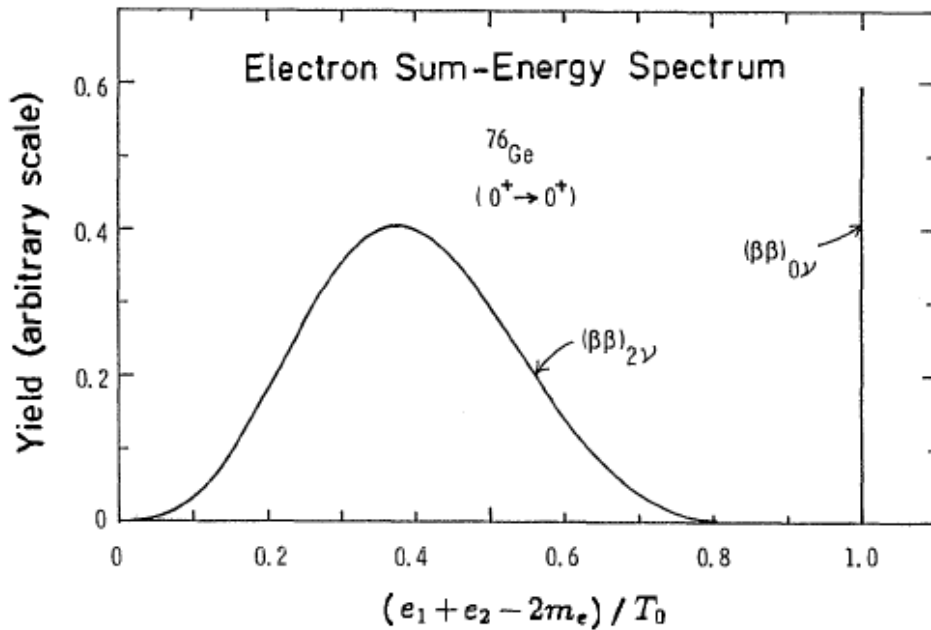
جدول (۱-۳) نیمه عمر تجربی واپاشی  $2\nu\beta\beta$  به همراه مقادیر  $Q$  و  $G^{2\nu}$  در این واپاشی [۱۰،۹].

Parent nuclide	Process	Transition	$T_{1/2}^{2\nu}(y)$	$Q$ -value (keV)	$(G^{2\nu})^{-1}$ ( $y \times \text{MeV}^{-2}$ )
$^{48}\text{Ca}$	$2\beta^-$	$0^+ \rightarrow 0^+$	$(4.39 \pm 0.58) \times 10^{19}$	$4273.6 \pm 4$	$9.7 \times 10^{16}$
$^{76}\text{Ge}$	$2\beta^-$	$0^+ \rightarrow 0^+$	$(1.43 \pm 0.53) \times 10^{21}$	$2039.006 \pm 0.050$	$2.9 \times 10^{19}$
$^{82}\text{Se}$	$2\beta^-$	$0^+ \rightarrow 0^+$	$(9.19 \pm 0.76) \times 10^{19}$	$2995.50 \pm 1.87$	$8.8 \times 10^{17}$
$^{96}\text{Zr}$	$2\beta^-$	$0^+ \rightarrow 0^+$	$(2.16 \pm 0.26) \times 10^{19}$	$3347.7 \pm 2.2$	$2.0 \times 10^{17}$
$^{100}\text{Mo}$	$2\beta^-$	$0^+ \rightarrow 0^+$	$(6.98 \pm 0.44) \times 10^{18}$	$3034.40 \pm 0.17$	$4.1 \times 10^{17}$
$^{100}\text{Mo}$	$2\beta^-$	$0^+ \rightarrow 0_1^+$	$(5.70 \pm 1.36) \times 10^{20}$		
$^{100}\text{Mo}$	$2\beta^-$	$0^+ \rightarrow 0_1^+$			
$^{116}\text{Cd}$	$2\beta^-$	$0^+ \rightarrow 0^+$	$(2.89 \pm 0.25) \times 10^{19}$	$2813.50 \pm 0.13$	$4.8 \times 10^{17}$
$^{128}\text{Te}$	$2\beta^-$	$0^+ \rightarrow 0^+$			
$^{130}\text{Te}$	$2\beta^-$	$0^+ \rightarrow 0^+$	$(7.14 \pm 1.04) \times 10^{20}$	$2527.01 \pm 0.32$	$8.0 \times 10^{17}$
$^{136}\text{Xe}$	$2\beta^-$	$0^+ \rightarrow 0^+$	$(2.34 \pm 0.13) \times 10^{21}$	$2458.7 \pm 0.6$	$7.9 \times 10^{17}$
$^{130}\text{Ba}$	$2\epsilon$	$0^+ \rightarrow 0^+$			
$^{150}\text{Nd}$	$2\beta^-$	$0^+ \rightarrow 0^+$	$(8.37 \pm 0.45) \times 10^{18}$	$3371.38 \pm 0.20$	$3.2 \times 10^{16}$
$^{150}\text{Nd}$	$2\beta^-$	$0^+ \rightarrow 0_1^+$			
$^{238}\text{U}$	$2\beta^-$	$0^+ \rightarrow 0^+$			

مد  $2\nu\beta\beta$  به دو گذار تک بتا متوالی شباهت دارد به استثناء آنکه حالت های میانی مجازی هستند. این مد از طریق اختلال مرتبه دوم برهم کنش ضعیف در مدل استاندارد الکتروضعیف توصیف می شود که این توصیف مستقل از ماهیت نوترینو یعنی، دیراک ( $\nu \neq \bar{\nu}$ ) یا ماژورانا<sup>۱</sup> بودن ( $\nu = \bar{\nu}$ )، و جرم دار یا بدون جرم بودن آن است. از طرف دیگر، در مد واپاشی  $0\nu\beta\beta$  عدد لپتونی پایسته نیست و این فرایند در مدل استاندارد ممنوع است. این واپاشی زمانی اتفاق می افتد که نوترینوی گسیل شده در یک رأس، توسط نوکلئونی در رأس دیگر جذب شود. بنابراین برای وقوع این واپاشی دو شرط باید محقق شود: (۱) نوترینو یک ذره ماژورانا باشد (۲) نوترینو جرم محدود داشته باشد یا یک مؤلفه راست دست در برهم کنش ضعیف باردار وجود داشته باشد. لازم به ذکر است که مشاهده واپاشی  $0\nu\beta\beta$  همیشه بر این امر دلالت دارد که نوترینوی الکترون یک ذره ماژورانای جرم دار است [۱۱،۱۲]. تفاوت دیگر دو مد واپاشی دوتایی، در طیف الکترون های گسیلی است که در شکل (۳-۳) نشان داده شده است. اگر هیچ نوترینویی گسیل نشود، مجموع انرژی جنبشی دو الکترون برابر مقدار  $Q$  واپاشی است.

<sup>1</sup>. Majorana

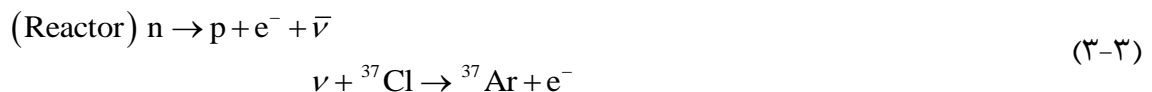
(با صرف نظر از مقدار کم انرژی پس زنی هسته) اما چون مد  $2\nu$  به یک حالت نهایی پنج جسمی (یعنی دو الکترون، دو نوترینو و هسته دختر) منجر می شود، مجموع انرژی دو الکترون گسیلی یک توزیع پیوسته خواهد داشت و قله این طیف به ازای مقادیر کمتر از  $Q/2$  مشاهده می شود [۷،۱۰].



شکل (۳-۳) طیف مجموع انرژی دو الکترون گسیل شده برای دو مد واپاشی  $0\nu\beta\beta$  و  $2\nu\beta\beta$  در هسته  $^{76}\text{Ge}$  [۱۳].

از لحاظ تاریخی، واپاشی  $\beta\beta$  به عنوان یک آزمون حساس از ماهیت دیراک / مازورانا نوترینوها، در نظر گرفته می شود. اولین بار مد  $2\nu$  توسط Goepfert – Mayer در سال ۱۹۳۵ پیشنهاد شد [۱۴]. او بر مبنای نظریه واپاشی  $\beta$  فرمی [۱۵]، نیمه عمر واپاشی  $\beta\beta$  را از مرتبه  $10^{20}$  سال برآورد کرد. Majorana در سال ۱۹۳۷ نظریه جدیدی درباره نوترینوها ارائه کرد: یک نظریه دو مولفه ای در مقابل نظریه چهار مولفه ای دیراک. Furry در سال ۱۹۳۹ احتمال وقوع مد  $0\nu$ ، که در آن یک نوترینوی ماجورانا بین دو نوکلئون مبادله می شود، را پیشنهاد کرد [۱۶]. نیمه عمرهای محاسبه شده برای برهم کنش های ضعیف گوناگون که امکان وقوع آنها وجود داشت، چند مرتبه بزرگی (بیشتر از  $10^5$ ) کوتاه تر از نیمه عمرهای واپاشی  $2\nu$  بودند. تلاش های تجربی در سال های بعد از ۱۹۴۰ تا اوایل

۱۹۵۰ (اولین آزمایشی که به جستجو مد  $0\nu$  اختصاص داشت ۶۵ سال پیش انجام شده است.) که در جستجو واپاشی جالب  $0\nu$  بودند به شواهد منفی منجر شد؛ حد پایین نیمه عمرهای تجربی مد  $0\nu$  از مقادیر تئوری محاسبه شده برای این مد، تجاوز می کرد. این نتایج بر این مطلب دلالت داشت که نوترینوی الکترون یک ذره دیراک است و معرفی عدد لپتونی پیشنهاد شد، که عدد لپتونی بین نوترینو و آنتی نوترینو به صورت یک کمیت پایسته تمایز قایل می شود. Davis در سال ۱۹۵۵ تلاش کرد که آزمایش گیراندازی یک نوترینو را انجام دهد، به این منظور او از آنتی نوترینوهای حاصل از فرایند شکافت در یک راکتور استفاده کرد:



در حقیقت اگر آنتی نوترینو  $\bar{\nu}$  و نوترینو  $\nu$  یکسان باشند، دومین واکنش امکانپذیر است و  ${}^{37}\text{Ar}$  باید مشاهده شود. اما این واکنش مشاهده نشد که این امر ظاهراً دیراک بودن نوترینو را تأیید می کند.

کمی بعد از آزمایش Davis، مشخص شد که پاریده به صورت بیشینه در برهم کنش ضعیف نقض می شود و شکل ریاضی عملگر برهم کنش ضعیف به صورت  $V-A$  تعیین شد [۱۷]. انتخاب این شکل برای عملگر نشان می دهد که چون یک (آنتی نوترینو) نوترینوی بدون جرم هلیسیتته معینی دارد، واکنش نشان داده شده در معادله (۳-۳) ممنوع است حتی اگر نوترینو یک ذره ماژورانا باشد یعنی اگر  $\nu = \bar{\nu}$ . نوترینوی گسیل شده در اولین واکنش هلیسیتته مثبت دارد و نوترینوی جذب شده در دومین واکنش باید هلیسیتته منفی داشته باشد. این اتفاق در واپاشی  $0\nu\beta\beta$  هم می افتد. بنابراین بعد از کشف نقض پاریده توجه به واپاشی  $\beta\beta$  کاهش یافت و پایستگی عدد لپتونی برقرار شد. در همین زمان سؤال در مورد مشخصه دیراک یا ماژورانا بودن نوترینو دوباره مطرح شد.

ایجاد نظریه های پیمانان ای جدید، مطالعه واپاشی  $\beta\beta$  را دوباره زنده کرد. نظریه الکتروضعیف استاندارد که برهم کنشهای الکترومغناطیس و ضعیف را در چارچوب نظریه گروه  $SU(2)_L \times U(1)$  با

هم متحد کرده است در توصیف داده های تجربی کاملاً موفق بوده است. این مدل حاوی هیچ نوترینوی راست دستی نیست و نوترینوی چپ دست در این نظریه نیز باید بدون جرم باشد. اما نوترینوهای جرم دار به طور طبیعی در نظریه های وحدت بزرگ، که بر مبنای گروه پیمانیه ای  $SO(10)$  هستند و در برخی از مدل های ابر ریسمان ظاهر می شوند. همچنین این نظریه ها بر وجود نوترینوی راست دست ماژورانا و نوترینوی چپ دست ماژورانا و وجود مؤلفه های راست دست در برهم کنش ضعیف دلالت دارند، اما اطلاعات کمی درباره مقدار دقیق جرم نوترینو به ما می دهند. مقادیر پیش بینی شده برای نوترینوهای سبک در هر نقطه ای بین  $10^{-11} eV$  و  $eV$  قرار می گیرد.

واپاشی  $0\nu\beta\beta$  حساس ترین آزمون برای وجود نوترینوهای ماژورانا است و در حال حاضر محدودیت های سختی روی جرم نوترینوی (الکترون) اعمال می شود. بنابراین آزمایشهای  $0\nu\beta\beta$  به مهمترین آزمایشهای فیزیکی زیر زمینی که امروزه در حال انجام است، وابسته هستند. مشاهده واپاشی  $0\nu\beta\beta$  معادل کشف فیزیک جدیدی، فراتر از نظریه استاندارد خواهد بود. مقیاسهای جرمی نظریه های وحدت بزرگ، به وسیله یک جرم نوترینوی محدود که فراتر از دسترسی مستقیم شتابدهنده های کنونی هستند، جستجو می شوند. از سوی دیگر، نتیجه گیریهای معتبر جرمهای نوترینو که از اندازه گیری آهنگ واپاشی  $0\nu\beta\beta$  به دست می آیند به طور قطعی به محاسبات معتبر عناصر ماتریس هسته ای وابسته هستند [۷].

### ۲-۳ آهنگ واپاشی $2\nu\beta\beta$

#### ۱-۲-۳ برهم کنش ضعیف باردار مؤثر

بر هم کنش ضعیف مؤثر که شامل جریان های برداری (V) و بردار محوری (A) است به صورت

زیر نوشته می شود:

$$H_W = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [j_L \cdot J_L^\dagger + \kappa j_L \cdot J_R^\dagger + \eta j_R \cdot J_L^\dagger + \lambda j_R \cdot J_R^\dagger] + h.c. \quad (4-3)$$

در این رابطه  $G_F$  ثابت جفت شدگی فرمی و  $\lambda$ ،  $\eta$ ،  $K$  پارامترهای ترکیبی جریانهای راست دست هستند و  $J_{L(R)}^\mu$  جریان هادرونی چپ دست (راست دست) است. (h.c. به همیوگ هرmitی چهار جمله قبل اشاره دارد.) جریان لپتونی  $J_{L(R)}^\mu$  به صورت زیر است:

$$j_L^\mu = \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_{eL}, \quad j_R^\mu = \bar{e} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \nu_{eR} \quad (5-3)$$

ماتریسهای  $\gamma$  عبارتند از:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6-3)$$

جریان نوترینوهای  $\nu_{eL}$  و  $\nu_{eR}'$  را به صورت برهم نهی ویژه حالت جرم نوترینوهای ماژورانا  $N_j$  با ویژه مقدار جرم  $m_j$  در نظر می گیریم:

$$\nu_{eL} = \sum_{j=1}^{2n'} U_{ej} N_{jL}, \quad \nu_{eR}' = \sum_{j=1}^{2n'} V_{ej} N_{jR} \quad (7-3)$$

که در آن  $n'$  تعداد نسلهای نوترینو ( $e, \mu, \tau, \dots$ ) است. هم نوترینوهای دیراک و هم نوترینوهای ماژورانا با یک انتخاب مناسب برای ماتریسهای ترکیب  $U$  و  $V$  به طور همزمان توصیف می شوند.

جریانهای هادرونی برحسب کوارکها درشکلی مشابه معادله (5-3) بیان می شوند که می توان آن را به جریانهایی برای نوکلئونها ساده کرد. جریانهای هادرونی به وسیله اختلالهای مرتبه بالاتری از برهم کنشهای قوی و الکتروضعیف اصلاح شده اند، که در نتیجه قسمت  $A$  دوباره بهنجار شده است و علاوه بر آن جمله مربوط به مکانیزم ضعیف ( $G_W$ ) و جمله شبه اسکالر ( $G_p$ ) نیز به دست می آیند. در تقریب غیر نسبی، جریانهای هادرونی به صورت عملگرهایی که روی نوکلئونها عمل می کنند به شکل زیر نوشته می شوند:

$$J_{L/R}^{0\dagger}(x) = \sum_n t_{-n} (G_V \mp G_A C_n) \delta(X - r_n) \quad (الف - 8-3)$$

$$J_{L/R}^{k\dagger}(x) = \sum_n t_{-n} (\mp G_A \sigma_n^k - G_V D_n^k) \delta(X - r_n) \quad (ب - 8-3)$$

عملگر ایزواسپین  $t_-$  یک نوترون را به یک پروتون تبدیل می کند،  $\sigma$  و  $r$  به ترتیب عملگرهای اسپین و مکان هستند و جمع روی  $n$ ، به معنای جمع روی همه نوکلئونهای موجود در هسته است. جمله های پس زنی نوکلئونی، که جمله های مرتبه اول در بسط غیرنسبیتی هستند، عبارتند از:

$$C_n = \left[ (P_n + P_n') \cdot \sigma_n - \frac{G_p}{G_v} (E_n - E_n') (P_n - P_n') \cdot \sigma_n \right] / (2M) \quad (9-3)$$

$$D_n = \left[ (P_n + P_n') - \left( 1 - 2M \frac{G_w}{G_v} \right) i \sigma_n \times (P_n - P_n') \right] / (2M) \quad (10-3)$$

که در آن  $(E_n, P_n)$  و  $(E_n', P_n')$  چهار بردار تکانه نوکلئون اولیه و نهایی و  $M$  جرم نوکلئون است.

### ۲-۲-۳ فرمولبندی آهنگ واپاشی مد $2\nu\beta\beta$

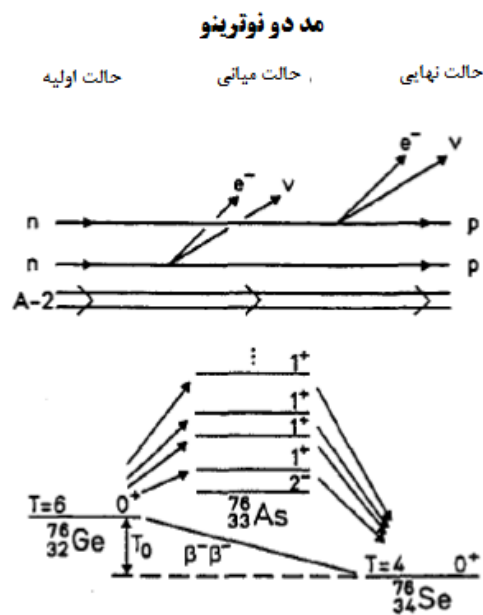
مد  $2\nu$  واپاشی  $\beta\beta$  را می توان در نظریه اختلال مرتبه دوم برهم کنش ضعیف به صورت گذارهای گاموف-تلر متوالی که از طریق حالت های  $1^+$  میانی مجازی انجام می شوند توصیف کرد، در شکل (۴-۳) نمونه ای از آن نشان داده شده است. چون انرژی آزاد شده در واپاشی از مرتبه  $1\text{MeV}$  است (بیشترین مقدار  $Q$  واپاشی  $\beta\beta$  برابر است با  $T_0 = 4.27\text{MeV}$  که مربوط به واپاشی دو بتایی هسته  $^{48}\text{Ca}$  است) و این انرژی بین چهار لپتون گسیل شده در واپاشی تقسیم می شود، می توان فرض کرد که الکترونها و نوترینوها در حالت موج- $S$  منتشر می شوند. در نتیجه می توان از جملات مرتبه بالاتر صرف نظر کرد: پاره موجهای بالاتر لپتونها، تأثیرات طول موج محدود. به علاوه در آنچه که در ادامه خواهد آمد، از جملات پس زنی نوکلئون و سهم جریانهای راست دست نیز صرف نظر شده است.

ابتدا گذارهای  $0_i^+ \rightarrow 0_f^+$  را در نظر می گیریم، که مطالعات تئوری و تجربی وسیعی در این زمینه انجام شده است. در نظریه اختلال مرتبه دوم، معکوس نیمه عمر با رابطه زیر به دست می آید:

$$\left[ T_{1/2}^{2\nu} (0^+ \rightarrow 0^+) \right]^{-1} = \frac{a_{2\nu}}{\ln 2} \int_{m_e}^{T_0+m_e} F_0(Z, e_1) k_1 e_1 de_1 \int_{m_e}^{T_0+2m_e-e_1} F_0(Z, e_2) k_2 e_2 de_2 \times \int_0^{T_0+2m_e-e_1-e_2} v_1^2 v_2^2 dv_1 \sum_{a,a'} A_{aa'} \quad (11-3)$$

$$a_{2\nu} = \frac{G^4 g_A}{32\pi^7 m_e} , \quad T_0 = e_1 + e_2 - 2m_e + \nu_1 + \nu_2 \quad (12-3)$$

در این روابط  $k = \sqrt{e^2 - m_e^2}$  تکانه الکترون است، و  $F_0(Z, e)$  تابع فرمی است که به منظور لحاظ کردن تغییرات توابع موج الکترون، که در اثر بار الکتریکی هسته دختر ایجاد می شود، در نظر گرفته می شود (در اینجا برای ساده سازی روابط، انرژی لپتون ها با  $e_i$  و  $\nu_i$  نشان داده شده است). [۱۳].



شکل (۳-۴) نمودار و تصویر واپاشی  $2\nu\beta\beta$  در هسته  $^{76}\text{Ge}$ . [۷]

عناصر ماتریسی گذار گاموف - تلمر و مخرجهای انرژی مربوط به نظریه اختلال در  $A_{aa'}$  ظاهر میشود:

$$A_{aa'} = \langle 0_f^+ \| \tau_- \sigma \| 1_a^+ \rangle \langle 1_a^+ \| \tau_- \sigma \| 0_i^+ \rangle \langle 0_f^+ \| \tau_- \sigma \| 1_{a'}^+ \rangle \langle 1_{a'}^+ \| \tau_- \sigma \| 0_i^+ \rangle \times \frac{1}{3} \left( K_a K_{a'} + L_a L_{a'} + \frac{1}{2} K_a L_{a'} + \frac{1}{2} L_a K_{a'} \right) \quad (13-3)$$

$$K_a = \frac{1}{E_a + e_1 + \nu_1 - E_i} + \frac{1}{E_a + e_2 + \nu_2 - E_i} \quad (14-3 \text{ الف})$$

$$L_a = \frac{1}{E_a + e_1 + \nu_2 - E_i} + \frac{1}{E_a + e_2 + \nu_1 - E_i} \quad (14-3 \text{ ب})$$



کمیت  $A_{aa}$  هم به انرژی حالت‌های هسته ای میانی وهم به انرژی لپتون‌ها بستگی دارد.

عنصر ماتریس هسته ای  $M_{GT}^{2\nu}$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$M_{GT}^{2\nu} = \sum_a \frac{\langle 0_f^+ \| \tau_- \sigma \| 1_a^+ \rangle \langle 1_a^+ \| \tau_- \sigma \| 0_i^+ \rangle}{E_a + T_0/2 + m_e - E_i} \quad (15-3)$$

اگر انرژی لپتون‌ها ( $e + \nu$ ) در معادله (3-14) را با  $T_0/2 + m_e$  جایگزین کنیم، قسمت هسته ای معادله (3-11) از عوامل سینماتیکی آن جدا می شود و به منظور در نظر گرفتن اثرات ساختار هسته ای باید روی عنصر ماتریس هسته ای  $M_{GT}^{2\nu}$  تمرکز کرد. بنابراین نیمه عمر به شکل زیر بیان می شود:

$$T_{1/2}^{2\nu} = \left[ G^{2\nu} |M_{GT}^{2\nu}|^2 \right]^{-1} \quad (16-3)$$

که در آن  $G^{2\nu}$  انتگرال فضای فاز است. در حالت کلی، جایگزینی انرژی لپتون‌ها با  $T_0/2 + m_e$  یک تقریب خوب است؛ چون وقتی یک جفت الکترون و نوترینو نیمی از بیشینه انرژی جنبشی در دسترس  $T_0$  را با خود حمل می کنند، تابع زیر انتگرال در معادله (3-11) بزرگ می شود. اما زمانی که یک حذف تقریباً کامل بین جملات معادله (3-15) اتفاق بیفتد، تقریب معادله (3-16) رد می شود. در این صورت  $M_{GT}^{2\nu}$  فقط یک مقیاس از شدت گذار هسته ای است و انتگرالگیری روی انرژی لپتون‌ها باید برای هر کدام از حالت‌های هسته ای میانی به صراحت انجام شود.

تقریب بستاری<sup>1</sup>، که در برخی از محاسباتی که پیش از این انجام شده است به کار رفته است، یک تقرب اضافی را معرفی می کند که در آن انرژی‌های حالت میانی  $E_a$  با مقدار متوسط  $\langle E_a \rangle$  جایگزین می شوند که در این صورت، جمع از طریق رابطه بستاری،  $\sum_a |1_a^+ \rangle \langle 1_a^+| = 1$ ، کامل می شود. با این تقریب عنصر ماتریس هسته ای که با معادله (3-15) تعریف شده به شکل زیر ساده می شود:

$$M_{GT}^{2\nu} = - \frac{[M_{GT}^{2\nu}]_c}{\langle E_a \rangle + T_0/2 + m_e - E_i} \quad (17-3)$$

<sup>1</sup>. The closure approximation

که در آن عنصر ماتریسی بستاری به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left[ M_{GT}^{2\nu} \right]_c = \sum_{m,n} \langle 0_f^+ \| \tau_{-m} \tau_{-n} \sigma_m \cdot \sigma_n \| 0_i^+ \rangle \quad (18-3)$$

در این تقریب فقط توابع موج حالت‌های  $0^+$  اولیه و نهایی مورد نیاز است و از محاسبات خسته کننده مربوط به تعداد زیاد حالت‌های میانی اجتناب می شود. اعتبار تقریب بستاری تنها به انتخاب  $\langle E_a \rangle$  بستگی دارد. واضح است که اگر عناصر ماتریسی در سمت راست معادله (3-15) علامت‌های متفاوتی داشته باشند این تقریب شکست می خورد و حذف قابل توجهی در جمع روی جملات ایجاد می شود.

قسمت برداری (V) برهم کنش ضعیف هیچ سهمی (یا سهم خیلی کوچکی) در مد  $2\nu$  دارد. در قسمت برداری جریان هادرونی در معادله (3-8 الف)، که تنها شامل عملگر ایزواسپین  $t_-$  مربوط به گذار فرمی است، جمع روی نوکلئونها به عملگر ایزواسپین پایین آورنده برای هسته  $(T_-)$  منجر می شود؛ یعنی  $\sum_n \tau_{-n} = T_-$ . عملگر  $T_-$  نمی تواند ایزواسپین حالت‌های هسته ای را تغییر دهد و در حالت عادی، ایزواسپین یک عدد کوانتومی خوب است. اما همان طور که در شکل (3-4) هم مشاهده می شود، حالت‌های اولیه و نهایی در واپاشی  $\beta\beta$  به اندازه دو واحد اختلاف ایزواسپین دارند. یک عنصر ماتریسی محدود برای گذار فرمی غالباً از جملاتی که ایزواسپین را نقض می کنند حاصل می شود که این جملات با ساده سازی محاسبات (یعنی به کارگیری تقریبها) در مدل‌های هسته ای وارد می شوند.

در هسته های زوج - زوج، یک حالت  $2^+$  با انرژی برانگیختگی پایین ظاهر می شود که به دلیل همبستگی های قوی چارقطبی پروتون - نوترون، معمولاً به عنوان اولین حالت برانگیخته در نظر گرفته می شود. وقتی که حالت  $2^+$  در هسته دختر از نظر انرژی پایین تر از حالت پایه هسته مادر باشد، ممکن است واپاشی  $\beta\beta$  از  $0_i^+ \rightarrow 2^+$  رخ دهد. آهنگ این واپاشی را می توان با کمی تغییرات از معادله (3-11) که مربوط به گذار  $0_f^+ \rightarrow 0_i^+$  است، به دست آورد. بیشینه انرژی جنبشی در دسترس  $T_0$  باید برای واپاشی  $0_i^+ \rightarrow 2^+$  بیان شود و  $A_{aa}$  با رابطه زیر جایگزین شود:

$$A_{aa'} = \frac{1}{3} \langle 2^+ \| \tau_- \sigma \| 1_a^+ \rangle \langle 1_a^+ \| \tau_- \sigma \| 0_i^+ \rangle \langle 2^+ \| \tau_- \sigma \| 1_{a'}^+ \rangle \langle 1_{a'}^+ \| \tau_- \sigma \| 0_i^+ \rangle \times (K_a - L_a)(K_{a'} - L_{a'}) \quad (19-3)$$

مخرجهای انرژی  $K_a$  و  $L_a$  در معادله (۳-۱۴) تعریف شده اند. در رابطه بالا، بر خلاف واپاشی  $0_i^+ \rightarrow 0_f^+$ ، اختلاف  $K_a$  و  $L_a$  ظاهر شده است که به حذف جملات توسط یکدیگر منجر می شود:

$$K_a - L_a \simeq \frac{2(\nu_2 - \nu_1)(e_2 - e_1)}{(E_a + T_0/2 + m_e - E_i)^3} \quad (20-3)$$

توان سه در مخرج و عدم تقارن در انرژی الکترون و نوترینو به شدت از واپاشی  $0_i^+ \rightarrow 2^+$  جلوگیری می کند، علاوه بر این مقدار کوچکتر  $T_0$  (نسبت به گذار قبلی) مانع سینماتیک دیگری برای وقوع این واپاشی است. بنابر آنچه که تا کنون گفته شد، عنصر ماتریس هسته ای و نیمه عمر برای این واپاشی به صورت زیر معرفی می شود:

$$M_{GT}^{2\nu}(0_i^+ \rightarrow 2^+) = \sum_a \frac{\langle 2^+ \| \tau_- \sigma \| 1_a^+ \rangle \langle 1_a^+ \| \tau_- \sigma \| 0_i^+ \rangle}{(E_a + T_0/2 + m_e - E_i)^3} \quad (21-3)$$

$$T_{1/2}^{2\nu}(0_i^+ \rightarrow 2^+) = \left[ G_2^{2\nu} |M_{GT}^{2\nu}(0_i^+ \rightarrow 2^+)|^2 \right]^{-1} \quad (22-3)$$

که در آن  $G_2^{2\nu}$  انتگرال فضای فاز است.

در تقریب بستاری، عنصر ماتریس هسته ای به صورت زیر ساده می شود:

$$M_{GT}^{2\nu}(0_i^+ \rightarrow 2^+) \simeq \frac{[M_{GT}^{2\nu}(0_i^+ \rightarrow 2^+)]_c}{(\langle E_a \rangle + T_0/2 + m_e - E_i)^3} \quad (23-3)$$

که در آن، عنصر ماتریسی بستاری با رابطه زیر داده می شود:

$$[M_{GT}^{2\nu}(0_i^+ \rightarrow 2^+)]_c = \sum_{m,n} \langle 2^+ \| \tau_{-m} \tau_{-n} [\sigma_m \times \sigma_n]^{(2)} \| 0_i^+ \rangle \quad (24-3)$$

در معادله بالا، براکت نشان دهنده جفت شدگی دو عملگر اسپین (تانسور کروی از مرتبه ۱) با یک عملگر تانسور کروی از مرتبه ۲ است [۷].

### ۳-۳ مدل‌های ساختار هسته ای مورد استفاده در محاسبات واپاشی $\beta\beta$

برای محاسبه آهنگ واپاشی  $2\nu\beta\beta$  و به ویژه نتیجه گیری در مورد جرم نوترینو یا به دست آوردن اطلاعاتی درباره جریانهای راست دست از نتایج تجربی آهنگ واپاشی  $0\nu$ ، محاسبات معتبر عناصر ماتریس هسته ای یک پیش نیاز ضروری است. تا کنون، از روش های متعددی با مدل‌های ساختار هسته ای متفاوت در محاسبه عناصر ماتریس هسته ای واپاشی  $\beta\beta$  استفاده شده است. با وجود تلاش‌های بسیار، تا سه دهه اخیر یک مشکل طولانی مدت وجود داشت یعنی محاسبات اصولی انجام شده در اغلب موارد مقادیر زیادی را برای آهنگ واپاشی  $2\nu\beta\beta$  برآورد می کردند. علت این بود که تئوری های هسته ای توانایی پیش بینی ضعیفی در این مورد و همین طور مد  $0\nu$  داشتند، و از این رو حدود بالا برای جرم نوترینوها و پارامترهای ترکیبی جریانهای راست دست که از نیمه عمرهای تجربی مد  $0\nu$  به دست می آیند، عدم قطعیت های قابل توجهی داشتند. در مورد بیان های غیر هسته ای مسئله تحقیقاتی صورت گرفت، اما در نهایت یک راه حل بر مبنای ساختار هسته ای در نظر گرفته شد. بعد از آن توانستند مکانیزم جلوگیری<sup>۱</sup> از آهنگهای واپاشی  $2\nu$  را با به رسمیت شناختن اهمیت همبستگی های حالت پایه<sup>۲</sup> و با استفاده از مدل‌های هسته ای براساس تقریب فاز تصادفی برای شبه ذره<sup>۳</sup> (QRPA) توضیح دهند [۱۸، ۱۹]. در بخش بعدی به ویژگیهای کلی انواع مختلف همبستگی ها که نقش تأثیر گذاری در واپاشی  $\beta\beta$  دارند می پردازیم. در بخش (۳-۳-۲) تا (۳-۳-۴) نیز مشخصات کلی مدل های هسته ای مورد استفاده در محاسبه واپاشی  $\beta\beta$  ارائه شده است.

### ۳-۳-۱ همبستگی های حالت پایه

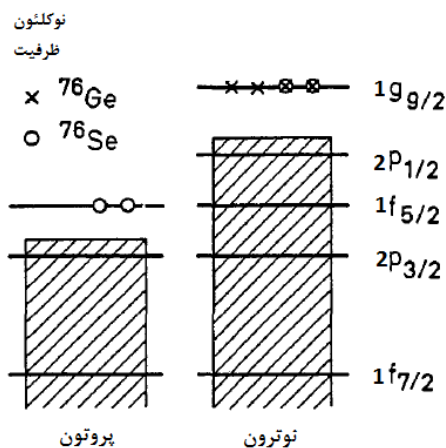
حالت‌های هسته ای را نمی توان به وسیله دترمینان اسلاتر در یک مدل میکروسکوپی، حتی برای حالت پایه<sup>۰+</sup> هسته های زوج - زوج، به خوبی توصیف کرد. در شکل (۳-۵) پیکربندی حالت پایه

1. suppression mechanism

2. ground state correlations

3. Quasiparticle Random Phase Approximation

هسته های مادر و دختر در واپاشی دو بتایی  $^{76}\text{Ge}$  در ساده ترین مدل پوسته ای نشان داده شده است. واپاشی  $2\nu\beta\beta$  برای اینگونه توابع موج حالت پایه ممنوع است، چون گذارهای گاموف - تلمر فقط بین مدارهایی با اندازه حرکت زاویه ای مداری یکسان که متعلق به یک پوسته اصلی نوسانگر هستند مجاز است. این وضعیت برای اغلب هسته هایی که واپاشی  $\beta\beta$  را انجام می دهند، به استثناء برخی هسته های سبک مانند  $^{48}\text{Ca}$ ، وجود دارد. از طرف دیگر در مورد  $^{48}\text{Ca}$  نیز، با استفاده از توابع موج در ساده ترین مدل پوسته ای مقادیر بسیار بزرگی برای عناصر ماتریس هسته ای به دست می آید. به منظور دست یابی به یک توصیف بهتر از گذارهای  $\beta\beta$ ، پیکربندی هایی شامل برانگیختگی های ذره - حفره را باید در توابع موج هسته ای لحاظ کرد. به طور کلی، این گونه ترکیبات در حالت پایه را "همبستگی های حالت پایه" می نامند که انواع مختلفی از این همبستگی ها وجود دارد.



شکل (۳-۵) پیکربندی حالت های پایه  $^{76}\text{Ge}$  و  $^{76}\text{Se}$  در ساده ترین مدل پوسته ای (این حالتها به ترتیب حالت های اولیه و نهایی در واپاشی دو بتایی  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$  هستند.) نواحی هاشور خورده نشان دهنده مدارهای اشغال شده است [۷].

اگر فضای مدل<sup>۱</sup> به اندازه کافی بزرگ باشد و از برهم کنشهای باقی مانده واقعی استفاده شود، مدل پوسته ای به صورت خودکار هر نوع همبستگی را شامل می شود. اما در اغلب موارد، محاسبه براساس این نوع مدل پوسته ای از نظر عملی غیر ممکن است و فضای مدل باید به شدت کاهش یابد.<sup>۲</sup>

1. model space

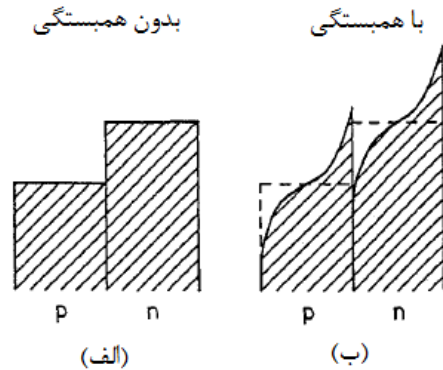
2. must be truncated

بنابراین در نظر گرفتن صریح همبستگی هایی که از ویژگی های برجسته برهم کنش نوکلئون - نوکلئون نتیجه می شوند معقول و منطقی است و آنها برای گذارهای مورد نظر ما با اهمیت هستند. نیروی جفت شدگی مهمترین بخش برهم کنش هسته ای باقی مانده است که بین دو نوکلئون مشابه (دو پروتون یا دو نوترون) عمل می کند. این نیرو باعث می شود که دو نوکلئونی که در یک مدار هستند یک جفت با  $J^\pi = 0^+$  را تشکیل دهند. این همبستگی ها، همبستگی جفت شدگی نامیده می شوند. چون نیروی جفت شدگی یک نیروی جاذبه است (عنصر ماتریسی منفی است) حالت پایه همه هسته های زوج-زوج دارای اسپین - پارته  $J^\pi = 0^+$  هستند و سطح انرژی این هسته ها از هسته های همسایه با نوترون فرد و پروتون فرد، پایین تر است.

همبستگی های جفت شدگی در نظریه<sup>1</sup> BCS در نظر گرفته می شود. در شکل (۳-۶) توزیع نوکلئونها در بین مدارها در دو حالت، با همبستگی جفت شدگی و بدون آن، با هم مقایسه شده است. در حالتی که هیچ همبستگی وجود ندارد (شکل ۳-۶ الف) مدارهای پایینی کاملاً پر و مدارهای بالایی خالی هستند. (ممکن است بخشی از نزدیکترین مدار به انرژی فرمی پر باشد) از طرف دیگر، برهم کنش جفت شدگی روی توزیع نوکلئونها تأثیر می گذارد (شکل ۳-۶ ب). در مدارهای نزدیک به انرژی فرمی احتمال اشغال از ۰ تا ۱ تغییر می کند. همه نوکلئونها با  $J^\pi = 0^+$  جفت شده اند. این حالت نسبت به شبه ذرات، که از طریق تبدیلات Bogoliubov تعریف می شوند، تهی است. همبستگی های جفت شدگی، آهنگ واپاشی  $2\nu\beta\beta$  را تا یک مقدار محدود افزایش می دهند، در صورتی که این واپاشی در پیکربندی ساده ترین مدل پوسته ای (شکل ۳-۶ الف) ممنوع است. بنابراین، این همبستگی ها منشأ مهمترین اثر جمعی در افزایش آهنگ واپاشی  $\beta\beta$  هستند. اما اگر در محاسبه نیمه عمر فقط همبستگی های جفت شدگی را در نظر بگیریم مقادیر حاصله تا چندین مرتبه بزرگی، از نیمه عمرهای تجربی کوتاه تر هستند.

<sup>1</sup>.Bardeen Cooper Schrieffer theory

### همبستگی جفت شدگی



شکل (۳-۶) توزیع نوکلئونها بین مدارهای تک - ذره ای در یک هسته ؛ (الف) بدون همبستگی های جفت شدگی (ساده ترین مدل پوسته ای)، (ب) با در نظر گرفتن همبستگی های جفت شدگی [۷].

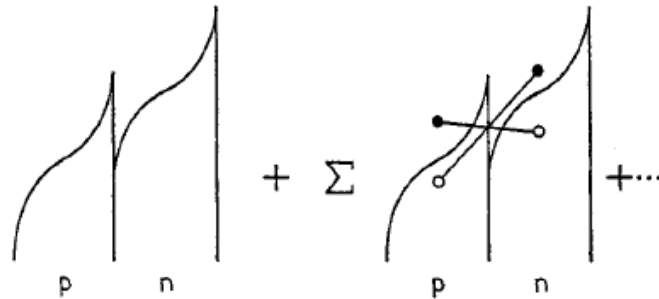
مدل "تقریب فاز تصادفی"<sup>۱</sup> (RPA) همبستگی هایی را در حالت پایه در بر می گیرد که به برانگیختگی های هسته ای مطرح شده، مرتبط است. چندین نسخه متفاوت از مدل RPA وجود دارد که به مد برانگیختگی مورد نظر و یا به هسته بستگی دارد [۲۰]. در بخش (۳-۳-۴) به مدل شبه ذره پروتون - نوترون RPA یا (pnQRPA) اشاره می کنیم. این نوع مدل RPA گذارهای تبادل باری که در آنها بار هسته به اندازه یک واحد تغییر می کند، مانند گذار گاموف - تلر، را توصیف می کند و برحسب تعداد درجات آزادی شبه ذرات بیان می شود. حالت پایه برای فونون QRPA تهی است که در معادله (۳-۳۴) تعریف خواهد شد. تابع موج حالت پایه در شکل (۳-۷) نشان داده شده است: مؤلفه اصلی، حالت پایه BCS است که هیچ شبه ذره ای ندارد (شکل (۳-۶-ب)) و ترکیبات عمده آن حالت های چهار-شبه ذره ای هستند. از حل معادله RPA (معادله (۳-۳۶)) برای مد  $J^\pi$  داریم:

$$|RPA\rangle \sim |-\rangle + \sum_{pn, p'n'} \alpha_{pn, p'n'} |pn(J^\pi), p'n'(J^\pi); 0^+\rangle + \dots \quad (۳-۲۵)$$

که در آن  $|-\rangle$  به حالت پایه BCS اشاره دارد و جمله بعد عبارت است از حالت چهار - شبه ذره ای دارای دو جفت شبه ذره های پروتون و نوترون که هر دوی آنها اسپین - پاریته  $J^\pi$  دارند، این رابطه در شکل (۳-۷) نشان داده شده است.

<sup>۱</sup>. Random Phase Approximation

### همبستگی های حالت پایه در pnQRPA



شکل (۷-۳) تابع موج حالت پایه در مدل شبه ذره پروتون - نوترون RPA. در این شکل دایره ها به شبه ذرات اشاره دارند و خط اتصال بین آنها نشان دهنده جفت شدگی اندازه حرکت زاویه ای یک جفت پروتون - نوترون است. هر دو جفت، اسپین - پاریته یکسان  $J^\pi$  دارند [۷].

در گذار تبادل بار، تولید یک جفت  $pn$  از مؤلفه اصلی و نابودی یکی از جفت ها در مؤلفه های چهار- شبه ذره ای می تواند به همان حالت جفت  $pn$  در هسته فرد - فرد منجر شود. بنابراین، وارد کردن همبستگی های حالت پایه از طریق تداخل بین دو دامنه گذار به طور جدی بر شدت گذار تأثیر می گذارد (شکل (۳-۱۳)). برای محاسبه آهنگ واپاشی  $2\nu\beta\beta$  که از گذارهای گاموف - تلمر متوالی از طریق حالت های میانی  $1^+$  ناشی می شود باید معادله RPA برای  $J^\pi = 1^+$  حل شود. در این مورد که ترکیبات تابع موج آن در معادله (۳-۲۵) داده شده است، همبستگی های اسپین - ایزواسپین نقش مهمی را در جلوگیری از آهنگ واپاشی ایفا می کنند. برهم کنش ذره - ذره (معادله (۳-۳۸) که در ادامه می آید) همبستگی های اسپین - ایزواسپین یعنی دامنه های  $\alpha_{pn,p'n'}$  در معادله (۳-۲۶) را افزایش می دهد.

از نیروی چارکطبی - چارکطبی<sup>۱</sup> (QQ) که مهمترین مؤلفه برهم کنش پروتون - نوترون است، همبستگی های QQ در توابع موج هسته ای به دست می آید. به دلیل برهم کنش QQ، هسته های زوج - زوج یک حالت  $2^+$  در انرژی پایین دارند که معمولاً به عنوان اولین حالت برانگیخته در این

<sup>۱</sup>. Quadruple - Quadruple force



هسته ها شناخته می شود. حالت پایه برای مد برانگیخته  $2^+$  در همان هسته (بدون تغییری در عدد اتمی، برخلاف آنچه که در گذار تبادل بار اتفاق می افتد) ساختار زیر را دارد:

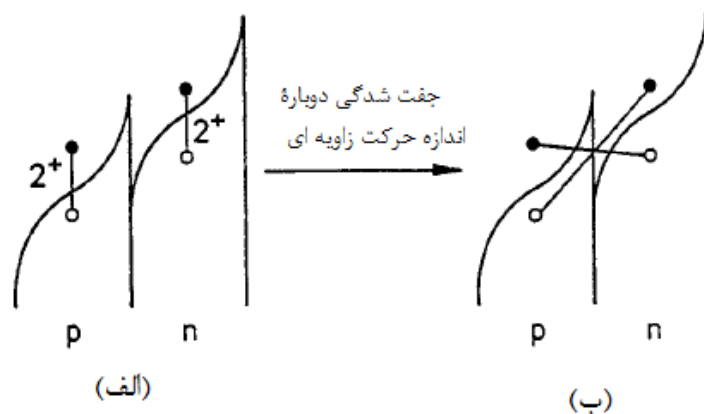
$$|RPA\rangle \sim |-\rangle + \sum_{pp',nn'} \alpha_{pp',nn'} |pp'(2^+), nn'(2^+); 0^+\rangle + \dots \quad (26-3)$$

(توجه کنید که معادله (25-3) مربوط به مد تبادل بار است). Klapdor و Grotz نشان دادند که همبستگی های QQ در حالت پایه، از آهنگ مد  $2\nu$  واپاشی  $\beta\beta$  جلوگیری می کند [18, 21]. این را می توان از جفت شدگی دوباره اندازه حرکت زاویه ای در رابطه زیر و نیز در شکل (3-8) درک کرد:

$$\begin{aligned} & |pp'(2^+), nn'(2^+); 0^+\rangle \\ &= \sum_J (-1)^{p+n'-2-J} \sqrt{5(2J+1)} W(pp'nn'; 2J) |pn(J^\pi), p'n'(J^\pi); 0^+\rangle \end{aligned} \quad (27-3)$$

بنابراین همبستگی های QQ دارای مؤلفه های مؤثری بر گذارهای گاموف تدر ( $J^\pi = 1^+$ ) است [7].

### همبستگی های QQ



شکل (3-8): همبستگی های چارقطبی - چارقطبی (QQ) در تابع موج حالت پایه. (الف) مؤلفه های غالب چهار-شبه ذره ای همبستگی های حالت پایه شامل دو پروتون جفت شده با  $2^+$  و دو نوترون جفت شده با  $2^+$  هستند. (ب) جفت شدگی چارقطبی می تواند از طریق جفت شدگی دوباره اندازه حرکت زاویه ای و به صورت ترکیب خطی دو جفت پروتون و نوترون که هر دو  $J^\pi$  یکسان دارند بیان شود [7].

### ۳-۳-۲ مدل پوسته ای

همه مدل‌های میکروسکوپی براساس مدل پوسته ای هستند، نظریهٔ مدل پوسته ای ۶۰ سال پیش توسط Jensen و Mayer معرفی شد. در این مدل فرض می‌شود که نوکلئونهای درون یک هسته در یک پتانسیل تک - ذره ای حرکت می‌کنند، که این پتانسیل از عمل کردن نیروهای هسته ای و کولنی در بین نوکلئونها به وجود می‌آید و برهم کنش آنها با یکدیگر از طریق برهم کنشهای باقی مانده انجام می‌شود. تابع موج هسته ای یک سیستم چند - ذره ای به صورت یک ترکیب خطی پادمقارن از حالت‌های پایهٔ متعامد بهنجار که حاصلضرب توابع موج تک ذره ای هستند، بیان می‌شود. دامنه‌های تابع موج هسته ای با قطری کردن هامیلتونی مؤثر که شامل جمله تک - ذره ای و برهم-کنش باقی مانده است محاسبه می‌شوند. یک مجموعه از حالت‌های پایه با مشخص کردن یک بخش مرکزی و مدارهای تک - ذره ای ظرفیت تعیین می‌شوند. مدارهای تک - ذره ای در بخش مرکزی به طور کامل توسط نوکلئونها اشغال شده اند و این نوکلئونها در گذارهای هسته ای شرکت نمی‌کنند. نوکلئونهای باقی مانده با رعایت اصل طرد پائولی در بین مدارهای ظرفیت توزیع می‌شوند [۷].

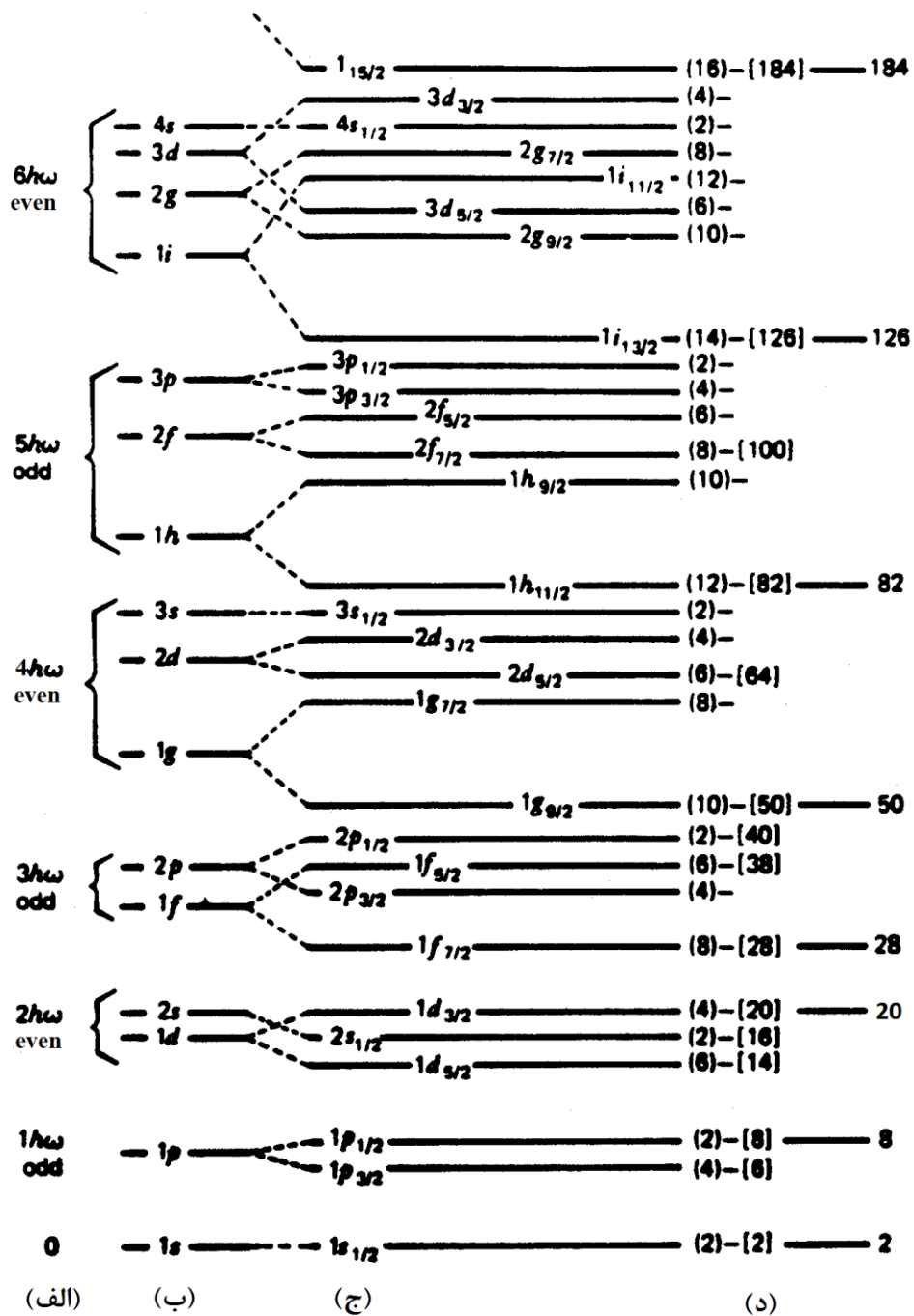
کاربرد مرسوم تکنیک‌های مدل پوسته ای به گسیلنده های  $\beta\beta$  سبک محدود می‌شود. همان طور که قبلاً ذکر شد برای هسته های سنگین، فضای مدل و پیکربندی ها باید به طور جدی کاهش یابد، همچنین اثرات مهم جمعی در واپاشی  $\beta\beta$  را نیز تنها تا حدودی می‌توان در نظر گرفت. بررسی صریح طیف  $1^+$  میانی مشکل و یا حتی غیرممکن است و در این روش می‌توان آن را با نتایج تجربی (p,n) مقایسه کرد. این کار فقط برای  $^{48}\text{Ca}$  انجام شده که بعد از  $^{46}\text{Ca}$ ، سبکترین گسیلنده  $\beta\beta$  است.

حال می‌خواهیم با ذکر چند مثال جزئیات بیشتری از این مدل را بیان کنیم. همان طور که گفته شد، فرض اساسی در این مدل آن است که هر نوکلئون (پروتون و نوترون) به طور مستقل در یک پتانسیل، که نمایندهٔ برهم کنش متوسط بین نوکلئونها با یکدیگر در داخل هسته است، حرکت میکند. این پتانسیل از یک قسمت مرکزی و یک جملهٔ جفت شدگی اسپین - مدار تشکیل شده است.

ترازهای انرژی که از حل معادله شرودینگر برای یک نوکلئون در این پتانسیل به دست می آیند، در شکل (۳-۹) نشان داده شده است. ترازهای انرژی در ستونهای (الف) و (ب) به ترتیب با استفاده از پتانسیل نوسانگر هماهنگ و پتانسیل وود - ساکسون به دست آمده اند که در آنها جمله جفت شدگی اسپین - مدار در نظر گرفته نشده است. نمادهای  $s, p, d, f, \dots$  به ترتیب به اندازه حرکت مداری  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  مربوط می شوند. ستون (ج) در شکل (۳-۸) شکافتگی ترازها ناشی از اضافه کردن جمله اسپین - مدار را نشان می دهد. هر تراز در ستون (ج) یک حالت تک - ذره نامیده می شود که به صورت  $(n l j)$  نماد گذاری شده است و در آن  $n$  عدد کوانتومی شعاعی و  $j = l + s$  است.

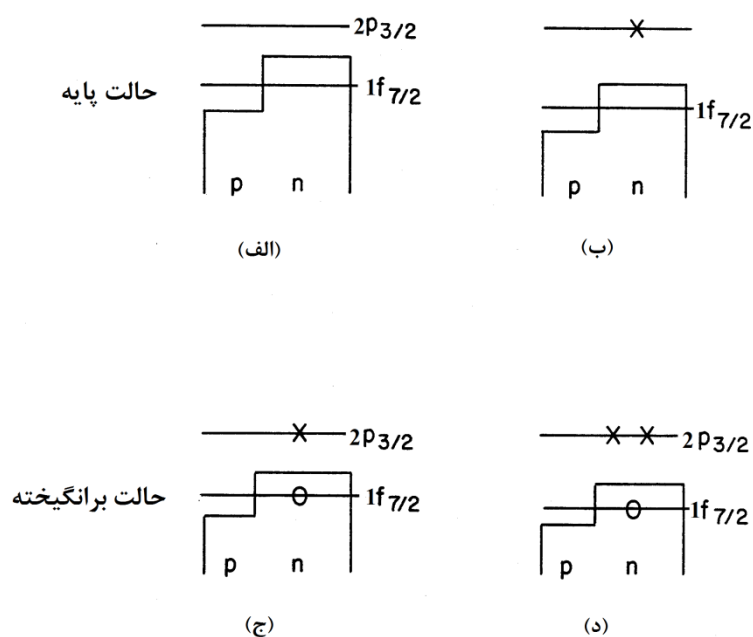
پیکربندی حالت پایه هسته ها در مدل پوسته ای ساده<sup>۱</sup> به این صورت است که ترازهای انرژی به طور متوالی توسط نوکلئونها و با رعایت اصل طرد پائولی پر می شوند. برای مثال در پیکربندی حالت پایه  $^{48}\text{Ca}$ ، ۲۸ نوترون حالتهای تک ذره ای را تا پوسته  $1f_{7/2}$  پر می کنند و ۲۰ پروتون حالتهای تک - ذره ای را تا پوسته  $1d_{3/2}$  پر می کنند.  $^{48}\text{Ca}$  یک هسته پوسته بسته است. یک طرح کلی از حالت پایه  $^{48}\text{Ca}$  در شکل (۳-۱۰-الف) نمایش داده شده است. پیکربندی حالت پایه  $^{49}\text{Ca}$  در مدل پوسته ای ساده به این صورت است که نوترون ظرفیت حالت  $2p_{3/2}$  را اشغال می کند که خارج از پوسته بسته  $^{48}\text{Ca}$  است، که در شکل (۳-۱۰-ب) نشان داده شده است. بنابراین اسپین - پارितه حالت پایه  $^{49}\text{Ca}$  باید برابر  $J^\pi = 3/2^-$  باشد. موفقیت این مدل ساده در آن است که ویژگی های حالت پایه بسیاری از هسته ها مطابق با این فرضیات است [۲۲].

<sup>۱</sup>. simple shell model



شکل (۳-۹) (الف) انرژی های تک - ذره ای در پتانسیل نوسانگر هماهنگ. N عدد کوانتومی نوسانگر است. (ب) انرژی های تک - ذره ای در پتانسیل وود- ساکسون. (ج) انرژی های تک - ذره ای در پتانسیل وود- ساکسون بعلاوه جفت شدگی اسپین - مدار، هر حالت با  $(n l j)$  نمادگذاری شده است. (د) تعداد  $\sum (2j+1)$ . [۲۲]

به منظور ساده سازی بحث دربارهٔ حالت‌های برانگیخته در مدل پوسته ای ساده، تنها دو حالت تک - ذره ای  $1f_{7/2}$  و  $2p_{3/2}$  را در نظر می گیریم . بنابراین حالت برانگیخته  $^{48}\text{Ca}$  با حرکت دادن یک نوکلئون از حالت  $1f_{7/2}$  به  $2p_{3/2}$  ایجاد می شود که این حالت دارای پیکربندی یک - ذره - یک - حفره  $(1p1h)$ <sup>۱</sup> است. برای  $^{49}\text{Ca}$  حالت برانگیخته به صورت دو-ذره - یک - حفره است. تصاویری کلی از پیکربندی این برانگیختگی ها در شکل (۳-۱۰-ج) و (۳-۱۰-د) ارائه شده است.



شکل (۳-۱۰) طرح کلی از پیکربندی نوکلئونها در مدل پوسته ای ساده. (الف) حالت پایه  $^{48}\text{Ca}$  (پوسته بسته). (ب) حالت پایه  $^{49}\text{Ca}$ . (ج) حالت برانگیخته  $^{48}\text{Ca}$ . (د) حالت برانگیخته  $^{49}\text{Ca}$ . [۲۲]

در مدل پوسته ای که ارائه شد، فرض شده است که ویژگی های ساختار هسته ای به وسیله نوکلئونهای ظرفیت تعیین می شوند و این نوکلئونها می توانند همزمان و به چندین شکل متفاوت، حالت‌های تک ذره درون یک یا دو پوستهٔ اصلی را به صورت بخشی پر اشغال کنند. برای هسته های سبک ( $A \leq 40$ ) پوسته های نوسانگر، که با نماد  $N$  در سمت چپ شکل (۳-۹) نشان داده شده اند، پوسته های اصلی هستند. برای هسته های سنگین ( $A \geq 40$ ) معمولاً یک حالت با بالاترین  $J$  از

<sup>1</sup>. one - particle one - hole

پوسته نوسانگر  $(N + 1)$  ام به پوسته های اصلی اضافه می شود. این روش را محاسبه مدل پوسته ای با پایه های بزرگ<sup>۱</sup> می نامند. برای مثال، پیکر بندی نوکلئونها در حالت پایه  $^{48}\text{Ca}$  در پوسته کامل  $fp$  ( $1f_{7/2}, 2p_{3/2}, 1f_{5/2}$  و  $2p_{1/2}$ ) به صورت ترکیب خطی از همه پیکربندی های ممکن که در آنها هشت نوترون بتوانند به طور همزمان همه حالت های موجود در پوسته  $fp$  را اشغال کنند در نظر گرفته می شوند. نماد  $|n_1, n_2, n_3, n_4\rangle$  که در رابطه زیر به کار رفته است نشان دهنده این است که  $n_1$  نوترون پوسته  $1f_{7/2}$ ،  $n_2$  نوترون پوسته  $2p_{3/2}$ ،  $n_3$  نوترون پوسته  $1f_{5/2}$  و  $n_4$  نوترون پوسته  $2p_{1/2}$  را اشغال می کنند، البته باید اصل طرد پائولی و جمع  $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 8$  رعایت شود. بنابراین تابع موج حالت پایه  $^{48}\text{Ca}$  به صورت زیر بسط داده می شود:

$$|^{48}\text{Ca}, 0^+\rangle = a_1|8000\rangle + a_2|6200\rangle + a_3|5300\rangle + a_4|4400\rangle + \dots + a_{72}|0242\rangle + a_{73}|0062\rangle \quad (28-3)$$

که در آن  $\sum_i a_i^2 = 1$  است. در رابطه (28-3) 73 جمله (پارتیشن) وجود دارد. برخی از این جملات به دلیل جفت شدگی اندازه حرکت زاویه ای حذف می شوند. در این مجموعه از پارتیشن ها، تعداد حالت های مستقل با  $j = 0$  برابر با 347 است که این تعداد را بعد- $j$  می نامند. در مدل پوسته ای ساده، همه ضرایب در رابطه بالا، به جزء  $a_1$  که برابر با یک است، صفر هستند بنابراین بعد- $j$  برابر یک است [23].

محاسبه مدل پوسته ای با پایه های بزرگ شامل این سه مرحله است: (۱) تنظیم پایه های تک - ذره، (۲) ساخت ماتریس هامیلتونی و (۳) قطری کردن این ماتریس. اما انجام محاسبه مدل پوسته ای با پایه های بزرگ به محاسبات عددی گسترده ای نیاز دارد، بنابراین روش های عددی بهتر و امکانات کامپیوتری جدید برای انجام این محاسبات بسیار اهمیت دارد.

<sup>1</sup>. large- basis shell model calculation

اصطلاح محاسبه مدل پوسته ای با پایه های کامل<sup>۱</sup> به محاسبه مدل پوسته ای با پایه های بزرگی گفته می شود که شامل همه پیکربندی های ممکن در یک پوسته اصلی باشد. مدل پوسته ای با پایه های کامل می تواند به عنوان یک نظریه دقیق در داخل این پوسته اصلی در نظر گرفته شود.

اما مشکل اصلی در محاسبات مدل پوسته ای با پایه های بزرگ این است که بعد ماتریس هامیلتونی با افزایش پایه های تک - ذره به سرعت افزایش می یابد. برای مثال، بعد حالت پایه  $^{48}\text{Ca}$  با  $J^\pi = 0^+$  در پوسته  $1f_{7/2}$  برابر یک، در پوسته کامل  $f$  ( $1f_{7/2}$  و  $1f_{5/2}$ ) برابر ۱۴ و در پوسته کامل  $fp$  ( $1f_{7/2}$ ،  $2p_{3/2}$ ،  $1f_{5/2}$  و  $2p_{1/2}$ ) برابر ۳۴۷ است. در هسته های متوسط و سنگین ( $A \geq 50$ ) ابعاد بی نهایت بزرگ است. برای نمونه، در مورد هسته  $^{154}\text{Sn}_{92}$  اگر بپذیریم که ۱۲ پروتون ظرفیت، حالت های  $1g_{7/2}$ ،  $2d_{5/2}$ ،  $2d_{3/2}$ ،  $3s_{1/2}$ ،  $1h_{11/2}$  را اشغال کنند و ۱۰ نوترون ظرفیت، حالت های  $1h_{9/2}$ ،  $2f_{7/2}$ ،  $2f_{5/2}$ ،  $3p_{3/2}$ ،  $3p_{1/2}$ ،  $1i_{13/2}$  را اشغال کنند، بعد ماتریس برای  $J^\pi = 0^+$  برابر ۴۱۶۵۴۱۹۳۵۱۶۹۱۷ است [۲۴] که البته این محاسبه کاملاً فراتر از قابلیت های کامپیوترهای رایج است. بنابراین فضای مدل برای هسته های سنگین باید به شدت کاهش یابد. ممکن است در حد ابعاد بی نهایت، دوباره مدل پوسته ای ساده در نظر گرفته شود. به دلیل مشکلاتی که در انجام محاسبات مدل پوسته ای با پایه های بزرگ وجود دارد، روش RPA، QRPA و pnQRPA که در بخش های بعد به آنها می پردازیم به طور مکرر برای مطالعه خواص هسته های متوسط و سنگین به کار رفته است [۲۲].

یک جنبه مهم دیگر در مدل پوسته ای، برهم کنش مؤثر<sup>۲</sup> است که می توان آن را از محاسبات تئوری [۲۰] و یا به وسیله برازش داده های معلوم به دست آورد. می توان از طریق محاسبات مدل پوسته ای با پایه های بزرگ، اغلب داده های تجربی برای هسته های سبک ( $A \leq 40$ ) را توضیح داد و یا حتی پیش بینی کرد. برای مثال شدت گذار گاموف - تلر بر مبنای محاسبات مدل پوسته ای با

<sup>1</sup>. full-basis shell model calculation

<sup>2</sup>. effective interaction

پایه های کامل در پوسته  $sd$  ( $1d_{3/2}$ ،  $2s_{1/2}$ ،  $1d_{5/2}$ ) با داده های تجربی متناظرش تطابق خوبی دارد [۲۵].

### ۳-۳-۳ مدل‌های شبه ذره ای

تصویر شبه ذره ای بسیار جالب است، چون فضای تهی جدیدی برای شبه ذرات و توابع موج هسته ای تعریف می کند که بتوان آنها را بر حسب تعداد کمی از درجات آزادی شبه ذره توصیف کرد. شبه ذرات با تبدیلات Bogoliubov معرفی می شوند:

$$\begin{aligned} a_k^\dagger &= u_k c_k^\dagger - v_k c_{\bar{k}} \\ a_{\bar{k}}^\dagger &= u_k c_{\bar{k}}^\dagger - v_k c_k \end{aligned} \quad (۲۹-۳)$$

که در آن  $a_k$  و  $c_k$  به ترتیب عملگرهای تولید شبه ذره و ذره هستند و  $k$  همیوگ حالت  $\bar{k}$  است. عملگرهای شبه ذره ای همانند عملگرهای ذره ای از روابط پاد جابه جایی فرمیونها تبعیت می کنند. دامنه های اشغال  $u_k$  و  $v_k$  در رابطه  $u_k^2 + v_k^2 = 1$  صدق می کنند، احتمال اشغال شدن مدارهای  $k$  و  $\bar{k}$  توسط یک نوکلئون است. در تقریب BCS می توان این ضرایب را، که به تبدیلات Bogoliubov مربوط می شوند، از طریق اصل وردشی که با شرط (۳۰-۳) محدود شده است، محاسبه کرد:

$$\delta \langle BCS | H - \lambda \hat{N} | BCS \rangle = 0 \quad (الف-۳۰-۳)$$

$$\langle BCS | \hat{N} | BCS \rangle = 2 \sum_{k>0} v_k^2 = N \quad (ب-۳۰-۳)$$

انرژی فرمی  $\lambda$  به عنوان یک ضریب لاگرانژ معرفی شده است،  $N$  تعداد نوکلئونها و  $\hat{N}$  عملگر تعداد است. از اصل وردشی یک مجموعه معادله به دست می آید:

$$\tilde{\epsilon}_k = \bar{\epsilon}_k + \sum_{k'>0} \frac{1}{2} v_{k'}^2 \left( \langle kk' | V | kk' \rangle + \langle \bar{k}\bar{k}' | V | \bar{k}\bar{k}' \rangle \right) - \lambda \quad (۳۱-۳)$$



$$\Delta_k = -\sum_{k' > 0} u_k u_{k'} \langle k\bar{k} | V | k' \bar{k}' \rangle \quad (32-3)$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{\epsilon}_k}{\sqrt{\bar{\epsilon}_k^2 + \Delta_k^2}} \right) \quad (33-3)$$

که در آن  $\bar{\epsilon}_k$  و  $\epsilon_k = \sqrt{\bar{\epsilon}_k^2 + \Delta_k^2}$  به ترتیب انرژی تک - ذره و شبه ذره اند،  $\Delta_k$  به گاف جفت شدگی و  $\langle k\bar{k} | V | k' \bar{k}' \rangle$  به برهم کنش دو - ذره ای اشاره دارد.

حالت پایه BCS با رابطه  $|BCS\rangle = \prod_k a_k a_{\bar{k}} | \rangle$  تعریف می شود، واضح است که این حالت برای شبه ذرات، تهی است یعنی  $a_k |BCS\rangle = 0$ . (در اینجا  $| \rangle$  نشان دهنده حالت تهی برای نوکلئونها است.) برحسب نوکلئونها، حالت پایه BCS را می توان به صورت برهم نهی حالتی با تعداد نوکلئون متفاوت نوشت:

$$|BCS\rangle \sim | \rangle + \sum_{k \geq 0} \frac{v_k}{u_k} c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger | \rangle + \frac{1}{2} \sum_{kk' \geq 0} \frac{v_k v_{k'}}{u_k u_{k'}} c_k^\dagger c_{\bar{k}}^\dagger c_{k'}^\dagger c_{\bar{k}'}^\dagger | \rangle + \dots \quad (34-3)$$

در رابطه بالا، هر حالت شامل یک جفت نوکلئون جفت شده با  $J^\pi = 0^+$  است (شکل (3-6) را ببینید). بنابراین مدل شبه ذره ای، همبستگی های جفت شدگی ناشی از نیروی جفت شدگی قوی و برجسته ای که بین نوکلئونهای مشابه عمل می کند، را در نظر می گیرد. حالت پایه یک هسته زوج - زوج نسبت به شبه ذره، تهی است و حالتی برانگیخته در پایین ترین مرتبه به وسیله حالتی دو - شبه ذره ای توصیف می شوند.

برنامه VAMPIR (یا MONSTER) مربوط به گروه Tubingen، یک نسخه کلی از مدل شبه ذره ای است. این نویسندگان کدهای کامپیوتری خود را بر اساس فرمالیزم هارتری فوک بوگولیو<sup>1</sup> (HFB) ایجاد کرده اند، یعنی در این کدها حالتی تک - ذره ای به صورت خود-سازگار محاسبه

<sup>1</sup>. Hartree-Fock-Bogoliubov formalism

می شوند و شبه ذرات با تبدیلات Bogoliubov ای کاملتر از معادله (۳-۲۹)، تعریف می شوند. تعداد نوکلئونها با تصویر تعداد ذره<sup>۱</sup>، ترمیم می شود و ناوردایی دورانی که به دلیل استفاده از پایه های تغییرشکل یافته نقض شده است، با تصویر اندازه حرکت زاویه ای<sup>۲</sup> ترمیم می شود. از تابع موج های تولید شده به این روش در محاسبه آهنگ واپاشی  $\beta\beta$  استفاده می شود [۷].

### ۳-۳-۴ تقریب فاز تصادفی برای شبه ذره (QRPA)

پروتون - نوترون QRPA (یا به اختصار pnQRPA) برای توصیف برانگیختگی های تبادل بار، مانند گذارهای گاموف - تدر از حالت پایه  $0^+$  یک هسته زوج - زوج  $(A, Z)$  به حالتی در یک هسته فرد - فرد  $(A, Z \pm 1)$  ایجاد شده اند [۲۶]. برای به دست آوردن فرمولبندی QRPA باید دو فرض اساسی در مدل RPA عادی را نیز در نظر بگیریم: (الف) فرض می کنیم روابط جابه جایی بوزونی برای عملگرهای خلق و نابودی یک جفت پروتون - نوترون صادق است. (ب) از جمله  $a^\dagger a$  در عناصر ماتریسی حالت پایه QRPA صرف نظر می کنیم،  $\langle RPA | a_k^\dagger a_k | RPA \rangle = 0$ .

فونونهای QRPA با اندازه حرکت زاویه ای،  $J$  و مولفه  $Z$  آن،  $M$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$A_\omega^\dagger(JM) = \sum_{pn} \left( X_\omega^{pn,J} \left[ a_p^\dagger a_n^\dagger \right]_M^{(J)} - Y_\omega^{pn,J} (-1)^{1+J+M} \left( \left[ a_p^\dagger a_n^\dagger \right]_{-M}^{(J)} \right)^\dagger \right) \quad (۳۵-۳)$$

در این رابطه،  $p$  و  $n$  تمایز بین حالتی پروتونی و نوترونی را نشان می دهند و براکت به جفت شدگی اندازه حرکت زاویه ای اشاره دارد. ویژه مقادیر انرژی  $\omega$  و دامنه های به سمت جلو و به سمت عقب<sup>۳</sup>  $X$  و  $Y$  از حل معادله QRPA به دست می آیند:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (۳۶-۳)$$

<sup>۱</sup>. Particle - number projection

<sup>۲</sup>. Angular-momentum projection

<sup>۳</sup>. Forward and backward -going amplitudes

رابطهٔ بهنجارش به صورت زیر است:

$$\sum_{pn} \left( (X_{\omega}^{pn,J})^2 - (Y_{\omega}^{pn,J})^2 \right) = 1 \quad (37-3)$$

عناصر ماتریسی  $A$  و  $B$  از روابط زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} A_{pn,p'n'} &= \delta(pn, p'n') (\varepsilon_p + \varepsilon_n) \\ &+ g_{ph} (u_p v_n u_p v_n + v_p u_n v_p u_n) \langle pn^{-1} | V | p'n'^{-1} \rangle_J \\ &+ g_{pp} (u_p u_n u_p u_n + v_p v_n v_p v_n) \langle pn | V | p'n' \rangle_J \end{aligned} \quad (38-3 \text{ الف})$$

$$\begin{aligned} B_{pn,p'n'} &= -g_{ph} (u_p u_n v_p v_n + v_p v_n u_p u_n) \langle pn^{-1} | V | p'n'^{-1} \rangle_J \\ &+ g_{pp} (v_p u_n u_p v_n + u_p v_n v_p u_n) \langle pn | V | p'n' \rangle_J \end{aligned} \quad (38-3 \text{ ب})$$

انرژی های شبه ذره ای  $\varepsilon_j$  و دامنه های اشغال  $u_j$  و  $v_j$  از محاسبات BCS به دست می آیند.

عناصر ماتریسی برهم کنش ذره - ذره  $\langle pn | V | p'n' \rangle$  و ذره - حفره  $\langle pn^{-1} | V | p'n'^{-1} \rangle$  از طریق

تبدیلات Pandya به هم مربوط می شوند:

$$\langle pn^{-1} | V | p'n'^{-1} \rangle_J = -(-1)^{p+n+p'+n'} \sum_{J'} (2J'+1) W(pnp'n'; JJ') \langle pn | V | p'n' \rangle_J \quad (39-3)$$

در حالی که معادلات RPA عادی، تنها شامل برهم کنشهای ذره - حفره هستند، در رویکرد شبه

ذره ای (3-30)، هر دو نوع برهمکنشها حضور دارند چون شبه ذره برخی از خواص ذره و برخی از

خواص شبه ذره را دارد [27، 20].

برهم کنشهای ذره - ذره<sup>۱</sup> (pp) و ذره - حفره<sup>۲</sup> (ph) در حد تصویر نوکلئونی،  $u_j v_j \rightarrow 0$ ، به

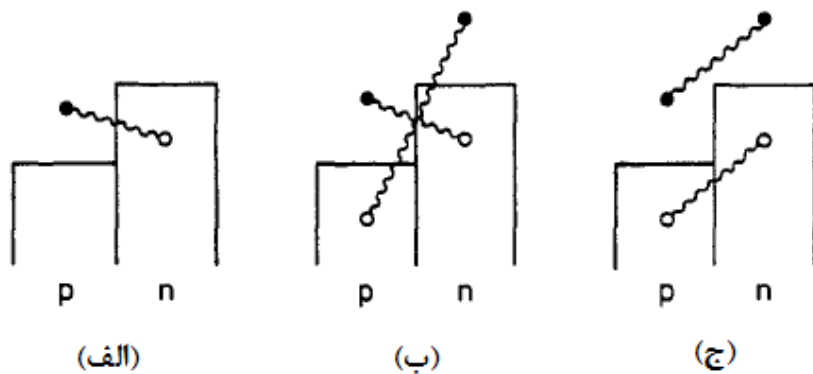
برهم کنشهایی که به ترتیب بین حالتیهای دو ذره ای (دو حفره ای) و بین حالتیهای ذره - حفره

اتفاق می افتند کاهش پیدا می کنند، که این موضوع در معادلات (3-38) و شکل (3-11) قابل

<sup>1</sup>. particle - particle interaction

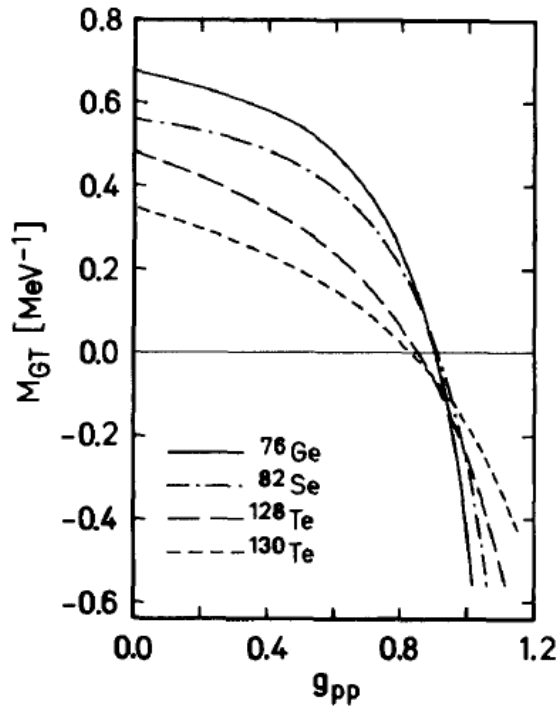
<sup>2</sup>. particle - hole interaction

بررسی است. در تصویر نوکلئونی یک هسته با دو پوسته بسته، برای مدارهای اشغال شده توسط نوکلئونها  $v_j = 1$  (یا  $u_j = 0$ ) است، و برای مدارهایی که هیچ نوکلئونی ندارند  $u_j = 1$  (یا  $v_j = 0$ ) است. مدارهای اولی را مدار حفره ای و دومی را مدار ذره ای می نامند، زیرا زمانی که یک جفت ذره - حفره برانگیخته می شود، ذره یک مدار ذره ای را اشغال می کند و یک حفره در مدار حفره ای ایجاد می شود. برهم کنش ذره - ذره همواره به حاصلضرب  $u_p u_n$  (یا  $v_p v_n$ ) مربوط می شود، یعنی هم پروتون و هم نوترون مدارهای ذره ای (یا حفره ای) را اشغال می کنند. از طرف دیگر برهم کنش ذره - حفره به حاصلضرب  $v_p u_n$  یا  $u_p v_n$  مربوط می شود، به این معنی که از میان پروتون و نوترون یکی در مدار ذره ای و دیگری در مدار حفره ای قرار دارد [۷].



شکل (۳-۱۱) برهم کنش ذره - حفره (ph) بین حالت‌های ذره پروتون - حفره نوترون (یا ذره نوترون - حفره پروتون) و برهم کنش ذره - ذره (pp) بین حالت‌های دو ذره ای یا حالت‌های دو حفره ای. (الف) برهم کنش ph برای یک حالت ذره - حفره. (ب) برهم کنش ph برای یک حالت دو ذره - دو حفره و (ج) برهم کنش pp برای همان حالت [۷].

برای آنکه بتوان نتایج را برحسب تابعی از شدت هر کدام از برهم کنش‌ها توصیف کرد، ضرایب  $g_{pp}$  و  $g_{ph}$  را که به طور قراردادی معرف شدت برهم کنش ذره - ذره و شدت برهم کنش ذره - حفره هستند را در معادلات (۳-۳۸) وارد می کنند. هر دو این ضرایب در نظریه pnQRPA استاندارد برابر یک هستند. برای مثال در شکل (۳-۱۲) عنصر ماتریس هسته ای بر حسب تابعی از  $g_{pp}$  برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  هسته  $^{76}\text{Ge}$  و چند هسته دیگر رسم شده است [۱۹].



شکل (۳-۱۲) عنصر ماتریس هسته ای محاسبه شده برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  برحسب تابعی از شدت برهم کنش ذره - ذره [۱۹]

حالت پایه QRPA نسبت به فونون تهی است، یعنی  $A_\omega(JM)|RPA\rangle = 0$ ، و به صورت برهم نهی حالت‌هایی با  $0, 4, 8, \dots$  شبه ذره بیان می شود:

$$|RPA\rangle = n_0 \exp \left[ \sum_{pn,p'n'} Z_{pn,p'n'} [a_p^\dagger a_n^\dagger]^{(J)} \cdot [a_p^\dagger a_{n'}^\dagger]^{(J)} \right] |BCS\rangle \quad (40-3)$$

که در آن  $n_0$  ضریب بهنجارش و  $Z$  ماتریس همبستگی های حالت پایه است که عبارتند از:

$$n_0 = |\det X|^{-1/2} \quad (41-3)$$

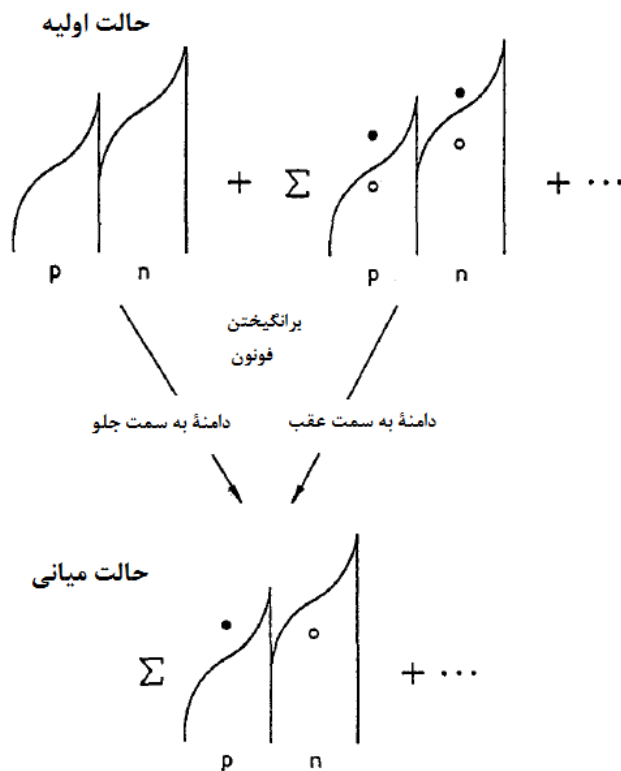
$$Z = YX^{-1} \quad (42-3)$$

مولفه اصلی حالت پایه هیچ شبه ذره ای ندارد (یعنی همان حالت پایه BCS است)، عبارات عمده بعدی حالت‌های چهار شبه ذره ای هستند که در تصویر نوکلئونی همان حالت‌های دو ذره - دو حفره هستند. عناصر ماتریسی کاهش یافته عملگرهای گذار تبادلی بار گاموف تله  $t_\pm f_M^{(J)}$ ، از حالت پایه  $0^+$

هسته زوج - زوج (حالت تهی RPA) به حالت‌هایی با  $J^\pi$  (حالت‌های تک - فونونی) در هسته فرد - فرد به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\langle \omega J \| \tau_- f_M^{(J)} \| 0^+ \rangle = \sum_{pn} \langle p \| f^{(J)} \| n \rangle (X_{\omega}^{pn,J} u_p v_n - Y_{\omega}^{pn,J} v_p u_n) \quad (3-43-الف)$$

$$\langle \omega J \| \tau_+ f_M^{(J)} \| 0^+ \rangle = \sum_{pn} \langle p \| f^{(J)} \| n \rangle (X_{\omega}^{pn,J} v_p u_n - Y_{\omega}^{pn,J} u_p v_n) \quad (3-43-ب)$$



شکل (۳-۱۳) یک برانگیختگی فونونی از حالت پایه (حالت تهی QRPA) به یک حالت تک - فونونی در پروتون - نوترون QRPA. سهم عمده که مربوط به عبارت دامنه به سمت جلو است (از حالت صفر - شبه ذره به حالتی با یک جفت پروتون - نوترون) با عبارت دامنه به سمت عقب (از حالت چهار - شبه ذره به حالت جفت پروتون - نوترون) تداخل می‌کند. در مورد واپاشی دوبتایی، این برانگیختگی فونونی به گذار از حالت اولیه (نهایی)  $0^+$  به یک حالت میانی مربوط می‌شود [۷].

برای مثال در مورد واپاشی  $2\nu\beta\beta$  به صورت  $0_i^+ \rightarrow 0_f^+$  (شکل (۳-۱۳) را ببینید)، معادله (۳-۴۳-الف) به گذار گاموف - تلر از حالت  $0_i^+$  هسته مادر به یک حالت  $1^+$  هسته میانی مربوط می شود و معادله (۳-۴۳-ب) بیان کننده معکوس گذار گاموف - تلر از حالت هسته میانی به حالت  $0_f^+$  هسته دختر است. جمله  $X$  در معادله (۳-۴۳)، که به  $u_p v_n$  و  $(v_p u_n)$  وابسته است، به برانگیختگی جفت ذره پروتون - حفره نوترون (ذره نوترون - حفره پروتون) اشاره دارد. از طرف دیگر دامنه  $Y$  به همراه دو عملگر نابودی شبه ذره در معادله (۳-۳۵) تعریف شده است، بنابراین جملات  $Y$  در معادله (۳-۴۳) از نابودی یکی از جفت های ذره - حفره از حالت پایه QRPA ناشی می شوند، و به درجه همبستگی های حالت پایه بستگی دارند [۷].

در فرمول بندی QRPA، عنصر ماتریس هسته ای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  برای گذار  $0_i^+ \rightarrow 0_f^+$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$M_{GT}^{2\nu} = \sum_{a,b} \frac{\langle 0_f^+ \| \tau_- \sigma \| 1_b^+ \rangle \langle 1_b^+ | 1_a^+ \rangle \langle 1_a^+ \| \tau_- \sigma \| 0_i^+ \rangle}{E_a + T_0 / 2 + m_e c^2 - E_i} \quad (۳-۴۴)$$

با جایگذاری  $f^{(j)} = \sigma$  در معادله (۳-۴۳) دامنه های گذار گاموف تلر برای  $J^\pi = 1^+$  به دست می آیند

$$\langle 1_a^+ \| \tau_- \sigma \| 0_i^+ \rangle = \sum_{p,n} \langle p \| \sigma \| n \rangle (X_a^{pn} u_p v_n - Y_a^{pn} v_p u_n) \quad (۳-۴۵-الف)$$

$$\langle 0_f^+ \| \tau_- \sigma \| 1_b^+ \rangle = \sum_{p,n} \langle p \| \sigma \| n \rangle (\bar{X}_b^{pn} \bar{v}_n \bar{u}_p - \bar{Y}_b^{pn} \bar{u}_n \bar{v}_p) \quad (۳-۴۵-ب)$$

همپوشانی حالت های  $1^+$  میانی با رابطه زیر داده می شود:

$$\langle 1_b^+ | 1_a^+ \rangle = \sum_{pn} (\bar{X}_b^{pn} X_a^{pn} - \bar{Y}_b^{pn} Y_a^{pn}) \quad (۳-۴۶)$$

کمیت های بدون علامت بار (با علامت بار) نسبت به حالت  $0_i^+$  اولیه (حالت  $0_f^+$  نهایی) تعریف شده اند.

حال می‌خواهیم از مرتبه تأثیرات برهم کنش ذره - ذره روی همبستگی های حالت پایه و گذارهای تبادل بار، برآوردی داشته باشیم. این برآورد اهمیت دارد چون همان طور که گفته شد موفقیت محاسبات QRPA برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  اساساً با در نظر گرفتن برهم کنش ذره - ذره به دست می‌آید. (لازم به ذکر است برهم کنش ذره - ذره یک خاصیت خارجی نیست که به مدل QRPA اضافه شده باشد. این برهم کنش، علاوه بر برهم کنش ذره - حفره، به صورت طبیعی از طریق تبدیلات Bogoliubov در این مدل ظاهر می‌شود.) ابتدا هسته‌هایی را در نظر می‌گیریم که تعداد زیادی نوترون اضافی دارند، در این صورت  $u_p$  و  $v_n$  باید به طور قابل توجهی بزرگتر از  $v_p$  و  $u_n$  باشند:

$$u_p \sim v_n \sim l, \quad v_p \sim u_n \sim s, \quad s^2 \ll l^2 \quad (3-47)$$

بنابراین، عناصر معادله QRPA (3-37) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$A_{pn,p'n'} \sim \delta(pn, p'n')(\varepsilon_p + \varepsilon_n) + (l^4 + s^4) \langle pn^{-1} | V | p'n'^{-1} \rangle + 2l^2 s^2 \langle pn | V | p'n' \rangle \quad (3-48 \text{ الف})$$

$$B_{pn,p'n'} \sim -2l^2 s^2 \langle pn^{-1} | V | p'n'^{-1} \rangle + 2l^2 s^2 \langle pn | V | p'n' \rangle \quad (3-48 \text{ ب})$$

زیر ماتریس  $A$ ، ماتریسی بین دامنه‌های به سمت جلو  $X$  (یا بین دامنه‌های به سمت عقب  $Y$ ) است، بنابراین  $A$  مسئول ترکیب حالت‌های مختلف ذره - حفره در هسته فرد - فردی است که از گذار تبادل بار حاصل می‌شود. برای مثال برای مد  $J^\pi = 1^+$ ، ترکیب این حالتها منجر به تراکم شدت گاموف تله  $\beta^-$  و در نتیجه ایجاد یک تشدید خیلی بزرگ می‌شود. برهم کنش ذره - حفره و انرژی‌های شبه ذره ای در عناصر  $A$  سهم عمده ای دارند. در این عناصر سهم برهم کنش ذره - ذره بسیار کم است، این امر نشان می‌دهد که این نوع برهم کنش تأثیر کوچکی در ترکیب حالت‌های ذره - حفره در هسته میانی دارد. از طرف دیگر، زیر ماتریس  $B$  برای همبستگی های حالت پایه مهم است چون  $X$  و  $Y$  را به هم مربوط می‌کند. افزایش در دامنه‌های به سمت عقب  $Y$  به معنای افزایش همبستگی های



حالت پایه است (معادلات (۳-۴۰) و (۳-۴۲)). عناصر  $B$  شامل هر دو جمله برهم کنش با مرتبه یکسان ( $\sim l^2 s^2$ ) هستند، که این نشان می دهد برهم کنش ذره - ذره با یک رابطه منطقی به برهم کنش ذره - حفره اضافه شده است و می تواند همبستگی های حالت پایه را به طور قابل توجهی افزایش دهد، میزان این افزایش به ماهیت برهم کنش ذره - حفره و ذره - ذره در کانال  $J^\pi$  بستگی دارد.

برآوردی از اثرات ایجاد شده بر دامنه های گذار در معادله (۳-۴۳)، یک تفاوت اساسی بین گذارهای ناشی از عملگر  $\tau_- f^{(J)}$  و  $\tau_+ f^{(J)}$  را آشکار می کند. به عنوان یک مثال، گذارهای گاموف - تلر  $\beta^\pm$  به حالت های  $1^+$  را در نظر می گیریم. با فرض  $l$  به عنوان ضریب بزرگ و  $s$  به عنوان ضریب کوچک، دامنه های گذار به شکل خلاصه زیر نوشته می شوند:

$$\beta^- : \langle \omega, 1^+ \| \tau_- \sigma \| 0^+ \rangle \sim X l^2 - Y s^2 \quad (۳-۴۹-الف)$$

$$\beta^+ : \langle \omega, 1^+ \| \tau_+ \sigma \| 0^+ \rangle \sim X s^2 - Y l^2 \quad (۳-۴۹-ب)$$

برای گذارهای  $\beta^-$  ( $n \rightarrow p$ )، سهم عمده دامنه به جمله  $X$  مربوط می شود که این جمله ناشی از برانگیختگی یک جفت ذره پروتون - حفره نوترون است. اما با توجه به ضریب  $s^2$  و هم چنین نسبت  $Y$  به  $X$ ، جمله  $Y$  سهم خیلی کوچکی دارد. با در نظر گرفتن معادله (۳-۳۷) می توان گفت، معمولاً دامنه های  $X$  خیلی بزرگتر از دامنه های  $Y$  هستند. بنابراین گذارهای  $\beta^-$  به همبستگی های حالت پایه حساس نیستند، یعنی به برهم کنش ذره - ذره حساس نیستند.

در گذارهای  $\beta^+$  ( $p \rightarrow n$ ) ضرایبی که در  $X$  و  $Y$  ضرب شده اند، جا به جا می شوند. در صورتی که برهم کنش ذره - ذره را در نظر نگیریم، حتی اگر فرض کنیم ضریب  $l^2$  که در  $Y$  ضرب شده افزایش یابد، باز هم جمله  $X$  گذار را کنترل می کند، چون همبستگی های حالت پایه بسیار ناچیز هستند. اما با در نظر گرفتن برهم کنش ذره - ذره، همبستگی های حالت پایه به طور قابل توجهی افزایش می یابد و این باعث می شود که جمله  $Y$  مهم تر شود. بنابراین دو جمله رابطه (۳-۴۹-ب) برای

$J^\pi = 1^+$ ، از یک مرتبه هستند و به شدت از گذارهای  $\beta^+$  جلوگیری می شود. به طور کلی، در کانال  $J^\pi = 1^+$ ، برهم کنش ذره - حفره که بین جفت ذره - حفره عمل می کند دافعه است، در حالی که برهم کنش ذره - ذره جاذبه است. این ویژگی مشخصه ناشی از یک تداخل ویرانگر بین جملات  $X$  و  $Y$  است. در نتیجه، برهم کنش ذره - ذره نقش اساسی در جلوگیری از شدت گذار  $\beta^+$  دارد. همچنین می توان با استدلال ساده زیر این نتیجه را درک کرد. در هسته ای که تعداد زیادی نوترون اضافی دارد، اغلب گذارهای تک - ذره ای  $\beta^+$  ( $p \rightarrow n$ ) توسط اصل طرد پائولی در غیاب همبستگی های حالت پایه مسدود شده اند (مدارهای نوترونی که می توان از طریق گذارهای گاموف - تلر به آنها دست یافت کاملاً اشغال شده اند). در صورتی که همبستگی های حالت پایه وجود داشته باشد، همان طور که جاهای اشغال شده در مدارهای ذره ای پروتونی می توان پیدا کرد، جاهای خالی در مدارهای حفره ای نوترونی نیز میتوان پیدا کرد، در نتیجه با انجام گذار و تداخل ویرانگر دامنه های  $\beta^+$ ، شدت  $\beta^+$  کل کاهش می یابد [۷].

## فصل ۴

واپاشی  $2\nu\beta\beta$  در هسته های



## ۴-۱ واپاشی $2\nu\beta\beta$ در هسته $^{48}\text{Ca}$

### ۴-۱-۱ مقدمه

در چند دهه گذشته جنبه های تئوری و تجربی واپاشی دو بتایی در سطح بسیار وسیعی مورد توجه محققین قرار گرفته است. تحقیقات تجربی پیرامون واپاشی دو بتایی  $^{48}\text{Ca}$  که جزء اولین تلاشها در زمینه آزمایشهای تعیین نیمه عمر این نوع واپاشی ها است، از سال ۱۹۵۰ آغاز شد. مقدار انرژی آزاد شده در واپاشی دو بتایی  $^{48}\text{Ca}$  به  $^{48}\text{Ti}$  عبارت است از  $Q_{\beta\beta} = 4/271 \pm 0/0004 \text{ MeV}$  که بیشترین مقدار انرژی آزاد شده را در بین سایر هسته هایی که می توانند این واپاشی را انجام بدهند دارد [۲۸]. Bardin و همکارانش حد پایین نیمه عمر واپاشی  $2\nu\beta\beta$  این هسته را  $y > 3/6 \times 10^{19}$  اندازه گیری کرده اند [۲۹]، اما در آزمایش دیگری که در سال ۱۹۹۶ توسط Balysh انجام شد نیمه عمر این واپاشی برابر  $y \times 10^{19} (4.3_{-1.1}^{+2.4} [\text{stat}] \pm 1.4 [\text{syst}])$  گزارش شد [۳۰].

از جنبه تئوری، واپاشی  $2\nu\beta\beta$  به خوبی در مدل استاندارد تعریف شده است و بررسی این فرایند یک چالش حقیقی برای کسانی که در زمینه مدل های هسته ای کار می کنند محسوب می شود. همان طور که در فصل قبل گفته شد یکی از روش های مطالعه واپاشی دو بتایی استفاده از محاسبات مدل پوسته ای است که در حال حاضر، محاسبات مدل پوسته ای برای واپاشی  $\beta\beta$  هسته  $^{48}\text{Ca}$  با دقت بیشتری انجام می شوند. Brown، Zhao و Richter عنصر ماتریس هسته ای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  را برای  $^{48}\text{Ca}$  در مدل پوسته ای با پایه های بزرگ با استفاده از کد OXBASH و برهم کنشهای دوجسمی MH و MSOBEP محاسبه کرده اند [۳۱، ۳۲، ۳۳] نیمه عمر  $T_{1/2}^{2\nu}$  پیش بینی شده توسط این گروه کوچکتر از نیمه عمر تجربی است. همچنین آنها تحلیلی در مورد توزیع شدت گذار گاموف - تلر  $B(GT^+)$ ،  $B(GT^-)$  و مؤلفه های عنصر ماتریسی  $M_{1/2}^{2\nu}$  نسبت به انرژی های برانگیخته  $1_k^+$  هسته میانی  $^{48}\text{Sc}$  ارائه داده اند. Poves، Caurier و Zuker با در نظر گرفتن پوسته کامل  $fp$ ، عنصر ماتریس هسته ای را برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$ ، هم برای گذار به حالت پایه و هم به حالت  $2_1^+$  در هسته

نهایی  $^{48}\text{Ti}$ ، محاسبه کرده اند [۳۴]. محاسبات آنها با استفاده از کد ANTOINE انجام شده است [۳۵]. آنها از Kuo-Brown G-matrix به عنوان برهم کنش مؤثر استفاده کرده اند [۳۶]. این نتایج به طور خلاصه در جدول (۱-۴) آمده است. در سالهای اخیر برهم کنش دو جسمی GXPF1A پیشنهاد شده است که آزمایش این برهم کنش برای پوسته  $fp$  به منظور انجام محاسبات واپاشی  $2\nu\beta\beta$  هسته  $^{48}\text{Ca}$  موفقیت آمیز بوده است [۳۷].

جدول (۱-۴) عنصر ماتریسی گاموف - تله برای واپاشی  $2\nu\beta\beta^-$  هسته  $^{48}\text{Ca}$  به حالت پایه هسته  $^{48}\text{Ti}$  محاسبه شده در مدل پوسته ای [۸].

$M_{\text{GT}}^{(2\nu)}$ ( $\text{MeV}^{-1}$ )	$t_{1/2}^{(2\nu)}$ (yr)	References and explanations
0.073	2.0(19)	[264,282] (Muto-Horie in restricted p-f shell)
0.070	2.0(19)	[282] (MSOBEP in restricted p-f shell)
0.055	3.2(19)	[282] (Muto-Horie in restricted p-f shell)
0.053	3.4(19)	[193,282] (Muto-Horie in full p-f shell)
0.040	6.0(19)	[58] (Modified Kuo-Brown in full p-f shell)
0.070	2.0(19)	[285] (Modified Kuo-Brown in full p-f shell)
0.086	1.3(19)	[285] (FPY interaction in full p-f shell)
0.046	4.3(19)	[18] (experimental)

ما در این بخش نیمه عمر واپاشی  $2\nu\beta\beta$  هسته  $^{48}\text{Ca}$  به هسته  $^{48}\text{Ti}$  را محاسبه کرده ایم، که نمودار

این واپاشی در شکل (۱-۴) نشان داده شده است. به این منظور از رابطه زیر استفاده کرده ایم [۲]

$$\lambda_{\beta\beta} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \left( \frac{m_e c^2}{\hbar} \right) \left\{ f g^2 \frac{m_e^4 c^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 \hbar^6} \right\}^2 \quad (1-4)$$

طبق این رابطه، ابتدا باید عنصر ماتریس هسته ای یعنی  $M_{fi} = \int \psi_f^* O_x \psi_i dv$  و توابع موج

هسته های اولیه و نهایی را محاسبه کنیم. برای محاسبه توابع موج هسته ای، معادله شرودینگر را با

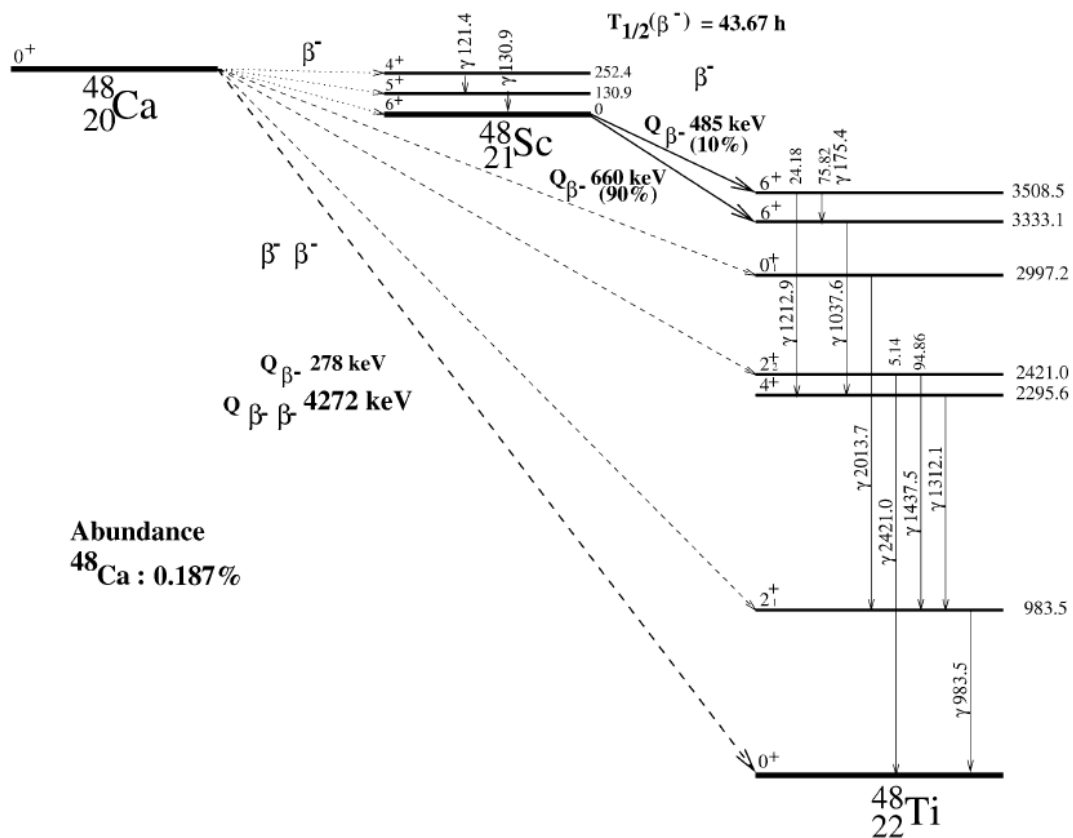
دو پتانسیل، جهت مقایسه نتایج، برای نوکلئونهای ظرفیت طبق فضای مدل در نظر گرفته شده حل

کردیم. با محاسبه عنصر ماتریس هسته ای و مقدار انتگرال فرمی از رابطه تجربی (۲-۴) [۳۸]

می توان نیمه عمر واپاشی را محاسبه کرد.

$$\log f_{\beta^-} = 4 \log(E_{\beta} / \text{MeV}) - 0.005(Z - 1) \log(E_{\beta} / \text{MeV}) + 0.02Z + 0.78 \quad (2-4)$$

برای حالت‌های هسته‌های مادر ( $^{48}\text{Ca}$ ) و دختر ( $^{48}\text{Ti}$ )، انتظار می‌رود که هسته  $^{40}\text{Ca}$  انتخاب خوبی به عنوان بخش مرکزی باشد و هشت نوکلئون اضافی می‌توانند به فضای  $f_{7/2} - p_{3/2} - p_{1/2} - f_{5/2}$  محدود شوند [۳۹].  $(f_{7/2})^8$  کوچکترین فضای مدلی است که در محاسبات اولیه در نظر گرفته شده است، که ما هم در محاسبات خود از همین فضا استفاده کرده ایم.



شکل (۴-۱) نمودار واپاشی  $2\nu\beta\beta$  هسته  $^{48}\text{Ca}$ . انرژی ترازها بر حسب keV است. [۴۰]

#### ۴-۱-۲ محاسبه توابع موج با پتانسیل Woods-Saxon

در این قسمت، با حل معادله شرودینگر برای هشت نوکلئون ظرفیت، توابع موج مورد نیاز را به دست

می‌آوریم، به همین دلیل باید از معادله شرودینگر در  $D$  بعد استفاده کنیم [۴۱]

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{d^2 R_{n\ell}(x)}{d^2 x} + \frac{(D-1)}{x} \frac{dR_{n\ell}(x)}{dx} - \frac{-\ell(\ell+D-2)}{x^2} R_{n\ell}(x) \right] + V(x) R_{n\ell}(x) = E R_{n\ell}(x) \quad (3-4)$$

در این رابطه،  $D = 3N - 3$  که  $N$  تعداد ذرات سیستم،  $\mu$  جرم کاهش یافته و  $x$  فوق شعاع مربوط به مختصات ژاکوبی برای سیستم های چند ذره ای است. می توان با استفاده از تبدیلات مختصات ژاکوبی، که به صورت زیر بیان می شود، برای سیستمی متشکل از  $N$  ذره با جرم یکسان معادله شرودینگر را حل کرد:

$$\vec{\xi}_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}} \left( \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \vec{r}_j - \vec{r}_{i+1} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4-4)$$

و مختصات مرکز جرم به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_N}{N} \quad (5-4)$$

هر مختصه ژاکوبی  $\vec{\xi}_i$  برداری است که مرکز جرم یک زیرسیستم با  $i-1$  ذره را به ذره باقی مانده یا به مرکز جرم زیر سیستم دیگر متصل می کند. فوق شعاع به صورت زیر نوشته می شود:

$$x = \left[ \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i^2 \right]^{1/2} = \left[ \sum_{i=1}^{N-1} \frac{i+1}{i} (\vec{r}_{i+1} - \vec{R})^2 \right]^{1/2} \quad (6-4)$$

نیروهای چند جسمی را می توان با استفاده از هماهنگیهای فوق کروی بررسی کرد. در فضای هماهنگیهای فوق کروی، اگر پتانسیل برهم کنشی بین دو ذره مستقل از فاصله نسبی ذرات از یکدیگر باشد، می توان پتانسیل را برحسب تابعی از فوق شعاع نوشت. در این موارد، پتانسیل ها را پتانسیل های فوق مرکزی می نامند. برای پتانسیل های فوق مرکزی، معادله شرودینگر به یک معادله فوق شعاعی در مختصات فوق کروی کاهش می یابد [42]. با استفاده از تغییر متغیر زیر [43]

$$u_{n\ell}(x) = x^{\frac{D-1}{2}} R_{n\ell}(x) \quad (4-4)$$

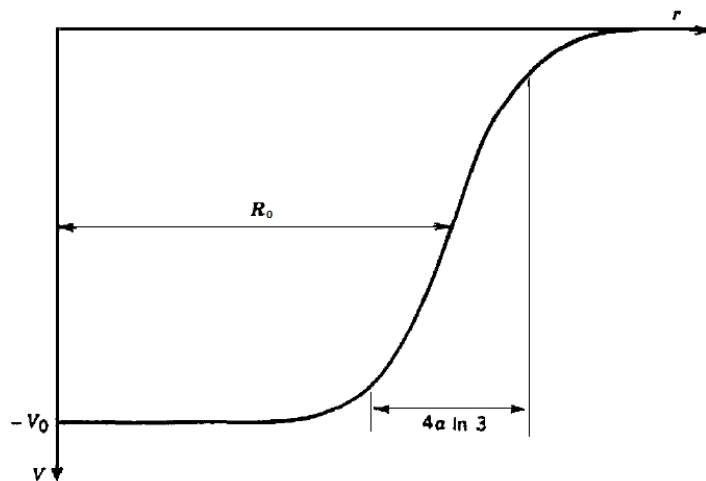
معادله (3-4) به شکل زیر نوشته می شود :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u_{n\ell}(x)}{dx^2} + \left[ \frac{\hbar^2(\ell+9)(\ell+10)}{2\mu x^2} + V(x) - E_0 \right] u_{n\ell}(x) = 0 \quad (5-4)$$

حال می‌خواهیم این معادله را برای پتانسیل Woods-Saxon حل کنیم:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp((r - R_0)/a)} \quad (7-4)$$

ترسیمی از این پتانسیل در شکل (۲-۴) آمده است و معنای فیزیکی پارامترهای مختلف آن مشخص شده است. پارامترهای  $R_0$  و  $a$  به ترتیب شعاع میانگین و ضخامت پوست هستند که مقادیرشان عبارت است از  $R_0 = 1.25A^{1/3}$  fm و  $a = 0.524$  fm. عمق چاه  $V_0$  چنان تنظیم می‌شود که برای انرژی‌های جدایی که از مرتبه 50 MeV است، مقادیر مناسبی به دست آید [۴۴].



شکل (۲-۴) پتانسیل Woods-Saxon.  $a$  "ضخامت پوست" هسته را نشان می‌دهد، چنان که فاصله‌ای که در آن پتانسیل از  $0.9V_0$  به  $0.1V_0$  کاهش می‌یابد برابر  $4a \ln 3$  است. [۴۴]

با جایگذاری پتانسیل Woods-Saxon در معادله فوق کروی (۵-۴) داریم:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u_{n\ell}(x)}{dx^2} + \left[ \frac{\hbar^2(\ell+9)(\ell+10)}{2\mu x^2} - \frac{V_0}{1 + \exp(\frac{x - R_0}{a})} - E_0 \right] u_{n\ell}(x) = 0 \quad (8-4)$$

با توجه به رابطه بالا می‌توان پتانسیل مؤثر  $V_{\text{eff}}$  را برای  $\ell \neq 0$  به صورت زیر تعریف کرد:



$$V_{\text{eff}}(x) = V(x) + V_\ell(x) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{x - R_0}{a}\right)} + \frac{\hbar^2(\ell + 9)(\ell + 10)}{2\mu x^2} \quad (9-4)$$

برای حل معادله شرودینگر (۸-۴) از روش ابرتقارن استفاده می کنیم که در ضمیمه (الف) معرفی شده است. اما چون پتانسیل مؤثر (۹-۴) ترکیبی از یک جمله نمایی و یک جمله عکس مجذوری است، ابتدا باید از تقریب پکرینس استفاده کنیم تا حل تحلیلی معادله امکان پذیر باشد [۴۵]. این تقریب بر اساس بسط سد گریز از مرکز در یک سری نمایی است که به فاصله بین هسته ای وابسته است و در این تقریب، تا جمله مرتبه دوم این بسط در نظر گرفته می شود. برای ساده سازی محاسبات، ابتدا با استفاده از تغییر متغیرهای  $\alpha = \frac{R_0}{a}$  و  $z = \frac{x - R_0}{R_0}$  پتانسیل مؤثر را به صورت زیر می نویسیم:

$$V_{\text{eff}}(z) = V(z) + V_\ell(z) = \frac{-V_0}{1 + \exp(\alpha z)} + \frac{\hbar^2(\ell + 9)(\ell + 10)}{2\mu R_0^2} \frac{1}{(1 + z)^2} \quad (10-4)$$

سپس از بسط تیلور  $V_\ell(z)$  حول  $z = 0$  استفاده می کنیم:

$$V_\ell(z) = \frac{\hbar^2(\ell + 9)(\ell + 10)}{2\mu R_0^2} \frac{1}{(1 + z)^2} = \Omega (1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \dots) \quad (11-4)$$

که در آن  $\Omega = \frac{\hbar^2(\ell + 9)(\ell + 10)}{2\mu R_0^2}$  است. طبق تقریب پکرینس باید  $V_\ell(z)$  را با بسط زیر جایگزین کنیم:

$$V_\ell^*(z) = \Omega \left( d_0 + \frac{d_1}{1 + \exp(\alpha z)} + \frac{d_2}{(1 + \exp(\alpha z))^2} \right) \quad (12-4)$$

به منظور به دست آوردن مقدار پارامترهای  $d_0$ ،  $d_1$  و  $d_2$  باید رابطه بالا را نیز حول  $z = 0$  بسط دهیم

$$V_\ell^*(z) = \Omega \left[ \left( d_0 + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4} \right) - \frac{\alpha}{4} (d_1 + d_2) z + \frac{\alpha^2}{16} d_2 z^2 + \frac{\alpha^3}{48} (d_1 + d_2) z^3 + \dots \right] \quad (13-4)$$

بنابراین از مقایسه معادلات (۱۱-۴) و (۱۳-۴) داریم:

$$d_0 = 1 - \frac{4}{\alpha} + \frac{12}{\alpha^2}, \quad d_1 = \frac{8}{\alpha} - \frac{48}{\alpha^2}, \quad d_2 = \frac{48}{\alpha^2} \quad (14-4)$$

حال، پس از استفاده از تقریب پکریس، پتانسیل مؤثر به صورت زیر نوشته می شود:

$$V_{\text{eff}}^*(z) = V_{\text{ws}}(z) + V_{\ell}^*(z) = \Omega d_0 + \frac{\Omega d_1 - V_0}{1 + \exp(\alpha z)} + \frac{\Omega d_2}{(1 + \exp(\alpha z))^2} \quad (15-4)$$

در نتیجه، با جایگذاری این پتانسیل مؤثر در معادله (۸-۴) داریم:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u(z)}{dz^2} + \left[ \varepsilon + \frac{\beta}{1 + \exp(\alpha z)} + \frac{\gamma}{(1 + \exp(\alpha z))^2} - E_0 \right] u(z) = 0 \quad (16-4)$$

که در آن:

$$\varepsilon = \Omega d_0, \quad \beta = \Omega d_1 - V_0, \quad \gamma = \Omega d_2 \quad (17-4)$$

اکنون می توانیم با استفاده از روش ابرتقارن معادله شرودینگر (۱۶-۴) را حل کنیم. به این منظور

ابتدا "ابر پتانسیل" زیر را پیشنهاد می کنیم:

$$W(z) = \frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left( A + \frac{B}{1 + \exp(\alpha z)} \right) \quad (18-4)$$

برای محاسبه پارامترهای  $A$  و  $B$ ، ابتدا پتانسیل همتا  $V_1(z)$  را به دست می آوریم:

$$V_1(z) = W^2(z) - \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} W'(z) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ A^2 + \frac{2AB - \alpha B}{1 + \exp(\alpha z)} + \frac{B^2 + \alpha B}{(1 + \exp(\alpha z))^2} \right] \quad (19-4)$$

از طرف دیگر داریم:

$$V_1(z) = V_{\text{eff}}^*(z) - E_0 = \varepsilon + \frac{\beta}{1 + \exp(\alpha z)} + \frac{\gamma}{(1 + \exp(\alpha z))^2} - E_0 \quad (20-4)$$

از مقایسه روابط (۱۹-۴) و (۲۰-۴) انرژی حالت پایه  $E_0$  و  $A$  و  $B$  به دست می آید:

$$E_0 = \frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left( \frac{(2\mu/\hbar^2)\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4(2\mu/\hbar^2)\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \Omega d_0 \quad (21-4)$$

$$A = \frac{(2\mu/\hbar^2)\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4(2\mu/\hbar^2)\gamma}} + \frac{\alpha}{2}, \quad B = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4(2\mu/\hbar^2)\gamma}}{2} \quad (22-4)$$

هم چنین، برای محاسبه تابع موج حالت پایه از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$u_0^{(1)}(z) = N_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int^z W(z') dz'\right) = N_0 \exp(Az) (1 + \exp(-\alpha z))^{-B/\alpha} \quad (23-4)$$

که در آن  $N_0$  ثابت بهنجارش است. در نهایت تابع موج حالت پایه عبارت است از:

$$R_0^{(1)}(x) = N_0 \left( \frac{\exp\left[A\left(\frac{x-R_0}{R_0}\right)\right]}{x^{10}} \right) \left( 1 + \exp\left[-\left(\frac{x-R_0}{a}\right)\right]^{-B/\alpha} \right) \quad (24-4)$$

با داشتن  $V_1(z)$  و  $V_2(z)$  می توان توابع موج حالت های برانگیخته را با استفاده از روابط زیر محاسبه کرد:

$$V_2(z; a_1) = V_1(z; a_2) + R(a_1) \quad (25-4)$$

$$u_n^{(1)}(z; a_1) = A^\dagger(z; a_1) u_{n-1}^{(1)}(z; a_2), \quad A^\dagger = \frac{-\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dz} + W(z) \quad (26-4)$$

که  $V_1(z)$  در رابطه (۱۹-۴) آمده است و  $V_2(z)$  عبارت است از:

$$V_2(z) = W^2(z) + \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} W'(z) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ A^2 + \frac{2AB + \alpha B}{1 + \exp(\alpha z)} + \frac{B^2 - \alpha B}{(1 + \exp(\alpha z))^2} \right] \quad (27-4)$$

برای محاسبه توابع موج حالت های برانگیخته ابتدا باید رابطه بین پارامترهای  $a_1$  و  $a_2$  را به دست آوریم،

به این منظور در اولین پتانسیل پارامتر  $B$  را به  $a_2$  و در دومین پتانسیل به  $a_1$  تغییر نام می دهیم و در معادله (۲۵-۴) جایگذاری می کنیم:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ A^2 + \frac{2Aa_1 + \alpha a_1}{1 + \exp(\alpha z)} + \frac{a_1^2 - \alpha a_1}{(1 + \exp(\alpha z))^2} \right] = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ A^2 + \frac{2Aa_2 - \alpha a_2}{1 + \exp(\alpha z)} + \frac{a_2^2 + \alpha a_2}{(1 + \exp(\alpha z))^2} \right] + R(a_1) \quad (28-4)$$

ما با توجه به رابطه  $a_2 = f(a_1)$ ، تنها جملاتی که به  $z$  وابسته هستند را در نظر گرفته ایم. در این صورت داریم:

$$a_2 = f(a_1) = B - \alpha \quad \text{که} \quad a_1 = B \quad (29-4)$$

با به دست آوردن این مقادیر و جایگذاری آنها در (۲۴-۴) می توان  $R(a_1)$  را محاسبه کرد که در محاسبه انرژی حالت‌های برانگیخته کاربرد دارد. اکنون می توان با استفاده از (۲۵-۴) توابع موج حالت‌های برانگیخته را به دست آورد:

$$\begin{aligned} u_1^{(1)}(z; a_1) &= \frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} \frac{d}{dz} u_0^{(1)}(z; a_2) + W(z) u_0^{(1)}(z; a_2) \\ &= \frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} \frac{d}{dz} u_0^{(1)}(z; B - \alpha) + W(z) u_0^{(1)}(z; B - \alpha) \end{aligned} \quad (30-4)$$

$$\begin{aligned} u_1^{(1)}(z; B) &= \frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} \frac{d}{dz} \left[ N_0 \exp(Az) (1 + \exp(-\alpha z))^{-(B-\alpha)/\alpha} \right] \\ &\quad + W(z) \left[ N_0 \exp(Az) (1 + \exp(-\alpha z))^{-(B-\alpha)/\alpha} \right] \\ &= -N_0 \left[ \exp(Az) (1 + \exp(-\alpha z))^{1-B/\alpha} \right] \left[ A + \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left( \frac{B}{1 + \exp(\alpha z)} + A \right)^{1-B/\alpha} \right] \\ &\quad - N_0 \left[ (B - \alpha) (1 + \exp(\alpha z))^{-B/\alpha} \right] \end{aligned} \quad (31-4)$$

بنابراین تابع موج اولین حالت برانگیخته عبارت است از :

(۳۲-۴)

$$R_1^{(1)}(x) = \frac{-N_0}{x^{10}} \left[ \exp\left(A \frac{x-R_0}{R_0}\right) \left(1 + \exp\left(-\frac{x-R_0}{a}\right)\right)^{1-B/\alpha} \right] \left[ A + \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left( \frac{B}{1 + \exp\left(\frac{x-R_0}{a}\right)} + A \right)^{1-B/\alpha} \right] \\ \frac{-N_0}{x^{10}} \left[ (B-\alpha) \left(1 + \exp\left(\frac{x-R_0}{a}\right)\right)^{-B/\alpha} \right]$$

#### ۳-۱-۴ محاسبه توابع موج با پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده

در این قسمت می خواهیم توابع موج مربوط به پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده را به دست آوریم.

به این منظور معادله شرودینگر (۴-۸) را برای  $V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$  با روش ابرتقارن حل کردیم :

(۳۳-۴)

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u_{n\ell}(x)}{dx^2} + \left[ \frac{\hbar^2(\ell+9)(\ell+10)}{2\mu x^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 - E_0 \right] u_{n\ell}(x) = 0$$

است از:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left( Cx + \frac{D}{x} \right) \quad (۳۴-۴)$$

که با روشی مشابه بخش قبل می توان ضرایب  $C$  و  $D$  و انرژی حالت پایه  $E_0$  را به دست آورد:

$$C = -\frac{\mu\omega}{\hbar}, \quad D = (\ell+10), \quad E_0 = \hbar\omega \left( \ell + \frac{21}{2} \right) \quad (۳۵-۴)$$

هم چنین، تابع موج حالت پایه عبارت است از:

$$u_0^{(1)}(x) = N_0 \exp \left[ -\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int^x \left( -\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left( -\frac{\mu\omega}{\hbar} x' + \frac{(\ell+10)}{x'} \right) \right) dx' \right] = N_0 \exp \left( -\frac{\mu\omega}{2\hbar} \right) x^{(\ell+10)} \quad (۳۶-۴)$$

$$R_0^{(1)}(x) = N_0 \exp \left( -\frac{\mu\omega}{2\hbar} \right) x^\ell \quad (۳۷-۴)$$

حال می توان با تشکیل  $V_1(x)$  و  $V_2(x)$  و استفاده از شرط SIP رابطه بین پارامترهای  $a_1$  و  $a_2$  را برای پتانسیل نوسانی پیدا کرد:

$$V_1(x) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 - \hbar \omega \left( \ell + \frac{21}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{(\ell+10)(\ell+9)}{x^2} \right) \quad (۴-۳۸-الف)$$

$$V_2(x) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 - \hbar \omega \left( \ell + \frac{19}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{(\ell+10)(\ell+11)}{x^2} \right) \quad (۴-۳۸-ب)$$

$$V_2(x; a_1) = V_1(x; a_2) + R(a_1) \quad (۴-۳۹)$$

$$\frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 - \hbar \omega \left( a_1 + \frac{19}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{(a_1+10)(a_1+11)}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 - \hbar \omega \left( a_2 + \frac{21}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{(a_2+10)(a_2+9)}{x^2} \right) + R(a_1) \quad (۴-۴۰)$$

با مقایسه طرفین این رابطه داریم:

$$a_2 = f(a_1) = \ell + 1, \quad a_1 = \ell \quad (۴-۴۱)$$

با جایگذاری مقادیر  $a_1$  و  $a_2$  در شرط SIP می توان  $R(a_1)$  را به دست آورد:

$$R(a_1) = R(\ell) = 2\hbar\omega \quad (۴-۴۲)$$

اکنون با توجه به رابطه  $E_n^{(1)} = 0$  :  $E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{k=1}^n R(a_k)$  می توان طیف ویژه مقادیر انرژی

هامیلتونی  $H_1$  را به طور کامل به دست آوریم و سپس با استفاده از رابطه  $E_n = E_n^{(1)} + E_0$  ویژه

مقادیر انرژی معادله (۴-۳۳) را محاسبه کنیم:

$$E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{k=1}^n R(a_k) = 2n\hbar\omega \quad (۴-۴۳)$$

$$E_n = \hbar\omega \left( 2n + \ell + \frac{21}{2} \right) \quad \text{یا} \quad E_N = \hbar\omega \left( N + \frac{21}{2} \right) \quad (۴-۴۴)$$

برای محاسبه تابع موج اولین حالت برانگیخته از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$u_1^{(1)}(x; \ell) = A^\dagger(x; \ell) u_0^{(1)}(x; \ell + 1) \quad (45-4)$$

$$R_1^{(1)}(x; \ell) = \frac{2\hbar}{\sqrt{2\mu}} N_0 \left( \exp\left(-\frac{\mu\omega}{2\hbar} x^2\right) x^\ell \right) \left( -\frac{\mu\omega}{\hbar} x^2 + \frac{(2\ell + 21)}{2} \right) \quad (46-4)$$

به همین ترتیب می توان توابع موج حالت‌های بالاتر را نیز به دست آورد. پس از محاسبه ضرایب بهنجارش و با تعیین مقادیر مناسب برای  $n$  و  $\ell$ ، می توان توابع موج را به صورت زیر نوشت:

\* تابع موج حالت پایه ( $N = 0 : n = 0, \ell = 0$ ):

$$R_{n=0}^{(1)}(x; \ell = 0) = 2 \left( \frac{\nu^3}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\nu x^2} \quad (47-4)$$

\* تابع موج اولین حالت برانگیخته ( $N = 1 : n = 0, \ell = 1$ ):

$$R_0^{(1)}(x; \ell = 1) = \sqrt{\frac{2^3}{3}} \left( \frac{\nu^5}{\pi} \right)^{1/4} x e^{-\frac{1}{2}\nu x^2} \quad (48-4)$$

\* تابع موج دومین حالت برانگیخته ( $N = 2 : n = 0, \ell = 2$ ):

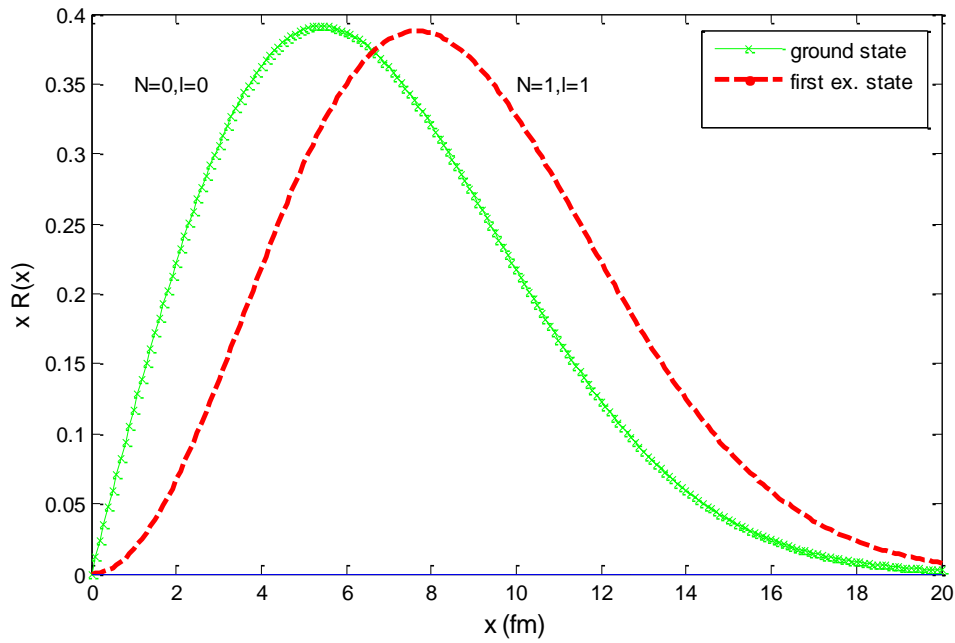
$$R_0^{(1)}(x; \ell = 2) = \sqrt{\frac{2^4}{15}} \left( \frac{\nu^7}{\pi} \right)^{1/4} x^2 e^{-\frac{1}{2}\nu x^2} \quad (49-4)$$

\* تابع موج دومین حالت برانگیخته ( $N = 2 : n = 1, \ell = 0$ ):

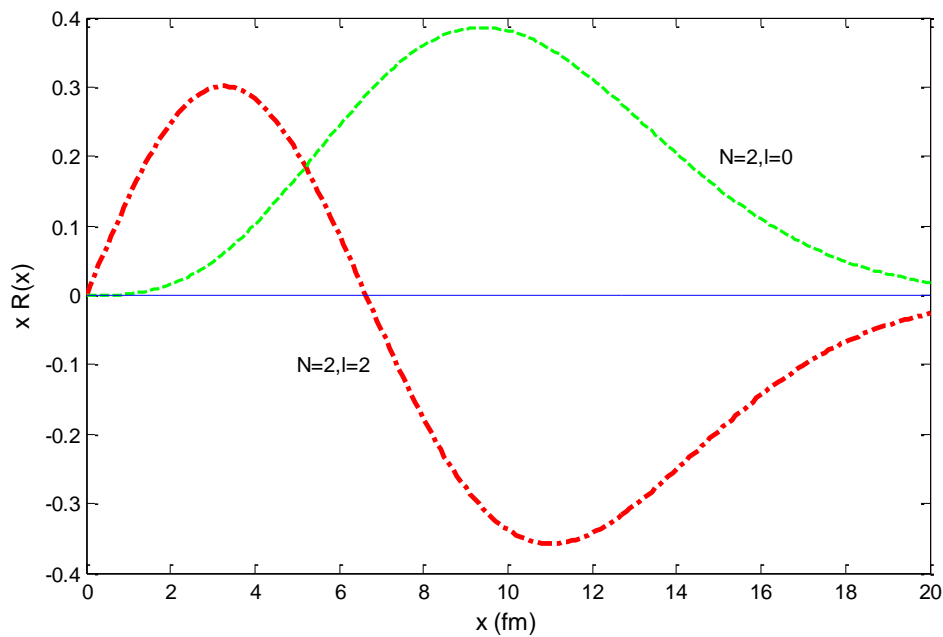
$$R_1^{(1)}(x; \ell = 0) = \sqrt{\frac{2^3}{3}} \left( \frac{\nu^3}{\pi} \right)^{1/4} \left( \frac{3}{2} - \nu x^2 \right) e^{-\frac{1}{2}\nu x^2} \quad (50-4)$$

که در این روابط  $\nu = \frac{\mu\omega}{\hbar}$  است، که ما برای محاسبات عددی خود از رابطه  $\hbar\omega \approx 41A^{-1/3} \text{ MeV}$

استفاده کرده ایم [۴۶]. این توابع در شکل (۳-۴) و شکل (۴-۴) رسم شده اند.



شکل (۳-۴) تابع موج حالت پایه و اولین حالت برانگیخته پتانسیل نوسانی



شکل (۴-۴) تابع موج دومین حالت برانگیخته پتانسیل نوسانی

#### ۴-۱-۴ محاسبه نیمه عمر واپاشی

ما با استفاده از توابع موج به دست آمده در معادلات (۲۴-۴) و (۳۷-۴) که به ترتیب به پتانسیل Woods-Saxon و پتانسیل نوسانی مربوط می شوند، عنصر ماتریس هسته ای را با توجه به رابطه



به صورت عددی محاسبه کردیم. سپس با استفاده از معادله (۴-۱) نیمه عمر

واپاشی دو بتایی  $^{48}\text{Ca}$  را به دست آوردیم، که نتایج آن در جدول (۴-۲) درج شده است.

جدول (۴-۲) نیمه عمر تجربی و تئوری برای واپاشی دو بتایی  $^{48}\text{Ca}$

نوع گذار	نتایج محاسبات ما		نتایج تئوری در مرجع [۳۷]	نتایج تجربی [۳۰]
	$t_{1/2}^{\beta^-\beta^-}(\text{WS}) (y)$	$t_{1/2}^{\beta^-\beta^-}(\text{HO}) (y)$		
$0^+ \rightarrow 0^+$	$3/13 \times 10^{19}$	$3/8.0 \times 10^{19}$	$3/3.0 \times 10^{19}$	$(4/3 \pm 1/4) \times 10^{19}$

همان طور که در شکل (۴-۱) مشاهده می شود واپاشی تک بتایی حالت پایه  $0^+$  هسته  $^{48}\text{Ca}$  به پایین ترین حالت های هسته  $^{48}\text{Sc}$  با اسپین - پاریته  $J^\pi = 6^+, 5^+, 4^+$  نیز امکان پذیر است. اما این واپاشی ها از مرتبه ممنوعیت بالایی برخوردار هستند، به گونه ای که واپاشی حالت پایه  $0^+$  به حالت های  $4^+$  و  $5^+$  واپاشی ممنوع چهارم و به حالت  $6^+$  واپاشی ممنوع ششم است. ما با استفاده از توابع موج حالت پایه و حالت برانگیخته برای پتانسیل Woods-Saxon در معادلات (۴-۲۴) و (۴-۳۲) ابتدا عنصر ماتریس هسته ای و سپس نیمه عمر این واپاشی ها را به کمک رابطه زیر محاسبه کردیم، که نتایج این محاسبه در جدول (۴-۳) داده شده است.

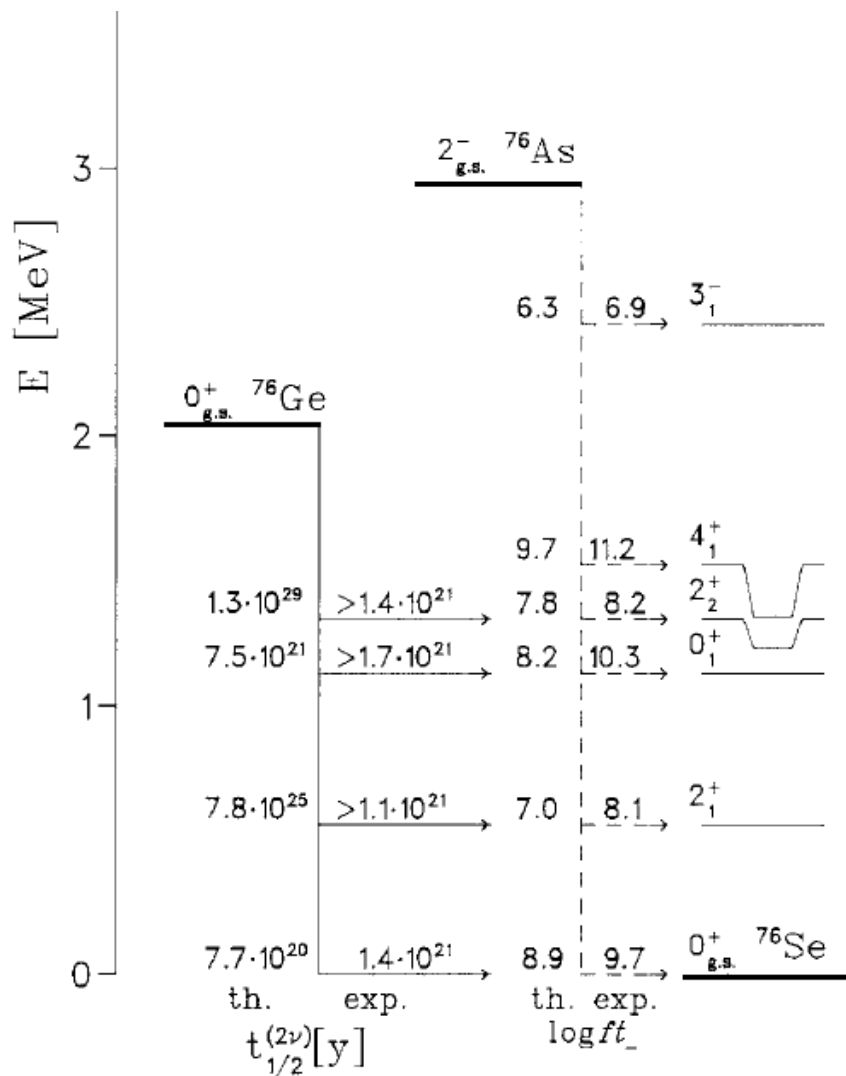
$$ft_{1/2} = 0.693 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 m_e^5 c^4 |M_{fi}|^2} \quad (۴-۵۱)$$

جدول (۴-۳) نیمه عمر تجربی و تئوری برای واپاشی  $\beta^-$  هسته  $^{48}\text{Ca}$

نوع گذار	$E_\beta$ (keV) [۴۰]	$\log f_\beta^-$	نتایج محاسبات ما	نیمه عمر محاسبه شده در مرجع [۴۷]	مقدار تجربی نیمه عمر [۴۰]
			$t_{1/2} (y)$		
$0^+ \rightarrow 6^+_{g.s.}$	۲۷۷/۵۸۷۵	-۳/۷۹۸۴	$2/0.65 \times 10^{30}$	$1/5 \times 10^{29} - 1/3 \times 10^{31}$	$> 0.71 \times 10^{20}$
$0^+ \rightarrow 5^+$	۱۴۶/۶۸۷۵	-۶/۲۸۶۰	$1/0.2 \times 10^{21}$	$1/1 \times 10^{21}$	$> 1/1 \times 10^{20}$
$0^+ \rightarrow 4^+$	۲۵/۱۸۷۵	-۱۳/۱۵۸۶	$3/379.0 \times 10^{27}$	$8/8 \times 10^{23} - 5/2 \times 10^{28}$	$> 0.82 \times 10^{20}$

## ۲-۴ واپاشی $2\nu\beta\beta$ در هسته $^{76}\text{Ge}$

در فصل قبل به نکاتی در مورد واپاشی  $2\nu\beta\beta$  هسته  $^{76}\text{Ge}$  اشاره شد. هسته  $^{76}\text{Ge}$  با واپاشی دوتایی به هسته  $^{76}\text{Se}$  تبدیل می شود و حالت میانی در این واپاشی به حالت های  $1^+$  هسته  $^{76}\text{As}$  مربوط می شود که در شکل (۴-۵) نشان داده شده است. همان طور که در این شکل مشاهده می شود، واپاشی تک بتایی  $^{76}\text{Ge}$  به  $^{76}\text{As}$  از لحاظ انرژی ممنوع است.



شکل (۴-۵) نمودار واپاشی دو بتایی  $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$  [۴۸]

همان طور که قبلاً گفته شد یکی از روشهای محاسبه عنصر ماتریس هسته ای در واپاشی  $\beta\beta$  روش QRPA است، شاید بهترین مثال برای بررسی قدرت این روش در پیش بینی داده های تجربی واپاشی دوتایی  $^{76}\text{Ge}$  باشد. در گذشته، واپاشی  $^{76}\text{Ge}$  به مشاهده مستقیم مد  $2\nu$  منحصر شده بود. در حقیقت، آزمایش های اولیه منجر به کشف این نکته شد که در نظر گرفتن همبستگی های ذره - ذره برای نزدیکتر کردن نتایج تئوری به داده های تجربی واقعاً مورد نیاز است. نتایج مربوط به تقریب QRPA، در مجموعه پایه های مختلف و با در نظر گرفتن برخی تصحیحات مربوط به انرژی های تک - ذره در جدول (۴-۴) آمده است. هم چنین در این جدول عناصر ماتریسی واپاشی  $2\nu\beta\beta$  به چند حالت برانگیخته اول در هسته نهایی  $^{76}\text{Se}$  داده شده است.

**جدول (۴-۴)** بخش بالایی: عناصر ماتریس گاموف - تلر محاسبه شده با روش QRPA و نیمه عمرهای مربوط به واپاشی  $2\nu\beta\beta$  هسته  $^{76}\text{Ge}$  به حالت پایه و حالت های برانگیخته  $0_1^+$ ،  $2_1^+$  و  $2_2^+$  هسته  $^{76}\text{Se}$ . همچنین نیمه عمرهای تجربی و عناصر ماتریسی استخراج شده از آنها داده شده اند. محاسبات در پایه های WS و AWS انجام شده است. نتایج ستون چهارم مربوط به  $g_{pp} = 1.0$  است. بخش پایینی: همان محاسبات در نسخه های دیگر RPA (QRPA) ثانویه در ستون سوم و RQRPA در ستون پنجم و ششم) و مدل HFB در ستون دوم انجام شده است [۸].

Quantity	Exp. [16,23]	[75] (WS)	[45] (WS)	[13] (AWS)
$ M^{(2\nu)}(\text{g.s.}) $	0.074	0.092	—	0.100
$ M^{(2\nu)}(2_1^+) $	< 0.87	0.001	~ 0.002	0.003
$ M^{(2\nu)}(0_1^+) $	< 1.8	0.363	—	0.838
$ M^{(2\nu)}(2_2^+) $	< 27	0.003	—	0.003
$t_{1/2}^{(2\nu)}(\text{g.s.})$	1.4(21)	9(20)	—	7.7(20)
$t_{1/2}^{(2\nu)}(2_1^+)$	> 1.1(21)	5(26)	~ 2(26)	7.8(25)
$t_{1/2}^{(2\nu)}(0_1^+)$	> 1.7(21)	4(22)	—	7.5(21)
$t_{1/2}^{(2\nu)}(2_2^+)$	> 1.4(21)	1(29)	—	1.3(29)
Quantity	[83] (HFB)	[234] (WS)	[257] (WS)	[257] (AWS)
$ M^{(2\nu)}(\text{g.s.}) $	0.077	0.083	0.074	0.074
$ M^{(2\nu)}(2_1^+) $	0.038	0.013	0.003	0.003
$ M^{(2\nu)}(0_1^+) $	—	0.056	0.229	0.130
$ M^{(2\nu)}(2_2^+) $	—	—	0.007	0.012
$t_{1/2}^{(2\nu)}(\text{g.s.})$	1.3(21)	1.1(21)	1.4(21)	1.4(21)
$t_{1/2}^{(2\nu)}(2_1^+)$	5.8(23)	5.0(24)	1.0(26)	1.0(26)
$t_{1/2}^{(2\nu)}(0_1^+)$	—	1.7(24)	1.0(23)	3.1(23)
$t_{1/2}^{(2\nu)}(2_2^+)$	—	—	2.2(28)	7.2(27)

مقدار QRPA برای گذار به حالت پایه، با در نظر گرفتن مقدار  $g_{pp}$  که از واپاشی تک بتایی به دست آمده است (ستون پنجم)، به مقدار عنصر ماتریسی استخراج شده خیلی نزدیک است. در این مورد از انرژی های تک - ذره پتانسیل تعدیل یافته Woods-Saxon<sup>1</sup> (که به شکل مخفف AWS در جدول (۳-۴) نوشته شده است) استفاده شده است. در بخش پایینی جدول (۳-۴) نتایج مربوط به مدل هارتری - فوک - بوگلیوو (HFB) در ستون دوم، QRPA ثانویه<sup>2</sup> در ستون سوم و QRPA بهنجار شده<sup>3</sup> (RQRPA) در ستون چهارم و پنجم ارائه شده است.

از جدول (۳-۴) می توان به چند ویژگی مشترک در نتایج این گونه محاسبات اشاره کرد :

- عناصر ماتریسی مربوط به گذار به حالت نهایی  $0^+$  از عناصر ماتریسی مربوط به گذار به حالت نهایی  $2^+$  بزرگتر هستند.

- عنصر ماتریسی  $0_1^+$ ، وقتی به صورت یک برانگیختگی دو - فونونی بیان می شود، از نظر اندازه از عنصر ماتریسی حالت پایه بزرگتر است.

به نظر می آید ویژگی هایی که در بالا بیان شد فقط به  $^{76}\text{Ge}$  اختصاص ندارد و جزء خصوصیات عمومی تر این نوع واپاشی ها محسوب می شوند. یعنی بهترین کاندیدا برای اندازه گیری گذارهای حالت برانگیخته، واپاشی به حالت نهایی  $0_1^+$  است. (عوامل فضای فاز مربوط به گذار به حالت های نهایی  $2_1^+$  الزاماً از عوامل فضای فاز مربوط به گذار به حالت های نهایی  $0_1^+$  بزرگتر نیستند). سومین ویژگی نسبتاً عمومی گذارهای حالت برانگیخته، عبارت است از:

- به طور متوسط، عناصر ماتریس هسته ای گذارها به حالت های نهایی برانگیخته در مقایسه با عناصر ماتریس هسته ای گذار به حالت نهایی پایه، به شدت برهم کنش ذره - ذره پروتون - نوترون حساسیت کمتری دارند.

<sup>1</sup>. Adjusted Woods-Saxon Potential

<sup>2</sup>. Second QRPA

<sup>3</sup>. Renormalized QRPA

در بسیاری موارد، در نظر گرفتن ویژگی های گذار به حالت های برانگیخته که در بالا ذکر شد باعث می شود که پیش بینی آهنگ گذار به حالت های برانگیخته از پیش بینی آهنگ گذار به حالت پایه آسان تر شود [۸].

در فصل قبل گفتیم که، مدل پوسته ای یکی از مدل های پایه هسته ای است که برای محاسبات مربوط به ساختار هسته ای و خواص هسته ای به کار می رود. یک مرجع بسیار خوب برای اولین محاسبات پیشرفته مدل پوسته ای مقاله ای است که توسط Haxton و Stephenson Jr. نوشته شده است [۳۹]. این دو نویسنده برای محاسبه عناصر ماتریس هسته ای واپاشی  $\beta\beta$  در هسته های  $^{76}\text{Ge}$ ،  $^{82}\text{Se}$ ،  $^{128,130}\text{Te}$  از مدل جفت شدگی ضعیف استفاده کرده اند، زیرا پایه های بزرگ باعث می شود که محاسبه مستقیم مدل پوسته ای غیر عملی شود. آنها ابتدا توابع موج پروتونی و نوترونی در مدل پوسته ای را، به طور جداگانه برای دو، چهار، شش و هشت ذره ظرفیت و دو، چهار، شش و هشت حفره ظرفیت در زیر پوسته های  $1g_{9/2} - 1f_{5/2} - 2p_{1/2} - 2p_{3/2}$  و با در نظر گرفتن همه پیکربندی های ممکن، به دست آوردند. به منظور تشکیل یک پایه جفت شدگی ضعیف با یک اسپین - پاریتته معین ( $0^+$  یا  $2^+$ )، پنجاه حالت پروتونی با کمترین انرژی را با همین تعداد حالت نوترونی ترکیب کردند. سپس توابع موج حالت پایه هسته های مادر و دختر در واپاشی  $\beta\beta$  را به وسیله قطری کردن برهم کنش باقی مانده پروتون - نوترون در حالت های جفت شده پروتون - نوترون محاسبه کردند.

این نویسندگان برای حل مشکلی که در بررسی درست و صریح طیف  $1^+$  میانی داشتند از تقریب بستاری که در بخش (۳-۲-۲) بیان شد، در محاسبات خود استفاده کردند. علاوه بر این، آنها همتهای اسپین - مداری<sup>۱</sup>، برای مثال  $f_{7/2}$  برای  $f_{5/2}$ ، را که نقش مهمی در گذارهای گاموف - تلر دارند در نظر نگرفتند. برهم کنش مؤثر در این مدل براساس Kuo G-matrix [۳۶] به علاوه برهم کنش کولنی بین پروتونها در نظر گرفته شده بود. توابع موج مربوط به مدل جفت شدگی ضعیف و عناصر ماتریسی

---

<sup>1</sup>. spin - orbit partner

گذار با استفاده از کدهایی که توسط Haxton نوشته شده بود [۴۹]، محاسبه شده اند. در جدول (۵-۴) برآوردهای تئوری  $|M_{GT}|$  در این مقاله با مقادیر تجربی مقایسه شده است. بین آهنگ های تئوری و آزمایشگاهی برای واپاشی  $2\nu\beta\beta$  در هسته  $^{48}\text{Ca}$  و  $^{82}\text{Se}$  توافق معقولی وجود دارد. مقادیر بزرگ تئوری برای  $|M_{GT}|$  ناشی از تعداد زیاد جملات کوچک در ماتریس گذار دو - جسمی برای هسته های  $^{76}\text{Ge}$ ،  $^{82}\text{Se}$ ،  $^{128}\text{Te}$  و  $^{130}\text{Te}$  است.

جدول (۵-۴) مقادیر محاسبه شده و تجربی عناصر ماتریسی گاموف - تلر واپاشی دو بتایی [۳۹]

Nucleus	$ M_{GT} $ theory	$ M_{GT} $ exp*
$^{48}\text{Ca}$	0.22	$\leq 0.20$ (Bar70)
$^{76}\text{Ge}$	1.28	—
$^{82}\text{Se}$	0.94	1.151 (Moe80) 0.40† (Kir83b)
$^{128}\text{Te}$	1.47	0.21–0.25† (Hen75), (Hen78) <0.189 (Kir83a)
$^{130}\text{Te}$	1.48	0.11–0.14† (Kir68), (Ale69), (Sri72a,b), (Kir83a) 0.19† (Hen75)

\* Calculated using  $F_A = -1.25$ ,  $\cos \theta_c = 0.9737$  and  $M_F = 0$ .  
† Maximum values determined from total geochemical rates.

ما با در نظر گرفتن هسته  $^{56}_{28}\text{Ni}_{28}$  به عنوان بخش مرکزی برای هسته های  $^{76}\text{Ge}$  و  $^{76}\text{Se}$  معادله زیر را که معادله شرودینگر برای ۲۰ نوکلئون ظرفیت است، حل کردیم:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u_{nl}(x)}{dx^2} + \left[ \frac{\hbar^2(\ell+27)(\ell+28)}{2\mu x^2} + V(x) - E_0 \right] u_{nl}(x) = 0 \quad (52-4)$$

که جواب این معادله را برای دو پتانسیل نوسانی و پتانسیل Woods-Saxon به دست آوردیم و سپس با استفاده از توابع موج به دست آمده، عنصر ماتریس هسته ای و نیمه عمر واپاشی دو بتایی را با توجه به رابطه (۱-۴) محاسبه کردیم که نتایج آن را می توان در جدول (۶-۴) مشاهده کرد.

جدول (۴-۶) نیمه عمر تجربی و تئوری برای واپاشی دوتایی  $^{76}\text{Ge}$ .

نوع گذار	نتایج محاسبات ما		نتایج تئوری در مرجع [۵۱]	نتایج تجربی [۳۰]
	$t_{1/2}^{\beta^-\beta^- (\text{WS})} (y)$	$t_{1/2}^{\beta^-\beta^- (\text{HO})} (y)$		
$0^+ \rightarrow 0^+$	$1/19 \times 10^{21}$	$1/75 \times 10^{21}$	$1/3 \times 10^{21}$	$(1/43 \pm 0/53) \times 10^{21}$

ما در این فصل به محاسبه نیمه عمر واپاشی دوتایی در هسته های  $^{48}\text{Ca}$  و  $^{76}\text{Ge}$  پرداختیم و همان طور که از جداول (۴-۲) و (۴-۶) مشاهده می شود نتایج کار ما با داده های تجربی و سایر محاسبات انجام شده در این زمینه تطابق خوبی دارد.

## پیوست الف : مکانیک کوانتومی ابر تقارن

ابر تقارن (که اغلب به صورت مخفف SUSY نوشته می شود) یک مفهوم ریاضی است که از استدلالهای تئوری به وجود آمده است و در حال حاضر، یک جزء ضروری در هر نظریه وحدتی است که سعی داشته باشد توصیف واحدی از برهم کنشهای اساسی موجود در طبیعت یعنی برهم کنشهای قوی و الکتروضعیف و گرانشی ارائه کند. به صورت خلاصه ابر تقارن، تقارنی است که بوزونها و فرمیونها را به هم مرتبط می سازد. بر طبق این نظریه بوزونها که مبادله کننده برهم کنش هستند با فرمیونها توسط یک ابرتقارن به هم وابسته اند. ابرتقارن در سال ۱۹۷۱ توسط Gel'fand و Likhtman کشف شده است. جبر درگیر در ابرتقارن جبر مدرج لی است که تحت ترکیبی از روابط جا به جایی و پاد جابه جایی بسته است. این موضوع اولین بار در زمینه مدل‌های ریسمان برای وحدت بخشی به قسمت‌های بوزونی و فرمیونی معرفی شد [۵۰].

مکانیک کوانتومی ابر تقارن یکی از بهترین روش‌ها برای تعیین ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع در مسائل مکانیک کوانتومی است. هامیلتونی یک بعدی زیر را در نظر می گیریم:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (\text{الف-۱})$$

که ویژه توابع آن را با  $\psi_n(x)$  و ویژه مقادیر آن را با  $E_n$  نمایش می دهیم. برای حالت پایه داریم:

$$H\psi_0(x) = E_0\psi_0(x) \quad (\text{الف-۲})$$

که در آن  $E_0$  انرژی حالت پایه است. حال  $V_1(x)$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$V_1(x) = V(x) - E_0 \quad (\text{الف-۳})$$

در این صورت هامیلتونی متناظر با پتانسیل  $V_1(x)$  عبارت است از:

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (\text{الف-۴})$$



واضح است که مقدار انرژی حالت پایه این هامیلتونی صفر است و انرژی ترازهای دیگر نسبت به انرژی هامیلتونی  $H$  به اندازه  $E_0$  کاهش یافته است و چون  $V(x)$  و  $V_1(x)$  به جز در یک مقدار ثابت با یکدیگر یکسانند، بنابراین دارای ویژه توابع یکسانی هستند. اگر ویژه مقدار انرژی متناظر با پتانسیل  $V_1(x)$ ،  $E_n^{(1)}$  و ویژه تابع آن  $\psi_n^{(1)}(x)$  باشد داریم:

$$E_n^{(1)} = E_n - E_0 \quad (\text{الف-۵})$$

$$\psi_n^{(1)}(x) = \psi_n(x) \quad (\text{الف-۶})$$

گام اول در این روش فاکتوربندی هامیلتونی است. با فرض اینکه انرژی حالت پایه صفر باشد می توان هامیلتونی یک بعدی  $H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)$  را به صورت  $H_1 = A^\dagger A$  یعنی حاصلضرب دو عملگر  $A$  و  $A^\dagger$  نوشت که عبارتند از:

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (\text{الف-۷})$$

$$A^\dagger = \frac{-\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (\text{الف-۸})$$

که  $W(x)$  را " ابر پتانسیل " می نامند. با جایگذاری این روابط در هامیلتونی  $H_1$ ، می توان به رابطه زیر دست یافت که معادله ریکاتی نامیده می شود:

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (\text{الف-۹})$$

که با حل معادله بالا،  $W(x)$  بر حسب تابع موج حالت پایه به صورت زیر بیان می شود:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} \Rightarrow \psi_0(x) = N_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y) dy\right) \quad (\text{الف-۱۰})$$

با معکوس کردن ترتیب عملگرهای  $A$  و  $A^\dagger$  می توان یک هامیلتونی جدید به صورت  $H_2 = AA^\dagger$  ایجاد کرد که با انجام محاسبات مشابه، پتانسیل جدید  $V_2(x)$  که وابسته به ابرپتانسیل است به دست می آید:

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (\text{الف-۱۱})$$

پتانسیل های  $V_1(x)$  و  $V_2(x)$  را "پتانسیل های همتای ابرتقارنی" می نامند. این پتانسیل ها باید در شرط زیر که مربوط به پتانسیل های ناورد شکل (SIP) است صدق کنند:

$$V_2(x; a_1) = V_1(x; a_2) + R(a_1) \quad (\text{الف-۱۲})$$

که در این رابطه  $a_1$  و  $a_2$  دو گروه مختلف از پارامترها هستند که از طریق روابطی همچون  $a_2 = f(a_1)$  به هم مربوط می شوند. یک جنبه مهم رابطه بالا جمله باقیمانده  $R(a_1)$  است که مستقل از  $x$  است. با استفاده از این شرط می توان ویژه مقادیر انرژی حالت های بالاتر هامیلتونی  $H_1$  را هم به دست آورد:

$$E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{k=1}^n R(a_k) \quad (\text{الف-۱۳})$$

سپس با استفاده از معادله (الف-۵) می توان کل طیف انرژی هامیلتونی  $H$  را نیز به دست آورد. برای یافتن توابع موج مراتب بالاتر می توان از رابطه زیر استفاده کرد [۵۰]

$$\psi_n^{(1)}(x; a_1) = A^\dagger(x; a_1) \psi_{n-1}^{(1)}(x; a_2) \quad (\text{الف-۱۴})$$

[۱] S. S. M. Wong (1990) "**Introductory Nuclear Physics**" Printice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07932, pp.187-191.

[۲] کینت کرین، (۱۳۸۶) " آشنایی با فیزیک هسته ای " جلد اول، ترجمه: ا. ابوکاظمی، م. رهبر، چاپ پنجم، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.

[۳] S. S. M. Wong (1990) "**Introductory Nuclear Physics**" Printice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07932, pp.443-446.

[۴] S. S. M. Wong (1990) "**Introductory Nuclear Physics**" Printice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07932, pp.207-230.

[۵] کینت کرین، (۱۳۸۸) " آشنایی با فیزیک هسته ای " جلد دوم، ترجمه: ن. میرفخرایی، م. مدرس، چاپ دوم، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ص ۴۰۸.

[۶] B.R. Martin (2006) "**Nuclear and Particle Physics**" John Wily & Sons, England, pp. 183.

[۷] K. Muto, H.V. Klapdor (2001) " Double beta decay, neutrino mass and nuclear structure" pp. 333-387, "**Sixty Years of Double Beta Decay: From Nuclear physics To Beyond Standard Model Particle Physics**" H. V. Klapdor-Kleingrothaus, World Scientific, Singapore.

[۸] J. Suhonen, O. Civitarese (1998) " Weak intraction and nuclear structure aspects of nuclear double beta decay " **Phys. Rep.** 300, 3- 4, 123-214.

[۹] B. Pritychenko (2013) "Systematics of evaluated half-lives of double-beta decay" **Bull. Am. Phys. Soc.** 58.

- [10] P. Vogel (2012) " Nuclear structure and double beta decay" **J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.** 39,12, 124002.
- [11] J. F. Nieves (1984) "Dirac and pseudo-Dirac neutrinos and neutrinoless double beta decay" **Phys. Lett. B** 147, 4-5, 375-379.
- [12] E. Takasugi (1984) "Can the  $0\nu\beta\beta$  decay take place in the case of Dirac neutrinos" **Phys. Lett.** 49, 4-5, 372-376.
- [13] M. Doi, T. Kotani, E.Takasugi (1985) "Double beta decay and majorana neutrino" **Prog. Theor. Phys. Supp.** 83, 1-175.
- [14] M. Goepfert-Mayer (1935) "Double beta-disintegration" **Phys. Rev.** 48, 6, 512-516.
- [15] E. Fermi, (1934) " Fermi theory of beta decay" **Z. Phys.** 88, 161.
- [16] W.H. Furry (1939) "On transition probabilities in double beta-disintegration" **Phys. Rev.** 56, 12, 1184-1193.
- [17] T.D. Lee, C.N. Yang (1956) "Question of parity conservation in weak interactions" **Phys. Rev.** 104, 1, 254-258.
- [18] H.V. Klapdor, K. Grotz (1984) "Calculation of double beta decay of  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{128,130}\text{Te}$ " **Phys. Lett. B** 142, 5-6, 323-328.
- [19] K. Muto, H.V. Klapdor (1988) "Calculation of  $2\nu$  double beta decay of  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ ,  $^{128,130}\text{Te}$ " **Phys. Lett. B** 201, 4, 420-424.
- [20] P. Ring, P. Schuck (1980) " **The Nuclear Many-Body Problem** " Springer, NewYork.
- [21] K. Grotz, H.V. Klapdor (1986) "Calculation of double beta decay rates and the neutrino mass" **Nucl. Phys. A** 460, 3, 395-436.
- [22] L. Zhao (1992) " **Nuclear Models for Beta and Double-beta Decays** " Michigan State University.
- [23] A. Etchegoyen, W. D. M. Roa et al. (1985) MSU-NSCL report #524 .

- [٣٤] F. Iachello, I. Talmi (1987) "Shell-model foundations of the interacting boson model" **Rev. Mod. Phys.** 59,2, 339-361.
- [٣٥] B. A. Brown, B. H. Wildenthal (1988) "Status of the nuclear shell model" **Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.** 38, 29-66.
- [٣٦] J. A. Halbleib, R. A. Sorensen (1967) "Gamow-Teller beta in heavy spherical nuclei and the unlike particle-hole RPA" **Nucl. Phys. A** 98, 3, 542-568.
- [٣٧] B. Lauritzen (1988) "The quasiparticle RPA as a model for gamow-teller  $\beta$ -decay" **Nucl. Phys. A** 89, 2, 237-251.
- [٣٨] A. H. Wapstra, G. Audi (1985) "The 1983 atomic mass evaluation: (I) Atomic mass table" **Nucl. Phys. A**, 432, 1, 1-54.
- [٣٩] R. Bardin, P. Gollon, J. Ullman, C. S. Wu (1970) "A search for double beta decay of  $^{48}\text{Ca}$  and lepton conservation" **Nucl. Phys. A**, 158, 2, 337-363.
- [٣٠] A. Balysh *et al*, (1996) "Double beta decay of  $^{48}\text{Ca}$ ", **Phys. Rev. Lett.** 77, 26, 5186-5189.
- [٣١] L. Zhao, B. A. Brown (1990) "Shell-model calculation for two-neutrino double beta decay of  $^{48}\text{Ca}$ ", **Phys.Rev. C**, 42, 3, 1120–1125.
- [٣٢] K. Muto, H. Horie (1984) "Shell-model study on M1 strength distributions in  $N=28$  isotones" **Phys. Lett. B** 138,1-3, 9-12.
- [٣٣] W. A. Richter, M. G. van der Merwe, R. E. Julies, B. A. Brown (1990) "New effective interactions for the 0f1p shell" **Nucl. Phys. A** 523, 2, 325.
- [٣٤] E. Caurier, F. Nowacki, A. Poves, J. Retamosa (1996) "Shell Model Studies of the Double Beta Decays of  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$ , and  $^{136}\text{Xe}$ " **Phys. Rev. Lett.** 77, 10, 1954-1957.
- [٣٥] E. Caurier, code Antoine, Unpublished.

- [۳۶] T.T.S. Kuo and G.E. Brown (1968) " Reaction matrix elements for the 0f-1p shell nuclei " **Nucl. Phys. A** 114, 2, 241-279.
- [۳۷] M. Horoi, S. Stoica, B. A. Brown (2007) " Shell model calculations of two neutrino double beta decay of  $^{48}\text{Ca}$  whit GXPFI1A interaction", **Phys. Rev. C** 75, 3, 034303.
- [۳۸] G. Friedlander, J. W. Kennedy, E. S. Macias, J. M. Miller (1981) "**Nuclear and Radiochemistry** " John Willey & Sons, New York.
- [۳۹] W. C. Haxton and, G. J. Stephenson Jr. (1984) " Double beta decay" **Prog. Part. Nucl. Phys.** 12, 409- 479.
- [۴۰] A. Bakalyarov et al. (2002) "Search for  $\beta^-$  and  $\beta^-\beta^-$  decays of  $^{48}\text{Ca}$ " **Nucl. Phys. A** 700, 17-24.
- [۴۱] A.A. Rajabi (2005) " Exact analytical solution of the Schrödinger equation for an  $N$ -identical body-force system", **Few Body System** 37, 4, 197-213.
- [۴۲] H. Feizi, A. A. Rajabi, M.R. Shojaei (2012) " A simple approach to study the isospin effect in mass splitting of three-nucleon systems by using hyperspherical functions" **Commun. Theor. Phys.** 58, 1, 141-145.
- [۴۳] H. Rahimov, H. Nikoofard, S. Zarrinkamar, H. Hassanabadi (2013) "Any l-state solutions of the Schrödinger equation for the Modified Woods–Saxon potential in arbitrary dimensions" **Appl. Math. Comput.** 219, 4710-4717.
- [۴۴] کینت کرین، (۱۳۸۶) " آشنایی با فیزیک هسته ای " جلد اول، ترجمه: ا. ابوکاظمی، م. رهبر، چاپ پنجم، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ص ۱۶۳.
- [۴۵] C.L. Pekeris (1934) " The rotation-vibration coupling in diatomic molecules " **Phys. Rev.** 45, 2, 98-103.
- [۴۶] D. J. Row, J. L. Wood (2010) "**Fundamentals of Nuclear Models: foundational models**" World Scientific.

- [ॢ१] M. Aunola, J. Suhonen, T. Siiskone (1999) " Shell-model study of the highly forbidden beta decay  $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Sc}$  " **Europhys. Lett.** 46, 5, 577.
- [ॢॡ] M. Aunola, J. Suhonen (1996) " Systematic study of beta and double beta decay to excited final states " **Nucl. Phys. A** 602, 2, 133-166.
- [ॢॢ] W. C. Haxton (1980) Unpublished.
- [Δ•] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme (1995) " Supersymmetry and quantum mechanics" **Phys. Rep.** 251, 267-385.
- [Δॡ] S. K. Dhiman, P. K. Raina (1994) " Two-neutrino double-beta decay matrix elements for ground and excited states of  $^{76}\text{Ge}$  and  $^{82}\text{Se}$  nuclei" **Phys. Rev. C** 50, 6, R2660-R2663.





## Abstract

Double beta ( $\beta\beta$ ) decay is a rare transition between two nuclei of the same mass number having a change of two units of nuclear charge. In cases of interest, ordinary single beta decay is forbidden because of the energy conservation or angular momentum mismatch. There are two modes of double beta decay. One involving the emission of two antineutrinos and two electrons ( $2\nu$  mode), occurs in second order of the standard weak interaction theory and is independent of a possible small neutrino mass. The other involving no neutrinos and two electrons ( $0\nu$  mode) violates the lepton number conservation and requires the neutrino to have a nonzero mass. Analysis of the experimental result to determine the character of the neutrino in  $\beta\beta$  decay strongly depends on the precise calculation of the nuclear matrix elements. In particular, agreement between experiment and theory for the standard  $2\nu$  mode is one of the prerequisites for a reliable interpretation of the more exotic  $0\nu$  mode.

In this thesis, we study the  $2\nu\beta\beta$  decay of  $^{48}\text{Ca}$  and  $^{76}\text{Ge}$ . The nuclear wave functions are obtained by solving the radial Schrödinger equation with Woods-Saxon and Harmonic Oscillator potentials for an eight-body system by using the Supersymmetry method. Then we use the *Fermi Golden Rule* for obtain half-life. Our result is in good agreement with experiment and the work done by others.



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Physics**

**Study and Investigation of Double Beta Decay  
For Nucleus  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{48}\text{Ca}$  From  $2\nu\beta\beta$  Decay**

Fatemeh Ranjbar

**Supervisor:**

Dr. Mohammad Reza Shojaei

**Feb. 2014**