

اللَّهُ الرَّحْمَنُ الرَّحِيمُ



دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

فیزیک ذرات بنیادی

عنوان:

سرد کردن یک سیستم کوانتومی با استفاده از

حالت‌های گرم نور

ارائه‌دهنده:

محمد بهرامی

استاد راهنما:

دکتر حسین موحدیان

پایان نامه کارشناسی ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

پاییز ۱۳۹۲

تعهد نامه

اینجانب محمد بهرامی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه سرد کردن یک سیستم کوانتومی با استفاده از حالت های گرم نور تحت راهنمایی جناب آقای دکتر حسین موحدیان متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

تقديم به

بزرگ هردی از تبار رسول الله (ص)

اللَّهُمَّ كُنْ لِي وَلِيًّا

صَلِّ لَوَاتِكَ عَلَيَّهِ وَ عَلَيَّ آبَائِهِ
فِي هَذِهِ السَّاعَةِ وَ فِي كُلِّ سَاعَةٍ
لِي وَ حَافِظًا وَ قَائِدًا وَ نَاصِرًا وَ دَلِيلًا وَ عَيْنًا
حَتَّى تُسْكِنَهُ أَرْضَكَ طَوْعًا وَ تُمَتِّعَهُ فِيهَا طَوِيلًا

حمد و ستایش از آن خداست . پروردگاری که خود ، خویش را به ما شناسانده و نعمت بزرگ
شکر و سپاسگذاری اش را به ما الهام کرده است و معرفت ربوبیت و پروردگاری اش را بر ما
گشوده و ما را به اخلاص در توحید و یقانه انگاشتنش ره نموده است .

خداوندا ! بر آخرین فرستاده ات که امین و وحی تو و ویرانگریده ی از خلق و برترین بندگان
توست ، درود فرست که پیشوای رحمت و قافله سالار خیر و نیکی و صلح و برکت و خجستگی است .
بارها ! خاندانی چون اهل بیت پیامبرت سراغ ندارم که کم آدمی را زیاد کنند و جز تو را نخواهند
پس بر آنان درود فرست که شایسته ی آنند .

بح شکر جایزه و الای معلم شایسته ی ارزشمندترین تقدیر هاست و زبان اندک ما
سپاسگوی زحمات او نیست با این حال ، از استاد شایسته ، جناب آقای دکتر حسین
موحدیان که زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند صمیمانه تشکر می نمایم
همچنین از جناب آقای دکتر **Andrea Mari** که عال تشکر را دارم که به سوالات بنده از
طریق پست الکترونیکی پاسخ دادند و در پایان ، از تمامی دوستان که اینجانب را یاری کردند
تشکر و قدردانی می نمایم .

چکیده:

در این پایان نامه و در حوزه‌ی اپتیک کوانتومی ، ایده‌ی سرد کردن سیستم‌های کوانتومی با استفاده از نویزهای حرارتی را معرفی می‌کنیم که به مکانیزمی متفاوت با تصور ما از سرد کردن به‌وسیله‌ی گرما منجر می‌شود .

در فصل اول به‌طور مختصر ابزار مورد نیاز ، از مکانیک کوانتومی را بررسی می‌کنیم و با انواع نویزها آشنا می‌شویم ؛ از آن جایی که سیستم مورد مطالعه ، یک سیستم کوانتومی باز است ؛ برای مطالعه‌ی آن روش‌های مختلفی مانند معادله‌ی حاکم (در تصویر شرودینگر) معادله‌ی لانژوین (در تصویر هایزنبرگ) و معادله فوکر- پلانک(در فضای فاز) وجود دارد که ما در فصل دوم به معرفی روش نخست می‌پردازیم . در فصل سوم سیستم اپتومکانیکی پیشنهادی برای سرد کردن به‌وسیله‌ی حالت های گرم نور را بررسی کرده و معادله‌ی حاکم آن را با استفاده از روش عملگرهای تصویر بدست می‌آوریم و در نهایت در فصل چهارم با استفاده از تشابه بین هامیلتونی سیستم مورد مطالعه و جداکننده‌ی باریکه ، حالت مد مکانیکی را بدست می‌آوریم .

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه:

[۱]. محمد بهرامی ، حسین موحدیان ، " مطالعه‌ی معادله‌ی حاکم در سرد کردن یک سیستم

کوانتومی با استفاده از نویزهای حرارتی " ، اولین کنفرانس اطلاعات کوانتومی ،

دانشگاه صنعتی شاهرود ، شهریور ماه ۱۳۹۲.

فهرست مطالب

- ۱- فصل اول : مکانیک کوانتومی..... ۱
- ۱-۱- مقدمه‌ای مختصر از مکانیک کوانتومی..... ۲
- ۱-۱-۱- حالت تعداد..... ۴
- ۱-۱-۲- عملگر تعداد..... ۴
- ۱-۱-۳- حالت‌های همدوس..... ۵
- ۱-۲- عملگر چگالی..... ۷
- ۱-۲-۱- عملگر چگالی برای یک حالت خالص..... ۹
- ۱-۲-۲- تحول زمانی عملگر چگالی..... ۱۰
- ۱-۲-۳- عملگر چگالی برای یک حالت آمیخته..... ۱۱
- ۱-۳- منابع نويز تداخل سنج‌ها..... ۱۲
- ۱-۳-۱- نويز حرارتی..... ۱۳
- ۱-۳-۲- نويز بازخوانی اپتیکی..... ۱۶
- ۱-۳-۳- نويزها در منبع ليزر..... ۱۷
- ۱-۳-۴- نويزهای غیربنیادی..... ۱۹
- ۲- فصل دوم : معادله‌ی حاکم..... ۲۲
- ۲-۱- سیستم‌های کوانتومی بسته..... ۲۳
- ۲-۲- سیستم‌های کوانتومی باز..... ۲۴
- ۲-۳- تحول زمانی و نگاشت‌های دینامیکی..... ۲۶

۲۸	۴-۲- معادله‌ی حاکم کوانتومی.....
۳۱	۵-۲- عملگرهای کراوس.....
۳۴	۱-۵-۲- قضیه‌ی کراوس.....
۳۸	۳- فصل سوم : سرد کردن به‌وسیله‌ی گرما.....
۳۹	۱-۳- مقدمه.....
۴۱	۲-۳- بررسی هامیلتونی سیستم کوانتومی مورد مطالعه.....
۴۶	۳-۳- نگاهی به ایده‌ی اصلی " سرد کردن به‌وسیله‌ی گرما ".....
۴۷	۴-۳- معادله‌ی حاکم.....
۴۸	۱-۴-۳- اثبات معادله‌ی حاکم کوانتوم اپتیکی.....
۵۳	۵-۳- اثبات معادله‌ی حاکم با استفاده از عملگرهای تصویر.....
۵۹	۶-۳- بحث و نتیجه‌گیری.....
۶۱	۴- فصل چهارم : حالت مد مکانیکی.....
۶۲	۱-۴- حالت مد مکانیکی.....
۶۳	۱-۱-۴- اثبات روابط مورد نیاز.....
۶۵	۲-۱-۴- عملگرهای کراوس.....
۷۱	مرجع‌ها.....

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۲ : سیستم کوانتومی باز ۲۵
- شکل ۲-۲ : نگاشت‌های دینامیکی..... ۲۶
- شکل ۱-۳ : سیستم اپتومکانیکی برای سرد کردن به وسیله گرما..... ۴۱
- شکل ۲-۳ : جداکننده باریکه..... ۴۶
- شکل ۳-۳ : سیستم تقلیل یافته و منبع گرمایی برای سرد کردن به وسیله گرما..... ۵۳
- شکل ۴-۳ : منحنی تغییرات دما بر حسب تعداد فوتون منبع گرمایی ۶۰

۱- فصل اول :

مکانیک کوانتومی

۱-۱- مقدمه‌ای مختصر از مکانیک کوانتومی

در مکانیک کوانتومی برای هر سیستمی یک بردار حالت $|E\rangle$ وجود دارد که همه چیز را برای دانستن درباره‌ی سیستم، در یک زمان معین دارا می‌باشد؛ [۱] هر کمیت فیزیکی با استفاده از عملگر O توصیف می‌شود؛ این عملگر هرمیتی است اگر و فقط اگر کمیت فیزیکی، مشاهده‌پذیر باشد. مقدار چشم‌داشتی کمیت فیزیکی برای سیستمی که با $|E\rangle$ نمایش داده می‌شود به وسیله‌ی $\langle O \rangle = \langle E | O | E \rangle$ محاسبه می‌شود. اگر کمیت فیزیکی مشاهده‌پذیر باشد $\langle O \rangle$ حقیقی است؛ ما به تحول زمانی کمیت‌های فیزیکی علاقه‌مندیم؛ دو روش برای محاسبه تحول زمانی کمیت‌ها وجود دارد. در تصویر شرودینگر تحول زمانی بردار حالت به وسیله‌ی معادله‌ی شرودینگر داده می‌شود [۲]

$$i\hbar \frac{\partial |E(t)\rangle}{\partial t} = H |E(t)\rangle \quad (1-1)$$

در تصویر هایزنبرگ بردارهای حالت با گذشت زمان ثابت می‌مانند و عملگرها مطابق با معادله‌ی هایزنبرگ متحول می‌شوند [۳]

$$\frac{dO(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [O(t), H] \quad (2-1)$$

که مقدار چشم‌داشتی کمیت فیزیکی عبارت است از

$$\langle O(t) \rangle = \langle E | O(t) | E \rangle \quad (3-1)$$

تصویری به نام تصویر برهم‌کنش نیز وجود دارد که در واقع ترکیبی از تصویرهای شرودینگر و هایزنبرگ می‌باشد [۴].

¹ state

² interaction picture

در این پایان نامه در تصویر برهم کنش کار می کنیم ؛ تحول مشاهده پذیرها و حالت های یک سیستم

فیزیکی در این تصویر مطابق زیر می باشد

$$O_I \equiv e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} O_S e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} \quad (4-1)$$

$$|E\rangle_I = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} |E\rangle_S$$

واریانس کمیت فیزیکی عبارت است از

$$(\Delta O)^2 = \langle v | O^2 | v \rangle - (\langle v | O | v \rangle)^2 \quad (5-1)$$

با استفاده از تعریف واریانس فوق ، عدم قطعیت در اندازه گیری هم زمان دو مشاهده پذیر با استفاده از

رابطه ی عدم قطعیت هایزنبرگ بیان می گردد . [5]

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle| \quad (6-1)$$

$[A, B]$ جابجایی A و B است که به صورت $[A, B] = AB - BA$ تعریف می شود .

در ادامه ی این بخش ، تعدادی از عملگرها و حالت های مورد نیاز را بررسی می کنیم .

۱-۱-۱- حالت تعداد

حالت‌های تعداد فوتون یا همان حالت فوک ویژه‌کت‌های نظریه کوانتومی نور هستند که یک مجموعه‌ی کامل از پایه‌های فضای این نظریه را تشکیل می‌دهند و با $|n\rangle$ نمایش داده می‌شوند که n تعداد فوتون است. اثر عملگر فنای a روی حالت تعداد به صورت زیر است

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (7-1)$$

همچنین اثر عملگر خلق a^\dagger روی حالت تعداد عبات است از

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (8-1)$$

۱-۲-۱- عملگر تعداد

عملگر تعداد مشاهده‌پذیری است که تعداد فوتون‌ها و یا فونون‌ها را می‌شمارد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$n \equiv a^\dagger a \quad (9-1)$$

یک روش بررسی این عملگر به این صورت است که n تعداد فوتون‌ها یا فونون‌ها را با حذف و جای‌گزینی آن‌ها، می‌شمارد که به صورت زیر بر یک حالت تعداد اثر می‌کند

$$n|n\rangle = n|n\rangle \quad (10-1)$$

¹ number state

² Fock state

³ eigen state

⁴ number operator

نکته قابل توجه برای یک حالت تعداد این است که فاز تعداد فوتونی که می توان به دقت شمارش کرد، معلوم نیست که با رابطه ی عدم قطعیت سازگار است و این رابطه بیان می دارد

$$\Delta n \Delta w = \frac{1}{2} \quad (11-1)$$

به عکس ، اگر فاز یک حالت دقیقاً معلوم باشد تعداد آن نامعلوم است .

چون فاز فوتون معلوم نیست حالت تعداد نمی تواند به عنوان مدلی کوانتوم مکانیکی برای نور همدوس استفاده شود .

۱-۱-۳- حالت های همدوس

حالت همدوس یا حالت گلابر معمولاً با $|r\rangle$ نمایش داده می شود و به صورت ترکیبی خطی از حالت های تعداد مطابق زیر تعریف می شود

$$|r\rangle = e^{-\frac{1}{2}|r|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (12-1)$$

که r هر عدد مختلطی می تواند باشد . از رابطه ی فوق در می یابیم که حالت همدوس توزیع تعداد پواسونی دارد ، به عبارت دیگر احتمال آشکار سازی پس از اندازه گیری یک حالت همدوس توزیعی پواسونی به شکل زیر دارد

$$P(n) = e^{-|r|^2} \frac{|r|^n}{n!} \quad (13-1)$$

¹ coherent state

² Glauber state

اثر عملگر فنا روی حالت همدوس به صورت زیر است

$$a|r\rangle = r|r\rangle \quad (14-1)$$

بنابراین $|r\rangle$ یک ویژه حالت عملگر فنا و r ویژه مقدار آن می باشد؛ با این وجود $|r\rangle$ ویژه حالت عملگر خلق نیست با مزدوج مختلط کردن رابطه ی (14-1) داریم

$$\langle r|a^\dagger = \langle r|r^* \quad (15-1)$$

حال می توان به راحتی مقدار چشم داشتی تعداد فوتون ها در یک حالت همدوس را محاسبه کرد

$$\langle n \rangle = \langle r|a^\dagger a|r\rangle = |r|^2 \quad (16-1)$$

افت وخیز تعداد فوتون ها برای یک حالت همدوس به صورت زیر محاسبه می شود

$$\begin{aligned} (\Delta n)^2 &= \langle r|n^2|r\rangle - (\langle r|n|r\rangle)^2 \\ &= |r|^4 + |r|^2 - |r|^4 \\ &= \langle n \rangle \end{aligned} \quad (17-1)$$

واریانس حالت همدوس با میانگین تعداد فوتون ها برابر است؛ حالت همدوسی اغلب برای مدل سازی یک مد لیزری استفاده می شود اما این مدل تنها مدل برای این کار نیست.

¹ fluctuation

² a single mode laser

۱-۲- عملگر چگالی

در بسیاری از موارد عملی، به جای بررسی یک سیستم کوانتومی تک، نیاز داریم که یک تعداد زیاد یا مجموعه‌ای از سیستم‌ها را که یک آنسامبل نامیده می‌شود مورد مطالعه قرار دهیم. که به جای بودن اعضا در یک حالت منفرد، اعضای آنسامبل می‌توانند در یک یا دو یا تعداد بیشتری از حالت‌های کوانتومی مختلف، پیدا شوند. یک احتمال معین برای یک آنسامبل که در هر یک از این حالت‌ها یافت شود، وجود دارد؛ ما این موضوع را با یک مثال ساده محسوس‌تر می‌کنیم.

یک فضای هیلبرت دو بعدی با بردارهای پایه‌ی $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ را بررسی می‌کنیم؛ یک تعداد زیاد N از سیستم‌ها را فراهم می‌کنیم که هر عضو از سیستم می‌تواند در یکی از دو بردارهای حالت

$$\begin{aligned} |a\rangle &= r|x\rangle + s|y\rangle \\ |b\rangle &= x|x\rangle + u|y\rangle \end{aligned} \quad (18-1)$$

پیدا شود. این حالت‌ها بهنجار شده می‌باشند؛ به طوری که $|r|^2 + |s|^2 = |x|^2 + |u|^2 = 1$ می‌باشد. برای یک سیستم در حالت $|a\rangle$ ، اگر یک اندازه‌گیری صورت گیرد، آن‌گاه یک احتمال $|r|^2$ برای یافتن $|x\rangle$ و همچنین یک احتمال $|s|^2$ برای یافتن $|y\rangle$ وجود دارد و به همین صورت برای حالت $|b\rangle$ نیز، $|x|^2$ احتمال یافتن $|x\rangle$ و $|u|^2$ احتمال یافتن $|y\rangle$ می‌باشد.

اکنون فرض می‌کنیم که n_a از این سیستم‌ها را در حالت $|a\rangle$ و n_b از سیستم‌ها را در حالت $|b\rangle$ فراهم کرده‌ایم؛ بنابراین در مجموع N سیستم داریم، پس

$$N = n_a + n_b \quad (19-1)$$

اگر رابطه‌ی (۱۹-۱) بر N تقسیم کنیم، آن‌گاه داریم

$$\frac{n_a}{N} + \frac{n_b}{N} = 1 \quad (20-1)$$

¹a single quantum system,

رابطه‌ی (۱-۲۰) بیان می‌دارد که اگر یک عضو آنسامبل را به صورت کاتوره‌ای انتخاب کنیم؛ احتمال

این که آن عضو در حالت $|a\rangle$ یافت شود به وسیله‌ی $p = \frac{n_a}{N}$ معین می‌شود. مجموع احتمال‌ها باید

یک باشد؛ بنابراین احتمال یافتن یک عضو از آنسامبل در حالت $|b\rangle$ به وسیله‌ی $1 - \frac{n_a}{N} = 1 - p$

معین می‌گردد

در سطح یک سیستم کوانتومی تک، قاعده‌ی بورن احتمال به دست آوردن یک نتیجه‌ی اندازه‌گیری معین را می‌دهد؛ قاعده‌ی بورن بیان می‌دارد که مجذور دامنه‌ها، احتمال‌ها را می‌دهند که مجموع احتمال‌ها برابر یک می‌باشند.

در سطح آنسامبل‌ها، اگر یک عضو از آنسامبل را در نظر بگیریم، یک احتمال معین وجود دارد که سیستم در یک بردار حالت یا سایر بردارهای حالت باشد. در این سطح، کاربرد احتمال در یک روش کلاسیک صورت می‌پذیرد؛ بنابراین، یک مخلوط آماری داریم. اکنون این سوال وجود دارد که چگونه می‌توان سیستمی را توصیف کرد که احتمال‌های کلاسیکی یافتن هر عضو سیستم، در حالت‌های مختلف وجود دارد؟

برای هر سیستم کوانتومی، نیاز به محاسبه‌ی کمیت‌های متداولی مانند مقادیر چشمداشتی عملگرها و احتمال بدست آوردن نتیجه‌های مختلف اندازه‌گیری، خواهیم داشت. به هر حال، در مورد یک مخلوط آماری از حالت‌ها، ما به محاسبه‌ی کمیت‌ها به وسیله‌ی احتمال یافتن حالت‌های مختلف نیاز داریم.

یک راه مناسب برای انجام این کار عملگر چگالی است.

¹ randomaly

² Born rule

³ statistical mixture

⁴ density operator

۱-۲-۱- عملگر چگالی برای یک حالت خالص

می‌توان فهم ساختار ریاضی عملگر چگالی را با بررسی یک حالت تک شروع کرد؛ یعنی بررسی

سیستمی که در حالت $|E\rangle$ می‌باشد. اگر این حالت را در پایه‌ی متعامد $|u_i\rangle$ بسط دهیم

$$|E\rangle = c_1|u_1\rangle + c_2|u_2\rangle + \dots + c_n|u_n\rangle \quad (21-1)$$

آن‌گاه، با استفاده از قاعده‌ی بورن، می‌دانیم که احتمال یافتن سیستم در حالت $|u_i\rangle$ به محض

اندازه‌گیری، با $|c_i|^2$ معین می‌شود؛ زمانی که یک سیستم در یک حالت معین مانند این حالت باشد،

می‌گوییم سیستم در یک حالت خالص می‌باشد. در راستای روشن‌تر کردن بحث بالا، ما یک روش

مختلف برای توصیف حالت‌های کوانتومی جستجو می‌کنیم که می‌تواند به یک مخلوط آماری تعمیم

داده شود این کار می‌تواند به وسیله‌ی یک عملگر که عملگر چگالی نامیده می‌شود، صورت گیرد؛ این

عملگر با ... نمایش داده می‌شود (عملگر چگالی یک عملگر میانگین می‌باشد که به ما اجازه‌ی توصیف

کردن یک مخلوط آماری را می‌دهد). در مورد یک حالت خالص این کار به وسیله‌ی یک ضرب

خارجی از حالت سیستم انجام می‌شود

$$\dots = |E\rangle\langle E| \quad (22-1)$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۲۲-۱) و حالت خالص $|E\rangle$ ، مقدار چشمداشتی عملگر A را به صورت

$$\langle A \rangle = Tr(\dots A) \quad (23-1)$$

به دست می‌آوریم. اکنون اگر مقدار چشمداشتی عملگر واحد را محاسبه کنیم

$$Tr(\dots) = 1 \quad (24-1)$$

در می‌یابیم که به سبب پایداری احتمال، رد ماتریس چگالی همیشه یک می‌باشد.

¹ a single state

² pure state

عناصر غیر قطری ماتریس چگالی ، همدوسی ها نامیده می شوند ؛ این عبارتها نمایش دهنده ی
 تداخل اثرات میان حالت های مختلف می باشند . با توجه به این که نمایش ماتریسی یک عملگر را
 می توان نسبت به یک پایه ی متفاوت در نظر گرفت ، بنابراین می توان یک نمایش قطری برای هر
 ماتریس چگالی یافت . [۶]

۱-۲-۲- تحول زمانی عملگر چگالی

تحول زمانی عملگر چگالی با استفاده از معادله ی شرودینگر بدست می آید ؛ با توجه به رابطه ی (۱-۱)
 داریم

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [H, \rho] \quad (۲۵-۱)$$

که تحول زمانی عملگر چگالی را بیان می کند . برای یک سیستم بسته تحول زمانی عملگر چگالی را
 می توان با استفاده از رابطه ی (۱-۲۶) نیز بررسی کرد . اگر $\rho(t)$ را نمایش عملگر چگالی در زمان t
 و $\rho(t_0)$ را نمایشگر عملگر چگالی در زمان t_0 فرض کنیم ، آن گاه

$$\rho(t) = U \rho(t_0) U^\dagger \quad (۲۶-۱)$$

سرانجام ، با توجه به تعریف $|\mathbb{E}\rangle\langle\mathbb{E}| = \dots$ ، روشن است که عملگر چگالی هر میتی می باشد ؛ یعنی
 $\dots = \dots^\dagger$. بنابراین ، در مورد حالت های خالص داریم

$$\dots^2 = \dots \quad (۲۷-۱)$$

اگر یک سیستم در یک حالت خالص $|\mathbb{E}\rangle$ با عملگر چگالی $|\mathbb{E}\rangle\langle\mathbb{E}| = \dots$ باشد ، آن گاه

$$Tr(\dots^2) = 1 \quad (تنها برای حالت خالص) \quad (۲۸-۱)$$

۱-۲-۳ - عملگر چگالی برای یک حالت آمیخته

در این قسمت ما به دنبال روشی برای توصیف یک آمیخته‌ی آماری هستیم که بدین منظور مراحل زیر را انجام خواهیم داد

۱. یک عملگر چگالی برای هر یک از حالت‌های منحصر بفرد، که می‌تواند در آنسامبل یافت شود، تشکیل می‌دهیم.

۲. احتمال یافتن هر حالت منحصر بفرد در آنسامبل را می‌یابیم.

۳. همه‌ی امکان‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

در حالت کلی، فرض می‌کنیم که n حالت وجود دارد؛ برای یک حالت $|E_i\rangle$ عملگر چگالی به صورت $\rho_i = |E_i\rangle\langle E_i|$ نوشته می‌شود. احتمال اینکه یک عضو از آنسامبل در حالت $|E_i\rangle$ فراهم شده باشد p_i می‌باشد بنابراین عملگر چگالی برای سیستم کل به صورت زیر می‌باشد

$$\rho = \sum_{i=1}^n p_i \rho_i = \sum_{i=1}^n p_i |E_i\rangle\langle E_i| \quad (1-29)$$

به‌طور خلاصه، ویژگی‌های یک عملگر چگالی را به صورت زیر بیان می‌کنیم

- عملگر چگالی هرمیتی می‌باشد، بدین معنی که $\rho^\dagger = \rho$
 - به سبب پایستگی احتمال، رد ماتریس چگالی همیشه یک می‌باشد $Tr(\rho) = 1$
 - ... یک عملگر مثبت می‌باشد
- یعنی برای هر حالت دلخواه $|u\rangle$ همواره داریم $\langle u|\rho|u\rangle \geq 0$
- برای هر حالت خالص $Tr(\rho^2) = 1$
 - برای هر حالت آمیخته $Tr(\rho^2) < 1$

۱-۳- منابع نویز تداخل‌سنج‌ها

منابع نویز بسیاری وجود دارد که حساسیت تداخل‌سنج را محدود می‌کنند. در این قسمت با توجه به ضرورت آشنایی با نویزهای کوانتومی تعدادی از منابع نویز محتمل را توضیح می‌دهیم. در آشکارسازها، هر جابجایی آینه و سطح آن نویز به وجود می‌آورد چراکه تداخل‌سنج نمی‌تواند بین این جابجایی‌ها و تغییر طولی که به وسیله‌ی امواج گرانشی به وجود می‌آید، تمایزی قائل شود.

ما نویزهای تداخل‌سنج را به چهار گروه زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم.

نویز حرارتی : نویز حرارتی آینه، نویز حرارتی تعلیق و سایر نویزها

نویز بازخوانی اپتیکی : نویز ضربه و نویز فشار تابشی

نویز در منبع لیزر : نویز بسامدی لیزر و نویز شدتی لیزر

نویزهای غیر بنیادی : نویز لرزه، نویز مدار الکتریکی و نویز گازی پسماند

¹ interferometer

² path-length change

³ gravitational waves

⁴ thermal noise

⁵ optical readout noise

⁶ noises in the laser source

⁷ non-fundamental noises

۱-۳-۱- نویز حرارتی

طبق قضیه افت و خیز-اتلافی ، یک جسم در حمام گرمایی با دمای محدود ، به وسیله نیروی نوسانی جابجا می شود که دامنه ی آن متناسب با اتلاف مکانیکی در خود جسم است ؛ حرکت سطح حرارتی آینه ، نویز حرارتی آینه نامیده می شود و حرکت نوسانی کل آینه همانند یک آونگ ، نویز حرارتی تعلیق نام دارد .

نویز حرارتی آینه

سه نوع نویز حرارتی آینه وجود دارد . اولین نوع ، نویز براونی است که با اتلاف لایه پشتی آینه $W_{sub}(\check{S})$ جفت می گردد و چگالی طیفی آن در گستره بسامد کمتر از تشدید مکانیکی آینه ، به وسیله [۸,۷] تخمین زده می شود

$$u_{x_{Brown}} = \left[\frac{4k_B T}{\check{S}} \frac{1-\dagger^2}{\sqrt{f} E_0 \check{S}_0} W_{sub}(\check{S}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad [m/\sqrt{Hz}] \quad (30-1)$$

که در این جا k_B ثابت بولتزمن ، T دما ، \dagger آهنگ پواسونی لایه ماده ، E_0 مدول یانگ و S بسامد زاویه ای ($\check{S} = 2f$) می باشد . \check{S}_0 شعاع پرتو روی آینه است . اگرچه منشأ اصلی اتلاف مکانیکی $W_{sub}(\check{S})$ ناشناخته است اما معمولاً بسامد مستقل فرض می شود $W_{sub}(\check{S}) = W$.

¹ fluctuation-dissipation theorem

² fluctuating force

³ thermal motion

⁴ fluctuating motion

⁵ mirror thermal noise

⁶ Brownian noise

دامنه‌ی طیفی فقط به پارامترهای مکانیکی شامل اتلاف مکانیکی و شعاع پرتو بستگی دارد و به وسیله‌ی افزایش شعاع پرتو یا با اتخاذ ماده‌ای که اتلاف مکانیکی کمتری دارد، می‌توان نویز براونی را کاهش داد.

دومین نویز حرارتی آینه، نویز ترموالاستیک است. منشأ اتلاف مکانیکی تأخیر فاز آرام‌سازی توزیع حرارتی است. در محدوده‌ی آدیاباتیک چگالی طیفی به وسیله‌ی [۹] داده می‌شود

$$u_{x_{thermo}} = \left[\frac{16}{\sqrt{f}} r^2 (1 + \dagger)^2 \frac{k_B T^2 K}{c^2 S_0^3 S^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[m / \sqrt{Hz} \right] \quad (31-1)$$

در این جا r انبساط گرمایی خطی آینه است، K رسانش گرمایی و c ظرفیت گرمایی است. دامنه به وسیله‌ی پارامترهای حرارتی ماده و شعاع پرتو تعیین می‌شود. سیلیس گداخته که ماده معمول در ساخت آینه است r و K نسبتاً کوچکی دارد؛ در نتیجه دارای دامنه‌ی نویز ترموالاستیک کوچکی در مقایسه با نویز براونی است.

از طرف دیگر سایر مواد مانند (منیزیم و آلومینیوم سیلیکات) به میزان قابل مقایسه‌ی نویز براونی و ترموالاستیک دارند؛ خوشبختانه با افزایش S_0 شعاع پرتو دامنه نویز ترموالاستیک سریع‌تر از نویز براونی کاهش می‌یابد.

¹ thermoelastic noise

² relaxation

نویز حرارتی تعلیق

آینه‌ای برای آزمودن جرم ، مانند یک آونگ در تداخل‌سنجی آویزان شده است ؛ همچنین ، آونگ با استفاده از نیروهای حرارتی نوسانی جابجا می‌شود . اگر با توجه به انبساط متوسط [۱۰] فرض کنیم که اتلاف در آونگ متصل به ماده ، کاهش زاویه‌ی W_p را به همراه دارد ؛ جابجایی حرارتی در ناحیه‌ی $\tilde{S} \gg \tilde{S}_p$ با عبارت زیر بیان می‌شود

$$u_{x_{pend}} = \sqrt{\frac{4k_B T \tilde{S}_p^2 W_p}{m} \frac{1}{\tilde{S}^5}} \quad [m / \sqrt{Hz}] \quad (32-1)$$

در اینجا m جرم آینه و \tilde{S}_p بسامد تشدید آونگ است . دامنه نویز حرارتی آونگ با افزایش بسامد به شدت کاهش می‌یابد اما این نویز یک عامل معین اضافی برای شدت آشکارسازها است .

$$\left(\frac{1}{f^2} \right)$$

سایر نویزهای حرارتی

سایر نویزهای حرارتی ، به صورت نظری می‌باشند ، برای مثال ، نویز حرارتی انکساری که به تغییر شاخص انکساری ماده‌ی اندود شده‌ی روی آینه بستگی دارد و به‌وسیله‌ی افت‌وخیز دما ایجاد می‌شود . این اثر در بیشتر مواقع کوچک در نظر گرفته می‌شود [۱۱] . نوع دیگر نویز حرارتی ، نویز فوتون- حرارتی است ؛ این نویز به‌وسیله توان جذبی ماده اندود شده (لایه) که افت‌وخیز آماری دارد ایجاد می‌گردد و یک نویز جابجایی در انبساط گرمایی لایه مواد به وجود می‌آورد که تحلیل جزئیات آن در [۱۳،۱۲،۹] ارائه شده است .

¹ suspension thermal noise

² modal expansion

³ other type of thermal noise

۱-۳-۲- نویز بازخوانی اپتیکی

دو نوع نویز در اندازه‌گیری‌های اپتیکی وجود دارد؛ نویز ضربه و نویز فشار تابشی. این دو نوع نویز، نویز بازخوانی اپتیکی نامیده می‌شوند. موج ضربه در شمارش آماری فوتون‌ها در درگاه آشکارسازی سیگنال تداخل سنج به وجود می‌آید؛ وقتی جریان فوتونی i_{DC} در آشکارساز فوتونی شکل می‌گیرد طیف خروجی جریان فوتونی عبارت است از

$$i_{shot} = \sqrt{2ei_{DC}} \quad [m/\sqrt{Hz}] \quad (33-1)$$

به خاطر آمار-پواسونی نور ورودی، i_{shot} به شکل رابطه‌ی (۳۳-۱) می‌باشد که در آن e بارالکتريکی است؛ نویز ضربه با ریشه جذر توان نور ورودی P_0 متناسب است و به عبارت دیگر، سیگنال تداخل سنج متناسب با آن است. به عنوان نتیجه‌گیری سیگنال برای نویز، آهنگی متناسب با جذر ریشه توان نور در دیود فوتونی دارد. در کاواک فابری-پرو جابجایی آینه معادل موج ضربه با برخی تقریبات دیگر با رابطه زیر داده می‌شود

$$u_{x_{shot}} \sim \frac{1}{4F} \left[\frac{h}{2P_0} [1 + (\ddagger)^2] \right]^{\frac{1}{2}} \quad [m/\sqrt{Hz}] \quad (34-1)$$

$$\ddagger = \frac{2LF}{cf} \quad [s]$$

F دقت کاواک است، h ثابت پلانک، $\{$ طول موج نور، L طول کاواک و \ddagger مخزن زمانی کاواک می‌باشد. در فرکانسی بیشتر از فرکانس $\frac{1}{2f\ddagger}$ (که فرکانس قطع نامیده می‌شود) نویز ضربه شروع به افزایش می‌کند؛ معمولاً فرکانس قطع در حدود $1kHz$ است؛ بنابراین حساسیت در باند مشاهده کاهش نمی‌یابد.

¹ finesse

² cut off

نویز فشار تابشی

مکان آینه به وسیله‌ی **کنش به عقب** فوتون‌های بازتابی تغییر می‌کند که تعداد فوتون‌ها با آمار فوتونی تغییر می‌کنند که به این نویز ، فشار تابشی گویند . در کاواک فابری- پرو فشار تابشی شامل نویز جابجایی به صورت زیر است .

$$u_{x_{radi}} = \frac{4F}{f m \tilde{S}^2} \left[\frac{2hP_0}{c [1 + (\tilde{S}t)^2]} \right]^{\frac{1}{2}} \left[m / \sqrt{Hz} \right] \quad (35-1)$$

نویز فشار تابشی در مقیاس ماکروسکوپی به عدم قطعیت مکان آینه بستگی دارد که در حوزه‌ی بسامدهای کوتاه مورد توجه قرار می‌گیرد و متناسب با جذر ریشه‌ی توان نور P_0 است . در آشکارسازهای امواج گرویتونی رایج ، موج ضربه یک مشکل مهم است و نویز فشار تابشی فقط به فرکانس‌های پایین تداخل‌سنج‌ها مربوط می‌شود ؛ بنابراین توان نور به اندازه‌ی ممکن برای تمام آشکارسازها در ساختار و عمل افزایش می‌یابد .

۱-۳-۳- نویزها در منبع لیزر

لیزر به خاطر همدوسی بالا بهترین و مناسب‌ترین منبع نور برای تداخل‌سنج‌هاست ، با این وجود در واقعیت حتی لیزر هم در بسامد و شدت‌ش افت‌وخیز دارد که شبیه نویزهای جابجایی در تداخل‌سنج‌ها به نظر می‌رسد .

¹ radiation pressure noise

نویز بسامدی لیزر

در یک کاواک فابری-پرو نویز بسامدی لیزر نوری $u \in [Hz / \sqrt{Hz}]$ به طور مستقیم با نویز جابجایی از طریق رابطه‌ی ساده زیر جفت می‌شود

$$u x_{freq} = \frac{L}{\epsilon} u \in [m / \sqrt{Hz}] \quad (36-1)$$
$$u \in [Hz / \sqrt{Hz}]$$

که L طول کاواک و ϵ فرکانس نور می‌باشد. با کاهش طول کاواک، نویز بسامدی لیزر اهمیت خود را از دست می‌دهد. در تداخل‌سنج فابری-پرو-میشل‌سون نویز بسامدی در درگاه آشکارسازی تداخلی، از نظر اپتیکی کاهش می‌یابد. اگر در یک زمان دو فابری-پرو در مقابل یک لیزر خاص نوسان کنند، کاهش الکتریکی نیز ممکن است رخ دهد.

نویز شدتی لیزر

نویز جابجایی در یک کاواک به عنوان یک تغییر شدت در آشکارساز فوتونی به دست می‌آید بنابراین افت‌وخیز در شدت منبع لیزر می‌تواند با نویز جابجایی بازخوانی جفت شود

$$u x_{int} = \frac{u P}{P} u x_{RMS} [m / \sqrt{Hz}] \quad (37-1)$$

که $\frac{u P}{P} [1 / \sqrt{Hz}]$ نویز شدت نسبی لیزر و $\frac{u P}{P} [1 / \sqrt{Hz}]$ افت‌وخیز باقی‌مانده حرکت آینه پیرامون تشدید فابری پرو است؛ با متوقف کردن افت‌وخیز باقی‌مانده در حرکت آینه‌ها، اثر نویز شدتی به‌طور مؤثر کاهش می‌یابد

¹ laser frequency noise

² laser intensity noise

۱-۳-۴- نویزهای غیربنیادی

منابع نویز دیگری نیز وجود دارد که در تداخل سنج ، ماندگار نیستند اما برای عمل تداخل سنج اجتناب ناپذیرند . ما نویزهای لرزه ، مدارالکتریکی و نویز گازی پسماند را در ادامه توضیح خواهیم داد .

نویز لرزه

حرکت لرزه‌ای یکی از نویزهای اجتناب‌ناپذیر آزمایش‌های زمین- پایه است . در تداخل‌سنج‌های گرویتونی ، آینه مانند یک آونگ معلق آویزان می‌گردد و می‌تواند جرم آزاد در آزمایش تلقی شود . آونگ نیز مانند یک سیستم ایزوله برای نویز لرزه عمل می‌کند اما سطح ایزوله سازی آن به تنهایی شرایط لازم را تأمین نمی‌کند معمولاً علاوه بر آونگ بسیاری از مراحل ایزوله کردن سیستم (برای توقف بیشتر نویزهای لرزه) متوقف شده است ؛ به عبارت کلی تر حرکت زمین یک طیف خاص دارد

$$u_{x_{gnd}} \sim 10^{-7} \frac{1}{f^2} \left[m / \sqrt{Hz} \right] \quad (38-1)$$

ضریب 10^{-7} یک ضریب خاص برای منطقه‌ای خاص ، برای مثال شهر توکیو ژاپن است [۸۰] ؛ ایزوله‌سازی سیستم کلی که تابع تبدیل آن به وسیله $|H_{iso}(f)|$ داده می‌شود ؛ حرکت در سطح آینه را به عبارت زیر تبدیل می‌کند

$$u_{x_{seis}} = |H_{iso}(f)| u_{x_{gnd}} \left[m / \sqrt{Hz} \right] \quad (39-1)$$

برای نمونه $|H_{iso}(f)|$ در یک آشکارساز موج گرویتونی رایج بین $\frac{1}{f^4}$ تا $\frac{1}{f^6}$ است . موج لرزه به

حساسیت زیر $100Hz$ ~ محدود می‌باشد .

نویز مدار الکتریکی

چون مکان آینه به وسیله حرکت لرزه‌ای تغییر کرده ، به‌طور خاص در تشدید سیستم ایزوله‌سازی آن، طول کاواک فابری- پرو آینه باید کنترل شود و برای اندازه‌گیری در حالت تشدیدش نگه‌داشته شود ، مدار سروو و مدار محرک برای کنترل طول کاواک می‌توانند مکان آینه را جابجا کنند . معمولاً مدار سروو برای بهره‌ی کافی از عمل پایدار و توقف سایر نویزها مثل نویز شدتی بدون در نظر گرفتن سایر نویزها ، طراحی می‌شود .

بنابراین تعادل بین **استحصال فراران** و نویزهای کم با حلقه‌ی سروو طراحی و تعیین می‌شود . به‌طور مشابه در صورتی که مدار محرک گستره‌ی دینامیکی مناسب داشته باشد (به‌طور مناسب جفت‌شدگی قوی برقرار باشد) برای متوقف کردن حرکت مانده ، جفت‌شدگی تعیین می‌شود و محرک شامل نویز نیز به‌طور عملی تعیین می‌گردد . چون نویز مدار محرک نمی‌تواند کمتر از یک مقدار خاص باشد (تقریباً $\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$) بنابراین برای ساختن نویز محرک کوچکتر از شدت مطلوب ، حرکت کنترل‌شده آینه باید کاهش یابد و مدار محرک باید نویز کمی داشته باشد .

¹ electric circuit nose

² servo circuit

³ actuator circuit

⁴ high gain

⁵ servo-loop

نویز گازی پسماند

مولکول‌های گازی بین مسیر اپتیکی بر شدت تداخل سنج در توابع شاخص انکساری آن‌ها اثر می‌کنند که این اثر، به وسیله‌ی [۱۴] تخمین زده می‌شود

$$u x_{gas} = \left[\sqrt{8fL} \frac{(n_0 - 1)^2}{(A_0 / V_0) u_0} \left(\frac{P}{P_0} \right) \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad [m / \sqrt{Hz}] \quad (40-1)$$

که n_0 شاخص انکساری گاز، V_0 حجم یک مول گاز در دمای استاندارد T_0 ، A_0 عدد آووگادرو، u_0 و u سرعت متوسط مولکول گاز در دمای حالت استاندارد T است. از این معادله سطح خلاً مورد نیاز 10^{-6} پاسکال محاسبه می‌شود.

¹ residual gas noise

۲- فصل دوم :

معادله‌ی حاکم

۲-۱- سیستم‌های کوانتومی بسته

سیستمی را سیستم کوانتومی بسته می‌نامیم که هیچ انرژی و یا ذره‌ای با محیط مبادله نکند و عبارت ایزوله را برای سیستم‌های بسته‌ای به کار می‌بریم که هامیلتونی آن‌ها مستقل از زمان باشد [۱۶، ۱۵].

تحول زمانی یک حالت خالص $|\mathbb{E}(t)\rangle$ ، با معادله‌ی شرودینگر معین می‌شود

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\mathbb{E}(t)\rangle = H(t) |\mathbb{E}(t)\rangle \quad (1-2)$$

که $H(t)$ مولد عملگر تحول زمانی می‌باشد.

تحول زمانی یک حالت آمیخته $\dots(t)$ ، به وسیله‌ی معادله‌ی لیوویل-ون نیومن معین می‌شود

$$\frac{d}{dt} \dots(t) = \frac{1}{i\hbar} [H(t), \dots(t)] \quad (2-2)$$

به سبب خطی بودن معادله‌ی شرودینگر، حل آن به وسیله‌ی یک گروه تحول $U(t, t_0)$ معین می‌شود چنان‌که

$$|\mathbb{E}(t)\rangle = U(t, t_0) |\mathbb{E}(0)\rangle \quad (3-2)$$

عملگر تحول زمانی توسط هامیلتونی سیستم مورد نظر معین می‌شود که می‌توان به طور قراردادی آن را به صورت زیر نوشت

$$U(t, t_0) = T e^{-i \int_{t_0}^t H(T) dT} \quad (4-2)$$

که T در این‌جا عملگر ترتیب زمانی می‌باشد.

$U(t, t_0)$ یک عملگر یکانی و $U(t_0, t_0) = I$ می‌باشد؛ برای هامیلتونی‌های مستقل از زمان عملگر

$U(t, t_0)$ به صورت زیر است

$$U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)} \quad (5-2)$$

¹ time ordering operator

با توجه به عملگر تحول زمانی ، تحول عملگر یا ماتریس چگالی با رابطه‌ی زیر معین می‌شود

$$\dots(t) = U(t, t_0) \dots(t_0) U^\dagger(t, t_0) \quad (۶-۲)$$

که رابطه‌ی (۶-۲) را به صورت

$$\dots(t) = \mathcal{U}_{t, t_0} \dots(t_0) \quad (۷-۲)$$

می‌توان بازنویسی کرد و \mathcal{U}_{t, t_0} در رابطه‌ی (۷-۲) به صورت

$$\mathcal{U}_{t, t_0} [\cdot] = U(t, t_0) [\cdot] U^\dagger(t, t_0) \quad (۸-۲)$$

می‌باشد . با انتگرال گیری از رابطه‌ی (۲-۲) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\mathcal{U}_{t, t_0} [\cdot] = \mathcal{T} e^{\int_{t_0}^t \mathcal{L}_T dT} [\cdot] \quad (۹-۲)$$

که \mathcal{L}_t لیوویلین نامیده می‌شود و به صورت

$$\mathcal{L}_t [\cdot] = \frac{-i}{\hbar} [H(t), \cdot] \quad (۱۰-۲)$$

تعریف می‌گردد .

به عملگرهایی همچون \mathcal{L}_t و \mathcal{U}_{t, t_0} که بر عملگرهای دیگر اثر می‌کنند ، ابرعملگر می‌گوییم .

۲-۲- سیستم‌های کوانتومی باز

سیستم کوانتومی S را یک سیستم کوانتومی باز می‌گوییم ، اگر با سیستم کوانتومی B ، (که محیط

نامیده می‌شود) جفت شده باشد . فرض می‌کنیم که هر دو سیستم با هم ، سیستم بسته‌ای تشکیل

می‌دهند که می‌تواند به وسیله‌ی دینامیک‌های یکانی توصیف شود .

¹ Liouvillian

² open quantum system

فضای هیلبرت ترکیب شده \mathcal{H} به وسیله ضرب تانسوری فضاها \mathcal{H}_S و \mathcal{H}_B هیلبرت مربوط به آن‌ها معین می‌شود ($\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$) و حالت آن‌ها با ماتریس چگالی ترکیب شده مشخص می‌گردد.

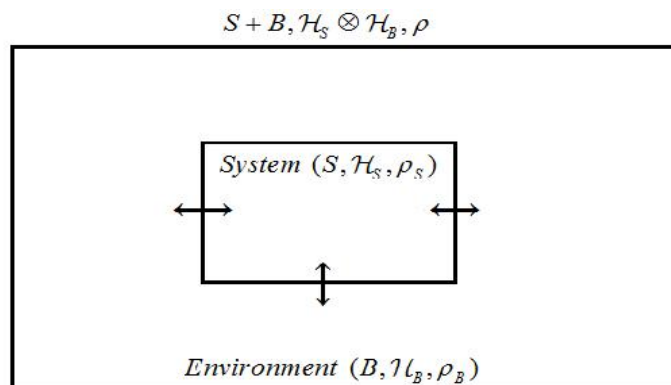
همیلتونی حاکم بر تحول زمانی آن‌ها به صورت زیر انتخاب شده است

$$H(t) = H_S \otimes I_B + I_S \otimes H_B + H_I(t) \quad (11-2)$$

که H_r ($r = S, B$) به ترتیب دینامیک‌های داخلی سیستم و محیط را توصیف می‌کند و $H_I(t)$ جفت‌شدگی میان دو قسمت را توصیف می‌کند. دینامیک‌های سیستم S به دلیل دینامیک‌های داخلی آن و برهم‌کنش با محیط می‌باشد که برهم‌کنش، در حالت کلی، به سبب همبستگی‌های محیط-سیستم می‌باشد.

حالت تقلیل یافته‌ی سیستم به وسیله رد جزئی روی محیط به دست می‌آید

$$\dots_S(t) = Tr_B \dots(t) \quad (12-2)$$



شکل ۱-۲: سیستم کوانتومی باز. پیکان‌ها جفت‌شدگی‌های مختلف منبع-محیط را نشان می‌دهند.

¹ internal dynamics

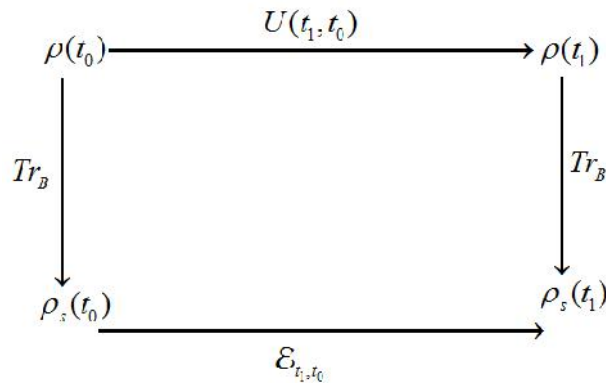
۲-۳- تحول زمانی و نگاشت‌های دینامیکی

در حالت کلی، تحول زمانی سیستم تقلیل یافته، نمی‌تواند با تحول زمانی یکانی توصیف شود. می‌توانیم تحول زمانی آن را با بررسی تحول زمانی سیستم کل و ردگیری بر درجات آزادی محیط به دست آوریم

$$\dots_s(t_1) = Tr_B(U(t_1, t_0) \dots(t_0) U^\dagger(t_1, t_0)) \quad (۱۳-۲)$$

که $U(t_1, t_0)$ تحول یکانی بدست آمده، به وسیله‌ی هامیلتونی $H(t)$ سیستم کل، می‌باشد. همان‌طور که در ادامه خواهیم دید، این معادله می‌تواند در عباراتی از یک نگاشت دینامیکی بازنویسی شود که این نگاشت دینامیکی تنها بر فضای هیلبرت سیستم تقلیل یافته اثر می‌کند

$$\forall_{t_1, t_0} : \dots_s(t_0) \mapsto \dots_s(t_1) \quad (۱۴-۲)$$



شکل ۲-۲: نگاشت‌های دینامیکی و روابط مربوط به آن‌ها برای تحول یکانی سیستم کل

این نگاشت در حالت کلی، وابسته به تحول یکانی کلی، جزئیات محیط B و سیستم تقلیل یافته‌ی S خواهد بود. در حالت کلی می‌توان نشان داد که نگاشت‌های دینامیکی جهانی‌ای ($UDMs$) وجود دارد که مستقل از حالتی هستند که بر روی آن اثر می‌کنند.

¹ global unitary evolution

² universal dynamical maps

قضیه ۱. یک نگاشت دینامیکی یک UDM می باشد اگر فقط اگر آن نگاشت ، از یک سیستم بسط داده شده با شرط اولیه ی $\dots_B(t_0) \otimes \dots_S(t_0) = \dots(t_0)$ تحمیل شده باشد که $\dots_B(t_0)$ برای هر $\dots_S(t_0)$ معین می باشد . بنابراین ، اگر ما قادر باشیم حالت سیستم و محیط را به نحوی که در زمان اولیه ی t_0 غیر همبسته باشند ، انتخاب کنیم ؛ نگاشت دینامیکی توصیف کننده ی تحول سیستم ، از زمان مورد نظر برای زمان بعدی t_1 ، مستقل از حالت اولیه ی سیستم تقلیل یافته می باشد . به هر حال ، این موضوع فقط برای زمان اولیه ی t_0 درست می باشد ؛ زیرا در زمان های $t > t_0$ همبستگی هایی مطرح می شود که دیگر اجازه نمی دهد ؛ حالت کلی دوباره عامل بندی شود . برای برهم کنش های ضعیف این امکان وجود دارد که حالت کلی سیستم- محیط ، سیستم باز هم برای زمان های بعدی عامل بندی شود. این ویژگی مارکوینی نامیده می شود .

با این ویژگی مارکوین ، هم اکنون می توانیم مفهوم ریاضی معادله ی حاکم را معرفی کنیم .

تعریف ۱ . یک معادله ی دیفرانسیل خطی برای $\dots(t)$ یک معادله ی حاکم ، با مولد \mathcal{L}_t ، نامیده می شود که به صورت

$$\frac{d}{dt} \dots(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\dots(t+\epsilon) - \dots(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{V_{t+\epsilon,t} - I}{\epsilon} \dots(t) \equiv \mathcal{L}_t \dots(t) \quad (15-2)$$

باشد . در این رابطه $\dots(t+\epsilon) = V_{t+\epsilon,t} \dots(t)$ می باشد . اگر $UDMs$ تنها وابسته به تفاوت های زمانی باشند ؛ (یعنی $V_{t_2,t_1} = V_T$ باشد که $T = t_2 - t_1$ می باشد) آن گاه تشکیل یک نیم گروه تک پارامتری می دهند [۱۵] که این نیم گروه ها از نقطه نظر فیزیکی یک ویژگی مهم دارند و آن وجود یک حالت پایا می باشد .

¹ uncorrelated

² factorize

³ one-parameter semigroup

⁴ steady state

تعریف ۲. یک نیم گروه V_T آرام ساز است اگر یک حالت (پایای) منحصر به فرد \dots_{SS} وجود داشته

باشد چنان که ، برای همه T ها $V_T(\dots_{SS}) = \dots_{SS}$ باشد و برای هر حالت اولیه \dots

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\dots) = \dots_{SS} \quad (۱۶-۲)$$

باشد . شناخت این ویژگی ها می تواند این نکات را روشن کند ، که

نیم گروه ها آرام ساز هستند

و مولد آن ها چه می باشد .

۲-۴- معادله ی حاکم کوانتومی

در این بخش فرم لیندبلادی یک معادله ی حاکم را معرفی می کنیم ؛ هم چنین دو قضیه ی مهم را بیان

می کنیم که اهمیت فرم لیند بلاد را در توصیف دینامیک های اتلافی مورد تاکید قرار می دهند .

کلی ترین فرم لیندبلادی یک معادله ی حاکم ، به وسیله ی رابطه ی (۲-۱۷) معین می شود که H یک

هامیلتونی (هرمیتی) می باشد و $\{V_k\}_k$ به اصطلاح عملگرهای لیندبلاد نامیده می شوند [۱۸] .

چنان که برای هر عملگر ، مزدوج هرمیتی آن هم چنان در مجموعه ی برچسب گذاری به وسیله ی k

می باشد و ثابت های $x_k \geq 0$ ثابت های واپاشی نامیده می شوند

$$\frac{d}{dt} \dots(t) = \frac{-i}{\hbar} [H, \dots(t)] + \sum_k x_k \left[V_k \dots(t) V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \dots(t)\} \right] \quad (۱۷-۲)$$

¹ relaxing

² master equation

³ dissipative dynamics

⁴ decay constant

با معرفی کردن ابرعملگرها و با توجه به تحول یکانی سیستم‌های کوانتومی بسته ، می‌توانیم معادله‌ی حاکم کوانتومی لیندبلاد را به صورت زیر بنویسیم

$$\mathcal{L}_{t,\dots}(t) \equiv \frac{-i}{\hbar} [H, \dots(t)] + \mathcal{D}(\dots) \quad (18-2)$$

که \mathcal{L} لیوویلین و \mathcal{D} قسمت اتلافی معادله‌ی حاکم کوانتومی می‌باشد .

اکنون دو قضیه‌ی مهم فرم لیندبلاد را بیان می‌کنیم

قضیه ۲ . یک معادله‌ی دیفرانسیل یک معادله‌ی حاکم مارکویینی می‌باشد ، اگر و فقط اگر بتواند به

فرم زیر نوشته شود

$$\frac{d}{dt} \dots(t) = \frac{-i}{\hbar} [H(t), \dots(t)] + \sum_k \chi_k(t) \left[V_k(t) \dots(t) V_k^\dagger(t) - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger(t) V_k(t), \dots(t)\} \right] \quad (19-2)$$

که $H(t)$ و $V_k(t)$ عملگرهای وابسته به زمان می‌باشند ، $H(t)$ خود الحاقی و برای هر k و t ، $\chi_k \geq 0$ می‌باشد .

قضیه ۳ . یک نیم‌گروه کاملاً مثبت ، $v_\tau = e^{\mathcal{L}\tau}$ ، با مولد

$$\mathcal{L} [\cdot] = \frac{-i}{\hbar} [H(t), \cdot] + \sum_{k \in I} \chi_k \left[V_k [\cdot] V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \cdot\} \right] \quad (20-2)$$

را برای تعدادی از نمایه‌های I در نظر می‌گیریم ،

نیم‌گروه v_τ آرام ساز خواهد بود اگر و فقط اگر مجموعه‌ی $\{V_k, k \in I\}$ خود الحاقی باشد (بدین

معنی که الحاقی هر عضو مجموعه درون مجموعه می‌باشد) و تنها عملگرهای جابجا شونده با همه‌ی

آن‌ها عملگر واحد باشد .

به طور خلاصه ، معادله ی حاکم لیندبلادی ویژگی های مهم زیر را دارد

۱ . آرام ساز می باشد .

۲ . هر میتی بودن و مثبت بودن تحت این معادله ی حاکم ثابت باقی می ماند یعنی

$$\begin{aligned} \dots^\dagger(t) &= \dots(t) \\ \langle \mathbb{E} | \dots(t) | \mathbb{E} \rangle &\geq 0 \end{aligned} \quad (21-2)$$

۳ . حفظ کننده ی رد ماتریس چگالی می باشد

$$Tr(\dots) = Tr\left(\frac{-i}{\hbar} [H, \dots(t)] + \sum_{k \in I} \chi_k \left[V_k \dots(t) V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \dots(t)\} \right]\right) = 0 \quad (22-2)$$

۴ . تحت تبدیلات یکانی U ناوردا می باشد که U_{ij} یک ماتریس یکانی می باشد [۱۵]

$$\sqrt{\chi_k} V_k \rightarrow \sqrt{\chi'_k} V'_k = \sum_{j=1}^{N^2-1} U_{kj} \sqrt{\chi_j} V_j \quad (23-2)$$

۵ . تحت تبدیلات ناهمگن ناوردا می باشد

$$\begin{aligned} V_k &\rightarrow V'_k = V_k + a_k \\ H &\rightarrow H' = H + \frac{1}{2i} \sum_k \chi_k (a_k^* V_k - a_k V_k^\dagger) + b \end{aligned} \quad (24-2)$$

که $a_k \in C$ و $b \in R$ می باشد. با این ویژگی همیشه می توانیم عملگرهای لیندبلادی انتخاب کنیم که

بدون رد باشند [۱].

¹ invariant

² inhomogeneous transformation

³ traceless

۲-۵ - عملگرهای کراوس

در مکانیک کوانتومی معمولاً گفته می‌شود که حالت یک سیستم کوانتومی یعنی $|\mathbb{E}\rangle$ مطابق با معادله‌ی زیر در طول زمان تحول می‌یابد

$$|\mathbb{E}(t)\rangle = U(t)|\mathbb{E}(0)\rangle \quad (25-2)$$

که در آن $U(t)$ یک عملگر یکانی است که از روی هامیلتونی سیستم بدست می‌آید [۱۸, ۱۷, ۶]. البته این رابطه تا هنگامی برقرار است که سیستم کوانتومی با یک بردار حالت خالص توصیف شود در غیر این صورت، یعنی وقتی که حالت سیستم خالص نیست بلکه با یک ماتریس چگالی تعریف می‌شود، ماتریس چگالی مطابق با رابطه‌ی زیر متحول می‌شود

$$\dots(t) = U(t)\dots(0)U^\dagger(t) \quad (26-2)$$

این رابطه تحول زمانی ماتریس چگالی سیستم را تنها در یک حالت خاص بیان می‌کند و آن هنگامی است که برهم‌کنش بین سیستم کوانتومی و محیط آن ضعیف باشد و اغلب در موارد دیگر صحیح نیست. برای آن که این موضوع را به خوبی دریابیم فرض می‌کنیم که در $t=0$ حالت سیستم کل (با توجه به این که حالت سیستم را با S و حالت محیط را با B نشان می‌دهیم) به صورت زیر باشد

$$\dots_{SB}(0) = \dots_S \otimes \dots_B \quad (27-2)$$

حال اگر هامیلتونی سیستم و محیط به شکل زیر باشد

$$H_{SB} = H_S \otimes I_B + I_S \otimes H_B \quad (28-2)$$

در این صورت عملگر تحول سیستم و محیط به شکل ساده‌ی زیر در خواهد آمد

$$U_{SB}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{SB}t} = e^{-\frac{i}{\hbar}H_S t} \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}H_B t} = U_S(t) \otimes U_B(t) \quad (29-2)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\dots_{SB}(t) = U_{SB}(t)\dots_{SB}(0)U_{SB}^\dagger(t) = [U_S(t)\dots_S(0)U_S^\dagger(t)] \otimes [U_B(t)\dots_B(0)U_B^\dagger(t)] \quad (30-2)$$

¹ Kraus operators

در نتیجه ، عملگر چگالی سیستم بعد از گذشت زمان t برابر می شود با

$$\rho_{\dots_S}(t) = Tr_B(\rho_{\dots_{SB}}(t)) = U_S(t)\rho_{\dots_S}(0)U_S^\dagger(t) \quad (31-2)$$

که همان معادله ی (۲-۲۶) می باشد . بنابراین عملگر چگالی سیستم و محیط فقط هنگامی به این صورت ساده تحول می یابد که برهم کنش بین سیستم و محیط برابر با صفر باشد و یا این که فوق العاده کوچک باشد . در این بخش می خواهیم دینامیک یک سیستم کوانتومی را برای وقتی که برهم کنش بین سیستم و محیط کوچک نیست بررسی کنیم ؛ اهمیت این موضوع بدین سبب می باشد که در کامپیوترهای کوانتومی و به طور کلی در سیستم های کوانتومی ای که در سال ها و دهه های آینده با آن سروکار خواهیم داشت ، یک سیستم کوانتومی می تواند تنها از یک یا چند یون تشکیل شده باشد و برای چنین سیستم برهم کنش های درون سیستم به همان اندازه ی برهم کنش های بین سیستم و محیط مهم می باشد . برای آن که دینامیک کلی یک سیستم را بررسی کنیم فرض می کنیم که در $t=0$ سیستم در یک حالت $\rho_{\dots_S}(0)$ و محیط در یک حالت خالص $|e\rangle$ قرار دارد ؛ تحت این شرایط عملگر چگالی سیستم و محیط در لحظه ی t برابر خواهد بود با

$$\rho_{\dots_{SB}}(t) = U(t)(\rho_{\dots_S}(0) \otimes |e\rangle\langle e|)U^\dagger(t) \quad (32-2)$$

که در آن $U(t)$ عملگر تحول سیستم و محیط می باشد . عملگر چگالی سیستم با محاسبه ی رد جزئی روی محیط بدست می آید ؛ در نتیجه بدست می آوریم

$$\rho_{\dots_S}(t) = Tr_B(\rho_{\dots_{SB}}(t)) = Tr_B(U_{SB}(t)(\rho_{\dots_S}(0) \otimes |e\rangle\langle e|)U_{SB}^\dagger(t)) \quad (33-2)$$

با کمی محاسبه می توان طرف راست را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\rho_{\dots_S}(t) = \sum_m M_{m\dots_S}(0)M_m^\dagger \quad (34-2)$$

که عملگرهای M_m به صورت

$$M_m = \langle m|U(t)|e\rangle \quad (35-2)$$

معین می شوند و $\{|m\rangle\}$ یک مجموعه پایه ی متعامد یکه برای محیط می باشند .

باید توجه داشت که M_m ها عملگرهایی هستند که روی سیستم اثر می کنند به این ترتیب دینامیک عمومی سیستم کوانتومی بدست می آید . عملگرهای M_m ، عملگرهای کراوس خوانده می شوند . از تعریف این عملگرها یعنی رابطه ی (۲-۳۵) به راحتی می توان نشان داد که این عملگرها رابطه ی زیر را برآورده می کنند

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I \quad (۲-۳۶)$$

در این جا می توانیم هم تحول عمومی یک سیستم کوانتومی و هم اندازه گیری روی یک سیستم کوانتومی را در یک چارچوب جای دهیم زیرا همان طور که می دانیم اندازه گیری روی یک سیستم کوانتومی نیز، عملگر چگالی آن را به صورت $(\dots \rightarrow \sum_m E_m \dots E_m^\dagger)$ تبدیل می کند . بنابراین هر دوی اعمال اندازه گیری و تحول عملگر چگالی ... مطابق با رابطه ی زیر به ماتریس چگالی ' ... نگاشته می شوند

$$\dots \rightarrow \dots' = V(\dots) = \sum_m M_m \dots M_m^\dagger \quad (۲-۳۷)$$

که در آن شرط $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$ برقرار می باشد . چنین نگاشتی چهار خاصیت عمده دارد :

۱. خطی است.

۲. ماتریس هرمیتی را به ماتریس هرمیتی می نگارد.

۳. ماتریس مثبت را به ماتریس مثبت می نگارد.

۴. رد ماتریس را حفظ می کند.

به چنین نگاشتی یک نگاشت مثبت و رد نگه دار می گوییم .

¹ trace preserving positive map

طرف راست معادله‌ی (۳۷-۲) را می‌توانیم به صورت زیر نیز تعبیر کنیم

با قرار دادن $P(m) = \text{Tr}(M_m \dots M_m^\dagger)$ و $\dots_m = \frac{M_m \dots M_m^\dagger}{P(m)}$ خواهیم داشت

$$V(\dots) = \sum_m P(m) \dots_m \quad (38-2)$$

حال می‌توانیم بگوییم که با احتمال $P(m)$ عملگر M_m روی حالت ... اثر کرده است (یا از طریق اندازه‌گیری یا از طریق تحول زمانی) و حالت نهایی $V(\dots)$ مخلوطی از تمام حالات مختلفی است که ممکن است در اثر فرآیندهای مختلف به وجود آمده باشند. باید توجه داشت که گاهی اوقات از نام کانال برای این نگاشت‌ها استفاده می‌شود.

۲-۵-۱- قضیه‌ی کراوس

فرآیندهای اندازه‌گیری و تحول زمانی یک سیستم را می‌توان با نگاشتی به صورت زیر نشان داد

$$\dots \rightarrow V(\dots) = \sum_m M_m \dots M_m^\dagger \quad (39-2)$$

که در آن شرط $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$ برقرار است. این نگاشت دارای این خاصیت‌ها می‌باشد که خطی

است، رد را نگاه می‌دارد و ماتریس هرمیتی مثبت را به ماتریس هرمیتی مثبت می‌نگارد. اکنون

می‌توانیم این سوال را وارونه بپرسیم که اگر نگاشتی مثل

$$\dots \rightarrow \dots' = V(\dots) \quad (40-2)$$

داشته باشیم که ماتریس چگالی را به ماتریس‌های چگالی می‌نگارد و دارای خواص بالا باشد آیا این

نگاشت به صورت (۳۹-۲) هست یا خیر؟ پاسخ این سوال با یک شرط اضافه، مثبت است و این

محتوی قضیه‌ای موسوم به قضیه‌ی کراوس را تشکیل می‌دهد؛ اما قبل از بیان و اثبات این قضیه،

باید شرط اضافی را تعریف کنیم که این شرط اضافه، شرط کاملاً مثبت بودن نگاشت می‌باشد.

فرض کنیم که $\nu: L(V) \rightarrow L(V)$ نگاشتی مثبت از فضای عملگرهای روی V به عملگرهای روی همان فضا باشد. در این جا منظور از $L(V)$ فضای عملگرهای V به V می باشد. در این صورت این نگاشت را کاملاً مثبت می گوئیم اگر به ازای هر فضای W نگاشت زیر نیز مثبت باشد

$$\nu \otimes I: L(V \otimes W) \rightarrow L(V \otimes W) \quad (41-2)$$

نخست بهتر است مثالی از یک نگاشت مثبت ولی نه کاملاً مثبت ارائه دهیم تا معلوم شود که همه ی نگاشت های مثبت کاملاً مثبت نیستند این مثال چیزی نیست جز عملگری که یک ماتریس را به ترانهاده ی آن می نگارد؛ نگاشت ترانهاده به صورت زیر عمل می کند

$$\nu: \dots \rightarrow \dots^T \quad (42-2)$$

حال گسترش این نگاشت به طریقی که در شرط (41-2) آمده است به صورت زیر خواهد بود که در آن، از این حقیقت استفاده کرده ایم که یک ماتریس دلخواه ... را همواره می توان به صورت

$$\dots = \sum_i a_i \otimes b_i$$

$$(\nu \otimes I)(\dots) = (\nu \otimes I)(\sum_i a_i \otimes b_i) = \sum_i \nu^T a_i \otimes b_i = \dots^T \quad (43-2)$$

این عملگر در واقع عناصر اول را در ضرب تانسوری، ترانهاده می کند و عناصر دوم را دست نخورده باقی می گذارد به همین دلیل آن را با نماد $\dots \rightarrow \dots^{T_A}$ نمایش می دهیم. تعریف مشابهی برای $\dots \rightarrow \dots^{T_B}$ وجود دارد (در این جا فرض کرده ایم که فضای برداری V و W به ترتیب فضاهای برداری A و B می باشند).

اثر ترانهاده ی جزیی به شکل صریح عبارت است از

$$\begin{aligned} (\dots^{T_A})_{i-,j} &= (\dots)_{j-,i} \\ (\dots^{T_B})_{i-,j} &= (\dots)_{i-,j} \end{aligned} \quad (44-2)$$

¹ completely positive

به عنوان مثالی صریح تر اگر ... به شکل ماتریس زیر باشد

$$\dots = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \quad (45-2)$$

آنگاه ماتریس‌های \dots^{T_A} و \dots^{T_B} به ترتیب عبارتند از

$$\dots^{T_A} = \begin{pmatrix} a & b & i & j \\ e & f & m & n \\ c & d & k & l \\ g & h & o & p \end{pmatrix} \quad (46-2)$$

$$\dots^{T_B} = \begin{pmatrix} a & e & c & g \\ b & f & d & h \\ i & m & k & o \\ j & n & l & p \end{pmatrix} \quad (47-2)$$

باید توجه داشت که نگاشت ترانهاده در حقیقت یک نگاشت خطی و مثبت است زیرا ویژه مقادیر یک ماتریس را تغییر نمی‌دهد اما توسعه‌ی این عملگر و ترانهاده‌ی جزئی یک عملگر مثبت نخواهد بود. برای مثال ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم

$$\dots = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & x & y & \\ & y & x & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (48-2)$$

ویژه مقادیر این ماتریس عبارتند از $x-y$ ، $x+y$ ، 1 و 1 که هر گاه $x > y > 0$ باشد همگی مثبت خواهند بود اما اگر ترانهاده‌ی جزئی این ماتریس را حساب کنیم به دست می‌آوریم

$$\dots = \begin{pmatrix} 1 & & y \\ & x & \\ & & x \\ y & & & 1 \end{pmatrix} \quad (49-2)$$

که ویژه مقادیرش عبارتند از $x, x, 1+y, 1-y$ که اگر $y > 1$ باشد می‌تواند مقدار منفی داشته باشد با این مثال نشان داده‌ایم که نگاشت ترانهاده یک نگاشت خطی مثبت است ولی کاملاً مثبت نیست .

در این جا با یک سوال مهم روبرو می‌شویم ، آیا نگاشتی که تحول یک ماتریس چگالی را بیان می‌کند تنها باید یک نگاشت خطی و مثبت باشد یا این که می‌تواند یک نگاشت خطی و کاملاً مثبت باشد؟ پاسخ این سوال این است ، که دینامیک یک ماتریس چگالی باید توسط یک نگاشت کاملاً مثبت بیان شود، زیرا سیستم A می‌تواند جزئی از یک سیستم بزرگتر AB باشد و آلیس می‌تواند فقط روی این سیستم عمل کند (اندازه‌گیری یا تحول) و این عمل هم‌چنان باید ماتریس چگالی سیستم بزرگتر AB را به یک ماتریس چگالی تبدیل کند بنابراین نگاشت $V_A \otimes I_B$ باید هم‌چنان مثبت باشد .

قضیه‌ی کراوس : فرض کنید که $V : L(V_A) \rightarrow L(V_A)$ یک ابرعملگر خطی و کاملاً مثبت و ردنگهدار باشد در این صورت حتماً این عملگر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$V(\dots) = \sum_m M_m \dots M_m^\dagger \quad (۵۰-۲)$$

که در آن $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$ می‌باشد . بلعکس هر عملگری که مطابق با رابطه‌ی بالا تعریف شود حتماً یک عملگر خطی کاملاً مثبت و رد نگهدار می‌باشد [۱۷] .

که با توجه به این قضیه می‌توان قضیه‌ی زیر را نیز بیان کرد .

قضیه ۴ : هر ابرعملگر کوانتومی روی یک سیستم d بعدی را می‌توان با تعداد کمتر یا مساوی d^2 عملگر کراوس بیان کرد [۱۷] .

به عنوان مثال ، برای یک سیستم تک کیوبیتی که دو بعدی می‌باشد و در یک محیط شامل تعداد نامتناهی از فوتون‌ها (که یک سیستم بی‌نهایت بعدی می‌باشد) قرار دارد ، طبق این قضیه تعداد عملگرهای کراوس لازم برای توصیف کلی‌ترین ابرعملگر کوانتومی حداکثر چهار تا می‌باشد .

۳- فصل سوم :

سرد کردن به وسیله ی گرما

۳-۱- مقدمه

سرد کردن در فیزیک کوانتومی معمولاً به همان صورتی اتفاق می‌افتد که در فیزیک کلاسیک رخ می‌دهد؛ یک سیستم معین در تماس با یک سیستم سردتر قرار گرفته و با ازدست‌دادن گرما و جذب سرما، سرد می‌شود. **پیشرانی همدوسی** سیستم‌های کوانتومی نیز می‌توانند منجر به سرد شدن این سیستم‌ها گردد؛ برای مثال سرد کردن لیزری یون‌ها در محیط‌های اپتومکانیکی مختلف و یا سرد کردن درجات آزادی مکانیکی با استفاده از فشار تابشی نور، از این دست می‌باشند.

در این فصل ایده‌ی سرد کردن سیستم‌های کوانتومی با استفاده از نور گرمایی ناهمدوسی را بررسی می‌کنیم. این ایده در سال ۲۰۱۲ میلادی در رساله‌ی دکتری آقای *Andrea Mari* مطرح گردید که به سازوکاری متفاوت با تصورات ما درباره‌ی **سرد کردن به وسیله گرما** منجر می‌شود.

در ادامه الگویی معرفی می‌شود که در آن حالت‌های گرمایی نور می‌توانند یک سیستم کوانتومی را به‌طور قابل توجهی سرد کنند و از نظر تجربی و آزمایشگاهی بیشتر به حوزه‌ی مکانیک‌اپتیکی توجه می‌کنیم [۱۹-۲۷] چراکه این سیستم‌ها می‌توانند نامزد ایده‌آل نمایش این اثر با تکنولوژی حاضر باشند؛ با این وجود سیستم‌های طبیعی دیگری را نیز می‌توان تصور کرد؛ برای بررسی این سیستم‌ها از بین روش‌های مطالعه‌ی کوانتومی و آماری موجود، ما روش معادله‌ی حاکم با جفت‌شدگی ضعیف را مورد تحلیل و بررسی قرار می‌دهیم.

¹ coherent driving

² laser cooling of ions

³ mechanism

⁴ cooling by heating

نویزهای کوانتومی معمولاً باعث گرم شدن سیستم‌ها، ناهمدوسی و اتلاف انرژی می‌شوند اما موضوع چالش‌برانگیز در علم اطلاعات کوانتومی استفاده از این نویزهاست. نویزهای کوانتومی می‌توانند در پدیده‌هایی مانند گذار فاز کوانتومی [۲۸]، تقطیر درهم‌تنیدگی [۲۹]، تشدید تصادفی کوانتومی [۳۰] بحران کوانتومی [۳۱] و یا محاسبات کوانتومی [۳۲] مفید واقع شوند؛ با استفاده از نویزهای حرارتی می‌توان یک سیستم ایتومکانیکی را سرد کرد که این کار در تضاد با قوانین ترمودینامیک نیست، چراکه این مجموعه باید مانند یک ماشین گرمایی و یا موتور حرارتی در حوزه مکانیک کوانتوم عمل کند.

¹ quantum phase transitions

² entanglement distillation

³ quantum stochastic resonance

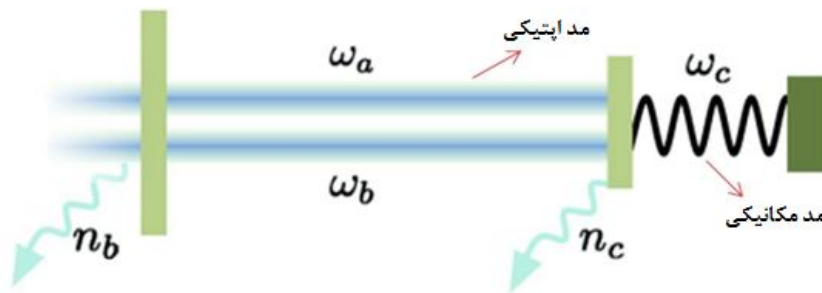
⁴ quantum criticality

⁵ quantum computation

⁶ set up

۲-۳- بررسی هامیلتونی سیستم کوانتومی مورد مطالعه

همانند شکل (۱-۳) سیستمی با دو مد اپتیکی در فرکانس‌های \tilde{S}_a و \tilde{S}_b را در نظر می‌گیریم که با یک درجه‌ی آزادی مکانیکی در فرکانس \tilde{S}_c جفت شده‌اند [۳۳].



شکل ۱-۳: سیستم اپتومکانیکی برای سردکردن به وسیله گرما

هامیلتونی کل سیستم به صورت

$$H = H_0 + H_1 \quad (۱-۳)$$

می‌باشد و جمله آزاد هامیلتونی عبارت است از

$$H_0 = \hbar\tilde{S}_a a^\dagger a + \hbar\tilde{S}_b b^\dagger b + \hbar\tilde{S}_c c^\dagger c \quad (۲-۳)$$

که در واقع هر یک از قسمت‌های رابطه‌ی (۲-۳) مربوط به نوسانگر هماهنگی است که با شیفت انرژی از یک جمله‌ی ثابت آن‌ها صرف نظر شده است.

در بررسی هامیلتونی برهم‌کنش، سؤالی مطرح می‌شود که آیا مدهای اپتیکی با یکدیگر تداخل می‌کنند؟ اگر تداخل فوتون‌ها را در نظر نگیریم وقتی آینه سوار بر فنر بر اثر فشار تابشی نویزهای حرارتی به اندازه‌ی x جابجا می‌شود، عملگر جابجایی مد مکانیکی بر حسب عملگرهای خلق و فنا به صورت زیر است

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{eff}\tilde{S}_c}} (c + c^\dagger) \quad (۳-۳)$$

که m_{eff} جرم آینه سوار بر فنر می‌باشد.

با در نظر گرفتن جابجایی x ، تغییرات بسامد زاویه‌ای برای مدهای a و b به صورت زیر است [۱۵]

$$\begin{aligned}\Delta\check{S}_a &= \frac{\partial\check{S}_a}{\partial x} x \\ \Delta\check{S}_b &= \frac{\partial\check{S}_b}{\partial x} x\end{aligned}\quad (۴-۳)$$

با تعریف ثابت جفت‌شدگی اپتومکانیکی بین مد مکانیکی و مدهای اپتیکی به صورت

$$g = \frac{\partial\check{S}_a}{\partial x} \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{eff}\check{S}_c}} = \frac{\partial\check{S}_b}{\partial x} \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{eff}\check{S}_c}}$$

هامیلتونی برهم‌کنش بدون در نظر گرفتن تداخل بین مدهای اپتیکی به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned}H_1 &= \hbar\Delta\check{S}_a a^\dagger a + \hbar\Delta\check{S}_b b^\dagger b \\ &= \hbar \frac{\partial\check{S}_a}{\partial x} \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{eff}\check{S}_c}} (c+c^\dagger) a^\dagger a + \hbar \frac{\partial\check{S}_b}{\partial x} \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{eff}\check{S}_c}} (c+c^\dagger) b^\dagger b\end{aligned}\quad (۵-۳)$$

با استفاده از ثابت جفت‌شدگی اپتومکانیکی بین مد مکانیکی و مدهای اپتیکی داریم

$$\begin{aligned}H_1 &= \hbar g (c+c^\dagger) a^\dagger a + \hbar g (c+c^\dagger) b^\dagger b \\ &= \hbar g (c+c^\dagger) (a^\dagger a + b^\dagger b)\end{aligned}\quad (۶-۳)$$

برای بدست آوردن هامیلتونی برهم‌کنش وقتی مدهای اپتیکی با یکدیگر تداخل می‌کنند با جابجایی

آینه‌ی سوار بر فنر به اندازه x ، عملگر جابجایی به صورت رابطه‌ی (۳-۳) و تغییرات بسامد زاویه‌ای

برای مدهای a و b به صورت زیر خواهد بود

$$\Delta\check{S}_{a,b} = \frac{\partial\check{S}_{a,b}}{\partial x} x\quad (۷-۳)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۳-۳) و (۷-۳) هامیلتونی برهم کنش ، هنگامی که تداخل بین مدهای اپتیکی را در نظر می گیریم به صورت زیر می باشد

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \hbar \Delta \tilde{S}_{a,b} (a+b)^\dagger (a+b) \\
 &= \hbar \frac{\partial \tilde{S}_{a,b}}{\partial x} \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{eff} \tilde{S}_c}} (c+c^\dagger) (a+b)^\dagger (a+b) \\
 &= \hbar g (a+b)^\dagger (a+b) (c+c^\dagger)
 \end{aligned} \tag{۸-۳}$$

برای رسیدن به هدف مطلوب ، در این فصل بهتر است به تصویر برهم کنش برویم . قسمت آزاد هامیلتونی H_0 نسبت به $\hbar \tilde{S}_b (a^\dagger a + b^\dagger b)$ با توجه به تبدیل زیر

$$U = e^{-i\frac{H}{\hbar}t} = e^{-i\tilde{S}_b(a^\dagger a + b^\dagger b)t} \tag{۹-۳}$$

متحول می شود و تحت این تبدیل ناوردا باقی می ماند

$$\begin{aligned}
 H_0 \rightarrow H'_0 &= U \left(H_0 - i\hbar \frac{d}{dt} \right) U^\dagger \\
 &= \hbar \tilde{S}_a a^\dagger a + \hbar \tilde{S}_b b^\dagger b + \hbar \tilde{S}_c c^\dagger c - \hbar \tilde{S}_b (a^\dagger a + b^\dagger b) \\
 &= \hbar (\tilde{S}_a - \tilde{S}_b) a^\dagger a + \hbar \tilde{S}_c c^\dagger c \\
 &= \hbar \Delta a^\dagger a + \hbar \tilde{S}_c c^\dagger c
 \end{aligned} \tag{۱۰-۳}$$

که $\Delta = \tilde{S}_a - \tilde{S}_b$ تعریف می شود و فرکانس $\Delta = \tilde{S}_c$ برای سرد کردن مد مکانیکی مناسب می باشد که در ادامه به این مطلب خواهیم پرداخت . اگر به جای $\hbar \tilde{S}_b (a^\dagger a + b^\dagger b)$ از $\hbar \tilde{S}_c (a^\dagger a + b^\dagger b)$ استفاده می کردیم آن گاه باید $\Delta = \tilde{S}_b - \tilde{S}_a$ تعریف می کردیم .

قسمت برهم کنشی هامیلتونی را وقتی که مدهای a و b که با یکدیگر تداخل می کنند در نظر می گیریم چراکه در واقعیت هم این حالت محتمل تر است .

با انجام ضرب بین عملگرهای خلق و فنا در رابطه‌ی (۳-۸) داریم

$$\begin{aligned} H_1 &= \hbar g (a+b)^\dagger (a+b)(c+c^\dagger) \\ &= \hbar g (a^\dagger a + a^\dagger b + b^\dagger a + b^\dagger b)(c+c^\dagger) \end{aligned} \quad (۱۱-۳)$$

دو عملگر a و b^\dagger جابجاپذیرند چراکه در دو فضای مختلف اثر می‌کنند

$$[a, b^\dagger] = 0 \text{ یعنی } ab^\dagger = b^\dagger a \text{ داریم}$$

با در نظر گرفتن این نکته رابطه‌ی (۳-۱۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$H_1 = \hbar g (a^\dagger a + a^\dagger b + ab^\dagger + b^\dagger b)(c+c^\dagger) \quad (۱۲-۳)$$

در رابطه‌ی (۳-۱۲) از جمله متناسب با $a^\dagger a$ صرف نظر می‌کنیم و فرض می‌کنیم که مد a به صورت ضعیفی از حالت پایه‌اش مختل شده باشد اما برای مد b دمایی دلخواه و اختیاری در نظر می‌گیریم که در این صورت نمی‌توان از جمله‌ی متناسب با $b^\dagger b$ صرف نظر کرد. در این صورت H_1 به صورت زیر خواهد بود

$$H_1 = \hbar g (a^\dagger b + ab^\dagger + u)(c+c^\dagger) \quad (۱۳-۳)$$

که در رابطه‌ی (۳-۱۳) عملگر u به صورت $u = b^\dagger b - n_b$ تعریف می‌شود و شدت افت و خیز مد b را نمایش می‌دهد؛ n_b ثابتی است که به صورت دستی وارد معادلات شده و متناظر با نیرویی است که مکان تعادلی آینه را تغییر می‌دهد. با در نظر گرفتن جمله‌ی مربوط به عملگر u رابطه (۳-۱۳) به صورت زیر درمی‌آید

$$H_1 = \hbar g (a^\dagger b + ab^\dagger)(c+c^\dagger) + \hbar g u (c+c^\dagger) \quad (۱۴-۳)$$

با استفاده از تقریب موج چرخان (RWA) هامیلتونی برهم کنش را تقریب می‌زنیم؛ برای این کار لازم است عملگرهای خلق و فنا در رابطه‌ی (۳-۱۴) را با استفاده از روابط زیر جای‌گزین کنیم و پس از انجام ضرب، جملات وابسته به زمان را حذف کنیم؛ در نهایت آنچه باقی می‌ماند تقریب (RWA) است

$$\begin{aligned}
 a &\rightarrow ae^{-i\tilde{S}_a t} \\
 a^\dagger &\rightarrow a^\dagger e^{i\tilde{S}_a t} \\
 b &\rightarrow be^{-i\tilde{S}_b t} \\
 b^\dagger &\rightarrow b^\dagger e^{i\tilde{S}_b t} \\
 c &\rightarrow ce^{-i\tilde{S}_c t} \\
 c^\dagger &\rightarrow c^\dagger e^{i\tilde{S}_c t}
 \end{aligned} \tag{۳-۱۵}$$

با استفاده از روابط (۳-۱۵) و جای‌گزینی آنها در (۳-۱۴) و $\Delta = \tilde{S}_a - \tilde{S}_b = \tilde{S}_c$ داریم

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \hbar g \left(a^\dagger e^{i\tilde{S}_a t} b e^{-i\tilde{S}_b t} + a e^{-i\tilde{S}_a t} b^\dagger e^{i\tilde{S}_b t} \right) \left(c e^{-i\tilde{S}_c t} + c^\dagger e^{i\tilde{S}_c t} \right) + \hbar g U \left(c + c^\dagger \right) \\
 &= \hbar g \left(a^\dagger b e^{i(\tilde{S}_a - \tilde{S}_b)t} + a b^\dagger e^{-i(\tilde{S}_a - \tilde{S}_b)t} \right) \left(c e^{-i\tilde{S}_c t} + c^\dagger e^{i\tilde{S}_c t} \right) + \hbar g U \left(c + c^\dagger \right) \\
 &= \hbar g \left(a^\dagger b c + a^\dagger b c^\dagger e^{2i\tilde{S}_c t} + a b^\dagger c e^{-2i\tilde{S}_c t} + a b^\dagger c^\dagger \right) + \hbar g U \left(c + c^\dagger \right)
 \end{aligned}$$

با حذف جملات وابسته به زمان هامیلتونی برهم کنش در تقریب (RWA) عبارت است از

$$H_1 = \hbar g \left(a^\dagger b c + a b^\dagger c^\dagger \right) + \hbar g U \left(c + c^\dagger \right) \tag{۳-۱۶}$$

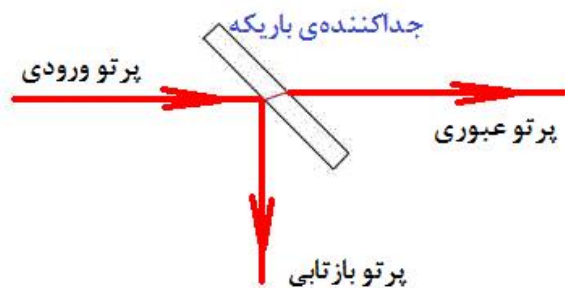
¹ rotating wave approximation

۳-۳- نگاه‌ی به ایده‌ی اصلی "سردکردن به‌وسیله‌ی گرما"

در مطالعه‌ی مقاله‌ی [۳۳] سؤالاتی مطرح می‌شود؛ چرا سیستم مورد مطالعه که در شکل (۱-۳) آمده است؛ از سه مد اپتومکانیکی تشکیل شده؟ و یا چرا هامیلتونی برهم‌کنش با تقریب‌های متعدد به‌صورت رابطه (۱۶-۳) درآمده است و در واقع جمله‌ی اول رابطه‌ی (۱۶-۳) شبیه هامیلتونی یک جداکننده باریکه است. از آنجایی که عمل جداکردن پرتوها در جداکننده باریکه برگشت‌پذیر است می‌توان این عمل را با یک عملگر یکانی به‌صورت زیر نمایش داد

$$U = e^{-i(a^\dagger bc + ab^\dagger c^\dagger)} \quad (۱۷-۳)$$

با در نظر گرفتن یک جداکننده بار یکه مطابق شکل (۲-۳) مدهای اپتیکی \hat{S}_a و \hat{S}_b متناظر با پرتوهای ورودی و بازتابی می‌باشند و مد مکانیکی \hat{S}_c متناظر با پرتو عبوری است.



شکل ۲-۳: جداکننده باریکه

همان‌طور که در شکل (۲-۳) می‌بینیم همه‌ی پرتوهای ورودی از جداکننده‌ی باریکه عبور نکرده‌اند و بخش قابل توجهی از آن بازتاب شده‌اند؛ یعنی سطح انرژی پرتوها عبوری کمتر از پرتوهای ورودی است.

¹ beam splitter

با توجه به رابطه ی (۳-۱۷) و شباهت آن با (۳-۱۶) انتظار داریم سطح انرژی مد مکانیکی با افزایش تعداد فوتون های ورودی ، کاهش یابد که در بخش (۳-۵) چگونگی برآورده شدن این انتظار را با استفاده از یک مثال با پارامترهای واقعی بررسی می کنیم .

اثر " سرد کردن به وسیله ی گرما " با استفاده از رابطه ی (۳-۱۶) تبیین می شود ، همان طور که گفتیم جمله ی اول شبیه یک جداکننده بار یکه است که مسئول سرد کردن آینه می باشد که به این جمله نویز خوب اطلاق می شود و جمله ی دوم ، مربوط به افت و خیز فشار تابشی مد b است که مد مکانیکی را گرم می کند و منبع نویز بد می باشد .

۳-۴- معادله ی حاکم

در این بخش ، به بررسی معادله ی حاکم می پردازیم ابتدا معادله ی حاکم کوانتوم اپتیکی را اثبات می کنیم ؛ تا درک فیزیکی از این معادله به دست آوریم و با ایده فیزیکی پشت این معادله آشنا شویم و سپس معادله ی حاکم برای سیستم طراحی شده در " سرد کردن به وسیله ی گرما " را با استفاده از عملگرهای تصویر به دست می آوریم .

¹ good noise

² bad noise

³ projection operators

۳-۴-۱- اثبات معادله‌ی حاکم کوانتوم اپتیکی

یک سیستم باز را در نظر می‌گیریم که هامیلتونی آن عبارت است از

$$H = H_{sys} + H_{bath} + H_{int} \quad (18-3)$$

که هامیلتونی‌ها به ترتیب به هامیلتونی سیستم مورد مطالعه، منبع گرمایی (حمام گرمایی) و هامیلتونی برهم‌کنش مربوط می‌باشند؛ \dots_{tot} عملگر چگالی سیستم و منبع در تصویر شرودینگر می‌باشد

$$\dot{\dots}_{tot} = \frac{-i}{\hbar} [H_{sys} + H_{bath} + H_{int}, \dots_{tot}] \quad (19-3)$$

به دنبال معادله‌ای برای یک کمیت فیزیکی هستیم که مقدار چشم‌داشتی مشاهده‌پذیرهای سیستم را ارائه دهد و این کار با عملگر چگالی تقلیل یافته صورت می‌گیرد

$$\dots(t) = tr_b \{ \dots_{tot}(t) \} \quad (20-3)$$

بررسی تبدیل به تصویر برهم‌کنش: مناسب است که معادله‌ی حرکت را به تصویر برهم‌کنش ببریم و داریم

$$\dots_I(t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(H_{sys} + H_{bath})t\right] \dots_{tot}(t) \exp\left[\frac{-i}{\hbar}(H_{sys} + H_{bath})t\right] \quad (21-3)$$

$\dots_I(t)$ از معادله‌ی حرکت در تصویر برهم‌کنش پیروی می‌کند در این صورت

$$\dot{\dots}_I(t) = \frac{-i}{\hbar} [H_{int}(t), \dots_I(t)] \quad (22-3)$$

که در عبارت (۲۲-۳) هامیلتونی برهم‌کنش عبارت است از

$$H_{int}(t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(H_{sys} + H_{bath})t\right] H_{int} \exp\left[\frac{-i}{\hbar}(H_{sys} + H_{bath})t\right] \quad (23-3)$$

¹ reduced density operator

² interaction picture

با توجه به روابط (۲۰-۳) و (۲۱-۳) داریم

$$\dots(t) = tr_b \left\{ \exp \left[\frac{-i}{\hbar} (H_{sys} + H_{bath}) t \right] \dots_I(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (H_{sys} + H_{bath}) t \right] \right\} \quad (24-3)$$

چون H_{bath} فقط تابعی از متغیرهای منبع گرمایی است می‌توانیم از خاصیت چرخشی عمل ردگیری استفاده کنیم و عوامل شامل H_{bath} را کنار بگذاریم در این صورت می‌توان رابطه‌ی (۲۴-۳) را به صورت

$$\hat{\dots}(t) = \exp \left[\frac{-i}{\hbar} H_{sys} t \right] \dots(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} H_{sys} t \right] \quad (25-3)$$

نوشت که

$$\dots(t) \equiv tr_b \{ \dots_I(t) \} \quad (26-3)$$

عملگر چگالی تقلیل یافته در تصویر برهم‌کنش می‌باشد .

بررسی شرایط اولیه : فرض می‌کنیم که سیستم و حمام گرمایی در ابتدا مستقل هستند یعنی هیچ

برهم‌کنشی ندارند و عملگر چگالی با استفاده از ضرب تانسری به صورت زیر فاکتوربندی می‌شود

$$\dots_{tot}(0) = \dots(0) \otimes \dots_b \quad (27-3)$$

علاوه بر این فرض می‌کنیم که منبع به قدری بزرگ است که ویژگی‌های آماری آن ، به وسیله‌ی

برهم‌کنش ضعیف با سیستم تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد ؛ این فرض برای اثبات معادله حاکم ضروری

است .

انتگرال گیری از معادله حرکت : با استفاده از رابطه‌ی (۲۲-۳) و انتگرال گیری از ۰ تا t و نیز

در نظر گرفتن شرط اولیه (۲۷-۳) پس از بدست آوردن $\dots_I(t)$ با استفاده از روش دایسون داریم

$$\begin{aligned} \dots_I(t) = & \dots_I(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [H_{int}(t'), \dots_I(0)] \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' [H_{int}(t'), [H_{int}(t''), \dots_I(t'')]] \end{aligned} \quad (28-3)$$

¹ tensor product

² statistical properties

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۲۸-۳) نسبت به زمان به معادله‌ی دیفرانسیل انتگرالی برای $\dots_I(t)$ می‌رسیم

$$\begin{aligned} \dot{\dots}_I(t) = & -\frac{i}{\hbar} [H_{\text{int}}(t), \dots_I(0)] \\ & -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [H_{\text{int}}(t), [H_{\text{int}}(t'), \dots_I(t')]] \end{aligned} \quad (29-3)$$

ردگیری روی متغیرهای حمام گرمایی: اگر از دو طرف رابطه‌ی (۲۹-۳) رد بگیریم با استفاده از رابطه‌ی (۲۶-۳) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\dot{\dots}_I(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{tr}_b \{ [H_{\text{int}}(t), [H_{\text{int}}(t'), \dots_I(t')]] \} \quad (30-3)$$

درحالی‌که فرض کرده‌ایم

$$\text{tr}_b \{ H_{\text{int}}(t) \dots_I(0) \} = 0 \quad (31-3)$$

و فرض (۲۷-۳) نیز صادق است یعنی

$$\dots_I(0) = \dots_{\text{tot}}(0) = \dots(0) \otimes \dots_b \quad (32-3)$$

به عبارت دیگر ما فرض کرده‌ایم که برهم‌کنش (در نمایشی که H_b قطری است) عناصر قطری ندارد؛ در عمل این فرض محدودیت زیادی ایجاد نمی‌کند و ما همیشه می‌توانیم H_{int} و H_{sys} را به گونه‌ای بارز تعریف کنیم که شامل عناصر قطری مانند آنچه در H_{sys} وجود دارد، باشد.

بررسی فرض جفت‌شدگی ضعیف: فرض می‌کنیم که H_{int} خیلی خیلی کوچکتر از H_{bath} و یا

H_{sys} باشد و عملگر چگالی منبع به‌طور قابل توجهی تحت تأثیر برهم‌کنش قرار نگیرد؛ با

در نظر گرفتن این شرایط، باید به‌جای $\dots_I(t')$ در رابطه‌ی (۳۰-۳) عبارت تقریبی زیر را قرار دهیم

$$\dots_I(t') \approx \dots(t') \otimes \dots_b \quad (33-3)$$

در رابطه‌ی (۳-۳۳) فرض‌های زیر را در نظر گرفته‌ایم

۱. عملگر چگالی منبع گرمایی به طور قابل توجهی به وسیله‌ی برهم‌کنش تغییر نکرده است .
۲. در ابتدا عملگر چگالی سیستم به طور قابل ملاحظه‌ای تغییر می‌کند و اثرات برهم‌کنش روی سیستم خیلی بیشتر است چراکه سیستم خیلی کوچک‌تر از منبع است .
۳. فرض کردیم که عملگر چگالی به صورت ضرب تانسری نوشته شود ؛ در حقیقت یک فرض خیلی ضعیف‌تر کافی است چون در عمل برهم‌کنش را می‌توان به صورت جمع جملاتی مانند

زیر نوشت

$$X_{sys} A_b \quad (3-34)$$

که هر دوی آن‌ها عملگرهای ساده‌ای هستند که فقط به ترتیب روی فضای سیستم و فضای مربوط به منبع اثر می‌کنند . در حقیقت ما به فرضی مانند زیر نیاز داریم

$$tr_b \left\{ \left[A_b(t), [A_b(t'), \dots, I(t')] \right] \right\} \approx \dots(t') \otimes tr_b \left\{ \left[A_b(t), [A_b(t'), \dots, I_b] \right] \right\} \quad (3-35)$$

و این بدان معناست که تابع همبستگی منبع به طور قابل ملاحظه‌ای به وسیله‌ی برهم‌کنش تغییر نمی‌کند .

تقریب مارکو : با استفاده از فرض جفت‌شدگی ضعیف ، درمی‌یابیم که رابطه‌ی (۳-۳۰) را می‌توان به صورت یک معادله‌ی دیفرانسیل انتگرالی برای $\dots(t)$ به صورت زیر نوشت

$$\dots(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' tr_b \left\{ \left[H_{int}(t), [H_{int}(t'), \dots, I(t')] \otimes \dots_b \right] \right\} \quad (3-36)$$

در واقع ، آخرین فرض معادله‌ی (۳-۳۶) را به یک معادله‌ی دیفرانسیل انتگرالی تبدیل می‌کند ؛ این فرض درباره‌ی تابع همبستگی منبع گرمایی است و مانند رابطه‌ی (۳-۳۵) در معادله‌ی (۳-۳۶) خلاصه می‌شود . چون برهم‌کنش ضعیف است ؛ آهنگ تغییر عملگر چگالی در تصویر برهم‌کنش نسبت به عملگرهای منبع گرمایی مانند $A_b(t)$ و $A_b(t')$ کاملاً کند است .

¹ integro-differential equation

عملگرهای منبع گرمایی $A_b(t)$ و $A_b(t')$ از رابطه‌ی (۳-۲۳) و با استفاده از H_{bath} تعیین می‌شوند و برحسب زمان تغییر می‌کنند؛ در حقیقت توابع همبستگی منبع گرمایی به‌طور کلی با استفاده از یک انتخاب گرمایی \dots_b تعیین می‌شود. در این موقعیت می‌توان گفت که (t') ... برحسب زمانی که از توابع همبستگی رابطه‌ی (۳-۳۶) بدست می‌آید، تغییر می‌کند در این صورت می‌توان گفت

$$1. \text{ با قرار دادن } \dots(t) \rightarrow \dots(t')$$

2. برای $t \ll$ زمان همبستگی گرمایی، می‌توان یک کران پایین زمانی انتگرال را به $-\infty$ میل داد.

در این حالت، معادله‌ی حاکم به صورت زیر خواهد بود

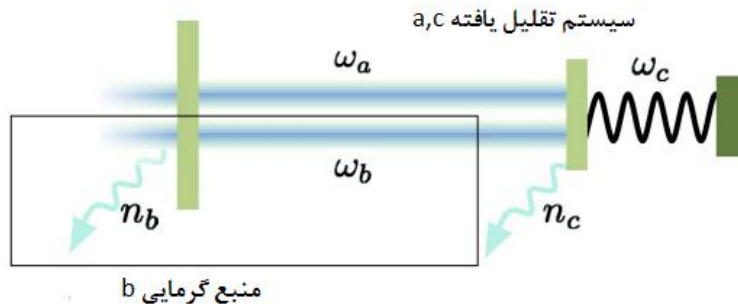
$$\dots(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt \operatorname{tr}_b \left\{ \left[H_{\text{int}}(t), \left[H_{\text{int}}(t-\dagger), \dots(t) \otimes \dots_b \right] \right] \right\} \quad (3-37)$$

که در رابطه‌ی (۳-۳۷) با وارد کردن شکل مناسبی از H_{int} و H_{sys} می‌توان تعدادی معادله‌ی حاکم مفید را به دست آورد. تقریب $(t) \rightarrow (t')$... به‌عنوان تقریب مارکو شناخته می‌شود چون یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اول برای (t) ... فراهم می‌کند که اطلاع از (t) ... در زمان $t = t_0$ برای تعیین (t) ... در تمام زمان‌های $t > t_0$ کافی است.

¹ Markov approximation

۳-۵- اثبات معادله‌ی حاکم با استفاده از عملگرهای تصویر

سیستم کوانتومی بازی که برای مکانیزم "سرد کردن به وسیله‌ی گرما" در نظر گرفتیم به شکل زیر است



شکل ۳-۳: سیستم تقلیل یافته و منبع گرمایی برای سرد کردن به وسیله گرما

معادله‌ی حاکم بر دینامیک کلی سیستمی که شامل دو مد اپتیکی و یک درجه‌ی آزادی مکانیکی است به صورت

$$\dot{\dots}_{tot} = \mathcal{L}\dots = -\frac{i}{\hbar}[H_0 + H_1, \dots_{tot}] + (\mathcal{L}_a + \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_c)\dots_{tot} \quad (3-38)$$

می باشد؛ که در آن \dots_{tot} عملگر چگالی کل سیستم با استفاده از H_0 و H_1 داده می‌شود و \mathcal{L} ابرعملگر لیوویلن و مولد انتقال در زمان برای سیستم‌های کوانتومی باز می‌باشد و برای مدهای اپتیکی و مکانیکی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a &= |D_a \\ \mathcal{L}_b &= (1+n_b) |D_b + n_b |D_b^\dagger \\ \mathcal{L}_c &= (1+n_c) \times D_c + n_c \times D_c^\dagger \end{aligned} \quad (3-39)$$

n_b تعداد فوتون‌ها و n_c تعداد فونون‌ها می‌باشند؛ $|$ و \times ثابت‌های واپاشی هستند.

با استفاده از تعریف

$$D_x(\dots) = 2x\dots x^\dagger - \{x^\dagger x, \dots\} \quad (۴۰-۳)$$

لیوویلین‌های سیستم را به فرم لیندبلاد می‌نویسیم و معادله‌ی (۳۸-۳) به شکل

$$\begin{aligned} \dot{\dots}_{tot} = \mathcal{L}\dots = & -\frac{i}{\hbar} [H_0 + H_1, \dots_{tot}] + | (2a\dots_{tot} a^\dagger - a^\dagger a\dots_{tot} - \dots_{tot} a^\dagger a) \\ & + (1+n_b) | (2b\dots_{tot} b^\dagger - b^\dagger b\dots_{tot} - \dots_{tot} b^\dagger b) + n_b | (2b^\dagger \dots_{tot} b - bb^\dagger \dots_{tot} - \dots_{tot} bb^\dagger) \\ & + (1+n_c) | (2c\dots_{tot} c^\dagger - c^\dagger c\dots_{tot} - \dots_{tot} c^\dagger c) + n_c | (2c^\dagger \dots_{tot} c - cc^\dagger \dots_{tot} - \dots_{tot} cc^\dagger) \end{aligned} \quad (۴۱-۳)$$

درمی‌آید که که به آن شکل لیندبلاد معادله‌ی حاکم می‌گویند .

در این جا ، حمام اپتیکی با مد b را در حالت گرمایی یا حالت گیبس با دمای دلخواه ، در نظر می‌گیریم . برای بررسی سیستم پیشنهادی رژیم $\hbar \omega_m \gg \hbar \omega$ را در نظر می‌گیریم ؛ چراکه مکانیزم میرایی حرکت براونی کوانتومی که که بر پایه‌ی چگالی طیفی قرار دارد ؛ تقریبا غیر قابل تشخیص از میرایی مارکووینی اپتیک کوانتومی است [۳۴] .

برای بدست آوردن معادله‌ی حاکم با استفاده از عملگرهای تصویر ابتدا مطابق شکل (۳-۳) مد b را به عنوان یک منبع خارجی در نظر می‌گیریم و معادله‌ی حاکم را فقط برای مدهای a و c بدست می‌آوریم ؛ برای این کار لیوویلین در معادله‌ی (۳۸-۳) به صورت

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{sys} + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{bath} \quad (۴۲-۳)$$

¹ optical bath

² Gibbs or thermal state

درمی آید؛ که ابرعملگرهای لیوویلین سیستم، برهم کنش و منبع عبارتند از

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{sys} &= -\frac{i}{\hbar}[H_{0,\cdot}] + \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_c \\ \mathcal{L}_{int} &= -\frac{i}{\hbar}[H_{1,\cdot}] \\ \mathcal{L}_{bath} &= \mathcal{L}_b\end{aligned}\quad (43-3)$$

با استفاده از روابط (43-3) می توان معادله ی (3-38) را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\dot{\rho}_{tot} = (\mathcal{L}_{sys} + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{bath})\rho_{tot} \quad (44-3)$$

برای بدست آوردن اطلاعات مربوط به سیستم a و c از رابطه ی زیر استفاده می کنیم

$$\rho_{a,c}(t) \equiv tr_b \{ \rho_{tot}(t) \} \quad (45-3)$$

که این رابطه را می توان به عنوان تصویری از عملگر چگالی ρ_{tot} به یک زیر فضا نمایش داد؛ برای

این کار از عملگر تصویر \mathcal{P} به صورت زیر استفاده می کنیم [35-37]

$$\mathcal{P}\rho_{tot}(t) = tr_b \{ \rho_{tot}(t) \} \otimes \rho_b \quad (46-3)$$

که ρ_b عملگر چگالی منبع می باشد و برای آن، رابطه ی زیر را در نظر می گیریم

$$\mathcal{L}_{b\rho_b} = 0 \quad (47-3)$$

که این شرط به وسیله ی یک عملگر چگالی منبع تعادلی یعنی $\exp\left(-\frac{H_b}{kT}\right)$ برآورده می شود.

عملگر Q را نیز به صورت

$$Q = 1 - \mathcal{P} \quad (48-3)$$

تعریف می کنیم و با استفاده از (44-3) و (48-3) دو معادله بدست می آوریم؛ اما ابتدا

$$\dot{\rho}_{tot} = \mathcal{P}\dot{\rho}_{tot} + Q\dot{\rho}_{tot} \equiv \hat{\rho}(t) + \rho'(t) \quad (49-3)$$

را در نظر می گیریم

¹ subspace

² a thermal equilibrium bath density operator

و خواص زیر را بررسی می کنیم .

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_{sys} = \mathcal{L}_{sys}\mathcal{P} \quad (50-3)$$

رابطه‌ی (50-3) صحیح است چراکه \mathcal{P} و \mathcal{L}_{sys} در دو فضای مختلف اثر می کنند .

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_b = \mathcal{P}\mathcal{L}_b = 0 \quad (51-3)$$

طرف اول تساوی (51-3) صحیح است چون معادله‌ی حرکت که به وسیله هامیلتونی منبع گرمایی داده می شود ؛ باید از نظر احتمال پایسته باشد ؛ طرف دوم نیز به خاطر تعریف (3-46) و انتخاب (3-47) صحیح می باشد .

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_{int}\mathcal{P} = 0 \quad (52-3)$$

رابطه‌ی (52-3) معادل شرط (3-47) است و صحیح می باشد .

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \quad (53-3)$$

$$Q^2 = Q$$

که با توجه به تعریف (3-46) صحیح می باشد .

با توجه به خواص فوق و با استفاده از تبدیل لاپلاس‌های

$$\tilde{\wedge}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \wedge(t) dt \quad (54-3)$$

$$\tilde{\prime}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \prime(t) dt \quad (55-3)$$

دو معادله‌ی زیر را بدست می آوریم

$$s\tilde{\wedge}(s) - \wedge(0) = \mathcal{L}_{sys}\tilde{\wedge}(s) + \mathcal{P}\mathcal{L}_{int}\tilde{\prime}(s) \quad (56-3)$$

$$s\tilde{\prime}(s) - \prime(0) = (\mathcal{L}_{sys} + Q\mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{bath})\tilde{\prime}(s) + Q\mathcal{L}_{int}\tilde{\wedge}(s) \quad (57-3)$$

با پیدا کردن $\tilde{\prime}(s)$ و جاگذاری در (3-56) داریم

$$\begin{aligned} s\tilde{\wedge}(s) - \left\{ \wedge(0) + \mathcal{P}\mathcal{L}_{int} \left[s - \mathcal{L}_{sys} - \mathcal{L}_{bath} - Q\mathcal{L}_{int} \right]^{-1} \prime(0) \right\} \\ = \left\{ \mathcal{L}_{sys} + \mathcal{P}\mathcal{L}_{int} \left[s - \mathcal{L}_{sys} - \mathcal{L}_{bath} - Q\mathcal{L}_{int} \right]^{-1} Q\mathcal{L}_{int} \right\} \tilde{\wedge}(s) \end{aligned} \quad (58-3)$$

بررسی حد برهم کنش ضعیف : فرض می کنیم که برهم کنش با یک پارامتر به صورت زیر معرفی شده و متناسب باشد با

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \rightarrow v \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (59-3)$$

با جایگزینی رابطه ی (59-3) و نگاه داشتن پایین ترین مرتبه ی بخش های همگن و ناهمگن رابطه ی (58-3) به صورت جداگانه داریم

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{int}}(t) = \mathcal{L}_{\text{sys}} \hat{\mathcal{L}}_{\text{int}}(t) + v^2 \mathcal{P} \mathcal{L}_{\text{int}} \int_0^{\infty} d\ddagger \exp\left\{(\mathcal{L}_{\text{sys}} + \mathcal{L}_{\text{bath}})\ddagger\right\} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{\text{int}} \hat{\mathcal{L}}_{\text{int}}(t-\ddagger) \quad (60-3)$$

با استفاده از خواص (3-50) تا (3-53) معادله حاکم برای سیستم مورد مطالعه به صورت

$$\ddot{\mathcal{L}}_{a,c}(t) = \mathcal{L}_{\text{sys} \dots a,c}(t) + \text{tr}_b \mathcal{L}_{\text{int}} \int_0^{\infty} d\ddagger \exp\left\{(\mathcal{L}_{\text{sys}} + \mathcal{L}_{\text{bath}})\ddagger\right\} \mathcal{L}_{\text{int} \dots a,c}(t-\ddagger) \otimes \dots_b \quad (61-3)$$

خواهد بود ؛ با استفاده از تعریف (3-43) برای \mathcal{L}_{int} و $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_{\text{sys}} + \mathcal{L}_{\text{bath}}$ رابطه ی (61-3) به صورت زیر در می آید

$$\ddot{\mathcal{L}}_{a,c}(t) = \mathcal{L}_{\text{sys} \dots a,c}(t) - \frac{1}{\hbar^2} \text{tr}_b \left[H_1, \int_0^{\infty} d\ddagger e^{\mathcal{L}_r \ddagger} [H_1, \dots_{a,c}(t-\ddagger) \otimes \dots_b] \right] \quad (62-3)$$

معادله ی (62-3) تا بسط مرتبه ی دوم بر حسب ثابت جفت شدگی g عبارت است از

$$\ddot{\mathcal{L}}_{a,c}(t) = \mathcal{L}_{\text{sys} \dots a,c}(t) - \frac{1}{\hbar^2} \text{tr}_b \left[H_1, \int_0^{\infty} d\ddagger \left[e^{\mathcal{L}_r \ddagger} (H_1), \dots_{a,c}(t) \otimes \dots_b \right] \right] \quad (63-3)$$

در رابطه ی (63-3) فقط روی هامیلتونی H_1 اثر می کند و متناظر با "تصویر برهم کنش اتلافی" با توجه به \mathcal{L}_r است . برای رد گیری در معادله ی (63-3) به دو تابع همبستگی نور گرمایی در مد b

نیاز داریم [37]

$$\begin{aligned} \langle b e^{\mathcal{L}_r \ddagger} b^\dagger \rangle &= e^{-\ddagger} n_b \\ \langle u e^{\mathcal{L}_r \ddagger} u \rangle &= e^{-2\ddagger} (n_b^2 + n_b) \end{aligned} \quad (64-3)$$

¹ dissipative interaction picture

با توجه به روابط (۶۴-۳) می توان انتگرال معادله‌ی (۶۳-۳) را انجام دهیم که جملات مربوط به سرد کردن و گرم کردن در رابطه‌ی (۱۶-۳) مولد انتقال در زمان برای معادله‌ی حاکم می‌باشند و عبارتند از

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{cool} &= \frac{g^2}{2|} \left[(1+n_b) D_{ac^\dagger} + n_b D_{a^\dagger c} \right] \\ \mathcal{L}_{heat} &= \frac{2| g^2 (n_b^2 + n_b)}{4|{}^2 + \tilde{S}_c^2} (D_{c^\dagger} + D_c) \end{aligned} \quad (۶۵-۳)$$

مقدار متوسط تعداد فونون‌ها با استفاده از تبدیلات بازهنجارش به صورت زیر درمی‌آید [۳۳]

$$n_c \rightarrow \tilde{n}_c = n_c + \frac{2| g^2 (n_b^2 + n_b)}{\chi (4|{}^2 + \tilde{S}_c^2)} \quad (۶۶-۳)$$

با در نظر گرفتن تبدیل (۶۶-۳) و ابرعملگر لیوویلین بازهنجارشده متناظر آن، معادله‌ی حاکم به صورت

$$\dots_{a,c} = \left(\tilde{\mathcal{L}}_{sys} + \mathcal{L}_{cool} \right) \dots_{a,c} \quad (۶۷-۳)$$

خواهد بود؛ مزیت معادله‌ی (۶۷-۳) در مقایسه با معادله‌ی (۳۸-۳) این است که حل عددی آن ساده‌تر است؛ اما باید توجه داشت که حوزه اعتبار آن، فقط در تقریب موج چرخان (RWA) و جفت‌شدگی ضعیف $g, \chi \ll \tilde{S}_c$ می‌باشد. مقادیر چشم‌داشتی عملگرهای تعداد فونونی در تقریب جفت‌شدگی ضعیف با فرض g کوچک به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} \langle n_c \rangle &= \frac{\tilde{n}_c - y}{2} + \left(\frac{(\tilde{n}_c - y)^2}{2} - \frac{|n_b \tilde{n}_c}{2} \right)^{1/2} \\ \langle n_a \rangle &= \frac{(\tilde{n}_c - \langle n_c \rangle) \chi}{|} \end{aligned} \quad (۶۸-۳)$$

که در رابطه‌ی (۶۸-۳) داریم

$$y = 1 + n_b \left(1 + \frac{|}{\chi} \right) + \frac{2|{}^2}{g^2} \quad (۶۹-۳)$$

حال با داشتن روابط (۶۸-۳) می‌توان در ادامه بحث به رسم نمودار مقتضی پرداخت.

¹ renormalization

۳-۶- بحث و نتیجه گیری

همان طور که در بخش ۳-۳ توضیح دادیم؛ انتظار داریم سطح انرژی مد مکانیکی با افزایش تعداد فوتون ها، کاهش می یابد؛ برای رسیدن به این هدف، یک مثال با استفاده از پارامترهای واقعی در یک مجموعه ای ایتومکانیکی را بررسی می کنیم؛ ابتدا با استفاده از مکانیک آماری حالت مد مکانیکی را که مطابق شکل (۳-۳) در یک میدان الکترومغناطیسی قرار دارد، بدست می آوریم؛ برای این کار مجموعه ی موردنظر را یک آنسامبل کانونیک در نظر می گیریم؛ عملگر چگالی در آنسامبل کانونیک عبارت است از

$$\dots = \frac{e^{-sH}}{Z} \quad (70-3)$$

که H هامیلتونی سیستم مورد مطالعه است و Z تابع پارش آنسامبل کانونیک به صورت زیر می باشد

$$Z = \text{tr} \{ e^{-sH} \} \quad (71-3)$$

هدف، بدست آوردن عملگر چگالی مد مکانیکی است که هامیلتونی آن عبارت است از

$$H = \hbar \tilde{S}_c c^\dagger c \quad (72-3)$$

برای آن که وابستگی به دما در حالت مد مکانیکی را به صورت صریح نشان دهیم از

$$s = \frac{1}{kT} \quad (73-3)$$

استفاده می کنیم. با استفاده از روابط (۷۲-۳) و (۷۳-۳) و جای گذاری در (۷۰-۳) حالت مد مکانیکی

را به صورت تابعی از دمای T بدست می آوریم

$$\dots_c(T) = \frac{e^{-\frac{\hbar \tilde{S}_c c^\dagger c}{kT}}}{\text{tr} \left\{ e^{-\frac{\hbar \tilde{S}_c c^\dagger c}{kT}} \right\}} \quad (74-3)$$

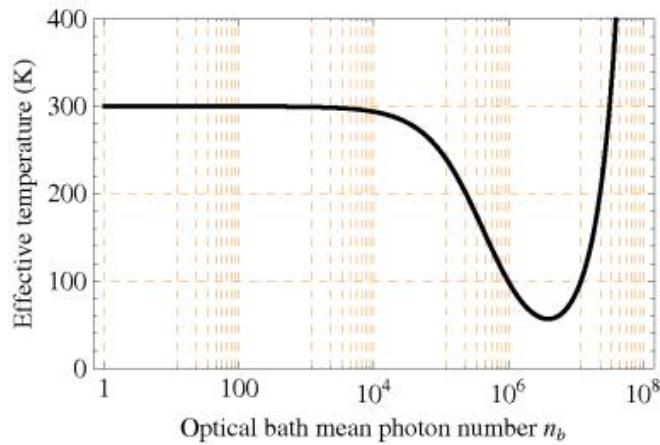
با استفاده از رابطه‌ی (۱-۲۳) مقدار چشم‌داشتی عملگر تعداد برای مد مکانیکی عبارت است از

$$\langle n_c \rangle = \text{tr} \{ \dots_c (T) c^\dagger c \} \quad (۷۵-۳)$$

از طرفی مقدار چشم‌داشتی تعداد فنون‌ها با استفاده از آمار بوز-انیشتن برابر است با

$$\langle n_c \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar \omega_c}{k_b T}\right) - 1} \quad (۷۶-۳)$$

بارسم نمودار دمای مؤثر بر حسب تعداد فوتون‌ها برای این مجموعه اپتومکانیکی مطابق شکل (۳-۴)



شکل ۳-۴: منحنی تغییرات دما بر حسب تعداد فوتون منبع گرمایی

در می‌یابیم که با افزایش تعداد فوتون‌ها، دمای مد مکانیکی به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. در ابتدا که تعداد فوتون‌ها یکی است؛ دمای مد مکانیکی 27 درجه‌ی سانتی‌گراد می‌باشد که با افزایش تعداد فوتون‌ها، هنگامی که تعداد آن‌ها به حدود یک میلیون عدد می‌رسد دمای مد مکانیکی به حدود 213- درجه‌ی سانتی‌گراد کاهش می‌یابد؛

به عبارت دیگر طبق رابطه‌ی (۳-۷۶) با کاهش دما درجات آزادی مد مکانیکی کاهش می‌یابد

این اثر، سردکردن به وسیله‌ی گرماست.

۴- فصل چہارم :

حالت مد مکانیکی

۴-۱- حالت مد مکانیکی

در این فصل با استفاده از ایده‌ی جالب مطرح شده در بخش (۳-۳) حالت مد مکانیکی را بدست می‌آوریم؛ بدین منظور، ابتدا روابط ریاضی مورد نیاز را اثبات می‌کنیم و سپس حالت مد مکانیکی را با استفاده عملگرهای کراوس بدست می‌آوریم.

سیستم مورد مطالعه در شکل (۳-۱) را در نظر می‌گیریم؛ از آن جایی که در اپتیک کوانتومی، یک جداکننده‌ی باریکه بین مدهای a و c با تبدیل (۳-۱۷) نمایش داده می‌شود؛ اگر در جمله‌ی اول رابطه‌ی (۳-۱۶) مد b را به بازتاب‌پذیری مربوط کنیم آن‌گاه بین هامیلتونی برهم‌کنش و مولد جداکننده‌ی باریکه شباهتی برقرار می‌گردد که با استفاده از آن می‌توان نگاشت دینامیکی مد مکانیکی را بررسی کرد؛ مد c با حالت $|n_c\rangle$ نمایش داده می‌شود که $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ می‌باشد و حالت‌های مد a را به صورت $|n_a\rangle$ در نظر می‌گیریم؛ با توجه به این که سیستم مورد مطالعه نوسانگر هماهنگ ساده است؛ k امین عملگر کراوس سیستم را محاسبه کرده و با بررسی قضیه‌ی کراوس، حالت (عملگر چگالی) مد مکانیکی را بدست می‌آوریم.

¹ reflectivity

² density operator

۴-۱-۱- اثبات روابط مورد نیاز

برای بدست آوردن نگاشت دینامیکی مد مکانیکی، به چندین رابطه ریاضی نیاز داریم. بین دو

عملگر A و G رابطه زیر برقرار است

$$e^{\}G A e^{-\}G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\}^n}{n!} C_n \quad (1-4)$$

ضرایب C_n عملگرهایی هستند که به صورت

$$\begin{aligned} C_0 &= A \\ C_1 &= [G, C_0] \\ C_2 &= [G, C_1] \end{aligned} \quad (2-4)$$

تعریف می‌شوند؛ اگر با توجه به رابطه (۳-۱۷) و نسبت دادن مد b به بازتاب‌پذیری، G و $\}$ را به

صورت زیر در نظر بگیریم

$$\begin{aligned} G &= a^\dagger c + a c^\dagger \\ \} &= -ib \end{aligned} \quad (3-4)$$

آنگاه روابط (۲-۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} C_0 &= a \\ C_1 &= [G, a] = [a^\dagger c + a c^\dagger, a] = c [a^\dagger, a] = -c \\ C_2 &= [G, -c] = -[a^\dagger c + a c^\dagger, c] = -a [c^\dagger, c] = a \end{aligned} \quad (5-4)$$

با استفاده از روابط (۵-۴) و رابطه (۱-۴) داریم

$$\begin{aligned} UaU^\dagger &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ib)^n}{n!} C_n \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ (n \text{ even})}}^{\infty} \frac{(-ib)^n}{n!} a + \sum_{\substack{n=1 \\ (n \text{ odd})}}^{\infty} \frac{(-ib)^n}{n!} c \\ &= a \cos b + i c \sin b \end{aligned} \quad (6-4)$$

و به صورت مشابه ، خواهیم داشت

$$UcU^\dagger = c \cos b + i a \sin b \quad (7-4)$$

چون $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$ است ؛ می توان نوشت

$$Ua^k U^\dagger = Ua^l a^l a^l \dots U^\dagger = (UaU^\dagger)^k \quad (8-4)$$

با استفاده از رابطه‌ی (4-6) و بسط دو جمله‌ای به صورت

$$(x+y)^n = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n}{l} x^l y^{n-l} \quad (9-4)$$

می توان رابطه‌ی (4-8) را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} (UaU^\dagger)^k &= (a \cos b + i c \sin b)^k \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos^m b a^m (i \sin b)^{k-m} c^{k-m} \end{aligned} \quad (10-4)$$

۴-۱-۲- عملگرهای کراوس

پس از بررسی روابط ریاضی مورد نیاز ، اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم عملگرهای کراوس سیستم مورد مطالعه را بدست آوریم . رابطه تمامیت برای تعداد حالت‌های مد c به صورت

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} |m_c\rangle \langle m_c| \quad (۱۱-۴)$$

می‌باشد ؛ با ضرب طرفین A_k (k امین عملگر کراوس) در عملگر واحد I می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{n_c} |n_c\rangle \langle n_c| A_k \\ &= \sum_{n_c} |n_c\rangle \langle n_c| A_k \sum_{m_c} |m_c\rangle \langle m_c| \\ &= \sum_{n_c, m_c} |n_c\rangle \langle n_c| A_k |m_c\rangle \langle m_c| \\ &= \sum_{n_c, m_c} |n_c\rangle \langle m_c| \langle n_c| A_k |m_c\rangle \end{aligned} \quad (۱۲-۴)$$

با استفاده از تعریف عملگر کراوس به صورت

$$A_k = \langle k_a | U | 0_a \rangle$$

رابطه‌ی (۱۲-۴) به صورت

$$A_k = \sum_{n_c, m_c} |n_c\rangle \langle m_c| \langle n_c | (\langle k_a | U | 0_a \rangle) |m_c\rangle \quad (۱۳-۴)$$

بازنویسی می‌شود . با توجه به رابطه‌ی

$$\begin{aligned} a^k |0_a\rangle &= \sqrt{k!} |k_a\rangle \\ \langle k_a| &= \langle 0_a| \frac{a^k}{\sqrt{k!}} \end{aligned} \quad (۱۴-۴)$$

و با استفاده از (۸-۴)، (۱۰-۴)، (۱۳-۴) و (۱۴-۴) A_k را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
 A_k &= \sum_{n_c, m_c} |n_c\rangle \langle m_c| \langle n_c| \left(\langle k_a| U |0_a\rangle \right) |m_c\rangle \\
 &= \sum_{n_c, m_c} |n_c\rangle \langle m_c| \langle n_c| \left(\langle 0_a| \frac{a^k}{\sqrt{k!}} U |0_a\rangle \right) |m_c\rangle \\
 &= \sum_{n_c, m_c} |n_c\rangle \langle m_c| \langle n_c| \left(\langle 0_a| U U^\dagger \frac{a^k}{\sqrt{k!}} U |0_a\rangle \right) |m_c\rangle
 \end{aligned} \tag{۱۵-۴}$$

با توجه به (۶-۴) به سادگی درمی‌یابیم

$$U^\dagger a U = a \cos b - i c \sin b \tag{۱۶-۴}$$

با استفاده از (۱۶-۴) می‌توان رابطه‌ی (۱۵-۴) را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned}
 A_k &= \sum_{n_c, m_c} |n_c\rangle \langle m_c| \langle n_c| \langle 0_a| U \left(U^\dagger \frac{a^k}{\sqrt{k!}} U \right) |0_a\rangle |m_c\rangle \\
 &= \sum_{n_c, m_c} |n_c\rangle \langle m_c| \langle n_c| \langle 0_a| U \left(\frac{(a \cos b - i c \sin b)^k}{\sqrt{k!}} \right) |0_a\rangle |m_c\rangle
 \end{aligned} \tag{۱۷-۴}$$

با استفاده از (۹-۴) داریم

$$A_k = \sum_{n_c, m_c} |n_c\rangle \langle m_c| \langle n_c| \langle 0_a| \frac{U}{\sqrt{k!}} \left(\sum_{l=0}^k \cos^l b a^l (-i \sin b)^{k-l} c^{k-l} \right) |0_a\rangle |m_c\rangle \tag{۱۸-۴}$$

با توجه به اثر عملگر فزاینده a روی حالت پایه‌ی مد a به صورت

$$a |0_a\rangle = 0 \tag{۱۹-۴}$$

برای علامت مجموع در عبارت (۱۸-۴) $l=0$ را انتخاب می‌کنیم؛ با در نظر گرفتن این نکته، رابطه‌ی

(۱۸-۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$A_k = \sum_{n_c, m_c} |n_c\rangle \langle m_c| \langle n_c| \langle 0_a| \frac{U}{\sqrt{k!}} \left((-i \sin b)^k c^k \right) |0_a\rangle |m_c\rangle \quad (20-4)$$

حال، اثر c^k بر حالت $|m_c\rangle$ را به کمک روابط جبری بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{c^k}{\sqrt{k!}} |m_c\rangle &= \frac{\sqrt{m_c(m_c-1)(m_c-2)\dots(m_c-(k-1))}}{\sqrt{k!}} |m_c-k\rangle \\ &= \frac{\sqrt{m_c(m_c-1)(m_c-2)\dots(m_c-(k-1))}}{\sqrt{k!}} \left(\frac{\sqrt{(m_c-k)!}}{\sqrt{(m_c-k)!}} \right) |m_c-k\rangle \\ &= \frac{\sqrt{m_c!}}{\sqrt{k!(m_c-k)!}} |m_c-k\rangle \\ &= \sqrt{\binom{m_c}{k}} |m_c-k\rangle \quad (m_c \geq k) \end{aligned} \quad (21-4)$$

به کمک رابطه‌ی (۲۱-۴) می‌توانیم رابطه‌ی (۲۰-۴) را بازنویسی کنیم

$$A_k = \sum_{n_c, m_c} \sqrt{\binom{m_c}{k}} (-i \sin b)^k (\langle n_c| \langle 0_a| U |0_a\rangle |m_c-k\rangle |n_c\rangle \langle m_c|) \quad (22-4)$$

آنچه را تاکنون بررسی کردیم برای رابطه‌ی

$$UcU^\dagger = c \cos b + i a \sin b \quad (23-4)$$

نیز می‌توان تکرار کرد. ابتدا رابطه‌ی

$$\langle n_c| = \langle 0_c| \frac{a^{n_c}}{\sqrt{n_c!}} \quad (24-4)$$

را در نظر می‌گیریم؛

لذا داریم

$$\begin{aligned}
 \langle n_c | \langle 0_a | U | 0_a \rangle | m_c - k \rangle &= \langle 0_c | \langle 0_a | \frac{a^{n_c}}{\sqrt{n_c!}} U | 0_a \rangle | m_c - k \rangle \\
 &= \langle 0_c | \langle 0_a | U U^\dagger \frac{a^{n_c}}{\sqrt{n_c!}} U | 0_a \rangle | m_c - k \rangle \\
 &= \langle 0_c | \langle 0_a | U \frac{(c \cos b - i a \sin b)^{n_c}}{\sqrt{n_c!}} | 0_a \rangle | m_c - k \rangle \\
 &= \langle 0_c | \langle 0_a | \frac{U}{\sqrt{n_c!}} \sum_{l=0}^{n_c} \cos^l b a^l (i \sin b)^{n_c-l} c^{n_c-l} | 0_a \rangle | m_c - k \rangle
 \end{aligned} \tag{۲۵-۴}$$

بار دیگر ، با توجه به

$$a | 0_a \rangle = 0 \tag{۲۶-۴}$$

تنها جمله‌ای را که برای رابطه‌ی (۲۵-۴) انتخاب می‌کنیم $l=0$ می‌باشد ؛ بنابراین

$$\begin{aligned}
 \langle 0_c | \langle 0_a | \frac{U}{\sqrt{n_c!}} \sum_{l=0}^{n_c} \cos^l b a^l (i \sin b)^{n_c-l} c^{n_c-l} | 0_a \rangle | m_c - k \rangle \\
 = \langle 0_c | \langle 0_a | \frac{U}{\sqrt{n_c!}} (\cos b)^{n_c} c^{n_c} | 0_a \rangle | m_c - k \rangle
 \end{aligned} \tag{۲۷-۴}$$

با استفاده از رابطه‌ی

$$\frac{c^{n_c}}{\sqrt{n_c!}} | m_c - k \rangle = \sqrt{\binom{m_c - k}{n_c}} | m_c - k - n_c \rangle \tag{۲۸-۴}$$

به همراه رابطه‌ی

$$\langle n_c | \langle 0_a | U = \langle n_c | \langle 0_a | \tag{۲۹-۴}$$

می توان نوشت

$$\begin{aligned}
 A_k &= \sum_{n_c, m_c} \sqrt{\binom{m_c}{k}} (-i \sin b)^k \langle n_c | \langle 0_a | U | 0_a \rangle | m_c - k \rangle | n_c \rangle \langle m_c | \\
 &= \sum_{n_c, m_c} \sqrt{\binom{m_c}{k}} (-i \sin b)^k \langle 0_c | \langle 0_a | \frac{U}{\sqrt{n_c!}} (\cos b)^{n_c} c^{n_c} | 0_a \rangle | m_c - k \rangle | n_c \rangle \langle m_c | \quad (30-4) \\
 &= \sum_{n_c, m_c} \sqrt{\binom{m_c}{k}} \sqrt{\binom{m_c - k}{n_c}} (-i \sin b)^k (\cos b)^{n_c} \langle 0_c | \langle 0_a | 0_a \rangle | m_c - k - n_c \rangle | n_c \rangle \langle m_c |
 \end{aligned}$$

چون $\langle 0_a | 0_a \rangle = 1$ است آن گاه رابطه‌ی (۳۰-۴) را می توان به صورت

$$A_k = \sum_{n_c, m_c} \sqrt{\binom{m_c}{k}} \sqrt{\binom{m_c - k}{n_c}} (-i \sin b)^k (\cos b)^{n_c} \langle 0_c | m_c - k - n_c \rangle | n_c \rangle \langle m_c | \quad (31-4)$$

نوشت ؛ با توجه به

$$\begin{aligned}
 \langle 0_c | m_c - k - n_c \rangle &= u_{0, m-k-n} \\
 m - k - n &= 0 \quad (32-4) \\
 n &= m - k
 \end{aligned}$$

k امین عملگر کراوس به صورت زیر در می آید

$$\begin{aligned}
 A_k &= \sum_m \sqrt{\binom{m}{k}} \sqrt{\binom{m-k}{m-k}} (-i \sin b)^k (\cos b)^{m-k} | m - k \rangle \langle m | \\
 &= \sum_m \sqrt{\binom{m}{k}} (-i \sin b)^k (\cos b)^{m-k} | m - k \rangle \langle m | \quad (33-4)
 \end{aligned}$$

با توجه به $| m - k \rangle$ برای حالت پایه $m - k = 0$ است ؛ لذا داریم

$$A_k = \sum_{m=k} \sqrt{\binom{m}{k}} (-i)^k (\sin b)^k (\cos b)^{m-k} | m - k \rangle \langle m | \quad (34-4)$$

با در نظر گرفتن $x = 1 - \cos^2 b$ سرانجام عبارت مربوط به عملگرهای کراوس سیستم مورد نظر عبارتند از

$$\begin{aligned}
 A_k &= \sum_{m=k}^{\infty} \sqrt{\binom{m}{k}} (-i)^k \sqrt{(\sin b)^{2k}} \sqrt{(\cos b)^{2(m-k)}} |m-k\rangle \langle m| \\
 &= \sum_{m=k}^{\infty} \sqrt{\binom{m}{k}} (-i)^k \sqrt{(1 - \cos^2 b)^k} \sqrt{(\cos^2 b)^{(m-k)}} |m-k\rangle \langle m| \quad (35-4) \\
 &= \sum_{m=k}^{\infty} \sqrt{\binom{m}{k}} (-i)^k \sqrt{x^k} \sqrt{(1-x)^{m-k}} |m-k\rangle \langle m|
 \end{aligned}$$

که $|m\rangle$ و $|m-k\rangle$ مربوط به مد مکانیکی می‌باشند .

طبق قضیه‌ی کراوس چون $\sum_k A_k A_k^\dagger = 1$ است $\{ \dots \} = \sum_k A_k \dots A_k^\dagger$ یک نگاشت مثبت

ردنگهدار می‌باشد که **حالت مد مکانیکی** را نمایش می‌دهد.

مرجعها

- [1] Griffiths, D. J. (2006). *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson Prentice Hall.
- [2] Loudon, R. (2000). *The quantum theory of light*. Oxford university press.
- [3] Cohen-Tannoudji, C. a. (1977). *Quantum Mechanics, Volume I. Inc., Paris* , 312.
- [4] Sakurai, J. J. (1994). *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesely.
- [5] Liboff, R. (1993). *Introductory Quantum Mechanics*. Pearson Education India.
- [6] McMahon, D. (2008). *Quantum Computing Explained*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- [7] Levin, Y. (1998). Internal thermal noise in the LIGO test masses: A direct approach. *Physical Review D* , 57, 659.
- [8] Liu, Y. T. (2000). Thermoelastic noise and homogeneous thermal noise in finite sized gravitational-wave test masses. *Physical Review D* , 62, 122002.
- [9] Braginsky, V. a. (1999). Thermodynamical fluctuations and photo-thermal shot noise in gravitational wave antennae. *Physics Letters A* , 264, 1—10.
- [10] Numata, K. (2002). Direct measurement of mirror thermal noise. *Ph. D. Thesis, University of Tokyo* .
- [11] Braginsky, V. a. (2000). Thermo-refractive noise in gravitational wave antennae. *Physics Letters A* , 271, 303—307.
- [12] Cerdonio, M. a. (2001). Wideband dual sphere detector of gravitational waves. *Physical Review Letters* , 87, 031101.

- [13] De Rosa, M. a. (2002). Experimental measurement of the dynamic photothermal effect in Fabry-Perot cavities for gravitational wave detectors. *Physical review letters* . 89, 237402.
- [14] Ju, L. a. (2000). Detection of gravitational waves. *Reports on Progress in Physics* . 63, 1317.
- [15] Bauer, M. (2011). Lindblad driving for nonequilibrium steady-state transport for noninteracting quantum impurity models. *Ph. D. Thesis, University of Munich*.
- [16] Nielsen, M. A. (2010). *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press.
- [۱۷] کریمی پور ، وحید . *درسنامه‌ی محاسبات کوانتومی*. دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف .
- [18] Preskill, J. (1998). Quantum information and computation.
- [19] Gigan, S. a. (2006). Self-cooling of a micromirror by radiation pressure. *Nature* . 444, 67—70.
- [20] Schliesser, A. a. (2008). Resolved-sideband cooling of a micromechanical oscillator. *Nature Physics* , 4, 415—419.
- [21] Paternostro, M. a. (2007). Creating and probing multipartite macroscopic entanglement with light. *Physical review letters* , 99, 250401.
- [22] Groblacher, S. a. (2009). Observation of strong coupling between a micromechanical resonator and an optical cavity field. *Nature* , 460, 724--727.
- [23] Teufel, J. a. (2009). Nanomechanical motion measured with an imprecision below that at the standard quantum limit. *Nature nanotechnology* , 4, 820--823.

- [24] Vitali, D. a. (2002). Mirror quiescence and high-sensitivity position measurements with feedback. *Physical Review A* , 65, 063803.
- [25] Wang, X. a. (2006). Thermal entanglement in ferrimagnetic chains. *Physical Review A* , 73, 064302.
- [26] Zhang, J. a.-x. (2009). Cooling and squeezing the fluctuations of a nanomechanical beam by indirect quantum feedback control. *Physical Review A* , 79, 052102.
- [27] Marquardt, F. a. (2009). Optomechanics (a brief review). *arXiv preprint arXiv:0905.0566* .
- [28] Diehl, S. a. (2008). Quantum states and phases in driven open quantum systems with cold atoms. *Nature Physics* , 4, 878--883.
- [29] Vollbrecht, K. G. (2011). Entanglement distillation by dissipation and continuous quantum repeaters. *Physical review letters* , 107, 120502.
- [30] Lofstedt, R. a. (1994). Quantum stochastic resonance. *Physical Review Letters;(United States)* . 72.
- [31] Eisert, J. a. (2010). Noise-driven quantum criticality. *arXiv preprint arXiv:1012.5013* .
- [32] Verstraete, F. a. (2009). Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation. *Nature Physics* , 5, 633--636.
- [33] Mari, A. a. (2012). Cooling by Heating: Very Hot Thermal Light Can Significantly Cool Quantum Systems. *Physical Review Letters* , 108, 120602.
- [34] Breuer, H. P. (2002). *The theory of open quantum systems*. Oxford university press.

[35] Nakajima, S. (1958). On quantum theory of transport phenomena steady diffusion.

Progress of Theoretical Physics , 20, 948—959.

[36] Zwanzig, R. (1964). On the identity of three generalized master equations. *Physica*

, 30, 1109—1123.

[37] Gardiner, C. a. (2004). *Quantum noise: a handbook of Markovian and non-*

Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics (Vol.

56). Springer.

Abstract:

In this thesis, we introduce the idea of actually cooling quantum systems by means of incoherent thermal light, hence giving rise to a counter-intuitive mechanism of “cooling by heating”.

In the first chapter, we examine the tools of mechanical quantum that we need in brief and we get some knowledge from different noises; Since, the system under consideration is an open quantum system, it described by different approaches: the master equation (Schrodinger picture), the Fokker-Planck equation (phase space), the Langevin equations (Heisenberg picture). Here we are going to consider only the first approach in the second chapter. In the third chapter, we examine the opto-mechanical setup for “cooling by heating” and we get the master equation of it by using projection operators techniques. finally in the forth chapter, we get the state of mechanical mod by the use of similarities between the Hamiltonian of our setup and a beam splitter.



Shahrood University of Technology

Faculty of Physics

Master of Science Thesis

***Cooling down a quantum system using hot
states of light***

Supervisor:

Dr.Hossein Movahhedian

By:

Mohammad Bahrami

November 2013