

دانشگاه صنعتی شاهرود  
دانشکده فیزیک



عنوان :

**حرکت تصادفی کوآختومی**

**ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد  
فیزیک ذرات بنیادی**

استاد راهنما :

**دکتر محسن سربیشه ای**

استاد مشاور :

**دکتر حسین موحدیان**

نگارش :

**جعفر پورابراهیم**

- ۲-۴-۳ تابع موج دینامیکی در گام  $t+1$  با استفاده از تجزیه فوریه ای ماتریس هادامارد ..... ۲۵
- ۲-۴-۳ خصوصیات مجانبی از توابع موج در حد گامهای بالا ..... ۲۸
- ۲-۴-۳-۱ بسط مجانبی انتگرال  $\psi_R, \psi_L$  به روش فازمانا ..... ۲۸
- ۲-۴-۴ حل انتگرال  $\psi_R, \psi_L$  با بسط مجانبی ..... ۳۰
- ۲-۵ محاسبه تابع توزیع احتمال  $P_{slow}$  ..... ۳۴
- ۲-۶ محاسبه تابع توزیع احتمال با حالت اولیه متقارن ..... ۳۶
- ۲-۶-۱ محاسبه حالت اولیه متقارن ..... ۳۶
- ۲-۶-۲ محاسبه توابع  $\psi_R, \psi_L$  مربوط به ماتریس هادامارد با حالت اولیه متقارن ..... ۳۷
- ۲-۶-۳ محاسبه تابع توزیع احتمال  $P_{slow}$  با حالت اولیه متقارن ..... ۴۳

## فصل سوم

### حرکت تصادفی بر روی خط با دیواره جاذب

- ۳-۱ حرکت کتره ای کلاسیکی بر روی خط با دیواره جاذب ..... ۴۴
- ۳-۲ حرکت تصادفی کوانتومی با دیواره جاذب ..... ۴۶
- ۳-۲-۱ روش ویژه تابع ..... ۴۶
- ۳-۲-۱ سیستم بدون مرز ( ذره آزاد ) ..... ۴۷
- ۳-۲-۳ سیستم با مرز نوسانی ..... ۴۹
- ۳-۳ سیستم با یک دیواره جاذب ..... ۵۰
- ۳-۵ محاسبه عددی احتمال فرار و جذب از دیواره جاذب واقع در مکان  $M (M > 0)$  ..... ۵۴
- بررسی کلی ..... ۵۹

## فصل چهارم

### حرکت تصادفی بر روی گراف

- ۴-۱ حرکت تصادفی بر روی گراف با گامهای گسسته ..... ۶۰

## فهرست

صفحه

موضوع

چکیده

### فصل اول

#### حرکت تصادفی کوانتومی

- ۱ ..... مقدمه
- ۳ ..... ۱-۱ حرکت تصادفی کوانتومی
- ۱۱ ..... نتیجه گیری

### فصل دوم

#### حرکت تصادفی بر روی خط

- ۱۲ ..... ۱-۲ حرکت تصادفی با گامهای گسسته
- ۱۳ ..... ۱-۱-۲ انتقال S
- ۱۴ ..... ۲-۱-۲ انتقال توسط پرتاب سکه C
- ۱۶ ..... ۲-۲ توزیع احتمالی حرکت تصادفی کلاسیکی
- ۱۶ ..... ۱-۲-۲ تخته گالتون مثالی برای توزیع گاوسی و احتمال حرکت تصادفی کلاسیکی
- ۱۸ ..... ۲-۲-۲ توزیع احتمالی حرکت تصادفی کوانتومی مربوط به مکان I پس از T مرحله
- ۱۹ ..... ۳-۲ اختلاف حرکت تصادفی کلاسیکی و کوانتومی در سه گام اول
- ۲۱ ..... ۱-۳-۲ حرکت تصادفی کوانتومی با تعداد گامهای زیاد
- ۲۱ ..... ۴-۲ فرمول بندی توصیف حرکت تصادفی کوانتومی
- ۲۳ ..... ۱-۴-۲ توصیف دینامیکی تابع موج مکان ذره
- ۲۴ ..... ۲-۴-۲ تجزیه فوریه ای ماتریس هادامارد

# فصل اول

## حرکت تصادفی

## کلاسیکی و کوانتومی

در این پایان نامه در فصل اول به معرفی مفاهیم حرکت تصادفی کوانتومی پرداخته ایم. در فصل دوم حرکت تصادفی کوانتومی بر روی خط با حالت اولیه متقارن و غیر متقارن با گامهای بالا را مورد مطالعه قرار داده ایم. در فصل سوم حرکت تصادفی کلاسیکی و کوانتومی با یک دیواره جاذب را بررسی کرده ایم. در فصل چهارم حرکت تصادفی کوانتومی با بُعدهای بالاتر یعنی بر روی گراف را با گامهای گسسته و پیوسته مورد بررسی قرار داده ایم.

در این پایان نامه در فصل اول به معرفی مفاهیم حرکت تصادفی کوانتومی پرداخته ایم. در فصل دوم حرکت تصادفی کوانتومی بر روی خط با حالت اولیه متقارن و غیر متقارن با گامهای بالا را مورد مطالعه قرار داده ایم. در فصل سوم حرکت تصادفی کلاسیکی و کوانتومی با یک دیواره جاذب را بررسی کرده ایم. در فصل چهارم حرکت تصادفی کوانتومی با بُعدهای بالاتر یعنی بر روی گراف را با گامهای گسسته و پیوسته مورد بررسی قرار داده ایم.

- ۴-۱-۱ حرکت تصادفی بر روی گراف منظم از مرتبه  $d$  ..... ۶۰
- ۴-۱-۲ حرکت تصادفی بر روی گراف نامنظم ..... ۶۱
- ۴-۱-۳ تعریف سکه متقارن DFT برای حرکت بر روی گراف ..... ۶۲
- ۴-۲ حرکت کتره ای بر روی مکعب ..... ۶۳
- ۴-۳ حرکت تصادفی با گامهای پیوسته ..... ۶۵
- ۴-۳-۱ اختلاف رفتاری بین حرکت تصادفی کلاسیکی و کوانتومی با گام پیوسته بر روی گراف با  
یک مثال ..... ۷۲
- ۴-۴ توزیع حدی احتمال برای حرکت تصادفی کلاسیکی بر روی گراف ..... ۷۸
- ۴-۵ توزیع حدی برای حرکت تصادفی کوانتومی بر روی گراف ..... ۷۹
- بررسی کلی ..... ۸۱
- نتیجه گیری ..... ۸۲
- مراجع ..... ۸۴

## حرکت تصادفی کوانتومی

### مقدمه :

اخیراً اطلاعات کوانتومی مورد توجه قرار گرفته است. دلیل عمده این است که استفاده کیوبیتها بجای بیتهای کلاسیکی که بر مکانیک کوانتومی استوار است در زمینه هایی مانند نظریه های محاسبات اطلاعات، ارتباطات و رمزنگاری کوانتومی می باشد که بطور نظری امتیازات فوق العاده زیادی فراهم آورده است. لذا برای فهم بیشتر تحقیقات تحقیقات در زمینه های مختلف و از جمله حرکت تصادفی کوانتومی ( و مقایسه آنها با مورد کلاسیکی ) مورد توجه قرار گرفته است. حرکت تصادفی کوانتومی یا Quantum Random walk خاصیتی در سیستمهای کوانتومی است که توسط فیزیکدانان در سال ۱۹۹۳ ( آهارانوف ، دیوید ویچ زاگوری ) [۱] معرفی شد. این ویژگی دارای مفهومی وسیعتر از مفهوم حرکت تصادفی کلاسیکی می باشد. عامل تداخل کوانتومی باعث می شود که میانگین طول مسیر در حرکت تصادفی کوانتومی خیلی بزرگتر از ماکزیمم طول مسیر در حرکت تصادفی کلاسیکی می باشد.

در حرکت تصادفی کوانتومی سرعت انتشار از یک مکان اولیه به مکان نهایی مجذور حرکت تصادفی کلاسیکی است بعبارت ساده تر عامل تداخل کوانتومی در حرکت تصادفی کوانتومی باعث می شود که اطلاعات سریعتر بین دو نقطه انتقال پیدا کند.

در حرکت تصادفی کوانتومی نیز با مفهوم در هم تنیدگی Entanglement نیز نقش بسیار مهمی ایفا می کند. در هم تنیدگی رفتار کوانتومی سیستمهای دو یا چند ذره ای است که نخست با هم بر هم کنش کرده و سپس از هم جدا می شوند. براساس مکانیک کوانتومی، ذرات جدا شده از هم، حتی وقتی که هیچ بر هم کنش شناخته شده ای بین آنها وجود نداشته باشد، بر هم اثر می کنند و داشتن اطلاعات در مورد یکی، منجر به کسب اطلاعات در مورد دیگری می شود.



---

در فصل اول این پایان نامه پس از بیان مفاهیم و تعاریف لازم به معرفی حرکت تصادفی کوانتومی دو ویژه حالت‌های SZ (مشابه حرکت تصادفی کلاسیکی) و ویژه حالت‌های چرخش یافته می پردازیم. در فصل دوم حرکت تصادفی کوانتومی بر روی خط را فرمول بندی کرده و با استفاده از تجزیه فوریه ای ماتریس ها دامارد، تابع توزیع احتمال را با دو حالت اولیه متقارن و غیر متقارن برای گامهای بالا را رسم می کنیم. در فصل سوم ابتدا حرکت تصادفی کلاسیکی با یک دیواره جاذب به روش ویژه تابع بررسی می کنیم. در فصل چهارم به حرکت تصادفی کوانتومی در بعد های بالاتر ( گراف ) با گامهای گسسته و پیوسته می پردازیم. سپس توزیع جدی حرکت تصادفی کلاسیکی و کوانتومی بر روی گراف را بدست آورده و با یکدیگر مقایسه می کنیم.

### ۱-۱ حرکت تصادفی کوانتومی

در مکانیک کوانتومی با دامنه های احتمال که مختلط هستند سرو کار داریم. به عنوان مثال اگر برای یک ذره دو حالت  $|\alpha_1\rangle$  و  $|\alpha_2\rangle$  ممکن باشد، کلی ترین حالت ذره می تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$|\alpha\rangle = C_1 |\alpha_1\rangle + C_2 |\alpha_2\rangle \quad (1-1)$$

که در آن  $C_1$  و  $C_2$  اعداد مختلط و دامنه های احتمال می باشند. به زبان تابع موج رابطه فوق را می

$$\psi(x,t) = C_1 \psi_1(x,t) + C_2 \psi_2(x,t) \quad (2-1)$$

توان به صورت زیر نوشت:

علاوه بر این اگر  $\psi_1(x,t)$  و  $\psi_2(x,t)$  جوابهای معادله شرودینگر باشند، آنگاه ترکیب خطی آنها

یعنی  $\psi(x,t) = \psi_1 + \psi_2$  نیز جواب معادله است. اگر  $\psi_1$  و  $\psi_2$  را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$\psi_1(x,t) = R_1 e^{i\theta_1} \quad (3-1)$$

$$\psi_2(x,t) = R_2 e^{i\theta_2}$$

که در آن  $R_1$  و  $R_2$  و  $\theta_1$  و  $\theta_2$  توابع حقیقی اند. با توجه به اینکه چگالی احتمال حضور ذره برابر است با

$$P = \psi^* \psi = |\psi(x,t)|^2 = |e^{i\theta_1} (R_1 + R_2 e^{i(\theta_2 - \theta_1)})|^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (4-1)$$

از عامل فاز کل در  $\psi(x,t)$  می توان چشم پوشید زیرا فقط فاز نسبی  $(\theta_1 - \theta_2)$  بین دو تابع

موج  $\psi_1$  و  $\psi_2$  است که در  $|\psi|^2$  ظاهر می شود و عامل تداخل می باشد.

حال فرض کنید این ذره دارای درجه آزادی اسپینی  $\frac{1}{2}$  باشد. در این صورت حالت های اسپینی در

راستای مثلاً محور Z نقش همان دو روی سکه در کلاسیک را ایفاء می کنند. اگر  $S_z$  عملگر اسپینی در

راستای Z می باشد که دارای ویژه حالت های  $|\uparrow\rangle$  و  $|\downarrow\rangle$  است درین صورت.

$$S_z |\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle \quad \text{و} \quad S_z |\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle \quad (5-1)$$

نمایش ماتریسی عملگر  $S_z$  و ویژه حالت‌های  $|\uparrow\rangle$  و  $|\downarrow\rangle$  بصورت زیر هستند:

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

برای سادگی نمادگذاری  $\hbar = 1$  در نظر می‌گیریم.

ذره ای با اسپین  $\frac{1}{2}$  را معمولاً توسط یک بردار دو مولفه ای بصورت

$$|\psi\rangle = (|\psi\rangle_{\uparrow}, |\psi\rangle_{\downarrow})^T$$

نمایش می‌دهیم. مولفه اول مربوط به تابع موج ذره با اسپین بالا و مولفه دوم مربوط به تابع موج ذره با اسپین پایین هستند.

حرکت تصادفی کوانتومی را با یک مثال شروع می‌کنیم. ذره ای بر روی یک خط که تابع موج  $\psi(x_0) \in \mathbb{C}$  آن حول نقطه  $x_0$  جایگزیده است در نظر می‌گیریم. اگر عملگر  $P$  را بعنوان عملگر اندازه حرکت خطی تعریف کنیم انتقال ذره به اندازه یک گام به طول  $l$  به سمت راست توسط عملگر یکانی زیر نمایش داده می‌شود:

$$U_L = e^{-ipl/\hbar}$$

این عملگر یکانی، عملگر انتقال مکانی نیز گفته می‌شود. در تصویرهایزنبُگ عملگر  $X$  در اثر این تبدیل به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$U^{\dagger} X U \rightarrow X + l$$

اگر طول گامها را بسیار کوچک در نظر بگیریم  $l$  در اینصورت

$$e^{-ip.l/\hbar} = 1 - ip.l/\hbar \quad (6-1)$$

$$x \rightarrow (1 + ip.l/\hbar) x (1 - ip.l/\hbar) = x + i/h [p.l, x] = x + l$$

$$\left\| |\psi\rangle_{\uparrow} \right\|^2 + \left\| |\psi\rangle_{\downarrow} \right\|^2 = 1 \quad (7-1) \quad \text{شرط بهنجارش ایجاب می‌کند که:}$$

حال برای اینکه ساختار تانسوری فضای ذره را نشان دهیم تابع موج ذره را که هم شامل قسمت فضایی و هم دارای قسمت اسپینی است به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$|\psi\rangle = \alpha^\uparrow |\uparrow\rangle \otimes |\psi^\uparrow\rangle + \alpha^\downarrow |\downarrow\rangle \otimes |\psi^\downarrow\rangle \quad (۸-۱)$$

که در آن  $|\uparrow\rangle \otimes |\psi^\uparrow\rangle$  معرف ذره با اسپین بالا با احتمال  $|\alpha^\uparrow|^2$  و  $|\downarrow\rangle \otimes |\psi^\downarrow\rangle$  معرف ذره با اسپین پایین با احتمال  $|\alpha^\downarrow|^2$  می باشد. شرط بهنجارش ایجاب می کند که :

$$|\alpha^\uparrow|^2 + |\alpha^\downarrow|^2 = 1$$

همانطور که می بینیم ساختار ضرب تانسوری دو درجه آزادی یعنی اسپین و فضا را از هم جدا می کند، و اجازه می دهد که نتیجه مربوط به این دو درجه آزادی را به طور واضح مشاهده کنیم.

در اینجا عملگر یکانی که دو درجه آزادی بیان شده یعنی قسمت فضایی و اسپینی تابع موج را شامل می شود و سبب انتقال ذره به اندازه یک گام به طول  $l$  می گردد، بصورت زیر تعریف می کنیم .

$$U = \exp(-2is_z \otimes PL) \quad (۹-۱)$$

این عملگر یکانی باعث یک نوع انتقال شرطی از ذره می شود. انتقال شرطی به اسپین داخلی ذره

مربوط می باشد، به این صورت که ذره واقع در مکان  $X_0$  با اسپین بالا  $|\uparrow\rangle$  توسط تابع موج کل

$$|\uparrow\rangle \otimes |\psi_{x_0}\rangle$$

نمایش داده می شود، اثر عملگر یکانی فوق بر روی این تابع موج کل باعث انتقال

ذره با گامی به طول  $l$  به سمت راست می شود که بصورت زیر تعریف می کنیم. (۱)

$$U(|\uparrow\rangle \otimes |\psi_{x_0}^\uparrow\rangle) = (|\uparrow\rangle \otimes |\psi_{x_0+L}^\uparrow\rangle) \quad (۱۰-۱)$$

اگر اسپین ذره در حالت اسپین پایین  $|\downarrow\rangle$  باشد تابع موج کل آن بصورت  $|\downarrow\rangle \otimes |\psi_{x_0}^\downarrow\rangle$  بیان

می شود. اثر عملگر یکانی فوق بر روی این تابع موج باعث انتقال ذره با گامی به طول  $l$  بسمت چپ

می شود که بصورت زیر تعریف می کنیم: (۲)

$$U(|\downarrow\rangle \otimes |\psi_{x_0}^\downarrow\rangle) = (|\downarrow\rangle \otimes |\psi_{x_0-L}^\downarrow\rangle) \quad (۱۱-۱)$$

برای اثبات روابط (۱) و (۲) ابتدا نمایش تجزیه طیفی decomposition spectra،  $U$  را می

نویسیم.

$$U = e^{i2isz} \otimes PL = e^{-i(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \otimes PL} \quad (12-1)$$

با توجه به اینکه

$$[-i|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes PL, i|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes PL] = 0 \quad (13-1)$$

حالت اسپین بالا و پایین از هم مستقل می باشند. با استفاده از :

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{[A,B]}$$

عملگر یکانی  $U$  را با توجه به دو رابطه بالا بسط می دهیم

$$\begin{aligned} U &= \exp[-i(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \otimes PL] \\ &= \exp(-i|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes PL) \exp(+i|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes PL) \\ &= [I + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes (-ipl) + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \frac{(iPL)^2}{2} + \dots] \\ &\quad + \left[ I + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes (iPL) + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \frac{(iPL)^2}{2} + \dots \right] \\ &= \left[ I + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes (ipl) + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \frac{(+ipl)^2}{2} + \dots \right] + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes (-ipl) + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \frac{(-ipl)^2}{2} \\ &= |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \left( 1 + ipl + \frac{(ipl)^2}{2} \right) + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \left( 1 - ipl + \frac{(-ipl)^2}{2} \right) \\ &= (|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes e^{+ipl}) + (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes e^{-ipl}) \end{aligned} \quad (14-1)$$

که در اینجا از شرط عملگر تصویر  $(|\uparrow\rangle\langle\uparrow|)^k = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$  و  $(|\downarrow\rangle\langle\downarrow|)^k = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$  استفاده کردیم.

حال رابطه (۳) را بر روی تابع موج کل  $|\uparrow\rangle \otimes |\psi_{x_0}\rangle$  در حالت اسپین بالا اثر می دهیم.

$$\begin{aligned} U(|\uparrow\rangle \otimes |\psi_{x_0}\rangle) &= [ (|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes e^{+ipl}) + (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes e^{-ipl}) ] (|\uparrow\rangle \otimes |\psi_{x_0}\rangle) \\ &= 0 + |\uparrow\rangle \otimes e^{-ipl} |\psi_{x_0}\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\psi_{x_0} + L\rangle \end{aligned} \quad (15-1)$$

که همان رابطه اول است برای رابطه دوم نیز به طور مشابه عمل می کنیم.

اگر حالت اولیه اسپینی ذره که حول  $X_0$  جایگزیده است، یکی از ویژه حالت‌های  $S_z$  نباشد بلکه تابع موج آن بصورت ترکیب خطی از ویژه حالت‌های اسپین بالا و پایین باشد، یعنی

$$|\psi_{in}\rangle = (\alpha^\uparrow |\uparrow\rangle + \alpha^\downarrow |\downarrow\rangle) \otimes |\psi_{x_0}\rangle \quad (16-1)$$

در اینصورت اعمال عملگر یکانی انتقالی  $U$  باعث تغییر موقعیت ذره بصورت

$$U|\psi_{in}\rangle = \alpha^\uparrow |\uparrow\rangle \otimes |\psi_{x_0-L}\rangle + \alpha^\downarrow |\downarrow\rangle \otimes |\psi_{x_0+L}\rangle \quad (17-1)$$

$$U = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes e^{-ipl}) + (|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes e^{+ipl})$$

می شود. حال اگر تابع موج (۴) را در پایه های  $S_z$  اندازه گیری کنیم خواهیم دید که ذره با تابع

حالت کل  $|\uparrow\rangle \otimes |\psi_{x_0-L}\rangle$  با احتمال  $P^\uparrow = |\alpha^\uparrow|^2$  حول  $X_0+L$  جایگزیده و ذره با تابع حالت

$|\downarrow\rangle \otimes |\psi_{x_0+L}\rangle$  با احتمال  $P^\downarrow = |\alpha^\downarrow|^2$  حول  $X_0-L$  جایگزیده است. این فرایند تناظر با

حرکت تصادفی کلاسیکی (سکه نامتعادل) و قرارداد کنیم که ذره بر روی یک خط می باشد. اگر

سکه نامتعادل با احتمال خط/شیر یا  $P^\uparrow/P^\downarrow$  پرتاب شود، روی شیر ذره را به سمت راست و

روی خط ذره را به سمت چپ حرکت دهیم میانگین جایی ذره را در طی این فرآیند محاسبه

می کنیم.

$$\langle x \rangle = L(P^\uparrow - P^\downarrow) \quad (18-1)$$

اگر این فرآیند را  $T$  با تکرار کنیم، یعنی  $T$  بار عملگر یکانی  $U$  را بر روی تابع موج اثر دهیم، (و در

هر بار اثر عملگر یکانی اسپینی را در پایه های  $\{|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle\}$   $S_z$  اندازه گیری کنیم و دوباره سیستم را

در حالت اولیه  $\alpha^\uparrow |\uparrow\rangle + \alpha^\downarrow |\downarrow\rangle$  قرار دهیم، ذره با میانگینی برابر

$$\langle x \rangle = TL(P^\uparrow - P^\downarrow) \quad (19-1)$$

جابه جا می شود. حرکت تصادفی کوانتومی عملگر یکانی  $U^T$  در حقیقت  $T$  بار بر روی تابع موج اثر

می کند.

$$U^T = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes e^{-iTP_L}) (|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes e^{iTP_L}) \quad (20-1)$$

واریانس ذره بر روی یک خط بصورت:

$$(\Delta x)^2 = \delta^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 4TL^2 P^\downarrow P^\downarrow \quad (21-1)$$

می باشد. موارد بالا برای حرکت تصادفی (سکه نامتعادل) بر روی یک خط صادق است، همانطور که گفته شد اسپین ذرات نقش سکه را بازی می کند و جهت های اسپین مانند دو روی سکه راستای حرکت تصادفی را مشخص می کند، تا اینجا تفاوتی بین حرکت تصادفی کلاسیکی و کوانتومی مشاهده نمی کنیم زیرا با یک حالت دو طرفه (شیر و خط) اسپین پائین و بالا مواجهیم.

حال به جای اینکه اسپین را در ویژه حالت های  $S_z$  اندازه گیری کنیم، اسپین را در ویژه حالت های چرخش یافته که توسط دو بردار متعامد ( $|S_+\rangle$ ,  $|S_-\rangle$ ) [1] مشخص شده اندازه می گیریم. در نتیجه، قبل از اندازه گیری در ویژه حالت های  $S_z$ ، اسپین ذره را به اندازه  $\theta$  حول محور  $Z$  چرخش می دهیم، این کار را به زبان نظریه اطلاعات کوانتومی [3] فرمول بندی می کنیم:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ توسط ماتریس } Z \text{ حول محور } \theta \text{ به اندازه } \theta \text{ حول محور } Z \text{ چرخش اسپین به اندازه } \theta$$

مشخص میشود. حال برای اندازه گیری دو ویژه حالت  $S_+$  و  $S_-$  مراحل زیر را انجام می دهیم:

(i) عملگر یکانی را بر روی تابع موج اثر می دهیم

(ii) سپس ماتریس  $R(\theta)$  را از سمت چپ بر روی تابع موج جدید اثر می دهیم

(iii) و بالاخره نتیجه را در ویژه حالت  $S_z$  اندازه گیری می کنیم:

$$U|\psi\rangle = (\alpha^\uparrow |\uparrow\rangle \otimes e^{-ipL} + \alpha^\downarrow |\downarrow\rangle \otimes e^{ipL}) |\psi_{x_0}\rangle$$

$$R(\theta)U|\psi\rangle = [(\alpha^\uparrow \cos\theta e^{-ipL} - \alpha^\downarrow \sin\theta e^{ipL}) |\uparrow\rangle + (\alpha^\uparrow \sin\theta e^{-ipL} + \alpha^\downarrow \cos\theta e^{ipL}) |\downarrow\rangle] \otimes |\psi_{x_0}\rangle$$

(22-1)

حال اگر پهنای تابع موج اولیه  $\Delta x$  خیلی بزرگتر از طول گام  $L$  باشد، می توان از تقریب زیر استفاده کرد.

$$e^{(+ipl)}|\psi_{(x_0)}\rangle \equiv (I \pm ipl)|\psi_{x_0}\rangle \quad (23-1) \quad l \ll x \quad e^x \approx 1+x \quad x \ll L$$

نتایج این چرخش اسپین به اندازه  $\theta$  حول محور  $Z$  به این صورت می باشد.

$$M_Z R(\theta) U |\psi_m\rangle = \begin{cases} |\downarrow\rangle \otimes (I - ipl\delta^\uparrow |\psi_{x_0}\rangle) \\ |\downarrow\rangle \otimes (I + ipl\delta^\downarrow |\psi_{x_0}\rangle) \end{cases} \quad (24-1)$$

که در آن  $l\delta^\uparrow$  طول گام به سمت راست و  $l\delta^\downarrow$  طول گام به سمت چپ می باشد که برابر است با

$$l\delta^\uparrow = l \frac{\alpha^\uparrow \cos\theta + \alpha^\downarrow \sin\theta}{\alpha^\uparrow \cos\theta - \alpha^\downarrow \sin\theta}, l\delta^\downarrow = l \frac{\alpha^\uparrow \sin\theta - \alpha^\downarrow \cos\theta}{\alpha^\uparrow \sin\theta + \alpha^\downarrow \cos\theta} \quad (25-1)$$

و احتمال اینکه ذره در یکی از حالت‌های اسپینی بالا و پایین شد برابر است با

$$P^\uparrow = |\alpha^\uparrow \cos\theta - \alpha^\downarrow \sin\theta|^2 \quad (26-1)$$

$$P^\downarrow = |\alpha^\uparrow \sin\theta - \alpha^\downarrow \cos\theta|^2$$

اگر پهنای تابع موج اولیه  $\Delta x$  بزرگتر از  $l\delta^\uparrow$  و  $l\delta^\downarrow$  باشد می توانیم تقریب زیر را اعمال کنیم.

$$(I - ipl\delta^{\uparrow,\downarrow})|\psi_{x_0}\rangle \equiv e^{-xipl\delta^{\uparrow,\downarrow}} |\psi_{x_0}\rangle = |\psi_{x_0}\rangle l\delta^{\uparrow,\downarrow} \quad (27-1)$$

حال این مسلم است که جابه جایی ذره در یکی از دو حالت  $l\delta^{\uparrow,\downarrow}$  را به گونه ای انتخاب می کنیم تا

$$\frac{l}{\Delta x} \ll |\varepsilon| \ll 1 \quad \text{یا} \quad \text{tg}\theta = \frac{|\alpha^\uparrow|}{\alpha^\downarrow(1+\varepsilon)}$$

جابه جایی ذره در حالت اسپین بالا  $|\uparrow\rangle$  به صورت زیر خواهد شد.

$$l\delta^\uparrow = l \frac{\alpha^\uparrow \cos\theta + \alpha^\downarrow \sin\theta}{\alpha^\uparrow \cos\theta - \alpha^\downarrow \sin\theta} = l \frac{\alpha^\uparrow + \alpha^\downarrow \text{tg}\theta}{\alpha^\uparrow - \alpha^\downarrow \text{tg}\theta} = l \frac{\alpha^\uparrow + \alpha^\downarrow \frac{\alpha^\uparrow}{\alpha^\downarrow(1+\varepsilon)}}{\alpha^\uparrow - \alpha^\downarrow \frac{\alpha^\uparrow}{\alpha^\downarrow(1+\varepsilon)}} \equiv \frac{-2l}{\varepsilon} \quad (28-1)$$

در محاسبات بالا  $\varepsilon \ll 1$  فرض شده است. در نتیجه  $l\delta^\uparrow$  خیلی بزرگتر از  $l$  می شود، و این

رویداد خیلی نادر است. یعنی با احتمال خیلی کم رخ می دهد، زیرا



$$P^{\uparrow} = |\alpha^{\uparrow} \cos \theta - \alpha^{\downarrow} \sin \theta|^2 = \cos^2 \theta |\alpha^{\uparrow} - \alpha^{\downarrow} \tan \theta|^2 = |\alpha^{\uparrow}|^2 |\alpha^{\downarrow}|^2 \varepsilon^2 \quad (29-1)$$

بنابراین احتمال اینکه سیستم در ویژه حالت اسپین بالا باشد. خیلی کم تر از احتمال در حالت  $|\downarrow\rangle$

$$P^{\downarrow} = 1 - |\alpha^{\downarrow} \alpha^{\uparrow}|^2 \varepsilon^2 \quad (30-1) \quad \text{باشد.}$$

میانگین جابجایی ذره  $\langle x \rangle = P^{\uparrow} l \delta^{\uparrow} + P^{\downarrow} l \delta^{\downarrow}$  می باشد.

در حالیکه برای حرکت تصادفی کلاسیکی میانگین جابجایی ذره را بصورت

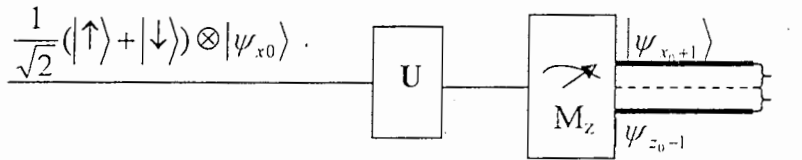
$$\langle x \rangle = l (|\alpha^{\uparrow}|^2 - |\alpha^{\downarrow}|^2)$$

بدست آوردیم، می توان نشان داد که واریانس حرکت تصادفی

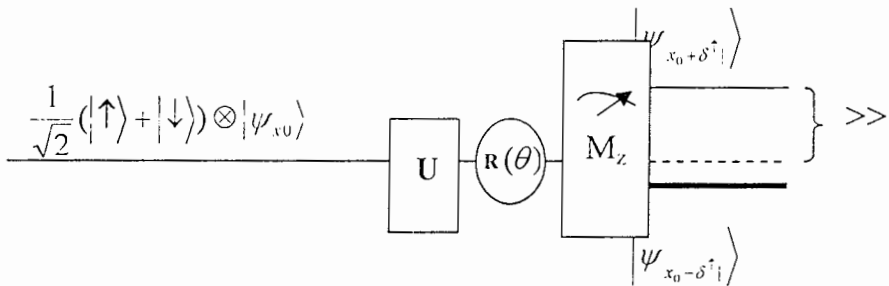
کلاسیکی و کوانتومی با یکدیگر برابرند.

نتیجه گیری :

از آنچه بیان شد نتیجه می گیریم که چرخش اسپین به اندازه زاویه  $\theta$  حول محور  $Z$  باعث شده [2] گامها به صورت متقارن نباشد و در نتیجه در یک راستا گامی با طول خیلی بزرگتر از  $l$  داشته باشیم هر چند با احتمال کمی رخ می دهد.



شکل ۱-۱-الف حرکت کتره ای کوانتومی در پایه متقارن  $S_z$



شکل ۱-۱-ب حرکت کتره ای کوانتومی در پایه های چرخش یافته متعامد  $|S_+\rangle, |S_-\rangle$

# فصل دوم

حرکت تصادفی

بر روی خط

که  $a, b, c$  مستقل از پایه های حالت  $|i\rangle$  است که این مشابه حرکت کلاسیکی است که احتمال حرکت به سمت چپ یا راست مستقل از  $|i\rangle$  است.

در این جا قضیه ای است به این صورت که انتقال  $U$  به وسیله معادله (۱) بیان می شود اگر و تنها اگر یکی از این سه شرط زیر برقرار باشد. [6]

$$۱) C=1, a=b=0$$

$$۲) b=1, a=c=0 \quad (۲-۲)$$

$$۳) a=1, b=c=0$$

این سه شرط به این معنی است که یکی از این رویدادها اتفاق می افتد یعنی یا حرکت به سمت چپ یا حرکت به سمت راست یا باقی ماندن در موقعیت اولیه. فضای حالت کل شامل فضای سکه  $H_C$  و

فضای هیلبرت مربوط به مکان  $H_P$  را توسط توابع موج  $|i, \uparrow\rangle, |i, \downarrow\rangle$  بیان می کنیم. حرکت

تصادفی بر روی خط  $\{|i\rangle : i \in \mathbb{Z}\}$  می باشد حال برای این انتقال دو عملگر بیان می کنیم.

#### ۲-۱-۱- انتقال S :

عملگر یکانی  $S$  که مربوط به انتقال موقعیت سیستم می باشد و دارای دو خاصیت زیر است را معرفی می کنیم.

$$\begin{aligned} S|i, \uparrow\rangle &= |i+1, \uparrow\rangle \\ S|i, \downarrow\rangle &= |i-1, \downarrow\rangle \end{aligned} \quad (۳-۲)$$

که در آن  $i$  برای حرکت بر روی خط زیر مجموعه  $Z$  و برای حرکت بر روی حلقه  $0 \leq i \leq N-1$  میباشد.

با توجه به نمایش عملگر  $S$ ، دو خاصیت بالا را می توان بصورت زیر نتیجه گرفت.

$$\begin{aligned} S(|\uparrow\rangle \otimes |i\rangle) &= |\uparrow\rangle \langle \uparrow | \uparrow \rangle \otimes \sum_j |i+1\rangle \langle i | i \rangle + |\downarrow\rangle \langle \uparrow | \downarrow \rangle \otimes \sum_j |i-1\rangle \langle i | i \rangle = |\uparrow\rangle \otimes |i+1\rangle \\ S(|\downarrow\rangle \otimes |i\rangle) &= |\uparrow\rangle \langle \uparrow | \downarrow \rangle \otimes \sum_j |i+1\rangle \langle i | i \rangle + |\downarrow\rangle \langle \downarrow | \downarrow \rangle \otimes \sum_j |i-1\rangle \langle i | i \rangle = |\downarrow\rangle \otimes |i-1\rangle \end{aligned}$$

### ۲-۱-۲- انتقال توسط پرتاب سکه C [5] A coin flip Transformation

عملگر انتقال در فضای سکه  $C$  را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} C|i, \downarrow\rangle &= a|i, \downarrow\rangle + b|i, \uparrow\rangle \\ C|i, \uparrow\rangle &= c|i, \downarrow\rangle + d|i, \uparrow\rangle \end{aligned} \quad (5-2)$$

که با توجه به شرط بهنجارش داریم

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = 1 \\ |c|^2 + |d|^2 = 1 \end{cases} \quad (6-2)$$

بنابراین با توجه به شرط بهنجارش فوق می توان با ضرایب  $a, b, c, d$  یک ماتریس  $2 \times 2$  دلخواه تعریف کرد. بنابراین انتقال یکانی  $C$  با توجه به متنوع بودن آن ما را به یک خانواده غنی از حرکت‌های تصادفی می برد.

اگر حالت اولیه فضایی کلی ذره بصورت  $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$  باشد حرکت تصادفی کوانتومی متعادل را آغاز

کرده و پس از یک گام برای اینکه ذره ای که در حالت  $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$  می باشد با احتمال مساوی  $\frac{1}{2}$

به سمت راست با تابع حالت  $|+1\rangle$  و به سمت چپ با تابع حالت  $|-1\rangle$  می رود. سکه یکانی متعادل

را به صورت سکه هارامارد  $H$  تعریف می کنیم.

$$c = H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \quad (7-2)$$

به آسانی می بینیم که سکه هادامارد یک سکه متعادل است.

$$H(|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle \quad (۸-۲)$$

اکنون برای حرکت تصادفی کوانتومی که همان نتایج بیان شده که احتمال مساوی  $\frac{1}{2}$  به چپ یا راست را نتیجه بدهد، دو عملگر یکانی C,S را بصورت (SC) بر روی حالت اولیه  $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$  اثر می دهیم. بنابراین حرکت پس از یک گام بصورت زیر می باشد.

$$C(|0\rangle \otimes |\uparrow\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$$

$$(SC)(|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle) \rightarrow S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle\right)$$

$$S = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|(|1\rangle\langle 0| + \sum_{i=1}^{\infty} |i+1\rangle\langle i|) + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|(|-1\rangle\langle 0| + \sum_{i=1}^{\infty} |i-1\rangle\langle i|) \quad (۹-۲)$$

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle)$$

اندازه گیری حالت فضایی کل در پایه های استاندارد احتمال  $\frac{1}{2}$  را در حالت های

$\{|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle, |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle\}$  می دهد. همانطور که از مکانیک کوانتومی می دانیم، پس از

اندازه گیری حالت ذره، حالت ذره یکی از ویژه حالت های مشاهده پذیر می باشد که این حالت هیچ

ارتباطی با حالت قبل ندارد. اکنون برای گام بعد عملگر یکانی (SC) را روی حالت جدید اثر می

دهیم. اگر در حرکت تصادفی کوانتومی پس از هر گام (یعنی در هر بار اثر دادن عملگر (SC) بر

روی حالت سیستم) حالت ذره را اندازه گیری کنیم در واقع طرحی مربوط به حرکت تصادفی

کلاسیکی بر روی خط (یا حلقه) را بدست می آوریم. اختلاف بین حرکت تصادفی کلاسیکی و

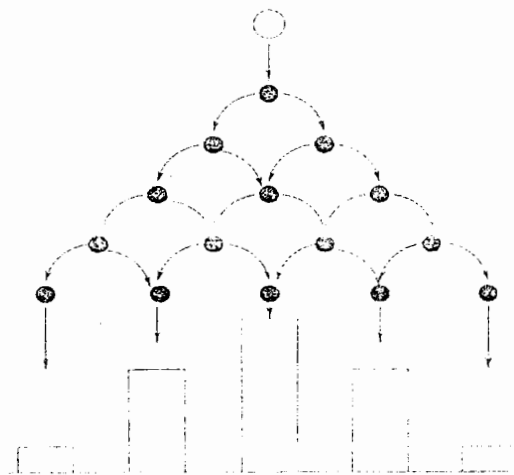
کوانتومی برای گام های بیشتر به طور واضح دیده می شود.

## ۲-۲ توزیع احتمالی حرکت تصادفی کلاسیکی :

همانطور که در حرکت تصادفی کلاسیکی در بخش اول داشتیم اگر از مکان صفر حرکت تصادفی کلاسیکی را آغاز کنیم پس از  $T$  مرحله ( $T$  های بزرگ) توزیع احتمال نزدیک به توزیع نرمال (توزیع گاوسی) می باشد که میانگین آن صفر و واریانس آن همانطور که در بخش قبل گفته شد متناسب با  $T$  است. ( $\delta^2 = T$ ). برای حرکت تصادفی کلاسیکی بر روی حلقه که در بخش گرافهای معین به آن می پردازیم توزیع احتمال آن نزدیک به توزیع یکنواخت می شود.

## ۲-۲-۱ تخته گالتون مثالی برای توزیع گاوسی و احتمال حرکت تصادفی کلاسیکی :

یک مثال از حرکت تصادفی کلاسیکی تخته گالتون [7] است، (Quincunx) آرایش پنج تایی تخته گالتون شامل تعدادی میخ است که در آرایشی به صورت زیر و در پنج ردیف قرار گرفته اند. حال به اولین میخ که در سطر اول قرار گرفته گلوله ای را پرتاب می کنیم. میخ به طور مساوی به چپ یا راست می افتد و در ردیف دوم هم این وضعیت تکرار می شود تا همه میخ ها در ردیف ۵ بر روی زمین بیفتد. توزیع این گوی همانطور که در شکل می بینیم برای چند سطر از میخها نزدیک به یک تابع گاوسی است.



حرکت تصادفی کلاسیکی را از مکان 0 شروع می کنیم. پس از پرتاب سکه متعادل با احتمال مساوی

$\frac{1}{2}$  به سمت راست و چپ به اندازه گامی بطول واحد حرکت می کنیم. بنابراین ذره در گام

اول با احتمال مساوی  $\frac{1}{2}$  به مکانهای 1 و -1 می رود. گام دوم نیز با احتمال مساوی  $\frac{1}{2}$  از

مکانهای 1 و -1 به سمت راست و چپ حرکت می کند در نتیجه در گام دوم با احتمال  $\frac{1}{2}$  در

مکان 0 و با احتمال  $\frac{1}{4}$  در مکان 2 و -2 می باشد.

بنابراین جدول احتمال حرکت تصادفی کلاسیکی مربوط به مکان  $i$  پس از هر گام در جدول زیر نشان

داده می شود و همانطور که ملاحظه می کنیم توزیع احتمال نسبت به مکان صفر متقارن است.

جدول احتمال مربوط به مکان  $i$  پس از  $T$  مرحله بصورت زیر است.

T \ i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1				$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$					
2			$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$				
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$



۴-۶-۴ توزیع احتمال حرکت تصادفی کوانتومی مربوط به مکان  $i$  پس از  $T$  مرحله :

در حرکت تصادفی کوانتومی پس از  $T$  مرحله، عملگر یکانی انتقال  $U^T$  که در آن

$$U = S.(C \otimes I)$$

تعریف می شود. بر روی حالت فضایی کل  $H = H_p \otimes H_c$  عمل می

کند.  $S$  همان عملگر انتقال مکان و  $C$  همان سکه هادامارد می باشد.

اگر حالت اولیه سیستم بصورت  $|\downarrow\rangle \otimes |0\rangle = |\downarrow, 0\rangle$  باشد توزیع احتمالی بر روی این حالت را بررسی

$$|\phi_{in}\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle \quad \text{می کنیم:}$$

$$|\phi_m\rangle \xrightarrow{U} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle) \quad \text{گام اول}$$

$$\xrightarrow{U} \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle \otimes |2\rangle - (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |-2\rangle) \quad \text{گام دوم}$$

$$\xrightarrow{U} \frac{1}{2\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |3\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |1\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |-1\rangle - 2|\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |-3\rangle) \quad \text{گام سوم}$$

در اینصورت جدول احتمال حرکت تصادفی کوانتومی در مکان  $i$  پس از  $T$  گام بصورت زیر می باشد.

T	i	-۵	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰							۱					
۱					$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$				
۲				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		۰	$\frac{1}{4}$			
۳			$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$			$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		
۴			$\frac{1}{16}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{16}$	
۵		$\frac{1}{32}$		$\frac{17}{32}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$

## ۲-۳ اختلاف حرکت تصادفی کلاسیکی و کوانتومی در سه گام اول :

نتایج حرکت تصادفی کوانتومی تا گام دوم کاملاً شبیه به حرکت تصادفی کلاسیکی است، گام

دوم حالت ذره را در حرکت تصادفی کوانتومی اندازه می گیریم با احتمال  $\frac{1}{4}$  در مکان  $i = -2$  و

$i = 2$  و با احتمال  $\frac{1}{2}$  در مکان  $i = 0$  می باشد. این دقیقاً نتیجه ای است که در حرکت تصادفی

کلاسیکی نیز می گیریم. اختلاف بین دو حرکت در گام سوم است، گام دوم در حرکت تصادفی

کوانتومی پس از اندازه گیری احتمال مربوط به مکان ذره به جای حالت  $\frac{1}{2}(|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle)$

یکی از دو حالت  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle \otimes |0\rangle)$  و  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle)$  را قرار می دهیم.

همانطور که گفته شد پس از اندازه گیری حالت ذره آن حالت جدید مورد نظر ماست و سبب می

شود که توزیع احتمال در (مربوط به مکان  $i$ ) حرکت تصادفی کوانتومی با توزیع احتمال (مربوط به

مکان  $i$ ) حرکت تصادفی کلاسیکی یکسان شود که بطور واضح در گام دوم پس از اندازه گیری

احتمال مربوط به مکان ذره و جاگذاری یکی از دو حالت بالا برای مکان  $i=0$  داریم

$$\frac{1}{2}(-|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle \begin{array}{l} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle) \\ \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle \otimes |0\rangle) \end{array}$$

$$\frac{1}{2}(|\uparrow\rangle \otimes |2\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |-2\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle) \longrightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |3\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |-3\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |1\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |-1\rangle) + \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle)$$

همانطور که در رابطه بالا می بینیم با احتمال  $\frac{1}{8}$  در مکان های  $i = 3, -3$  و احتمال  $\frac{3}{8}$  در مکان

های  $i = 1, -1$  می باشد. این نتیجه دقیقاً با حرکت تصادفی کلاسیکی یکسان است. در حرکت تصادفی

کوانتومی با دامنه احتمال سروکار داریم. در نمونه کوانتومی به سمت چپ بادامنه احتمال بیشتر

حرکت می کنیم، این نتیجه مربوط به تداخل کوانتومی است. حرکت تصادفی کوانتومی حرکت را از حالت اولیه  $|0\rangle \otimes |\downarrow\rangle$  شروع و پس از  $T$  گام حرکت تصادفی کوانتومی ( که نتیجه عملگر یکانی  $U^T = (S.(C \otimes I))^T$  و اندازه گیری حالت نهایی سیستم ( بدون اندازه گیری سیستم در هر گام ) بین توزیع احتمالی حرکت کوانتومی با توزیع نرمال ( توزیع گاوسی ) اختلاف مشاهده می کنیم و در واقع توزیع احتمال به سمت چپ تمایل پیدا می کند. دلیل این میل به سمت چپ پیامدی از عدم تقارن سکه انتقالی می باشد. در ماتریس هادامارد  $H$  دامنه احتمال رفتن از  $|i\rangle \otimes |\downarrow\rangle$  به  $|i\rangle \otimes |\uparrow\rangle$  برابر  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  و دامنه احتمال برای رفتن از  $|i\rangle \otimes |\uparrow\rangle$  به  $|i\rangle \otimes |\downarrow\rangle$  برابر  $\frac{-1}{\sqrt{2}}$  می باشد. این عدم تقارن را می توان با داشتن یک سکه متقارن بر طرف کرد که در ادامه بحث به آن خواهیم پرداخت.

$$C|i\rangle \otimes |\downarrow\rangle = a|i\rangle \otimes |\downarrow\rangle + b|i\rangle \otimes |\uparrow\rangle$$

$$C|i\rangle \otimes |\uparrow\rangle = c(|i\rangle \otimes |\downarrow\rangle) + d(|i\rangle \otimes |\uparrow\rangle)$$

در حرکت تصادفی کلاسیکی همانطور که قبلاً بیان شد، تقارن در حرکت تصادفی کلاسیکی بر روی خط بعد از  $T$  گام، واریانس بطور خطی با  $T$  متناسب است:  $\delta^2 = T$ . انتظار داریم فاصله از چشمه از مرتبه  $\delta = \sqrt{T}$  باشد. (همانطور که میدانیم واریانس (پهنای نمودار) با  $T^2$  متناسب است. یعنی هر چه تعداد گامها بیشتر شود نمودار توزیع احتمال نسبت به فاصله پهن تر می شود یعنی احتمال حضور ذره در مکانهای دور از مبدأ افزایش می یابد.) عامل تداخل باعث اختلاف اساسی در حرکت تصادفی کوانتومی می شود، بخصوص در توزیع حدی دیگر بصورت گاوسی نخواهد بود و واریانس نیز بطور خطی با شمار گامها  $T$  تغییر نمی کند، بلکه می توان نشان داد واریانس در حرکت تصادفی

کوانتومی متناسب با  $T^2$  می باشد.  $\delta^2 = T^2$ . انتظار داریم فاصله از چشمه از مرتبه  $\delta \cong T$  باشد. در نتیجه در حرکت تصادفی کوانتومی سرعت انتشار از یک مکان اولیه به مکان نهایی مجذور حرکت تصادفی کلاسیکی است. این امری مهم است، که بوسیله حرکت تصادفی کوانتومی می توان سریعتر از یک حالت شروع به حالت نهایی رسید.

### ۲-۳-۱ حرکت تصادفی کوانتومی با تعداد گامهای زیاد :

حرکت تصادفی کلاسیکی برای گامهای زیاد توزیع احتمالی به توزیع گاوسی یا نرمال تبدیل می شود. اما در حرکت تصادفی کوانتومی، توزیع احتمال حرکت بر روی خط یک توزیع گاوسی نخواهد بود. تا اینجا  $T=3$ ، حرکت تصادفی کوانتومی و کلاسیکی مورد بررسی قرار داریم حال اگر تعداد گامها زیاد شود تکرار اثر عملگر یکانی  $U = S.(C \otimes I)$  بر روی حالت ذره کاری مشکل و وقت گیر خواهد شد. از طرفی برای رسم توزیع حدی حرکت تصادفی کوانتومی باید شمار گامها  $T$  را زیاد کنیم. برای رفع این مشکل به روش زیر عمل می کنیم.

### ۲-۴ فرمول بندی توصیف حرکت تصادفی کوانتومی: [8]

همانطوری که قبلاً به آن اشاره شد ذره حرکت تصادفی کلاسیکی را بصورت متقارن بر روی خط انجام می دهد. در حرکت تصادفی کوانتومی با شروع از مبدأ در هر گام با پرتاب سکه با دو خروجی که همان راستای حرکت در جهت چپ یا راست را مشخص می کند مواجهیم. این دو خروجی برای ذره کوانتومی بر روی خط را دو درجه آزادی می گوئیم که آن را Chirality می نامیم. Chirality یا  $chirality$  مقادیر چپ و راست و راستای حرکت را در بر می گیرد. منظور از دو درجه آزادی در حرکت تصادفی بر روی خط همان حرکت به سمت چپ با ویژه حالت  $|L\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  و حرکت به سمت راست با ویژه

حالت  $|R\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  می باشد. موقعیت ذره در گام  $t$  توسط یک تابع موج در مؤلفه ای

$\psi(n, t)$  بصورت زیر بیان می شود.

$$\psi(n, t) = \begin{bmatrix} \psi_L^{(n,t)} \\ \psi_R^{(n,t)} \end{bmatrix}$$

مبحث حرکت ذره (دینامیک) مربوط به حرکت تصادفی کوانتومی بر روی خط را تحت قانون زیر دنبال می کنیم.

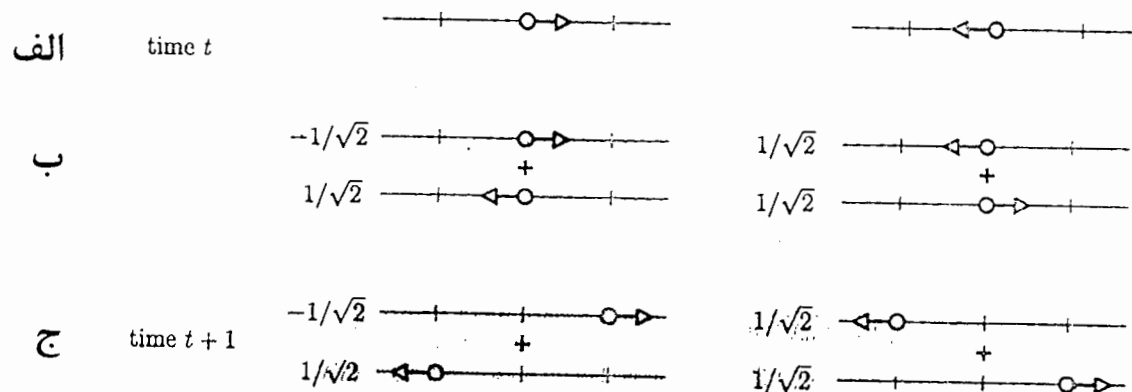
قانون حرکت ذره (دینامیک) بدینصورت بیان می شود. اگر ذره ای در ابتدا به سمت راست حرکت کند (گام  $t$ ) این ذره در گام بعد ( $t+1$ ) به حرکت خود به سمت راست ادامه میدهد. حال ذره ای که در ابتدا به سمت چپ حرکت کند. (گام  $t$ ) در گام بعد به حرکت خود به سمت چپ ادامه میدهد. اکنون اگر ماتریس هادامارد  $H$  را بر روی ویژه حالت‌های اولیه حرکت به سمت چپ و سمت راست اثر دهیم روابط بصورت زیر بدست می آید.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|L\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle + |R\rangle) \quad (10-2)$$

$$|R\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle - |R\rangle) \quad (11-2)$$

با تأثیر ماتریس هادامارد بر روی ویژه حالت‌های  $|L\rangle, |R\rangle$ ، ترکیبی از این دو حالت با احتمال مساوی را بدست می آوریم. (روابط (10-2) و (11-2)) مبحث قانون حرکت ذره (دینامیک) و تأثیر ماتریس هادامارد بر روی ویژه حالت‌های  $|L\rangle, |R\rangle$  در شکل‌های زیر نشان داده شده است.



### ۶-۶-۱ توصیف دینامیکی تابع موج مکان ذره :

در اینجا  $R$  و  $L$  به ترتیب اشاره به حالت‌های راست و چپ دارد. فرض کنید در گام  $t$  تابع موج به

صورت دو مؤلفه ای  $\psi(n, t) = \begin{bmatrix} \psi_L^{(n,t)} \\ \psi_R^{(n,t)} \end{bmatrix}$  باشد. که در آن مؤلفه بالا مربوط به دامنه ذره در

مکان  $n$  و در گام  $t$  با خاصیت حرکت به چپ و مؤلفه پایین مربوط به دامنه ذره در مکان  $n$  و در گام

$t$  با خاصیت حرکت به سمت راست می باشد. ابتدا ماتریس ها دامارد را بر روی تابع موج دو مؤلفه

ای  $\psi(n, t)$  اثر می دهیم ( شکل ب )

$$H\psi(n, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_L(n, t) \\ \psi_R(n, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \psi_L(n, t) + \psi_R(n, t) \\ \psi_L(n, t) - \psi_R(n, t) \end{bmatrix}$$

حرکت ذره در یک گام بعد یعنی  $t+1$  توسط تابع موج دو مؤلفه ای زیر توصیف می شود. زیرا در

شکل ( ج ) همانطور که گفتیم اگر ذره در گام  $t$  به سمت راست برود در گام  $t+1$  به حرکت در این

راستا ادامه می دهد و اگر ذره در گام  $t$  به سمت چپ برود در گام  $t+1$  به حرکت در این راستا ادامه

می دهد.

$$\psi(n, t+1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \psi_L(n+1, t) + \psi_R(n+1, t) \\ \psi_L(n-1, t) - \psi_R(n-1, t) \end{bmatrix} \quad (12-2)$$

$$\psi(n, t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \psi(n-1, t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \psi(n+1, t) \quad (13-2)$$

$$= M_+ \psi(n-1, t) + M_- \psi(n+1, t) \quad (14-2)$$

که در آن  $M_+$  و  $M_-$  متناسب با ماتریسهای رابطه (۱۳-۲) است. بهر حال شروع حالت ذره از مبدأ

بصورت حالت چپ  $|L\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  می باشد. تابع موج بصورت  $\psi(n, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   $n \neq 0$  می

باشد با این فرمول بندی و تجزیه فوریه ای ماتریس هادامارد تبدیل به حل در فضای دو بعدی خطی

می شود. چگونگی این تبدیل و تجزیه هادامارد را در بخش بعد نشان می دهیم.

#### ۲-۶-۲ تجزیه فوریه ای ماتریس هادامارد:

بنابراین مسئله تحول گامها ( تحول زمانی ) در پایه ها  $\begin{pmatrix} L \\ R \end{pmatrix}$  به راحتی قابل حل می باشد و در پایان

با تبدیل انتقال فوریه ای [9] به فضای واقعی باز خواهیم گشت که در ذیل به تفصیل آن خواهیم

پرداخت. اگر تابع  $f: z \rightarrow C$  یک تابع مختلط باشد درینصورت تبدیل  $\tilde{f}: [-\pi, \pi] \rightarrow C$  بصورت

زیر بیان می شود.

$$\tilde{f}(k) = \sum f(n) e^{ikn} \quad (15-2)$$

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(k) e^{-ikn} dk \quad (16-2) \quad \text{و تبدیل معکوس آن عبارتست از:}$$

حال با این تعریف تبدیل فوریه ای تابع  $\tilde{\psi}(k, t)$  ( $k \in [-\pi, \pi]$ ) از تابع موج  $\psi(n, t)$  در فضای  $Z$

عبارتست از

$$\tilde{\psi}(k, t) = \sum_n \psi(n, t) e^{ikn} \quad (17-2)$$

با توجه به اینکه حالت شروع از مبدأ را بصورت حالت ابتدایی چپ  $|L\rangle$  در نظر گرفتیم. حرکت تصادفی کوانتومی را با این حالت اولیه مورد بررسی قرار میدهم.

### ۴-۶-۲ تابع موج دینامیکی در گام $t+1$ با استفاده از تجزیه فوریه ای ماتریس هادامارد :

تابع موج دینامیکی  $\psi$  در گام  $t+1$  را بصورت زیر بیان می کنیم.

$$\tilde{\psi}(k, t+1) = \sum_n \psi(n, t+1) e^{ikn}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k, t+1) &= \sum_n (M_+ \psi(n-1, t) + M_- \psi(n+1, t)) e^{ikn} \\ &= e^{ik} M_+ \sum_n \psi(n-1, t) e^{ik(n-1)} + e^{-ik} M_- \sum_n \psi(n+1, t) e^{ik(n+1)} \end{aligned}$$

$$= (e^{ik} M_+ + e^{-ik} M_-) \tilde{\psi}(k, t) \quad (18-2)$$

$$\tilde{\psi}(k, t+1) = M_k \psi(k, t) \quad (19-2) \quad \text{بنابراین داریم :}$$

که در آن  $M_k$  بصورت ماتریس  $2 \times 2$  زیر می باشد.

$$M_k = e^{ik} M_+ + e^{-ik} M_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{bmatrix} \quad (20-2)$$

می توان نوشت  $M_k = \Lambda_k U^T$  که در آن  $\Lambda_k$  ماتریس قطری با عناصر  $e^{ik}$ ،  $e^{-ik}$  و  $U^T$  ترانهاده ماتریس یکانی  $U$  (ماتریس هادامارد) است که بر روی ویژه حالت های  $|L\rangle$ ،  $|R\rangle$  ذره عمل می کند.

$$M_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-ik} & 0 \\ 0 & e^{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس  $M_k$  نیز یکانی است.

با بازگشت به رابطه  $\tilde{\psi}(K, t+1) = M_k \tilde{\psi}(k, t)$  می شود که اگر  $M_k$  را  $t$  بار بر روی

حالت اولیه صفر اثر دهیم به تابع حالت در زمان  $t$  خواهیم رسید.

$$\psi(k, t) = M_k^t \tilde{\psi}(K, 0) \quad (21-2)$$



حال با محاسبه  $M'_k$  و اثر آن بر روی  $\tilde{\psi}(k,0)$  می توان  $\tilde{\psi}(k,t)$  را بدست آوریم. اگر  $M_k$  که یک ماتریس  $2 \times 2$  با ویژه بردارهای  $(|\phi_k^1\rangle, |\phi_k^2\rangle)$  و ویژه مقادیر  $(\lambda_k^1, \lambda_k^2)$  باشد نمایش تجزیه طیفی آن بصورت زیر می باشد.

$$M_k = \lambda_k^1 |\phi_k^1\rangle \langle \phi_k^1| + \lambda_k^2 |\phi_k^2\rangle \langle \phi_k^2| \quad (22-2)$$

بنابراین می توان تحول زمانی ماتریس  $M_k$  را به صورت زیر بیان کرد.

$$M'_k = (\lambda_k^1)' |\phi_k^1\rangle \langle \phi_k^1| + (\lambda_k^2)' |\phi_k^2\rangle \langle \phi_k^2| \quad (23-2)$$

ویژه مقادیر ماتریس  $M_k$  را بدست می آوریم.

$$\Rightarrow \lambda^2 + ei\lambda \sin k - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-i \sin k \pm \sqrt{-\sin^2 k + 2}}{1}$$

$$\lambda = -i \sin k \pm \sqrt{1 + \cos^2 k}$$

با قرار دادن  $\frac{Sink}{\sqrt{2}} = \sin \omega_k$  در رابطه بالا دو ویژه مقدار  $\lambda_k^2, \lambda_k^1$  را بصورت زیر بدست می آوریم.

در نتیجه  $\lambda_k^2 = e^{i(\omega_k + \pi)}, \lambda_k^1 = e^{i\omega_k}$  دو ویژه مقدار ماتریس  $M_k$  مربوط به دو ویژه حالت می باشد.

با توجه به تعریف  $\frac{Sink}{\sqrt{2}} = \sin \omega_k$  داریم:

$$\lambda_k^1 = \sqrt{2}(\cos \omega_k - i \sin \omega_k) = \sqrt{2}e^{-i\omega_k} \quad (24-2)$$

$$\lambda_k^2 = \sqrt{2}(-\cos \omega_k - i \sin \omega_k) = \sqrt{2}e^{i(\omega_k + \pi)}$$

اکنون ویژه توابع  $\phi_k^2$  و  $\phi_k^1$  مربوط به دو ویژه مقدار  $\lambda_k^2, \lambda_k^1$  نیز بصورت زیر نوشته می شود.

$$\phi_k^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (1 + \cos^2 k) - \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{2}e^{i\omega_k} - e^{-ik} \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

$$\phi_k^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (1 + \cos^2 k) - \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} e^{-ik} \\ -\sqrt{2}e^{i\omega_k} - e^{-ik} \end{bmatrix} \quad (26-2)$$

حال به توسعه گامهای ذره با حالت اولیه چپ  $|L\rangle$  از مبدأ می پردازیم. در پایه فوریه ای حالت اولیه بصورت  $\tilde{\psi}(k,0) = (1,0)^T$  نمایش داده می شود. تابع موج در زمان  $t$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$\tilde{\psi}(k,t) = e^{-i\omega_k t} \langle \phi_k^1 | \tilde{\psi}(k,0) \rangle \phi_k^1 + e^{i(\pi + \omega_k)t} \langle \phi_k^2 | \tilde{\psi}(k,0) \rangle \phi_k^2 \quad (27-2)$$

با جاگذاری  $\phi_k^2 : \phi_k^1$  در رابطه بالا دو مؤلفه تابع موج  $\tilde{\psi}(k,t)$  بصورت زیر نمایش داده می شود.

$$\tilde{\psi}(k,t) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_L(k,t) \\ \tilde{\psi}_R(k,t) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\psi}_L(k,t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-i\omega_k t} + \frac{(-1)^t}{2} \left( 1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{i\omega_k t} \quad (27-2)$$

$$\tilde{\psi}_R(k,t) = \frac{ie^{ik}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} \left( e^{-i\omega_k t} - (-1)^t e^{i\omega_k t} \right) \quad (28-2)$$

حال با توجه به رابطه تبدیل معکوس فوریه و برگشت به فضای واقعی داریم.

$$\psi(n,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\psi}(k,t) e^{-ikn} dk \quad (29-2)$$

$$\psi_L(n,t) = \frac{1+(-1)^{n+t}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left( 1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-i(\omega_k t + kn)} \quad (30-2)$$

$$\psi_R(n,t) = \frac{1+(-1)^{n+t}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik}}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} e^{-i(\omega_k t + kn)} \quad (31-2)$$

همانطور که می بینیم اگر مجموع  $n$ ,  $t$  فرد باشد در نتیجه دو تابع موج  $\psi_R(n,t), \psi_L(n,t)$  برابر

صفر می شود. برای حل دو انتگرال  $\psi_R, \psi_L$  در بخش بعد روش بسط مجانبی را مطرح می کنیم تا

بتوانیم تابع توزیع احتمال برای گامهای بالا را بدست آوریم.

### ۴-۶-۴ خصوصیات مجانبی از توابع موج در حد گامهای بالا:

بخش قبل ، حل درستی برای توسعه گامها بوسیله ماتریس هادامارد بدست آوردیم. در این قسمت برای حل انتگرال های  $\psi_R, \psi_L$  در معادلات (۲-۳۰) و (۲-۳۱) بسطی از روش فاز مانا را بعنوان خاصیت مجانبی توابع موج  $\psi_R, \psi_L$  بدست می آوریم.

### ۴-۳-۱-۴ بسط مجانبی انتگرال $\psi_L$ و $\psi_R$ به روش فاز مانا :

برای مطالعه حرکت تصادفی کوانتومی نیاز به بررسی رفتار انتگرالی به شکل زیر

$$I(t) = \int_a^b g(k) e^{i\phi(k)} dk \quad (۲-۳۲)$$

هستیم. انتگرال را در حد  $t$  های بزرگ ( گامهای بالا ) مورد بررسی قرار می دهیم. نظریه بسط مجانبی اجازه می دهد خیلی دقیق بسط انتگرال را بر حسب شکل ساده ای از تابع بر حسب  $t$  بدست آوریم.

در پایین به تکنیک مهمی برای حل انتگرال  $I(t)$  به عنوان فاز اکستریم مانا [10] می پردازیم.

در انتگرال رابطه (۲-۲۳) تابع نمایی  $e^{i\phi(k)}$  (اگر  $t$  بزرگ و  $\phi(k)$  در بازه انتگرال  $a$  و  $b$  متغیر باشد) به صورت تابع نوسانی سریع می باشد.

اگر تغییر تابع  $g$  نسبت به  $k$  ملایم و در یک تابع نوسانی سریع ضرب شود، و سپس نتیجه حاصل را انتگرال گیری کنیم بعلت اینکه سطح زیر نمودار در بالا و پایین محور برابر است حاصل این انتگرال

$$\int dg(k) e^{i\phi(k)} = 0 \quad \text{گیری صفر خواهد شد.}$$

قسمت زیادی از زیر بازه انتگرال گیری بعلت وجود تابع سریع نوسانی خارج می شود. منطقه ای که نوسان بطور آهسته اتفاق می افتد در نقاط اکستریم تابع  $\phi$  مثل نقطه  $c$  می باشد.

که طبق تعریف مشتق در نقطه  $c$  با توجه به اینکه  $\phi(c) = \phi(c + \Delta x)$  است. در نتیجه  $\phi'(c)$  برابر صفر است.

$$\phi'(c) = 0$$

اگر نقاط اکسترمم در بازه انتگرال گیری وجود نداشت، می توانیم بسط مجانبی انتگرال  $I(t)$  را بر حسب توان عکس  $t$  نوشت به وسیله تکرار در انتگرال گیری، انتگرال سریعتر از  $\frac{1}{t}$  بسط صفر میل می کند.

با توجه به اینکه در نقاط اکسترمم تغییرات نداشته، پس انتگرال گیری را در یک بازه کوچک حول این نقاط انجام می دهیم. برای مثال اگر  $\varphi'(c) = 0$  اما  $\varphi''(c) \neq 0$  باشد جواب انتگرال به شکل  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  است. اگر  $\varphi''(c) = 0$  اما  $\varphi'''(c) \neq 0$  باشد. جواب انتگرال به شکل  $\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$  می باشد. حال با چشم پوشی از جزئیات این مشتقات، بسط انتگرال  $I(t)$  را در حالیکه تنها یک نقطه اکسترمم در انتهای چپ بازه انتگرال (نقطه  $a$ ) وجود دارد. و تابع ملایم  $g$  در نقطه  $a$  غیر صفر است. فرض می کنیم،  $a$  یک نقطه اکسترمم از مرتبه  $P-1$  باشد. یعنی مشتق تابع  $\phi$  تا مرتبه  $P-1$  صفر است.

$$\varphi'(a) = \varphi''(a) = \dots = \varphi^{(P-1)}(a) = 0 \quad \text{but} \quad \varphi^{(P)}(a) \neq 0$$

در نتیجه جواب  $I(t)$  انتگرال بصورت زیر

$$I(t) \approx g(a) e^{i\phi(a) + i\frac{\pi}{2P}} \left[ \frac{pi}{t|\varphi^{(P)}(a)|} \right]^{-1/P} \frac{\pi(\frac{1}{P})}{P} t \rightarrow +\infty \quad (33-2)$$

می باشد.

فاکتور  $e^{+i\pi/2P}$  برای  $\varphi^{(P)}(a) > 0$  و  $e^{-i\pi/2P}$  برای  $\varphi^{(P)}(a) < 0$  است علاقه مندان به مطالعه بیشتر در زمینه بسط مجانبی از انتگرال به کتاب نورمن وریچارد هندلث من [11] رجوع کنید. دو ویژه تابع از ماتریس  $M_k$  برای ماتریس هادامارد در بخش قبل ذکر شد.

$$\phi_k^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (1 + \cos^2 k) - \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \begin{array}{c} e^{-ik} \\ -\sqrt{2} e^{i\omega_k} - e^{-ik} \end{array} \right]$$

$$\phi_k^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (1 + \cos^2 k) + \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \begin{array}{c} e^{-ik} \\ -\sqrt{2} e^{i\omega_k} - e^{-ik} \end{array} \right]$$

و تابع انتقال فوریه در گام  $t$  که حالت اولیه آن حالت چپ است بصورت زیر

$$\tilde{\psi}(k, t) = e^{-i\omega_k t} \langle \phi_k^1 | \tilde{\psi}(k, 0) \rangle \phi_k^1 + e^{i(\pi + \omega_k)t} \langle \phi_k^2 | \tilde{\psi}(k, 0) \rangle \phi_k^2$$

می باشد.

اکنون رفتار مجانب از تابع موج  $\psi$  در گامهای بی نهایت مورد بررسی قرار می دهیم. انتگرال

$$I(\alpha, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} g(k) e^{i\varphi(k, \alpha)t} \quad (۳۴-۲)$$

که ریشه ای از  $\omega'_k + \alpha = 0$  در بازه  $[0, \pi]$  می باشد. تابع  $\varphi(k, \alpha) = -\omega_{k\alpha} - \alpha k_\alpha$  که در آن

$$n = \alpha t, \alpha \in \left[ \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

در نتیجه انتگرال  $\psi_L$  و  $\psi_R$  دقیقاً از نوع انتگرال  $I(\alpha, t)$  می

باشد. که در زیر به حل انتگرال  $\psi_L$  و  $\psi_R$  می پردازیم.

#### ۲-۶-۶ حل انتگرال $\psi_L$ و $\psi_R$ با بسط مجانبی :

با توجه به اینکه  $\sin \omega_k = \frac{\text{Sink}}{\sqrt{2}}$  تعریف می شود بنابراین

$$\frac{d\omega_k}{dk} \cos \omega'_k = \frac{\text{Cosk}}{\sqrt{2}} \rightarrow \omega'_k = \frac{\text{Cosk}}{\sqrt{2} \cos \omega_k} = \frac{\text{Cosk}}{\sqrt{2} \sqrt{(1 - \sin \omega_k)^2}}$$

$$\omega'_k = \frac{\text{Cosk}}{\sqrt{2} \sqrt{(1 - \frac{1}{2} \text{Sin}^2 k)}} = \frac{\text{Cosk}}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Cos}^2 k}} = \frac{\text{cosk}}{\sqrt{1 + \text{cos}^2 k}} \quad (۳۵-۲)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k} = -(\omega_k + \alpha) = -\frac{\text{Cosk}}{\sqrt{1 + \text{Cos}^2 k}} - \alpha \quad (۳۶-۲)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial K^2} = -\omega_k'' = \frac{\text{Sink}}{(1 + \text{Cos}^2 k)^{\frac{3}{2}}} \quad (۳۷-۲)$$

دقت شود که  $\alpha$  در بازه  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon$  است که  $\epsilon > 0$  می باشد.

اکنون نقاط  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$  را مورد نظر قرار می دهیم. در این نقاط،  $\phi$  دارای نقاط مانا از مرتبه

۲ بصورت  $k = \pi, 0$  بترتیب برای نقاط  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$  می باشد. با استفاده از روش فازمانا،

تابع  $I$  در این نقاط بصورت زیر است.

$$I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, t\right) \approx \frac{g(\pi)}{3\pi} \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left[\frac{6}{t}\right]^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (38-2)$$

$$I\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, t\right) \approx \frac{g(\pi)}{6\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left[\frac{6}{t}\right]^{\frac{1}{3}} \quad (39-2)$$

نهایتاً دوباره به بازه انتگرال  $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon, \frac{1}{\sqrt{2}} - \epsilon\right]$  برمی گردیم. وقتی  $\alpha$  در این بازه قرار می گیرد،

$\phi$  دارای دو نقطه مانا بصورت  $k_\alpha, -k_\alpha$  که  $k_\alpha \in [0, \pi]$  است و  $\cos k_\alpha$  بصورت زیر

تعریف می شود.

$$\cos k_\alpha = \frac{-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (40-2)$$

با توجه به تعریف  $\phi$  و  $\cos k_\alpha$  مشتق دوم  $\phi$  در نقاط مانا بصورت زیر بیان می شود.

$$\phi(\pm k_{\alpha,\alpha}) = \mp(\omega_{k_\alpha} + \alpha k_\alpha) \quad (41-2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial k^2}(\pm k_{\alpha,\alpha}) = \mp \omega_k'' = \pm(1-\alpha^2)\sqrt{1-2\alpha^2} \quad (42-2)$$

که بجای  $\phi(k_\alpha, \alpha)$ ،  $\phi(\alpha)$  را جاگذاری می کنیم.

اکنون با بکارگیری روش فازمانا و با توجه به اینکه  $\phi$  دارای دو نقطه مانا بصورت  $k_\alpha$  و  $-k_\alpha$  می

باشد. تابع  $I(\alpha, t)$  (استفاده از رابطه ۲-۳۳) بصورت زیر بدست می آید.

$$I(\alpha, t) \approx \frac{g(k_\alpha)}{\sqrt{2\pi t |\omega_{k_\alpha}''|}} \times \begin{cases} 2 \cos(\phi(\alpha)t + \pi/4) & \text{if } g \text{ is even} \\ 2i \sin(\phi(\alpha)t + \pi/4) & \text{if } g \text{ is odd} \end{cases} \quad (43-2)$$

اکنون با استفاده از آنالیز بالا، بسط مجانبی توابع  $\psi_R, \psi_L$  را می نویسیم. با توجه به اینکه توابع  $\psi_R, \psi_L$  بصورت زیر بدست آمد.

$$\psi_L = \frac{1+(-1)^{n+t}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left( 1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1+\cos^2 k}} \right) e^{-i(\omega_k t + kn)}$$

$$\psi_R = \frac{1+(-1)^{n+t}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik}}{\sqrt{1+\cos^2 k}} e^{-i(\omega_k t + kn)}$$

در نتیجه با استفاده از رابطه (۲-۴۳) می توان بسط مجانبی  $\psi_R, \psi_L$  را با استخراج  $g(k_\alpha)$  از روابط (۲-۳۰) و (۲-۳۱) بدست آورد.

همانطور که دیدیم  $\cos k_\alpha = \frac{-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$  تعریف شد. بنابراین در تابع  $\psi_L, g(k_\alpha)$  بصورت زیر است. ( $g(k_\alpha)$  تابع زوج است.)

$$\left( 1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1+\cos^2 k}} \right) = (1-\alpha)$$

$$\psi_L(n,t) \approx \frac{1+(-1)^{(n+t)}}{\sqrt{2\pi t} |\omega_{k_\alpha}''|} \times \left[ (1-\alpha) \cos(\phi(\alpha)t + \pi/4) \right] \quad (۲-۴۴)$$

و در تابع  $\psi_R, g(k_\alpha)$  بصورت زیر است.

$$\frac{e^{ik}}{\sqrt{1+\cos^2 k}} = \left( \frac{\cos k}{\sqrt{1+\cos^2 k}} + \frac{i \sin k}{\sqrt{1+\cos^2 k}} \right) \quad (۲-۴۵)$$

این قسمت  $g(k_\alpha)$  مربوط به تابع  $\psi_R$  که در زیر ذکر شده، تابعی زوج است.

$$\frac{\cos k}{\sqrt{1+\cos^2 k}} = -\alpha$$

این قسمت  $g(k_\alpha)$  مربوط به تابع  $\psi_R$  که در زیر بیان شده، تابعی فرد است.

$$\frac{i \sin k}{\sqrt{1+\cos^2 k}} = i\sqrt{1-2\alpha^2}$$

$$\left( \sin k = \frac{\sqrt{1-2\alpha}}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \sqrt{1+\cos^2 k} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right)$$

$$\psi_R \approx \frac{1+(-1)^{(\alpha+1)l}}{\sqrt{2\pi} |\omega_{k_\alpha}''|} \times \left[ -\alpha \cos(\phi(\alpha)t + \pi/4) - \sqrt{1-2\alpha^2} \sin(\phi(\alpha)t + \pi/4 \right] \quad (46-2)$$

اکنون تابع توزیع احتمال  $p(\alpha, t)$  بصورت زیر می آید.

$$p(\alpha, t) = |\psi_L(\alpha t, t)|^2 + |\psi_R(\alpha t, t)|^2 \quad (47-2)$$

$$p(\alpha, t) = \frac{1+(-1)^{(\alpha+1)l}}{\pi |\omega_{k_\alpha}''|} \times \quad (48-2)$$

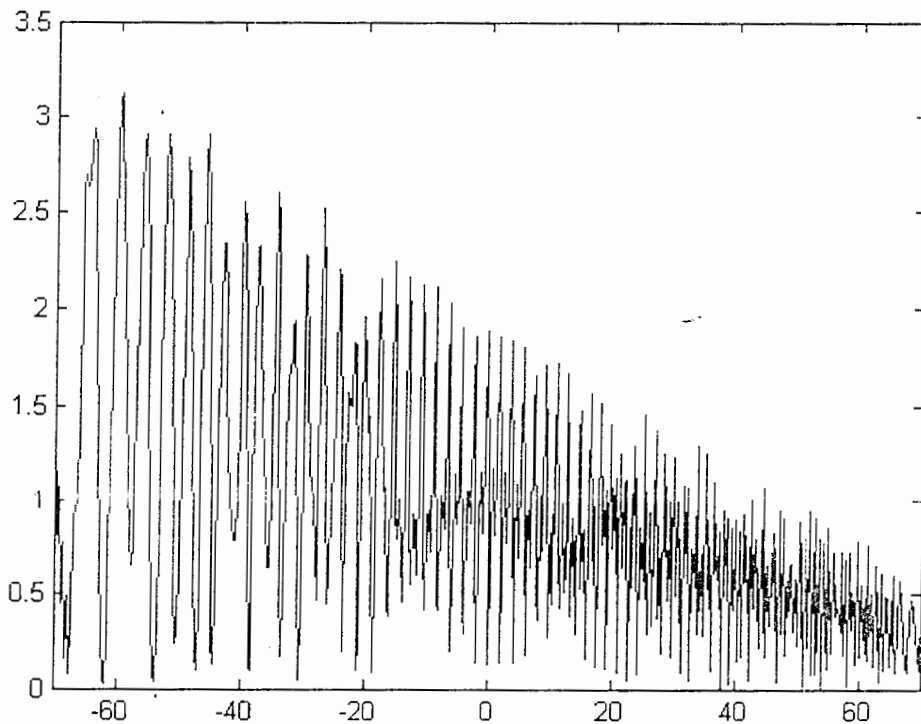
$$\left[ (1-\alpha)^2 \cos^2(\phi(\alpha)t + \pi/4) + (1-\alpha^2) \cos^2(\phi(\alpha)t + \pi/4 + k_\alpha) \right]$$

نمودار توزیع احتمال برای  $t = 100$  (تعداد ۱۰۰ گام) و حالت اولیه  $\tilde{\psi}(k, 0) = (1 \ 0)^T$  بر حسب

$-70 \leq n \leq 70$  بصورت زیر می باشد. ( $n = \alpha t$ )

همانطور که می بینیم چون حالت اولیه از مبدأ  $\tilde{\psi}(k, 0) = (1 \ 0)^T$  بصورت ویژه حالت چپ  $(|L\rangle)$

می باشد، نمودار توزیع احتمال به سمت چپ کشیده می شود.





۵-۲ محاسبه تابع توزیع احتمال  $P_{slow}$ : برای محاسبه  $P_{slow}$  از توزیع احتمال  $P(\alpha, t)$  قرارداد

می کنیم که تابع توزیع احتمال  $P(\alpha, t)$  بصورت زیر تعریف می شود.

$$P(\alpha, t) = P_{slow}(\alpha, t) + P_{fast}(\alpha, t) \quad (۴۹-۲)$$

که  $P_{slow}$  نیز بصورت زیر تعریف می شود،

$$P_{slow} = \frac{1 - \alpha}{\pi t |\omega_k''|} \quad (۵۰-۲)$$

$P_{slow}$  دارای تغییرات ملایم ( غیر نوسانی ) و بصورت تابعی بر حسب  $\alpha$  است.  $P_{fast}$  نیز بصورت مؤلفه

باقیمانده رابطه توزیع احتمال (۴۸-۲) بصورت تابع نوسانی سریع می باشد. می توان نشان داد، که

توزیع لحظه ای از تابع  $P_{fast}$  از مرتبه  $t$  کمتر از تابع توزیع  $P_{slow}$  است. همچنین

$$P(\alpha) = t P_{slow}(\alpha, t) \text{ است. } P(\alpha) \text{ تابع چگالی احتمال بین بازه } \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ است.}$$

تابع چگالی احتمال  $P(\alpha)$  بصورت واضح غیر منفی و سطح زیر نمودار آن برابر ۱ است. برای ملاحظه

اینکه سطح زیر نمودار تابع چگالی احتمال برابر ۱ است. بصورت زیر عمل می کنیم.

$$\frac{\partial \phi}{\partial k}(k_{\alpha, \alpha}) = 0 = -\omega'_{k_{\alpha}} - \alpha \rightarrow ( \text{نقطه فازمانا } k_{\alpha} ) \quad (۵۱-۲)$$

$$|\omega''_{k_{\alpha}}| \equiv -\omega''_{k_{\alpha}} = \frac{d\alpha}{dk_{\alpha}} \quad (۵۲-۲)$$

اکنون :

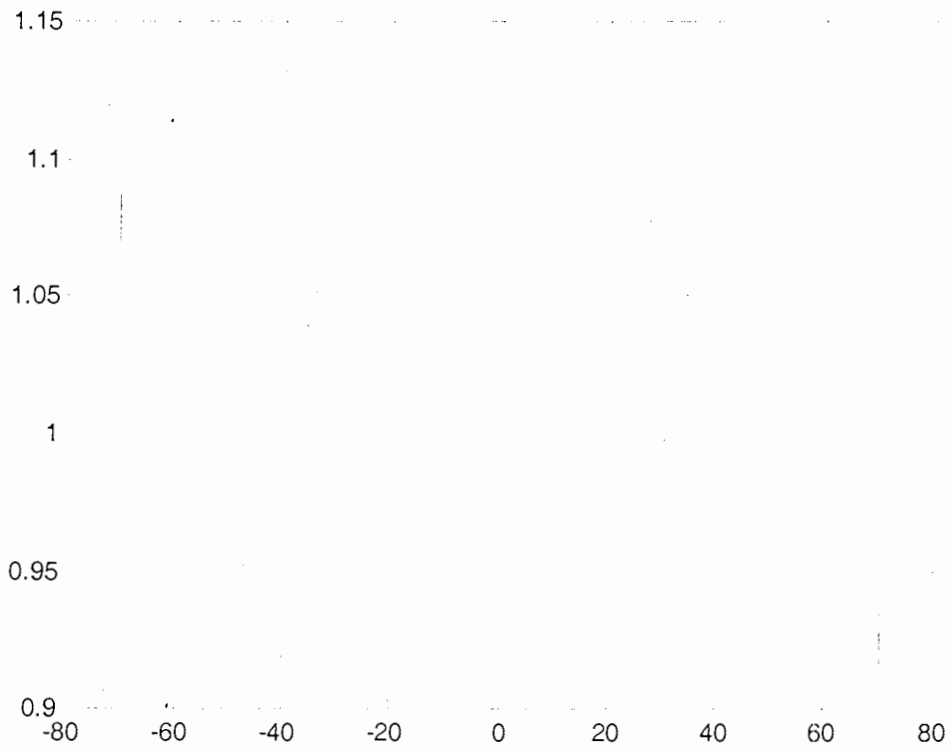
$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} P(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - \alpha) \frac{dk_{\alpha}}{d\alpha} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( 1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) dk = 1 \quad (۵۳-۲)$$

تابع  $\frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}}$  بصورت غیر متقارن حول نقطه  $\frac{\pi}{2}$  است. و همچنین می توان نمودار تابع توزیع

احتمال  $P_{slow}$  را با توجه به رابطه زیر

$$P_{slow}(\alpha, t) = \frac{1 - \alpha}{\pi t |\omega_k''|} = \frac{1 - \alpha}{\pi t (1 - \alpha^2) \sqrt{1 - 2\alpha^2}} \quad t = 1 \dots \quad (۵۴-۲)$$

بصورت زیر بدست آورد.



## ۲-۶ محاسبه تابع توزیع احتمال با حالت اولیه متقارن :

## ۲-۶-۱ محاسبه حالت اولیه متقارن :

ابتدا برای بدست آوردن حالت اولیه متقارن [12] بدینصورت عمل می کنیم. همانطور که در بخش قبل دیدیم ماتریس  $M_k$  را بصورت زیر تعریف کردیم.

$$M_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{bmatrix} \quad (۵۵-۲)$$

اکنون ما نیاز به پیدا کردن ماتریس یونیتاری  $S$  هستیم، که در رابطه زیر صدق کند.

$$S' M_k S = M_{-k}$$

ماتریس یکانی  $S$  یک چرخش بر روی حالت اولیه انجام می دهد. که در نتیجه هر حالت اولیه نامتعادل ( نامتقارن ) را وارونه می کند. ( حالت اولیه بصورت متعادل می شود. ) اگر ماتریس یکانی  $S$  وجود نداشت. در نتیجه حرکت بطور ذاتی به سمت چپ و راست سوق داده می شود. و از این رو حرکت کتره ای بصورت متقارن نبود. یک پیامد مستقیم این است که، اگر حالت اولیه ویژه بردار ماتریس  $S$  باشد. سپس توزیع احتمال با این حالت اولیه بصورت متقارن می باشد. اکنون برای حرکت کتره ای کوانتومی ماتریس یکانی  $S$  را بصورت  $\delta_y$  ( ماتریس پائولی در راستای  $y$  ) انتخاب کرده که تنها دو عملگر انتقال  $S_+$  ,  $S_-$  را تعویض می کند.

$$S_+ |i, \uparrow\rangle = |i+1, \uparrow\rangle, S_- |i, \downarrow\rangle = |i-1, \downarrow\rangle$$

بنابراین با انتخاب ماتریس یکانی  $S = \delta_y$  رابطه ( ۵۶-۲ ) را بصورت زیر ارضاء می کند.

$$S = \delta_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S' M_k S = M_{-k} \quad (۵۶-۲)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{ik} & e^{ik} \\ e^{-ik} & -e^{-ik} \end{pmatrix}$$

حالت اولیه متقارن را بصورت ویژه بردار ماتریس  $\delta_r$  انتخاب می کنیم. بنابراین حالت اولیه متقارن

برابر  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i)^T$  می باشد. که در رابطه زیر صدق می کند.

$$\phi_{sym} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle \pm |R\rangle) \quad (57-2)$$

### ۶-۶-۶ محاسبه توابع $\psi_R, \psi_L$ مربوط به ماتریس هادامارد با حالت اولیه متقارن :

همانطور که در بخش قبل دیدیم تحول زمانی ذره توسط ماتریس  $M_k$  انجام می شود.

$$\tilde{\psi}(k, t+1) = M_k \tilde{\psi}(k, t) \quad (58-2)$$

ماتریس  $2 \times 2$   $M_k$  نیز بصورت زیر تعریف می شود.

با استفاده از این ماتریس  $M_k$  و  $t$  بار تأثیر آن بر روی حالت اولیه می توان تابع موج در زمان  $t$  را

بدست آورد.

$$\tilde{\psi}(k, t) = M_k^t \tilde{\psi}(k, 0) \quad (59-2)$$

اکنون تجزیه طیفی ( spectral decomposition ) ماتریس  $M_k$  را بصورت زیر می نویسیم.

$$M_k^t = (\lambda_k^1)^t |\phi_k^1\rangle\langle\phi_k^1| + (\lambda_k^2)^t |\phi_k^2\rangle\langle\phi_k^2|$$

ویژه مقادیر ماتریس  $M_k$  بصورت  $\lambda_k^1 = e^{-i\omega_k}$ ,  $\lambda_k^2 = e^{i(\omega_k + \pi)}$  است. همچنین ویژه بردارهای

مربوط به ماتریس  $M_k$  ( ماتریس هادامارد ) نیز بصورت زیر است.

$$\phi_k^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (1 + \cos^2 k) - \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{2} e^{-i\omega_k} - e^{-ik} \end{bmatrix}$$

$$\phi_k^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (1 + \cos^2 k) + \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} e^{-ik} \\ -\sqrt{2} e^{-i\omega_k} - e^{-ik} \end{bmatrix}$$

اکنون برای بدست آوردن توابع  $\tilde{\psi}_L(k, t)$  و  $\tilde{\psi}_R(k, t)$  با حالت اولیه متقارن

$$\tilde{\psi}(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)^T$$

زیر استفاده می کنیم.

$$\tilde{\psi}(k,t) = e^{-i\omega_k t} \langle \phi_k^1 | \tilde{\psi}(k,0) \rangle \phi_k^1 + e^{i(\pi+\omega_k)t} \langle \phi_k^2 | \tilde{\psi}(k,0) \rangle \phi_k^2$$

با انتخاب

$$B = \left( (1 + \cos^2 k) + \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (60-2)$$

$$A = \left( (1 + \cos^2 k) - \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

و جاگذاری  $\phi_k^1$ ,  $\phi_k^2$  و حالت اولیه متقارن  $\tilde{\psi}(k,0)$  در معادله تابع موج  $\tilde{\psi}(k,t)$  داریم.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_L(k,t) \\ \tilde{\psi}_R(k,t) \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\omega t}}{2\sqrt{2}} A^{-1} \langle (e^{ik} \sqrt{2} e^{i\omega_k} - e^{ik}) | \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{2} e^{-i\omega_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} + \frac{e^{i\omega t}}{2\sqrt{2}} (-1)^t$$

$$B^{-1} \langle e^{ik} - \sqrt{2} e^{-i\omega_k} - e^{ik} | \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ -\sqrt{2} e^{i\omega_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (61-2)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_L(k,t) \\ \tilde{\psi}_R(k,t) \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\omega t}}{2\sqrt{2}} A^{-1} \begin{pmatrix} 1 + i(\sqrt{2} e^{i(\omega_k - k)} - 1) \\ \sqrt{2} e^{i(k - \omega_k)} - 1 + i(3 - \sqrt{2} e^{i(\omega - k)} - \sqrt{2} e^{i(k - \omega_k)}) \end{pmatrix} \\ + \frac{(-1)^t e^{i\omega t}}{2\sqrt{2}} B^{-1} \begin{pmatrix} 1 - i(\sqrt{2} e^{-i(\omega_k + k)} + 1) \\ -\sqrt{2} e^{i(k + \omega_k)} - 1 - i(-3 - \sqrt{2} e^{-i(k + \omega_k)} - \sqrt{2} e^{i(k + \omega_k)}) \end{pmatrix} \quad (62-2)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_L(k,t) \\ \tilde{\psi}_R(k,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-i\omega_k t} \begin{pmatrix} 1 + i(\sqrt{2} e^{i(\omega_k - k)} - 1) \\ \sqrt{2} e^{i(k - \omega_k)} - 1 + i(3 - \sqrt{2} e^{i(\omega - k)} - \sqrt{2} e^{i(k - \omega_k)}) \end{pmatrix} \\ + \frac{(-1)^t}{2\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{i\omega_k t} \begin{pmatrix} 1 - i(\sqrt{2} e^{-i(\omega_k + k)} + 1) \\ -\sqrt{2} e^{i(k + \omega_k)} - 1 - i(-3 - \sqrt{2} e^{-i(k + \omega_k)} - \sqrt{2} e^{i(k + \omega_k)}) \end{pmatrix} \quad (63-2)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_L(k,t) \\ \tilde{\psi}_R(k,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-i\omega_k t} \begin{pmatrix} 1 + i(\sqrt{2} e^{i(\omega_k - k)} - 1) + (-1)^{n+t} (1 - i(\sqrt{2} e^{-i(\omega_k + k)} + 1)) \\ \sqrt{2} e^{i(k - \omega_k)} - 1 + i(3 - \sqrt{2} e^{i(\omega_k - k)} - \sqrt{2} e^{i(k - \omega_k)}) + (-1)^{n+t} \\ (-\sqrt{2} e^{i(k + \omega_k)} - 1 + i(3 + \sqrt{2} e^{-i(\omega_k + k)} + \sqrt{2} e^{i(k + \omega_k)})) \end{pmatrix}$$

اگر مجموع  $n+t$  مثل حالت قبل زوج باشد در نتیجه داریم :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_L(k,t) \\ \tilde{\psi}_R(k,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1+\cos^2 k}} \right) e^{-i\omega_k t} \begin{pmatrix} 2(1-i) + i\sqrt{2}e^{-ik} (e^{i\omega_k} - e^{-i\omega_k}) \\ 2(3i-1) + \sqrt{2}e^{ik} (e^{-i\omega_k} - e^{i\omega_k}) + \sqrt{2}ie^{-ik} \\ (e^{-i\omega_k} - e^{+i\omega_k}) + \sqrt{2}ie^{ik} (e^{i\omega_k} - e^{-i\omega_k}) \end{pmatrix} \quad (۶۴-۲)$$

(۶۴)

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_L(k,t) \\ \tilde{\psi}_R(k,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1+\cos^2 k}} \right) e^{-i\omega_k t} \begin{pmatrix} 2(1-i) - 2\sqrt{2}e^{-ik} \sin \omega_k \\ 2(3i-1) - 2\sqrt{2}ie^{ik} (e^{-i\omega_k} - e^{i\omega_k}) + \sqrt{2}ie^{-ik} \\ (e^{-i\omega_k} - e^{+i\omega_k}) + \sqrt{2}ie^{ik} \sin \omega_k + 2\sqrt{2}e^{-ik} \sin \omega_k \\ -2\sqrt{2}e^{ik} \sin \omega_k \end{pmatrix} \quad (۶۵-۲)$$

با توجه به اینکه  $\sin \omega_k = \sin \frac{k}{\sqrt{2}}$  است بنابراین با جاگذاری در رابطه بالا داریم :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_L(k,t) \\ \tilde{\psi}_R(k,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1+\cos^2 k}} \right) e^{-i\omega_k t} \begin{pmatrix} 2(1-i) - 2e^{-ik} \sin k \\ 2(3i-1) - 2ie^{ik} \sin k + 2e^{-ik} \sin k - 2e^{ik} \sin k \end{pmatrix} \quad (۶۶-۲)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_L(k,t) \\ \tilde{\psi}_R(k,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1+\cos^2 k}} \right) e^{-i\omega_k t} \begin{pmatrix} (1-i) - \cos k \sin k + i \sin^2 k \\ (3i-1) - i \cos k \sin k + \sin^2 k + \sin k (e^{-ik} - e^{ik}) \end{pmatrix} \quad (۶۷-۲)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_L(k,t) \\ \tilde{\psi}_R(k,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1+\cos^2 k}} \right) e^{-i\omega_k t} \begin{pmatrix} (1-i) - \cos k \sin k + i \sin^2 k \\ (3i-1) - i \cos k \sin k + \sin^2 k - 2i \sin^2 k \end{pmatrix} \quad (۶۸-۲)$$

حال با توجه به اینکه  $\phi(\pm k_\alpha, \alpha) = \bar{\pi}(\omega_{k_\alpha} + \alpha k_\alpha)$  و دارای دو نقطه مانا بصورت  $\pm k_\alpha$  می

باشد که  $K_\alpha \in [0, \pi]$  و -

$$\cos k_\alpha = \frac{-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \sin k_\alpha = \sqrt{1-\cos^2 k} = \frac{\sqrt{1-2\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} \cdot \sqrt{1+\cos^2 k} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

می باشد. با توجه به اینکه در رابطه (۶۸-۲) همه توابع بجز  $\cos k \sin k$  زوج است در نتیجه تابع

$g(k_\alpha)$  دارای توابع زوج و فرد است.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_L(k,t) \\ \tilde{\psi}_R(k,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\alpha)e^{i\omega t} \begin{pmatrix} (1-i) + \frac{\alpha\sqrt{1-2\alpha^2}}{1-\alpha^2} + i\left(\frac{1-2\alpha^2}{1-\alpha^2}\right) \\ (3i-1) + \frac{i\alpha\sqrt{1-2\alpha^2}}{1-\alpha^2} + \left(\frac{1-2\alpha^2}{1-\alpha^2}\right) - 2i\left(\frac{1-2\alpha^2}{1-\alpha^2}\right) \end{pmatrix} \quad (۶۹-۲)$$

اکنون با استفاده از تبدیل معکوس فوریه نیز بصورت زیر توابع  $\psi_R(n,t), \psi_L(n,t)$  را بدست می آوریم.

$$\psi(n,t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\psi}(k,t) e^{-ikn}$$

انتگرال  $\psi(n,t)$  مشابه انتگرال  $I(\alpha,t)$  و بصورت زیر می باشد.

$$I(\alpha,t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} g(k) e^{i\phi(k,\alpha)t}$$

اکنون با استفاده از روش بسط مجانبی جواب انتگرال  $I(\alpha,t)$  بصورت زیر است.

$$I(\alpha,t) \approx g(k_\alpha) e^{i\phi(k_\alpha, \alpha)t} \left[ \frac{P!}{t |\phi^P(\alpha)|} \right]^{1/P} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{P}\right)}{P} t \rightarrow +\infty$$

$$\phi = -(\omega + \alpha k)$$

با قرار دادن  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot k_\alpha = \pi$  در نتیجه  $\phi'(k_\alpha, \alpha)$  می باشد. که با توجه به روابط (۲-۳۶)

بصورت زیر بیان می شود.

$$\phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial k} = -(\omega'_k + \alpha) = \frac{-\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} - \alpha = 0$$

با توجه به رابطه (۲-۴۲) بصورت زیر می باشد.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial k^2} = \mp \omega''_k = \pm(1 - \alpha^2) \sqrt{1 - 2\alpha^2}$$

در نتیجه با جاگذاری  $P=2$  در رابطه (۲-۳۳)  $I(\alpha,t)$  بصورت زیر می باشد.

$$I(\alpha, t) \approx \frac{g(k_\alpha)}{\sqrt{2\pi} |\omega''_{k_\alpha}|} \times \begin{cases} 2 \cos(\phi(\alpha)t + \pi/4) & \text{if } g \text{ is even} \\ 2i \sin(\phi(\alpha)t + \pi/4) & \text{if } g \text{ is odd} \end{cases}$$

اکنون با استفاده از رابطه (۶۹-۲) و تبدیل معکوس فوریه و استخراج  $g(k_\alpha)$  از آن و جاگذاری در رابطه قبل داریم. ( $n = \alpha t$ )

$$\tilde{\psi}_L(\alpha t, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi} |\omega''_{k_\alpha}|} \left( \begin{array}{l} \left( (1-\alpha)(1-i) + i \left( \frac{1-2\alpha^2}{1+\alpha} \right) \cos(\phi(\alpha)t + \pi/4) \right) \\ \left( \frac{+i\alpha\sqrt{1-2\alpha^2}}{1+\alpha} \right) \sin(\phi(\alpha)t + \pi/4) \end{array} \right) \quad (70-2)$$

$$\tilde{\psi}_R(\alpha t, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi} |\omega''_{k_\alpha}|} \left( \begin{array}{l} \left[ (3i-1)(1-\alpha) + \left( \frac{1-2\alpha^2}{1+\alpha} \right) - 2i \left( \frac{1-2\alpha^2}{1+\alpha} \right) \right] \cos(\phi(\alpha)t + \pi/4) \\ \left( \frac{-\alpha\sqrt{1-2\alpha^2}}{1+\alpha} \right) \sin(\phi(\alpha)t + \pi/4) \end{array} \right) \quad (71-2)$$

متغیر  $\alpha$  را در بازه  $-0.7 \leq \alpha \leq 0.7$  قرار داده و  $t = 100$  می گیریم. با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= -(\omega_{k_\alpha} + \alpha k_\alpha) = -\left( \sin^{-1} \left( \frac{\sin k}{\sqrt{2}} \right) + \alpha \cos^{-1} \frac{-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) \\ &= -\left( \sin^{-1} \left( \frac{\sin \left( \cos^{-1} \frac{-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right)}{\sqrt{2}} \right) + \alpha \cos^{-1} \frac{-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) \end{aligned}$$

می باشد و همچنین  $|\omega''_{k_\alpha}|$  برابر

$$|\omega''_{k_\alpha}| = (1-\alpha^2)\sqrt{1-2\alpha^2}$$

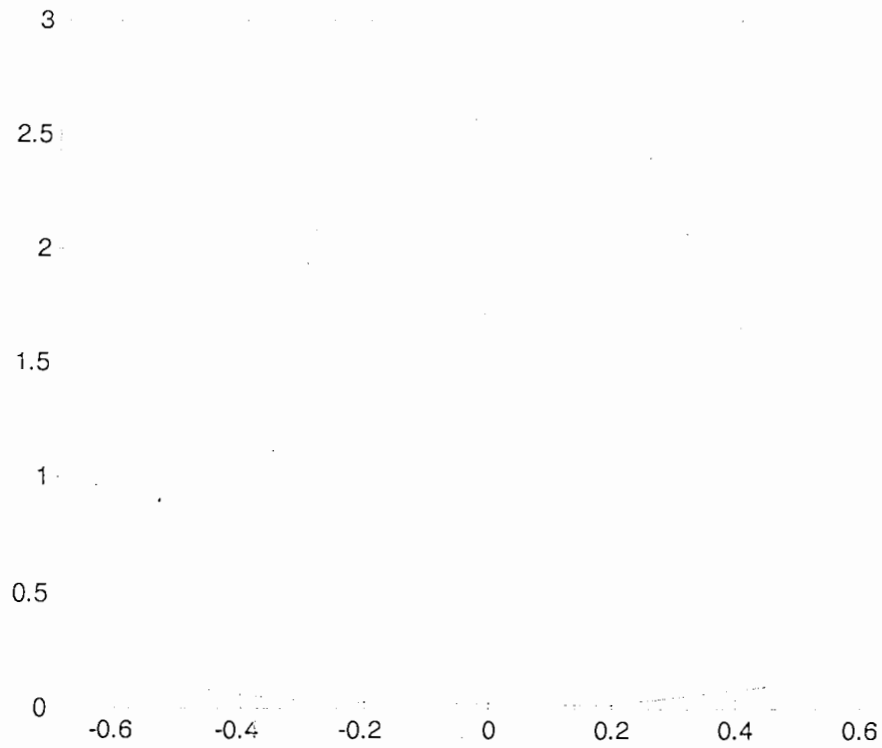
است.

اکنون با توجه به اینکه تابع توزیع احتمال  $P(\alpha, t)$  بصورت زیر تعریف می شود.



$$P(\alpha, t) = |\psi_L(\alpha t, t)|^2 + |\psi_R(\alpha t, t)|^2$$

بنابراین نمودار توزیع احتمال  $P(\alpha, t)$  با حالت اولیه متقارن برای  $t = 100$  بصورت زیر می باشد.



## ۲-۶-۲ محاسبه تابع توزیع احتمال Pslow با حالت اولیه متقارن:

توزیع Pslow مربوط به حرکت کتره ای که با حالت اولیه متقارن آغاز شود بصورت

$$P_{slow}(\alpha, t) = \frac{1}{\pi t |\omega''|} \quad (۷۲-۲)$$

می باشد و همچنین  $\alpha \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  است و  $k_{\alpha}$  نقطه مانا می باشد.

$$\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_{\alpha}} = \alpha \quad (۷۳-۲)$$

همچنین  $\omega'' = (1 - \alpha^2)\sqrt{1 - 2\alpha^2}$  است. همچنین بسادگی نشان داده می شود مجموع احتمال

برابر ۱ است.

$$P(\alpha, t) = t p_{slow} \quad (۷۴-۲)$$

$$\omega'' = \frac{d\alpha}{dk_{\alpha}} \quad (۷۵-۲)$$

$$t \int d\alpha P_{slow}(\alpha, t) = \int d\alpha \frac{1}{\pi |\omega''|} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dk_{\alpha}}{\pi} = 1 \quad (۷۶-۲)$$

اکنون نمودار توزیع احتمال Pslow نسبت  $\alpha$  نیز بصورت متقارن است.  $-0.7 \leq x \leq 0.7$  این تابع

توزیع در شکل زیر نشان داده می شود.



# فصل سوم

حرکت تصادفی

بر روی خط با دیواره جاذب

## ۱-۳ حرکت کتوره ای کلاسیکی بر روی خط با دیواره جاذب:

در این قسمت حرکت تصادفی کلاسیکی با دیواره جاذب در مکان  $b$  با ویژه حالت  $|b\rangle$  را مورد بررسی قرار می دهیم. اکنون بوسیله عملگر تصویری  $M_b$  در هر گام، می توان ویژه حالت  $|b\rangle$  را بوسیله دو حالت تصویری در فضای هیلبرت  $H_p$  بصورت  $|b\rangle$  و  $|B_{\perp}\rangle$  (ویژه حالت متعامد  $|b\rangle$ ) اندازه گیری می کنیم.

$$M_b |\psi\rangle = \begin{cases} |b\rangle & P_b = |\langle b|\psi\rangle| \\ \frac{|\psi\rangle - \langle b|\psi\rangle|b\rangle}{\sqrt{1 - |\langle b|\psi\rangle|^2}} & P_{B_{\perp}} = 1 - |\langle b|\psi\rangle|^2 \end{cases} \quad (1-3)$$

که  $P_b$  احتمال جذب و  $P_{B_{\perp}}$  احتمال مکملش (احتمال فرار از دیواره جاذب) می باشد.

بعنوان مثال اگر حالت ذره قبل از اندازه گیری بصورت زیر باشد.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} (2|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + 3|\downarrow\rangle \otimes |1\rangle) \quad (2-3)$$

اگر دیواره جاذب را در مکان 0 قرار دهیم پس از اندازه گیری  $M_0$  ذره در (احتمال اینکه در مکان صفر باشد) ویژه حالت  $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$  با احتمال  $\frac{2}{7}$  خواهد بود. (در این مورد جذب اتفاق افتاده

و حرکت متوقف می شود.) بعبارتی حالت دیگری بصورت

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (-|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + 3|\downarrow\rangle \otimes |1\rangle) \quad \frac{5}{7} \text{ می باشد. (یعنی با این احتمال}$$

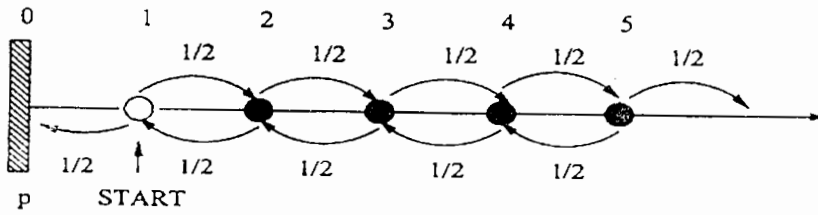
از دیواره جاذب فرار می کند.) اکنون حرکت تصادفی با دیواره جاذب در مکان  $b$  اگر نتیجه اندازه

گیری عملگر  $M_b$  حالت  $|b\rangle$  باشد. حرکت متوقف و بعبارت دیگر تکرار بعدی عملی می باشد.

حال به آموخته های خود مربوط به حرکت تصادفی کلاسیکی با یک دیواره جاذب می پردازیم.

حرکت تصادفی کلاسیکی بر روی خط که حرکت را مطابق شکل (۱-۳) از موقعیت ۱ شروع کرده و

دیواره جاذب در موقعیت صفر می باشد.



شکل (۱-۳)

به آسانی نشان خواهیم داد احتمال جذب (P) بوسیله دیواره  $p = 1$  خواهد بود.

مطابق شکل حرکت از موقعیت ۱ شروع؛ با احتمال  $\frac{1}{2}$  به موقعیت صفر (در این مورد جذب خواهد

شد.) و با احتمال  $\frac{1}{2}$  به موقعیت ۲ خواهد رفت. احتمال  $p_{20}$  برابر احتمال اینکه از موقعیت ۲ به ۱

و از موقعیت ۱ به  $p_{10}$  برود. با توجه به اینکه فضای حرکت بصورت همگن است می توان به

جای  $p_{21}$  و  $p_{10}$  را جاگذاری کرد.

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_{21} p_{10} = \frac{1}{2} (1 + p^2) \quad (3-3)$$

حل این معادله  $p = 1$  خواهد بود؛ بنابراین در حرکت تصادفی کلاسیکی همیشه جذب بوسیله دیواره

جاذب اتفاق می افتد. احتمال جذب برابر ۱ خواهد شد و هرگز احتمال فرار وجود ندارد.

حال در بحث بعدی که مربوط به حرکت تصادفی کوانتومی با دیواره جاذب است. نشان خواهیم داد،

که احتمال جذب توسط دیواره ۱ نخواهد بود. بعبارت دیگر احتمال فرار از دیواره جاذب وجود خواهد

داشت. [13,14]

## ۳-۲ حرکت تصادفی کوانتومی با دیواره ی جاذب [14]:

این حرکت بوسیله ی دو روش بررسی می شود :

(i) روش تابع مولد

(ii) روش ویژه تابع

## ۳-۲-۱ روش ویژه تابع :

در این بحث روش ویژه تابع را مورد مطالعه قرار می دهیم، همانطور که در بحث حرکت تصادفی کوانتومی بر روی خط داشتیم.  $L(n,t)$  دامنه حالت  $|n,L\rangle$  در زمان  $t$  (مربوط به دامنه ی ذرات در مکان  $n$  در زمان  $t$  با مشخصه حرکت به سمت چپ) و  $R(n,t)$  دامنه ی حالت  $|n,R\rangle$  در زمان  $t$  (مربوط به دامنه ذرات در مکان  $n$  در زمان  $t$  با مشخصه حرکت به سمت راست) می باشد. حال تابع موج  $\psi(n,t)$  را بصورت بردار دو مؤلفه ای  $\psi(n,t) = \begin{pmatrix} L(n,t) \\ R(n,t) \end{pmatrix}$  بیان می کنیم. تابع موج  $\psi(n,t)$  را بصورت ترکیب خطی مؤلفه های تابع موج  $(R,L)$  در یک گام قبل  $t-1$  بصورت زیر می نویسیم. (استفاده از رابطه (۲-۱۲))

$$\begin{pmatrix} L(n,t) \\ R(n,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} L(n+1,t-1) + \sqrt{1-\rho} R(n+1,t-1) \\ \sqrt{1-\rho} L(n-1,t-1) - \sqrt{\rho} R(n-1,t-1) \end{pmatrix} \quad (۳-۴)$$

مطابق با ماتریس هادامارد،  $\rho = \frac{1}{2}$  و در اینجا هنوز مرزی نداریم. قبل از بحث دیواره جاذب

سیستم بدون مرز و سیستم با مرز نوسانی را مورد بررسی قرار میدهم.

۲-۲-۲ سیستم بدون مرز (فره آزاد): اگر جواب تابع موج  $\psi(n, t)$  را بصورت یک موج تخت

فرض کنیم داریم:

$$\begin{pmatrix} L(n, t) \\ R(n, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} e^{i(kn - \omega_k t)} \quad (5-3)$$

اکنون با جاگذاری رابطه (۴-۳) در رابطه (۵-۳) بصورت زیر عمل می کنیم.

$$\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} e^{i(kn - \omega_k t)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} A_k e^{i[k(n+1) - \omega_k(t-1)]} + \sqrt{1-\rho} B_k e^{i[k(n+1) - \omega_k(t-1)]} \\ -\sqrt{1-\rho} A_k e^{i[k(n-1) - \omega_k(t-1)]} - \sqrt{\rho} B_k e^{i[k(n-1) - \omega_k(t-1)]} \end{pmatrix}$$

$$e^{-i\omega_k t} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} e^{ik} & \sqrt{1-\rho} e^{ik} \\ \sqrt{1-\rho} e^{-ik} & -\sqrt{\rho} e^{-ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} \quad (6-3)$$

با انتخاب ماتریس یکانی  $\omega_k$  بصورت زیر معادله (۶-۳) بصورت یک معادله ویژه مقداری است.

$$U_k = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} e^{ik} & \sqrt{1-\rho} e^{ik} \\ \sqrt{1-\rho} e^{-ik} & -\sqrt{\rho} e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (7-3)$$

اکنون ویژه مقادیر ماتریس یکانی  $\omega_k$  را بدست می آوریم.

$$\lambda^2 - \sqrt{\rho} (e^{ik} - e^{-ik}) \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{k\pm} = \sqrt{\rho} \left[ i \sin k \pm \sqrt{\cos^2 k + (-1 + \frac{1}{\rho})} \right] \quad (8-3)$$

حال با بدست آوردن ویژه مقادیر  $\lambda_{k\pm}$  و قرار دادن در معادله ویژه مقدار زیر داریم

$$U_k \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = e^{-i\omega_k t} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{k_{\pm}} = e^{-i\omega_{k_{\pm}}} \quad (9-3)$$

اکنون با استفاده از روابط (۸-۳) و (۹-۳)  $\omega_{k_{-}}$  را بصورت زیر بدست می آوریم.

$$\omega_{k_{+}} = -\sin^{-1}(\sqrt{\rho} \sin k) \quad (10-3)$$

$$\omega_{k_{-}} = \pi - \omega_{k_{+}} \quad (11-3)$$

با استفاده از معادله (۶-۳) برای بدست آوردن  $B_{k_{\pm}}$   $A_{k_{\pm}}$  بصورت زیر عمل می کنیم.

$$e^{-i\omega_{k_{+}}} A_{k_{+}} = \sqrt{\rho} e^{ik} A_{k_{+}} + \sqrt{1-\rho} e^{ik} B_{k_{+}} \quad (12-3)$$

$$e^{-i\omega_{k_{-}}} B_{k_{-}} = \sqrt{1-\rho} e^{ik} A_{k_{-}} - \sqrt{\rho} e^{-ik} B_{k_{-}} \quad (13-3)$$

با استفاده از شرط بهنجارش که برابر  $\frac{1}{N} = |A_{k_{+}}|^2 + |B_{k_{+}}|^2$  است و  $N$  تعداد نقاط سیستم می

باشد.

بصورت زیر بدست می آید.  $B_{k_{\pm}}, A_{k_{\pm}}$

$$A_{k_{\pm}} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sqrt{1 \pm \frac{\cos k}{\sqrt{\frac{1}{\rho} - \sin^2 k}}} \quad (14-3)$$

$$B_{k_{\pm}} = \pm \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2N}} \sqrt{1 \mp \frac{\cos k}{\sqrt{\frac{1}{\rho} - \sin^2 k}}} \quad (15-3)$$

$$V_{\pm} = \frac{d\omega_{\pm}}{dk} = \mp \frac{\cos k}{\sqrt{\frac{1}{\rho} - \sin^2 k}}$$

سرعت گروه نیز بصورت زیر می باشد.



$V_-$  در بازه  $-\frac{\pi}{2} < K < \frac{\pi}{2}$  مثبت و  $V_+ = -V_-$  در بازه  $-\pi < K < -\frac{\pi}{2}$  و  $\frac{\pi}{2} < K < \pi$

مثبت است.

### ۳-۲-۲ سیستم با مرز نوسانی:

اکنون سیستم با مرز نوسانی با دوره  $N$  نوسانی را مورد نظر قرار می‌دهیم. تابع موج  $\psi(n, t)$  از این سیستم بصورت ترکیب خطی از ویژه حالت‌های محاسبه شده حالت قبل می‌باشد.

$$\begin{pmatrix} L(n, t) \\ R(n, t) \end{pmatrix} = \sum_{\substack{k \in (-\pi, \pi) \\ \delta = \pm}} C_{k, \delta} \left[ \begin{pmatrix} A_{k, \delta} \\ B_{k, \delta} \end{pmatrix} e^{i(kn - \omega_{k, \delta} t)} \right] \quad (16-3)$$

شرایط اولیه به گونه زیر است.

$$\begin{pmatrix} L(n, 0) \\ R(n, 0) \end{pmatrix} = \delta_{n0} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (17-3)$$

با قرار دادن این شرط اولیه در معادله (۱۶-۳) ضریب بهنجارش  $C_{k_{\pm}}$  بر حسب  $\beta, \alpha$  بصورت

زیر بدست می‌آید.

$$\delta_{n0} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{k_+} A_{k_+} + C_{k_-} A_{k_-} \\ C_{k_+} B_{k_+} + C_{k_-} B_{k_-} \end{pmatrix} \quad (18-3)$$

$$\begin{pmatrix} A_{k_+} & A_{k_-} \\ B_{k_+} & B_{k_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{k_+} \\ C_{k_-} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (19-3)$$

$$C_{k_{\pm}} = A_{k_{\pm}} \alpha + \overline{B_{k_{\pm}}} \beta \quad (20-3)$$

سیستم با مرزهای متناوب فقط در حد  $N \rightarrow \infty$  و اینکه  $K$  مقادیر متغیر و پیوسته است، صادق می‌باشد.

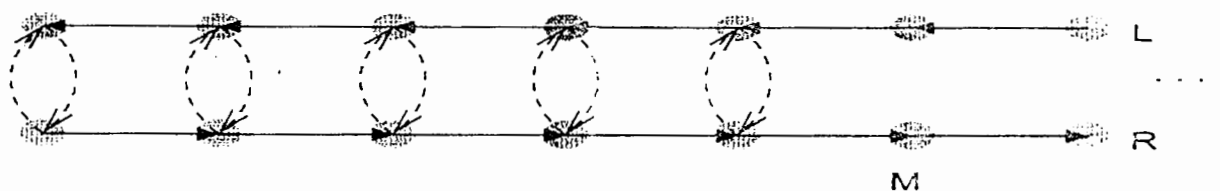
باشد.

## ۳-۳ سیستم با یک دیواره ی جاذب:

اکنون با توجه به معادله ی اصلی (۳-۴) و استفاده از شرایط مرزی؛ احتمال جذب و احتمال فرار از دیواره ی جاذب را بدست می آوریم. ابتدا دیواره ی جاذب را در نقطه  $n = M$  که  $M > 0$  قرار می دهیم. در این سیستم احتمال پایسته می باشد. دامنه حرکت به سمت چپ  $L(n, t)$  و راست  $R$  در داخل محدوده ی دیواره ی جاذب بصورت مدل اصلی (همان معادله (۳-۴)) می باشد. یعنی ذره در مکان  $n$  و در گام  $t$  با خاصیت حرکت به سمت چپ  $L(n, t)$  در یک گام قبل  $t-1$  بصورت ترکیب حرکت به سمت چپ و راست می باشد. در نتیجه در داخل محدوده دیواره جاذب معادله (۳-۴) بصورت زیر بدست می آید.

$$n < m-1: \begin{pmatrix} L(n, t) \\ R(n, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho}L(n+1, t-1) + \sqrt{1-\rho}R(n+1, t-1) \\ \sqrt{1-\rho}L(n-1, t-1) - \sqrt{\rho}R(n-1, t-1) \end{pmatrix} \quad (۳-۲۱)$$

در روی مرز و خارج از این محدوده، ذره ای که به سمت چپ برود، به حرکت به سمت چپ و ذره ای که به سمت راست برود به سمت راست به حرکت خود ادامه میدهد؛ در این صورت دامنه ی ذره در مکان  $n$  و در گام  $t$  به شکل زیر است. (شکل ۳-۲)



شکل (۳-۲)

$$n \geq M: \begin{pmatrix} L(n, t) \\ R(n, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(n+1, t-1) \\ R(n+1, t-1) \end{pmatrix} \quad (۳-۲۲)$$

حال برای حل مدل اصلی (معادله ۳-۴) نیاز به یک شرایط مرزی داریم. این شرایط مرزی را بصورت زیر بیان می کنیم.

$$\begin{pmatrix} L(M-1, t) \\ R(M-1, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(M, t-1) \\ \sqrt{1-\rho}L(M-2, t-1) - \sqrt{\rho}R(M-2, t-1) \end{pmatrix} \quad (23-3)$$

حرکت به سمت چپ در خارج از محدوده ی وجود ندارد، زیرا با انتخاب مرز جذب کننده در نقطه  $n = M$  که آنرا مثبت اختیار کردیم. ( $M > 0$ ) ذره ای که به مرز می رسد. با حرکت به سمت راست از آن عبور می کند. پس در همه زمانها در مرز حرکت به سمت چپ نداریم. بنابراین  $L(M, t) = 0$  از شرط مرزی  $L(M, t) = 0$  و استفاده از معادله (۲۳-۳) شرط دیگری بصورت  $L(M-1, t) = 0$  (all times) بدست می آید. سیستم با یک مرز جاذب شرط  $L(M-1, t) = 0$  برای توزیع از  $k$  های مختلف با  $\omega$  های یکسان در تداخل ویرانگر صادق می باشد. ویژه مقادیر  $\lambda_{k_{\pm}}$  برای سیستم بدون مرز بصورت زیر می باشد.

$$\lambda_{\pm} = \sqrt{\rho} \left[ i \sin k \pm \sqrt{\cos^2 k + (-1 + \frac{1}{\rho})} \right] \quad (24-3)$$

اکنون با استفاده از رابطه  $\lambda_{k_{\pm}} = e^{-i\omega_{k_{\pm}}}$ ،  $\omega_{k_{\pm}} = \omega_{(\pi-k)_{\pm}}$  می باشد. و تبهگنی دیگری وجود ندارد. پس شرط  $L(M-1, t) = 0$  برای  $\omega$  های یکسان در تداخل ویرانگر (اختلاف فاز  $\pi$ ) برای توزیع از  $k$ ها بصورت  $(k, \pm)$  و  $(\pi - k, \pm)$  می باشد. بنابراین ویژه حالتها به صورت ترکیب خطی از این  $k$ ها به شکل زیر بیان می شود.

$$\begin{pmatrix} L_{k_{\pm}}(n, t) \\ R_{k_{\pm}}(n, t) \end{pmatrix} = N_{k_{\pm}} \begin{pmatrix} A_{k_{\pm}} \\ B_{k_{\pm}} \end{pmatrix} e^{ikn} + C_{k_{\pm}} \begin{pmatrix} A_{(\pi-k)_{\pm}} \\ B_{(\pi-k)_{\pm}} \end{pmatrix} e^{i(\pi-k)n} e^{-i\omega_{k_{\pm}} t} \quad (25-3)$$

$N_{k_{\pm}}$  در رابطه بالا ثابت نرمالیزاسیون می باشد.

ضریب ثابت  $C_{k_{\pm}}$  را با توجه به شرط  $L(M-1, t) = 0$  می توان بگونه زیر بدست آورد.

$$A_{k_{\pm}} e^{ik(M-1)} + C_{k_{\pm}} A_{(\pi-k)_{\pm}} e^{i(\pi-k)(m-1)} = 0 \quad (26-3)$$

با توجه به معادله (۱۴-۳) بصورت زیر  $C_{k_{\pm}}$  را در معادله (۲۷-۳) بدست می آوریم.

$$A_{k_{\pm}} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sqrt{1 \pm \frac{\cos k}{\sqrt{\frac{1}{\rho} - \sin^2 k}}}$$

$$C_{k_{\pm}} = - \left[ \sqrt{1 + \frac{\cos 2k}{-1 + \frac{1}{\rho}} \pm \frac{\cos k}{-1 + \frac{1}{\rho}}} \right] e^{-i(\pi - 2k)(M-1)} \quad (27-3)$$

این مسئله دقیقاً همانند پراکندگی از یک سد پتانسیل در مکانیک کوانتومی می باشد. [15]

می دانیم در مرز تابع موج متناسب با  $e^{ikn}$  که در آن عدد موج  $k \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  بصورت حرکت به

سمت راست و همچنین مؤلفه ی  $\pi-k$  عدد موج بعنوان موج انعکاسی از مرز می باشد. (حرکت به سمت

چپ)

احتمال موج انعکاسی  $P_r$  در بازه  $k \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  بصورت زیر است. (همانند احتمال فرار از دیواره

جاذب)

$$P_r = |C_{k_{-}}|^2 = \left[ \sqrt{1 + \frac{\cos k}{-1 + \frac{1}{\rho}} - \frac{\cos k}{\sqrt{-1 + \frac{1}{\rho}}}} \right]^2 \quad (28-3)$$

محاسبات مشابه برای حالتی که مرز در  $-M$  قرار بگیرد، موج انعکاسی همان موجی خواهد بود که به

سمت راست حرکت کند و از شرط مرزی مشابه داریم،  $R(-M+1,t)=0$ ، حال موج انعکاسی برای هر

عدد موجی  $k$  بصورت

$$P_r = |C_{k-}|^2 = \left( \frac{\sqrt{1 + \frac{\cos^2 k}{-1 + \frac{1}{\rho}}} - |\cos k|}{\sqrt{-1 + \frac{1}{\rho}}} \right)^2 \quad (3-29)$$

می باشد.

این ضرایب انعکاسی بصورت خوبی با نتایج محاسبات عددی مطابقت می کند؛

۳-۵ محاسبه عددی احتمال فرار و جذب از دیواره جاذب واقع در مکان  $M(M>0)$ :

برای محاسبه عددی احتمال فرار و جذب از دیواره جاذب، شاید ساده ترین راه، استفاده از روش ذره تصویری باشد. بنابراین در روش تصویری، سیستم بدون مرز را مورد بررسی قرار می دهیم. که در آن تصویر خارج از محدوده ی مرز است. و این ذره تصویری شرط مرزی را بصورت  $L(M-1, t) = 0$  برای همه زمانها برآورده می کند. وضعیت اولیه برای ذره فیزیکی در مبدأ را بصورت زیر بیان می کنیم.

$$\begin{pmatrix} L(n,0) \\ R(n,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \delta_{n_0} \quad (30-3)$$

شکل تابع موج غیر بهنجارش شده در بالا پیشنهاد می کند که مجموعاً تابع موج را برای جفت عدد موج  $k, \pi - k$  بررسی کنیم.

بنابراین

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \delta_{n_0} = \sum_{\substack{k \in (-\pi/2, \pi/2) \\ \delta = \pm}} \left\{ C_{k,\delta} \begin{pmatrix} A_{k,\delta} \\ B_{k,\delta} \end{pmatrix} e^{ikn} + C_{\pi-k,\delta} \begin{pmatrix} A_{\pi-k,\delta} \\ B_{\pi-k,\delta} \end{pmatrix} e^{i(\pi-k)n} \right\} \quad (31-3)$$

که  $C_{k,\delta}$  در معادله (۳۰-۳) داده شده است.

حال مکان تصویر باید به گونه ای باشد، که شرایط مرزی  $L(M-1, t) = 0$  را برای همه زمانها حفظ کند. بنابراین ذره تصویری را در مکان  $n = 2(M-1)$  پیشنهاد می کنیم (این پیشنهاد بوسیله شکل

معادله (۳۱-۳) می باشد.)

و معادله (۳۱-۳) را با توجه به این ذره تصویری بصورت زیر می نویسیم.

$$\begin{pmatrix} L(n,t) \\ R(n,t) \end{pmatrix} = \sum_{\substack{k \in (-\pi/2, \pi/2) \\ \delta = \pm}} e^{-i\omega_{k,\delta}t} \left[ \left\{ C_{k,\delta} \begin{pmatrix} A_{k,\delta} \\ B_{k,\delta} \end{pmatrix} e^{ikn} + C_{\pi-k,\delta} \begin{pmatrix} A_{\pi-k,\delta} \\ B_{\pi-k,\delta} \end{pmatrix} e^{i(\pi-k)n} \right\} + \left\{ D_{k,\delta} \begin{pmatrix} A_{k,\delta} \\ B_{k,\delta} \end{pmatrix} e^{ik(n-2(M-1))} + D_{\pi-k,\delta} \begin{pmatrix} A_{\pi-k,\delta} \\ B_{\pi-k,\delta} \end{pmatrix} e^{i(\pi-k)(n-2(M-1))} \right\} \right] \quad (32-3)$$

که از واقعیت  $\omega_{k,\delta} = \omega_{\pi-k,\delta}$  در معادله (۳۲-۳) استفاده می کنیم.

اکنون شرط مرزی  $L(M-1, t) = 0$  را در معادله (۳۲-۳) قرار داده و برای  $k \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  داریم:

$$C_{k,\delta} A_{k,\delta} e^{ik(M-1)} + C_{\pi-k,\delta} A_{\pi-k,\delta} e^{i(\pi-k)(M-1)} + D_{k,\delta} A_{k,\delta} e^{-ik(M-1)} + D_{\pi-k,\delta} A_{\pi-k,\delta} e^{i(\pi-k)(M-1)} = 0$$

سادگی می بینیم این معادله به ازاء انتخاب زیر صحیح می باشد.

$$D_{k,\delta} = -e^{i\pi(M-1)} C_{\pi-k,\delta} \frac{A_{\pi-k,\delta}}{A_{k,\delta}} \quad (۳۳-۳)$$

در اینجا، داخل محدوده  $(n < M)$  تابع موج وابسته به زمان بصورت

$$\begin{pmatrix} L(n,t) \\ R(n,t) \end{pmatrix} = \sum_{\substack{k \in (-\pi/2, \pi/2) \\ \delta = \pm}} e^{-i\omega_{k,\delta} t} \left\{ \begin{pmatrix} A_{k,\delta} \\ B_{k,\delta} \end{pmatrix} e^{ikn} + F_{k,\delta} + \begin{pmatrix} A_{\pi-k,\delta} \\ B_{\pi-k,\delta} \end{pmatrix} e^{i(\pi-k)n} g_{k,\delta} \right\} \quad (۳۴-۳)$$

می باشد. که در آن  $F_{k,\delta}, g_{k,\delta}$  بگونه زیر تعریف می شود.

$$F_{k,\delta} = \left[ C_{k,\delta} - e^{i(\pi-2k)(M-1)} C_{\pi-k,\delta} \frac{A_{\pi-k,\delta}}{A_{k,\delta}} \right] \quad (۳۵-۳)$$

$$g_{k,\delta} = \left[ C_{\pi-k,\delta} - e^{-i(\pi-2k)(M-1)} C_{k,\delta} \frac{A_{\pi-k,\delta}}{A_{k,\delta}} \right]$$

همانطور که انتظار داشتیم. این تابع موج در رابطه (۳۴-۳) در معادله (۲۶-۳) صدق می کند. تابع

موج معادله (۳۴-۳) بصورت موج تخت می باشد. در حد زمانهای بزرگ، تنها مؤلفه های تابع موج که

در محدوده فیزیکی به سمت چپ رفته بصورت دو مؤلفه  $(k, +), (\pi - k, -)$  باقی می ماند. (با

توجه به اینکه مرز در  $M > 0$  قرار گرفته و  $k \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  می باشد.)

بنابراین  $\Lambda_{1,1}$  (احتمال اینکه ذره به  $-\infty \rightarrow n$  فرار کند) هنگامیکه دیواره جذب کننده در

$M > 0$  قرار دارد. بصورت زیر می باشد.

$$\Lambda_M = \sum_{k \in (-\pi/2, \pi/2)} |F_{k,+}(M)|^2 + |g_{k,-}(M)|^2 \quad (۳۶-۳)$$

با استفاده از معادلات (۲۰-۳) و (۳۵-۳) و (۳۶-۳) داریم

$$g_{k,-}(M) = \overline{F_{k,+}(M)} \quad (۳۷-۳)$$

بنابراین با جاگذاری (۳۷-۳) در معادله (۳۶-۳)  $\Lambda_M$  بصورت زیر بدست می آید.

$$\Lambda_M = 2 \sum_{k \in (-\pi/2, \pi/2)} |F_{k,+}(M)|^2 \quad (۳۸-۳)$$

که  $F_{k,+}(M)$  برابر

$$F_{k,+}(M) = \frac{\alpha}{A_{k+}} (A_{k+}^2 - e^{i(\pi-2k)(M-1)} A_{k-}^2) + \beta A_k (e^{ik} + e^{i(\pi-2k)(M-1)} e^{-ik}) \quad (۳۹-۳)$$

است. با قرار دادن  $A_{k\pm}$  از معادله (۱۴-۳) و اینکه  $(\phi = \phi_\ell - \phi_r, \beta = r e^{i\phi}, \alpha = l e^{i\phi})$  در

رابطه ۳۹-۳ و استفاده از رابطه ۳۸-۳ برای بدست آوردن  $\Lambda_M$  بگونه زیر عمل می کنیم.

اکنون با تبدیل جمع به انتگرال و اینکه انتگرال بر حسب  $k$ های فرد برابر صفر می باشد.  $\Lambda_M$

بصورت زیر نوشته می شود

$$\Lambda_M = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dk L_M(k) \quad (۴۰-۳)$$

که  $L_M(k)$  در رابطه زیر صدق می کند.

$$\begin{aligned} L_M(k) = & \ell^2 \left( 1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1/\rho - \sin^2 k}} \right) \left( \frac{1/\rho + \cos(2k)}{1/\rho - 1} + \cos(\pi M) \cos(2k(M-1)) \right) \\ & + r^2 \left( 1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1/\rho - \sin^2 k}} \right) (1 - \cos(\pi M) \cos^2(kM)) \\ & + 2\ell r \cos \Phi \left( \frac{\cos k}{\sqrt{1/\rho - 1}} \right) \left( 1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1/\rho - \sin^2 k}} \right) (\cos k - \cos(\pi M) \cos(k(2M-1))) \end{aligned} \quad (۴۱-۳)$$



$$(\Phi = \phi_l - \phi_r \text{ و } \beta = re^{i\phi_r} \text{ و } \alpha = \ell e^{i\phi_l})$$

سپس با توجه به رابطه (۴۰-۳)  $\Lambda_M(\rho)$  برابر زیر

$$\begin{aligned} \Lambda_M(\rho) = & \ell^2 \left( -\frac{2}{\pi \sqrt{1/\rho - 1}} + \frac{1}{1 - \rho} \left( 1 - \frac{2\rho}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{\rho} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\pi} (-1)^M \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dk \frac{\cos k}{\sqrt{1/\rho - \sin^2 k}} \cos(2k(M-1)) \right) \\ & + r^2 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{\rho} + \frac{1}{\pi} (-1)^M \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dk \frac{\cos k}{\sqrt{1/\rho - \sin^2 k}} \cos(2kM) \right) \quad (42-3) \\ & + \ell r \cos \Phi \left( \frac{1}{\sqrt{1/\rho - 1}} - \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1 - 2\rho}{\sqrt{\rho(1 - \rho)}} \sin^{-1} \sqrt{\rho} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^M}{\sqrt{1/\rho - 1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dk \frac{\cos^2 k}{\sqrt{1/\rho - \sin^2 k}} \cos(k(2M-1)) \right) \end{aligned}$$

می باشد.

M	$C_\ell$	$C_r$	$C_{lr}$
1	$1 - \frac{2}{\pi} \approx 0.36338$	$1 - \frac{2}{\pi} \approx 0.36338$	$2 - \frac{4}{\pi} \approx 0.72676$
2	$2 - \frac{4}{\pi} \approx 0.72676$	$3 - \frac{8}{\pi} \approx 0.45352$	$3 - \frac{8}{\pi} \approx 0.45352$
3	$4 - \frac{100}{\pi} \approx 0.816901$	$13 - \frac{118}{3\pi} \approx 0.47981$	$11 - \frac{100}{3\pi} \approx 0.38967$
4	$14 - \frac{124}{3\pi} \approx 0.843191$	$65 - \frac{608}{3\pi} \approx 0.489196$	$53 - \frac{496}{3\pi} \approx 0.372765$
5	$66 - \frac{614}{3\pi} \approx 0.852577$	$341 - \frac{16046}{15\pi} \approx 0.493304$	$277 - \frac{13036}{15\pi} \approx 0.367488$
$\infty$	$\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \approx 0.86338$	$\frac{1}{2}$	$1 - \frac{2}{\pi} \approx 0.36338$

جدول بالا ضرایب مشخصه احتمال فرار به  $-\infty$  (ضرایب  $\Lambda_M$ ) از گام هادامارد می باشد. حالت ابتدایی به صورت

$$\alpha|0, L\rangle + \beta|0, R\rangle$$

و دیواره جذب کننده در  $M$  می باشد. ( $M > 0$ )

مقدار  $\Lambda_M$ ، احتمال فرار به  $-\infty$  وقتی دیواره جاذب در  $M$  قرار دارد، بوسیله رابطه زیر داده می شود.

$$\Lambda_M = \ell^2 C_\ell(M) + r^2 C_r(M) + lr \cos \Phi C_{lr}(x) \quad (43-3)$$

احتمال جذب بوسیله دیواره  $1 - \Lambda_M$  می باشد.

**بررسی کلی:**

در نتیجه در حرکت تصادفی کوانتومی با دیواره جاذب کننده در  $n=M$  ( $M>0$ ) بر خلاف حرکت تصادفی کلاسیکی احتمال جذب برابر ۱ نخواهد شد، و احتمال فرار از دیواره  $M$  ( $\Lambda_M$ ) طبق محاسبات بالا وجود دارد.

# فصل چهارم

## حرکت تصادفی

### بر روی گراف

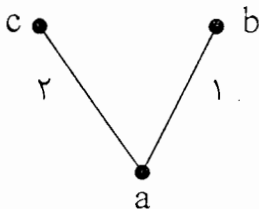
## حرکت تصادفی بر روی گراف :

### ۴-۱ حرکت تصادفی بر روی گراف با گامهای گسسته :

حرکت تصادفی بر روی دو گراف منظم و نامنظم را با گامهای گسسته بصورت زیر بررسی می کنیم.

#### ۴-۱-۱ حرکت تصادفی بر روی گراف منظم از مرتبه $d$ :

اکنون با تعمیم حرکت تصادفی کوانتومی بر روی خط، حرکت تصادفی کوانتومی را در بُعد های بالاتر [16,17,18,19]، یعنی بر روی گراف را مورد بررسی قرار می دهیم. ابتدا یک گراف منظم از مرتبه  $d$  را برای حرکت تصادفی تعریف می کنیم. گراف با درجه رأس  $d$  یعنی اینکه هر رأس دارای  $d$  ضلع ( یال ) خروجی است. فضای هیلبرت سکه  $H_c$  دارای  $d$  بُعد می باشد. لذا در هر رأس یک برچسب داخلی  $j$  برای هر ضلع خروجی بصورت مجزا اختیار می شود بدین معنی که  $d \dots 1 \in j$  می باشد. حال ضلع  $e_j^j$  را بصورت  $e = (v, w)$  تعریف می کنیم. که رأس انتهایی آن  $w$  توسط برچسب  $j$  معلوم می شود. حالت تابع موج کل رأس  $v$  که توسط برچسب  $j$  نشان داده شده بصورت  $|v\rangle \otimes |j\rangle$  می باشد. ( مطابق با حالت  $|i\rangle \otimes |\uparrow\rangle$  بر روی خط یا حلقه می باشد. ) اکنون عملگر انتقالی  $S$  ذره را از رأس  $v$  به رأس  $w$  توسط ضلع  $e_j^j = (v, w)$  انتقال میدهد. مثلاً در شکل زیر برچسب  $1$  رأس  $a$  را به  $b$  انتقال می دهد.



$$S |1\rangle \otimes |a\rangle = |1\rangle \otimes |b\rangle \quad (1-4)$$

عملگر انتقال  $S$  را بطور کلی بصورت زیر بیان می کنیم.

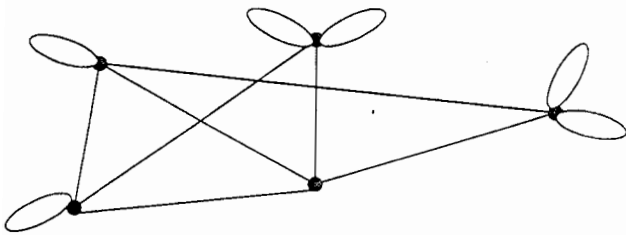
$$S|j\rangle \otimes |v\rangle = \begin{cases} |j\rangle \otimes |w\rangle & \text{if } e_v^j = (v, w) \\ 0 & \text{if } e_v^j = 0 \end{cases} \quad (2-4)$$

اگر ضلعی برای انتقال از رأس  $v$  به  $w$  وجود نداشته باشد. ( $e_v^j = 0$ )

#### ۶-۱-۶ حرکت تصادفی بر روی گراف نامنظم: اکنون حرکت تصادفی بر روی گراف نامنظم

یعنی گرافی که درجه رئوس آن متفاوت است را مورد بررسی قرار میدهیم. (گراف نامنظم)

اگر گراف از مرتبه  $d$  نباشد میتوان عملگر انتقال  $S$  را در روش مشابه ۴-۱-۱ تعریف کرد. که در آن  $d$  ماکزیمم درجه هر رأس می باشد. اکنون عملگر سکه بصورت انتقال یونیتاری  $d$  بعدی می باشد. که در عملگر  $H_C$  سکه تعداد درجات آزادی زیاد خواهد بود. انتخاب سکه  $C$  حرکت تصادفی را بصورت متقارن و ویژه، هدایت می کند. انتخاب سکه همانطور که در حرکت تصادفی بر روی خط دیدیم، بر روی گراف نیز تأثیر بسیار جدی در قله توزیع احتمال دارد. یعنی اگر سکه بصورت متقارن انتخاب نشود. توزیع احتمالی در نتیجه حالت اولیه تابع موج بسمت چپ یا به سمت راست سوق داده می شود. در بُعد های بالاتر این اثر تقویت خواهد شد. حال اگر گراف بصورت نامنظم یعنی درجه رأسها متغیر باشد. حرکت کتره ای را بوسیله دو روش بر روی گراف بررسی می کنیم. روش اول در گراف یک ضلع بصورت حلقه بسته در رأسی که درجه آن از  $d$  کمتر است اضافه می کنیم. ( $d$  ماکزیمم درجه رئوس) این حلقه بسته توسط  $Z$  برچسب گذاری شده که در آن رأس ابتدایی و انتهایی آن یکسان است یعنی حلقه بسته حرکت کتره ای را در مکان اولیه اش حفظ می کند.



روش دیگر گراف را بصورت نامنظم حفظ کرده و عملگر سکه بصورت متفاوت  $C_{d'}$  تعریف می کنیم. درجه هر رأس بصورت  $d' \leq d$  می باشد. در این مورد عملگر سکه را برای موقعیت ذره در هر رأس را نمی توان دیگر به شکل مجزا  $C \otimes I$  نوشت.

### ۶-۱-۶ تعریف سکه متقارن DFT برای حرکت بر روی گراف : [20]

خاصیت گرافهای عمومی با سکه متعادل (متوازن) را مورد بررسی قرار دهیم. (یعنی اینکه حرکت در هر راستا با احتمال مساوی، اگر فضای سکه را اندازه گیری کنیم.) اکنون برای حرکت تصادفی با سکه متعادل از سکه DFT (انتقال فوریه ای گسسته) بوسیله تعمیم سکه ها دامارد H استفاده می کنیم. این سکه DFT بصورت زیر تعریف می شود.

$$DFT = \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \dots \dots 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \dots \dots \omega^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \omega^{d-1} & \omega^{2(d-1)} \dots \dots \omega^{(d-1)(d-1)} \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

اینجا  $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{d}\right)$  یا همان ریشه  $d$  ام ۱ است.

$$\left(e^{2\pi i}\right)^{\frac{1}{d}} = \sqrt[d]{1} \quad (4-4)$$

بطور واضح سکه DFT انتقال یکانی هر راستا با وزن مساوی است. اینگونه که بعد از اندازه گیری احتمال حالتها مساوی می باشد. (احتمال  $\frac{1}{d}$ ). حالت خاص سکه ها دامارد H که تعداد درجات

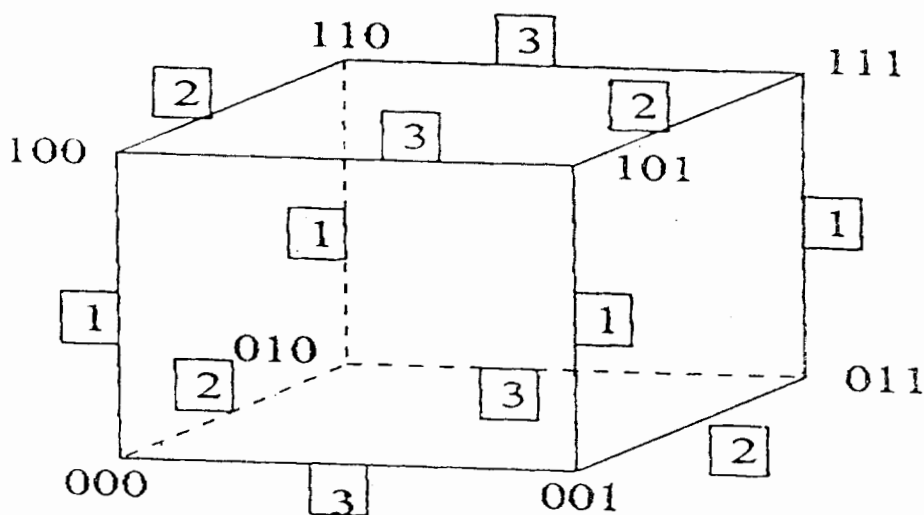
آزادی ۲ می باشد داریم. ( $d = 2$ )

$$\omega = \left(e^{2\pi i}\right)^{\frac{1}{2}} = (e^{\pi i}) = -1$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 = \omega \end{pmatrix} \quad (5-4)$$

## ۴-۲ حرکت کتره ای بر روی مکعب: [16]

شکل زیر یک مکعب دارای سه بعد را نشان می دهد.



رأسهای مکعب  $d$  بعدی بوسیله  $d$  بیت رشته ای از ۰ و ۱ شماره گذاری می شود. دو رأس داده شده بوسیله دو بیت رشته ای زمانی با یکدیگر در تماس می باشند که تفاوت بین دو بیت ۱ واحد باشد. مثال دو بیت (۰۰۱۱۰۱ و ۰۱۱۱۰۱) با یکدیگر در تماس هستند.  $d_H(X, Y)$  فاصله بین دو بیت رشته ای  $X$ ,  $Y$  با کمترین شماره بیت که از بیت  $X$  به بیت  $Y$  برسد. پس همه رأسهای مکعب با  $d_H$   $(X, Y) = 1$  با یکدیگر در تماس هستند. تعداد ۱ های بیت رشته ای را وزن بیت می نامند.

حرکت تصادفی کلاسیکی بر روی مکعب که در هر مرحله رأس مجاور با احتمال  $\frac{1}{d}$  انتخاب می شود. توزیع احتمالی دارای یک تقارن بالایی است. اگر حرکت تصادفی را از رأس  $000\dots 0$  برای مثال شروع کنیم همه  $d$  رأس با وزن ۱ را بدون تغییر در حرکت تصادفی می توان انتخاب کرد. (یعنی اینکه همه رأسها با فاصله  $d_H = 1$  از رأس شروع بدون تغییر در حرکت تصادفی، در گام بعد انتخاب می شوند.)

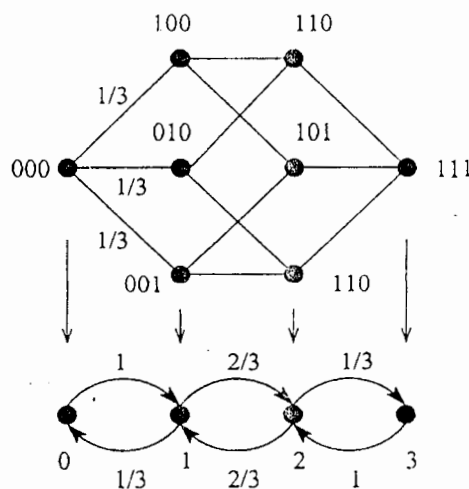


مطالب قبل به این موضوع دلالت می کند، که همه رأسها با وزن یکسان، دارای یک وزن مشابه در توزیع احتمالاتی دارد. لذا بجای رئوس می توان از یک رأس منفرد استفاده کرد. در نتیجه حرکت تصادفی متقارن بر روی مکعب به حرکت کتره ای غیر متعادل بر روی خط تبدیل خواهد شد. اینگونه تبدیل اساساً آنالیز حرکت تصادفی را ساده خواهد کرد و سپس بحث بر روی سرعت انشار حرکت تصادفی و سؤالهای مشابه آن جالب خواهد بود.

مثال حرکت تصادفی کلاسیکی در ۳ بعد بر روی مکعب تبدیل به حرکت بر روی خط از ۴ نقطه خواهد شد. حرکت از چشمه با احتمال انتقال  $\frac{1}{3}$  خواهد بود. اگر همانطور که بیان شد رئوس با وزن یکسان را با یک رأس منفرد نشان دهید. برای حرکت بر روی مکعب  $d$  بعدی تبدیل به یک گراف با  $d + 1$  رأس خواهد شد. احتمال حرکت از رأس  $i$  به رأس  $i + 1$  برابر  $P_{i,i+1} = \frac{d-i}{d}$  و از رأس  $i+1$  به رأس  $i$  برابر  $P_{i+1,i} = \frac{i+1}{d}$  خواهد بود.

اگر دوباره به خاصیت تقارن در حرکت تصادفی کوانتومی برگردیم. تنها سکه ی یونیتاری و متقارن

ماتریس  $G_{a,b}$  و بشکل زیر می باشد.



$$G_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \dots b \\ b & a & b \dots b \\ b & b & a \dots b \\ & & \dots ab \\ b & b & b \dots ba \end{pmatrix} \quad (۴-۶)$$

که  $a, b$  اعداد حقیقی و به صورت  $b = \pm(1-a), 1 - \frac{2}{d} \leq |a| \leq 1$  می باشند.

در میان همه سکه ها، اکنون سکه  $G$  را با  $(a = \frac{2}{d} - 1, b = \frac{2}{d})$  بنام سکه Grover انتخاب می

کنیم. سکه  $G_{a,b}$  را می توان بصورت عملگر یکانی نیز بکار برد.  $G_{1,0} = I$

سکه  $G$  به صورت متوازن نیست زیرا احتمال حرکت در یک راستا  $\left(p = (1 - \frac{2}{d})\right)^2$

متفاوت از احتمال حرکت در  $(p = \frac{4}{d^2})d - 1$  راستای دیگر می باشد. در نتیجه احتمال حرکت

تصادفی کلاسیکی با احتمال در حرکت تصادفی کوانتومی (اعمال سکه Grover) بر روی مکعب متفاوت می شود.

#### ۴-۳ حرکت تصادفی با گامهای پیوسته:

مدل حرکت تصادفی کوانتومی با گامهای گسسته تنها یک روش برای تفسیر اثرهای حرکت کوانتومی می باشد. روش دیگر تعمیم پدیده های توصیف شده در بخش قبل بوسیله حرکت تصادفی کوانتومی با گامهای پیوسته امکان پذیر است. [21,22] بهر حال این روش با مدل حرکت تصادفی با گامهای گسسته خیلی متفاوت بنظر می رسد.

حرکت تصادفی با گامهای پیوسته بطور کامل در فضای هیلبرت مکان  $H_p$  جایگزین می شود.

در حرکت تصادفی با گامهای پیوسته ی فضای سکه مورد نیاز نیست. در ابتدا گرافی با مجموعه  $V$  رأس  $\{1, 2, \dots, V\}$  و متشکل از بالها، که دو رأس در گراف با یک یال در تماس با یکدیگرند.

یک گام در حرکت تصادفی کلاسیکی بر روی گراف زمانی رخ می دهد، که دو رأس توسط یک یال در تماس باشند. یک گام در حرکت تصادفی کلاسیکی توسط ماتریس  $M$  انجام می شود. که ماتریس  $M$  توزیع احتمال هر رأس را توصیف می کند. عناصر ماتریسی  $M_{ij}$  احتمال رفتن از رأس  $i$  به  $j$  را در یک گام بیان می کند.

$P_i(t)$  احتمال رفتن به رأس  $i$  در زمان  $t$  می باشد. و در معادله دیفرانسیل زیر صادق است.

$$\frac{dP_i}{dt} = \sum_j M_{ij} P_j(t) \quad (7-4)$$

توزیع احتمال هر رأس  $V$  در زمان  $t$  بصورت  $\vec{P}' = (P'_1, P'_2, \dots, P'_{|V|})$  می باشد.

سپس بعنوان نتیجه ای از معادله (7-4) اگر ذره در لحظه  $t$  در رأس  $i$  باشد احتمال رفتن به رأس  $i$  در گام  $t+1$  (یک گام بعد  $t$ ) بشکل زیر است.

$$P'_i{}^{t+1} = \sum_j M_{ij} P'_j \quad (8-4)$$

تحول گامها توسط ماتریس  $M$  نیز بصورت زیر بیان می شود.

$$\vec{P}'_{t+1} = M \vec{P}'_t \quad (9-4)$$

عناصر ماتریسی  $M_{ij}$  مخالف صفر می باشد، تنها اگر احتمال حرکت از رأس  $i$  به  $j$  مخالف صفر، یا بعبارت دیگر رأس  $i$ ،  $j$  با یکدیگر توسط یک ضلع در تماس می باشند. عناصر ماتریسی  $M_{ij}$ ، احتمال

حرکت از رأس  $i$  به  $j$  مساوی  $\frac{1}{d_i}$  است. که  $d_i$  درجه رأس  $i$  می باشد. (درجه هر رأس گراف برابر

تعداد یالهای خروجی از آن رأس می باشد.) برای نمونه ماتریس  $M$  برای حرکت تصادفی ساده بر

روی یک حلقه از  $N$  رأس بصورت یک ماتریس  $N \times N$  می باشد. که هر رأس در روی حلقه دو یال

خروجی دارد یعنی  $d=2$  است. ماتریس  $M$  برای یک حلقه از  $N$  رأس بصورت زیر بیان می شود.

$$(d = 2)$$

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10-4)$$

حالت اولیه مطابق با مکان شروع از 0، مطابق با احتمال  $\vec{P}^0$  بصورت

$$\vec{P}^0 = (1, 0, \dots, 0) \text{ می باشد. حال بوسیله معادله (۹-۴) احتمال حرکت پس از یک گام}$$

بر روی حلقه با N رأس توسط ماتریس M داده شده در بالا، بصورت زیر خواهد بود.

$$\vec{P}_{t+1} = M \vec{P}_t$$

$$\vec{P}_1 = M \vec{P}_0 \Rightarrow \vec{P}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (1, 0, \dots, 0)$$

$$\vec{P}_1 = (0, \frac{1}{2}, \dots, 0, \frac{1}{2})$$

با همین روش  $\vec{P}^2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \dots, 0, \frac{1}{4}, 0)$  و  $\vec{P}^3 = (0, \frac{3}{8}, 0, \frac{1}{8}, 0, \dots, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{3}{8})$  و ... بدست می

آید. همانطور که می بینیم نتایج احتمال بالا دقیقاً با نتایج حرکت تصادفی کلاسیکی بر روی خط که

از مکان صفر شروع و احتمال بودن در مکان i پس از t گام، یکسان است. حرکت تصادفی کلاسیکی

بر روی خط از ماتریس انتقالی S در فضای مکان  $H_p$  و از ماتریس هادامارد بعنوان فضای سکه  $H_c$

استفاده کردیم که نتایج احتمال پس از هر بار اندازه گیری با نتایج احتمال توسط ماتریس انتقالی M

یکسان است. انتقال حالت توسط ماتریس M تنها در گامهایی با عدد صحیح می باشد. اکنون قانون

احتمال کلاسیکی برای حرکت در میان درخت را [21] بصورت دیگر بیان می کنیم. (درخت گراف

همبندی است که فاقد دور می باشد. ) قانون احتمال کلاسیکی در زمان پیوسته بوسیله فرایند مارکوف (Markov) تعریف می کنیم. قانون مارکوف حرکت از دو رأس متصل بهم را با احتمال واحد زمانی  $\gamma$ ، که  $\gamma$  مقدار ثابت و مستقل از زمان می باشد؛ یعنی اینکه در زمان خیلی کوچک  $\epsilon \in$  که  $\epsilon \ll 1$ ، احتمال حرکت بین دو رأس در تماس با هم تقریباً برابر  $\gamma \epsilon$  است.

اکنون بطور مقدماتی مکانیزم فرایند کلاسیکی مارکوف را بوسیله مکانیک کوانتومی بررسی می کنیم. شاخص رؤس بوسیله اعداد صحیح  $i = 1, \dots, N$  که مطابق با یک فضای هیلبرت  $N$  بعدی که پایه های حالت کوانتومی متعامدرا بصورت  $\{|i\rangle\}$  با  $i = 1, \dots, N$  می سازند.  $(\langle i | j \rangle = \delta_{ij})$  اکنون هامیلتونین  $\hat{H}$  را بصورت عناصر ماتریسی در این پایه های حالت، تعریف می کنیم. (  $H$  ماتریس مولد جزئی )

$$\hat{H}_{ij} = \begin{cases} -\gamma & i \neq j \text{ and } i \text{ and } j \text{ connected} \\ 0 & i \neq j \text{ and } i \text{ and } j \text{ not connected} \\ d_i \gamma & i = j \text{ d valance vertex } i \end{cases} \quad (11-4)$$

اکنون به قانون احتمال کلاسیکی در میان درخت بر می گردیم.  $P_{ba}(t)$  (احتمال رفتن از  $a$  به  $b$  در زمان  $t$ ) برای زمان کوچک  $\epsilon$  که  $\epsilon \ll 1$  داریم.

$$P_{ba}(\epsilon) = \begin{cases} -\epsilon \langle b | \hat{H} | a \rangle & \text{For } b \neq a \\ 1 - \epsilon \langle a | \hat{H} | a \rangle & \text{For } b = a \end{cases} \quad (12-4)$$

رابطه بالا پیامدی از تعریف  $\hat{H}$  در رابطه (۱۱-۴) می باشد.

برای فرایند کلاسیکی مارکوف ( Markov )، احتمال حرکت تنها وابسته به مکانهای جاری است. و

$$P_{ba}(t) = \sum_c P_{bc}(t) P_{ca}(t) \quad (13-4)$$

سپس با توجه به رابطه قبل اگر  $t_1 = t, t_2 = \epsilon$  احتمال حرکت از رأس  $a$  به  $b$  بصورت زیر بیان می شود.

$$P_{ba}(t+\epsilon) = \sum_C P_{bc}(\epsilon) P_{ca}(t) \quad (14-4)$$

برای  $\epsilon$  خیلی کوچک رابطه بالا بصورت زیر تبدیل می شود. (با استفاده از رابطه ی (۱۲-۴))

$$P_{ba}(t+\epsilon) = P_{bc}(t) - \epsilon \sum_C \langle b | \hat{H} | C \rangle P_{ca}(t) + O(\epsilon^2) \quad (15-4)$$

مشاهده می کنیم.  $P_{ba}(t)$  از معادله ی دیفرانسیل زیر پیروی می کند.

$$\frac{d}{dt} P_{ba}(t) = - \sum_C \langle b | \hat{H} | C \rangle P_{ca}(t) \quad (16-4)$$

با شرط مرزی  $P_{ba}(0) = \delta_{ab}$  جواب معادله بالا بصورت زیر بدست می آید.

$$P_{ba}(t) = \langle b | e^{-\hat{H}t} | a \rangle \quad (17-4)$$

در رابطه بالا احتمال کلاسیکی حرکت از  $a$  به  $b$  در زمان  $t$  است.

اگر حرکت در میان گراف با احتمال  $\mathcal{P}$  (هر واحد زمانی که مقدار ثابت است) بین دو رأس در تماس با یکدیگر انجام شود. مجموع احتمال حرکت از  $a$  به  $b$  در زمان  $t$  برابر ۱ است.

$$\sum_b P_{ba}(t) = 1 \quad (18-4)$$

با توجه به تعریف  $\hat{H}$  ویژه ی بردار حالت صفر به گونه ی زیر بیان می شود.

$$|E=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{b=1}^N |b\rangle$$

بنابراین  $\sum_b P_{ba}(t) = 1$  بصورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} \sum_b P_{ba}(t) &= \sqrt{N} \langle E=0 | e^{-\hat{H}t} | a \rangle \\ &= \sqrt{N} \langle E=0 | a \rangle = 1 \end{aligned}$$

حال حرکت تصادفی کوانتومی در یک فضای هیلبرت  $V$  بعدی مطابق با هامیلتونی  $H$  را مورد بررسی قرار میدهیم. معادله شرودینگر برای  $|\psi(t)\rangle$  بصورت زیر نوشته می شود.

$$i \frac{d}{dt} \langle a | \psi(t) \rangle = \sum_b \langle a | H | b \rangle \langle b | \psi(t) \rangle \quad (19-4)$$

اکنون با تشابه بین معادلات (۱۸-۴) و (۱۹-۴) پایداری احتمالی کلاسیکی بصورت زیر است.

$$\sum_b P_{ba}(t) = 1$$

معادله ی شرودینگر احتمال کوانتومی را بعنوان جمع مجذور دامنه ها بیان می کند.

$$\sum_a |\langle a | \psi(t) \rangle|^2 = 1 \quad (20-4)$$

در برخی موارد، هر توسعه در فضای هیلبرت با ابعاد معین را بعنوان حرکت تصادفی لحاظ می کنیم.

در حرکت تصادفی کوانتومی بر روی گراف، طبیعتاً ابعاد فضای هیلبرت مطابق با عناصر پایه ای برای

رئوس تعریف می شود. با رعایت ساختار گراف، برای دو رأس  $a$  و  $b$  که  $a \neq b$  لازم است که اگر

$a$  و  $b$  بوسیله یک ضلع در تماس باشند.

$$\langle a | H | b \rangle \neq 0 \quad (21-4)$$

برای توصیف حرکت تصادفی کلاسیکی در بالا بوسیله هامیلتونین کوانتومی با عناصر ماتریسی [21]

زیر می باشد.

$$\langle i | H | j \rangle = H_{ij} \quad H_{i,j} = \begin{cases} -\gamma & i \neq j \\ 0 & i \neq j \\ d_i \gamma & i = j \end{cases}$$

حرکت کتره ای بر روی شبکه یک بعدی و برای رسیدن به نتیجه ی رابطه ی (۱۱-۴)، اثر عملگر

هامیلتونین بر روی حالت  $|j\rangle$  را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$H | j \rangle = -\frac{1}{\Delta^2} (|j-1\rangle - 2|j\rangle + |j+1\rangle) \quad (22-4)$$

این تعریف عملگر  $H$  مشابه با تقریب گسسته از عملگر  $\frac{-d^2}{dx^2}$  [4] می باشد. ( که  $\Delta = \gamma^{-\frac{1}{2}}$  برابر

ثابت شبکه است. ( فاصله زمانی بین دو رأس ( گام ) می باشد. )

اختلاف بین توسعه زمانی گامها در حرکت تصادفی کوانتومی و کلاسیکی ناشی از  $\hbar$  که در معادله (۴-۱۶)

(۱۶) وجود ندارد. ( در معادله (۴-۱۹) وجود دارد. )

این نتیجه سبب اختلاف رفتار اساسی بین حرکت تصادفی کلاسیکی و کوانتومی می شود.

حال توسعه زمانی بر روی گراف در حرکت از یک رأس به رأس دیگر با استفاده از معادلات (۴-۱۸) و

(۴-۱۱) برای حرکت تصادفی کلاسیکی و کوانتومی بصورت زیر می باشد.

حرکت تصادفی کلاسیکی احتمال حرکت از  $a$  به  $b$  در زمان  $t$  بصورت

$$P_{ba}(t) = \langle b | e^{-\hat{H}t} | a \rangle \quad (۴-۲۳)$$

در حرکت تصادفی کوانتومی عملگر توسعه زمانی بصورت

$$u(t) = e^{-i\hat{H}t} \quad \hbar = 1 \quad (۴-۲۴)$$

اگر حالت شروع بصورت  $|\psi_{in}\rangle$  باشد، توسعه زمانی تحت عملگر  $u$  برای زمان  $T$  و اندازه گیری

احتمال هر حالت، توزیع احتمال رئوس گراف بصورت نتایج قبل بدست می آید.

حرکت تصادفی کوانتومی با دامنه احتمال حرکت از  $a$  در زمان صفر به  $b$  در زمان  $t$  بصورت زیر می

باشد.

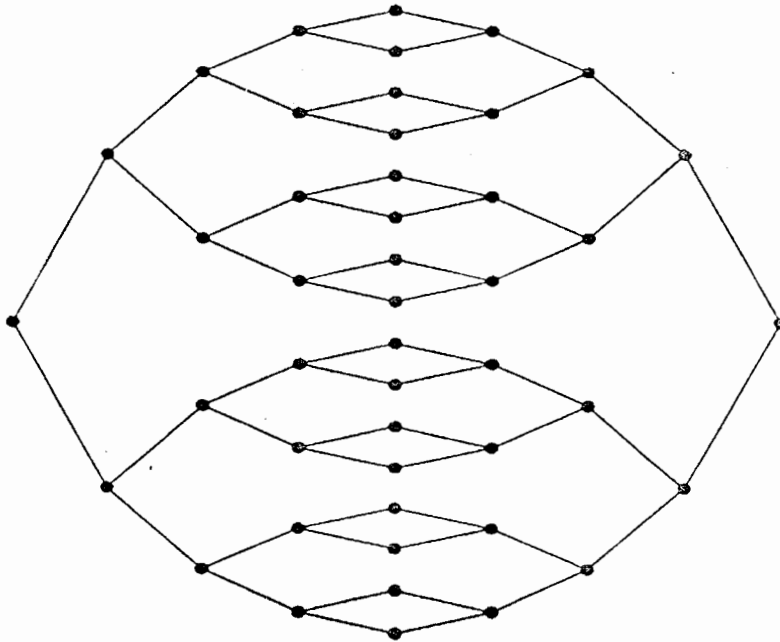
$$A_{ba}(t) = \langle b | e^{-i\hat{H}t} | a \rangle \quad (۴-۲۵)$$



## ۴-۳-۱ اختلاف رفتاری بین حرکت تصادفی کلاسیکی و کوانتومی با گام پیوسته بر

روی گراف با یک مثال : [22]

ابتدا برای توصیف حرکت تصادفی بر روی گراف، گراف  $G_n$  را تعریف می کنیم. تعداد رئوس در گراف  $G_n$  برابر  $2^{n+1} - 2$  می باشد. در شکل ۱ گراف  $G_4$  را نشان می دهیم.



شکل (۱)

بطور کلی،  $G_n$  شامل دو درخت متعادل با عمق  $n$ ، دارای  $2^n$  سطح از رئوس می باشد. برای مجموع حرکت تصادفی کوانتومی و کلاسیکی، شروع حرکت از یک رأس و احتمال را بعنوان تابعی از زمان برای رسیدن به رأس دیگر بدست می آوریم. بعبارت بهتر، هدف محاسبه مدت زمان انتشار حرکت تصادفی از ریشه (رأس) سمت چپ به ریشه (رأس) سمت راست را بصورت تابعی از  $n$  می باشد. ابتدا نمونه حرکت تصادفی کلاسیکی بر روی گراف  $G_4$  را مورد بررسی قرار می دهیم. رئوس گراف  $G_n$  بوسیله ستونها با شاخص  $j \in \{0, 1, \dots, 2n\}$  گروه بندی می شود. ستون 0 شامل ریشه (رأس) سمت چپ درخت، ستون 1 شامل دو رأس در تماس با این ریشه و ...

توجه به اینکه ستون  $n$  شامل  $2^n$  رأس در وسط گراف و ستون  $2n$  شامل ریشه سمت راست درخت می باشد.

حرکت تصادفی کلاسیکی از ریشه چپ به ریشه راست را آنالیز می کنیم. بطوریکه تنها مسیر حرکت را بوسیله احتمال بودن در هر ستون حفظ می کنیم. سمت چپ درخت، برای ستون  $j$ ،  $0 < j < n$ ، احتمال حرکت در هر گام از ستون  $j$  به ستون  $j+1$  دو برابر بزرگتر از احتمال، حرکت از ستون  $j$  به ستون  $j-1$  می باشد. بهر حال، در سمت راست درخت برای ستون  $j$ ،  $n < j < 2n$ ، احتمال حرکت در هر گام از ستون  $j$  به ستون  $j+1$  برابر نصف، احتمال حرکت از ستون  $j$  به ستون  $j-1$  می باشد. بدین معنی که با شروع حرکت در ریشه سمت چپ، حرکت تامیانه ی گراف بطور سریع، انجام می شود. اما سپس زمان بصورت تابع نمایی نزولی، از ستون  $n$  تا ریشه سمت راست ادامه پیدا می کند.

حال دقت بیشتر بیانگر این موضوع است که با شروع حرکت از ستون  $0$ ، احتمال رسیدن به ستون  $2n$  بعد از هر تعداد گام بصورت تابع چند جمله ای از  $n$  که کوچکتر از تابع نمایی می باشد.

در حرکت تصادفی کوانتومی بر روی گراف  $G_n$ ، شروع حرکت با ویژه حالت مطابق با ریشه چپ و توسعه گامها بر روی گراف بوسیله عناصر هامیلتونی داده شده در معادله زیر است. ( معادله زیر همان عناصر هامیلتونی رابطه (۴-۱۱) می باشد. )

$$\langle i | H | j \rangle = H_{ij}$$

با وجود این حالت اولیه و اینکه هامیلتونی ( $H$ ) بصورت متقارن است. میتوان، توسعه گامها را در یک زیر فضا  $(2n+1)$  بُعدی از فضای هیلبرت  $(2^{n+1} + 2^n - 2)$  بُعدی حفظ کرد. این زیر فضا  $(2n+1)$  بُعدی بوسیله ی ویژه حالتها  $|colj\rangle$  ( که  $0 \leq j \leq 2n$  ) بسط داده می شود. شکل ویژه حالتهای همه رئوس در ستون  $j$  بصورت زیر بیان می شود.

$$|colj\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_j}} \sum_{a \in \text{column } j} |a\rangle, \quad (4-26)$$

$N_j$  ضریب بهنجارش بوده و بصورت زیر تعریف می شود.

$$N_j = \begin{cases} 2^j & 0 \leq j \leq n \\ 2^{2n-j} & n \leq j \leq 2n. \end{cases} \quad (۲۷-۴)$$

در پایه حالت  $|colj\rangle$ ، عناصر ماتریسی غیر صفر  $H$  برابر

$$\langle colj | H | colj \pm 1 \rangle = -\sqrt{2}\gamma \quad (۲۸-۴)$$

$$\langle colj | H | colj \rangle = \begin{cases} 2\gamma & j = 0, n, 2n \\ 3\gamma & otherwise \end{cases}, \quad (۲۹-۴)$$

می باشد.

بصورت مثال ستون ۰ و ۱ دارای ویژه حالت های زیر می باشند.

$$|colj\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_j}} \sum_{a \in \text{column } j} |a\rangle,$$

$$|col0\rangle = |a_1\rangle$$

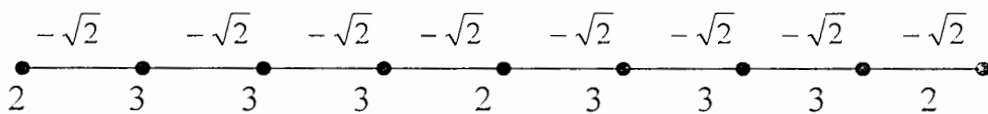
$$|col1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_2\rangle + |a_3\rangle)$$

$$\begin{aligned} \langle col0 | H | col1 \rangle &= \langle a_1 | H | \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2 + a_3) \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle a_1 | H | a_2 \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle a_1 | H | a_3 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\gamma - \gamma) \\ &= -\sqrt{2}\gamma \end{aligned}$$

$$\langle col0 | H | col0 \rangle = \langle a_1 | H | a_1 \rangle = 2\gamma$$

$$\begin{aligned} \langle col1 | H | col1 \rangle &= \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2 + a_3) | H | \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2 + a_3) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left[ \langle a_2 | H | a_2 \rangle + \langle a_2 | H | a_3 \rangle + \langle a_3 | H | a_2 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle a_3 | H | a_3 \rangle \right] = 3\gamma \end{aligned}$$

شکل (۲) (for  $n = 4$ ) بعنوان حرکت تصادفی کوانتومی بر روی خط با  $(2n+1)$  رأس می باشد.



شکل (۲)

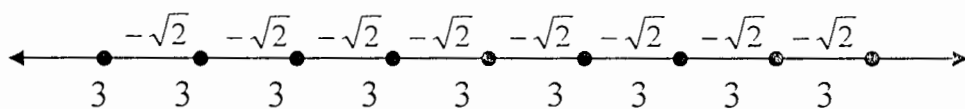
شکل بالا در واقع تبدیل حرکت روی گراف  $G_4$  به حرکت تصادفی کوانتومی بر روی خط که رئوس

مطابق با ستونها و بوسیله عناصر ماتریسی قطری  $\frac{H}{\gamma}$  برچسب گذاری شده است. در صورتیکه ضلعها

بوسیله عناصر ماتریسی  $H$  بین دو ستون مجاور نشان گذاری شده است.

شروع از رأس سمت چپ در شکل ۲، با احتمال مشخصی بعد از یک زمان متناسب با  $n$  به رأس سمت راست می رسیم.

حال در شکل (۳) انتشار کوانتومی بر روی خط بی نهایت با انتقال ثابت را مورد بررسی قرار می دهیم:



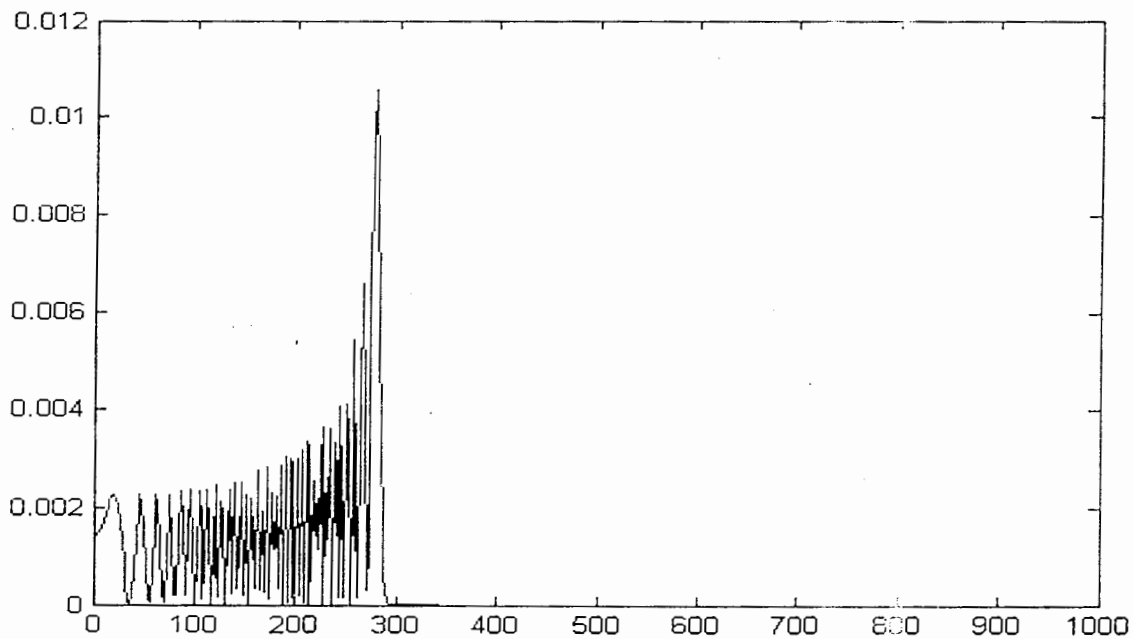
شکل (۳)

در اینجا دامنه احتمال حرکت از رأس  $l$  به رأس  $m$  را در زمان  $t$  [23] محاسبه می کنیم. که در رابطه زیر بیان می شود.

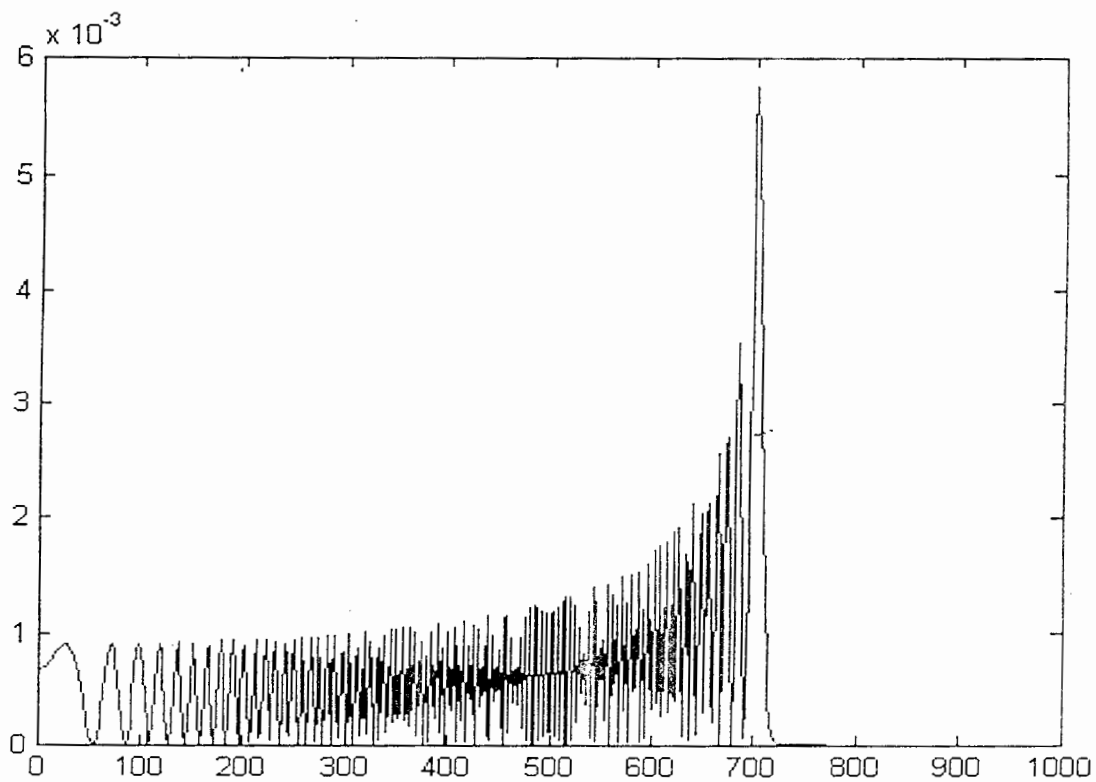
$$A(t) \langle m | e^{-iHt} | L \rangle = e^{-3i\gamma t} i^{m-l} J_{m-l}(2\sqrt{2}\gamma t) \quad (30-4)$$

تابع بسل  $J$  (نوع  $J$ ) از مرتبه  $m-l$  می باشد. که در رابطه بالا سرعت انتشار تابع بسل برابر  $2\sqrt{2}\gamma$

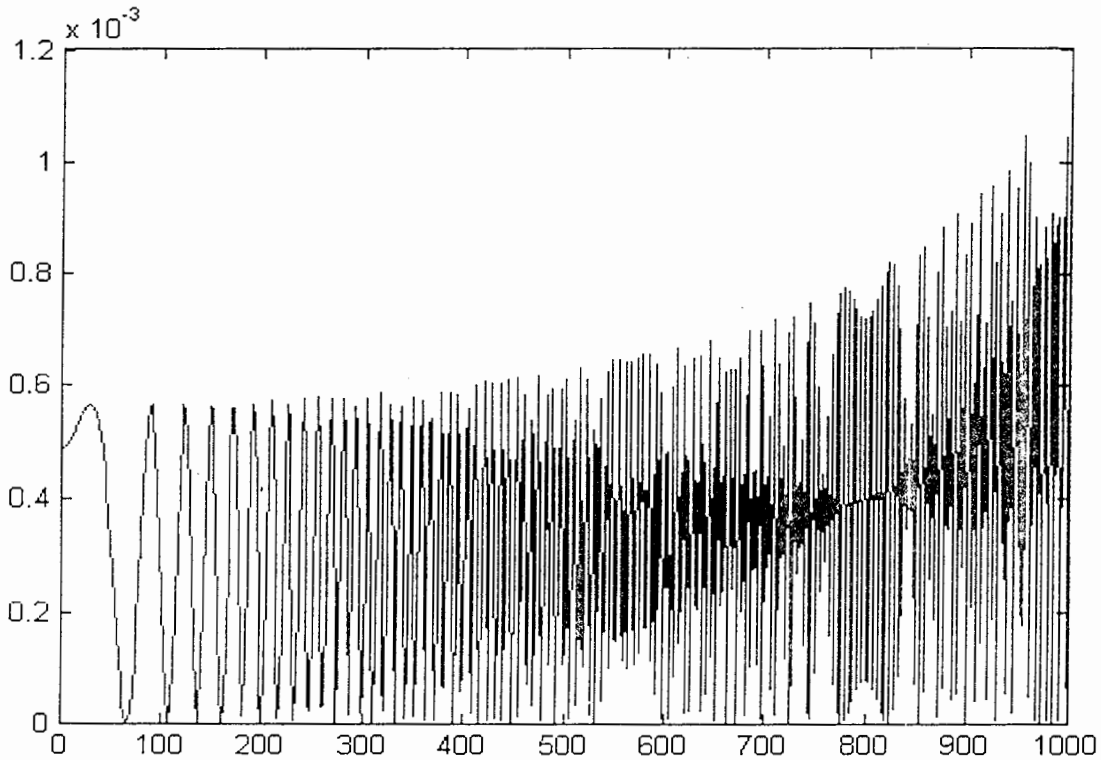
است. با دقت بیشتر می بینیم که برای هر  $\epsilon > 0$  و  $|m-l| \gg 1$  و برای  $|m-l| > \frac{1}{2\sqrt{2}\gamma} - \epsilon$



T=100



T=250



$T=400$

#### ۴-۴ توزیع حدی احتمال برای حرکت تصادفی کلاسیکی بر روی گراف:

در این قسمت، توزیع احتمال رئوس را بعد از یک زمان طولانی مورد بررسی قرار می دهیم. با تأکید بر این موضوع که، اگر چه زمانی ترکیبی ( زمان مشخصه برای رسیدن به توزیع حدی ) ممکن در نمونه کلاسیکی و کوانتومی مشابه باشد. ولی بعلاوه تفاوت در حرکت تصادفی کوانتومی و کلاسیکی باعث اختلاف اساسی در توزیع حدی می شود.

در نمونه کلاسیکی، توزیع حدی [24] بصورت زیر تعریف می شود.

$$\pi_b = \lim_{T \rightarrow \infty} P_b(T) \quad (۳۱-۴)$$

که توزیع حدی به حالت شروع وابسته می باشد. به آسانی دیده می شود. که توزیع حدی بر روی گراف  $G_n$  برای هر رأس بصورت متحدالشکل (یکنواخت) می باشد. ویژه حالت یکتایی از  $M$  با ویژه مقدار صفر تنها مؤلفه ای است که بعد از یک مدت طولانی در این توزیع باقی می ماند. همانطور که در قسمت ۴-۳-۱ دیدیم. تعداد رئوس گراف  $G_n$  برابر  $2^{n+1} + 2^n - 2$  می باشد

بنابراین توزیع حدی برای هر رأس  $b$  بصورت زیر می باشد.

که از تابع نمایی  $2^{-n}$  کوچکتر است.

$$\pi_b = (2^{n+1} + 2^n - 2)^{-1} \quad (۳۲-۴)$$

#### ۴-۵ توزیع حدی برای حرکت تصادفی کوانتومی بر روی گراف:

در نمونه کوانتومی، عملگر یکانی تحول زمانی از رسیدن به حالت مانا در گامها ممانعت می کند. بهر حال، یک تعریف معقول از توزیع حدی [24]، که وابسته بر روی حالت اولیه  $|a\rangle$  باشد. بدینگونه بیان می شود.

$$\chi_b = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\langle b | e^{-iHt} | a \rangle|^2 dt \quad (۳۳-۴)$$

این نتیجه توزیع از یک اندازه گیری در زمان منتخب یکنواخت در بازه  $[0, T]$  و در حد  $T$  های بزرگ می باشد.

حال بوسیله بسط ویژه حالت های انرژی  $|E_r\rangle$ ، تعریف توزیع حدی بصورت زیر تغییر می یابد.

$$\chi_b = \sum_{r,s} \langle b | E_r \rangle \langle E_r | a \rangle \langle a | E_s \rangle \langle E_s | b \rangle \quad (۳۴-۴)$$

$$\begin{aligned} & \times \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\langle b | e^{-i(E_r - E_s)t} | a \rangle|^2 dt \\ & = \sum_r |\langle a | E_r \rangle|^2 |\langle b | E_r \rangle|^2 \end{aligned} \quad (۳۵-۴)$$

(توجه کنیم که  $E_r \neq E_s$  برای  $r \neq s$  بر روی گراف  $G_n$  فرض شده است)

در حالت خاص، نمونه ای که  $|a\rangle = |col0\rangle$  مطابق با ریشه سمت چپ گراف و

$|b\rangle = |col2n\rangle$  مطابق با ریشه سمت راست گراف را مورد ملاحظه قرار میدهیم.

در این مورد، فضای هیلبرت تبدیل یافته بوسیله بسط ستونها، دارای تعداد  $2n+1$  ویژه حالت انرژی می باشد.

بوسیله تقارن در گراف داریم. (۳۶-۴)

$$|\langle col0 | E_r \rangle| = |\langle col2n | E_r \rangle|$$

حال با نامساوی شوارتز (Cauchy - Schwartz) داریم.

$$(\langle \psi | \psi \rangle \langle \phi | \phi \rangle \geq |\langle \psi | \phi \rangle|^2) \quad (۳۷-۴)$$

$$\sum_r |\langle col0 | E_r \rangle|^4 \sum_s |\langle col2n | E_s \rangle|^4 \geq (\sum_r |\langle col0 | E_r \rangle|^2)^2 = 1 \quad (۳۸-۴)$$

رابطه (۳۸-۴) نشان میدهد که

$$\sum_r |\langle col0 | E_r \rangle|^4 \geq \frac{1}{2n+1} \quad (۳۹-۴)$$

می باشد.

بنابراین توزیع حدی، احتمال رسیدن به ریشه راست، با شروع از ریشه چپ برابر

$$\chi_{col2n} \geq \frac{1}{2n+1} \quad (۴۰-۴)$$

می باشد. که خیلی بزرگتر از نمونه کلاسیکی است.



## بررسی کلی :

در نتیجه احتمال رسیدن به ریشه راست گراف در زمان  $t$  با شروع حرکت از ریشه چپ در زمان  $0$  در زمانهای طولانی (گامهای زیاد  $(T \rightarrow \infty)$ ) در حرکت تصادفی کوانتومی خیلی بیشتر از حرکت تصادفی کلاسیکی بر روی گراف می باشد. در نتیجه بوسیله حرکت تصادفی کوانتومی خیلی سریعتر می توان دو نقطه بین گراف را طی کرد یا مدت زمان حرکت بین دو ریشه گراف (سمت چپ و راست) در نمونه کوانتومی خیلی کمتر طول می کشد.

۱- حرکت تصادفی کوانتومی بر روی خط با ویژه حالت‌های اسپین در راستای  $Z$  باعث شده گامها بطول  $l$  و بصورت متقارن باشد. چرخش اسپین به اندازه زاویه  $\theta$  حول محور  $Z$  سب شده در حرکت تصادفی کوانتومی بر روی خط گامها به صورت متقارن نباشد. یعنی در راستا گامی به طول خیلی بزرگتر از  $l$  داشته باشیم، هر چند با احتمال کمی رخ میدهد.

۲- در حرکت تصادفی کلاسیکی بر روی خط بعد از  $T$  گام، واریانس بطور خطی با  $T$  متناسب است. ( $\delta^2 = T$ ) یعنی پهنای نمودار با  $T^{\frac{1}{2}}$  متناسب است. یعنی هر چه تعداد گامها بیشتر باشد نمودار توزیع احتمال نسبت به فاصله پهن تر می شود. عامل تداخل کوانتومی باعث اختلاف اساسی در حرکت تصادفی کوانتومی می شود. بخصوص در توزیع حدی دیگر مانند حرکت کلاسیکی بصورت گاوسی نخواهد بود و واریانس در حرکت تصادفی کوانتومی متناسب با  $T^2$  می باشد. یعنی  $\delta^2 = T^2$  پهنای نمودار با  $T$  متناسب است. نتیجه در حرکت تصادفی کوانتومی سرعت انتشار از یک مکان اولیه به مکان نهایی مجذور حرکت تصادفی کلاسیکی است.

۳- تابع توزیع احتمال حرکت تصادفی کوانتومی بر روی خط را در گامهای بالا با دو حالت اولیه متقارن و غیر متقارن بوسیله تجزیه فویه ای ماتریس هادامارد و استفاده از بسط مجانبی انتگرال به روش فازمانا را رسم کردیم. تابع توزیع احتمال مربوط به حالت اولیه متقارن ( حالت متقارن را بصورت ویژه حالت ماتریس  $\delta$  انتخاب می کنیم ) نیز بصورت متقارن و تابع توزیع احتمال مربوط به حالت اولیه غیر متقارن، بصورت غیر متقارن می باشد.

۴- حرکت تصادفی کوانتومی با یک دیواره جاذب و به روش ویژه تابع مورد بررسی قرار دادیم. در حرکت تصادفی کوانتومی با یک دیواره جاذب در  $n = M$  ( $M > 0$ ) بز خلاف حرکت تصادفی کلاسیکی احتمال جذب برابر ۱ نخواهد شد، و احتمال فرار از دیواره ی  $M$  ( $\Lambda_M$ ) طبق محاسبات وجود دارد.

- 
- [1] . Y. A haronov, L. Davidovich, and N. Zagury. Quantum random walk. Phys. Rev. A, 48(2):1687 – 1690, 1993.
- [2] J. Kempe. Quantum random walks-an in troductory over view quant-ph/0303081 – 2003.
- [3] M.A. Nielsen and I.L. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
- [4] R. P. Feynman and A.R. Hibbs. Quantum mechanics and path integrals. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [5] Andris Ambainis. Quantum walks and their algorithmic application quant-ph /0403120-2004.
- [6] D. Meyer. from quantum cellular automata to quantum lattice gases, quant-ph/9604003.
- [7] D. Bouwmeester, I.Marzoli, G.P. Karman, W. Schleich, and j.p. Woerdman. Optical galton board. Phys. Rev. A, 61:013410 1 9, 1999.
- [8] A. Nayak and A. Vishwanath, Quantum walk on the line, quant-ph/0010117.
- [9] H. Dym and H. P. Mckean. Fourier Series and Integrals, volume 14 of Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, New York, 1972.
- [10] Carl M. Bender and Steven A. Orszag. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1978.
- [11] Norman Bleistein and Richard A. Handelsman. Asymptotic Expansions of Integrals. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975.
- [12] Ashwin Nayak and Ashvin Vishwanath. In preparation, October 2000.

- [13] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous. One-dimensional quantum walks. In proc. 33th STOC, pages 60-69, New York, NY, 2001. ACM.
- [14] E. Bach, S. Coppersmith, M. Goldschen, R. Joynt, and J. Watrous. One-dimensional quantum walks with absorbing boundaries, 2002. Lanl-archive quant-ph/0207008. -(7 June 2005 )
- [15] j.j.sakurai. Modern quantum mechanics.
- [16] C. Moore and A. Russell. Quantum walks on the hy-percube. In J.D.P. Rolim and S. Vadhan, editors, Proc. RANDOM 2006, pages 164-178, Cambridge, MA, 2002. Springer.
- [17] J. Kampe. Quantum random walks hit exponentially faster, 2002. lanl-arXiv quant-ph/0205083.
- [18] T.D. Mackay, S.D. Bartlett, L.T. Stephenson, and B.C. Sanders. Quantum walks in higher dimensions. J. Phys. A: Math. Gen, 35:2745, 2002.
- [19] C. Tamon. Non-uniform mixing in continuous quantum walks, 2002. Lanl-arXiv quant-ph/0209106.
- [20] The name of the coin 'DFT' comes from 'Discrete Fourier Transform'
- [21] E. Farhi and S. Gutmann. Quantum computation and decision trees. Phys. Rev. A, 58:915-928, 1998.
- [22] A. Childs, E. Farhi, and S. Gutmann. An example of the difference between quantum and classical random walks. Quantum Information Processing, 1:35, 2002. lanl-report Quant-ph/0103020.
- [23] E. Farhi and S. Gutmann, The functional integral constructed directly from the Hamiltonian, Ann. Phys. 213, 182 (1992).