



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

---

تقدیم به:

همسرم، بخاطر تمام بزرگواری هایش

و

پدر و مادر مهربانم

---

با تشکر و قدردانی از:

استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمود پیامی شبستر بخاطر راهنمایی های سازنده و زحمات

بی دریغ و خالصانه شان در راستای به انجام رساندن این پایان نامه،

و همچنین:

دکتر علی اکبر رجبی، دکتر محمد ابراهیم قاضی، دکتر حسین موحدیان، دکتر مهرداد قمی نژاد،

و سرکار خانم بنین شاکری بخاطر همکاری های بیدریغ شان در انجام برخی محاسبات.

---

## محاسبه عددی حالت مقید سیستم سه ذره ای

---

## چکیده:

در این پایان نامه، معادلات انتگرالی فادیف برای سیستم سه نوکلئونی در نمایش امواج جزئی در فضای مومنتم با استفاده از پتانسیل مالفلیت- تیون (MT-5) حل شده و انرژی بستگی سیستم به دست آمده است. نتایج محاسبات نشان می دهد که سهم عمده انرژی بستگی را پایین ترین مرتبه تقریب تأمین می کند و تقریبهای مرتبه بالاتر تنها تصحیحاتی را به این انرژی اضافه می نمایند.

سیستمهای چند ذره ای، از جمله سیستمهای سه ذره ای، در بسیاری از زمینه ها و شاخه های فیزیک حضور دارند. به عنوان مثال می توان اتمهای کوچک، مولکولهای چند اتمی در فیزیک اتمی، نقطه های کوانتمی چند الکترونی در فیزیک حالت جامد، سیستمهای چند نوکلئونی در فیزیک هسته ای، کوارکهای سازنده نوکلئونها و غیره را نام برد. ویژگی پیچیده سیستمهای چند ذره ای در آن است که بسته به تعداد ذرات سازنده، رفتارهای متفاوتی از خود نشان می دهند. مزونها و باریونها، ذره آلفا و هسته تریتون، اتم He و اتم Be همگی دارای خواص فیزیکی متفاوتی هستند.

مهمترین علت این تفاوتها، حرکت همبسته ذرات و اصل طرد پائولی می باشد. به همین دلیل لازم است از روشهای خاصی جهت حل معادله شرودینگر استفاده شود. پراکندگی سه اتمی موضوع دیگری است که امروزه کاربرد فراوانی در دماهای خیلی پایین دارد. از جمله می توان به چگالش بوزه-انشتین اشاره کرد که در آن پراکندگی سه ذره ای اهمیت ویژه ای دارد.

در این پایان نامه، ما معادلات انتگرالی فادیف برای حالت مقید سیستم سه نوکلئونی به ازای پتانسیل مالفلیت-تیون (MT-5) را حل نموده و انرژی بستگی سیستم را در پایین ترین تقریب به روش تجزیه به امواج جزئی به دست آورده ایم. در محاسبات به خاطر پرهیز از پیچیدگی بیشتر، که از حوصله پایان نامه کارشناسی ارشد خارج است، از وارد کردن درجات آزادی اسپین خودداری کرده ایم. نتایج محاسبات نشان می دهد که سهم عمده این انرژی بستگی توسط پایین ترین تقریب داده می شود و تقریبهای مرتبه بالاتر تنها تصحیحاتی را اضافه می نمایند.

در فصل اول این پایان نامه، به معرفی مسئله سه ذره ای و اهمیت آن در فیزیک هسته ای پرداخته شده است. فصل دوم برخی مفاهیم مکانیک کوانتمی را مورد بحث قرار داده و عملگر مولر معرفی میشود. سپس هامیلتونی سیستم سه ذره ای در فضای مومنتم نوشته شده و معادلات فادیف برای ماتریس  $T$  و عملگر حلال به دست می آیند. فصل سوم معادلات فادیف برای حالت مقید سه ذره ای و نمایش آن در فضای مومنتم اختصاص دارد. در فصل چهارم حل معادلات همگن فادیف برای حالت مقید سه ذره ای با استفاده از تجزیه به امواج جزئی آورده شده است. فصل پنجم به روش عددی حل معادلات فادیف اختصاص یافته و بالاخره در فصل ششم نتایج محاسبات آمده است.

## فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه ای بر مسئله سه ذره ای

- ۱-۱- مشکلات نظریه..... ۱۲
- ۱-۱-۱- a- پراکندگی دو ذره بنیادی..... ۱۲
- ۱-۱-۱- b- پراکندگی ذرات مرکب بدون فروپاشی..... ۱۳
- ۱-۱-۱- c- فروپاشی سه ذره ای..... ۱۴
- ۲-۱- اهمیت مسئله سه ذره ای در فیزیک هسته ای..... ۱۶
- ۲-۱-۱- a- بر همکنش نوترون- نوترون..... ۱۷
- ۲-۱-۱- b- رفتار خارج از پوسته در نیروهای هسته ای..... ۱۷

فصل دوم: برخی مفاهیم مکانیک کوانتومی

- ۱-۲- مسئله دو ذره ای..... ۲۱
- ۱-۱-۲- هامیلتونین سیستم دو ذره ای..... ۲۱
- ۲-۱-۲- شرایط مرزی حالت پراکندگی..... ۲۲
- ۳-۱-۲- عملگر مولر..... ۲۳
- ۴-۱-۲- معادله حلال و معادله لیپمن- شوئیگر..... ۲۶
- ۵-۱-۲- ماتریس  $S$ ..... ۳۲
- ۶-۱-۲- ماتریس  $T$ ..... ۳۵
- ۷-۱-۲- رابطه یکانی..... ۳۷
- ۲-۲- مسئله سه ذره ای..... ۳۹
- ۱-۲-۲- هامیلتونین سیستم سه ذره ای و نمایش آن در فضای مومنتم..... ۳۹
- ۲-۲-۲- ویژگی طیف سیستم سه ذره ای..... ۴۶
- ۳-۲-۲- زیر سیستم های دو ذره ای در سیستم سه ذره ای..... ۴۷

- ۴-۲-۲- شرایط مرزی و عملگر مولر..... ۵۱
- ۵-۲-۲- معادلهٔ حلال و معادلهٔ لیپمن- شوئیگر برای سیستم سه ذره ای..... ۵۴
- ۶-۲-۲- معادلات فادیف برای ماتریس  $T$ ..... ۵۷
- ۷-۲-۲- معادلات فادیف برای عملگر حلال..... ۶۳

فصل سوم: معادلات فادیف برای حالت مقید سه ذره ای

- ۱-۳- معادلات فادیف برای حالت مقید سه ذره ای..... ۶۵
- ۲-۳- نمایش در فضای مومنتم معادلهٔ فادیف..... ۶۸

فصل چهارم: حل معادلات همگن فادیف برای حالت مقید با استفاده از تجزیه به امواج جزئی

- ۱-۴- تجزیه به امواج جزئی..... ۷۸

فصل پنجم: روش عددی حل معادلات فادیف

- ۱-۵- حل عددی معادلهٔ انتگرالی  $t_1$ ..... ۹۷
- ۲-۵- منفصل کردن معادلهٔ انتگرالی  $\psi(p, q)$ ..... ۱۰۰
- ۳-۵- حل عددی معادلهٔ فادیف..... ۱۰۲
- ۱-۳-۵- روش نسبت..... ۱۰۳

فصل ششم: نتایج محاسبات

- ۱-۶- بررسی عملگر گذار  $t_1$ ..... ۱۱۱
- ۱-۱-۶- بررسی رفتار  $v_l(p, p')$  برای پتانسیل مالفلیت- تیون..... ۱۱۲
- ۲-۶- بررسی تغییرات ویژه مقدار  $\lambda$  بر حسب تغییرات تعداد نقاط مش..... ۱۲۸



پیوست ها:

پیوست ۱: پیدا کردن فرمول درون یابی درجه ۳ ..... ۱۳۱

پیوست ۲: زیر برنامه محاسبه ریشه های  $x_i$  و وزن های گائوس  $w_i$  ..... ۱۳۸

فهرست منابع ..... ۱۳۹

## فصل اوّل

مقدمه ای بر مسئله سه ذره ای

مسئله کوانتومی سه ذره ای به حرکت سه ذره تحت اثر یک پتانسیل برهمکنش می پردازد و اساس آن معادله شرودینگر مربوط به سه ذره می باشد:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (1-1)$$

که در آن  $H$  عبارتست از:

$$H = -\sum_{i=1}^3 \frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + \sum_{i>j=1}^3 v(i, j) \quad (1-2)$$

در اینجا  $v(i, j)$  یک پتانسیل دو ذره ای می باشد.

البته می توان یک پتانسیل سه ذره ای  $v(i, j, k)$  را نیز در نظر گرفت ولی اگر ذرات را بتوان نقطه ای در نظر گرفت، می توان از  $v(i, j, k)$  صرف نظر نمود.

بسیاری از وضعیت ها و فرآیندها در فیزیک اتمی، هسته ای و ذرات بنیادی وجود دارد که لازم است در آنها به سیستم سه ذره ای پرداخته شود که از آن جمله عبارتند از:

(a) پراکندگی الکترون از اتم هیدروژن،

(b) هسته  $^3H$  و  $^3He$ ،

(c) پراکندگی نوکلئون - دوترون،

(d) واپاشی فوتونی  $^3H$  و  $^3He$ ،

(e) پراکندگی مزون از دوترون ها،

(f) پراکندگی یک مزون از یک نوکلئون که در نهایت بصورت یک حالت مقید مزون - نوکلئون در نظر گرفته می شود،

(g) سیستم های چند ذره ای که می توان آنها را به طور تقریبی بصورت سیستم های سه ذره ای در نظر گرفت، بعنوان نمونه می توان از

پراکندگی دوترون ها از  $^4He$  که با فروپاشی دوترون همراه است، و پراکندگی پروتون ها از  $^{11}B$  که با فروپاشی به سه ذره  $\alpha$  صورت می گیرد، نام برد.

اما مشکلات موقعی پیش می آید که یک واکنش منتهی به حالت نهایی شود که در آن سه ذره آزاد وجود داشته باشد. این مورد در پراکندگی پروتون- دوترون به ازای انرژی مرکز جرم بیشتر از

$$p + d \begin{cases} p+d \\ p+p+n \end{cases} \quad (2/22 \text{ Mev}) \text{ اتفاق می افتد:}$$

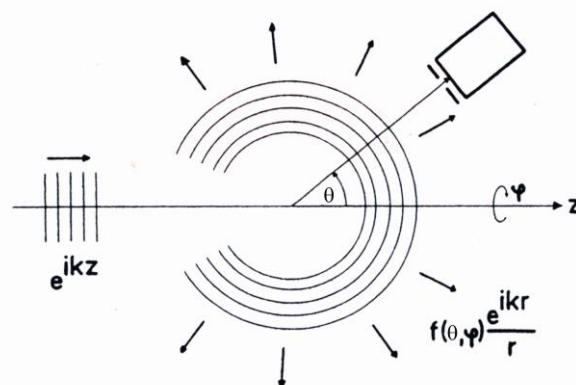
به علت یک چنین فرآیندهایی است که مسئله سیستم سه ذره ای مورد توجه خاص قرار می گیرد. در سیستمهای پراکندگی سه ذره ای، تا زمانی که فقط کانال الاستیک داریم بدست آوردن جواب های دقیق هنوز کار ساده ای است ولی با داشتن کانالهای دیگر مثل کانالهای واپاشی و باز آرائی<sup>(۱)</sup> کار بسیار پیچیده می شود.

### ۱-۱- مشکلات نظریه

وقتی که ما در پی یافتن مشکلات مسئله سه ذره ای هستیم بهتر است ابتدا ببینیم که چرا مسئله دو ذره ای نسبتاً ساده است.

### ۱-۱-۱- پراکندگی دو ذره بنیادی

در حالت اولیه<sup>(۲)</sup>، یک پاکت موج که پرتابه را توصیف می کند، به یک موج که هدف را در سیستم آزمایشگاه توصیف می کند، نزدیک می شود. از نظر سیستم مرکز جرم یک پاکت موج به مبدائی نزدیک می شود که در آن بر همکنش روی می دهد.



شکل ۱-۱- پراکندگی دو ذره در سیستم مرکز جرم

(1) Rearrangement  
(2) Initial state

شرط اولیه یا شرط مرزی اساساً یک شرط وابسته به زمان است ولی می توان به حدی رفت که در آن انرژی پاکت موج تیز است و می توان بستگی زمانی را جدا کرد و در نتیجه شرط مرزی فوق از نوع مستقل از زمان می شود.

حل پراکندگی شامل یک موج تخت  $e^{ikz}$  است که شارذرات ورودی را توصیف می کند، شار ذرات پراکنده نشده، بعلاوه یک موج کروی  $f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$  که شار ذرات پراکنده شده را توصیف می کند، می باشد.

وقتی از اسپین ها صرف نظر شود دامنه  $f(\theta, \varphi)$  بستگی به زاویه محوری  $\varphi$  ندارد و موج کروی، شکل  $f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$  را خواهد داشت. ذرات وارد یک پیوستار با جهت  $(\theta)$  یا  $(\theta, \varphi)$  می شوند که به ازای پتانسیلهای کوتاه برد می توان تنها توسط یک حاصل جمع از تعداد کمی امواج جزئی آن را توصیف نمود. در اینجا، به علت پایستگی انرژی، مومنتم نسبی  $\vec{k}$  برای هر جهتی یکسان می باشد.

### ۱-۱-۱- پراکندگی ذرات مرکب بدون فروپاشی

بر خلاف حالت (a)، محصولات این واکنش می تواند متفاوت از ذرات اولیه باشد، بعنوان نمونه می توان واکنشهای زیر را در نظر گرفت:

$$n + \alpha \left\langle \begin{matrix} n + \alpha \\ d + t \end{matrix} \right.$$

اما در این مورد نیز جواب پراکندگی دارای یک شکل مجانبی است که نوعاً مربوط به یک مسئله دو ذره ای می باشد. این جواب شامل یک موج تخت و امواج کروی بیرون رونده است:

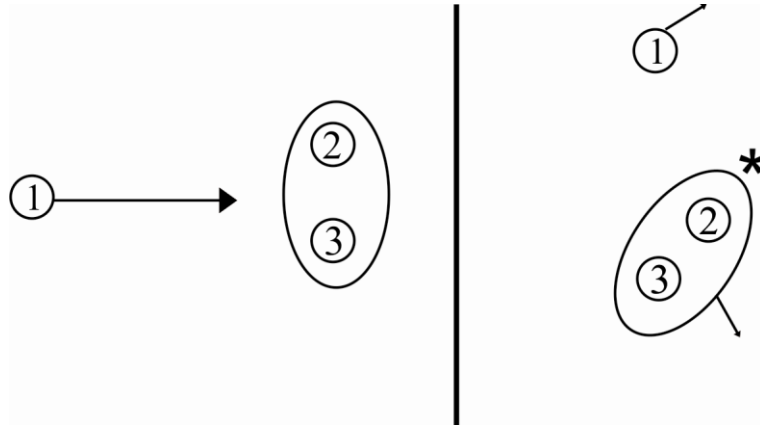
$$\psi(\infty) = \varphi(1) e^{ik_1 z_1} + \varphi(1) f(\theta_1, \varphi_1) \frac{e^{ik_1 r_1}}{r_1} + \varphi(2) g(\theta_2, \varphi_2) \frac{e^{ik_2 r_2}}{r_2} \quad (1-3)$$

ولی حالا، به خاطر وجود دو امکان واپاشی، دو موج کروی وجود دارد و هر جمله در یک تابع  $\varphi(i)$  ضرب می شود که حرکت درونی اجزاء را توصیف می کند. وقتی اسپین ذرات به حساب آورده می شود باید مومنتم زاویه ای اربیتالی و اسپینی را با هم ترکیب کنیم تا امواج جزئی برای مومنتم زاویه ای کل داده شده بدست آیند. شرط مرزی هنوز شکل ساده مستقل از زمان را دارد و برای پتانسیلهای



پراکندگی می تواند در سه مرحله انجام شود:

در گام اول یک زیر سیستم (۲ و ۳) در یک حالت برانگیخته تشکیل می شود (شکل ۱-۳).



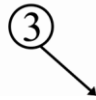
شکل ۱-۳- اولین گام یک فرآیند فروپاشی: یک حالت برانگیخته دو ذره ای بدست می آید.

اندکی بعد، این حالت برانگیخته واپاشی کرده و یکی از ذرات، مثلاً ذره (۲) در جهت ذره بیرون رونده (۱) خارج می شود (شکل ۱-۴).



شکل ۱-۴- دومین گام: واپاشی حالت برانگیخته

سپس ذره (۲) توسط ذره (۱) به دام می افتد و یکبار دیگر پراکنده می شود (شکل ۱-۵).



شکل ۵-۱- سومین گام: پراکندگی دوباره

این فرآیند « باز پراکندگی »<sup>(۱)</sup> نامیده می شود.

مواردی که ذکر شد نشان می دهد که بر همکنشی که حالت نهایی را تشکیل می دهد به یک ناحیه کوچک حول مرکز جرم محدود نمی شود، بلکه می تواند در هر جایی از فضای سه بعدی واقع شود. از این دو مشکلی که ذکر شد مشکل سومی نتیجه می شود:

ما در اینجا دیگر نمی توانیم مانند حالت دو ذره ای با یک روش ساده یک شرط مرزی مستقل از زمان را بنا کنیم. هر جا که شک و تردیدی برایمان به وجود آمد باید به شرط مرزی وابسته به زمان فیزیکی برگردیم و مطمئن شویم که شرط مرزی فوق با آن سازگار است یا نه. مشکل مربوط به شرط مرزی مستقل از زمان به آسانی با استفاده از پرسش زیر قابل درک است:

وقتی دو تا از سه ذره از مرکز جرم مشترک سیستم سه ذره ای دور می شوند و یکی از ذرات به آن نزدیک می شود، این حالت یک حالت بیرون رونده است یا، یک حالت داخل شونده؟ در اینجا می توان (با استفاده از هارمونیکهای ابرکروی و یا پاکت های موج و یا تجزیه تابع موج به اجزا) حالت های بیرون رونده را ساخت، ولی این کار به سادگی حالت دو ذره ای نمی باشد.

### ۱-۲- اهمیت مسئله سه ذره ای در فیزیک هسته ای

سؤال: چه جنبه ای از مسئله سه ذره ای در فیزیک هسته ای از اهمیت برخوردار است؟

(1) Rescattering



یک مسئله حل نشده مربوط به فیزیک هسته ای و عموماً برای فیزیک ذرات بنیادی مسئله برهمکنش قوی است. آزمایشها فقط انرژیهای بستگی و سطح مقطع ها را به ما می دهند. با استفاده از معادله شرودینگر می توان پتانسیلهای پدیده شناختی بدست آورد که اساس فیزیک هسته ای نظری را تشکیل می دهند. امید می رود که در مراحل بعدی این گونه پتانسیلها را بتوان از یک نظریه بنیادی بدست آورد.

برای تعیین یک پتانسیل پدیده شناختی، لازم است که رابطه ای بین برهمکنش و اطلاعات قابل اندازه گیری برقرار شود. به عبارت دیگر، ضروری است که معادله شرودینگر حل شود. برای دو نوکلئون این امر نسبتاً آسان است. اما داده های دو نوکلئونی اطلاعات کافی را در بر ندارند و علاوه بر این در عمل انجام همه آزمایشهای دو نوکلئونی انجام پذیر نمی باشد. بعنوان مثال پراکندگی نوترون- نوترون را می توان نام برد.

در نهایت برای بدست آوردن یک پتانسیل نوکلئون- نوکلئون به اندازه کافی خوب، باید علاوه بر اطلاعات دو نوکلئونی، اطلاعات سه نوکلئونی را نیز در نظر گرفت. جزئیاتی که در ذیل می آید، اهمیت به سزایی دارند:

#### ۱-۲-۱- برهمکنش نوترون- نوترون

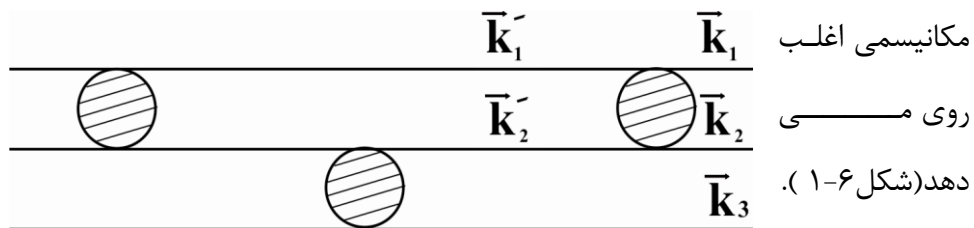
این برهمکنش برای چک کردن تقارن بار و ناوردایی آیزواسپین در نیروهای هسته ای لازم است. این برهمکنش در اطلاعات تریتون، در سطح مقطع پراکندگی الاستیک  $n-d$  و در بعضی اطلاعات مربوط به واکنش فروپاشی  $n-d$  وجود دارد. در واکنش فروپاشی  $n-d$  می توان شمارنده ها را طوری چید و انرژی های  $E_3$  و  $E_4$  را طوری انتخاب کرد که رویداد هایی اندازه گیری شوند که در آنها مومنتم نسبی دو نوترون خیلی کوچک باشد. نوترون ها مدت نسبتاً طولانی تری با یکدیگر برهمکنش می کنند (" برهمکنش حالت نهایی ") و این برهمکنش طولانی مدت خودش را در سطح مقطع پراکندگی نشان می دهد.

#### ۱-۲-۱- رفتار خارج از پوسته در نیروهای هسته ای

در پراکندگی دو ذره ای، هرگاه قبل و بعد از پراکندگی به اندازه کافی زمان جهت اندازه گیری انرژی وجود داشته باشد، انرژی پایسته است. به محض اینکه ذرات خارج از ناحیه برهمکنش قرار گیرند،

مومنتم های مجاز دو ذره توسط قانون پایستگی انرژی محدود می شوند. تمام رویدادهای ممکن بر روی یک ابرکره در فضای مومنتم قرار دارند که به آن پوسته انرژی<sup>(۱)</sup> می گویند. این رویدادها رویدادهای روی پوسته نامیده می شوند. هر گاه بتوان سیستم دو ذره ای را تنها در طول یک بازه زمانی کوتاه  $\Delta t$  بصورت منزوی در نظر گرفت در حالیکه خارج از این بازه زمانی با محیط اطرافش بر همکنش کند در این صورت به خاطر اصل عدم قطعیت، قانون بقای انرژی در اینجا بطور دقیق صادق نیست. فرآیندهای پراکندگی که در طول بازه زمانی  $\Delta t$  اتفاق می افتند و قانون بقای انرژی را نقض می کنند احتمال رخ دادنشان صفر نیست. چنین فرآیندهایی فرآیندهای خارج از پوسته انرژی یا بطور مختصر، رویدادهای خارج پوسته نامیده می شوند.

در پراکندگی سه ذره ای که در آن پراکندگی زیر سیستم دو ذره ای در حضور ذره سوم مختل می شود، چنین



شکل ۶-۱- باز پراکندگی سه ذره ای. انرژی زیر سیستم (۱ و ۲) در حالت میانی  $(\vec{k}_1, \vec{k}_2')$  و در حالت اولیه  $(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$  لازم نیست حتماً مساوی باشد.

وقتی که در یک فرآیند سه ذره ای، دو ذره بر همکنش کنند لزومی ندارد که حالت نهایی، انرژی یکسانی با انرژی حالت اولیه داشته باشد زیرا معمولاً اتفاق می افتد که حالت نهایی فقط برای یک مدت بسیار کوتاهی دوام می آورد و سپس تحت تأثیر ذره سوم نابود می شود. معادله شرودینگر، درست همانطور که رابطه عدم قطعیت را نتیجه می دهد، اثرات خارج پوسته را نیز به خوبی توضیح می دهد.

به هر حال در پراکندگی دو ذره ای معمولاً به اثرات خارج پوسته هیچ توجهی نمی شود چرا که فرض می شود پتانسیل بر همکنش داده شده است. در این حالت معادله شرودینگر دامنه پراکندگی روی پوسته و همچنین خارج پوسته را تعریف می کند. اما به محض اینکه مسئله پراکندگی معکوس را در نظر بگیریم، یعنی اگر بخواهیم پتانسیلی را بدست آوریم که در داده های پراکندگی صدق کند، بر ما روشن می شود که پراکندگی دو ذره ای حاوی اطلاعات کافی جهت تعیین یک پتانسیل منحصر بفرد نمی باشد. تعداد بیشماری پتانسیل می توان یافت که در پراکندگی دو ذره ای دارای دامنه های روی پوسته یکسان باشند ولی دامنه های خارج پوسته آنها متفاوت باشد.

در این صورت می گوئیم که خواص خارج پوسته این پتانسیلها متفاوت از هم است.

در مسئله سه ذره ای خواص خارج پوسته پتانسیل بر همکنش، نقش مهمی را ایفا می کند و بنابراین اطلاعات سه ذره ای در مسئله پراکندگی معکوس اهمیت فراوانی دارند.

## فصل دوّم

برخی مفاهیم مکانیک کوانتومی

در این فصل ما ابتدا پراکندگی دو ذره ای را در فرمولبندی عمومی تر مورد بررسی قرار می دهیم و در این راستا مفاهیم کوانتومی مهمی که در بررسی مسئله پراکندگی بکار می رود را معرفی می کنیم و سپس به سیستم سه ذره ای می پردازیم و نشان خواهیم داد که کدام نتایج را می توان برای پراکندگی سه ذره ای نیز بکار برد و بعد اینکه در چه مواردی مشکل بروز می کند.

## ۲-۱- مسئله دو ذره ای

### ۲-۱-۱- هامیلتونین سیستم دو ذره ای

هامیلتونین برای دو ذره ای که توسط پتانسیل  $v$  برهمکنش می کنند شکل زیر را دارد:

$$h^1 = \frac{\vec{k}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{k}_2^2}{2m_2} + v \quad (2-1)$$

که در اینجا  $\vec{k}_1$  و  $\vec{k}_2$  مومنتم ها و  $m_1$  و  $m_2$  جرم های ذرات هستند. برای یک پتانسیل که تحت انتقال ناوردا است حرکت مرکز جرم را می توان بوسیله وارد کردن مومنتم مرکز جرم  $\vec{k}$  و مومنتم نسبی  $\vec{p}$  به ترتیب زیر جدا سازی کرد:

$$\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \quad (2-2)$$

$$\vec{p} = \frac{m_2 \vec{k}_1 - m_1 \vec{k}_2}{m_1 + m_2} \quad (2-3)$$

$$h^1 = \frac{\vec{k}^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + v \quad (2-4)$$

که در آن جرم کاهش یافته  $\mu$  به صورت زیر داده می شود:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2-5)$$

بعلت ناوردایی هامیلتونین تحت انتقال، حرکت مرکز جرم یک حرکت آزاد است و ویژه حالت مومنتم می باشد. ما کاری به این قسمت هامیلتونی نداریم و توجه خود را به هامیلتونی حرکت نسبی معطوف می کنیم:

$$h = \frac{\bar{p}^2}{2\mu} + v \equiv h_0 + v \quad (2-6)$$

### ۲-۱-۲- شرایط مرزی حالت پراکندگی

پراکندگی دو ذره ای توسط معادله وابسته به زمان شرودینگر توصیف می شود. با انتخاب  $\hbar = 1$  داریم:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_a^{(+)}(t) = h \psi_a^{(+)}(t) \quad (2-7)$$

علامت (+) نشان دهنده آن است که سیستم قبل از شروع پراکندگی در یک حالت مشخص قرار داشته و تدریجاً با گذشت زمان پراکنده می شود. در اینصورت علامت (-) به معنای آن خواهد بود که پس از پراکندگی یک باریکه جمع شده خواهیم داشت که به طور تجربی نمی توان آن را مشاهده کرد. اندیس  $a$  اشاره به تمام خواص حالت اولیه دارد. جواب معادله (۲-۷) عبارتست از:

$$\psi_a^{(+)}(t) = e^{-iht} \psi_a^{(+)} \quad (2-8)$$

که در اینجا  $\psi_a^{(+)}$  یک پکت موج مستقل از زمان می باشد. شرط مرزی یا شرط اولیه را می توان به طور لفظی این طور بیان کرد که:

این حالت پراکنده  $\psi_a^{(+)}(t)$  از یک پکت موج به وجود آمده که در زمان بینهایت گذشته آزاد بوده و ویژگی های آن توسط اندیس  $a$  مشخص می شود. آزاد به این معنا است که دامنه در ناحیه بر همکنش که در آن  $v \neq 0$  است، صفر می شود. از نظر ریاضی این شرط به روش زیر فرمولبندی میشود:

یک پکت موج مرجع معرفی می شود که در زمان  $t=0$  شکل  $\phi_a$  را دارد و بستگی زمانی اش توسط هامیلتونین ذره آزاد یعنی  $h_0$  توصیف می شود:

$$\phi_a(t) = e^{-ih_0 t} \phi_a \quad (2-9)$$

سپس ملزم می کنیم که پکت موج  $\psi_a^{(+)}$  در حالت حدی بی نهایت گذشته بر پکت موج ذره آزاد  $\phi_a$  منطبق باشد. از آنجایی که پکت موج ها با گذشت زمان تضعیف می شوند، بی معنا خواهد بود اگر ملزم کنیم دو تابع نقطه به نقطه بر هم منطبق باشند ولی در عوض ملزم می کنیم که نرم تفاوت آنها صفر شود یعنی:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\psi_a^{(+)}(t) - \phi_a(t)\| = 0$$

و از روابط (۲-۸) و (۲-۹) استفاده می کنیم:

۲۳

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|e^{-iht} \psi_a^{(+)} - e^{-ih_0 t} \phi_a\| = 0 \quad (۲-۱۰)$$

این حد برای نرم،<sup>(۱)</sup> یک حد قوی نامیده می شود که ما در ادامه آن را توسط "s-lim" نمایش می دهیم. شرطی را که ما برای  $\psi_a^{(+)}$  قرار دادیم یک اشکال دارد و آن این است که یک پاکت موج که در یک زمان محدود، مقید به آزمایشگاه می شود در زمان بینهایت گذشته نسبتاً پهن می شود (مگر اینکه تولید آن در فرمولبندی منظور شود).

با استفاده از یک پاکت موج آزاد مرجع  $\phi_a$  که آن هم در زمان  $t = 0$  محدود به آزمایشگاه است این مشکل از سر راه برداشته می شود. باید توجه داشته باشیم که شرط مذکور یک محدودیت خاصی را برای برد پتانسیل تحمیل می کند. از لحاظ ریاضی این محدودیت اینگونه بیان می شود که حد معادله (۲-۱۰) برای هر پتانسیل دلخواه وجود ندارد [۱]. معادله فوق را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\psi_a^{(+)} = s - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iht} e^{-ih_0 t} \phi_a \equiv \Omega^{(+)} \phi_a \quad (۲-۱۱)$$

که در آن حد معادله (۲-۱۱) به معنای حد قوی است (نرم تفاوت قسمت های سمت راست و چپ معادله صفر می شود).

معادله (۲-۱۱) عملگری را تعریف می کند که عملگر مولر<sup>(۲)</sup>  $\Omega^{(+)}$  نامیده می شود.

### ۲-۱-۳- عملگر مولر

عملگر مولر  $\Omega^{(+)}$  وقتی که به حالت آزاد  $\phi_a$  اثر می کند حالت پراکنده  $\psi_a^{(+)}$  را می دهد. مطابق معادله (۲-۱۱) داریم:

$$\Omega^{(\pm)} = s - \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iht} e^{-ih_0 t} \quad (۲-۱۲)$$

ما در اینجا تعریف عملگر  $\Omega^{(-)}$  را نیز گنجانده ایم. این عملگر حالت پراکنده  $\psi_a^{(-)}(t)$  را می دهد که به ازای  $t \rightarrow +\infty$  به حالت آزاد  $\phi_a(t)$  می رود. اگر چه حالت های  $\psi_a^{(-)}(t)$  را نمی توان به طور تجربی مهیا کرد ولی برای توصیف دقیق یک اندازه گیری مورد نیاز می باشند. از تعریف عملگر مولر  $\Omega^{(\pm)}$  نتیجه می شود که برای هر زمان متناهی  $\tau$  رابطه:

(۱) چون در نرم انتگرال گیری روی تمام فضا داریم، در نتیجه معادله (۲-۱۰) یک شرط معنا دار می باشد.

(2) Møller

۲۴

$$s - \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{ih(t+\tau)} e^{-ih_0(t+\tau)} = \Omega^{(\pm)} = e^{ih\tau} \Omega^{(\pm)} e^{-ih_0\tau} \quad (2-13)$$

نیز معتبر است. با مشتق گیری از طرفین این رابطه خواهیم داشت:

$$0 = \frac{d\Omega^{(\pm)}}{d\tau} = e^{ih\tau} (h\Omega^{(\pm)} - \Omega^{(\pm)}h_0) e^{-ih_0\tau}$$

در نتیجه " رابطه جابجایی " زیر بدست می آید:

$$h\Omega^{(\pm)} = \Omega^{(\pm)}h_0 \quad (2-14)$$

قلمرو عملگر مولر فضای هیلبرت حالت‌های آزاد، و یا به عبارت دقیق تر فضای حالت‌های آزاد انتگرال پذیر مجذوری می باشد. البته می توان این قلمرو را توسعه داد تا حالت‌های با مومنتم تیز را نیز در بر بگیرد. برای این منظور لازم است که یک عمل حد گیری به سمت انرژی های تیز بر روی پاکت های موج انجام شود. این گسترش موجب پدید آمدن برخی مشکلات مفهومی می شود چرا که حالا پاکت موج بی نهایت بزرگ شده و بر همکنش همیشه حضور دارد و در نتیجه بررسی ریاضی آن مشکل می شود. البته این حقیقت که، اعمال یک عملگر مولر بر روی یک حالت بهنجارش ناپذیر منجر به مسائل همگرا نمی شود، نباید ما را غافل کند. فادیف<sup>(۱)</sup> نشان داد که این گسترش در مورد دسته بزرگی از پتانسیلها منجر به نتایج صحیح می شود [۲]. بنابراین ما مجاز هستیم که ویژه حالت‌های مومنتم  $|\vec{p}\rangle$  را به جای پاکت های موج  $\phi_a$  بکار بگیریم و عملگر مولر  $\Omega^{(\pm)}$  را روی آنها اثر دهیم.

به این ترتیب ما حالت‌های پراکنده  $|\vec{p}\rangle^{(\pm)}$  را بدست می آوریم که در آن  $|\vec{p}\rangle^{(+)}$  مربوط به حالتی است که در فصل اول بحث شد، یعنی حالتی که شامل یک موج تخت است بعلاوه یک موج کروی بیرون رونده. حالت‌های پراکنده  $|\vec{p}\rangle^{(\pm)}$  دارای یک انرژی تیز  $E$  هستند درست مثل همان حالت‌های آزاد  $|\vec{p}\rangle$  که انرژی تیز  $\frac{\vec{p}^2}{2\mu}$  دارند. این دو انرژی یکسان هستند و می توان با استفاده از رابطه جابجایی (۲-۱۴)

آن را نشان داد:



$$\begin{aligned}
 h|\bar{p}\rangle^{(\pm)} &= h\Omega^{(\pm)}|\bar{p}\rangle = \Omega^{(\pm)}h_0|\bar{p}\rangle = \Omega^{(\pm)}\frac{\vec{p}^2}{2\mu}|\bar{p}\rangle \\
 &= \frac{\vec{p}^2}{2\mu}\Omega^{(\pm)}|\bar{p}\rangle = \frac{p^2}{2\mu}|\bar{p}\rangle^{(\pm)}
 \end{aligned}
 \tag{۲-۱۵}$$

(1) Faddeev

۲۵

حال می‌توانیم بطور کلی بیان کنیم که: عملگرهای مولر، فضای هیلبرت آزاد سره و ناسره را به حالت‌های پراکندگی متناظر  $h$ ، تصویر می‌کنند. حالت‌های مقید  $h$  با استفاده از این نگاشت بدست نمی‌آیند، چرا که آنها متعلق به گستره عملگر مولر نیستند. بنابراین عملگرهای مولر یونیتاری نیستند بلکه فقط ایزومتريک هستند. عملگرهای مزدوج هرمیتی:  $\Omega^{(\pm)\dagger}$  وقتی که روی حالت‌های پراکندگی اثر میکنند نگاشت را معکوس میکنند و وقتی روی حالت‌های مقید  $h$ ،  $|\psi_n\rangle$  اثر می‌کنند نتیجه صفر می‌شود. این موضوع را می‌توان از رابطه زیر دید:

$$\langle \Omega^{(\pm)\dagger} \psi_n | \bar{p} \rangle = \langle \psi_n | \Omega^{(\pm)} \bar{p} \rangle = \langle \psi_n | \bar{p} \rangle^{(\pm)} = 0$$

علت صفر شدن عبارت سمت راست این است که  $|\psi_n\rangle$  و  $|\bar{p}\rangle^{(\pm)}$  هر دو ویژه حالت‌های  $h$  هستند منتهی با ویژه مقادیر متفاوت، در نتیجه مطابق قضیه اساسی مکانیک کوانتمی این دو حالت بر هم عمود می‌شوند.

از آنجایی که عبارت سمت چپ رابطه بالا صفر است یعنی:

$$\langle \Omega^{(\pm)\dagger} \psi_n | \bar{p} \rangle = 0$$

و حالت‌های  $|\bar{p}\rangle$  مجموعه کاملی را تشکیل می‌دهند در نتیجه داریم:

$$\Omega^{(\pm)\dagger} |\psi_n\rangle = 0$$

حد زمانی که در تعریف عملگر مولر وجود دارد را می‌توان بوسیله یک حد اویلر جایگزین کرد:

$$\Omega^{(\pm)} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iht} e^{-ih_0 t} = s\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm \varepsilon \int_{\mp\infty}^0 e^{\pm\varepsilon t} e^{iht} e^{-ih_0 t} dt \tag{۲-۱۶}$$

چگونگی حدگیری اویلر را می‌توان با اعمال آن روی یک تابع دلخواه  $f(t)$  که به ازای  $t \rightarrow -\infty$  مقدار آن  $f_\infty$  می‌شود، درک نمود.

براحتی دیده می‌شود که:

$$\int_{-\infty}^0 \varepsilon e^{\varepsilon t} dt = e^{\varepsilon t} \Big|_{-\infty}^0 = (1-0) = 1$$

و بازه های زمانی متناهی در انتگرال:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 \varepsilon e^{\varepsilon t} f(t) dt$$

سهمی ندارند.

۲۶

سهم زمان های بی نهایت دور برابر  $f_\infty$  است، چنانکه می توان با جایگزینی زیر آنرا دید:

$$\varepsilon t = x$$

$$\begin{cases} dx = \varepsilon dt \\ t = \frac{x}{\varepsilon} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^0 \varepsilon e^{\varepsilon t} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 e^x f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx$$

وقتی که  $\varepsilon$  به سمت صفر میل می کند تابع  $f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  به سمت  $f_\infty$  می رود و می توان آن را در بیرون

انتگرال قرار داد.

معرفی حدگیریِ اویلر جایی است که در نظریه دو ذره ای ما زمان ناپدید می شود. در قسمت بعدی خواهیم دید که با استفاده از این روش یک معادله انتگرالی مستقل از زمان بدست می آید که دقیقاً شرط مرزی که در فصل (۱) بحث شد را ارضا می کند.

### ۲-۱-۴- معادله حلال و معادله لیپمن - شوئینگر

عبارتی را که برای عملگر مولر بدست آورده ایم (۲-۱۶) در همان قالب، کمک چندانی نمی کند، زیرا نمی توان انتگرال گیری را انجام داد (از آنجا که  $h$  و  $h_0$  جابجا نمی شوند دو تابع نمایی موجود در

انتگراند را نمی توان با هم تلفیق کرد یعنی:  $(e^{iht} e^{-ih_0 t} \neq e^{i(h-h_0)t})$ .

اما از آنجایی که ما مجاز هستیم تا عملگر مولر را روی موج تخت اثر دهیم می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} |\bar{p}\rangle^{(\pm)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm \varepsilon \int_{\mp\infty}^0 dt e^{\pm \varepsilon t} e^{iht} e^{-iEt} |\bar{p}\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm \varepsilon \int_{\mp}^0 dt e^{i(h-E \mp i\varepsilon)t} |\bar{p}\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon (E \pm i\varepsilon - h)^{-1} |\bar{p}\rangle \end{aligned} \quad (2-17)$$

با این حساب ما یک رابطه مهم بین جواب های پراکندگی  $|\bar{p}\rangle^{(\pm)}$  و تابع حلال یا گرین:

$$g(z) = (z - h)^{-1} \quad (2-18)$$

پیدا کرده ایم. رابطه:

$$|\bar{p}\rangle^{(\pm)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon g(E \pm i\varepsilon) |\bar{p}\rangle$$

گذار از نظریه وابسته به زمان به نظریه مستقل از زمان را نشان می دهد.

۲۷

رابطه زیر را برای تابع گرین داریم:

$$z - z' = g^{-1}(z) - g^{-1}(z')$$

این رابطه را از سمت راست در عبارت  $g(z)g(z')$  ضرب می کنیم داریم:

$$(z - z') g(z)g(z') = g^{-1}(z) g(z)g(z') - g^{-1}(z') g(z)g(z') \quad (2-20a)$$

$$(z - z') g(z)g(z') = g(z') - g(z)$$

و یا اگر بجای  $g(z)g(z')$  در  $g(z')g(z)$  ضرب کنیم داریم:

$$(z - z') g(z')g(z) = g(z') - g(z) \quad (2-20b)$$

که این اولین معادله حلال می باشد. با استفاده از تعریف عملگر حلال آزاد:

$$g_0(z) \equiv (z - h_0)^{-1} \quad (2-21)$$

و رابطه:

$$v = h - h_0 = g_0^{-1}(z) - g^{-1}(z)$$

می توان معادله دوم حلال را به شکل زیر بدست آورد:

$$g(z) = g_0(z) + g_0(z) v g(z) \quad (2-22a)$$

این معادله را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$g(z) = g_0(z) + g(z) v g_0(z) \quad (2-22b)$$

حال ما از این اتحاد برای بدست آوردن یک معادله انتگرالی برای حالت های پراکندگی از روی معادله

(2-19) استفاده می کنیم.

از معادله (2-19) داریم:

$$|\bar{p}\rangle^{(\pm)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon g(E \pm i\varepsilon) |\bar{p}\rangle$$

که اگر به جای  $g(E \pm i\varepsilon)$  از رابطه ای که بدست آوردیم قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$|\vec{p}\rangle^{\pm} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon \{ g_0(E \pm i\varepsilon) + g_0(E \pm i\varepsilon) v g(E \pm i\varepsilon) \} |\vec{p}\rangle \quad (2-23)$$

برای ساده سازی جمله اول از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$g_0(E \pm i\varepsilon) = \frac{1}{(E \pm i\varepsilon - h_0)}$$

۲۸

$$\begin{aligned} \rightarrow \pm i\varepsilon g_0(E \pm i\varepsilon) |\vec{p}\rangle &= \pm i\varepsilon (E \pm i\varepsilon - h_0)^{-1} |\vec{p}\rangle \\ &= \pm i\varepsilon (E \pm i\varepsilon - E)^{-1} |\vec{p}\rangle \\ &= \pm i\varepsilon (\pm i\varepsilon)^{-1} |\vec{p}\rangle = |\vec{p}\rangle \end{aligned} \quad (2-24)$$

و برای جمله دوم هم داریم:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon g(E \pm i\varepsilon) |\vec{p}\rangle = |\vec{p}\rangle^{(\pm)}$$

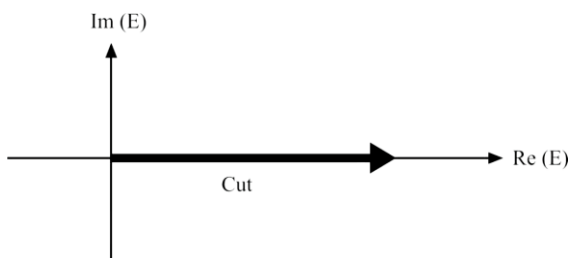
در نهایت رابطه مورد نظر به شکل زیر در می آید:

$$|\vec{p}\rangle^{(\pm)} = |\vec{p}\rangle + g_0(E \pm i\varepsilon) v |\vec{p}\rangle^{(\pm)} \quad (2-25)$$

معادله فوق معادله لیپمن- شوئینگر برای حالت‌های پراکندگی  $|\vec{p}\rangle^{(\pm)}$  می باشد. در نمایش فضای پیکربندی [۳] حدگیری روی  $\varepsilon$  به رابطه زیر منجر می شود:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_0(\vec{r}, \vec{r}'; E \pm i\varepsilon) &\equiv \langle \vec{r} | g_0(E \pm i\varepsilon) | \vec{r}' \rangle \\ &\equiv \frac{-\mu}{2\pi} \frac{e^{\pm i\sqrt{2\mu E} |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned} \quad (2-26)$$

عملگر آزاد  $g_0(E)$  به دلیل وجود جمله  $\sqrt{2\mu E}$  دارای یک نقطه انشعاب در  $E = 0$  می باشد و برای این که تک مقداری باشد بایستی یک برش از  $E = 0$  به سمت  $+\infty$  در نظر بگیریم:



و حد  $\varepsilon$  به ما می گوید که روی کدام قسمت برش باید قرار بگیریم تا شرط مرزی ارضا شود. علامت

(+) متناظر است با شرط مرزی فیزیکی که در قسمت (۲-۱) بیان شد.

وقتی معادله لیپمن - شوئینگر را در فضای پیکربندی بنویسیم داریم:

$$\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle^{(+)} = \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle - \int d\vec{r}' \frac{\mu}{2\pi} \frac{e^{i\sqrt{2\mu E} |\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} v(\vec{r}') \langle \vec{r}' | \vec{p} \rangle^{(+)} \quad (2-27)$$

همانطور که می بینیم جمله اول در سمت راست یک موج تخت است و جمله دوم به ازای  $r$  های بزرگ یک موج کروی بیرون رونده می باشد، یعنی شرط مرزی وابسته به زمان فیزیکی منجر به یک

۲۹

معادله انتگرالی شده که شرط مرزی مستقل از زمانی که در ابتدای فصل توضیح داده شد را در خود جای داده است.

حال ما باید بفهمیم که: آیا هسته معادله انتگرالی ما یک عملگر فشرده هست یا نه؟ [۴] اگر فشرده باشد می توان از نظریه فرد هولم<sup>(۱)</sup> و همه روشهای استاندارد موجود برای حل آن استفاده کرد.

ساده ترین روش برای اینکه بفهمیم آیا هسته فوق فشرده است یا نه این است که تحقیق کنیم آیا نرم اشمیت آن متناهی است یا نه، که این شرط کافی می باشد.

نرم اشمیت برای عملگر  $K(\vec{r}, \vec{r}')$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\| K \|_s = [Tr(K^\dagger K)]^{\frac{1}{2}} = \left[ \int d\vec{r} d\vec{r}' |K(\vec{r}, \vec{r}')|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-28)$$

اما در معادله انتگرالی (۲-۲۷) هسته انتگرال عبارتست از:

$$K(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{e^{i\sqrt{2\mu z} |\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} v(\vec{r}') \quad (2-29)$$

که در آن  $z = E + i\varepsilon$  است. مربع نرم اشمیت آن عبارتند از:

$$\| K \|_s^2 = \frac{\mu^2}{4\pi^2} \iint d\vec{r} d\vec{r}' \frac{e^{-2\text{Im}(\sqrt{2\mu z})|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} |v(\vec{r}')|^2$$

زیرا داریم:

$$\begin{aligned} \| K \|_s^2 &= \left(-\frac{\mu}{2\pi}\right)^2 \iint d\vec{r} d\vec{r}' \frac{e^{-i\sqrt{2\mu z}|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{i\sqrt{2\mu z}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} |v(\vec{r}')|^2 \\ &= \frac{\mu^2}{4\pi^2} \iint d\vec{r} d\vec{r}' \frac{e^{-2\text{Im}(\sqrt{2\mu z})|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} |v(\vec{r}')|^2 \end{aligned}$$

برای انجام این انتگرال تغییر متغیر می دهیم:

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \rightarrow d\vec{R} d\vec{r}' = d\vec{r} d\vec{r}'$$

$$\|K\|_s^2 = \frac{\mu^2}{4\pi^2} \int d\vec{R} \frac{e^{-2\text{Im}(\sqrt{2\mu z})R}}{R^2} \int d\vec{r}' |v(\vec{r}')|^2 \quad (2-30)$$

(1) Fredholm

۳۰

$$d\vec{R} = 4\pi R^2 dR$$

$$\rightarrow \|K\|_s^2 = \frac{\mu^2}{4\pi^2} \int_0^\infty 4\pi R^2 dR \frac{e^{-2\text{Im}(\sqrt{2\mu z})R}}{R^2} \int d\vec{r}' |v(\vec{r}')|^2$$

در نهایت بدست می آوریم:

$$\|K\|_s^2 = \frac{\mu^2}{2\pi \text{Im}(\sqrt{2\mu z})} \int d\vec{r}' |v(\vec{r}')|^2$$

می توان با جایگزینی زیر نرم اشمیت را به شکل دیگری هم نوشت:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\mu z} &= \sqrt{2\mu(E+i\varepsilon)} = \sqrt{2\mu E} \left(1+i\frac{\varepsilon}{E}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \sqrt{2\mu E} \left(1+i\frac{\varepsilon}{2E}\right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Im} \sqrt{2\mu(E+i\varepsilon)} = \frac{\sqrt{2\mu E}}{2E} \varepsilon = \varepsilon \sqrt{\frac{\mu}{2E}}$$

$$\rightarrow \|K\|_s^2 = \frac{\mu^2}{2\pi\varepsilon \sqrt{\frac{\mu}{2E}}} \int d\vec{r}' |v(\vec{r}')|^2$$

واضح است که نرم اشمیت فقط وقتی می تواند متناهی باشد که:

اولاً: انتگرال روی مربع قدر مطلق پتانسیل وجود داشته باشد، که در این صورت پتانسیلهای کولنی و هسته سخت کنار گذاشته می شوند.

دوماً: قسمت موهومی  $\sqrt{2\mu z}$  مخالف صفر باشد، که در این صورت همان انرژی های پراکندگی که مورد نظر ما هستند را کنار می گذارد.

این حقیقت که نرم اشمیت در حد  $\varepsilon \rightarrow 0$  واگرا می شود، دقیقاً مرتبط است با این حقیقت که ما از فضای هیلبرت  $L_2$  توابع انتگرال پذیر مجذوری خارج شده ایم. اما همانطور که قبلاً هم بیان شده

وجود یک نرم اشمیت متناهی برای هسته انتگرال تنها یک شرط کافی برای فشردگی است نه یک شرط لازم برای آن.

۳۱

لاولیس<sup>(۱)</sup> نشان داده [۵] که هسته این معادله انتگرالی در فضای باناخ  $C_1^{(2)}$  (فضای توابع پیوسته محدود)، علی رغم واگرا بودن نرم اشمیت، فشرده است و این قضیه به این سؤال که آیا معادله لیپمن - شوئینگر یک جواب یکتا دارد پاسخ می دهد. برای عملگرهای فشرده بیان فرد هولم معتبر می باشد:

یک معادله انتگرالی غیرهمگن با هسته فشرده به ازای هر ناهمگنی یا یک جواب یکتا دارد در حالیکه معادله همگن متناظرش فقط یک جواب بدیهی مساوی صفر دارد، یا معادله انتگرالی همگن حد اقل یک جواب غیر بدیهی دارد در حالیکه معادله ناهمگن یا غیر قابل حل است و یا جواب هایش یکتا نیست.

حال ما در اینجا نشان می دهیم که اولین انتخاب برای مورد ما کاربرد دارد. معادله همگن متناظر با معادله (۲-۲۷) را در نظر می گیریم:

$$|\psi\rangle = g_0(E + i\varepsilon) v |\psi\rangle \quad (2-31)$$

اگر به ازای انرژی های مثبت  $E > 0$  یک جواب برای  $|\psi\rangle$  وجود داشته باشد این جواب باید معادله شرودینگر را ارضا کند. این موضوع را می توان به آسانی با ضرب کردن معادله (۲-۳۱) از سمت چپ در  $g_0(E + i\varepsilon)^{-1}$  اثبات کرد و به عنوان یک جواب معادله شرودینگر این  $|\psi\rangle$  باید احتمال را ابقا کند که نمی تواند، زیرا  $|\psi\rangle$  فقط شامل امواج بیرون رونده می باشد (به مطالب بیان شده بعد از معادله (۲-۲۷) توجه کنید). بنابراین معادله همگن به ازای  $E > 0$  جواب ندارد و در نتیجه جواب معادله ناهمگن (۲-۲۷) یکتا است. به ازای  $E < 0$  معادله همگن دارای جواب است و حالت های مقید را می دهد. در ادامه خواهیم دید که در این مرحله برای مورد سیستم سه ذره ای یک مشکل وجود خواهد داشت.

برای تکمیل بحث پیرامون معادله لیپمن- شوئینگر سیستم دو ذره ای نمایش آن را در فضای مومنتم می نویسیم:

$$\langle \vec{k} | \vec{p} \rangle^{(\pm)} = \langle \vec{k} | \vec{p} \rangle + (E \pm i\varepsilon - \frac{k^2}{2\mu})^{-1} \int d\vec{k}' \langle \vec{k} | v | \vec{k}' \rangle \langle \vec{k}' | \vec{p} \rangle^{(\pm)} \quad (2-32)$$

(1) Lovelace      (2) Banach

۳۲

در این نمایش هسته شکل زیر را دارد:

$$K(\vec{k}, \vec{k}') = (E + i\varepsilon - \frac{k^2}{2\mu})^{-1} \langle \vec{k} | v | \vec{k}' \rangle \quad (2-33)$$

به ازای  $\varepsilon \rightarrow 0$  هسته فوق دارای یک قطب روی محور حقیقی است که به واگرا شدن نرم اشمیت آن می انجامد.

به وضوح یک چنین تکینگی نسبتاً بی ضرر است چون لاولیس توانست نشان دهد [۵] که با وجود این تکینگی، هسته معادله انتگرالی فشرده است. بعنوان یک مثال دیگر از یک عملگر تکینه، عملگر واحد را در نظر می گیریم که به نظر می رسد تکینگی آن بی ضرر باشد:

$$\langle \vec{p} | 1 | \vec{p}' \rangle = \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2-34)$$

این عملگر نرم اشمیت متناهی ندارد زیرا انتگرال مربع تابع  $\delta$  واگرا است. برخلاف معادله (۲-۳۳) تکینگی آنقدر در اینجا قوی است که از فشردهگی جلوگیری می کند. این امر عواقبی جدی در مسئله سه ذره ای خواهد داشت.

## ۲-۱-۵- ماتریس S

ماتریس S یک رابط بین جوابهای پراکندگی و داده های قابل اندازه گیری می باشد. برای مشخص شدن مفهوم ماتریس S حالت پراکنده  $\psi_a^{(+)}(t)$  را در نظر می گیریم که مطابق معادله (۲-۸) از یک پاکت موج آزاد  $\phi_a(t)$  تحوّل می یابد و سؤال می کنیم که احتمال یافتن یک پاکت موج آزاد دیگر  $\phi_b(t)$  در  $\psi_a^{(+)}(t)$  در حد  $t \rightarrow +\infty$  چقدر است؟

درست همانطور که  $\phi_a(t)$  حالت اولیه را توصیف می کند  $\phi_b(t)$  نیز حالت نهایی را توصیف می کند.

چیزی که ما به دنبال آن هستیم عبارتست از (مربع قدرمطلق) عنصر ماتریسی:



$$S_{ba} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \phi_b(t) | \psi_a^{(+)}(t) \rangle \quad (2-35)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle e^{-ih_0 t} \phi_b | e^{-iht} \psi_a^{(+)} \rangle \quad (2-36)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle e^{iht} e^{-ih_0 t} \phi_b | \psi_a^{(+)} \rangle \quad (2-37)$$

با استفاده از معادلات (۲-۱۱) و (۲-۱۲) داریم:

۳۳

$$\begin{cases} \psi_a^{(+)} \equiv \Omega^{(+)} \phi_a \\ \Omega^{(\pm)} = s - \lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{iht} e^{-ih_0 t} \end{cases}$$

$$\rightarrow S_{ba} = \langle \Omega^{(-)} \phi_b | \Omega^{(+)} \phi_a \rangle \quad (2-38)$$

$$S_{ba} = \langle \psi_b^{(-)} | \psi_a^{(+)} \rangle \quad (2-39)$$

$$S_{ba} = \langle \phi_b | \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(+)} | \phi_a \rangle \quad (2-40)$$

با استفاده از ویژه حالت‌های مومنتم بجای پاکت های موج بدست می آوریم:

$$S_{\bar{p}' \bar{p}} = \langle \bar{p}' | \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(+)} | \bar{p} \rangle \quad (2-41)$$

بنابراین ماتریس S نمایش عملگر  $\hat{S}$  :

$$\hat{S} = \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(+)} \quad (2-42)$$

در فضای مومنتم می باشد.

برای انجام حد گیری هایی که در ماتریس S وجود دارد به معادله (۲-۳۶) بر می گردیم که برای

انرژی های نیز عبارت بود از:

$$S_{\vec{p}' \vec{p}} = \langle \vec{p}' | \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(+)} | \vec{p} \rangle$$

$$\begin{cases} \Omega^{(-)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{iht} e^{-ih_0 t} \\ \Omega^{(-)\dagger} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{+ih_0 t} e^{-iht} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow S_{\vec{p}' \vec{p}} &= \langle \vec{p}' | \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{+ih_0 t} e^{-iht} \right) \Omega^{(+)} | \vec{p} \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \vec{p}' | e^{ih_0 t} e^{-iht} \Omega^{(+)} | \vec{p} \rangle \end{aligned}$$

$$\rightarrow S_{\vec{p}' \vec{p}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{i(E'-E)t} \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle^{(+)} \quad (2-43)$$

برای حفظ عمومیت مسئله، فرض می کنیم که دو انرژی فوق متفاوت هستند:

$$(E' = \frac{p'^2}{2\mu}) \neq (E = \frac{p^2}{2\mu}) \quad (2-44)$$

در نتیجه فاز صفر نمی شود. از طرفی از معادله (2-19) داریم:

$$|\vec{p}\rangle^{(+)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon g(E + i\varepsilon) |\vec{p}\rangle$$

۳۴

اگر به جای  $|\vec{p}\rangle^{(+)}$  قرار دهیم بدست می آوریم:

$$S_{\vec{p}' \vec{p}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon e^{i(E'-E)t} \langle \vec{p}' | g(E + i\varepsilon) | \vec{p} \rangle \quad (2-45)$$

عملگر حلال در یک معادله انتگرالی صدق می کند که خیلی شبیه به معادله لیپمن - شوئینگر است (معادلات (2-22a) و (2-25) را ملاحظه کنید). بنابراین نمایش در فضای مومنتم آن قطب هایی دارد (معادله (2-32) را ملاحظه کنید). حال ما می خواهیم این قطب ها را از عنصر ماتریسی استخراج کنیم و حد گیری نماییم. با قرار دادن عبارت مربوط به  $g(z)$  از روی معادله (2-22 b) در معادله a) (2-22) داریم:

$$\begin{aligned} g(z) &= g_0(z) + g_0(z) v [g_0(z) + g(z) v g_0(z)] \\ &\equiv g_0(z) + g_0(z) t(z) g_0(z) \end{aligned} \quad (2-46)$$

بنابراین عملگر حلال به یک عملگر  $t(z)$  مربوط شده که تکینگی کمتری نسبت به  $g(z)$  دارد:

$$t(z) \equiv v + v g(z) v \quad (2-47)$$

حالا تکینگی های سینماتیکی  $g(z)$  به صراحت خود را نشان می دهند،

$$\begin{aligned}
\langle \bar{p}' | g(z) | \bar{p} \rangle &= \langle \bar{p}' | g_0(z) | \bar{p} \rangle + \langle \bar{p}' | g_0(z) t(z) g_0(z) | \bar{p} \rangle \\
&= \langle \bar{p}' | (z - h_0)^{-1} | \bar{p} \rangle + \langle \bar{p}' | (z - h_0)^{-1} t(z) (z - h_0)^{-1} | \bar{p} \rangle \\
&= \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p})}{z - \frac{p^2}{2\mu}} + \frac{\langle \bar{p}' | t(z) | \bar{p} \rangle}{(z - \frac{p'^2}{2\mu})(z - \frac{p^2}{2\mu})} \tag{۲-۴۸}
\end{aligned}$$

مقادیر  $z = E + i\varepsilon$  و  $E = \frac{p^2}{2\mu}$  را در رابطه بالا قرار می دهیم:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{p}' | \hat{g}(z) | \bar{p} \rangle &= \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p})}{\frac{p^2}{2\mu} + i\varepsilon - \frac{p^2}{2\mu}} + \frac{\langle \bar{p}' | t(E + i\varepsilon) | \bar{p} \rangle}{(\frac{p^2}{2\mu} + i\varepsilon - \frac{p'^2}{2\mu})(\frac{p^2}{2\mu} + i\varepsilon - \frac{p^2}{2\mu})} \\
\rightarrow \langle \bar{p}' | g(E + i\varepsilon) | \bar{p} \rangle &= \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p})}{i\varepsilon} + \frac{\langle \bar{p}' | t(E + i\varepsilon) | \bar{p} \rangle}{(E - E' + i\varepsilon) i\varepsilon}
\end{aligned}$$

حال این نتیجه را در رابطه (۲-۴۵) مربوط به ماتریس S قرار می دهیم:

۳۵

$$\begin{aligned}
S_{\bar{p}' \bar{p}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon e^{i(E'-E)t} \langle \bar{p}' | g(E + i\varepsilon) | \bar{p} \rangle \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon e^{i(E'-E)t} \left\{ \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p})}{i\varepsilon} + \frac{\langle \bar{p}' | t(E + i\varepsilon) | \bar{p} \rangle}{(E + i\varepsilon - E') i\varepsilon} \right\} \tag{۲-۴۹}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow S_{\bar{p}' \bar{p}} = \delta(\bar{p}' - \bar{p}) - \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{i(E'-E)t}}{E' - E - i\varepsilon} \langle \bar{p}' | t(E + i\varepsilon) | \bar{p} \rangle$$

که حد موجود در جمله دوم را می توان با استفاده از رابطه:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\varepsilon} = 2\pi i \delta(\omega) \tag{۲-۵۰}$$

ساده کرد:

$$S_{\bar{p}' \bar{p}} = \delta(\bar{p}' - \bar{p}) - 2\pi i \delta\left(\frac{p'^2}{2\mu} - \frac{p^2}{2\mu}\right) \langle \bar{p}' | t(E + i\varepsilon) | \bar{p} \rangle \tag{۲-۵۱}$$

۲-۱-۶- ماتریس T

دیدیم که تکینگی های عملگر حلال منجر به دو تابع  $\delta$  در ماتریس S شد. در رابطه (۲-۵۱):

\*جملهٔ اول توصیف کنندهٔ آن است که هیچ پراکندگی صورت نگرفته است زیرا  $\bar{p}' = \bar{p}$  یعنی مومنتم نهایی ذره برابر مومنتم اولیهٔ آن است و از آنجا که یک موج تخت دارای گسترهٔ بینهایت است تعداد بینهایت زیاد از ذرات بدون اینکه منحرف شوند از مرکز پراکندگی عبور می کنند.  
\*تابع  $\delta$ ی دوّم بخاطر پایستگی انرژی است.

تمام اطلاعات در مورد فرآیند پراکندگی در ماتریس  $T$  وجود دارد و بخاطر همین موضوع سطح مقطع دیفرانسیلی که از روی ماتریس  $T$  به شکل زیر تعریف می شود پر اطلاعات ترین مشاهده پذیر در مسئلهٔ پراکندگی از یک پتانسیل می باشد:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\pi)^4 \mu^2 \left| \langle \bar{p}' | t(E + i\epsilon_0) | \bar{p} \rangle \right|^2 \quad (2-52)$$

در اینجا حالت  $|\bar{p}\rangle$  انرژی و جهت باریکه را تعریف می کند و حالت  $|\bar{p}'\rangle$  جهتی را مشخص می کند که شمارنده در آن قرار دارد. البته بخاطر پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{p'^2}{2\mu} = \frac{p^2}{2\mu} = E \quad (2-53)$$

لازم به ذکر است که رابطهٔ (۲-۴۷) ماتریس  $T$  خارج از پوسته را نیز تعریف می کند که در آن داریم:

۳۶

آن داریم:

$$\frac{p'^2}{2\mu} \neq \frac{p^2}{2\mu} \neq E \quad (2-54)$$

البته هیچ اطلاعات دو ذره ای وجود ندارد که مربوط به ماتریس  $T$  خارج از پوسته باشد، ولی در مسئلهٔ پراکندگی سه ذره ای وضعیت متفاوت است. از آنجا که سطح مقطع مستقیماً از روی ماتریس  $T$  بدست می آید بهتر است که یک رابطهٔ انتگرالی برای خود  $t(z)$  بدست آوریم. اگر بجای  $g(z)$  در رابطهٔ (۲-۲۲a) از رابطهٔ (۲-۴۶) قرار دهیم با کمی محاسبات بدست می آوریم:

$$t(z) = v + v g_0(z) t(z) \quad (2-55)$$

ولی اگر از اول بجای رابطهٔ (۲-۲۲a) از رابطهٔ (۲-۲۲b) استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$t(z) = v + t(z) g_0(z) v \quad (2-56)$$

در یک فضای نمایش، این معادلات معادلات انتگرالی برای ماتریس  $T$  هستند.

همهٔ معادلات انتگرالی این فصل [(۲-۲۲) و (۲-۲۵) و (۲-۵۶)] دارای هستهٔ انتگرالی یکسانی هستند:

$$\begin{cases} K(z) = g_0(z) v \\ K^\dagger(z^*) = v g_0(z) \end{cases}$$

برخی روابط مفید برای ماتریس T:

از قرار دادن رابطه (۲-۵۵) در رابطه (۲-۴۷) بدست می آوریم:

$$g_0(z) t(z) = g(z) v \quad (2-57a)$$

حال اگر از (۲-۵۶) در رابطه (۲-۴۷) قرار دهیم بدست می آوریم:

$$t(z) g_0(z) = v g(z) \quad (2-57b)$$

و همینطور از (۲-۵۵) داریم:

$$t(z) = v + v g_0(z) t(z) \quad (2-58a)$$

$$\rightarrow [1 - v g_0(z)] t(z) = v \quad \rightarrow t(z) = [1 - v g_0(z)]^{-1} v$$

و از (۲-۵۶) هم داریم:

$$t(z) = v + t(z) g_0(z) v \quad (2-58b)$$

$$\rightarrow t(z) [1 - g_0(z) v] = v \quad \rightarrow t(z) = v [1 - g_0(z) v]^{-1}$$

از رابطه (۲-۵۸a) و (۲-۵۶) هم بدست می آوریم:

۳۷

$$[1 - v g_0(z)]^{-1} = 1 + t(z) g_0(z) \quad (2-59a)$$

و بالاخره از روابط (۲-۵۸b) و (۲-۵۶a) هم بدست می آوریم:

$$[1 - g_0(z) v]^{-1} = 1 + g_0(z) t(z) \quad (2-59b)$$

### ۲-۱-۷- رابطه یکانی

برای یک پتانسیل هرمیتی یک قانون پایستگی شار احتمال وجود دارد و پیامد این موضوع آن است

که ماتریس S باید یونیتاری باشد یعنی:

$$S^\dagger S = 1 \quad (2-60)$$

برای اثبات این ادعا، داریم:

$$S_{\vec{p}' \vec{p}} = \langle \vec{p}' | \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(+)} | \vec{p} \rangle$$

$$= {}^{(-)} \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle^{(+)}$$

اما داریم:

$$\begin{cases} \sum |b\rangle\langle b| + \int d\bar{p} |\bar{p}\rangle^{(+)(+)} \langle \bar{p}| = 1 \\ \sum |b\rangle\langle b| + \int d\bar{p} |\bar{p}\rangle^{(-)(-)} \langle \bar{p}| = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\bar{p}\rangle^{(+)} = 1 |\bar{p}\rangle^{(+)} &= \left( \sum |b\rangle\langle b| + \int d\bar{p}' |\bar{p}'\rangle^{(-)(-)} \langle \bar{p}'| \right) |\bar{p}\rangle^{(+)} \\ &= \int d\bar{p}' |\bar{p}'\rangle^{(-)(-)} \langle \bar{p}' | \bar{p} \rangle^{(+)} \end{aligned}$$

با ضرب طرفین از سمت چپ در  $\langle \bar{p}'' |$  و با استفاده از رابطه زیر که به سادگی اثبات می شود:

$$\langle \bar{p}'' | \bar{p} \rangle^{(+)} = \delta(\bar{p}'' - \bar{p}) \quad (2-60a)$$

نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \delta(\bar{p}'' - \bar{p}) &= \int d\bar{p}' S_{\bar{p}'' \bar{p}'}^\dagger S_{\bar{p}' \bar{p}} \\ &= (S^\dagger S)_{\bar{p}'' \bar{p}} \equiv \langle \bar{p}'' | S^\dagger S | \bar{p} \rangle \end{aligned}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$S^\dagger S = 1$$

## ۳۸

حال که ثابت شد ماتریس  $S$  یونیتاری است می توان پیامدهای آن را برای ماتریس  $T$  بررسی کرد. ما می خواهیم طوری به مسئله نگاه کنیم که برای مسئله سه ذره ای هم مناسب است [۶]. از معادله

$$t(z) = v + v g_0(z) t(z) \quad (2-55) \text{ داریم:}$$

از سمت راست در  $t^{-1}(z)$  و از سمت چپ در  $v^{-1}$  ضرب می کنیم:

$$v^{-1} t(z) t^{-1}(z) = v^{-1} v t^{-1}(z) + v^{-1} v g_0(z) t(z) t^{-1}(z)$$

$$v^{-1} = t^{-1}(z) + g_0(z)$$

$$\rightarrow t^{-1}(z) = v^{-1} - g_0(z) \quad (2-61)$$

چنانکه قبلاً گفته شد  $g_0(z)$  در صفحه مختلط دارای یک برش در جهت مثبت محور حقیقی انرژی است، در نتیجه مطابق رابطه (۲-۶۱)،  $t^{-1}(z)$  و بالتبع  $t(z)$  نیز همان برش را دارند. اگر  $z$  را یکبار  $E + i\varepsilon$  و یک بار دیگر  $E - i\varepsilon$  بگیریم در واقع دو مقدار در بالا و پایین خط برش در نظر گرفته ایم

که تفاضل  $t(z)$  به ازای این دو مقدار، مقدار ناپیوستگی را می دهد.

$$(2-62a)$$

$$\begin{cases} t^{-1}(E+i\varepsilon) = v^{-1} - g_0(E+i\varepsilon) \\ t^{-1}(E-i\varepsilon) = v^{-1} - g_0(E-i\varepsilon) \end{cases} \quad (2-62b)$$

$$\rightarrow t^{-1}(E+i\varepsilon) - t^{-1}(E-i\varepsilon) = -g_0(E+i\varepsilon) + g_0(E-i\varepsilon) \quad (2-63)$$

با استفاده از اولین معادله حلال بدست می آوریم:

$$g_0(E-i\varepsilon) - g_0(E+i\varepsilon) = 2i\varepsilon [(E-h_0)^2 + \varepsilon^2]^{-1} \quad (2-64)$$

و با استفاده از رابطه:

$$\pi \delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon (x^2 + \varepsilon^2)^{-1} \quad (2-65)$$

در حد  $\varepsilon \rightarrow 0$  رابطه یونیتاری زیر را بدست می آوریم:

$$t(E-i\varepsilon) - t(E+i\varepsilon) = 2\pi i t(E+i\varepsilon) \delta(E-h_0) t(E-i\varepsilon)$$

از رابطه  $t(z) = v + v g(z) v$  داریم:

۳۹

$$\begin{aligned} [t(z)]^\dagger &= v^\dagger + [v g(z) v]^\dagger \\ &= v^\dagger + v^\dagger [g(z)]^\dagger v^\dagger \\ &= v + v g(z^*) v = t(z^*) \\ \rightarrow [t(E+i\varepsilon)]^\dagger &= t(E-i\varepsilon) \end{aligned}$$

اگر این نتیجه را در رابطه قبلی قرار دهیم داریم:

$$t^\dagger(E+i\varepsilon) - t(E+i\varepsilon) = 2\pi i t(E+i\varepsilon) \delta(E-h_0) t^\dagger(E+i\varepsilon)$$

یا:

$$t(E+i\varepsilon) - t^\dagger(E+i\varepsilon) = -2\pi i t(E+i\varepsilon) \delta(E-h_0) t^\dagger(E+i\varepsilon) \quad (2-66)$$

در نمایش مومنتم، برای جهت رو به جلو داریم:

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \vec{p} | t(E + i\varepsilon) | \vec{p} \rangle &= -\pi \int d\vec{p}'' \delta(E - \frac{p''^2}{2\mu}) \left| \langle \vec{p} | t(E + i\varepsilon) | \vec{p}'' \rangle \right|^2 \\ &= -\pi \mu p \int d\hat{p}'' \left| \langle \vec{p} | t(E + i\varepsilon) | \vec{p}'' \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

$$|\vec{p}| = |\vec{p}''| = \sqrt{2\mu E} \quad (2-67)$$

$$\rightarrow \text{Im} \langle \vec{p} | t(E + i\varepsilon) | \vec{p} \rangle = -\frac{P}{16\pi^3 \mu} \sigma_{total} \quad (2-68)$$

این همان قضیه معروف اپتیکی است [۷] که قسمت موهومی دامنه رو به جلو را به سطح مقطع کل مربوط می کند.

### ۲-۲- مسئله سه ذره ای

حال به سیستم سه ذره ای می پردازیم. ابتدا مانند سیستم دو ذره ای هامیلتونین آن را بدست می آوریم.

### ۲-۲-۱- هامیلتونین سیستم سه ذره ای و نمایش آن در فضای مومنتم

اگر از پتانسیل های سه ذره ای صرفنظر کنیم، هامیلتونین برای یک سیستم با سه ذره به جرم های  $m_1$  و  $m_2$  و  $m_3$  به شکل زیر خواهد شد:

$$H^1 = \frac{\vec{k}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{k}_2^2}{2m_2} + \frac{\vec{k}_3^2}{2m_3} + v_1 + v_2 + v_3 \quad (2-69)$$

۴۰

که در آن پتانسیل برهمکنش دو ذره ای به صورت زیر تعریف می شود:

$$v_1 = v(2,3) \quad , \quad v_2 = v(3,1) \quad , \quad v_3 = v(1,2) \quad (2-70)$$

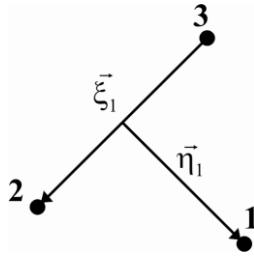
می خواهیم حرکت مرکز جرم را جدا کنیم و مختصات ژاکوبی و مومنتم های ژاکوبی متناظر با آنها را تعریف کنیم. در ابتدا برای اینکه نشان دهیم کار کردن در فضای تنها مومنتم چقدر پیچیدگی دارد از درجات آزادی اسپین و آیزو اسپین صرفنظر می کنیم. در یک سیستم سه ذره ای سه انتخاب مطابق با سه ذره ای وجود دارد.

\* حالت (۱): وقتی ذره (۱) آزاد و ذرات (۲) و (۳) مقید هستند:

در این صورت مختصات ژاکوبی سیستم عبارتند از:



$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \rightarrow (\vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1, \vec{r})$$



$$\vec{\xi}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_3 \quad (2-71)$$

$$\vec{\eta}_1 = \vec{r}_1 - \frac{m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_2 + m_3} \quad (2-72)$$

$$\vec{r} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (2-73)$$

و تبدیلات متناظر برای مومنتم ها در این حالت عبارتند از:

$\vec{p}_1$  -a مومنتم متناظر با مختصه  $\vec{\xi}_1$ :

$$\vec{\xi}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_3$$

$$\vec{k}_2 = m_2 \vec{r}_2, \quad \vec{k}_3 = m_3 \vec{r}_3$$

$$\rightarrow \vec{\xi}_1 = \frac{\vec{k}_2}{m_2} - \frac{\vec{k}_3}{m_3} = \frac{m_3 \vec{k}_2 - m_2 \vec{k}_3}{m_2 m_3}$$

طرفین را در  $\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}$  ضرب می کنیم:

۴۱

$$\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} \vec{\xi}_1 = \frac{m_3 \vec{k}_2 - m_2 \vec{k}_3}{m_2 + m_3}, \quad \mu_1 = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}$$

$$\rightarrow \vec{p}_1 = \frac{m_3 \vec{k}_2 - m_2 \vec{k}_3}{m_2 + m_3} \quad (2-74)$$

$\vec{q}_1$  -b مومنتم متناظر با مختصه  $\vec{\eta}_1$ :

$$\begin{aligned}\vec{\eta}_1 &= \vec{r}_1 - \frac{m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_2 + m_3} \\ &= \vec{r}_1 - \frac{\vec{k}_2 + \vec{k}_3}{m_2 + m_3} \\ &= \frac{\vec{k}_1}{m_1} - \frac{(\vec{k}_2 + \vec{k}_3)}{m_2 + m_3} = \frac{(m_2 + m_3) \vec{k}_1 - m_1 (\vec{k}_2 + \vec{k}_3)}{m_1 (m_2 + m_3)}\end{aligned}$$

اما  $M_1$  جرم کاهش یافته حاصل از  $(m_2 + m_3)$ ،  $m_1$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_1 = \frac{m_1 (m_2 + m_3)}{m_1 + (m_2 + m_3)} \quad (2-75)$$

طرفین رابطه بالا را در این کمیت ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{m_1 (m_2 + m_3)}{m_1 + (m_2 + m_3)} \vec{\eta}_1 &= \frac{(m_2 + m_3) \vec{k}_1 - m_1 (\vec{k}_2 + \vec{k}_3)}{m_1 + m_2 + m_3} \\ \rightarrow \vec{q}_1 = M_1 \vec{\eta}_1 &= \frac{(m_2 + m_3) \vec{k}_1 - m_1 (\vec{k}_2 + \vec{k}_3)}{m_1 + (m_2 + m_3)}\end{aligned} \quad (2-76)$$

c-  $\vec{K}$  مومنتم متناظر با مختصه مرکز جرم  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$(m_1 + m_2 + m_3) \vec{r} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3$$

$$\rightarrow \vec{K} = (m_1 + m_2 + m_3) \vec{r} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 \quad (2-77)$$

قابل ذکر است که در اینجا مختصه  $\vec{p}_1$  که مزدوج کانونیکی  $\vec{k}_1$  است عبارتست از مومنتم ذره (۲) در سیستم مرکز جرم ذرات (۲) و (۳) و مومنتم  $\vec{q}_1$  که مزدوج کانونیک  $\vec{\eta}_1$  است عبارتست از مومنتم ذره (۱) در سیستم مرکز جرم هر سه ذره.

$$\vec{v} = \vec{r}_2 - \vec{r}_{23} = \vec{r}_2 - \frac{m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_2 + m_3}$$

$$= \frac{m_3 \vec{k}_2 - m_2 \vec{k}_3}{m_2(m_2 + m_3)}$$

$$\rightarrow m_2 \vec{v} = \frac{m_3 \vec{k}_2 - m_2 \vec{k}_3}{(m_2 + m_3)} \equiv \vec{p}_1$$

$$\vec{u} = \vec{r}_1 - \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(m_2 + m_3) \vec{k}_1 - m_1 (\vec{k}_2 + \vec{k}_3)}{m_1(m_1 + m_2 + m_3)}$$

$$\rightarrow m_1 \vec{u} = \frac{(m_2 + m_3) \vec{k}_1 - m_1 (\vec{k}_2 + \vec{k}_3)}{(m_1 + m_2 + m_3)} \equiv \vec{q}_1$$

حال اگر جرم هر سه ذره یکسان باشد مومنتم های ژاکوبی در این حالت می شوند:

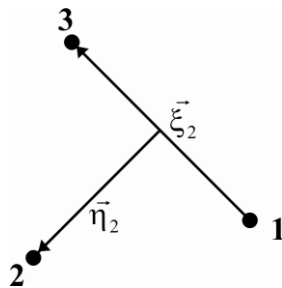
$$\vec{p}_1 = \frac{1}{2} (\vec{k}_2 - \vec{k}_3) \quad (2-78a)$$

$$\vec{q}_1 = \frac{2}{3} \left[ \vec{k}_1 - \frac{1}{2} (\vec{k}_2 + \vec{k}_3) \right] \quad (2-78b)$$

$$\vec{K} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 \quad (2-78c)$$

\* حالت (۲): وقتی ذره (۲) آزاد است و ذرات (۱) و (۳) مقید هستند:

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \rightarrow (\vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2, \vec{r})$$



در این حالت مختصات ژاکوبی سیستم عبارتند از:

$$\vec{\xi}_2 = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$$

$$\vec{\eta}_2 = \vec{r}_2 - \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_3} \quad (2-80)$$

که مختصه مرکز جرم بدون تغییر می ماند و مومنتم های متناظر با این مختصات بوسیله محاسباتی مشابه با حالت اول به شکل زیر بدست می آیند:

$$\vec{p}_2 = \frac{m_1 \vec{k}_3 - m_3 \vec{k}_1}{m_1 + m_3} \quad (2-81)$$

$$\vec{q}_2 = \frac{(m_1 + m_3) \vec{k}_2 - m_2 (\vec{k}_3 + \vec{k}_1)}{m_2 + (m_1 + m_3)} \quad (2-82)$$

که با شرط یکسان بودن جرم ذرات داریم:

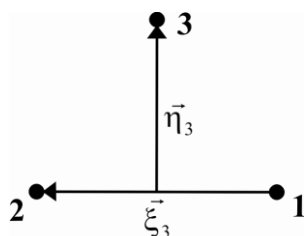
$$\vec{p}_2 = \frac{1}{2} (\vec{k}_3 - \vec{k}_1) \quad (2-83)$$

$$\vec{q}_2 = \frac{2}{3} \left[ \vec{k}_2 - \frac{1}{2} (\vec{k}_3 + \vec{k}_1) \right] \quad (2-84)$$

\* حالت (۳): وقتی که ذره (۳) آزاد است و ذرات (۱) و (۲) مقید هستند.

در این حالت مختصات ژاکوبی سیستم عبارتند از:

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \rightarrow (\vec{\xi}_3, \vec{\eta}_3, \vec{r})$$



$$\vec{\xi}_3 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (2-85)$$

$$\vec{\eta}_3 = \vec{r}_3 - \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (2-86)$$

و مومنتم های ژاکوبی متناظر با این مختصات عبارتند از:

$$\bar{p}_3 = \frac{m_2 \bar{k}_1 - m_1 \bar{k}_2}{m_1 + m_2} \quad (2-87)$$

$$\bar{q}_3 = \frac{(m_1 + m_2) \bar{k}_3 - m_3 (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)}{m_3 + (m_1 + m_2)} \quad (2-88)$$

که با شرط یکسان بودن جرم ذرات در اینجا داریم:

$$\bar{p}_3 = \frac{1}{2} (\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \quad (2-89)$$

$$\bar{q}_3 = \frac{2}{3} \left[ \bar{k}_3 - \frac{1}{2} (\bar{k}_1 + \bar{k}_2) \right] \quad (2-90)$$

می توان  $\bar{p}_2$  و  $\bar{q}_2$  را بر حسب  $\bar{p}_1$  و  $\bar{q}_1$  بصورت یک رابطه خطی نوشت. البته این موضوع در مورد تمام موارد با اندیس های مختلف صادق است.

(۱) بطور مثال برای  $\bar{p}_2$  و  $\bar{q}_2$  بر حسب  $\bar{p}_1$  و  $\bar{q}_1$  داریم:

$$\begin{cases} \bar{p}_2 = A \bar{p}_1 + B \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 = C \bar{p}_1 + D \bar{q}_1 \end{cases} ; A, B, C, D = ? \quad (2-91)$$

که با کمی محاسبات بدست می آوریم:

$$\bar{p}_2(\bar{p}_1, \bar{q}_1) \equiv \bar{p}_2 = -\frac{1}{2} \bar{p}_1 - \frac{3}{4} \bar{q}_1 \quad (2-92a)$$

$$\bar{q}_2(\bar{p}_1, \bar{q}_1) \equiv \bar{q}_2 = \bar{p}_1 - \frac{1}{2} \bar{q}_1 \quad (2-92b)$$

(۲) با محاسباتی مشابه  $\bar{p}_3$  و  $\bar{q}_3$  بر حسب  $\bar{p}_1$  و  $\bar{q}_1$  بدست می آیند:

$$\bar{p}_3(\bar{p}_1, \bar{q}_1) \equiv \bar{p}_3 = -\frac{1}{2} \bar{p}_1 + \frac{3}{4} \bar{q}_1 \quad (2-93a)$$

$$\bar{q}_3(\bar{p}_1, \bar{q}_1) \equiv \bar{q}_3 = -\bar{p}_1 - \frac{1}{2} \bar{q}_1 \quad (2-93b)$$

(۳) همینطور برای  $\bar{p}_1$  و  $\bar{q}_1$  بر حسب  $\bar{p}_2$  و  $\bar{q}_2$  بدست می آوریم:

$$\bar{p}_1(\bar{p}_2, \bar{q}_2) \equiv \bar{p}_1 = -\frac{1}{2} \bar{p}_2 + \frac{3}{4} \bar{q}_2 \quad (2-94a)$$

$$\bar{q}_1(\bar{p}_2, \bar{q}_2) \equiv \bar{q}_1 = -\bar{p}_2 - \frac{1}{2} \bar{q}_2 \quad (2-94b)$$

(۴)  $\bar{p}_1$  و  $\bar{q}_1$  بر حسب  $\bar{p}_3$  و  $\bar{q}_3$  عبارتند از:

$$\bar{p}_1(\bar{p}_3, \bar{q}_3) \equiv \bar{p}_1 = -\frac{1}{2}\bar{p}_3 - \frac{3}{4}\bar{q}_3 \quad (2-95a)$$

$$\bar{q}_1(\bar{p}_3, \bar{q}_3) \equiv \bar{q}_1 = \bar{p}_3 - \frac{1}{2}\bar{q}_3 \quad (2-95b)$$

و همه روابط باقی مانده را می توان بوسیله تعویض مناسب اندیس ها بدست آورد.

حال حالت‌هایی به شکل زیر را تعریف می کنیم:

$$|\bar{p}_i \bar{q}_i\rangle \equiv |\bar{p}_i\rangle |\bar{q}_i\rangle \quad (2-96)$$

رابطه بهنجاری این حالتها عبارتند از:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}'_i \bar{q}'_i | \bar{p}_i \bar{q}_i \rangle &= (\langle \bar{p}'_i | \langle \bar{q}'_i | ) (|\bar{p}_i\rangle |\bar{q}_i\rangle) \\ &= \langle \bar{p}'_i | \bar{p}_i \rangle \langle \bar{q}'_i | \bar{q}_i \rangle = \delta(\bar{p}'_i - \bar{p}_i) \delta(\bar{q}'_i - \bar{q}_i) \end{aligned} \quad (2-97)$$

بخاطر یکسان بودن ذرات، یک حالت مربوط به حرکت نسبی ذرات را می توان به سه طریق زیر نوشت:

$$|\bar{p}_1 \bar{q}_1\rangle_1 = |\bar{p}_2 \bar{q}_2\rangle_2 = |\bar{p}_3 \bar{q}_3\rangle_3 \quad (2-98)$$

در اینجا اندیس (۱) به این مفهوم است که  $\bar{p}_1$  عبارتست از مومنت نسبی در زیر سیستم (۲۳) و  $\bar{q}_1$  عبارتست از مومنت نسبی ذره (۱) نسبت به زیر سیستم (۲۳). همینطور برای اندیس های (۲) و (۳) هم می توان یک چنین مفهومی را در نظر گرفت. این نوتاسیون اندیس دار برای وقتی که در فصل سوم عملگر تعویض بکار می رود خیلی مفید است.

با توجه به تبدیلاتی که انجام دادیم عملگر هامیلتونی که در (۲-۶۹) آمده در مختصات ژاکوبی عبارتست از:

$$H^\alpha = \frac{\bar{K}^2}{2(m_1 + m_2 + m_3)} + \frac{\bar{p}_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + \frac{\bar{q}_\alpha^2}{2M_\alpha} + \sum_{\gamma=1}^3 v_\gamma \quad ; (\alpha = 1, 2, 3) \quad (2-99)$$

که بطور مثال اگر حالت (۱) یعنی:  $\alpha = 1$  را انتخاب کنیم داریم:

$$H^1 = \frac{\bar{K}^2}{2(m_1 + m_2 + m_3)} + \frac{\bar{p}_1^2}{2\mu_1} + \frac{\bar{q}_1^2}{2M_1} + \sum_{\gamma=1}^3 v_\gamma \quad (2-100)$$

که در آن همانطور که قبلاً تعریف کردیم داریم:

$$\mu_1 = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}, \quad M_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

بخاطر ناوردایی انتقالی پتانسیلهای دو ذره ای، حرکت مرکز جرم کل، یک ویژه حالت مومنتم می شود که اگر در دستگاه مرکز جرم کار کنیم می توان آن را نادیده گرفت در این صورت هامیلتونین فوق به شکل زیر در می آید:

$$H = \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + \frac{\vec{q}_\alpha^2}{2M_\alpha} + \sum_{\gamma=1}^3 v_\gamma \equiv h_0 + \sum_{\gamma=1}^3 v_\gamma \quad ; (\alpha = 1, 2, 3) \quad (2-101)$$

و یا بطور خاص برای حالت (۱) داریم:

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2\mu_1} + \frac{\vec{q}_1^2}{2M_1} + v_1 + v_2 + v_3 \equiv h_0 + \sum_{\gamma=1}^3 v_\gamma \quad (2-102)$$

### ۲-۲-۲- ویژگی های طیفی سیستم سه ذره ای

با تبدیل مختصات برای سیستم های دو و سه ذره ای که در قسمت های قبلی انجام دادیم دیدیم که اختلاف دو سیستم در این زمینه اهمیت چندانی ندارد.

اختلاف عمده سیستم های دو و سه ذره ای مورد مطالعه ما در طیف انرژی آنها است. برای سیستم دو ذره ای طیف انرژی شامل دو قسمت مجزا است:

۱- ترازهای منفصل مربوط به حالت های مقید سیستم،

۲- ترازهای پیوسته مربوط به حالت های پراکندگی.

اما طیف انرژی سیستم سه ذره ای خیلی پیچیده تر است و شامل:

۱- ترازهای منفصل مربوط به حالت مقید سیستم سه ذره ای (وقتی سه ذره به هم نزدیک هستند)،

۲- پیوستارهای انرژی مربوط به پراکندگی یک ذره از حالت مقید دو ذره دیگر،

۳- پیوستارهای انرژی مربوط به پراکندگی سه ذره از هم (این ناحیه از جایی شروع می شود که پیوند

سه ذره از یکدیگر گسسته شده باشد یعنی:  $E = 0$ ).

ویژگی مهم طیف انرژی سه ذره ای تبهگنی آن می باشد یعنی اینکه می توان به ازای یک انرژی کل داده شده برای سیستم انرژی حالت های مختلف مقید و غیر مقید را با هم ترکیب کرد تا این انرژی کل بدست آید.

این موضوع باعث می شود که نتوانیم معادله لیپمن- شوئینگر را برای یک سیستم سه ذره ای بکار ببریم. اما می توان با دادن تغییراتی در معادلات لیپمن- شوئینگر ابهامات ناشی از تبهگنی انرژی را از بین برد. معادلاتی که از این طریق نتیجه می شوند را "معادلات فادیف" می گویند.

### ۲-۲-۳- زیر سیستم های دو ذره ای در سیستم سه ذره ای

زیر سیستم های دو ذره ای نقشی اساسی در مسئله سه ذره ای بازی می کنند. در راستای این موضوع مختصات ژاکوبی را معرفی کردیم و حال هامیلتونی کانالی  $h_\alpha$  را معرفی می کنیم:

$$h_\alpha = \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + \frac{\vec{q}_\alpha^2}{2M_\alpha} + v_\alpha \quad (2-103)$$

بعنوان مثال، در پراکندگی الاستیک حالت های مجانبی که در آن دو تا از ذرات در یک حالت مقید قرارداد شده باشند، ویژه حالت های چنین  $h_\alpha$  می هستند و به همین خاطر است که بر روی این  $h_\alpha$  ها نام هامیلتونی کانالی گذاشته شده است. اما برای هامیلتونی کل داریم:

$$H = h_\alpha + \bar{v}_\alpha \quad (2-104)$$

$$\bar{v}_\alpha = v - v_\alpha = \sum_{\gamma \neq \alpha} v_\gamma \quad (2-105)$$

مناسب است که کانال فروپاشی (کانالی که همه ذرات آزاد هستند) را با اندیس  $\alpha = 0$  نمایش دهیم که در این صورت برای آن داریم:

$$v_0 \equiv 0 \quad (2-106)$$

به این ترتیب، معادلات (۲-۱۰۳) و (۲-۱۰۵) به ازای  $\alpha = 0$  هم برقرار می شوند. به موازات هامیلتونی کانالی، حلال کانالی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$g_\alpha(z) \equiv (z - h_\alpha)^{-1} \quad (2-107)$$

در ادامه کار برای نوشتن عملگرها، از قرارداد زیر استفاده می کنیم:

- تمام عملگرهایی که در فضای هیلبرت سه ذره ای اثر می کنند و حاوی تنها یک برهمکنش دو ذره ای هستند (مثل عملگرهای:  $g_\alpha, V_\alpha, h_\alpha$ ) و یا اینکه حاوی هیچ برهمکنش دو ذره ای نباشند (مثل عملگرهای:  $g_0, V_0, h_0$ ) را با حروف کوچک نشان می دهیم. عناصر ماتریسی این عملگرها را



می توان توسط عناصر ماتریسی عملگر های دو ذره ای در فضای هیلبرت دو ذره ای بیان کرد. هرگاه نمادگذاری فوق در جایی موجب آن شود که این عملگرها را با عملگرهای دو ذره ای در فضای دو ذره ای اشتباه بگیریم، آن عملگر دو ذره ای بوسیله یک علامت (۸) که در بالای آن قرار می گیرد نشان داده خواهد شد. بعنوان نمونه:

$$\langle \bar{p}_\alpha, \bar{q}_\alpha | v_\alpha | \bar{p}'_\alpha, \bar{q}'_\alpha \rangle = \delta(\bar{q}_\alpha - \bar{q}'_\alpha) \langle \bar{p}_\alpha | \hat{v}_\alpha | \bar{p}'_\alpha \rangle \quad (2-108)$$

۲- عملگرهای سه ذره ای واقعی (مثل:  $\bar{v}_\alpha, v, H$ ) را با حروف بزرگ نمایش می دهیم.

عناصر ماتریسی حلال های کانالی که قبلاً بیان کردیم به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}_\alpha, \bar{q}_\alpha | g_\alpha(z) | \bar{p}'_\alpha, \bar{q}'_\alpha \rangle &= \langle \bar{p}_\alpha, \bar{q}_\alpha | \frac{1}{z - \frac{\bar{q}_\alpha^2}{2M_\alpha} - (\frac{\bar{p}_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + v_\alpha)} | \bar{p}'_\alpha, \bar{q}'_\alpha \rangle \\ &= \langle \bar{q}_\alpha | \bar{q}'_\alpha \rangle \langle \bar{p}_\alpha | \frac{1}{(z - \frac{\bar{q}_\alpha^2}{2M_\alpha}) - (\frac{\hat{p}_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + \hat{v}_\alpha)} | \bar{p}'_\alpha \rangle \end{aligned}$$

$$\rightarrow \langle \bar{p}_\alpha, \bar{q}_\alpha | g_\alpha(z) | \bar{p}'_\alpha, \bar{q}'_\alpha \rangle = \delta(\bar{q}_\alpha - \bar{q}'_\alpha) \langle \bar{p}_\alpha | \hat{g}_\alpha(z - \frac{\bar{q}_\alpha^2}{2M_\alpha}) | \bar{p}'_\alpha \rangle \quad (2-109a)$$

در اینجا  $(\frac{\hat{p}_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + \hat{v}_\alpha)$  عملگر دو ذره ای است که در فضای هیلبرت دو ذره ای تعریف شده است و همچنین داریم:

$$\hat{g}_\alpha(z') \equiv \frac{1}{z' - \frac{\hat{p}_\alpha^2}{2\mu_\alpha} - \hat{v}_\alpha}$$

چنانکه ملاحظه می شود این عناصر ماتریسی با عناصر ماتریسی حلال های دو ذره ای ارتباط دارند. علت اینکه حلال  $g_\alpha$  با خود اندیس کانال را حمل می کند آن است که پتانسیلهای مختلف  $v_\alpha$  می توانند در کانالهای متفاوت عمل نمایند. تابع  $\delta$  هم از این حقیقت ناشی می شود که حلال  $g_\alpha$  فقط شامل بر همکنش زیر سیستم  $\alpha$  است و ذره  $\alpha$  آزاد است. آرگومان  $\hat{g}_\alpha$  برابر است با انرژی زیر سیستم  $\alpha$  که با تفریق انرژی ذره  $\alpha$  از انرژی سیستم سه ذره ای،  $z$  بدست می آید.

برای  $g_0(z)$  داریم:

$$| \bar{p}_\alpha \bar{q}_\alpha \rangle \equiv | \bar{p}_\alpha \rangle | \bar{q}_\alpha \rangle$$

$$\langle \bar{p}_\alpha, \bar{q}_\alpha | g_0(z) | \bar{p}'_\alpha, \bar{q}'_\alpha \rangle = \langle \bar{p}_\alpha, \bar{q}_\alpha | \frac{1}{z - \frac{\bar{p}_\alpha^2}{2\mu_\alpha} - \frac{\bar{q}_\alpha^2}{2M_\alpha}} | \bar{p}'_\alpha, \bar{q}'_\alpha \rangle$$

و از آنجا که:  $[\hat{p}_\alpha, \hat{q}_\alpha] = 0$  می باشد داریم:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}_\alpha, \bar{q}_\alpha | g_0(z) | \bar{p}'_\alpha, \bar{q}'_\alpha \rangle &= \delta(\bar{q}_\alpha - \bar{q}'_\alpha) \langle \bar{p}_\alpha | \frac{1}{z - \frac{\hat{p}_\alpha^2}{2\mu_\alpha} - \frac{q_\alpha^2}{2M_\alpha}} | \bar{p}'_\alpha \rangle \\ &= \frac{\delta(\bar{q}_\alpha - \bar{q}'_\alpha) \delta(\bar{p}_\alpha - \bar{p}'_\alpha)}{z - \frac{\bar{p}_\alpha^2}{2\mu_\alpha} - \frac{\bar{q}_\alpha^2}{2M_\alpha}} \end{aligned} \quad (۲-۱۰۹b)$$

پراکندگی در زیر سیستم  $\alpha$  توسط ماتریس  $T$  به صورت زیر توصیف می شود:

$$t_\alpha(z) = v_\alpha + v_\alpha g_\alpha(z) v_\alpha$$

برای اینکه ببینیم  $t_\alpha$  چگونه وارد می شود، به صورت زیر عمل می کنیم:

$$h_\alpha = \frac{\bar{p}_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + \frac{\bar{q}_\alpha^2}{2M_\alpha} + v_\alpha \equiv h_0 + v_\alpha$$

$$h_\alpha = h_0 + v_\alpha$$

$$g_\alpha(z) = \frac{1}{z - h_\alpha}, \quad g_0(z) = \frac{1}{z - h_0}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$g_\alpha(z) = g_0(z) + g_0(z) v_\alpha g_\alpha(z) \quad (a)$$

$$= g_0(z) + g_\alpha(z) v_\alpha g_0(z) \quad (b)$$

با قرار دادن رابطه (b) در رابطه (a) داریم:

$$g_\alpha(z) = g_0(z) + g_0(z) v_\alpha [g_0(z) + g_\alpha(z) v_\alpha g_0(z)]$$

$$= g_0(z) + g_0(z) [v_\alpha + v_\alpha g_\alpha(z) v_\alpha] g_0(z)$$

$$\rightarrow g_\alpha(z) \equiv g_0(z) + g_0(z) t_\alpha(z) g_0(z) \quad (c)$$

که در آن داریم:

$$t_\alpha(z) \equiv v_\alpha + v_\alpha g_\alpha(z) v_\alpha \quad (۲-۱۱۰)$$

از طرف دیگر با استفاده از روابط:

$$\begin{cases} g_\alpha(z) = g_0(z) + g_0(z) t_\alpha(z) g_0(z) \\ g_\alpha(z) = g_0(z) + g_0(z) v_\alpha g_\alpha(z) \end{cases}$$

مشابه روابط (۲-۵۵) و (۲-۵۶) را برای  $t_\alpha$  بدست می آوریم:

$$t_\alpha(z) = v_\alpha + v_\alpha g_0(z) t_\alpha(z) \quad (۲-۱۱۱a)$$

$$t_\alpha(z) = v_\alpha + t_\alpha(z) g_0(z) v_\alpha \quad (۲-۱۱۱b)$$

می توان به سادگی روابط دیگری برای  $t_\alpha$  به دست آورد:

از رابطه (۲-۱۱۱a) داریم:

$$\begin{aligned} t_\alpha(z) &= v_\alpha + v_\alpha g_0(z) t_\alpha(z) \\ \rightarrow [1 - v_\alpha g_0(z)] t_\alpha(z) &= v_\alpha \\ \rightarrow t_\alpha(z) &= [1 - v_\alpha g_0(z)]^{-1} v_\alpha \end{aligned} \quad (2-112a)$$

$$\begin{aligned} t_\alpha(z) &= v_\alpha + t_\alpha(z) g_0(z) v_\alpha \\ \rightarrow t_\alpha(z) [1 - g_0(z) v_\alpha] &= v_\alpha \\ \rightarrow t_\alpha(z) &= v_\alpha [1 - g_0(z) v_\alpha]^{-1} \end{aligned} \quad (2-112b)$$

برای عناصر ماتریسی  $t_\alpha(z)$  داریم:

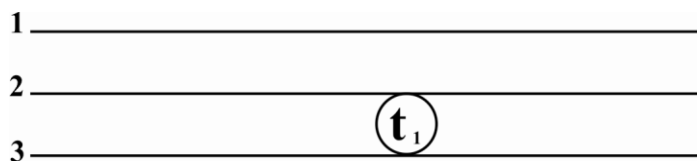
$$\begin{aligned} \langle \bar{p}_\alpha, \bar{q}_\alpha | t_\alpha(z) | \bar{p}'_\alpha, \bar{q}'_\alpha \rangle &= \langle \bar{p}_\alpha, \bar{q}_\alpha | v_\alpha + v_\alpha g_\alpha(z) v_\alpha | \bar{p}'_\alpha, \bar{q}'_\alpha \rangle \\ &= \langle \bar{p}_\alpha, \bar{q}_\alpha | v(\bar{\xi}_\alpha) + v(\bar{\xi}_\alpha) g_\alpha(z) v(\bar{\xi}_\alpha) | \bar{p}'_\alpha, \bar{q}'_\alpha \rangle \\ &= \langle \bar{p}_\alpha, \bar{q}_\alpha | v(\bar{\xi}_\alpha) | \bar{p}'_\alpha, \bar{q}'_\alpha \rangle + \langle \bar{p}_\alpha, \bar{q}_\alpha | v(\bar{\xi}_\alpha) g_\alpha(z) v(\bar{\xi}_\alpha) | \bar{p}'_\alpha, \bar{q}'_\alpha \rangle \\ &= \delta(\bar{q}_\alpha - \bar{q}'_\alpha) \langle \bar{p}_\alpha | v_\alpha | \bar{p}'_\alpha \rangle + \delta(\bar{q}_\alpha - \bar{q}'_\alpha) \langle \bar{p}_\alpha | v_\alpha \hat{g}_\alpha(z - \frac{q_\alpha^2}{2M_\alpha}) v_\alpha | \bar{p}'_\alpha \rangle \end{aligned}$$

یعنی در نهایت داریم:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}_\alpha, \bar{q}_\alpha | t_\alpha(z) | \bar{p}'_\alpha, \bar{q}'_\alpha \rangle &= \delta(\bar{q}_\alpha - \bar{q}'_\alpha) \langle \bar{p}_\alpha | \left[ v_\alpha + v_\alpha \hat{g}_\alpha(z - \frac{q_\alpha^2}{2M_\alpha}) v_\alpha \right] | \bar{p}'_\alpha \rangle \\ &= \delta(\bar{q}_\alpha - \bar{q}'_\alpha) \langle \bar{p}_\alpha | \hat{t}_\alpha(z - \frac{q_\alpha^2}{2M_\alpha}) | \bar{p}'_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (2-113)$$

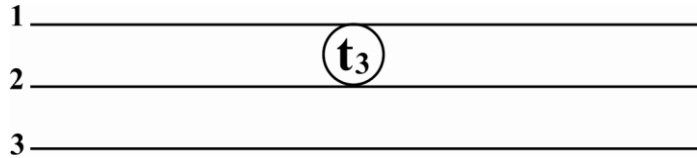
عملگر  $t_\alpha(z)$  برای توصیف پراکندگی سه ذره به صورت پراکندگی چندگانه دو ذره ای استفاده می شود.

شکل زیر نمایش گرافی را برای معادله (۲-۱۱۳) نشان می دهد:



شکل ۲-۱- فرآیند سه ذره ای با پراکندگی در زیر سیستم دو ذره ای.

گراف نشان دهنده عنصر ماتریسی است که در آن ذره (۱) آزاد و ذره (۲) و (۳) با هم برهمکنش دارند، یعنی در اینجا با  $h_1$  کار می کنیم. حال اگر گراف به شکل زیر بود یعنی باید با  $h_3$  کار می کردیم.



### ۲-۲-۴- شرایط مرزی و عملگر مولر

بحث شرایط مرزی و عملگر مولر که در مورد پراکندگی دو ذره ای مورد بررسی قرار گرفت را می توان بدون هیچ مشکلی به مورد پراکندگی سه ذره ای تعمیم داد. تحول زمانی یک پاکت موج سه ذره ای به صورت زیر داده می شود:

$$\psi_{\alpha m}^{(+)}(t) = e^{-iHt} \psi_{\alpha m}^{(+)} \quad (2-114)$$

که در اینجا  $H$  هامیلتونی کامل سه ذره ایست در حالیکه پاکت موج مرجع به صورت:

$$\phi_{\alpha m}(t) = e^{-ih_{\alpha}t} \phi_{\alpha m} \quad (2-115)$$

تحول می یابد.

پاکت موج  $\phi_{\alpha m}$  توصیف کننده حرکت آزاد ذره  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) نسبت به دو ذره دیگر که در  $m$  امین حالت مقیدشان قرار دارند می باشد.

برای حالت  $\alpha = 0$ ، پاکت موج  $\phi_0$  را داریم که مربوط به سه ذره آزاد می باشد که این بعنوان حالت اولیه فایده ای ندارد (مگر در توصیف یک گاز). شرط مرزی در اینجا مشابه با حالت دو ذره ای فرمولبندی می شود. ملزم می کنیم که نرم اختلاف  $\psi_{\alpha m}^{(+)}(t) - \phi_{\alpha m}(t)$  در زمان بینهایت دور در گذشته صفر شود یعنی:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \| e^{-iHt} \psi_{\alpha m}^{(+)} - e^{-ih_{\alpha}t} \phi_{\alpha m} \| = 0 \quad (2-116)$$

که این منجر به نمایش زیر برای حالت های پراکندگی می شود:

$$\psi_{\alpha m}^{(\pm)} = s - \lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{iHt} e^{-ih_{\alpha}t} \phi_{\alpha m} \equiv \Omega_{\alpha}^{(\pm)} \phi_{\alpha m} \quad (2-117)$$

که در آن عملگر مولر به صورت:

$$\Omega_{\alpha}^{(\pm)} = s - \lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{iHt} e^{-ih_{\alpha}t} \quad ; \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (2-118)$$

تعریف می شود.

در اینجا حد  $t \rightarrow +\infty$  نیز گنجانده شده که در ساختن ماتریس S اهمیت دارد. با وجود تشابه صوری با مسئله دو ذره ای نباید از نظر دور داشت که حل مسئله سه ذره ای به مراتب مشکل تر است. این موضوع را می توان از آنجا ملاحظه کرد که برای هر کانال  $\alpha$  یک عملگر مولر جداگانه  $\Omega_\alpha$  مورد نیاز است.

حال بایستی اثبات نمود که اولاً: این عملگر های مولر وجود دارند [۸] و ثانیاً: می توان آنها را به حالت های بهنجارناپذیر با انرژی های تیز اثر داد [۹]. این حالت های با انرژی تیز حالت های کانالی با واپاشی دو ذره ای هستند:

$$|\phi_{\alpha m}\rangle = |\bar{q}_\alpha, \psi_{\alpha m}\rangle = |\bar{q}_\alpha\rangle |\psi_{\alpha m}\rangle \quad (2-119)$$

که در آن:

$$\begin{cases} h_\alpha |\phi_{\alpha m}\rangle = E_{\alpha m} |\phi_{\alpha m}\rangle \\ E_{\alpha m} \equiv E_\alpha + \varepsilon_{\alpha m} \end{cases}$$

در اینجا  $\varepsilon_{\alpha m}$  انرژی حالت مقید مربوط به دو ذره دیگر در حالت m ام می باشد و  $E_\alpha$  به طور پیوسته تغییر می کند چون مربوط به ذره آزاد  $\alpha$  است.

و حالت های کانالی با سه ذره آزاد توسط  $\varphi_0$ :

$$|\phi_0\rangle = |\bar{q}_\alpha, \bar{p}_\alpha\rangle = |\bar{q}_\alpha\rangle |\bar{p}_\alpha\rangle \quad (2-120)$$

توصیف می شوند که در رابطه زیر صدق می کنند:

$$h_0 |\phi_0\rangle = \left( \frac{\bar{q}_\alpha^2}{2M_\alpha} + \frac{\bar{p}_\alpha^2}{2\mu_\alpha} \right) |\phi_0\rangle$$

در رابطه (۲-۱۲۰) اندیس  $\alpha$  دلخواه است و نشان دهنده تنها یکی از سه سیستم ممکنه مختصات ژاکوبی می باشد. دامنه عملگر های مولر (۲-۱۱۸) فضای حالت های کانالی می باشد و برد آنها فضای حالت های پراکندگی می باشد،

$$|\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle = \Omega_\alpha^{(\pm)} |\phi_{\alpha m}\rangle \quad (2-121)$$

همچنین در مورد سیستم سه ذره ای مشابه معادله (۲-۱۴) " رابطه جابجایی ":

$$H \Omega_\alpha^{(\pm)} = \Omega_\alpha^{(\pm)} h_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (2-122)$$

برقرار می باشد.

از این رابطه نتیجه می شود که علی رغم آنکه تمام این حالتها ویژه حالت‌های هامیلتونی های متفاوت می باشند حالت‌های پراکنده شده دارای همان انرژی حالت‌های آزاد اولیه و نهایی می باشند.

$$\begin{aligned} H |\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle &= H \Omega_{\alpha}^{(\pm)} |\phi_{\alpha m}\rangle = \Omega_{\alpha}^{(\pm)} h_{\alpha} |\phi_{\alpha m}\rangle = \Omega_{\alpha}^{(\pm)} [E_{\alpha m} |\phi_{\alpha m}\rangle] = E_{\alpha m} \Omega_{\alpha}^{(\pm)} |\phi_{\alpha m}\rangle \\ &= E_{\alpha m} |\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle \end{aligned}$$

می توان نشان داد [۱۰] که دو حالت پراکندگی که، دارای حالت‌های اولیه (یا نهایی) متفاوت هستند بر هم عمودند:

$$\langle \psi_{\alpha m}^{(\pm)} | \psi_{\beta n}^{(\pm)} \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} \delta(\bar{q}'_{\alpha} - \bar{q}_{\beta}) \quad (۲-۱۲۳)$$

برای حالت‌های کانال آزاد این موضوع درست نیست مگر  $\alpha = \beta$  باشد.

همانند وضعیت دو ذره ای در اینجا نیز مزدوج هرمیتی عملگر های مولر  $\Omega_{\alpha}^{(\pm)\dagger}$  وجود دارند. این عملگر ها حالت‌های پراکندگی را به حالت‌های کانال آزاد می برند (وقتی که اندیس های کانال یکسان باشند).

$$\Omega_{\alpha}^{(\pm)\dagger} |\psi_{\beta n}^{(\pm)}\rangle = \delta_{\alpha\beta} |\phi_{\beta n}\rangle \quad (۲-۱۲۴)$$

اگر این عملگر ها را به حالت مقید سه ذره ای اثر دهیم صفر می دهد:

$$\Omega_{\alpha}^{(\pm)\dagger} |\psi_v^B\rangle = 0 \quad (۲-۱۲۵)$$

باید توجه داشت که در مورد سیستم دو ذره ای حالت‌هایی که با اثر مزدوج هرمیتی عملگر مولر صفر می شدند و حالت‌هایی که صفر نمی شدند، از لحاظ انرژی از هم متمایز بودند ( $E > 0, E < 0$ ). برای سیستم سه ذره ای این موضوع دیگر صحت ندارد. مثلاً به ازای  $\alpha \neq \beta$  و  $E > 0$  داریم:

$$\Omega_{\alpha}^{(\pm)\dagger} |\psi_{\beta n}^{(\pm)}\rangle = \delta_{\alpha\beta} |\phi_{\beta n}\rangle = 0$$

یعنی با وجود اینکه  $E > 0$  است ولی داریم:

$$\Omega_{\alpha}^{(\pm)\dagger} |\psi_{\beta n}^{(\pm)}\rangle = 0$$

در مورد سیستم دو ذره ای فقط به ازای  $E < 0$  داشتیم:

$$\Omega_{\alpha}^{\dagger} |\psi^{(\pm)}\rangle = 0$$

## ۲-۲-۵- معادله حلال و معادله لیپمن - شوئینگر برای سیستم سه ذره ای

در اینجا سعی خواهیم کرد که بین نظریه وابسته به زمان و نظریه مستقل از زمان ارتباط برقرار کنیم. گذار از حد زمانی به حد اولیری برای پراکندگی سه ذره ای نیز امکان پذیر می باشد.

برای عملگر مولر داریم:

$$\begin{aligned}\Omega_{\alpha}^{(\pm)} &= s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt} e^{-ih_{\alpha}t} = s\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm \varepsilon \int_{\mp\infty}^0 dt e^{\pm\varepsilon t} e^{iHt} e^{-ih_{\alpha}t} \\ \rightarrow |\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle &= \Omega_{\alpha}^{(\pm)} |\phi_{\alpha m}\rangle = s\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm \varepsilon \int_{\mp\infty}^0 dt e^{\pm\varepsilon t} e^{iHt} e^{-ih_{\alpha}t} |\phi_{\alpha m}\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm \varepsilon \int_{\mp\infty}^0 dt e^{\pm\varepsilon t} e^{iHt} e^{-iE_{\alpha m}t} |\phi_{\alpha m}\rangle \\ \rightarrow |\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon G(E_{\alpha m} \pm i\varepsilon) |\phi_{\alpha m}\rangle\end{aligned}\quad (2-126)$$

که در این جا  $G(z)$  عملگر حلال کامل سیستم سه ذره ایست:

$$G(z) \equiv \frac{1}{z - H} \quad ; H = h_{\alpha} + \bar{v}_{\alpha} \quad (2-127)$$

با توجه به عملگر حلال کانالی که در (۲-۱۰۷) تعریف شده:

$$g_{\alpha}(z) \equiv (z - h_{\alpha})^{-1}$$

می توان دو معادله زیر را برای عملگر حلال نوشت:

$$G(z) = g_{\alpha}(z) + g_{\alpha}(z) \bar{v}_{\alpha} G(z) \quad (2-128a)$$

$$G(z) = g_{\alpha}(z) + G(z) \bar{v}_{\alpha} g_{\alpha}(z) \quad (2-128b)$$

که این معادلات را می توان به سادگی با استفاده از رابطه:

$$\bar{v}_{\alpha} = g_{\alpha}^{-1}(z) - G^{-1}(z) \quad (2-129)$$

اثبات نمود.

معادله لیپمن - شوئینگر برای حالت پراکندگی را می توان با جایگزین کردن معادله  $G(z)$  در رابطه:

$$|\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon G(E_{\alpha m} \pm i\varepsilon) |\phi_{\alpha m}\rangle$$

بدست آورد:

$$|\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon [g_{\alpha}(E_{\alpha m} \pm i\varepsilon) + g_{\alpha}(E_{\alpha m} \pm i\varepsilon) \bar{v}_{\alpha} G(E_{\alpha m} \pm i\varepsilon)] |\phi_{\alpha m}\rangle \quad (2-130)$$

چون حالت کانال آزاد  $|\phi_{\alpha m}\rangle$  ویژه حالت  $h_\alpha$  با انرژی  $E_{\alpha m}$  می باشد داریم:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon g_\alpha(E_{\alpha m} \pm i\varepsilon) |\phi_{\alpha m}\rangle = |\phi_{\alpha m}\rangle \quad (2-131)$$

$$\rightarrow |\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle = |\phi_{\alpha m}\rangle + g_\alpha(E_{\alpha m} \pm i0) \bar{v}_\alpha |\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle \quad (2-132)$$

برخلاف مسئله دو ذره ای در اینجا جواب معادله لیپمن- شوئینگر به طور یکتا تعیین نمی شود زیرا معادله همگن:

$$|\psi\rangle = g_\alpha(E \pm i0) \bar{v}_\alpha |\psi\rangle \quad (2-133)$$

دارای جوابهایی به ازای انرژی مربوط به ناحیه پراکندگی می باشد. این موضوع را میتوان با انتخاب یک حالت کانالی متفاوت  $|\phi_{\beta n}\rangle$ ;  $\beta \neq \alpha$  در رابطه (2-130) ملاحظه نمود. با اثر دادن  $g_\alpha$  در یک حالت کانالی دیگر خواهیم داشت [۱۱]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon g_\alpha(E \pm i\varepsilon) |\phi_{\beta n}\rangle = 0 \quad (2-134)$$

زیرا  $|\phi_{\beta n}\rangle$  یک ویژه حالت  $h_\alpha$  نمی باشد و در نتیجه به ازای  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;  $g_\alpha |\phi_{\beta n}\rangle$  متناهی می ماند و در نتیجه:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon g_\alpha(E \pm i\varepsilon) |\phi_{\beta n}\rangle = 0$$

و ما معادله زیر را بدست می آوریم:

$$|\psi_{\beta n}^{(\pm)}\rangle = g_\alpha(E_{\alpha m} \pm i0) \bar{v}_\alpha |\psi_{\beta n}^{(\pm)}\rangle \quad (2-135)$$

این رابطه به ما می گوید که معادله همگنی که متعلق به معادله غیر همگن لیپمن- شوئینگر است حالتی پراکندگی کانالهای دیگر  $|\psi_{\beta n}^{(\pm)}\rangle$  را به عنوان جوابهای غیر بدیهی دارد.

در مسئله دو ذره ای نیز معادله همگن دارای جواب های غیر بدیهی بود، ولی فقط به ازای انرژی های پیوندی منفصل که، در آن امکان وقوع پراکندگی نیست. اما در مسئله سه ذره ای معادله همگن علاوه بر انرژیهای پیوندی سه ذره ای دارای جوابهای غیر بدیهی به ازای پیوستاری از انرژی که ناحیه انرژی پراکندگی را می پوشاند، می باشد. این خاصیت معادله لیپمن- شوئینگر در مورد سیستم سه ذره ای ارتباط نزدیکی با خواص رابطه زیر دارد [۶]:

$$\Omega_\alpha^{(\pm)\dagger} |\psi_{\beta n}^{(\pm)}\rangle = \delta_{\alpha\beta} |\phi_{\beta n}\rangle$$

برای اینکه جوابهای یکتایی برای معادله لیپمن- شوئینگر داشته باشیم، بایستی شرایط جدیدی اعمال



کنیم که از بین جوابهای چندگانه آنهایی را انتخاب کند که از شرایط مرزی فیزیکی رابطه (۲-۱۲۶) تبعیت کند.

گلوکل<sup>(۱)</sup> [۱۲] نشان داده است که دستگاه معادلات زیر دارای جوابهای یکتا هستند:

$$|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle = |\phi_{\alpha m}\rangle + g_{\alpha}(E+i0)\bar{v}_{\alpha}|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle \quad (2-136a)$$

$$|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle = g_{\beta}(E+i0)\bar{v}_{\beta}|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle \quad (2-136b)$$

$$|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle = g_{\gamma}(E+i0)\bar{v}_{\gamma}|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle \quad (2-136c)$$

علاوه بر معادله لیپمن- شوئینگر، گلوکل ملزم می کند که در کانال های  $\beta$  و  $\gamma$  امواج بصورت بیرون رونده باشند و امواج داخل شونده نداشته باشیم. او با استفاده از یک تقریب مناسب موفق شد تا دستگاه معادلات (۲-۱۳۶a,b,c) را به یک دستگاه معادلات انتگرالی با یک نرم اشمیت متناهی تبدیل کند.

در وضعیت فعلی هسته انتگرال هیچ یک از معادلات (۲-۱۳۲) و (۲-۱۳۶a,b,c) نرم اشمیت متناهی ندارند و همچنین این هسته ها فشرده نیستند [۴] و بنابراین روش های استاندارد نظریه معادلات انتگرالی را نمی توان برای آنها بکار برد. هسته معادله لیپمن- شوئینگر عبارتست از:

$$K_{\alpha}(z) = g_{\alpha}(z)\bar{v}_{\alpha} \quad (2-137)$$

با استفاده از معادله (۲-۲۲a) بدست می آوریم:

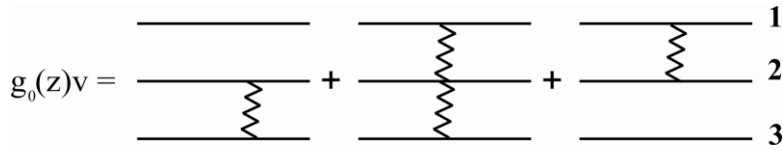
$$K_{\alpha}(z) = g_0(z)\bar{v}_{\alpha} + g_0(z)v_{\alpha}g_{\alpha}(z)\bar{v}_{\alpha} \quad (2-138)$$

توابع دلتایی که از پتانسیلهای دو ذره ای در جمله اول ناشی می شوند، دلیل واگرایی نرم اشمیت هستند.

$$\langle \bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3 | g_0(z)\bar{v}_{\alpha} | \bar{k}'_1 \bar{k}'_2 \bar{k}'_3 \rangle \sim (z - \sum_{i=1}^3 \frac{k_i^2}{2m_i})^{-1} \sum_{\gamma \neq \alpha} \delta(\bar{q}_{\gamma} - \bar{q}'_{\gamma}) \langle \bar{p}_{\gamma} | \hat{v}_{\gamma} | \bar{p}'_{\gamma} \rangle \quad (2-139)$$

در سمت راست معادله (۲-۱۳۹) از تابع دلتای مربوط به حرکت مرکز جرم کل سیستم چشم پوشی شده است. یک نمایش گرافیکی از عملگر  $g_0 v$  نشان میدهد که این عملگر دارای قسمت های ناممتصل می باشد، شکل (۲-۲) را ببینید.

(1) Glöckle



شکل ۲-۲- نمایش گرافیکی هسته معادله لیپمن- شوئیگر سه ذره ای

در هر جمله فقط دو ذره از سه ذره با هم برهمکنش می کنند درحالیکه ذره سوم به طور آزادانه حرکت می کند و این بدان معناست که یک تابع دلتا در فضای مومنتم وجود دارد. هر گاه بخواهیم معادلات انتگرالی خوب داشته باشیم، باید از قسمتهای نامتصل در کرنل اجتناب کنیم.

۲-۲-۶- معادلات فادیف برای ماتریس T

فادیف در سال ۱۹۶۰ نشان داد [۱۳] معادله لیپمن- شوئیگر (۲-۱۳۲):

$$|\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle = |\phi_{\alpha m}\rangle + g_{\alpha}(E_{\alpha m} \pm i0) \bar{v}_{\alpha} |\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle$$

دارای جواب یکتا نمی باشد و پس از آن به مطالعه خواص عملگر زیر پرداخت:

$$T(z) = v + vG(z)v \tag{۲-۱۴۰}$$

اگر چه این عملگر از نظر ظاهری شبیه به عملگر T دو ذره ایست (معادله (۲-۴۷))، ولی مثل حالت دو ذره ای، این عملگر مستقیماً به یک سطح مقطع پراکندگی ارتباط ندارد. مشابه معادله (۲-۴۶) داریم:

$$G(z) = g_0(z) + g_0(z)vG(z) \tag{a}$$

$$G(z) = g_0(z) + G(z)v g_0(z) \tag{b}$$

$$G(z) = \frac{1}{z - H}$$

$$g_0(z) \equiv \frac{1}{z - h_0}$$

$$\begin{cases} H = h_0 + v \\ h_0 \equiv \frac{\vec{p}_{\alpha}^2}{2\mu_{\alpha}} + \frac{\vec{q}_{\alpha}^2}{2M_{\alpha}} \end{cases}$$

اگر  $G(z)$  را از رابطه (b) در رابطه (a) قرار دهیم داریم:

$$G(z) = g_0(z) + g_0(z)v[g_0(z) + G(z)v g_0(z)]$$

$$= g_0(z) + g_0(z)\{v + vG(z)v\}g_0(z)$$

که در آن:

$$v + vG(z)v = T(z)$$

در نتیجه:

$$G(z) = g_0(z) + g_0(z)T(z)g_0(z) \quad (۲-۱۴۱)$$

عملگر  $T(z)$  کمتر از عملگر  $G(z)$  حلال تکینه است زیرا عملگرهای تکینه  $g_0(z)$  از آن جدا شده اند. درست مثل حالت دو ذره ای (معادله های (۲-۵۶a) و (۲-۵۶b)) معادلات زیر را داریم:

$$\begin{cases} T(z) = v + v g_0(z) T(z) & (۲-۱۴۲a) \\ T(z) = v + T(z) g_0(z) v & (۲-۱۴۲b) \end{cases}$$

این معادلات انتگرالی برای عملگر  $T(z)$  نیز دارای همان مشکلات معادله لیپمن- شوئینگر و معادلات عملگر حلال می باشند زیرا آنها دارای همان کرنل هستند. فادیف با انجام یک سری عملیات به معادلات جدید می رسد. او معادلات بالا را به سه معادله تفکیک می کند:

$$T_i = v_i + v_i g_0 T \quad (۲-۱۴۳)$$

که در آن:

$$\begin{cases} v = v_1 + v_2 + v_3 \\ T = T_1 + T_2 + T_3 \end{cases}$$

با این جدا سازی معادلات فوق تبدیل به یک دستگاه معادلات برای مؤلفه های  $T_i$  می شود:

$$\begin{cases} T_1 = v_1 + v_1 g_0 (T_1 + T_2 + T_3) \\ T_2 = v_2 + v_2 g_0 (T_1 + T_2 + T_3) \\ T_3 = v_3 + v_3 g_0 (T_1 + T_2 + T_3) \end{cases}$$

یا به شکل:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & v_1 \\ v_2 & v_2 & v_2 \\ v_3 & v_3 & v_3 \end{pmatrix} g_0 \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \quad (۲-۱۴۴)$$

با این تعاریف هنوز مشکلی حل نشده است. معادله فوق هنوز دارای کرنل غیر فشرده است و این

موضوع در مورد تمام معادلاتی که با تکرار از آن به دست می آیند نیز صادق است. با این حال این

جدا سازی مسئله را قدری حل می کند و باعث می شود که کرنل دارای تکینگی کمتری باشد.

خط اول معادله ما تریسی فوق عبارتست از:

$$T_1 = v_1 + v_1 g_0 T_1 + v_1 g_0 (T_2 + T_3)$$

$$\rightarrow T_1 - v_1 g_0 T_1 = v_1 + v_1 g_0 (T_2 + T_3)$$

$$(1 - v_1 g_0) T_1 = v_1 + v_1 g_0 (T_2 + T_3)$$

طرفین را از سمت چپ در عبارت  $(1 - v_1 g_0)^{-1}$  ضرب می کنیم. در این صورت داریم:

$$T_1 = (1 - v_1 g_0)^{-1} v_1 + (1 - v_1 g_0)^{-1} v_1 g_0 (T_2 + T_3)$$

اما مطابق رابطه (۲-۸۵a) داریم:

$$t_\alpha(z) = (1 - v_\alpha g_0)^{-1} v_\alpha$$

در نتیجه بدست می آوریم:

$$T_1 = t_1 + t_1 g_0 (T_2 + T_3) \quad (۲-۱۴۵)$$

حال اگر خط دوم و سوم معادله ماتریسی را به همین روال تبدیل کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t_1 & t_1 \\ t_2 & 0 & t_2 \\ t_3 & t_3 & 0 \end{pmatrix} g_0 \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \quad (۲-۱۴۶)$$

به این معادله، معادله فادیف برای ماتریس  $T$  می گویند و آن را اغلب به صورت زیر می نویسند:

$$T_i(z) = t_i(z) + \sum_{j=1}^3 F_{ij}(z) g_0(z) T_j(z)$$

یا به شکل ماتریسی داریم:

$$\vec{T}(z) = \vec{t}(z) + \vec{K}_f(z) \vec{T}(z)$$

که در آن داریم:

$$\left( \vec{K}_f(z) \right)_{ij} = F_{ij}(z) g_0(z) \equiv (1 - \delta_{ij}) t_i(z) g_0(z)$$

در معادله (۲-۱۴۶) به جای پتانسیلهای  $v_i$  ماتریس های  $T$  دو ذره ای، یعنی  $t_i$  ها وجود دارند که در

اینجا عملگرهای دو ذره ای در فضای سه ذره ای هستند رابطه (۲-۱۱۳).

کمیت های  $t_i$  به صورت خارج پوسته وارد معادله فادیف می شوند زیرا:

اولاً: شیفت انرژی  $z - \frac{q_i''^2}{2M}$  داریم،

ثانیاً: محاسبه ضرب عملگری  $t_i g_0 T_j$  مستلزم انتگرال گیری روی تمام حالت‌های میانی ممکنه  $|\bar{p}_i''\rangle|\bar{q}_i''\rangle$  با:

$$\frac{\bar{p}_i^2}{2\mu_i} \neq z - \frac{\bar{q}_i''^2}{2M_i} \neq \frac{\bar{p}_i''^2}{2\mu_i}$$

می باشد. در فصل اول اشاره کردیم که دامنه های پراکندگی دو ذره ای بصورت خارج پوسته در دامنه سه ذره ای وارد می شوند و در نتیجه داده های پراکندگی سه ذره ای حاوی اطلاعات بیشتری نسبت به داده های دو ذره ای تنها می باشد. هم اکنون در اینجا فرمولبندی ریاضی این پدیده ذکر گردید.

چون عملگر  $t_i$  تنها در زیرسیستم  $i$  اثر می کند، کرنل معادله (۲-۱۴۶) هنوز حاوی توابع  $\delta$  می باشد.

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}_i \bar{q}_i | t_i(z) | \bar{p}_i' \bar{q}_i' \rangle &\equiv \langle \bar{p}_i \bar{q}_i | \{v_i + v_i g_i(z) v_i\} | \bar{p}_i' \bar{q}_i' \rangle \\ &= \delta(\bar{q}_i - \bar{q}_i') \langle \bar{p}_i | \hat{t}_i(z - \frac{\bar{q}_i^2}{2M_i}) | \bar{p}_i' \rangle \end{aligned} \quad (2-147)$$

بخاطر وجود این تابع دلتا کرنل دارای نرم اشمیت متناهی نمی باشد. با اینحال معادله (۲-۱۴۶)

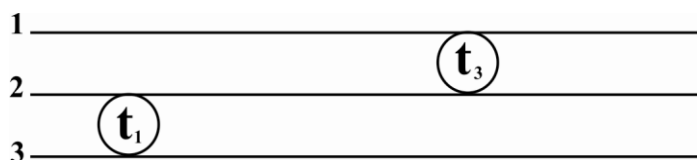
نسبت به معادلات (۲-۱۴۲a) و (۲-۱۴۲b) و (۲-۱۴۳) این مزیت را دارد که در اولین تکرار، توابع

دلتا به واسطه انتگرال گیری حذف می شوند:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t_1 & t_1 \\ t_2 & 0 & t_2 \\ t_3 & t_3 & 0 \end{pmatrix} g_0 \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t_1 & t_1 \\ t_2 & 0 & t_2 \\ t_3 & t_3 & 0 \end{pmatrix} g_0 \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 g_0 t_2 + t_1 g_0 t_3 \\ t_2 g_0 t_1 + t_2 g_0 t_3 \\ t_3 g_0 t_1 + t_3 g_0 t_2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} t_1 g_0 t_2 + t_1 g_0 t_3 & t_1 g_0 t_3 & t_1 g_0 t_2 \\ t_2 g_0 t_3 & t_2 g_0 t_1 + t_2 g_0 t_3 & t_2 g_0 t_1 \\ t_3 g_0 t_2 & t_3 g_0 t_1 & t_3 g_0 t_1 + t_3 g_0 t_2 \end{pmatrix} g_0 \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 g_0(t_2 + t_3) \\ t_2 g_0(t_3 + t_1) \\ t_3 g_0(t_1 + t_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 g_0(t_2 + t_3) & t_1 g_0 t_3 & t_1 g_0 t_2 \\ t_2 g_0 t_3 & t_2 g_0(t_3 + t_1) & t_2 g_0 t_1 \\ t_3 g_0 t_2 & t_3 g_0 t_1 & t_3 g_0(t_1 + t_2) \end{pmatrix} g_0 \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \quad (2-148)$$

همانطور که می بینیم در اینجا فقط عملگرهای حاصلضرب  $t_i g_0 t_j$  با  $i \neq j$  وجود دارند و بنابراین هسته فقط شامل جملاتی است که در آن هر سه ذره به هم مرتبط هستند. شکل (۲-۳) یک نمایش گرافی از چنین جمله ایست. مقایسه آن با نمایش گرافی هسته لیپمن - شوئینگر آموزنده است.



شکل ۲-۳- نمایش گرافی یک جمله خاص هسته تکرار شده فادیف

نرم اشمیت هسته معادلات فادیف تکرار شده (۲-۱۴۸) وقتی وجود دارد که اولاً: پتانسیل خیلی سریع به سمت صفر میل کند و ثانیاً:  $\text{Im } z \neq 0$ .

این موارد نسبتاً امید بخش است ولی هنوز به هدف خود نائل نشده ایم. دو مسئله وجود دارد که باید بررسی شود.

(a) نرم اشمیت هسته معادلات فادیف تکرار شده به ازای  $\text{Im } z = 0$  و  $\text{Re } z > E_{\min}^B$  وجود ندارد ( $E_{\min}^B$  پایین ترین تراز انرژی زیرسیستم ها می باشد) و بنابراین معلوم نیست که هسته به ازای انرژیهای فیزیکی فشرده باشد.

(b) معادلات فادیف از روی معادله مشکل دار (۲-۱۴۴) بدست آمده اند که به ازای  $\text{Im } z = 0$  جواب یکتایی ندارد. بنابراین جای سؤال است که آیا معادلات (۲-۱۴۶) و (۲-۱۴۸) دارای جواب های منحصر بفردی هستند.

قسمت اصلی کار فادیف مربوط به همین دو سؤال می شود [۱۴].

نرم اشمیت یک عبارت به شکل:

$$t_i(z) g_0(z) t_j(z) \quad ; i \neq j \quad (2-149)$$

به ازای  $\text{Im } z \rightarrow 0$  و  $\text{Re } z > E_{\min}^B$  و اگر می شود زیرا ماتریس های  $T$  و همچنین انتشارگرهای آزاد تکینه هستند (دومی فقط به ازای  $\text{Re } z > 0$  و اگر می شود. معادلات (۲-۱۰۹a) و (۲-۱۰۹b) را ببینید).  
دومین تکرار به عملگرهای حاصلضرب به شکل زیر منجر می شود:

$$t_i(z)g_0(z)t_j(z)g_0(z)t_k(z) \quad ; i \neq j \quad j \neq k \quad (2-150)$$

باز این عبارت ها از عبارت های (۲-۱۴۹) کمتر تکینه هستند زیرا انتگرال گیری روی حالت های میانی باعث هموار شدن تکینگی ها می شود و انتگرال گیری های بیشتری در (۲-۱۵۰) وجود دارد.

بعد از چهارمین تکرار که منجر به هسته  $K_F^5$  می شود تکینگی های باقی مانده مثل همان تکینگی های موجود در مسئله دو ذره ای بی ضرر می شود (به تذکر داده شده بعد از معادله (۲-۳۳) توجه کنید). فادیف توانست نشان دهد [۱۵] که توان پنجم هسته معادله (۲-۱۴۸)  $K_F^5$  در یک فضای باناخ مناسب به ازای انرژیهای حقیقی بزرگتر از  $E_{\min}^B$  فشرده است.

بعنوان یک نتیجه استنباط می شود که هسته معادله تکرار نشده فادیف  $K_F$ ، علی رغم توابع دلتا و علی رغم تکینگی های  $t_i$  و  $g_0$  بر روی محور حقیقی انرژی، بعضی ویژگی های مهم را دارا است که ناشی از خواص عملگرهای فشرده می باشد:

(a) روش فرد هولم برای آن معتبر است [۱۵].

(b) هسته فقط یک طیف گسسته  $\eta_\nu$  دارد،

$$K_F \psi_\nu = \eta_\nu \psi_\nu \quad (2-151)$$

(c) عملگر حلال  $R(\lambda) = (\lambda - K_F)^{-1}$  وجود دارد [۱۶] و یک تابع مرو مورفیک<sup>(۱)</sup> از پارامتر  $\lambda$  است. از آنجا که قسمت همگن معادله (۲-۱۴۶) فقط جواب های حالت مقید سه ذره ای دارد [۱۵] این نتیجه را از نکته (a) در می یابیم که معادله (۲-۱۴۶) در انرژیهای پراکندگی دارای جواب های یکتا می باشد. و از نکته (c) چنین نتیجه می شود که برای حل عملی مسئله نیازی نیست که از تکرار چهارم شروع کنیم بلکه می توان با معادله اولیه مستقیماً کار کرد. این موضوع علی الاصول مشکل مربوط به مسئله سه ذره ای ما را حل می کند. برای ذرات باردار مشکلاتی وجود

(1) Meromorphic function

دارد که بخاطر نیروی بلند برد کولنی می باشد که ما در اینجا به آن کاری نداریم [۱۷].  
 مواردی که ذکر شد مربوط به معادلات فادیف برای ماتریس  $T$  بود حال با داشتن موارد فوق می توان  
 معادلات فادیف را برای عملگر حلال بدست آورد.

### ۲-۲-۲- معادلات فادیف برای عملگر حلال

عملگر  $T$  را از معادله (۲-۱۴۲) در عبارت مربوط به عملگر حلال (۲-۱۴۰) قرار می دهیم. داریم:

$$G(z) = g_0(z) + \sum_{i=1}^3 g_0(z) T_i(z) g_0(z) \quad (2-152)$$

با تعریف مؤلفه های  $G_i(z)$  توسط:

$$G_i(z) = g_0(z) T_i(z) g_0(z) \quad (2-153)$$

عملگر حلال به صورت زیر در می آید:

$$G(z) = g_0(z) + \sum_{i=1}^3 G_i(z) \quad (2-154)$$

معادلات انتگرالی مربوط به مؤلفه های  $G_i(z)$  با قرار دادن معادلات فادیف (۲-۱۴۸) در معادله  
 (۲-۱۵۴) بدست می آیند:

$$G_i = g_0 t_i g_0 + g_0 \sum_{j=1}^3 F_{ij} g_0 T_j g_0 \quad (2-155)$$

با گسترش معادله (۲-۴۶) به فضای سه ذره ای خواهیم داشت:

$$g_0 t_i g_0 = g_i - g_0 \quad (2-156)$$

و این معادله به همراه معادله (۲-۱۵۵) نتیجه می دهد:

$$G_i(z) = g_i(z) - g_0(z) + \sum_{j=1}^3 g_0(z) F_{ij}(z) G_j(z) \quad (2-157)$$

اینها معادلات فادیف برای عملگر حلال هستند [۱۱]. در اینجا نیز عملگر فادیف  $F_{ij}(z)$ ، در هسته  
 ظاهر شده است و هر آنچه که در مورد هسته در صفحات ۵۲ و ۵۳ گفته شده در اینجا نیز معتبر  
 می باشد.



## فصل سوم

معادلات فادیف برای حالت مقید سه ذره ای

### ۳-۱- معادلات فادیف برای حالت مقید سیستم سه ذره ای

با معادله شرودینگر سیستم سه ذره ای شروع می کنیم:

$$H \Psi = E \Psi \quad ; H = h_0 + v \quad (3-1)$$

که در اینجا  $h_0$  انرژی جنبشی حرکت نسبی سه ذره است. به جای  $H$  قرار می دهیم:

$$(h_0 + v) \Psi = E \Psi$$

$$(h_0 + \sum_{i=1}^3 v_i) \Psi = E \Psi \quad (3-2)$$

که در آن پتانسیل  $v$  به صورت زیر است:

$$\left[ \begin{array}{l} v = \sum_{i=1}^3 v_i = v_1 + v_2 + v_3 \\ v_1 \equiv v_{23}, v_2 \equiv v_{31}, v_3 \equiv v_{12} \end{array} \right. \quad (3-3)$$

می توان این معادله را بصورت یک معادله انتگرالی نوشت:

$$\sum_{i=1}^3 v_i \Psi = (E - h_0) \Psi$$

چون برای حالت مقید:  $E - h_0 < 0$  می باشد و مخالف صفر است، می توان طرفین رابطه بالا را به آن تقسیم کرد:

$$\Psi = \frac{1}{(E - h_0)} \sum_{i=1}^3 v_i \Psi \quad (3-4)$$

با تجزیه  $\Psi$  به سه مؤلفه که مؤلفه های فادیف نامیده می شود خواهیم داشت:

$$\Psi = \sum_{i=1}^3 \psi_i = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \quad (3-5)$$

$$\psi_i \equiv g_0 v_i \Psi \quad (3-6)$$

می بینیم که  $\psi_i$  آن قسمت از  $\Psi$  است که از بر همکنش فقط  $v_i$  از سمت چپ بر  $\Psi$  بدست می آید.

$$\begin{aligned} \psi_i &= g_0 v_i \Psi \\ &= g_0 v_i \sum_j \psi_j = g_0 v_i \psi_i + g_0 v_i \sum_{i \neq j} \psi_j \end{aligned} \quad (3-7)$$

$$\psi_i - g_0 v_i \psi_i = g_0 v_i \sum_{i \neq j} \psi_j$$

$$(1 - g_0 v_i) \psi_i = g_0 v_i \sum_{i \neq j} \psi_j \quad (3-8)$$

$$\rightarrow \psi_i = (1 - g_0 v_i)^{-1} g_0 v_i \sum_{i \neq j} \psi_j \quad (3-9)$$

$$(1 - g_0 v_i)^{-1} g_0 v_i = [1 + g_0 v_i + g_0 v_i g_0 v_i + \dots] g_0 v_i = g_0 v_i + g_0 v_i g_0 v_i + \dots$$

$$= g_0 (v_i + v_i g_0 v_i + v_i g_0 v_i g_0 v_i + \dots) \equiv g_0 t_i \quad (3-10)$$

چنانکه ملاحظه می شود، ماتریس  $T$  برای کانال  $i$  ام ظاهر می شود. این  $t_i$  به وضوح  $v_i$  را تا مرتبه بینهایت جمع می بندد. همانطور که از قبل می دانیم ماتریس  $t$  از معادله لیپمن- شوئیگر پیروی می کند:

$$t_i = v_i + v_i g_0 t_i \quad (3-11)$$

از ترکیب روابط (3-9) و (3-10) داریم:

$$\psi_i = g_0 t_i \sum_{j \neq i} \psi_j \quad ; i = 1, 2, 3 \quad (3-12)$$

به معادلات فوق معادلات همگن فادیف می گویند که از سه معادله کوپل شده تشکیل شده است. اگر ما موردی را در نظر بگیریم که سه ذره فرمیون باشند آنگاه  $\Psi$  درکل پاد متقارن است در نتیجه توابع  $\psi_1$  و  $\psi_2$  و  $\psi_3$  از نظر شکل تابعی یکسان هستند و فقط ذرات در آنها تعویض می شوند. می توان این مطلب را به راحتی مطابق زیر نشان داد. اگر عملگر تعویض را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$P_{ij} f(\dots i, \dots j, \dots) = f(\dots j, \dots i, \dots)$$

بطوریکه  $P_{ij}$  جای ذرات  $i$  و  $j$  را با هم عوض می کند، و اگر پتانسیل  $v_1$  را به صورت زیر نشان دهیم:

$$v_1 = v_{23} = v(1, 23)$$

در اینصورت اگر عملگر تعویض روی آن اثر کند داریم:

$$P_{12} P_{23} v_1 = P_{12} P_{23} v(1, 23) = P_{12} v(1, 32) = v(2, 31) = v_2$$

از معادله (3-6) داریم:

$$\psi_i \equiv g_0 v_i \Psi$$

$$\rightarrow \psi_2 = g_0 v_2 \Psi = g_0 (P_{12} P_{23} v_1) \Psi = P_{12} P_{23} (g_0 v_1 \Psi)$$

$$\rightarrow \psi_2 = P_{12} P_{23} \psi_1 \quad (3-13)$$

و همینطور داریم:

$$\psi_3 = g_0 v_3 \Psi = g_0 (P_{13} P_{23} v_1) \Psi = P_{13} P_{23} (g_0 v_1 \Psi)$$

$$\rightarrow \psi_3 = P_{13} P_{23} \psi_1 \quad (3-14)$$

یعنی می توان دو مؤلفه دیگر فادیف را از روی یک مؤلفه دیگر آن بدست آورد. در نتیجه فقط یک مؤلفه فادیف برای کار کافیسست. ما مؤلفه  $\psi_1$  را انتخاب می کنیم و با استفاده از معادله (3-12) داریم:

$$\psi_i = g_0 t_i \sum_{j \neq i} \psi_j$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \psi_1 &= g_0 t_1 [\psi_2 + \psi_3] = g_0 t_1 [P_{12} P_{23} \psi_1 + P_{13} P_{23} \psi_1] \\ &= g_0 t_1 [P_{12} P_{23} + P_{13} P_{23}] \psi_1 \end{aligned} \quad (3-15)$$

در ادامه برای راحتی کار اندیس (۱) را برمی داریم. عملگر تعویض را به صورت زیر بنا می کنیم:

$$P \equiv P_{12} P_{23} + P_{13} P_{23} \quad (3-16)$$

که در این صورت معادله (۳-۱۵) به شکل زیر در می آید:

$$\psi = g_0 t P \psi \quad (3-17)$$

این معادله یک معادله فادیف برای سه ذره یکسان می باشد. البته این عبارت برای بوزون ها نیز معتبر است. تابع موج کل عبارتست از:

$$\begin{aligned} \Psi &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \\ &= \psi_1 + P_{12} P_{23} \psi_1 + P_{13} P_{23} \psi_1 \\ &= \psi + [P_{12} P_{23} + P_{13} P_{23}] \psi \\ &= \psi + P \psi \\ &= (1 + P) \psi \end{aligned} \quad (3-18)$$

از آنجا که  $\Psi$  در کل پاد متقارن است یکی از موارد مورد نیاز این است که مؤلفه فادیف مربوط به جفت (۱) یعنی (۲۳) پاد متقارن باشد. بعنوان مثال اگر از نوتاسیون  $\psi_1 = \psi(1,23)$  استفاده کنیم داریم:

$$\begin{aligned} P_{23} \psi(1,23) &\equiv \psi(1,32) = -\psi(1,23) \\ P_{13} \Psi &= P_{13} [1 + P_{12} P_{23} + P_{13} P_{23}] \psi(1,23) \\ &= P_{13} \psi(1,23) + P_{13} P_{12} P_{23} \psi(1,23) + P_{13} P_{13} P_{23} \psi(1,23) \\ &= \psi(3,21) + P_{13} P_{12} \psi(1,32) + P_{13} P_{13} \psi(1,32) \\ &= \psi(3,21) + P_{13} \psi(2,31) + P_{13} \psi(3,12) \\ &= \psi(3,21) + \psi(2,13) + \psi(1,32) \\ &= -\psi(3,12) - \psi(2,31) - \psi(1,23) \\ &= -[\psi(3,12) + \psi(2,31) + \psi(1,23)] = -\Psi \\ \rightarrow P_{13} \Psi &= -\Psi \end{aligned} \quad (3-19)$$

## ۳-۲- نمایش در فضای مومنتم معادله فادیف

حال می‌خواهیم نمایش فضای مومنتم معادله فادیف را بنویسیم از (۳-۱۷) داریم:

$$\psi = g_0 t P \psi$$

حالتهایی را که در فصل دوم در رابطه‌های (۲-۹۶) و (۲-۹۷) و (۲-۹۸) معرفی کردیم را به یاد می‌آوریم و در اینجا در کانال (۱) کار می‌کنیم و برای سهولت اندیس‌های (۱) را نمی‌نویسیم. داریم:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} \vec{q} | \psi \rangle &= \langle \vec{p} \vec{q} | g_0 t P | \psi \rangle \\ &= \int d^3 p'' d^3 q'' \int d^3 p' d^3 q' \langle \vec{p} \vec{q} | g_0 t | \vec{p}' \vec{q}' \rangle \langle \vec{p}' \vec{q}' | P | \vec{p}'' \vec{q}'' \rangle \langle \vec{p}'' \vec{q}'' | \psi \rangle \end{aligned} \quad (3-20)$$

همانطور که از سمت راست معادله بالا مشخص است برای نوشتن معادله فادیف در فضای مومنتم لازم است که ما دو عبارت:  $\langle \vec{p} \vec{q} | g_0 t | \vec{p}' \vec{q}' \rangle$  و  $\langle \vec{p}' \vec{q}' | P | \vec{p}'' \vec{q}'' \rangle$  را حساب کنیم.

$$1- \text{محاسبه } \langle \vec{p} \vec{q} | g_0 t | \vec{p}' \vec{q}' \rangle \dots\dots\dots$$

$$\langle \vec{p} \vec{q} | g_0 t | \vec{p}' \vec{q}' \rangle = ? \quad (3-21)$$

برای این منظور ابتدا  $g_0$  را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم  $g_0$  عملگر حلال برای ذره آزاد است:

$$g_0 \equiv \frac{1}{E - h_0}$$

همانطور که در فصل دوم اشاره شد مومنتم‌های سه ذره در یک سیستم سه ذره‌ای نسبت به یک دستگاه ساکن بوسیله  $\vec{k}_i$  مشخص می‌شود که در آن  $i, (3 \text{ و } 2 \text{ و } 1)$  است.

مومنتم کل  $\vec{K}$  عبارتست از:

$$\vec{K} = \sum_i \vec{k}_i = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3$$

و برای  $\vec{k}_i$  ها روابط زیر برقرار می‌باشد:

$$\langle \vec{k}_i | \vec{k}'_j \rangle = \delta_{ij} \delta(\vec{k}_i - \vec{k}'_j) \quad (3-22)$$

$$|\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \rangle \equiv |\vec{k}_1 \rangle |\vec{k}_2 \rangle |\vec{k}_3 \rangle \quad (3-23)$$

$$\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 | \vec{k}'_1 \vec{k}'_2 \vec{k}'_3 \rangle = \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) \delta(\vec{k}_2 - \vec{k}'_2) \delta(\vec{k}_3 - \vec{k}'_3) \quad (3-24)$$

مجموعه کامل حالتها در فضای هیلبرت سه ذره ای به وسیله عبارت زیر داده می شود:

$$\int d^3k_1 \int d^3k_2 \int d^3k_3 \left| \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \right\rangle \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 | = 1 \quad (3-25)$$

و تغییر پایه به فضای مومنتم ژاکوبی بوسیله عبارت زیر داده می شود:

$$(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) \rightarrow (\vec{p}_\alpha, \vec{q}_\alpha, \vec{K})$$

$$\begin{cases} \vec{p}_i = \frac{1}{2}(\vec{k}_j - \vec{k}_k) & (3-26a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{q}_i = \frac{2}{3}\vec{k}_i - \frac{1}{3}(\vec{k}_j + \vec{k}_k) & (3-26b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{K} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 & (3-26c) \end{cases}$$

که در آن  $(i, j, k)$  جایگشت های دوره ای از  $(123)$  هستند و داریم:

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 | \vec{p}_k \vec{q}_k \vec{K} \rangle &= \delta(\vec{p}_k - \frac{1}{2}(\vec{k}_l - \vec{k}_m)) \delta(\vec{q}_k - \frac{2}{3}[\vec{k}_k - \frac{1}{2}(\vec{k}_l + \vec{k}_m)]) \\ &\times \delta(\vec{K} - \vec{k}_k - \vec{k}_l - \vec{k}_m) \end{aligned} \quad (3-27)$$

که  $(klm)$  جایگشت های دوره ای از  $(123)$  هستند. بنابراین یک مجموعه کامل متفاوت از حالت های

قبلی بوسیله عبارت زیر داده می شود:

$$\int d^3p_l \int d^3q_l \int d^3K \left| \vec{p}_l \vec{q}_l \vec{K} \right\rangle \langle \vec{p}_l \vec{q}_l \vec{K} | = 1 \quad (3-28)$$

با توجه به تعریف  $(3-27)$  بردار حالت  $|\vec{p}_l \vec{q}_l \vec{K}\rangle$  به صورت زیر است:

$$\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 | \vec{p}_l \vec{q}_l \vec{K} \rangle \equiv \delta(\vec{p}_l - \frac{1}{2}(\vec{k}_2 - \vec{k}_3)) \delta(\vec{q}_l - \frac{2}{3}\vec{k}_1 + \frac{1}{3}(\vec{k}_2 + \vec{k}_3)) \delta(\vec{K} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \quad (3-29)$$

به همین ترتیب میتوان جمله های  $|\vec{p}_2 \vec{q}_2 \vec{K}\rangle$  و  $|\vec{p}_3 \vec{q}_3 \vec{K}\rangle$  را تعریف نمود. بعلت کاربرد جمله های

همپوشانی  $\langle \vec{p}_1 \vec{q}_1 \vec{K} | \vec{p}'_1 \vec{q}'_1 \vec{K}' \rangle$  و  $\langle \vec{p}_1 \vec{q}_1 \vec{K} | \vec{p}_2 \vec{q}_2 \vec{K}' \rangle$  و  $\langle \vec{p}_1 \vec{q}_1 \vec{K} | \vec{p}_3 \vec{q}_3 \vec{K}' \rangle$  در ادامه کار، مفید است

که این جمله ها را در همین جا محاسبه کنیم.

\*جمله:  $\langle \vec{p}_1 \vec{q}_1 \vec{K} | \vec{p}'_1 \vec{q}'_1 \vec{K}' \rangle$   
.....

$$\langle \vec{p}_1 \vec{q}_1 \vec{K} | \vec{p}'_1 \vec{q}'_1 \vec{K}' \rangle =$$

$$= \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 \langle \vec{p}_1 \vec{q}_1 \vec{K} | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \rangle \cdot \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 | \vec{p}'_1 \vec{q}'_1 \vec{K}' \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 \delta(\vec{p}_1 - \frac{1}{2}(\vec{k}_2 - \vec{k}_3)) \delta(\vec{q}_1 - \frac{2}{3}(\vec{k}_1 - \frac{1}{2}(\vec{k}_2 + \vec{k}_3))) \delta(\vec{K} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \\
 &\times \delta(\vec{p}'_1 - \frac{1}{2}(\vec{k}_2 - \vec{k}_3)) \delta(\vec{q}'_1 - \frac{2}{3}(\vec{k}_1 - \frac{1}{2}(\vec{k}_2 + \vec{k}_3))) \delta(\vec{K}' - \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \\
 &= \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_3 \cdot 2^3 \delta(\vec{q}_1 - \frac{2}{3}\vec{k}_1 + \frac{2}{3}\vec{p}_1 + \frac{2}{3}\vec{k}_3) \delta(\vec{K} - 2\vec{p}_1 - \vec{k}_1 - 2\vec{k}_3) \\
 &\times \delta(\vec{p}'_1 - \vec{p}_1) \delta(\vec{q}'_1 - \frac{2}{3}\vec{k}_1 + \frac{2}{3}\vec{p}_1 + \frac{2}{3}\vec{k}_3) \delta(\vec{K}' - 2\vec{p}_1 - \vec{k}_1 - 2\vec{k}_3) \\
 &= \int d\vec{k}_3 \cdot 2^3 \delta(\vec{q}_1 - \frac{2}{3}[\vec{K}' - 2\vec{p}_1 - 2\vec{k}_3] + \frac{2}{3}\vec{p}_1 + \frac{2}{3}\vec{k}_3) \delta(\vec{K} - 2\vec{p}_1 - [\vec{K}' - 2\vec{p}_1 - 2\vec{k}_3] - 2\vec{k}_3) \\
 &\times \delta(\vec{p}'_1 - \vec{p}_1) \delta(\vec{q}'_1 - \frac{2}{3}[\vec{K}' - 2\vec{p}_1 - 2\vec{k}_3] + \frac{2}{3}\vec{p}_1 + \frac{2}{3}\vec{k}_3) \delta(\vec{K}' - 2\vec{p}_1 - [\vec{K}' - 2\vec{p}_1 - 2\vec{k}_3] - 2\vec{k}_3) \\
 &= \delta(\vec{q}_1 - \vec{q}'_1) \delta(\vec{K} - \vec{K}') \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1)
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \langle \vec{p}_1 \vec{q}_1 \vec{K} \mid \vec{p}'_1 \vec{q}'_1 \vec{K}' \rangle = \delta(\vec{q}_1 - \vec{q}'_1) \delta(\vec{K} - \vec{K}') \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \quad (3-30)$$

می توان از اینجا فرض کرد که:

$$\mid \vec{p}_1 \vec{q}_1 \vec{K} \rangle \equiv \mid \vec{p}_1 \rangle \mid \vec{q}_1 \rangle \mid \vec{K} \rangle \quad (3-31)$$

بطوریکه داریم:

$$\begin{cases}
 \langle \vec{p}_1 \mid \vec{p}'_1 \rangle = \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) & (3-32a) \\
 \langle \vec{q}_1 \mid \vec{q}'_1 \rangle = \delta(\vec{q}_1 - \vec{q}'_1) & (3-32b) \\
 \langle \vec{K} \mid \vec{K}' \rangle = \delta(\vec{K} - \vec{K}') & (3-32c)
 \end{cases}$$

به این ترتیب داریم:

$$\langle \vec{p}_1 \vec{q}_1 \mid \vec{p}'_1 \vec{q}'_1 \rangle = \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \delta(\vec{q}_1 - \vec{q}'_1) \quad (3-33)$$

\*جمله:  $\langle \bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{K} | \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{K}' \rangle$

می دانیم در اینجا اندیسها مشخص کننده کانال هستند و اگر نخواهیم از اندیس خاصی استفاده

کنیم، کانال را در جلوی کت ها می آوریم. مثلاً:  $|\bar{p} \bar{q}\rangle_1 \equiv |\bar{p}_1 \bar{q}_1\rangle$  و یا:  $|\bar{p}_1 \bar{q}_1\rangle \equiv |\bar{p}_1 \bar{q}_1\rangle_1$ .

حال محاسبه  $\langle \bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{K} | \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{K}' \rangle$ :

$$\langle \bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{K} | \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{K}' \rangle = \int d\bar{k}_1 d\bar{k}_2 d\bar{k}_3 \langle \bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{K} | \bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3 \rangle \langle \bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3 | \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{K}' \rangle \quad (۳-۳۴)$$

$$\begin{aligned} &= \int d\bar{k}_1 d\bar{k}_2 d\bar{k}_3 \delta(\bar{p}_1 - \frac{1}{2}(\bar{k}_2 - \bar{k}_3)) \delta(\bar{q}_1 - \frac{2}{3}\bar{k}_1 + \frac{1}{3}(\bar{k}_2 + \bar{k}_3)) \\ &\times \delta(\bar{K} - \bar{k}_1 - \bar{k}_2 - \bar{k}_3) \delta(\bar{p}_2 - \frac{1}{2}(\bar{k}_3 - \bar{k}_1)) \delta(\bar{q}_2 - \frac{2}{3}\bar{k}_2 + \frac{1}{3}(\bar{k}_3 + \bar{k}_1)) \delta(\bar{K}' - \bar{k}_1 - \bar{k}_2 - \bar{k}_3) \\ &= 2^3 \int d\bar{k}_1 d\bar{k}_2 \delta(\bar{q}_1 - \frac{2}{3}\bar{k}_1 + \frac{1}{3}\bar{k}_2 + \frac{1}{3}(\bar{k}_2 - 2\bar{p}_1)) \delta(\bar{K} - \bar{k}_1 - \bar{k}_2 - (\bar{k}_2 - 2\bar{p}_1)) \\ &\times \delta(\bar{p}_2 - \frac{1}{2}(\bar{k}_2 - 2\bar{p}_1) + \frac{1}{2}\bar{k}_1) \delta(\bar{q}_2 - \frac{2}{3}\bar{k}_2 + \frac{1}{3}(\bar{k}_2 - 2\bar{p}_1) + \frac{1}{3}\bar{k}_1) \delta(\bar{K}' - \bar{k}_1 - \bar{k}_2 - (\bar{k}_2 - 2\bar{p}_1)) \\ &= 2^3 \int d\bar{k}_2 \delta(\bar{q}_1 - \frac{2}{3}(\bar{K}' - 2\bar{k}_2 + 2\bar{p}_1) + \frac{2}{3}\bar{k}_2 - \frac{2}{3}\bar{p}_1) \\ &\times \delta(\bar{K} - (\bar{K}' - 2\bar{k}_2 + 2\bar{p}_1) - 2\bar{k}_2 + 2\bar{p}_1) \delta(\bar{p}_2 - \frac{1}{2}\bar{k}_2 + \bar{p}_1 + \frac{1}{2}(\bar{K}' - 2\bar{k}_2 + 2\bar{p}_1)) \\ &\times \delta(\bar{q}_2 - \frac{1}{3}\bar{k}_2 - \frac{2}{3}\bar{p}_1 + \frac{1}{3}(\bar{K}' - 2\bar{k}_2 + 2\bar{p}_1)) \\ &= 2^3 \delta(\bar{q}_1 - \frac{2}{3}\bar{K}' + 2(\bar{q}_2 + \frac{1}{3}\bar{K}') - 2\bar{p}_1) \delta(\bar{K} - \bar{K}') \delta(\bar{p}_2 - \frac{3}{2}(\bar{q}_2 + \frac{1}{3}\bar{K}') + 2\bar{p}_1 + \frac{1}{2}\bar{K}') \end{aligned}$$

در نتیجه بدست می آوریم:

$$\rightarrow \langle \bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{K} | \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{K}' \rangle = \delta(\bar{K} - \bar{K}') \delta(\bar{q}_1 + 2\bar{q}_2 - 2\bar{p}_1) \delta(\bar{p}_1 + \frac{1}{2}\bar{p}_2 - \frac{3}{4}\bar{q}_2) \quad (۳-۳۵)$$

\*جمله:  $\langle \bar{p}_1 \bar{q}_1 | \bar{p}_2 \bar{q}_2 \rangle$

می توانیم سهم  $\bar{K}$  و  $\bar{K}'$  را در رابطه (۳-۳۵) برداریم و بنویسیم:



$$\langle \bar{p}_1 \bar{q}_1 | \bar{p}_2 \bar{q}_2 \rangle = \delta(\bar{q}_1 + 2\bar{q}_2 - 2\bar{p}_1) \delta(\bar{p}_1 + \frac{1}{2}\bar{p}_2 - \frac{3}{4}\bar{q}_2) \quad (3-36)$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}_1 \bar{q}_1 | \bar{p}_2 \bar{q}_2 \rangle &= \delta(\bar{q}_1 + 2\bar{q}_2 - 2(-\frac{1}{2}\bar{p}_2 + \frac{3}{4}\bar{q}_2)) \delta(\bar{p}_1 + \frac{1}{2}\bar{p}_2 - \frac{3}{4}\bar{q}_2) \\ &= \delta(\bar{q}_1 + \frac{1}{2}\bar{q}_2 + \bar{p}_2) \delta(\bar{p}_1 + \frac{1}{2}\bar{p}_2 - \frac{3}{4}\bar{q}_2) \end{aligned} \quad (3-37)$$

اما از روابط بین مومنتم ها در کانالهای مختلف که در فصل دوم بدست آوردیم استفاده می کنیم.

روابط بین مومنتم ها در دو کانال (۱) و (۲) با توجه به رابطه های (۲-۹۴a) و (۲-۹۴b) عبارتند از:

$$\begin{cases} \bar{p}_1 = -\frac{1}{2}\bar{p}_2 + \frac{3}{4}\bar{q}_2 \\ \bar{q}_1 = -\bar{p}_2 - \frac{1}{2}\bar{q}_2 \end{cases} \quad (3-38)$$

در نتیجه توابع دلتا در رابطه (۳-۳۷) به شکل زیر ساده می شود:

$$\langle \bar{p}_1 \bar{q}_1 | \bar{p}_2 \bar{q}_2 \rangle = \delta(\bar{p}_1 - \bar{p}_1(\bar{p}_2, \bar{q}_2)) \delta(\bar{q}_1 - \bar{q}_1(\bar{p}_2, \bar{q}_2)) \quad (3-39)$$

بهتر است بجای عبارت:  $\delta(\bar{q}_1 + \bar{p}_2 + \frac{1}{2}\bar{q}_2)$   $\delta(\bar{p}_1 + \frac{1}{2}\bar{p}_2 - \frac{3}{4}\bar{q}_2)$  از عبارت زیر استفاده کنیم:

$$\delta(\bar{p}_1 - \frac{1}{2}\bar{q}_1 - \bar{q}_2) \delta(\bar{p}_2 + \bar{q}_1 + \frac{1}{2}\bar{q}_2) \quad (3-40)$$

که در آن از (۲-۹۴b) استفاده کرده ایم.

با معرفی این فضا هامیلتونین  $h_0$  برای سیستم سه ذره ای به شکل زیر در می آید:

$$h_0 = \sum_i \frac{\bar{k}_i^2}{2m} = \frac{\bar{K}^2}{2M} + \frac{p_l^2}{2\mu_l} + \frac{q_l^2}{2M_l} \quad ; l=1,2,3 \quad (3-41)$$

$$M = 3m; \quad M_l = \frac{2}{3}m \quad ; \mu_l = \frac{1}{2}m \quad (3-42)$$

که  $m$  در اینجا جرم هر ذره است. دردستگاه مرکز جرم برای انرژی جنبشی غیر نسبیتی بدست

می آوریم:

$$h_0 = \frac{p_l^2}{m} + \frac{q_l^2}{\frac{4}{3}m} = \frac{p_l^2}{m} + \frac{3q_l^2}{4m} \quad ; l=1,2,3 \quad (3-43)$$

و در نتیجه برای عملگر حلال ذره آزاد داریم:

$$g_0 \equiv \frac{1}{E-h_0} = \frac{1}{E - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m}} \quad (3-44)$$

این  $g_0$  را در رابطه (۳-۲۱) قرار می دهیم داریم:

$$\langle \bar{p} \bar{q} | g_0 t(z) | \bar{p}' \bar{q}' \rangle = \langle \bar{p} \bar{q} | \frac{1}{E-h_0} t(z) | \bar{p}' \bar{q}' \rangle = \frac{1}{E - \frac{p^2}{2m} - \frac{3q^2}{4m}} \langle \bar{p} \bar{q} | t(z) | \bar{p}' \bar{q}' \rangle \quad (3-45)$$

در اینجا برای محاسبه عبارت  $\langle \bar{p} \bar{q} | t(z) | \bar{p}' \bar{q}' \rangle$  معادله لیپمن- شوئیگر را برای  $t(z)$  در نظر می گیریم:

$$t(z) = v + v g_0 t(z)$$

$$\langle \bar{p} \bar{q} | t(z) | \bar{p}' \bar{q}' \rangle = \langle \bar{p} \bar{q} | v | \bar{p}' \bar{q}' \rangle + \langle \bar{p} \bar{q} | v g_0 t(z) | \bar{p}' \bar{q}' \rangle \quad (3-46)$$

عملگر  $t(z)$  بوسیله  $v$  داده می شود که فقط روی حالت‌های  $|\bar{p}\rangle$  در زیر سیستم های دو ذره ای اثر می کند بنابراین داریم:

$$\langle \bar{p} \bar{q} | v | \bar{p}' \bar{q}' \rangle = \delta(\bar{q} - \bar{q}') \langle \bar{p} | v | \bar{p}' \rangle \quad (3-47)$$

ذره سوم بدون برهمکنش که به وسیله  $\bar{q}$  مشخص می شود ذره تماشاگر نامیده می شود. با این حساب داریم:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p} \bar{q} | t(z) | \bar{p}' \bar{q}' \rangle &= \delta(\bar{q} - \bar{q}') \langle \bar{p} | v | \bar{p}' \rangle \\ &+ \int d^3 p'' d^3 q'' \delta(\bar{q} - \bar{q}'') \langle \bar{p} \bar{q} | v | \bar{p}'' \bar{q}'' \rangle \frac{1}{E + i\varepsilon - \frac{p''^2}{m} - \frac{3q''^2}{4m}} \langle \bar{p}'' \bar{q}'' | t(z) | \bar{p}' \bar{q}' \rangle \\ &= \delta(\bar{q} - \bar{q}') \langle \bar{p} | v | \bar{p}' \rangle + \int d^3 p'' \langle \bar{p} | v | \bar{p}'' \rangle \frac{1}{E + i\varepsilon - \frac{p''^2}{m} - \frac{3q^2}{4m}} \langle \bar{p}'' \bar{q} | t(z) | \bar{p}' \bar{q}' \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \bar{p} \bar{q} | t(z) | \bar{p}' \bar{q}' \rangle = \delta(\bar{q} - \bar{q}') \langle \bar{p} | \hat{t}(E - \frac{3q^2}{4m}) | \bar{p}' \rangle \quad (3-48)$$

که  $\hat{t}(z)$  عملگر دو ذره ای در زیر سیستم با انرژی  $E - \frac{3q^2}{4m}$  است.

چون انرژی زیر سیستم دو ذره ای مستقل از مومنتم های اولیه  $(\bar{p})$  و نهایی  $(\bar{p}')$  است به این ماتریس  $\hat{t}(z)$  یک ماتریس  $t$  خارج پوسته انرژی کامل می گویند.

این ماتریس خارج پوسته  $\hat{t}(z)$  از معادله لیپمن- شوئیگر زیر پیروی می کند:

$$\langle \bar{p} | \hat{t}(z) | \bar{p}' \rangle = \langle \bar{p} | v | \bar{p}' \rangle + \int d^3 p'' \langle \bar{p} | v | \bar{p}'' \rangle \frac{1}{z - \frac{\bar{p}''^2}{m}} \langle \bar{p}'' | \hat{t}(z) | \bar{p}' \rangle \quad (۳-۴۹)$$

که در آن:  $z = E - \frac{3\bar{q}^2}{4m}$ . در نتیجه رابطه (۳-۲۱) می شود:

$$\langle \bar{p} \bar{q} | g_0 t | \bar{p}' \bar{q}' \rangle = \frac{1}{E - \frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{3\bar{q}^2}{4m}} \left[ \langle \bar{p} | v | \bar{p}' \rangle + \int d^3 p'' \langle \bar{p} | v | \bar{p}'' \rangle \frac{1}{z - \frac{\bar{p}''^2}{m}} \langle \bar{p}'' | \hat{t}(z) | \bar{p}' \rangle \right] \quad (۳-۵۰)$$

از آنجا که برای حالت‌های مقید  $E < 0$  است به ازای افزایش مقادیر  $q$ ، مقدار  $z$  هم از مقدار  $E$  به طرف انرژیهای منفی تر می رود.

$$۲- محاسبه جمله:  $\langle \bar{p}' \bar{q}' | P | \bar{p}'' \bar{q}'' \rangle$$$

در اینجا با خصیصه مهم سیستم سه ذره ای مواجه می شویم و آن گذار بین دو زیر سیستم دو ذره ای است که توسط عملگر تعویض که قبلاً تعریف کردیم:  $P = P_{12}P_{23} + P_{13}P_{23}$  صورت می گیرد:

$$P = P_{12}P_{23} + P_{13}P_{23}$$

$$P_{12}P_{23} | \bar{p} \bar{q} \rangle_1 = P_{12}P_{23} (1,23) = P_{12} (1,32) = (2,31) = | \bar{p} \bar{q} \rangle_2 \quad (۳-۵۱)$$

$$P_{13}P_{23} | \bar{p} \bar{q} \rangle_1 = P_{13}P_{23} (1,23) = P_{13} (1,32) = (3,12) = | \bar{p} \bar{q} \rangle_3 \quad (۳-۵۲)$$

از آنجا که عملگرها باید در پایه ای محاسبه شوند که از یک نوع هستند، در نتیجه برای محاسبه عناصر ماتریسی فوق باید پایه ها را بصورت  $\bar{p}_1(\bar{p}_2, \bar{q}_2)$  و  $\bar{q}_1(\bar{p}_2, \bar{q}_2)$  در نظر بگیریم. با استفاده از روابط (۲-۹۲) و (۲-۹۳) می توان نوشت:

$$\left| | \bar{p} \bar{q} \rangle_2 = \left( -\frac{1}{2} \bar{p} + \frac{3}{4} \bar{q} \right), \left( -\bar{p} - \frac{1}{2} \bar{q} \right) \right\rangle \quad (۳-۵۳a)$$

$$\left| | \bar{p} \bar{q} \rangle_3 = \left( -\frac{1}{2} \bar{p} - \frac{3}{4} \bar{q} \right), \left( \bar{p} - \frac{1}{2} \bar{q} \right) \right\rangle \quad (۳-۵۳b)$$

و حال می توانیم عنصر ماتریسی زیر را حساب کنیم:

$$\langle \bar{p}' \bar{q}' | P | \bar{p}'' \bar{q}'' \rangle = {}_1 \langle \bar{p}' \bar{q}' | P | \bar{p}'' \bar{q}'' \rangle_1 = {}_1 \langle \bar{p}' \bar{q}' | P_{12}P_{23} + P_{13}P_{23} | \bar{p}'' \bar{q}'' \rangle$$

که با توجه به رابطه های (۳-۵۱) و (۳-۵۲) داریم:

$$\langle \bar{p}' \bar{q} | P | \bar{p}'' \bar{q}'' \rangle = {}_1 \langle \bar{p}' \bar{q} | \bar{p}'' \bar{q}'' \rangle_2 + {}_1 \langle \bar{p}' \bar{q} | \bar{p}'' \bar{q}'' \rangle_3 \quad (۳-۵۴)$$

$$\rightarrow \langle \bar{p}' \bar{q} | P | \bar{p}'' \bar{q}'' \rangle =$$

$$\left\langle \bar{p}' \bar{q} \left| \left( -\frac{1}{2} \bar{p}'' + \frac{3}{4} \bar{q}'' \right) ; \left( -\bar{p}'' - \frac{1}{2} \bar{q}'' \right) \right. \right\rangle + \left\langle \bar{p}' \bar{q} \left| \left( -\frac{1}{2} \bar{p}'' - \frac{3}{4} \bar{q}'' \right) ; \left( \bar{p}'' - \frac{1}{2} \bar{q}'' \right) \right. \right\rangle$$

$$= \delta(\bar{p}' + \frac{1}{2} \bar{p}'' - \frac{3}{4} \bar{q}'') \delta(\bar{q} + \bar{p}'' + \frac{1}{2} \bar{q}'') + \delta(\bar{p}' + \frac{1}{2} \bar{p}'' + \frac{3}{4} \bar{q}'') \delta(\bar{q} - \bar{p}'' + \frac{1}{2} \bar{q}'')$$

دو تابع دلتا، دو انتگرال را در معادله (۳-۲۰) حذف می کنند. اگر بستگی به  $\bar{p}''$  را در تابع دلتا حذف

کنیم برای عناصر ماتریسی عملگر جایگشتی بدست می آوریم:

$$\begin{cases} \bar{p}'' + \bar{q} + \frac{1}{2} \bar{q}'' = 0 & \rightarrow \bar{p}'' = -\bar{q} - \frac{1}{2} \bar{q}'' \\ \bar{q} - \bar{p}'' + \frac{1}{2} \bar{q}'' = 0 & \rightarrow \bar{p}'' = \bar{q} + \frac{1}{2} \bar{q}'' \end{cases}$$

$$\langle \bar{p}' \bar{q} | P | \bar{p}'' \bar{q}'' \rangle = \delta(\bar{p}' + \frac{1}{2} [-\bar{q} - \frac{1}{2} \bar{q}''] - \frac{3}{4} \bar{q}'') \delta(\bar{q} + \bar{p}'' + \frac{1}{2} \bar{q}'')$$

$$+ \delta(\bar{p}' + \frac{1}{2} [\bar{q} + \frac{1}{2} \bar{q}''] + \frac{3}{4} \bar{q}'') \delta(\bar{q} - \bar{p}'' + \frac{1}{2} \bar{q}'')$$

$$= \delta(\bar{p}' - \frac{1}{2} \bar{q} - \bar{q}'') \delta(\bar{q} + \bar{p}'' + \frac{1}{2} \bar{q}'') + \delta(\bar{p}' + \frac{1}{2} \bar{q} + \bar{q}'') \delta(\bar{q} - \bar{p}'' + \frac{1}{2} \bar{q}'') \quad (۳-۵۵)$$

حال که جملات (۱) و (۲) محاسبه شدند می توان معادله فادیف (۳-۲۰) را به طور صریح زیر نوشت:

$$\langle \bar{p} \bar{q} | \psi \rangle$$

$$= \int d^3 \bar{p}' \int d^3 \bar{p}'' \int d^3 \bar{q}'' \frac{1}{E - \frac{p'^2}{m} - \frac{3q''^2}{4m}} \langle \bar{p} | t(E - \frac{3q''^2}{4m}) | \bar{p}' \rangle \langle \bar{p}' \bar{q} | P | \bar{p}'' \bar{q}'' \rangle \langle \bar{p}'' \bar{q}'' | \psi \rangle$$

$$= \frac{1}{E - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m}} \int d^3 q'' \left\{ \left\langle \bar{p} \left| t(E - \frac{3q''^2}{4m}) \right| \left( -\frac{1}{2} \bar{q} - \bar{q}'' \right) \right\rangle \left\langle \left( \bar{q} + \frac{1}{2} \bar{q}'' \right), \bar{q}'' \left| \psi \right. \right\rangle \right.$$

$$\left. + \left\langle \bar{p} \left| t(E - \frac{3q''^2}{4m}) \right| \left( +\frac{1}{2} \bar{q} + \bar{q}'' \right) \right\rangle \left\langle \left( -\bar{q}' - \frac{1}{2} \bar{q}'' \right), \bar{q}'' \left| \psi \right. \right\rangle \right\}$$

(۳-۵۶)

می بینیم که عملگر تعویض آرگومان های دامنه های  $t$  و  $\nu$  را می چرخاند. معادله فادیف یک معادله انتگرالی سه بعدی است با شش متغیر که به وضوح ملاحظه می شود انجام آن کار ساده ای نیست. بهر حال با کامپیوترها و ابزار محاسباتی جدید حل معادله (۳-۵۶) ممکن است.

## فصل چهارم

حل معادلات همگن فادیف برای حالت مقید با استفاده از تجزیه به امواج جزئی

## ۴-۱- تجزیه به امواج جزئی

در این فصل می خواهیم ببینیم در عمل چگونه می توان معادلات فادیف را حل نمود. برای این کار ابتدا از معادلات عملگری به معادلات انتگرالی می رویم.

برای اینکه به معادلات انتگرالی برویم بایستی یک فضای نمایش انتخاب کنیم. در فضای مومنت  $\langle \bar{p}_\alpha, \bar{q}_\alpha \rangle$ ، معادلات انتگرالی بصورت شش بعدی می شوند. چون مومنت زاویه ای کل  $L$  و مؤلفه  $M$  آن، کمیت منفصل هستند، در این صورت می توان فضای نمایشی را انتخاب کرد که بردارهای آن ویژه حالت های  $L$  و  $M$  باشند. به این طریق، معادلات انتگرالی بصورت چهار بعدی در می آیند.

این هنوز برای محاسبات عددی خیلی زیاد است. گرچه کمیت پایسته دیگری وجود ندارد ولی می توان به قیمت افزایش تعداد معادلات کوپل شده، بعد را باز هم کاهش داد. بدین منظور، ما از یک فضای حالات استفاده می کنیم که توسط مومنت زاویه ای کل  $L$ ، مؤلفه  $z$  آن  $M$ ، مومنت زاویه ای  $l_\alpha$  مربوط به زیر سیستم  $\alpha$ ، مومنت زاویه ای  $\lambda_\alpha$  مربوط به ذره  $\alpha$  و قدرمطلق های مومنت های  $p_\alpha$  و  $q_\alpha$ ، مشخص می شود. بسته به این که چه زیر سیستمی را ترجیح می دهیم، می توان سه نوع از این فضاها را مشخص نمود:

$$\{p_1 q_1 l_1 \lambda_1 LM\} , \{p_2 q_2 l_2 \lambda_2 LM\} , \{p_3 q_3 l_3 \lambda_3 LM\}$$

با این انتخاب، معادلات انتگرالی ما دو بعدی می شوند زیرا تنها دو متغیر پیوسته  $p_\alpha$  و  $q_\alpha$  داریم. در عوض تعداد معادلات کوپل شده بینهایت می شود زیرا به بینهایت طریق می توان یک مومنت زاویه ای مشخص  $L$  را به مومنت های زاویه ای  $l_\alpha$  و  $\lambda_\alpha$  تجزیه نمود. با این وجود، چون نیروهای هسته ای کوتاه برد هستند، برهمکنش ها به ازای تعداد کمی از مومنت های زاویه ای مؤثر واقع می شوند و در نتیجه به جای تعداد بینهایت معادله میتوان با دقت بالایی به تعداد محدود اکتفا کرد. حال تجزیه به امواج جزئی را در مورد معادلات فادیف پیاده میکنیم.

سیستم سه ذره ای بدون اسپین را در نظر می گیریم. معادله انتگرالی که برای  $\psi_1$  در فضای مومنت استفاده می شود عبارتست از:

$$|\psi_1\rangle = g_0 t_1 P |\psi_1\rangle \quad (4-1)$$

که در آن داریم:

$$g_0 = \frac{1}{z - h_0}, \quad h_0 = \frac{\hat{p}^2}{m} + \frac{3\hat{q}^2}{4m}, \quad P = P_{12}P_{23} + P_{13}P_{23}$$

قبل از شروع محاسبات این فصل مواردی را یادآوری می کنیم.

مثل قبل در نمایش کانال (۱) کار می کنیم و برای سهولت از نوشتن اندیس تا حد امکان صرف نظر می کنیم. قبلاً نشان دادیم که:

$$\bar{p}_1 = \frac{1}{2} (\bar{k}_2 - \bar{k}_3) \quad (۴-۲a)$$

$$\bar{q}_1 = \frac{2}{3} \left[ \bar{k}_1 - \frac{1}{2} (\bar{k}_2 + \bar{k}_3) \right] \quad (۴-۲b)$$

$$|\bar{p}_1 \bar{q}_1\rangle \equiv |\bar{p}_1\rangle \otimes |\bar{q}_1\rangle$$

وقتی ذرات اسپین نداشته باشند، مجموعه بردارهای  $\{\bar{p}, \bar{q}\}$  فضای هیلبرت را می تنند.

$$\langle \bar{p}_1 \bar{q}_1 | \bar{p}'_1 \bar{q}'_1 \rangle = \delta(\bar{p}_1 - \bar{p}'_1) \delta(\bar{q}_1 - \bar{q}'_1) \quad (۴-۳)$$

با توجه به مقدماتی که در ابتدای این فصل آمد، به جای استفاده از پایه  $\{|\bar{p}\rangle\}$  می توان از پایه

$\{|plm_l\rangle\}$  و به جای استفاده از پایه  $\{|\bar{q}\rangle\}$  می توان از پایه  $\{|q\lambda m_\lambda\rangle\}$  استفاده نمود. داریم:

$$\sum_{l,m} \int dp p^2 |plm_l\rangle \langle plm_l| = 1_p \quad (۴-۴a)$$

$$\sum_{\lambda, m_\lambda} \int dq q^2 |q\lambda m_\lambda\rangle \langle q\lambda m_\lambda| = 1_q \quad (۴-۴b)$$

$$\langle \bar{p}' | plm_l \rangle = \langle p', \hat{p}' | plm_l \rangle = \langle p' | p \rangle \langle \hat{p}' | lm_l \rangle = \frac{\delta(p - p')}{p^2} y_{lm}(\hat{p}') \quad (۴-۵a)$$

$$\langle plm_l | p'l'm_l \rangle = \langle p | p' \rangle \langle lm_l | l'm_l \rangle = \frac{\delta(p - p')}{p^2} \delta_{l,l'} \delta_{m,m_l'} \quad (۴-۵b)$$

حال حالت‌های با مومنتم زاویه ای کل را می سازیم:

$$\bar{L} = \bar{l} + \bar{\lambda}$$

$$|pq(l\lambda)LM\rangle = \int dp' p'^2 dq' q'^2 \sum_{m_l m_\lambda} |p'l m_l q'\lambda m_\lambda\rangle \langle p'l m_l q'\lambda m_\lambda | pq(l\lambda)LM\rangle$$

در اینجا نماد  $(l\lambda)$  برای نشان دادن اینکه  $l$  و  $\lambda$  با هم جفت شده و  $L$  را درست کرده اند، بکار رفته است.

$$\rightarrow |pq(l\lambda)LM\rangle = \int dp' p'^2 dq' q'^2 \sum_{m_l m_\lambda} |p'q'l m_l \lambda m_\lambda\rangle \langle p' | p \rangle \langle q' | q \rangle \langle l m_l \lambda m_\lambda | (l\lambda)LM \rangle$$



که با استفاده از روابط:

$$\langle p'|p\rangle = \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \quad ; \quad \langle q'|q\rangle = \frac{\delta(q-q')}{q'^2}$$

بدست می آوریم:

$$\rightarrow |pq(l\lambda)LM\rangle = \sum_{m_l, m_\lambda} |p q l m_l \lambda m_\lambda\rangle \langle l m_l \lambda m_\lambda | (l\lambda)LM\rangle \quad (4-6)$$

از این پس برای راحتی، مجموعه اعداد کوانتومی منفصل  $l\lambda LM$  را با  $\alpha$  نشان می دهیم:

$$|pq(l\lambda)LM\rangle \equiv |pq\alpha\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle pq\alpha | p'q'\alpha'\rangle &= \langle pq(l\lambda)LM | p'q'(l'\lambda')L'M'\rangle \\ &= \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \langle (l\lambda)LM | (l'\lambda')L'M'\rangle \\ &= \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \delta_{l,l'} \delta_{\lambda,\lambda'} \delta_{L,L'} \delta_{M,M'} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \langle pq\alpha | p'q'\alpha'\rangle = \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \delta_{\alpha,\alpha'} \quad (4-7)$$

$$\sum_{\alpha} \int dp p^2 dq q^2 |pq\alpha\rangle \langle pq\alpha| = 1_p \otimes 1_q$$

حال با این یاد آوری ها به معادله (4-1) بر می گردیم:

$$|\psi_1\rangle = g_0 t_1 P |\psi_1\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle pq\alpha | \psi_1\rangle &= \sum_{\alpha', \alpha'', \alpha'''} \int dp' p'^2 dq' q'^2 dp'' p''^2 dq'' q''^2 dp''' p'''^2 dq''' q'''^2 \\ &\times \langle pq\alpha | g_0 | p'q'\alpha'\rangle \langle p'q'\alpha' | t_1 | p''q''\alpha''\rangle \langle p''q''\alpha'' | P | p'''q'''\alpha'''\rangle \langle p'''q'''\alpha''' | \psi_1\rangle \end{aligned} \quad (4-8)$$

چنانکه ملاحظه می شود، برای محاسبه سمت چپ معادله (4-8) باید سه جمله موجود در سمت

راست، یعنی:

$$\langle p'''q'''\alpha''' | P | p'''q'''\alpha'''\rangle , \langle p'q'\alpha' | t_1 | p''q''\alpha''\rangle , \langle pq\alpha | g_0 | p'q'\alpha'\rangle$$

را جداگانه بدست آوریم.

$$\langle pq\alpha | g_0(z) | p'q'\alpha' \rangle = ?$$

داریم:

$$g_0(z) = \frac{1}{z-h_0} \quad ; h_0 = \frac{\bar{p}^2}{m} + \frac{3\bar{q}^2}{4m}$$

$$\begin{cases} \int d\bar{p} |\bar{p}\rangle \langle \bar{p}| = 1 \\ \int d\bar{q} |\bar{q}\rangle \langle \bar{q}| = 1 \end{cases}$$

$$\langle \bar{p}\bar{q} | g_0(z) | \bar{p}'\bar{q}' \rangle = \langle \bar{p}\bar{q} | \frac{1}{z - \frac{\hat{p}^2}{m} - \frac{3\hat{q}^2}{4m}} | \bar{p}'\bar{q}' \rangle \quad (4-9)$$

چون  $[\hat{p}, \hat{q}] = 0$ ، بنابراین هر یک از عملگرهای  $\hat{p}$  و  $\hat{q}$  روی حالت  $|\bar{p}\bar{q}\rangle$  اثر کرده و مقدار بردار را می دهد. پس رابطه (4-9) می شود:

$$\langle \bar{p}\bar{q} | g_0(z) | \bar{p}'\bar{q}' \rangle = (z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m})^{-1} \delta(\bar{p} - \bar{p}') \delta(\bar{q} - \bar{q}') \quad (4-10)$$

اما داریم:

$$\langle pq\alpha | g_0(z) | p'q'\alpha' \rangle =$$

$$\int d\bar{p}'' d\bar{q}'' d\bar{p}''' d\bar{q}''' \langle pq\alpha | \bar{p}''\bar{q}'' \rangle \langle \bar{p}''\bar{q}'' | g_0(z) | \bar{p}'''\bar{q}''' \rangle \langle \bar{p}'''\bar{q}''' | \bar{p}'\bar{q}'\alpha' \rangle$$

با استفاده از رابطه (4-10) جمله دوم طرف راست می شود:

$$\langle \bar{p}''\bar{q}'' | g_0(z) | \bar{p}'''\bar{q}''' \rangle = (z - \frac{p''^2}{m} - \frac{3q''^2}{4m})^{-1} \delta(\bar{p}'' - \bar{p}''') \delta(\bar{q}'' - \bar{q}''')$$

$$\rightarrow \langle pq\alpha | g_0(z) | p'q'\alpha' \rangle =$$

$$\int d\bar{p}'' d\bar{q}'' \langle pq\alpha | \bar{p}''\bar{q}'' \rangle (z - \frac{p''^2}{m} - \frac{3q''^2}{4m})^{-1} \langle \bar{p}''\bar{q}'' | \bar{p}'\bar{q}'\alpha' \rangle \quad (4-11)$$

ولی داریم:

$$\langle \bar{p}'' \bar{q}'' | \bar{p}' \bar{q}' \bar{\alpha}' \rangle = \sum_{m_l, m_{\lambda'}} \langle \bar{p}'' \bar{q}'' | p' q' l' m_l \lambda' m_{\lambda'} \rangle \langle l' m_l \lambda' m_{\lambda'} | (l' \lambda') L M' \rangle \quad (۴-۱۲)$$

و همینطور:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}'' \bar{q}'' | p' q' l' m_l \lambda' m_{\lambda'} \rangle &= \langle \bar{p}'' | p' l' m_l \rangle \langle \bar{q}'' | q' \lambda' m_{\lambda'} \rangle \\ &= \frac{\delta(p'' - p')}{p''^2} \frac{\delta(q'' - q')}{q''^2} y_{l', m_l}(\hat{p}'') y_{\lambda', m_{\lambda'}}(\hat{q}'') \end{aligned} \quad (۴-۱۳)$$

با جایگذاری رابطه (۴-۱۳) در رابطه (۴-۱۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}'' \bar{q}'' | \bar{p}' \bar{q}' \bar{\alpha}' \rangle &= \\ &= \frac{\delta(p'' - p')}{p''^2} \frac{\delta(q'' - q')}{q''^2} \sum_{m_l, m_{\lambda'}} \langle l' m_l \lambda' m_{\lambda'} | (l' \lambda') L M' \rangle y_{l', m_l}(\hat{p}'') y_{\lambda', m_{\lambda'}}(\hat{q}'') \end{aligned} \quad (۴-۱۴)$$

رابطه (۴-۱۴) را در رابطه (۴-۱۱) قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} \langle pq\alpha | g_0(z) | p'q'\alpha' \rangle &= \\ &= \int dp'' p''^2 dq'' q''^2 d\hat{p}'' d\hat{q}'' \frac{\delta(p'' - p')}{p''^2} \frac{\delta(q'' - q')}{q''^2} \sum_{m_l, m_{\lambda'}} \langle (l\lambda) LM | l m_l \lambda m_{\lambda'} \rangle y_{l, m_l}^*(\hat{p}'') y_{\lambda, m_{\lambda'}}^*(\hat{q}'') \\ &\times \left(z - \frac{p''^2}{m} - \frac{3q''^2}{4m}\right)^{-1} \frac{\delta(p'' - p')}{p''^2} \frac{\delta(q'' - q')}{q''^2} \sum_{m_l, m_{\lambda'}} \langle l' m_l \lambda' m_{\lambda'} | (l' \lambda') L M' \rangle y_{l', m_l}(\hat{p}'') y_{\lambda', m_{\lambda'}}(\hat{q}'') \\ &= \frac{\delta(p - p')}{p^2} \frac{\delta(q - q')}{q^2} \left(z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m}\right)^{-1} \langle (l\lambda) LM | (l\lambda) L M' \rangle \delta_{l, l'} \delta_{\lambda, \lambda'} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \langle pq\alpha | g_0(z) | p'q'\alpha' \rangle = \left(z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m}\right)^{-1} \frac{\delta(p - p')}{p^2} \frac{\delta(q - q')}{q^2} \delta_{\alpha, \alpha'} \quad (۴-۱۵)$$

۲- محاسبه جمله:  $\langle p'q'\alpha' | t_1(z) | p''q''\alpha'' \rangle$

$$\langle p'q'\alpha' | t_1(z) | p''q''\alpha'' \rangle = ?$$

قبل از اینکه معادله انتگرالی  $t_1(z)$  را بدست آوریم ابتدا نشان می دهیم که این عنصر ماتریسی تبدیل

به عنصر ماتریسی یک عملگر دو ذره ای  $\hat{t}_1(z)$  می شود.

برای این کار از تعریف زیر استفاده می کنیم:

$$t_1(z) = v_1 + v_1 g_1(z) v_1$$

که در آن داریم:

$$g_1(z) = \frac{1}{z - \frac{\hat{q}^2}{2M} - \frac{\hat{p}^2}{2\mu} - v_1(\vec{r})} \quad ; v_1(\vec{r}) = v_1(|\vec{r}|) \quad (۴-۱۶)$$

در این صورت می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \langle pq\alpha | t_1(z) | p'q'\alpha' \rangle &= \langle pq\alpha | v_1 | p'q'\alpha' \rangle + \sum_{\alpha'', \alpha'''} \int dp'' p''^2 dq'' q''^2 dp''' p'''^2 dq''' q'''^2 \\ &\times \langle pq\alpha | v_1 | p''q''\alpha'' \rangle \langle p''q''\alpha'' | g_1(z) | p'''q'''\alpha''' \rangle \langle p'''q'''\alpha''' | v_1 | p'q'\alpha' \rangle \end{aligned} \quad (۴-۱۷)$$

که در آن باید جملات:  $\langle pq\alpha | v_1 | p'q'\alpha' \rangle$  و  $\langle pq\alpha | g_1(z) | p'q'\alpha' \rangle$  را بدست آوریم.

\*ابتدا جمله  $\langle pq\alpha | v_1 | p'q'\alpha' \rangle$  را بدست می آوریم.

ما به بررسی برهمکنش بین سه ذره یکسان با اسپین صفر می پردازیم که برهمکنش جفتی بین آنها یک کمیّت اسکالر است. برای برهمکنش دو ذره ای  $v$  داریم:

$$\langle plm | v | p'l'm' \rangle = \int d\vec{r} d\vec{r}' \langle plm | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | v | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | p'l'm' \rangle \quad (۴-۱۸)$$

همانطور که در (۴-۱۶) فرض کردیم پتانسیل موضعی و تابع اندازه فاصله دو ذره است یعنی:

$$\langle \vec{r} | v | \vec{r}' \rangle = v(|\vec{r}|) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (۴-۱۹)$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \langle plm | v | p'l'm' \rangle &= \int d\vec{r} v(|\vec{r}|) \langle plm | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | p'l'm' \rangle \\ &= \int d\vec{r} d\vec{p}'' d\vec{p}''' v(r) \langle plm | \vec{p}'' \rangle \langle \vec{p}'' | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \vec{p}''' \rangle \langle \vec{p}''' | p'l'm' \rangle \end{aligned} \quad (۴-۲۰)$$

با قرار دادن مقادیر معادل زیر و بسط موج تخت بر حسب  $j_l$  ها:

$$\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$$

$$e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} = 4\pi \sum_{l,m} (+i)^l j_l(pr) y_{lm}^*(\hat{p}) y_{lm}(\hat{r})$$

بدست می آوریم:

$${}_1\langle plm | v_1 | p'l'm' \rangle_1 \equiv \langle plm | v | p'l'm' \rangle = \delta_{l,l'} \delta_{m_l, m_{l'}} v_l(p, p') \quad (۴-۲۱)$$

که در آن عبارتست از:

$$v_l(p, p') \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dr r^2 v(r) j_l(pr) j_l(p'r) \quad (۴-۲۲)$$

حال نمایش  $v_1$  را در پایه سه ذره  $|pq\alpha\rangle_1$  می نویسیم:

$$\langle pq\alpha | v | p'q'\alpha' \rangle = ?$$

می دانیم:

$$|pq\alpha\rangle = \sum_{m_l, m_\lambda} |plm_l\rangle |q\lambda m_\lambda\rangle \langle lm_l \lambda m_\lambda | (l\lambda) LM \rangle$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \rightarrow \langle pq\alpha | v | p'q'\alpha' \rangle &= \\ &= \sum_{(m_l, m_\lambda); (m_{l'}, m_{\lambda'})} \langle (l\lambda) LM | lm_l \lambda m_\lambda \rangle \langle l'm_{l'} \lambda' m_{\lambda'} | (l'\lambda') L'M' \rangle \langle q\lambda m_\lambda | \langle plm_l | v | p'l'm_{l'} \rangle | q'\lambda' m_{\lambda'} \rangle \\ &= \sum_{(m_l, m_\lambda); (m_{l'}, m_{\lambda'})} \langle plm_l | v | p'l'm_{l'} \rangle \langle q\lambda m_\lambda | q'\lambda' m_{\lambda'} \rangle \langle (l\lambda) LM | lm_l \lambda m_\lambda \rangle \langle l'm_{l'} \lambda' m_{\lambda'} | (l'\lambda') L'M' \rangle \\ &= \sum_{m_l, m_\lambda} \delta_{l,l'} \delta_{\lambda,\lambda'} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} v_l(p, p') \langle (l\lambda) LM | lm_l \lambda m_\lambda \rangle \langle l m_l \lambda m_\lambda | (l\lambda) L'M' \rangle \end{aligned}$$

با داشتن رابطه:

$$\sum_{m_l, m_\lambda} |lm_l \lambda m_\lambda\rangle \langle lm_l \lambda m_\lambda| = 1$$

خواهیم داشت:

$$\langle pq\alpha | v | p'q'\alpha' \rangle = \delta_{l,l'} \delta_{\lambda,\lambda'} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} v_l(p, p') \langle (l\lambda) LM | (l\lambda) L'M' \rangle$$

$$\langle pq\alpha | v | p'q'\alpha' \rangle = \delta_{\alpha,\alpha'} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} v_l(p, p') \quad (۴-۲۳)$$

\*حال جمله:  $\langle pq\alpha | g_1(z) | p'q'\alpha' \rangle$  را محاسبه می کنیم.

داریم:

$$\begin{aligned}
 \langle pq\alpha | g_1(z) | p'q'\alpha' \rangle &= \\
 &= \sum_{m_l, m_\lambda} \sum_{m_{l'}, m_{\lambda'}} \langle (l\lambda)LM | lm_l \lambda m_\lambda \rangle \langle l'm_{l'} \lambda' m_{\lambda'} | (l'\lambda')L'M' \rangle \langle pqlm_l \lambda m_\lambda | g_1(z) | p'q'l'm_{l'} \lambda' m_{\lambda'} \rangle \\
 &= \sum_{m_l, m_\lambda} \sum_{m_{l'}, m_{\lambda'}} \langle (l\lambda)LM | lm_l \lambda m_\lambda \rangle \langle l'm_{l'} \lambda' m_{\lambda'} | (l'\lambda')L'M' \rangle \\
 &\times \delta_{\lambda, \lambda'} \delta_{m_\lambda, m_{\lambda'}} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \langle plm_l | \hat{g}_1(z - \frac{q^2}{2M}) | p'l'm_{l'} \rangle \\
 &= \sum_{m_l, m_\lambda, m_{l'}} \langle (l\lambda)LM | lm_l \lambda m_\lambda \rangle \langle l'm_{l'} \lambda m_\lambda | (l'\lambda)L'M' \rangle \delta_{\lambda, \lambda'} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \langle plm_l | \hat{g}_1(z - \frac{q^2}{2M}) | p'l'm_{l'} \rangle
 \end{aligned} \tag{۴-۲۴}$$

$$h_1 = \frac{p_1^2}{2\mu_1} + v_1 \quad \text{می دانیم:}$$

اگر پتانسیل بستگی شعاعی داشته باشد داریم:

$$\langle plm | h_1 | p'l'm' \rangle = \delta_{l, l'} \delta_{m_l, m_{l'}} \left\{ \frac{\delta(p-p')}{2\mu} + v_l(p, p') \right\} \tag{۴-۲۵}$$

$$\langle plm_l | h_1^n | p'l'm_{l'} \rangle = \delta_{l, l'} \delta_{m_l, m_{l'}} \langle plm_l | h_1^n | p'l'm_l \rangle \tag{۴-۲۶}$$

در نتیجه برای جمله  $\langle plm_l | \hat{g}_1(z - \frac{q^2}{2M}) | p'l'm_{l'} \rangle$  در رابطه (۴-۲۴) بدست می آوریم:

$$\langle plm_l | \hat{g}_1(z - \frac{q^2}{2M}) | p'l'm_{l'} \rangle = \delta_{l, l'} \delta_{m_l, m_{l'}} \langle plm_l | \hat{g}_1(z - \frac{q^2}{2M}) | p'l'm_l \rangle \tag{۴-۲۷}$$

با قرار دادن رابطه (۴-۲۷) در رابطه (۴-۲۴) بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 \langle pq\alpha | g_1(z) | p'q'\alpha' \rangle &= \\
 &\sum_{m_l, m_\lambda, m_{l'}} \langle (l\lambda)LM | lm_l \lambda m_\lambda \rangle \langle l'm_{l'} \lambda m_\lambda | (l'\lambda)L'M' \rangle \delta_{\lambda, \lambda'} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \delta_{l, l'} \delta_{m_l, m_{l'}} \\
 &\times \langle plm_l | \hat{g}_1(z - \frac{q^2}{2M}) | p'l'm_l \rangle
 \end{aligned}$$

در نهایت داریم:

$$\langle pq\alpha | g_1(z) | p'q'\alpha' \rangle = \delta_{\alpha,\alpha'} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \langle plm_l | \hat{g}_1(z - \frac{q^2}{2M}) | p'lm_l \rangle \quad (۴-۲۸)$$

حال دو جمله محاسبه شده (۴-۲۳) و (۴-۲۸) را در رابطه (۴-۱۷) قرار می دهیم.

$$\begin{aligned} & \langle pq\alpha | t_1(z) | p'q'\alpha' \rangle \\ &= \delta_{\alpha,\alpha'} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} v_l(p, p') + \sum_{\alpha'', \alpha'''} \int dp'' p''^2 dq'' q''^2 dp''' p'''^2 dq''' q'''^2 \\ & \times \delta_{\alpha,\alpha''} \frac{\delta(q-q'')}{q''^2} v_l(p, p'') \langle p''q''\alpha'' | g_1(z) | p'''q'''\alpha''' \rangle \delta_{\alpha'',\alpha'} \frac{\delta(q'''-q')}{q'''^2} v_{l'''}(p''', p') \\ &= \delta_{\alpha,\alpha'} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \langle plm_l | \{ v_1 + v_1 \hat{g}_1(z - \frac{q^2}{2M}) v_1 \} | p'lm_l \rangle \end{aligned} \quad (۴-۲۹)$$

با در نظر گرفتن عبارت زیر:

$$\hat{t}_1(z - \frac{q^2}{2M}) = v_1 + v_1 \hat{g}_1(z - \frac{q^2}{2M}) v_1 \quad (۴-۳۰)$$

داریم:

$$\langle pq\alpha | t_1(z) | p'q'\alpha' \rangle = \delta_{\alpha,\alpha'} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \langle plm_l | \hat{t}_1(z - \frac{q^2}{2M}) | p'lm_l \rangle \quad (۴-۳۱)$$

با استفاده از نماد:

$$\langle plm_l | \hat{t}_1(z - \frac{q^2}{2M}) | p'lm_l \rangle \equiv t_l(p, p', z - \frac{q^2}{2M}) \quad (۴-۳۲)$$

رابطه (۴-۲۹) بصورت زیر در می آید:

$$\langle pq\alpha | t_1(z) | p'q'\alpha' \rangle = \delta_{\alpha,\alpha'} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} t_l(p, p', z - \frac{q^2}{2M}) \quad (۴-۳۳)$$

حال این نتیجه را در معادله انتگرالی  $t_1(z)$  قرار می دهیم:

$$t_1(z) = v_1 + v_1 g_0(z) t_1(z)$$

$$\langle p q \alpha | t_1(z) | p' q' \alpha' \rangle = \langle p q \alpha | v_1 | p' q' \alpha' \rangle + \sum_{\alpha'', \alpha'''} \int dp'' p''^2 dq'' q''^2 dp''' p'''^2 dq''' q'''^2$$

$$\times \langle p q \alpha | v_1 | p'' q'' \alpha'' \rangle \langle p'' q'' \alpha'' | g_0(z) | p''' q''' \alpha''' \rangle \langle p''' q''' \alpha''' | t_1(z) | p' q' \alpha' \rangle \quad (4-34)$$

طرف راست معادلات (4-33) و (4-34) را مساوی هم قرار می دهیم:

$$\delta_{\alpha, \alpha'} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} t_1(p, p', z - \frac{q^2}{2M}) = \langle p q \alpha | v_1 | p' q' \alpha' \rangle + \sum_{\alpha'', \alpha'''} \int dp'' p''^2 dq'' q''^2 dp''' p'''^2 dq''' q'''^2$$

$$\times \langle p q \alpha | v_1 | p'' q'' \alpha'' \rangle \langle p'' q'' \alpha'' | g_0(z) | p''' q''' \alpha''' \rangle \langle p''' q''' \alpha''' | t_1(z) | p' q' \alpha' \rangle$$

در نهایت بدست می آوریم:

$$t_1(p, p', z - \frac{3q^2}{4m}) = v_1(p, p') + \int dp'' p''^2 v_1(p, p'') (z - \frac{p''^2}{m} - \frac{3q^2}{4m})^{-1} t_1(p'', p', z - \frac{3q^2}{4m})$$

$$(4-35)$$

چنانکه ملاحظه می شود برای مطالعه سیستم سه ذره ای نیاز به داشتن معلومات از ماتریسهای  $t(z)$  خارج پوسته انرژی است.

۳- محاسبه جمله:  $\langle p q \alpha | P | p' q' \alpha' \rangle$

$$\langle p q \alpha | P | p' q' \alpha' \rangle = ? \quad (4-36)$$

عملگر تعویض را قبلاً بصورت  $P \equiv P_{12} P_{23} + P_{13} P_{23}$  تعریف کرده ایم در نتیجه آنچه را که می خواهیم بدست آوریم عبارتست از:

$${}_1 \langle p q \alpha | (P_{12} P_{23} + P_{13} P_{23}) | p' q' \alpha' \rangle_1 = ? \quad (4-37)$$

بهتر است ابتدا جمله زیر را حساب کنیم:

$${}_1 \langle p q \alpha | P_{12} P_{23} | p' q' \alpha' \rangle_1 = ? \quad (4-38)$$



می دانیم:

$$|pq\alpha\rangle_1 = |\bar{p}_{23}|\bar{q}_1|(l_{23} \lambda_1)LM\rangle \quad (۴-۳۹)$$

$$|pq\alpha\rangle_2 = |\bar{p}_{31}|\bar{q}_2|(l_{31} \lambda_2)LM\rangle \quad (۴-۴۰)$$

$$|pq\alpha\rangle_3 = |\bar{p}_{12}|\bar{q}_3|(l_{12} \lambda_3)LM\rangle \quad (۴-۴۱)$$

و همینطور:

$$\begin{aligned} P_{12}P_{23} |pq\alpha\rangle_1 &= P_{12}P_{23} |\bar{p}_{23}|\bar{q}_1|(l_{23} \lambda_1)LM\rangle \\ &= P_{12} |\bar{p}_{32}|\bar{q}_1|(l_{32} \lambda_1)LM\rangle \\ &= |\bar{p}_{31}|\bar{q}_2|(l_{31} \lambda_2)LM\rangle \\ &= |pq\alpha\rangle_2 \end{aligned} \quad (۴-۴۲)$$

و به همین ترتیب داریم:

$$P_{13}P_{23} |pq\alpha\rangle_1 = |pq\alpha\rangle_3 \quad (۴-۴۳)$$

با توجه به دو رابطه اخیر رابطه (۴-۳۸) می شود:

$${}_1\langle pq\alpha | P_{12}P_{23} |p'q'\alpha'\rangle_1 = {}_1\langle pq\alpha | p'q'\alpha'\rangle_2 = X_{12} \quad (۴-۴۴)$$

با استفاده از مجموعه کامل:

$$1 = \int |\bar{p}\bar{q}\rangle_{11} \langle \bar{p}\bar{q} | d\bar{p} d\bar{q} \quad (۴-۴۵)$$

$$1 = \int |\bar{p}\bar{q}\rangle_{22} \langle \bar{p}\bar{q} | d\bar{p} d\bar{q} \quad (۴-۴۶)$$

معادله (۴-۴۴) را به شکل زیر می نویسیم:

$$X_{12} = {}_1\langle pq\alpha | p'q'\alpha'\rangle_2 = \int d\bar{p}''d\bar{q}''d\bar{p}'''d\bar{q}''' \quad {}_1\langle pq\alpha | \bar{p}''\bar{q}''\rangle_{11} \langle \bar{p}''\bar{q}'' | \bar{p}'''\bar{q}'''\rangle_{22} \langle \bar{p}'''\bar{q}''' | p'q'\alpha'\rangle_2 \quad (۴-۴۷)$$

اما سه جمله در سمت راست رابطه (۴-۴۷) وجود دارد. با توجه به روابطی که در ابتدای این فصل

ارائه شد برای جملات اول و سوم از روابط صفحه بعد استفاده می کنیم:

$${}_1\langle \bar{p}' \bar{q}' | p q \alpha \rangle_1 \equiv {}_1\langle \bar{p}' \bar{q}' | p q (l\lambda) LM \rangle_1 = \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} Y_{l,\lambda}^{LM}(\hat{p}', \hat{q}') \quad (۴-۴۸)$$

$${}_2\langle \bar{p}' \bar{q}' | p q \alpha \rangle_2 = \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} Y_{l,\lambda}^{LM}(\hat{p}', \hat{q}') \quad (۴-۴۹)$$

جمله همپوشانی دوم را هم در فصل سوم طبق رابطه (۳-۳۸) و (۳-۴۰) به شکل زیر بدست آورده ایم:

$$\langle \bar{p}_1 \bar{q}_1 | \bar{p}_2 \bar{q}_2 \rangle = \delta(\bar{q}_1 + \frac{1}{2}\bar{q}_2 + \bar{p}_2) \delta(\bar{p}_1 + \frac{1}{2}\bar{p}_2 - \frac{3}{4}\bar{q}_2)$$

$$\langle \bar{p}_1 \bar{q}_1 | \bar{p}_2 \bar{q}_2 \rangle = \delta(\bar{p}_1 - \frac{1}{2}\bar{q}_1 - \bar{q}_2) \delta(\bar{p}_2 + \bar{q}_1 + \frac{1}{2}\bar{q}_2)$$

در نتیجه با این جایگذاریها داریم:

$$\begin{aligned} X_{12} &\equiv \int d\bar{p}'' d\bar{q}'' d\bar{p}''' d\bar{q}''' {}_1\langle p q \alpha | \bar{p}'' \bar{q}'' \rangle_1 {}_1\langle \bar{p}'' \bar{q}'' | \bar{p}''' \bar{q}''' \rangle_2 {}_2\langle \bar{p}''' \bar{q}''' | p' q' \alpha' \rangle_2 \\ &= \int d\bar{p}'' d\bar{q}'' d\bar{p}''' d\bar{q}''' \frac{\delta(p-p'')}{p^2} \frac{\delta(q-q'')}{q''^2} Y_{l,\lambda}^{LM}(\hat{p}'', \hat{q}'') \\ &\quad \times \delta(\bar{p}'' - \frac{1}{2}\bar{q}'' - \bar{q}''') \delta(\bar{p}''' + \bar{q}'' + \frac{1}{2}\bar{q}''') \frac{\delta(p'-p''')}{p'^2} \frac{\delta(q'-q''')}{q'''^2} Y_{l',\lambda'}^{LM'}(\hat{p}''', \hat{q}''') \end{aligned} \quad (۴-۵۰)$$

$$\begin{aligned} X_{12} &= \int dq'' q''^2 d\hat{q}'' \cdot dq''' q'''^2 d\hat{q}''' \frac{\delta(p - \{\frac{1}{4}q''^2 + q'''^2 + q'' q''' \hat{q}'' \cdot \hat{q}'''\}^{\frac{1}{2}})}{p^2} \frac{\delta(q-q''')}{q'''^2} \\ &\quad \times Y_{l,\lambda}^{*LM} \left( \frac{\frac{1}{2}q'' \hat{q}'' + q''' \hat{q}'''}{\{\frac{1}{4}q''^2 + q'''^2 + q'' q''' \hat{q}'' \cdot \hat{q}'''\}^{\frac{1}{2}}}, \hat{q}'' \right) \\ &\quad \times \frac{\delta(p' - \{q''^2 + \frac{1}{4}q'''^2 + q'' q''' \hat{q}'' \cdot \hat{q}'''\}^{\frac{1}{2}})}{p'^2} \frac{\delta(q'-q''')}{q'''^2} \\ &\quad \times Y_{l',\lambda'}^{LM'} \left( \frac{-q'' \hat{q}'' - \frac{1}{2}q''' \hat{q}'''}{\{q''^2 + \frac{1}{4}q'''^2 + q'' q''' \hat{q}'' \cdot \hat{q}'''\}^{\frac{1}{2}}}, \hat{q}''' \right) \end{aligned} \quad (۴-۵۱)$$

$$X_{12} = \int d\hat{q} d\hat{q}' \frac{\delta\left(p - \left|\frac{1}{2}\vec{q} + \vec{q}'\right|\right)}{p^2} \frac{\delta\left(p' - \left|\vec{q} + \frac{1}{2}\vec{q}'\right|\right)}{p'^2} \times Y_{l,\lambda}^{*L,M}\left(\widehat{\frac{1}{2}\vec{q} + \vec{q}', \hat{q}}\right) Y_{l',\lambda'}^{L'M'}\left(\widehat{-\vec{q} - \frac{1}{2}\vec{q}', \hat{q}'}\right) \quad (۴-۵۲)$$

و اما جملهٔ دوم مربوط به عنصر ماتریسی P یعنی  $\langle p q \alpha | P_{13} P_{23} | p' q' \alpha' \rangle_1$  بسادگی می توان نشان داد که:

$$P_{13} P_{23} = P_{23} P_{12} P_{23} P_{23} \quad (۴-۵۳)$$

در نتیجه می توان نوشت:

$$\langle p q \alpha | P_{13} P_{23} | p' q' \alpha' \rangle_1 = \langle p q \alpha | P_{23} P_{12} P_{23} P_{23} | p' q' \alpha' \rangle_1 \quad (۴-۵۴)$$

برای  $X_{13}$  هم داریم:

$$X_{13} = \langle p q \alpha | P_{13} P_{23} | p' q' \alpha' \rangle_1 = \langle p q \alpha | P_{23} P_{12} P_{23} P_{23} | p' q' \alpha' \rangle_1 \quad (۴-۵۵)$$

می توان نشان داد که برای عملگر  $P_{ij}$  داریم:  $(P_{ij})^\dagger = P_{ij}$ . یعنی این عملگر هرمیتی است و در این صورت می توان  $P_{23}$  در سمت راست را بر  $\langle p' q' \alpha' |$  و  $P_{23}$  در سمت چپ را بر  $\langle p q \alpha |$  اثر داد.

$$P_{23} |1,23\rangle = |1,32\rangle = (-1)^l |1,23\rangle \quad (۴-۵۶)$$

داریم:

$$Y_{lm}(\hat{p}_{23}) \rightarrow Y_{lm}(-\hat{p}_{23}) = (-1)^l Y_{lm}(\hat{p}_{23}) \quad (۴-۵۷)$$

یعنی:

$$P_{23} |plm_l\rangle_1 = (-1)^l |plm_l\rangle_1 \quad (۴-۵۸)$$

در مورد ذرهٔ آزاد (۱) هیچ تغییری صورت نمی گیرد:

$$\begin{aligned}
 P_{23} |q \lambda m_\lambda\rangle_1 &= |q \lambda m_\lambda\rangle_1 \\
 \rightarrow P_{23} |p' q' l m_l \lambda m_\lambda\rangle &= P_{23} |p' l m_l\rangle |q' \lambda m_\lambda\rangle \\
 &= (-1)^l |p' l m_l\rangle |q' \lambda m_\lambda\rangle \\
 \rightarrow P_{23} |p q \alpha\rangle_1 &= (-1)^l |p q \alpha\rangle_1 \quad (۴-۵۹)
 \end{aligned}$$

و در نتیجه برای  $X_{13}$  بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 X_{13} = {}_1\langle p q \alpha | P_{23} P_{12} P_{23} P_{23} |p' q' \alpha'\rangle_1 &= (-1)^{l+l'} {}_1\langle p q \alpha | P_{12} P_{23} |p' q' \alpha'\rangle_1 \\
 &= (-1)^{l+l'} X_{12} \quad (۴-۶۰)
 \end{aligned}$$

ما می خواهیم محاسبات را برای:

$$l = \lambda = l' = \lambda' = L = L' = 0 \quad (۴-۶۱)$$

انجام دهیم در نتیجه با قرار دادن  $l = l' = 0$  در رابطه (۴-۶۰) خواهیم داشت:

$$X_{13} = X_{12} \quad (۴-۶۲)$$

در مورد بوزون ها  $l$  و  $l'$  بایستی هر دو زوج باشند تا علامت تابع موج تحت جابجایی ذرات ۳ و ۲ تغییر نکند. پس با شرط (۴-۶۱) ما عنصر ماتریسی  $\langle p q \alpha | P | p' q' \alpha' \rangle$  را به شکل زیر بدست آورده ایم:

$$\begin{aligned}
 {}_1\langle p q \alpha | P_{12} P_{23} + P_{13} P_{23} |p' q' \alpha'\rangle_1 &= 2 {}_1\langle p q \alpha | p' q' \alpha'\rangle_2 \\
 &= 2 X_{12} \quad (۴-۶۳)
 \end{aligned}$$

و با در نظر گرفتن عبارت مربوط به  $X_{12}$  داریم:

$$\langle p'' q'' \alpha'' | P | p''' q''' \alpha''' \rangle = \int_{-1}^{+1} dx \frac{\delta(p'' - \pi_1)}{p''^{(l''+2)}} \frac{\delta(p''' - \pi_2)}{p'''^{(l''' + 2)}} G_{\alpha'', \alpha'''}(q'', q''', x) \quad (۴-۶۴)$$

که در آن  $\pi_1$  و  $\pi_2$  و تابع  $G_{\alpha'', \alpha'''}(q'', q''', x)$  عبارتند از:

$$\begin{cases} \pi_1 = \sqrt{\frac{1}{4} q''^2 + q'''^2 + q'' q''' x} \\ \pi_2 = \sqrt{q''^2 + \frac{1}{4} q'''^2 + q'' q''' x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha'',\alpha'''}(q'',q''',x) &= 2 \delta_{L'',L'''} \delta_{M'',M'''} \sum_k P_k(x) \sum_{l_1''+l_2''=l''} \sum_{l_1''' + l_2''' = l'''} (q'')^{l_2''+l_2'''} (q''')^{l_1''+l_1'''} \\
 &\times (-1)^{l''} \sqrt{\hat{l}'' \hat{\lambda}'' \hat{l}''' \hat{\lambda}'''} \hat{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{l_2''+l_1'''+1} \sqrt{\frac{(2l''+1)!}{(2l_1'')!(2l_2'')!}} \sqrt{\frac{(2l''' +1)!}{(2l_1''')!(2l_2''')!}} \\
 &\times \sum_{f,f'} \left\{ \begin{matrix} l_1'' & l_2'' & l'' \\ \lambda'' & L'' & f \end{matrix} \right\} C(l_2'' \lambda'' f, 0 0) \left\{ \begin{matrix} l_2''' & l_1''' & l''' \\ \lambda''' & L''' & f' \end{matrix} \right\} C(l_1''' \lambda''' f', 0 0) \\
 &\times \left\{ \begin{matrix} f & l_1'' & L'' \\ f' & l_2''' & k \end{matrix} \right\} C(k l_1'' f', 0 0) C(k, l_2''', f, 0 0) \tag{۴-۶۵}
 \end{aligned}$$

که در اینجا  $\hat{m} \equiv (2m+1)$  می باشد و  $C$  ها ضرایب کلبش-گوردان<sup>(۱)</sup> هستند.

حال با قرار دادن  $\langle p'q'\alpha' | t_1(z) | p''q''\alpha'' \rangle$  و  $\langle pq\alpha | g_0(z) | p'q'\alpha' \rangle$  در رابطه انتگرالی مربوط به  $|\psi_1\rangle$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \langle pq\alpha | \psi_1 \rangle &= \sum_{\alpha'',\alpha'''} \int dp' p'^2 dq' q'^2 dp'' p''^2 dq'' q''^2 dp''' p'''^2 dq''' q'''^2 \\
 &\times \left( z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m} \right)^{-1} \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \delta_{\alpha,\alpha'} \\
 &\times \langle p'q'\alpha' | t_1(z) | p''q''\alpha'' \rangle \langle p''q''\alpha'' | P | p'''q''' \alpha''' \rangle \langle p'''q''' \alpha''' | \psi \rangle \tag{۴-۶۶}
 \end{aligned}$$

انتگرال روی  $p'$  و  $q'$  و جمع روی  $\alpha'$  را انجام می دهیم و به جای عنصر ماتریسی  $t_1(z)$  نیز قرار می دهیم:

$$\begin{aligned}
 \langle pq\alpha | \psi_1 \rangle &= \sum_{\alpha'',\alpha'''} \int dp'' p''^2 dq'' q''^2 dp''' p'''^2 dq''' q'''^2 \\
 &\times \left( z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m} \right)^{-1} \delta_{\alpha,\alpha''} \frac{\delta(q-q'')}{q''^2} t_1(p, p'', z - \frac{3q^2}{4m}) \\
 &\times \langle p''q''\alpha'' | P | p'''q''' \alpha''' \rangle \langle p'''q''' \alpha''' | \psi \rangle \\
 &= \sum_{\alpha'''} \int dp''' p'''^2 dp'' p''^2 dq''' q'''^2 \left( z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m} \right)^{-1} t_1(p, p'', z - \frac{3q^2}{4m}) \\
 &\times \langle p''q''\alpha'' | P | p'''q''' \alpha''' \rangle \langle p'''q''' \alpha''' | \psi \rangle \tag{۴-۶۷}
 \end{aligned}$$

(1) Clebsch-Gordan

به جای عنصر ماتریسی P قرار می دهیم:

$$\langle p q \alpha | \psi \rangle = \sum_{\alpha''} \int dp'' p''^2 dp''' p'''^2 dq''' q'''^2 \left( z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m} \right)^{-1} t_l(p, p'', z - \frac{3q^2}{4m})$$

$$\times \int_{-1}^{+1} dx \frac{\delta(p'' - \pi_1(q, q''', x))}{p''^{(l+2)}} \frac{\delta(p''' - \pi_2(q, q''', x))}{p'''^{(l''+2)}} G_{\alpha, \alpha''}(q, q''', x) \langle p''' q''' \alpha'' | \psi \rangle$$

(۴-۶۸)

نسبت به  $p''$  و  $p'''$  انتگرال می گیریم:

$$\langle p q \alpha | \psi \rangle = \sum_{\alpha''} \int dq''' q'''^2 \left( z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m} \right)^{-1} \int_{-1}^{+1} dx t_l(p, \pi_1, z - \frac{3q^2}{4m})$$

$$\times \frac{1}{\pi_1^l} \frac{1}{\pi_2^{l''}} G_{\alpha, \alpha''}(q, q''', x) \langle \pi_2 q''' \alpha'' | \psi \rangle$$

متغیرهای  $q'''$  و  $\alpha''$  را به متغیرهای پریم دار تبدیل می کنیم:

$$\langle p q \alpha | \psi \rangle = \sum_{\alpha'} \int dq' q'^2 \left( z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m} \right)^{-1} \int_{-1}^{+1} dx t_l(p, \pi_1(q, q', x), z - \frac{3q^2}{4m})$$

$$\times \frac{1}{\pi_1^l} \frac{1}{\pi_2^{l'}}$$

$$G_{\alpha, \alpha'}(q, q', x) \langle \pi_2 q' \alpha' | \psi \rangle$$

(۴-۶۹)

همانطور که قبلاً هم گفتیم حالت پایه  $\alpha$  را در نظر می گیریم که :  $l = \lambda = L = M = 0$  و در این صورت  $\alpha'$  مقادیری که به خود می گیرد عبارتست از:

$$\alpha' = (l' \lambda' 00)$$

$$|l' - \lambda'| \leq L' \leq (l' + \lambda')$$

(۴-۷۰)

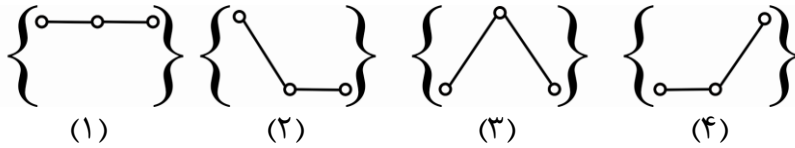
اگر  $L' = 0$  باشد، در این صورت  $l'$  و  $\lambda'$  می توانند مقادیر موجود در جدول صفحه بعد را به خود بگیرند. البته این دو حالت را می توان با هم بیان کرد. یعنی حالتی که داریم عبارتند از:

	$l'$	$\lambda'$	$L=0$
$\alpha=1$	0	0	0
$\alpha=2$	2	2	0
$\alpha=3$	4	4	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

از آنجا که سیستم بوزونی است  $l'$  اعداد زوج را به خود می گیرد. برای اینکه نماد  $6j$ :

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix}$$

غیر صفر باشد بایستی چهار رابطه مثلثی زیر برقرار باشد:



که این روابط به معنای زیر هستند:

$$(1) \equiv |j_1 - j_3| \leq j_2 \leq |j_1 + j_3|$$

$$(2) \equiv |j_1 - j_6| \leq j_5 \leq |j_1 + j_6|$$

$\vdots$

حال معادلات کوپل شده را برای  $\langle pq\alpha|\psi\rangle$  می سازیم. برای راحتی کار می نویسیم:

$$\langle pq\alpha|\psi\rangle \equiv \psi_\alpha(pq)$$

$$\psi_{\alpha=1}(pq) = \int dq' q'^2 \left(z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m}\right)^{-1} \cdot \int_{-1}^{+1} dx t_0(p, \pi, z - \frac{3q^2}{4m}) G_{11} \psi_1(\pi_2, q') +$$

$$+ \int dq' q'^2 \left(z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m}\right)^{-1} \cdot \int_{-1}^{+1} dx t_0(p, \pi_1, z - \frac{3q^2}{4m}) \cdot \frac{1}{\pi_2} G_{12} \psi_2(\pi_2, q') +$$

$$+ \int dq' q'^2 \left(z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m}\right)^{-1} \cdot \int_{-1}^{+1} dx t_0(p, \pi_1, z - \frac{3q^2}{4m}) \cdot \frac{1}{\pi_2^4} G_{13} \psi_3(\pi_2, q') +$$

+ ...

(۴-۷۱)

چنانکه ملاحظه می شود، در اینجا  $\psi_1$  به  $\psi_2$  و  $\psi_3$  و ... وابسته است پس باید معادله قبلی را به ازای کانالهای دیگر نیز تکرار کرد:

$$\begin{aligned} \psi_2(pq) = & \int dq' q'^2 \left(z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m}\right)^{-1} \cdot \int_{-1}^{+1} dx t_2(p, \pi_1, z - \frac{3q^2}{4m}) \cdot \frac{1}{\pi_1^2} G_{21} \psi_1(\pi_2, q') + \\ & + \int dq' q'^2 \left(z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m}\right)^{-1} \cdot \int_{-1}^{+1} dx t_2(p, \pi_1, z - \frac{3q^2}{4m}) \cdot \frac{1}{\pi_1^2} \cdot \frac{1}{\pi_2^2} G_{22} \psi_2(\pi_2, q') + \\ & + \dots \end{aligned} \quad (۴-۷۲)$$

بایستی به تعداد کانالهایی که می خواهیم شرکت دهیم معادله بنویسیم. برای برهمکنش کوتاه برد، انتظار بر این است که سهم  $\psi$  های با عدد کوانتومی بالاتر، کوچک و کوچکتر شود.

در تقریب صفر، فقط یک کانال در نظر می گیریم و آن  $\alpha = 1$  است. در اینصورت داریم:

$$\psi_1(pq) = \int dq' q'^2 \left(z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m}\right)^{-1} \cdot \int_{-1}^{+1} dx t_0(p, \pi_1, z - \frac{3q^2}{4m}) G_{11} \psi_1(\pi_2, q') \quad (۴-۷۳)$$

در این وضعیت،  $G_{11} = 1$  می شود و خواهیم داشت:

$$\psi(pq) = \int dq' q'^2 \left(z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m}\right)^{-1} \cdot \int dx t_0(p, \pi, z - \frac{3q^2}{4m}) \psi(\pi_2, q') \quad (۴-۷۴)$$

برای حل این معادله لازم است که عناصر ماتریسی  $t_0$  را به ازای  $z$  های مختلف محاسبه نماییم که ما این کار را در فصل بعد انجام می دهیم.



## فصل پنجم

روش عددی حل معادلات فادیف

۵-۱- حل عددی معادله انتگرالی  $t_1$ 

می خواهیم معادله  $t_1$  را به صورت عددی حل کنیم از رابطه (۴-۳۵) داریم:

$$t_1(p, p', z - \frac{3q^2}{4m}) = v_1(p, p') + \int_0^\infty dp'' p''^2 v_1(p, p'') \frac{1}{z - \frac{p''^2}{m} - \frac{3q^2}{4m}} t_1(p'', p', z - \frac{3q^2}{4m})$$

برای حل این معادله، ابتدا باید آن را منفصل نمائیم. برای این منظور مقادیر متغیر  $p$  را با یک مش  $\{p_i\}$  نشان می دهیم و بازه انتگرال گیری  $[0, \infty)$  را با بازه  $[a, c]$  جایگزین می کنیم، که در آن  $a = 0$  و  $c \equiv p_{cut}$  است:

$$\int_0^\infty dp f(p) \rightarrow \int_0^{p_{cut}} dp f(p) \approx \sum_i W_i f(p_i) \quad (5-1)$$

در اینجا  $p = p_{cut}$  بزرگترین مقداری است که پس از آن سهم  $f(p)$  در انتگرال ناچیز می شود. برای انجام این انتگرال گیری از روش انتگرال گیری گاوس-لژاندر<sup>(۱)</sup> استفاده می کنیم. برای این کار تغییر متغیری می دهیم که بازه  $[0, p_{cut}]$  را به بازه  $[1, -1]$  تصویر کند.

$$\int_{p=0}^{p=p_{cut}} dp f(p) = \int_{x=-1}^{x=1} [dp(x)] \cdot f(p(x)) \quad (5-2)$$

تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم:

$$p = \frac{(2ac - ab - bc)(1+x) + 2a(b-c)}{(a-2b+c)x + a-c} \quad ; \quad -1 \leq x \leq +1 \quad (5-3)$$

$$dp = \frac{2(b-c)(a-c)(b-a)}{[(a-2b+c)x + (a-c)]^2} dx \quad (5-4)$$

این تغییر متغیر چنان است که داریم:

$$\begin{cases} p = a & , \quad x = -1 \\ p = p_{max} & , \quad x = 0 \\ p = p_{cut} & , \quad x = +1 \end{cases} \quad (5-5)$$

که در اینجا ( $a = 0$ ) است.

(1) Gauos-Legendre quadrature

$$dp(x) = \frac{dp}{dx} \cdot dx \quad (5-6)$$

$$\int_{p=a}^{p_{cut}} dp f(p) = \sum_i W_i f(p_i) \quad (5-7)$$

$$\int_{p=a}^{p_{cut}} dp f(p) = \int_{x=-1}^{x=1} dx \cdot \left[ \frac{dp}{dx} \cdot f(p(x)) \right] \equiv \int_{x=-1}^{x=1} dx g(x) \approx \sum_i w_i g(x_i) \quad (5-8)$$

که در اینجا  $x_i$  ها ریشه های چند جمله ای لژاندر و  $w_i$  ها وزن های گائوس- لژاندر هستند. مقایسه روابط (5-7) و (5-8) نتیجه می دهد:

$$W_i = \left. \frac{dp}{dx} \right|_{x_i} w_i \quad (5-9)$$

$$\frac{dp}{dx} \cdot f(p(x)) \equiv g(x) \quad (5-10)$$

با این حساب رابطه (5-2) به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \int_0^{p_{cut}} dp f(p) &= \int_{x=-1}^{x=1} \frac{2(b-c)(a-c)(b-a)}{[(a-2b+c)x+a-c]^2} dx f(p(x)) \\ &= \sum_i \frac{2(b-c)(a-c)(b-a)}{[(a-2b+c)x_i+a-c]^2} w_i f(p(x_i)) \end{aligned} \quad (5-11)$$

برای منفصل کردن و بصورت ماتریسی در آوردن رابطه مربوط به  $t_l(z)$  ها را روی مش می گیریم:

$$p \rightarrow p_i$$

$$p' \rightarrow p_j$$

$$p'' \rightarrow p_k$$

$$t_l(p_i, p_j, u) = v_l(p_i, p_j) + \sum_k W_k p_k^2 v_l(p_i, p_k) \frac{1}{u - \frac{p_k^2}{m}} t_l(p_k, p_j, u) \quad (5-12)$$

که در آن  $t_l$  برابر است با:

$$t_l(p_i, p_j, u) = \sum_k \delta_{ki} t_l(p_k, p_j, u) \quad (5-13)$$

در نتیجه رابطه (5-12) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\sum_k \left[ \delta_{ki} - W_k p_k^2 v_l(p_i, p_k) \frac{1}{u - \frac{p_k^2}{m}} \right] t_l(p_k, p_j, u) = v_l(p_i, p_j) \quad (5-14)$$

در اینجا  $W_k$  ها وزنها روی مش  $p$  هستند. اگر تغییر متغیر بدهیم و بازه  $[0, c]$  مربوط به  $p$  را به بازه  $[-1, 1]$  مربوط به  $x$  تصویر کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$W_k = w_k \cdot \frac{2(b-c)(-c)b}{((-2b+c)x_k - c)^2} \quad (5-15)$$

$$p_k = \frac{-bc(1+x_k)}{(-2b+c)x_k - c} \quad (5-16)$$

که در آن داریم:

$$\begin{cases} b: p_{\max} \\ c: p_{\text{cutoff}} \end{cases}; 1 \leq x \leq -1 \quad (5-17)$$

ما در محاسبات خود از پتانسیل مالفلیت- تیون<sup>(۱)</sup> (۵) استفاده می کنیم. برای این پتانسیل بایستی ابتدا با استفاده از (۴-۲۲)،  $v_l(p, p')$  را بدست آوریم و سپس با استفاده از رابطه:

$$\sum_k M_{ik}^{(l)}(u) t_{kj}^{(l)}(u) = v_{ij}^{(l)} \quad (5-18)$$

که اگر به صورت ماتریسی نشان دهیم داریم:

$$\underset{\approx}{M}^{(l)}(u) \underset{\approx}{t}^{(l)}(u) = \underset{\approx}{V}^{(l)} \quad (5-19)$$

که از روی آن  $\underset{\approx}{t}^{(l)}(u)$  می شود:

$$\underset{\approx}{t}^{(l)}(u) = \left( \underset{\approx}{M}^{(l)}(u) \right)^{-1} \cdot \underset{\approx}{V}^{(l)} \quad (5-20)$$

را بدست آوریم.

برای پتانسیل مالفلیت- تیون (۵) داریم:

$$v(r) = -v_A \frac{e^{-\mu_A r}}{r} + v_R \frac{e^{-\mu_R r}}{r} \quad (5-21)$$

$$\begin{aligned} v_l(p, p') &= \frac{-v_A}{\pi} \frac{1}{pp'} Q_l(Z_A) + \frac{-v_R}{\pi} \frac{1}{pp'} Q_l(Z_R) \\ &= \frac{1}{\pi p p'} [-v_A Q_l(Z_A) + v_R Q_l(Z_R)] \end{aligned} \quad (5-22)$$

(1) Malfli-Tion potential

که در اینجا  $(Z_{A/R})$  و  $Q_l(Z_R)$  عبارتند از:

$$Z_{A/R} \equiv \frac{p^2 + p'^2 + \mu_{A/R}^2}{2pp'} \quad (5-23)$$

$$Q_l(z_R) \equiv \pi \sqrt{pp'} \int_0^\infty dr e^{-\mu_R r} J_{l+\frac{1}{2}}(pr) J_{l+\frac{1}{2}}(p'r) \quad (5-24)$$

و  $Q_l(Z_A)$  هم به همین صورت تعریف میشود فقط در آن  $\mu_R \rightarrow \mu_A$ . به ازای  $l=0$  داریم:

$$v_0(p, p') = \frac{1}{\pi pp'} \left[ -v_A \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{(p+p')^2 + \mu_A^2}{(p-p')^2 + \mu_A^2} + v_R \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{(p+p')^2 + \mu_R^2}{(p-p')^2 + \mu_R^2} \right] \quad (5-25)$$

$$v_l(p_i, p_j) \equiv v_l(p(x_i), p(x_j)) \quad (5-26)$$

حال با داشتن  $v_l(p, p')$  و  $M^{(l)}(u)$  با حل معادله ماتریسی  $t^{(l)}(u) = [M^{(l)}(u)]^{-1} v^{(l)}$  عناصر ماتریسی  $t^l$  به ازای  $u$  های مختلف که  $u = z - \frac{3q^2}{4m}$  بدست می آیند. به این موضوع که، ما باید به ازای چه  $u$  هایی ماتریس  $t^l$  را بدست بیاوریم در فصل ششم خواهیم پرداخت.

### ۵-۲- منفصل کردن معادله انتگرالی $\psi(p, q)$ :

برای  $\psi(p, q)$  از رابطه (۴-۸۴) داریم:

$$\psi(p, q) = \int_0^{q_{\max}} dq' q'^2 \left( z - \frac{p^2}{m} - \frac{3q^2}{4m} \right)^{-1} \cdot \int_{x=-1}^{x=+1} dx t_0(p, \pi_1, z - \frac{3q^2}{4m}) \psi(\pi_2, q') \quad (5-27)$$

که در آن  $\pi_1$  و  $\pi_2$  عبارتند از:

$$\begin{cases} \pi_1 = \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + q'^2 + qq'x} & (5-28a) \\ \pi_2 = \sqrt{q^2 + \frac{1}{4}q'^2 + qq'x} & (5-28b) \end{cases}$$

$$\pi_1(q, q', x) = \pi_2(q', q, x) \equiv \pi(q, q', x) \quad (5-28c)$$

برای مش بندی  $q$  از تبدیل خطی  $q = Ax + B$  استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} q = 0 \rightarrow x = -1 \\ q = q_{\max} \rightarrow x = +1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q_{\max} = A + B \\ 0 = -A + B \end{cases}$$

$$\rightarrow A = B = \frac{q_{\max}}{2} \rightarrow q = \frac{q_{\max}}{2}(1+x)$$

پس داریم:

$$\frac{dq}{dx} = \frac{q_{\max}}{2} \quad (5-29)$$

یعنی نرخ افزایش  $q$  نسبت به  $x$  ثابت است.

در نتیجه می توان معادله  $\psi(p, q)$  را این طور نوشت:

$$\begin{aligned} \psi(p_i, q_j) = & \sum_k W_k q_k^2 \left( z - \frac{p_i^2}{m} - \frac{3q_j^2}{4m} \right)^{-1} \sum_m w_m t_0(p_i, \pi_1(q_j, q_k, x_m), z - \frac{3q_j^2}{4m}) \\ & \cdot \psi(\pi_2(q_j, q_k, x_m), q_k) \end{aligned} \quad (5-30)$$

$$\begin{cases} q_k = \frac{q_{\max}}{2} (1+x_k) & (5-31a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_k^{(q)} = \frac{q_{\max}}{2} w_k & (5-31b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \psi(p_i, q_j) = & \sum_{k=1}^{N_{rot}} \frac{q_{\max}}{2} w_k q_k^2 \cdot \left( z - \frac{p_i^2}{m} - \frac{3q_j^2}{4m} \right)^{-1} \\ & \times \sum_{m=1}^{N_{rot}} w_m \left[ t_0(p_i, \pi(q_j, q_k, x_m), z - \frac{3q_j^2}{4m}) \cdot \psi(\pi(q_k, q_j, x_m), q_k) \right] \end{aligned} \quad (5-32)$$

می توان  $\pi$  ها را به صورت آرایه های سه بعدی قبلاً محاسبه کرد. تعداد ریشه های لژاندر مربوط به

$x, q, p$  را یکسان می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \pi(q_j, q_k, x_m) &= \sqrt{\frac{1}{4} q_j^2 + q_k^2 + q_j q_k x_m} \\ &= \frac{q_{\max}}{2} \sqrt{\frac{1}{4} (1+x_j)^2 + (1+x_k)^2 + (1+x_j)(1+x_k) x_m} \end{aligned} \quad (5-33)$$

برای حل معادله و بدست آوردن  $\psi(p_i, q_j)$  به صورت زیر عمل می‌کنیم:

به ازای  $p_i$  و  $q_j$  داده شده داریم:

$$\psi(p_i, q_j) = \sum_{k,m} K_{ijkm} \psi(\pi(q_k, q_j, x_m), q_k) \quad (5-34)$$

که در آن  $K_{ijkm}$  برابر است با:

$$K_{ijkm} = \sum_{k=1}^{N_{\text{root}}} \frac{q_{\max}}{2} w_k q_k^2 \cdot \left( z - \frac{p_i}{m} - \frac{3q_j^2}{4m} \right)^{-1} \sum_{m=1}^{N_{\text{root}}} w_m t_0 \left( p_i, \pi(q_j, q_k, x_m), z - \frac{3q_j^2}{4m} \right) \quad (5-35)$$

### ۵-۳-۵ حل عددی معادله فادیف

معادله فادیف (۵-۳۴) دارای ساختار کلی:

$$K(E)|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad (5-36)$$

است که  $K(E)$  هسته انتگرال می‌باشد. از آنجا که  $E$  به صورت غیر خطی در معادله ظاهر می‌شود بهتر است که مسئله ویژه مقداری زیر را در نظر بگیریم:

$$K(z)|\varphi(z)\rangle = \lambda(z)|\varphi(z)\rangle \quad (5-37)$$

که در آن  $K(E)$  همان هسته انتگرالی است که در معادله قبلی است و  $\lambda(z)$  ویژه مقدار آن و  $|\varphi(z)\rangle$  ویژه بردار متناظر با ویژه مقدار  $\lambda(z)$  می‌باشد.

راهبرد حل معادله (۵-۳۶) آنست که مقدار  $z = E$  را به گونه ای بیابیم که در معادله (۵-۳۷) یکی از ویژه مقادیر  $\lambda(z)$  برابر یک شود. در این صورت  $E$  انرژی بستگی فیزیکی سیستم بوده و ویژه بردار متناظر با آن،  $|\varphi(E)\rangle$  برابر دامنه فادیف  $|\psi\rangle$  است که از آن تابع موج حالت مقید سیستم بدست می‌آید. برای اینکه آن مقدار خاص  $z = E$  را بدست آوریم بایستی معادله (۵-۳۷) را به ازای مقادیر مختلف  $z$  حل نماییم.

اولین قدم برای حل عددی معادله (۵-۳۷) آنست که انتگرال روی متغیرهای پیوسته را گسسته سازی نماییم. بدین منظور از روش گائوس-لژاندر استفاده می‌نماییم و برای متغیر  $p$ ،  $N_p$  تا و برای متغیر  $q$ ،  $N_q$  تا نقطه مش در نظر می‌گیریم. آنگاه معادله (۵-۳۷) تبدیل به یک دستگاه معادلات همگن با بعد  $D = N_\alpha N_p N_q$  می‌شود که در آن  $N_\alpha$  تعداد امواج جزئی سه ذره ای است که در محاسبات شرکت می‌کند. عموماً  $D$  از مرتبه چندین هزار می‌باشد. بعنوان مثال، اگر برای متغیر مومنتیم  $p$  در بازه  $[0 \text{ fm}^{-1}, 25 \text{ fm}^{-1}]$  تعداد نقاط مش را  $N_p = 22$  بگیریم و برای متغیر مومنتیم  $q$  در بازه  $[0 \text{ fm}^{-1}, 10 \text{ fm}^{-1}]$  تعداد نقاط مش را  $N_q = 14$  بگیریم، آنگاه تعداد معادلات همگن کوپل شده خیلی زیادتر از آن است که بخواهیم مستقیماً با معکوس کردن ماتریس جهت حل معادله (۵-۳۶) و یا قطری کردن معادله (۵-۳۷) به روشهای عادی جواب را بدست آوریم. یکی از روشهای حل معادله، روش نسبت<sup>(۱)</sup> است.

### ۵-۳-۱- روش نسبت

این روش بر اساس این حقیقت متکی است که اگر با یک سری تکرار متوالی  $K(z)$  را روی یک بردار دلخواه اولیه اثر دهیم آنگاه حاصل ویژه حالتی خواهد شد که ویژه مقدارش از نظر قدر مطلق بزرگترین ویژه مقدار است.

اثبات:

اگر بردار دلخواه اولیه را با  $|x_0\rangle$  نشان دهیم و همچنین  $K$  را در نمایش ویژه مقادیرش به صورت:

$$\hat{K} = \sum_n |k_n\rangle k_n \langle k_n| \quad (5-38)$$

نشان دهیم داریم:

$$|x_1\rangle \equiv K^1 |x_0\rangle = \sum_i |k_i\rangle k_i \langle k_i | x_0\rangle \quad (5-39a)$$

$$|x_2\rangle \equiv K |x_1\rangle = K(K^1 |x_0\rangle) = K^2 |x_0\rangle = \sum_i |k_i\rangle k_i^2 \langle k_i | x_0\rangle \quad (5-39b)$$

⋮

$$|x_n\rangle \equiv K^n |x_0\rangle = \sum_i |k_i\rangle k_i^n \langle k_i | x_0\rangle \quad (5-39c)$$

(1) ratio



همانطور که ملاحظه می شود، به خاطر وجود جمله  $k_i^n$ ، نقش بزرگترین ویژه مقدار مهم می شود و بقیه بی اهمیت می شوند، در نتیجه می توان نوشت:

$$|x_n\rangle \approx |k_{\max}\rangle k_{\max}^n \langle k_{\max} | x_0 \rangle \quad (۵-۴۰)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow K|x_n\rangle &\approx |k_{\max}\rangle k_{\max}^{n+1} \langle k_{\max} | x_0 \rangle \\ &= k_{\max} \left[ |k_{\max}\rangle k_{\max}^n \langle k_{\max} | x_0 \rangle \right] \\ &= k_{\max} |x_n\rangle \end{aligned} \quad (۵-۴۱)$$

اگر  $z = E$  انرژی حالت پایه فیزیکی باشد، در این صورت هیچ ویژه مقدار  $\lambda(z)$  را نخواهیم داشت که از لحاظ قدر مطلق بزرگتر از ویژه مقدار مربوط به حالت پایه باشد.

البته، قسمت های دافعی نیروی در نظر گرفته شده برای مسئله می تواند در طیف  $K(z)$ ، ویژه مقادیر  $\lambda(z)$  منفی زائد ایجاد نماید که این ویژه مقادیر زائد می توانند از لحاظ مقدار از ویژه مقدار فیزیکی مطلوب بزرگتر باشند در این صورت روش نسبت بجای اینکه به ما دامنه فادیف را بدهد به حالت مربوط به ویژه مقدار زائد همگرا می شود.

از آنجا که تمامی پتانسیلهای خوب دارای قسمت های دافعی می باشند، در نتیجه با این روش حتماً با جوابهای زائد مواجه خواهیم شد. اما راه حل هایی وجود دارد که با استفاده از آنها می توان از جوابهای زائد اجتناب کرد که عبارتند از:

- ۱- در همان تکرارهای اولیه آنها را تعیین کنیم و سپس بردار اولیه را عمود بر آنها بسازیم [۱۸].
- ۲- راه ساده تر این است که یک مقدار ثابت مناسب به عملگر  $K(z)$  اضافه کنیم بطوریکه در طیف جابجا شده ویژه مقدار، ویژه مقدار فیزیکی از لحاظ مقدار بزرگترین شود [۱۹].
- ۳- پس از هر تکرار، وزن ویژه حالت فیزیکی را نسبت به ویژه حالت های زائد با استفاده از تقریب پاده<sup>(۱)</sup> افزایش دهیم [۲۰].

در اینجا ما از روشی استفاده می کنیم که بر اساس ساخت پایه های بهینه جهت قطری کردن یک

ماتریس بزرگ مبتنی است [۲۱ و ۲۲]. این روش شباهت زیادی به الگوریتم لانشوز<sup>(۱)</sup> دارد.

در ادامه به جزئیات این روش می پردازیم.

در اینجا برای سهولت در نوشتن، بستگی به  $z$  کمیت ها را نمی نویسیم. فرض کنید که  $|\varphi^{(0)}\rangle$  یک بردار اولیه باشد. اگر کرنل  $K$  را پشت سر هم به آن اثر دهیم یک دنباله از بردارهای  $|\varphi^{(i)}\rangle$  بدست می آوریم که در دو شرط زیر صدق می کنند:

$$|\varphi^{(i+1)}\rangle = K |\varphi^{(i)}\rangle \quad (۵-۴۲)$$

$$|\varphi^{(i)}\rangle = K^i |\varphi^{(0)}\rangle \quad (۵-۴۳)$$

تکرار را پس از  $N$  مرحله متوقف می کنیم. سپس با روش متعامد سازی اشمیت، یک مجموعه شامل  $N$  بردار پایه اورتو نرمال  $|\bar{\varphi}^{(i)}\rangle$  را از روی بردارهای  $|\varphi^{(i)}\rangle$  به صورت زیر می سازیم:

$$|\bar{\varphi}^{(0)}\rangle = C_0 |\varphi^{(0)}\rangle, \quad (۵-۴۴)$$

$$|\bar{\varphi}^{(1)}\rangle = C_1 \left( |\varphi^{(1)}\rangle - |\bar{\varphi}^{(0)}\rangle \langle \bar{\varphi}^{(0)} | \varphi^{(1)} \rangle \right), \quad (۵-۴۵)$$

$$|\bar{\varphi}^{(2)}\rangle = C_2 \left( |\varphi^{(2)}\rangle - |\bar{\varphi}^{(1)}\rangle \langle \bar{\varphi}^{(1)} | \varphi^{(2)} \rangle - |\bar{\varphi}^{(0)}\rangle \langle \bar{\varphi}^{(0)} | \varphi^{(2)} \rangle \right), \quad (۵-۴۶)$$

⋮

$$|\bar{\varphi}^{(i)}\rangle = C_i \left( |\varphi^{(i)}\rangle - \sum_{j=0}^{i-1} |\bar{\varphi}^{(j)}\rangle \langle \bar{\varphi}^{(j)} | \varphi^{(i)} \rangle \right), \quad (۵-۴۷)$$

ثابت های بهنجارش  $C_i$  از شرط:

$$\langle \bar{\varphi}^{(i)} | \bar{\varphi}^{(j)} \rangle = \delta_{ij} \quad (۵-۴۸)$$

بدست می آید.

حال بردارهای قبلی  $|\varphi^{(i)}\rangle$  را بر حسب  $\{\bar{\varphi}^{(j)}\}$  ها بسط می دهیم:

$$|\varphi^{(i)}\rangle = \sum_{j=0}^i a_{ij} |\bar{\varphi}^{(j)}\rangle \quad (۵-۴۹)$$

که برای آنها داریم:

$$a_{ij} = \langle \bar{\varphi}^{(j)} | \varphi^{(i)} \rangle, \quad j \leq i \quad (۵-۵۰)$$

(1) Lanczos

حال اگر معادله (۵-۴۹) را معکوس نماییم، بردارهای اورتو نرمال  $|\bar{\varphi}^{(i)}\rangle$  را به صورت ترکیب خطی از بردارهای غیر متعامد  $|\varphi^{(i)}\rangle$  خواهیم داشت:

$$|\bar{\varphi}^{(i)}\rangle = \sum_{j=0}^i b_{ij} |\varphi^{(j)}\rangle \quad (5-51)$$

برای اینکه معادله گسسته شده (۵-۳۷) را حل نماییم، ویژه حالت مجهول  $|\varphi\rangle$  را بر حسب بردارهای پایه  $|\bar{\varphi}^{(i)}\rangle$  بسط می دهیم:

$$|\varphi\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} C_i |\bar{\varphi}^{(i)}\rangle \quad (5-52)$$

با قرار دادن رابطه (۵-۵۲) در رابطه (۵-۳۷) خواهیم داشت:

$$K \sum_{i=0}^{N-1} C_i |\bar{\varphi}^{(i)}\rangle = \lambda \sum_{i=0}^{N-1} C_i |\bar{\varphi}^{(i)}\rangle \quad (5-53)$$

طرفین را در  $|\bar{\varphi}^{(j)}\rangle$  ضرب می کنیم داریم:

$$\sum_{i=0}^{N-1} C_i \langle \bar{\varphi}^{(j)} | K | \bar{\varphi}^{(i)} \rangle = \lambda \sum_{i=0}^{N-1} C_i \langle \bar{\varphi}^{(j)} | \bar{\varphi}^{(i)} \rangle \quad (5-54)$$

اما از (۵-۴۸) داریم:

$$\langle \bar{\varphi}^{(j)} | \bar{\varphi}^{(i)} \rangle = \delta_{ji}$$

در نتیجه رابطه (۵-۵۴) می شود:

$$\sum_{i=0}^{N-1} C_i [\langle \bar{\varphi}^{(j)} | K | \bar{\varphi}^{(i)} \rangle - \lambda \delta_{ji}] = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5-55)$$

برای اینکه  $C_i$  ها مخالف صفر باشند باید داشته باشیم:

$$\det(M - \lambda I) = 0 \quad (5-56)$$

که در اینجا  $M$  نمایش هسته  $K$  در پایه  $\{\bar{\varphi}^{(i)}\}$  می باشد.

برای ساختن ماتریس  $M$  نیاز داریم که عناصر ماتریسی  $M_{ji}$ :

$$M_{ji} = \langle \bar{\varphi}^{(j)} | K | \bar{\varphi}^{(i)} \rangle \quad (5-57)$$

را پیدا کنیم. اما داریم:

$$K |\bar{\varphi}^{(i)}\rangle = K \sum_{l=0}^i b_{il} |\varphi^{(l)}\rangle = \sum_{l=0}^i b_{il} K |\varphi^{(l)}\rangle$$

$$\begin{aligned} \rightarrow K|\bar{\varphi}^{(i)}\rangle &= \sum_{l=0}^i b_{il} |\varphi^{(l+1)}\rangle \\ &= \sum_{l=0}^i b_{il} \sum_{k=0}^{l+1} a_{(l+1),k} |\bar{\varphi}^{(k)}\rangle \end{aligned} \quad (5-58)$$

در نتیجه برای عنصر ماتریسی  $M_{ji}$  بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} M_{ji} &= \langle \bar{\varphi}^{(j)} | K | \bar{\varphi}^{(i)} \rangle = \langle \bar{\varphi}^{(j)} | \left( \sum_{l=0}^i b_{il} \sum_{k=0}^{l+1} a_{(l+1),k} |\bar{\varphi}^{(k)}\rangle \right) \\ &= \sum_{l=0}^i b_{il} \sum_{k=0}^{l+1} a_{(l+1),k} \langle \bar{\varphi}^{(j)} | \bar{\varphi}^{(k)} \rangle \end{aligned} \quad (5-59)$$

و دوباره از رابطه (5-48) استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\varphi}^{(j)} | \bar{\varphi}^{(k)} \rangle &= \delta_{jk} \\ \rightarrow M_{ji} &= \sum_{l=0}^i b_{il} \sum_{k=0}^{l+1} a_{(l+1),k} \delta_{jk} = \sum_{l=0}^i b_{il} a_{(l+1),j} \quad ; j, i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5-60)$$

از طرفی می توان نوشت:

$$\langle \bar{\varphi}^{(j)} | K | \bar{\varphi}^{(i)} \rangle = \sum_{l=0}^i b_{il} a_{(l+1),j} \equiv K_{ji} \quad (5-61)$$

به این ترتیب با داشتن  $M_{ji}$  ها ماتریس  $M$  ساخته می شود و آنگاه با قطری کردن آن، یعنی حل معادله  $\det(M - \lambda I) = 0$ ، ویژه مقادیر  $\lambda$  بدست می آیند. از آنجا که ما تعداد پایه ها را متنهایی گرفته ایم، این  $\lambda$  های بدست آمده ویژه مقادیر تقریبی برای عملگر  $K$  خواهند بود. معمولاً  $K < 10$  برای رسیدن به جواب با دقت خوب کافی می باشد.

با داشتن ویژه مقدار فیزیکی، می توان ضرایب بسط،  $\{C_i\}$  ها را بدست آورده و از آنجا  $|\varphi\rangle$  را بدست آورد. باید توجه داشت که در اینجا ماتریسی که قطری می شود  $N \times N$  است که در آن ( $N = 10$ ) می باشد و باید متذکر شد که هر چه تعداد تکرارهای  $N$  بیشتر باشد، بردارهای تولید شده بیشتر و بیشتر هم خط می شوند و بایستی متعامد سازی عددی را با دقت بیشتری انجام داد تا از خطاهای بزرگ پرهیز شود.

از بین ویژه مقادیر  $\lambda$  مربوط به  $M$  به ازای یک انرژی  $z$  انتخاب شده، آن ویژه مقداری که از همه به عدد یک نزدیکتر است بهترین تقریب برای ویژه مقدار فیزیکی مورد نظر می باشد و ویژه بردار متناظر

با آن ویژه مقدار به ما ضرایب بسط  $C_i$  برای تابع  $|\varphi\rangle$  را می دهد. زمانی این  $|\varphi\rangle$  بدست آمده درست خواهد بود که معادله (۵-۳۷) به طور " نقطه به نقطه " صادق باشد و این یعنی اینکه به ازای  $p_k$  و  $q_l$  از نقاط مش، رابطه:

$$K(z, p_k, q_l) |\varphi(z, p_k, q_l)\rangle = \lambda(z) |\varphi(z, p_k, q_l)\rangle \quad (5-62)$$

با دقت قابل قبولی برقرار باشد.

این وضعیت موقعی حاصل می شود که تعداد تکرارهای به کار رفته جهت تولید  $|\varphi(i)\rangle$  ها کافی باشد. حال اگر رابطه به طور نقطه به نقطه برقرار نباشد، در این صورت به ازای همان  $z$ ،  $|\varphi\rangle$  بدست آمده را بعنوان بردار اولیه  $|\varphi^{(0)}\rangle$  جهت تکرار بکار می بریم و  $|\varphi(i)\rangle$  های جدید تولید کرده و مراحل قبل را تکرار می کنیم تا  $|\varphi\rangle$  جدید بدست آمده پایدار باشد. پس از اینکه به ازای یک  $z$  مشخص جواب پایدار برای  $|\varphi\rangle$  بدست آمد، باید برای  $z$  های جدید نیز همین مراحل را تکرار کنیم. اگر برای بردار اولیه  $z$  جدید از جواب  $|\varphi\rangle$  مربوط به  $z$  قدیم استفاده نماییم، همگرایی به جواب جدید سریعتر حاصل می شود.

معمولاً رابطه (۵-۳۷) را به ازای حدود ۳ الی ۴ انرژی مختلف حل می کنیم بطوریکه  $\lambda(z)$  های بدست آمده در دو طرف مقدار ۱ پراکنده می شوند. در اینصورت با داشتن این مقادیر، می توان  $z$  را که به ما  $\lambda = 1$  را می دهد از طریق درونیابی با این ۳ یا ۴ جواب بدست آورد و آن جواب، به ما انرژی بستگی سیستم سه ذره ای را خواهد داد.

برای ساختن  $\phi_i$  ها از یک تابع ورودی  $\phi_0$  استفاده می کنیم که به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\phi_0(p, q) = \frac{1}{1+p^2} \cdot \frac{1}{1+q^2} \quad (5-63)$$

در مراحل بعدی تکرار باید بجای  $\phi_0$ ،  $\phi_1$  را قرار دهیم که  $\phi_i$  ها به ترتیب زیر هستند:

$$\phi_1(p, q) = \kappa \phi_0 \quad (5-64)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\phi_N(p, q) = \kappa \phi_{N-1} \quad (5-65)$$

به این ترتیب  $N$  تا تابع:  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$  داریم که  $N$  را یک عدد حدود مثلاً (۱۰) می گیریم. حال از

روی این  $N$  تا  $\phi$ ،  $N$  تا  $\phi$  عمود بر هم به روش گرام-اشمیت<sup>(۱)</sup> می‌سازیم.

$$|\varphi_0\rangle = C_0 |\phi_0\rangle$$

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \varphi_0 | \varphi_0 \rangle \equiv \int_0^{q_{\max}} \int_0^{p_{cut}} dq q^2 dp p^2 \varphi_0^2(p, q) \\ &= C_0^2 \int_0^{q_{\max}} \int_0^{p_{cut}} dq q^2 dp p^2 \phi_0^2(p, q) \\ &= C_0^2 \sum_{i=1}^{N_{root}} \sum_{j=1}^{N_{root}} w_i \cdot \frac{q_{\max}}{2} \cdot q_i^2 \cdot w_j \frac{2(p_{\max} - p_{cut})(-p_{cut})p_{\max}}{((1 - 2p_{\max} + p_{cut})x_j - p_{cut})^2} \cdot p_j^2 \cdot (\phi_0(p_i, q_j))^2 \end{aligned} \quad (5-66)$$

و از اینجا  $C_0$  بدست می‌آید و در نتیجه  $\phi_0$  نرمالیزه می‌شود. برای  $|\varphi_1\rangle$  هم داریم:

$$|\varphi_1\rangle = C_1 (|\phi_1\rangle - |\varphi_0\rangle \langle \varphi_0 | \phi_1 \rangle) \quad (5-67)$$

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle = C_1^2 \left\{ \langle \phi_1 | - \langle \phi_1 | \varphi_0 \rangle \langle \varphi_0 | \right\} \cdot \left\{ |\phi_1\rangle - |\varphi_0\rangle \langle \varphi_0 | \phi_1 \rangle \right\} \\ &= C_1^2 \left\{ \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle - 2 |\langle \phi_1 | \varphi_0 \rangle|^2 + |\langle \phi_1 | \varphi_0 \rangle|^2 \right\} \\ &= C_1^2 \left\{ \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle - |\langle \phi_1 | \varphi_0 \rangle|^2 \right\} \end{aligned} \quad (5-68)$$

به این ترتیب  $C_1$  بدست آمده و  $|\varphi_1\rangle$  ساخته می‌شود. این کار را به صورت زیر ادامه می‌دهیم:

$$|\varphi_N\rangle = C_N \left\{ |\phi_N\rangle - \sum_{i=0}^{N-1} |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i | \phi_N \rangle \right\} \quad (5-69)$$

بنابراین از روی  $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ ، مجموعه  $\{\varphi_i\}_{i=0}^N$  اورتونرمال را ساخته ایم. حال می‌توان  $\psi(p_i, q_j)$  را بر حسب این مجموعه اورتونرمال بسط داد:

$$\psi(p_i, q_j) = \sum_{l=0}^N \alpha_l \varphi_l(p_i, q_j) \quad (5-70)$$

کرنل اثر خود را بر روی توابع  $\varphi$  ها گذاشته است و بنابر این می‌توان معادله انتگرالی را به صورت:

$$K\psi = \lambda\psi \quad (5-71)$$

نوشت و باید انرژی به گونه ای انتخاب شود که  $\lambda = 1$  شود.

فصل ششم  
نتایج محاسبات

## ۶-۱- بررسی عملگر گذار

برای اینکه انرژی بستگی سیستم سه ذره ای را محاسبه نماییم بایستی معادله (۵-۳۴) را حل کنیم. در این معادله اگر با رابطه (۵-۳۰) مقایسه شود به خاطر وجود جمله:

$$\left(z - \frac{p_i^2}{m} - \frac{3q_j^2}{4m}\right)^{-1}$$

و جمله:

$$t_0(p_i, \pi_1(q_j, q_k, x_m), z - \frac{3q_j^2}{4m})$$

فقط به ازای  $z$  خاص که انرژی حالت پایه سیستم است جواب خواهیم داشت. برای اینکه این انرژی حالت پایه (انرژی بستگی سیستم) را پیدا کنیم به معادله کمکی (۵-۳۷) یعنی:

$$K(z) |\varphi(z)\rangle = \lambda(z) |\varphi(z)\rangle$$

متوسل می شویم که اگر  $z$  چنان باشد که  $\lambda(z) = 1$  باشد در واقع معادله مربوط به  $\psi$  را حل کرده ایم. یعنی اینکه اگر  $\lambda(z_0) = 1$  باشد،  $z_0$  برابر انرژی بستگی سیستم سه ذره ای خواهد بود. برای حل معادله (۵-۳۷) لازم است عناصر ماتریسی  $t_l(p, p')$  را به ازای  $z$  های مختلف داشته باشیم. بدین منظور ابتدا به مطالعه  $t_l(p, p', z)$  می پردازیم. در اینجا برای منفصل کردن از مش ۳۲ نقطه ای استفاده کرده ایم.

برای محاسبه  $t_l$  ها ابتدا باید  $v_l$  ها را محاسبه نماییم.



۶-۱-۱- بررسی رفتار  $V_0(p, p')$  برای پتانسیل مالفلیت- تیون (۵) به ازای  $p \ll 1$  و یا  $p' \ll 1$ .

$$\ln \frac{(p+p')^2 + \mu^2}{(p-p')^2 + \mu^2} = \ln [(p+p')^2 + \mu^2] - \ln [(p-p')^2 + \mu^2]$$

$$(1): \quad \ln [(p+p')^2 + \mu^2] = \ln \left[ \mu^2 \left( 1 + \frac{(p+p')^2}{\mu^2} \right) \right] = \ln \mu^2 + \ln \left( 1 + \frac{(p+p')^2}{\mu^2} \right)$$

$$; \quad \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \ln [(p+p')^2 + \mu^2] &= \ln \mu^2 + \frac{(p+p')^2}{\mu^2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(p+p')^2}{\mu^2} \right]^2 + \frac{1}{3} \left[ \frac{(p+p')^2}{\mu^2} \right]^3 \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ \frac{(p+p')^2}{\mu^2} \right]^4 + \dots \end{aligned}$$

$$(2): \quad \ln [(p-p')^2 + \mu^2] = \ln \mu^2 + \frac{(p-p')^2}{\mu^2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(p-p')^2}{\mu^2} \right]^2 + \frac{1}{3} \left[ \frac{(p-p')^2}{\mu^2} \right]^3$$

$$- \frac{1}{4} \left[ \frac{(p-p')^2}{\mu^2} \right]^4 + \dots$$

$$\stackrel{(1),(2)}{\rightarrow} \quad \ln \frac{(p+p')^2 + \mu^2}{(p-p')^2 + \mu^2} \underset{p, p' \rightarrow 0}{=} \frac{4pp'}{\mu^2} - \frac{4pp'}{\mu^2} (p^2 + p'^2) + \frac{4pp'}{\mu^2} \left( p^4 + \frac{10}{3} p^2 p'^2 + p'^4 \right)$$

$$- \frac{4pp'}{\mu^2} (p^6 + 7p^4 p'^2 + 4p^2 p'^4 + p'^6) + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{-V_A}{2\pi p p'} \ln \frac{(p+p')^2 + \mu_A^2}{(p-p')^2 + \mu_A^2} \underset{p, p' \ll 1}{=} & \frac{-V_A \cdot 4}{2\pi \mu_A^2} \left\{ 1 - (p^2 + p'^2) + \left( p^4 + \frac{10}{3} p^2 p'^2 + p'^4 \right) + \right. \\ & \left. - (p^6 + 7p^4 p'^2 + 4p^2 p'^4 + p'^6) + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-V_R}{2\pi p p'} \ln \frac{(p+p')^2 + \mu_R^2}{(p-p')^2 + \mu_R^2} \underset{p, p' \ll 1}{=} & \frac{-V_R \cdot 4}{2\pi \mu_R^2} \left\{ 1 - (p^2 + p'^2) + \left( p^4 + \frac{10}{3} p^2 p'^2 + p'^4 \right) + \right. \\ & \left. - (p^6 + 7p^4 p'^2 + 4p^2 p'^4 + p'^6) + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$V_0^{MT}(p, p') \stackrel{p, p' \ll 1}{=} \frac{2}{\pi} \left( \frac{V_R}{\mu_R^2} - \frac{V_A}{\mu_A^2} \right) \{ 1 - (p^2 + p'^2) + (p^4 + \frac{10}{3} p^2 p'^2 + p'^4) \\ - (p^6 + 7p^4 p'^2 + 4p^2 p'^4 + p'^6) + \dots \}$$

$$V_0^{MT}(p, p') = \frac{1}{2\pi p p'} \left\{ -V_A \ln \frac{(p+p')^2 + \mu_A^2}{(p-p')^2 + \mu_A^2} + V_R \ln \frac{(p+p')^2 + \mu_R^2}{(p-p')^2 + \mu_R^2} \right\}$$

می خواهیم نشان دهیم:

$$V_0^{MT}(p, p') = V_0^{MT}(p', p)$$

اگر:  $p' \ll 1$  ولی  $p$  متناهی باشد، داریم:

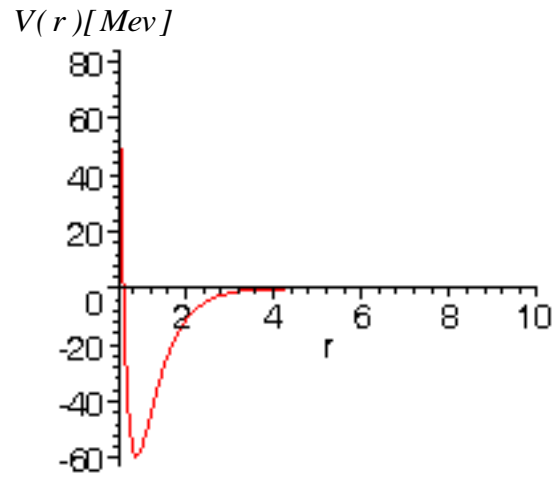
$$V_0^{MT}(p, p') = \frac{2}{\pi} \left( \frac{-V_A}{p^2 + \mu_A^2} + \frac{V_R}{p^2 + \mu_R^2} \right) \\ + \frac{p'^2}{2\pi} \left\{ V_R \left[ -\frac{4}{3} \frac{1}{(p^2 + \mu_R^2)^2} + \frac{8}{3} \frac{(p^2 - \mu_R^2)}{(p^2 + \mu_R^2)^3} \right] - V_A \left[ -\frac{4}{3} \frac{1}{(p^2 + \mu_A^2)^2} + \frac{8}{3} \frac{(p^2 - \mu_A^2)}{(p^2 + \mu_A^2)^3} \right] \right\} \\ + \frac{p'^4}{2\pi} \left\{ V_R \left[ -\frac{4}{5} \frac{(p^2 - 3\mu_R^2)}{(p^2 + \mu_R^2)^4} + \frac{8}{5} \frac{(p^4 + \mu_R^4 - 6p^2 \mu_R^2)}{(p^2 + \mu_R^2)^5} \right] \right. \\ \left. - V_A \left[ -\frac{4}{5} \frac{(p^2 - 3\mu_A^2)}{(p^2 + \mu_A^2)^4} + \frac{8}{5} \frac{(p^4 + \mu_A^4 - 6p^2 \mu_A^2)}{(p^2 + \mu_A^2)^5} \right] \right\} \\ + \frac{p'^6}{2\pi} \left\{ V_R \left[ -\frac{4}{7} \frac{(p^4 - 10p^2 \mu_R^2 + 5\mu_R^4)}{(p^2 + \mu_R^2)^6} + \frac{8}{7} \frac{(p^6 - 15p^4 \mu_R^2 + 15p^2 \mu_R^4 + \mu_R^6)}{(p^2 + \mu_R^2)^7} \right] \right. \\ \left. - V_A \left[ -\frac{4}{7} \frac{(p^4 - 10p^2 \mu_A^2 + 5\mu_A^4)}{(p^2 + \mu_A^2)^6} + \frac{8}{7} \frac{(p^6 - 15p^4 \mu_A^2 + 15p^2 \mu_A^4 + \mu_A^6)}{(p^2 + \mu_A^2)^7} \right] \right\} + O(p'^7)$$

اگر  $p \ll 1$  ولی  $p'$  متناهی باشد:

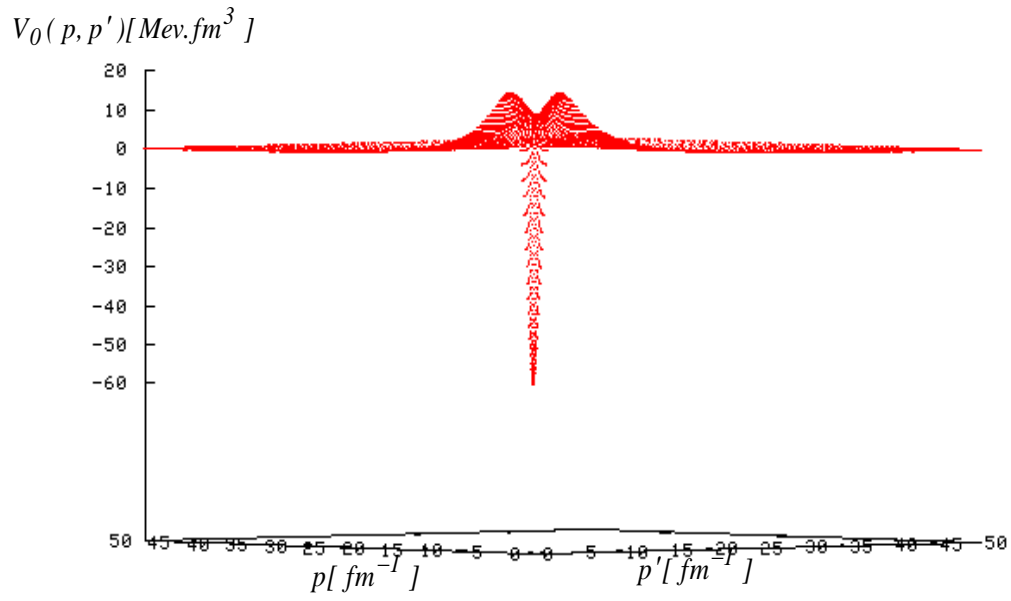
همان رابطه قبلی را داریم با این تفاوت که باید جای  $p$  و  $p'$  را در آن عوض کنیم. در نتیجه داریم:

$$V_0^{MT}(p, p') \stackrel{p' \ll 1}{=} V_0^{MT}(p', p) \stackrel{p \ll 1}{=}$$

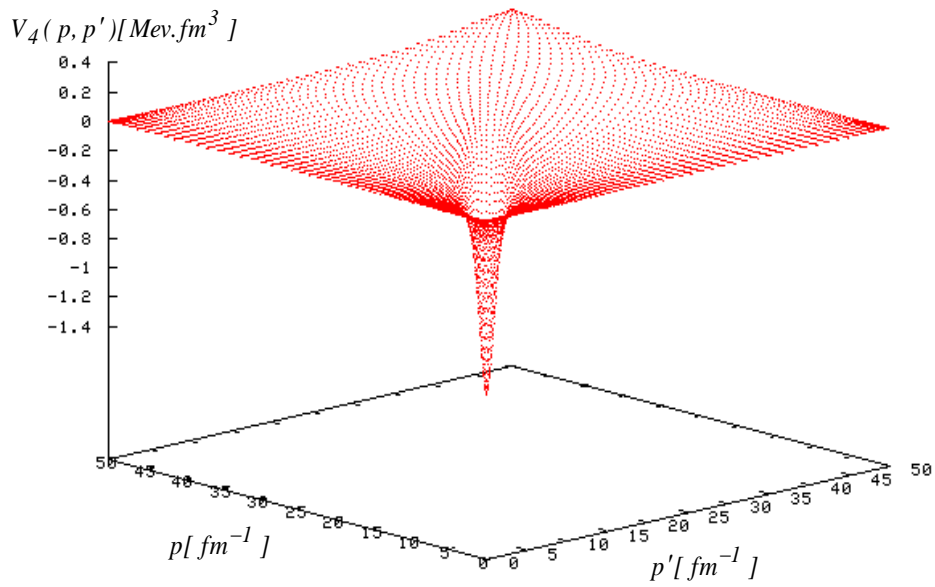
در شکل های (۶-۱) و (۶-۲) و (۶-۳) و (۶-۴) ما نمودارهای پتانسیل مالفلیت- تیون (۵) در فضای مکان و  $v_l(p, p')$  را به ازای  $l$  های مختلف در فضای مومنتم رسم کرده ایم:



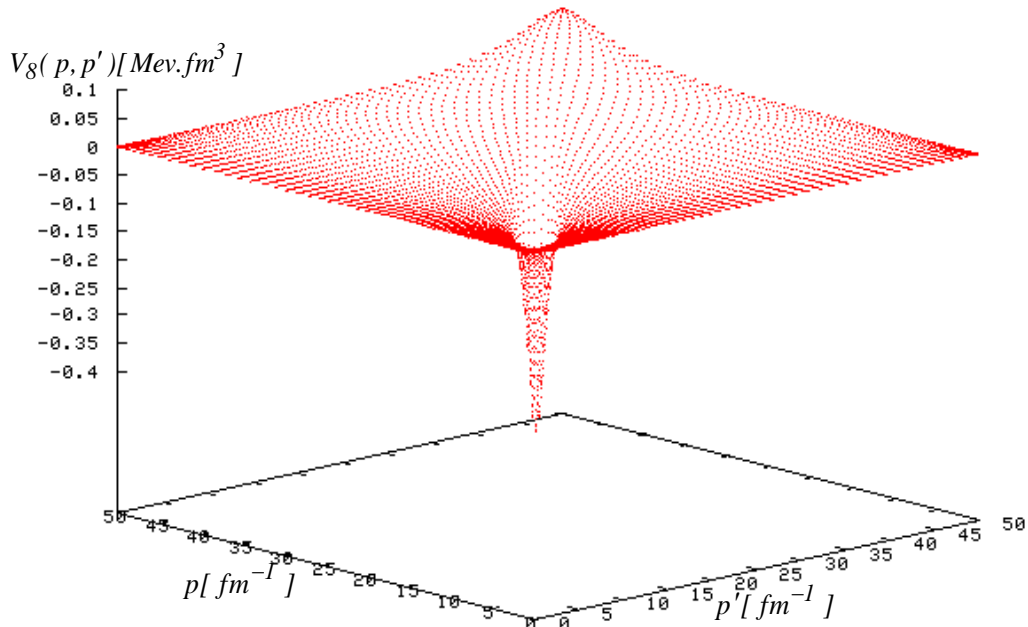
شکل (۶-۱) پتانسیل مالفلیت- تیون در فضای مکان



شکل (۶-۲) پتانسیل دو ذره ای برای  $l = 0$  در نمایش فضای تکانه

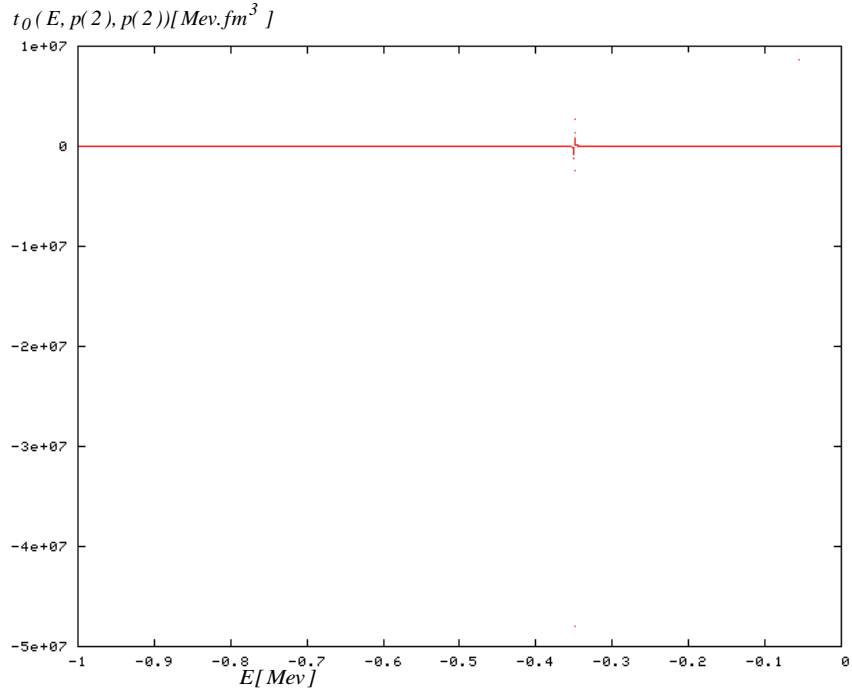


شکل (۳-۶) پتانسیل دو ذره ای برای  $l = 4$  در نمایش فضای تکانه

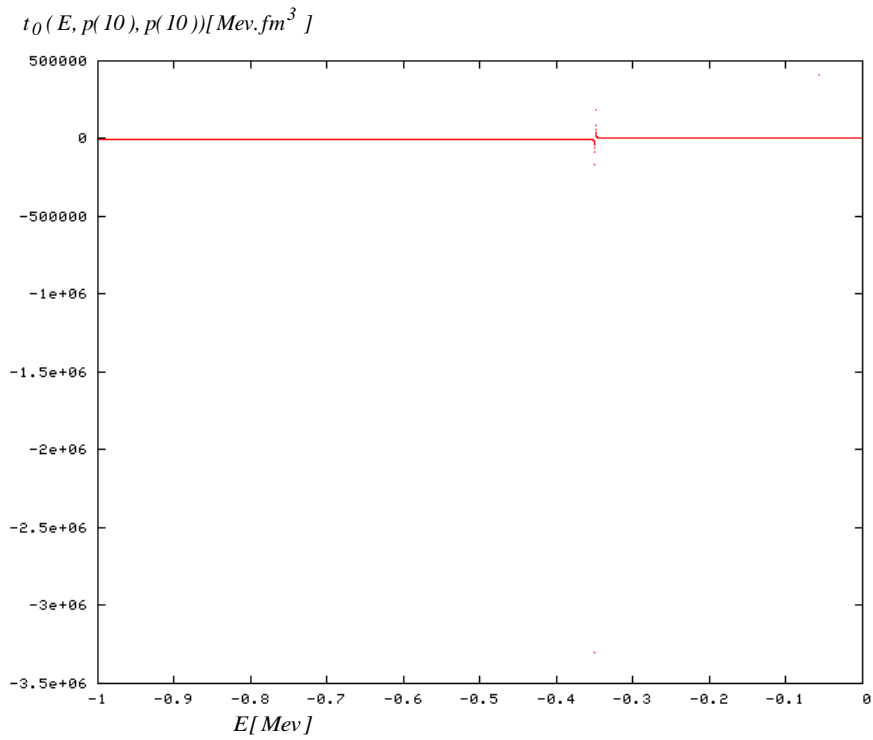


شکل (۶-۴) پتانسیل دو ذره ای برای  $l = 8$  در نمایش فضای تکانه

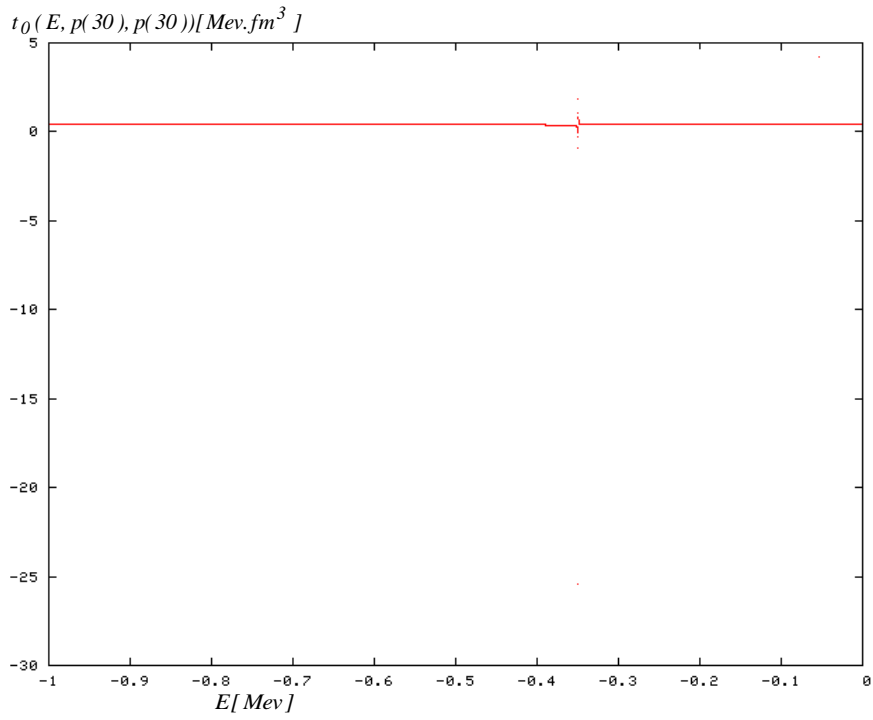
بعد از یافتن پتانسیل  $v_l$  و بررسی آن حال در شکل های (۶-۵) و (۶-۶) و (۶-۷) و (۶-۸) عملگر گذار دو ذره ای  $t_l(p_k, p_k, z)$  را برای  $l = 0$  و نقاط مش ثابت  $k$  و  $k'$  نمایش داده ایم.



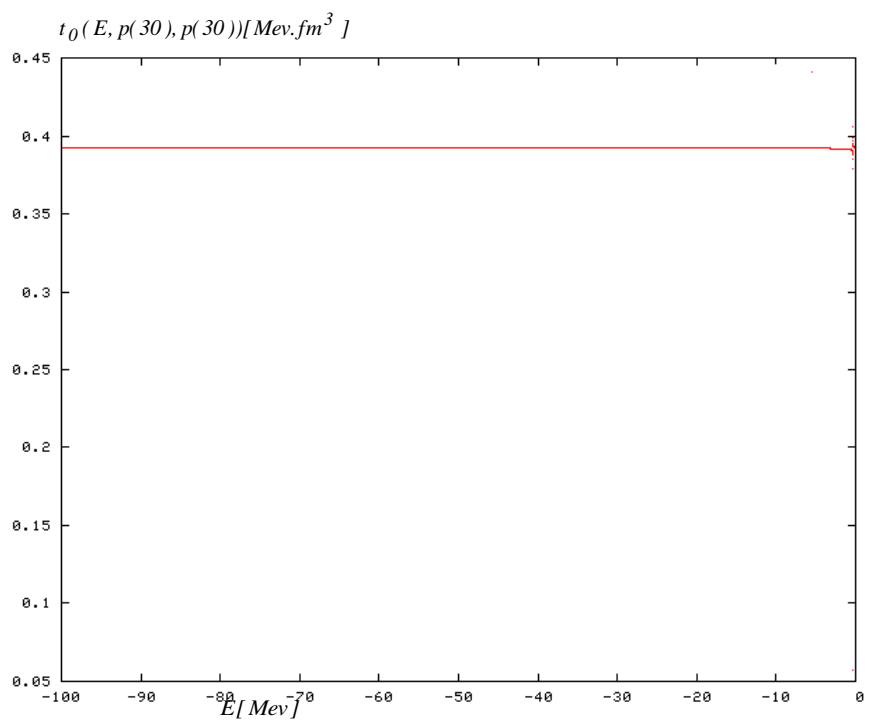
شکل (۵-۶) عملگر گذار بر حسب انرژی



شکل (۶-۶) عملگر گذار بر حسب انرژی



شکل (۶-۷) عملگر گذار بر حسب انرژی



شکل (۶-۸) عملگر گذار بر حسب انرژی



همانطور که مشاهده می شود در نمودارهای (۶-۵) و (۶-۶) و (۶-۷) عملگر گذار  $t_0$  در بازه انرژی  $-1 \leq E \leq 0$  رسم شده است و در  $E = -0.35 \text{ Mev}$  دارای تکینگی است. و در شکل (۶-۸) عملگر گذار دو ذره ای  $t_0(p_k, p_k, z)$  تا بازه انرژی  $E = -100 \text{ Mev}$  نمایش داده شده است. با اندکی دقت در این نمودار می توان به این نکته پی برد که  $t_0(z)$  برای  $E > -10$  رفتاری نسبتاً هموار دارد. برای اینکه این تکینگی را توضیح دهیم، داریم:

$$t_\alpha(z) = v_\alpha + v_\alpha g_\alpha(z) v_\alpha$$

$$g_\alpha(z) \equiv \frac{1}{z - h_\alpha} \quad ; h_\alpha = h_0 + v_\alpha$$

می توان  $g_\alpha(z)$  را در نمایش طیفی  $h_\alpha$  نوشت.  $\hat{h}_\alpha$  دارای توابع موج مقید و نامقید می باشد:

$$\hat{h}_\alpha |u_n\rangle = \varepsilon_n |u_n\rangle \quad \text{حالت مقید (منفصل):}$$

$$\hat{h}_\alpha |u_{\bar{q}}\rangle = \varepsilon_{\bar{q}} |u_{\bar{q}}\rangle \quad \text{حالت پراکندگی (پیوسته):}$$

مجموعه تمام توابع  $\{|u_n\rangle\}$  و  $\{|u_{\bar{q}}\rangle\}$  رویهم یک مجموعه کامل درست می کنند، یعنی داریم:

$$1 = \sum_n |u_n\rangle \langle u_n| + \int \frac{d\bar{q}}{(2\pi)^3} |u_{\bar{q}}\rangle \langle u_{\bar{q}}|$$

$$\rightarrow g_\alpha(z) = g_\alpha(z) \cdot 1 = \frac{1}{z - h_\alpha} \left\{ \sum_n |u_n\rangle \langle u_n| + \int \frac{d\bar{q}}{(2\pi)^3} |u_{\bar{q}}\rangle \langle u_{\bar{q}}| \right\}$$

$$g_\alpha(z) = \sum_n \frac{|u_n\rangle \langle u_n|}{z - \varepsilon_n} + \int \frac{d\bar{q}}{(2\pi)^3} \frac{|u_{\bar{q}}\rangle \langle u_{\bar{q}}|}{z - \varepsilon_{\bar{q}}}$$

چون  $\varepsilon_n$  ها منفی هستند، به ازای  $z < 0$ ، مخرج  $z - \varepsilon_n$  به ازای  $z = E_n$  صفر می شود و  $t_\alpha(z)$  از

$$t_\alpha(z = \varepsilon_n) = \infty \quad \text{خود تکینگی نشان می دهد یعنی:}$$

بررسی تکینگی در محاسبه عددی

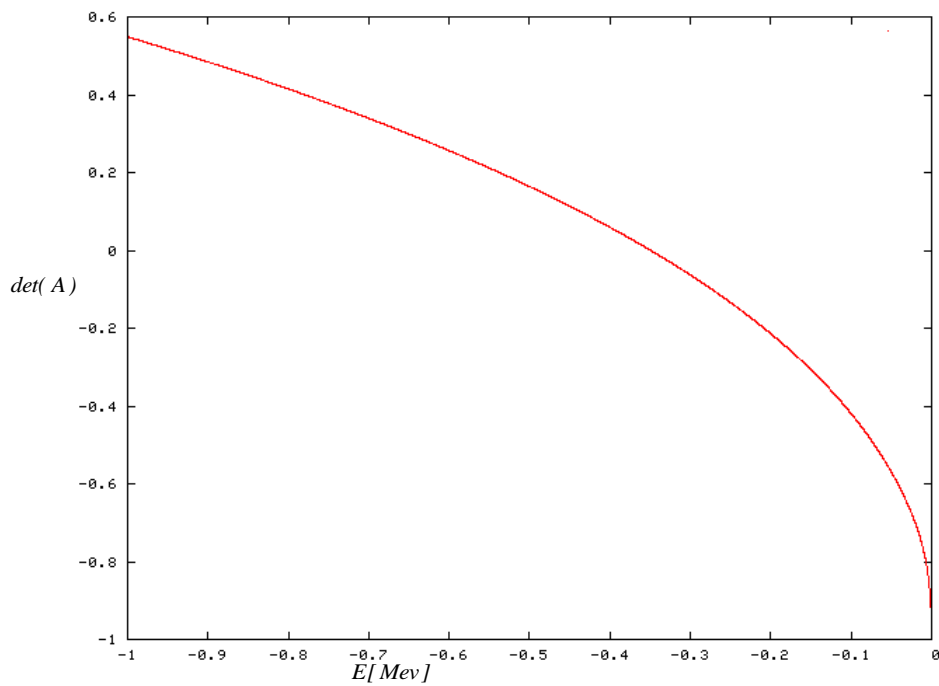
اگر بخواهیم از لحاظ محاسباتی علت این تکینگی را بیان کنیم باید به معادله گسسته شده

$$t_l(p_k, p_k, z) \text{ توجه کنیم که به معادله: } A \cdot t \approx v \text{ منجر شده است. برای محاسبه } t \text{ داریم:}$$

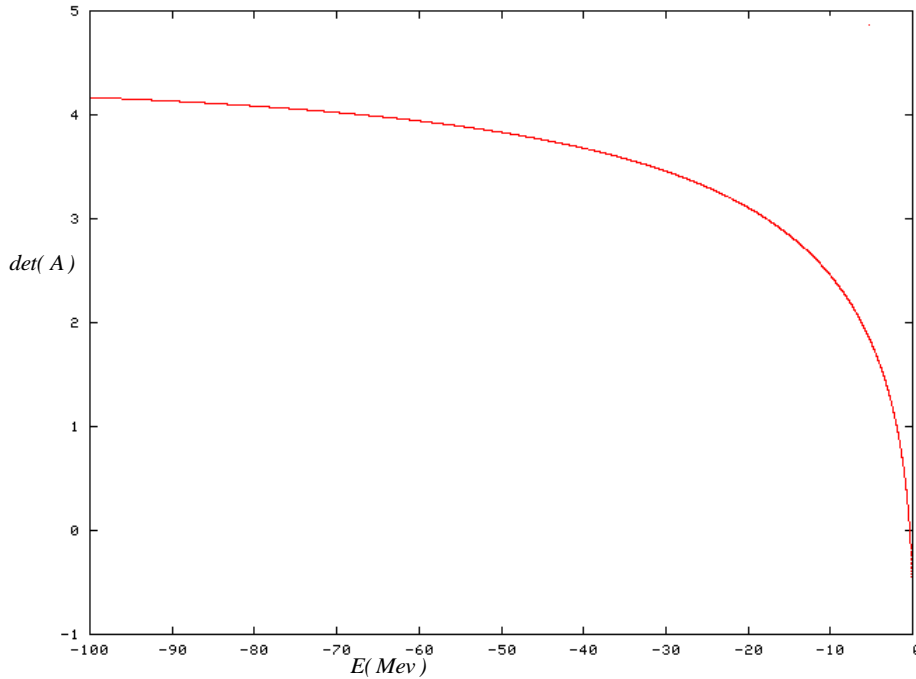
$$t \approx A^{-1} \cdot v \text{، یعنی در اینجا باید } A^{-1} \text{ را محاسبه کرد که برابر است با:}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^\dagger$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که ممکن است این تکینگی از صفر شدن  $\det(A)$  ناشی شود. در شکل های (۶-۹) و (۶-۱۰) نمودار های  $\det(A)$  را بر حسب انرژی برای بازه های انرژی  $-1 \leq E \leq 0$  و  $-100 \leq E \leq 0$  رسم کرده ایم:



شکل (۶-۹) دترمینان A بر حسب انرژی برای  $0 \leq E \leq -1$



شکل (۱۰-۶) دترمینان A بر حسب انرژی برای  $-100 \leq E \leq 0$

همانطور که مشاهده می کنیم  $\det(A)$  در این نمودارها تغییر علامت می دهد یا به عبارتی به ازای یک انرژی مشخص،  $\det(A) = 0$  می شود بنابراین با صفر شدن  $\det(A)$  منشأ این تکینگی از لحاظ محاسباتی واضح است.

لازم به ذکر است که در رسم نمودار  $t_l$  بر حسب انرژی ملاحظه می شود که ما فقط به ازای  $l = 0$  یعنی  $t_0$  تکینگی داریم و به ازای  $l \neq 0$  دیگر این تکینگی مشاهده نمی شود. علت این موضوع این است که در حل معادله شرودینگر در فضای مختصات کروی معادله بخش شعاعی به صورت زیر محاسبه می شود:

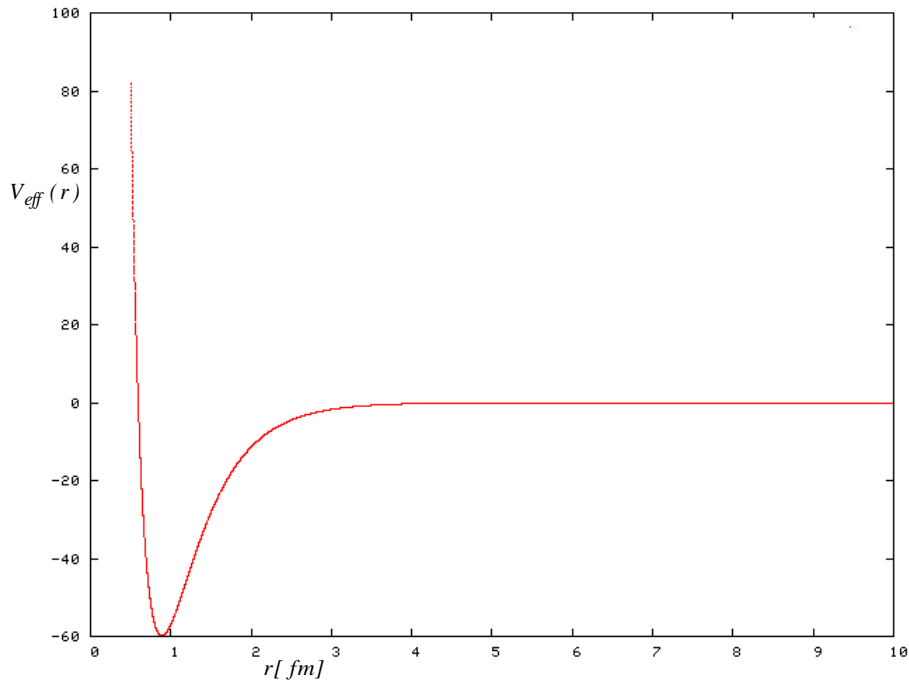
معادله شرودینگر قسمت شعاعی برای پتانسیل مرکزی  $v(r)$ ،

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_E}{dr^2} + \left[ v(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u_E = E u_E$$

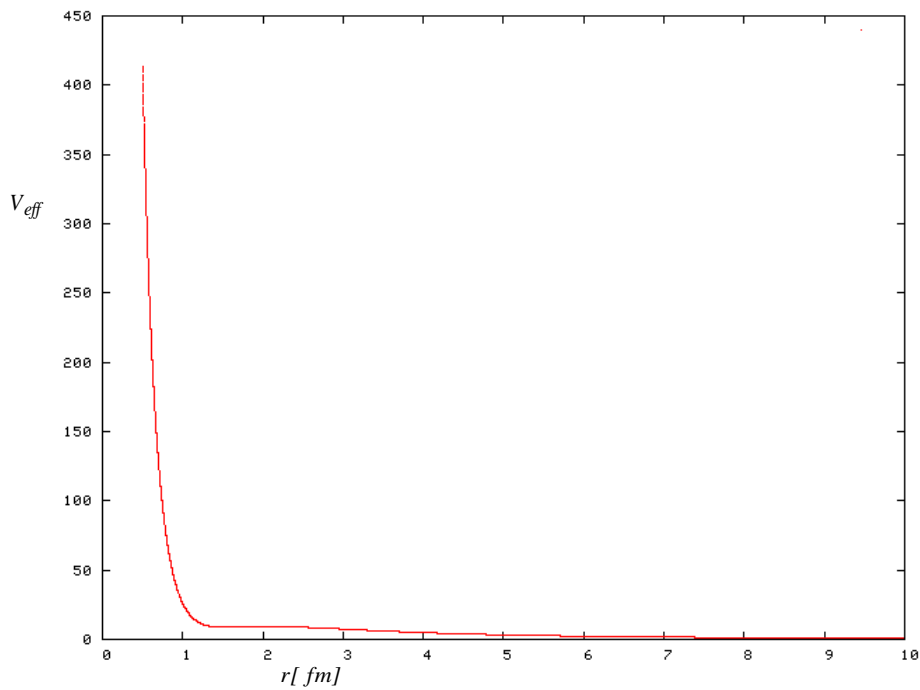
با استفاده از این رابطه  $v_{eff}$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$v_{eff} = v(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

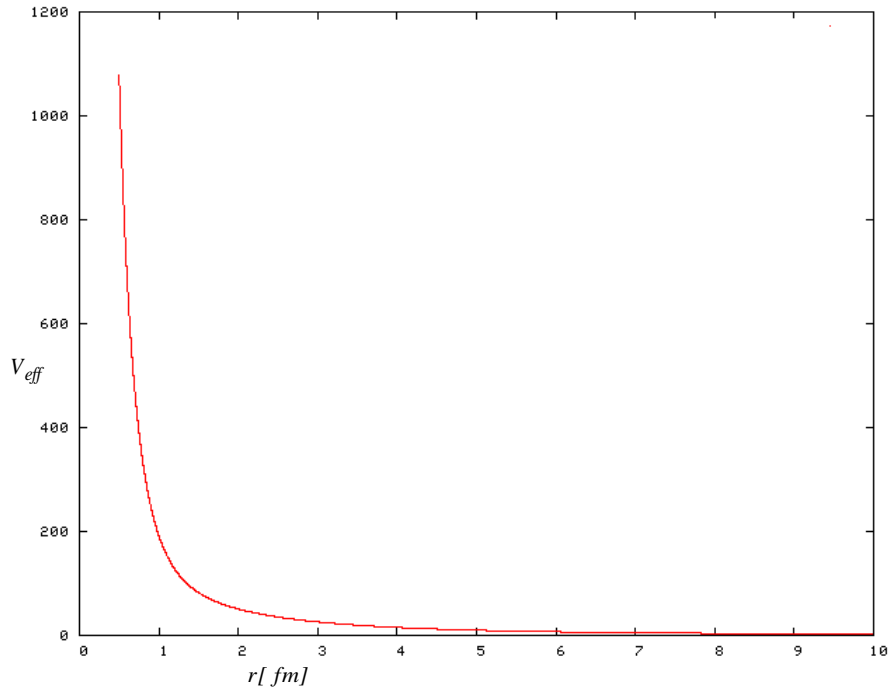
ما نمودار  $V_{eff}$  بر حسب  $r$  برای  $l$  های مختلف در شکل های (۶-۱۱) و (۶-۱۲) و (۶-۱۳) رسم کرده ایم:



شکل (۶-۱۱) پتانسیل موثر بر حسب مکان برای  $l = 0$



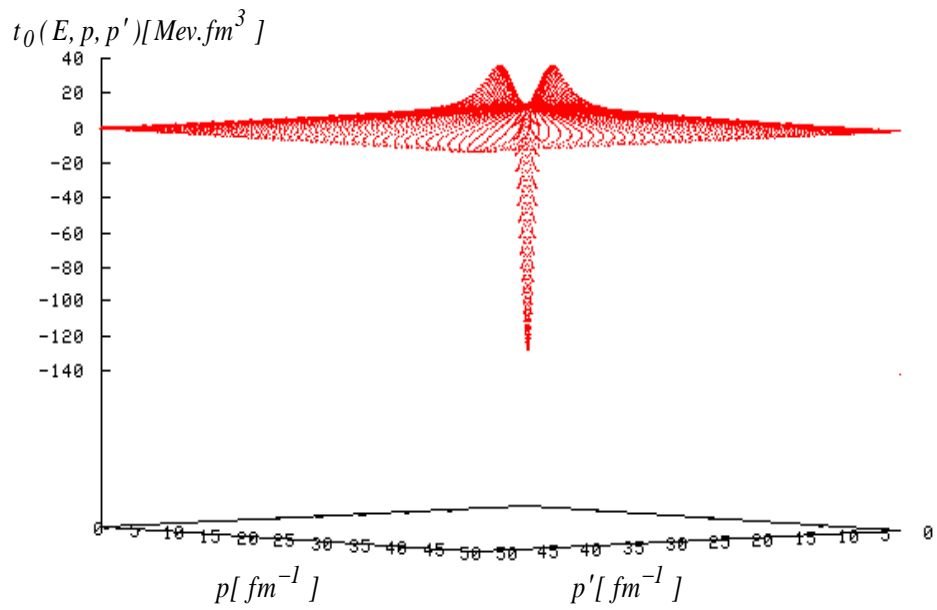
شکل (۶-۱۲) پتانسیل موثر بر حسب مکان برای  $l = 1$



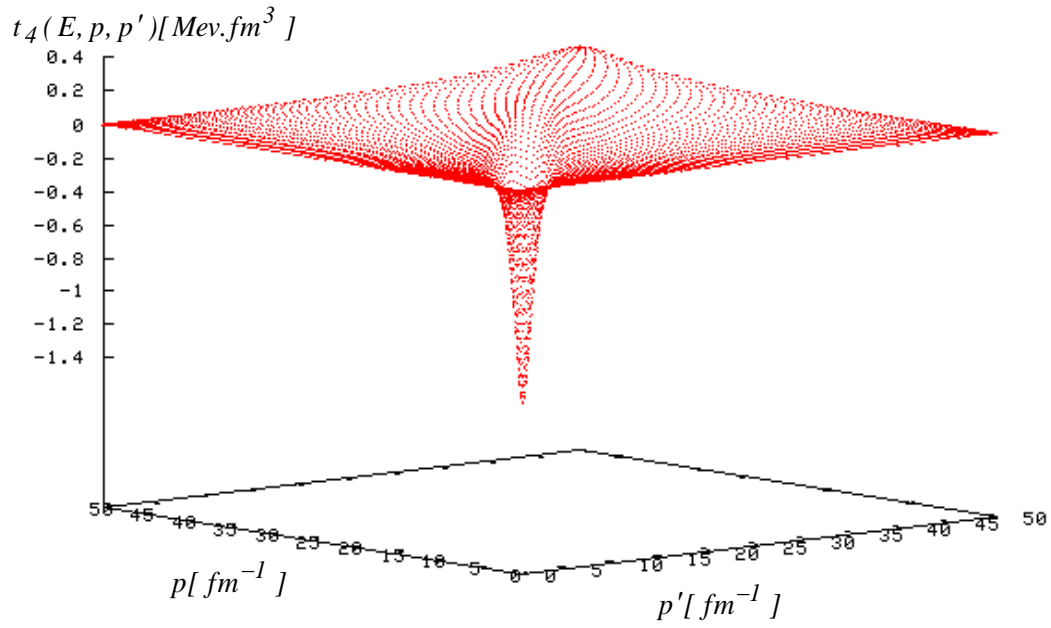
شکل (۶-۱۳) پتانسیل موثر بر حسب مکان برای  $l = 2$

می بینیم که فقط به ازای  $l = 0$ ،  $v_{eff}$  قسمت جاذبه دارد و می توان حالت مقید داشت در حالیکه برای  $l > 0$ ؛  $v_{eff}$  دافعه محض است و نمی تواند حالت مقید ایجاد کند. از این رو عملگر گذار دو ذره ای هم فقط به ازای  $l = 0$  تکینگی دارد و به ازای  $l > 0$  در هیچ انرژی از خود تکینگی نشان نمی دهد.

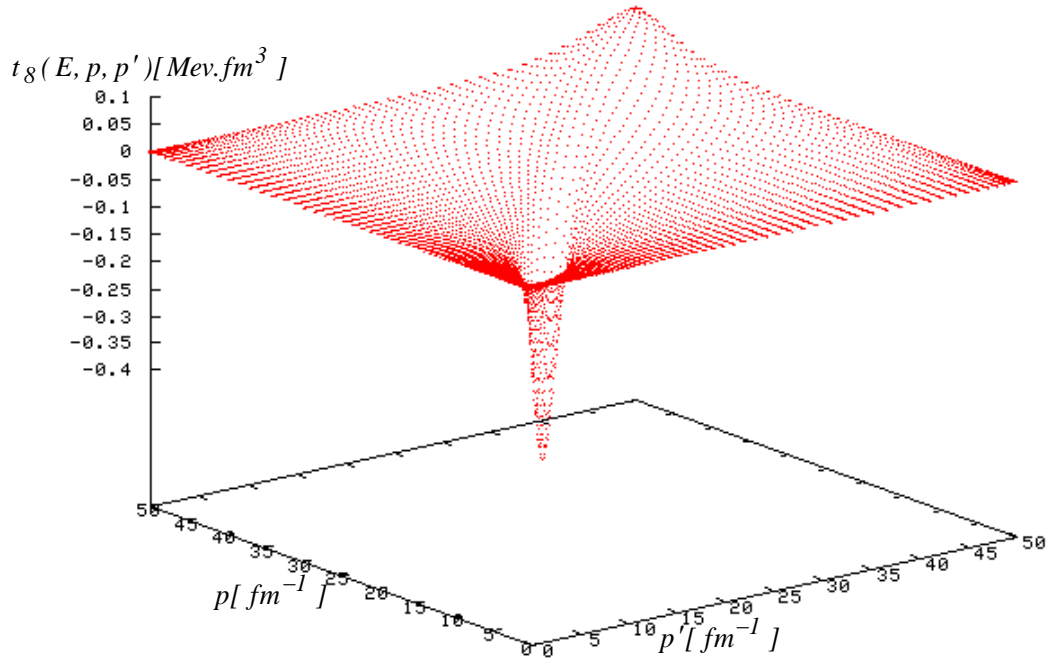
نمودارهای عملگر دو ذره ای  $t_l$  به ازای  $l$  های مختلف در فضای تکانه را در شکل های (۶-۱۴) و (۶-۱۵) و (۶-۱۶) رسم کرده ایم:



شکل (۶-۱۴) عملگر گذار دو ذره ای برای  $l = 0$  در نمایش فضای تکانه با انرژی  $E = -8 \text{ Mev}$



شکل (۶-۱۵) عملگر گذار دو ذره ای برای  $l = 4$  در نمایش فضای تکانه با انرژی  $E = -8 \text{ MeV}$



شکل (۶-۱۶) عملگر گذار دو ذره ای برای  $l = 8$  در نمایش فضای تکانه با انرژی  $E = -8 \text{ MeV}$



۲-۶- بررسی تغییرات ویژه مقدار  $\lambda$  بر حسب تغییرات تعداد نقاط مش

در جدول زیر تغییرات ویژه مقادیر  $\lambda$  با افزایش تعداد نقاط مش نشان داده شده است. براساس این نتایج برای نقاط مش ۴۰ و بیشتر تغییرات ویژه مقدار  $\lambda$  برای انرژی بسیار ناچیز است. ما در این

محاسبات  $p_{\max} = 6.3 \text{ fm}^{-1}$  و  $p_{\text{cut off}} = 50 \text{ fm}^{-1}$  و  $q_{\max} = \frac{2}{3} p_{\max}$  در نظر گرفتیم.

تعداد نقاط شبکه	$\lambda$ (بزرگترین ویژه مقدار)	انرژی (Mev)
10	1.08163	-7.54
20	1.02551	-7.54
30	1.01683	-7.54
40	1.01287	-7.54
50	1.01049	-7.54
60	1.00887	-7.54
70	1.00769	-7.54

انرژی فیزیکی سیستم سه ذره ای، برابر با انرژی است که به ازای آن انرژی بزرگترین ویژه مقدار ماتریس  $M$  برابر با یک شود. جدول زیر بزرگترین ویژه مقدار ماتریس  $M$  را با افزایش قدر مطلق

انرژی نشان می دهد. ما در این محاسبات  $p_{\max} = 6.3 \text{ fm}^{-1}$  و  $p_{\text{cut off}} = 50 \text{ fm}^{-1}$  و  $q_{\max} = \frac{2}{3} p_{\max}$

در نظر گرفتیم.

تعداد نقاط شبکه	$\lambda$ (بزرگترین ویژه مقدار)	انرژی (Mev)
40	1.01501	-7.5
40	1.01287	-7.54
40	1.00445	-7.7
40	1.00186	-7.75
40	1.00032	-7.78
40	0.99929	-7.8
40	0.99846	-7.82

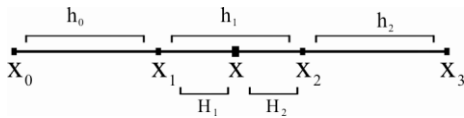
از آنجائیکه هدف ما بدست آوردن انرژی است که در آن انرژی  $\lambda = 1$  است ( $\lambda$  بزرگترین ویژه مقدار ماتریس  $M$  می باشد)، لذا می توان با استفاده از داده های جدول فوق و استفاده از روش درونیابی چند جمله ای، انرژی معادل با این ویژه مقدار را درونیابی کنیم. با درونیابی  $E = -7.786012$  که در آن انرژی  $\lambda = 1$  است را محاسبه کردیم.

## پیوست ها

پیوست (۱): پیدا کردن فرمول درونیابی درجه ۳

حالت الف :

ابتدا فرض می کنیم که نقطه  $x$  در بازه  $[x_1, x_2]$  واقع شده باشد :



$$f(x) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + a_3 f(x_3)$$

$$x_1 - x_0 \equiv h_0$$

$$x_2 - x_1 \equiv h_1$$

$$x_3 - x_2 \equiv h_2$$

$$h_1 = H_1 + H_2$$

$$H_1 = x - x_1$$

$$H_2 = x_2 - x$$

$$f(x) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_0 + h_0) + a_2 f(x_0 + h_0 + h_1) + a_3 f(x_0 + h_0 + h_1 + h_2)$$

$$f(x) = 1 \rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$\begin{cases} x_0 = x - h_0 - H_1 \\ x_1 = x - H_1 \\ x_2 = x + H_2 \\ x_3 = x + H_2 + h_2 \end{cases}$$

$$f(x) = a_0 f(x - h_0 - H_1) + a_1 f(x - H_1) + a_2 f(x + H_2) + a_3 f(x + H_2 + h_2)$$

$$f(x) = x$$

در  $x = 0$  حساب می کنیم :

$$x = a_0 (x - h_0 - H_1) + a_1 (x - H_1) + a_2 (x + H_2) + a_3 (x + H_2 + h_2)$$

$$x = a_0(x - h_0 - H_1) + a_1(x - H_1) + a_2(x + H_2) + a_3(x + H_2 + h_2)$$

$$\text{if } x = 0 \rightarrow 0 = -(h_0 + H_1)a_0 - H_1 a_1 + H_2 a_2 + (H_2 + h_2)a_3$$

$$f(x) = x^2$$

$$x^2 = a_0(x - h_0 - H_1)^2 + a_1(x - H_1)^2 + a_2(x + H_2)^2 + a_3(x + H_2 + h_2)^2$$

$$\text{if } x = 0 \rightarrow 0 = (h_0 + H_1)^2 a_0 + H_1^2 a_1 + H_2^2 a_2 + (H_2 + h_2)^2 a_3$$

$$f(x) = x^3$$

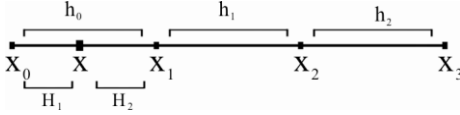
$$0 = -(h_0 + H_1)^3 a_0 - H_1^3 a_1 + H_2^3 a_2 + (H_2 + h_2)^3 a_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -(h_0 + H_1) & -H_1 & H_2 & H_2 + h_2 \\ (h_0 + H_1)^2 & H_1^2 & H_2^2 & (H_2 + h_2)^2 \\ -(h_0 + H_1)^3 & -H_1^3 & H_2^3 & (H_2 + h_2)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_1 + H_2 = h$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_0 &= \frac{-H_1 H_2 (H_2 + h_2)}{h_0 (h_0 + h_1 + h_2) (h_0 + h_1)} \\ a_1 &= \frac{H_2 (h_0 + H_1) (H_2 + h_2)}{h_0 h_1 (h_1 + h_2)} \\ a_2 &= \frac{H_1 (h_0 + H_1) (H_2 + h_2)}{h_1 h_2 (h_0 + h_1)} \\ a_3 &= \frac{-H_1 H_2 (h_0 + H_1)}{h_2 (h_0 + h_1 + h_2) (h_1 + h_2)} \end{aligned} \right.$$

حالت ب : در این حالت فرض می کنیم که  $x$  خارج بازه  $[x_1, x_2]$  در سمت چپ  $x_1$  قرار دارد:



$$\begin{cases} x_0 = x - H_1 \\ x_1 = x + H_2 \\ x_2 = x + H_2 + h_1 \\ x_3 = x + H_2 + h_1 + h_2 \end{cases}$$

$$f(x) = a_0 f(x - H_1) + a_1 f(x + H_2) + a_2 f(x + H_2 + h_1) + a_3 f(x + H_2 + h_1 + h_2)$$

$$\text{if } f(x) = 1 \rightarrow 1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$\text{if } f(x) = x \rightarrow 0 = -H_1 a_0 + H_2 a_1 + (h_1 + H_2) a_2 + (H_2 + h_1 + h_2) a_3$$

$$\text{if } f(x) = x^2 \rightarrow 0 = H_1^2 a_0 + H_2^2 a_1 + (h_1 + H_2)^2 a_2 + (H_2 + h_1 + h_2)^2 a_3$$

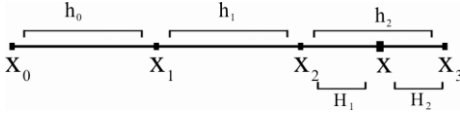
$$\text{if } f(x) = x^3 \rightarrow 0 = H_1^3 a_0 + H_2^3 a_1 + (h_1 + H_2)^3 a_2 + (H_2 + h_1 + h_2)^3 a_3$$

$$H_1 + H_2 = h_0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -H_1 & H_2 & (h_1 + H_2) & (h_1 + h_2 + H_2) \\ H_1^2 & H_2^2 & (h_1 + H_2)^2 & (h_1 + h_2 + H_2)^2 \\ -H_1^3 & H_2^3 & (h_1 + H_2)^3 & (h_1 + h_2 + H_2)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{H_2(h_1 + H_2)(h_1 + h_2 + H_2)}{(h_0 + h_1 + h_2)(h_0 + h_1)h_0} \\ a_1 = \frac{H_1(h_1 + H_2)(h_1 + h_2 + H_2)}{h_0 h_1 (h_1 + h_2)} \\ a_2 = \frac{-H_1 H_2 (h_1 + h_2 + H_2)}{h_1 h_2 (h_0 + h_1)} \\ a_3 = \frac{H_1 H_2 (h_1 + H_2)}{h_2 (h_1 + h_2)(h_0 + h_1 + h_2)} \end{cases}$$

حالت پ: در این حالت فرض می‌کنیم که  $x$  خارج بازه  $[x_1, x_2]$  در سمت راست  $x_2$  قرار دارد:



$$\begin{cases} x_0 = x - H_1 - h_1 - h_0 \\ x_1 = x - H_1 - h_1 \\ x_2 = x - H_1 \\ x_3 = x + H_2 \end{cases}$$

$$f(x) = a_0 f(x - H_1 - h_1 - h_0) + a_1 f(x - H_1 - h_1) + a_2 f(x - H_1) + a_3 f(x + H_2)$$

$$\text{if } f(x) = 1 \rightarrow 1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$\text{if } f(x) = x \rightarrow 0 = -(H_1 + h_1 + h_0)a_0 + (H_1 + h_1)a_1 - H_1 a_2 + H_2 a_3$$

$$\text{if } f(x) = x^2 \rightarrow 0 = (H_1 + h_1 + h_0)^2 a_0 + (H_1 + h_1)^2 a_1 + H_1^2 a_2 + H_2^2 a_3$$

$$\text{if } f(x) = x^3 \rightarrow 0 = -(H_1 + h_1 + h_0)^3 a_0 - (H_1 + h_1)^3 a_1 + H_1^3 a_2 + H_2^3 a_3$$

$$H_1 + H_2 = h_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -(H_1 + h_1 + h_0) & -(H_1 + h_1) & -H_1 & H_2 \\ (H_1 + h_1 + h_0)^2 & (H_1 + h_1)^2 & H_1^2 & H_2^2 \\ -(H_1 + h_1 + h_0)^3 & -(H_1 + h_1)^3 & -H_1^3 & H_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{(h_1 + H_1) H_1 H_2}{h_0 (h_0 + h_1) (h_0 + h_1 + h_2)} \\ a_1 = \frac{-H_1 H_2 (H_1 + h_1 + h_0)}{h_0 h_1 (h_1 + h_2)} \\ a_2 = \frac{H_2 (h_1 + H_1) (h_0 + h_1 + H_1)}{h_1 h_2 (h_0 + h_1)} \\ a_3 = \frac{H_1 (h_1 + H_1) (h_0 + h_1 + H_1)}{h_2 (h_1 + h_2) (h_0 + h_1 + h_2)} \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)}$$

$$a_{-1} = -\frac{h_2^2}{h_1^2} \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} = -\frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)}$$

$$a_0 = -a_1 - a_{-1} = -\frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} + \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} = \frac{-h_1^2 + h_2^2}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)}$$

$$f'(x_i) = \frac{1}{(h_1 + h_2)} \left[ -\frac{h_2}{h_1} f(x_{i-1}) + \frac{-h_1^2 + h_2^2}{h_1 h_2} f(x_i) + \frac{h_1}{h_2} f(x_{i+1}) \right]$$

$$\text{if } h_1 = h_2 \equiv h \Rightarrow f'(x_i) = \frac{1}{2h} [-f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})]$$

این روش، مشتق تابع را به ازای نقاطی محاسبه می کند که در داخل بازه هستند، برای نقاط ابتدا و انتها باید روشی مشابه بکار بست:

$$f'(x_0) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_0 + h_1) + a_2 f(x_0 + h_1 + h_2)$$

$$\begin{aligned} \text{if } f(x) = 1 &\rightarrow f'(x) = 0 \\ &\rightarrow 0 = a_0 + a_1 + a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{if } f(x) = x &\rightarrow f'(x) \Big|_0 = 1 \\ &\rightarrow 1 = 0 + h_1 a_1 + (h_1 + h_2) a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{if } f(x) = x^2 &\rightarrow f'(x) \Big|_0 = 0 \\ &\rightarrow 0 = 0 + h_1^2 a_1 + (h_1 + h_2)^2 a_2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow a_2 = -\frac{h_1^2}{(h_1 + h_2)^2} a_1$$

$$h_1 a_1 + (h_1 + h_2) \left[ -\frac{h_1^2}{(h_1 + h_2)^2} a_1 \right] = 1$$



$$\left[ h_1 - \frac{h_1^2}{(h_1 + h_2)} \right] a_1 = 1$$

$$\frac{h_1(h_1 + h_2) - h_1^2}{(h_1 + h_2)} a_1 = 1 \rightarrow a_1 = \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2}$$

$$a_2 = -\frac{h_1^2}{(h_1 + h_2)^2} \cdot \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2} = -\frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= -a_1 - a_2 = -\frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2} + \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} \\ &= \frac{-(h_1 + h_2)^2 + h_1^2}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)} = \frac{-2h_1 h_2 - h_2^2}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)} = \frac{-(2h_1 + h_2)}{h_1 (h_1 + h_2)} \end{aligned}$$

$$\rightarrow f'(x_0) = \frac{-(2h_1 + h_2)}{h_1 (h_1 + h_2)} f(x_0) + \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2} f(x_0 + h_1) - \frac{h_1}{h_2 (h_1 + h_2)} f(x_0 + h_1 + h_2)$$

$$f'(x_N) = a_{-2} f(x_N - h_{N-1} - h_{N-2}) + a_{-1} f(x_N - h_{N-1}) + a_0 f(x_N)$$

$$\rightarrow f'(x) = a_{-2} f(x - h_1 - h_2) + a_{-1} f(x - h_1) + a_0 f(x)$$

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \rightarrow 0 = a_{-2} + a_{-1} + a_0 \\ f(x) = x & \rightarrow 1 = -(h_1 + h_2) a_{-2} - h_1 a_{-1} + 0 \\ f(x) = x^2 & \rightarrow 0 = (h_1 + h_2)^2 a_{-2} + h_1^2 a_{-1} + 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -(h_1 + h_2) & -h_1 & 0 \\ (h_1 + h_2)^2 & h_1^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{-2} \\ a_{-1} \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{-2} = \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)}, \quad a_{-1} = -\frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2}, \quad a_0 = \frac{2h_1 + h_2}{h_1(h_1 + h_2)}$$

یک ساب روتین می نویسیم که به ازای مقادیر تابع داده شده در نقاط مش  $x_1, \dots, x_N$  مشتقات را

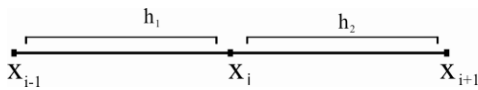
بدهد. ولی بهتر است در رابطه  $B_2$  از مقاله:

" A New Look into the Partial Wave Decomposition of Three-Nucleon Forces "

به جای  $f'(x_1)$  و  $f'(x_2)$  روابط معادله‌شان را بر حسب مقادیر تابع در سه نقطه را قرار بدهیم،

در نهایت رابطه:  $f_i(x) = \sum_{j=0}^3 S_j(x) f(x_j)$  را خواهیم داشت.

\* رابطه مشتق عددی بر حسب مقادیر تابع و مقادیر تابع در دو همسایه



$$f'(x_i) = a_{-1}f(x_{i-1}) + a_0f(x_i) + a_1f(x_{i+1})$$

$$x_i = x$$

$$x_{i-1} = x - h_1$$

$$x_{i+1} = x + h_2$$

$$f'(x) = a_{-1}f(x - h_1) + a_0f(x) + a_1f(x + h_2)$$

$$\begin{aligned} \text{if } f(x) = 1 &\rightarrow f'(x) = 0 \\ &\rightarrow 0 = a_{-1} + a_0 + a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{if } f(x) = x \\ \rightarrow f'(0) = 1 &\qquad 1 = -h_1a_{-1} + 0 + h_2a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 \\ \rightarrow f'(0) = 0 &\qquad 0 = h_1^2a_{-1} + 0 + h_2^2a_1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow a_{-1} = -\frac{h_2^2}{h_1^2} a_1$$

$$1 = -h_1\left(-\frac{h_2^2}{h_1^2}\right)a_1 + h_2a_1 = \left(\frac{h_2^2}{h_1} + h_2\right)a_1 = \frac{h_2^2 + h_1h_2}{h_1} a_1$$

چنانکه دیدیم، فرمول درونیابی اسپلاین چهار نقطه ای " Cubic " به صورت زیر می شود:

$$f(x) = \sum_{i=1}^3 a_i f(x_i)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \psi(p_i, q_j) &= \sum_k W_k q_k^2 \left(z - \frac{p_i}{m} - \frac{3}{4m} q_j^2\right)^{-1} \cdot \sum_m w_m \sum_{s=0}^3 a_s \tau_{0,s}(p_i, p_s, z - \frac{3}{4m} q_j^2) \\ &\times \sum_{t=0}^3 b_t \psi(p_t, q_k) \end{aligned}$$

پیوست (۲): این زیربرنامه ریشه‌ها ( $x_i$ ) و  $w_i$  های مربوط به انتگرال گائوس - لژاندر را تولید میکند.

```

SUBROUTINE GRULE(N,X,W)
  DOUBLE PRECISION PKMI, PK, T1, PKP1, DEN, D1, DPN, D2PN, D3PN, U, V,
* H, P, DP, FX
  DOUBLE PRECISION X(N), W(N)
  M=(N+1)/2
  E1=N*(N+1)
  DO 1 I=1, M
    T=(4*I-1)*3.1415926536/(4*N+2)
    X0=(1.-(1.-1./N)/(8.*N*N))*COS(T)
    PKM1=1.
    PK=X0
    DO 3 K=2, N
      T1=X0*PK
      PKP1=T1-PKM1-(T1-PKM1)/K+T1
      PKM1=PK
3    PK=PKP1
    DEN=1.-X0*X0
    D1=N*(PKM1-X0*PK)
    DPN=D1/DEN
    D2PN=(2.*X0*DPN-E1*PK)/DEN
    D3PN=(4.*X0*D2PN+(2.-E1)*DPN)/DEN
    D4PN=(6.*X0*D3PN+(6.-E1)*D2PN)/DEN
    U=PK/DPN
    V=D2PN/DPN
    H=-U*(1.+5*U*(V+U*(V*V-U*D3PN/3.*DPN))))
    P=PK+H*(DPN+.5*H*(D2PN+H/3.*(D3PN+.25*H*D4PN)))
    DP=DPN+H*(D2PN+.5*H*(D3PN+H*D4PN/3.))
    H=H-P/DP
    X(I)=X0+H
    FX=D1-H*E1*(PK+.5*H*(DPN+H/3.*(D2PN+.25*H*(D3PN+.2*H*D4PN))))
1  W(I)=2.*(1.-X(I)*X(I))/(FX*FX)
  IF (M+M .GT. N) X(M)=0.
  RETURN
END.

```

- [1] J.M. Cook, *J. Math. and Phys.* 36:82, 1957;  
M.N. Hack, *Nuovo Cim.* 9: 731, 1958; 13: 231, 1959.
- [2] L.D. Faddeev, *Mathematical Aspects of the Three-Body problem in the Quantum Scattering Theory*. Isreal Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965, chapters 1 and 10.
- [3] P. Roman, *Advanced Quantum Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1965.
- [4] S. Weinberg, *Phys. Rev.* B133: 233, 1964.
- [5] C. Lovelace, *Phys. Rev.* B135: 1225, 1964;  
W. Hunziker, *Helv. Phys. Acta* 34: 593, 1961.
- [6] W. Sandhas, *Acta Physica Austriaca*, Suppl.IX: 57, 1972.
- [7] P. Roman, Ref. [3], Chapter 4/4a.
- [8] L.D. Faddeev, *Sov. Phys. –Doklady* 7: 600, 1963;  
L.D. Faddeev, Ref. [2], Chapter 11;  
W. Sandhas, *Commun. Math. Phys.* 3: 358, 1966;  
W. Hunziker, *Helv. Phys. Acta* 40: 1052, 1967.
- [9] L.D. Faddeev, Ref. [2], Chapter 9.
- [10] H. Ekstein, *Phys. Rev.* 101: 880, 1956;  
L.D. Faddeev, Ref. [2], Chapter 9.
- [11] L.D. Faddeev, *Jetp* 12: 1014, 1961.
- [12] W. Glöckle, *Nucl. Phys.* A141: 620, 1970.
- [13] L.D. Faddeev, Ref. [11];  
L.L. Flody and W. Tobocman, *Phys. Rev.* 105: 1099, 1957.
- [14] L.D. Faddeev, *Sov. Phys. –Doklady* 6: 384, 1961, and Ref. [2], Chapters 5-7.
- [15] L.D. Faddeev, Ref. [2], Theorem 7.1 and 7.2.
- [16] K. Yosida, *Functional Analysis*, Chapter 10. Springer, Berlin, 1966.
- [17] L.D. Faddeev, in *Three-Body Problem in Nuclear and Particle Physics*, ed. By J.S.C. Mckee and P.M. Rolph. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1970.
- [18] W. Glöckle, *Nucl. Phys.* A381: 620, 1970.
- [19] W. Glöckle, in *Model and Methods in Few-Body Physics*, Edited by Lidia S. Ferreira, Antonio C. Fonseca, and Ludwig Streit, *Lecture Notes in Physics* (Springer, Berlin, 1987), P.3 N0. 273.
- [20] Ch. Hajduk and P.U.Saucr, *Nucl. Phys.* A 369, 321 (1981).

- 
- [21] C.R. Chen, G.L. Payne, J.L. Friar, and B.F. Gibson, *Phys. Rev. C*44. 50 (1991)
- [22] A. Stadler, W.G. Pöckle, and P. U. Sauer, *Phys. Rev. C*44, 2319 (1991)