



دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته فیزیک - ذرات بنیادی

عنوان

محاسبه فرم فاکتورهای پروتون به کمک مدل کیسه ای با برهم کنش

کوارک‌ها با پتانسیل رنگ

استاد راهنما

پرفسور علی اکبر رجبی

نگارش

رضاعینی

اسفند ماه ۱۳۸۶

تقدیم به

## پدر و مادر عزیزم

آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر، توانشان رفت تا به توانی برسم، موهایشان سفید گشت تا رویم سفید بماند. آنان که راستی قامت در شکستگی قامتشان تجلی یافت. در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می نهیم و با دلی مملو از عشق و محبت و خضوع بر دستانشان بوسه می زنم. برایشان از خداوند مهربان سلامتی و توفیق را خواهانم.

و

تقدیم به

## همراه و همسفر زندگی ام

که بی همراهی اش هرگز توان انجام این کار را نداشتم. فروغ نگاهش، گرمی کلامش و روشنی رویش تنها سرمایه های جاودانی زندگی من است. سرو وجودش همیشه سبز و استوار باد.

## تقدیر و تشکر

سپاس پروردگار یکتایی را که به انسان قدرت تفکر و تعقل عنایت فرمود و وجود انسان را به زیور علم و معرفت بیاراست. حکیمی که به قلم سوگند خورد و چراغ دل انسان را به نور علم و معرفت روشن نمود. درود بی پایان بر مربیان الهی بشر و سپاس بیکران از اساتید محترمی که در انجام پژوهش حاضر مرا راهنمایی کردند.

استاد عزیزم آقای پرفسور رجبی که در تمام مراحل این تحقیق مشمول توجه ایشان بودم و با نهایت دلسوزی و توجه راهنمای بسیار موثری برایم بودند و نیز تمامی اساتید دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود که در تمام طول تحصیل در این مقطع روشنگر راه دانش برایم بودند، سپاسگزارم.

از آقایان دکتر حسن آبادی و دکتر توکلی که با مساعدت و همیاری خویش، مطالعه و بازبینی پایان نامه اینجانب را برعهده گرفتند، متشکرم .

در پایان کمال قدردانی و سپاسگزاری خود را تقدیم به همه آنان که ذهن ناتوانم یارای به خاطر آوردن محبت‌هایشان را ندارد می نمایم.

برای همه این عزیزان آرزوی توفیق و سلامتی را از خداوند بزرگ خواهانم و پر شکوهترین درودم را نثارشان می نمایم.

## چکیده:

فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون، با استفاده از توابع موج مدل کیسه‌ای محاسبه می‌شود. پروتون را مانند کیسه‌ای شامل سه کوارک، که کوارک‌ها در پروتون با پتانسیل رنگ برهم‌کنش می‌کنند، در نظر می‌گیریم. برای توصیف بهتر دینامیک سه کوارک، معرفی کردن مختصات فوق‌کروی مناسب می‌باشد. معادله‌ی دیراک را برای پروتون متشکل از سه کوارک محاسبه می‌کنیم. اپراتورهای اندازه حرکت زاویه‌ای و اعداد کوانتومی آنها را در نظر می‌گیریم، و درباره‌ی آنها به بحث می‌پردازیم. ویژه توابع اندازه حرکت زاویه‌ای کل، برای سیستم سه کوارکی در مدل کیسه‌ای محاسبه می‌شود. و سپس معادلات شعاعی، برای یک سیستم با تقارن کروی را بدست می‌آوریم.

**کلمات کلیدی:** فرم فاکتورها، پروتون، مدل کیسه‌ای، پتانسیل رنگ، معادله‌ی دیراک

مقدمه	۱
<b>فصل اول: آشنایی با کرومودینامیک کوانتومی (QCD)</b>	
کوارک	۵
کرومودینامیک کوانتومی (QCD)	۷
آزادی مجانبی	۹
برهم کنش کوارک-کوارک	۱۰
<b>فصل دوم: ساختار هادرونها</b>	
معادله دیراک	۱۴
گشتاور مغناطیسی پروتون	۱۶
$\frac{g_A}{g_V}$	۱۸
ساختار هادرونها با مدل کیسه‌ای	۱۹
جرم هادرونها در مدل کیسه‌ای	۲۸
<b>فصل سوم: پراکندگی و فرم فاکتورها</b>	
آشنایی با فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی	۳۴
سطح مقطع	۳۵
پراکندگی رادرفورد و مات	۳۶
عاملهای شکل نوکلئون	۳۸
<b>فصل چهارم: فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون</b>	
سیستم‌های مقید	۴۷
مدل کیسه‌ای کوارکهای تشکیل دهنده‌ی فوق مرکزی	۵۰
حل معادله‌ی دیراک با پتانسیل پیشنهادی	۵۱
برای پروتون $\frac{g_A}{g_V}$	۶۰
فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی در مختصات فوق کروی	۶۱
بحث و نتیجه	۶۴
منابع	۶۵

## مقدمه

یکی از سوال‌های اساسی در حوزه‌ی فیزیک ذرات بنیادی، چگونگی برهم‌کنش کوارک‌ها می‌باشد. کوارک‌ها که از فرمیون‌ها می‌باشند، علاوه بر بار الکتریکی دارای خاصیتی به نام رنگ می‌باشند. که این خاصیت همانند بارهای الکتریکی باعث برهم‌کنش کوارک‌ها می‌شود. تبادل این نیرو توسط گلئون صورت می‌گیرد. گلئون بر خلاف فوتون که خنثی است دارای رنگ می‌باشد و لذا گلئون‌ها نیز با هم برهم‌کنش می‌کنند. و این موضوع QCD را از QED پیچیده‌تر می‌کند. و شکل پتانسیل برهم‌کنش کوارک‌ها را مبهم‌تر می‌کند. تلاش محققان در سالهای گذشته جهت توصیف ساختار درونی باریونها منجر به پیدایش مدل‌های کیسه‌ای شده است. یکی از ابتدای‌ترین مدل‌های کیسه‌ای MIT bag model بود. در این مدل ساده کوارک‌های بدون جرم بدون هیچ برهم‌کنشی در درون کیسه‌ای قرار دارند. در درون کیسه جرم کوارک صفر و در خارج کیسه جرم آن بی‌نهایت می‌باشد. این مدل ساده، خواص استاتیکی پروتون را با تقریب خوبی محاسبه می‌کرد و توانست یک ایده به محققان ذرات بنیادی بدهد. بعدها مدل‌های اصلاح شده‌ای ارائه شد که به واقعیت نزدیکتر بود. در مدل‌های پیشرفته‌تر جرم کوارک کاملاً محاسبه می‌شود و کوارک‌ها با پتانسیل‌های با هم، برهم‌کنش می‌کردند. تمام این مدل‌ها باید آزادی مجانبی و محبوسیت کوارک‌ها را که از اصول QCD می‌باشد، رعایت می‌کردند. پیشرفت دیگری که در مدل‌های کیسه‌ای به وجود آمد در نظر گرفتن برهم‌کنش کوارک‌ها با همدیگر است. در مدل‌های قبلی هر کوارک بطور منفرد و بدون در نظر گرفتن اثر کوارک‌های دیگر بررسی می‌شود. برای این منظور از مختصات فوق کروی، که بوسیله‌ی مختصات ژاکوبی تعریف می‌شود، استفاده می‌کنند. این اصلاحات، محاسبات را بهبود بخشید.

یکی از روشهای زیرکانه برای پی بردن به پتانسیل برهم کنش بین کوارکها، استفاده از پتانسیل پیشنهادی است، در این روش پتانسیلی را انتخاب می کنیم و سپس معادله دیراک را بوسیله این پتانسیل حل می کنیم. دقت شود که پتانسیل پیشنهادی باید اصول مربوط به QCD را در رابطه با کوارکها رعایت کند که از آن جمله، آزادی مجانبی و محبوسیت کوارکها می باشد.

با در نظر گرفتن پروتون بعنوان یک سیستم سه جسمی که با همدیگر برهم کنش می کنند، انتظار می رود محاسباتمان را بهتر کند. کوارکهای تشکیل دهنده پروتون را، ذراتی با جرم و انرژی یکسان در نظر می گیریم، که بوسیله پتانسیل پیشنهادی ( پتانسیل پیشنهادی باید با اصول QCD موافقت داشته باشد ) برهم کنش می کنند. این سیستم، یک سیستم مقید است که با انرژی بستگی، مقید شده اند. و لذا در این حالت جرم سیستم از انرژی آن بیشتر است. در این تحقیق پتانسیل پیشنهادی ما، پتانسیل رنگ  $(-\frac{C}{x})$  می باشد و عامل محبوسیت بوسیله فشار حاصل از دیواره های کیسه تامین می شود. انرژی سیستم متشکل از انرژی بستگی، انرژی برهم کنش کوارکها و انرژی حاصل از فشار کیسه می باشد. که همانطور که قبلا گفته شد از جرم سیستم کمتر است. تابع موج پروتون را با حل معادله دیراک برای سیستمی متشکل از سه کوارک که با پتانسیل رنگ برهم کنش می کنند، بدست می آوریم. با داشتن تابع موج می توانیم فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی، و از آنجا گشتاور مغناطیسی و میانگین مجذور شعاع را برای پروتون محاسبه می کنیم. نتایج بدست آمده در مقایسه با نتایج تجربی، رضایت بخش نیست اما تفسیر این نتایج، ایده های جدیدی را پیش روی ما ترسیم می کنند. می توان حدس زد با افزودن جمله ای به پتانسیل پیشنهادی جوابها قانع کننده تر می شوند.

کوارکها بوسیله نیروهای قوی مقید شده اند. ما نمی دانیم چه پتانسیلی را باید برای بدست آوردن جفتیدگیهای اسپین به جای قانون کلمب به کار بریم. در اصل، اینها از کرومودینامیک اشتقاق پذیر می باشند. اما هیچ کس نمی داند چگونه بایستی آنها را محاسبه کرد. هنوز می توانیم برخی حدسهای تجربی را انجام دهیم به دلیل اینکه کرومودینامیک از لحاظ ساختار بسیار همانند الکترومدینامیک می باشد تنها برای جمله های غیر خطی که در سایه آزادی مجانبی تاثیر عمده در فاصله های کم ندارد، می توان محاسبه ای را انجام داد. در زبان کرومودینامیک (QCD) و رفتار

فاصله کوتاه به نفع مبادله‌ی تک گلوئی قرار دارد. به دلیل اینکه گلوئون و فوتون هر دو ذراتی با اسپین یک و بدون جرم می‌باشند، برهم‌کنش‌ها صرفنظر از ثابت جفتیدگی کلی در این برآورد یکسان می‌باشند ( $\alpha_p \cong \alpha$ ) و فاکتورهای رنگ متفاوت که از شمارش اعداد و رنگهای گوناگون گلوئی ناشی می‌شود، همگی در فرآیند شرکت دارند. هم اکنون نکته‌ی ضروری این است که در برد کوتاه ما یک پتانسیل کلمبی را در نظر داریم ( $V \sim \frac{1}{r}$ ) و یک فاصله‌ی بسیار بسیار ریز که از لحاظ کمی مشابه با ساختار هیدروژن و پوزیترونیوم باشد. از سوی دیگر مجبوریم که در فاصله‌های زیاد محاسبه را برای محدودیت کوآرک انجام دهیم و پتانسیل محدودیت افزایش می‌یابد. شکل دقیق کاربردی  $V(r)$  در فاصله بلند بیشتر حدسی است. برخی نویسندگان تمایل به یک پتانسیل هماهنگ نوسانی ( $V \sim r^2$ ) دارند. و بقیه به یک وابسته‌ی لگاریتمی ( $V \sim \ln(r)$ ) شاید ساده‌ترین مورد یک پتانسیل خطی باشد ( $V \sim r$ ) که به نیروی ثابتی بستگی دارد. واقعیت این است که هر کدام از اینها با برد محدود فواصل می‌توانند داده‌ها را الزاما به گونه‌ای معقول در دسترس قرار دهند به این خاطر که زیاد با برد محدودی که ما برای آنها دارای کاوشگر حساس می‌باشیم، متفاوت نمی‌باشند، بنابراین برای هدف ممکن است شکل زیر را برگزینیم

$$V(x) = -\frac{c}{r} + br$$

در مدل مورد مطالعه‌ی ما جمله‌ای که در پتانسیل محدودیت کوآرک را تضمین می‌کند، از پتانسیل حذف شده، و شرط مربوط به محبوسیت کوآرک توسط دیواره‌های کیسه که کوآرکها در درون آن قرار دارند اعمال می‌شود. معادله‌ی دیراک را در حالی که پتانسیل برداری در مقایسه با پتانسیل اسکالر بسیار ناچیز است، که بتوانیم آنرا صفر قرار دهیم، حل می‌کنیم. با اعمال این شرط حل معادله‌ی دیراک بسیار پیچیده‌تر خواهد شد. و برای پیدا کردن اعداد کوانتومی موجود در مسئله، باید به نظریه‌ی گروهها و جبر لی در ذرات بنیادی متوصل شویم. نتایج حاصل از این بررسی بسیار جالب توجه است در حالتی که پتانسیل برداری را صفر در نظر می‌گیریم نتایج به طور چشم گیر بهبود می‌یابند. و این موضوع نشان دهنده‌ی این است که پتانسیلهای برداری و اسکالر با اختلاف زیادی در برهم‌کنشها وجود دارند.



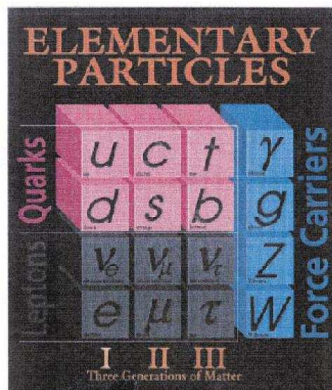
# فصل اول

آشنایی با کرومودینامیک کوانتومی (QCD)

## ۱ - ۱ - کوآرک

زمانی تصور می‌شد که هر سه ذره‌ی الکترون، پروتون و نوترون بنیادی‌اند. اما اکنون دریافته‌ایم که چنین نیست. در درون پروتونها و نوترونها ذرات کوچکتري وجود دارند که به آنها کوآرک می‌گویند. شواهد لازم در مورد وجود این ذرات، در سال ۱۹۶۹ در شتاب دهنده‌ی بزرگ دانشگاه استنفورد در کالیفرنیا به دست آمد. دانشمندان وقتی دریافتند که پروتونها بسیار بزرگتر از الکترونها هستند، بر آن شدند تا آنها را با الکترون بمباران کنند. این اقدام به نوعی شبیه به آزمایش مشهور ارنست رادرفورد در سال ۱۹۱۱ بود [۲۴]. در آزمایش استنفورد نیز زاویه‌ی پراکندگی مانند آزمایش رادرفورد، بسیار بزرگ و غیر منتظره مشاهده شد، این به آن معنی بود که در درون پروتون نیز باید ذرات نقطه مانند کوچکی وجود داشته باشند. اما ماری گلمان و جورج زوئیک [۲۴]، مستقلا و پیش از او، اظهار نظر کرده بودند که پروتونها از ذرات بنیادی‌تری تشکیل شده‌اند. در واقع این گلمان بود که به این ذرات نام کوآرک را داد. این امر با وجود سه کوآرک در داخل پروتون و نوترون سازگاری داشت. بر حسب تصادف، در طرح پیشنهادی گلمان نیز سه نوع کوآرک وجود داشت، که آنها را بالا (u)، پایین (d) و شگفت (s) نامید. اما اندکی بعد وقتی کشفیات دیگری صورت گرفت، معلوم شد که سه کوآرک کافی نیست. نخست آنکه، با کشف ذره‌ی چارمونیم ( $J/\psi$ )، کوآرک چهارم پدید آمد، که به آن افسون (c) می‌گوییم. پس از آن، دو کوآرک دیگر، ته (b) و سر (t) از راه رسیدند و تعداد آنها به شش رسید. با بازنگری در مورد الکترون، به این نتیجه می‌رسیم که آنها ساختار ندارند و هنوز بنیادی‌اند. در واقع درست همانگونه که خانواده‌ی کوآرک وجود دارد، خانواده‌ی الکترون که معمولا به آن لپتون هم می‌گوییم وجود دارد. خانواده‌ی لپتون شش عضو

دارد. علاوه بر الکترون، ذره‌ی دیگری نیز وجود دارد که شبیه به الکترون بوده ولی از آن سنگین‌تر است و آن را میون می‌نامیم. سومین عضو نیز همانند الکترون است، اما باز هم جرم بیشتری دارد و آن را تاو ( $t$ ) می‌گوییم. متناظر با هر کدام از این ذرات، ذره‌ی دیگری وجود دارد که ممکن است بدون جرم باشد، و آن را نوترینو ( $\nu$ ) می‌گوییم. علاوه بر خانواده‌های کوارکها و لپتونها، خانواده‌های پاد کوارکها و پاد لپتونها نیز وجود دارند.



شکل ۱ - ۱ - نسلهای مختلف کوارکها و لپتونها

مدل کوارکی بسیاری از مشکلات علم فیزیک ذرات بنیادی را حل کرد. اکنون ارتباط بین صدها ذره بنیادی و به ظاهر نامرتب را درک کرده‌ایم. با آنکه کاوشهای زیادی برای یافتن کوارکهای منفرد صورت گرفته‌است ولی کوارکی پیدا نشده‌است. همانگونه که گل‌مان پیشنهاد کرده‌است، آنها برای همیشه در درون هادرون‌ها محبوس‌اند. پیش بینیهایی این نظریه به طور شگفت‌انگیزی دقیق‌اند. با این وجود مشکلاتی در میان بود، شاخص‌ترین این مسائل مربوط به اسپین ذرات بود. این مشکل ناشی از اصلی است که پائولی در سال ۱۹۲۵ مطرح ساخت. پائولی نشان داد که، هنگامی که فرمیونها در سیستمی به صورت گروه در می‌آیند، هر کدام از آنها باید بگونه‌ای با سایر فرمیونهای موجود در سیستم تفاوت داشته باشد. از لحاظ علمی، می‌گوییم که این ذرات باید دارای اعداد کوانتومی متفاوتی باشند. و چون می‌دانیم کوارکها فرمیون‌اند اصل طرد پائولی در مورد آنها نیز باید برقرار باشد. اما این طور به نظر نمی‌رسید، زیرا ذره‌ی امگای منفی در درون خود سه کوارک شگفت داشت که هر سه دارای اسپین کاملاً مشابهی بودند. به طور خلاصه، هر سه کوارک کاملاً شبیه به هم بودند و این امر آشکارا ناقض اصل پائولی بود. نامبو به همراه یانگ‌هان [۳] برای

هر یک از کوارکها سه رنگ مطرح کرد. آنها رنگ را صرفا به عنوان نوع جدیدی از بار می‌پنداشتند، چیزی مانند بار الکتریکی، که در واقع بهترین طرز تفکر نسبت به آن بود. رنگ صرفا آن خاصیتی از ذرات است که به مفهوم نیروی قوی مربوط می‌شود. از طرفی ذرات قابل مشاهده‌ی فیزیکی باید بی‌رنگ باشند. و چون باریونها از سه کوارک تشکیل شده‌اند پس هر یک از آنها باید دارای رنگ متفاوتی باشند تا از ترکیب سه رنگ، بی‌رنگی حاصل شود. بر این اساس باریونها از سه کوارک و مزونها از یک کوارک و یک پاد کوارک ساخته شده‌اند. ترکیبات دیگری از کوارکها وجود ندارد، زیرا که تنها ترکیبات فوق می‌توانند بی‌رنگ باشند. پس به طور خلاصه، سه زوج کوارک داریم، که معمولا آنها را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d \\ u \end{pmatrix}$$

و سه زوج لپتون،

$$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$$

دو زوج  $\begin{pmatrix} d \\ u \end{pmatrix}$  و  $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$  را ذرات نسل اول و  $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$  و  $\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$  را ذرات نسل دوم، و  $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$  و  $\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$  را ذرات نسل سوم، می‌خوانیم ذرات مشهور موجود در جهان همه از نسل اول هستند. کوارکهای هر کدام از نسل‌ها در سه رنگ جلوه می‌کنند، و به غیر از جرمشان مشابه یکدیگرند. میون و تاو هم به غیر از جرم با الکترون یکسانند. [۲۴]

## ۱-۲ - کرومودینامیک کوانتومی (QCD)

رنگهای کرومودینامیک نقش بار الکتریکی را بازی می‌کنند و فرایند اصلی و عمده آن بصورت گلوئون + کوارک  $\rightarrow$  کوارک، بیان می‌شود. نیروی بین دو کوارک که در نخستین لحظه مسئول یکپارچگی و پیوستن کوارکها به یکدیگر در ساختن باریونها و نیز مسئول بهم پیوستن پروتونها و نوترونها در هسته است و ما می‌گوییم که نیروی بین دو کوارک بوسیله تبادل گلوئون تامین می‌شود.

در پدیده‌ی  $q \rightarrow q + g$  رنگ کوارک (قرمز و سبز و آبی) ممکن است تغییر یابد ولی طعم آن ثابت است. به عنوان مثال یک کوارک آبی رنگ بالا ممکن است به یک کوارک قرمز بالا تبدیل

شود و از آنجایی که رنگ هم همانند بار همیشه پایستگی دارد، این بدان معنی است که گلوئون باید این تفاوت را برطرف کند. در این مثال یک واحد مثبت آبی و یک واحد منفی قرمز وجود دارد.

پس گلوئونها دارای دو رنگ هستند و حامل یک واحد رنگ مثبت و یک واحد رنگ منفی می-باشند. از آنجایی که گلوئون به خودی خود حامل رنگ است ( بر خلاف فوتون که از نظر الکتریکی خنثی است ) پس با گلوئونهای دیگر برهم کنش می کند و بنا براین، افزون بر گرههای کوارک، گلوئون اولیه گرههای گلوئون- گلوئون اولیه هم وجود دارند که در حقیقت دو نوع گره داریم: ۱- گرههای سه گلوئونی ۲- گرههای چهار گلوئونی

و این اتصال مستقیم گلوئون - گلوئون مبحث کرومودینامیک را دشوارتر از مبحث الکترومدینامیک کرده، اما در عوض کرومودینامیک غنی تر از مبحث الکترومدینامیک است. اندازه ثابت جفتیدگی تفاوت دیگر بین کرومودینامیک و الکترومدینامیک را باعث می شود.

در QED هر گره معرف یک فاکتور  $\alpha = \frac{1}{137}$  می باشد. کوچکی این عدد بدین خاطر است که باید نمودارهای فاینمنی با تعداد گرههای کم را در نظر بگیریم و از نظر تجربی ثابت جفتیدگی مربوطه در نیروهای قوی  $\alpha_s$  بیش از یک است و بزرگی این عدد باعث نگرانی فیزیک ذرات در چند دهه شد. زیرا به جای اینکه با افزایش پیچیدگی نمودارهای فاینمن ثابت جفتیدگی کوچکتر و کوچکتر شود، برعکس بزرگتر می شود و نمودارهای فاینمن که در QED بسیار کارآیی داشت در این مورد کاملاً بی ارزش و بدون کارآیی است. [۳]

در این تئوری QCD ، عددی که نقش جفتیدگی و مقدار ثابت را بازی می کند، در حقیقت به هیچ عنوان ثابت نمی باشد. بلکه به فاصله جدایی بین ذرات برهم کنش کننده بستگی دارد. اگر چه در فاصلههای بسیار کوتاه ( کمتر از اندازهی یک پروتون ) بسیار کوچک می شوند. این پدیده به عنوان آزادی مجانبی شناخته شده است، بدان معنا که در درون پروتون، کوارکها بدون هیچ برهم کنشی به اطراف حرکت می کنند چنین کارکردی، به طور تجربی در آزمایشهای پراکندگی ناکشسان ژرف کشف شد. از نقطه نظر تئوری، کشف آزادی مجانبی، محاسبه فاینمن به عنوان وسیله ای قانونی برای QCD در حالت انرژی زیاد را نجات داد

### ۱-۳ - آزادی مجانبی

الکترو دینامیک کوانتومی بیان می کند که بار الکتریکی کارآمد الکترون ( $q$ ) تابعی از اندازه حرکت انتقالی می باشد.

$$\alpha(|q^2|) = \alpha(0) \left[ 1 + \frac{\alpha(0)}{3\pi} \ln(|q^2|)/(mc)^2 \right] \quad (1-1)$$

به همان ترتیبی که بارهای الکتریکی به یکدیگر نزدیک می شوند، قدرت جفتیدگی نیز افزایش می یابد ( $|q^2|$  بزرگتر)، در حقیقت ما آنرا از لحاظ فیزیکی به عنوان نتیجه ی پولاریزه شده خلاء ای تفسیر می کنیم. توابع خلاء ای بعنوان یک نوع رسانه ی دی الکتریک، به گونه ی ناقص بار الکتریکی را تفکیک می کنند. هر قدر نزدیکتر می شویم، تفکیک کمتر صورت می گیرد و بار الکتریکی کارآمد بیشتر می شود. البته معادله ی (۱-۱) فقط به مرتبه ی  $\alpha(0)^2$  قابل پذیرش می باشد. تصحیح های مرتبه ی بالاتری وجود دارند که نمونه ی بارز آنها زنجیره ای از حبابها می باشد [۳]

همانگونه که می بینید، اینها می توانند به طور آشکار جمع بسته شوند که نتیجه به حالت زیر است

$$\alpha(|q^2|) = \frac{\alpha(0)}{1 - (\alpha(0)/3\pi) \ln(|q^2|)/(mc)^2} \quad (2-1)$$

به این ترتیب در ظاهر، جفتیدگی در  $\ln(|q^2|)/(mc)^2 = 3\pi/\alpha(0)$  بی نهایت می شود. به هر حال این جدی گرفته نمی شود، زیرا با یک انرژی در محدوده ی  $10^{280} \text{ Mev}$  که یک ناحیه ی قابل حصول نمی باشد صورت می گیرد. [۳]

در QCD حبابهای کوارک-پاد کوارک به یک استتار از رنگ کوارک هدایت می شود که (با مقیاس عاملهای رنگ مناسب) بصورت همان معادله ی (۱-۱) می باشد. به هر حال یک اسپین جدید در این قضیه وجود دارد زیرا در QCD ما حبابهای گلوئون قوی را نیز داریم.

از سوی دیگر، معلوم می شود که گلوئون در تولید ضد پوشش یا پوشش نیز سهیم است. در این باره کافی است بگوییم که در QCD فرمول ثابت جفتیدگی روان به صورت زیر است [۳]

$$\alpha_s(|q^2|) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + (\alpha_s(\mu\mu^2)/12\pi)(11n - 2f) \ln(|q^2|/\mu^2)} \quad (3-1)$$

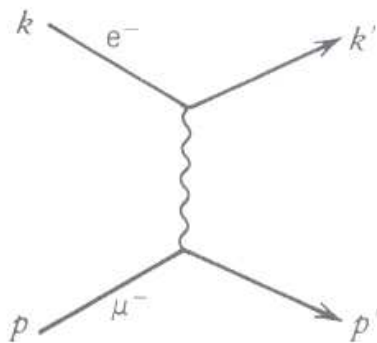
که  $n$  تعداد رنگها (سه نوع در مدل استاندارد) و  $f$  تعداد طعمها ( $flavor$ ) (۶ نوع در مدل استاندارد) می باشد. در هر تئوری که در آن  $11n > 2f$  باشد، ضد پوشش غالب خواهد بود و مقدار

ثابت جفتیدگی با افزایش  $|q^2|$  کاهش خواهد یافت. در فاصله‌های کوتاه نیروی قوی نسبتاً ضعیف می‌شود. البته، این اساس آزادی مجانبی می‌باشد و بیشتر آنچه که می‌توانیم درباره‌ی هادرونها بگوییم، پیش بینی شده‌است. آزادی مجانبی به ما اجازه می‌دهد که پارتونها را به عنوان ذرات آزاد در مقیاس بیورکن فرض کنیم. این چیز است که به کار بردن محاسبه‌ی فاینمن را در QCD برای محاسبه‌ی پتانسیل‌های داخلی کوارک اجازه می‌دهد. آزادی مجانبی هنگامی بوجود می‌آید که کوارکها که در داخل، مثلاً پروتون نزدیک بهم قرار گرفته‌اند می‌توانند در کمال آزادی در اطراف به حرکت پردازند. آنها به یکدیگر وابسته نیستند و تقریباً هیچ نیرویی را احساس نمی‌کنند. البته این همان چیزی است که فاینمن در مورد پارتونهای خود یافته بود. و از این لحاظ مدل کوارک، دیگر در تضاد با مدل پارتون نبود. پس هنگامی که کوارکها نزدیک یکدیگر باشند، همانند ذرات آزاد عمل می‌کنند، اما با افزایش فاصله‌ی بین آنها، نیروی بین آنها نیز افزایش می‌یابد. و در نهایت، آنها نیروی بسیار زیادی را احساس می‌کنند. نیرویی که در اینجا به آن اشاره می‌کنیم، البته نیروی رنگ است. این نیرو در مقایسه با نیروی الکترواستاتیک ماهیتی کاملاً متفاوت دارد. نیروی الکترواستاتیک با ازدیاد مسافت بین بارها کاهش می‌یابد، در صورتی که نیروی رنگ افزایش می‌یابد. [۳]

#### ۱-۴ - برهم‌کنش کوارک - کوارک

در این بخش ما برهم‌کنش بین دو کوارک را در پایین‌ترین مرتبه‌ی QCD بررسی می‌کنیم. البته ما نمی‌توانیم پراکندگی کوارک-کوارک را مستقیماً در آزمایشگاه مشاهده کنیم. بنابراین، ما در دنبال سطح مقاطع نیستیم. در عوض ما به پتانسیلهای کارآمد بین کوارکها می‌پردازیم، مانند پتانسیل کولمب QCD در الکترودینامیک. چنین پتانسیلهایی را در آنالیز کوارکونیوم استفاده کرده‌ایم. باید توجه داشته باشیم که این یک محاسبه‌ی تئوری اغتشاش است و تا زمانی که پیوند کوچک است، اعتبار دارد، از این راه نمی‌توانیم امیدوار باشیم که جمله‌ای محدود کننده در پتانسیل بدست آوریم. در ضمن با توجه داشتن به آزادی مجانبی باید دقت کنید که حوضه‌ی عمل ما در برد کوتاه می‌باشد. با وجود این ما نتیجه می‌گیریم که: کوارکها هنگامی که به شکل یگانه

رنگ هستند همدیگر را به شدت جذب می کنند. (در واقع در صورتهای دیگر، دفع می کنند) پس در یک برد خیلی کوتاه، یگانه رنگ، بالاترین کانال جذب را داراست .  
 با این مقدمه برهم کنش کوارک- کوارک را ، با توجه به قوانین فایمن در QCD مورد بررسی قرار می دهیم . فرض می کنیم که آنها ویژگیهای متفاوتی دارند به گونه ای که تنها نمودار، در پایین-ترین مرتبه نموداری است مطابق شکل (۲-۱).



شکل ۲-۱ نمودار فاینمن برای پراکندگی الکترون-میون

در این صورت دامنه نوسان عبارت است

$$M = \frac{-g_s^2}{4} \frac{1}{q^2} [\bar{u}(P') \gamma^\mu u(P)] [\bar{u}(k') \gamma_\mu u(k)] (c_3^* \lambda^\alpha c_1) (c_4^* \lambda^\alpha c_2) \quad (۴-۱)$$

این همانند پراکندگی الکترون-میون می باشد، و یک عامل رنگ وجود دارد.

$$f = \frac{1}{4} (c_3^* \lambda^\alpha c_1) (c_4^* \lambda^\alpha c_2) \quad (۵-۱)$$

بنابراین، پتانسیل همان شکلی را دارا خواهد بود که برای بارهای الکتریکی مشابه در الکتروستاتیک دارد

$$V_{qq}(r) = f \frac{(\alpha_s \hbar c)}{r} \quad (۶-۱)$$

بار دیگر، عامل رنگ به ترکیب کوارکها مربوط می شود. به این ترتیب از دو کوارک نمی توان یک دسته یگانه و یک دسته رنگ هشت گانه را به جای یک دسته رنگ سه گانه بدست آورد.



( ترکیب‌های پادمتقارن )

$$\left\{ \begin{array}{l} (rb - br)/\sqrt{2} \\ (bg - gb)/\sqrt{2} \\ (gr - rg)/\sqrt{2} \end{array} \right\} \quad \text{دسته رنگ سه گانه}$$

و یک دسته رنگ شش گانه ( ترکیب‌های متقارن )

$$\left\{ \begin{array}{lll} rr, & bb, & gg, \\ (rb + br)/\sqrt{2}, & (bg + gb)/\sqrt{2}, & (gr + rg)/\sqrt{2} \end{array} \right\} \quad \text{دسته رنگ شش گانه}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که عامل رنگ برای آرایش رنگ شش گانه برابر است با  $f = \frac{1}{3}$ ، و برای

آرایش رنگ سه گانه برابر است با  $f = -\frac{2}{3}$ ، در این صورت پتانسیل‌های کوارک-کوارک عبارتند از:

$$V_{qq}(r) = -\frac{2}{3} \frac{(\alpha_s \hbar c)}{r} \quad \text{رنگ سه گانه} \quad (7-1)$$

$$V_{qq}(r) = \frac{1}{3} \frac{(\alpha_s \hbar c)}{r} \quad \text{رنگ شش گانه} \quad (8-1)$$

به ویژه، علامت‌ها بیان می‌کنند که برای رنگ سه گانه نیرو جاذبه است و برای رنگ شش گانه دافعه می‌باشد. البته این حالت کارآمد نمی‌باشد زیرا هیچ ترکیبی در طبیعت روی نمی‌دهد. در هر حال این نتیجه‌ی جالبی برای پیوند سه کوارکی در بردارد. اکنون می‌توانیم یک یگانه (کاملاً نامتقارن)، یک دهگانه (کاملاً متقارن) و دو هشتگانه (مقارن ترکیبی) را به وجود آوریم. به این ترتیب، در ترکیب یگانه فقط ما جذب کامل متقابل از سه کوارک را می‌بینیم. [۳]

# فصل دوم

ساختار هادرونها

## ۲-۱ - معادله دیراک

همانطور که می‌دانیم در مکانیک کوانتومی نسبیتی ذرات با اسپین صفر با معادله کلین - گوردن

ذرات با اسپین  $\frac{1}{2}$  با معادله دیراک و ذرات با اسپین ۱ با معادله پروکا توصیف می‌شوند. [۶]

اما همانطور که می‌دانیم رابطه کلاسیکی انرژی تکانه عبارت است از

$$\frac{p^2}{2m} + V = E \quad (۱-۲)$$

و بنابر آنچه که در مکانیک کوانتومی مقرر شده است، یعنی برای رسیدن به معادله شرودینگر بایستی:

$$p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (۲-۲)$$

بنابراین اگر نتیجه روی تابعی مثل  $\psi$  عمل کند به معادله شرودینگر رسیده‌ایم

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (۳-۲)$$

معادله کلین - گوردن برای ذرات نسبیتی بکار می‌رود، پس در این حالت با استفاده از رابطه نسبیتی انرژی - تکانه برای یک ذره آزاد خواهیم داشت

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \quad (۴-۲)$$

دقت شود که در رابطه بالا اندازه حرکت یک سه بردار است. و ما می‌توانیم از نماد گذاری چار بردار استفاده کنیم یعنی

$$p^\mu p_\mu - m_0^2 c^2 = 0 \quad (۵-۲)$$

که در رابطه بالا

$$p_\mu = i\hbar \partial_\mu, \quad x^\mu = (ct, x, y, z), \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (۶-۲)$$

در رابطه فوق  $p^\mu$  مؤلفه چار بردار پادوردا و  $p_\mu$  مؤلفه چار بردار هموردا نامیده می‌شوند.

از ترکیب دو رابطه (۳-۲) و (۵-۲) به رابطه زیر می‌رسیم

$$-\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu \psi - m^2 c^2 \psi = 0 \quad (7-2)$$

به معادله بالا معادله کلین - گوردن می‌گوییم.

اکنون با فرض  $c = \hbar = 1$  به اشکالات معادله K-G می‌پردازیم، این اشکال همان منفی شدن چگالی احتمال است. یعنی اگر معادله (7-2) را در  $i\psi^*$  ضرب و سپس همیوغ آن را در  $i\psi$  ضرب کرده و آنگاه این دو رابطه را از یکدیگر کم کنیم، با توجه به روابط زیر به رابطه‌ای برای چگالی احتمال و چگالی جریان خواهیم رسید

$$\rho = |\psi|^2, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (8-2)$$

$$\rho = i \left[ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \psi \right], \quad j = -i [\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi] \quad (9-2)$$

اگر تابع موج به صورت زیر فرض شود

$$\psi = A e^{-i(Et + \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (10-2)$$

در این صورت با توجه به روابط (8-2) مقدار

$$\rho = 2|A|^2 E \quad (11-2)$$

خواهد شد. حال در صورتی که مقدار منفی باشد، چگالی احتمال نیز منفی خواهد شد. که علت این امر نیز آن است که معادله K-G بر حسب  $t$  از درجه دوم زمان است و بنابراین بایستی معادله‌ای بدست‌آورد که بر حسب  $t$  خطی باشد، که این کار را دیراک به طور خلاصه به صورت زیر انجام داد دیراک از معادله K-G شروع کرده و آن را به صورت زیر نوشت

$$p^\mu p_\mu - m_0^2 = (\beta^k p_k + m)(\gamma^\lambda p_\lambda - m) \quad (12-2)$$

که بایستی ضرایب را پیدا کنیم. از رابطه فوق داریم

$$p^\mu p_\mu - m_0^2 = \beta^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda - m(\beta^k - \gamma^\lambda) p_k - m^2 \quad (13-2)$$

از تساوی قرار دادن دو طرف رابطه بالا به نتایج زیر می‌رسیم

$$\beta^k = \gamma^k$$

$$-(\gamma^0)^2 = (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0 \quad \mu \neq \nu \quad (14-2)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & o \\ o & -I \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad o = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} o & \sigma^i \\ -\sigma^i & o \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

در واقع مجموعه‌ی استاندارد ماتریسهای  $\gamma$  که می‌توانست سه رابطه نخست روابط (۱۴-۲) را برآورده سازد، با سه رابطه انتهایی رابطه (۱۴-۲) نوشته ایم. اکنون با توجه به روابط فوق خواهیم داشت

$$\gamma^\mu p_\mu \psi - m_0 \psi = 0 \quad (15-2)$$

رابطه بالا همان معادله دیراک است. در واقع این معادله، حرکت را کوانتیزه می‌کند. با توجه به معادله دیراک که در رابطه بالا آمده است، می‌توان دریافت که بایستی  $\psi$  نیز خود چهار مؤلفه‌ای باشد. یا به زبانی ساده‌تر چون همه ماتریسهای بالا  $4 \times 4$  هستند باید  $\psi$  نیز  $4 \times 1$  باشد.

با معرفی  $\psi$  به صورت زیر داریم

$$\psi_k(r) = \begin{pmatrix} g_k(r) \\ f_k(r) \end{pmatrix} \chi_{jm}^k \quad (16-2)$$

در رابطه فوق  $g(r)$  مؤلفه بالایی و  $f(r)$  مؤلفه پایینی تابع موج می‌باشد که در واقع هر کدام خود یک ماتریس  $2 \times 1$  می‌باشند.  $\chi_{jm}^k$  نیز اسپینور ذره می‌باشد.  $k, j, m$  اعداد کوانتومی می‌باشند که در بخش‌های بعدی با آنها آشنا می‌شویم.

## ۲ - ۲ - گشتاور مغناطیسی پروتون

همانطور که در فصل اول حالت‌های سه کوارکی باریونها را توضیح دادیم و مشاهده نمودیم، که چگونه به تابع موج پروتون و نوترون که خود مثالهایی از حالت سه کوارکی هستند، با در نظر گرفتن طعم، اسپین و حالت فضایی کوارکها رسیدیم. و می‌توان بار یک باریون را در حالت کلی با استفاده از رابطه  $Q = \sum_i Q_i$  که  $Q$  بار کوارکهای باریون هستند بدست آورد. در اینجا اپراتور ممان مغناطیسی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\bar{\mu} = \sum_i \mu_i(\sigma_3)_i \quad (17-2)$$

که در واقع جمع روی کوارک‌های تشکیل دهنده باریونها هستند. گشتاور مغناطیسی ذره‌ای با اسپین  $\frac{1}{2}$  و بار  $e$  بصورت  $\frac{e}{2m}$  است. بنابراین یک کوارک بدون ساختار با بار  $Q_f$  و جرم  $m_f$  گشتاور مغناطیسی دارد. از این رو در حالت غیر نسبیتی می‌توانیم گشتاور مغناطیسی را به صورت

$$\mu_p = \sum_{j=1}^3 \langle P \uparrow | (\mu_j \sigma_3) | P \uparrow \rangle \quad (18-2)$$

بنویسیم. بنابراین گشتاور مغناطیسی پروتون به صورت زیر در می‌آید [۴و۳]

$$\mu_p = \frac{1}{18} \{ (\mu_u - \mu_u + \mu_d) + (-\mu_d + \mu_u + \mu_d) + 4(2\mu_u - \mu_d) \} \times 3 \quad (19-2)$$

ضریب ۳ از جایگشت‌ها بدست آمده است. گشتاور مغناطیسی پروتون از ترکیب گشتاورهای کوارکها که در رابطه بالا ذکر شده به دست می‌آید

$$\mu_p = \frac{1}{3} (4\mu_u - \mu_d) \quad (20-2)$$

و گشتاور مغناطیسی نوترون از تبدیل  $u \rightarrow d$  حاصل می‌شود یعنی

$$\mu_n = \frac{1}{3} (4\mu_d - \mu_u) \quad (21-2)$$

در حالت حدی که  $m_u = m_d$  خواهیم داشت

$$\mu_u = -2\mu_d \quad (22-2)$$

و بنابراین در مدل کوارکی پیش‌بینی می‌شود که

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2}{3} \quad (23-2)$$

که این مقدار با مقداری که از آزمایش بدست آمده توافق دارد یعنی [۴]

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = 0.68497945 + 0.00000058 \quad (24-2)$$

$$2-3 - \text{محاسبه } \frac{g_A}{g_V}$$

تجربه نشان می‌دهد که لپتونها در برهم‌کنش‌های ضعیف به صورت چپگرد عمل می‌کنند، در صورتی که ضد ذرات لپتونها به صورت راستگرد شرکت می‌کنند، بنابراین پارите را نقض می‌کنند. جریان لپتونی که در برهم‌کنش‌های ضعیف شرکت می‌کنند به صورت

$$j_\mu^{\text{weak}} = j_\mu^V - j_\mu^A \quad (2-25)$$

می‌باشد.  $j_\mu^V$  جریان برداری و  $j_\mu^A$  جریان شبه برداری است. اگر فقط قسمت برداری جریان ویا فقط قسمت شبه برداری آن را در نظر بگیریم پارите نقض نخواهد شد. به همین خاطر تئوری  $V-A$  را وارد می‌کنیم. جریان برداری و شبه برداری به ترتیب به صورت زیر هستند

$$j_\mu^V = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (2-26)$$

$$j_\mu^A = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma^5 \psi$$

که در آن  $\psi$  اسپینور چهار مؤلفه‌ای دیراک است. اگر به عنوان نمونه‌ای واپاشی نوترون را در نظر بگیریم

$$n \rightarrow p + \bar{e} + \bar{\nu}_e \quad \Rightarrow \quad n + \nu_e \rightarrow p + \bar{e} \quad (2-27)$$

جریان لپتونی  $e, \nu_e$  را می‌توان بر حسب دو جریان برداری و شبه برداری نوشت

$$J_\mu^V = g \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_{\nu_e} \quad (2-28)$$

$$J_\mu^A = g \bar{\psi}_e \gamma_\mu \gamma^5 \psi_{\nu_e}$$

و جریان کل به صورت زیر خواهد بود

$$J_\mu^{\text{weak}} = g \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} \quad (2-29)$$

در واپاشی بتا نیز ساختار نوکلئونها در فرم فاکتورهای برداری و شبه برداری  $g_V$  و  $g_A$  ظاهر می‌شود. در مدل‌های غیر نسبیتی نسبت  $\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3}$  است ولی از لحاظ تجربی مقدار این نسبت

$$\frac{g_A}{g_V} = 1.259 \pm 0.017$$

است با توجه به رابطه مربوط به  $\frac{g_A}{g_V}$

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} \langle L_z \rangle \quad (2-30)$$

و با توجه به مقدار  $\langle L_z \rangle = 1 - 2\delta$  داریم

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3}(1 - 2\delta) \quad (۳۱-۲)$$

که در آن

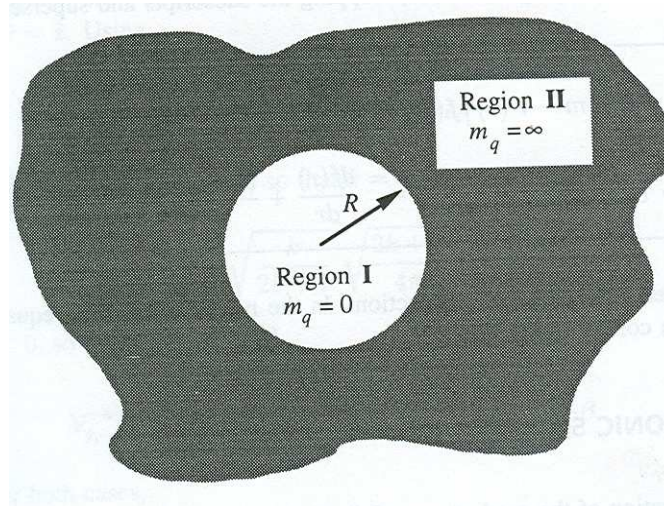
$$\delta = \frac{\frac{2}{3} \int_0^{\infty} |g(r)|^2 r^5 dr}{\int_0^{\infty} \{ |f(r)|^2 + |g(r)|^2 \} r^5 dr} \quad (۳۲-۲)$$

که در واقع رابطه بالا در بخش‌های بعدی برای محاسبه  $\frac{g_A}{g_V}$  استفاده شده است. [۴]

## ۲ - ۴ - ۱ - ساختار هادرونها با مدل کیسه‌ای

همانطور که می‌دانیم هادرونها اعم از باریونها و مزونها از کوآرک تشکیل شده‌اند. یعنی باریونها از سه کوآرک و مزونها از یک کوآرک و یک آنتی کوآرک تشکیل شده‌اند. و می‌دانیم که کوآرکها هیچگاه به صورت منفرد یافت نمی‌شوند، یعنی همواره به صورت ترکیبی از مجموع سه کوآرک یا کوآرک بعلاوه آنتی کوآرک کنار هم قرار گرفته‌اند. و برای جداکردن این مجموعه باید انرژی بسیار زیادی در حد بینهایت به کوآرک داده‌شود تا آنها از هم فاصله گیرند یعنی با زیاد شدن فاصله انرژی نیز بالا می‌رود. این اتفاق تا زمانی که شرایط برای تولید یک جفت  $q\bar{q}$  فراهم شود، ادامه دارد. این مسأله به تلاش دانشمندان برای جدا سازی تک قطبیه‌های مغناطیسی بی‌شبهت نیست. اگرما یک قطعه شیء مغناطیسی را ببریم، خود باز هم به یک دو قطبی مغناطیسی تبدیل می‌شود یعنی یک دو قطبی مغناطیسی جدید خلق شده است. جمع شدگی کوآرکها را در کنار هم محدود شدگی آنها می‌نامیم. در این بخش قصد داریم جمع شدگی در فضایی محدود، یعنی ذره‌ای واقع در چاه پتانسیل کروی را که نخستین بار توسط بوگولیوبو مطرح گردید و پس از آن به عنوان مدل MIT گسترش یافت را به نام MIT Bag Model، بررسی کنیم. [۸و۴]





شکل ۲ - ۱ - تصویر کلی از MIT Bag Model

MIT Bag Model یک مدل خیلی ساده برای توصیف ساختار هادرونها است. فرض کنید هادرون یک حجم کروی به شعاع  $R$  را اشغال می‌کند. اگر یک کوارک درون این حجم باشد، فرض می‌کنیم جرم آن کوچک باشد، یعنی جرم آن به سمت صفر میل کند، و اگر کوارک در خارج آن قرارگیرد، جرم آن را بینهایت بزرگ در نظر می‌گیریم و این به آن معنی است که کوارک در بیرون از فضای کیسه نمی‌تواند قرار گیرد. پس کوارکها به بیرون از حجم هادرون رخنه نخواهند کرد، که این حجم را کیسه می‌نامیم. برای شرح این مدل به شکل کوانتومی بایستی معادله دیراک را برای کوارک در پتانسیل  $V = 0$  و با جرم  $m$  حل می‌کنیم و در پایان محاسبات جرم کوارک را  $m = m_q = 0$  درون حجم و  $m = m_q \rightarrow \infty$  در بیرون از این ناحیه در نظر می‌گیریم. در حل برای دو ناحیه مختلف بایستی تابع موج در مرز (سطح کره) پیوسته باشد. معادله دیراک را برای تقارن کروی که  $V(r) = 0$  حل می‌کنیم. در اینجا برای یک جرم اختیاری جوابها را به دست می‌آوریم سپس در موارد دیگر و محدودتر به مسائل ساختار هادرونها وارد می‌شویم.

با توجه به معادلات زیر و با ترکیب آنها خواهیم داشت

$$[E - m - V(r)]f(r) = -\frac{dg(r)}{dr} - \frac{(1-k)}{r}g(r)$$

$$[E + m - V(r)]g(r) = \frac{df(r)}{dr} + \frac{(1+k)}{r}f(r) \quad (۳۳-۲)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} - \frac{k(k+1)}{r^2} f + (E^2 - m^2) = 0$$

با تغییر متغیر مناسب معادله بالا به یک معادله بسل تبدیل می شود

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2d}{rdr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k_0^2 \right] f_l(k_0 r) = 0 \quad (۳۴-۲)$$

که اگر  $k_0^2 = E^2 - m^2 \geq 0$  باشد از حل معادله (۳۳-۲) به جواب زیر می رسیم

$$j_0(k_0 r) \quad \text{منظم} \quad r \rightarrow 0 \quad (۳۵-۲)$$

$$n_l(k_0 r) \quad \text{نامنظم} \quad r \rightarrow 0$$

و اگر  $-k_0^2 = E^2 - m^2 < 0$  جوابها به هنکل کروی تبدیل می شوند

$$h_l^{(1)}(ik_0 r) \quad \text{منظم} \quad r \rightarrow \infty \left( h_l^{(1)} \rightarrow \frac{e^{-k_0 r}}{r} \right) \quad (۳۶-۲)$$

$$h_l^{(2)}(ik_0 r) \quad \text{نامنظم} \quad r \rightarrow \infty \left( h_l^{(2)} \rightarrow \frac{e^{k_0 r}}{r} \right)$$

روابط بازگشتی معادله بسل به صورت زیر است

$$\frac{2l+1}{x} f_l(x) = f_{l-1}(x) + f_{l+1}(x) \quad (۳۷-۲)$$

$$f_l'(x) = \frac{1}{2l+1} [l f_{l-1}(x) - (l+1) f_{l+1}(x)]$$

برای مطالعه ساختار هادرونها به پاسخهای با انرژی مثبت و با جرم  $m$  علاقمند هستیم.

وابستگی به پارامتر را با مدنظر قرار دادن علامت  $k$  بررسی می کنیم. اگر  $0 < l = k$  باشد برای

پاسخهایی که در نزدیکی ناحیه I هستند بایستی

$$f(r) = f_k(r) = N j_k(k_0 r) \quad (۳۸-۲)$$

را انتخاب کنیم که  $N$  ثابت نرمالیزاسیون و  $x = k_0 r$  می باشد. پاسخ دیگر متناسب با  $n_k$  است، و از

اینرو غیر قابل پذیرش است. همچنین برای یک پاسخ قابل نرمالیزاسیون می توانیم عبارت زیر را

انتخاب کنیم

$$f(r) = f_k(r) = Nh_k^{(1)}(ik_0r) \quad (۳۹-۲)$$

$$x = ik_0r$$

از رابطه (۳۳-۲)،  $g$  به صورت زیر نوشته می شود

$$g = \frac{1}{E+m} \left[ \frac{df}{dr} + \frac{1+k}{r} f \right] = \frac{k}{E+m} \left[ f'_k(x) + \frac{1+k}{x} f_k \right] \quad (۴۰-۲)$$

به ازای  $k = k_0$  پاسخها متناسب با  $z$  و به ازای  $k = ik_0$  پاسخها متناسب با  $h^{(1)}$  هستند. معادله ای

که برای  $g$  نوشته شده است به سادگی از ترکیب دو رابطه (۳۳-۲) بدست می آید

$$f'_l(x) = \frac{1}{2l+1} \left[ lf_{l-1}(x) - (l+1) \left( \frac{2l+1}{x} f_l(x) - f_{l-1}(x) \right) \right]$$

$$\Rightarrow f'_l(x) = -\frac{l+1}{x} f_l(x) + f_{l-1}(x)$$

و از اینرو برای  $k = l$  خواهیم داشت

$$g = \frac{k}{E+m} f_{k-1}(x)$$

و در نهایت جواب کلی برای این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است

$$\psi_{jm}^k(r) = \left( \begin{array}{c} f(x) \\ -i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} \frac{k}{E+m} f_{k-1}(x) \end{array} \right) Y_{jm}^k(\hat{r}) \quad (۴۱-۲)$$

در رابطه بالا  $Y_{jm}^k(\hat{r})$  هماهنگ های کرولی هستند. روابط (۳۷-۲) و (۴۰-۲) بستگی به این

دارند که  $r \in R$  یا  $r \in R$  باشد. اما پاسخ دیگر زمانی اتفاق می افتد که  $k < 0$  باشد در این

مورد  $l = -(k+1)$  است و بایستی روابط زیر را انتخاب کنیم:

$$f(r) = f_{-(k+1)}(x) = Nj_{-(k+1)}(k_0r) \quad \text{اگر} \quad r \in R \quad (۴۲-۲)$$

$$f(r) = f_{-(k+1)}(x) = Nh_{-(k+1)}^{(1)}(ik_0r) \quad \text{اگر} \quad r \in R \quad (۴۳-۲)$$

در این حالت مؤلفه پایینی به صورت زیر حاصل می شود

$$g = \frac{1}{E+m} \left[ \frac{df}{dr} - \frac{l}{r} f \right] = \frac{k}{E+m} \left[ f'_l(x) - \frac{l}{x} f_l(x) \right] \quad (۴۴-۲)$$

که  $k$  همانند قبل می باشد. در این صورت

$$f'_l(x) = \frac{1}{2l+1} \left[ l \left( \frac{2l+1}{x} f_l(x) - f_{l+1}(x) \right) - (l+1) f_{l+1}(x) \right] \quad (45-2)$$

$$\Rightarrow f'_l(x) = \frac{l}{x} f_l(x) - f_{l+1}(x)$$

$$= \frac{l}{x} f_l(x) - f_{l+1}(x)$$

از این رو

$$g = -\frac{k}{E+m} f_{-k}(x) \quad (46-2)$$

پس برای این حالت جواب کلی تابع موج به شکل زیر در می‌آید:

$$\psi_{jm}^k(r) = \begin{pmatrix} f_{-(k+1)}(x) \\ i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} \frac{k}{E+m} f_{-k}(x) \end{pmatrix} Y_{jm}^k(\hat{r}) \quad (47-2)$$

که  $f$  با روابط (42-2) و (43-2) داده می‌شود. توجه شود که پاسخهای (42-2) و (47-2) شامل  $f$  های یکسان (که فقط  $l$  ها متفاوتند) می‌باشند. و با یک تعریف برابر از  $k$  و  $x$  هستند. اکنون به مسأله ساختار هادرونها بر می‌گردیم، البته فقط پاسخ مربوط به  $k = -1$  را که در این جا به دست آمده را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم به ازای  $k = -1$  انرژی در حالت پایه است. پاسخ در ناحیه I (درون هادرون یعنی  $r < R$ ) با جرم  $m = 0$ ، در این صورت:

$$\psi_I(r) = N_I \begin{pmatrix} j_0(Er) \\ i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} j_1(Er) \end{pmatrix} \chi^{(s)} \quad r < R \quad (48-2)$$

که  $\chi^{(s)}$  یک اسپینور دو مؤلفه‌ای است. (هنگامی که  $k = -1$ ،  $Y_{jm}^k$  به دو مؤلفه اسپینور وابسته به  $\hat{r}$  تبدیل می‌شود.) در خارج، یعنی در ناحیه II، ما  $E \gg m$  در نظر می‌گیریم و یا  $E$  را در نظر نمی‌گیریم

$$\psi_{II}(r) = N_{II} \begin{pmatrix} h_0^{(1)}(imr) \\ i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} h_1^{(1)}(imr) \end{pmatrix} \chi^{(s)} \quad ; \quad r > R \quad (49-2)$$

که  $h_0^{(1)}(ix) = -\frac{e^{-x}}{x}$  و  $h_1^{(1)}(ix) = \frac{ie^{-x}}{x} (1+1/x)$  داده می‌شود در این صورت

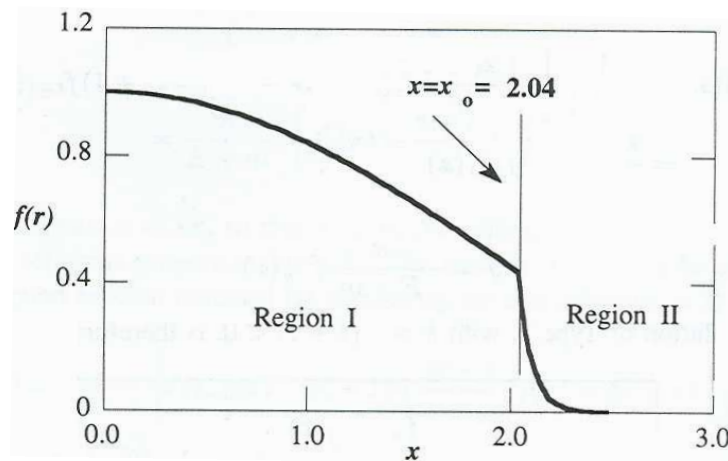
$$\psi_{II}(r) = -\frac{N_{II}}{mr} e^{-mr} \begin{pmatrix} 1 \\ i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} \left(1 + \frac{1}{mr}\right) \end{pmatrix} \chi^{(s)} \quad (50-2)$$

اما اگر پاسخها را به ازای  $r = R$  بررسی کنیم و یا هنگامی که  $m \rightarrow \infty$  میل کند؛ حد توابع موج را به دست می‌آوریم در این صورت با انتخاب اینکه  $N_0$  محدود است، خواهیم داشت

$$N_{II} = -mN_0 e^{mR}$$

$$\psi_{II}(r) = \frac{N_0}{r} e^{-m(r-R)} \left( 1 + i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} \left( 1 + \frac{1}{mr} \right) \right) \chi^{(s)} \quad (2-51)$$

$$\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{N_0}{R} \left( 1 + i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} \right) \chi^{(s)} & r = R \\ 0 & r > R \end{cases}$$



شکل ۲-۲ - رسم مؤلفه بالایی تابع موج در حالت پایه شعاع کیسه در حدود  $x_0 = 2.04$  است.

مؤلفه بالایی این جواب در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. ما می‌بینیم که شکل  $\psi_{II}$  در  $r = R$  به مؤلفه‌های بالا و پایین نیازمند است.

در  $r = R$  داریم

$$\psi_I(R) = \psi_{II}(R) \Rightarrow \begin{cases} N_{\pm} j_0(ER) = \frac{N_0}{R} \\ N_{\pm} j_1(ER) = \frac{N_0}{R} \end{cases} \quad (2-52)$$

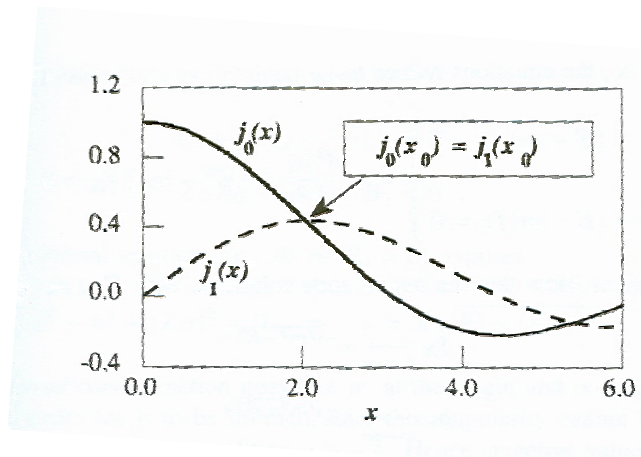
شرط ویژه مقدار برای یک کوارک بدون جرم محدود شده در یک حجم با شعاع  $R$  به صورت زیر داده می‌شود

$$j_0(ER) = j_1(ER) \quad (۵۳-۲)$$

از طریق حل عددی این معادلات مقدار  $x_0 = ER$  را  $۲/۰۴$  به دست می‌آوریم که در این صورت انرژی یک کوآرک بدون جرم محدود شده در یک ناحیه‌ای به شعاع  $R$ ، با  $R$  نسبت عکس دارد یعنی

$$E = \frac{2.04}{R} \quad (۵۴-۲)$$

که مقدار  $x_0$  در شکل (۳-۲) نشان داده شده‌اند.



شکل ۲ - ۳ - رسم توابع بسل کروی. نقطه‌ای که دو تابع برابرند نشان داده شده است.

## ۲ - ۴ - ۲ - کوآرکهای آزاد محدود شده در یک کره

مطالعه طیف سنجی و بررسی پراکندگی ناکشسان ژرف کوآرک‌ها بیان می‌کند که کوآرکها ذرات نقطه گونه‌ای با اسپین  $\frac{1}{2}$  هستند. هم چنین می‌دانیم که کوآرکها در خارج از پروتون آشکار نمی‌شوند. بنابراین معادله دیراک برای یک فرمیون آزاد با جرم  $m$  به صورت زیر نوشته می‌شود

$$i\partial\psi(x) = m\psi(x) \quad (۵۵-۲)$$

که معادله بالا را برای یک فضای محدود شده به شعاع R بررسی می‌کنیم. دو نوع جواب برای معادله بالا با  $j = \frac{1}{2}$  مطابق با دو حالت پارितه مربوط به  $S_{\frac{1}{2}}$  و  $P_{\frac{1}{2}}$  به وسیله عدد کوانتومی جدید

$$K = \mp(j + \frac{1}{2}) = \mp 1$$

که این پاسخها به صورت

$$\psi_{-1} = N \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega+m}{\omega}} i j_0(\frac{rx}{R}) \\ -\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega}} j_1(\frac{rx}{R}) \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{r}}{r} \end{pmatrix} U_m \quad (56-2)$$

$$\psi_{+1} = N' \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega+m}{\omega}} i j_1(\frac{rx}{R}) \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{r}}{r} \\ \sqrt{\frac{\omega-m}{\omega}} j_0(\frac{rx}{R}) \end{pmatrix} U_m \quad (57-2)$$

که N و N' ثابت نرمالیزاسیون هستند و  $U_m$  اسپینور ذره و  $\omega$  انرژی است که با رابطه زیر داده می‌شود

$$\omega = (m^2 + \frac{x^2}{R^2})^{1/2} \quad (58-2)$$

که  $x$  گشتاور کوارک در واحد  $\frac{1}{R}$  است.

اگر در ابتدا حالت غیر نسبیتی را مطالعه کنیم حد  $\omega - m \rightarrow 0$  میل خواهد کرد بنابراین فقط مؤلفه بالایی اسپینور باقی می‌ماند. تحت تبدیل پاریته

$$\psi_{\pm 1} \xrightarrow{r \rightarrow -r} \pm \psi_{\pm 1} \quad (59-2)$$

تبدیل خواهد شد. یعنی بسته به مقدار I پاریته می‌تواند زوج و یا فرد باشد.

فرض معقولی است که حالت پایه هادرونها تقارن کروی دارند و در نتیجه کوارک ها در کره ای به شعاع R محدود خواهند شد.

اگر  $n_\mu$  عمود بر سطح کره و به سمت بیرون باشد ، بنابراین بر روی مرز  $r = R$  هیچگونه جریانی نخواهیم داشت. یعنی

$$n^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = 0 \quad (60-2)$$

این معادله در صورتی برقرار است که

$$-i\gamma_\mu n^\mu \psi = \psi \quad (۶۱-۲)$$

از این رو لازم است که

$$i\bar{\psi} \gamma \cdot n = \bar{\psi} \quad (۶۲-۲)$$

$$\bar{\psi} \psi = (i\bar{\psi} \gamma \cdot n) \psi \equiv \bar{\psi} (i\gamma \cdot n \psi) = -\bar{\psi} \psi \quad (۶۳-۲)$$

که به طور آشکارا  $\bar{\psi} \psi = 0$  و از این رو  $n \cdot \bar{\psi} \gamma \psi = 0$  خواهد شد. با توجه به فرمول بندی که در رابطه (۶۱-۳) مربوط به شرایط مرزی است، می‌توانیم  $\psi_{\pm 1}$  را (معادله‌های (۵۶-۲) و (۵۷-۲)) در

معادله (۶۱-۲) جایگزین کنیم. با نوشتن رابطه (۶۱-۲) با  $\psi_{-1}$  خواهیم داشت

$$\begin{pmatrix} 0 & -i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} \\ i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega+m}{\omega}} & ij_0(x) \\ -\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega}} & \frac{\vec{\sigma} \cdot r}{r} j_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega+m}{\omega}} & ij_0(x) \\ -\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega}} & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} j_1(x) \end{pmatrix} \quad (۶۴-۲)$$

که این معادله ما را به رابطه زیر می‌رساند

$$j_1(x) = \sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}} j_0(x) \quad (۶۵-۲)$$

اکنون اگر  $j_1(z) = A j_0(z)$  باشد بنابراین  $\tan Z = \frac{Z}{1-AZ}$  و در این مورد

$$\tan x = \frac{x}{1-mr - \sqrt{m^2 R^2 + x^2}} \quad (۶۶-۲)$$

که ما از رابطه (۵۸-۲) نیز در نوشتن رابطه بالا استفاده کرده‌ایم. و به ازای  $\psi_{+1}$  رابطه زیر را داریم

$$\tan x = \frac{x}{1-mR + \sqrt{m^2 R^2 + x^2}} \quad (۶۷-۲)$$

هنگامی که  $m \rightarrow \infty$  (در حد غیرنسبیتی) خواهیم داشت

$$\tan x = \frac{x}{1-2mR} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \tan x = x \quad (۶۸-۳)$$

که به ترتیب پاسخهای  $x = \pi$  و  $x = 0$  می‌باشند. که مقدار  $x = \pi$  شبیه به نتایج معادله شرودینگر می‌باشد.



در حد فرا نسبیتی ( $m \rightarrow 0$ ) معادله غیر تجربی با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\tan x = \frac{x}{1 \pm x} \quad (۶۹-۲)$$

و برای پایین‌ترین حالت جوابها به صورت  $\psi_+(x=3.81)$  ;  $\psi_-(x=2.04)$  می‌باشند.

یک کوارک تنها با جرم  $m$  محصور در یک کره ای به شعاع  $R$  انرژی  $\omega = (m^2 + \frac{x^2}{R^2})^{1/2}$  را دارا - می‌باشد.

هنگامی که کوارک در پایین‌ترین حالت  $x(mR)$  نشان داده شده در شکل (۲-۲) است، انرژی با جرم کوارک رابطه دارد. اما اگر  $R \rightarrow \infty$  آن گاه  $\omega = R$  خواهد شد. برای یک سیستم از  $N$  تا کوارک با طعم‌های  $u$  و  $d$  و جرم‌های  $m$  انرژی نهایی کوارک با رابطه زیر داده می‌شود.

$$E = \sum_i N_i (m_i^2 + \frac{x_i^2}{R^2})^{1/2} \quad (۷۰-۲)$$

### ۲ - ۴ - ۳ - جرم هادرونها در مدل کیسه‌ای

در این مدل با افزایش  $R$ ، انرژی به شکل یکنواختی تا  $R = \infty$  کاهش می‌یابد. که این یک محدودیت خود به خودی ایجاد می‌کند. برای جلوگیری از این شرایط کمیتی به نام فشار،  $B$  را تعریف می‌کنیم که این سیستم را به حالت تعادل درآورد. که این یک طرح ضروری و مهم از مدل کیسه‌ای می‌باشد.

در این صورت انرژی نهایی به صورت

$$E_i^{(e)} = \sum N_i (m_i^2 + x^2 / R^2)^{1/2} + B \frac{4\pi R^3}{3} \quad (۷۱-۲)$$

رابطه بالا در حالی که  $E_i$  به کم‌ترین مقدار خود برسد به حال تعادل می‌رسد یعنی  $\frac{\partial E}{\partial R} = 0$

شود. رتبه‌بندی پدیده‌ها در پراکندگی‌های ناکشسان اظهار می‌دارد که جرم کوارک‌های  $u$  و  $d$  بایستی کوچک باشد بنابراین برای ساده‌تر کردن فرمول، جرم کوارکها را صفر در نظر می‌گیریم.

پس انرژی مربوط به  $N$  کوارک از یک مجموعه به صورت زیر خواهد شد:

$$E = \frac{N \times 2.04}{R} + \frac{4\pi R^3}{3} B \quad (۷۲-۲)$$

که  $x(0) = 2.04$  و

$$\frac{\partial E}{\partial R} = 0 = 4\pi R^2 B - \frac{N \times 2.04}{R^2} \Rightarrow R = \left( \frac{N \times 2.04}{4\pi B} \right)^{1/4} \quad (73-2)$$

اکنون رابطه (73-2) را در رابطه (72-2) جایگزین می‌کنیم و رابطه مربوط به جرم یا انرژی مجموعه‌ای وابسته به فشار B را می‌یابیم

$$M_N = \frac{4}{3} (4\pi B)^{1/4} (N \times 2.04)^{3/4} \quad (74-2)$$

رابطه بالا دلالت بر افزایش جرم به وسیله افزایش تعداد کوارکها دارد و یا به عبارتی

$$\frac{Meson}{Baryon} = \frac{M_2}{M_3} = \left( \frac{2}{3} \right)^{3/4} \cong \frac{3}{4} \quad (75-2)$$

یعنی اگر  $N=3$  و  $M = M_{(Proton)}$  در این صورت از رابطه بالا می‌توانیم مقدار  $R \approx 1.6 fm$  محاسبه کنیم. که این اندازه، برای تولید یک پروتون جرم دار با کوارکهای بدون جرم لازم می‌شود. این جرم از انرژی جنبشی کوارکها و فشار محدود، آمده است. [8 و 4]

#### ۲ - ۴ - ۴ - گشتاور مغناطیسی

برای این که گشتاور مغناطیسی پروتون در یک حالت غیرنسبیتی از کوارکها  $\mu_p = 2.8 Bohr$  شود بایستی از کوارکهایی با جرم  $M_q = 340 MeV$  برای  $\mu_q = \frac{e}{2m_q}$  استفاده کنیم، اما این حالت را برای یک پروتون طبیعی و واقعی نمی‌توان به حق و به مورد دانست. چرا که در واقع کوارکهای تشکیل دهنده پروتون در ناحیه R محدودند، ولی مطالب گفته شده در بالا به ازای کوارکهای آزاد می‌باشد.

گشتاور مغناطیسی یک کوارک با تابع موج  $\psi$  در ناحیه  $r < R$  با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\mu = \frac{1}{2} \int_{|r|<R} d^3 \vec{r} \vec{r} \times \vec{j} = \frac{1}{2} \int_{|r|<R} d^3 r \vec{r} \times (\bar{\psi} \gamma \psi) e \quad (76-2)$$

نتیجه  $\mu = \frac{e}{2m_q}$  فقط هنگامی داده می‌شود که  $\frac{1}{R} \gg m_q$  باشد. (  $\frac{1}{R}$  ممنتوم ذره محدود شده در ناحیه I است.)

برای ارضای این مطلب ابتدا  $R \rightarrow \infty$  میل می‌دهیم. تا این که ذره محدود شده آزاد شود. و یا جرم کوارک را در موردی که کوارک بایستی گشتاور غیرعادی بزرگی داشته باشد خیلی بزرگ اختیار می‌کنیم پس برخوردهای غیرالاستیک را می‌توانیم در نظر نگیریم.

برای کوارکهای محدودشده در کره‌ای به شعاع  $R$  و با جرم  $m$  می‌توانیم آشکارا گشتاور مغناطیسی را از معادله (۷۶-۲) محاسبه کنیم. با جانشانی تابع موج در معادله (۵۶-۲) و در معادله (۷۶-۲) خواهیم داشت

$$\mu = \frac{e}{2m_q} f(mR) \quad (۷۷-۲)$$

$$f(mR) \equiv \frac{1}{3} mR \frac{4\omega R + 2mR - 3}{2(\omega R)^2 - 2\omega R + mR} \quad (۷۸-۲)$$

$$\omega = (m^2 + \frac{x^2}{R^2})^{1/2}$$

که می‌توانیم بگوییم که هر گاه  $mR \rightarrow \infty$  پس  $f \rightarrow 1$  و نتایج غیر نسبیتی حاصل می‌شود. در حدی دیگر هنگامی که  $mR \rightarrow 0$  می‌توانیم  $\omega R \equiv x(0) = 2.04$  در نظر بگیریم و بنابراین

$$f \rightarrow \frac{1}{3} mR \times 1.22 \quad (۷۹-۲)$$

از این رو

$$\mu \approx e \times (0.2)R \quad (۸۰-۲)$$

که رابطه گشتاور مغناطیسی کوارکهای بدون جرم محدود شده است.

توجه شود که اگر  $R \rightarrow \infty$  آن گاه  $\mu \rightarrow \infty$  یعنی  $\frac{1}{m}$  به سمت بی نهایت میل می‌کند که به این معنی است که  $m_q \rightarrow 0$  میل می‌کند. و این انتظاری است که از یک ذره آزاد داریم. برای مشخص شدن نتیجه حاصله آموزنده است که این نتیجه را با مباحث پدیدار شناسی QCD مقایسه‌ای کنیم

$$\text{که فرض می‌شود } \mu = \frac{e}{2\varepsilon} \text{ با } \varepsilon \approx 340 \text{Mev}$$

برای یک کوارک بدون جرمی که در کره‌ای محدود است داریم

$$\mu = \frac{e}{2\omega} \frac{1}{6} \left\{ \frac{4\omega R - 3}{\omega R - 1} \right\} \approx \frac{5}{6} \frac{e}{2\omega} = \frac{5}{6} \mu_{QCD} \quad (۸۱-۲)$$

برای یک کوارک با جرم زیاد  $m \rightarrow \omega$  گشتاور مغناطیسی کیسه با گشتاور مغناطیسی در QCD یکسان خواهد شد یعنی

$$\mu_{bag} = \mu_{QCD} \quad (۸۲-۲)$$

در مدل کیسه‌ای ما می‌توانیم از معادله (۳-۸۰) و گشتاور مغناطیسی پروتون به ازای کوارکهای بدون جرم به رابطه زیر دست یابیم که

$$0.2R = \frac{1}{660 \text{Mev}} \quad (۲-۸۳)$$

و از این رو  $R \approx 1.5 \text{fm}$  به دست می‌آید. اگر ما جرم کوارک را بزرگ‌تر از صفر در نظر بگیریم، بنابراین  $\mu_q$  کاهش می‌یابد و  $R > 1.5$  خواهد شد. بنابراین به ازای گشتاور مغناطیسی پروتون برای آن که اندازه آن سیستم اندازه قابل قبولی باشد باید جرم کوارکها سبک باشد. [۴ و ۸]

فرض کنید کوارکی مستقل از کوارکهای دیگر در یک پتانسیل متقارن اسکالر شعاعی حرکت کند تابع موجی که این کوارک را تعریف می‌کند.

$$\psi_r = \begin{pmatrix} f(r) U_m \\ ig(r) \vec{\sigma} \cdot \hat{r} U_m \end{pmatrix} \quad (۲-۸۴)$$

می‌باشد که  $U_m$  اسپینور دو مؤلفه‌ای کوارک و  $f$  و  $g$  توابعی از  $r$  هستند که وابسته به شکل پتانسیل مورد نظر می‌باشند. مؤلفه‌های بالایی و پایینی یک اسپینور چهار مؤلفه‌ای به ترتیب مربوط به  $L=0$  و  $L=1$  می‌باشد. در نتیجه ماتریس اسپینی کوارک به صورت  $\langle q | \sigma_z | q \rangle$  می‌باشد

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} \langle \sigma_z \rangle \quad (۲-۸۵)$$

که  $\langle \sigma_z \rangle$  مقدار انتظاری مربوط به تصویر سه اسپین کوارک نسیتی است و اندازه حرکت زاویه‌ای کل برای هر کوارک به صورت  $j_z = \frac{1}{2} \sigma_z + l_z$  می‌باشد که برای هر کوارک با  $j_z = \frac{1}{2}$  رابطه‌ای به شکل  $\langle \sigma_z \rangle = 1 - 2\delta$  داریم که

$$\delta = \frac{\int \psi_0^* l_z \psi_0 dr}{\int \psi_0^* \psi_0 dr} \Big|_{j_z = \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{3} \int |g(r)|^2 r^2 dr}{\int \{ |f(r)|^2 + |g(r)|^2 \} r^2 dr} \quad (۲-۸۶)$$

بوگولیوبو کوارکها را در یک چاه پتانسیلی قرار داد و  $\frac{g_A}{g_V} = 1.1$  محاسبه کرد [۴] که در مدل کیسه‌ای این مقدار به دقت محاسبه می‌شود که شبیه به مقدار محاسبه شده توسط بوگولیوبو می‌باشد. برای کوارکهای بی‌جرم آزاد محدود شده در یک حجم و برای پایین‌ترین حالت معادله موج با

رابطه (۵۶-۲) داده می‌شود. با مقایسه با تابع موج مربوط به یک مورد متقارن کروی مؤلفه‌های بالایی و پایینی به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$f(r) = N \sqrt{\frac{\omega + m}{\omega}} j_0\left(\frac{rx}{R}\right) \quad (۸۷-۲)$$

$$g(r) = N \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega}} j_1\left(\frac{rx}{R}\right) \quad (۸۸-۲)$$

که  $N$  ضریب نرمالیزاسیون است که از رابطه  $4\pi \int dr r^2 (|f(r)|^2 + |g(r)|^2) = 1$  به دست می‌آید. و اکنون برای کوآرکهای بدون جرم  $\delta$  به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\delta = \frac{\frac{2}{3} \int_0^R \left| j_1\left(\frac{rx}{R}\right) \right|^2 r^2 dr}{\int_0^R dr r^2 \left\{ \left| j_0\left(\frac{rx}{R}\right) \right|^2 + \left| j_1\left(\frac{rx}{R}\right) \right|^2 \right\}} = \frac{2x-3}{6(x-1)} \quad (۸۹-۲)$$

که  $x = 2.04$  برای پایین‌ترین حالت می‌باشد. از این‌رو

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} \left[ 1 - \frac{2x-3}{3(x+1)} \right] \cong 1/1 \quad (۹۰-۲)$$

که این مقدار تقریباً با مقادیر و داده‌های آزمایشگاهی مطابقت می‌کند. حدود ۳۰٪ انحراف ناشی از

نتیجه  $\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3}$  ناشی از مؤلفه‌های پایینی  $\psi_0$  مربوط به کوآرکهای بدون جرم اما محدود شده در

یک حجم می‌باشد. با اعمال یک محاسبه مربوط به تابع موجی که تابعی از  $m$  است یعنی معادلات

(۸۷-۲) و (۸۸-۲) مقدار دقیق‌تری را می‌توانیم با در نظر گرفتن جرم کوآرک برای  $\frac{g_A}{g_V}$  به دست-

آوریم و یا برعکس با داشتن مقدار تجربی این نسبت  $\frac{g_A}{g_V} = 1.26$  مقدار دقیقی برای جرم یک

کوآرک حاصل کنیم. [۴]

# فصل سوم

پراکندگی و فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی

### ۳ - ۱ - آشنایی با مفهوم فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی

منظور از ساختار حالت پایه چیست؟ برای اتمها، جواب ساده است: ساختار، دلالت بر توزیع فضایی الکترونها دارد، و به وسیله تابع موج حالت پایه توصیف می‌شود. برای اتم هیدروژن، صرف نظر از اسپین، چگالی احتمال،  $\rho(x)$ ، در نقطه  $x$  به وسیله

$$\rho(x) = \psi^*(x)\psi(x) \quad (۳-۱)$$

داده می‌شود، که در آن  $\psi(x)$  تابع موج الکترون در نقطه  $x$  است. چگالی بار الکتریکی به وسیله (۳ - ۱) داده می‌شود؛ بار و چگالی احتمال الکترون با یکدیگر متناسب‌اند. در واقع، ساختار شامل حالات برانگیخته نیز هست، و فقط اگر تابع موجهای تمام حالت‌های اتمی ممکن، معلوم باشد ساختار اتم کاملا تعیین می‌شود. با این همه، ما بحث را به حالت پایه محدود خواهیم کرد.

برای هسته‌ها، باز می‌توان از مفهوم یک توزیع بار سخن به میان آورد، اما توزیع بار و ماده یکسان نیستند. برای نوکلئونها، مسئله جدیدی به میان می‌آید. تکانهای مورد نیاز برای بررسی ساختار آنها آنقدر زیاد است که نوکلئونها که در ابتدا ساکن‌اند، با سرعت‌های نزدیک به سرعت نور پس می‌زنند. بدین جهت محاسبه‌ی توزیع بار نوکلئونها از روی سطح مقطع مشاهده‌شده بسیار مشکل است. برای احتراز از این مشکل ساختار نوکلئون را برحسب عاملهای شکل توصیف می‌کنیم. هر چند مدت زمانی طول می‌کشد تا به این مفهوم عادت کنیم، معه‌ذا این مفهوم از توزیع بار به اطلاعات تجربی نزدیکتر است. حتی در کمترین فاصله‌های بررسی شده، یعنی کمتر از  $0.1 fm$ ، هیچگونه ساختاری برای لپتونها پیدا نشده‌است. به نظر می‌رسد که این ذرات واقعا همان ذرات نقطه‌ای دیراک باشند.

### ۳ - ۲ - سطح مقطع

در بررسی ساختار ذرات بنیادی مهمترین فرایندها برخوردها هستند. معمولاً رفتار یک برخورد بر حسب سطح مقطع بیان می‌شود، برای تعریف سطح مقطع، فرض می‌شود یک باریکه ذره تک انرژی با انرژی کاملاً معلوم به هدف اصابت کند. تعریف شار  $F$  برای باریکه فرودی عبارت از تعداد ذراتی است که در واحد زمان سطح عمود بر باریکه می‌گذرد. اگر باریکه یکنواخت و شامل  $n_i$  ذره در واحد حجم باشد که با سرعت  $v$  نسبت به هدف ساکن در حرکت‌اند، شار آن به صورت

$$F = n_i v \quad (۲-۳)$$

داده خواهد شد. در بیشتر محاسبات، تعداد ذرات فرودی تا یک ذره در حجم  $V$  بهنجار شده است. پس عدد  $n_i$  مساوی با  $1/V$  است. ذرات پراکنده شده با هدف شمارگری که تمام ذرات پراکنده شده در زاویه فضای  $d\Omega$  و تحت زاویه  $\theta$  را آشکار می‌کند، مشاهده می‌شوند. تعداد  $d\eta$  که در واحد زمان ثبت می‌شود، متناسب است با شار فرودی  $F$ ، زاویه فضای  $d\Omega$ ، و  $N$  تعداد مراکز مستقل پراکنده در داخل هدف که مورد اصابت باریکه قرار می‌گیرد.

$$d\eta = FN\sigma(\theta)d\Omega \quad (۳-۳)$$

ضریب تناسب را به صورت  $\sigma(\theta)$  نمایش می‌دهیم، و آن را سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی می‌نامیم، و همچنین می‌توانیم بنویسیم

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \quad \text{یا} \quad \sigma(\theta)d\Omega = d\sigma(\theta) \quad (۴-۳)$$

کل ذرات پراکنده در واحد زمان با انتگرالگیری بر روی تمام زوایای فضای به دست می‌آید:

$$\eta_s \approx FN\sigma_{tot} \quad (۵-۳)$$

که در آن

$$\sigma_{tot} = \int \sigma(\theta)d\Omega \quad (۶-۳)$$

سطح مقطع پراکندگی کل نامیده می‌شود. [۵]

### ۳-۳- پراکندگی رادرفورد و مات

در شکل (۳-۱) تصویر کلاسیک پراکندگی کشسان یک ذره  $\alpha$  در اثر میدان کولنی یک هسته با بار  $Ze$  نشان داده شده است. این رویداد در صورتی که هسته بدون اسپین باشد، پراکندگی



رادرفورد نامیده می‌شود؛ ذره‌ی  $\alpha$  نیز دارای اسپین صفر است. سطح مقطع پراکندگی ذره‌ای با اسپین صفر از هسته‌ای بدون اسپین را می‌توان به صورت کلاسیک یا مکانیک کوانتومی محاسبه کرد، و به یک نتیجه رسید. فرمول پراکندگی رادرفورد یکی از معدود فرمولهایی است که می‌توان آن را بدون تغییر به محدوده مکانیک کوانتومی برد، و این واقعیت باعث افتخار رادرفورد بود. روش سریع به دست آوردن سطح مقطع دیفرانسیلی برای پراکندگی رادرفورد بر اساس تقریب اول بورن است. عموماً سطح مقطع دیفرانسیلی به صورت

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(q)|^2 \quad (۷ - ۳)$$

نوشته می‌شود، که در آن  $f(q)$  دامنه‌ی پراکندگی نامیده می‌شود و  $\bar{q}$  تکانه‌ی منتقل شده‌است.

$$\bar{q} = \bar{p} - \bar{p}' \quad (۸ - ۳)$$

$\bar{p}$  تکانه‌ی ذره‌ی فرودی و  $\bar{p}'$  تکانه‌ی ذره‌ی پراکنده است. شکل (۳ - ۱) نشان می‌دهد که برای پراکندگی کشسان، بزرگی تکانه‌ی منتقل شده طبق رابطه‌ی

$$q = 2p \sin \frac{\theta}{2} \quad (۹ - ۳)$$

به زاویه‌ی پراکندگی بستگی دارد. در تقریب اول بورن فرض می‌شود که ذرات فرودی و پراکنده را می‌توان به صورت امواج تخت توصیف کرد. دامنه‌ی ذرات پراکنده را می‌توان به صورت

$$f(\bar{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\bar{x}) e^{iq \cdot \bar{x}/\hbar} d^3x \quad (۱۰ - ۳)$$

نوشت.  $V(\bar{x})$  پتانسیل پراکندگی است که اگر تقارن کروی داشته باشد، می‌توان انتگرالگیری بر روی زوایا را انجام داد، و دامنه‌ی پراکندگی، با  $x = |\bar{x}|$  به صورت

$$f(q^2) = -\frac{2m}{\hbar q} \int_0^\infty dx x \sin\left(\frac{qx}{\hbar}\right) V(x) \quad (۱۱ - ۳)$$

در می‌آید. از آنجایی که  $f$  دیگر بستگی به جهت  $\bar{q}$  ندارد و فقط به بزرگی آن وابسته است، آنرا به صورت  $f(q^2)$  می‌نویسیم.

در پراکندگی رادرفورد، پتانسیل  $V(x)$  پتانسیل کولنی است. معمولاً، برهم‌کنش کولنی بین دو بار  $q_1$  و  $q_2$  با فاصله‌ی  $x$  از یکدیگر به صورت

$$V(x) = \frac{q_1 q_2}{x}$$

نوشته می‌شود. در آزمایش پراکندگی، شکل (۳-۱) هسته توسط ابر الکترونی‌اش احاطه می‌شود، و بار هسته  $Ze$  می‌شود. با نوشتن

$$V(x) = \frac{Z_1 Z e^2}{x} e^{-x/a} \quad (3-12)$$

حفاظت را به حساب می‌آوریم، که در آن  $a$  طولی است در حدود ابعاد اتمی. با داشتن معادله‌ی (۳-۱۲) می‌توان انتگرال معادله‌ی (۳-۱۱) را انجام داد، و دامنه‌ی پراکندگی به صورت

$$f(q^2) = -\frac{2mZ_1 Z e^2}{q^2 + (\hbar/a)^2} \quad (3-13)$$

در می‌آید. در تمام برخوردهایی که برای شناخت ساختار هسته‌ها انجام می‌شود؛ تکانه‌ی منتقل شده  $q$  حداقل از مرتبه‌ی چند  $MeV/c$  است، و می‌توان از عبارت  $(\hbar/a)^2$  کاملاً صرف نظر کرد. با معادلات (۳-۱۳) و (۳-۷) سطح مقطع دیفرانسیلی رادرفورد به صورت

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R = \frac{4m^2(Z_1 Z e^2)^2}{q^4} \quad (3-14)$$

در می‌آید. فرمول پراکندگی رادرفورد، معادله‌ی (۳-۱۴) مبتنی بر چند فرض است. از آن میان، چهار فرض مهم عبارت‌اند از  
۱- تقریب بورن.

۲- ذره‌ی هدف خیلی سنگین است و انرژی جذب نمی‌کند (پس زنی وجود ندارد).

۳- ذرات فرودی و هدف بدون اسپین هستند.

۴- ذرات فرودی و هدف هیچ ساختاری ندارند، آنها را ذرات نقطه‌ای فرض می‌کنیم.

این چهار محدودیت را یا باید توجیه کنیم یا از بین ببریم. ما با توجیه دو شرط اول آنها را حفظ خواهیم کرد، و دو شرط دیگر را به صورت جزئی از بین خواهیم برد.

۱- در تقریب بورن فرض بر این است که ذره‌ی فرودی و خروجی را می‌توان به صورت موجهای تخت توصیف کرد. این فرض مادامی که

$$\frac{Z_1 Z e^2}{\hbar c} \ll 1 \quad (3-15)$$

باشد مجاز است. اگر شرط برقرار نباشد، محاسبه‌ی مفصل تری لازم است (تحلیل انتقال یا تقریبهای بالاتر برون). با این همه، جنبه‌های اصلی فیزیک مسئله را می‌توان با به کار بردن تقریب اول برون فهمید، و ما از آن فراتر نخواهیم رفت.

۲- اینجا فقط پراکندگی کشسان بررسی می‌شود. ذره هدف در حالت پایه‌اش باقی می‌ماند، و انرژی برانگیزش را نمی‌پذیرد. بعلاوه فرض می‌شود که ذره آن قدر سنگین است که می‌توان از انرژی پس زنی آن صرف نظر کرد. با این همه، همانطور که شکل (۳ - ۱) نشان می‌دهد، تکانه‌ی بزرگی می‌تواند به ذره هدف منتقل شود. قسمت اعظم بحثهای بعدی راجع به پراکندگی الکترون از هسته‌ها و نوکلئونها است. در این مورد، تا زمانی که نسبت انرژی فرودی الکترون به انرژی هدف ناچیز باشد محدودیت دوم برقرار است. در انرژیهای بالاتر، می‌توان سطح مقطع را برای پس زنی نوکلئون یا هسته به سادگی تصحیح کرد. نتایج اصلی بدون تغییر باقی می‌مانند، و بنابراین ما تصحیحات پس زنی را بررسی نخواهیم کرد.

۳- همانطور که اشاره شد، بیشتر آزمایشهای مورد بحث مربوط به پراکندگی الکترونها است. در این مورد، باید اسپین را به حساب آورد. مات پراکندگی ذرات با بار  $Z_1 = 1$  و اسپین  $1/2$  را از هدف بدون اسپین بررسی کرده است، و سطح مقطع برای پراکندگی مات عبارت است از

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = 4(Ze^2)^2 \frac{E^2}{(qc)^4} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (3 - 16)$$

$E$  انرژی الکترون فرودی و  $v = \beta c$  سرعت آن است. عبارت  $\beta^2 \sin^2 \theta/2$  از برهم‌کنش گشتاور مغناطیسی الکترون و میدان مغناطیسی هدف به دست می‌آید. این میدان در چارچوب سکون هدف از بین می‌رود، اما در چارچوب سکون الکترون وجود دارد. این عبارت مختص به اسپین  $1/2$  است و در حد  $\beta \rightarrow 0$  از بین می‌رود، و وقتی  $\beta \rightarrow 1$ ، به اندازه برهم‌کنش الکتريکی اهمیت دارد زیرا در آن صورت قدرت نیروهای الکتريکی و مغناطیسی مساوی است. در حد  $\beta \rightarrow 0$  :  $(E = mc^2)$ ، سطح مقطع مات به فرمول رادرفورد، تقلیل می‌یابد. [۵]

### ۳ - ۴ - عاملهای شکل

در صورتی که ذرات برخورد کننده دارای ساختار گسترده باشند، سطح مقطع چه تغییری میکند؟ بررسی لپتونها نشان میدهد که رفتار آنها به صورت ذرات نقطه‌ای است. این واقعیت، لپتونها را به

صورت کاوہہای ایده آل در می آورد، و در اصلاح معادله‌ی (۳ - ۱۶). فقط باید توزیع فضایی ذره-ی هدف را در نظر گرفت. برای سهولت، در اینجا فرض می‌کنیم که توزیع چگالی ذره‌ی هدف دارای تقارن کروی است. سپس در زیر نشان خواهیم داد که سطح مقطع برای پراکندگی الکترون از چنین هدفی به صورت زیر است.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mot}} |F(q^2)|^2 \quad (۳ - ۱۷)$$

عامل ضربی  $F(q^2)$  را عامل شکل می‌نامیم، و

$$q^2 = (p - p')^2 \quad (۳ - ۱۸)$$

مربع تکانه منتقل شده است.

به علت اینکه عاملهای شکل، ساده‌ترین ارتباط بین مشاهدات تجربی و تحلیل‌های نظری هستند، نقش فزاینده‌ای در فیزیک زیر اتمی بازی می‌کنند. طبق معادله‌ی (۳ - ۱۷)، عامل شکل نتیجه مستقیم یک اندازه‌گیری است. برای بحث نظری، سیستمی را در نظر بگیرید که به وسیله تابع موج  $\psi(r)$  که نتیجه حل معادله‌ی شرودینگر است، توصیف شود. برای جسمی با بار  $Q$ ، چگالی بار را می‌توان به صورت  $\rho(r)$  نوشت، که در آن تابع بهنجار شده احتمال است،  $\int d^3r \rho(r) = 1$ . در زیر نشان خواهیم داد که عامل شکل را می‌توان به صورت تبدیل فوریه چگالی احتمال نوشت.

$$F(q^2) = \int d^3r \rho(r) e^{iq \cdot r/\hbar} \quad (۳ - ۱۹)$$

معمولا عامل شکل را در صورتی که انتقال تکانه صفر باشد،  $F(0)$ ، برای ذرات باردار به واحد بهنجار می‌کنند، اما برای ذرات بدون بار  $F(0) = 0$  است. بنابراین، ارتباط بین سطح مقطع تجربی و نظری را می‌توان به صورت زیر مطرح کرد.

نظریه                      مقایسه                      تجربه

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow |F(q^2)| \Leftrightarrow F(q^2) \leftarrow \rho(r) \leftarrow \psi(r) \leftarrow \text{معادله شرودینگر}$$

در واقع، امکان دارد که هر قدم به طور مجزا خیلی پیچیده‌تر از آنچه نشان داده شده‌است باشد، اما جنبه‌های اصلی ارتباط، باقی می‌ماند.

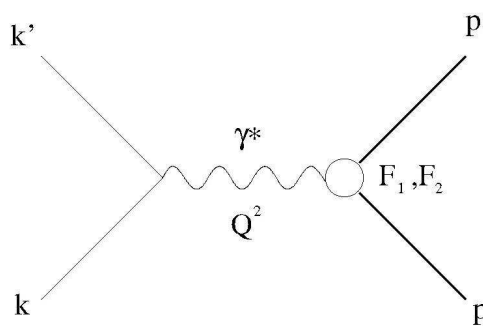
برای درک بهتر معنای عامل شکل و توزیع احتمال،  $F(q^2)$  را به شعاع هسته‌ای ربط می‌دهیم و مثالهایی از ارتباط بین عامل شکل و توزیع احتمال بیان می‌کنیم. برای  $qR \ll 1$  که در آن  $R$  تقریباً برابر شعاع هسته است، می‌توان تابع نمایی معادله‌ی (۳ - ۱۹) را بسط داد و  $F(q^2)$  به صورت:

$$F(q^2) = 1 - \frac{1}{6\hbar^2} (q^2) \langle r^2 \rangle + \dots \quad (۳ - ۲۰)$$

در می‌آید که در آن  $\langle r^2 \rangle$  به صورت:

$$\langle r^2 \rangle = \int d^3r r^2 \rho(r) \quad (۳ - ۲۱)$$

تعریف و به نام میانگین مربعی شعاع خوانده می‌شود. برای مقادیر کوچک انتقال تکانه فقط گشتاورهای صفرم و دوم توزیع بار اندازه‌گیری می‌شود، و نمی‌توان جزئیات بیشتری را به دست آورد.



شکل ۳ - ۱ - پراکندگی کشسان الکترون - پروتون

$$j_\mu^{(q)} = \bar{u}(p') \left[ \gamma_\mu F_1(Q^2) + \frac{i}{2M} \kappa \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(Q^2) \right] u(p)$$

اگر چگالی احتمالی گاوسی باشد.

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-r/b} \quad (۳ - ۲۲)$$

در این صورت به سادگی می‌توان عامل شکل را محاسبه کرد

$$F(q^2) = e^{-q^2 b^2 / 4\hbar^2} \quad \langle r^2 \rangle = \frac{3}{2} b^2 \quad (۳ - ۲۳)$$

اگر  $b$  خیلی کوچک شود، توزیع به یک نقطه‌ی باردار گرایش پیدا می‌کند و عامل شکل به واحد نزدیک می‌شود. این مورد حدی نقطه‌ای است که از آن شروع کردیم. کلام آخر مربوط به وابستگی

عامل شکل به مقادیر تجربی است. معادله‌ی (۳ - ۱۹) نشان می‌دهد که  $F(q^2)$  فقط به مربع تکانه‌ی منتقل شده به هدف، و نه انرژی ذره‌ی فرودی، بستگی دارد. بنابراین می‌توان  $F(q^2)$  را برای یک مقدار خاص  $q^2$  توسط پرتابه‌هایی با انرژیهای گوناگون تعیین کرد. معادله‌ی (۳ - ۹) نشان می‌دهد که فقط لازم است زاویه پراکندگی متناظر با آن را تغییر داد، و نتیجه باید همان مقدار  $F(q^2)$  باشد. ضمناً، این واقعیت که  $F(q^2)$  فقط به  $q^2$  وابسته است، در تقریب اول برون صادق است. و در مرتبه‌های بالاتر درست نیست. بنابر این می‌توان آن را به عنوان محکی برای درستی تقریب اول برون به کار برد. [۶ و ۵]

### ۳ - ۵ - عاملهای شکل نوکلئون

بهترین روش برای کاوش در توزیعهای بار و جریان نوکلئونها بار دیگر پراکندگی است. از نظر تجربی، مسئله برای پروتونها ساده است. هدفی از هیدروژن مایع را در جلو باریکه‌ای از الکترون قرار می‌دهیم، سطح مقطع دیفرانسیلی کشسان الکترونهای پراکنده را تعیین می‌کنیم. برای نوترونها مسئله به این سادگی نیست. هدف نوترونی وجود ندارد، و لازم است که هدفهای دوترونی را به کار برد و اثر پروتون را از آن کم کرد. عمل کم کردن خطاهایی را پیش می‌آورد. نتیجتاً سطح مقطع  $e^-n$  به خوبی سطح مقطع  $e^-p$  شناخته شده نیست.

برای ذرات هدف بدون اسپین، با به کار بردن معادله‌ی (۳ - ۱۷) می‌توان عامل شکل را از سطح مقطع استخراج کرد. نوکلئونها دارای اسپین  $1/2$  هستند. و لذا معادله‌ی (۳ - ۱۷) را باید تعمیم داد. بعضی از ویژگی‌های نتیجه را می‌توانیم بدون محاسبه حدس بزنیم.  $F(q^2)$  در معادله‌ی (۳ - ۱۷) توزیع بار الکتریکی را توصیف می‌کند، و می‌توان آن را عامل شکل الکتریکی نامید. پروتون علاوه بر بار الکتریکی دارای گشتاور مغناطیسی نیز هست. بعید به نظر می‌رسد که این گشتاور شبیه یک گشتاور نقطه‌ای رفتار کند و بر مرکز پروتون بنشیند. باید انتظار داشت که مغناطیدگی نیز روی حجم نوکلئون توزیع شود، و این توزیع توسط عامل شکل مغناطیسی توصیف می‌شود. در واقع، محاسبات مفصل نشان می‌دهد که پراکندگی کشسان از ذره‌ای با اسپین  $1/2$  و غیر نقطه‌ای، باید توسط دو عامل شکل توصیف شود، سطح مقطع در چارچوب آزمایشگاهی به صورت [۵]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mohr}} \left( \frac{G_E^2 + bG_M^2}{1+b} + 2bG_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (۳ - ۲۴)$$

نوشته می‌شود، که در آن؛

$$b = -\frac{q^2}{4m^2c^2} \quad (۳ - ۲۵)$$

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) - \frac{Q^2}{2M^2} \kappa F_2(q^2) \quad (۳ - ۲۶)$$

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + \kappa F_2(q^2) \quad (۳ - ۲۷)$$

معادله‌ی (۳-۲۴) به فرمول روزنبلات معروف است [۵]،  $m$  جرم نوکلئون،  $\theta$  زاویه‌ی پراکندگی، و  $q$  چار-تکانه‌ی منتقل شده به نوکلئون است. در اینجا باید توضیح مختصری بدهیم متغیر  $q$  عبارت چار-تکانه‌ی منتقل شده‌است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$q = \left( \frac{E}{c} - \frac{E'}{c}, p - p' \right) \quad (۳ - ۲۸)$$

و مربع آن

$$q^2 = \frac{1}{c^2} (E - E')^2 - (p - p')^2 = \frac{1}{c^2} (E - E')^2 - q^2 \quad (۳ - ۲۹)$$

نیز یک کمیت ناوردای لورنتسی است. از آنجا که  $q$  یک کمیت نرده‌ای لورنتسی است، کاربرد آن در فیزیک انرژی‌های بالا ارجح است. برای پراکندگی کشسان در دستگاه مرکز جرم یا در انرژی‌های پایین،  $q^2 = -q^2$  است.

سطح مقطع مات توسط معادله‌ی (۳-۱۶) به دست می‌آید.  $G_E$  و  $G_M$  به ترتیب عامل شکل‌های الکتریکی و مغناطیسی هستند، و هر دو تابعی از  $q^2$  اند. اتلاق صفات الکتریکی و مغناطیسی ناشی از این واقعیت است که برای  $q^2 = 0$ ، حالت حدی سکون عامل شکل‌ها عبارت‌اند از

$$G_E(q^2 = 0) = \frac{Q}{e} \quad (۳ - ۳۰)$$

$$G_M(q^2 = 0) = \frac{\mu}{\mu_N}$$

که در آن  $Q$  و  $\mu$  به ترتیب بار الکتریکی و گشتاور مغناطیسی نوکلئون است. مشخصاً  $G_E(0)$  و  $G_M(0)$  برای پروتون و نوترون عبارت‌اند از

$$G_E^p(0) = 1 \qquad G_E^n(0) = 0 \qquad (3 - 31)$$

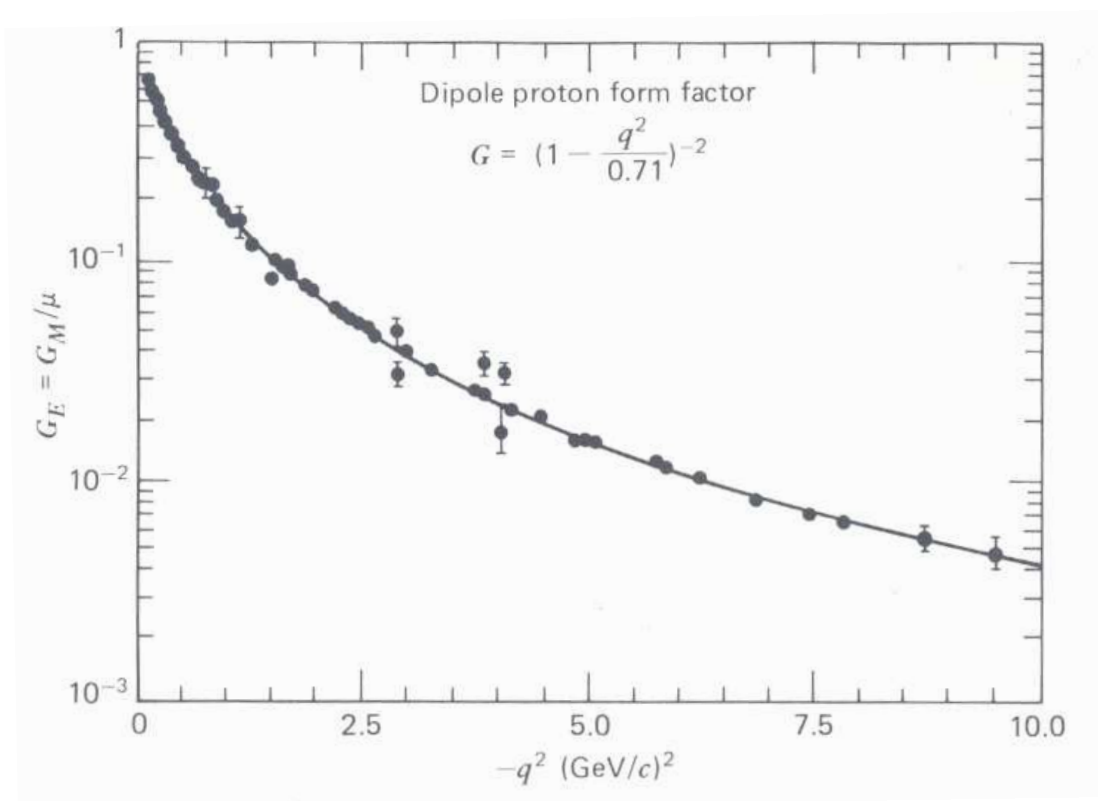
$$G_M^p(0) = 2.79 \qquad G_M^n(0) = -1.91$$

عامل شکلها ، با تقریب خوبی در روابط زیر صدق می کنند.

$$G_E^p(q^2) \approx \frac{G_M^p(q^2)}{\mu_p/\mu_N} \approx \frac{G_M^n(q^2)}{\mu_n/\mu_N} \qquad (3 - 32)$$

$$G_E^n \approx 0$$

از این روابط بعضی از ویژگیهای ساختار نوکلئون ظاهر می شود: [5]



شکل ۳-۲ - فرم فاکتورهای پروتون بعنوان تابعی از  $q^2$  [6]

۱- نوکلئونها ذرات نقطه‌ای نیستند، برای ذرات نقطه‌ای، عامل شکلها ثابت‌اند. نوکلئونها سیستمهای گسترده‌ای هستند. در اینجا باید یک نکته را اضافه کنیم: تبدیل فوریه‌ای که در اینجا به کار می‌بریم فقط برای اندازه‌های کوچک  $|q|^2$  معتبر است. برای مقادیر بزرگ  $|q|^2$  ، پروتونی که



ابتدا ساکن بوده است با سرعتی نزدیک به سرعت نور پس می‌زند، و  $e^{-r/a}$  دیگر معرف توزیع بار نیست.

۲- بجز عامل شکل بار نوترون تمام عامل شکلها وابستگی تقریبا مشابهی نسبت به  $q^2$  دارند.  
 ۳- اگر یک کمیت معین، مثلا بار را به وسیله‌ی عامل شکل  $G$  با  $G(0)=1$ ، توصیف کنیم معادله-  
 ی (۳ - ۲۰) نشان می‌دهد که میانگین مربعی شعاع این کمیت را می‌توان از شیب  $G(q^2)$  در  
 مبدا به دست آورد.

$$\langle r^2 \rangle = -6\hbar^2 \left( \frac{dG(q^2)}{dq^2} \right)_{q^2=0} \quad (3 - 33)$$

میانگین مربعی شعاعها به صورت زیر در می‌آید.

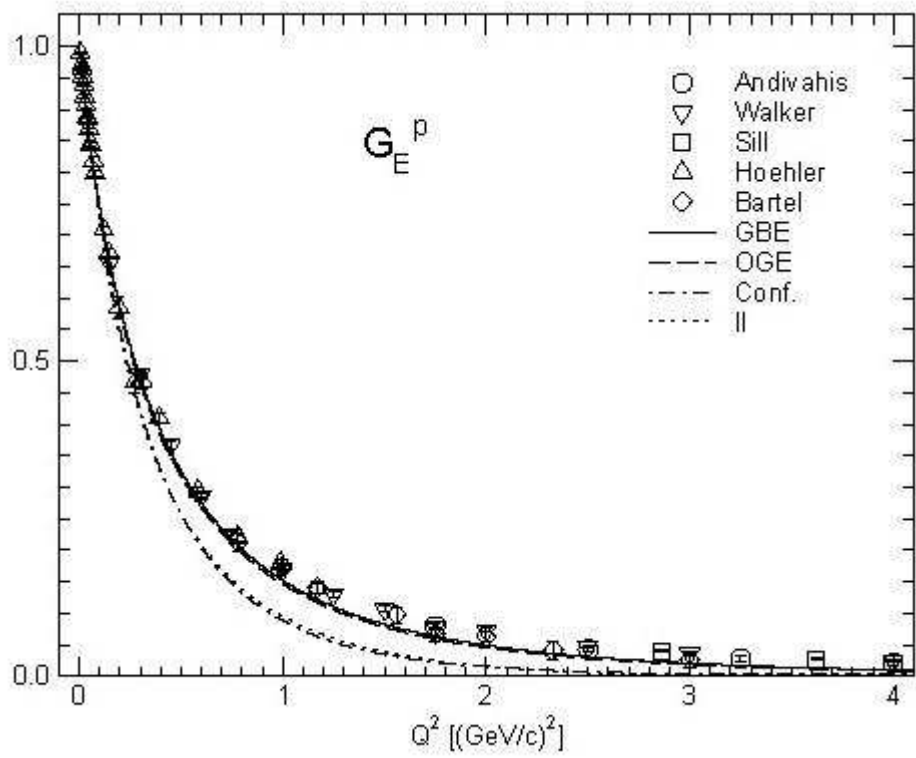
$$\langle r_E^2 \rangle_{proton} \approx \langle r_M^2 \rangle_{proton} \approx \langle r_M^2 \rangle_{neutron} \approx 0.7 \text{ fm}^2 \quad (3 - 34)$$

۴- میانگین مربعی شعاع بار نوترون به صورت زیر داده می‌شود:

$$\langle r_E^2 \rangle_{neutron} \approx 0.008 + 0.006 \text{ fm}^2 \quad (3 - 35)$$

در حال حاضر مقدار ناچیز یا صفر شعاع بار نوترون یک معماست. به زبان نه چندان دقیق، نوترون  
 تماما مغناطیس است و حاوی مقدار بسیار ناچیزی بار الکتریکی است. [۵]

شکل ۳ - ۳ فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی محاسبه شده در مدل‌های که باریون را به صورت  
 یک سیستم سه جسمی نسبیتی در نظر گرفته‌اند را با مقادیر حاصل از آزمایش مقایسه می‌کند. [۲۵]



شکل ۳-۳ - فرم فاکتور الکتریکی پروتون در مدل‌های نسبیتی کوارکها [۲۵]

# فصل چهارم

فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون

#### ۴ - ۱ - سیستمهای مقید

تا چندی پیش تئوری حالت‌های مقید، نقش نسبتاً کمتری را در فیزیک ذره‌ای ایفا می‌کرد. البته، هیدروژن (پروتون و الکترون) وجود داشت، ولی این مورد (ساده‌ترین اتم) در گستره‌ی فیزیک اتمی قرار گرفت و دوترون (پروتون - نوترون) نیز موجود بوده، اما این مورد (یعنی ساده‌ترین هسته‌ی غیر بدیهی) به طور کامل به فیزیک هسته‌ای تعلق گرفت. اگر چه مدل کوارکی همه چیز را تغییر داد. ناگهان هادرونها (باریونها و مزونها) به خودی خود به حالت‌های مقید تبدیل شدند، مزونها هم سیستم‌های دو کوارکی، ولی باریونها سیستم‌های سه کوارکی بودند.

با این کشف، تئوری حالت‌های مقید تبدیل به جزئی مهم از فیزیک ذرات بنیادی شد. بررسی حالت مقید هنگامی ساده‌تر است که حرکت اجرام محتوایی در سرعت‌های اساساً کمتر از  $C$  باشد به همین دلیل دستگاه مکانیک کوانتوم غیر نسبیتی می‌تواند تاثیر کاربردی داشته باشد، مانند حالتی که برای هیدروژن و هادرونهايي که از کوارک‌های سنگین تشکیل شده‌اند ( $c, b$  و  $t$ ) است.

مطالعه‌ی حالت‌های دارای کوارک‌های سبک که بیشتر شناخته شده‌اند و از ( $u, d$  و  $s$ ) تشکیل شده‌اند، بسیار دشوارتر است به این دلیل که به طور ذاتی نسبیتی و تئوری میدان‌های کوانتومی برای مشکلات حالت مقید مناسب نیست. بیشتر روش‌های قابل دسترس از جایی آغاز می‌شوند که ذرات در ابتدا آزاد هستند و پس از برخی برهم‌کنش‌های واقعی دوباره آزاد می‌شوند. در صورتی که در یک حالت مقید به طور طبیعی ذرات در طول یک دوره‌ای طولانی به گونه‌ی ممتد در حال برهم‌کنش هستند بنابراین، هم اکنون یک تئوری محکم در مورد چارمونیم ( $c\bar{c}$  سیستم مزون  $\psi$ ) و باتونیم ( $b\bar{b}$  سیستم  $\chi$ )

وجود دارد [۳]، ولی به گونه‌ی نسبی (مقایسه‌ای) در مورد حالت‌های تحریک شده  $u\bar{u}$  یا  $d\bar{d}$  کمتر می‌توان نظر داد.

چگونه می‌توانیم بگوییم که یک حالت مقید نسبیتی است یا نه، ساده‌ترین معیار به شرح زیر است چنانچه انرژی پیوستگی نسبت به انرژی در حال سکون ذرات محتوایی کمتر باشد در نتیجه سیستم غیر نسبیتی است. برای مثال انرژی پیوستگی هیدروژن  $MeV \frac{13}{6}$  می‌باشد در حالی که انرژی سکون یک الکترون  $MeV \frac{0}{511}$  می‌باشد. این سیستم به گونه‌ای آشکار غیر نسبیتی است. عموماً انرژی نهایی سیستم مرکب حاصل جمع سه عبارت زیر می‌باشد: انرژی سکون اجزای محتوا، انرژی جنبشی اجزای محتوا و انرژی پتانسیل سیستم. دو مورد آخری به طور شاخص از لحاظ اندازه قابل مقایسه هستند. چنانچه انرژی پیوستگی خیلی کمتر از انرژی‌های در حال سکون اجزای اصلی باشد، این انرژی، انرژی جنبشی آنها نیز محسوب می‌شود و در نتیجه سیستم غیر نسبیتی می‌باشد. از سویی دیگر چنانچه جرم ساختار مرکب متفاوت از مجموع جرم‌های اجزای محتوایی باشد، در این صورت انرژی جنبشی بسیار زیاد می‌باشد و سیستم نسبیتی است. از طرفی دیگر، انرژی‌های بستگی کوارک - کوارک از مرتبه چند صد  $MeV$  می‌باشد که حدوداً برابر انرژی موثر در حال سکون می‌باشد اما در اصل کمتر از  $t, b, c$  می‌باشد. بنابراین، هادرونها کوارک سبک نسبیتی هستند، اما سیستم‌های کوارک‌های سنگین اینگونه نیستند. [۳]

آنالیز باریونها سخت تر از مزونها می‌باشد. به دلایل بی‌شمار در وهله اول یک باریون سیستمی سه ذره‌ای می‌باشد. تنها یک اندازه حرکت زاویه‌ای اربیتالی برای در نظر گرفتن وجود ندارد بلکه دو مقدار وجود دارد. ما بر روی حالت پایه تمرکز خواهیم داشت که  $l = l' = 0$ . در آن حالت اندازه حرکت زاویه‌ای باریون بطور کامل از ترکیب اسپین‌های سه کوارک سرچشمه می‌گیرند اکنون کوارک‌ها اسپین را حمل می‌کنند. حالت دومی که در آن باریونها بسیار پیچیده تر از مزونها است، با اصل طرد پائولی عمل می‌کند. بطور ساده دو نوع ذره وجود دارد بوزونها که حالت موج برای آنها زوج است. و فرمیونها که حالت موج برای آنها فرد می‌باشد. یک واقعیت تجربی وجود دارد که تمامی ذرات با اسپین اعداد صحیح بوزون هستند. در صورتی که با اسپین اعداد نیم صحیح فرمیونها می‌باشند. یکی از موفقیت‌های اصلی تئوری میدان کوانتومی اثبات شکل این رابطه، بین اسپین و آمار می‌باشد.

بوزونها ( اسپین عدد صحیح )  $\Rightarrow$  حالت موج متقارن:  $\psi(1,2) = \psi(2,1)$

فرمیونها ( اسپین نیمه صحیح )  $\Rightarrow$  حالت موج پادمتقارن:  $\psi(1,2) = -\psi(2,1)$

توجه داشته باشید که به هر حال اصل پائولی برای بوزونها بکار نمی‌رود. شما می‌توانید هر مقدار پایون را که می‌خواهید، در یک حالت قرار دهید. هیچ نیازی به حالت متقارن برای ذرات قابل تشخیص نمی‌باشد. و به همین دلیل هنگامی که تابع موج مزون را می‌سازیم، مجبور نیستیم که نگران این مورد باشیم زیرا یکی از ذرات محتوایی آن یک کوارک و یکی آنتی کوارک می‌باشد آنها همواره قابل تشخیص می‌باشند. اما در حالت باریونها سه کوارک را با همدیگر قرار می‌دهیم و در اینجا بایستی یک سیستم پاد متقارن را به حساب بیاوریم. اکنون تابع موج باریون با اجزاء متعدد را بررسی می‌کنیم یک قسمت فضایی است که موقعیتهای مکانی سه کوارک را شرح می‌دهد. یک بخش اسپین وجود دارد که معرف اسپینهاست و یک جزء ترکیب کننده که چگونگی ترکیب  $S$  و  $d$  را در بر می‌گیرند. و یک واحد رنگ، که رنگهای کوارکها را تعیین می‌کند

$$\psi_{3q} = \psi(space)\psi(spin)\psi(flavor)\psi(color) \quad (1-4)$$

تابع موج کل بایستی نامتقارن باشد ( در اثر مبادله داخلی هر دو کوارک). ما نمی‌دانیم که شکل تابعی حالت پایه قسمت فضایی چگونه است. اما مطمئنا متقارن می‌باشد. بدلیل اینکه  $l = l' = 0$  و هیچ وابسته زاویه‌ای ندارد. حالت اسپین می‌تواند کاملا متقارن بوده ( $j = \frac{3}{2}$ ) یا متقارن مخلوط باشد ( $j = \frac{1}{2}$ ) در مورد طعم ۲۷ حالت ممکن وجود دارد. در نهایت مسئله‌ی رنگ به میان می‌آید. در فصل دوم یک قانون عمومی را که بطور طبیعی تمام ذرات بی رنگ می‌باشند را بررسی کردیم. اگر یک مزون شامل یک کوارک قرمز رنگ باشد، بایستی همچنین دارای یک کوارک ضد قرمز نیز باشد و هر باریون باید یک کوارک از هر رنگ را در خود جای دهد. در حقیقت این یک حالت ساده از قانونی کلی‌تر می‌باشد. هر ذره که به گونه‌ی طبیعی بوجود آمده، یک یگانه رنگ می‌باشد. سه رنگ مولد تقارن رنگی  $SU(3)$  است همانند کوارک سبک طعم که تولید کننده‌ی تقارن  $SU(3)$  طعم است، رنگ تولید می‌کند. اولی یک تقارن دقیق کوارکها با رنگ متفاوت، ولی جرم برابر در حالیه دومی یک تقارن تقریبی از کوارکهای با رنگ و جرم متفاوت است. با کنار هم قرار دادن سه رنگ، یک رنگ دهگانه و دو رنگ هشت گانه و یک رنگ یگانه بدست می‌آوریم. بنابر این، برای باریونها حالت رنگ همیشه به شرح زیر است.

$$\psi(color) = (rgb - rbg + gbr + grb + brg - bgr) / \sqrt{6} \quad (2-4)$$

چون تابع موج رنگ برای تمام باریونها یکسان می‌باشد، عموماً برای محاسبه‌ی آن بطور صریح خود را به در دسر نمی‌اندازیم. اگر چه بطور قطعی بسیار دشوار است که  $\psi(color)$  نامتقارن باشد. زیرا برای این منظور بایستی سایر توابع موج متقارن باشند. بویژه در حالت پایه که اسپین  $\psi$  متقارن است، حاصلضرب اسپین و طعم بایستی حتماً متقارن باشد.

به این نتیجه می‌رسیم، که ساختن تابع موج باریون مدل کوآرک در مدل کوآرک یک کار ساده‌ای نیست. روی هم رفته افزون بر تابع موج فضا، سه اسپین و سه طعم و سه رنگ وجود دارد و باید آنها را به گونه‌ای کنار هم بگذاریم، که با اصل طرد پائولی سازگاری داشته باشد.

می‌دانیم که پروتون از سه کوآرک تشکیل شده است، و نیز می‌دانیم اثرات بار الکتریکی کوآرکها در برهمکنشهای قوی بسیار بسیار ناچیز می‌باشد؛ پس از ابتدا مشخص می‌شود که اثر پتانسیل الکتریکی بار کوآرکها در این پتانسیل پیشنهادی ما جایی ندارد.

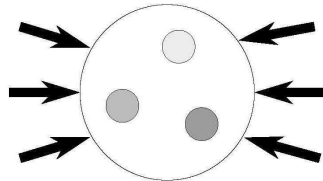
اما همانطور که در فصل نخست توضیح داده شد برای هر کوآرک نوعاً رنگی تعریف می‌شود، در واقع این بار رنگ است که در برهمکنشهای خود را نمایان می‌کند؛ پس بایستی پتانسیل مربوط به بار رنگ را در نظر بگیریم.

#### ۲-۴ - مدل کیسه‌ای کوآرکهای تشکیل دهنده‌ی فوق مرکزی

در یک مدل کیسه‌ای ساده با کوآرکهای بدون جرم و بدون برهم‌کنش، شعاع کیسه مورد نیاز برای تامین جرم پروتون  $R = 1/6 \text{ fm}$  می‌باشد. این جرم از انرژی جنبشی کوآرکها و فشار محبوس کننده کوآرکها تامین می‌شود. در این صورت برای کوآرکهای بدون جرم، جرم موثری وجود دارد، که بعنوان نمونه برای پروتون با کیسه‌ای به شعاع  $1/6 \text{ fm}$  جرم موثر کوآرکها  $u$  و  $d$  در حدود  $MeV$   $340$  می‌باشد. و زمانی که شعاع کیسه  $R \rightarrow \infty$  جرم موثر کوآرکها صفر می‌شود. همچنین برای یک کوآرک شگفت محبوس نشده با جرم  $MeV$   $100$  جرم موثر کوآرک  $MeV$   $550$  بدست می‌آید، وقتی که کوآرک به کره‌ای به شعاع  $1/5 \text{ fm}$  محبوس شده باشد. انرژی حاصل از فشار کیسه در چنین مدلی در حدود  $MeV$   $260$  می‌باشد. [۴]

برای بررسی خواص استاتیکی پروتون ، مدل کیسه‌ای را که در این پژوهش در نظر می‌گیریم به شرح زیر می‌باشد.

پروتون را به صورت یک سیستم سه ذره‌ای از کوارکها در نظر می‌گیریم. در این سیستم کوارکها بطور متقابل با یکدیگر بر هم کنش می‌کنند. از طرف دیگر کوارکها در داخل کیسه‌ای محبوس هستند. و انرژی لازم جهت محبوسیت کوارکها از فشار کیسه ناشی می‌شود. [۱۰ و ۲]



شکل ۴ - ۱ - باریون در مدل کیسه ای

معادله‌ی دیراک را برای پروتون متشکل از سه کوارک که با پتانسیل رنگ بر هم کنش می‌کنند حل می‌کنیم. توجه کنید معادله دیراک را در داخل کیسه حل می‌کنیم و سپس شرط مرزی روی سطح کیسه را اعمال می‌کنیم.

#### ۴ - ۳ - حل معادله‌ی دیراک با پتانسیل پیشنهادی

تا کنون در بررسی ساختار درونی هادرون‌ها نقش پتانسیل برداری و اسکالر را یکسان در نظر گرفته بودیم، اما در این بخش قصد داریم، معادله‌ی دیراک را در حالی که پتانسیل برداری در مقایسه با پتانسیل اسکالر بسیار ناچیز است حل کنیم به عبارتی پتانسیل برداری را صفر در نظر می‌گیریم. با اعمال این شرط حل معادله‌ی دیراک بسیار پیچیده‌تر خواهد شد. و برای پیدا کردن اعداد کوانتومی موجود در مسئله، باید به نظریه‌ی گروه‌ها و جبر لی در ذرات بنیادی متصل می‌شویم.

معادله‌ی دیراک در  $D+1$  بعد را می‌توان بصورت زیر بیان کرد. [۲۸]

$$i \sum_{\mu=0}^D \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} + ieA_{\mu}) \psi(X, t) = m \psi(X, t) \quad (۳-۴)$$

که  $m$  جرم ذره است و ماتریس‌های  $\gamma$  در رابطه‌ی پادجابجایی زیر صدق می‌کند.

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu} \quad (۴-۴)$$



که  $g^{\mu\nu}$  متریک مینکوسکی می باشد. برای سادگی  $\hbar = c = 1$  را به کار برده ایم. برای حل معادله‌ی دیراک حالت خاصی را فرض می کنیم که فقط مولفه‌ی صفر  $A_\mu$  غیر صفر باشد و همچنین تقارن کروی داشته باشیم.

$$A_a = 0 \quad a \neq 0 \quad (5-4)$$

(۴) پارتورهای اسپینور سیستم بصورت زیر بیان می شود [۲۸]

$$i\partial_0\psi(X,t) = H(X)\psi(X,t) \quad H(X) = \sum \gamma^0 \gamma^a p_a + V(r) + \gamma^0 m \quad (6-4)$$

$$p_a = -i\partial_a = -i \frac{\partial}{\partial x^a} \quad 1 \leq a \leq D \quad (7-4)$$

اپراتورهای اندازه حرکت مداری  $L_{ab}$ ، اپراتورهای اسپینور  $S_{ab}$  و اپراتورهای اندازه حرکت زاویه‌ای  $J_{ab}$  بصورت زیر تعریف می شوند. [۲۸]

$$L_{ab} = -L_{ba} = ix_a \partial_b - ix_b \partial_a \quad S_{ab} = -S_{ba} = i\gamma_a \gamma_b / 2 \quad (8-4)$$

$$J_{ab} = L_{ab} + S_{ab} \quad 1 \leq a \leq b \leq D \quad (9-4)$$

$$J^2 = \sum_{a < b=2}^D J_{ab}^2 \quad L^2 = \sum_{a < b=2}^D L_{ab}^2 \quad S^2 = \sum_{a < b=2}^D S_{ab}^2 \quad (10-4)$$

ویژه مقادیر  $J^2 (L^2, S^2)$  بوسیله‌ی کاسیمیر  $C(m)$  که  $m$  بالاترین وزن نمایش برای تابع موج کل می باشد، محاسبه می شوند. از آنجا که پتانسیل  $V(r)$  به طور کروی متقارن می باشد گروه تقارن سیستم گروه  $SO(D)$  می باشد. مختصات فوق کروی در فضایی با ابعاد  $D$  بصورت زیر معرفی می - شود. [۲۸ و ۱۵ و ۱۱]

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{D-1} \\ x^2 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{D-1} \\ x^b &= r \cos \theta_{b-1} \sin \theta_k \dots \sin \theta_{D-1} \quad 3 \leq b \leq D-1 \\ x^D &= r \cos \theta_{D-1} \\ \sum_{a=1}^D (x^a)^2 &= r^2 \end{aligned} \quad (11-4)$$

عنصر حجم در این پیکره بندی از فضا بصورت زیر می باشد

$$\prod_{a=1}^D dx^a = r^{D-1} dr d\Omega$$

$$d\Omega = \prod (\sin \theta_a)^{a-1} d\theta_a$$

$$-\pi \leq \theta_1 \leq \pi$$

$$0 \leq \theta_b \leq \pi$$

$$2 \leq b \leq D-1$$

$$0 \leq r \leq \infty$$

$$(12-4)$$

اکنون برخی از نکات مهم مربوط به نظریه‌ی گروه‌ها در فیزیک را که در حل معادله‌ی دیراک از آنها استفاده کرده‌ایم مرور می‌کنیم. گروه مورد مطالعه در اینجا  $SO(D)$  می‌باشد. که برای دو حالت زوج و فرد  $D$  دارای ویژگی‌های متفاوت می‌باشند. بعبارتی گروه  $SO(2N)$  و گروه  $SO(2N+1)$  خواص متفاوتی دارند.  $N$  عدد صحیح می‌باشد که تنها برای مشخص کردن ابعاد زوج و فرد بکار می‌رود. [۲۹]

برای اپراتور اندازه حرکت زاویه‌ای کل  $J_{ab}$  و گروه  $SO(2N+1)$  داریم

$$H_N(J) = 2J_{(2N-1)(2N)}$$

$$E_N(J) = J_{(2N)(2N+1)} - iJ_{(2N-1)(2N+1)}$$

$$F_N(J) = J_{(2N)(2N+1)} + iJ_{(2N-1)(2N+1)}$$

$$(13-4)$$

و برای گروه  $SO(2N)$  داریم

$$H_N(J) = J_{(2N-3)(2N-2)} + J_{(2N-1)(2N)}$$

$$E_N(J) = (J_{(2N-2)(2N-1)} - iJ_{(2N-3)(2N-1)} + iJ_{(2N-2)(2N)} + J_{(2N-3)(2N)})/2$$

$$F_N(J) = (J_{(2N-2)(2N-1)} + iJ_{(2N-3)(2N-1)} - iJ_{(2N-2)(2N)} + J_{(2N-3)(2N)})/2$$

$$(14-4)$$

با قرار دادن اپراتورهای  $L_{ab}$  یا  $S_{ab}$  بجای اپراتور  $J_{ab}$  می‌توانیم در باره‌ی این اپراتورها که تابع موج به آنها نیز بستگی دارد بحث کرد. در روابط بالا اپراتور  $H_N(J)$  که بصورت زیر بر روی ویژه حالتها عمل می‌کند، زیرجبر کرتن نامیده می‌شود. [۲۹ و ۳۰]

$$H_\mu(J)|m\rangle = m_\mu|m\rangle \quad 1 \leq \mu \leq N$$

$$(15-4)$$

ویژه مقادیر  $m_\mu$  وزن نامیده می‌شود. و بردار  $m$  با مولفه‌ی  $m_\mu$  بردار وزن نامیده می‌شود. اگر ویژه حالت‌های  $|m\rangle$  برای یک وزن داده شده  $m$  تبهگن باشند، این وزن، وزن مضاعف نامیده می‌شود. در غیر اینصورت وزن ساده می‌باشد. اپراتورهای  $E_N$  بالا برنده و اپراتورهای  $F_N$  پایین‌برنده نامیده می‌شوند. برای یک نمایش کاهش ناپذیر بالاترین وزن  $m$  که یک وزن ساده است و برای توضیح

نمایش کاهش ناپذیر استفاده می شود. معمولا نمایش کاهش ناپذیر را نمایش بالاترین وزن نیز می نامند.

تابع موج مداری در فضای  $D$  بعدی معمولا بوسیله ی هماهنگ کروی  $Y_m^{(l)}(\hat{x})$  بیان می شود. که به وزن  $m$  بالاترین وزن نمایش وابسته است. برای حالت با بالاترین وزن، داریم:  $m=l$  و

$$(l) \equiv (l, 0, \dots, 0)$$

تمام حالت های  $Y_m^{(l)}(\hat{x})$  را می توانیم از  $Y_l^{(l)}(\hat{x})$  و بوسیله ی اپراتورهای پایین آورنده  $F_\mu(L)$  محاسبه کرد. ویژه مقادیر مربوط به بالاترین وزن اپراتورها را می توانیم از رابطه ی معروف به کاسیمیر که بصورت زیر می باشد بدست آورد. [۳۰ و ۲۹]

$$C_2(m) = m(m + 2\rho) = \sum_{\mu=\nu=1}^N m_\mu d_\mu (A^{-1})_{\mu\nu} (m_\nu + 2) \quad (۱۶-۴)$$

در رابطه ی بالا  $A^{-1}$  معکوس ماتریس کرتن می باشد. با بکار بردن رابطه ی کاسیمیر برای اپراتور اندازه حرکت مداری و در بالاترین وزن می توانیم ویژه مقادیر را بدست آوریم.

$$L^2 Y_m^{(l)}(\hat{x}) = C_2[l] Y_m^{(l)}(\hat{x}) \quad C_2[l] = l(l + D - 2) \quad (۱۷-۴)$$

تابع موج اسپینورها برای اندازه حرکت زاویه ای کل و برای دو حالت  $D=2N$  و  $D=2N+1$  متفاوت هستند.

#### حالت $SO(2N)$

به خوبی می دانیم که نمایش اسپینور گروه  $SO(2N)$  کاهش یافته است و به دو اسپینور بنیادی  $(+s) \equiv (0, 0, \dots, 0, 1, 0)$  و  $(-s) \equiv (0, 0, \dots, 0, 1, 0)$  کاهش می یابد. و با محاسبه ی رابطه ی کاسیمیر برای نمایش اسپینورها بدست می آوریم: [۳۰ و ۲۹]

$$C_2[(\pm s)] = (2N^2 - N)/4 \quad (۱۸-۴)$$

در ادامه ی کار ماتریس های  $\beta_a$  که بوسیله ی حاضرب  $N$  ماتریس پائولی بیان می شود را معرفی می کنیم. [۲۷]

$$\beta_{2m-1} = \overbrace{1 \otimes 1 \dots \otimes 1}^{m-1} \otimes \sigma_1 \otimes \overbrace{\sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3}^{N-m}$$

(۱۹-۴)

$$\beta_{2m} = \overbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}^{m-1} \otimes \sigma_2 \otimes \overbrace{\sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3}^{N-m}$$

$$\beta_{2N+1} = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3$$

ماتریس‌های  $\gamma^a$  برای حالت  $D=2N$  بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\gamma^0 = \beta_{2N+1} \quad \gamma^a = \beta_{2N+1} \beta_a \quad 1 \leq a \leq 2N \quad (20-4)$$

$\gamma^0$  یک ماتریس قطری است که نصف عناصر قطری آن مساوی با  $+1$  و بقیه مساوی با  $-1$  می‌باشند. اسپینورهای بنیادی  $\chi_{\pm}(m)$  به نمایش‌های اسپینورهای بنیادی  $(+s)$  و  $(-s)$  وابسته است. و در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند.

$$\gamma^0 \chi_{\pm}(m) = \pm \chi_{\pm}(m) \quad (21-4)$$

حاصلضرب  $\chi_{\pm}(m)$  و  $Y_m^{(l)}(\hat{x})$  به ضرب مستقیم دو نمایش  $(l)$  و  $(\pm s)$ ، که یک نمایش کاهش یافته است، وابسته می‌باشد.

$$(l) \otimes (+s) \cong (l, 0, \dots, 0, 1) \oplus (l-1, 0, \dots, 0, 1, 0)$$

$$(l) \otimes (-s) \cong (l, 0, \dots, 0, 1, 0) \oplus (l-1, 0, \dots, 0, 1)$$

(۲۲-۴)

دو نوع نمایش برای اندازه حرکت زاویه‌ای کل وجود دارد: نمایش  $(j_1) \equiv (l, 0, \dots, 0, 1)$  و نمایش  $(j_2) \equiv (l, 0, \dots, 0, 1, 0)$ . کاسیمیر این دو نمایش باهم برابر است. [۲۹]

$$C_2[(j_1)] = C_2[(j_2)] = l(l+2N-1) + (2N^2 - N)/4 \quad (23-4)$$

برای ساختن تابع موج وابسته به نمایش  $(j_1)$ ، دو روش وجود دارد؛ ترکیب  $Y_m^{(l)}(\hat{x}) \chi_+(m)$  و ترکیب  $Y_m^{(l+1)}(\hat{x}) \chi_-(m)$ . بدلیل تقارن گروهی سیستم، ما فقط حالت با بالاترین وزن را برای نمایش  $(j_1)$  بوسیله ضرایب کلبش - گوردن محاسبه می‌کنیم: [۲۸ و ۲۹]

$$\phi_{K, (j_1)}(\hat{x}) = Y_l^l(\hat{x}) \chi_+[(+s)]$$

$$\phi_{-K, (j_1)}(\hat{x}) = \sum_m Y_m^{(l+1)}(\hat{x}) \chi_-[(j_1) - m] \langle (l+1), m, (-s), (j_1) - m | (j_1), (j_1) \rangle \quad (24-4)$$

$$K = C_2[(j_1)] - C_2[(l)] - C_2[(+s)] + N - 1/2 = l + N - 1/2$$

و همچنین برای نمایش  $(j_2) \equiv (l, 0, \dots, 0, 1, 0)$  نیز بصورت بالا خواهیم داشت:

$$\phi_{K,(j_2)}(\hat{x}) = \sum_m Y_m^{(l+1)}(\hat{x}) \chi_+ [(j_2) - m] \langle (l+1), m, (+s), (j_2) - m | (j_2), (j_2) \rangle$$

(۲۵-۴)

$$\phi_{-K,(j_2)}(\hat{x}) = Y_l^l(\hat{x}) \chi_- [(-s)]$$

$$K = C_2 [(j_2)] - C_2 [(l+1)] - C_2 [(+s)] + N - 1/2 = -l - N + 1/2$$

تابع موج اندازه حرکت زاویه‌ای کل  $\psi_{K,(j_w)}(X)$ ، که به نمایش کاهش ناپذیر  $(j_w)$  وابسته است، را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم. [۲۸]

$$\psi_{|K|,(j_1)}(X, t) = r^{-N+1/2} e^{-iEt} \begin{pmatrix} F(r) \phi_{|K|,(j_1)}(\hat{x}) \\ iG(r) \phi_{-|K|,(j_1)}(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

$$\psi_{-|K|,(j_2)}(X, t) = r^{-N+1/2} e^{-iEt} \begin{pmatrix} F(r) \phi_{-|K|,(j_2)}(\hat{x}) \\ iG(r) \phi_{|K|,(j_2)}(\hat{x}) \end{pmatrix} \quad K = \begin{cases} l + N - 1/2 \Rightarrow w = 1 \\ -l - N + 1/2 \Rightarrow w = 2 \end{cases} \quad (۲۶-۴)$$

$$\kappa \psi_{K,(j_w)}(X) = K \psi_{K,(j_w)}(X)$$

با جایگذاری تابع موج  $\psi_{K,(j_w)}(X)$  در هامیلتونین معادله‌ی دیراک (۴-۶) و با توجه به روابط زیر معادله شعاعی را برای حالت  $D=2N$  بدست می‌آوریم. [۲۸]

$$(\vec{\beta} \cdot \vec{x}) \phi_{K,(j_w)}(\hat{x}) = r^{-1} \sum_{a=1}^{2N} \beta_a x^a \phi_{K,(j_w)}(\hat{x}) = \phi_{-K,(j_w)}(\hat{x})$$

$$(\vec{\beta} \cdot \vec{p}) r^{-N+1/2} \phi_{K,(j_w)}(\hat{x}) = \sum_{a=1}^{2N} \beta_a p_a r^{-N+1/2} \phi_{K,(j_w)}(\hat{x}) = iKr^{-N-1/2} \phi_{-K,(j_w)}(\hat{x}) \quad (۲۷-۴)$$

$$w = 1 \text{ or } 2$$

و سرانجام با استفاده از روابط بالا می‌توانیم معادله شعاعی را بدست آوریم. [۲۸]

$$\frac{dG(r)}{dr} + \frac{K}{r} G(r) = [E - V(r) - m] F(r)$$

$$-\frac{dF(r)}{dr} + \frac{K}{r} F(r) = [E - V(r) + m] G(r) \quad \begin{matrix} K = \pm(2l + D - 1)/2 \\ D = 2N \end{matrix} \quad (۲۸-۴)$$

ما معادله‌ی بالا را برای پتانسیل رنگ حل می‌کنیم

$$V(r) = -\frac{c}{r} \quad (۲۹-۴)$$

متغییر بدون بعد  $\rho$  را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho = 2r \sqrt{m^2 - E^2} \quad 0 < E < m \quad (۳۰-۴)$$

از معادله‌ی  $F(\rho)$  را بدست می‌آوریم

$$F(\rho) = \left( -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m-E}{m+E}} + \frac{c}{\rho} \right)^{-1} \left[ \frac{dg(\rho)}{d\rho} + \frac{K}{\rho} g(\rho) \right] \quad (31-4)$$

در اینصورت یک معادله دیفرانسیل درجهی دو برای  $G(\rho)$  بدست می‌آوریم

$$\frac{d^2 G(\rho)}{d\rho^2} + \left[ -\frac{1}{4} - \frac{K^2 - c^2 + K}{\rho^2} + \frac{Ec}{\rho \sqrt{m^2 - E^2}} \right] G(\rho) + \left[ \rho - \frac{\rho^2}{2c} \sqrt{\frac{m-E}{m+E}} \right]^{-1} \left[ \frac{dG(\rho)}{d\rho} + \frac{K}{\rho} G(\rho) \right] = 0 \quad (32-4)$$

با توجه به رفتار  $G(\rho)$  در مبدا و در بینهایت،  $G(\rho)$  را بصورت زیر تعریف می‌کنیم [۲۸]

$$G(\rho) = \rho^\lambda e^{-\frac{\rho}{2}} R(\rho) \quad \lambda = \sqrt{K^2 - c^2} > 0$$

$$\omega = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{m-E}{m+E}} \quad \tau = \frac{ec}{\sqrt{m^2 - E^2}} \quad (33-4)$$

و بدست می‌آوریم

$$(\rho - \omega \rho^2) \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + [\omega \rho^2 - (2\lambda\omega + 1)\rho + 2\lambda + 1] \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left[ \omega(\lambda - \tau)\rho + \omega(K + \lambda) + \tau - \lambda - \frac{1}{2} \right] R(\rho) = 0 \quad (34-4)$$

معادله‌ی بالا را می‌توان به روش بسط سری‌های توانی حل کرد. مولفه‌های تابع موج بعد از حل

معادله‌ی دیراک به صورت زیر می‌باشند [۲۸]

$$F_{K,E}(r) = 2^\lambda \frac{\beta^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\Gamma(2\lambda + 1)} \sqrt{\frac{(m+E)\beta\Gamma(\nu + 2\lambda + 1)}{2m^2 c \left( K + \frac{cm}{\beta} \right) \nu!}} r^\lambda e^{-\beta r} \times \quad (35-4)$$

$$\left[ \left( K + \frac{mc}{\beta} \right) F(-\nu, 2\lambda + 1, 2\beta r) - \nu F(1 - \nu, 2\lambda + 1, 2\beta r) \right]$$

$$G_{K,E} = 2\lambda \frac{\beta^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\Gamma(2\lambda + 1)} \sqrt{\frac{(m-E)\beta\Gamma(\nu + 2\lambda + 1)}{2m^2 c \left(K + \frac{cm}{\beta}\right) \nu!}} r^\lambda e^{-\beta r} \times \quad (36-4)$$

$$\left[ \left( K + \frac{mc}{\beta} \right) F(-\nu, 2\lambda + 1, 2\beta r) + \nu F(1 - \nu, 2\lambda + 1, 2\beta r) \right]$$

که در روابط بالا داریم [۲۸]

$$\nu = \tau - \lambda = 0, 1, 2, \dots \quad (37-4)$$

$$K = \pm(2l + D - 1)/2$$

$$\beta = \sqrt{m^2 - E^2}$$

$$\lambda = \sqrt{K^2 - c^2}$$

در مدل کیسه‌ای مورد مطالعه، که فشار کیسه عامل محبوسیت کوارکها می‌باشد، انرژی حاصل از فشار کیسه در جرم باریون ظاهر می‌شود. و برای پروتون با جرم سکون  $938 \text{ Mev}/c^2$  داریم

[۱۲و۴]

$$M_p = m + E_{bag} \quad (38-4)$$

از طرفی بدلیل اینکه سیستم مقید است، انرژی بستگی خواهیم داشت که در اینجا انرژی بستگی همان انرژی حاصل از فشار کیسه می‌باشد. [۱۲و۴]

$$E = \mathcal{E} - E_{binding} \quad (39-4)$$

$$E_{bag} = E_{binding}$$

که در روابط بالا  $\mathcal{E}$  انرژی حاصل از برهم کنش کوارکها با پتانسیل رنگ بعلاوه انرژی جنبشی کوارکها می‌باشد. از طرفی جرم کوارکها نیز از همین انرژی ناشی می‌شود. بعبارتی خواهیم داشت [۱۲و۴]

$$m = \mathcal{E} \quad (40-4)$$

در این صورت بین جرم سیستم و انرژی سیستم رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت [۱۲و۴]

$$M_p + E = 2m \quad (41-4)$$

با اعمال شرط محبوسیت کوارکها خواهیم داشت [۴]

$$\left(\sqrt{m+E} + \sqrt{m-E}\right) \left(K + \frac{mc}{\beta}\right) F(-\nu, 2\lambda+1, 2\beta r) + \quad (42-4)$$

$$\left(\sqrt{m+E} - \sqrt{m-E}\right) \nu F(1-\nu, 2\lambda+1, 2\beta r) = 0$$

در روابط بالا تابع فوق هندسی همشار بصورت زیر تعریف می‌شود [۹]

$$F(a, c, x) = 1 + \frac{a x}{c} + \frac{a(a+1) x^2}{c(c+1) 2!} + \dots \quad (43-4)$$

و تابع گاما که بصورت زیر تعریف می‌شود [۹]

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (44-4)$$

در این مطالعه پروتون را به صورت یک سیستم مقید که از سه کوآرک تشکیل شده است در نظر گرفته‌ایم در این صورت  $D = 2N = 6$  تعداد ابعاد می‌باشد. و برای حالت پایه‌ی سیستم  $\nu = 0$  و

$l = 0$  می‌باشد در این صورت خواهیم داشت [۱۱ و ۱۵]

$$K = \pm(2l + D - 1)/2 = \pm 5/2 \quad (45-4)$$

که منفی آن برای حالت پایه می‌باشد. و برای تابع موج حالت پایه داریم [۲۸]

(46-4)

$$\psi(X) = r^{-\frac{5}{2}} \begin{pmatrix} F(r) \phi_{-|K|, (j_2)}(\hat{x}) \\ iG(r) \phi_{|K|, (j_2)}(\hat{x}) \end{pmatrix} =$$

$$2^\lambda \beta^{\lambda+1} \sqrt{\frac{\left(-\frac{5}{2} + \frac{mc}{\beta}\right)}{2mc^2 \Gamma(2\lambda+1)}} r^{-\frac{5}{2}+\lambda} e^{-\beta r} \begin{pmatrix} \sqrt{m+E} \phi_{-K, (j_2)}(x) \\ i\sqrt{m-E} \phi_{K, (j_2)}(x) \end{pmatrix}$$

که رابطه‌ی زیر نیز بین آنها برقرار است. [۲۸]



$$(\vec{\beta} \cdot \vec{x}) \phi_{K,(j\omega)}(\hat{x}) = r^{-1} \sum_{a=1}^{2N} \beta_a x^a \phi_{K,(j\omega)}(\hat{x}) = \phi_{-K,(j\omega)}(\hat{x})$$

$$(\vec{\beta} \cdot \vec{p}) r^{-N+1/2} \phi_{K,(j\omega)}(\hat{x}) = \sum_{a=1}^{2N} \beta_a p_a r^{-N+1/2} \phi_{K,(j\omega)}(\hat{x}) = iKr^{-N-1/2} \phi_{-K,(j\omega)}(\hat{x}) \quad (47-4)$$

با اعمال شرط مرزی روی دیواره‌ی کیسه (42-4) و با استفاده از (41-4) رابطه‌ی جدیدی بین جرم، انرژی و پارامتر  $c$  بدست می‌آید.

$$E = m \left[ 1 - \frac{4}{25} c^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad M_p + E = 2m \quad (48-4)$$

انرژی حاصل از فشار کیسه را با استفاده از تابع موج حالت پایه (46-4) محاسبه می‌کنیم. [4 و 12]

$$E_{bag} = VB \quad (49-4)$$

که در رابطه‌ی بالا  $V$  حجم کیسه و  $B$  فشار کیسه می‌باشد که از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است.

$$B = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( |F(r)|^2 - |G(r)|^2 \right) \quad (50-4)$$

با استفاده از تابع موج (46-4) خواهیم داشت

$$B = -2^{2\lambda} \beta^{2\lambda+2} m \left( \frac{\left( -\frac{5}{2} + \frac{mc}{\beta} \right)}{2mc^2 \Gamma(2\lambda+1)} \right) \left( (2\lambda-5)r^{-6+2\lambda} - 2\beta r^{-5+2\lambda} \right) \exp(-2\beta r) \quad (51-4)$$

که با قرار دادن  $r = \sqrt{3}R$  فشار در سطح کیسه محاسبه می‌شود. با قرار دادن انرژی حاصل از فشار کیسه در رابطه (48-4) رابطه جدیدی بین  $E$ ،  $c$ ،  $m$  و  $R$  ایجاد می‌شود. ولی همچنان یک معادله

کم داریم برای این منظور از مقدار  $\frac{g_A}{g_V} = 1.254$  برای پروتون استفاده می‌کنیم.

$$4 - 4 \frac{g_A}{g_V} \quad \text{برای پروتون}$$

برای بدست آوردن پارامتر  $c$  از مقدار عددی  $\frac{g_A}{g_V} = 1.254$  برای پروتون که از آزمایش بدست

آمده است، استفاده می‌کنیم. [11 و 17]

با استفاده از تابع موج پروتون ( ۴-۴۷ ) و رابطه‌ی زیر پارامتر  $c$  را محاسبه می‌کنیم. [۴]

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} \left\{ 1 - \frac{4}{3} \frac{\int_0^R |F(r)|^2 r^5 dr}{\int_0^R (|F(r)|^2 + |G(r)|^2) r^5 dr} \right\} \quad (۵۲-۴)$$

با انجام محاسبه مقدار :

$c = 0.66$  که در این صورت  $\alpha_s = 0.99$  می‌شود که در توافق با نتایج آزمایشگاهی می‌باشد که برای آن مقداری در حدود  $0 < \alpha_s \leq 1$  پیش بینی می‌کند. همچنین جرم کوارک  $302 \text{ Mev}$  محاسبه می‌شود که نتایج آزمایشگاهی مقداری تا  $350 \text{ Mev}$  را پیش بینی می‌کند. از طرفی انرژی سیستم برابر با  $E = 873.724 \text{ Mev}$  و انرژی بستگی  $E_{\text{binding}} = 32.138 \text{ Mev}$  خواهد بود. همچنین برای شعاع کیسه:

$$R = 1.6 \text{ fm} \quad (۵۳-۴)$$

بدست می‌آید. در بخش‌های بعدی با استفاده از مفهوم فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی، دیگر خواص استاتیکی پروتون یعنی شعاع باری و گشتاور مغناطیسی را، با توجه به تابع موج ( ۴-۴۷ ) محاسبه می‌کنیم.

#### ۴-۵- فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی در مختصات فوق کروی

فرم فاکتور الاستیک در مختصات فوق کروی و برای حالت متقارن  $L = 0$  از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود. [۲۶]

$$F_{00}(q^2) = \sum_{\nu\gamma} \int d\Omega Y_\nu(\Omega) Y_\nu(\Omega) \times \int_0^\infty dx x^3 \psi_{\nu\gamma}(x) j_0(\sqrt{2/3} q x \sin \theta) \bar{\psi}_{\nu\gamma}(x). \quad (۵۴-۴)$$

با استفاده از بسط توابع بسل کروی خواهیم داشت [۲۶]

$$F_{00}(q^2) \cong 1 - \frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle \quad (۵۵-۴)$$

که در رابطه‌ی بالا

$$\langle r^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle x^2 \sin 2\theta \rangle \cong \frac{1}{3} \langle x^2 \rangle \quad (۵۶-۴)$$

برای روابط بالا تابع موج به شکل زیر فرض شده است

$$\Psi(x, t, \Omega_\rho, \Omega_\lambda) = \psi_{\nu_\gamma}(x) Y_{[\nu_\rho, \nu_\lambda]}(\Omega) \quad (57-4)$$

فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی تبدیلات فوریه توزیع بار و گشتاور مغناطیسی هستند. برای فرم فاکتور الکتریکی در مختصات فوق کروی داریم [ ۵ و ۹ ]

$$G_E(q^2) = \int e^{i\vec{q} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} \hat{r}} \rho(r) r^5 dr \quad (58-4)$$

با در نظر گرفتن رابطه‌ی ( ۴ - ۴۱ ) داریم [ ۵ و ۹ و ۲۶ ]

$$G_E(q^2) = \int_0^R r^5 dr j_0(\sqrt{2/3}qr \sin \theta) [F^2(r) + G^2(r)] \quad (59-4)$$

که در آن از  $\rho(x) = |\psi|^2 = N^2(F^2(r) + G^2(r))$  استفاده کرده‌ایم و برای  $q=0$  خواهیم داشت

$$G_E(0) = \int r^5 dr \psi^\dagger \psi = 1 \quad (60-4)$$

با بسط توابع بسل کروی و در  $q$  های کوچک، به رابطه ( ۳ - ۲۹ ) خواهیم رسید. [ ۵ و ۹ ]

$$\langle r^2 \rangle = -6 \left( \frac{dG_E(q^2)}{dq^2} \right)_{q^2=0} \quad (61-4)$$

و سپس فرم فاکتور مغناطیسی [۲۵]

$$G_M(q^2) = \int e^{i\vec{q} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} \hat{r}} \mu r^5 dr = \int j_0(\sqrt{2/3}qr \sin \theta) \cos\left(q \frac{r}{\sqrt{3}} \theta\right) \mu r^5 dr \quad (62-4)$$

با توجه به رابطه  $\int j_0(qr) \cos \theta d(\cos \theta) = j_1(qr)$  بدست خواهیم آورد. [۹]

$$G_M(q^2) = -\frac{4M}{|\vec{q}|} \int_0^R r^5 dr j_1(qr) F(r) G(r) \quad (63-4)$$

و برای ممان مغناطیسی بدست می‌آوریم [ ۱۱ و ۱۷ و ۲۰ ]

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{e}{2M} G_M(q^2 = 0) = \frac{1}{2} \int \left( \frac{r}{\sqrt{3}} \hat{r} \times \vec{j} \right) r^5 dr \\ &= -\frac{2}{3} e \int_0^R r dr F(r) G(r) \end{aligned} \quad (64-4)$$

حال به جوابهای معادله دیراک در حضور پتانسیل  $-\frac{c}{r}$  ( ۴ - ۴۷ ) برمی‌گردیم و با جایگذاری در

( ۴ - ۶۳ ) و ( ۴ - ۵۹ ) بدست می‌آوریم:

$$G_E(q^2) = \exp(-0.1943q^2)(1+0.056q^2) \quad (۶۵-۴)$$

$$G_M(q^2) = 2.87 \sqrt{1 + \frac{q^2}{56.34}} \exp(-0.1943q^2) \quad (۶۶-۴)$$

اکنون با توجه به تابع موج بدست آمده در رابطه (۴۷-۴) می‌توانیم شعاع باری پروتون را با استفاده از رابطه‌ی [۱۱]

$$\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = N^2 \int_{bag} [ |F|^2 + |G|^2 ] r^7 dx \quad (۶۷-۴)$$

و با توجه به اینکه ثابت نرمالیزاسیون از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است [۱۵]

$$N^2 \int_0^R r^5 dr \psi^\dagger \psi = 1 \quad (۶۸-۴)$$

که با قرار دادن تابع موج (۴۸-۶) مقدار ضریب نرمالیزاسیون برای حالت پایه :

$$N^2 = 30833.628 \quad (۶۹-۴)$$

و لذا با داشتن مقدار ضریب نرمالیزاسیون برای شعاع باری پروتون داریم:

$$\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 0.83 \pm 0.056 fm \quad (۷۰-۴)$$

که مقدار تجربی آن  $\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 0.88 fm$  می باشد.

برای محاسبه گشتاور مغناطیسی پروتون از رابطه‌ی (۶۴-۴) داریم:

$$\mu_p = 2.87 \pm 0.028 n.m \quad (۷۱-۴)$$

که این مقدار با مقدار تجربی محاسبه شده یعنی  $\mu_p = 2.79 n.m$  اختلاف کمی دارد. [۱۶ و ۱۹]

## بحث و نتیجه

نتایج بدست آمده در این مدل نشان دهنده‌ی میزان تاثیر گذاری پتانسیل رنگ در خواص استاتیکی پروتون می باشد. برای بهبود جوابها باید سایر پتانسیل‌های را که در برهم‌کنش بین کوارکها نقش دارند، در محاسبات وارد کنیم. چون کوارکها فرمیونهایی با اسپین ۱/۲ هستند، برای بررسی دقیق بر هم‌کنش‌ها باید اثر اسپین کوارکها را در نظر گرفت. در این مطالعه تاثیر پتانسیل برداری را در مقایسه با پتانسیل اسکالر بسیار ناچیز در نظر گرفته ایم، بطوری که آنرا در معادله‌ی دیراک صفر قرار می‌دهیم. پیشنهاد میشود، برای بهتر شدن مدل مورد مطالعه میزان تاثیر گذاری پتانسیل‌های اسکالر و برداری را، بصورت ضرایبی در معادله دیراک وارد کنیم. در اینصورت پیش بینی می‌شود، نتایج حاصل بهتر شود. از جمله پتانسیل‌های موثر، پتانسیل نوسانی و همچنین پتانسیل اسپین - اسپین و ایزو اسپین - اسپین می باشند. که می‌توان این پتانسیل‌ها را به صورت یک اختلال در نظر گرفت.

## منابع:

- ۱- جوشی، ا. و. ۱۳۷۲. مبانی نظریه گروهها برای فیزیکدانان. سریشهای، م. مشهد، انتشارات آستان قدس رضوی.
- ۲- ویدر، س. ۱۳۷۴. مبانی نظریه‌ی کوانتومی. گودرزی، ج. مشهد، انتشارات دانشگاه فردوسی
- 3- Griffiths, D.J. (1987). Introduction to Elementary Particles.
- 4- Close, F.E. (1979). An Introduction to Quarks and Partons.
- 5- Frauentfelder, H. & Henley, E.M. (1975). Subatomic Physics.
- 6- Halzen, F. & Martin, A.D. (1984). Quarks and Leptons: An Introductory course in modern particle physics.
- 7- Arfken, G. (1970). Mathematical Methods for Physicists, 2<sup>nd</sup> ed. Academic Press, New York.
- 8- Gross. (1994). Relativistic to Quantum Mechanich.
- 9- Tegen, R. & Brockmann, R. & Weise, W. (1982). Z.Phys.A: 307-339
- 10- Chodos, A. & Jaffe, R.L. & Weisskopf, V. (1974). Phys Rev D9:34-71.
- 11- Rajabi, A.A. (2004). Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, Vol, 28. No.A2.
- 12- Bhaduri, R.K. (1988). Models of the Nucleon from Quarks to Soliton.
- 13- Sakurai, J.J. (1982). Modern Quantum Mechanics.
- 14- Giannini, M. M. & Santopinto, E. & Vassallo, A. (2002). Nuclear Physics, A699: 308c-311c.
- 15- Rajabi, A. A. (2005). Few-Body Systems, 37, 197-213.
- 16- Mike, G. (1991). Gauge Field Theories, John Wiley.
- 17- Rajabi, A. A. (2003). Indian Journal of Pure and applied physics, 41, 89-94.
- 18- Giannini, M. M. & Santopinto, E. & Vassallo, A. (2003). Progress in Particle and Nuclear Physics, 50, 263-270.
- 19- Lan, I. F. & Wong, C. W. (1984). Nucl. Phys. A423, 397-409.
- 20- Rajabi, A. A. (2004). Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, Vol. 28, No. A2.
- 21- Kalashnikova, Yu.S. & Nefediev, A. (2000) Phys. Lett. B 492, 91.
- 22- Rajabi, A. A. (2006). Commun. Theor. Phys. (Beijing, China). Vol. 45, No.4.
- 23- Shojaei, M.R. & Rajabi, A.A. (2007). Iranian Journal of Physics Research, Vol.7, No. 2.
- 24- Parker, B. (1986). Search for a supertheory.
- 25- Plessas, W. (2006). Few-Body Systems Suppl, 0, 1-12.
- 26- Coelho, H.T. & Das, T.K. & Vallieres, M. (1977). Revista Brasileira de Fisics, Vol. 7, No. 2.

- 27- Giannini, M.M. & Santopinto, E. & Vassallo, A. (2005). ArXiv: nucl-th/0506033v1.
- 28- Xiao, Y.G & Zhong, Q.M, & Dong. S.H. (2002). ArXiv: physics/0209039v1.
- 29- Georgi, H. (1982). Lie Algebras in Particle Physics.
- 30- Cornwell, J. F. (1984). Group Theory in Physics. Vol. 2.
- 31- Santopinto, E. & Iachello, F. & Giannini, M.M. (1998). Eur. Phys. J. A1, 307-315.
- 32- Ferraris, M. & Giannini, M.M. & Pizzo, M. & santopinto, E. & Tiator, L. (1995). Physics Letters. B364, 231-238.
- 33- Thaller, B. (1992). The Dirac Equation. Springer-Verlag.

**Abstract**

The electromagnetic form factors of proton are calculated using the bag model wave functions. We take proton as a bag; contain three constituent quarks which interacting quarks in proton with color potential. In order to describe the three quark dynamics it is convenient to introduce the hyper spherical coordinates. We calculate the Dirac equation for proton contains three constituent quarks. Conserved angular momentum operators and their quantum numbers are discussed. The eigenfunctions of the total angular momentum are calculated for three – quark system in the bag model. The radial equations for a spherically symmetric system are derived.

**Keywords** - form factors, Proton, bag model, color potential, Dirac equation





Shahrood University of Technology

Thesis Title

Calculating the Form Factor of Proton with Bag Model and  
Interacting Color Potential

Thesis Advisor

Dr.Ali Akbar Rajabi

BY

Reza Eyni

Feb.2008