

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : فیزیک

گروه : ذرات بنیادی

پایان نامه کارشناسی ارشد

درهم تنیدگی و ناموضعیّت

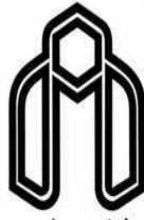
معصومه ولی پور

استاد راهنما :

دکتر حسین موحدیان

بهمن ماه ۱۳۸۸





دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : فیزیک
گروه : ذرات بنیادی

درهم تنیدگی و ناموضعیّت

دانشجو : معصومه ولی پور

استاد راهنما :

دکتر حسین موحدیان

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ماه ۱۳۸۸

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : فیزیک

گروه : ذرات بنیادی

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم معصومه ولی پور

تحت عنوان:

درهم تنیدگی و ناموضعییت

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی : دکتر حسین موحدیان
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

تقدیم به پدر و مادر م که به من فرصت دادند تا بیاموزم.
و تقدیم به تمام کسانی که به من آموختند.

آفریننده گیتی خداوند سبحان را سپاس.

قادر متعال را که قدرت عطا کرد تا در سایه الطاف بی دریغش توان به سرانجام رساندن این دوره تحصیلی را بیابم شاکرم. امید است آنچه که تحت عنوان پایان نامه ارائه گردیده است، آغازگر پویایی اندیشه هایی گردد که در رشد و تکاپوی علمی کشور مؤثر واقع شوند.

از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر حسین موحدیان که با راهنمایی ها و همراهی های ارزشمند خود مرا یاری نمودند، بسیار سپاسگزارم.

همچنین از کلیه اساتید محترم، آقایان دکتر ایزدی فرد ریاست محترم دانشکده، دکتر رجبی و دکتر بی تقصیر که در طی این دوره توفیق بهره مندی از توان علمی ایشان را داشتم، متشکرم.

از کلیه دوستانی که در طی این دوره مرا یاری نمودند نیز سپاسگزارم. در پایان بر خود واجب می دانم از خانواده محترم که با صبر و حوصله، در طول این مدت مرا همراهی نمودند و سختی ها و دشواریهای زیادی را متحمل شدند تشکر نمایم.

معصومه ولی پور

بهمن ماه ۱۳۸۸

پکیده

اساس و پایه‌ی ناموضعیّت برای یک سیستم کوانتومی مرکب، حالات درهم تنیده است. با داشتن یک حالت درهم تنیده، می‌توانیم کارهایی را در مکانیک کوانتومی انجام دهیم که به صورت کلاسیکی انجام دادن آنها پیچیده یا غیرممکن خواهد بود. در مکانیک کوانتومی امکان تشخیص دادن حالات نامتعاملِ ناشناخته وجود ندارد و هم چنین کپی کردن چنین حالاتی امکان‌پذیر نیست. اما این گونه رفتارها در مکانیک کلاسیک دیده نمی‌شود. از این رو چنانچه یک سیستم کوانتومی را بر حسب چندین حالت درهم ناتنیده‌ی متعامد آماده کنیم، آن‌گاه سیستم کوانتومی می‌تواند به صورت کلاسیکی رفتار نماید و هیچ‌گونه رفتار ناموضعی از خود نشان ندهد [۲، ۱]. به عبارتی می‌بایستی این حالات درهم ناتنیده‌ی متعامد از سیستم کوانتومی را بتوانیم بر اساس عملکردهای موضعی و ارتباطات کلاسیکی تشخیص دهیم و همچنین امکان کپی کردن آنها وجود داشته باشد. در این پایان‌نامه برای یک سیستم کوانتومی مرکب دو قسمتی، با حضور دو مشاهده‌گر آلیس و باب، آنسامبلی از ۱۶ حالت درهم ناتنیده‌ی متعامدی را در فضای هیلبرت 4×4 بدست می‌آوریم که این حالات دو به دو بر هم متعامد و چنانچه توسط آلیس یا باب به تنهایی مشاهده بشوند، دیگر متعامد نخواهند بود. با انجام محاسبات ریاضی و کوانتومی برای این آنسامبل از حالات، می‌توانیم معیارهای کمی، مانند اطلاعات متقابل قابل حصول، آنتروپی تولید شده به هنگام آماده‌سازی و اندازه‌گیری حالات و کمیت "آگاهی از اندازه‌گیری" را به خوبی محاسبه کنیم که هرکدام به نوعی، رفتار جدیدی از ناموضعیّت را نشان می‌دهند. سپس با مقایسه کردن نتایج بدست آمده از این آنسامبل با نتایج مربوط به آنسامبل ۹ حالتی (حالات درهم ناتنیده در فضای هیلبرت 3×3) [۲۴]، می‌توان نتیجه گرفت که در مورد آنسامبل حالات در فضای هیلبرت بزرگتر، نتایج بهتری به همراه احتمال مؤفقیّت بیشتر نسبت به آنسامبل حالات در فضای هیلبرت کوچکتر، بدست خواهد آمد. از این رو پیشنهاد می‌کنیم که اگر فضای هیلبرتی که آلیس و باب در آن قرار می‌گیرند را بزرگتر از حالت قبلی در نظر بگیریم، به نتایج بهتری دست پیدا خواهیم کرد که می‌توانند از هر لحاظ بهینه‌تر از نتایج قبلی باشند.

کلمات کلیدی: ناموضعیّت کوانتومی، درهم تنیدگی کوانتومی، حالات درهم ناتنیده، اطلاعات متقابل بدست آمدنی، آنتروپی حاصل از آماده‌سازی و اندازه‌گیری حالات، آگاهی از اندازه‌گیری.

فهرست مطالب

ز	چکیده
ح	فهرست مطالب
ک	فهرست اشکال
م	فهرست جداول

فصل اول : مقدمه‌ای بر محاسبات کوانتومی

۲	۱-۱ مقدمه
۴	۲-۱ گیت‌های منطقی کلاسیکی
۴	۱-۲-۱ گیت‌های تک ورودی
۵	۲-۲-۱ گیت‌های دو ورودی
۷	۳-۱ اصل لاندور
۸	۴-۱ محاسبات برگشت پذیر
۹	۱-۴-۱ گیت برگشت پذیر <i>Toffoli</i>
۱۰	۵-۱ گیت‌های کوانتومی
۱۱	۱-۵-۱ گیت‌های تک کیوبیتی
۱۳	۲-۵-۱ گیت‌های دو کیوبیتی
۱۴	۶-۱ قضیه <i>No-Cloning</i>
۱۶	۷-۱ نمودار مدارهای اصلی کوانتومی

فصل دوم : ماتریس چگالی و نظریه‌ی کوانتومی فرایند اندازه گیری

۱۹	۱-۲ مقدمه
۲۰	۲-۲ عملگر چگالی
۲۲	۱-۲-۲ عملگر چگالی برای یک حالت خالص
۲۴	۲-۲-۲ عملگر چگالی برای یک حالت آمیخته
۲۶	۳-۲ عملگرهای <i>Kraus</i>
۲۷	۴-۲ کانال‌های کوانتومی
۲۸	۵-۲ کانال‌های کلاسیکی
۲۹	۶-۲ نظریه‌ی اندازه گیری کوانتومی
۳۱	۷-۲ عملگردهای کوانتومی و ابرعملگرها
۳۴	۸-۲ تمییز پذیر بودن حالات کوانتومی و فرایند اندازه گیری

۳۵ اندازه گیری های تصویری
۳۸ اندازه گیری های <i>POVM</i>
۴۱ اندازه گیری های ضعیف و قوی

فصل سوم : درهم تنیدگی کوانتومی

۴۳ ۱-۳ مقدمه
۴۴ ۲-۳ سیستمهای دو قسمتی و پایه های بل
۴۶ ۳-۳ اندازه گیری های همبستگی اسپین و نامساوی بل
۴۶ ۳-۳-۱ همبستگی در حالت های یگانه ی اسپینی
۵۰ ۳-۳-۲ اصل موضعیت اینشتین و نامساوی بل
۵۳ ۴-۳ مدل ریاضی درهم تنیدگی کوانتومی
۵۶ ۵-۳ ناموضعیت و درهم تنیدگی حالات کوانتومی
۵۸ ۶-۳ ضریب اطمینان درهم تنیدگی
۵۸ ۷-۳ تجزیه ی اشمیت
۶۰ ۸-۳ خالص سازی درهم تنیدگی
۶۱ ۹-۳ تابع آنتروپی و درهم تنیدگی کوانتومی
۶۴ ۱۰-۳ کاربردهای درهم تنیدگی
۶۴ ۱-۱۰-۳ فرابرد کوانتومی

فصل چهارم : ناموضعیت کوانتومی بدون درهم تنیدگی

۷۱ ۱-۴ مقدمه
۷۲ ۲-۴ اجرا نشدن ابرعملگر تفکیک پذیر با عملکردهای دو موضعی
۸۱ ۳-۴ تحلیل نظری - اطلاعاتی از پروتکل اندازه گیری دو مرحله ای
۹۳ ۴-۴ بهینه کردن اندازه گیری های موضعی
۱۰۱ ۵-۴ درک ابرعملگر تفکیک پذیر به همراه کیوبیتهای تسهیم شده
۱۰۴ ۶-۴ ارتباط ترمودینامیک با اندازه گیری های موضعی
۱۰۴ ۴-۶-۱ اندازه گیری حالات به صورت برگشت ناپذیر
۱۰۸ ۴-۶-۲ فراهم سازی حالات به صورت برگشت ناپذیر
۱۱۵ ۷-۴ و اما آنسامبل پیشنهادی
۱۳۳ ۸-۴ نتیجه گیری و بحث

۱۳۵.....	پیوست الف
۱۴۳.....	پیوست ب
۱۴۶.....	منابع

فهرست اشکال

فصل اول

- شکل (۱-۱) : مدار کلاسیکی برای کپی کردن بیت نا شناخته‌ی x ۱۵
- شکل (۲-۱) : نمایش نموداری مدارهای کوانتومی عملگرهای پاؤلی و عملکرد آنها ۱۷
- شکل (۳-۱) : گیت هادامارد و عملکرد آن ۱۷
- شکل (۴-۱) : نمایش فرایند اندازه گیری در یک مدار کوانتومی ۱۷

فصل دوم

- شکل (۱-۲) : نمایشی از عملگرهای Kraus و عملکردهای کوانتومی ۲۶
- شکل (۲-۲) : کانال کلاسیکی متقارن ۲۸
- شکل (۳-۲) : تمامی اعمالی که آلیس روی سیستم خود انجام می‌دهد با یک نگاشت مثبت قابل بیان است ۳۳

فصل سوم

- شکل (۱-۳) : مدار کوانتومی بوجود آورنده‌ی حالت بل ۵۳
- شکل (۲-۳) : مراحل انجام پروتکل فرابرد کوانتومی ۶۵
- شکل (۳-۳) : آلیس روی کیوبیت‌های A و B ، یک اندازه گیری بل را خلق می‌کند و باب را از راه کلاسیکی (تلفن) باخبر می‌سازد. ۶۵

فصل چهارم

- شکل (۱-۴) : نمایش دومینوای از آنسامبلی با ۹ حالت درهم نائیده‌ی متعامد ۷۴
- شکل (۲-۴) : مقایسه‌ی واحدهای اندازه گیری اطلاعات : بیت، تریت، بن و ۸۲
- شکل (۳-۴) : نمودار آنتروپی شانن بر حسب احتمال ۸۴
- شکل (۴-۴) : نمایش دو مینوای از آنسامبل ۹ حالتی، بدون در نظر گرفتن حالت ψ_f ۹۵
- شکل (۵-۴) : نمایش درختی (فرکتالی) از مراحل پروتکل اندازه گیری برای تشخیص حالات (بدون حالت ψ_f) ۹۵

شکل (۴-۶) : نمایش بهینه‌ای از شکل (۴-۵) که به همراه ارتباطات کوانتومی از آلیس به باب است.
 ۱۰۲.....

شکل (۴-۷) : نمایش دومینوای از چهار حالتی که توسط آلیس و باب به صورت موضعی و برگشت پذیر آماده می‌شوند.
 ۱۰۹.....

شکل (۴-۸) : نمایش دومینوای از ۱۶ حالت درهم ناتنیده‌ی متعامد.....
 ۱۱۶.....

شکل (۴-۹) : نمایش دومینوای از اندازه گیری آنسامبل ۱۶ حالتی برای زمانی که $p(\phi_r)=0$ و $p(\phi_r)=0$ می‌باشد. (خطوط خط-چین نشان دهنده‌ی اندازه گیری فون نیومن و خطوط خط-چین و نقطه، اندازه گیری در پایه های چرخش داده شده می‌باشد و همچنین اعداد پررنگ، مراحل اندازه گیری را نشان می‌دهند).
 ۱۲۹.....

شکل (۴-۱۰): نمایش درختی از اندازه گیری آنسامبل ۱۶ حالتی (البته زمانی که $p(\phi_r)=0$ و $p(\phi_r)=0$).....
 ۱۳۰.....

شکل (۴-۱۱) : نمایش درختی از آنسامبل ۱۶ حالتی به همراه گذار کوانتومی (زمانی که احتمال بوجود آمدن تمامی حالات است).
 ۱۳۱.....

فهرست جداول

فصل اول

جدول (۱-۱) : جدول دوارزشی گیت‌های AND ، OR و XOR ۶

جدول (۲-۱) : جدول دوارزشی گیت $Toffoli$ ۱۰

فصل سوم

جدول (۱-۳) : همبستگی اندازه گیری‌های اسپین ۴۹

جدول (۲-۳) : هماهنگی مؤلفه‌های اسپینی در نظریه‌های جایگزین ۵۲

فصل چهارم

جدول (۱-۴) : معیارهای گوناگون برای سنجیدن ناموضعیّت ۱۱۴

جدول (۲-۴) : مقایسه‌ی کسری اطلاعات متقابل بدست آمدنی برای دو آنسامبل ۹ و ۱۶ حالتی... ۱۲۶

جدول (۳-۴) : مقایسه‌ی آنتروپی آماده سازی و اندازه‌گیری برای دو آنسامبل ۹ و ۱۶ حالتی ۱۲۸

فصل ۱:

مقدمه‌ای بر محاسبات کوانتومی

- مقدمه
- گیت‌های منطقی کلاسیکی
- اصل لاندور
- محاسبات برگشت پذیر
- گیت‌های کوانتومی
- قضیه‌ی *No-Cloning*
- نمودار مدارهای اصلی کوانتومی

۱-۱ مقدمه

رایانه تنها بخشی از دنیایی است که ما آنرا دنیای دیجیتالی می‌نامیم. پردازش ماشینی اطلاعات، در هر شکلی بر مبنای دیجیتال و محاسبات کلاسیک انجام می‌شود. اما کمتر از یک دهه است که روش بهتر و قدرتمندتر دیگری برای پردازش اطلاعات پیش روی ما قرار گرفته که بر اساس مکانیک کوانتومی می‌باشد. این روش جدید با ویژگی‌هایی همراه است که آن را از محاسبات کلاسیک بسیار متمایز می‌سازد. اگر چه محاسبات دانشی است که اساس تولد آن ریاضیات می‌باشد، اما رایانه‌ها سیستم‌های فیزیکی هستند و فیزیک در آینده این دانش نقش تعیین کننده‌ای خواهد داشت. البته وجود تفاوت بین این دو به معنای حذف یکی و جایگزینی دیگری نیست. به قول « نیلس بور » گاهی ممکن است خلاف یک حقیقت انکارناپذیری منجر به حقیقت انکارناپذیر دیگری شود. بنابراین محاسبات کوانتومی را به عنوان یک زمینه و روش جدید و بسیار کارآمد در نظر می‌گیریم. وجود چند پدیده‌ی مهم که مختص فیزیک کوانتومی است، آن را از دنیای کلاسیک جدا می‌سازد. این پدیده‌ها عبارتند از : برهم نهی^۱، تداخل^۲، درهم تنیدگی^۳، عدم موجبیت^۴، ناموضعییت و تکثیر ناپذیری^۵ [۲،۱]. در این جا بهتر است واحد اطلاعات کوانتومی را معرفی کنیم. هر سیستم محاسباتی دارای یک پایه‌ی اطلاعاتی است که نماینده کوچکترین میزان اطلاعات قابل نمایش است. در محاسبات کلاسیک این واحد ساختاری را بیت می‌نامیم که گزیده‌ی واژه‌ی « عدد دودویی » است، زیرا می‌تواند تنها یکی از دو رقم مجاز ۰ و ۱ را در خود نگه دارد. هم چنین در محاسبات کوانتومی، پایه‌ای معرفی می‌شود که آن را کیوبیت یا بیت کوانتومی می‌نامیم. اما این تعریف کیوبیت نیست و باید آن را همراه با مفهوم و نمونه‌های واقعی و فیزیکی درک کرد. در ضمن فراموش نمی‌کنیم که کیوبیت‌ها سیستم‌های فیزیکی

^۱ Superposition^۲ Interference^۳ Entanglement^۴ Non Determinism^۵ Non Locality & Non Clonability

هستند، نه مفاهیم انتزاعی و اگر هم برای توصیف آن‌ها از ریاضیات کمک می‌گیریم، تنها به دلیل ماهیت کوانتومی آن‌ها است.

در فیزیک کلاسیک برای نگه داری یک بیت، از حالت یک سیستم فیزیکی استفاده می‌شود. در سیستم‌های کلاسیکی اولیه (رایانه‌های مکانیکی) از موقعیت مکانی دندانه‌های چرخ دنده برای نمایش اطلاعات استفاده می‌شد. از زمانی که حساب دودویی برای محاسبات پیشنهاد شد، از بین تمام کاندیدها، سیستم‌های الکتریکی و الکترونیکی برای این کار انتخاب شدند. به این شکل، هر بیت کلاسیکی، یک مدار الکتریکی است که یا در آن جریان وجود دارد یا ندارد.

از طرفی هر بیت کوانتومی یا کیوبیت عبارت است از یک سیستم دودویی که می‌تواند دو حالت مجزا داشته باشد. به عبارت کلی‌تر، کیوبیت یک سیستم دو بعدی کوانتومی با دو پایه به شکل $|0\rangle$ و $|1\rangle$ است. البته نمایش پایه‌ها یکتا نیست. اولین کاندید برای نمایش کیوبیت استفاده از مفهوم اسپین است که معمولاً برای آن، اتم هیدروژن به کار می‌رود. علاوه بر اسپین، از وضع قطبش یک پرتو فوتونی و نیز سطوح انرژی مجزای یک اتم دلخواه نیز می‌توان به عنوان سیستم کیوبیتی استفاده کرد.

مهمترین تفاوت بیت و کیوبیت این می‌باشد که هرگاه بخواهیم، می‌توانیم مقدار یک بیت را تعیین کنیم، اما این کار را در مورد یک کیوبیت نمی‌توان انجام داد و حاصل اندازه‌گیری یک کیوبیت با احتمال بدست می‌آید.

یک رایانه کوانتومی به کمک اصل برهم نهی، این امکان را می‌یابد که مانند یک رایانه کلاسیکی بسیار پر قدرت عمل کند که در یک لحظه روی چندین مسیر، اطلاعاتی را پردازش می‌کند. البته مشاهده و متمایز کردن تک تک این محاسبه‌گرهای کوانتومی غیرممکن است. بنابراین با طراحی زیرکانه‌ی الگوریتم‌ها و تدابیر کوانتومی در رایانه‌های کوانتومی قادر به حل کردن مسائلی خواهیم بود که در غیر این صورت بسیار مشکل خواهند بود. ورود به دنیای محاسبات کوانتومی نیازمند دو پیش فرض مهم است. اولاً باید اصول اساسی و برخی تعابیر مکانیک کوانتومی را به طور دقیق بررسی کرد و ثانیاً مفهوم اطلاعات در فیزیک، چه به صورت کلاسیک و چه در معنای کوانتومی آن باید درک شود [۳].

در این فصل مفاهیم هم ارز مدارها و گیت‌های منطقی را در یک رایانه کوانتومی معرفی خواهیم کرد. در ابتدا نگاهی مختصر به گیت‌های منطقی کلاسیکی داریم.

۲-۱ گیت‌های منطقی کلاسیکی

محاسبات کلاسیکی شامل پردازش یا تبدیلات اطلاعات نمایش داده شده توسط بیت‌های کلاسیکی می‌شوند. واحدهای اصلی و مقدماتی که بیت‌های کلاسیکی را پردازش می‌کنند، گیت^۱ نامیده می‌شوند. پردازشگرهای استفاده شده در رایانه‌های مدرن الکترونیکی از صدها شاید هزارها میلیون گیت استفاده می‌کنند [۴]. به عبارتی می‌توان گفت :

• هدف اصلی یک گیت منطقی کلاسیکی تحریف کردن یا پردازش کردن اطلاعات در سطح بیت می‌باشد.

گیت‌های کلاسیکی در مدارهای الکتریکی بر اساس تعداد بیت‌های ورودی به صورت زیر دسته بندی می‌شوند:

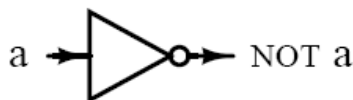
۱-۲-۱ گیت‌های تک ورودی

الف) گیت NOT : این گیت به آسانی مقدار بیت ورودی را از 0 به 1 و بالعکس تغییر می‌دهد.

به زبان ریاضی : $a \oplus NOT a = 1$

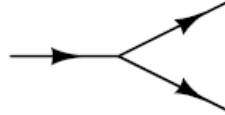
به عنوان مثال : $NOT 0 = 1 \oplus 0 = \text{mod}(\frac{1+0}{2}) = 1$

که نماد \oplus نشان دهنده جمع به پیمانه ۲ می‌باشد.

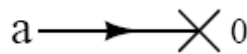


^۱ Gate

ب) گیت *FANOUT* (کپی) : این گیت به آسانی، یک بیت ورودی را می‌پذیرد و سپس دو بیت خروجی را منشعب می‌شود که مشابه بیت ورودی هستند.



ج) گیت *ERASE* : این گیت اثر بیت ورودی را با مقدار ۰ از بین می‌برد و یا با مقدار صفر جایگزین می‌کند.



۱-۲-۲ گیت‌های دو ورودی

الف) گیت *AND* : این گیت دو بیت ورودی را می‌پذیرد و یک بیت خروجی را نتیجه می‌دهد. اگر هر دو بیت ورودی، ۱ باشند، نتیجه نیز مقدار ۱ خواهد بود و در غیر این صورت، خروجی ۰ است.

به زبان ریاضی : $a \text{ AND } b = ab$

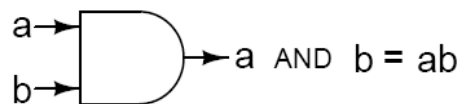
مثال :

$$1 \text{ AND } 1 = 1$$

$$1 \text{ AND } 0 = 0$$

$$0 \text{ AND } 0 = 0$$

$$0 \text{ AND } 1 = 0$$

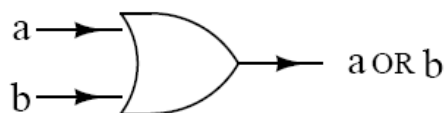


ب) گیت *OR* : در مورد این گیت، اگر هر دو بیت ورودی، ۰ باشند، خروجی نیز ۰ خواهد بود و در غیر این صورت نتیجه‌ی تأثیر گیت، ۱ می‌باشد.

$$0 \text{ OR } 0 = 0$$

مثال :

$$OR \circ 1 = 1$$

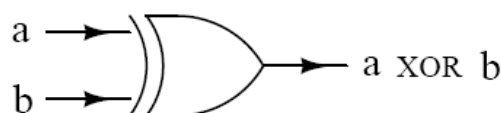


ج) گیت XOR : در این مورد چنانچه یکی از بیت‌های ورودی، ۱ باشد، آنگاه بیت خروجی هم ۱ خواهد بود، در غیر این صورت نتیجه ۰ است.

$$b \oplus a \text{ XOR } b = a \quad \text{به زبان ریاضی :}$$

$$1 \text{ XOR } 0 = 1 \quad \text{مثال :}$$

$$XOR \circ = 0 \circ$$



گیت‌های دو ورودی را می‌توان به طور قراردادی، توسط جدول دوارزشی^۱ که بیت خروجی را برای بیت‌های ورودی ممکن نمایش می‌دهد، توصیف کرد. جدول دوارزشی از گیت‌های AND ، OR و XOR در جدول (۱-۱) نشان داده شده است.

جدول ۱-۱: جدول دوارزشی گیت‌های AND ، OR و XOR

a	b	AND	OR	XOR
۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۰

بهتر است بدانید که گیت OR ترکیبی از گیت‌های AND و XOR می‌باشد. به عبارتی از مقادیر جدول بالا پیدا است که:

^۱ Truth Table

$$a \text{ OR } b = (a \text{ AND } b) \text{ XOR } (a \text{ XOR } b). \quad (1-1)$$

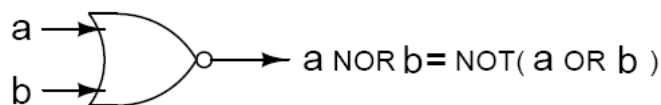
در قسمت بعدی دو گیت جدید دیگری را معرفی می‌کنیم که از ترکیب گیت *NOT* با هر یک از گیت‌های *AND* و *OR* بدست می‌آیند.

د) گیت *NAND* :



یک ویژگی جالب این گیت فراگیر بودن آن است. به عبارت دیگر تمامی عملکردهای محاسباتی می‌توانند با استفاده از این گیت به تنهایی اجرا بشوند. در حقیقت می‌توانیم یک رایانه‌ی کلی تعبیه کنیم که تنها شامل گیت‌های منطقی *NAND* یا ترکیبی از گیت‌های *NOT* و *AND* باشد.

ه) گیت *NOR* :



به همین ترتیب تمامی محاسبات کلاسیکی توسط یک مدار الکتریکی که از مجموعه گیت‌های تک ورودی و دو ورودی معرفی شده در بالا ساخته شده است، اجرا می‌شوند [۴].

۱-۳ اصل لاندور^۲

در سال ۱۹۶۱ رولف لاندور خاطر نشان کرد که محو شدن اطلاعات^۳ ضرورتاً یک فرایند اتلافی است و به نوعی باعث فشردگی فضای فاز می‌شود. این فرایند یک فرایند برگشت ناپذیر است.

به عنوان نمونه، می‌توانیم یک بیت اطلاعات را با قرار دادن یک مولکول گاز درون جعبه‌ای که توسط دیواره‌ای به دو قسمت راست و چپ تقسیم شده است، ذخیره کنیم. محو شدن اطلاعات به این

^۲ Landauer's principle

^۳ Erasure of information

معناست که صرف نظر از این که مولکول گاز قصد رفتن به قسمت چپ یا راست دیواره را داشته یا نداشته باشد، آن را به طور کاتوره‌ای به سمت چپ دیواره حرکت دهیم. در همین هنگام ناگهان دیواره را بر می‌داریم و به آرامی مولکول گاز را توسط پیستون تا زمانی که به طور قطعی در سمت چپ جعبه قرار بگیرد، فشرده می‌کنیم. این طرز عمل، آنتروپی گاز را به اندازه $\Delta S = k \ln 2$ کاهش می‌دهد و جریان یکنواخت دما از درون جعبه به محیط انتقال می‌یابد. چنانچه فرایند در دمای T هم دما شود، مقدار کاری که بایستی روی جعبه انجام داد، $W = kT \ln 2$ خواهد بود و اگر بخواهیم اطلاعات را محو کنیم، بایستی هزینه‌ی سنگینی را برای این کار پردازیم [۱].

۴-۱ محاسبات برگشت پذیر^۴

گیت‌های منطقی کلاسیکی که برای انجام محاسبات استفاده می‌شوند، به طور شاخص برگشت ناپذیرند. به عنوان مثال گیت $NAND$ که دارای دو بیت ورودی و یک بیت خروجی است، یک گیت برگشت ناپذیر است و ما نمی‌توانیم دوباره یکی از بیت‌های ورودی را از بیت خروجی بدست آوریم. بر اساس اصل لاندور، به دلیل این که یک بیت اطلاعات توسط گیت اجرایی محو می‌شود، حداقل کاری که برای عملکرد گیت نیاز می‌شود، $W = kT \ln 2$ خواهد بود و چنانچه ذخیره‌ی باتری در مدار مربوطه محدود باشد، بایستی این مصرف انرژی یک حد تئوری داشته باشد. اما چارلی بنت^۵ در سال ۱۹۷۳ فهمید که هر یک از محاسبات روی بیت‌ها به کمک مراحل برگشت پذیر انجام می‌شود و اصولاً نیاز به هیچ گونه اتلاف اطلاعات و هزینه‌های سنگین نیست. بنابراین می‌توانیم نسخه‌ی برگشت پذیری از گیت $NAND$ را بسازیم که می‌تواند تمامی اطلاعات پیرامون بیت‌های ورودی را حفظ کند و محو شدگی اطلاعات رخ ندهد [۱،۲]. در قسمت بعدی، این گیت به طور کامل توضیح داده خواهد شد.

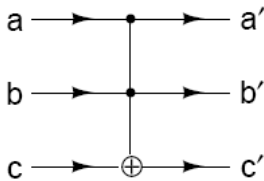
^۴ Reversible computation

^۵ Charles Bennett

۱-۴-۱ گیت برگشت پذیر *Toffoli*

گیت *Toffoli*، یک گیت منطقی کلاسیکی برگشت پذیر با سه بیت ورودی است که اگر دو بیت اول مقدار ۱ را داشته باشند، بیت سوم تغییر می‌کند.

مدار گیت *Toffoli* به صورت زیر است:



که در این مدار $a' = a$ ، $b' = b$ و $c' = c \oplus ab$ برقرار است.

به علت برقراری روابط $a = a'$ ، $b = b'$ و $c = c' \oplus a'b'$ ، بیت‌های ورودی (a, b, c) می‌توانند دوباره با اجرا کردن گیت در جهت عکس، از بیت‌های خروجی بدست آیند. بنابراین گیت *Toffoli* یک گیت برگشت پذیر است.

بهتر است بدانیم که این گیت در حالت‌های گوناگون می‌تواند نقش گیت‌های منطقی تک ورودی و دو ورودی را ایفا کند.

۱- برای $c' = 0$ و $b = c = 0$ گیت *Toffoli* مانند گیت برگشت پذیر *ERASE* تأثیر می‌گذارد.

۲- برای $b = 1$ ، $c = 1$ و $c' = 1 \oplus a = NOTa$ هم ارز گیت برگشت پذیر *NOT* خواهد بود.

۳- برای $b = 1$ ، $c' = c \oplus a = aXORc$ ، گیت *Toffoli*، مانند گیت برگشت پذیر *XOR* اثر می‌کند.

۴- و سرانجام برای $c = 0$ ، $c' = ab = aANDb$ ، شبیه گیت برگشت پذیر *AND* خواهد بود.

پس می‌توان نتیجه گرفت که گیت *Toffoli* می‌تواند برای ساختن تمام انواع گیت‌های برگشت پذیر تک

ورودی و دو ورودی استفاده بشود که به طور مختصر در جدول (۱-۲) توصیف شده‌اند [۴].

جدول ۱-۲: جدول دوازده‌گیت *Toffoli*

a	b	c	c'
۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۱

۱-۵ گیت‌های کوانتومی

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، یک گیت می‌تواند به عنوان پردازش‌کننده‌ی اطلاعات، در نظر گرفته شود. حالا که ایده‌ی اصلی، از چگونگی پردازش بیت‌ها به کمک گیت‌های کلاسیکی منطقی را در اختیار داریم، پس می‌توان مراحل مشابه‌ای را برای یک رایانه‌ی کوانتومی در نظر گرفت. در یک رایانه-ی کوانتومی، اطلاعات به کمک گیت‌ها پردازش می‌شوند (مشابه رایانه‌های کلاسیکی)، اما با این تفاوت که در این مورد عملکرد گیت‌ها بایستی یکانی باشد. یادآوری می‌کنیم که عملگر U با برقراری شرط

$$UU^t = U^tU = I \quad (۲-۱)$$

یکانی است. به علاوه اگر H یک عملگر هرمیتی باشد، آنگاه $U = e^{iHt}$ ، یکانی خواهد بود.

به خوبی می‌دانیم که عملگرهای کوانتومی را می‌توان به کمک ماتریس‌ها نمایش داد. یک گیت کوانتومی متشکل از n تا کیوبیت ورودی و خروجی را می‌توان توسط ماتریس‌هایی با درجه‌ی ۲^n

نشان داد. برای نمونه، گیت کوانتومی مؤثر بر تک کیوبیت، ماتریس یکانی با درجه‌ی ۲ یا با مرتبه- 2×2 است و همچنین گیت دو کیوبیتی با ماتریس درجه‌ی ۴ یا با مرتبه‌ی 4×4 اجرا می‌شود و الی آخر.

به دلیل خطی بودن عملگرهای یکانی، تمامی گیت‌های کوانتومی توسط پایه‌های مناسب راست بهنجار $|0\rangle$ و $|1\rangle$ (حالات پایه‌ای متداول محاسباتی) توصیف می‌شوند.

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

توجه داشته باشید که بر خلاف تبدیلات یکانی، فرایندهای اندازه‌گیری که منجر به ریزش حالت کوانتومی به یکی از بردارهای پایه‌ای محاسباتی می‌شوند، غیرخطی هستند. در زیر تعدادی از مهمترین گیت‌های تک کیوبیتی و دو کیوبیتی که در پایه‌های محاسباتی اجرا می‌شوند را توصیف می‌کنیم [۵].

۱-۵-۱ گیت‌های تک کیوبیتی

الف) **گیت کوانتومی $NOT(X)$** : برای این گیت، مشابه گیت کلاسیکی NOT ، بایستی $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ و

$|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ تغییر کند. ماتریس یکانی 2×2 مطابق با این گیت، ماتریس پاؤلی

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

خواهد بود.

ب) **گیت کوانتومی Z** : عملکرد این گیت در پایه‌های محاسباتی به صورتی است که $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$ و

$|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$ تبدیل می‌شود. ماتریس یکانی 2×2 آن به صورت

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

می‌باشد که یکی دیگر از ماتریسهای پاؤلی است.

گاهی اوقات گیت Z را به علت این که قادر است کیوبیت $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ را به حالت $|\psi'\rangle = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$ تبدیل کند، گیت تبدیل فاز^{۱۱} هم می‌نامند [۴،۲]. نمایش ماتریسی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$Z|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} \quad (4-1)$$

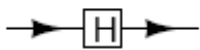
ج) گیت کوانتومی هادامارد (H): این گیت به کمک تبدیلات هادامارد در پایه‌های محاسباتی به صورت زیر

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad ; \quad |1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (5-1)$$

توصیف می‌شود و ماتریس یکانی مطابق با آن به شکل

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

خواهد بود و در مدارهای کوانتومی با نماد



نمایش داده می‌شود. می‌توان گفت که گیت هادامارد حالت $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ را تبدیل به حالت زیر می‌کند :

$$H|\psi\rangle = \left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle + \left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle \quad (6-1)$$

این عبارت به معنای این است که احتمال پیدا کردن کیوبیت در حالت $|0\rangle$ از مقدار $|\alpha|^2$ به $\left|\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right|^2$ تغییر می‌کند [۴].

$$|\alpha|^2 \rightarrow \left|\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right|^2 = \left(\frac{\alpha^* + \beta^*}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \text{Re}(\alpha\beta^*))$$

توجه داشته باشید که گیت‌های Z و H ، گیت کلاسیکی مشابه ندارند.

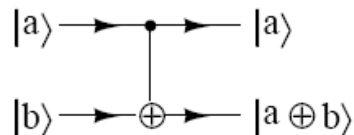
^{۱۱} Phase flip gate

۱-۵-۲ گیت‌های دو کیوبیتی

الف) گیت کوانتومی $(C-NOT) \text{ Controlled NOT}$: این گیت برای دو کیوبیت ورودی خود، از یک

کیوبیت فرمان^{۱۳} (بالایی) و یک کیوبیت هدف^{۱۴} (پایینی) استفاده می‌کند.

رفتار این گیت در پایه‌های محاسباتی در مدار زیر نشان داده شده است که $a, b \in \{0, 1\}$ هستند.



مشاهده می‌کنیم که عملکرد این گیت بر حسب عملکرد گیت XOR ، به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$|a, b\rangle = |a\rangle|b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle \rightarrow |a, b \oplus a\rangle \quad (7-1)$$

چنانچه کیوبیت فرمان $|a\rangle$ ، $|0\rangle$ باشد، هیچ تغییری در کیوبیت هدف $|b\rangle$ بوجود نمی‌آید؛ ولی اگر

کیوبیت فرمان $|1\rangle$ باشد، آنگاه ماتریس X یا NOT برای کیوبیت هدف بکار برده می‌شود. حالات

ورودی ممکن برای گیت $C-NOT$ ، $|00\rangle$ ، $|01\rangle$ ، $|10\rangle$ و $|11\rangle$ هستند که تأثیر گیت $C-NOT$ روی آن‌ها

به صورت

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle$$

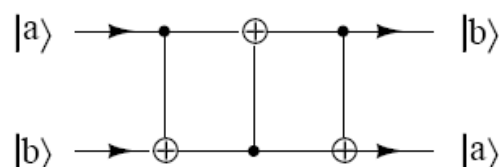
$$|01\rangle \rightarrow |01\rangle$$

$$|10\rangle \rightarrow |11\rangle$$

$$|11\rangle \rightarrow |10\rangle$$

خواهد بود. گیت $C-NOT$ یک گیت کوانتومی مهم است. کاربرد این گیت را که در آن، مکان جفت

کیوبیت‌های فرمان و هدف اولیه تعویض می‌شوند، در مدار زیر می‌توان شرح داد.



رفتار مدار در پایه‌های محاسباتی به قرار زیر است:

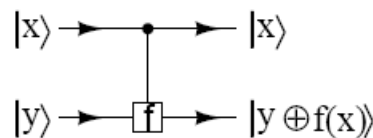
^{۱۳} Control

^{۱۴} Target

$$\begin{aligned} |a, b\rangle &= |a\rangle|b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle \rightarrow |a, a \oplus b\rangle \rightarrow |(a \oplus b) \oplus a, a \oplus b\rangle = \\ &|b, a \oplus b\rangle \rightarrow |b, b \oplus (a \oplus b)\rangle = |b, a\rangle \end{aligned} \quad (A-1)$$

چنانچه کیوبیت هدف $|0\rangle$ باشد، آنگاه گیت $C-NOT$ کیوبیت فرمان را کپی می‌کند [۴،۵]. فرایند کپی کردن حالت در قسمت ۱-۶ به طور کامل توضیح داده خواهد شد.

ب) گیت کوانتومی $(f\text{-gate})$ Function :



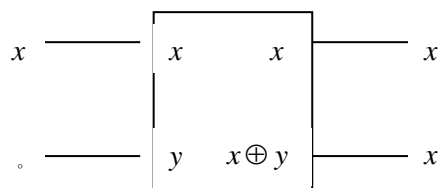
رفتار این گیت بر حسب پایه‌های محاسباتی در مدار بالا نشان داده شده است. این گیت، حالت تعمیم یافته‌ی گیت $C-NOT$ است که تأثیر آن به این صورت است که تابع بولین^۱ [۶] را از آرگومان آن محاسبه می‌کند، $f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$. اگر $f(x)=x$ باشد، گیت $C-NOT$ را خواهیم داشت، و برای $y=0$ تأثیر گیت $Function$ به صورت زیر است [۴]:

$$|x, 0\rangle \rightarrow |x, f(x)\rangle$$

۱-۶ قضیه‌ی No-Cloning

گیت $C-NOT$ برای شرح دادن یکی از ویژگیهای بنیادی اطلاعات کوانتومی، کاربردی می‌باشد. کپی کردن یک بیت کلاسیکی را در نظر بگیرید. این اتفاق ممکن است به کمک گیت کلاسیکی $C-NOT$ انجام بشود. همان طور که در شکل (۱-۱) می‌بینید، گیت نامبرده، یک بیت را برای کپی کردن (در این جا بیت مخصوص کپی کردن، حالت ناشناخته‌ی x است) و یک بیت چرکنویس را با مقدار 0 می‌پذیرد. نتیجه‌ی عملکرد گیت $C-NOT$ بر روی دو بیت x و y ، دو بیت می‌باشد که هر دو مشابه حالت اولیه ناشناخته‌ی x هستند.

^۱ Boolean

شکل ۱-۱ : مدار کلاسیکی برای کپی کردن بیت ناشناخته‌ی x

در اینجا سعی می‌کنیم در رفتاری مشابه بالا به کمک گیت $C-NOT$ ، کیوبیتی را در حالت ناشناخته‌ی

$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ کپی کنیم. حالت ورودی دو کیوبیت، ممکن است به صورت زیر نوشته بشود:

$$[a|0\rangle + b|1\rangle] \otimes |0\rangle = a|00\rangle + b|10\rangle \quad (9-1)$$

زمانی که اولین کیوبیت ۱ باشد، گیت $C-NOT$ آن را تبدیل به ۰ می‌کند، در نتیجه خروجی بایستی

به صورت $a|00\rangle + b|11\rangle$ باشد. سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا ما قادر به خلق

حالت $|\psi\rangle|\psi\rangle$ هستیم؟ به عبارت دیگر آیا با موفقیت حالت $|\psi\rangle$ را کپی کرده‌ایم یا نه؟

در جایی که $|\psi\rangle = |0\rangle$ یا $|\psi\rangle = |1\rangle$ باشد، کپی $|\psi\rangle$ اتفاق می‌افتد؛ لازم است بدانید که همواره به کار

بردن مدارهای کوانتومی برای کپی کردن اطلاعات کلاسیکی رمزدار شده به صورت $a|0\rangle$ یا $a|1\rangle$

امکان پذیر است. اما برای حالت کلی $|\psi\rangle$ داریم:

$$|\psi\rangle|\psi\rangle = a^2|00\rangle + ab|01\rangle + ba|10\rangle + b^2|11\rangle \quad (10-1)$$

که اگر آن را با $a|00\rangle + b|11\rangle$ مقایسه کنیم، می‌بینیم که برای تساوی این دو رابطه بایستی در رابطه-

ی (۱۰-۱) $ab = 0$ برقرار باشد.

در حقیقت معلوم می‌شود که:

- به دلیل ویژگی خطی و یکانی بودن گیت‌های کوانتومی، امکان فراهم ساختن کپی برای

حالت ناشناخته‌ی دلخواه وجود ندارد، ولی حالات پایه‌ای راست به‌هم‌نهار را می‌توان به راحتی

کپی کرد.

این ویژگی که کیوبیت‌های حالت کوانتومی دلخواه نمی‌توانند کپی بشوند، به قضیه‌ی *No-Cloning* معروف است که یکی از تفاوت‌های بارز بین اطلاعات کلاسیکی و کوانتومی را بیان می‌کند [۲،۷]. در این جا با توجه به قضیه‌ی *No-Cloning* مجدداً به گیت دو کیوبیتی *C-NOT* بر می‌گردیم. چنانچه در مدار کوانتومی این گیت $b = 0$ باشد، گیت قادر به عمل کپی است:

$$|a \circ\rangle = |a\rangle \otimes |0\rangle \xrightarrow{C-NOT} |aa\rangle = |a\rangle |a\rangle = |a\rangle \otimes |a\rangle$$

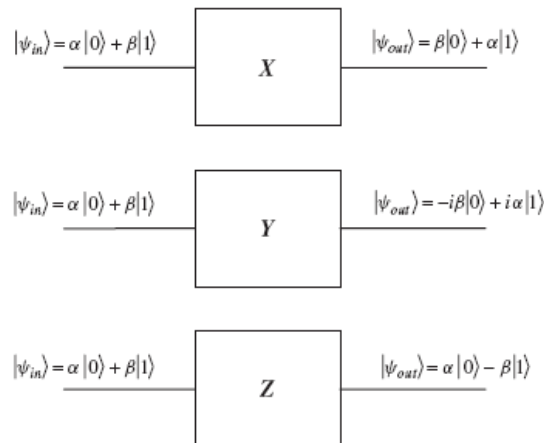
عمل کپی توسط گیت *C-NOT* بر روی حالات راست بهنجار به صورت زیر است [۵]:

$$\begin{aligned} &|0\rangle|0\rangle \xrightarrow{C-NOT} |0\rangle|0\rangle \\ &|1\rangle|0\rangle \xrightarrow{C-NOT} |1\rangle|1\rangle \\ &|1\rangle|1\rangle \xrightarrow{C-NoT} |1\rangle|0\rangle \\ &|0\rangle|1\rangle \xrightarrow{C-NOT} |0\rangle|1\rangle. \end{aligned} \quad (11-1)$$

۷-۱ نمودار مدارهای اصلی کوانتومی

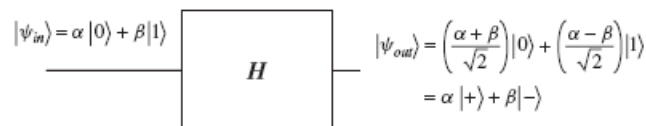
در این قسمت با توجه به مباحث گفته شده در قسمت‌های قبلی می‌خواهیم رفتار یک گیت کوانتومی را با ترسیم شکل هندسی^{۱۶} مدار، نمایش دهیم [۵]. هر گیت یا عملگر یکانی توسط یک بلوک به همراه خطوط ورودی و خروجی، نشان داده می‌شود. برای مثال، عملگرهای پاؤلی X ، Y و Z و عملکرد آن‌ها را روی تک کیوبیت ورودی در شکل (۲-۱) نمایش می‌دهیم.

^{۱۶} Diagram



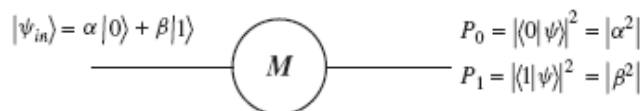
شکل ۲-۱: نمایش نموداری مدارهای کوانتومی عملگرهای پاؤلی و عملکرد آن‌ها

نمایش نموداری مدار کوانتومی گیت کوانتومی تک کیوبیتی هادامارد (H) در شکل (۳-۱) آمده است.



شکل ۳-۱: گیت هادامارد و عملکرد آن

فرایند اندازه گیری را در شکل (۴-۱) به گونه‌ای رسم کرده‌ایم که نتیجه‌ی اندازه گیری M را شامل می‌شود و هم چنین یادآوری کننده‌ی قانون بُرن^{۱۱} می‌باشد. (قانون بُرن می‌گوید که احتمال بدست آوردن هر یک از نتایج اندازه گیری، برابر با مربع دامنه‌ی هر کدام از حالات خواسته شده در یک سیستم کوانتومی است [۲، ۵]). این فرایند به طور کامل در فصل بعدی توضیح داده خواهد شد.



شکل ۴-۱: نمایش فرایند اندازه گیری در یک مدار کوانتومی

^{۱۱} Born rule

فصل ۲ :

عملگر چگالی و نظریه‌ی کوانتومی فرایند اندازه‌گیری

- مقدمه
- عملگر چگالی
- عملگر چگالی برای یک حالت خالص
- عملگر چگالی برای یک حالت آمیخته
- عملگرهای *Kraus*
- کانالهای کوانتومی
- کانالهای کلاسیکی
- نظریه‌ی اندازه‌گیری کوانتومی
- عملکردهای کوانتومی و ابرعملگرها
- تمییزپذیری حالات کوانتومی و فرایند اندازه‌گیری
- اندازه‌گیری‌های تصویری
- اندازه‌گیری‌های *POVM*
- اندازه‌گیری‌های ضعیف و قوی

۲-۱ مقدمه

بنا بر اصول موضوع کوانتومی حالت یک سیستم بسته با یک بردار (بردار حالت) در یک فضای هیلبرت تعیین می‌شود. این بردار توسط یک عملگر یکانی در طول زمان تحول می‌یابد و اندازه گیری هر مشاهده‌پذیر، این بردار را به ویژه بردارهای آن عملگر متناظر با آن مشاهده‌پذیر تصویر می‌کند. در عمل یک سیستم کوانتومی بندرت می‌تواند از محیط اطراف خود مستقل باشد. در بسیاری از اوقات نیز، نه به کلیت یک سیستم کوانتومی، بلکه به اجزای آن علاقمندیم. به عنوان مثال، در یک تله یونی یا تله اتمی که چندین اتم در یک حالت کوانتومی نگاه داشته شده است، علاقمندیم که حالت یکی از یون‌ها را تعیین کنیم، و روی آن اندازه گیری کنیم و تحول زمانی آن را بدست آوریم. بنابراین سؤال اساسی‌ای که با آن روبرو هستیم، آن است که هرگاه یک سیستم کوانتومی بسته با یک بردار حالت توصیف شود، اجزای آن سیستم در چه حالتی هستند و چگونه می‌بایست آنها را توصیف کرد؟ مکانیک کوانتومی بیان می‌کند که نتایج اندازه گیری یک مشاهده‌پذیر چه چیزی است و هم چنین احتمال بدست آوردن نتایج را معلوم می‌کند. به علاوه این موضوع دارای اهمیت است که بدانیم بعد از فرایند اندازه گیری حالت سیستم به چه حالتی تبدیل می‌شود؟

بہتر است بدانید که به طور کلی فرایند اندازه گیری روی سیستم در مکانیک کلاسیک هیچ گونه اثری ندارد (سیستم‌های ماکروسکوپی)، ولی بالعکس در مکانیک کوانتومی، اندازه گیری با تغییر دادن حالت به یک روش برگشت ناپذیر، تأثیر شگرفی روی سیستم می‌گذارد. به دلیل این که ما قادر به استخراج کردن اطلاعات از سیستم محاسباتی باشیم، اندازه گیری یک نقش اساسی را در محاسبات کوانتومی ایفا می‌کند [۸،۵].

در این فصل تحول سیستم کوانتومی را با اندازه گیری برحسب عملگرهای چگالی بررسی می‌کنیم و در ادامه انواع فرایندهای اندازه گیری و عملکردهای کوانتومی را توضیح می‌دهیم.

۲-۲ عملگر چگالی^۱

فرمولبندی مکانیک کوانتومی، علاوه بر تک سیستم کوانتومی می‌تواند در مورد یک آنسامبل، یعنی اجتماعی از سیستمهای فیزیکی که بصورت یکسان فراهم آمده‌اند، پیش بینی‌های آماری کند. اعضای آنسامبل می‌توانند در یکی از دو یا چند حالت کوانتومی با یک احتمال ویژه‌ای پیدا بشوند [۸]. برای نزدیک شدن به این مفاهیم مثال ساده‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.

بدین منظور در فضای هیلبرت دو بعدی، می‌توان پایه‌های برداری $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ را در نظر گرفت. N تا سیستم کوانتومی که هر یک از اعضای هر سیستم در یکی از دو بردار حالت زیر

$$\begin{aligned} |a\rangle &= \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle \\ |b\rangle &= \gamma|x\rangle + \delta|y\rangle \end{aligned}$$

می‌توانند پیدا بشوند را فراهم می‌کنیم. لازم است متذکر شویم که این دو بردار به گونه‌ای که رابطه‌ی $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ برقرار باشد، بهنجار شده‌اند. اگر یک سیستم در حالت $|a\rangle$ باشد و اندازه گیری روی سیستم انجام شود، با احتمال $|\alpha|^2$ بردار $|x\rangle$ و با احتمال $|\beta|^2$ بردار $|y\rangle$ بدست می‌آید. هم چنین استدلال مشابهی برای حالت $|b\rangle$ وجود دارد.

حالا فرض می‌کنیم که n_a تعداد سیستم را در حالت $|a\rangle$ و n_b تعداد سیستم را در حالت $|b\rangle$ فراهم کرده‌ایم، به طوری که $n_a + n_b = N$ برقرار است. چنانچه دو طرف این رابطه را بر N تقسیم کنیم:

$$\frac{n_a}{N} + \frac{n_b}{N} = 1$$

و با رابطه‌ی $p_a + p_b = 1$ مقایسه کنیم، مشاهده می‌کنیم که هر یک از جملات به نوعی بیان کننده‌ی احتمال پیدا کردن سیستم در حالت $|a\rangle$ و $|b\rangle$ می‌باشند. بنابراین با داشتن مجموعه‌ای از سیستمها که هر یک از اعضای آن در یکی از دو حالت اشاره شده در بالا فراهم بشوند، استفاده از مفهوم احتمال به دو شکل متفاوت است:

^۱ Density Operator

• هنگامی که با تک سیستم کوانتومی سروکار داریم، قانون بُرن [۲،۵] احتمال پیدا کردن یک نتیجه‌ی معین را می‌دهد.

• و هنگامی که آنسامبلی از سیستمها را داشته باشیم، یک احتمال ویژه‌ای که سیستم در یک یا چند بردار حالت فراهم شده باشد، وجود دارد.

در مورد حالت دوم، استفاده از مفهوم احتمال به کمک یک روش کلاسیکی امکان‌پذیر است. به عبارت دیگر احتمالی که در اینجا مورد نظر است، بازتاب اطلاعات ناقص است. از این رو با یک ترکیب آماری^۲ (احتمالاتی) روبرو هستیم.

در این جا یک سؤال مطرح می‌شود و آن این که چگونه می‌توانیم آنسامبلی از سیستم‌های کوانتومی که پیدا کردن آنها در حالات متفاوت دارای احتمالات کلاسیکی است، را توصیف کنیم؟ برای انجام دادن این کار نیاز به محاسبه کردن کمیت‌های معمولی برای هر سیستم کوانتومی، مانند مقادیر انتظاری عملگرها و احتمالات پیدا کردن نتایج اندازه گیری متفاوت هستیم که در مورد ترکیبات آماری استفاده از ابزاری به نام عملگر چگالی (ماتریس چگالی) این محاسبات را آسان می‌کند [۵].

عملگر چگالی را با نماد ρ نمایش می‌دهیم که بایستی در سه شرط زیر صدق کند:

✓ عملگر چگالی هرمیتی است، به عبارتی باید $\rho = \rho^\dagger$ برقرار باشد.

✓ عملگر چگالی در شرط بهنجارش صدق می‌کند یعنی $Tr(\rho) = 1$.

✓ عملگر چگالی یک عملگر مثبتی است، یعنی برای هر بردار حالت $|u\rangle$ بایستی $\langle u|\rho|u\rangle \geq 0$ برقرار باشد.

بهتر است بدانیم که یک عملگر مثبت است، اگر و تنها اگر هرمیتی و دارای ویژه حالت‌های نامنفی باشد

[۲،۵].

^۲ Statistical mixture

۲-۱-۲ عملگر چگالی برای یک حالت خالص^۳

یک سیستم کوانتومی که در حالت مشخص $|\psi\rangle$ قرار دارد را در نظر می‌گیریم. چنانچه $|u_i\rangle$ ها، پایه-های متعامد باشند، می‌توانیم حالت $|\psi\rangle$ را بر حسب آن‌ها به صورت زیر بسط دهیم.

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |u_i\rangle = c_1 |u_1\rangle + c_r |u_r\rangle + \dots + c_n |u_n\rangle. \quad (1-2)$$

با استفاده از قانون بُرن [۲،۵]، می‌توان گفت که بعد از اندازه گیری، احتمال پیدا کردن سیستم در حالت $|u_i\rangle$ برابر با $|c_i|^2$ می‌باشد. هنگامی که سیستم در یک حالت معین، مانند حالت بالا قرار گرفته باشد، اصطلاحاً می‌گوییم که سیستم در یک حالت خالص است. برای توصیف حالات کوانتومی که می‌توانند به یک ترکیب آماری تعمیم داده شوند، به دنبال یک روش متفاوت، متناسب با بحث بالا هستیم، که این روش به همراه یک عملگر به نام عملگر چگالی ρ امکان‌پذیر است.

همان‌طور که در قسمت قبل اشاره شد عملگر چگالی، یک عملگری است که اجازه‌ی توصیف یک ترکیب آماری را می‌دهد. در مورد حالات خالص کار را با پیدا کردن مقدار انتظاری یا متوسط عملگر A آغاز می‌کنیم.

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \quad (2-2)$$

به کمک بسط رابطه‌ی (۱-۲) مقدار انتظاری A را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle \psi | A | \psi \rangle = (c_1^* \langle u_1 | + c_r^* \langle u_r | + \dots + c_n^* \langle u_n |) A (c_1 |u_1\rangle + c_r |u_r\rangle + \dots + c_n |u_n\rangle) \\ &= \sum_{k,l=1}^n c_k^* c_l \langle u_k | A | u_l \rangle = \sum_{k,l} c_k^* c_l A_{kl} \end{aligned} \quad (3-2)$$

که در این رابطه $c_l = \langle u_l | \psi \rangle$ و $c_k^* = \langle \psi | u_k \rangle$ ضرایب بسط هستند. به کمک این دو تعریف داریم:

$$c_k^* c_l = \langle \psi | u_k \rangle \langle u_l | \psi \rangle = \langle u_l | \psi \rangle \langle \psi | u_k \rangle = \langle u_l | (|\psi\rangle \langle \psi|) | u_k \rangle$$

که عبارت داخل پرانتز یک عملگر تصویر^۴ ساندویچ شده است که آن را عملگر چگالی $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ می‌نامیم [۵].

^۳ Pure state

^۴ Projection operator

بنابراین می‌توان مقدار انتظاری یا مقدار متوسط عملگر A را بر حسب عملگر چگالی به صورت زیر نوشت:

$$\langle A \rangle = \sum_{k,l=1}^n c_k^* c_l A_{kl} = \sum_{k,l=1}^n \langle u_l | (|\psi\rangle\langle\psi|) | u_k \rangle A_{kl} = \sum_{k,l=1}^n \langle u_l | \rho | u_k \rangle A_{kl} \quad (4-2)$$

که $\rho_{lk} = \langle u_l | \rho | u_k \rangle$ ها عناصر ماتریس چگالی ρ هستند. اگر در رابطه‌ی (4-2) از عبارت $A_{kl} = \langle u_k | A | u_l \rangle$ و هم چنین از $\sum_k |u_k\rangle\langle u_k| = 1$ که رابطه‌ی تکامل یا بستاری نامیده می‌شود استفاده کنیم، می‌توانیم مقدار انتظاری A را بر حسب عملکرد رد ($trace$) بیان کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_{k,l=1}^n \langle u_l | \rho | u_k \rangle \langle u_k | A | u_l \rangle = \sum_{l=1}^n \langle u_l | \rho \left(\sum_{k=1}^n |u_k\rangle\langle u_k| \right) A | u_l \rangle \\ &= \sum_{l=1}^n \langle u_l | \rho A | u_l \rangle = Tr(\rho A). \end{aligned} \quad (5-2)$$

از آن جا که عملکرد رد مستقل از نمایش است، می‌توان $tr(\rho A)$ را در هر پایه‌ی مناسبی محاسبه کرد [5].

در پایان این بخش لازم می‌دانیم که چند نکته را در مورد عملکرد تابع رد یک ماتریس متذکر شویم:

✓ عملکرد $trace$ به صورت دوره‌ای است. به عبارتی

$$\begin{aligned} Tr(ABC) &= Tr(CAB) = \\ &= Tr(BCA). \end{aligned}$$

✓ $trace$ حاصلضرب داخلی را به ضرب خارجی تبدیل می‌کند.

$$\langle \psi | \varphi \rangle = Tr(|\varphi\rangle\langle\psi|).$$

✓ همچنین برای مشاهده‌پذیر A ویژگی زیر را دارد:

$$Tr(A|\psi\rangle\langle\varphi|) = \langle \varphi | A | \psi \rangle.$$

✓ $trace$ پایه‌ای مستقل است. اگر $|u_i\rangle$ و $|v_i\rangle$ دو پایه برای چندین فضای هیلبرت باشد، آنگاه

$$\text{رابطه‌ی } Tr(A) = \sum_i \langle u_i | A | u_i \rangle = \sum_i \langle v_i | A | v_i \rangle \text{ برقرار است.}$$

✓ عملکرد trace خطی است، یعنی همواره روابط زیر را شامل می‌شود [۲،۵].

$$Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A);$$

$$Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$$

برای خاتمه دادن این بخش می‌توان گفت که برای هر حالت خالص یک عملگر چگالی ρ وجود دارد که از نوع عملگرهای تصویری است یعنی $\rho^\dagger = \rho$. علاوه بر این در بالا نشان دادیم به علت این که برای هر عملگر چگالی بایستی $Tr(\rho) = 1$ برقرار باشد، از این رو برای هر حالت خالص رابطه‌ی $Tr(\rho^\dagger) = 1$ را خواهیم داشت.

۲-۲-۲ عملگر چگالی برای یک حالت آمیخته^۵

همان طور که در قسمت‌های قبلی اشاره کردیم، برای توصیف آنسامبل آمیخته که آمیزه‌ای از حالات خالص است، نیاز به روشی متفاوت که از طریق عملگر چگالی امکان پذیر می‌شد، بودیم. عملگر چگالی حاوی تمام اطلاعات مهم فیزیکی است که می‌توان درباره‌ی آنسامبل مورد نظر بدست آورد [۸].
توصیف چنین آنسامبلی (آمیخته) می‌تواند با دنبال کردن ۳ مرحله‌ی زیر انجام شود:

۱- عملگر چگالی را برای هر حالت خالص منحصر به فردی که می‌تواند در آنسامبل آمیخته یافت بشود، آماده می‌کنیم.

۲- به کمک احتمال پیدا کردن هر حالت در آنسامبل، عملگرهای چگالی را وزن دار می‌کنیم.
(وزن دار کردن یعنی این که احتمال پیدا کردن هر حالت، یک جمعیت نسبی را به آن حالت در کل سیستم نسبت می‌دهد.)

۳- احتمال پیدا کردن هر حالت را در عملگر چگالی بدست آمده در مرحله‌ی ۱، ضرب کرده و سپس برای بدست آوردن عملگر چگالی کل سیستم، تمامی آنها را با هم جمع می‌کنیم.

^۵ Mixed state

برای دیدن این مراحل، به مثالی که در بخش ۲-۲ اشاره کردیم، بر می‌گردیم. همان طور که دیدیم اعضای آنسامبل در یکی از دو حالت زیر پیدا می‌شوند:

$$\begin{aligned} |a\rangle &= \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle \\ |b\rangle &= \gamma|x\rangle + \delta|y\rangle \end{aligned}$$

عملگرهای چگالی برای هر یک از این حالات که خالص هستند، به قرار زیر است:

$$\begin{aligned} \rho_a &= |a\rangle\langle a| \\ \rho_b &= |b\rangle\langle b| \end{aligned} \quad (۶-۲)$$

در نتیجه برای حالات $|a\rangle$ و $|b\rangle$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \rho_a &= |a\rangle\langle a| = (\alpha|x\rangle + \beta|y\rangle)(\alpha^*\langle x| + \beta^*\langle y|) \\ &= |\alpha|^2|x\rangle\langle x| + \alpha\beta^*|x\rangle\langle y| + \alpha^*\beta|y\rangle\langle x| + |\beta|^2|y\rangle\langle y| \\ \rho_b &= |b\rangle\langle b| = (\gamma|x\rangle + \delta|y\rangle)(\gamma^*\langle x| + \delta^*\langle y|) \\ &= |\gamma|^2|x\rangle\langle x| + \gamma\delta^*|x\rangle\langle y| + \gamma^*\delta|y\rangle\langle x| + |\delta|^2|y\rangle\langle y| \end{aligned}$$

چنانچه احتمال پیدا کردن عضوی از آنسامبل در حالت $|a\rangle$ را p بگیریم، آنگاه احتمال پیدا کردن آن عضو در حالت $|b\rangle$ ، $1-p$ خواهد بود. عملگر چگالی برای آنسامبل آمیخته بر حسب حالات $|a\rangle$ و $|b\rangle$ به صورت زیر است :

$$\rho = p\rho_a + (1-p)\rho_b = p|a\rangle\langle a| + (1-p)|b\rangle\langle b| \quad (۷-۲)$$

به عبارت دیگر، عملگر چگالی برای هر حالت خالص را به کمک احتمال مربوطه وزن دار کرده و سپس تمامی آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

✓ به طور کلی، نتیجه می‌گیریم:

برای یک آنسامبل آمیخته که دارای n تا حالت $|\psi_i\rangle$ می‌باشد و عملگر چگالی $\rho_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ هر یک از حالات را توصیف می‌کند و همچنین احتمال پیدا کردن هر یک از اعضای آنسامبل در حالت $|\psi_i\rangle$ برابر با p_i باشد، آنگاه عملگر چگالی که کل سیستم را توصیف می‌کند به

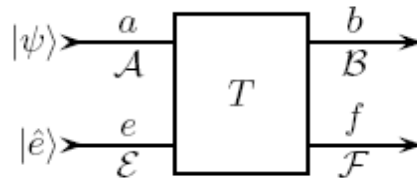
صورت

$$\rho = \sum_{i=1}^n p_i \rho_i = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (۸-۲)$$

خواهد بود. در چنین وضعیتی برای هر حالت آمیخته رابطه‌ی $Tr(\rho^r) < 1$ برقرار است [۵].

۳-۲ عملگرهای Kraus

سیستم‌های A و \mathcal{E} را با فضاهای هیلبرت H_a و H_e که به ترتیب در حالات $|\psi\rangle$ و $|\hat{e}\rangle$ قرار دارند و با یکدیگر بر هم کنش می‌کنند را مطابق با نمودار زیر در نظر بگیرید.



شکل ۱-۲: نمایشی از عملگرهای Kraus و عملکردهای کوانتومی

برای پیدا کردن حالت $|\Psi\rangle$ (مطابق با رابطه‌ی (۹-۲))، تحول زمانی از t_0 به t_1 را به کمک عملگر یکانی یا گیت T انجام می‌دهیم. حالت $|\Psi\rangle$ را به عنوان یک حالت سیستم مرکب B و F که در فضای هیلبرت $H_b \otimes H_f$ قرار گرفته است، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که \mathcal{E} همواره در حالت بهنجار شده‌ی اولیه‌ی $|\hat{e}\rangle$ باشد. با توجه به این که امکان‌های مختلفی برای حالت بهنجار شده‌ی اولیه‌ی $|\psi\rangle$ از سیستم A وجود دارد، در نتیجه می‌توانیم حالت $|\hat{e}\rangle$ را ثابت و $|\psi\rangle$ را به عنوان یک متغیر در نظر بگیریم. تعدادی پایه‌ی راست بهنجار را به صورت کتهای $\{|f^k\rangle\}$ برای فضای هیلبرت H_f انتخاب و سپس در این پایه‌ها، حالت $|\Psi\rangle$ را به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$|\Psi\rangle = T(|\psi\rangle \otimes |\hat{e}\rangle) = \sum_k |\beta^k\rangle \otimes |f^k\rangle \in H_b \otimes H_f \quad (۹-۲)$$

که ضرایب بسط $\{|\beta^k\rangle\}$ راست بهنجار نیستند. به دلیل این که، $|\hat{e}\rangle$ ، T و پایه‌های $\{|f^k\rangle\}$ معلوم و ثابت هستند، نوشتن ارتباط بین $|\beta^k\rangle$ و $|\psi\rangle$ به صورت زیر مفید خواهد بود:

$$|\beta^k\rangle = K_k |\psi\rangle \quad (10-2)$$

در رابطه‌ی بالا K_k ، عملگر Kraus است که به صورت یک نگاشت خطی از H_a به H_b می‌باشد. با استفاده از (10-2) می‌توانیم رابطه‌ی (9-2) را به صورت زیر باز نویسی کنیم:

$$|\Psi\rangle = T(|\psi\rangle \otimes |\hat{e}\rangle) = \sum_k (K_k |\psi\rangle) \otimes |f^k\rangle \quad (11-2)$$

حقیقت این مطلب که با فرض بهنجار بودن $|\psi\rangle$ و $|\hat{e}\rangle$ ، T یکانی است، به این معنا می‌باشد که

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = 1 = \sum_k \langle\beta^k|\beta^k\rangle = \sum_k \langle\psi|K_k^\dagger K_k|\psi\rangle = \langle\psi|(\sum_k K_k^\dagger K_k)|\psi\rangle \quad (12-2)$$

البته رابطه‌ی بالا به شرط

$$\sum_k K_k^\dagger K_k = I_a \quad (13-2)$$

درست خواهد بود که در آن I_a ، عملگر همانی در فضای هیلبرت H_a است. از رابطه‌ی (11-2) واضح است که عملگرهای Kraus به انتخاب پایه های راست بهنجار $\{|f^k\rangle\}$ بستگی دارند [9].

۲-۴ کانالهای کوانتومی

یکی از نتایجی که از فرایندهای محاسبات کوانتومی و رمز نگاری کوانتومی بدست می‌آید، این می‌باشد که اطلاعات همواره بایستی با یک روش مطمئن از یک مکان به مکان دیگر انتقال داده بشوند. چنانچه ذخیره کردن اطلاعات در یک مکان مشخص، با اطمینان صورت نگیرد، امکان محو شدن آنها وجود دارد. از این رو، مطالعه‌ی کانالهای کوانتومی مورد نیاز برای عبور دادن و ذخیره کردن اطلاعات، یک موضوع بسیار مهم است. یک نوع نگرش آسان برای مشخص کردن کانال کوانتومی، تصور کردن آن به صورت یک فیبر نوری است که در آن یک فوتون با قطبش خود، یک کیوبیت را حمل می‌کند. غیر تبهگن بودن فضا در فیبر نوری (مطابق با آزمایش اشترن گرلاخ [8]) ممکن است قطبش فوتون را مختل کند یا این که فوتون به راحتی در طول یک یا چند فرایند جذب، ناپدید شود. در هر کدام از این رخدادها، صدای نامطلوبی تولید می‌شود. برای کانالهای کلاسیکی (مثلاً خطوط تلفن معمولی)، به

دلیل وجود تصحیح خطا^۶، چنانچه درون کانال صدا تولید شود، به راحتی قابل درک است ولی در کانالهای کوانتومی، این رویداد دارای پیچیدگی بیشتری است.

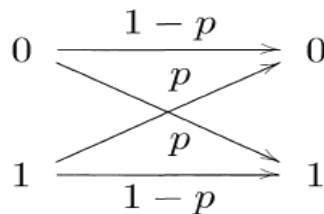
از جمله فنونی که با استفاده از کانالهای کوانتومی می‌توانند انجام بشوند، عبارتند از فرابرد کوانتومی^۷ و کدگذاری ابر چگال^۸ است که امکان استفاده از درهم تنیدگی سیستمهای کوانتومی را در مکانهای فضایی متفاوت، فراهم می‌سازند. به طوری که تعیین کردن کمی و درک کردن درهم تنیدگی در اطلاعات کوانتومی یک مسئله‌ی مهمی می‌شود که به طور مفصل در فصل ۳ بحث خواهد شد [۲،۹].

۲-۵ کانالهای کلاسیکی

مفهوم کلیدی در نظریه‌ی اطلاعات کلاسیکی، کانال نوفه دار^۹ است. علاوه بر ساده ترین نمونه‌ی کانال کلاسیکی که کانال یک بیتی نام دارد و در آن ورودی، بیتهای ۰ یا ۱ و خروجی هم ۰ یا ۱ می‌باشد. کانال دیگری تحت عنوان کانال نوفه دار وجود دارد. برای دو پارامتر احتمال خطای ϵ_0 و ϵ_1 بین ۰ و ۱، احتمال پیدا کردن خروجی های متفاوت از ورودی های داده شده را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Pr(0|0) = 1 - \epsilon_0, \quad \Pr(1|0) = \epsilon_0, \quad \Pr(0|1) = 1 - \epsilon_1, \quad \Pr(1|1) = \epsilon_1. \quad (2-14)$$

زمانی که $\epsilon_0 = \epsilon_1 = p$ باشد، آنگاه کانال کلاسیکی نوفه دار متقارنی مطابق با شکل (۲-۲) خواهیم داشت [۵].



شکل ۲-۲: کانال کلاسیکی متقارن

^۶ Error Correction

^۷ Quantum Teleportation

^۸ Super dense Coding

^۹ Noisy Channel

در اینجا فرض می‌کنیم که استفاده‌های متوالی از کانال کلاسیکی به کمک احتمالات شرطی یکسان، تعیین می‌شوند و برای هر علامت فرستاده شده از طریق کانال، احتمال خطاها به صورت آماری مستقل از دیگر علائم هستند. به کمک یک کانال نوفه دار، اطلاعات را به طور کامل و بدون هیچ گونه کاستی نمی‌توان انتقال داد. از این رو، با روش کدگذاری مناسب اطلاعات، به خوبی می‌توانیم احتمال خطا را کاهش دهیم. روش کدگذاری اطلاعات، به ویژه کدهای مربوط به تصحیح خطاها، یک بخش مهمی از نظریه‌ی اطلاعات کلاسیکی است. به طور خاص، شانن برای یک کانال داده شده (به عنوان نمونه، مجموعه‌ای از احتمالات شرطی برای ارتباط دادن اطلاعات خروجی و ورودی) نشان داد که کمیتی تحت عنوان ظرفیت کانال وجود دارد که در واقع، بیشینه اطلاعاتی که از طریق کانال کلاسیکی عبور داده می‌شود را معلوم می‌کند [۹،۲،۱].

۲-۶ نظریه‌ی اندازه گیری کوانتومی

قبل از هر چیز بهتر است بدانید که اندازه گیری کوانتومی ابزاری را برای توصیف کردن نتایج اندازه گیری‌ها روی سیستم‌های کوانتومی فراهم می‌کند [۵].

اندازه گیری‌های کوانتومی توسط مجموعه عملگرهای اندازه گیری $\{M_m\}$ که در فضای هیلبرت سیستم در حال اندازه گیری مؤثر هستند، توصیف می‌شوند. شاخص m به نتایج اندازه گیری که در آزمایش بدست می‌آیند، اشاره دارد. اگر حالت سیستم کوانتومی قبل از اندازه گیری $|\psi\rangle$ باشد، آنگاه احتمال بدست آوردن نتیجه‌ی m

$$p(m) = \langle \psi | M_m^t M_m | \psi \rangle = \text{Tr}(M_m | \psi \rangle \langle \psi | M_m^t), \quad (15-2)$$

است و حالت سیستم بعد از اندازه گیری تبدیل به حالت زیر می‌شود:

$$|\psi'\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^t M_m | \psi \rangle}}. \quad (16-2)$$

عملگرهای اندازه‌گیری در رابطه‌ی تمامیت $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$ صدق می‌کنند. این رابطه، حقیقت این مطلب که بایستی جمع احتمالات یک باشد را بیان می‌کند.

$$1 = \sum_m p(m) = \sum_m \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle. \quad (17-2)$$

یک مثال ساده اما مهم، اندازه‌گیری یک کیوبیت در پایه‌های محاسباتی $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ است که شامل دو نتیجه به کمک عملگرهای اندازه‌گیری $M_0 = |0\rangle\langle 0|$ و $M_1 = |1\rangle\langle 1|$ می‌شود. توجه داشته باشید که هر یک از عملگرها هرمیتی است و در روابط $M_0^\dagger = M_0$ و $M_1^\dagger = M_1$ صدق می‌کنند. بنابراین رابطه‌ی تمامیت برای این دو عملگر به صورت زیر است.

$$I = M_0^\dagger M_0 + M_1^\dagger M_1 = M_0 + M_1.$$

در اینجا فرض می‌کنیم که حالت سیستمی که قرار است اندازه‌گیری شود، به صورت

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \text{ می‌باشد. از این رو احتمال بدست آوردن نتیجه‌ی } m=0 \text{ و } m=1 \text{ به صورت}$$

$$\begin{aligned} p(0) &= \langle \psi | M_0^\dagger M_0 | \psi \rangle = \langle \psi | M_0 | \psi \rangle = |a|^2 \\ p(1) &= \langle \psi | M_1^\dagger M_1 | \psi \rangle = \langle \psi | M_1 | \psi \rangle = |b|^2 \end{aligned} \quad (18-2)$$

خواهد بود. بنابراین به علت داشتن دو نتیجه بعد از فرایند اندازه‌گیری، دو حالت کوانتومی بدست آمده، به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= \frac{M_0 |\psi\rangle}{|a|} = \frac{a}{|a|} |0\rangle \\ |\psi'\rangle &= \frac{M_1 |\psi\rangle}{|b|} = \frac{b}{|b|} |1\rangle. \end{aligned} \quad (19-2)$$

در رابطه‌ی بالا می‌توان عبارات $\frac{a}{|a|}$ و $\frac{b}{|b|}$ را برابر با یک قرار داد و حالت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را بعد از اندازه

گیری بدست آورد [۲].

۷-۲ عملگردهای کوانتومی و ابرعملگرها

نمونه‌ی یک کانال کوانتومی را با انتخاب کردن شکل (۲-۱)، که در آن به چگونگی ارتباط دادن خواص سیستم B با حالت $|\psi\rangle$ (بدون در نظر گرفتن هیچ کدام از همبستگی هایی که ممکن است با سیستم F داشته باشد) علاقمند بودیم، در نظر می‌گیریم. مکانیک کوانتومی چندین ابزار ریاضی را برای توصیف کردن این انتخاب فراهم می‌کند. در این انتخاب تابع موج $|\Psi\rangle$ بوجود آمده به کمک تحول زمانی یکانی را تخمین می‌زنیم و سپس از آن برای محاسبه کردن احتمالات عملگرهای تصویری $\{P^j\}$ که بر فضای هیلبرت H_b تأثیر می‌گذارند، استفاده می‌کنیم یا ممکن است در این انتخاب، عملگر چگالی تقلیل یافته‌ی

$$\rho_b = Tr_f (|\Psi\rangle\langle\Psi|) \quad (20-2)$$

را تشکیل داده و سپس با استفاده از فرمول $Tr_a(P^j \rho_b)$ احتمالات یکسان را محاسبه کنیم. بنابراین اگر P^j ، عملگر تصویری مؤثر بر فضای H_b باشد، نتیجه‌ی یکسانی را به کمک رابطه‌ی زیر برای چیزی که اغلب به شکل $\langle P^j \rangle$ است، بدست می‌آوریم:

$$\langle \Psi | P^j | \Psi \rangle = Tr_b(P^j \rho_b) = \sum_k p_k \langle \bar{\beta}^k | P^j | \bar{\beta}^k \rangle \quad (21-2)$$

که در این رابطه $p_k = \|\beta^k\| = \langle \beta^k | \beta^k \rangle$ و $|\bar{\beta}^k\rangle = \frac{|\beta^k\rangle}{\|\beta^k\|}$ برقرار است. عملگر چگالی تقلیل یافته‌ی ρ_b ، هیچ گونه اطلاعاتی را پیرامون همبستگی های بین B و F شامل نمی‌شود. مشاهده می‌کنیم که ρ_b در مقایسه با تابع موج $|\Psi\rangle$ نسبتاً فشرده و بر خلاف آنسامبل $\{p_k, |\bar{\beta}^k\rangle\}$ ، به انتخاب یک پایه برای سیستم F بستگی دارد.

ایرادی که در اینجا ρ_b می‌تواند داشته باشد، این است که این عملگر به روش خطی، به حالت اولیه‌ی $|\psi\rangle$ بستگی ندارد و از طرفی، اگر از روابط خطی استفاده کنیم، معمولاً محاسبات آسان تر خواهند شد. این عیب و ایراد را می‌توانیم به کمک عملگر چگالی

$$\rho_a := |\psi\rangle\langle\psi| \quad (22-2)$$

در مکان حالت $|\psi\rangle$ و معرفی کردن ابرعملگر S که رابطه‌ی خطی $\rho_b = S(\rho_a)$ را بین اطلاعات ورودی و خروجی فراهم می‌کند، مرتفع سازیم. ابر عملگر S ، یک نگاشت خطی از فضای برداری خطی مختلط \hat{H}_a مربوط به عملگرهای مؤثر در فضای H_a به فضای برداری خطی مختلط \hat{H}_b از عملگرهای مؤثر در فضای هیلبرت H_b است که ابعاد فضای H_b می‌تواند متفاوت از ابعاد فضای H_a باشد. به دلیل این که \hat{H}_a و \hat{H}_b دو فضای هیلبرت هستند، بنابراین ابرعملگر S ، چیزی بیشتر از یک نگاشت خطی از یک فضای هیلبرت به فضای هیلبرت دیگری نیست. یک ابرعملگر را می‌توانیم به کمک عناصر ماتریسی مربوط به پایه‌های عملگری برای دو فضای \hat{H}_a و \hat{H}_b ، تشخیص دهیم [۹].

نگاشت S در رابطه‌ی $\rho_b = S(\rho_a)$ ، یک عملکرد کوانتومی است. دو نمونه‌ی ساده از عملکردهای کوانتومی عبارتند از تبدیلات و اندازه گیری‌های یکانی که به ترتیب به صورت $S(\rho) = U\rho U^t$ و

$$S_m(\rho) = \sum_m M_m \rho M_m^t$$

بیان می‌شوند که در واقع رابطه‌ی دوم، نمایش جمع عملگری (نمایش

Kraus) از ابر عملگرها است. عملکرد کوانتومی ابرعملگرها به دو صورت زیر اجرا می‌شود [۱،۹،۱۰]:

- هنگامی که سیستم کوانتومی با یک محیط برهم کنش داشته و هیچ‌گونه اندازه گیری روی مجموعه‌ی سیستم و محیط انجام نمی‌شود. در این حالت به آن ابرعملگر نگه دارنده‌ی تریس^{۱۰} می‌گویند که در رابطه-

$$S(\rho) = \sum_m S_m^t \rho S_m = 1$$

ی صدق می‌کند.

- و زمانی که اطلاعات کلاسیکی پیرامون حالت سیستم کوانتومی، به کمک یک اندازه گیری فراهم می‌شوند. در چنین وضعیتی ابرعملگر کاهنده‌ی تریس^{۱۱} است که در رابطه‌ی $\bullet \leq S(\rho) = \sum_m S_m^t \rho S_m < 1$

صدق می‌کند.

^{۱۰} Trace preserving superoperator

^{۱۱} Trace decreasing superoperator

بهرتر است بدانید که کانال کوانتومی نوفه دار به کمک یک عملگر کوانتومی حفظ کننده‌ی تریس توصیف می‌شود [۲۱]. ابرعملگرهایی که بتوانند به صورت

$$S(A) = Tr_f(T(A \otimes |\hat{e}\rangle\langle\hat{e}|)T^\dagger) \quad (۲-۲۳)$$

نوشته بشوند که در آن، T عملگر یکانی و $|\hat{e}\rangle$ یک حالت بهنجار شده است، دارای خواص نسبتاً ویژه-ی زیر هستند:

۱. آنها عملگرهای هرمیتی را به عملگرهای هرمیتی می‌نگارند.
 ۲. مطابق با شکل (۲-۳)، آنها عملگرهای مثبت را به عملگرهای مثبت می‌نگارند.
 ۳. آنها ردِ ماتریس را به صورت $Tr_b(S(A)) = Tr_a(A)$ حفظ می‌کنند.
 ۴. و همچنین این ابرعملگرها کاملاً مثبت هستند که این ویژگی قویتر از ویژگی دوم است.
- خواص (۲) و (۳) تضمین می‌کنند که چنانچه S به عنوان یک عملگر چگالی به کار برده شود، آن گاه نتیجه نیز یک عملگر چگالی خواهد بود (به قسمت ۲-۲ مراجعه کنید). اگر یک ابرعملگر در این چهار خاصیت صدق کند، می‌توانیم از عبارت عملگر کوانتومی برای آن استفاده کنیم. به عبارت دیگر، ابر-عملگر نتایج یک عملگر کوانتومی را بیان می‌کند [۹،۱۰].



شکل ۲-۳: تمامی اعمالی که آلیس روی سیستم خود انجام می‌دهد با یک نگاه مثبت قابل بیان است [۱۱].

۲-۸ تمییزپذیری حالات کوانتومی^{۱۲} و فرایند اندازه گیری

یکی از کاربردهای اصل موضوع اندازه گیری کوانتومی، استفاده از آن در تمییز دادن حالات کوانتومی است. در دنیای کلاسیک، تشخیص دادن حالات از یکدیگر معمولاً امکان‌پذیر است. به عنوان مثال در مورد یک سکه می‌توانیم « پشت » یا « رو » بودن سکه را تشخیص دهیم. اما به لحاظ کوانتومی وضعیت دشوارتر می‌شود [۲].

تمییزپذیر بودن به آسانی مانند ایده‌های زیاد دیگر در محاسبات و اطلاعات کوانتومی، توسط یک بازی که دو گروه آلیس و باب را در بردارد، درک می‌شود. آلیس از مجموعه حالات معین شناخته شده برای هر دو گروه، حالت $|\psi_i\rangle$ ($1 \leq i \leq n$) را انتخاب می‌کند و برای باب می‌فرستد. کاری که باب باید انجام دهد این است که شاخص i را از حالتی که آلیس انتخاب کرده است، تشخیص دهد.

در این جا فرض می‌کنیم که حالات $|\psi_i\rangle$ راست بهنجار هستند. باب اندازه گیری کوانتومی خود را با استفاده از دو عملگر اندازه گیری $M_i \equiv |\psi_i\rangle\langle\psi_i| - 1$ برای هر شاخص ممکن و M_0 که به عنوان ریشه‌ی مثبت مربع عملگر مثبت $I - \sum_{i \neq 0} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ تعریف می‌شود، برای تشخیص دادن شاخص i انجام می‌دهد. این عملگرها در رابطه‌ی تمامیت صدق می‌کنند و چنانچه حالت $|\psi_i\rangle$ توسط آلیس آماده شود و احتمال بدست آمدن نتیجه‌ی i برابر با $p(i) = \langle\psi_i|M_i|\psi_i\rangle = 1$ باشد، آنگاه نتیجه‌ی i با اطمینان اتفاق می‌افتد. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که تمییز دادن حالات راست بهنجار $|\psi_i\rangle$ با اطمینان امکان‌پذیر است.

در مقابل چنانچه $|\psi_i\rangle$ ها راست بهنجار نباشند، می‌توان ثابت کرد که هیچ نوع اندازه گیری کوانتومی که برای تشخیص دادن حالات قابل استفاده باشد، وجود ندارد. برای اثبات این مطلب فرض می‌کنیم که چنین اندازه گیری برای تمییز دادن حالات وجود دارد. چنانچه حالت $|\psi_i\rangle$ ($|\psi_r\rangle$) توسط آلیس آماده شود، آنگاه احتمال اندازه گرفتن نتیجه‌ی j ، به طوریکه $f(j)=1$ $f(j)=2$ برقرار باشد،

^{۱۲} Distinguishing quantum state

بایستی برابر با ۱ باشد. ($f(j)$ تابعی است که باب برای حدس زدن $i=1$ یا $i=2$ استفاده می‌کند).

با تعریف کردن عملگر $E_i \equiv \sum_{j:f(j)=i} M_j^\dagger M_j$ نتایجی که باب بدست می‌آورد، به صورت زیر خواهد شد:

$$\langle \psi_i | E_i | \psi_i \rangle = 1 \quad ; \quad \langle \psi_r | E_r | \psi_r \rangle = 1 \quad (24-2)$$

به دلیل این که عملگر E_i بایستی در رابطه‌ی $\sum_i E_i = I$ صدق کند و $\sum_i \langle \psi_i | E_i | \psi_i \rangle = I$ برقرار باشد و

هم چنین به علت این که باب با عملگر E_i مقدار $\langle \psi_i | E_i | \psi_i \rangle = 1$ را اندازه می‌گیرد، بنابراین بایستی

برای عملگر E_2 رابطه‌ی $\langle \psi_r | E_r | \psi_r \rangle = 0$ را اندازه گیری کند و در نتیجه $\langle \sqrt{E_r} | \psi_r \rangle = 0$ می‌شود.

حالا فرض می‌کنیم حالت $|\psi_r\rangle$ به صورت

$$|\psi_r\rangle = \alpha |\psi_i\rangle + \beta |\varphi\rangle \quad ; \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, |\beta| < 1.$$

باشد، به طوری که $|\varphi\rangle$ و $|\psi_i\rangle$ راست به‌هم‌بند باشد. به دلیل این که $|\psi_i\rangle$ بر $|\psi_r\rangle$ متعامد نیست،

بنابراین $\langle \sqrt{E_r} | \psi_r \rangle = \beta \langle \sqrt{E_r} | \varphi \rangle$ می‌شود که تلویحاً تناقضی را با رابطه‌ی (24-2) به صورت زیر شامل

می‌شود:

$$\langle \psi_r | E_r | \psi_r \rangle = |\beta|^2 \langle \varphi | E_r | \varphi \rangle \leq |\beta|^2 < 1. \quad (25-2)$$

در رابطه‌ی بالا علامت نامساوی دوم از

$$\langle \varphi | E_r | \varphi \rangle \leq \sum_i \langle \varphi | E_i | \varphi \rangle = \langle \varphi | \varphi \rangle = 1$$

نتیجه شده است. در پایان نتیجه می‌گیریم که حالات نامتعامد با هیچ نوع اندازه گیری، با اطمینان

قابل تشخیص دادن نیستند [۲].

۹-۲ اندازه گیری های تصویری^{۱۳}

اولین نوع اندازه گیری که بررسی خواهیم کرد، شامل اندازه گیری های تصویری است که دارای فهم

آسان و هم چنین قدمت بیشینه‌ای نسبت به دیگر انواع اندازه گیری دارند [۵].

^{۱۳} Projective measurement

بعد از آن که اندازه گیری‌های تصویری توسط ریاضیدانی به نام فون نیومن^{۱۴} توصیف شدند، از این رو این نوع اندازه گیری به نام خود او شناخته می‌شود. ایده‌ی فراهم ساختن یک اندازه گیری تصویری روی فرضیه‌ی زیر پایه گذاری می‌شود.

با دادن مجموعه‌ای از حالات دو به دو ناسازگار، سیستم در چه حالتی می‌تواند باشد؟ برای مثال یک اتم می‌تواند دو حالت مانع‌الجمع داشته باشد: یک حالت در تراز پایه با انرژی کمتر که با $|g\rangle$ تعریف می‌شود و حالت دوم، حالت برانگیخته که با نماد $|e\rangle$ نشان داده می‌شود. در اینجا می‌توانیم از اندازه گیری تصویری برای مشخص کردن این که آیا اتم در حالت $|g\rangle$ یا $|e\rangle$ قرار دارد، استفاده کنیم. مثالی دیگر در این راستا مکان ذره است که آیا در مکان x_r یا در مکان x_l قرار دارد؟ در مورد یک کیوبیت، سؤالی که می‌کنیم این است که آیا کیوبیت در حالت $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ قرار دارد؟ چنین احتمالات دو به دو ناسازگار، توسط عملگرهای تصویر در نظریه‌ی اندازه گیری کوانتومی توصیف می‌شوند.

هر عملگر تصویر P دارای دو ویژگی است : ۱- هرمیتی است، $P = P^\dagger$. ۲- عملگری است که با مربع خودش برابر است، $P^2 = P$ [۲]. اگر حاصلضرب دو عملگر P_l و P_r که روی حالت $|\psi\rangle$ تأثیر می‌گذارد صفر باشد، آنگاه دو عملگر بر یکدیگر عمود هستند ($\langle P_l P_r |\psi\rangle = 0$). مجموعه‌ای از نتایج اندازه گیری دو به دو ناسازگار با مجموعه‌ی عملگرهای تصویری متعامد برابری می‌کند. تعداد عملگرهای تصویری به کمک بعد فضای هیلبرتی که سیستم را توصیف می‌کند، تعیین می‌شود. چنانچه d بعد فضای هیلبرت و m تعداد عملگر تصویر باشد، آنگاه بایستی در رابطه‌ی زیر صدق کنند:

$$m \leq d. \quad (۲۶-۲)$$

برای مثال، اگر پیرامون کیوبیت $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ در فضای هیلبرت دو بعدی صحبت کنیم، عملگرهای تصویر مطابق با نتایج اندازه گیری دو به دو ناسازگار $|0\rangle$ و $|1\rangle$ عبارتند از:

$$P_0 = |0\rangle\langle 0| \quad , \quad P_1 = |1\rangle\langle 1|$$

^{۱۴} J. Von Neumann

و هم چنین عملگرهای تصویر مطابق با دو حالت پایه و برانگیخته‌ی یک اتم می‌تواند به صورت زیر بیان شوند:

$$P_g = |g\rangle\langle g| \quad , \quad P_e = |e\rangle\langle e|.$$

چنانچه دو عملگر تصویر با یکدیگر جا به جا شود، حاصلضرب آنها $P_i P_j$ ، نیز یک عملگر تصویر خواهد بود. اما به طور کلی جمع دو یا چند عملگر تصویری، خود یک تصویرکننده نیست. شرط لازم و کافی برای این که مجموعه‌ای از عملگرهای تصویر، خود یک عملگر تصویر باشد، آن است که تمامی عملگرها دو به دو بر هم عمود باشند. چنانچه مجموعه‌ای از عملگرهای تصویری را به صورت $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$ داشته باشیم، آنگاه می‌توانیم با نوشتن رابطه‌ی $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$ نشان دهیم که چنین مجموعه‌ای دو به دو بر هم عمود هستند.

در این جا فرض می‌کنیم که n بعد فضای هیلبرت سیستم باشد و مجموعه‌ای از عملگرهای تصویر متقابلاً متعامد را به صورت $\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\}$ در نظر می‌گیریم که بر $|\psi\rangle$ تأثیر می‌گذارند. اندازه گیری را روی سیستم انجام می‌دهیم. احتمال پیدا کردن نتیجه‌ی i ام به صورت

$$\text{Pr}(i) = |P_i|\psi\rangle|^2 = (P_i|\psi\rangle)^\dagger (P_i|\psi\rangle) = \langle\psi|P_i^\dagger|P_i|\psi\rangle = \langle\psi|P_i|\psi\rangle = \text{Tr}(P_i|\psi\rangle\langle\psi|) \quad (27-2)$$

خواهد بود که برای نوشتن عبارت آخر از ویژگی عملکرد تابع رد برای ماتریسها استفاده کرده‌ایم [5]. از قبل می‌دانیم که مشاهده‌پذیرهایی^{۱۵} نظیر تکانه و اسپین را به کمک عملگرهایی که روی حالات عمل می‌کنند، نشان می‌دهیم [8]. در اینجا هم مجموعه‌ی مشاهده‌پذیری از عملگرهای تصویر را با A که دارای ویژه بردارهای $|u_i\rangle$ و ویژه مقادیر a_i است را تعریف می‌کنیم. مشاهده‌پذیر A را بر حسب ویژه بردارها و ویژه مقادیرش بسط می‌دهیم:

$$A = \sum_{i=1}^n a_i |u_i\rangle\langle u_i| = \sum_{i=1}^n a_i P_i \quad (28-2)$$

که در تساوی دوم از عملگر تصویر $P_i = |u_i\rangle\langle u_i|$ استفاده کرده‌ایم. همچنین حالت $|\psi\rangle$ سیستم را می‌توانیم بر حسب ویژه بردارهای A به صورت

^{۱۵} Observable

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n (\langle u_i | \psi \rangle) |u_i\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |u_i\rangle. \quad (29-2)$$

بسط دهیم که $c_i = \langle u_i | \psi \rangle$ ها دامنه‌ی احتمال برای پیدا کردن نتیجه‌ی اندازه گیری a_i می‌باشند. با

استفاده از این کمیت می‌توانیم احتمال رابطه‌ی (27-2) را به شکل

$$\Pr(i) = |\langle u_i | \psi \rangle|^2 \quad (30-2)$$

بنویسیم (البته با فرض بهنجار بودن حالت $|\psi\rangle$). نتیجه‌ی رابطه‌ی (30-2) همان طور که قبلاً اشاره

کردیم به قانون بُرن معروف است.

بنابراین مقدار انتظاری یا مقدار میانگین مشاهده‌پذیر A برای حالت $|\psi\rangle$

$$A = \sum_{i=1}^n a_i P_i \Rightarrow \langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \psi | P_i | \psi \rangle \quad (31-2)$$

خواهد بود [2, 5].

در پایان این قسمت لازم است بگوییم که تمامی روابط بالا نه تنها برای سیستم‌های تک کیوبیتی،

بلکه برای سیستم‌های مرکب نیز صدق می‌کند که در فصل 3 به طور کامل شرح داده خواهند شد.

بهتر است بدانید که اکثر فرایندها در محاسبات کوانتومی، سیستم‌های مرکب را شامل می‌شوند.

2-10 اندازه گیری‌های $POVM$ ^{۱۶}

نوع دیگری از اندازه گیری که کلی‌تر از اندازه گیری‌های تصویری است، به عنوان اندازه گیری

$POVM$ معروف است. یک $POVM$ شامل مجموعه‌ای از عملگرهای مثبت می‌باشد که معمولاً با E_m

تعریف می‌شوند. در چنین موردی احتمال پیدا کردن نتیجه‌ی m بعد از اندازه گیری، به صورت زیر

خواهد بود.

$$\Pr(m) = \langle \psi | E_m | \psi \rangle. \quad (32-2)$$

^{۱۶} Positive operator-valued measures (POVM)

هنگامی که سیستم یک حالت آمیخته‌ای است که با عملگر چگالی ρ توصیف می‌شود، احتمال پیدا کردن نتیجه‌ی اندازه گیری m به صورت $Tr(E_m \rho)$ خواهد بود. علاوه بر این، به دلیل مثبت بودن

$$E_m \text{ها رابطه‌ی } \sum_m E_m = I \text{ برقرار است.}$$

عملگرهای اندازه گیری در $POVM$ می‌توانند از یک عملگر اندازه گیری به صورت زیر ساخته شوند.

$$E_m = M_m^\dagger M_m. \quad (2-33)$$

گاهی اوقات برای توصیف کردن یک اندازه گیری از نوع تصویری، تشکیل دادن $POVM$ امکان‌پذیر است، ولی عملگرهای E_m به صورت عملگرهای تصویری عمل نمی‌کنند. زمانی که اندازه گیری‌های تصویری در جهان واقعی کاربردی ندارند، $POVM$ ها امکان ساختن کلی‌ترین عملگر را برای توصیف فرایند اندازه گیری فراهم می‌سازند. برای مثال، چنانچه یک سیستم در حالت $|\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle$ باشد و عملگر تصویری $|u_k\rangle\langle u_k|$ روی حالت عمل کند، تابع موج $|\psi\rangle$ به حالت $|u_k\rangle$ ریزش^{۱۷} می‌کند. بعد از این رویداد، می‌توانیم اندازه گیری دیگری را روی سیستم تکرار کنیم که با تکرار اندازه گیری‌ها، دوباره سیستم با اطمینان در حالت $|u_k\rangle$ پیدا می‌شود. در آزمایشگاه تمام اندازه گیری‌ها تکرار شدنی نیستند. مثال بارز در این مورد آشکارسازی فوتون است. بعد از این که فوتون آشکار می‌شود، بلافاصله آن نابود می‌شود. از این رو اندازه گیری‌های تکرار شدنی امکان‌پذیر نمی‌باشند. در چنین موردی یک $POVM$ ، به علت این که می‌تواند اندازه گیری‌های روی سیستم را بدون توجه به حالت بعد از اندازه گیری، توصیف کند، قابل اجراست. از کاربردهای $POVM$ می‌توان به مواردی مانند تشخیص دادن حالات نامتعامل به طور ناقص (البته هنگامی که اندازه گیری‌های تصویری نتیجه‌ای نمی‌توانند داشته باشند)، و بدست آوردن اطلاعات پیرامون حالتی که متأثر از اندازه گیری ضعیف^{۱۸} است (در قسمت ۲-۱۱ در مورد اندازه گیری ضعیف صحبت خواهد شد). اشاره کرد [۵]. در پایان مثالی را می‌توان بررسی کرد که در آن از فرمولبندی $POVM$ استفاده شده است.

^{۱۷} Collapse

^{۱۸} Weak measurement

مثال: سیستمی را در نظر می‌گیریم که در یکی از حالات $|\psi\rangle$ یا $|\varphi\rangle$ که نامتعامل ولی بهنجار هستند، قرار می‌گیرد. وقتی که می‌گوییم دو حالت بر هم عمود نیستند، یعنی حاصلضرب داخلی آنها به صورت $\langle\psi|\varphi\rangle = \cos\theta$ می‌باشد. حالا می‌خواهیم عملگرهای مثبتی را معرفی کنیم که می‌توانند دو حالت

اشاره شده را از یکدیگر تشخیص دهند. عناصر $POVM$ را، مجموعه عملگرهای اندازه گیری

$$E_l = \frac{I - |\varphi\rangle\langle\varphi|}{1 + \cos\theta}, \quad E_r = \frac{I - |\psi\rangle\langle\psi|}{1 + \cos\theta}, \quad E_r = I - E_l - E_r$$

در نظر می‌گیریم که هر کدام با یک نتیجه‌ی اندازه گیری متفاوت مطابقت می‌کند. تمامی این

$$\text{عملگرها در رابطه‌ی تمامیت } \sum_m E_m = E_l + E_r + E_r = I \text{ صدق می‌کنند.}$$

حالا اولین نتیجه‌ی اندازه گیری را به کمک عملگر E_l در نظر می‌گیریم و احتمال پیدا کردن آن

نتیجه را در هر یک از حالات $|\psi\rangle$ و $|\varphi\rangle$ بدست می‌آوریم که به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \langle\psi|E_l|\psi\rangle &= \langle\psi|\frac{I - |\varphi\rangle\langle\varphi|}{1 + \cos\theta}|\psi\rangle = \frac{\langle\psi|\psi\rangle - \langle\psi|\varphi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle}{1 + \cos\theta} = \frac{1 - |\langle\psi|\varphi\rangle|^2}{1 + \cos\theta} \\ &= \frac{1 - (\cos\theta)^2}{1 + \cos\theta} = \frac{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{1 + \cos\theta} = 1 - \cos\theta \end{aligned}$$

$$\langle\varphi|E_l|\varphi\rangle = \langle\varphi|\frac{I - |\varphi\rangle\langle\varphi|}{1 + \cos\theta}|\varphi\rangle = \frac{\langle\varphi|\varphi\rangle - \langle\varphi|\varphi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle}{1 + \cos\theta} = \frac{1 - 1}{1 + \cos\theta} = 0$$

از این رو عملگر E_l حالت $|\psi\rangle$ را با احتمال $1 - \cos\theta$ تشخیص می‌دهد و حالت $|\varphi\rangle$ را با هیچ

احتمالی تشخیص نمی‌دهد. به همین ترتیب با انجام دادن محاسبات مشابهی برای E_r می‌توان نشان

داد که این عملگر نیز با احتمال $1 - \cos\theta$ ، حالت $|\varphi\rangle$ را از $|\psi\rangle$ تشخیص داده و به کمک آن احتمال

شناسایی حالت $|\psi\rangle$ صفر است. هم چنین با کمک گرفتن از عملگر E_r هیچ کدام از حالات قابل

تشخیص نیستند. در نتیجه این عملگرها ابزاری را برای تشخیص حالات نامتعامل به طور ناقص فراهم

می‌کنند.

به طور خلاصه می‌توان نتیجه گرفت که:

✓ *POVM* ها عمومی ترین نوع اندازه گیری هستند که به ما اجازه می‌دهند کارهایی را در مکانیک کوانتومی انجام دهیم که با استفاده از اندازه گیری‌های تصویری معمولی امکان انجام آنها نمی‌باشد (مانند تشخیص دادن حالات نامتعامل). همچنین استراتژی اندازه گیری‌های *POVM* دارای احتمال موفقیت بیشتری نسبت به استراتژی اندازه گیری‌های تصویری است [۵].

۲-۱۱ اندازه گیری‌های ضعیف و قوی

اندازه گیری‌های ضعیف، یک نوع از اندازه گیری‌های کوانتومی می‌باشند که در آن سیستم اندازه گرفته شده با دستگاه اندازه گیری کننده جفت می‌شود. بعد از اندازه گیری، دستگاه اندازه گیری کننده با یک پارامتر تحت عنوان مقدار ضعیف^{۱۹} جا به جا می‌شود. سیستم با این نوع از اندازه گیری مختل نمی‌شود و با هیچ مفهوم نظریه‌ی کوانتومی در تناقض نیست. چنانچه $|\phi_r\rangle$ و $|\phi_l\rangle$ حالات کوانتومی سیستم، قبل و بعد از اندازه گیری باشند، مقدار ضعیف مشاهده‌پذیر \hat{A} به صورت زیر داده می‌شود :

$$A_w = \frac{\langle \phi_l | \hat{A} | \phi_r \rangle}{\langle \phi_l | \phi_r \rangle}. \quad (۲-۳۴)$$

در مقابل اندازه گیری‌های مختل کننده‌ی قوی، هم نتیجه‌ی سیستم بعد از اندازه گیری را مختل می‌کنند و هم در تمامی نتایج اندازه گیری‌های بعدی، مؤثر هستند. اندازه گیری‌های بدون اختلال ضعیف می‌توانند اطلاعاتی پیرامون چنین سیستمهایی را در اختیار ما قرار دهند [۱۲].

^{۱۹} Weak value

فصل ۳ :

درهم تنیدگی کوانتومی

- مقدمه
- سیستمهای دوقسمتی و پایه‌های بل
- اصل موضعیت اینشتین و نامساوی بل
- مدل ریاضی درهم تنیدگی کوانتومی
- ناموضعیت و درهم تنیدگی حالات کوانتومی
- ضریب اطمینان درهم تنیدگی
- تجزیه‌ی اشمیت
- خالص سازی درهم تنیدگی
- تابع آنروپی و درهم تنیدگی کوانتومی
- کاربردهای درهم تنیدگی

۳-۱ مقدمه

درهم تنیدگی کوانتومی^۱ یکی از منابع مهم مکانیک کوانتومی می‌باشد. این پدیده موضوعی است که اخیراً مورد توجه کسانی که به اساس نظری کوانتومی علاقمند هستند، قرار گرفته است و در کمتر از ۱۰ سال است که به عنوان یک منبع با ارزش بالقوه شناخته شده است. با بکارگیری حالات درهم تنیده شده‌ی کوانتومی قادر به انجام اموری می‌شویم که در دنیای کلاسیکی سخت و یا غیرممکن هستند [۱].

این پدیده می‌گوید اگر دو ذره درهم تنیده شده را از یکدیگر میلیونها کیلومتر دور کنیم و روی یکی از آن دو ذره عمل اندازه‌گیری انجام دهیم، در همان لحظه می‌توان اطلاعات ذره دوم را بدست آورد؛ به عبارت دیگر آن دو ذره با سرعتی بالاتر از سرعت نور و به طور آنی، تحت تاثیر یکدیگر قرار می‌گیرند و این رویداد با پذیرفتن قضیه no-signaling با اصل نسبیت خاص اینشتین هیچ تناقضی پیدا نمی‌کند.

درهم تنیدگی از جهتی شبیه به شکستن یک سکه به دو تکه است که با مشاهده یک نصفه از آن می‌توان به شکل و مشخصات تکه دیگر پی برد، زیرا دو تکه به صورت مشترک، اطلاعات سکه کامل را در بردارند، به عبارت دیگر مشاهده یک تکه از سکه، مشخصات تکه دوم را به طور کامل روشن می‌سازد، حتی اگر کیلومترها از هم فاصله داشته باشند. اینشتین این موضوع را عملکرد شبیح وار (روح مانند) در فواصل زیاد نامید که شبیه به ارتباط دو تکه درهم تنیده شده توسط سیم‌های نامرئی است که ما هیچ اطلاعی از آنها نداریم، اما برای محاسبات کوانتومی یک اصل کلی به شمار می‌آیند [۱۱،۱۳].

پدیده شگفت‌انگیز درهم تنیدگی در تئوری مکانیک کوانتومی تحول عظیمی را بوجود آورده است و به تبع آن نتایجی را در رایانه‌های کوانتومی به دنبال داشته است. از نتایج بسیار مهم پدیده درهم

^۱ Quantum Entanglement

تنیدگی کوانتومی آن است که موضعیت را نقض کرده و ثابت می‌کند که ماهیت تئوری مکانیک کوانتومی، ناموضعی می‌باشد [۱۱].

۲-۳ سیستمهای دو قسمتی و پایه های بل^۲

سیستم دو قسمتی^۳، سیستمی است که شامل دو زیرسیستم باشد. یک مثال از این سیستم، زمانی است که دو مشاهده‌گر آلیس و باب، هر کدام بخشی از یک جفت ذره درهم تنیده شده را در اختیار دارند. فضای هیلبرت چنین سیستمی به صورت حاصلضرب تانسوری از دو فضای هیلبرتی است که سیستم آلیس و باب را توصیف می‌کنند. چنانچه فضاها هیلبرت آنها را به ترتیب، به صورت H_A و

H_B تعریف کنیم، فضای هیلبرت سیستم مرکب، به صورت

$$H = H_A \otimes H_B \quad (۱-۳)$$

خواهد بود. اگر حالات پایه‌ای را برای آلیس و باب به صورت $|a_i\rangle$ و $|b_j\rangle$ در نظر بگیریم، آنگاه حالت‌ها برای سیستم مرکب، به صورت حاصلضرب تانسوری از حالات پایه‌ای دو مشاهده‌گر می‌شود:

$$|\alpha_{ij}\rangle = |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle = |a_i b_j\rangle \quad (۲-۳)$$

به دلیل این که پایه‌های آلیس و باب هر دو راست بهنجار هستند، بنابراین برای سیستم مرکب خواهیم داشت:

$$\langle \alpha_{ij} | \alpha_{kl} \rangle = \langle a_i b_j | a_k b_l \rangle = \langle a_i | b_k \rangle \langle b_j | b_l \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (۳-۳)$$

هم اکنون، حالت کوانتومی $|\psi\rangle$ از سیستم مرکبی را در نظر می‌گیریم که آن می‌تواند برحسب حالات پایه‌ای به صورت زیر بسط داده شود:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |\alpha_{ij}\rangle = \sum_{i,j} |a_i b_j\rangle \langle a_i b_j | \psi \rangle \quad (۴-۳)$$

ضرایب بسط $\langle a_i b_j | \psi \rangle$ دامنه‌های احتمال برای پیدا کردن سیستم در حالت $|a_i b_j\rangle$ می‌باشند.

از این رو احتمال پیدا کردن سیستم در این حالت به صورت

^۲ J. S. Bell

^۳ Bipartite System

$$\Pr(a_i b_j) = \left| \langle a_i b_j | \psi \rangle \right|^2 \quad (5-3)$$

داده می‌شود. یک نمونه از حالات پایه‌ای راست به‌نچار برای سیستم دو قسمتی، حالت‌های پایه‌ای بل هستند. اعضای پایه‌های بل که گاهی اوقات حالات بل یا حالات EPR^۴ نامیده می‌شوند، به صورت زیر می‌باشند:

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|\circ\circ\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (6-3)$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{|\circ 1\rangle + |1\circ\rangle}{\sqrt{2}} \quad (7-3)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{|\circ\circ\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (8-3)$$

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{|\circ 1\rangle - |1\circ\rangle}{\sqrt{2}} \quad (9-3)$$

حالت $|\beta_{01}\rangle$ به عنوان حالت سه گانه^۵ (سه تایی) شناخته می‌شود (علاوه بر حالت سه گانه‌ی $|\beta_{10}\rangle$) دو حالت سه گانه‌ی دیگر $|11\rangle$ و $|\circ\circ\rangle$ نیز وجود دارد. در حالی که $|\beta_{11}\rangle$ یک حالت یگانه^۶ (تکتایی) است. حالت‌های سه گانه، حالاتی با اسپین ۱ هستند، ولی در مورد حالات یگانه اسپین حالت برابر با ۰ است [۵]. حالات بل را می‌توان به صورت فشرده با عبارت زیر بیان کرد:

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|\circ y\rangle + (-1)^x |1\bar{y}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (10-3)$$

در عبارت بالا \bar{y} عکس y را بیان می‌کند. (اگر y ، ۰ باشد، آنگاه \bar{y} ۱ می‌شود و بالعکس) و این که اصطلاحاً x را بیت فاز و y را بیت پاریته می‌نامند [۲].

^۴ A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen

^۵ Triplet

^۶ Singlet

۳-۳ اندازه گیری همبستگی^۷ اسپین و نامساوی بل

۳-۳-۱ همبستگی در حالت‌های یگانه اسپینی

سیستمی مرکب را در نظر می‌گیریم که شامل دو الکترون در حالت یگانه (تکتایی) اسپینی است، به عبارتی دارای اسپین کل صفر می‌باشد. در قسمت قبل دیدیم که بردار حالت را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$|SpinSinglet\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|\bar{z}+; \bar{z}-\rangle - |\bar{z}-; \bar{z}+\rangle), \quad (11-3)$$

که در آن به صراحت امتداد کوانتش را به صورت $|\bar{z}+\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $|\bar{z}-\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ نشان داده‌ایم. یادآوری می‌کنیم که $|\bar{z}+; \bar{z}-\rangle$ به این معنی است که الکترون ۱ در حالت اسپین بالا و الکترون ۲ در حالت اسپین پایین است. به همین ترتیب برای $|\bar{z}-; \bar{z}+\rangle$. فرض کنید اندازه گیری‌ای را روی امتداد اسپینی یکی از الکترون‌ها انجام دهیم. به وضوح شانس بدست آوردن اسپین بالا یا پایین ۵۰-۵۰ است، زیرا این سیستم مرکب می‌تواند با احتمال یکسان در حالت $|\bar{z}+; \bar{z}-\rangle$ یا $|\bar{z}-; \bar{z}+\rangle$ باشد. ولی اگر نشان داده شود که یکی از الکترون‌ها در حالت اسپین بالا است، الکترون دیگر الزاماً در حالت اسپین پایین است و یا بر عکس. هنگامی که معلوم شود که مؤلفه‌ی اسپین الکترون ۱ بالا است، وسیله‌ی اندازه گیری ما، جمله‌ی اول (۱۱-۳)، یعنی $|\bar{z}+; \bar{z}-\rangle$ را برگزیده (اصطلاحاً به چنین حالتی ریزش می‌کند) و باید اندازه گیری آتی امتداد اسپین الکترون ۲، معین نماید که بردار حالت سیستم مرکب با $|\bar{z}+; \bar{z}-\rangle$ داده می‌شود.

شایان ذکر است این نوع از همبستگی، حتی هنگامی که دو ذره کاملاً از هم دور بوده و اندرکنشی بین آنها نیست، وجود دارد؛ یعنی هنگامی که ذرات از یکدیگر دور می‌شوند، تغییری در حالت اسپینی آنها بوجود نمی‌آید (درهم تنیدگی کوانتومی). این حالت دقیقاً مشابه مورد پراکندگی پروتون-پروتون

^۷ Correlation

در انرژی جنبشی کم است. اصل پاؤلی ایجاب می کند که باید حالت پروتونهای پراکنده شده دارای همبستگی (۱۱-۳) باشند، حتی اگر به اندازهی فواصل ماکروسکوپی از یکدیگر دور شوند.

برای بررسی این مسئله، سیستمی از دو ذرهی اسپین $\frac{1}{2}$ را در نظر می گیریم که در جهت مخالف حرکت می کنند. مشاهده گر A در اندازه گیری S_z ذره ۱ (که به سمت راست حرکت می کند) تخصص دارد، در حالی که مشاهده گر B در اندازه گیری S_z ذره ۲ (که به سمت چپ حرکت می کند). به طور خاص فرض می کنیم که مشاهده گر A ، S_z ذره ۱ را مثبت بدست آورد. در آن صورت او می تواند حتی قبل از این که B اندازه گیری انجام دهد، حاصل اندازه گیری B را با قطعیت پیش بینی کند: B باید S_z ذره ۲ را منفی بدست آورد. از طرف دیگر اگر A اندازه گیری ای انجام نمی داد، B شانس ۵۰-۵۰ داشت که $S_z +$ یا $S_z -$ را بدست آورد. در این راستا ممکن است مشاهده گرها به جای S_z ، S_x را انتخاب کنند.

از قبل به خوبی می دانیم که برای سیستمی شامل یک ذرهی اسپین $\frac{1}{2}$ ، ویژه بردارهای S_x و ویژه بردارهای S_z به صورت زیر با یکدیگر مرتبطند:

$$|\bar{x} \pm\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|\bar{z} +\rangle \pm |\bar{z} -\rangle), \quad |\bar{z} \pm\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|\bar{x} +\rangle \pm |\bar{x} -\rangle). \quad (12-3)$$

حالا اگر به سیستم مرکب خودمان برگردیم، می توانیم با انتخاب امتداد x به عنوان محور کوانتش، بردار یگانهی اسپینی (۱۱-۳) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$|SpinSinglet\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|\bar{x}-; \bar{x} +\rangle - |\bar{x} +; \bar{x} -\rangle). \quad (13-3)$$

صرف نظر از یک علامت عمومی که به قرارداد بستگی دارد، می توانستیم این شکل را مستقیماً از روی (۱۱-۳) حدس بزنیم، زیرا حالت یگانه اسپینی هیچ جهت ارجحی در فضا ندارد. حال فرض می کنیم که مشاهده گر A ، با تغییر امتداد دستگاه اندازه گیری اسپین خود، مخیر باشد که S_z یا S_x ذره ۱ را اندازه گیری کند، در حالی که مشاهده گر B همواره در اندازه گیری S_x ذره ۲ تخصص داشته باشد. اگر

S_z ذره ۱ را مثبت تعیین کند، به وضوح B شانس $50-50$ دارد که $S_x +$ یا $S_x -$ را بدست آورد، زیرا اگر چه به طور تعیینی می‌دانیم که S_z ذره ۲ منفی است ولی S_x آن کاملاً نامعین است. حال از طرف دیگر فرض کنیم که A تصمیم به اندازه‌گیری S_x دارد. اگر A S_x ذره ۱ را مثبت تعیین کند در آن صورت بدون تردید مشاهده‌گر B S_x ذره ۲ را منفی بدست می‌آورد و یک درهم تنیدگی کوانتومی 100% (با علامت مخالف) بین اندازه‌گیری‌ها وجود خواهد داشت. در نهایت اگر A تصمیم بگیرد که هیچ اندازه‌گیری انجام ندهد، B شانس $50-50$ دارد که $S_x +$ یا $S_x -$ را بدست آورد. جدول (۱-۳) تمام نتایج ممکن چنین اندازه‌گیری‌هایی را وقتی که A و B مجاز باشند اندازه‌گیری S_x یا S_z را انتخاب کنند، نشان می‌دهد.

طبق این بررسی به نظر می‌رسد که نتایج اندازه‌گیری B به تصمیم A برای نوع اندازه‌گیری بستگی دارد: اندازه‌گیری S_x ، اندازه‌گیری S_z و یا هیچ نوع اندازه‌گیری. مجدداً توجه کنید که A و B می‌توانند کیلومترها از یکدیگر دور باشند، بدون هیچ امکان ارتباط و برهم کنشی (اصل ناموضعیته^۸). مشاهده‌گر A می‌تواند بعد از گذشت زمان زیادی از دور شدن ذرات از یکدیگر، تصمیم بگیرد که امتداد دستگاه اندازه‌گیری خود را در چه جهتی قرار دهد. مثل این است که ذره ۲ "می‌داند" که کدام مؤلفه‌ی اسپین ذره ۱ اندازه‌گیری می‌شود.

تفسیر ناب و خالص کوانتومی این نتایج بدین صورت است. عمل اندازه‌گیری یک فرایند گزینش است. وقتی اندازه‌گیری مؤلفه S_z ذره ۱ مقدار مثبت می‌دهد، در آن صورت مؤلفه $|\bar{z}+, \bar{z}-\rangle$ گزینش شده. اندازه‌گیری مؤلفه S_z ذره ۱ دیگر، منحصراً تأکید می‌کند که سیستم هنوز در حالت $|\bar{z}+, \bar{z}-\rangle$ است. باید بپذیریم که اندازه‌گیری بر روی چیزی که به ظاهر یک قسمت سیستم است، باید اندازه‌گیری روی کل سیستم تلقی شود [۸].

^۸ Nonlocality Principle

جدول ۱-۳ همبستگی اندازه گیری‌های اسپین

مؤلفه‌ی اسپین ، اندازه‌گیری شده توسط A	نتایج A	مؤلفه‌ی اسپین ، اندازه‌گیری شده توسط B	نتایج B
z	+	z	-
z	-	x	+
x	-	z	-
x	-	z	+
z	+	x	-
x	+	x	-
z	+	x	+
x	-	x	+
z	-	z	+
z	-	x	-
x	+	z	+
x	+	z	-

۳-۲-۳ اصل موضعیت اینشتین و نامساوی بل

بسیاری از فیزیکدانان از چنین تفسیر خالص کوانتومی در مورد اندازه گیری همبستگی اسپین راضی و خشنود نیستند. احساس آنها در عبارت نقل شده از اینشتین، که آن را اصل موضعیت اینشتین می-نامیم، خلاصه می‌شود: " اما بنا بر فرضی که از دیدگاه من به طور مطلق برقرار است: موقعیت واقعی سیستم S_r که از لحاظ فضایی از S_l جدا است، مستقل از آن چیزی است که روی سیستم S_l انجام می‌گیرد. " از آنجا که این مسئله ابتدا در مقاله‌ی سال ۱۹۳۵ توسط " آلبرت اینشتین، ب. پودولسکی و ن. روزن " بحث شد، گاهی تحت عنوان باطل نمای اینشتین - پودولسکی - روزن نامیده می‌شود [۸].

برخی این‌گونه استدلال کرده‌اند که مشکلی که در اینجا با آن مواجهیم ریشه در تعبیر احتمالاتی مکانیک کوانتومی دارد و تنها علتی که رفتار دینامیکی در سطح میکروسکوپی به صورت احتمالاتی است، آن است که هنوز برخی پارامترهای ناشناخته - که به آن متغیرهای نهانی^۹ می‌گویند - معلوم نشده‌اند.

در این جا به دنبال آن نیستیم که نامزدهای گوناگون مکانیک کوانتومی که بر اساس متغیرهای نهانی و یا سایر ملاحظات هستند را بیان کنیم. به جای آن این سؤال را طرح می‌کنیم که آیا این نظریه‌ها، پیش‌بینی‌هایی غیر از پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی دارند؟ تا سال ۱۹۶۴، تصور می‌شد که می-توان نظریه‌های جایگزین را طوری ساخت که هیچ پیش‌بینی آزمایشی‌ای، غیر از پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی نداشته باشد و اختلاف باقی مانده به حیطه‌ی متافیزیک تعلق دارد و نه فیزیک. اما جی. اس. بل توجه کرد که نظریاتی که بر اساس اصل موضعیت اینشتین هستند، بین مشاهده-پذیرهای آزمایشات همبستگی اسپین، رابطه‌ی نامساوی آزمون پذیرگی را پیش‌بینی می‌کنند که با پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی اختلاف دارد.

^۹ Hidden Variables

نامساوی بل را در چهارچوب مدل ساده‌ای که با پیش بینی‌های متعارف مکانیک کوانتومی تفاوت دارد، بدست می‌آوریم. در این مدل ابتدا سه بردار یگه‌ی \hat{a} ، \hat{b} و \hat{c} را که ضرورتاً بر یکدیگر عمود نیستند، در نظر می‌گیریم. حال ذره‌ای را که متعلق به گونه‌ای خاص، مثلاً $(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}+)$ است را در نظر می‌گیریم؛ یعنی اگر S, \hat{a} اندازه‌گیری شود، با قطعیت مقدار منفی بدست می‌آید، اگر S, \hat{b} اندازه‌گیری شود با قطعیت مقدار مثبت بدست می‌آید و اگر S, \hat{c} اندازه‌گیری شود با قطعیت مقدار مثبت بدست می‌آید. در این میان لازم است هماهنگی کاملی را برقرار کنیم؛ یعنی برای اطمینان از صفر بودن تکانه‌ی زاویه‌ای کل، الزاماً ذره دیگر متعلق به گونه $(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}-)$ است. در هر رویدادی، باید جفت ذره‌ی مورد نظر عضوی از هشت گونه‌ای باشد که در جدول (۳-۲) نشان داده شده است. این هشت امکان مستقل از یکدیگر و مانع‌الجمع هستند. جمعیت هر گونه در ستون اول آمده است.

حال فرض کنید مشاهده‌گر A مقدار S, \hat{a} را مثبت و مشاهده‌گر B هم مقدار S, \hat{b} را مثبت بدست آورد. از روی جدول (۳-۲) معلوم است که این جفت متعلق به گونه‌ی ۳ یا ۴ است و بنابراین تعداد ذراتی که در این موقعیت قرار دارند $N_r + N_f$ است. از آنجا که N_i ها مثبت نیم معین هستند، رابطه‌ی نامساوی زیر برقرار است

$$N_r + N_f \leq (N_r + N_f) + (N_r + N_f). \quad (۱۴-۳)$$

حال اگر در یک گزینش کاتوره‌ای، $P(\hat{a}+; \hat{b}+)$ احتمال آن باشد که مشاهده‌گر A مقدار S, \hat{a} را مثبت و مشاهده‌گر B مقدار S, \hat{b} را مثبت اندازه بگیرد باشد، در آن صورت خواهیم داشت:

$$P(\hat{a}+; \hat{b}+) = \frac{(N_r + N_f)}{\sum_{i=1}^4 N_i} \quad (۱۵-۳)$$

جدول ۳-۲: هماهنگی مؤلفه‌های اسپینی در نظریه‌های جایگزین

جمعیت	ذره‌ی ۱	ذره‌ی ۲
N_1	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}+)$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}-)$
N_r	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}-)$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}+)$
N_r	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}+)$	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}-)$
N_f	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}-)$	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}+)$
N_d	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}+)$	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}-)$
N_e	$(\hat{a}-, \hat{b}+, \hat{c}-)$	$(\hat{a}+, \hat{b}-, \hat{c}+)$
N_v	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}+)$	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}-)$
N_s	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}-)$	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}+)$

به همین صورت بدست می‌آوریم:

$$P(\hat{a}+; \hat{c}+) = \frac{(N_r + N_f)}{\sum_{i=1}^4 N_i} \quad \text{و} \quad P(\hat{c}+; \hat{b}+) = \frac{(N_r + N_v)}{\sum_{i=1}^4 N_i} \quad (۱۶-۳)$$

به این صورت شرط مثبت بودن (۳-۱۵) به صورت زیر خواهد شد

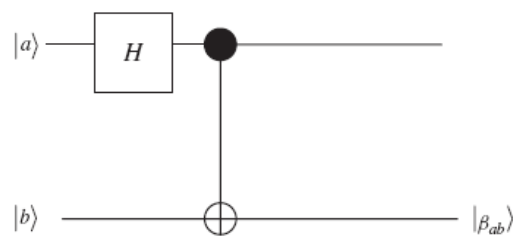
$$P(\hat{a}+; \hat{b}+) \leq P(\hat{a}+; \hat{c}+) + P(\hat{c}+; \hat{b}+). \quad (۱۷-۳)$$

به این رابطه نامساوی بل می‌گویند و به علت این که نتایج A ، مستقل از انتخاب B در نوع اندازه گیری، از قبل معین است، این رابطه از اصل موضعیت اینشتین بدست می‌آید. از نقطه نظر هندسی این نامساوی همواره امکان‌پذیر نیست. آزمایش‌های متعددی برای آزمودن نامساوی بل انجام شده است. نتایج تمام آزمایش‌های دقیق اخیر، به طور قاطعانه نشان دادند که پیش بینی مکانیک کوانتومی با نامساوی بل سازگار نیست و بین مکانیک کوانتومی و نظریات جایگزینی که از اصل موضعیت اینشتین تبعیت می‌کنند، یک مشاهده پذیر - که از نظر آزمایشی قابل بررسی است - اختلاف وجود دارد و این که نامساوی بل نقض می‌شود.

در انتهای این قسمت خوب است بدانید که علیرغم این نکات عجیب، نمی‌توان از آزمایش‌های همبستگی اسپینی برای انتقال هیچ گونه اطلاعات مفیدی بین دو نقطه‌ی دور (به طور ماکروسکوپی) استفاده کرد. به طور خاص ارتباطات فوق نوری (سریعتر از نور) امکان‌پذیر نیست ($No\text{-signaling}$) [۸].

۳-۴ مدل ریاضی درهم تنیدگی کوانتومی

با استفاده از گیت‌های کوانتومی مطرح شده در فصل ۱ می‌توان یک زوج فوتون درهم تنیده را به صورت ریاضی مدل کنیم [۱۴]. این مدار از سری کردن گیت هادامارد و $C\text{-NOT}$ بدست می‌آید. اگر ورودی این مدار را یکی از حالات $|11\rangle$ ، $|10\rangle$ ، $|01\rangle$ و $|00\rangle$ در نظر بگیریم، چهار حالت درهم تنیده‌ی متفاوت، با عنوان حالات بل بدست خواهد آمد.



شکل ۳-۱: مدار کوانتومی بوجود آورنده‌ی حالت بل

ورودی را در حالت اول، به صورت $|a\rangle \otimes |b\rangle = |ab\rangle = |00\rangle$ فرض کرده و خروجی مدار را محاسبه می‌کنیم. حالت $|0\rangle$ پس از عبور از گیت هادامارد به حالت زیر تبدیل می‌شود:

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

در نتیجه، قبل از تأثیر گیت $C-NOT$ حالت کوانتومی ترکیبی عبارت است از:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$

در اثر عبور این حالت کوانتومی از گیت $C-NOT$ ، حالت در هم تنیده‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) \xrightarrow{C-NOT} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = |\varphi^+\rangle. \quad (18-3)$$

چنانچه ورودی را سه حالت دیگر $|01\rangle$ ، $|10\rangle$ و $|11\rangle$ در نظر بگیریم، سه حالت دیگر بل بدست می‌آیند و لذا به طور جمع‌بندی، چهار حالت بل را که قبلاً تعریف کرده‌ایم، در اینجا حالات به شدت درهم تنیده‌ی^{۱۰} اصلی هستند [۵].

$$|00\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = |\varphi^+\rangle$$

$$|10\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = |\varphi^-\rangle$$

$$|01\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) = |\psi^+\rangle$$

$$|11\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = |\psi^-\rangle.$$

در این جا روشی را برای این که حالت درهم تنیده باشد یا نباشد، ارائه می‌کنیم. هنگامی که دو سیستم درهم تنیده می‌شوند، حالت هر سیستم مرکب تنها می‌تواند با رجوع به حالت دیگری توصیف بشود. اگر

^{۱۰} Maximally entangled states

حالت‌ها درهم تنیده نباشند، آنها را اصطلاحاً حالات حاصلضربی یا تفکیک‌پذیر (درهم ناتنیده)^{۱۱} می‌نامند. چنانچه $|\psi\rangle \in H_A$ ، $|\varphi\rangle \in H_B$ و $|\chi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \in H_A \otimes H_B$ ، آنگاه $|\chi\rangle$ یک حالت درهم ناتنیده است.

یک امتحان ساده‌ای برای حالات چهار مؤلفه‌ای به صورت زیر می‌تواند به کار برده شود.

اگر حالت $|\psi\rangle$ به صورت زیر باشد:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

آنگاه این حالت درهم ناتنیده است اگر و تنها اگر $ad = bc$ برقرار باشد [۵].

مثال : یک سیستم دوکیوبیتی در حالت $|\circ\circ\rangle$ است. روی این حالت عملگر $H \otimes H$ را تأثیر می‌دهیم

که H ماتریس هادامارد است. آیا حالت $|\circ\circ\rangle \in H \otimes H$ یک حالت درهم تنیده است؟

حل:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore H \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \times H & 1 \times H \\ 1 \times H & -1 \times H \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

حالت $|\circ\circ\rangle$ یک نمایش بردار ستونی به صورت زیر دارد:

$$|\circ\circ\rangle = |\circ\rangle \otimes |\circ\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

^{۱۱} Product or Separable States

برای این حالت، به خوبی می‌بینیم که $ad = (1)(0) = 0 = (0)(0) = bc$ و بنابراین $|00\rangle$ یک حالت درهم ناتنیده است. هم چنین برای $H \otimes H|00\rangle$ نیز خواهیم داشت:

$$H \otimes H|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

با استفاده از معیار گفته شده در بالا، مشاهده می‌کنیم که $ad = (\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} = (\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}) = bc$ پس $H \otimes H|00\rangle$ نیز یک حالت درهم ناتنیده است.

در حقیقت حالت بیان شده در بالا، می‌تواند عبارتی بر حسب ضرب تانسوری به صورت زیر داشته باشد.

$$H \otimes H|00\rangle = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle).$$

۳-۵ ناموضعیّت و درهم تنیدگی حالات کوانتومی

حالت درهم تنیده شده‌ای را مانند

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle) \quad (۳-۲۰)$$

در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که کیوبیت اول دست آلیس و دومی در دست باب است. حالتهای $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را برای نشان دادن ویژه حالت های اسپین در راستای z بکار برده‌ایم. اگر آلیس روی ذره‌ی خود یک اندازه گیری در راستای z انجام دهد و مقدار 0 را بدست آورد، همان طور که در قسمت ۳-۱ گفتیم می‌تواند به طور قطع نتیجه‌ی اندازه گیری باب را پیش بینی کند، زیرا باب در صورت اندازه گیری در همین پایه به طور قطع مقدار 1 را بدست خواهد آورد. بالعکس اگر آلیس مقدار 1 را بدست آورد، می‌تواند به طور قطع بگوید که باب نتیجه‌ی 0 را در اندازه گیری خود بدست خواهد

آورد. این قدرت پیش بینی نتیجه‌ی باب توسط آلیس، حتی در وضعیتی که اندازه گیری‌های آلیس و باب فاصله فضا گونه با هم دارند نیز برقرار است. از آن جا که دو رویداد با فاصله فضا گونه هیچ گونه رابطه‌ی علی با یکدیگر ندارند، به نظر می‌رسد که یک اثر ناموضعی در مکانیک کوانتومی وجود دارد که هیچ نوع سابقه‌ای در فیزیک کلاسیک ندارد. هم چنین به نظر می‌رسد که این نوع پدیده‌ها به نوعی نسبت خاص را نقض می‌کنند. اما می‌توان نشان داد که آلیس با اندازه گیری‌های خود تنها می‌تواند نتایج آزمایش‌های باب را پیش بینی کند و به هیچ روی نمی‌تواند علامت یا سیگنالی را برای باب مخابره کند (*no-signaling*). برای فهم این موضوع کافی است که ماتریس چگالی باب را قبل و بعد از اندازه گیری بدست آورده و با هم مقایسه کنیم. به طور کلی فرض می‌کنیم که حالتی که در دست آلیس و باب است، حالتی کلی به شکل زیر باشد:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,\mu} \psi_{i\mu} |i, \mu\rangle, \quad (21-3)$$

بنابراین ذره‌ای که در دست باب قرار دارد در حالت زیر خواهد بود:

$$\rho_B = Tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|). \quad (22-3)$$

حال فرض می‌کنیم که آلیس یک اندازه گیری تصویری با عملگرهای $\{P_m\}$ روی ذره خودش انجام دهد. در این صورت حالت دو ذره به حالت زیر تبدیل می‌شود:

$$\rho' = \sum_m (P_m \otimes I) |\psi\rangle\langle\psi| (P_m^t \otimes I). \quad (23-3)$$

بعد از اندازه گیری حالت ذره‌ای که در دست باب است برابر خواهد بود با:

$$\rho'_B = Tr(\rho') = Tr_A\left(\sum_m (P_m \otimes I) |\psi\rangle\langle\psi| (P_m^t \otimes I)\right) \quad (24-3)$$

از خاصیت دوره‌ای بودن تابع رد که در آن عملگرهای X و Z روی فضای A عمل کرده و عملگر Y نیز روی هر دو فضای A و B عمل می‌کند به صورت زیر، در رابطه‌ی بالا استفاده می‌کنیم:

$$Tr_A((X \otimes I)Y(Z \otimes I)) = Tr_A((Z \otimes I)(X \otimes I)Y) \quad (25-3)$$

بنابراین (24-3) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\rho'_B = Tr_A \left(\sum_m (P'_m \otimes I) (P_m \otimes I) |\psi\rangle\langle\psi| \right) = Tr_A (|\psi\rangle\langle\psi|) = \rho_B. \quad (26-3)$$

از این رو حالت ذره‌ای که در دست باب است با اندازه گیری‌های آلیس تغییر نمی‌کند و در نتیجه اندازه گیری‌های آلیس به هیچ روی باعث تغییری در حالت ذره باب نخواهند شد و در نتیجه هیچ نوع علامت یا اطلاعی به باب مخابره نمی‌شود. این امر ادعای ما را ثابت می‌کند که ناموضعیّت به معنای نقض نسبیّت نیست. با این وجود حالت‌های درهم تنیده یعنی حالت‌هایی مثل (۳-۲۰) که نشان دهنده-ی ناموضعیّت در مکانیک کوانتومی هستند، خصلت‌های ناآشنایی دارند که آنها را شایسته‌ی مطالعه جدی و وسیع می‌کند [۱۱]. یکی از این خصلت‌ها را در قسمت ۳-۱۰-۱ بررسی می‌کنیم.

۳-۶ ضریب اطمینان درهم تنیدگی^{۱۲}

یک ماتریس چگالی را برای یک سیستم تک کیوبیتی که بر حسب پایه‌های محاسباتی $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ قطری است را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\rho = f|0\rangle\langle 0| + (1-f)|1\rangle\langle 1|. \quad (27-3)$$

در این رابطه پارامتر f به عنوان ضریب اطمینان درهم تنیدگی شناخته می‌شود.

برای مثال اگر ماتریس چگالی به شکل

$$\rho = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1|$$

باشد، آنگاه ضریب اطمینان درهم تنیدگی آن $\frac{3}{4}$ می‌باشد. می‌توان گفت که ضریب اطمینان درهم

تنیدگی معیاری است از این که چه میزان از اطلاعات بعد از انجام اندازه گیری کوانتومی، به خوبی

می‌توانند حفظ شوند [۱۱، ۱۰].

^{۱۲} Entanglement Fidelity

۳-۷ تجزیه‌ی اشمیت^{۱۳}

برای یک سیستم مرکب در فضای هیلبرت $H_A \otimes H_B$ ، حالت $|\psi\rangle$ را که یک حالت خالص برای سیستم است، در نظر می‌گیریم. این حالت را بر اساس ویژه حالات و ویژه مقادیرش به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |a_i\rangle |b_i\rangle \quad (۳-۲۸)$$

که $|a_i\rangle$ و $|b_i\rangle$ ها به ترتیب حالات راست بهنجار متعلق به سیستم A و سیستم B هستند که اصطلاحاً پایه‌های اشمیت برای سیستمهای A و B می‌باشند. ضرایب بسط λ_i در شرایط $\lambda_i \geq 0$ و $\sum_i \lambda_i^2 = 1$ صدق می‌کنند. در رابطه‌ی (۳-۲۸) λ_i ها ضرایب اشمیت و بسط بالا به عنوان تجزیه‌ی اشمیت شناخته می‌شود.

ضرایب اشمیت از ماتریس چگالی تقلیل یافته‌ی^{۱۴} $\rho_A = Tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$ که ویژه مقادیر λ_i را در بر دارد، محاسبه می‌شوند. (لازم است بدانید که ماتریس چگالی تقلیل یافته که با ردگیری جزئی روی زیرسیستمها بدست می‌آید، کاربردی از ماتریس چگالی است که برای مشخص کردن سیستمهای مرکب استفاده می‌شود.) عدد اشمیت تعداد ویژه مقادیر غیر صفر λ_i از ماتریس ρ_A است که به صورت زیر به کار برده می‌شود [۱،۵]:

۱- عدد اشمیت ۱ است اگر و تنها اگر حالت سیستم درهم ناتنیده (تفکیک پذیر) باشد.

۲- و چنانچه حالت درهم تنیده باشد، آنگاه بایستی عدد اشمیت بزرگتر از ۱ شود.

عدد اشمیت را با علامت اختصاری Sch نشان می‌دهیم.

^{۱۳} Schmidt Decomposition

^{۱۴} Reduced density operator

مثال : حالت $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$ را در نظر می گیریم. می خواهیم عدد اشمیت این

حالت را محاسبه کنیم و بگوییم که آیا این حالت درهم تنیده یا درهم ناتنیده است؟

حل : عملگر چگالی (ماتریس چگالی) برای این حالت که از نوع خالص است به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \rho = |\psi\rangle\langle\psi| &= \frac{1}{4} (|00\rangle\langle 00| - |00\rangle\langle 01| - |00\rangle\langle 10| + |00\rangle\langle 11| - |01\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| \\ &- |01\rangle\langle 11| - |10\rangle\langle 00| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| - |11\rangle\langle 01| \\ &- |11\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|) \end{aligned}$$

بنابراین با ردگیری جزئی سیستم B برای ρ_A خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \rho_A = Tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|) &= \langle 0|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle + \langle 1|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle \\ &= \frac{1}{4} (|0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + \frac{1}{4} (|0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \end{aligned}$$

و نمایش ماتریسی آن به شکل

$$\rho_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

خواهد بود که ویژه مقادیرش $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 0$ است. همان طور که قبلاً گفتیم عدد اشمیت تعداد ویژه

مقادیر غیر صفر است، یعنی $Sch = 1$ خواهد بود. بنابراین حالت مورد نظر یک حالت مجزا (درهم

ناتنیده) است. به عبارتی $|\psi\rangle$ را می توان به عنوان یک حالت درهم ناتنیده (حاصلضربی) به صورت زیر

بنویسیم [۲]:

$$|\psi\rangle = \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

۳-۸ خالص سازی درهم تنیدگی^{۱۵}

فرض کنید که سیستم A توسط ماتریس چگالی ρ توصیف می‌شود. آیا می‌توان سیستمی مثل B و حالتی از سیستم مرکب AB مثل $|\psi\rangle_{AB}$ را چنان یافت که:

$$\rho = Tr_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|) \quad (۲۹-۳)$$

باشد. اگر چنین حالتی را پیدا کنیم، حالت $|\psi\rangle_{AB}$ را حالت خالص شده‌ی ماتریس چگالی ρ می‌نامیم. برای این که یک ماتریس چگالی ρ_A را با ویژه مقادیر p_i پیدا کنیم، به ترتیب زیر بایستی عمل کرد:

سیستم B را در نظر می‌گیریم که بعد فضای هیلبرت آن یعنی H_B حداقل با بعد H_A یکی باشد. هرگاه بردارهای $\{|i\rangle\}$ یک پایه‌ی متعامد برای سیستم A باشند، آنگاه برای $|\psi\rangle_{AB}$ خواهیم داشت:

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |i, \hat{i}\rangle \quad (۳۰-۳)$$

که در آن $\{|\hat{i}\rangle\}$ ، مجموعه‌ای از بردارهای متعامد یکه برای فضای H_B هستند. در این صورت $|\psi\rangle_{AB}$ حالت خالص شده‌ی ρ_A است. در پایان این قسمت می‌توان گفت که خالص سازی درهم تنیدگی، یکی از مفاهیم اساسی نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی است که در آن حالتی که به طور جزئی درهم تنیده شده است به حالتی با میزان درهم تنیدگی بیشتر و با ابعاد کوچکتر تبدیل می‌شود [۱۵، ۱۱].

۳-۹ تابع آنروپی و درهم تنیدگی کوانتومی

در این قسمت به طور مختصر پیرامون آنروپی حالت آمیخته و این که چگونه آنروپی می‌تواند به عنوان معیاری برای درهم تنیدگی کوانتومی در نظر گرفته شود، بحث می‌کنیم.

در نظریه اطلاعات کلاسیکی برای توزیع احتمالاتی p_1, p_2, \dots, p_n ، تابع آنروپی شان^{۱۶} را به صورت

^{۱۵} Entanglement Purification

$$H(p_1, \dots, p_r) = -\sum_i p_i \log_r p_i, \quad (31-3)$$

می‌توان در نظر گرفت و به دلیل این که حالت آمیخته‌ی ρ ، توزیع احتمالاتی روی یک آنسامبل آمیخته است، طبیعتاً منجر به تعریف آنترپی فون نیومن^{۱۷} در نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی به صورت زیر می‌شود [۲، ۱]:

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log \rho), \quad (32-3)$$

که در این رابطه تابع لگاریتم در پایه‌ی ۲ است. به طور کلی برای محاسبه کردن $\log \rho$ می‌توان از حساب دیفرانسیل و انتگرال بورل^{۱۸} [۱۶]، استفاده کرد. چنانچه ρ با ویژه مقادیر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ در فضای هیلبرتی با بعد متنهای اثر کند، آنگاه می‌توان آنترپی شانن را دوباره به صورت زیر

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log \rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i. \quad (33-3)$$

بدست آورد. از آن جایی که پیشامدی با احتمال \circ ، هیچ گونه آنترپی را شامل نمی‌شود، بنابراین می‌توان، قرارداد $\circ \log \circ = \circ$ را پذیرفت. این قضیه، حتی زمانی که ابعاد فضای هیلبرت نامتنهای باشد، نیز تعمیم داده می‌شود. چنانچه در این ابعاد ρ را به صورت تجزیه‌ی طیفی $\rho = \int \lambda d\rho_\lambda$ بیان کنیم، آنگاه بایستی زمان محاسبه کردن $\rho \log \rho = \int \lambda \log \lambda d\rho_\lambda$ ، همان قرارداد بالا را در نظر بگیریم.

آنترپی هر حالت خالص مربوط به آنسامبلهای خالص، به علت اینکه پیرامون سیستم در چنین حالتی هیچ گونه عدم قطعیتی وجود ندارد، صفر است. به عبارت دیگر، می‌توان گفت که آنسامبل خالص، آنسامبلی با حداکثر نظم است و همه‌ی اعضا با یک بردار حالت کوانتومی یکسان مشخص می‌شوند. آنترپی هر یک از دو زیرسیستم مربوط به حالات به شدت درهم تنیده شده به میزان $\log 2$ است که

^{۱۶} Shannon entropy

^{۱۷} Von Neumann entropy

^{۱۸} Borel functional calculus

این مقدار بیشینه آنتروپی حالات آمیخته در فضای هیلبرت 2×2 می‌باشد. به طور کلی می‌توان بیان کرد که بیشینه آنتروپی برای حالات آمیخته در فضای N بعدی برابر با $\log N$ است. کمیت آنتروپی، ابزاری را فراهم می‌سازد که می‌تواند میزان درهم تنیدگی را به لحاظ کمی تعیین نماید. آنتروپی یک زیرسیستم از یک سیستم کوانتومی مرکب خالص، می‌تواند برای اندازه‌گیری میزان درهم تنیدگی آن زیرسیستم با زیرسیستمهای دیگر استفاده بشود [۱۷].

برای حالات خالص دو قسمتی، آنتروپی فون نیومن از حالات تقلیل یافته، معیار منحصر به فردی از درهم تنیدگی است؛ به این معنا که این تابع آنتروپی، تنها تابع مؤثر روی مجموعه‌ای از حالات است که قواعد کلی کوانتومی مورد نیاز برای سنجیدن درهم تنیدگی را فراهم می‌کند. از طرف دیگر آنتروپی فون نیومن برای حالات آمیخته‌ی تقلیل یافته شده، معیاری برای معلوم کردن مقدار درهم تنیدگی نمی‌تواند باشد. هم چنین، اگر توزیع احتمالاتی یکنواختی به صورت $\{ \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N} \}$ وجود داشته باشد که N بعد فضای هیلبرت است، آنگاه آنتروپی شان به مقدار بیشینه‌ی خود دست می‌یابد که یک نتیجه‌ی کلاسیکی است.

لازم است بدانید که رابطه‌ی (۳-۳۳) به همراه ضریب ثابت جهانی بولتزمن، تعریف آنتروپی در مکانیک کوانتومی آماری می‌باشد. به کمک خواص حساب دیفرانسیلی بول برای هر عملگر یکانی U

$$S(\rho) = S(U\rho U^*) \quad (3-34)$$

را داریم که آنتروپی فون نیومن بدون در نظر گرفتن آن، به خوبی تعریف نمی‌شود. به طور ویژه، عملگر یکانی U می‌تواند به صورت عملگر تحول زمانی سیستم به شکل

$$U(t) = \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) \quad (3-35)$$

در نظر گرفته بشود که H هامیلتونین سیستم است. این رابطه بیان می‌کند که هر فرایندی می‌تواند به صورت برگشت پذیر انجام شود اگر و تنها اگر آنتروپی سیستم ناوردا باقی بماند و هم چنین ارتباط بین نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی و ترمودینامیک را میسر می‌سازد [۱، ۱۸].

۳-۱۰ کاربردهای درهم تنیدگی کوانتومی

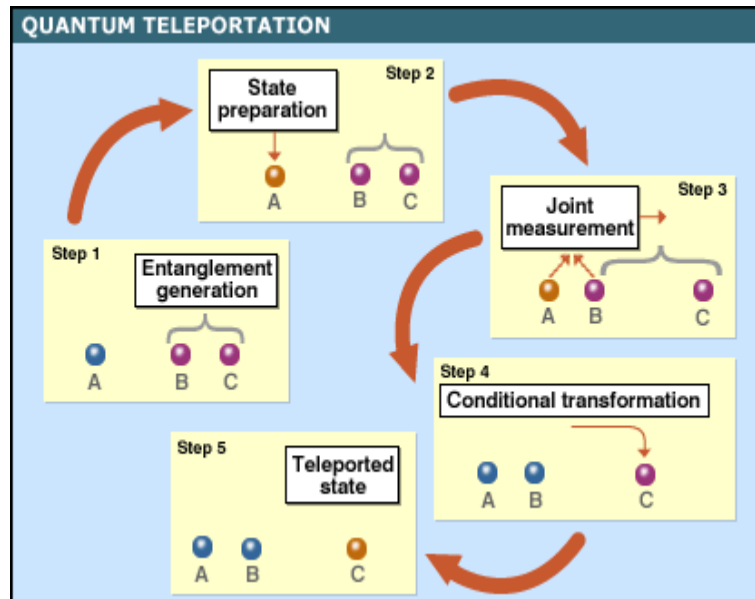
درهم تنیدگی کاربردهای زیادی را در نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی دارد. درهم تنیدگی حالت آمیخته می‌تواند به عنوان منبعی برای ارتباطات کوانتومی در نظر گرفته شود. به کمک درهم تنیدگی کوانتومی، امور غیرممکن و پیچیده در مکانیک کلاسیک انجام شدنی می‌شوند. در میان بهترین کاربردهای درهم-تنیدگی می‌توان از کدگذاری اَبَر چگال و فرابرد حالت کوانتومی نام برد که مورد دوم در قسمت بعدی به طور کامل توضیح داده خواهد شد [۱].

۳-۱۰-۱ فرابرد کوانتومی

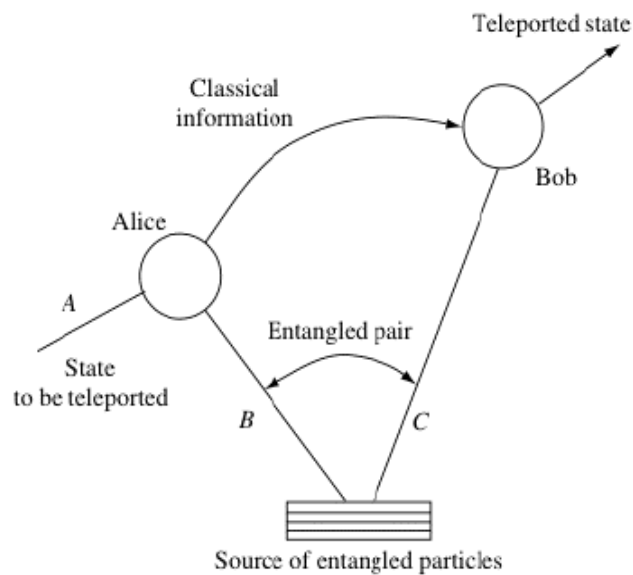
فرابرد کوانتومی یک روشی است که به کمک پدیده‌ی درهم تنیدگی کوانتومی، اطلاعات کوانتومی را از یک ذره به ذره‌ی دیگر، از طریق یک کانال ارتباط دهنده‌ی کلاسیکی، انتقال می‌دهد. در این انتقال جرم یا انرژی ذره مبادله نمی‌شود، بلکه تنها حالت ذره انتقال می‌یابد [۵، ۱۷، ۱۹]. لازم است بدانید که ارتباطات سریعتر از سرعت نور در فرابرد کوانتومی امکان‌پذیر نیستند. به طور دقیق‌تر، فرابرد کوانتومی یک پروتکل کوانتومی است که در آن مشاهده‌گر آلیس می‌خواهد حالت کوانتومی ناشناخته‌ی

$$|\chi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (3-36)$$

را که یک کیوبیت است، برای مشاهده‌گر باب بفرستد. دلیل این که می‌گوییم حالت ناشناخته باشد این است که بدون آگاهی از ماهیت پارامترهای α و β ، آن‌ها بایستی در رابطه‌ی $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ صدق کنند و حالت مورد نظر بهنجار باشد. مطابق با شکل‌های (۳-۲) و (۳-۳)، فرابرد کوانتومی در چندین مرحله انجام می‌شود. پروتکل را با خلق کردن یک جفت درهم تنیده شده‌ی *EPR* شروع می‌کنیم [۲۰].



شکل ۳-۲: مراحل انجام پروتکل فرابرد کوانتومی



شکل ۳-۳: آلیس روی کیوبیت‌های A و B ، یک اندازه‌گیری پل را خلق می‌کند

و باب را از راه کلاسیکی (تلفن) با خبر می‌سازد.

مراحل انجام پروتکل :

مرحله ۱: آلیس و باب یک جفت ذره‌ی درهم تنیده را خلق می‌کنند.

در ابتدای کار آلیس و باب، یک حالت به شدت درهم تنیده شده‌ی بل را به صورت

$$|\beta_{\circ\circ}\rangle = \frac{|\circ_A\rangle|\circ_B\rangle + |1_A\rangle|1_B\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|\circ\circ\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (37-3)$$

خلق می‌کنند. در این رابطه اولین کیوبیت در اختیار آلیس و دومین کیوبیت متعلق به باب است. آلیس در فاصله‌ی فضا گونه از باب قرار دارد. آلیس تصمیم می‌گیرد که حالت (36-3) را برای باب بفرستد. او برای این کار اجازه می‌دهد که این حالت با کیوبیتش در رابطه‌ی (37-3) برهم کنش داشته باشد.

البته اندیسه‌ها در شکل (2-3) متفاوت است و ایرادی در مراحل پروتکل بوجود نمی‌آورد.

مرحله‌ی ۲: آلیس گیت $C-NOT$ را به کار می‌برد.

در این مرحله ابتدا حالت کلی سیستم، که حالت درهم ناتنیده‌ای از حالات (36-3) و (37-3) است را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\chi\rangle \otimes |\beta_{\circ\circ}\rangle = (\alpha|\circ\rangle + \beta|1\rangle) \otimes \left(\frac{|\circ\circ\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\alpha(|\circ\circ\circ\rangle + |\circ11\rangle) + \beta(|1\circ\circ\rangle + |111\rangle)}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (38-3)$$

در رابطه‌ی بالا دو کیوبیت اول در دست آلیس، درحالی که کیوبیت سوم در اختیار باب است. در این جا آلیس با بکار بردن گیت $C-NOT$ سبب می‌شود که کیوبیت دوم با اولین کیوبیت در رابطه‌ی (3-3) بر هم کنش داشته باشند. او در عملکرد این گیت، حالت ناشناخته‌ی $|\chi\rangle$ را به عنوان کیوبیت کنترل و کیوبیتش را در حالت درهم تنیده‌ی EPR ، به عنوان کیوبیت هدف به کار می‌برد.

به خاطر آورید که چنانچه کیوبیت کنترل \circ باشد، اتفاقی نمی‌افتد، ولی اگر کیوبیت کنترل 1 باشد، کیوبیت هدف تغییر می‌کند:

$$|\circ\circ\rangle \mapsto |\circ\circ\rangle, |\circ1\rangle \mapsto |\circ1\rangle, |1\circ\rangle \mapsto |11\rangle, |11\rangle \mapsto |1\circ\rangle. \quad (39-3)$$

بنابراین، هنگامی که آلیس گیت $C-NOT$ را به عنوان یک عملکرد موضعی به کار می‌برد، آنگاه حالت (۳۸-۳) به حالت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= U_{CNOT} |\psi\rangle \\ &= \frac{\alpha(U_{CNOT} |00\rangle + U_{CNOT} |01\rangle) + \beta(U_{CNOT} |10\rangle + U_{CNOT} |11\rangle)}{\sqrt{2}} \quad (40-3) \\ &= \frac{\alpha(|00\rangle + |01\rangle) + \beta(|10\rangle + |11\rangle)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

مرحله ۳: آلیس گیت هادامارد را به کار می‌برد.

حالا زمان آن است که آلیس گیت هادامارد را به کار گیرد. همان طور که در فصل ۱ اشاره کردیم، گیت هادامارد روی حالات پایه‌ای محاسباتی عمل می‌کند و آن‌ها را تبدیل به حالت‌های برهم نهی به صورت

$$H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (41-3)$$

می‌نماید. در این جا اجازه دهید ابتدا رابطه‌ی (۴۰-۳) به صورت زیر بازنویسی شود:

$$|\psi'\rangle = \frac{\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle)}{\sqrt{2}} + \frac{\beta|1\rangle(|10\rangle + |01\rangle)}{\sqrt{2}} \quad (42-3)$$

سپس آلیس با استفاده از عملکرد موضعی گیت هادامارد حالت زیر را بدست می‌آورد:

$$\begin{aligned} |\psi''\rangle = H|\psi'\rangle &= \frac{\alpha H|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle)}{\sqrt{2}} + \frac{\beta H|1\rangle(|10\rangle + |01\rangle)}{\sqrt{2}} \\ &= \alpha \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \frac{(|00\rangle + |11\rangle)}{\sqrt{2}} + \beta \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \frac{(|10\rangle + |01\rangle)}{\sqrt{2}} \quad (43-3) \end{aligned}$$

به یاد داشته باشید که باب کیوبیت سوم را در اختیار دارد.

مرحله ۴: آلیس جفت کیوبیتش را اندازه گیری می‌کند.

مرحله‌ی بعدی از فرایند به گونه‌ای است که آلیس روی دو کیوبیت خودش اندازه گیری را انجام می-

دهد.

رابطه‌ی (۳-۴۳) را بر حسب نتایج اندازه‌گیری ممکن $|\circ\circ\rangle$ ، $|\circ 1\rangle$ ، $|\circ 0\rangle$ و $|11\rangle$ ، روی دو کیوبیت اول بازنویسی می‌کنیم.

$$|\psi''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\circ\circ\rangle(\alpha|\circ\rangle + \beta|1\rangle) + |\circ 1\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|\circ\rangle) + |10\rangle(\alpha|\circ\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|\circ\rangle)], \quad (3-44)$$

چنانچه آلیس از اندازه‌گیری روی کیوبیت‌های خود، نتیجه‌ی $|\circ\circ\rangle$ را بدست آورد، آنگاه حالت بالا فروریزش می‌کند و در نتیجه باب حالت ناشناخته‌ی $|\chi\rangle = \alpha|\circ\rangle + \beta|1\rangle$ را در اختیار می‌گیرد. از طرف دیگر، اگر آلیس حالت $|\circ 1\rangle$ را اندازه‌گیری کند، باب حالت $|\alpha|1\rangle + \beta|\circ\rangle$ را در اختیار دارد که برای رسیدن به حالت مطلوب، بایستی از عملکرد موضعی گیت X روی این حالت استفاده کند، یعنی

$$X(\alpha|1\rangle + \beta|\circ\rangle) = \alpha X|1\rangle + \beta X|\circ\rangle = \alpha|\circ\rangle + \beta|1\rangle = |\chi\rangle. \quad (3-45)$$

حالا فرض می‌کنیم که آلیس حالت $|10\rangle$ را اندازه‌گیری می‌کند. حالتی که این بار در اختیار باب قرار می‌گیرد، $|\alpha|\circ\rangle - \beta|1\rangle$ است که باب با استفاده از گیت Z آن را تبدیل به حالت $|\chi\rangle$ می‌کند.

$$Z(\alpha|\circ\rangle - \beta|1\rangle) = \alpha Z|\circ\rangle - \beta Z|1\rangle = \alpha|\circ\rangle + \beta|1\rangle = |\chi\rangle. \quad (3-46)$$

در پایان اگر آلیس حالت $|11\rangle$ را اندازه‌گیری کند، باب حالت $|\alpha|1\rangle - \beta|\circ\rangle$ را خواهد داشت. برای رسیدن به حالتی که می‌بایست آلیس برای باب بفرستد، این بار باب باید دو گیت تک کیوبیتی X و Z را به طور همزمان روی $|\alpha|1\rangle - \beta|\circ\rangle$ اثر دهد

$$\begin{aligned} ZX(\alpha|1\rangle - \beta|\circ\rangle) &= \alpha ZX|1\rangle - \beta ZX|\circ\rangle = \alpha Z|\circ\rangle - \beta Z|1\rangle \\ &= \alpha|\circ\rangle + \beta|1\rangle = |\chi\rangle. \end{aligned} \quad (3-47)$$

اما این جا سؤالی که مطرح می‌شود این است که باب چگونه متوجه می‌شود که کدام حالت را بایستی در اختیار بگیرد؟ پاسخ را شخص آلیس از طریق یک تلفن به باب می‌گوید.

مرحله ۵ : آلیس از طریق یک کانال ارتباط دهنده‌ی کلاسیکی با باب ارتباط برقرار می‌کند و نتیجه‌ی اندازه‌گیری خود را به باب خبر می‌دهد.

در این مرحله از فرایند به طور شگفت‌آور، نسبت خاص وارد می‌شود. آلیس مجبور است به یک طریقی نتیجه‌ی اندازه‌گیری خود را به باب بگوید. برای این کار بایستی از یک کانال ارتباطاتی کلاسیکی مثلاً تلفن، پیام ایمیلی، امواج رادیویی یا وسیله‌ای دیگر استفاده کند. طرز کار این فرایند به دلیل این که آلیس و باب را از ارتباطات سریعتر از سرعت نور باز دارد، لازم و ضروری است که تقریباً تا سرعت حدی نور کنترل شده است. زمانی که آلیس به باب خبر می‌دهد و مثلاً به او می‌گوید که حالت $|0\rangle$ را بدست آورده است. آن‌گاه باب برای بدست آوردن حالتی که آلیس تصمیم داشت برای او بفرستد، گیت X را به عنوان عملکرد موضعی به کار می‌برد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که اطلاعات کوانتومی پایه‌گذاری شده بر ارتباطات کلاسیکی، با در نظر گرفتن دو مطلب مشخص می‌شوند. ۱- عملکردهای موضعی و ۲- ارتباطات کلاسیکی ($LOCC$). به عبارتی هر یک از مشاهده‌گرهای آلیس و باب دو کار زیر را بایستی انجام دهند :

✓ عملکردهای موضعی مکانیک کوانتومی را روی حالات خود به ترتیب انجام می‌دهند.

✓ ارتباطات کلاسیکی را برای مکاتبه کردن نتایج اندازه‌گیری استفاده می‌کنند.

چنانچه ارتباطات کلاسیکی در این فرایند استفاده نشود، آنگاه حالت برای باب به طور تصادفی ظاهر خواهد شد. در پایان لازم است به نکته‌ای در راستای این فرایند اشاره کنیم که بعد از تمامی این مراحل کیوبیت، باب روی حالت $|\chi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ قرار خواهد گرفت و کیوبیت آلیس بخشی از یک حالت درهم تنیده می‌شود. فرابرد حالت کوانتومی از طریق کپی کردن کیوبیتها نتیجه نمی‌یابد و از این رو این پروتکل موافق با قضیه‌ی *no-cloning* است [۵، ۲۰].

فصل ۴:

ناموضعیّت کوانتومی بدون درهم تنیدگی

- مقدمه
- اجرا نشدن ابرعملگر تفکیک‌پذیر با عملکردهای دو موضعی
- تحلیل نظری - اطلاعاتی از پروتکل اندازه‌گیری دو مرحله‌ای
- بهینه کردن اندازه‌گیری‌های موضعی
- درک ابرعملگر تفکیک‌پذیر به کمک کیوبیت‌های تسهیم شده
- ارتباط ترمودینامیک با اندازه‌گیری‌های ناموضعی
- اندازه‌گیری حالات به صورت برگشت‌ناپذیر
- فراهم سازی حالات به صورت برگشت‌ناپذیر
- و اما آنسامبل پیشنهادی...
- نتیجه‌گیری و بحث

۴-۱ مقدمه

اساس و پایه‌ی ناموضعیّت^۱ در مکانیک کوانتومی برای یک سیستم مرکب، حالات درهم تنیده^۲ است [۸]. همان طور که در فصل ۳ اشاره کردیم، حالت درهم تنیده از یک سیستم مرکب کوانتومی هیچ گونه توصیفی را بر حسب حالات اجزای تشکیل دهنده‌ی خود نمی‌پذیرد. برای مثال اگر سیستم

کوانتومی در حالت درهم تنیده $(|10\rangle_{AB} + |01\rangle_{AB}) / \sqrt{2}$ باشد، آنگاه نمی‌توان سیستم را بر حسب $|1\rangle_A \otimes |0\rangle_B$ توصیف کرد.

درهم تنیدگی کوانتومی با نقض کردن نامساوی‌های نوع بل^۳ که در آزمایشگاه ثابت شده‌اند، مدرکی برای صحت مکانیک کوانتومی به شمار می‌آید و برای پردازش کردن اطلاعات به صورتهای گوناگون مانند رمزنگاری کوانتومی، ارتباطات کمکی درهم تنیده، فرابرد کوانتومی و... استفاده می‌شود. یکی از ویژگی‌های مکانیک کوانتومی این است که در این حوزه، کپی کردن حالت کوانتومی ناشناخته امکان‌پذیر نیست و هم چنین تشخیص دادن حالات نامتعامل کوانتومی با اطمینان غیرممکن است، ولی مکانیک کلاسیک این گونه نیست. بنابراین می‌توان سیستم‌های کوانتومی که به صورت کلاسیکی رفتار می‌کنند را بر حسب مجموعه‌ای از حالات درهم ناتنیده‌ی متعامل توصیف کرد [۸، ۲۱، ۲۳].

به طور ویژه، چنانچه یک سیستم کوانتومی مرکب در یکی از چندین حالت درهم ناتنیده‌ی متعامل آماده شود، آن گاه بایستی با یک اندازه‌گیری موضعی توسط مشاهده‌گرهای سیستم روی قسمتهای جدا از هم، امکان تشخیص حالت اصلی سیستم و هم چنین کپی کردن این حالت به کمک کپی کردن حالت هر قسمت باشد. به عبارتی چنین سیستمی نمی‌تواند هیچ گونه رفتار ناموضعی از خود نشان دهد. اما در این فصل ابتدا با نمایش دادن مجموعه‌ای از حالات درهم ناتنیده‌ی متعامل کوانتومی از سیستم‌های دو قسمتی که با $|\psi_i\rangle = |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ ؛ $i = 1..9$ تعریف می‌شوند [۲۴] و با انجام محاسبات

^۱ Nonlocality^۲ Entangled States^۳ Bell-type Inequalities

صورت داده شده، ثابت می‌کنیم که چنین موردی با ویژگی های بالا وجود ندارد. به عبارت دیگر، برای این آنسامبل از حالات درهم ناتنیده، ناموضعیت کوانتومی را با ویژگی‌های زیر نشان می‌دهیم:

- حالات $\{|\psi_i\rangle\}$ را با اطمینان به کمک یک اندازه‌گیری مشترک روی کل سیستم دو ذره-ای که ناموضعیت را نشان می‌دهد، می‌توان تشخیص داد. از طرف دیگر توسط هیچ نوع اندازه‌گیری موضعی و برقرار کردن ارتباطات کلاسیکی بین آلیس و باب، امکان تشخیص حالات وجود ندارد.

- هم‌چنین عملکرد کپی‌کننده‌ی $|\psi_i\rangle \otimes |\psi_i\rangle \rightarrow |\psi_i\rangle$ ، با هیچ یک از عملکردهای موضعی موثر بر مشاهده‌پذیرها و برقراری ارتباطات کلاسیکی بین آن‌ها نمی‌تواند اجرا شود.

و سپس تمامی محاسبات را برای آنسامبل تعمیم یافته‌ای با حالات $i = 1..16$ ؛ $\phi_i = |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ بدست می‌آوریم که در حقیقت با ارزیابی کردن معیارهای کمی برای حالات درهم ناتنیده، ویژگی‌های حالات درهم تنیده مانند ناموضعیت را، باز تولید می‌کنیم. به عبارتی در این جا قادر خواهیم بود که بعضی از معیارهای کمی از ناموضعی بودن را برای حالات درهم ناتنیده تعیین کنیم. از جمله‌ی این معیارها می‌توان به آنتروپی حاصل از اندازه‌گیری و حاصل از آماده کردن حالات مورد نظر، میزان ارتباطات کوانتومی و همین‌طور اطلاعات متقابل^۴ بدست آمدنی بین مشاهده‌گرها اشاره کرد. در پایان نیز می‌توان با مقایسه کردن تمامی نتایج برای این دو آنسامبل در دو فضای مختلف، نتیجه گرفت که اگر فضای هیلبرتی که آلیس و باب در آن قرار می‌گیرند، بزرگتر از فضای هیلبرت 3×3 باشد، آن‌گاه به نتایج بهتری با احتمال موفقیت بیشتر و درصد خطای کمتر دست پیدا خواهیم کرد.

۲-۴ اجرا نشدن ابر عملگر تفکیک‌پذیر با عملکردهای دو موضعی

برای شروع کار مجموعه‌ای کامل از حالات درهم ناتنیده متعامد $i = 1..9$ ؛ $|\psi_i\rangle = |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ را که در یک فضای هیلبرت 3×3 قرار گرفته است، در نظر می‌گیریم. آلیس و باب دو مشاهده‌گری هستند که

^۴ Mutual Information

حالات $|\alpha_i\rangle$ و $|\beta_i\rangle$ را به ترتیب در یک فضای هیلبرت سه بعدی در اختیار دارند. از عبارات $|\circ\rangle$ ، $|\uparrow\rangle$ ، $|\downarrow\rangle$ برای بیان پایه‌های فضای هیلبرت آلیس و باب استفاده می‌کنیم.

این مجموعه حالات را به صورت

$ \alpha\rangle(\text{Alice})$	$ \beta\rangle(\text{Bob})$	
$\psi_1 = \uparrow\rangle$	$ \uparrow\rangle$	
$\psi_2 = \circ\rangle$	$ \circ + \uparrow\rangle$	
$\psi_3 = \circ\rangle$	$ \circ - \uparrow\rangle$	
$\psi_4 = \downarrow\rangle$	$ \uparrow + \downarrow\rangle$	(۱-۴)
$\psi_5 = \downarrow\rangle$	$ \uparrow - \downarrow\rangle$	
$\psi_6 = \uparrow + \downarrow\rangle$	$ \circ\rangle$	
$\psi_7 = \uparrow - \downarrow\rangle$	$ \circ\rangle$	
$\psi_8 = \circ + \uparrow\rangle$	$ \downarrow\rangle$	
$\psi_9 = \circ - \uparrow\rangle$	$ \downarrow\rangle$	

در نظر می‌گیریم. لازم است بدانید که عباراتی شبیه $|\circ \pm \uparrow\rangle$ را به جای عبارت $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\circ\rangle \pm |\uparrow\rangle)$ بیان می‌کنیم.

✓ این حالات در اندازه گیری مشترک آلیس و باب متعامد هستند، ولی اگر توسط آن دو به

تنهایی اندازه گرفته بشوند، دیگر متعامد نخواهند بود.

برای مثال

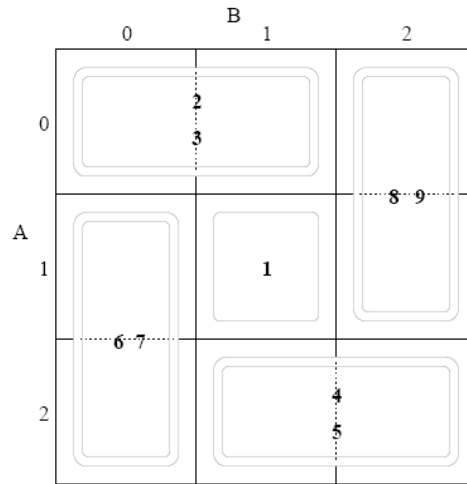
$$\langle \psi_2 | \psi_3 \rangle = \langle \circ | \otimes \langle \circ + \uparrow | \circ \rangle \otimes \langle \circ - \uparrow | \rangle = (\langle \circ | \otimes \langle \circ + \uparrow | \rangle) (\langle \circ | \otimes \langle \circ - \uparrow | \rangle) = \langle \circ | \otimes \langle \circ | \rangle - \langle \circ | \otimes \langle \uparrow | \rangle + \langle \uparrow | \otimes \langle \circ | \rangle - \langle \uparrow | \otimes \langle \uparrow | \rangle = 0$$

$$\langle \alpha_r | \alpha_r \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1 \neq 0 \quad \text{از طرفی}$$

$$\langle \beta_r | \beta_r \rangle = \langle 0+1 | 0-1 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle - \langle 0 | 1 \rangle + \langle 1 | 0 \rangle - \langle 1 | 1 \rangle = 2 \operatorname{Im}(\langle 0 | 1 \rangle) \neq 0$$

البته برای رسیدن به پاسخهای بالا از رابطه‌ی $\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$ استفاده کرده‌ایم [۵].

به صورت نمادین این ۹ تا حالت را که ۸ حالت آن به صورت بر هم نهی از پایه‌های فضای هیلبرت آلیس و باب هستند، توسط چهار جفت ناحیه (دومینو) نشان می‌دهیم.



شکل ۴-۱: نمایش دومینوای از آنسامبلی با ۹ حالت درهم ناتنیده‌ی متعامد

در ادامه نشان خواهیم داد که ابرعملگر تفکیک‌پذیر^۱ $S(\rho) = \sum_i S_i \rho S_i^\dagger$ که شامل عملگرهای تصویر

$$S_i = |i\rangle_A \langle i|_B \langle \psi_i| \quad (۲-۴)$$

است، توسط عملکردهای موضعی آلیس و باب اجرا نمی‌شود، حتی اگر بین آن‌ها ارتباطات کلاسیکی برقرار باشد. این عملگر تصویری به دلیل خطی بودن، با اندازه‌گیری معمولی فون نیومن^۲ مطابقت می‌کند. برای بررسی این مسئله بازی زیر را در نظر می‌گیریم:

آلیس و باب سیستم دو قسمتی خود را به طور تصادفی در یکی از ۹ حالت درهم ناتنیده‌ی متعامد بالا آماده می‌کنند. در پروتکل اندازه‌گیری دو موضعی آن‌ها، هدف تشخیص دادن حالت مورد نظر با اندیس i معین خواهد بود.

^۱ Separable superoperator

^۲ J. Von Neumann

یکی از مشاهده‌گرها مثلاً آلیس، با انجام دادن مجموعه‌ای از عملکردهای موضعی، پروتکل اندازه‌گیری را آغاز می‌کند که معمولی‌ترین عملکرد او می‌تواند توسط عناصر عملگری زیر تعیین شود:

$$A_{r1} \otimes I_B \quad (3-4)$$

که مقدار $r1$ در واقع، مقدار نتیجه بدست آمده از مرحله‌ی ۱ از اندازه‌گیری که آلیس آن را برای باب گزارش می‌کند. به دنبال گزارش آلیس، باب عملکرد موضعی خودش را به صورت

$$I_A \otimes B_{rr}(r1) \quad (4-4)$$

انجام می‌دهد و آلیس را از نتیجه اندازه‌گیری آگاه می‌سازد. مشاهده می‌کنیم که اندازه‌گیری‌ها به گونه‌ای طراحی می‌شوند که مشاهده‌گرها روی حالت انتخابی یکدیگر تأثیری نمی‌گذارند. به عبارت دیگر، عملگرهای آن‌ها در فضای هیلبرت دیگری به صورت یک عملگر همانی I است و به همین ترتیب فرایند تکرار می‌شود. پس از n بار تکرار اندازه‌گیری‌ها، عملگر اصلی اندازه‌گیری برای تأثیر گذاشتن روی حالت مورد نظر به صورت

$$S_m = A_m \otimes B_m \quad (5-4)$$

خواهد بود که در این رابطه

$$A_m = A_m(r1, r2, \dots, r(n-1)) \dots A_{rr}(r1, r2) A_{r1} \quad (6-4)$$

$$B_m = B_{r(n-1)}(r1, r2, \dots, r(n-2)) \dots B_{rr}(r1, r2, r3) B_{rr}(r1) \quad (7-4)$$

برقرار است. اندیس m در روابط بالا می‌تواند به عنوان زنجیره‌ای از تمام اطلاعات حاصل از n بار تکرار اندازه‌گیری‌ها در نظر گرفته بشود:

$$m = r1 : r2 : r3 : \dots : m. \quad (8-4)$$

روابط (۵-۴)، (۶-۴) و (۷-۴)، این حقیقت را که تمامی عملگرهای دو موضعی آلیس و باب می‌توانند به صورت عملگرهای تفکیک‌پذیر بیان شوند، را نشان می‌دهند و این برعکس نتیجه‌ای است که برای عملگر تصویری رابطه‌ی (۲-۴) مطابق با پروتکل اندازه‌گیری آنسامبل ۹ حالتی، رد کردیم.

حالات در پایه‌های موضعی فضاهای هیلبرت آلیس و باب قابل تشخیص نیستند. به عبارت دیگر، چنانچه آلیس و باب برای سیستم دو قسمتی خود به تنهایی، هر یک از ۹ حالت درهم ناتنیده‌ی متعامد رابطه (۴-۱) را آماده کنند، آن گاه حالات بدست آمده با اطمینان قابل تشخیص نیستند. بهتر است بدانید که پروتکل دو موضعی آلیس و باب شامل دو مرحله می‌شود:

✓ مرحله‌ی ۱: مرحله‌ای است که در آن آلیس و باب، حالت $|\psi_i\rangle$ ایی را که برای سیستم دو قسمتی خود انتخاب می‌کنند، به کمک عملگر (۴-۵) به حالت

$$\phi_{i,m} \equiv S_m |\psi_i\rangle = \frac{S_m |\psi_i\rangle}{\sqrt{\langle \psi_i | S_m^t S_m | \psi_i \rangle}} \quad (۹-۴)$$

تبدیل کرده و سپس به نتیجه‌ی اندازه‌گیری هر یک از حالات مورد نظر، مقدار احتمال ویژه‌ی ای را نسبت دهند.

✓ مرحله‌ی ۲: مرحله‌ای است که شامل تمام عملکردهای انجام شده روی حالات، یعنی از پایان مرحله‌ی ۱ تا کامل شدن پروتکل اندازه‌گیری دو موضعی می‌باشد. البته در این مرحله به دلیل تمییز ناپذیر بودن حالات بدست آمده از مرحله‌ی ۱، از عناصر عملگری $\{M_b\}$ که مجموعه‌ی عملگرهای $POVM$ را تشکیل می‌دهند، به منظور تشخیص دادن حالات نامتعامد به طور ناقص استفاد می‌شود.

چنانچه بعد از اجرای مرحله‌ی ۱ از اندازه‌گیری، زنجیره‌ی m از نتایج n بار تکرار اندازه‌گیری، بدست آمده باشد، آنگاه با استفاده از قضیه بیز^۳ [۲۵،۲۶]، احتمال پیدا کردن حالت $|\psi_i\rangle$ ، مشروط بر دانستن مقدار نتیجه‌ی m ، یعنی $P(\psi_i|m)$ برابر است با

$$P(\psi_i|m) = \frac{P(m|\psi_i)P(\psi_i)}{\sum_j P(m|\psi_j)P(\psi_j)} \quad (۱۰-۴)$$

^۳ Bayes` Theorem

که $P(\psi_i)$ و $P(\psi_j)$ ، احتمال اولیه‌ی هر یک از حالات است که برای همه یکسان و برابر با $\frac{1}{q}$ می‌باشد.

با کمک گرفتن از روابط قسمت ۲-۶، برای عبارت $P(m|\psi_i)$ نیز خواهیم داشت:

$$P(m|\psi_i) = |S_m|\psi_i\rangle|^2 = \langle\psi_i|S_m^\dagger S_m|\psi_i\rangle = \text{Tr}(S_m|\psi_i\rangle\langle\psi_i|S_m^\dagger) \quad (۱۱-۴)$$

چنانچه پروتکل اندازه گیری فقط شامل اندازه گیری‌های ضعیف باشد (اختلال بین سیستم و دستگاه اندازه گیری کننده نباشد [۱۲])، عملگرهای آلیس و باب می‌توانند به صورت تقریبی مانند عملگرهای همانی I عمل کنند. از طرفی اگر پروتکل در کنار اندازه گیری‌های ضعیف، اندازه گیری‌های قوی را نیز در برداشته باشد^۴، آن گاه عملگرها حتی به صورت تقریبی هم متناسب با عملگر همانی نخواهند بود. از این رو بایستی یک پروتکل اصلاح شده‌ای به نحوی فراهم شود که تنها شامل اندازه گیری‌های ضعیف باشد. در چنین وضعیتی میزان اطلاعات بدست آمده از حالات بعد از انجام تمامی اندازه گیری‌ها (ضعیف) دقیقاً همان اطلاعات حاصل از پروتکل اندازه گیری دو موضعی می‌باشد که هر دو اندازه گیری را شامل می‌شود. در چنین پروتکل اصلاح شده‌ای، برای مرحله‌ی ۱ از اندازه گیری ضعیف، نقطه پایانی وجود دارد که در آن می‌توان به نتیجه‌ی بدست آمده از این مرحله، احتمال ویژه‌ای را نسبت داد. به دلیل این که آلیس و باب توسط عملگرهای موضعی خود، تنها حدودی از اطلاعات حاصل از نتایج را از یکدیگر (اطلاعات متقابل) دریافت می‌کنند، بنابراین پروتکل اندازه گیری اصلاح شده نمی‌تواند به طور مؤفقیّت آمیز اجرا شود. این رویداد به نوعی رفتار جدیدی از ناموضعیّت را برای تمامی اندازه گیری‌ها روی این حالات درهم ناتنیده، نشان می‌دهد.

این پروتکل اندازه گیری اصلاح شده به یک روش خیلی ساده فراهم می‌شود:

در این پروتکل دقیقاً همان مراحل پروتکل اصلی اندازه گیری انجام می‌شود، فقط به استثنای این که همواره نتایج حاصل از یک اندازه گیری قوی انجام شده توسط یکی از مشاهده‌گرها که از طریق کانالهای ارتباطی کلاسیکی به مشاهده‌گر دیگر فرستاده می‌شود، خود در معرض مجموعه‌ای از اندازه

^۴برای توضیح این اندازه گیری ها به فصل ۲ مراجعه کنید.

گیری‌های ضعیف قرار می‌گیرد که نتایج این اندازه‌گیری‌ها به زنجیره‌ی اطلاعاتی m از اندازه‌گیری قوی در پروتکل اضافه می‌شود.

همان‌طور که در فصل ۲ اشاره کردیم، این اندازه‌گیری‌ها به گونه‌ای طراحی می‌شوند که تقریباً اطلاعات درست و کاملی را پیرامون نتایج اندازه‌گیری‌های قوی از پروتکل دوموضعی اصلی آلیس و باب بدست می‌آورند.

اقدام لازم در پروتکل اندازه‌گیری اصلاح شده، تغییر در ساختار کانال کلاسیکی بین آلیس و باب می‌باشد که از دو شخصیت فرعی به نام‌های آلیس^۴ و باب^۴ کمک گرفته می‌شود. زمانی که آلیس و باب اطلاعات حاصل از اندازه‌گیری‌های موضعی خود را به صورت \circ و 1 از طریق کانال کلاسیکی برای یکدیگر گزارش می‌کنند، آلیس^۴ بیت انتقال داده شده توسط آلیس را امتحان می‌کند:

✓ اگر بیت \circ باشد، او روی سکه‌ای را که در اختیار دارد، انتخاب می‌کند و آن را به درون کانال کلاسیکی می‌فرستد.

✓ و اگر بیت 1 باشد، او پشت سکه را انتخاب کرده و سپس آن را به درون کانال می‌فرستد. بعد از آن که آلیس^۴ بیت انتقالی از سمت آلیس را امتحان کرد، سپس باب^۴ با دلیل و مدرک، انتخاب کردن پشت و روی سکه توسط آلیس^۴ را استنباط و نتیجه را برای باب گزارش می‌کند. مشاهده می‌کنیم که پروتکل اندازه‌گیری اصلاح شده به همراه تحول پیوسته‌ای^۵ از اطلاعات بدست آمده، انجام می‌شود.

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، مراحل پروتکل اندازه‌گیری اصلاح شده مشابه دو مرحله‌ی تعریف شده برای پروتکل اصلی می‌باشند. مرحله‌ی ۱ از این پروتکل، مرحله‌ای خواهد بود که به نتایج بدست آمده بعد از تأثیر عملگر تفکیک‌پذیر S_m ، مقدار احتمال ویژه‌ی

$$\begin{aligned} \text{Max}_i P(\psi_i | m) &= \frac{1}{q} + \varepsilon \\ \text{Min}_i P(\psi_i | m) &\geq \frac{1}{q} - \lambda \varepsilon \end{aligned} \quad (12-4)$$

^۵ Continuous Evolution

را نسبت داد و مرحله ی ۱ را تمام شده در نظر گرفت. ε در رابطه ی بالا عددی کوچکتر از $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است. از طرفی با توجه به $|\psi_i\rangle = |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ ؛ $i=1..9$ و تعریف $P(m|\psi_i)$ در رابطه ی (۴-۱۱)، برای $P(\psi_i|m)$ در رابطه ی (۴-۱۰) خواهیم داشت:

$$P(\psi_i|m) = \quad (۴-۱۳)$$

$$\frac{P(m|\psi_i)P(\psi_i)}{\sum_j P(m|\psi_j)P(\psi_j)} = \frac{P(m|\psi_i)}{\sum_j P(m|\psi_j)} = \frac{\langle \psi_i | E_m | \psi_i \rangle}{\sum_j \langle \psi_j | E_m | \psi_j \rangle} = \frac{\langle \alpha_i | a_m | \alpha_i \rangle \langle \beta_i | b_m | \beta_i \rangle}{\sum_j \langle \psi_j | E_m | \psi_j \rangle}$$

و به طور مشابه برای $P(\psi_j|m)$ نیز داریم:

$$P(\psi_j|m) = \frac{\langle \alpha_j | a_m | \alpha_j \rangle \langle \beta_j | b_m | \beta_j \rangle}{\sum_i \langle \psi_i | E_m | \psi_i \rangle}$$

که در این روابط از عبارات مختصر شده زیر استفاده کردیم:

$$E_m = S_m^t S_m = a_m \otimes b_m,$$

$$a_m = A_m^t A_m, \quad (۴-۱۴)$$

$$b_m = B_m^t B_m.$$

هنگامی که مرحله ی ۱ را با نسبت دادن مقادیر ویژه ی (۴-۱۲)، تمام شده در نظر می گیریم، آن گاه می توان با استفاده از دو رابطه ی (۴-۱۲) و (۴-۱۳) و هم چنین دو به دو تقسیم کردن روابط زیر،

$$\max_i P(\psi_i|m) \leq \frac{1}{9} + \varepsilon = \frac{1+9\varepsilon}{9}$$

$$\max_j P(\psi_j|m) \leq \frac{1}{9} - 8\varepsilon = \frac{1-72\varepsilon}{9}$$

$$\max_i P(\psi_i|m) \geq 1 - \left(\frac{1}{9} - 8\varepsilon\right) = \frac{8+72\varepsilon}{9}$$

$$\max_j P(\psi_j|m) \geq 1 - \left(\frac{1}{9} + \varepsilon\right) = \frac{8-9\varepsilon}{9}$$

بزرگترین گستره ی ممکن برای توزیع چگالی احتمال را به صورت زیر بدست آورد.

$$\frac{8+72\varepsilon}{8-9\varepsilon} \leq \max_{i,j} \frac{P(\psi_i|m)}{P(\psi_j|m)} = \max_{i,j} \frac{\langle \alpha_i | a | \alpha_i \rangle \langle \beta_i | b | \beta_i \rangle}{\langle \alpha_j | a | \alpha_j \rangle \langle \beta_j | b | \beta_j \rangle} \leq \frac{1+9\varepsilon}{1-72\varepsilon} \quad (۴-۱۵)$$

یک نتیجه ی مهم از بیان کردن این رابطه این است که کران بالا همواره عناصر ماتریسی قطری غیر

صفری از $\langle \alpha_i | a | \alpha_i \rangle$ و $\langle \beta_i | b | \beta_i \rangle$ را نتیجه می دهد و کران پایین نیز، بیشینه توزیع چگالی احتمالی را

که آلیس به تنهایی با تأثیر عملگر تفکیک‌پذیر خود می‌تواند برای حالاتش بدست آورد به صورت زیر نشان می‌دهد:

$$\max_{i,j} \frac{\langle \alpha_i | a | \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j | a | \alpha_j \rangle} \geq \sqrt{\frac{1+72\varepsilon}{1-9\varepsilon}} \quad (16-4)$$

برای بیشینه توزیع چگالی احتمال نتایج بدست آمده توسط باب نیز، عبارتی مشابه بالا داریم. این رابطه نشان می‌دهد که پروتکل اصلاح شده به گونه‌ای است که عملگرهای موضعی آلیس و باب یعنی a و b ، به طور تقریبی متناسب با عملگر همانی I خواهند بود. در نتیجه پروتکل اندازه‌گیری اصلاح شده فقط شامل اندازه‌گیری‌های ضعیف بدون اختلال می‌شود.

از رابطه (16-4) می‌توان نتیجه گرفت که حالات $\phi_{i,m}$ ی بدست آمده از مرحله ی ۱، به اندازه کافی متعامد نیستند و به اندازه‌ای ناچیز همپوشانی دارند. (این میزان همپوشانی حالات به لحاظ کمی قابل تعیین است.) در نتیجه آلیس و باب نمی‌توانند حالت اصلی سیستم را با اطمینان ۱۰۰٪ تشخیص دهند.

در این جا می‌خواهیم به طور دقیق گستره‌ای را که در آن هر دو حالت از آنسامبل جدید بدست آمده از مرحله ی ۱ از پروتکل اصلاح شده به اندازه ی δ همپوشانی دارند را محاسبه کنیم. این گستره به کمک مقدار معلوم متناهی و محدود δ تعیین می‌شود؛ به طوری که رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$\begin{aligned} \max_{i,j} \langle \phi_{i,m} | \phi_{j,m} \rangle &= \\ \max_{i,j} \frac{|\langle \psi_i | S_m^t S_m | \psi_j \rangle|}{\sqrt{\langle \psi_i | S_m^t S_m | \psi_i \rangle} \sqrt{\langle \psi_j | S_m^t S_m | \psi_j \rangle}} &= \\ \max_{i,j} \frac{|\langle \psi_i | a_m \otimes b_m | \psi_j \rangle|}{\sqrt{\langle \psi_i | a_m \otimes b_m | \psi_i \rangle} \sqrt{\langle \psi_j | a_m \otimes b_m | \psi_j \rangle}} &\leq \delta \end{aligned} \quad (17-4)$$

از آن جایی که با توجه به (16-4)، عملگرهای موضعی آلیس و باب بایستی متناسب با عملگر همانی I باشند، در نتیجه باید رابطه‌ی $\delta = O(\varepsilon)$ برقرار باشد. در این صورت به طور هم زمان دو رابطه (16-4) و (17-4) در یکدیگر صدق می‌کنند. به عبارتی رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$\max_{i,j} \frac{\langle \alpha_i | a | \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j | a | \alpha_j \rangle} \leq 1 + O(\delta) \quad (18-4)$$

در پایان این قسمت می توان نتیجه گرفت :

✓ به دلیل این که آلیس و باب برای اندازه گیری ها روی حالات مورد نظر، از عملگرهای دو موضعی استفاده می کنند و در نتیجه از میزان دقت ۱۰۰٪ در تشخیص دادن حالات کاسته می شود، پروتکل با موفقیت اجرا نمی شود.

۳-۴ تحلیل نظری - اطلاعاتی از پروتکل اندازه گیری دو مرحله ای

در این قسمت یک تحلیل کمی از نتایج نامتعامل بودن حالات بدست آمده بعد از اتمام مرحله ی ۱ از پروتکل اندازه گیری اصلاح شده را بررسی می کنیم و برای اطلاعاتی که آلیس و باب، یکدیگر را از نتایج اندازه گیری های موضعی خود باخبر می کنند، کران بالایی را بدست می آوریم. برای دست یابی به این کران بالا از اطلاعات، کمیت سنج متداول کلاسیکی تحت عنوان اطلاعات متقابل را بکار می بریم که در واقع میزان وابستگی متقابل بین دو یا چند متغیر را اندازه گیری می کند [۱،۲]. برای این معیار کمی که با آن رفتار ناموضعی از حالات درهم نانتیده سنجیده می شود، سه متغیر تصادفی به صورت زیر تعریف می کنیم:

۱- متغیر تصادفی مجهول W که نشان دهنده ی شناسایی بر چسب i از ۹ حالت آنسامبل معرفی شده در بالا است.

۲- متغیر تصادفی معلوم M_r که نتایج حاصل از اندازه گیری در مرحله ی ۱ را از پروتکل نشان می دهد.

۱- متغیر تصادفی معلوم M_r که نشان دهنده ی نتایج بدست آمده از مرحله ی ۲ از اندازه گیری می باشد.

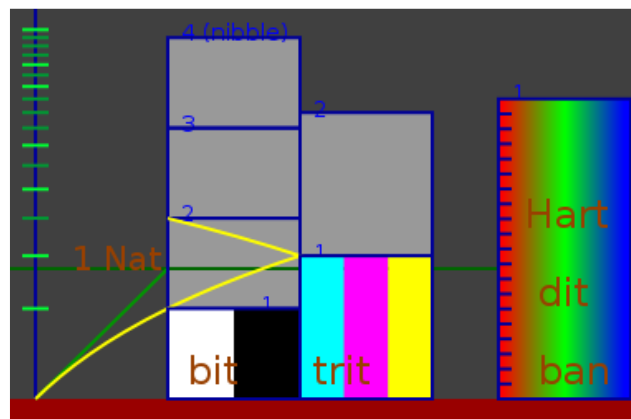
با معرفی این سه متغیر، اطلاعات متقابل قابل حصول را به صورت $I(W; M_r, M_r)$ در نظر می گیریم.

بهتر است بدانید که در رایانه‌های کوانتومی مقادیر کم اطلاعات تنها به صورت لگاریتم تعداد حالات کوانتومی که دارای احتمال یکسان هستند، بیان می‌شود و به قول شانن انتخاب پایه لگاریتمی با انتخاب واحدی برای اندازه‌گیری کردن اطلاعات کوانتومی مطابقت می‌کند.

عدد ۲، کوچکترین عدد صحیحی است که برای تابع لگاریتم مقدار مثبت بدست می‌آورد. واحدی که مطابق با این عدد برای اندازه‌گیری اطلاعات مناسب است، بیت^۶ نامیده می‌شود. در واقع بیت، پایه‌ی اندازه‌گیری اطلاعات در تکنولوژی اطلاعات جدید می‌باشد. واحد اندازه‌گیری اطلاعات برای سه حالت کوانتومی، تریت^۷ است که مقدار $\log_3 2 \approx 1/515$ بیت اطلاعات را از آنسامبل سه حالتی متساوی الاحتمال به همراه دارد.

هم چنین واحد اطلاعاتی برای آنسامبل ۱۰ حالتی متساوی الاحتمال بن^۸ نامیده می‌شود که برابر با $\log_2 10 \approx 3/322$ کیوبیت می‌باشد [۲۷].

مقایسه‌ای از این واحدها را در شکل (۴-۲) آورده‌ایم.



شکل ۴-۲: مقایسه‌ی واحدهای اطلاعاتی : بیت ، تریت ، بن و...

^۶ Bit

^۷ Trit

^۸ Ban

به ادامه‌ی بحث بر می‌گردیم. با توجه به تعاریف گفته شده در بالا، اطلاعات متقابل بدست آمدنی از یک اندازه‌گیری کامل و بی‌عیب و نقص برای تشخیص دادن آنسامبل ۹ حالتی متساوی‌الاحتمال، برابر با $\log_2^9 \approx 3/175$ بیت خواهد بود. اما در این‌جا می‌خواهیم نشان دهیم که برای پروتکل اصلاح شده‌ی دو مرحله‌ای از آلیس و باب، $I(W; M_r, M_r)$ کمتر از مقدار $3/175$ بیت اطلاعات است و در نتیجه مشاهده‌گرها، اطلاعات کاملی را از یکدیگر دریافت نمی‌کنند.

همان‌طور که در فصل ۳ اشاره شد، تابع آنتروپی شانن^۱ برای آنسامبل $X = \{x, p(x)\}$ ؛ x به عنوان متغیر تصادفی شناخته می‌شود، به صورت

$$H(X) = \sum_x -p(x) \log_2^{p(x)} \quad (19-4)$$

می‌باشد، چنانچه یک پیام n حرفی به صورت x_1, x_2, \dots, x_n و با احتمال $P(x_1, \dots, x_n) = p(x_1)p(x_2)\dots p(x_n)$ اندازه‌گیری شود و سپس از دو طرف رابطه‌ی احتمال، لگاریتم بگیریم، آنگاه تابع آنتروپی شانن، با بکارگیری قضیه‌ی حد مرکزی^۲ [۲۶، ۲۵] به صورت زیر خواهد بود:

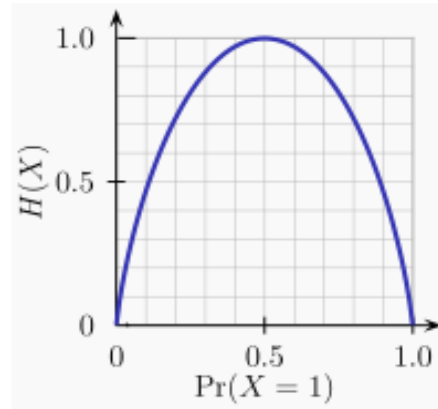
$$\log P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \log p(x_i) \quad (20-4)$$

$$-\frac{1}{n} \log P(x_1, \dots, x_n) \approx \langle -\log p(x) \rangle \equiv H(X)$$

که در واقع می‌تواند به کمک متغیر تصادفی معلوم $X = \{x, p(x)\}$ میزان اطلاعاتی را پیرامون متغیر تصادفی دیگر به صورت کمی بدست آورد [۱]. برای مثال نمودار تابع آنتروپی $H(X)$ برای پرتاب سکه در شکل (۳-۴) ترسیم شده است.

^۱ Shannon Entropy

^۲ Central limit Theorem



شکل ۴-۳: نمودار تابع آنترپوی شانن برحسب احتمال

در نظریه‌ی اطلاعات کلاسیکی، در کنار تابع آنترپوی شانن، کمیت دیگری تحت عنوان اطلاعات متقابل $I(X;Y)$ وجود دارد که وابستگی متقابل بین دو آنسامبل $X = \{x, p(x)\}$ و $Y = \{y, p(y)\}$ را می‌تواند به صورت کمی اندازه‌گیری کند. چنانچه بخواهیم با داشتن آگاهی از آنسامبل Y ، اطلاعاتی

را پیرامون آنسامبل X به صورت کمی اندازه‌گیری کنیم، آنگاه آنترپوی شرطی^۳ شانن را به صورت

$$H(X|Y) = \langle -\log p(x|y) \rangle \quad (۲۱-۴)$$

خواهیم داشت. به دلیل همبستگی^۴ دو آنسامبل، از عبارت $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)}$ برای رابطه‌ی (۲۱-۴)

استفاده می‌کنیم، در نتیجه عبارت زیر بدست می‌آید:

$$H(X|Y) = \langle -\log p(x,y) + \log p(y) \rangle = H(X,Y) - H(Y) \quad (۲۲-۴)$$

با توجه به متقارن بودن تابع آنترپوی، با تعویض مکان X و Y به طور مشابه برای $H(Y|X)$ نیز داریم:

$$H(Y|X) = \langle -\log p(y|x) \rangle = \left\langle -\log \left(\frac{p(x,y)}{p(x)} \right) \right\rangle = H(Y,X) - H(X)$$

و اما اطلاعات متقابل پیرامون متغیر تصادفی مجهول X ، به شرط داشتن آگاهی از متغیر تصادفی Y به صورت

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (۲۳-۴)$$

خواهد بود. به دلیل این که $I(X;Y)$ ، یک کمیت نامنفی باشد [۱]، پس می‌توان رابطه‌ی

^۳ Condition Entropy

^۴ Correlation

$$I(X;Y) \geq 0 \Rightarrow H(X) - H(X|Y) \geq 0 \Rightarrow H(X) \geq H(X|Y) \geq 0$$

را برای (۲۳-۴) نوشت. نامساوی‌های اخیر از تحدب تابع لگاریتم آنتروپی نتیجه می‌شوند. البته زمانی که دو آنسامبل با یکدیگر همبسته نباشند، آنگاه با برقراری رابطه‌ی $p(x, y) = p(x)p(y)$ ، حتی با آگاهی داشتن از آنسامبل Y ، هیچ گونه اطلاعاتی را پیرامون آنسامبل X نمی‌توان اندازه‌گیری کرد.

$$I(X;Y) \equiv \left\langle \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right\rangle = 0 \quad (24-4)$$

بعد از بیان تعاریف شان در نظریه‌ی اطلاعات کلاسیکی، به مسئله‌ی اصلی بر می‌گردیم. از متغیرهای M_r ، M_s و W به ترتیب به جای متغیرهای تصادفی Y و X استفاده می‌کنیم.

با استفاده از خاصیت جمع‌پذیر بودن اطلاعات متقابل [۱، ۲۸]، برای اطلاعات بدست آمده توسط آلیس و باب بعد از اتمام دو مرحله‌ی اندازه‌گیری، می‌توان رابطه‌ی

$$I(W; M_r, M_s) = I(W; M_r | M_s) + I(W; M_s) \quad (25-4)$$

را نوشت. جمله‌ی اول در طرف راست رابطه، میانگین تمامی اطلاعات بدست آمده از مرحله‌ی ۱ است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$I(W; M_r | M_s) = \sum_m p(m) I(W; M_r | m) \quad (26-4)$$

که $p(m) = \sum_j p(m | \psi_j) p(\psi_j)$ است. جمله‌ی دوم هم مطابق با تعریف اطلاعات متقابل برابر با:

$$I(W; M_s) = H(W) - H(W | M_s) \quad (27-4)$$

خواهد بود که در آن عبارت $H(W | M_s) = \sum_m p(m) H(W | m)$ (میانگین تمامی آنتروپی‌های بدست آمده از دو مرحله‌ی اندازه‌گیری) را می‌توان نوشت.

میزان آنتروپی شان برای آنسامبل ۹ حالتی متساوی الاحتمال برابر با $H(W) = \log_2 9 \approx 3.175$ بیت اطلاعات است که برای بدست آوردن آن به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$H(W) = - \sum_{i=1}^9 p_i \log_2 p_i = - \left(\frac{1}{9} \log_2 \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \log_2 \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{9} \log_2 \frac{1}{9} \right) = - \log_2 \frac{1}{9} \approx 3.175$$

با جایگزین کردن تمامی روابط بدست آمده در بالا، برای رابطه‌ی (۴-۲۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I(W; M_r, M_r) &= \log_r^4 - \sum_m p(m)H(W|m) + \sum_m p(m)I(W; M_r|m) \\ &= \log_r^4 - \sum_m p(m)(H(W|m) - I(W; M_r|m)) \end{aligned} \quad (۴-۲۸)$$

به دلیل این که آلیس و باب برای تشخیص دادن حالت اصلی سیستم دو قسمتی، از عملگرهای دو موضعی خود استفاده می‌کنند، در نتیجه از طریق ارتباطات کلاسیکی، اطلاعات کامل $\log_r^4 \approx 3/175$ بیت را پیرامون حالت مورد نظر بدست نمی‌آورند. به عبارتی میزان اطلاعاتی که مشاهده گرها از یکدیگر می‌توانند بدست آورند، کمتر از \log_r^4 بیت خواهد بود.

برای نشان دادن این مطلب فرض می‌کنیم که حالات کوانتومی که بعد از تأثیر عملگر S_m ، در پایان مرحله‌ی ۱ بدست می‌آیند (رابطه‌ی (۴-۹))، توسط ماتریس چگالی

$$q_i = p(\psi_i|m) \quad \rho_i = \sum_j p(\psi_j|m) |\psi_{ij}\rangle\langle\psi_{ij}| = |\phi_{i,m}\rangle\langle\phi_{i,m}|$$

قرار می‌دهیم. همانطور که قبلاً اشاره شد، در مرحله‌ی ۲ از مجموعه عناصر $\{M_b\}$ به عنوان عملگرهای اندازه گیری روی حالات تبدیل یافته شده با نتایج بدست آمده‌ی m استفاده می‌کنیم که بعد از اندازه گیری، حالات آماده شده را با ماتریس چگالی $\rho = \sum_{i=1}^4 q_i \rho_i$ نمایش می‌دهیم و همچنین

$$\text{عبارت } I(W; M_r|m) = I(M_r; W|m) \text{ را در محاسبات بکار می‌گیریم.}$$

بهرتر است بدانید که با توجه به تعریف اصلی تابع آنتروپی و احتمالات اندازه گیری حالات در این مرحله یعنی $q_i = p(\psi_i|m)$ ، میزان آنتروپی شانن برای $H(W|m)$ ، برابر است با:

$$H(W|m) = -\sum_m p(\psi_i|m) \log p(\psi_i|m) = -\sum_{i=1}^4 q_i \log q_i \quad (۴-۲۹)$$

حالا می‌خواهیم به کمک تعاریف بالا عبارتی را که با $I(M_r; W|m)$ معادل است بدست آوریم:

$$I(M_r; W|m) = H(M_r|m) - H(M_r|W, m) \quad (۴-۳۰)$$

به کمک رابطه $p(x, y) = p(x|y)p(y)$ و دانستن این نکته که در مرحله ی ۲، مقدار متوسط مشاهده پذیر M_b یعنی $tr(\rho M_b)$ ، احتمال پیدا کردن حالات است، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I(M_r; W|m) &= \langle -\log p(M_r, m) + \log p(m) + \log p(M_r, W, m) - \log p(W, m) \rangle = \\ &= -\sum_b (tr \rho M_b) \log(tr \rho M_b) + \sum_{i=1}^q q_i \log q_i + \sum_{i=1}^q q_i \sum_b (tr \rho_i M_b) \log(tr \rho_i M_b) - \sum_{i=1}^q q_i \log q_i \\ &= -\sum_b (tr \rho M_b) \log(tr \rho M_b) + \sum_{i=1}^q q_i \sum_b (tr \rho_i M_b) \log(tr \rho_i M_b) \end{aligned} \quad (31-4)$$

آنسامبل حالات آماده شده بعد از اتمام مرحله ی ۱ را به دو آنسامبل حالات $\phi_{r,m}$ و $\phi_{l,m}$ که به ترتیب معرف حالات با $i=1,2$ و $i=3 \dots q$ هستند، تفکیک می کنیم. در چنین وضعیتی ماتریس چگالی ρ که نشان دهنده ی حالات بعد از اتمام مرحله ی ۲ است، به دو ماتریس τ_l و τ_r به صورت زیر

$$\tau_l = \sum_{i=1}^r \frac{q_i}{s_l} \rho_i \quad ; \quad \tau_r = \sum_{i=r}^q \frac{q_i}{s_r} \rho_i \quad (32-4)$$

تفکیک می شود که $s_l = q_l + q_r$ و $s_r = 1 - s_l = \sum_{i=r}^q q_i$ می باشد.

$$\rho = \sum_{i=1}^q q_i \rho_i = s_l \sum_{i=1}^r \frac{1}{s_l} q_i \rho_i + s_r \sum_{i=r}^q \frac{1}{s_r} q_i \rho_i = s_l \tau_l + s_r \tau_r \quad (33-4)$$

البته می توانیم برای این تفکیک پذیری ماتریس چگالی، دو متغیر تصادفی W_l و W_r که هر کدام به ترتیب نشان دهنده ی شناسایی برچسب i از $i=1,2$ و $i=3 \dots q$ هستند را معرفی کنیم.

با توجه به رابطه (۲۸-۴) و این که تمام اعضای جمع در طرف راست رابطه بایستی مثبت باشد، در نتیجه جمله ی $I(M_r; W|m)$ باید همواره منفی باشد، به عبارتی رابطه ی $I(M_r; W|m) = H(M_r|m) - H(M_r|W, m) \leq 0$ برقرار باشد. از این رو رابطه ی (۲۹-۴) را بعد از تفکیک کردن جمع روی i می توان به صورت زیر نوشت:

$$H(W|m) = -\sum_{i=1}^q q_i \log q_i = -\sum_{i=1}^r \frac{q_i}{s_l} \log \frac{q_i}{s_l} - \sum_{i=r}^q \frac{q_i}{s_r} \log \frac{q_i}{s_r} = H(W_l|m) + H(W_r|m) \geq$$

$$I(M_r; W|m) = I(M_r; W_l|m) + I(M_r; W_r|m)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
I(M_r; W|m) &= -\sum_b (tr \rho M_b) \log(tr \rho M_b) + \sum_{i=1}^q q_i \sum_b (tr \rho_i M_b) \log(tr \rho_i M_b) \leq 0 \\
\Rightarrow -\sum_b (tr \rho M_b) \log(tr \rho M_b) &\leq -\sum_{i=1}^q q_i \sum_b (tr \rho_i M_b) \log(tr \rho_i M_b) = \\
-s_1 \sum_b (tr \tau_1 M_b) \log(tr \tau_1 M_b) &- s_r \sum_b (tr \tau_r M_b) \log(tr \tau_r M_b) - s_1 \log s_1 - s_r \log s_r
\end{aligned}$$

برقرار است و می‌توان به کمک تابع آنتروپی دو-دویی^۵ $h(x) = -x \log x - (1-x) \log (1-x)$ به جای

دو جمله‌ی آخر به طور خلاصه $h(s_i)$ را قرار داد [۱۹]، از این رو خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
-\sum_b (tr \rho M_b) \log(tr \rho M_b) &\leq -s_1 \sum_b (tr \tau_1 M_b) \log(tr \tau_1 M_b) \\
-s_r \sum_b (tr \tau_r M_b) \log(tr \tau_r M_b) &+ h(s_1)
\end{aligned} \tag{۳۴-۴}$$

چنانچه دو طرف رابطه‌ی

$$\begin{aligned}
I(M_r; W_1|m) &= \\
-\sum_b (tr \tau_1 M_b) \log(tr \tau_1 M_b) &+ \sum_{i=1}^r \frac{q_i}{s_1} \sum_b (tr \rho_i M_b) \log(tr \rho_i M_b) \\
I(M_r; W_r|m) &= \\
-\sum_b (tr \tau_r M_b) \log(tr \tau_r M_b) &+ \sum_{i=r}^q \frac{q_i}{s_r} \sum_b (tr \rho_i M_b) \log(tr \rho_i M_b)
\end{aligned} \tag{۳۵-۴}$$

را به ترتیب در s_1 و s_r ضرب کرده، سپس روابط را با هم جمع و در پایان مقدار $h(s_i)$ را به دو طرف

رابطه‌ی بدست آمده اضافه کنیم؛ یعنی:

$$\begin{aligned}
s_1 \times I(M_r; W_1|m) &= -s_1 \sum_b (tr \tau_1 M_b) \log(tr \tau_1 M_b) + \sum_{i=1}^r q_i \sum_b (tr \rho_i M_b) \log(tr \rho_i M_b) \\
s_r \times I(M_r; W_r|m) &= -s_r \sum_b (tr \tau_r M_b) \log(tr \tau_r M_b) + \sum_{i=r}^q q_i \sum_b (tr \rho_i M_b) \log(tr \rho_i M_b) \\
s_1 I(M_r; W_1|m) + s_r I(M_r; W_r|m) &+ h(s_1) \geq -s_1 \sum_b (tr \tau_1 M_b) \log(tr \tau_1 M_b) \\
+ \sum_{i=1}^r q_i \sum_b (tr \rho_i M_b) \log(tr \rho_i M_b) &- s_r \sum_b (tr \tau_r M_b) \log(tr \tau_r M_b) \\
+ \sum_{i=r}^q q_i \sum_b (tr \rho_i M_b) \log(tr \rho_i M_b) &+ h(s_1) = I(M_r; W|m)
\end{aligned}$$

^۵ Binary entropy function

آنگاه به طور خلاصه می‌توانیم بنویسیم:

$$I(M_r; W|m) \leq s I(M_r; W_1|m) + s_r I(M_r; W_r|m) + h(s, s_r) \quad (36-4)$$

حالا روابط را می‌توان به زبان ساده بیان کرد؛ به عبارتی می‌خواهیم تمام وابستگی‌ها را به حالات تبدیل یافته شده در وضعیت $i = 3 \dots 9$ ، کنار بگذاریم، که در این صورت روابط بدست آمده نتیجه کلی را در برخواهند داشت. همان طور که قبلاً گفتیم بایستی جمله‌ی دوم در رابطه‌ی (4-28) مثبت باشد، در نتیجه برای هر کدام از اجزای تفکیک‌پذیری که در نظر گرفتیم، داریم:

$$I(M_r; W|m) \leq H(W|m) = -\sum_{i=1}^9 q_i \log q_i$$

$$I(M_r; W_r|m) \leq H(W_r|m) = -\sum_{i=r}^9 \frac{q_i}{s_r} \log \frac{q_i}{s_r} \quad (37-4)$$

$$I(M_r; W_1|m) \leq H(W_1|m) = -\sum_{i=1}^r \frac{q_i}{s_1} \log \frac{q_i}{s_1}$$

دو طرف رابطه‌ی (4-35) را در یک منفی ضرب و سپس مقدار $H(W|m)$ را به دو طرف نامساوی اضافه

می‌کنیم. البته در طرف راست، مقدار معادل با $H(W|m)$ ، یعنی $-\sum_{i=1}^9 q_i \log q_i$ را قرار می‌دهیم.

بنابراین خواهیم داشت:

$$H(W|m) - I(M_r; W|m) \geq -s I(M_r; W_1|m) - s_r I(M_r; W_r|m) + s \log s_1 + s_r \log s_r -$$

$$\sum_{i=1}^9 q_i \log q_i = -s I(M_r; W_1|m) + \sum_{i=r}^9 q_i \log q_i - \sum_{i=r}^9 q_i \log s_r + s \log s_1 + s_r \log s_r -$$

$$\sum_{i=1}^r q_i \log q_i - \sum_{i=r}^9 q_i \log q_i = -s I(M_r; W_1|m) + s \log s_1 - \sum_{i=1}^r q_i \log q_i$$

و به طور خلاصه

$$H(W|m) - I(W; M_r|m) \geq -s I(M_r; W_1|m) + s \log s_1 - \sum_{i=1}^r q_i \log q_i. \quad (38-4)$$

البته در محاسبات بالا بیشینه مقدار $s_r I(M_r; W_r|m)$ را با توجه به رابطه‌ی (4-36) قرار داده‌ایم. برای

بیان کردن روابط بر حسب دو مقدار متناهی و محدود ε و δ و بدست آوردن یک کران بالا برای

اطلاعات متقابل بین آلیس و باب، بایستی مقدار کمینه‌ای را برای عبارت سمت راست (4-38) پیدا

کنیم که بدین منظور از آن نسبت به s_1 مشتق می‌گیریم و نتیجه را مساوی صفر قرار داده، عبارت $q_1 = q_r$ را بدست می‌آوریم. با برقراری این شرط خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} H(W|m) - I(W; M_r | m) &\geq + s, \sum_b (tr \tau, M_b) \log(tr \tau, M_b) - \sum_{i=1}^r q_i \sum_b (tr \rho_i M_b) \log(tr \rho_i M_b) \\ &+ s, \log s, - q, \log q, - q_r \log q_r = \\ r q, \sum_b (tr \tau, M_b) \log(tr \tau, M_b) &- \sum_{i=1}^r q_i \sum_b (tr \rho_i M_b) \log(tr \rho_i M_b) + r q, \log r + r q, \log q, \\ - r q, \log q, &= r q, \left[1 + \sum_b (tr \tau, M_b) \log(tr \tau, M_b) - \sum_{i=1}^r \frac{1}{r} \sum_b (tr \rho_i M_b) \log(tr \rho_i M_b) \right] \end{aligned}$$

که اگر $\beta = \frac{1}{q} - \epsilon$ و $q_1 = \min_i p(\psi_i | m) = \beta$ و هم‌چنین میزان هم پوشانی بین دو حالت $\phi_{1,m}$ و $\phi_{r,m}$ (دو مجموعه‌ی انتخابی) را به صورت $\langle \phi_{1,m} | \phi_{r,m} \rangle = \delta = \cos(r\theta)$ قرار دهیم و میزان دقت را برای تشخیص دادن حالات مورد نظر بالا ببریم؛ به عبارتی اندازه گیری‌های مربوطه را بهینه کنیم، آنگاه احتمال خطای بوجود آمده بعد از انجام اندازه گیری $\Pr(\theta) = \frac{1}{r}(1 - \sin(r\theta))$ می‌شود و دو جمله‌ی آخر داخل کرشه در رابطه‌ی بالا برابر با $1 - h(\Pr(\theta))$ خواهد بود، که $h(\Pr(\theta))$ همان تابع آنتروپی دو-دویی است [۲۹]. محاسبات را با نوشتن روابط زیر ادامه می‌دهیم:

$$\Pr(\theta) = \frac{1}{r}(1 - \sin(r\theta))$$

$$\sin^r(r\theta) + \cos^r(r\theta) = 1 \Rightarrow \sin^r(r\theta) = 1 - \cos^r(r\theta) = 1 - \delta^r$$

$$\Rightarrow \sin(r\theta) = \sqrt{1 - \delta^r}$$

$$\Rightarrow \Pr(\theta) = \frac{1}{r}(1 - \sqrt{1 - \delta^r})$$

$$1 - h(\Pr(\theta)) = 1 - h\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\sqrt{1 - \delta^r}\right)$$

با این توضیحات می‌توان نوشت:

$$H(W|m) - I(W; M_r | m) \geq r\beta [1 - I(M_r; W_r | m)] = r\beta [1 - (1 - h(\Pr(\theta)))]$$

$$H(W|m) - I(W; M_r | m) \geq r\beta h(\Pr(\theta)) = r\beta h\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\sqrt{1 - \delta^r}\right) =$$

(۳۹-۴)

$$\left(\frac{r}{q} - \epsilon\right) h\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\sqrt{1 - \delta^r}\right)$$

در این جا می‌خواهیم شرایطی را بررسی کنیم که منجر به برقرار کردن ارتباط کمی بین ε و δ می‌شود. در محاسبات فوق نشان دادیم، مقدار متناهی δ بایستی در روابط (۴-۱۷) و (۴-۱۸) صدق کند. برای مشخص کردن مقدار δ ، تمام جفت i و j هایی که بیشترین نسبت از عناصر ماتریسی a یا b را مطابق با رابطه‌ی (۴-۱۶) در اختیار ما قرار می‌دهند را امتحان می‌کنیم. این شرط را برای $i = 1$ و $j = 6$ بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \psi_i = |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle &\Rightarrow \psi_1 = |0+1\rangle \otimes |2\rangle \\ \psi_j = |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle &\Rightarrow \psi_6 = |1+2\rangle \otimes |0\rangle \end{aligned} \quad \max_{i,j} \frac{\langle \alpha_8 | a | \alpha_8 \rangle}{\langle \alpha_6 | a | \alpha_6 \rangle} = ?$$

$$\frac{\langle \alpha_1 | a | \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_6 | a | \alpha_6 \rangle} = \frac{\langle 0+1 | a | 0+1 \rangle}{\langle 1+2 | a | 1+2 \rangle} = \frac{\langle 0 | a | 0 \rangle + \langle 0 | a | 1 \rangle + \langle 1 | a | 0 \rangle + \langle 1 | a | 1 \rangle}{\langle 1 | a | 1 \rangle + \langle 1 | a | 2 \rangle + \langle 2 | a | 1 \rangle + \langle 2 | a | 2 \rangle} = \frac{a_{00} + a_{11} + 2 \operatorname{Re} a_{01}}{a_{11} + a_{22} + 2 \operatorname{Re} a_{12}}$$

که در رابطه بالا از عبارت $\langle i | a | i \rangle = a_{ii}$ و $\langle j | a | j \rangle = a_{jj}$ استفاده شده است [۲].

از رابطه‌ی (۴-۱۵) شروع می‌کنیم:

$$\frac{1 + 2\varepsilon}{1 - 9\varepsilon} \leq \max_{i,j} \frac{\langle \alpha_i | a | \alpha_i \rangle \langle \beta_i | b | \beta_i \rangle}{\langle \alpha_j | a | \alpha_j \rangle \langle \beta_j | b | \beta_j \rangle} \leq \frac{1 + 9\varepsilon}{1 - 2\varepsilon}$$

برای هر یک از نامساوی‌ها می‌توان روابط زیر را بدست آورد:

$$\begin{aligned} \max_{i,j} \frac{\langle \alpha_i | a | \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j | a | \alpha_j \rangle} &\leq \sqrt{\frac{1 + 9\varepsilon}{1 - 2\varepsilon}} \\ \max_{i,j} \frac{\langle \alpha_i | a | \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j | a | \alpha_j \rangle} &\geq \sqrt{\frac{1 + 2\varepsilon}{1 - 9\varepsilon}} \end{aligned} \quad (40-4)$$

به کمک روابط زیر که در پیوست الف اثبات می‌شوند، داریم:

$$\frac{|a_{00} - a_{11}|}{a_{00} + a_{11}} \leq \delta; \frac{|a_{11} - a_{22}|}{a_{11} + a_{22}} \leq \delta \quad (41-4)$$

$$|2 \operatorname{Re} a_{01}| \leq \frac{11\varepsilon}{2 - 63\varepsilon} (a_{00} + a_{11}); |2 \operatorname{Re} a_{12}| \leq \frac{11\varepsilon}{2 - 63\varepsilon} (a_{11} + a_{22})$$

$$a_{00} - a_{11} = \delta(a_{00} + a_{11}) \Rightarrow (1 - \delta)a_{00} = (1 + \delta)a_{11} \Rightarrow a_{00} = \frac{1 + \delta}{1 - \delta} a_{11}$$

$$a_{11} - a_{22} = \delta(a_{11} + a_{22}) \Rightarrow (1 - \delta)a_{11} = (1 + \delta)a_{22} \Rightarrow a_{22} = \frac{1 - \delta}{1 + \delta} a_{11}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{oo} &= \frac{1+\delta}{1-\delta} a_{11} \\ \therefore a_{rr} &= \frac{1-\delta}{1+\delta} a_{11}. \end{aligned} \quad (42-4)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a_{o1} &\leq \frac{11\varepsilon}{2-63\varepsilon} \times \frac{1}{2} \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} a_{11} + a_{11} \right) = \frac{11\varepsilon}{2-63\varepsilon} \frac{a_{11}}{1-\delta} \\ \operatorname{Re} a_{1r} &\leq \frac{11\varepsilon}{2-63\varepsilon} \times \frac{1}{2} \left(a_{11} + \frac{1-\delta}{1+\delta} a_{11} \right) = \frac{11\varepsilon}{2-63\varepsilon} \frac{a_{11}}{1+\delta} \end{aligned}$$

از طرفی اگر در رابطه‌ی (41-4)

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2 \operatorname{Re} a_{o1}}{a_{oo} + a_{11}} &\leq 1 + \frac{11\varepsilon}{2-63\varepsilon} = \frac{2+11\varepsilon}{2-63\varepsilon} = z \\ 1 + \frac{2 \operatorname{Re} a_{1r}}{a_{11} + a_{rr}} &\leq 1 + \frac{11\varepsilon}{2-63\varepsilon} = \frac{2+11\varepsilon}{2-63\varepsilon} = z \end{aligned}$$

برقرار باشد و با توجه به پارامتر $v_\varepsilon = \frac{2\delta}{1-\delta} (\sqrt{z} + \frac{1}{2}(z + 2\sqrt{z} + 1)) \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}}$ که در پیوست الف بدست می

آوریم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a_{o1} &= a_{11} v_\varepsilon \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}} \\ \operatorname{Re} a_{1r} &= -a_{11} v_\varepsilon \sqrt{\frac{1-\delta}{1+\delta}} \end{aligned} \quad (43-4)$$

و اما بیشینه مقدار عبارت $\frac{\langle \alpha_A | a | \alpha_A \rangle}{\langle \alpha_F | a | \alpha_F \rangle}$ که با $f_\varepsilon(\delta)$ نمایش می‌دهیم، به کمک مقادیری که در بالا

بدست آوردیم، به قرار زیر است:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(\delta) &= \frac{a_{oo} + a_{11} + 2 \operatorname{Re} a_{o1}}{a_{11} + a_{rr} + 2 \operatorname{Re} a_{1r}} = \frac{a_{11} \frac{1+\delta}{1-\delta} + a_{11} + 2 a_{11} v_\varepsilon \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}}}{a_{11} + a_{11} \frac{1-\delta}{1+\delta} - 2 a_{11} v_\varepsilon \sqrt{\frac{1-\delta}{1+\delta}}} = \\ &= \frac{1+\delta + 1-\delta + 2v_\varepsilon \sqrt{(1+\delta)(1-\delta)}}{1-\delta} = \frac{2(1+v_\varepsilon \sqrt{1-\delta^r})}{1-\delta} = \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right) \frac{1+v_\varepsilon \sqrt{1-\delta^r}}{1-v_\varepsilon \sqrt{1-\delta^r}} = \\ &= \frac{1+\delta + 1-\delta + 2v_\varepsilon \sqrt{(1+\delta)(1-\delta)}}{1+\delta} = \frac{2(1-v_\varepsilon \sqrt{1-\delta^r})}{1+\delta} \Rightarrow \\ &= \sqrt{\frac{1+11\varepsilon}{1-9\varepsilon}} \end{aligned}$$

به دلیل این که بیشینه‌ی مقدار عناصر قطری عملگر a بایستی با کمینه‌ی مقدار δ (همان طور که قبلاً اشاره کردیم، مقدار همپوشانی حالات تبدیل یافته شده‌ی $\phi_{i,m}$ ، مقداری محدود و متناهی است) یعنی $\delta = O(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1+72\varepsilon}{1-9\varepsilon}}$ مطابقت داشته باشد و روابط (۴-۱۶) و (۴-۱۷) به طور همزمان در یکدیگر صدق کنند، بنابراین رابطه‌ی کمی بین δ و ε به صورت

$$f_\varepsilon(\delta) = \sqrt{\frac{1+72\varepsilon}{1-9\varepsilon}} \quad (44-4)$$

خواهد شد. حالا می توان گفت که اطلاعات متقابل بدست آمده توسط آلیس و باب از این پروتکل اندازه گیری دوموضعی، دارای کران بالایی هستند که به اندازه‌ی Δ (مقدار متناهی، اما خیلی کوچک)، نسبت به یک اندازه گیری کامل (رفتار کاملاً ناموضعی) به صورت زیر تفاوت دارد:

$$I(W; M_r, M_r) \leq \log_r^2 - \Delta. \quad (45-4)$$

۴-۴ بهینه کردن اندازه گیری های موضعی

همان طور که در قسمت های قبل گفتیم، عملگرهای تصویری که برای تشخیص دادن مجموعه حالات درهم ناتنیده‌ی متعامد معرفی شده در بخش ۴-۱ مؤثر بودند، با عملکردهای موضعی نمی-توانند اجرا بشوند و به نوعی رفتار جدیدی از ناموضعییت را از خود نشان می‌دهند. از آنجایی که پروتکل اندازه گیری گفته شده در بالا با عملکردهای دو موضعی به طور مؤفقیت آمیز انجام نمی‌شود، بدین منظور بایستی یک سری اصلاحات^۱ را در روابط انجام دهیم و در واقع اندازه گیری‌ها را بهینه کنیم. در قسمت قبلی، یک نمونه از این اصلاحات را با پیدا کردن کران بالا برای اطلاعات متقابل بین آلیس و باب نشان دادیم و تفاوت آن را با یک اندازه گیری کاملاً ناموضعی بررسی کردیم.

در این قسمت برای رسیدن به بهترین اندازه گیری های موضعی، علاوه بر کران بالای محاسبه شده در قسمت ۴-۳، اصلاحات دیگری را مانند پیدا کردن کران پایین برای اطلاعات متقابل بین مشاهده‌گرها

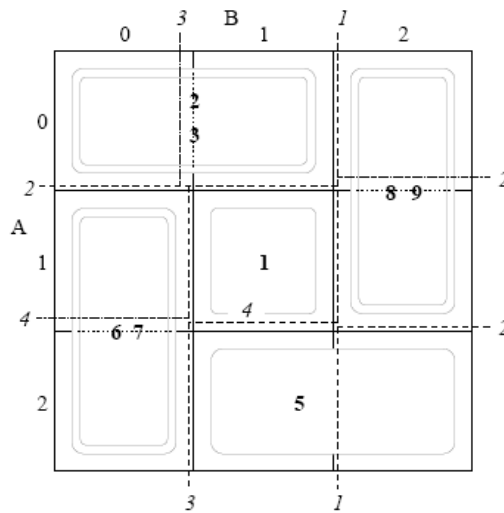
^۱ Correction

انجام می‌دهیم. برای این کار لازم است بدانید که چنانچه احتمال اولیه‌ی یکی از حالات مثلاً ψ_1 صفر باشد، آن‌گاه تمامی اطلاعات متقابل را در پروتکل دو موضعی آلیس و باب، نمی‌توان بدست آورد. ولی اگر احتمال اولیه‌ی هر یک از حالات $\psi_4 - \psi_2$ صفر باشد، پروتکل اندازه‌گیری برای تشخیص دادن حالات به طور مؤفقیتم آمیز انجام می‌شود. یک مورد از چنین حالتی، هنگامی است که ψ_4 را نادیده بگیریم (آنسامبل ۹ حالتی که در آن $p(\psi_4) = 0$ می‌باشد (مطابق با شکل (۴-۴)). در این صورت باب پایه‌ی $|2\rangle$ خود را از پایه‌های $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ تشخیص داده (البته دو پایه اخیر، قابل تشخیص نیستند) و سپس نتیجه را از طریق ارتباطات کلاسیکی^۲ به آلیس گزارش می‌کند. آلیس با عملکرد موضعی خود باعث تمییزپذیری حالات ψ_4 ، ψ_1 و ψ_2 می‌شود و انتخاب خود را از پایه‌های فضای هیلبرت سه بعدی، برای باب می‌فرستد. در مرحله‌ی بعدی، باب با اندازه‌گیری در راستای پایه‌های فضای هیلبرتی که متأثر از گزارشات آلیس هستند، قادر به تشخیص دادن دو حالت ψ_2 و ψ_3 می‌شود. در مرحله‌ی پایانی بعد از آن‌که باب نتایج اندازه‌گیری خود را برای آلیس گزارش می‌کند، آلیس آخرین اندازه‌گیری را به کمک عملگرهای خود انجام می‌دهد که باعث تشخیص دادن حالات ψ_1 ، ψ_2 و ψ_3 و ψ_4 می‌شود. نمایش فرکتالی (شاخه - شاخه، مانند یک درخت) از مراحل این پروتکل را مطابق با شکل (۴-۵) ترسیم کرده‌ایم که در آن، پایه‌های فضای هیلبرت آلیس و باب در شاخه‌های درخت و حالات آنسامبل مورد نظر به صورت میوه نمایش داده شده است. این استراتژی حتی زمانی که امکان اتفاق افتادن تمامی حالات برای آماده کردن سیستم کوانتومی در آن‌ها وجود داشته باشد، یک استراتژی منطقی می‌تواند باشد. بدین منظور آلیس و باب می‌توانند پروتکلی را اندازه‌گیری کنند که در آن حالات ψ_{1-3} و ψ_{4-6} را تشخیص داده و سپس مجموعه‌ی این حالات را از دو حالت ψ_4 و ψ_6 متمایز سازند. آن‌ها با این کار تنها مؤفق به تمایز بین دو حالت آخر می‌شوند. چنانچه شکل (۴-۵) را برای این استراتژی بکار ببریم، آن‌گاه می‌بایست جای ψ_4 را با ψ_6 یا ψ_4 تعویض کنیم. آلیس و باب این نوع اندازه‌گیری را بکار می‌گیرند و با احتمال $\frac{1}{4}$ ، کل $\log_2 4$ بیت اطلاعات را و با احتمال $\frac{2}{4}$ ، ۱

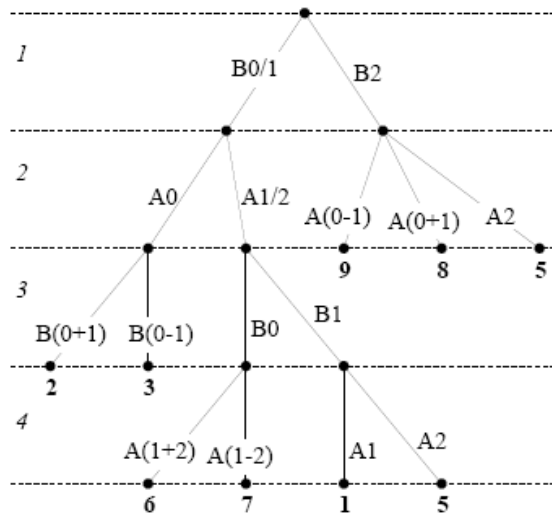
^۲ Classical Communication

بیت کمتر از اطلاعات را بدست می‌آورند. بنابراین کمیت اطلاعات متقابل به اندازه‌ی

$$\log_2 \frac{1}{9} = 2/9477 \text{ بیت خواهد بود که نیاز به اصلاحات دارد.}$$



شکل ۴-۴: نمایش دو مینوای از آنسامبل ۹ حالتی بدون حالت ψ_f



شکل ۴-۵: نمایش درختی (فرکتالی) مراحل پروتکل اندازه گیری برای تشخیص حالات (بدون حالت ψ_f)

باب برای بهینه کردن اندازه گیری، مجموعه‌ای از اصلاحات را با عملگرهای مثبت B_{rr} که دارای

عناصر عملگری $\{b_{rr}\}$ هستند، را انجام می‌دهد ($\{b_{rr}\}$ عناصری به صورت ماتریسهای 3×3 در فضای

هیلبرت سه بعدی باب می باشند که بایستی در رابطه‌ی $\sum_{r_1} b_{r_1} = I$ صدق کنند. ارتباط بین $\{b_{r_1}\}$ و B_{r_1} به صورت زیر است:

$$B_{r_1}^t B_{r_1} = b_{r_1} \quad (46-4)$$

باب نتایج بدست آمده از اندازه گیری را برای آلیس گزارش کرده و آلیس اندازه گیری را با عملگرهای مثبت خود یعنی $A_{r,r}(r)$ ، که شامل عناصر عملگری $\{a_{r,r}(r)\}$ است، ادامه می‌دهد و به همین ترتیب فرایند تکرار می‌شود. بهتر است بدانید که تمام عناصر عملگری مربوط به عملگرهای مثبت آلیس و باب ماتریسهایی هستند که در پایه های متداول فضای هیلبرت، قطری هستند.

برای مثال فرض می‌کنیم که عملگر موضعی مثبت باب در پروتکل توصیف شده در بالا دارای دو عنصر عملگری $\{1,0\}$ و $\{0,1\}$ است که قطری هستند. برای بهینه کردن این اندازه گیری، عناصر تعریف شده را با عناصر اصلاحی $b_1 = \{1, \frac{1}{r}, 0\}$ و $b_r = \{0, \frac{1}{r}, 1\}$ جا به جا می‌کنیم. البته هر نتیجه‌ای توسط این عناصر، اندازه گیری یکی از ستونهای شکل (4-1) را غیرمحمتمل می‌کند. به عبارتی یکی از کیوبیتهای باب ($|0\rangle$ یا $|1\rangle$) ظاهر نخواهد شد. زمانی که اندازه گیری صورت می‌گیرد، آلیس آزادانه دومینوی 6-7 یا 8-9 را می‌چیند و در نتیجه ممکن است مشاهده‌گرها به دومینوی حالت اصلی پی ببرند. به هر حال نخستین اندازه گیری باب، باعث تمییز ناپذیری دومینوهای 2-3 و 4-5 می‌شود، به طوری که او نمی‌تواند حالات ψ_r و ψ_r یا ψ_r و ψ_r را از یکدیگر تشخیص دهد. بنابراین به منظور ارزیابی اطلاعات متقابل بدست آمدنی بین آلیس و باب به کمک این استراتژی، بایستی از نتیجه‌ی اندازه گیری اولیه‌ی باب روی این چهار حالت آگاه شد. این نتیجه به عنصر عملکرد موضعی B_{r_1} که متناسب با عنصر عملکرد $POVM$ یعنی b_{r_1} است، بستگی دارد. اگر چه بایستی هر عملکرد موضعی B_{r_1} در رابطه‌ی (46-4) صدق کند، ولی بهتر است که رابطه‌ی

$$B_{r_1} = |r_1\rangle \otimes \sqrt{b_{r_1}} \quad (47-4)$$

برقرار باشد. $|r1\rangle$ ، نتیجه‌ی کلاسیکی بعد از اندازه‌گیری است. برای مشاهده کردن نتایج اندازه‌گیری روی این چهار حالت، فرض می‌کنیم که حالت اصلی برای تشخیص دادن، حالت ψ_f باشد، به طوری- که سهم باب در چنین حالتی $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$ باشد. حالا اگر باب از انجام عمل اندازه‌گیری، نتیجه‌ی b_r را بدست آورد، آن‌گاه با قرار دادن $|r1\rangle = |\varphi\rangle$ در رابطه‌ی (۴-۴۷) که نشان می‌دهد که باب اولین نتیجه را به صورت کلاسیکی اعلام می‌کند، عملکرد موضعی اصلاح‌کننده حالت

$$\begin{aligned} \sqrt{b_r}|\varphi\rangle &= \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} |1\rangle \end{aligned} \quad (48-4)$$

را برای باب فراهم می‌کند و چنانچه باب نتیجه‌ی b_r را بدست آورد، عملکرد موضعی اصلاح‌کننده، کیوبیت اولیه‌ی باب را تبدیل به حالت زیر می‌کند:

$$\begin{aligned} \sqrt{b_r}|\varphi\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} |1\rangle + \frac{1}{2} |2\rangle. \end{aligned} \quad (49-4)$$

حالا اگر فرض کنیم که در ابتدا حالت ψ_h برای سیستم در نظر گرفته شود و آلیس و باب بایستی در اندازه‌گیری، اندیس $i = 5$ را تشخیص دهند، آن‌گاه نتایجی مشابه نتایج بالا بدست خواهد آمد. فقط بایستی کیوبیت $|2\rangle -$ را جایگزین کیوبیت $|2\rangle$ کنیم. بنابراین بدست آوردن اولین نتیجه یعنی b_r ، نشان می‌دهد که حالات ψ_f و ψ_h به طور کامل غیر قابل تمییز و دومین نتیجه یعنی b_r ، صرفاً

نامتعامل بودن این دو حالت را معلوم می‌سازد. در مورد رویداد دوم، باب می‌تواند برای تشخیص دادن دو حالت نامتعامل متساوی الاحتمال اندازه گیری بهینه‌ای را انجام دهد [۲۹] (خواه حالت اصلی ψ_f یا خواه ψ_h باشد). اندازه گیری بهینه‌ی باب، اندازه گیری متعامدی است که نتایج آن به ترتیب $B(I+2)$ و $B(I-2)$ می‌باشد. ملاحظات مشابهی برای حالت‌های ψ_r یا ψ_f به کار می‌رود. این استراتژی اندازه-گیری، یک اصلاحی برای استراتژی ترسیم شده در شکل (۴-۵) است که این بار میزان $2/9964$ بیت اطلاعات متقابل از دو مشاهده گر را نتیجه می‌دهد.

تصحیح بعدی به گونه‌ای است که راحت‌تر می‌توانیم ψ_r را از ψ_f و همچنین ψ_f را از ψ_h تشخیص دهیم. در چنین وضعیتی اگر عناصر $POVM$ را به صورت $\left\{p, \frac{1}{r}, 1-p\right\}$ و $\left\{1-p, \frac{1}{r}, p\right\}$ ، جایگزین عناصر اولیه از $POVM$ باب قرار دهیم، میزان تمییز ناپذیری حالات کمتر می‌شود. در این دو مجموعه از عناصر که حاوی اطلاعات مفید کمتری هستند، p عددی بین 1 و $\frac{1}{r}$ است. با بهینه سازی روی مقدار p ، آلیس و باب مقدار $3/009$ بیت اطلاعات متقابل که از این استراتژی اندازه گیری بدست می‌آورند.

اما به هر حال در چنین موردی از اندازه گیری، هیچ یک از ستون‌های شکل (۴-۱) غیرمحمول نیستند و در نتیجه آلیس ممکن است هر دومینوای را جدا کند (این دومینو ممکن است مربوط به حالت اصلی سیستم باشد). این اقدام از جانب آلیس، یک بیت اطلاعات برای دو مشاهده گر بدست می‌آورد. ممکن است گمان کنید که اگر آلیس اندازه گیری ضعیف‌تری را انجام دهد، آن‌گاه اطلاعات متقابل قابل حصول بهتر می‌شوند. در حقیقت بهترین استراتژی اندازه گیری تا مرحله‌ی چهارم از اندازه گیری که جدا کردن دومینو توسط آلیس را تضمین می‌کند، به عقب می‌افتد.

این استراتژی بهینه‌ای که در بالا اشاره کردیم، شامل مراحل زیر می‌باشد که در آنها بایستی تمامی مقادیر p, q, r, s و t به صورت بهینه انتخاب شوند.

۱- باب : $\left\{p, \frac{1}{p}, 1-p\right\}$ و $\left\{1-p, \frac{1}{p}, p\right\}$. در این جا فرض می‌کنیم که باب اولین نتیجه را بدست

می‌آورد. (چنانچه باب دومین مجموعه عناصر $POVM$ را بدست آورد، آن گاه مقادیر قطری تمامی عناصر دیگر ظاهر شده در مراحل بعدی وارون می‌شوند؛ به عبارتی ماتریس کیوبیتهای $|0\rangle$ و $|1\rangle$ با یکدیگر عوض می‌شود).

۲- آلیس : $\left\{0, 1-q, 1-r\right\}$ و $\left\{1, q, r\right\}$. با اولین نتیجه، آلیس دومینوی ۹-۸ را جدا کرده و مستقیماً به مرحله‌ی ۵ می‌رویم. اما دومین نتیجه برای باب سبب جدا کردن دومینوی ۵-۴ می‌شود. در نتیجه بدین منظور به مرحله‌ی ۳ می‌رویم.

۳- باب : $\left\{1-s, 1-t, 0\right\}$ و $\left\{s, t, 1\right\}$. باب با اولین نتیجه دومینوی ۵-۴ را جدا کرده و با این انتخاب، مستقیماً به مرحله‌ی ۵ می‌رویم. ولی دومین دسته از عناصر $POVM$ باعث می‌شود که آلیس دومینوی ۷-۶ را از دیگر دومینوها جدا کند. بدین منظور به سراغ مرحله‌ی ۴ می‌رویم.

۴- آلیس : $\left\{1, 1, 0\right\}$ و $\left\{0, 0, 1\right\}$. در این مرحله بدست آوردن هر یک از نتایج باعث جدایی دومینوی ۷-۶ می‌شود.

۵- تا این مرحله تعدادی از دومینوها مطابق با شکل (۴-۱) جدا شده‌اند. آلیس و باب می‌توانند همانند استراتژی‌های قبلی اندازه‌گیری، دومینوای را که حالت اصلی در آن است را تعیین کنند. چنانچه این دومینو شامل دو حالت که به یک حالت مشابه با آنها فروریخته نشده باشد، سپس آلیس و باب برای تشخیص دادن دو حالت باید اندازه‌گیری دیگری را انجام دهند.

در این استراتژی اندازه‌گیری، با بهینه‌سازی پارامترهای معرفی شده در بالا مقدار $\log_2 \frac{1}{1575} = 3/0125$ بیت اطلاعات را از عملکردهای دو مشاهده‌گر بدست می‌آید که در واقع کمترین میزان اطلاعاتی است که از استراتژی‌های اندازه‌گیری روی این مجموعه حالات درهم

ناتنیده می توان بدست آورد. (مجموعه مقادیر پارامتری که این نتیجه را بوجود می آورند عبارتند از: $p = 0.726$ ، $q = 0.395$ ، $r = 0.312$ ، $s = 0.071$ ، $t = 0.104$). علاوه بر این، مدارک عددی نشان می دهند که اضافه کردن مرحله ی دیگری به مراحل بالا، قبل از فراهم ساختن یک برش قطعی از دومینوها فایده ای نخواهد داشت. بنابراین به نظر می رسد که به راستی این مقدار اطلاعات متقابل بدست آمدنی، بهترین مقدار از بهترین استراتژی است. با این وجود نمی توانیم از استراتژی متفاوت دیگری که ممکن است بهتر عمل کند، جلوگیری کنیم.

با خلاصه کردن نتایج این قسمت و قسمت قبلی، می توان با عملکردهای موضعی آلیس و باب، کرانه های بالا و پایین را برای اطلاعات متقابل بدست آمده به صورت زیر مشخص کنیم.

$$\log_2^4 - 0.1575 \leq I(W; M_r, M_r) \leq \log_2^4 - \Delta. \quad (50-4)$$

به طور کلی نتایج نشان داده شده در این قسمت می تواند دلیلی برای اثبات نتایج قسمت ۴-۲ باشد. در استراتژی بیان شده در این قسمت، آلیس و باب برای تشخیص دادن آن که کدام دومینو حالت اصلی را نتیجه می دهد، مجموعه ای از اندازه گیری های $POVM$ هدفمند شده را انجام می دهند. این مجموعه از اندازه گیری ها می تواند به عنوان مرحله ی ۱ از استراتژی قسمت قبلی در نظر گرفته بشود. حالتی که بایستی بعد از این اندازه گیری ها تشخیص داده بشوند، نامتعامل هستند، به طوری که اطلاعات متقابل نهایی، کمتر از \log_2^4 بیت خواهد بود.

۴-۵ درک ابر عملگر تفکیک پذیر سیستم دو قسمتی به همراه کیوبیتهای تسهیم

شده

در قسمتهای قبلی گفتیم که چنانچه آلیس و باب تنها به طور کلاسیکی ارتباط برقرار کنند، فرایند اندازه گیری به طور ناقص انجام می شود. در این جا این سؤال مطرح می شود که چه منابع کوانتومی می توانند به اندازه گیری کامل آلیس و باب کمک کند؟

واضح است که اگر آلیس، کل سیستم سه کیوبیتی خود را برای باب بفرستد و باب تمام عملکرد خود را در آزمایشگاه انجام دهد و سپس نتیجه را برای آلیس به طور کلاسیکی گزارش دهد، آن گاه فرایند اندازه گیری به طور کامل انجام می شود. این استراتژی در مورد ۹ حالت درهم ناتنیده ای متساوی الاحتمال مورد بحث، نیاز به ارسال $\log_2 r \approx 1/58496$ اطلاعات کوانتومی از طرف آلیس برای باب دارد (همانطور که در فصل ۳ اشاره کردیم این مقدار، میزان بیشینه ای آنتروپی در فضای هیلبرت سه بعدی آلیس است). چنانچه از حالت ψ_1 صرف نظر کنیم، (که منجر به ایجاد آنسامبل هشت حالتی می شود)، میزان آنتروپی برای ماتریس چگالی که آلیس در اختیار دارد، کمتر از بیشینه ای آنتروپی آن در وضعیت ۹ حالتی می باشد که مقدار آن برابر با

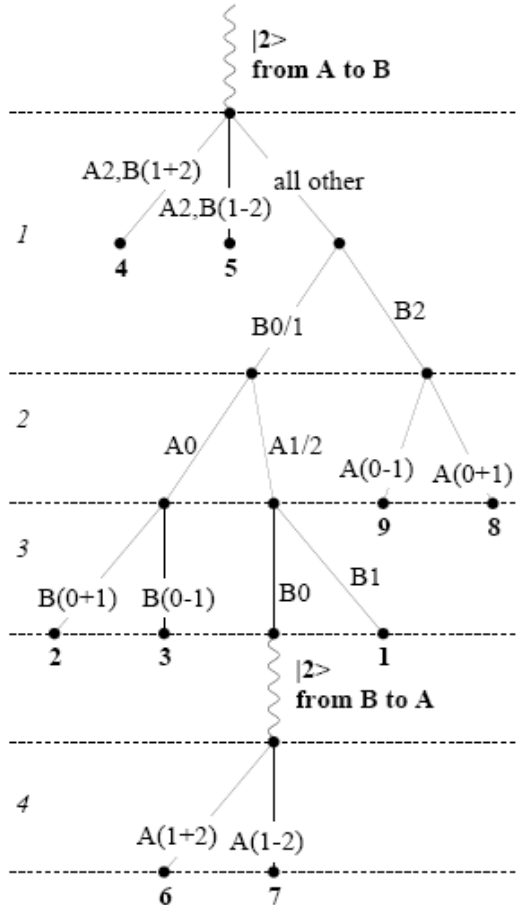
$$h_r\left(\frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}\right) \approx \left(-\frac{3}{8} \log_2 \frac{3}{8} - \left(1 - \frac{3}{8}\right) \log_2 \frac{(1-\frac{3}{8})}{2}\right) + \left(-\frac{2}{8} \log_2 \frac{2}{8} - \left(1 - \frac{2}{8}\right) \log_2 \frac{(1-\frac{2}{8})}{2}\right) \\ + \left(-\frac{3}{8} \log_2 \frac{3}{8} - \left(1 - \frac{3}{8}\right) \log_2 \frac{(1-\frac{3}{8})}{2}\right) - \log_2 r \approx \frac{11}{4} - 1/58496 \approx 1/16504. \quad (51-4)$$

بیت اطلاعات است. هم چنین می توان علاوه بر روش بالا، با استفاده از قضیه ی فشردگی شوماخر^۱

[۳۰]، میزان $1/58496$ کیوبیت را به میزان $1/16504$ بیت اطلاعات کلاسیکی فشرده کرد.

^۱ Schumacher compression theorem

از این رو در مورد آنسامبل ۹ حالتی می توان پروتکلی را ارائه داد که به تعداد کمتری اطلاعات انتقال داده شده نیاز دارد. مراحل انجام این پروتکل به همراه گذارهای کوانتومی در شکل (۴-۶)، نشان داده شده است که در این جا، حالت های ψ_5 و ψ_6 به طور کامل قابل تشخیص هستند.



شکل ۴-۶: نمایش بهینه‌ای از شکل (۴-۵) که به همراه ارتباطات کوانتومی از آلیس به باب است.

برای انجام این پروتکل اندازه گیری، نیاز به ارسال

$$h\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{9} = \left(-\frac{1}{3} \log_r \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \log_r \left(\frac{1}{3}\right)\right) + \frac{2}{9} \approx 1/14152 \quad (52-4)$$

بیت اطلاعات کوانتومی و کلاسیکی از طرف آلیس به باب است. در حالی که در مورد پروتکل اندازه گیری آنسامبل هشت حالتی، می‌بایست اطلاعات بیشتری ارسال شود که برابر با

$$h\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{2}{4} = \left(-\frac{3}{4} \log_r \frac{3}{4} - \left(1 - \frac{3}{4}\right) \log_r \left(\frac{1}{4}\right)\right) + \frac{2}{4} \approx 1/20443 \quad (53-4)$$

بیت اطلاعات است. بهتر است بدانیم که در هیچ یک از این پروتکل ها، اطلاعی از این که آیا فرایند اندازه گیری دارای نتایج بهینه است یا نه، نداریم.

یک پروتکل اندازه گیری بهینه‌ای را برای تشخیص دادن آنسامبل ۹ حالتی می‌توان در نظر گرفت که در آن اگر آلیس، سه کیوبیت خود را به صورت $|100\rangle \rightarrow |0\rangle$ ، $|010\rangle \rightarrow |1\rangle$ و $|001\rangle \rightarrow |2\rangle$ رمزدار کند، او می‌تواند یک کیوبیت را از فضای سه بعدی خود با پایه‌ی فضایی $|2\rangle$ ، به فضای سه بعدی باب بفرستد. مشاهده می‌کنیم که کیوبیت سوم، دارای آنتروپی $h(\frac{1}{3}) \approx 0.91925$ است که کمتر از بیشینه آنتروپی حالت سه کیوبیتی آلیس، یعنی $\log_2 3 \approx 1.58496$ بیت است. ولی در مورد آنسامبل هشت حالتی، آنتروپی کیوبیت فرستاده شده، مقدار بیشتری نسبت به دارای آنتروپی بیشتر از بیشینه آنتروپی (در مورد آنسامبل هشت حالتی بیشینه‌ی آنتروپی $\log_2 8 - 1 \approx 0.58496$ بیت می‌باشد). است و مقدار آن $h(\frac{2}{3})$ می‌باشد. بنابراین با استفاده مجدد از قضیه‌ی فشردگی شوماخر [۱۵]، می‌توانیم ارسال یک بیت اطلاعات کوانتومی را به صورت $|2\rangle_A$ از طرف آلیس به باب به اندازه‌ی $h(\frac{1}{3})$ بیت اطلاعات فشرده کنیم. به محض اینکه کیوبیت $|2\rangle_A$ در اختیار باب قرار گرفت، باب بلافاصله یک اندازه گیری روی آن کیوبیت انجام می‌دهد تا آنکه او از ماهیت حالت ψ_f ، ψ_h یا یکی دیگر از مجموعه‌ی ۹ حالتی درهم نا تنیده مطلع شود. بعد از انجام این مرحله، با صرفنظر کردن بعضی از احتمالات، مانند موردی که دو حالت ψ_f و ψ_h از قبل متمایز از دیگر حالات شده باشند، باقیمانده‌ی مراحل مطابق با شکل (۴-۶) اجرا می‌شوند. قبل از اجرا شدن مرحله‌ی چهارم، کیوبیت $|2\rangle_A$ بایستی دوباره در اختیار آلیس قرار گیرد. این کار نیاز به فرستادن یک بیت اطلاعات کوانتومی از طرف باب می‌باشد. البته ارسال این کیوبیت تنها زمانی احتیاج خواهد شد که حالت واقعی که آلیس و باب بایستی تشخیص دهند، حالت ψ_f یا ψ_h باشد، که با احتمال $\frac{2}{9}$ اتفاق می‌افتد و در نتیجه بایستی به اندازه‌ی $\frac{2}{9}$ بیت اطلاعات کوانتومی که به آلیس ارسال می‌شود اضافه شود؛ ضمن اینکه کیوبیت $|2\rangle_A$ دیگر قابل فشردن نیست.

در این جا همان گونه که مشاهده می کنیم، یک اندازه گیری بهینه به کمک ارسال اطلاعات از طریق ارتباطات کوانتومی وجود دارد که این اطلاعات، در آغاز و پایان پروتکل اندازه گیری برای آنسامبل ۹ حالتی، تقریباً به میزان $1/14152$ بیت (برای آنسامبل ۸ حالتی، ارسال $1/20443$ بیت اطلاعات نیاز است.) برگشتزیر مطابق با شکل (۴-۶) است.

لازم است بدانیم که این گذار کوانتومی به دلیل این که کیوبیت در یک راستا فرستاده می شود، می تواند به صورت یک طرفه فراهم بشود. چنانچه کیوبیت فرستاده شده در یک طرف، با کیوبیت دیگری در فضای مقابل درهم تنیده شود، منبع در هم تنیدگی ای را بوجود می آورد که همیشه می تواند برای فرستادن اطلاعات کوانتومی مورد نیاز از راه دور برای آن در جهت مخالف استفاده شود [۳۱]. توجه کنید که حتی با کمک گرفتن از گذارهای اطلاعات کوانتومی، این پروتکل هم چنان به چندین مرحله از گذارهای کلاسیکی احتیاج دارد؛ در حقیقت این پروتکل به دلیل احتیاج داشتن به ارتباطات کلاسیکی دو طرفه، یک پروتکل "دو- طرفه" می باشد [۳۲].

۴-۶ ارتباط ترمودینامیک و اندازه گیری های ناموضعی

۴-۶-۱ اندازه گیری ها به صورت برگشت نا پذیر

در این قسمت از کار می خواهیم برای تشخیص دادن حالتی از آنسامبل ۹ حالت متعامد درهم ناتنیده برای آماده سازی سیستم دو قسمتی در آن، یک تحلیل نظری - اطلاعاتی دیگری را از پروتکل اندازه گیری بررسی کنیم که به روشی متفاوت، ناموضعی بودن اندازه گیری های مربوطه را شرح می دهد. چنانچه اجزای حالات کوانتومی سیستم مرکب در یک مکان قرار بگیرند، آنگاه اندازه گیری می تواند در هر یک از پایه های متعامد با ضریب اطمینان 100% به صورت برگشت پذیر انجام بشود. به عبارتی حالت کوانتومی سیستم می تواند بدون دور انداختن اطلاعات به محیط، به اطلاعات کلاسیکی تبدیل گردد. در نتیجه با توجه به اصل لاندور، هیچ گونه گرمایی در زمان اندازه گیری تولید نمی شود.

در اینجا روش برگشت پذیری فرایند اندازه گیری را با یک نمونه‌ی سیستم تک کیوبیتی

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

توضیح می‌دهیم:

چنانچه هدف از اندازه گیری، تشخیص پایه‌ی $|0\rangle$ از $|1\rangle$ باشد که به صورت کلاسیکی، در هر یک از کلان حالات^۲ $|0\rangle \equiv |000\dots\rangle$ و $|1\rangle \equiv |111\dots\rangle$ (شامل، مثلاً 10^{23} کیوبیت)، ذخیره شده‌اند، آنگاه ابتدا فرایند اندازه گیری، با قرار گرفتن سیستم در یک حالت متداول (به گونه‌ای که نخستین حالات سیستم بایستی یا به صورت $|000\dots\rangle$ یا $|1000\dots\rangle$ اندازه گیری شوند). به صورت برگشت پذیر آغاز می‌شود و سپس عملکردهای کوانتومی دو ورودی XOR [۳۱]، بر روی کیوبیت اولیه که به عنوان کیوبیت منبع است، به صورت مکرر اثر کرده و تمامی کیوبیت‌های کلان حالت را به عنوان کیوبیت هدف تشخیص می‌دهند. فرایند اندازه گیری کیوبیت اندازه گرفته شده، ممکن است به خوبی به عنوان بخشی از کلان سیستمی باشد که شامل نتایج کلاسیکی است. توجه کنید که در انجام این پردازش کلاسیکی، نیازی به هیچ گونه برهم کنش بین سیستم و محیط خارج از آن و هم‌چنین هیچ گونه اندازه گیری موضعی دیگر نیست. اما در مورد سیستم دو قسمتی، فرایند اندازه گیری برای تشخیص دادن حالات نسبتاً متفاوت است. موردی را در نظر می‌گیریم که در آن دو مشاهده‌گر آلیس و باب، حالت ψ_F را از آنسامبل ۹ حالتی در نظر نمی‌گیرند (مطابق با پروتکل اندازه گیری ترسیم شده‌ی شکل (۴-۵)). واضح است که آن دو نمی‌توانند پروتکل اندازه گیری کاملی را با مجموعه‌ی متناهی از عملکردهای موضعی و ارتباطات کلاسیکی، به صورت برگشت پذیر انجام دهند. همان طور که در اولین مرحله از پروتکل اندازه گیری شکل (۴-۵) مشاهده می‌کنید، فرایند اندازه گیری به صورت برگشت ناپذیر، با تبدیل حالت ψ_F به هر یک از حالات $|1\rangle|2\rangle$ یا $|2\rangle|2\rangle$ انجام می‌شود که در این میان، یک بیت آنتروپی تولید می‌شود.

^۲ Macro States

در این پروتکل اندازه گیری، اگر هر یک از این ۸ حالت با احتمال مساوی $\frac{1}{8}$ تشخیص داده بشوند، آن گاه مقدار متوسط آنتروپی تولید شده از اندازه گیری $\frac{1}{8}$ بیت است. این مقدار را به دلیل این که هنوز پروتکل کار آمدتری را پیدا نکرده ایم، نمی توانیم به عنوان کمترین مقدار آنتروپی در نظر بگیریم. موارد زیاد دیگری را می توان پیدا کرد که مقدار آنتروپی کمتری را تولید می کنند. برای مثال می توانیم پروتکل اندازه گیری را برای آنسامبل حالات $\{\psi_r, \psi_e, \psi_a\}$ در نظر بگیریم که مقدار $\frac{1}{6}$ بیت آنتروپی از اندازه گیری آن ها تولید می شود. بنابراین به نظر می رسد که چنانچه مجموعه ای از حالات مانند $\{\psi_r, \psi_e, \psi_a\}$ بتوانند بدون شکستن هیچ دومینوی به صورت تصاعدی توسط آلیس و باب تجزیه بشوند، اندازه گیری های برگشت پذیر برای آنها امکان پذیر خواهد بود. در ابتدای فصل، این آنسامبل از حالات به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned}\psi_r &= |\circ\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\circ\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\circ\circ\rangle + |\circ1\rangle), \\ \psi_e &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \otimes |\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\circ\rangle + |2\circ\rangle), \\ \psi_a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\circ\rangle + |1\rangle) \otimes |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\circ2\rangle + |12\rangle).\end{aligned}$$

و اما به دلیل این که دومینوی حالت ψ_e شکسته شده و با محیط خود در ارتباط است، آنسامبل $\{\psi_r, \psi_e, \psi_a\}$ یک مجموعه ی غیرقابل تجزیه را تشکیل می دهد (فرایند اندازه گیری آن ها برگشت ناپذیر است). واضح است که چنانچه آنسامبل حالات $\mathcal{E} = \{p_i, \psi_i\}$ تنها با مجموعه حالات قابل تجزیه تعریف بشود، آن گاه آنتروپی آماده سازی و اندازه گیری حالات صفر است. اما در مقابل، آنتروپی برای مجموعه حالات غیرقابل تجزیه ای که به هیچ طریقی به صورت موضعی قابل اندازه گیری نیستند، همواره مقدار مثبتی دارد. به طور کلی

- در پروتکل های چند مرحله ای، در حد n های بزرگ، اندازه گیری مجموعه ای حالات غیر قابل تجزیه به صورت برگشت پذیر صورت می گیرد و آنتروپی حاصل از اندازه گیری به سمت صفر میل می کند.

• ولی در حد n های متناهی، اندازه گیری مجموعه‌ی حالات غیر قابل تجزیه به صورت برگشت

نا پذیر و در نتیجه آنتروپی حاصل از اندازه گیری مثبت خواهد بود.

در عبارات بالا n نشان دهنده‌ی تعداد مراحل پروتکل اندازه گیری مورد نظر است.

در راستای تحلیل برگشت ناپذیر بودن پروتکل اندازه گیری حالات درهم ناتنیده‌ی متعامد، بهتر است

بدانیم که لازمه‌ی ارتباطات کلاسیکی بین آلیس و باب، برگشت ناپذیر بودن فرایند می‌باشد. به دلیل

این که کانال ارتباط دهنده‌ی بین آلیس و باب تنها می‌تواند اطلاعات کلاسیکی را انتقال داده و نه

اطلاعات کوانتومی را، در نتیجه به منظور *dephase* کردن اطلاعات عبورکننده از کانال، بایستی کانال

یک محیط کوانتومی را در بر داشته باشد. آلیس یا باب با وجود آمدن این رویداد، متعهد خواهد شد

که به کمک رشته‌ای از اطلاعات کلاسیکی لازم، با محیط کوانتومی کانال ارتباطی درهم تنیده شوند

که به موجب آن مقدار محدودی آنتروپی تولید می‌شود. برای مثال، آماده سازی سیستم کوانتومی دو

قسمتی را در حالت درهم ناتنیده‌ی $(|1\rangle + |2\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$ در نظر بگیرید که آلیس و باب می-

خواهند برای تشخیص اندیس $i = 1, 2$ اندازه گیری خود را انجام دهند. هنگامی که باب اولین نتیجه

اندازه گیری را با فروریختن حالت خود به $|1\rangle|1\rangle$ یا $|2\rangle|2\rangle$ به صورت کلاسیکی ثبت می‌کند و سپس

از طریق ارتباطات کلاسیکی، آن را برای آلیس می‌فرستد، در واقع او با این کار بین نتیجه‌ی اندازه

گیری خود و محیط کوانتومی کانال ارتباط دهنده‌ی نتایج، نوعی از درهم تنیدگی را بوجود آورده

است. این درهم تنیدگی، یک سیستم مشترک از پیام باب به آلیس و محیط کوانتومی را در حالت

$e_1 \otimes |1\rangle + e_2 \otimes |2\rangle$ آماده می‌کند که در آن e_1 و e_2 دو حالت متعامد از فضای محیط هستند.

خوب است بدانیم که پروتکل‌های اندازه گیری که تنها به ارتباطات کلاسیکی نیاز دارند، به طور حتم

برگشت ناپذیر نیستند. برای مثال، برای انجام فرایند اندازه گیری مجموعه‌ی قابل تجزیه‌ی

$\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ که قبلاً در نظر گرفته شد، مکاتبه‌ی یک بیت اطلاعات از آلیس به باب از طریق یک

کانال کلاسیکی مورد احتیاج می‌شود که هیچ گونه آنتروپی را تولید نمی‌کند. به دلیل این که این بیت

در یکی از حالات پایه‌ای محاسباتی قرار می‌گیرد، از این رو هیچ‌گاه این حالات به طور دقیق با کانال

dephase کننده، درهم تنیده نمی‌شوند. در واقع برای ایجاد کردن درهم تنیدگی با محیط و برگشت ناپذیری فرایند، لازم است که یک بیت اطلاعات به درون کانال ارتباط دهنده فرستاده شود که در یک برهم نهی از حالات پایه‌ای قرار می‌گیرد.

۴-۶-۲ فراهم سازی حالات به صورت برگشت ناپذیر

برای مجموعه‌ی حالات قابل تجزیه مانند $\{\psi_r, \psi_e, \psi_a\}$ ، نگاشت

$$|i\rangle \otimes |i\rangle \leftrightarrow |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle \quad (54-4)$$

را بین دستورالعمل‌های کلاسیکی و حالت کوانتومی توصیف شده در نظر می‌گیریم که به صورت موضعی برگشت پذیر است و می‌تواند بدون دور انداختن اطلاعات در هر جهتی انجام شود. از طرفی مجموعه‌ی حالات غیرقابل تجزیه، مانند $\{\psi_r, \psi_e, \psi_a\}$ نمی‌توانند توسط هیچ عملکرد برگشت پذیری آماده شوند. از این رو حدس می‌زنیم که حتی پروتکل‌های چند مرحله‌ای مجانبی، نمی‌توانند نه آنتروپی حاصل از فراهم سازی و نه آنتروپی حاصل از اندازه گیری حالت کوانتومی را به مقدار صفر کاهش دهند. شاید به طور شگفت انگیز، به کمک بهترین پروتکل‌هایی که پیدا می‌کنیم، آنتروپی حاصل از فراهم سازی و اندازه گیری مساوی نباشند.

برای دادن نمونه‌ای از برگشت ناپذیری آماده کردن حالات کوانتومی، روش زیر را برای آماده ساختن آنسامبل حالات غیرقابل تجزیه $\{\psi_r, \psi_e, \psi_a\}$ که در بالا یادآوری شده است، در نظر می‌گیریم. با بهترین پروتکلی که قبلاً برای چنین آنسامبلی در نظر گرفتیم، مقدار

$$h\left(\frac{1}{4}\right) \approx -\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \left(1 - \frac{1}{4}\right) \log_2 \left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4} \frac{\ln \frac{1}{4}}{\ln 2} - \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{4}\right)}{\ln 2}$$

$$\approx 0.5 - (-0.311378) \approx 0.811378 \quad (55-4)$$

بیت آنتروپی تولید خواهد شد که به طور قابل ملاحظه‌ای بیشتر از آنتروپی حاصل از اندازه گیری چنین آنسامبلی است. طریقه‌ی عمل به صورت زیر است:

باب در ابتدای کار، تابع $f(i)$ را از دستورالعمل کلاسیکی i محاسبه می‌کند. تابع $f(i)$ ، تابعی است که دو مقدار $f(4) = 1$ (چنانچه برای سیستم مرکب حالت ψ_F فراهم شود) و $f(2,6,8) = 0$ (اگر سیستم در سه حالت ψ_2, ψ_6, ψ_8 یا ψ_1 آماده گردد) را که توسط باب محاسبه و نتیجه در بیت کاری ذخیره می‌شود، ثبت می‌کند. بعد از آن هر دو مشاهده‌گر، آنسامبل چهار حالت کوانتومی اصلاح شده را مطابق با شکل (۴-۷)، به صورت برگشت پذیر آماده می‌کنند. به عبارتی، چنانچه دستورالعمل آماده سازی برای سیستم، حالت ψ_F باشد، آن‌گاه این حالت به صورت $\psi_{F'}$ اصلاح شده، آماده می‌شود و سه حالت دیگر بدون تغییر باقی می‌مانند.

		B		
		0	1	2
A	0		2	
	1			8
	2	6		4'

شکل ۴-۷: نمایش دومینوای چهار حالتی که توسط آلیس و باب به صورت موضعی و برگشت پذیر آماده می‌شوند.

به دلیل این که آنسامبل $\{\psi_2, \psi_6, \psi_8, \psi_1\}$ یک مجموعه‌ی قابل تجزیه است، آماده سازی حالت ψ_F برای سیستم دو قسمتی، به صورت برگشت پذیر انجام می‌شود. در این جا باب، یک عملکرد موضعی را با در نظر گرفتن شرط $f(i)$ ، به کمک گیت کوانتومی هادامارد روی کیوبیت خود یعنی $|2\rangle$ ، انجام می‌دهد که باعث می‌شود حالت $\psi_{F'}$ به ψ_F تبدیل و سه حالت دیگر همان گونه که می‌خواستیم بدون تغییر باقی بمانند. عملکرد موضعی گیت هادامارد در فضای هیلبرت سه بعدی او به صورت

$$|2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle), \quad |1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle), \quad |0\rangle \rightarrow |0\rangle \quad (۴-۵۶)$$

می باشد که نمایش ماتریسی آن به شکل زیر

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (57-4)$$

است که در آن نمایش ماتریسی پایه‌های محاسباتی را به کار برده‌ایم.

سرانجام باب بایستی اثر بیت کاری خود را با دور انداختن $h(\frac{1}{4}) \approx 0/111278$ بیت آنتروپی به محیط کوانتومی از بین ببرد. دلایل مشابه نشان می‌دهند که آنسامبل ۹ حالتی درهم ناتنیده‌ی متساوی الاحتمال با دور انداختن

$$h(\frac{2}{4}) \approx -\frac{2}{4} \log_r \frac{2}{4} - (1 - \frac{2}{4}) \log_r \frac{(1-\frac{2}{4})}{4} \approx 0/4822 - (-0/28175) \approx 0/764 \quad (58-4)$$

بیت آنتروپی و همچنین آنسامبل هشت حالتی متساوی الاحتمال با از دست دادن

$$h(\frac{2}{8}) \approx -\frac{2}{8} \log_r \frac{2}{8} - (1 - \frac{2}{8}) \log_r \frac{(1-\frac{2}{8})}{8} \approx 0/5 - (-0/311278) \approx 0/111278 \quad (59-4)$$

بیت آنتروپی به محیط می‌تواند آماده بشوند. بایستی به این نکته توجه داشته باشید که تمامی پروتکل‌های اندازه‌گیری و آماده‌سازی حالات را که به صورت موضعی توصیف کرده‌ایم، مادامی که از نقطه نظر آلیس و باب برگشت ناپذیر باشند، از دورنمای جهانی که شامل آلیس، باب و محیط کوانتومی است به صورت برگشت پذیر عمل می‌کنند. در پروتکل آماده‌سازی که اندکی پیش توصیف کردیم، برگشت پذیر بودن جهانی به علت اینکه در آخرین مرحله، اطلاعات کلاسیکی $(f(i))$ دور انداخته شده به محیط، تصادفی نیستند و به طور کامل توسط حالت مشترک ψ_i از آلیس و باب تعیین می‌شوند، نتیجه می‌شود. بنابراین با دور انداختن اطلاعات به محیط، اگر چه آنتروپی محیط افزایش می‌یابد ولی در کل آنتروپی جهان افزایشی ندارد و ثابت می‌ماند (برگشت پذیری).

همچنین در پروتکل اندازه‌گیری برای مجموعه‌ی مشابهی با آنسامبل چهار حالتی معرفی شده در بالا می‌بینیم که به دلیل این که اطلاعات دور انداخته شده به محیط در آخرین مرحله (زمانی که یکی از دومینوها فرو ریخته شده باشد)، صرفاً نیمی از درهم تنیدگی ایجاد شده با محیط در یک مرحله قبلتر

را بوجود می‌آورند، بنابراین از دید آلیس و باب این پروتکل، برگشت ناپذیر است، ولی از دورنمای جهانی، فرایند به صورت برگشت پذیر دیده می‌شود. از این رو نتیجه‌ی نهایی این دور انداختن اطلاعات این می‌باشد که دوباره محیط کوانتومی را برای یک حالت خالص کوانتومی نگه می‌دارد.

هنگامی که از پارامترهای کمی ترمودینامیکی پروتکل های موضعی اندازه گیری و آماده سازی حالات کوانتومی صحبت می‌کنیم، بایستی یادآور شویم که چنانچه آنسامبل مورد نظر شامل حالات درهم ناتنیده باشد، آنگاه به صورت موضعی چنین آنسامبلی می‌تواند آماده شود، ولی دیدیم که تمام مجموعه حالات به صورت موضعی قابل اندازه گیری نیستند. در مقابل، آنسامبلی از حالات متعامد خالص دو قسمتی مانند آنسامبل چهار یا دو حالتی بل، به علت این که شامل یک یا چند حالت درهم ناتنیده هستند، امکان آماده سازی آنها به صورت موضعی وجود ندارد و به نوعی آنها را به صورت ناموضعی بایستی فراهم کرد. با وجود این می‌توانیم مفاهیم آنتروپی حاصل از اندازه گیری و آماده سازی حالات را به چنین مجموعه‌هایی تعمیم دهیم. البته آلیس و باب بایستی برای این کار یک منبع درهم تنیدگی کمکی، مانند حالت درهم تنیده‌ی تکتایی $(|10\rangle - |01\rangle) / \sqrt{2}$ را از قبل به منظور کمک کردن به عملکردهای آن‌ها، مانند فرابرد کوانتومی که به صورت موضعی انجام شدنی نیست [۲۰]، فراهم کرده باشند. در این گونه موارد، معیارهای آنتروپی درهم تنیدگی کمکی از آماده سازی موضعی حالات و هم چنین آنتروپی درهم تنیدگی کمکی از اندازه گیری موضعی حالات را تعریف می‌کنیم. با این روش پروتکل اندازه گیری آنسامبلی که به صورت موضعی قابل اندازه گیری نیست، مانند آنسامبل ۹ حالتی اولیه، با فرستادن اطلاعات کوانتومی از راه دور به اندازه‌ی مورد نیاز که از منبع درهم تنیدگی کمکی استفاده می‌کند (همانند پروتکل نمایش داده شده در شکل (۴-۶))، قابل اندازه گیری خواهد بود. از این رو، این فرابرد کوانتومی به دلیل تولید کردن ۲ بیت اطلاعات کلاسیکی اتلافی به ازای یک کیوبیت فرابرد شده، در بوجود آمدن آنتروپی حاصل از اندازه گیری سهیم است. هم‌چنین می‌توانیم با پروتکل های ساده‌ای که از کارآمد بودن آنها خبر نداریم، میزان درهم تنیدگی مصرف شده و مقدار آنتروپی تولید شده که دقیقاً دو برابر مقدار درهم تنیدگی است را محاسبه کنیم.

در این جا برای پروتکل اندازه گیری آنسامبل ۹ حالتی، یک منبع درهم تنیدگی را فراهم و مشابه پروتکل اندازه گیری شکل (۴-۶) عمل می کنیم، این بار آنتروپی حاصل از اندازه گیری به همراه دور انداختن دو بیت اطلاعات کلاسیکی برابر با

$$r \times [h(\frac{1}{3}) + \frac{2}{9}] = r \times (-\frac{1}{3} \log_r \frac{1}{3} - (1 - \frac{1}{3}) \log_r (\frac{2}{3})) + \frac{2}{9} \approx 2/283.04 \quad (60-4)$$

بیت و برای آنسامبل هشت حالتی

$$r \times [h(\frac{3}{8}) + \frac{2}{8}] = r \times (-\frac{3}{8} \log_r \frac{3}{8} - (1 - \frac{3}{8}) \log_r (\frac{5}{8})) + \frac{2}{8} \approx 2/40.116 \quad (61-4)$$

بیت اطلاعات خواهد بود. عبارات داخل کروشه مقدار درهم تنیدگی لازم برای عملکرد فرابرد اطلاعات کوانتومی را نشان می دهد. به دلیل این که در این روش اندازه گیری، میزان آنتروپی دقیقاً دو برابر مقدار درهم تنیدگی است، بنابراین در بین مراحل پروتکل، هیچ اطلاعات اتلافی دیگری به غیر از اطلاعات وابسته به فرابردهای کلاسیکی و کوانتومی تولید نمی شود.

حالا به پروتکل های آماده سازی حالات درهم ناتنیده که از یک منبع درهم تنیدگی کمکی استفاده می کنند، می پردازیم. برای آماده سازی، یک مجموعه ی شاخص از حالات، مانند آنسامبل چهارحالتی بل یعنی $\{\varphi^+, \varphi^-, \psi^+, \psi^-\}$ را که به درهم تنیدگی احتیاج دارند، در نظر می گیریم. در این جا می توان دو بیت اطلاعات را به عنوان مقدار آنتروپی حاصل از آماده سازی حالت بل مورد نظر بدست آورد. (ابتدا باب دستورالعملهای کلاسیکی را می خواند و سپس با یک چرخش پاؤلی متناسب با ψ^- (منبع درهم تنیدگی کمکی)، حالت بل مورد نظر را آماده کرده و بعد از آن تمامی دستورالعملهای کلاسیکی را دور می اندازد.)

در پایان این قسمت فرض می کنیم که سیستم دو قسمتی آلیس و باب در یک حالت نامعلوم آنسامبل ۹ حالتی درهم ناتنیده ی اولیه آماده شده باشد. در این جا می خواهیم بدون کمک گرفتن از منبع درهم تنیدگی، این حالت نامعلوم را تشخیص دهیم. البته برای تشخیص دادن این حالت از میزان اشاراتی که شخص سومی از حالت مورد نظر در اختیار آلیس و باب قرار می دهد، کمک می گیریم.

برای تشخیص دادن حالت اصلی سیستم، کمیت " آگاهی از اندازه گیری " را به عنوان کمینه‌ی آگاهی مورد نیاز برای راهنمایی کردن آلیس و باب تعریف می‌کنیم. همان‌گونه که در پروتکل‌های اندازه گیری بالا گفتیم، یک اشاره‌ی منفی، مثلاً " حالت اصلی مورد نظر برای سیستم، حالت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ نیست " می‌تواند برای راهنمایی کردن آلیس و باب کافی باشد. این مقدار آگاهی به نظر زیاد می‌باشد (به اندازه‌ی یک اشاره‌ی کاملاً مثبت که حاوی اطلاعات مفید است، مثلاً " حالت اصلی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است "، ولی بایستی در حقیقت، بتوان تمامی اشارات منفی را به کمک تکنیک‌های آمیخته کردن اشارات کلاسیکی، فشرده کرد. در مورد آنسامبل ۹ حالتی متساوی‌الاحتمال به طور مجانبی، به $\frac{1}{9} \log_2 \frac{1}{9} \approx 0.1112$ بیت اطلاعات به ازای هر اشاره لازم احتیاج می‌شود. جزئیات این نوع فشرده‌گی اطلاعات در پیوست ب آمده است. اما بهتر است با توجه به قسمت ۴-۴، برای تشخیص حالت نامعلوم از آنسامبل ۹ حالتی درهم ناتنیده، اندازه گیری مناسب اصلاحی $POVM$ که میزان بهینه‌ی $0.1125/3 \approx 0.1575$ بیت اطلاعات را نتیجه می‌دهد، در نظر بگیریم. از این‌رو، آلیس و باب برای تشخیص دادن حالت اصلی برای سیستم دو قسمتی به کمک اندازه گیری $POVM$ خود، تنها به طور مجانبی تنها به میزان 0.1575 بیت اطلاعات اضافی نیاز خواهند داشت. از طرفی این میزان آگاهی مورد نیاز ممکن است به زمان دریافت آن بستگی داشته باشد. به عبارت دیگر، اگر چه این میزان آگاهی می‌تواند بعد از انجام اندازه گیری $POVM$ توسط آلیس و باب برای آنسامبل ۹ حالتی کارآمد باشد، ولی به طور کلی در مورد انتخاب‌های دیگر در نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی، آگاهی زودتر نسبت به آگاهی دیرتر مفیدتر خواهد بود.

کمیت " آگاهی از اندازه گیری " را می‌توانیم به مجموعه حالات درهم تنیده نیز تعمیم دهیم. برای مثال در مورد آنسامبل چهار حالتی متعامد بل، به دلیل این‌که می‌توان تنها ۱ بیت اطلاعات (حالت اصلی ϕ یا ψ باشد) را با مقایسه کردن نتایج حاصل از اندازه گیری‌های موضعی آلیس و باب در پایه‌های z بدست آورد، در نتیجه، برای تشخیص دادن حالت اصلی از بین چهار حالت آنسامبل، فقط

۱ بیت اطلاعات دیگر (مثلاً این که حالت نامعلوم بل آیا از نوع مثبت است یا از نوع منفی؟) لازم است. در پایان این قسمت، برای چندین آنسامبل توصیف شده در بالا، معیارهای کمی گوناگونی که به نوعی ناموضیعت را برای حالات درهم ناتنیده نشان می‌دهند، در جدول (۴-۱) در نظر گرفته‌ایم.

جدول ۴-۱ : معیارهای گوناگون برای سنجیدن ناموضیعت

آنسامبل	۹ حالتی	۲۴۶۸	۲۴۶	چهار-بل	دو-بل
آماده سازی موضعی	بله	بله	بله	خیر	خیر
اندازه گیری موضعی	خیر	بله	بله	خیر	بله
تجزیه پذیری	خیر	خیر	بله	خیر	خیر
آنتروپی آماده سازی	۰/۷۶۴	۰/۸۱۱	۰	۲	۱
آنتروپی اندازه گیری	۲/۲۸۳	۰/۲۵۰	۰	۲	۱
درهم تنیدگی آماده سازی	۰	۰	۰	۱	۱
درهم تنیدگی اندازه گیری	۱/۱۴۲	۰	۰	۱	۰
آگاهی از اندازه گیری	۰/۱۵۷۵	۰	۰	۱	۰

در قسمت بعدی این فصل تلاش می‌کنیم که ابتدا معیارهای کمی بالا را برای آنسامبل حالات درهم-ناتنیده در فضای هیلبرت 4×4 محاسبه کنیم و سپس نتایج بدست آمده را با نتایج جدول (۴-۱) مقایسه کنیم. در آن جا متوجه خواهیم شد که نتایج بدست آمده برای حالات درهم ناتنیده در فضای هیلبرت بزرگتر دارای احتمال مؤفقیقت بیشتر و درصد خطای کمتری نسبت به نتایج بدست آمده برای حالات در فضای هیلبرت کوچکتر می‌باشد.

۷-۴ و اما آنسامبل پیشنهادی...

در این قسمت به عنوان تعمیمی از کار قبلی، ابتدا مجموعه‌ای از حالات درهم ناتنیده‌ی متعامد $|\phi_i\rangle = |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$ ؛ $i = 1..16$ را که در یک فضای هیلبرت 4×4 قرار گرفته‌اند، در نظر می‌گیریم که می‌توانند رفتار ناموضعی از خود نشان دهند و سپس نتایج بدست آمده از آن را با نتایج آنسامبلی که در فضای هیلبرت 3×3 قرار گرفته است، مقایسه می‌کنیم.

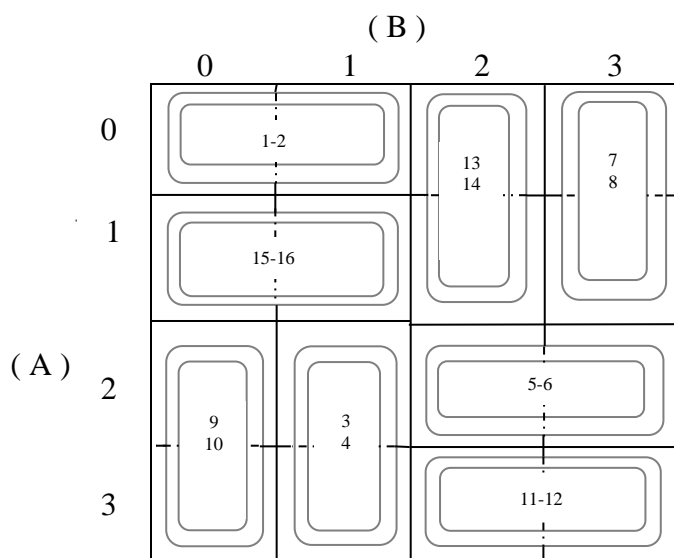
در این نمونه از کار مانند تحقیق قبلی، آلیس و باب دو مشاهده‌گری هستند که هر کدام به ترتیب حالات $|\alpha_i\rangle$ و $|\beta_i\rangle$ را در یک فضای هیلبرت چهار بعدی در اختیار دارند. از عبارات $|\circ\rangle$ ، $|1\rangle$ ، $|2\rangle$ و $|3\rangle$ برای بیان پایه‌های فضای هیلبرت آلیس و باب استفاده می‌کنیم. این مجموعه حالات را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$ \alpha\rangle(Alice)$	$ \beta\rangle(Bab)$	
$\phi_1 = \circ\rangle$	$ \circ+1\rangle$	
$\phi_2 = \circ\rangle$	$ \circ-1\rangle$	
$\phi_3 = 2+3\rangle$	$ 1\rangle$	
$\phi_4 = 2-3\rangle$	$ 1\rangle$	
$\phi_5 = 2\rangle$	$ 2+3\rangle$	(۶۲-۴)
$\phi_6 = 2\rangle$	$ 2-3\rangle$	
$\phi_7 = \circ+1\rangle$	$ 3\rangle$	
$\phi_8 = \circ-1\rangle$	$ 3\rangle$	
$\phi_9 = 2+3\rangle$	$ \circ\rangle$	
$\phi_{10} = 2-3\rangle$	$ \circ\rangle$	

$$\begin{array}{ll}
 \phi_{11} = |3\rangle & |2+3\rangle \\
 \phi_{1r} = |3\rangle & |2-3\rangle \\
 \phi_{1r} = |0+1\rangle & |2\rangle \\
 \phi_{1f} = |0-1\rangle & |2\rangle \\
 \phi_{1d} = |1\rangle & |0+1\rangle \\
 \phi_{1e} = |1\rangle & |0-1\rangle
 \end{array}$$

حالات معرفی شده در بالا، دو به دو بر هم عمود هستند و در نتیجه بایستی امکان تشخیص دادن آن-ها توسط آلیس و باب وجود داشته باشد. از طرفی اگر مشاهده‌گرها به تنهایی با عملکردهای موضعی خود روی این حالات اندازه‌گیری انجام بدهند، دیگر متعامد نخواهند بود.

این ۱۶ حالت درهم ناتنیده را در شکل (۴-۸)، به صورت بر هم نهی از پایه‌های فضای هیلبرت آلیس و باب، به کمک ۸ جفت ناحیه (دومینو) نشان داده‌ایم.



شکل ۴-۸: نمایش دومینوای از ۱۶ حالت درهم ناتنیده‌ی متعامد

برای این آنسامبل از حالات درهم ناتنیده، هیچ یک از عملگرهای موضعی آلیس و باب، نمی‌تواند ابرعملگر تفکیک‌پذیر $S(\rho) = \sum_i S_i \rho S_i^\dagger$ مؤثر بر حالات را که شامل عملگرهای تصویری فون نیومن $S_i = |i\rangle_A \langle i|_B \langle \phi_i|$ است، اجرا کند، حتی اگر بین مشاهده‌گرها ارتباطات کلاسیکی برقرار باشد. از طرفی، چنانچه آلیس و باب برای آماده کردن سیستم دو قسمتی خود در یکی از این حالات و تشخیص دادن حالت مورد نظر از عملگرهای موضعی استفاده نمایند، آن‌گاه پروتکل اندازه‌گیری دو موضعی آن‌ها، با موفقیت انجام نمی‌شود و حالات بدست آمده نامتعامل و در نتیجه به طور کامل قابل تشخیص نیستند. از این رو بایستی یک پروتکل اندازه‌گیری اصلاح شده‌ای را در نظر بگیریم که امکان تشخیص دادن این حالات نامتعامل را داشته باشد. بدین منظور می‌توان در پروتکل اندازه‌گیری از عملگرهای $POVM$ استفاده شود.

در ادامه‌ی کار، برای این آنسامبل از حالات درهم ناتنیده، ثابت می‌کنیم اطلاعات متقابلی که آلیس و باب در پروتکل اصلاح شده‌ی دو موضعی خود، از گزارشات کلاسیکی یکدیگر بدست می‌آورند، ناقص است و در مقایسه با پروتکل اندازه‌گیری کامل وی بی عیب و نقص، میزان کسری اطلاعات (Δ) را شامل می‌شود. به عبارت دیگر، مشاهده‌گرها تنها حدودی از نتایج اندازه‌گیری را بدست می‌آورند. این میزان کسری اطلاعات در مورد آنسامبل حالات در فضای هیلبرت 4×4 ، در مقایسه با کسری اطلاعات بدست آمده برای آنسامبل حالات در فضای هیلبرت 3×3 که در قسمت ۳-۴ بررسی و محاسبه شد، به میزان $3/4$ کمتر است و در نتیجه مشاهده می‌کنیم که اطلاعات بدست آمده برای آلیس و باب از یکدیگر در فضای بزرگتر، بیشتر خواهد بود که به طور قطع می‌تواند نتیجه‌ی بهتری باشد. بدین منظور برای این کمیت با انجام یک پروتکل اندازه‌گیری بهینه‌ی دو مرحله‌ای، یک کران بالا و یک کران پایینی را بدست می‌آوریم. این دو مرحله به صورت زیر تعریف می‌شوند:

- مرحله‌ی ۱: مرحله‌ای است که مشاهده‌گرها، حالت $|\phi_i\rangle$ ای را که برای سیستم کوانتومی مرکب انتخاب می‌کنند، به کمک عملگر $S_m = A_m \otimes B_m$ ، A_m و B_m ، عملگرهای موضعی

آلیس و باب هستند و اندیس m هم، نشان دهنده‌ی زنجیره‌ای از اطلاعات است که هر دو مشاهده‌گر از مراحل اندازه‌گیری خود بدست می‌آورند. به حالت

$$\mathcal{X}_{i,m} \equiv S_m |\phi_i\rangle = \frac{S_m |\phi_i\rangle}{\sqrt{\langle \phi_i | S_m^t S_m | \phi_i \rangle}} \quad (63-4)$$

تبدیل کنند و به احتمال اندازه‌گیری هر یک از حالات، مقدار ویژه‌ای را نسبت داد.

- مرحله‌ی ۲: مرحله‌ای است که شامل تمام عملکردهای انجام شده روی حالات، از پایان مرحله‌ی ۱ تا کامل شدن پروتکل اندازه‌گیری دو موضعی است که البته در این مرحله، از اندازه‌گیری $POVM$ با عناصر ماتریسی 4×4 $\{M_b\}$ (در شرط $\sum_b M_b = 1$ صدق می‌کند) استفاده می‌شود.

زمانی که زنجیره‌ی m از نتایج اندازه‌گیری بدست آمد، آن‌گاه با استفاده از قضیه‌ی بیز [۲۵،۲۶]، احتمال پیدا کردن حالات ϕ_i ، مشروط بر دانستن m به صورت:

$$P(\phi_i | m) = \frac{P(m | \phi_i) P(\phi_i)}{\sum_j P(m | \phi_j) P(\phi_j)} \quad (64-4)$$

خواهد بود. از طرفی برای عبارت $P(m | \phi_i)$ نیز خواهیم داشت:

$$P(m | \phi_i) = |S_m |\phi_i\rangle|^r = \langle \phi_i | S_m^t S_m | \phi_i \rangle = Tr(S_m |\phi_i\rangle \langle \phi_i | S_m^t) \quad (65-4)$$

در رابطه‌ی (۶۴-۴)، $P(\phi_i)$ و $P(\phi_j)$ ، احتمال اولیه‌ی حالات قبل از اندازه‌گیری هستند که برای همه یکسان و برابر با $\frac{1}{16}$ است. برای مرحله‌ی ۱ از پروتکل، یک نقطه‌ی پایانی وجود دارد که می‌توان به نتیجه‌ی m بدست آمده از اندازه‌گیری، احتمال ویژه‌ی زیر را نسبت داد:

$$\begin{aligned} \max_i P(\phi_i | m) &= \frac{1}{16} + \varepsilon \\ \min_i P(\phi_i | m) &\geq \frac{1}{16} - 15\varepsilon \end{aligned} \quad (66-4)$$

مقدار ε در رابطه‌ی بالا مثبت و کوچکتر از $\frac{1}{24}$ می‌باشد. از روابط بالا، می‌توانیم نتایج زیر را بدست

آوریم:

$$\begin{aligned}\max_i P(\phi_i|m) &\leq \frac{1}{16} + \varepsilon = \frac{1+16\varepsilon}{16} \\ \max_j P(\phi_j|m) &\leq \frac{1}{16} - 15\varepsilon = \frac{1-240\varepsilon}{16} \\ \max_i P(\phi_i|m) &\geq 1 - \left(\frac{1}{16} - 15\varepsilon\right) = \frac{15+240\varepsilon}{16} \\ \max_j P(\phi_j|m) &\geq 1 - \left(\frac{1}{16} + \varepsilon\right) = \frac{15-16\varepsilon}{16}\end{aligned}$$

که این روابط را دو به دو بر هم تقسیم کرده و در نتیجه، گستره‌ای را که می‌توانیم برای بیشینه احتمال بدست آمده برای حالات بعد از اندازه‌گیری با عملگر S_m بدست آوریم، به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{15+240\varepsilon}{15-16\varepsilon} \leq \max_{i,j} \frac{P(\phi_i|m)}{P(\phi_j|m)} = \max_{i,j} \frac{\langle \alpha_i | a | \alpha_i \rangle \langle \beta_i | b | \beta_i \rangle}{\langle \alpha_j | a | \alpha_j \rangle \langle \beta_j | b | \beta_j \rangle} \leq \frac{1+16\varepsilon}{1-240\varepsilon}. \quad (67-4)$$

آیس برای بیشینه توزیع چگالی احتمال عناصر قطری خود، به تنهایی کمترین مقدار زیر بدست می‌آورد:

$$\max_{i,j} \frac{\langle \alpha_i | a | \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j | a | \alpha_j \rangle} \geq \sqrt{\frac{15+240\varepsilon}{15-16\varepsilon}}. \quad (68-4)$$

این رابطه نشان می‌دهد که حالات بدست آمده بعد از مرحله‌ی ۱، $\chi_{i,m}$ ها در رابطه‌ی (۴-۶۳)، به اندازه‌ی کافی متعامد و قابل تشخیص نیستند و به اندازه‌ی δ یا کمتر از آن، به صورت زیر همپوشانی دارند:

$$\begin{aligned} \max_{i,j} \langle \chi_{i,m} | \chi_{j,m} \rangle = \\ \max_{i,j} \frac{|\langle \phi_i | S_m^t S_m | \phi_j \rangle|}{\sqrt{\langle \phi_i | S_m^t S_m | \phi_i \rangle} \sqrt{\langle \phi_j | S_m^t S_m | \phi_j \rangle}} = \\ \max_{i,j} \frac{|\langle \psi_i | a_m \otimes b_m | \psi_j \rangle|}{\sqrt{\langle \phi_i | a_m \otimes b_m | \phi_i \rangle} \sqrt{\langle \phi_j | a_m \otimes b_m | \phi_j \rangle}} \leq \delta. \end{aligned} \quad (69-4)$$

برای این که دو رابطه‌ی (۶۸-۴) و (۶۹-۴)، به طور همزمان در یکدیگر صدق کنند، بایستی $\delta = O(\varepsilon)$

و رابطه‌ی زیر

$$\max_{i,j} \frac{\langle \alpha_i | a | \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j | a | \alpha_j \rangle} \leq 1 + O(\delta) \quad (70-4)$$

برقرار باشد. همان طور که قبلاً اشاره شد، این رابطه نشان می‌دهد هنگامی که آلیس و باب برای آماده کردن سیستم کوانتومی مرکب در یکی از ۱۶ حالت درهم ناتنیده، از عملگرهای موضعی خود ($I_A \otimes M_B$ و $M_A \otimes I_B$) استفاده می‌کنند، آنگاه از میزان دقت ۱۰۰٪ در تشخیص دادن حالات کاسته می‌شود. یکی از این کاستی‌ها، کامل نبودن اطلاعات متقابلی است که آلیس و باب از گزارشات کلاسیکی یکدیگر می‌توانند بدست آورند. حالا می‌خواهیم با پیدا کردن رابطه‌ی کمی بین دو پارامتر متناهی ε و δ محدوده‌ی اطلاعات متقابل آلیس و باب از نتایج یکدیگر را بدست آوریم. بدین منظور سعی می‌کنیم که مطابق با رابطه‌ی (۶۸-۴)، آن دسته از جفت i و j هایی که بیشترین نسبت از عناصر ماتریسی a یا b را بدست می‌آورند، پیدا کنیم. به عبارتی می‌خواهیم رابطه‌ی زیر را محاسبه کنیم:

$$\max_{i,j} \frac{\langle \alpha_i | a | \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j | a | \alpha_j \rangle} = ? \quad (71-4)$$

برای محاسبه‌ی عبارت بالا، در گام اول بایستی رابطه‌ی $\max_{i,j} \langle \chi_{i,m} | \chi_{j,m} \rangle$ را به ازای جفتهای متفاوت i و j محاسبه کنیم. این مقدار را برای جفت $i=1, j=2$ و برای هر یک از جفتهای $i=9, j=10$ و $i=11, j=12$ و $i=13, j=14$ به ترتیب روابط زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\phi_i &= |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle \Rightarrow \phi_i = |\circ\rangle \otimes |\circ + 1\rangle \\
\phi_j &= |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle \Rightarrow \phi_j = |\circ\rangle \otimes |\circ - 1\rangle \\
&= \frac{|\langle \circ | a | \circ \rangle \langle \circ + 1 | b | \circ - 1 \rangle|}{\sqrt{(\langle \circ | a | \circ \rangle)(\langle \circ + 1 | b | \circ + 1 \rangle)(\langle \circ | a | \circ \rangle)(\langle \circ - 1 | b | \circ - 1 \rangle)}} \\
&= \frac{|a_{\circ\circ}(b_{\circ\circ} - b_{\circ 1} + b_{1\circ} - b_{11})|}{\sqrt{a_{\circ\circ}(b_{\circ\circ} + b_{\circ 1} + b_{1\circ} + b_{11})a_{\circ\circ}(b_{\circ\circ} - b_{\circ 1} - b_{1\circ} + b_{11})}} \\
&= \frac{a_{\circ\circ}|b_{\circ\circ} - b_{\circ 1} + b_{1\circ} - b_{11}|}{a_{\circ\circ}\sqrt{(b_{\circ\circ} + b_{11})^r - (r \operatorname{Re} b_{1\circ})^r}} = \\
&\frac{|b_{\circ\circ} - b_{11} + ri \operatorname{Im} b_{1\circ}|}{\sqrt{(b_{\circ\circ} + b_{11})^r - (r \operatorname{Re} b_{1\circ})^r}} \leq \delta \tag{۷۲-۴}
\end{aligned}$$

به کمک این روابط می‌توانیم عناصر قطری عملگرهای آلیس و باب را بر حسب پارامتر δ ، به ترتیب زیر کراندار کنیم :

$$\frac{|b_{\circ\circ} - b_{11}|}{b_{\circ\circ} + b_{11}} \leq \delta, \quad \frac{|a_{rr} - a_{rr}|}{a_{rr} + a_{rr}} \leq \delta, \quad \frac{|b_{rr} - b_{rr}|}{b_{rr} + b_{rr}} \leq \delta, \quad \frac{|a_{\circ\circ} - a_{11}|}{a_{\circ\circ} + a_{11}} \leq \delta. \tag{۷۳-۴}$$

هم‌چنین برای عناصر غیر قطری از عملگرهای a و b ، می‌توانیم این نامساوی‌ها را برقرار کنیم. برای معلوم کردن مقدار رابطه‌ی (۷۱-۴) در دومین گام، به انجام محاسبات زیر نیاز داریم:

$$\begin{aligned}
\phi_i &= |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle = |\alpha_i\rangle |\beta_i\rangle \\
\phi_j &= |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle = |\alpha_j\rangle |\beta_j\rangle \quad \Rightarrow \quad j=2 \text{ و } i=1 \\
\phi_i &= |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle = |\circ\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}(|\circ\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{r}}(|\circ\rangle|\circ\rangle + |\circ\rangle|1\rangle) \\
\phi_r &= |\alpha_r\rangle \otimes |\beta_r\rangle = |\circ\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}(|\circ\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{r}}(|\circ\rangle|\circ\rangle - |\circ\rangle|1\rangle) \\
\circ &< \frac{\langle \beta_i | b | \beta_i \rangle}{\langle \beta_r | b | \beta_r \rangle} \leq \frac{1+16\varepsilon}{1-24\varepsilon} \Rightarrow \circ < \frac{\langle \circ + 1 | b | \circ + 1 \rangle}{\langle \circ - 1 | b | \circ - 1 \rangle} \leq \frac{1+16\varepsilon}{1-24\varepsilon} \\
&= \circ < \frac{\langle \circ | b | \circ \rangle + \langle \circ | b | 1 \rangle + \langle 1 | b | \circ \rangle + \langle 1 | b | 1 \rangle}{\langle \circ | b | \circ \rangle - \langle \circ | b | 1 \rangle - \langle 1 | b | \circ \rangle + \langle 1 | b | 1 \rangle} \leq \frac{1+16\varepsilon}{1-24\varepsilon}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{b_{oo} + b_{11} + 2 \operatorname{Re} b_{1o}}{b_{oo} + b_{11} - 2 \operatorname{Re} b_{1o}} \leq \frac{1 + 16\varepsilon}{1 - 240\varepsilon} \quad (74-4)$$

برای $i = 2$ و $j = 1$ محاسباتی مشابه بالا، انجام می‌دهیم که عبارت زیر را نتیجه می‌دهد:

$$0 < \frac{b_{oo} + b_{11} - 2 \operatorname{Re} b_{1o}}{b_{oo} + b_{11} + 2 \operatorname{Re} b_{1o}} \leq \frac{1 + 16\varepsilon}{1 - 240\varepsilon} \quad (75-4)$$

نامساوی‌ها را در دو رابطه‌ی فوق تفکیک می‌کنیم:

$$b_{oo} + b_{11} + 2 \operatorname{Re} b_{1o} > 0$$

$$b_{oo} + b_{11} - 2 \operatorname{Re} b_{1o} < 0$$

$$b_{oo} + b_{11} + 2 \operatorname{Re} b_{1o} \leq \frac{1 + 16\varepsilon}{1 - 240\varepsilon}$$

$$b_{oo} + b_{11} - 2 \operatorname{Re} b_{1o} \leq 1 - \left(\frac{1 + 16\varepsilon}{1 - 240\varepsilon} \right) = \frac{-256\varepsilon}{1 - 240\varepsilon}$$

$$b_{oo} + b_{11} - 2 \operatorname{Re} b_{1o} \geq \frac{1 - 240\varepsilon}{1 + 16\varepsilon}$$

$$b_{oo} + b_{11} - 2 \operatorname{Re} b_{1o} > 0$$

$$b_{oo} + b_{11} + 2 \operatorname{Re} b_{1o} < 0$$

$$b_{oo} + b_{11} - 2 \operatorname{Re} b_{1o} \leq \frac{1 + 16\varepsilon}{1 - 240\varepsilon}$$

$$b_{oo} + b_{11} + 2 \operatorname{Re} b_{1o} \leq 1 - \left(\frac{1 + 16\varepsilon}{1 - 240\varepsilon} \right) = \frac{-256\varepsilon}{1 - 240\varepsilon}$$

$$b_{oo} + b_{11} + 2 \operatorname{Re} b_{1o} \geq \frac{1 - 240\varepsilon}{1 + 16\varepsilon}$$

مشاهده می‌کنیم که این روابط، مثبت بودن عناصر قطری b_{oo} و b_{11} را نشان می‌دهند. با در نظر

گرفتن محاسبات فوق به رابطه‌ی زیر دست پیدا می‌کنیم:

$$|2 \operatorname{Re} b_{1o}| \leq \frac{272\varepsilon}{2 - 240\varepsilon} (b_{oo} + b_{11}) \quad (76-4)$$

هم چنین به طور مشابه برای $\{i, j\} = \{2k + 1, 2k + 2\}$ ؛ $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ خواهیم داشت:

$$|2 \operatorname{Re} b_{rr}| \leq \frac{272\varepsilon}{2 - 240\varepsilon} (b_{rr} + b_{11}), \quad (77-4)$$

$$|\operatorname{Re} a_{rr}| \leq \frac{272\varepsilon}{2-24\varepsilon} (a_{rr} + a_{11}), \quad (78-4)$$

$$|\operatorname{Re} a_{j0}| \leq \frac{272\varepsilon}{2-24\varepsilon} (a_{11} + a_{00}). \quad (79-4)$$

در این جا به کمک روابط بالا و هم چنین رابطه‌ی (۷۲-۴)، رابطه‌ی (۷۰-۴) را برای $i=7$ و $j=9$ بدست می‌آوریم. از این رو به رابطه‌ی بین پارامترهای متناهی ε و δ به صورت زیر پی می‌بریم:

$$f_\varepsilon(\delta) = \frac{a_{00} + a_{11} + 2 \operatorname{Re} a_{01}}{a_{rr} + a_{rr} + 2 \operatorname{Re} a_{rr}} = \frac{a_{11} \frac{1+\delta}{1-\delta} + a_{11} - 2a_{11} v_\varepsilon \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}}}{a_{11} \frac{1-\delta}{1+\delta} + a_{11} \left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^r - 2a_{11} \frac{1-\delta}{1+\delta} v_\varepsilon \sqrt{\frac{1-\delta}{1+\delta}}} =$$

$$\frac{1+\delta+1-\delta-2v_\varepsilon \sqrt{(1+\delta)(1-\delta)}}{1-\delta} = \left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^r \left[\frac{1-v_\varepsilon \sqrt{(1+\delta)(1-\delta)}}{1-v_\varepsilon \sqrt{(1+\delta)(1-\delta)}} \right] =$$

$$\frac{1-\delta^r + 1+\delta^r - 2\delta - 2(1-\delta)v_\varepsilon \sqrt{(1-\delta)(1+\delta)}}{(1+\delta)^r} = \left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^r = \sqrt{\frac{15+24\varepsilon}{15-16\varepsilon}} \Rightarrow$$

$$\text{که } z = 1 + \frac{272\varepsilon}{2-24\varepsilon} = \frac{2+32\varepsilon}{2-24\varepsilon} \text{ و } v_z = \frac{2\delta}{1-\delta} \left(\sqrt{z} + \frac{1}{z} (z+2\sqrt{z}+1) \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}} \right) \text{ را در پیوست الف بدست}$$

آورده‌ایم. بنابراین مقدار رابطه‌ی (۷۰-۴) بر حسب دو پارامتر تعریف شده، به صورت زیر خواهد بود.

$$\max_{i,j} \frac{\langle \alpha_i | a | \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j | a | \alpha_j \rangle} \leq f_\varepsilon(\delta) = \left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^r = \sqrt{\frac{15+24\varepsilon}{15-16\varepsilon}}. \quad (80-4)$$

همان طور که در بالا اشاره کردیم، اطلاعات متقابل بدست آمده از نتایج توسط دو مشاهده‌گر آلیس و باب در پروتکل دو موضعی، به اندازه‌ی Δ کمتر از اطلاعات مربوط به پروتکل اندازه‌گیری اصلی است. برای بدست آوردن این کسری اطلاعات به دنبال محاسبات انجام شده در بالا، ۳ متغیر تصادفی M_r (نتیجه‌ی اندازه‌گیری از مرحله‌ی ۱)، M_r (نتیجه‌ی اندازه‌گیری از مرحله‌ی ۲) و W که نشان دهنده‌ی شناسایی برچسب i از ۱۶ حالت معرفی شده است، را تعریف می‌کنیم. با معرفی این سه متغیر برای کمیت سنج اطلاعات متقابل از پروتکل اندازه‌گیری، داریم:

$$I(W; M_1, M_r) = I(W; M_r | M_1) + I(W; M_1) \quad (۸۱-۴)$$

$I(W; M_1, M_r)$: وابستگی متقابل بین سه متغیر تصادفی M_1, M_r و W را به صورت کمی بیان می-

کند [۱]. وابستگی دوطرفه بین متغیر مجهول W و M_1 به صورت زیر است:

$$I(W; M_1) = H(W) - H(W | M_1)$$

$H(W)$ تابع آنتروپی شانن برای آنسامبل ۱۶ حالت متساوی الاحتمال با مقدار $\frac{1}{16}$ می باشد که با

استفاده از تعاریف شانن در نظریه ی اطلاعات کلاسیکی برابر است با:

$$H(W) = -\sum_{i=1}^{16} p_i \log_2 p_i = -\left(\frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16}\right) = -\log_2 \frac{1}{16} = 4 \quad (۸۲-۴)$$

بیت اطلاعات و $H(W | M_1)$ میانگین تمامی نتایج بدست آمده از مرحله ی ۱ از پروتکل اندازه گیری به

صورت زیر است:

$$H(W | M_1) = \sum_m p(m) H(W | m)$$

$$\begin{aligned} I(W; M_1, M_r) &= \log_2 \frac{1}{r} - \sum_m p(m) H(W | m) + \sum_m p(m) I(W; M_r | m) \\ &= \log_2 \frac{1}{r} - \sum_m p(m) (H(W | m) - I(W; M_r | m)) \end{aligned} \quad (۸۳-۴)$$

$$\begin{aligned} H(W | m) - I(M_r; W | m) &\geq -s, I(M_r; W_1 | m) - s_r I(M_r; W_r | m) + s, \log s + s_r \log s_r - \\ \sum_{i=1}^{16} q_i \log q_i &= -s, I(M_r; W_1 | m) + \sum_{i=r}^{16} q_i \log q_i - \sum_{i=r}^{16} q_i \log s_r + s, \log s + s_r \log s_r - \\ \sum_{i=1}^r q_i \log q_i - \sum_{i=r}^{16} q_i \log q_i &= -s, I(M_r; W_1 | m) + s, \log s - \sum_{i=1}^r q_i \log q_i \end{aligned}$$

در روابط بالا برای داشتن روابط بهینه، آنسامبل ۱۶ حالتی را به دو آنسامبل با حالات $i=1, 2$ و

$$i=3 \dots 16, \text{ با ماتریسهای چگالی } \tau_r = \sum_{i=r}^{16} \frac{q_i}{s_r} \rho_i \text{ و } \tau_1 = \sum_{i=1}^r \frac{q_i}{s_1} \rho_i \text{ شکسته ایم که در آنها}$$

ماتریس چگالی هر یک از حالات بعد از تأثیر عملگر S_m است ، $\rho_i = \sum_j p(\phi_i|m) |\phi_{ij}\rangle\langle\phi_{ij}| = |\chi_{i,m}\rangle\langle\chi_{i,m}|$

و $q_i = p(\phi_i|m)$ ، احتمال آن است که بعد از اندازه گیری مرحله ی ۱ نتیجه ی m بدست آید. در نتیجه

$$H(W|m) - I(W; M_r|m) \geq +s, \sum_b (tr \tau, M_b) \log(tr \tau, M_b) - \sum_{i=1}^r q_i \sum_b (tr \rho_i, M_b) \log(tr \rho_i, M_b)$$

$$+ s, \log s, - q, \log q, - q_r \log q_r =$$

$$r q, \sum_b (tr \tau, M_b) \log(tr \tau, M_b) - \sum_{i=1}^r q_i \sum_b (tr \rho_i, M_b) \log(tr \rho_i, M_b) + r q, \log r + r q, \log q,$$

$$- r q, \log q, = r q, \left[1 + \sum_b (tr \tau, M_b) \log(tr \tau, M_b) - \sum_{i=1}^r \frac{1}{r} \sum_b (tr \rho_i, M_b) \log(tr \rho_i, M_b) \right]$$

که $s_r = 1 - s, = \sum_{i=r}^{16} q_i$ و $s, = q, + q_r$ است.

چنانچه در رابطه ی بالا، $q, = \min_i p(\phi_i|m) = \beta = \frac{1}{16} - 15\varepsilon$ و $\langle \chi_{1,m} | \chi_{r,m} \rangle = \delta = \cos(r\theta)$ ، قرار

دهیم:

$$H(W|m) - I(W; M_r|m) \geq r\beta [1 - I(M_r; W_r|m)] = r\beta [1 - (1 - h(\Pr(\theta)))]$$

$$H(W|m) - I(W; M_r|m) \geq r\beta h(\Pr(\theta)) = r\beta h\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} \sqrt{1 - \delta^r}\right) =$$

(۸۴-۴)

$$\left(\frac{r}{16} - r \cdot \varepsilon\right) h\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} \sqrt{1 - \delta^r}\right)$$

با توجه به تابع آنتروپی دودویی $h(x) = -x \log_r x - (1-x) \log_r (1-x)$ ^۳ تعریف شده در [۱۹] (x دارای

دیمانسیون احتمال است)، $h(\Pr(\theta))$ یک تابع آنتروپی دودویی می باشد و $\Pr(\theta) = \frac{1}{r} (1 - \sin(r\theta))$

احتمال خطای بوجود آمده بعد از اندازه گیری است. در نتیجه با استفاده از (۴-۸۳) که همواره

مقداری مثبت را نشان می دهد، کران بالای اطلاعات متقابل را بر حسب Δ برای رابطه ی (۴-۸۲)، به

صورت زیر بدست می آوریم:

$$I(W; M_r, M_r) \leq \log_r \frac{1}{r} - \Delta.$$

(۸۵-۴)

^۳ Binary Entropy Function

زمانی که برای آنسامبل ۱۶ حالتی $\varepsilon = 0.0024705$ در نظر بگیریم، آنگاه به کمک $\delta = O(\varepsilon)$ و روابطه (۷۰-۴) و (۸۰-۴)، پارامتر نشان دهنده‌ی نامتعاد بودن حالات را $\delta = 0.0005211$ و پارامتر مینیمم مقدار احتمال را $\beta = \frac{1}{16} - 15\varepsilon = 0.0254$ قرار می‌دهیم. در نتیجه به کمک عملکردهای موضعی جداگانه‌ی آلیس و باب نسبت به رفتار کاملاً ناموضعی عملکردها، حدود تقریبی $\Delta = 0.0000001718$ را به عنوان مقدار کسری بوجود آمده برای اطلاعات متقابل، بدست می‌آوریم. این رفتار در جدول (۲-۴) برای دو آنسامبل ۹ و ۱۶ حالتی مقایسه شده است.

در این جدول مشاهده می‌کنیم که کسری اطلاعات متقابل در مورد آنسامبل ۱۶ حالتی نسبت به آنسامبل ۹ حالتی به میزان حدوداً ۳/۴٪ کمتر است و اطلاعات کسب شده‌ی آلیس و باب از یکدیگر بیشتر می‌باشد. این نشان می‌دهد که در این مورد، اندازه‌گیری روی آنسامبل حالات در فضای هیلبرت بزرگتر، بهتر از وضعیت اندازه‌گیری روی آنسامبل حالات قرار گرفته در فضای هیلبرت کوچکتر است.

جدول ۲-۴: کسری اطلاعات متقابل قابل حصول برای دو آنسامبل ۹ و ۱۶ حالتی

آنسامبل حالات	ε	$\delta = O(\varepsilon)$	$\min_i p(\psi_i m) = \beta = \frac{1}{9} - 1\varepsilon$ $\min_i p(\phi_i m) = \beta = \frac{1}{16} - 15\varepsilon$	Δ
$\psi_i = \alpha_i\rangle \otimes \beta_i\rangle$ $i = 1..9$	0.001823	0.003444	0.04533	0.000000531
$\phi_i = \alpha_i\rangle \otimes \beta_i\rangle$ $i = 1..16$	0.00247	0.00052	0.02544	0.0000001718

همان طور که گفتیم هیچ کدام از ۱۶ حالت درهم ناتیده‌ی آنسامبل بالا توسط عملکردهای موضعی آلیس و باب به طور کامل قابل اندازه‌گیری و تشخیص نیستند. بنابراین با حذف کردن تعداد خاصی از حالات، مجموعه حالات قابل تجزیه‌ی $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7, \phi_8\}$ (این مجموعه از حالات، مطابق با

شکل (۴-۸) با شکسته شدن هشت جفت دومینو بوجود آمده است [۲۴]. را در نظر می‌گیریم که نگاشت پروتکل اندازه گیری آن‌ها به صورت $|\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle \leftrightarrow |i\rangle \otimes |i\rangle$ (برگشت پذیر) و هم چنین مجموعه‌ی غیر قابل تجزیه‌ی $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7, \phi_8, \phi_9, \phi_{10}, \phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{13}, \phi_{14}\}$ را می‌توان در نظر گرفت که در این مورد، امکان شکسته شدن هیچ دومینوای نیست و فرایند اندازه گیری حالات به صورت برگشت ناپذیر می‌باشد. با این اقدام، سعی می‌کنیم به منظور تشخیص دادن حالات، اندازه گیری‌ها را بهینه کنیم. در مورد مجموعه حالات قابل تجزیه‌ی برگشت پذیر، می‌توان گفت که مقادیر آنتروپی تولید شده در هنگام آماده سازی و اندازه گیری حالات برای سیستم دو قسمتی، برابر با صفر است. ولی در مورد آنسامبل حالات غیر قابل تجزیه که پروتکل آماده سازی و اندازه گیری هر یک از حالات به صورت برگشت ناپذیر است، می‌توانیم بگوییم که مقدار آنتروپی حاصل از آماده سازی تقریباً برابر با

$$h\left(\frac{1}{8}\right) \approx -\frac{1}{8} \log_r \frac{1}{8} - \left(1 - \frac{1}{8}\right) \log_r \left(\frac{7}{8}\right) = -\frac{1}{8} \frac{\ln \frac{1}{8}}{\ln 2} - \left(1 - \frac{1}{8}\right) \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{8}\right)}{\ln 2}$$

$$\approx 0.375 - (-0.1618564) \approx 0.543564 \quad (4-86)$$

بیت و هم‌چنین، زمانی که اندازه گیری برای تشخیص دادن هر یک از حالات انجام شود، مقدار آنتروپی تولید شده برابر با $\frac{1}{8} \approx 0.125$ بیت اطلاعات می‌شود. نتایج محاسبه شده برای سنجی آنتروپی را به هنگام اندازه گیری و آماده سازی حالات برای سیستم دو قسمتی، برای دو مورد آنسامبل ۹ و ۱۶ حالتی درهم ناتنیده را با نتایج بدست آمده در مورد آنسامبل ۹ حالتی درهم ناتنیده در قسمت ۴-۶، در جدول (۴-۳) مقایسه می‌کنیم.

جدول ۳-۴: آنتروپی آماده سازی و اندازه گیری در دو آنسامبل ۹ و ۱۶ حالتی

آنسامبل حالات	تجزیه پذیری	آنتروپی آماده سازی (بر حسب بیت)	آنتروپی اندازه گیری (بر حسب بیت)
$i = 1..9 \psi_i = \alpha_i\rangle \otimes \beta_i\rangle$	خیر	۰/۷۶۴	۲/۲۸۳
$\{\psi_r, \psi_f, \psi_e\}$	بله	۰	۰
$\{\psi_r, \psi_f, \psi_e, \psi_a\}$	خیر	۰/۸۱۱	۰/۲۵۰
$\phi_i = \alpha_i\rangle \otimes \beta_i\rangle \quad i = 1..16$	خیر	۰/۸۱۱	۲/۵
$\{\phi_1, \phi_r, \phi_v, \phi_q, \phi_{1r}, \phi_{15}\}$	بله	۰	۰
$\{\phi_1, \phi_r, \phi_s, \phi_v, \phi_q, \phi_{11}, \phi_{1r}, \phi_{15}\}$	خیر	۰/۵۴۳۵	۰/۱۲۵

در جدول (۳-۴) میزان آنتروپی بدست آمده آماده سازی و اندازه گیری آنسامبل ۱۶ حالتی به کمک روابط زیر محاسبه شده‌اند:

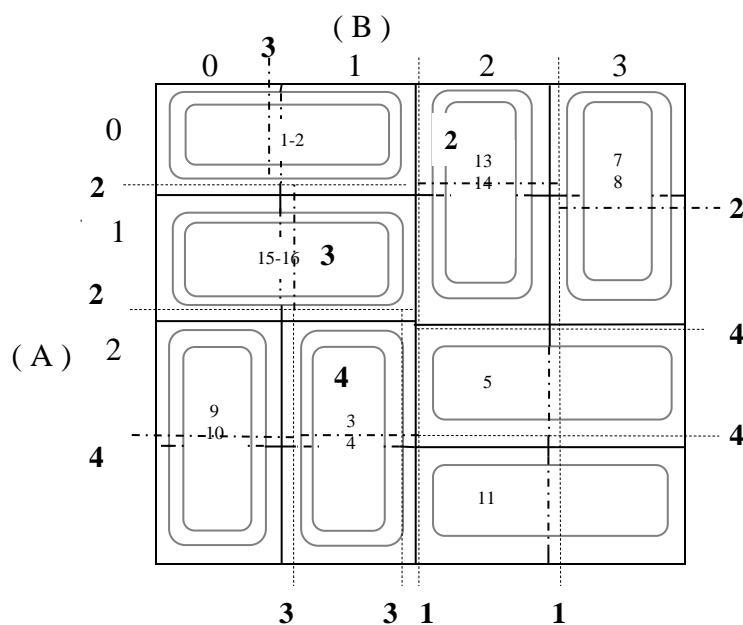
$$h\left(\frac{f}{16}\right) \approx -\frac{f}{16} \log_r \frac{r}{16} - \left(1 - \frac{f}{16}\right) \log_r \frac{(1-f)}{16} = -\frac{f}{16} \frac{\ln \frac{f}{16}}{\ln 2} - \left(1 - \frac{f}{16}\right) \frac{\ln\left(1 - \frac{f}{16}\right)}{\ln 2}$$

$$\approx ۰/۵ - (-۰/۳۱۱۲۸) \approx ۰/۸۱۱۲۸ \quad (۸۷-۴)$$

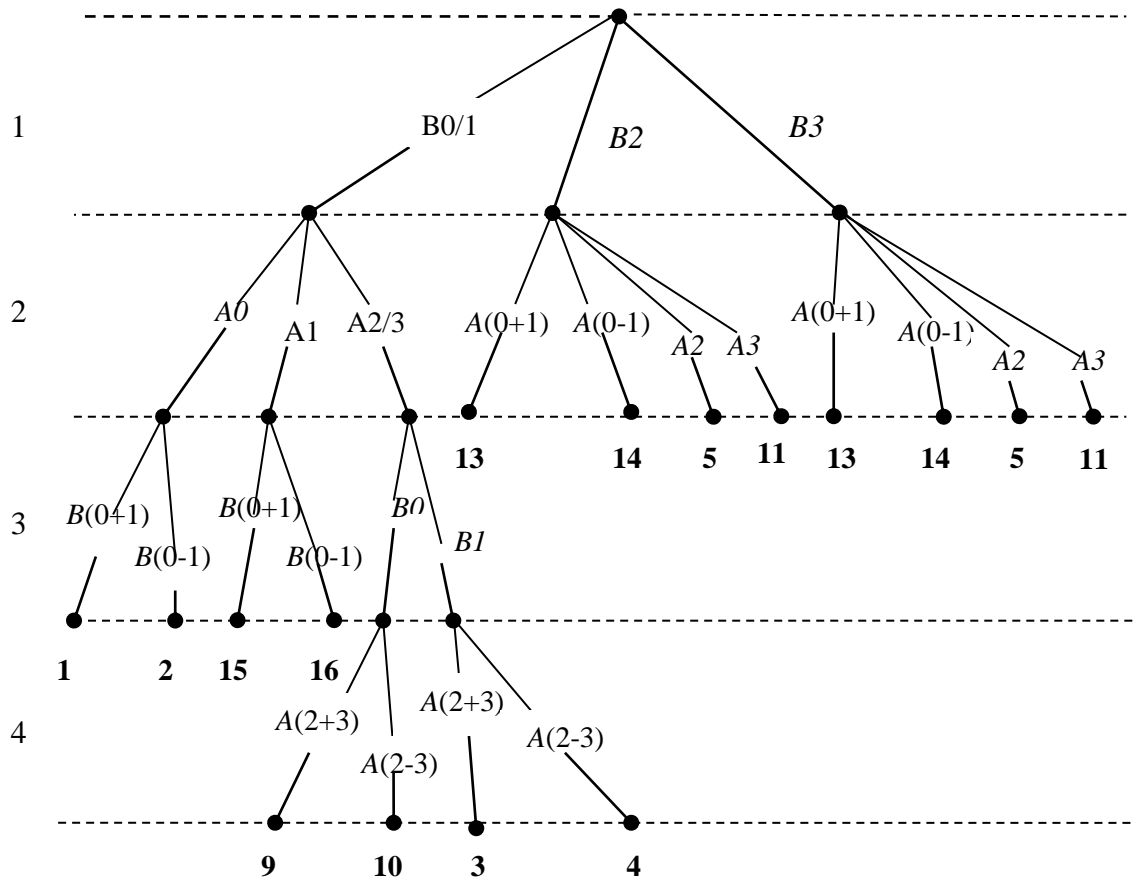
$$r \times \left[h\left(\frac{r}{f}\right) + \frac{f}{16} \right] = r \times \left(-\frac{r}{f} \log_r \frac{r}{f} - \left(1 - \frac{r}{f}\right) \log_r \frac{(1-r/f)}{f} \right) + \frac{1}{16} \approx ۲/۵ \quad (۸۸-۴)$$

برای داشتن یک اندازه گیری بهینه نسبت به اندازه گیری‌های بالا، به دنبال پیدا کردن یک مقدار کران پایین برای اطلاعات متقابل بدست آمدنی توسط آلیس و باب گزارشات کلاسیکی یکدیگر، هستیم. برای این کار فرض می‌کنیم که احتمال پیدا کردن دو حالت ϕ_r و ϕ_e برای سیستم دو قسمتی از مشاهده‌گرها، برابر با صفر است ($p(\phi_r) = 0$ و $p(\phi_e) = 0$). انجام تمامی مراحل این اندازه-

گیری را در شکل (۹-۴) با یک نمایش دومینوای و در شکل (۱۰-۴) با نمایش فرکتالی (درختی) ترسیم کرده‌ایم.



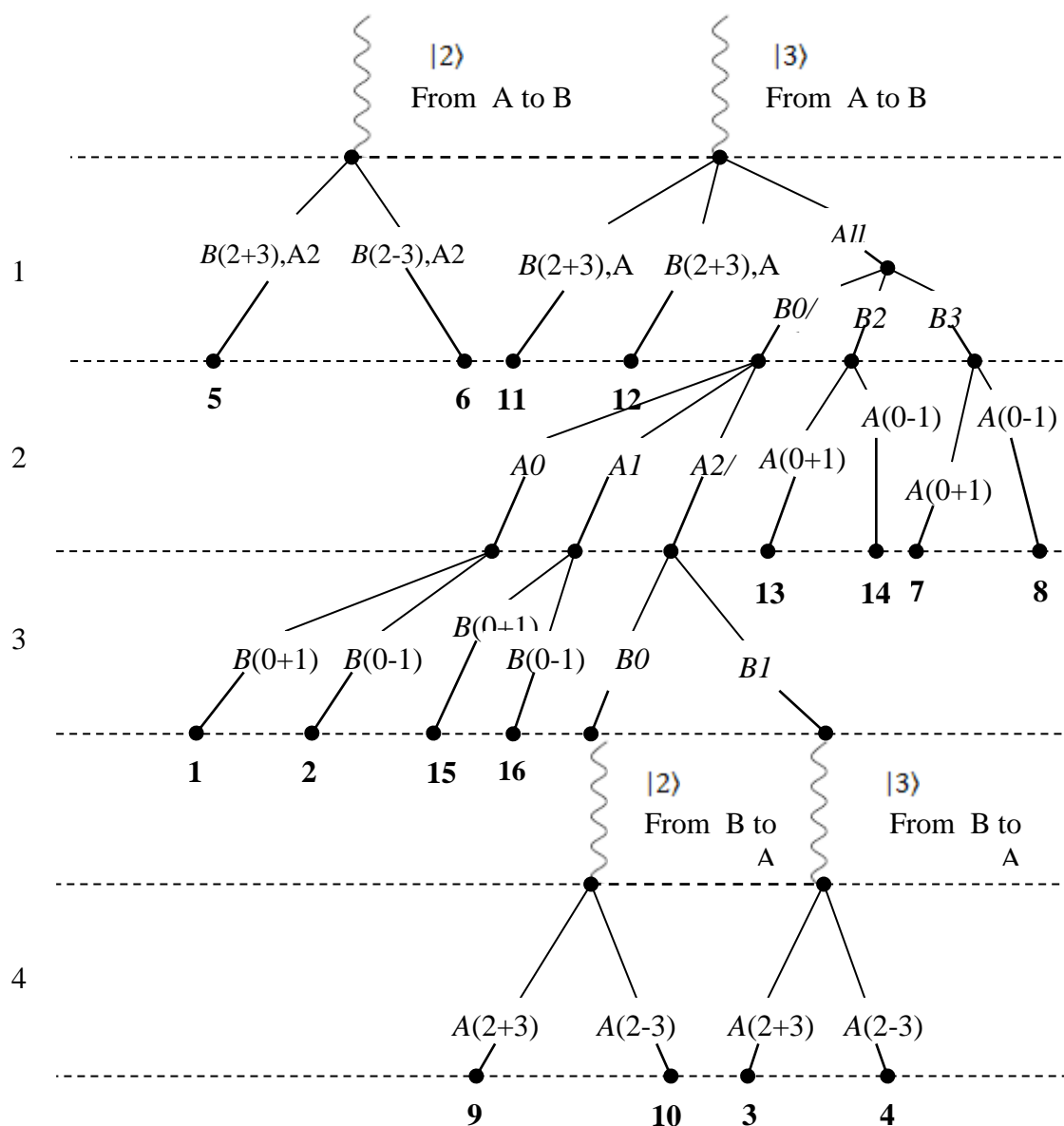
شکل ۹-۴: نمایش دومینوای از اندازه گیری آنسامبل ۱۶ حالتی برای زمانی که $p(\phi_r) = 0$ و $p(\phi_e) = 0$ می‌باشد. (خطوط خط-چین نشان‌دهنده‌ی اندازه گیری فون نیومن و خطوط خط-چین و نقطه، اندازه گیری در پایه‌های چرخش داده شده می‌باشد و هم چنین اعداد پررنگ، مراحل اندازه گیری را نشان می‌دهند.)



شکل ۴-۱۰: نمایش درختی از اندازه گیری آنسامبل ۱۶ حالتی (البته زمانی که $p(\phi_r) = 0$ و $p(\phi_e) = 0$)

زمانی که آلیس و باب برای تشخیص دادن حالت اصلی برای سیستم دو قسمتی خود، فقط از ارتباطات کلاسیکی بین یکدیگر استفاده کنند، مشابه آنسامبل ۹ حالتی، پروتکل اندازه گیری آنها با موفقیت انجام نمی‌شود [۲۴]. ولی اگر در این میان از گذار کیوبیت توسط منابع کوانتومی (منبع در هم تنیدگی کمکی) استفاده شود، اندازه گیری می‌تواند به طور کامل انجام گردد. برای مثال اگر آلیس بخواهد کل سیستم چهار حالتی خود را برای باب بفرستد، نیاز به گذار $\log_2 r = 2$ بیت اطلاعات کوانتومی است که این مقدار می‌تواند به کمک قضیه‌ی شوماخر [۳۰]، به مقدار کمتری فشرده شود. بنابراین اگر بخواهیم اصلاحی در پروتکل اندازه گیری قبلی (شکل ۴-۱۰) ایجاد کنیم، بایستی از یک کانال کوانتومی، به منظور فرستادن دو کیوبیت (۲) و (۳) از سمت آلیس به سمت باب، استفاده نماییم. بعد از آن، هر دو مشاهده‌گر تمامی عملکردهای موضعی خود را از طریق ارتباطات کلاسیکی

به یکدیگر گزارش می‌کنند. با تکرار مراحل اندازه گیری، آلیس و باب به مرحله‌ای می‌رسند که به منظور تشخیص دادن هر ۱۶ حالت درهم ناتنیده، بایستی دوباره دو کیوبیت اولیه به سمت آلیس، برگشت داده شود. نمایش درختی از این پروتکل را در شکل (۴-۱۱) ترسیم کرده‌ایم.



شکل ۴-۱۱: نمایش درختی از آنسامبل ۱۶ حالتی به همراه گذار کوانتومی

(زمانی که احتمال بوجود آمدن تمامی حالات است)

در این جا، برای اندازه گیری روی حالات درهم ناتنیده‌ی متعامد، پروتکل ناقصی را در نظر می‌گیریم که در آن از قبل، شخص سومی به هر دو مشاهده‌گر، خبر از مشخص بودن چهار حالت $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ و ϕ_{12} داده است، از این رو آلیس و باب برای انجام دادن پروتکل اندازه گیری کامل و ارسال اطلاعات از راه دور (فرابرد کوانتومی)، نیاز به

$$h\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{4}{16} \approx -\frac{2}{4} \log_r \frac{2}{4} - \left(1 - \frac{2}{4}\right) \log_r \frac{(1-\frac{2}{4})}{4} + 0.25 \approx 1/25 \quad (89-4)$$

بیت اطلاعات کوانتومی دارند. این مقدار اطلاعات می‌تواند به عنوان یک منبع کوانتومی کمکی باشد که در اختیار آلیس و باب قرار می‌گیرد. البته $h\left(\frac{2}{4}\right)$ در رابطه‌ی بالا، به دلیل این است که آلیس می‌خواهد دو حالت از بین چهار حالت مربوط به سیستم خود را برای باب ارسال کند. بهتر است بدانید که این میزان اطلاعات، در واقع میزان درهم تنیدگی مصرف شده برای انجام اندازه گیری و ارسال اطلاعات بعد از آن می‌باشد که در این جا برای انجام اندازه گیری بهینه، از منبع کمکی درهم تنیدگی استفاده می‌شود.

به دلیل این که در فرابرد کوانتومی همواره دو بیت اطلاعات از یک گروه به گروه دیگر فرستاده می‌شود، بنابراین به ازای ارسال هر بیت اطلاعات، مقدار $1/25$ درهم تنیدگی، مورد احتیاج است که سبب بوجود آمدن $2/5$ بیت آنتروپی می‌شود که در رابطه‌ی (4-88) بدست آمده است.

در قسمت پایانی کار، به منظور دست یابی به اندازه گیری بهینه‌تر نسبت به اندازه گیری‌های انجام شده در بالا، سعی بر آن است که بدون کمک گرفتن از منبع درهم تنیدگی، به ماهیت حالتی که آلیس و باب می‌خواهند برای سیستم دو قسمتی خود فراهم کنند، پی برد. در این میان آلیس و باب از جانب شخص سومی، میزانی از آگاهی و اشاره‌ی منفی، به عنوان مثال " حالت مورد نظر برای سیستم ϕ_2 نیست. " دریافت می‌کنند. این میزان از آگاهی برای تشخیص دادن حالت مورد نظر از بین ۱۶ حالت درهم ناتنیده‌ی متعامد، با توجه به مبحث آمده در پیوست ب، به طور مجانبی برابر با

$$\frac{15}{16} \log_r \frac{15}{16} \approx 0.9330 \quad (90-4)$$

بیت اطلاعات به ازای هر آگاهی از این نمونه خواهد بود. البته این مقدار آگاهی می‌تواند مقدار کران پایین برای اطلاعات متقابلی باشد که آلیس و باب از نتایج اندازه‌گیری‌های خود بدست می‌آورند و در رابطه‌ی زیر آمده است.

$$\log_r^{16} - 0.0933 \leq I(W; M_r, M_r) \leq \log_r^{16} - \Delta. \quad (91-4)$$

اگر این رابطه را با رابطه‌ی (۴-۵۰) مقایسه کنیم، مشاهده می‌کنیم که میزان اطلاعات متقابل بدست آمده توسط آلیس و باب در مورد اندازه‌گیری آنسامبل ۱۶ حالتی، دارای محدوده‌ی بزرگتری نسبت به وضعیت اندازه‌گیری اطلاعات از آنسامبل ۹ حالتی است. علاوه بر این، از رابطه‌ی (۴-۹۰) متوجه می‌شویم که میزان آگاهی لازم برای آلیس و باب از جانب شخص سوم، به منظور تشخیص دادن حالت اصلی مورد نظر از آنسامبل ۱۶ حالتی، تقریباً ۵۹٪ کمتر از میزان آگاهی لازم برای تشخیص دادن حالت از آنسامبل ۹ حالتی می‌باشد.

۴-۸ نتیجه‌گیری و بحث

با انجام محاسبات و بدست آوردن مجموعه‌ای از معیارهای کمی برای آنسامبلی از ۱۶ حالت درهم ناتنیده‌ی متعامد از یک سیستم کوانتومی مرکب، مانند اطلاعات متقابل قابل حصول، آنتروپی حاصل از آماده‌سازی و اندازه‌گیری حالات و کمیت " آگاهی از اندازه‌گیری "، نوع جدیدی از رفتار ناموضعی را مشاهده می‌کنیم که با مقایسه کردن نتایج بدست آمده از این آنسامبل با نتایج مربوط به آنسامبل ۹ حالتی (حالات درهم ناتنیده در فضای هیلبرت 3×3) [۲۴]، می‌توان گفت که پروتکل اندازه‌گیری و آماده‌سازی برای آنسامبل حالات در فضای هیلبرت بزرگتر، نتایج بهتری به همراه احتمال مؤفقیت بیشتر، نسبت به آنسامبل حالات در فضای هیلبرت کوچکتر، بدست می‌آید. از این رو پیشنهاد می‌کنیم که برای پروتکل‌های اندازه‌گیری حالات کوانتومی، چنانچه فضای هیلبرتی که آلیس و باب در آن قرار می‌گیرند، بزرگتر از وضعیت آنها در یک فضای هیلبرت کوچکتر باشد، آنگاه می‌توان به نتایج بهتری دست پیدا کرد.

پروست

پیوست الف

شرایط برای متعامد بودن تقریبی حالات باقیمانده بعد از مرحله ۱ از اندازه گیری

مطابق با رابطه‌ی (۴-۹)، همپوشانی^۱ (تمییز ناپذیری) بین حالات باقیمانده بعد از مرحله ۱ از اندازه گیری (تأثیر عملگر S_m روی حالات درهم ناتنیده‌ی $|\psi_i\rangle$) می‌تواند به کمک پارامتر δ ، با توجه به معادله‌ی

$$\max_{i,j} \langle \varphi_{i,m} | \varphi_{j,m} \rangle = \max_{i,j} \frac{|\langle \psi_i | a \otimes b | \psi_j \rangle|}{\sqrt{\langle \psi_i | a \otimes b | \psi_i \rangle \langle \psi_j | a \otimes b | \psi_j \rangle}} = \delta \quad (\text{الف-۱})$$

به صورت زیر کراندار شود:

$$\langle \varphi_{i,m} | \varphi_{j,m} \rangle = \frac{|\langle \psi_i | a \otimes b | \psi_j \rangle|}{\sqrt{\langle \psi_i | a \otimes b | \psi_i \rangle \langle \psi_j | a \otimes b | \psi_j \rangle}} \leq \delta. \quad (\text{الف-۲})$$

کاری که در این پیوست می‌خواهیم انجام دهیم این است که به کمک این نامساوی‌ها، شرایط گوناگون را برای عملگرهای a و b تعریف شده در رابطه‌ی (۴-۱۴) بدست آوریم.

آلیس و باب ممکن است هر کدام در طی انجام شدن مرحله‌ی ۱ از اندازه گیری، فضای هیلبرت خودشان را بزرگتر از فضای هیلبرت سه بعدی اولیه قرار دهند. آنها برای انجام دادن این کار ممکن است به عنوان بخشی از یک استراتژی که نیاز به حفظ کردن تعدادی منبع کوانتومی کمکی از یک مرحله از پروتکل به مرحله‌ی بعدی می‌باشد، عمل کنند. این استراتژی مبین این حقیقت است که عملگرهای S_m لزومی ندارد که ماتریسهای مربع باشند، به گونه‌ای که حالات نامتعامد $\varphi_{i,m}$ در یک فضای هیلبرت که بزرگتر از فضای ۹ بعدی اولیه است، قرار می‌گیرند. خوشبختانه این احتمال با شرایطی که می‌خواهیم برای عملگرهای آلیس و باب فراهم کنیم، ربطی ندارد. برای کار حاضر تنها به خواص جبری $E = S^t S = a \otimes b$ و این که بایستی نمایش ماتریسی عملگرهای a و b به صورت ماتریسهای مربعی باشد که ابعاد آنها به کمک اندازه‌ی فضای هیلبرت اولیه تعیین می‌شود، احتیاج

^۱ Overlap

داریم. ابتدا اجازه دهید از عبارات $\langle i|a|j\rangle = a_{ij}$ و $\langle i|b|j\rangle = b_{ij}$ برای سهولت در نوشتن روابط زیر استفاده کنیم. یادآوری می‌کنیم که عملگرهای a و b ، ضرورتاً مثبت نیم معین هستند، به گونه‌ای که برای هر i رابطه‌ی $\langle \psi_i | a \otimes b | \psi_i \rangle > 0$ برقرار است. هم‌چنین یادآوری می‌کنیم که از رابطه‌ی (۴-۱۵) برای هر i و j داشتیم:

$$\circ < \frac{\langle \psi_i | a \otimes b | \psi_i \rangle}{\langle \psi_j | a \otimes b | \psi_j \rangle} \leq \frac{1 + 9\varepsilon}{1 - 72\varepsilon} \quad (\text{الف-۳})$$

از این رو می‌توان نتیجه گرفت که عناصر قطری a_{rr} ، $a_{\circ\circ}$ ، b_{rr} و $b_{\circ\circ}$ به طور حتم مثبت هستند.

علاوه بر این ابتدا رابطه‌ی (الف-۳) را به صورت جزئی‌تر نوشته و آن را برای $i=2$ و $j=3$ حل می‌کنیم.

$$\circ < \frac{\langle \psi_i | a \otimes b | \psi_i \rangle}{\langle \psi_j | a \otimes b | \psi_j \rangle} \leq \frac{1 + 9\varepsilon}{1 - 72\varepsilon} \Rightarrow \circ < \frac{\langle \alpha_i | a | \alpha_i \rangle \langle \beta_i | b | \beta_i \rangle}{\langle \alpha_j | a | \alpha_j \rangle \langle \beta_j | b | \beta_j \rangle} \leq \frac{1 + 9\varepsilon}{1 - 72\varepsilon}$$

که در آن از روابط تعریف شده برای حالات درهم ناتیپدهی ψ_i و ψ_j به صورت زیر استفاده کردیم.

$$\begin{aligned} \psi_i &= |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle = |\alpha_i\rangle |\beta_i\rangle \\ \psi_j &= |\alpha_j\rangle \otimes |\beta_j\rangle = |\alpha_j\rangle |\beta_j\rangle \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{برای } i=2 \text{ و } j=3$$

$$\psi_r = |\alpha_r\rangle \otimes |\beta_r\rangle = |\circ\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\circ\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\circ\rangle|\circ\rangle + |\circ\rangle|1\rangle)$$

$$\psi_r = |\alpha_r\rangle \otimes |\beta_r\rangle = |\circ\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\circ\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\circ\rangle|\circ\rangle - |\circ\rangle|1\rangle)$$

رابطه‌ی (الف-۳) را فقط برای حالات متعلق به باب می‌نویسیم.

$$\circ < \frac{\langle \beta_r | b | \beta_r \rangle}{\langle \beta_r | b | \beta_r \rangle} \leq \frac{1 + 9\varepsilon}{1 - 72\varepsilon} \Rightarrow \circ < \frac{\langle \circ+1 | b | \circ+1 \rangle}{\langle \circ-1 | b | \circ-1 \rangle} \leq \frac{1 + 9\varepsilon}{1 - 72\varepsilon}$$

$$= \circ < \frac{\langle \circ | b | \circ \rangle + \langle \circ | b | 1 \rangle + \langle 1 | b | \circ \rangle + \langle 1 | b | 1 \rangle}{\langle \circ | b | \circ \rangle - \langle \circ | b | 1 \rangle - \langle 1 | b | \circ \rangle + \langle 1 | b | 1 \rangle} \leq \frac{1 + 9\varepsilon}{1 - 72\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \circ < \frac{b_{\circ\circ} + b_{11} + 2 \operatorname{Re} b_{\circ 1}}{b_{\circ\circ} + b_{11} - 2 \operatorname{Re} b_{\circ 1}} \leq \frac{1 + 9\varepsilon}{1 - 72\varepsilon} \quad (\text{الف-۴})$$

حالا با انجام دادن محاسباتی شبیه بالا رابطه‌ی (الف-۳) را برای $i=3$ و $j=2$ بدست می‌آوریم.

$$\circ < \frac{b_{\circ\circ} + b_{11} - 2 \operatorname{Re} b_{\circ 1}}{b_{\circ\circ} + b_{11} + 2 \operatorname{Re} b_{\circ 1}} \leq \frac{1 + 9\varepsilon}{1 - 72\varepsilon} \quad (\text{الف-۵})$$

برای روابط (الف-۴) و (الف-۵)، نامساوی‌های زیر برقرار است

$$b_{oo} + b_{11} + 2 \operatorname{Re} b_{1o} > 0$$

$$b_{oo} + b_{11} - 2 \operatorname{Re} b_{1o} < 0$$

$$b_{oo} + b_{11} + 2 \operatorname{Re} b_{1o} \leq \frac{1+9\varepsilon}{1-72\varepsilon}$$

$$b_{oo} + b_{11} - 2 \operatorname{Re} b_{1o} \leq 1 - \left(\frac{1+9\varepsilon}{1-72\varepsilon} \right) = \frac{-11\varepsilon}{1-72\varepsilon}$$

$$b_{oo} + b_{11} - 2 \operatorname{Re} b_{1o} \geq \frac{1-72\varepsilon}{1+9\varepsilon}$$

$$b_{oo} + b_{11} - 2 \operatorname{Re} b_{1o} > 0$$

$$b_{oo} + b_{11} + 2 \operatorname{Re} b_{1o} < 0$$

$$b_{oo} + b_{11} - 2 \operatorname{Re} b_{1o} \leq \frac{1+9\varepsilon}{1-72\varepsilon}$$

$$b_{oo} + b_{11} + 2 \operatorname{Re} b_{1o} \leq 1 - \left(\frac{1+9\varepsilon}{1-72\varepsilon} \right) = \frac{-11\varepsilon}{1-72\varepsilon}$$

$$b_{oo} + b_{11} + 2 \operatorname{Re} b_{1o} \geq \frac{1-72\varepsilon}{1+9\varepsilon}$$

مشاهده می‌کنیم که این نامساوی‌ها، مثبت بودن عناصر قطری b_{oo} و b_{11} را نتیجه می‌دهند. حالا با

ترکیب کردن این روابط و استفاده از قوانین نامساوی‌ها در ریاضی رابطه‌ی زیر را بدست می‌آوریم:

$$|2 \operatorname{Re} b_{1o}| \leq \frac{11\varepsilon}{2-63\varepsilon} (b_{oo} + b_{11}) \quad (\text{الف-۶})$$

و به طور مشابه برای $\{i, j\} = \{2k, 2k+1\}$ ؛ $k = 2, 3, 4$ خواهیم داشت:

$$|2 \operatorname{Re} b_{rr}| \leq \frac{11\varepsilon}{2-63\varepsilon} (b_{rr} + b_{11}), \quad (\text{الف-۷})$$

$$|2 \operatorname{Re} a_{rr}| \leq \frac{11\varepsilon}{2-63\varepsilon} (a_{rr} + a_{11}), \quad (\text{الف-۸})$$

$$|2 \operatorname{Re} a_{1o}| \leq \frac{11\varepsilon}{2-63\varepsilon} (a_{11} + a_{oo}). \quad (\text{الف-۹})$$

که دو رابطه‌ی آخر را برای عملگر آلیس محاسبه کرده‌ایم. هم اکنون می‌توانیم عناصر قطری

عملگرهای a و b را بر حسب δ به روش زیرکراندار کنیم. برای حالتی که $i=2$ و $j=3$ باشد، رابطه‌ی

(الف-۲) به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_r | \varphi_r \rangle &= \frac{|\langle \psi_r | a \otimes b | \psi_r \rangle|}{\sqrt{\langle \psi_r | a \otimes b | \psi_r \rangle \langle \psi_r | a \otimes b | \psi_r \rangle}} \leq \delta \\
\Rightarrow \frac{|\langle \alpha_r | a | \alpha_r \rangle \langle \beta_r | b | \beta_r \rangle|}{\sqrt{\langle \alpha_r | a | \alpha_r \rangle \langle \beta_r | b | \beta_r \rangle \langle \alpha_r | a | \alpha_r \rangle \langle \beta_r | b | \beta_r \rangle}} &\leq \delta \\
&= \frac{|\langle \circ | a | \circ \rangle \langle \circ + 1 | b | \circ - 1 \rangle|}{\sqrt{(\langle \circ | a | \circ \rangle)(\langle \circ + 1 | b | \circ + 1 \rangle)(\langle \circ | a | \circ \rangle)(\langle \circ - 1 | b | \circ - 1 \rangle)}} \\
&= \frac{|a_{\circ\circ}(b_{\circ\circ} - b_{\circ j} + b_{j\circ} - b_{j j})|}{\sqrt{a_{\circ\circ}(b_{\circ\circ} + b_{\circ j} + b_{j\circ} + b_{j j})a_{\circ\circ}(b_{\circ\circ} - b_{\circ j} - b_{j\circ} + b_{j j})}} \\
&= \frac{a_{\circ\circ}|b_{\circ\circ} - b_{\circ j} + b_{j\circ} - b_{j j}|}{a_{\circ\circ}\sqrt{(b_{\circ\circ} + b_{j j})^r - (r \operatorname{Re} b_{j\circ})^r}} = \\
\frac{|b_{\circ\circ} - b_{j j} + r i \operatorname{Im} b_{j\circ}|}{\sqrt{(b_{\circ\circ} + b_{j j})^r - (r \operatorname{Re} b_{j\circ})^r}} &\leq \delta \quad (\text{الف-۱۰})
\end{aligned}$$

در نتیجه به کمک پارامتر همپوشانی δ (به دلیل نامتعامل بودن حالات بدست آمده)، عناصر قطری $b_{j j}$ و $b_{\circ\circ}$ را می‌توان به صورت زیر کراندار کرد:

$$\frac{|b_{\circ\circ} - b_{j j}|}{b_{\circ\circ} + b_{j j}} \leq \delta \quad (\text{الف-۱۱})$$

هم چنین برای عناصر قطری دیگر به طور مشابه روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{|b_{j j} - b_{r r}|}{b_{j j} + b_{r r}} \leq \delta, \quad \frac{|a_{j j} - a_{r r}|}{a_{j j} + a_{r r}} \leq \delta, \quad \frac{|a_{\circ\circ} - a_{j j}|}{a_{\circ\circ} + a_{j j}} \leq \delta. \quad (\text{الف-۱۲})$$

برای کراندار کردن عناصر غیر قطری عملگرهای a و b بر حسب δ ، نیز می‌توانیم از این نامساوی‌ها استفاده کنیم. برای این کار رابطه‌ی (الف-۲) را برای حالت $i=2$ و $j=4$ حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\langle \phi_r | \phi_r \rangle &= \frac{|\langle \alpha_r | a | \alpha_r \rangle \langle \beta_r | b | \beta_r \rangle|}{\sqrt{\langle \alpha_r | a | \alpha_r \rangle \langle \beta_r | b | \beta_r \rangle \langle \alpha_r | a | \alpha_r \rangle \langle \beta_r | b | \beta_r \rangle}} \\
&= \frac{|\langle \circ | a | r \rangle \langle \circ + 1 | b | 1 + r \rangle|}{\sqrt{(\langle \circ | a | \circ \rangle)(\langle \circ + 1 | b | \circ + 1 \rangle)(\langle r | a | r \rangle)(\langle 1 + r | b | 1 + r \rangle)}} \\
&= \frac{|a_{\circ r}(b_{\circ j} + b_{\circ r} + b_{j j} + b_{j r})|}{\sqrt{a_{\circ\circ} a_{r r}(b_{\circ\circ} + b_{\circ j} + b_{j\circ} + b_{j j})(b_{j j} + b_{j r} + b_{r j} + b_{r r})}} \leq \delta
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \langle \varphi_r | \varphi_r \rangle \right| = \frac{|a_{or}(b_{oj} + b_{or} + b_{1j} + b_{1r})|}{\sqrt{a_{oo}a_{rr}(b_{oo} + b_{1j} + 2\operatorname{Re}b_{oj})(b_{1j} + b_{1r} + 2\operatorname{Re}b_{1r})}} \leq \delta. \quad (\text{الف-۱۳})$$

حالا اگر عبارت

$$D_{\pm\pm}^r = a_{oo}a_{rr}((b_{oo} + b_{1j}) \pm 2\operatorname{Re}b_{oj})(b_{1j} + b_{1r}) \pm 2\operatorname{Re}b_{1r} \quad (\text{الف-۱۴})$$

را معرفی کنیم، آنگاه مشاهده می‌کنیم که برای (الف-۱۳) می‌توانیم رابطه‌ی زیر را بنویسیم:

$$a_{or}(b_{oj} + b_{or} + b_{1j} + b_{1r}) = D_{++}\gamma^{(j)}e^{i\varphi^{(j)}} \quad (\text{الف-۱۴})$$

که در آن $\gamma^{(j)}$ یک دامنه‌ی کوچک و $\varphi^{(j)}$ یک فاز تقریبی دلخواه است که بایستی در شرایط زیر صدق کنند.

$$0 \leq \gamma^{(j)} \leq \delta \quad ; \quad 0 \leq \varphi^{(j)} \leq 2\pi \quad (\text{الف-۱۵})$$

به طور مشابه نیز محاسبات را برای حالات باقیمانده‌ی $i=2,3$ و $j=4,5$ انجام داده که به روابط زیر می‌رسیم:

$$a_{or}(b_{oj} - b_{or} + b_{1j} - b_{1r}) = D_{+-}\gamma^{(r)}e^{i\varphi^{(r)}} \quad \text{برای } i=2 \text{ و } j=5 \quad (\text{الف-۱۶})$$

$$a_{or}(-b_{oj} - b_{or} + b_{1j} + b_{1r}) = D_{-+}\gamma^{(r)}e^{i\varphi^{(r)}} \quad \text{برای } i=3 \text{ و } j=4 \quad (\text{الف-۱۷})$$

$$a_{or}(-b_{oj} + b_{or} + b_{1j} - b_{1r}) = D_{--}\gamma^{(r)}e^{i\varphi^{(r)}} \quad \text{برای } i=3 \text{ و } j=5 \quad (\text{الف-۱۸})$$

که مجدداً $\gamma^{(r)}, \varphi^{(r)}, \gamma^{(r)}, \varphi^{(r)}, \gamma^{(r)}, \varphi^{(r)}$ و همگی در شرایط $0 \leq \gamma^{(i)} \leq \delta$ و $0 \leq \varphi^{(i)} \leq 2\pi$ صدق می‌کنند. با جمع کردن رابطه‌ی (الف-۱۴) با تمامی روابط از (الف-۱۶) تا (الف-۱۸) داریم:

$$\begin{aligned} & a_{or}b_{oj} + a_{or}b_{or} + a_{or}b_{1j} + a_{or}b_{1r} + a_{or}b_{oj} - a_{or}b_{or} + a_{or}b_{1j} - a_{or}b_{1r} - a_{or}b_{oj} - a_{or}b_{or} \\ & + a_{or}b_{1j} + a_{or}b_{1r} - a_{or}b_{oj} + a_{or}b_{or} + a_{or}b_{1j} - a_{or}b_{1r} \\ & = 4|a_{or}b_{1j}| \leq \delta(D_{++} + D_{+-} + D_{-+} + D_{--}) \end{aligned} \quad (\text{الف-۱۹})$$

در این جا فرض می‌کنیم که همواره برای $\operatorname{Re}b_{1o} \geq 0$ و $\operatorname{Re}b_{1r} \geq 0$ رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$z = 1 + \frac{11\varepsilon}{2 - 63\varepsilon} = \frac{2 + 11\varepsilon}{2 - 63\varepsilon} \quad (\text{الف-۲۰})$$

سپس به کمک دو رابطه‌ی زیر

$$r \operatorname{Re} b_o \leq \frac{\lambda \varepsilon}{r - \varepsilon \lambda} (b_{oo} + b_{11}) \quad \text{و} \quad r \operatorname{Re} b_{r1} \leq \frac{\lambda \varepsilon}{r - \varepsilon \lambda} (b_{rr} + b_{11})$$

و عبارات مشابه دیگر، داریم:

$$\begin{aligned} D_{++}^r &= a_{oo} a_{rr} ((b_{oo} + b_{11}) + r \operatorname{Re} b_o) ((b_{11} + b_{rr}) + r \operatorname{Re} b_{r1}) \\ &\leq a_{oo} a_{rr} \left[(b_{oo} + b_{11}) + \frac{\lambda \varepsilon}{r - \varepsilon \lambda} (b_{oo} + b_{11}) \right] \left[(b_{11} + b_{rr}) + \frac{\lambda \varepsilon}{r - \varepsilon \lambda} (b_{11} + b_{rr}) \right] \\ &= a_{oo} a_{rr} (b_{oo} + b_{11}) (b_{11} + b_{rr}) \left[1 + \frac{\lambda \varepsilon}{r - \varepsilon \lambda} \right]^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$D_{++}^r \leq z^r a_{oo} a_{rr} (b_{oo} + b_{11}) (b_{11} + b_{rr}), \quad (\text{الف-۲۱})$$

$$D_{+-}^r \leq z a_{oo} a_{rr} (b_{oo} + b_{11}) (b_{11} + b_{rr}), \quad (\text{الف-۲۲})$$

$$D_{-+}^r \leq z a_{oo} a_{rr} (b_{oo} + b_{11}) (b_{11} + b_{rr}), \quad (\text{الف-۲۳})$$

$$D_{--}^r \leq (r - z)^r a_{oo} a_{rr} (b_{oo} + b_{11}) (b_{11} + b_{rr}). \quad (\text{الف-۲۴})$$

رابطه‌ی (الف-۱۹) را به کمک روابط بالا به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} |a_{or}| &\leq \frac{1}{r} \delta \frac{1}{b_{11}} (D_{++} + D_{+-} + D_{-+} + D_{--}) \\ &\leq \frac{1}{r} \delta \frac{1}{b_{11}} (z \sqrt{a_{oo} a_{rr}} \sqrt{(b_{oo} + b_{11})(b_{11} + b_{rr})} + \sqrt{z} \sqrt{a_{oo} a_{rr}} \sqrt{(b_{oo} + b_{11})(b_{11} + b_{rr})} \\ &\quad + \sqrt{z} \sqrt{a_{oo} a_{rr}} \sqrt{(b_{oo} + b_{11})(b_{11} + b_{rr})} + \sqrt{a_{oo} a_{rr}} \sqrt{(b_{oo} + b_{11})(b_{11} + b_{rr})}) \Rightarrow \\ \frac{|a_{or}|}{\sqrt{a_{oo} a_{rr}}} &\leq \frac{1}{r} \delta (z + 2\sqrt{z} + 1) \frac{1}{b_{11}} \sqrt{(b_{oo} + b_{11})(b_{11} + b_{rr})}. \quad (\text{الف-۲۵}) \end{aligned}$$

حالا سؤالی که در مورد شرایط بدست آمده برای عناصر قطری a و b (برقراری یک کران) پرسیده

می‌شود این است که رابطه‌ی (الف-۲۵) چه زمانی می‌تواند برقرار باشد؟

برای پاسخ به این سؤال می‌توان گفت که این اتفاق زمانی می‌افتد که بین عناصر قطری عملگر باب

(b_{oo} ، b_{11} و b_{rr}) رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$b_{oo} = b_{rr} = b_{11} \frac{1 + \delta}{1 - \delta} \quad (\text{الف-۲۶})$$

و در نتیجه رابطه‌ی (الف-۲۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{|a_{or}|}{\sqrt{a_{oo}a_{rr}}} \leq \frac{1}{r} (z + r\sqrt{z} + 1) \frac{\delta}{1-\delta}. \quad (\text{الف-۲۷})$$

چنانچه محاسبات را برای $i=6,7$ و $j=8,9$ تکرار کنیم، کرانی که برای عنصر غیر قطری b_{or} پیدا می‌کنیم، نیز مشابه رابطه‌ی (الف-۲۷) می‌شود، یعنی:

$$\frac{|b_{or}|}{\sqrt{b_{oo}b_{rr}}} \leq \frac{1}{r} (z + r\sqrt{z} + 1) \frac{\delta}{1-\delta}. \quad (\text{الف-۲۸})$$

با استراتژی کمی جزئی‌تر، محدودیت‌ها را برای چهار حالت $i=4,5$ و $j=8,9$ روی تمام عناصر غیر قطری عملگرهای a و b می‌توان برحسب δ به صورت نامساوی زیر در نظر گرفت:

$$\frac{(a_{ro} + (-1)^{s_r} a_{rj})(b_{rr} + (-1)^{s_r} b_{jr})}{\sqrt{a_{rr}(a_{oo} + a_{jj} + (-1)^{s_r} 2 \operatorname{Re} a_{oj})b_{rr}(b_{rr} + b_{jj} + (-1)^{s_r} 2 \operatorname{Re} b_{jr})}} \leq \delta \quad (\text{الف-۲۹})$$

که در آن هنگامی که از حالات $j=8,9$ استفاده می‌شود، $s_r = 0,1$ و حالت برای $i=4,5$ ، بایستی با $s_r = 0,1$ مطابقت داشته باشد. برای مثال نامساوی مربوط به حالت $i=4$ و $j=8$ را حل می‌کنیم

$$\begin{aligned} \langle \phi_f | \phi_a \rangle &= \frac{|\langle \alpha_f | a | \alpha_a \rangle \langle \beta_f | b | \beta_a \rangle|}{\sqrt{\langle \alpha_f | a | \alpha_f \rangle \langle \beta_f | b | \beta_f \rangle \langle \alpha_a | a | \alpha_a \rangle \langle \beta_a | b | \beta_a \rangle}} \\ &= \frac{|\langle r | a | 0 + 1 \rangle \langle 1 + r | b | r \rangle|}{\sqrt{(\langle r | a | r \rangle) (\langle 1 + r | b | 1 + r \rangle) (\langle 0 + 1 | a | 0 + 1 \rangle) (\langle r | b | r \rangle)}} \\ &= \frac{|(a_{ro} + a_{rj})(b_{jr} + b_{rr})|}{\sqrt{a_{rr}(b_{jj} + b_{jr} + b_{rj} + b_{rr})b_{rr}(a_{oo} + a_{oj} + a_{jo} + a_{jj})}} \leq \delta \end{aligned}$$

$$\langle \phi_r | \phi_f \rangle = \frac{|(a_{ro} + (-1)^{s_r=0} a_{rj})(b_{rr} + (-1)^{s_r=0} b_{jr})|}{\sqrt{a_{rr}(b_{jj} + b_{rr} + (-1)^{s_r=0} 2 \operatorname{Re} b_{jr})b_{rr}(a_{oo} + a_{jj} + (-1)^{s_r=0} 2 \operatorname{Re} a_{oj})}} \leq \delta. \quad (\text{الف-۳۰})$$

که برای آنها $0 \leq (-1)^{s_r} \operatorname{Re} a_{oj}$ و $0 \leq (-1)^{s_r} \operatorname{Re} b_{jr}$ برقرار است. عبارت معادلی را برای رابطه‌ی (الف-۳۰) به کمک دو شرط گفته شده می‌توانیم بدست آوریم.

$$\frac{|a_{or} + (-1)^{s_r} a_{rj}|}{\sqrt{a_{rr}(a_{oo} + a_{jj})}} \leq \delta \sqrt{\frac{1}{b_{jj}} (b_{rr} + b_{jj} + (-1)^{s_r} 2 \operatorname{Re} b_{jr})}. \quad (\text{الف-۳۱})$$

با بکار بردن رابطه‌ی (الف-۷) و $z = 1 + \frac{11\varepsilon}{r - 63\varepsilon} = \frac{r + 11\varepsilon}{r - 63\varepsilon}$ می‌توان نوشت که

$$\frac{|a_{or} + (-1)^{s_1} a_{r1}|}{\sqrt{a_{rr}(a_{oo} + a_{11})}} \leq \delta \sqrt{\frac{1}{b_{rr}}(b_{rr} + b_{11} + 2 \operatorname{Re} b_{1r})} =$$

$$\delta \sqrt{\frac{1}{b_{rr}}(b_{rr} + b_{11})} \left(1 + \frac{2 \operatorname{Re} b_{1r}}{b_{rr} + b_{11}}\right) = \delta \sqrt{z} \sqrt{\frac{1}{b_{rr}}(b_{rr} + b_{11})} \quad (\text{الف-۳۲})$$

با استفاده از شرط بیشینه بودن، یعنی $b_{oo} = b_{rr} = b_{11} \frac{1+\delta}{1-\delta}$ می توان رابطه‌ی بالا را به شکل زیر کراندار کرد:

$$\frac{|a_{or} + (-1)^{s_1} a_{r1}|}{\sqrt{a_{rr}(a_{oo} + a_{11})}} = v_1 e^{i\varphi^{(a)}}, \quad 0 \leq v_1 \leq \delta \sqrt{\frac{2z}{1-\delta}} \quad (\text{الف-۳۳})$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (الف-۲۷) برای عنصر غیر قطری a_{r1} ، خواهیم داشت:

$$\frac{|a_{r1}|}{\sqrt{a_{rr}(a_{oo} + a_{11})}} \leq \delta \sqrt{\frac{2z}{1-\delta}} + \frac{|a_{ro}|}{\sqrt{a_{rr}(a_{oo} + a_{11})}} \quad (\text{الف-۳۴})$$

$$\leq \delta \sqrt{\frac{2z}{1-\delta}} + \frac{1}{2}(z + 2\sqrt{z} + 1) \frac{\delta}{1-\delta} \sqrt{\frac{a_{oo}}{a_{oo} + a_{11}}}. \quad (\text{الف-۳۵})$$

سرانجام به کمک محدودیت‌های اعمال شده روی عنصر قطری a_{oo} ، یعنی

$$\frac{|a_{oo} - a_{11}|}{a_{oo} + a_{11}} \leq \delta \Rightarrow a_{oo} - a_{11} \leq \delta(a_{oo} + a_{11}) \Rightarrow (1-\delta)a_{oo} \leq (1+\delta)a_{11}$$

$$\therefore a_{11} \geq \frac{1-\delta}{1+\delta} a_{oo}$$

رابطه‌ی (الف-۳۵) را بهینه می‌کنیم. با جایگزین کردن آن ابتدا در طرف راست (الف-۳۵) عبارت زیر را داریم:

$$\sqrt{\frac{a_{oo}}{a_{oo} + \left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)a_{oo}}} = \sqrt{\frac{a_{oo}}{a_{oo}\left(1 + \frac{1-\delta}{1+\delta}\right)}} = \sqrt{\frac{1+\delta}{2}}$$

و سپس در طرف چپ (الف-۳۵) رابطه‌ی معادل a_{oo} را به صورت زیر قرار می‌دهیم و کرانی را برای عنصر a_{r1} بدست می‌آوریم:

$$\frac{a_{rj}}{\sqrt{a_{rr} \left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right) a_{jj} + a_{rr} a_{jj}}} = \frac{a_{rj}}{\sqrt{a_{rr} a_{jj} \left(\frac{r}{1-\delta}\right)}} \leq \delta \sqrt{\frac{rz}{1-\delta}} + \frac{1}{r} (z + r\sqrt{z} + 1) \frac{\delta}{1-\delta} \sqrt{\frac{1+\delta}{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{rj}}{\sqrt{a_{rr} a_{jj}}} \leq \sqrt{\frac{r}{1-\delta}} \delta \sqrt{\frac{rz}{1-\delta}} + \sqrt{\frac{r}{1-\delta}} \frac{1}{r} (z + r\sqrt{z} + 1) \frac{\delta}{1-\delta} \sqrt{\frac{1+\delta}{r}}$$

$$= \frac{r\delta}{1-\delta} \left[\sqrt{z} + \frac{1}{r} (z + r\sqrt{z} + 1) \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}} \right]$$

$$\frac{a_{rj}}{\sqrt{a_{rr} a_{jj}}} \leq \frac{r\delta}{1-\delta} \left[\sqrt{z} + \frac{1}{r} (z + r\sqrt{z} + 1) \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}} \right]. \quad (\text{الف-۳۶})$$

به عبارت دیگر، همانند رابطه‌ی (الف-۳۳)، برای a_{rj} نیز می‌توانیم روابط زیر را تعریف کنیم:

$$\frac{a_{rj}}{\sqrt{a_{rr} a_{jj}}} = v_r e^{i\varphi(r)},$$

$$0 \leq v_r \leq v_\varepsilon = \frac{r\delta}{1-\delta} \left[\sqrt{z} + \frac{1}{r} (z + r\sqrt{z} + 1) \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}} \right]. \quad (\text{الف-۳۷})$$

با بکار بردن دلایل مشابه برای رابطه‌ی (الف-۲) نیز می‌توان برای حالات $(j=۴,۵ \text{ و } i=۶,۷)$ ، $(j=۲,۳)$ و

$(j=۶,۷)$ و $(j=۲,۳ \text{ و } i=۸,۹)$ ، کران مشابهی را به ترتیب برای عبارات $\frac{|a_{rj}|}{\sqrt{a_{rr} a_{jj}}}$ و $\frac{|b_{rj}|}{\sqrt{b_{rr} b_{jj}}}$

بدست آورد.

پیوست ب

فشرده‌گی آگاهی‌های کلاسیکی

برای بررسی فشرده‌گی یک آگاهی منفی، مانند "حالت اصلی برای تشخیص دادن، حالت j نیست" می‌توانیم ابتدا یک نمونه‌ی ساده‌ای از آنسامبل هشت حالتی متساوی الاحتمال (نادیده گرفتن حالت ψ_1 از آنسامبل ۹ حالتی متساوی الاحتمال اولیه) را در نظر بگیریم. فرض می‌کنیم که آلیس و باب یک پروتکل اندازه‌گیری که شامل n مرحله است را انجام می‌دهند. آنها با انجام دادن این پروتکل بایستی از مجموعه‌ی هشت حالت، 1^n نتیجه‌ی ممکن را تمییز دهند. اما زنجیره‌ای از n تا آگاهی (مثلاً حالت اول، ψ_r نیست، حالت دوم ψ_4 نیست، حالت سوم ψ_r نیست و دیگر راهنمایی‌ها) به طور

موفقیت آمیز V^n نتیجه‌ی ممکن را تأمین می‌کند. بنابراین به منظور راهنمایی کردن آلیس و باب برای انجام پروتکل اندازه‌گیری، به طور تقریبی تنها به $\left(\frac{1}{V}\right)^n$ زنجیره اطلاعات متمایز نیاز می‌شود. چنانچه از قبل آلیس، باب و شخص راهنما، روی تعدادی از رشته آگاهی‌های کلاسیکی مورد نیاز توافق کنند، آن‌گاه از طرف شخص راهنما، آگاهی‌ای به میزان $n \log_r \frac{1}{V}$ بیت اطلاعات یا $\log_r \frac{1}{V} \approx 0.193$ بیت به ازای هر مرحله از اندازه‌گیری انتقال داده می‌شود.

به طور کلی، برای محاسبه کردن مقدار فشردگی اطلاعات جزئی (آگاهی‌ها)، احتمالات اولیه‌ی p_i از آنسامبل ۹ حالتی که الزاماً می‌توانند مساوی نباشند، احتیاج می‌شوند. فرض می‌کنیم که X ، زنجیره‌ای از n حالت متمایز دلخواه با احتمال رخ دادن $\{p_i, i=1 \dots 9\}$ باشد که به طور مستقل برای راهنمایی کردن آلیس و باب نیاز می‌شود. همچنین Y ، زنجیره‌ای از n آگاهی به صورت "حالت مورد نظر، حالت نامی باشد" است که هر کدام با احتمال $\{q_i, i=2 \dots 9\}$ اتفاق می‌افتد. اگر تمامی آن اطلاعات جزئی درست باشند، آن‌گاه برای زنجیره‌ی X از n حالت، زنجیره‌ی Y از آگاهی‌ها می‌تواند معتبر باشد. زنجیره‌ی Y از آگاهی‌ها می‌توانند با احتمال اتفاق افتادن $\prod_{i=2}^9 p_i^{n(q_i)}$ برای زنجیره‌ی X از حالات معتبر باشند. بنابراین می‌توان نشان داد که به طور مجانبی مقدار $-\sum_{i=2}^9 p_i \log_r^{(q_i)}$ بیت آگاهی به ازای هر حالت n ، لازم و کافی می‌باشد.

منابع

- [1] J. Preskill , (1998) , “ **Lecture notes for Physics 229 : Quantum Information and Computation** ” , California Institute of Technology.
- [2] M. A.Nielsen and Isaac L.Chuang Cambridge University Press (2000) , “ **Quantum Computation and Quantum Information** ” , Cambridge , United Kingdom.
- [3] <http://www.nano.ir/paper.php?PaperCode=236>.
- [4] A. Chatterjee , (2003) , “ Introduction to Quantum Computation ” , Saha Institute of Nuclear Physics , Kolkate , India , **e-print : quant-ph/0312111**.
- [5] D. McMahon (2007) , “ **Quantum Computing Explained** ” , John Wiley & Sons , Inc , USA, ISBN 978-0-470-09699-4 (cloth).
- [6] Simpson, R. E. **Introductory Electronics for Scientists and Engineers**, 2nd ed. Boston, MA: Allyn and Bacon, 1987.
- [7] T. Mor , “ No-cloning of Orthogonal States in Composite Systems ” , **quant-ph/9802036v1**, DIRO, Universite de Montreal, Canada, (12 Feb 1998).
- [8] J. J . Sakurai , (revised edition 1991) , “ **Modern Quantum Mechanics** ” ,Addison Wesley , USA.
- [9] R. B. Griffiths , “ **Quantum Channels and Generalized Measurements** ” Version of 6 Feb. 2006.
- [10] H. Barnum, M. A. Nielsen and B. Schumacher, “ Information transmission through a noisy quantum channel ”, **quant-ph/9702049v1**, Institute for Theoretical Physics, University of California, University of New Mexico and Department of physics, Kenyon College, (26 Feb 1997).
- [11] <http://sina.sharif.edu/~vahid/> Teaching / **Quantum Computation and Information**.
- [12] Y. Aharonov. A.Vaidman, “ **The Two-State Vector Formalism: an Updated Review** ”, Tel Aviv University, Israel - George Mason University, USA.
- [13] فرهمند یدالله، (۱۳۸۵)، پایان نامه ارشد : " پروتکل توزیع کلید کوانتومی در چارچوب نظریه‌ی فزیک کوانتومی "، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [14] باغبان پور امیررضا، (۱۳۸۲)، پایان نامه ارشد : " مخابرات کوانتومی دو طرفه "، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز.
- [15] E.M . Rains , “ Entanglement Purification via Separable Superoperators ” , LANL-**e-print: quant-ph/9707002**.
- [16] N. Weaver , (2000) , “ **Mathematical quantization** ” , ISBN : 1-58488-001-5 , 2001028679, p. 54.
- [17] D. Pets, (2008), “ **Quantum Information Theory and Quantum Statistics** ” , Theoretical and Mathematical physics, DOI 10-1007/978-3-540-74636-2,(Springer, Berlin Heidelberg 2008), Chap.4, p. 67.

- [18] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters, “ Mixed state entanglement and quantum error-correction” , **Phys. Rev. A** **54**, 3824 (1996); e-print [quant-ph/9604024](#).
- [19] D. Esteve , J-M. Raimond and J. Dalibard, “ **Quantum Entanglement and Information Processing** ” , Universite Joseph Fourier, Les Houches, Session LXXIX,(2003).
- [20] M. Le Bellac, “ **A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation** ” , (2006), Translated by Patricia de Forcrand-Millard, Cambridge University Press.
- [21] A. K. Ekert , “ Quantum cryptography based on Bell’s theorem,” **Phys. Rev. Lett.** **67**, 661 (1991).
- [22] C.H. Bennett, C.A. Fuchs, and J.A. Smolin, “Entanglement-Enhanced Classical Communication on a Noisy Quantum Channel”, in Quantum Communication Computing, and Measurement (eds. O. Hirota, A.S. Holevo, and C.M. Caves, Plenum, New York, 1997), p. 79; e-print: [quant-ph/9611006](#).
- [23] H. Buhrman, R. Cleve, and A. Wigderson, “Quantum vs. Classical Communication and Computation,” in Proc. of the 30th Ann. ACM Symp. on the Theory of Computing (ACM Press, 1998), p. 63; e-print: [quant-ph/9802040](#).
- [24] C.H. Bennett, David. P. DiVincenzo, Christopher. A. Fuchs, Tal. Mor, Eric. Rains, Peter. W. Shor, John. A. Smolin, and William K. Wootters, “ Quantum Nonlocality without Entanglement ” (2 Nov 1998), e-print: [quant-ph/9804053v4](#).
- [25] قهرمانی، سعید / مبانی احتمال / ۱۳۷۷ / دانشگاه صنعتی شریف، موسسه انتشارات علمی / شابک: ۹۶۴-۶۳۷۹-۴-۵۳۵ص.
- [26] فلاح‌چای، میرمظفر / آمار و احتمال کاربردی / ۱۳۸۵ / ندای سبز شمال / شابک: ۹۶۴-۹۶۸۶۰-۲-۹ / ۲۵۴ص.
- [27] J.W. Comley and D.L. Dowe, “ Minimum Message Length, MDL and Generalised Bayesian Networks with , Chapter 11 **Asymmetric Languages** (pp265-294) in P. Grünwald, I. J. Myung and M. A. Pitt (eds.) ‘**Advances in Minimum Description Length: Theory and Applications**’, MIT Press (ISBN 0-262-07262-9),April2005.
- [28] N. Abramson , “ **Information Theory and Coding** ” : (McGraw-Hill, New York, 1963), Chap. 5, P. 125.
- [29] See L. B. Levitin, “ Optimal quantum measurement for two pure and mixed states ” in **Quantum Communications and Measurement** (eds. V. P. Belavkin, O. Hirota, and R. L. Hudson, Plenum Press, New York, 1995).
- [30] B. Schumacher, “ Quantum Coding, ” **Phys. Rev. A** **51**, 2738 (1995).
- [31] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, “ Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels, ” **Phys. Rev. Lett.** **70**, 1895 (1993).

- [32] R. Landauer, “ Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process” **IBM J. Res. Develop.** **5**, **183-191** (1961).
- [33] Krishna B. Athreya and Soumendra N. Lahiri , “ **Measure Theory and Probability Theory** ” , Iowa State University (2006).

Abstract:

Entangled states are the bases of non-locality for a composite system in quantum mechanics. By exploiting entangled states, we can perform tasks in quantum mechanics that are difficult or impossible classically. Non-orthogonal states can not reliably be distinguished in quantum mechanics. Moreover the operation of cloning the unknown quantum state is impossible. But this is not the story in the classical mechanics. So if a quantum mechanical system is made up of several orthogonal un-entangled states, the quantum system would behave entirely classically and would not exhibit any non-locality [1,2]. In other words, it ought to be possible to discover the orthogonal un-entangled states and also to be possible to clone these states based on local operation and classical communications. In this dissertation, for a composite quantum system made up of two physical systems with two observers, Alice and Bob, we obtain an ensemble composed of 16 orthogonal un-entangled states in a sixteen-dimensional Hilbert space, so that these states are not orthogonal as seen by Alice or Bob alone. By mathematical and quantum mechanical calculations for these states, we can quantitative measures be computed, such as mutual information obtainable, entropies due to state preparation and measurement, and quantity "advice of measurement" which each show non-locality behavior of system during measurement protocol on states. Then by comparing the outcomes of this ensemble with outcomes of 9 states ensemble (un-entangled states in 3×3 Hilbert space) [24], we conclude that an ensemble of states in a greater Hilbert space exhibit non-local behavior with better results with more probability of success than a shorter Hilbert space. We suggest usage of a greater Hilbert space for Alice and Bob yields to optimal results.

Key words: quantum non-locality, quantum entanglement, entangled states, mutual information obtainable, entropy due to state preparation and measurement, advice of measurement.



Shahrood University of Technology

Faculty of Physics

Entanglement & Non-locality

Masomeh Valipour

Supervisor:

Dr. Hossein Movahhedian

February 2010