



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

فیزیک ذرات بنیادی

عنوان:

بررسی خواص الکترومغناطیسی کوارکهای نسبیتی در پتانسیل
برای محاسبه فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی نوکلئونها
 $ax^2 + bx - \frac{c}{x}$

ارائه دهنده:

مجید حمزوی

استاد راهنما:

دکتر علی اکبر رجبی

پاییز ۱۳۸۵

تقدیر و تشکر

در طول این مسیر پر از رنج و محنت این رنج پدر و مهربانی مادر بود که در هر لحظه دمی تازه در جانم می فشاند ، و مهربان بردارم که همواره مرا به ادامه تحصیل تشویق می نمود ، زیباترین ، خالصانه ترین ، پرشکوه ترین و گرم ترین درود و سپاسم را به این عزیزان روانه می دارم .

یاد مهربان استادم را تا ابد در ذهنم زنده نگه خواهم داشت که هر دم از محنت طی این مسیر آزرده می گشتم این او بود که آرامم می نمود . زیباترین درود و سپاس از آن استاد گرامیم آقای دکتر حسین موحدیان .

اما او که تا ابد معلم من خواهد ماند ، او که راهنمایم در این سلوک علمیم بود بی منت هر آنچه را که می دانست در ذهن تهی گشته از علم من می ریخت ، خالصانه ترین درود و سپاس را بر پیشگاهت آورده ام آقای دکتر علی اکبر رجیبی .

همچنین معلمان و دوستانی که در راه رسیدن به این مهم مرا یاری نمودند ، از این یاورانم نیز صمیمانه سپاسگزارم و پرشکوه ترین درودم را از آن اینان می خواهم :

آقای محمدرضا شجاعی، آقای حسن حسن آبادی، مجید امیرفخریان، مهدی پورمحمدی.

و درود می فرستم بر همه آنان که ذهن ناتوانم یارای به خاطر آوردن محبت هایشان را ندارد .

چکیده :

بشر در طول تاریخ همواره به دنبال جواب این پرسش بوده است که مواد از چه تشکیل یافته اند و ساختار داخلی آنها چیست ؟ او برای تشخیص ساختار داخلی ماده از راههای گوناگون استفاده نموده است . در گذشته روشهای شیمیایی متداول ترین راه برای رسیدن به این مهم بوده است که مسلماً در خود ماده تأثیر گذار بوده تا آنجا که ممکن بود ماده را از بین ببرد . یکی از روشهایی که امروزه استفاده می شود بمباران ماده (هدف) توسط ذراتی سبک با انرژی بالا (مثل الکترونها) و بررسی ذرات فرودی پس از برخورد با هدف (ذرات پراکنده شده) می باشد تا به ساختار داخلی ماده پی ببرند . در این پایان نامه ما نیز از این روش برای شناسایی ساختار داخلی پروتون استفاده نموده ایم . در نتیجه ؛

- در فصل اول نظریه پراکندگی و روابط مربوطه را یادآوری نمودیم .
- در فصل دوم نتایج حاصل از پراکندگی را در شکل فرم فاکتورها شرح داده ایم و ارتباط آنها را با تابع موج هدف بدست آوردیم .
- سرانجام در فصل سوم تابع موج پروتون (پروتون بعنوان یک هدف) را در پتانسیل $ar^2 + br - \frac{c}{r}$ بدست آورده و از آنجا نیز فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون را محاسبه نموده ایم . همچنین در این حالت خاص ، شعاع باری و گشتاور مغناطیسی پروتون را با توجه به فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی به ترتیب $\langle r_p^2 \rangle^{1/2} = 0.897 \text{ fm}$ و $\mu_p = 3.089 \text{ nm}$ بدست آوردیم که در مقایسه با مقادیر تجربی آنها یعنی $\langle r_p^2 \rangle^{1/2} = 0.88 \text{ fm}$ و $\mu_p = 2.79 \text{ nm}$ نتایج بسیار خوبی می باشند .

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
أ	چکیده
ب	فهرست مطالب
ه	فهرست شکل ها
ز	فهرست جداول
۱	فصل اول (پراکندگی)
۲	۱-۱- پاد ذرات
۲	۱-۱-۱- مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی
۴	۱-۱-۲- لورنتس کورینس و نگارش چاربرداری
۶	۱-۱-۳- معادله کلاین -گوردن
۸	۱-۱-۴- تاریخچه
۱۰	۱-۱-۵- تفسیر فاینمن-استاکلبرگ برای جوابهای $E < 0$
۱۳	۱-۱-۶- تئوری اختلال غیر نسبیتی
۱۷	۱-۱-۷- قوانین فاینمن
۲۰	۲-۱- الکترودینامیک ذرات بدون اسپین
۲۰	۱-۲-۱- یک الکترون در یک میدان الکترومغناطیسی A^μ
۲۲	۲-۲-۱- پراکندگی الکترون-میون بدون اسپین
۲۶	۳-۲-۱- سطح مقطع در جملاتی از دامنه اینورینت \mathcal{A}
۳۰	۴-۲-۱- سرعت واپاشی در جملاتی از \mathcal{A}
۳۰	۵-۲-۱- پراکندگی الکترون-الکترون بدون اسپین

- ۳۱ ۶-۲-۱- پراکندگی الکترون-پوزیترون : یک کاربرد از تعویض
- ۳۳ ۷-۲-۱- متغیرهای ناوردا
- ۳۶ ۸-۲-۱- منشأ انتشارگر
- ۳۷ ۳-۱- معادله دیراک
- ۳۸ ۱-۳-۱- شکل هم وردای معادله دیراک ، ماتریسهای γ -دیراکی
- ۳۹ ۲-۳-۱- پایستگی جریان و معادله پیوستگی
- ۴۰ ۳-۳-۱- اسپینورهای ذره آزاد
- ۴۴ ۴-۳-۱- یادذرات
- ۴۷ ۵-۳-۱- نرمالیزاسیون اسپینورها و روابط مکملی
- ۴۸ ۶-۳-۱- **Bilinear Covariants**
- ۵۰ ۷-۳-۱- فرمیونهای جرم-صفر : نوترینوی دو جزئی
- ۵۲ ۴-۱- الکترودینامیک ذرات اسپین $\frac{1}{2}$
- ۵۲ ۱-۴-۱- الکترون برهم کنش کننده با میدان الکترومغناطیسی A^μ
- ۵۴ ۲-۴-۱- پراکندگی مولر $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$
- ۵۷ ۳-۴-۱- پراکندگی $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$
- ۵۹ ۴-۴-۱- قضایای تریس و خواص ماتریسهای γ
- ۶۰ ۵-۴-۱- پراکندگی $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ و $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$
- ۶۲ ۶-۴-۱- $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ در مقیاس آزمایشگاهی
- ۶۷ فصل دوم (فرم فاکتورها)
- ۶۸ ۱-۲- فرم فاکتور اتمی (پراکندگی الکترون از روی بار استاتیکی)
- ۷۲ ۲-۲- فرم فاکتور هسته ای (الکتریکی)

۷۴	۳-۲- فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون
۸۰	فصل سوم (فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون)
۸۱	۳-۱- مقدمه
۸۱	۳-۲- معرفی پتانسیل پیشنهادی
۸۲	۳-۳- حل معادله دیراک با پتانسیل پیشنهادی
۸۶	۳-۳-۱- محاسبه $\frac{g_A}{g_V}$
۸۹	۳-۴- محاسبه تابع موج پروتون با استفاده از معادله دیراک برای سیستم سه ذره ای
۹۳	۳-۵- محاسبه فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون
۹۸	۳-۶- نتیجه گیری
۹۹	۳-۷- پیشنهادات
۱۰۰	منابع

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱ طیف سطوح انرژی الکترون ۸
- شکل ۲-۱ مرتبه های زمانی متفاوت پراکندگی دوگانه یک الکترون ۱۱
- شکل ۳-۱ پراکندگی پوزیترون توسط یک پتانسیل ۱۲
- شکل ۴-۱ اجزای اولین و دومین مرتبه از گذار $i \rightarrow f$ ۱۷
- شکل ۵-۱ پراکندگی e^- ۱۸
- شکل ۶-۱ پراکندگی e^+ ۱۹
- شکل ۷-۱ برهمکنش یک الکترون بدون اسپین با A^{μ} ۲۱
- شکل ۸-۱ پراکندگی الکترون-میون ۲۳
- شکل ۹-۱ عامل رأس و انتشارگر برای پراکندگی الکترون-میون بدون اسپین ۲۵
- شکل ۱۰-۱ دو نمودار فاینمن (پایین ترین مرتبه) برای پراکندگی الکترون-الکترون ۳۱
- شکل ۱۱-۱ دو نمودار فاینمن پراکندگی $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ بدون اسپین ۳۲
- شکل ۱۲-۱ تعویض ذرات A و B ۳۳
- شکل ۱۳-۱ طرح مندل استام ۳۴
- شکل ۱۴-۱ سطح مقطع دیفرانسیلی، $d\sigma/d\Omega$ ، برای پراکندگی الکترون-الکترون ۳۵
- شکل ۱۵-۱ نمودار نابودی $e^-e^- \rightarrow \gamma \rightarrow e^-e^-$ ۳۶
- شکل ۱۶-۱ عوامل رأس برای قوانین فاینمن ۵۳
- شکل ۱۷-۱ نمودار فاینمن برای $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ ۵۴
- شکل ۱۸-۱ نمودار دوم برای $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ ۵۵
- شکل ۱۹-۱ نمودار فاینمن برای پراکندگی الکترون-میون ۵۸

- شکل ۲۰-۱ نمودار فاینمن برای $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ۶۱
- شکل ۲۱-۱ سطح مقطع کل برای $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ۶۲
- شکل ۲۲-۱ فرآیند $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ در مقیاس آزمایشگاهی ۶۳
- شکل ۱-۲ پایین ترین مرتبه پراکندگی کشسان الکترون-پروتون ۷۵
- شکل ۲-۲ مقیاس بریت یا دیوار سخت ، $\bar{p}' = -\bar{p}$ ۷۷
- شکل ۳-۲ فرم فاکتور های پروتون بعنوان تابعی از q^2 ۷۸
- شکل ۱-۳ تغییرات G_E بر حسب q^2 ۹۷

فهرست جداول

- جدول ۱ رفتار مقادیر Bilinear تحت انتقالات مناسب لورنتس ۴۱
- جدول ۲ قوانین فاینمن برای $i\mathcal{L}$ ۶۶
- جدول ۳ مقایسه شعاع باری و گشتاور مغناطیسی پروتون در پتانسیلهای مختلف با مقادیر
تجربی ۹۸

فصل اول

پراکندگی

پاد ذرات

الکترو دینامیک ذرات بدون اسپین

معادله دیراک

الکترو دینامیک ذرات اسپین $\frac{1}{2}$

۱-۱-۱ پاد ذرات :

مقدمه:

تئوری الکترو دینامیک کوانتومی (QED) توصیف کننده برهم کنش الکترومغناطیسی کوارک ها و لپتون ها می باشد. بعضی از فرآیندهای QED مورد علاقه فیزیکدانان انرژی بالا عبارتند از: $eq \rightarrow eq$ ، $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ، $\gamma q \rightarrow (e^+e^-)q$ و غیره، که q معرف یک کوارک می باشد. در انرژیهای بالا به بررسی ساختار داخلی نوکلئون می پردازیم که با یک مسئله نسبیتی مواجه هستیم. در آزمایشات انجام شده از باریکه های نسبیتی (انرژیهای بالا) استفاده می شود، بنابراین هر تقریب غیر نسبیتی کنار گذاشته می شود، در این انرژیها پاد ذرات نیز وارد می شوند. مسئله به آن سختی که به نظر می رسد نیست؛ تئوری اختلال ما را حمایت خواهد کرد. برای انجام این کار جوابهای توابع موج تک ذره برای لپتون ها (یا کوارک ها) آزاد بدست می آوریم و سپس پراکندگی یک ذره توسط دیگری بوسیله رفتار برهمکنش بعنوان یک اختلال را مطالعه می کنیم [1,2].

۱-۱-۱ مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی

با یادآوری دستورالعمل بدست آوردن معادله شرودینگر^۱ برای یک ذره آزاد با جرم m با جانشینی در رابطه تکانه-انرژی کلاسیکی شروع می کنیم؛

^۱ Schrödinger

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (1-1)$$

و اپراتورهای دیفرانسیلی ؛

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \quad (2-1)$$

معادله اپراتوری با عمل روی تابع موج (مختلط) $\psi(\vec{x}, t)$ بدست می آید ؛ (با $\hbar \equiv c \equiv 1$) ؛

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 \psi = 0 \quad (3-1)$$

که تفسیر می کنیم ؛

$$\rho = |\psi|^2 \quad (4-1)$$

بعنوان چگالی احتمال ($|\psi|^2 d^3x$) احتمال پیدا کردن ذره در المان حجم d^3x را می دهد . ما اغلب نگران حرکت ذرات هستیم . بنابراین لازم است که قادر باشیم چگالی جریان باریکه ای از ذرات را محاسبه کنیم ، \vec{j} . از پایداری احتمال ، آنگاه کاهش تعداد ذرات در حجم داده شده با جریان کل ذرات خروجی از حجم برابر است . یعنی ؛

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV \quad (5-1)$$

که تساوی آخر از قضیه گاوس² است و \vec{n} بردار یکه در امتداد dS بیرون از سطح S که حجم V را احاطه کرده می باشد . بنابراین چگالیهای احتمال و جریان توسط معادله پیوستگی مرتبط می شوند ؛

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (6-1)$$

برای تعیین کردن جریان ، معادله موج را در $-i\psi^*$ و سپس مختلط معادله موج را در $-i\psi$ ضرب می کنیم و با کم کردن این دو معادله بدست خواهیم آورد ؛

² Gauss

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{i}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) = 0 \quad (7-1)$$

با مقایسه این معادله و (۶-۱) چگالی جریان را بصورت زیر مشخص می کنیم ؛

$$\vec{j} = -\frac{i}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \quad (8-1)$$

برای مثال ، یک جواب (۳-۱) ؛

$$\psi = N e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt} \quad (9-1)$$

که یک ذره آزاد با انرژی E و تکانه \vec{p} را توصیف می کند [1,2,5]. خواهیم داشت ؛

$$\begin{aligned} \rho &= |N|^2 \\ \vec{j} &= \frac{\vec{p}}{m} |N|^2 \end{aligned} \quad (10-1)$$

۱-۲-۱ هم وردایی لورنتس و نگارش چار برداری

یک اصل فیزیک مدرن اینست که قوانین اساسی شکل یکسانی در همه چارچوبهای لورنتس^۳ دارند؛ یعنی در چارچوب مرجع که سرعت نسبی یکسان دارند . در این حالت گفته می شود معادلات اساسی لورنتس هم وردا می باشند .

یادآوری می کنیم که نظریه نسبیت خاص بر این قضیه پایه گذاری شده است که سرعت نور ، c ، در همه چارچوبهای لورنتس یکسان است . تبدیل لورنتس مختصات در دو چنین مقیاسی را به هم مرتبط می سازد . به کمک تعریف ، هر مجموعه از چهار کمیت (ct, \vec{x}) که تحت تبدیلات لورنتس تبدیل می یابند یک چاربردار نامیده می شود . از نگارش زیر استفاده می کنیم ؛

$$(ct, \vec{x}) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^\mu \quad (11-1)$$

بر طبق نظریه نسبیت خاص انرژی کل E و تکانه \vec{p} یک سیستم منزوی همانند اجزای یک چاربردار تبدیل می یابند ؛

$$\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) = p^\mu \quad (12-1)$$

³ Lorentz

با پایه $(E^2/c^2) - \bar{p}^2$. ساده ترین سیستم یک ذره آزاد است ، که ؛

$$\frac{E^2}{c^2} - \bar{p}^2 = m^2 c^2 \quad (13-1)$$

که m جرم سکون ذره است .

دقیقاً شبیه فضای سه بعدی ، ضرب اسکالر دو چار بردار $A^\mu \equiv (A^0, \bar{A})$ و $B \equiv (B^0, \bar{B})$ را

معرفی می کنیم ؛

$$A \cdot B \equiv A^0 B^0 - \bar{A} \cdot \bar{B} \quad (14-1)$$

که تحت تبدیلات لورنتس ناورد است . شکل جدیدی از چار بردار را معرفی کنیم ،

$$A_\mu \equiv (A^0, -\bar{A})$$

، بطوریکه ضرب اسکالر بصورت زیر می شود ؛

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu \quad (15-1)$$

که در اینجا تانسور (متریک) $g_{\mu\nu}$ را معرفی کرده ایم ، که بصورت زیر تعریف می شود ؛

$$g_{00} = 1 , \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \quad \text{دیگر عناصر} = 0 \quad (16-1)$$

و بطور مشابه برای $g^{\mu\nu}$. جمع روی اندیسهای تکراری در (15-1) مستلزم می باشد . بردارهای

اندیس بالا (پایین) بردارهای پادوردا (هم وردا) نامیده می شوند . قانون برای تشکیل ناوردایی

لورنتس ایجاب می کند که اندیسهای بالا و پایین متعادل شوند . و داریم ؛

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4 \quad (17-1)$$

مثالهایی از ضرب اسکالر بصورت زیر هستند ؛

$$p^\mu x_\mu \equiv p \cdot x = Et - \bar{p} \cdot \bar{x} \quad (18-1)$$

$$p^\mu p_\mu \equiv p \cdot p = p^2 = E^2 - \bar{p}^2$$

برای یک ذره آزاد داریم $p^2 = m^2$.

توجه کنید که قسمت فضا گونه A^μ و A_μ به ترتیب \bar{A} و $-\bar{A}$ هستند . مشتقات جزئی بصورت

زیر نمایش داده می شوند ؛

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (19-1)$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

که می توانند توسط تبدیلی شبیه $x^\mu = (t, \vec{x})$ و $x_\mu = (t, -\vec{x})$ به ترتیب نشان داده شوند. بنابراین شکل مناسب برای (۲-۱) بصورت زیر است:

$$p^\mu \rightarrow i\partial^\mu \quad (20-1)$$

از ∂_μ و ∂^μ اپراتور دالامیرین را بصورت زیر تشکیل دهیم:

$$\square^\mu \equiv \partial_\mu \partial^\mu \quad (21-1)$$

۱-۱-۳- معادله کلاین-گوردن^۴

معادله (۳-۱) تحت تبدیلات لورنتس ناوردانمی باشد. در حالت نسبیتی از رابطه تکانه-انرژی نسبیتی، (۱۳-۱)، شروع می کنیم:

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2$$

و با جایگذاری روابط اپراتوری (۲-۱)، بدست می آوریم:

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = m^2 \phi \quad (22-1)$$

(۲۲-۱) معادله کلاین-گوردن نامیده می شود (اما بطور صحیح تر معادله نسبیتی شرودینگر می تواند نامیده شود). با ضرب معادله کلاین-گوردن در $-i\phi^*$ و معادله همیوغ مختلط در $-i\phi$ و با کم کردن از هم، رابطه نسبیتی نظیر (۷-۱) را بدست می آوریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[i(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t}) - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right] + \vec{\nabla} \cdot [-i(\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^*)] = 0 \quad (23-1)$$

در مقایسه با (۶-۱)، چگالیهای احتمال و جریان در براکتها مشخص می شوند. برای مثال، برای یک ذره آزاد با انرژی E و تکانه \vec{p} که توسط معادله کلاین-گوردن توصیف می شود داریم:

^۴ Klein-Gordon

$$\phi = Ne^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt} \quad (24-1)$$

از (23-1) در می یابیم ؛

$$\begin{aligned} \rho &= i(-2iE)|N|^2 = 2E|N|^2 \\ \vec{j} &= -i(2i\vec{p})|N|^2 = 2\vec{p}|N|^2 \end{aligned} \quad (25-1)$$

می بینیم که چگالی احتمال متناسب با E ، انرژی نسبی ذره است. با استفاده از اپراتور دالامبرین، (21-1)، معادله کلاین-گوردن به فرم زیر تبدیل می شود ؛

$$(\square^2 + m^2)\phi = 0 \quad (26-1)$$

و بیشتر، چگالیهای احتمال و جریان تشکیل یک چار بردار می دهند ؛

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (27-1)$$

که در رابطه پیوستگی صدق می کند ؛

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (28-1)$$

با در نظر گرفتن جواب ذره آزاد بصورت زیر ؛

$$\phi = Ne^{ip \cdot x} \quad (29-1)$$

خواهیم داشت ؛

$$j^\mu = 2p^\mu |N|^2 \quad (30-1)$$

متذکر می شویم که چگالی احتمال ρ جزء زمان گونه چار بردار فوق است که با E متناسب است [1,2,4,5].

اما ویژه مقادیر انرژی معادله کلاین-گوردن چه هستند ؟ جایگذاری (29-1) در (26-1) بدست می دهد ؛

$$E = \pm(\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \quad (31-1)$$

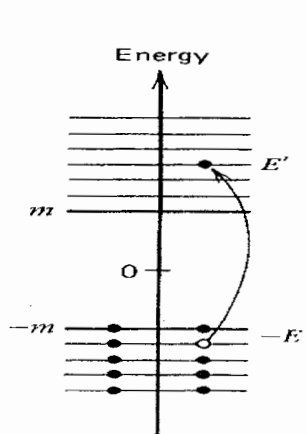
بنابراین ، علاوه بر جواب قابل قبول $E > 0$ ، جوابهای انرژی منفی داریم . این در ابتدا یک مشکل کلی به نظر می رسد ، زیرا گذارها می توانند انرژی های کمتر و کمتر (منفی تر) را ظاهر کنند . مشکل دوم اینست که جوابهای $E < 0$ با یک چگالی احتمال منفی از (۱-۲۵) متحد می شوند . بطور خلاصه ، مشکلات بصورت زیر هستند ؛

جوابهای $E < 0$ با $\rho < 0$

واضح است که این مشکل به آسانی قابل چشم پوشی نیست . نمی توانیم به آسانی جوابهای انرژی منفی را هنگامی که با یک سری کامل از حالتها کار می کنیم کنار بگذاریم ، و این مجموعه حتماً حالتهای ناخواسته را شامل می شوند .

۱-۱-۴- تاریخچه

در ۱۹۲۷ ، در تلاشی برای حل مشکلات کلاین-گوردن ، دیراک^۵ یک تابع موج نسبیتی خطی از $\bar{\psi}$ و $\frac{\partial}{\partial t}$ را تدبیر نمود . او در توضیح مشکل چگالی احتمال منفی موفق بود ، و همچنین توانست تابع موج ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ را توصیف کند . اگرچه جوابهای $E < 0$ هنوز هم ظاهر می شدند ، بطوریکه در شکل ۱-۱ طیف انرژی برای یک الکترون آزاد با انرژی نسبیتی دیده می شود ؛



شکل ۱-۱ طیف سطوح انرژی الکترون . تصویر دیراک از خلأ همه حالتهای اشغال شده انرژی منفی را دارد . دو حالت در هر سطح را برای محاسبه دو حالت اسپینی الکترون نشان می دهیم .

⁵ Dirac

دیراک جوابهای انرژی منفی را توسط اصل انحصار کنار گذاشت. او فرض نمود که همه حالت‌های انرژی منفی اشغال شده هستند و خلأ را بعنوان یک دریای بی نهایت از الکترونهای $E < 0$ بشمار آورد. اکنون الکترونهای با انرژی مثبت نمی توانند به سطوح انرژی پایین تر (منفی) فرو بریزند، همانطوریکه این امر توسط اصل انحصار جلوگیری شده است. اگرچه شخص می تواند در دریا توسط برانگیختگی یک الکترون از حالت انرژی منفی ($-E$) به حالت انرژی مثبت (E') یک حفره بوجود آورد، همان طوری که در شکل ۱-۱ نشان داده شده است. عدم حضور یک الکترون با بار $-e$ و انرژی $-E$ بعنوان حضور یک ذره (یک پوزیترون) با بار $+e$ و انرژی $+E$ تفسیر می شود. بنابراین اثر خالص این برانگیختگی تولید یک جفت ذره می باشد [3,4,8,9]؛

$$e^-(E') + e^+(E), \quad (۳۲-۱)$$

که بوضوح به انرژی $E + E' \geq 2m$ نیاز دارد. تا ۱۹۳۴، فرض می شد که معادله کلاین-گوردن تنها معادله موج نسبیتی قابل قبول باشد. در ۱۹۳۴ پاولی^۶ و ویسکف^۷ معادله کلاین-گوردن را بوسیله گذاشتن بار $-e$ در j^μ و تفسیر آن بعنوان چگالی جریان بار الکترون جان تازه ای به آن بخشیدند؛

$$j^\mu = -ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (۳۳-۱)$$

اکنون، $\rho = j^0$ چگالی بار را نشان می دهد، نه چگالی احتمال بنابراین این حقیقت که می تواند منفی باشد زیاد مورد ایراد نیست. بعبارت دیگر، جوابهای $E < 0$ بعنوان جوابهای $E > 0$ با بار مخالف محسوب می شوند. بر خلاف "تئوری حفره" این تفسیر برای بوزونها به خوبی فرمیونها کاربردی است. برای توسعه نظریه پاد ذره و معرفی نمودارهای فاینمن، در ابتدا مفید است که از اثرات اسپین الکترونها صرف نظر کنیم. بنابراین برای بدست آوردن قوانین فاینمن از الکترونهای "بدون اسپین" و استفاده از آنها برای محاسبه دامنه ها و سطوح مقطع پراکندگی برای ذرات برهم

^۶ Pauli
^۷ Wesskopf

کنش کننده شروع می کنیم . هنگامی که اینها را انجام دادیم به معادله دیراک و قوانین فاینمن برای مورد واقعی فیزیکی برهمکنش های الکترومغناطیسی الکترونها ی اسپین $\frac{1}{2}$ برمی گردیم .

۱-۱-۵- تفسیر فاینمن^۸-استاکلبرگ^۹ برای جوابهای $E < 0$

دستوری که ما برای لمس حالت های انرژی منفی بکار می بریم توسط استاکلبرگ (۱۹۴۱) و فاینمن (۱۹۴۸) پیشنهاد شده بود . در آسانترین بیان ، جواب انرژی منفی ، یک ذره را توصیف می کند که نسبت به زمان در خلاف جهت حرکت می کند یا معادلاً ، یک ذره با انرژی مثبت به سمت جلو حرکت می کند . تسلط یافتن بر این نظریه سخت است و سعی می کنیم آنرا در روش زیر باورکردنی سازیم :

یک الکترون با انرژی E ، بردار تکانه \vec{p} ، و بار $-e$ را در نظر بگیرید . از (۱-۲۵) و (۱-۲۹) می دانیم که جریان چاربرداری بصورت زیر است ؛

$$j^\mu(e^-) = -2e|N|^2(E, \vec{p}) \quad (۱-۳۴)$$

حال یک پاد ذره را در نظر بگیرید ، یک پوزیترون ، با همان E و \vec{p} . از آنجاییکه بار $+e$ است ؛

$$\begin{aligned} j^\mu(e^+) &= +2e|N|^2(E, \vec{p}) \\ &= -2e|N|^2(-E, -\vec{p}) \end{aligned} \quad (۱-۳۵)$$

که دقیقاً شبیه جریان j^μ یک الکترون با $-E$ و $-\vec{p}$ است [1,2,7] . بنابراین از آنجا سیستم دارای اهمیت می شود که نشر یک پوزیترون با انرژی E همانند جذب یک الکترون با انرژی $-E$ است . بطور مصور داریم :

$$\begin{array}{c} \uparrow e^+ \\ E > 0 \end{array} \equiv \begin{array}{c} \downarrow e^- \\ (-E) < 0 \end{array}$$

\uparrow time

(۱-۳۶)

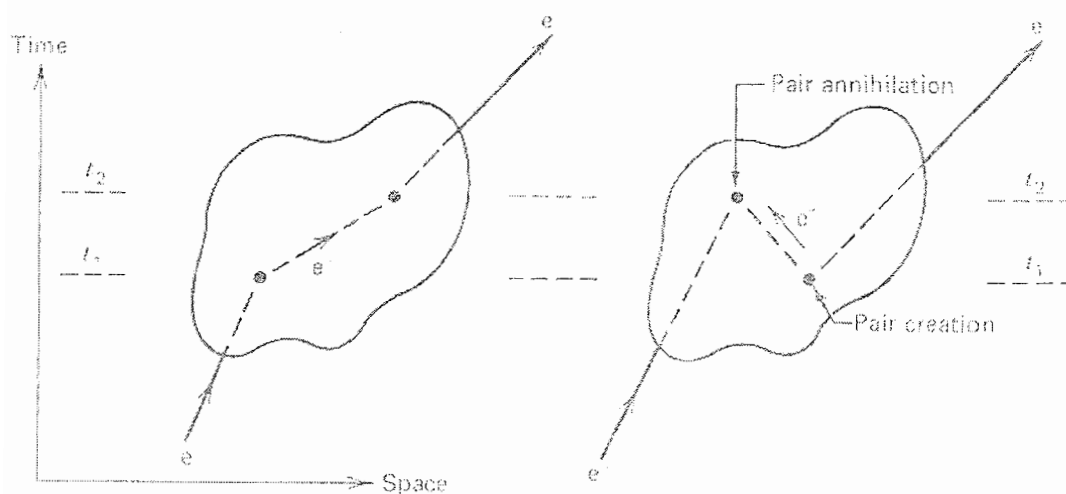
⁸ Feynman

⁹ Stueckelberg

بعبارت دیگر ، جوابهای انرژی منفی ذره که نسبت به زمان در خلاف جهت حرکت می کند ، جوابهای انرژی مثبت پاد ذره را که نسبت به زمان به سمت جلو حرکت می کند را توصیف می کنند . البته ، دلیل اینکه چرا چنین تعریفی ممکن است بوجود آید آسان است ، زیرا:

$$e^{-i(-E)(-t)} = e^{-iEt} \quad (37-1)$$

فرمالیسم تابع موج تک ذره (e^-) نه فقط با پاد ذرات سروکار دارد ، بلکه می تواند جوابهای ذرات زیاد را نیز توصیف کند . بعنوان یک مثال ، پراکندگی دوگانه الکترون در یک پتانسیل را بررسی می کنیم . این برهم کنش را در نمودار فضا-زمان (فاینمن) در شکل ۲-۱ رسم می کنیم .



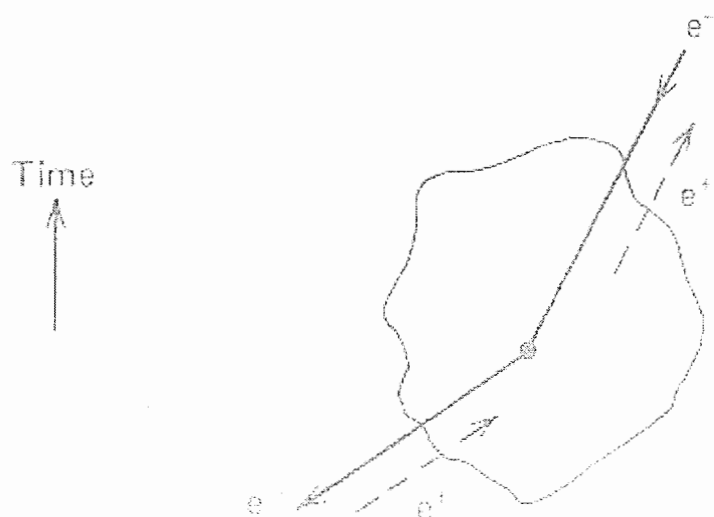
شکل ۲-۱ مرتبه های زمانی متفاوت پراکندگی دوگانه یک الکترون

مشاهده دقیق آنست که دو تصویر مشابه با مشاهده یکسان وجود دارد . دو مرتبه زمانی متفاوت برهم کنش کننده با پتانسیل وجود دارد که منجر به حوادث قابل مشاهده یکسان می شود . در عوض توجه کنید که مسیر (قابل مشاهده) الکترون ، قبل و بعد از پراکندگی دوگانه در نمودار یکسان است . تصویر دوم فقط در نتیجه تفسیر پاد ذرات ممکن است . در زمان t_2 ، الکترون به سمت عقب در زمان پراکنده می شود (با $E < 0$) . این الکترون بعنوان یک پوزیترون (با $E > 0$)

که نسبت به زمان به سمت جلو حرکت می کند تفسیر می شود. پس حوادث در نمودار می تواند به طریق زیر مشاهده شود:

ابتدا، در زمان t_1 ، یک جفت e^-e^+ آفریده (خلق) می شود، سپس، در یک زمان دیگر t_2 ، e^- بوسیله تصادم با e^+ نابود می شود. بنابراین، بین t_1 و t_2 ، مسیر رسم شده الکترون در نمودار دوم بطور واقعی سه ذره را توصیف می کند؛ الکترونهاى اولیه و نهایی و یک پوزیترون. همانگونه که هر دو پراکندگی دوگانه منجر به الکترون نهایی مشاهده شده یکسان می شوند، هر دوی آنها مجبورند در محاسبه احتمال این حوادث شامل شوند. توجه کنید که، همان طوری که در نظریه حفره خلأ تبدیل به محیط پیچیده می شود، تولید و نابودی جفتهای e^-e^+ در نتیجه تفسیر پاد ذرات در داخل آن می باشد.

همه فرآیندهای ممکن می توانند با تفسیر تابع موج تک ذره توصیف شوند؛ حالت های پاد ذره (e^+) هرگز مورد استفاده قرار نمی گیرد. برای مثال، برای پراکندگی e^+ تنها، شکل ۱-۳، از جوابهای انرژی منفی e^- با حالت های عوض شده خروجی و فرودی استفاده می کنیم.



شکل ۱-۳ پراکندگی پوزیترون توسط یک پتانسیل

هدف ما محاسبه واپاشی ها و سطح مقطع ها می باشد . تا کنون ، فقط توابع موج ذرات آزاد را داشتیم . برهم کنش ها چگونه درگیر می شوند ؟ همان طوری که در بحث فوق اشاره کردیم ، با ذکر پراکندگی دوگانه و یگانه ، تئوری اختلال روشی است که برای محاسبه دامنه های پراکندگی بکار خواهیم برد . بنابراین مناسب است که نتایج اصلی مورد نیاز تئوری اختلال را یادآوری می کنیم .

۱-۱-۶- تئوری اختلال غیر نسبیتی

فرض می کنیم که جوابهای معادله شرودینگر ذره آزاد را می دانیم ؛

$$H_0 \phi_n = E_n \phi_n \quad \text{with} \quad \int_V \phi_m^* \phi_n d^3x = \delta_{mn} \quad (38-1)$$

که H_0 ، هامیلتونین ذره آزاد است و توابع موج ϕ_n ها قابل محاسبه می باشند . برای سادگی ، جوابها را به یک ذره در جعبه با حجم V نرمال کردیم . هدف حل معادله شرودینگر زیر است ؛

$$(H_0 + V(\vec{x}, t))\psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (39-1)$$

برای یک ذره متحرک در حضور پتانسیل برهم کنشی $V(\vec{x}, t)$.

جوابهای معادله (۳۹-۱) را می توان بر حسب ϕ_n بسط داد ؛

$$\psi = \sum_n a_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{iE_n t} \quad (40-1)$$

اکنون برای یافتن ضرائب نا مشخص $a_n(t)$ ، (۳۹-۱) را در (۳۸-۱) جایگذاری می کنیم و بدست می آوریم ؛

$$i \sum_n \frac{da_n}{dt} \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t} = \sum_n V(\vec{x}, t) a_n \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t} \quad (41-1)$$

با ضرب در ϕ_j^* ، انتگرال در سرتاسر حجم ، و با استفاده از روابط بهنجارش (۳۸-۱) به معادله دیفرانسیلی جفت شده برای ضرائب a_n منجر می شود ؛

$$\frac{da_f}{dt} = -i \sum_n a_n(t) \int \phi_f^* V \phi_n d^3 x e^{i(E_f - E_n)t} \quad (41-1)$$

فرض می کنیم قبل از آنکه پتانسیل V اثر کند ذره در یک ویژه حالت i با هامیلتونی غیر مختل شده باشد، یعنی، در زمان $t = -T/2$ ؛

$$\begin{aligned} a_i(-T/2) &= 1 \\ a_n(-T/2) &= 0 \quad \text{for } n \neq i, \end{aligned} \quad (42-1)$$

و

$$\frac{da_f}{dt} = -i \int d^3 x \phi_f^* V \phi_i e^{i(E_f - E_i)t} \quad (43-1)$$

اکنون، مشروط بر اینکه پتانسیل کوچک و دارای برد کوتاه باشد، می توانیم در تقریب اول، فرض کنیم که این شرایط اولیه در تمام زمانها ثابت باقی می ماند. سپس، با انتگرال گیری از (۴۳-۱) بدست می آوریم؛

$$a_f(t) = -i \int_{-T/2}^t dt' \int d^3 x \phi_f^* V \phi_i e^{i(E_f - E_i)t'} \quad (44-1)$$

و بویژه، در زمان $t = +T/2$ بعد از برهم کنش متوقف شده باشد؛

$$T_{fi} = a_f(T/2) = -i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3 x [\phi_f(\vec{x}) e^{-iE_f t}]^* V(\vec{x}, t) [\phi_i(\vec{x}) e^{-iE_i t}] \quad (45-1)$$

که می توانیم به شکل زیر بنویسیم؛

$$T_{fi} = -i \int d^4 x \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) \quad (46-1)$$

در تلاشیم تا $|T_{fi}|^2$ را بعنوان احتمال اینکه ذره از یک حالت اولیه i به حالت نهایی f پراکنده می شود، تفسیر کنیم [1,2,6,7]. آیا این تفسیر صحیح است؟ موردی را که $V(\vec{x}, t) = V(\vec{x})$ مستقل از زمان است بررسی می کنیم؛ (۴۵-۱) می تواند بصورت زیر نوشته شود؛

$$\begin{aligned}
 T_{fi} &= -iV_{fi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E_f - E_i)t} \\
 &= -2\pi V_{fi} \delta(E_f - E_i)
 \end{aligned}
 \tag{47-1}$$

با

$$V_{fi} = \int d^3x \phi_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}) \phi_i(\vec{x})
 \tag{48-1}$$

تابع δ این اصل را بیان می کند که انرژی ذره در گذار $f \rightarrow i$ پایسته می ماند . می بینیم که $|T_{fi}|^2$ یک کمیت مفهوم دار نسبت . بنابراین احتمال گذار در واحد زمان را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T}
 \tag{49-1}$$

و با مربع کردن (47-1) :

$$\begin{aligned}
 W &= \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{T} \delta(E_f - E_i) \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E_f - E_i)t} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{T} \delta(E_f - E_i) \int_{-T/2}^{T/2} dt \\
 &= 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i)
 \end{aligned}
 \tag{50-1}$$

این معادله تنها می تواند معنی فیزیکی بعد از انتگرال گیری روی یکسری حالت های اولیه و نهایی داشته باشد . در فیزیک ذرات ، معمولاً با موقعیت هایی مواجه هستیم که با یک حالت اولیه مشخص شروع می کنیم و در یکی از حالت های نهایی خاتمه می دهیم . اجازه دهید $\rho(E_f)$ چگالی حالت های نهایی باشد ؛ یعنی $\rho(E_f)dE_f$ تعداد حالتها در بازه انرژی E_f تا $E_f + dE_f$

است. روی این چگالی احتمال انتگرال گیری می کنیم، با اعمال پایستگی انرژی، سرعت گذار را بدست می آوریم؛

$$W_{fi} = 2\pi \int dE_f \rho(E_f) |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \quad (51-1)$$

$$= 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_i)$$

این قانون طلایی فرمی¹⁰ است.

بوضوح، می توانیم تقریب فوق را توسط جایگذاری در نتیجه $a_n(t)$ در سمت راست (41-1)، بهتر کنیم؛

$$\frac{da_f}{dt} = \dots + (-i)^2 \left[\sum_{n \neq i} V_{ni} \int_{-T/2}^t dt' e^{i(E_n - E_i)t'} \right] V_{fn} e^{i(E_f - E_n)t} \quad (52-1)$$

که نقطه ها نتیجه مرتبه اول را نشان می دهند. تصحیح برای T_{fi} بصورت زیر است؛

$$T_{fi} = \dots - \sum_{n \neq i} V_{fn} V_{ni} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E_f - E_n)t} \int_{-\infty}^t dt' e^{i(E_n - E_i)t'} \quad (53-1)$$

برای اینکه انتگرال گیری روی dt' مفهوم داشته باشد، باید یک جمله نمایی مثبت کوچک ε وارد کنیم، که بعد از انتگرال گیری آنرا به صفر میل می دهیم؛

$$\int_{-\infty}^t dt' e^{i(E_n - E_i - i\varepsilon)t'} = i \frac{e^{i(E_n - E_i - i\varepsilon)t}}{E_n - E_i + i\varepsilon} \quad (54-1)$$

در نتیجه تصحیح مرتبه دوم T_{fi} بصورت زیر می شود؛

$$T_{fi} = \dots - 2\pi i \sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E_n - E_i + i\varepsilon} \delta(E_f - E_i) \quad (55-1)$$

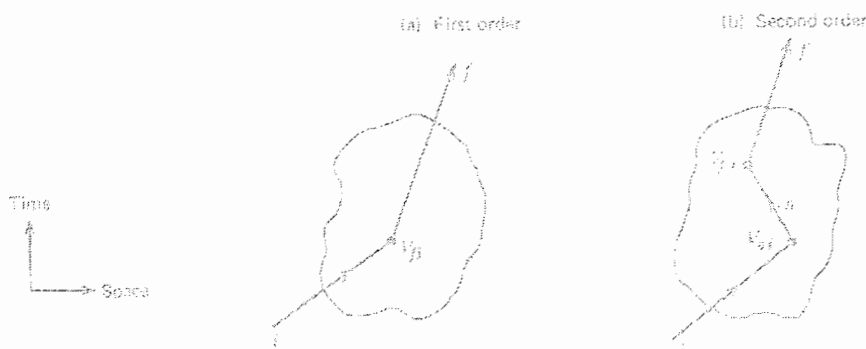
و همچنین سرعت برای گذار $f \rightarrow i$ توسط رابطه زیر داده می شود؛

$$V_{fi} \rightarrow V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n + i\varepsilon} V_{ni} + \dots \quad (56-1)$$

¹⁰ Fermi's Golden Rule

معادله (۵۶-۱) سریهای اختلالی برای دامنه در جمله های مرتبه اول ، دوم ، ... V است . نمودار

فاینمن شکل ۴-۱ دو جمله اول سریهای اختلالی غیر نسبیتی را نشان می دهد .



شکل ۴-۱ اجزای اولین و دومین مرتبه از گذار $i \rightarrow f$

برای هر رأس برهم کنشی عاملی شبیه V_{ni} داریم و برای انتشار هر حالت میانی ، عامل انتشارگری

شبیه $\frac{1}{E_i - E_n}$ داریم . حالتهای میانی در احساس مجازی هستند که انرژی پایسته نیست ،

اما البته پایستگی انرژی میان حالتهای اولیه و نهایی وجود دارد $E_f = E_i$ ، مسئله

اساسی اینست که این تدبیر را برای سروکار داشتن با ذرات نسبیتی و همچنین پاد ذراتشان

عمومیت بخشیم .

۷-۱-۱- قوانین فاینمن

چگونه می توانیم دامنه های پراکندگی T_{fi} را برای پاد ذرات درست کنیم ؟ از آنجاییکه پاد ذرات

جوابهای ذرات با انرژی منفی که نسبت به زمان به سمت عقب حرکت می کنند محسوب می

شوند ؛ بوضوح ، دستور پاد ذره ما با پایستگی انرژی سازگار خواهد بود .

نمودار شکل ۴-۱ پراکندگی ناشی از یک پتانسیل استاتیک و ثابت را نشان می دهد . اگرچه ، به

پراکندگی یک ذره توسط ذره دیگر علاقه مند هستیم ، برای انجام این کار ، یک ذره را انتخاب می

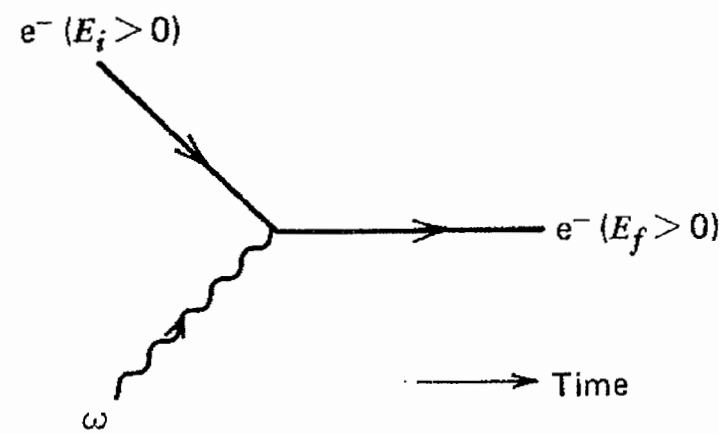
کنیم که در پتانسیل الکترومغناطیسی V حاصل از ذرات دیگر حرکت می کند . اکنون پایستگی

انرژی را در هر رأس شکل ۵-۱ ، جاییکه یک فوتون توسط یک الکترون جذب می شود ، بررسی

می کنیم . شکل برهم کنشی بعداً استنتاج می شود ، اما واضح است که V برای یک فوتون فرودی با انرژی ω وابستگی زمانی بصورت $e^{-i\omega t}$ دارد . بنابراین ، دامنه گذار T_{fi} ، (۴۵-۱) ، متناسب است با :

$$\int (e^{-iE_f t})^* e^{-i\omega t} e^{-iE_i t} dt = 2\pi\delta(E_f - \omega - E_i) \quad (۵۷-۱)$$

آنچنانکه $E_f = E_i + \omega$.

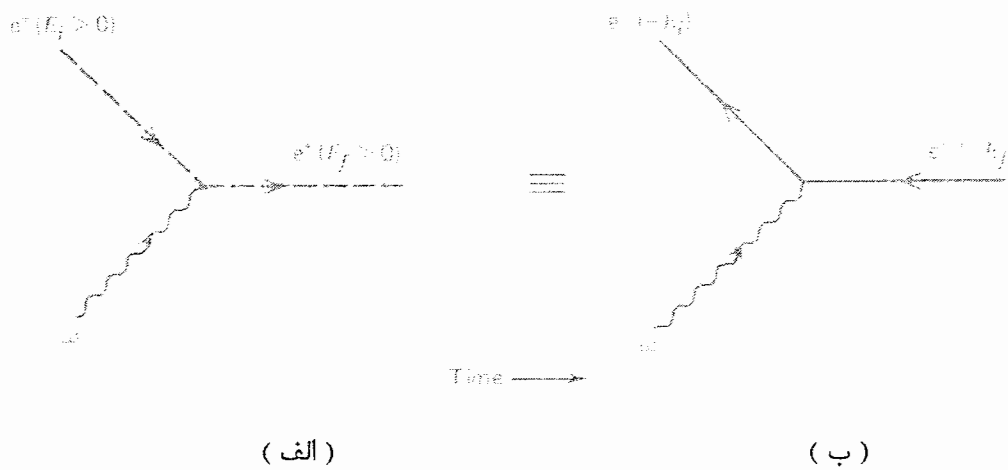


شکل ۵-۱ پراکندگی e^-

برای پاد ذره (پوزیترون) در شکل ۱-۶الف بحث مشابهی خواهیم داشت . اگرچه ، همان طوری که قبلاً گفته شد ، عنصر ماتریسی را در جمله هایی از حالت های الکترونی تنها به فرمول درآوریم ، همان طوری که در شکل ۱-۶ب نشان داده شده است که حالت فرودی یک الکترون با انرژی (منفی) $-E_f$ را توصیف می کند ، و دامنه گذار شامل عامل زیر می شود ؛

$$\int (e^{-i(-E_f)t})^* e^{-i\omega t} e^{-i(-E_i)t} dt = 2\pi\delta(-E_f - \omega + E_i) \quad (۵۸-۱)$$

و دوباره $E_f = E_i + \omega$ ، همان طوری که مورد نیاز است .



شکل ۶-۱ پراکندگی e^+

بر اساس اشکال فوق می توان این گذار را بصورت زیر مشخص نمود :

$$\int \phi_{outgoing}^* V \phi_{ingoing} d^4x \quad (۵۹-۱)$$

اکنون فرمالیسم پایه ریزی شده بر اساس تئوری اختلال که می تواند با برهمکنش ذرات زیاد سروکار داشته باشد را ترتیب بخشیدیم و می تواند ریز ذرات را نیز توصیف کند . همچنین براساس نظریه اختلال ، V باعث گذار سیستم از حالت اولیه به حالت نهایی می شود .

۱-۲- الکترو دینامیک ذرات بدون اسپین

مقدمه :

لپتون یا کوارک بدون اسپین تا کنون در آزمایش دیده نشده است . هادرون های بدون اسپین وجود دارند (مثل مزون- π) ، اما آنها دارای ساختار پیچیده تر از کوارکهای اسپین $\frac{1}{2}$ و گلوئون های اسپین 1 هستند . لپتون های اسپین صفر ، یعنی لپتون هایی که در معادله کلاین-گوردن صدق می کنند ، بطور کامل فرضی هستند [1,6] . در این بخش هدف بررسی تئوری اختلال است . برای سادگی ، لپتون های باردار " بدون اسپین " را انتخاب می کنیم . برای برهم کنش پتانسیل الکترومغناطیسی را انتخاب می کنیم . برهم کنش های الکترومغناطیسی در فیزیک ذرات بسیار مهم و پایه ای هستند .

۱-۲-۱- یک الکترون در یک میدان الکترومغناطیسی A^μ

یک الکترون بدون اسپین در معادله کلاین-گوردن (۱-۲۶) ، صدق می کند ؛

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0 \quad (۱-۶۰)$$

در الکترو دینامیک کلاسیک ، حرکت یک ذره با بار $-e$ در پتانسیل الکترومغناطیسی

$$A^\mu = (A^0, \vec{A})$$

توسط جایگذاری زیر بدست می آورده می شود [2,3,6,10] ؛

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + eA^\mu \quad (۱-۶۱)$$

مشابه کوانتوم مکانیکی این مسئله بصورت زیر است ؛

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu + eA^\mu \quad (۱-۶۲)$$

(۱-۲۰) را ببینید . معادله کلاین-گوردن بفرم زیر تبدیل می شود ؛

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = -V\phi \quad (۱-۶۳)$$

که اختلال (الکترومغناطیسی) بصورت زیر می باشد ؛

$$V = -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) - e^2 A^2 \quad (۱-۶۴)$$

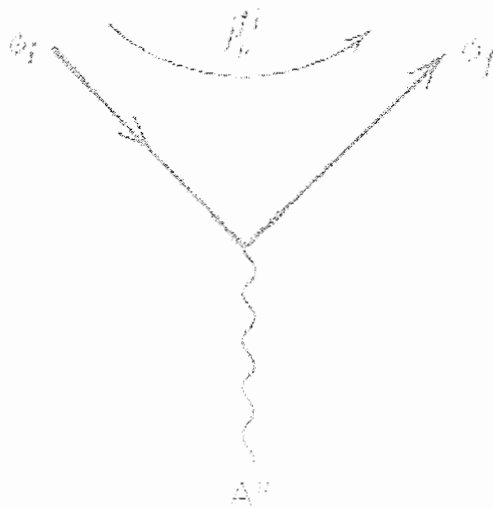
علامت V در (۶۳-۱) به گونه ای انتخاب شده با علامت جمله های انرژی پتانسیل و جنبشی معادله شرودینگر سازگار باشد .

پتانسیل (۶۴-۱) توسط پارامتر e مشخص شده ، که به ثابت ساختار محدود α با رابطه زیر مرتبط می شود [10,11] ؛

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \cong \frac{1}{137} \quad (۶۵-۱)$$

با کار کردن در پایین ترین مرتبه ، جمله $e^2 A^2$ را از (۶۴-۱) حذف می کنیم . از (۴۶-۱) ، دامنه برای پرکندگی یک الکترون بدون اسپین از حالت ϕ_i به ϕ_f از پتانسیل الکترومغناطیسی A_μ که توسط شکل ۱-۷ نشان داده می شود ، بصورت زیر است ؛

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) d^4x \\ &= i \int \phi_f^* i e (A^\mu \partial_\mu + \partial_\mu A^\mu) \phi_i d^4x \end{aligned} \quad (۶۶-۱)$$



شکل ۱-۷ برهمکنش یک الکترون بدون اسپین با A^μ

مشتق در جمله دوم در رابطه (۶۶-۱) که بر روی A^μ و ϕ_i اثر می کند ، می تواند توسط انتگرال گیری جزء به جزء و با اثر روی ϕ_f^* به رابطه زیر تبدیل شود ؛

$$\int \phi_f^* \partial_\mu (A^\mu \phi_i) d^4x = - \int \partial_\mu (\phi_f^*) A^\mu \phi_i d^4x \quad (67-1)$$

بنابر این دامنه T_{fi} را به شکل پیشنهادی زیر بازنویسی می کنیم ؛

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \quad (68-1)$$

که در آن ،

$$j_\mu^{fi}(x) = -ie(\phi_f^* (\partial_\mu \phi_i) - (\partial_\mu \phi_f^*) \phi_i) \quad (69-1)$$

که در مقایسه با (۳۳-۱) می تواند بعنوان جریان الکترومغناطیسی برای گذار الکترونی $i \rightarrow f$ محسوب شود . اگر الکترون فرودی چار تکانه p_i داشته باشد ، داریم ؛

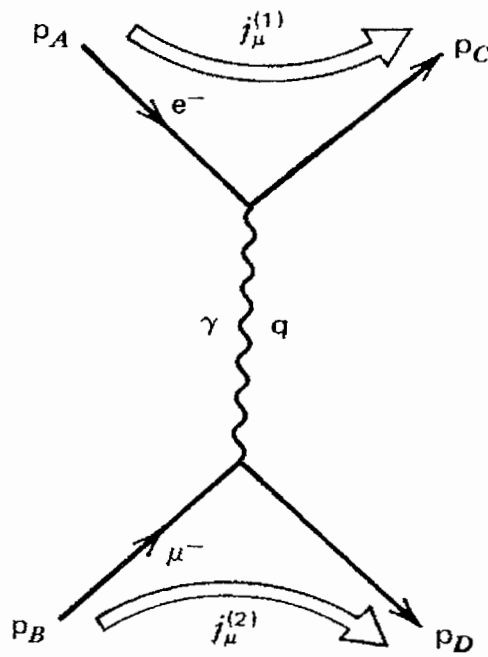
$$\phi_i(x) = N_i e^{-i p_i \cdot x} \quad (70-1)$$

که N_i ثابت نرمالیزاسیون است . با استفاده از عبارتی مشابه برای ϕ_f ، بدست می آوریم ؛

$$j_\mu^{fi} = -e N_i N_f (p_i + p_f)_\mu e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \quad (71-1)$$

۱-۲-۲- پراکندگی الکترون-میون بدون اسپین

با استفاده از نتایج پراکندگی الکترون از پتانسیل الکترومغناطیسی A^μ ، نشان داده شده در شکل ۱-۷ ، قادر به محاسبه پراکندگی الکترون مشابه از یک ذره باردار دیگر ، مثلاً الکترون دیگر یا یک میون خواهیم بود . اجازه دهید برای تشخیص پذیری میون را انتخاب کنیم . نمودار فاینمن مشابه با این فرآیند در شکل ۱-۸ نشان داده شده است . در اینجا پتانسیل الکترومغناطیسی A^μ با منبع آنرا مشخص می کنیم ، میون " بدون اسپین باردار " .



شکل ۸-۱ پراکندگی الکترون-میون

با استفاده از معادلات ماکسول^{۱۱} داریم ،

$$\square^2 A^\mu = j_{(2)}^\mu \quad (۷۲-۱)$$

که میدان الکترومغناطیسی A^μ ناشی از جریان $j_{(2)}^\mu$ میون می باشد [6,7]. اکنون ، چه چیزی را بعنوان جریان در (۷۲-۱) می توانیم بگیریم ؟ دوباره ، شکل ۸-۱ جواب را پیشنهاد می دهد . جریان پایه ریزی شده بر اساس میون بدون اسپین شکل مشابهی با جریان الکترونی دارد ، که بوسیله (۷۱-۱) داده می شود ؛

$$j_{(2)}^\mu = -e N_B N_D (p_D + p_B)^\mu e^{i(p_D - p_B) \cdot x} \quad (۷۳-۱)$$

که تکانه ها در شکل ۸-۱ تعریف شده اند . از آنجایی که

$$\square^2 e^{iq \cdot x} = -q^2 e^{iq \cdot x} \quad (۷۴-۱)$$

حل (۷۲-۱) بصورت زیر است ؛

^{۱۱} Maxwell's equations

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j_{(2)}^\mu \quad \text{with} \quad q = p_D - p_B \quad (75-1)$$

با جایگذاری این میدان حاصل از میون در (۶۸-۱)، دامنه (پایین ترین مرتبه) برای پراکندگی الکترون-میون بصورت زیر در می آید؛

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{(1)}(x) \left(-\frac{1}{q^2}\right) j_{(2)}^\mu(x) d^4x \quad (76-1)$$

جایگذاری (۷۳-۱)، همراه با عبارتی مشابه برای جریان الکترونی، (۷۱-۱)، و با انجام انتگرال روی x بدست خواهیم آورد؛

$$T_{fi} = -i N_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_C - p_B - p_A) \mathcal{M} \quad (77-1)$$

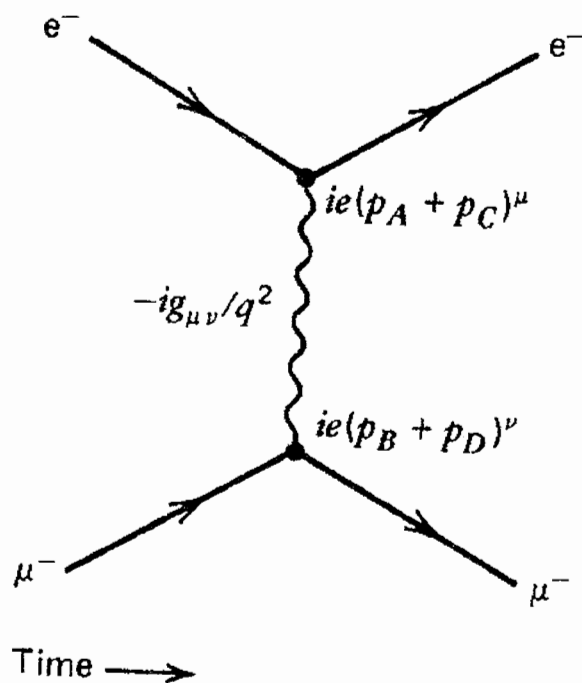
با

$$-i \mathcal{M} = (ie(p_A + p_C)^\mu) \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) (ie(p_B + p_D)^\nu) \quad (78-1)$$

\mathcal{M} ، همانطوریکه توسط (۷۷-۱) توصیف می شود، بعنوان دامنه ناورد^{۱۲} شناخته می شود [1,2,3,6]. تابع δ پایستگی انرژی-تکانه را بیان می کند.

به منظور فهرست کردن جملات مختلف در بسط اختلالی T_{fi} در نظریه اختلال غیر نسبیتی، اشکالی شبیه شکل ۱-۴ را رسم کردیم. بعلاوه، عاملهای مختلف در T_{fi} همان طوری که توسط (۵۵-۱) داده شده، رأسهای برهم کنش و انتشارگرهای ذرات در شکل ۱-۴ ب را بهم مرتبط می ساختند. مفید است که اشکالی مشابه برای شکل هم وردها سریهای اختلالی رسم کنیم. برای مثال، شکل ۱-۹ پراکندگی الکترون-میون بدون اسپین از مرتبه e^2 (یا α) را نشان می دهد، و دامنه توسط (۷۷-۱) و (۷۸-۱) داده می شود. این پایین ترین مرتبه نمودار فاینمن است.

¹² Invariant Amplitude



شکل ۹-۱ عامل رأس و انتشارگر برای پراکندگی الکترون-میون بدون اسپین

خط موجدار یک فوتون مبادله شده میان لپتون ها را نشان می دهد ، و عامل وابسته ،
انتشارگر فوتون^{۱۳} نامیده می شود [1,2,7] ، که اندیسهای لورنتس را با خود یدک
می کشد ، چون فوتون یک ذره اسپین- 1 است . چاربردار q فوتون توسط پایستگی چارتکانه در
رأسها معین می شود . هر عامل رأس^{۱۴} شامل جفت شدگی الکترومغناطیسی e و یک اندیس
چاربردار مرتبط با اندیس فوتون است . توزیع ویژه علامتهای منفی و فاکتورهای i برای بدست
آوردن نتایج صحیح در نمودارهای مراتب بالاتر درست شده اند . توجه کنید که عوامل موجود در
رأسها و انتشارگر (ضرب سه عامل) ، $-i\mathcal{Q}$ را می دهد.

هر جایی که رأس یکسان یا خطهای داخلی در یک نمودار فاینمن ظاهر می شوند ، عامل $-i\mathcal{Q}$
نیز ظاهر می شود . با در نظر گرفتن عبارت $-i\mathcal{Q}$ می توانیم یک قاعده کلی در مورد محاسبه
دامنه ناوردا در برهم کنش های مختلف پیدا کنیم که در جدول ۲ آمده است .

¹³ Photon propagator
¹⁴ Vertex

۱-۲-۳- محاسبه سطح مقطع با استفاده از \mathcal{M}

برای ارتباط دادن این محاسبات به مشاهدات تجربی، نیاز داریم که نرمالیزاسیون N تابع موج ذره آزادمان را بدست آوریم،

$$\phi = Ne^{-ip \cdot x} \quad (۷۹-۱)$$

از (۱-۲۵) یادآوری می کنیم که چگالی احتمال ρ ذرات که توسط ϕ توصیف می شود، برابر است با:

$$\rho = 2E|M|^2 \quad (۸۰-۱)$$

در حجم V و نرمالیزه به $2E$ ذره در V کار کنیم؛

$$\int_V \rho dV = 2E \quad (۸۱-۱)$$

که بدست می آوریم؛

$$N = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (۸۲-۱)$$

اکنون سرعت گذار $A + B \rightarrow C + D$ در واحد حجم می شود:

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{TV} \quad (۸۳-۱)$$

که T فاصله زمانی برهم کنش است و دامنه گذار بصورت زیر است؛

$$T_{fi} = -iN_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \mathcal{M} \quad (۸۴-۱)$$

بنابراین با استفاده از (۱-۸۲)، بدست می آوریم؛

$$W_{fi} = (2\pi)^4 \frac{\delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) |\mathcal{M}|^2}{V^4} \quad (۸۵-۱)$$

نتایج آزمایشگاهی برای پراکندگی $AB \rightarrow CD$ به شکل یک "سطح مقطع" بیان می شوند. این با سرعت گذار توسط رابطه زیر مربوط می شود؛

$$\text{Cross section} = \frac{W_{fi}}{(\text{initial flux})} (\text{number of final states}) \quad (86-1)$$

که فاکتورهای موجود در پرانتزها چگالی حالت‌های ورودی و خروجی را اجازه می‌دهند. در ابتدا با دقت این فاکتورها را تعریف می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم چگونه سطح مقطع، همانطوریکه تعریف شد، ممکن است بعنوان منطقه‌ای مؤثر که ذرات A و B برهم کنش می‌کنند تا تا ذرات C و D تولید کنند، محسوب شود. برای تک ذره، تئوری کوانتومی تعداد حالت‌های نهایی را در حجم در فضای تکانه در عنصر d^3p که $Vd^3p/(2\pi)^3$ می‌باشد، محدود می‌کند؛ اما $2E$ ذره در حجم V داریم؛ و بنابراین

$$\frac{Vd^3p}{(2\pi)^3 2E} = \text{تعداد حالت‌های نهایی / ذره} \quad (87-1)$$

بنابراین، برای ذرات C و D پراکنده شده در عنصر تکانه d^3p_C ، d^3p_D داریم،

$$\frac{Vd^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{Vd^3p_D}{(2\pi)^3 2E_D} = \text{تعداد حالت‌های نهایی قابل دسترس} \quad (88-1)$$

اکنون با برگشت به شار اولیه، در می‌یابیم که محاسبه آن در مقیاس آزمایشگاهی بسیار آسان است. تعداد ذرات عبوری در واحد سطح بر واحد زمان برابر است با $|\vec{v}_A| 2E_A/V$ و تعداد ذرات هدف در واحد حجم $2E_B/V$ است. برای بدست آوردن اندازه نرمالیزه-مستقل "چگالی" فرودی، رابطه زیر را می‌نویسیم؛

$$|\vec{v}_A| \frac{2E_A}{V} \frac{2E_B}{V} = \text{شار فرودی} \quad (89-1)$$

با جایگذاری (85-1)، (88-1) و (89-1) در (86-1) به سطح مقطع دیفرانسیلی $d\sigma$ برای پراکندگی در $d^3p_C d^3p_D$ دست می‌یابیم [8,9,10,11]؛

$$d\sigma = \frac{V^2}{|\vec{v}_A| 2E_A 2E_B} \frac{1}{V^4} |\mathcal{M}|^2 \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3p_C}{2E_C} \frac{d^3p_D}{2E_D} V^2 \quad (90-1)$$

از اینجا به بعد V را کنار می گذاریم و در واحد حجم کار می کنیم ، یعنی به $2E$ ذره/واحد حجم نرمال می کنیم و عامل نرمالیزاسیون (۸۲-۱) تابع موج بصورت زیر در می آید [1,2] :

$$N = 1 \quad (91-1)$$

تفسیر فیزیکی سطح مقطع که در (۸۶-۱) و (۹۰-۱) [تعریف شده چیست ؟ ظاهر تعداد حالت‌های نهایی مختلط با سرعت گذار آشناست ، (۵۱-۱) را ببینید ، که تعداد پراکندگی n_s ذره در واحد زمان را نشان می دهد . شار در (۸۶-۱) تعریف می شود که سرعت مستقل تعداد ذرات موجود در باریکه یا هدف مورد استفاده در یک سیستم آزمایشگاهی را به خود می گیرد . یعنی سطح مقطع یک احتمال حقیقی را نشان می دهد ، یعنی ، قدرت حقیقی برهم کنش $AB \rightarrow CD$. بنابراین (۸۶-۱) را توسط تعداد ذرات هدف (n_t) و شار باریکه ($n_b v_b$) که تعداد ذرات عبوری باریکه یک واحد سطح عمود بر سرعت باریکه در واحد زمان تقسیم می کنیم (v_b سرعت نسبی باریکه است و هدف بعداً ممکن است ایستا نباشد) . بنابراین (۸۶-۱) را بطور سمبولیک می توانیم بنویسیم ؛

$$n_s = (n_b v_b) n_t \sigma \quad (92-1)$$

سرعت شمارش n_s همیشه متناسب با (شار باریکه $n_t \times$) است ؛ ثابت تناسب σ است که فیزیک را در بر می گیرد ، یعنی ، احتمال پراکندگی حقیقی که واحدهای سطح را دارد . می توانیم σ را بطور بصری بعنوان منطقه ای مؤثر که باریکه توسط یک ذره هدف دیده می شود ، تفسیر کنیم ، یا منطقه ای که A و B اثر می کنند تا C و D را تولید کنند . ممکن است سطح مقطع دیفرانسیلی (۹۰-۱) را به شکل سمبولیک زیر بنویسیم [1,2] ؛

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{F} dQ \quad (93-1)$$

که dQ عامل فضای فاز لورنتس است ؛

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D} \quad (94-1)$$

(یادآوری می کنیم که d^3p/E یک کمیت ناوردای لورنتس است) ، و شار فرودی در مقیاس آزمایشگاهی بصورت زیر می باشد ؛

$$F = |\vec{v}_A| 2E_A \cdot 2E_B \quad (95-1)$$

با $\vec{v}_A = \vec{p}_A/E_A$. برای یک برخورد collinear کلی بین A و B ،

$$\begin{aligned} F &= |\vec{v}_A - \vec{v}_B| \cdot 2E_A \cdot 2E_B \\ &= 4(|\vec{p}_A|E_B + |\vec{p}_B|E_A) \\ &= 4((p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (96-1)$$

که بطور آشکار ناوردا است . معادله (۹۳-۱) نتیجه نهایی است . در مقیاس مرکز جرم برای فرآیند $AB \rightarrow CD$ داریم ؛

$$dQ = \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_f}{4\sqrt{s}} d\Omega \quad (97-1)$$

$$F = 4p_i \sqrt{s} \quad (98-1)$$

و از این رو سطح مقطع دیفرانسیلی بصورت زیر می شود ؛

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{p_f}{p_i} |\mathcal{M}|^2 \quad (99-1)$$

که $d\Omega$ عنصر زاویه ای اطراف \vec{p}_C است ، $s = (E_A + E_B)^2$ ، $|\vec{p}_A| = |\vec{p}_B| = p_i$ ، و $|\vec{p}_C| = |\vec{p}_D| = p_f$

و با استفاده از (۷۸-۱) می توان نشان داد که در پراکندگی انرژی خیلی بالای الکترون-میون بدون اسپین داریم ؛

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{\alpha^2}{4s} \left(\frac{3 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} \right)^2 \quad (100-1)$$

که θ زاویه پراکندگی و $\alpha = e^2/4\pi$ است . از جرم های ذرات نیز صرف نظر کرده ایم .

۱-۲-۴- سرعت واپاشی در جملاتی از \mathcal{M}

استنتاج فرمول برای سرعت‌های واپاشی ذره در امتداد خطوطی مشابه پیش می‌رود. سرعت دیفرانسیلی برای واپاشی $A \rightarrow 1+2+\dots+n$ با جزء اندازه حرکت $d^3 p_n, \dots, d^3 p_2, d^3 p_1$ حالت نهایی ذره بصورت زیر است؛

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_A} |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \dots \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_1 - \dots - p_n) \quad (1-1-1)$$

این رابطه مشابه با روابط (۱-۹۳) و (۱-۹۴) است. $2E_A$ تعداد ذرات فروپاشی شده در واحد حجم و \mathcal{M} دامنه ناورد است که از نمودار فاینمن مناسب محاسبه می‌شود. یک کاربرد عمومی محاسبه سرعت انتگرال گیری شده برای واپاشی حالت $A \rightarrow 1+2$ است، یعنی از (۱-۱۰۱) روی تمام اندازه حرکت‌های ممکن $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$ انتگرال گیری کنیم. در مقیاسی که A ساکن است، با استفاده از (۱-۹۷) بدست می‌آوریم [1,2,9,11]؛

$$\Gamma(A \rightarrow 1+2) = \frac{P_f}{32\pi^2 m_A^2} \int |\mathcal{M}|^2 d\Omega \quad (1-102)$$

سرعت واپاشی کل Γ ، مجموع سرعت‌ها برای همه کانال‌های واپاشی است. بوضوح، سرعت

$$\Gamma = -\frac{dN_A}{dt} / N_A \quad (1-103)$$

جواب معادله فوق برای تعداد ذرات A بصورت زیر می‌باشد؛

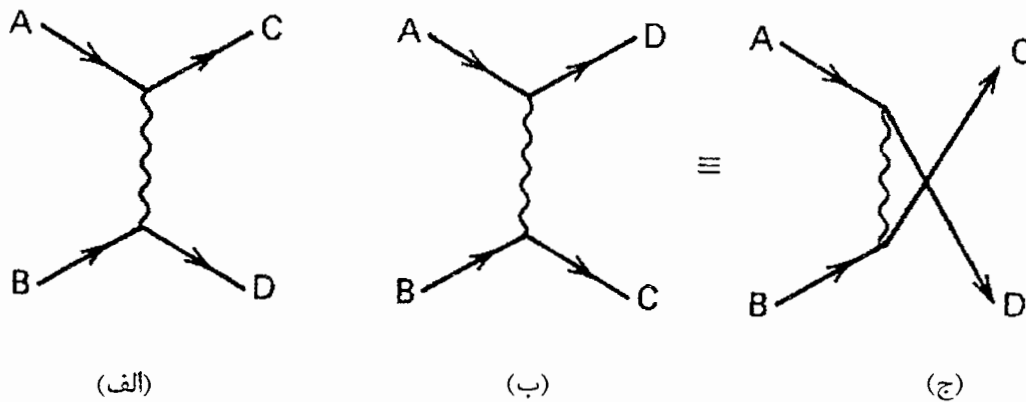
$$N_A(t) = N_A(0)e^{-\Gamma t} \quad (1-104)$$

می‌گوییم که Γ^{-1} طول عمر ذره A است.

۱-۲-۵- پراکندگی الکترون-الکترون بدون اسپین

به کاربردی از قوانین فاینمن در بعضی از فرآیندهای الگو برمی‌گردیم. پراکندگی الکترون-الکترون، چهره جدیدی است که ذرات یکسان در حالت‌های اولیه و نهایی داریم، و بنابراین این باید نسبت به تعویض برچسب ذرات متقارن باشد $C \leftrightarrow D$ و $A \leftrightarrow B$. در نتیجه، علاوه بر نمودار

فاینمن شکل ۱۰-۱ الف، نمودار دومی داریم، ۱۰-۱ ب، که ترتیب A، B، C و D را ابقا می کند و در شکل ۱۰-۱ ج رسم شده است.



شکل ۱۰-۱ دو نمودار فاینمن (پایین ترین مرتبه) برای پراکندگی الکترون-الکترون

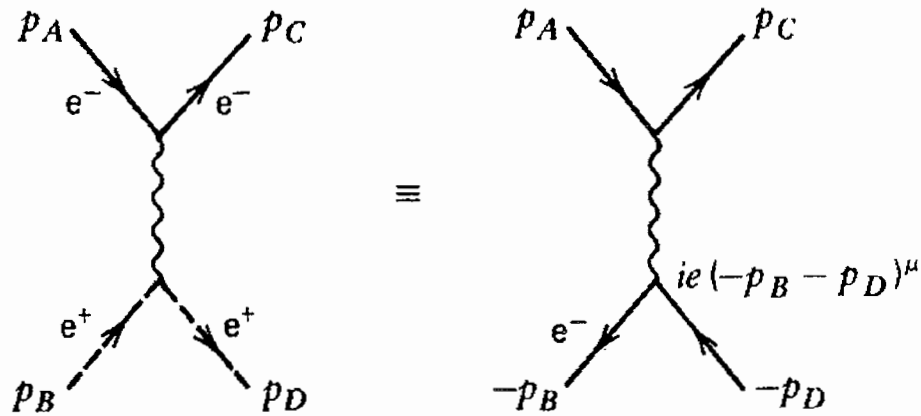
هیچ روش آزمایشگاهی برای تشخیص اینکه الکترون C از A می آید یا از B وجود ندارد، بنابراین باید دامنه ها را (نسبت به احتمالات) اضافه کنیم. در نتیجه، دامنه ناوردا برای پراکندگی الکترون های بدون اسپین در پایین ترین مرتبه، جمع دامنه های نمودارهای (الف) و (ج) است؛

$$-i\mathcal{M}_{e^-e^-} = -i\left(-\frac{e^2(p_A + p_C)_\mu(p_B + p_D)^\mu}{(p_D - p_B)^2} - \frac{e^2(p_A + p_D)_\mu(p_B + p_C)^\mu}{(p_C - p_B)^2}\right) \quad (10.5-1)$$

جمله اول مستقیماً از (۷۸-۱) تبعیت می کند و جمله دوم به آسانی با $p_C \leftrightarrow p_D$ بدست می آید. توجه کنید که تقارن تحت $p_C \leftrightarrow p_D$ مطمئن می سازد که \mathcal{M} تحت $p_A \leftrightarrow p_B$ متقارن است.

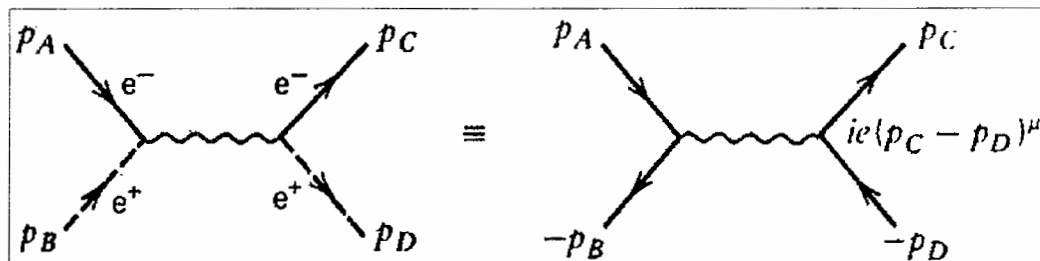
۱-۲-۶- پراکندگی الکترون-پوزیترون: یک کاربرد از تعویض

دوباره، در اینجا دو نمودار فاینمن ممکن داریم، شکل ۱۱-۱ الف و ۱۱-۱ ج فقط با جملات حالتی ذره (الکترون) در حال کار هستیم، و بنابراین باید از دستور پاد ذرات (۱-۳۶) برای تبدیل اینها به نمودارهای ب و د، به ترتیب استفاده کنیم.



الف

ب



ج

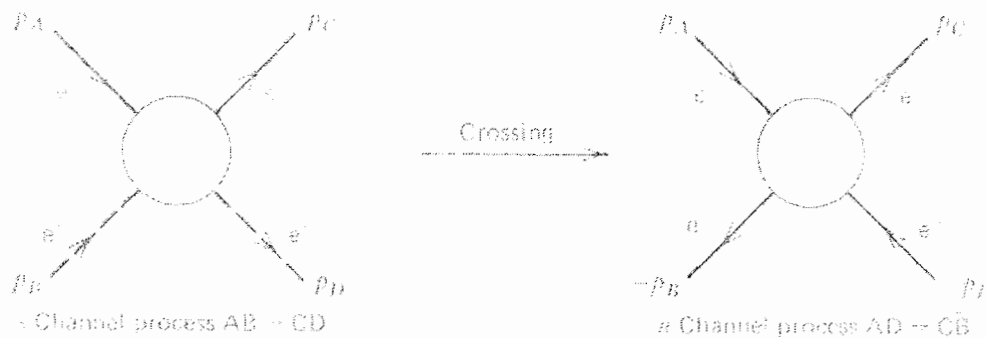
د

شکل ۱-۱۱ دو نمودار فاینمن (پایین ترین مرتبه)، ب و د، برای پراکندگی $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ بدون اسپین می توانیم از قوانین فاینمن که در بالا آمده برای محاسبه دامنه $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ (در پایین ترین مرتبه) استفاده کنیم؛

$$-i\mathcal{M}_{e^-e^+} = -i(-e^2 \frac{(p_A + p_C)_\mu (-p_D - p_B)^\mu}{(p_D - p_B)^2} - e^2 \frac{(p_A - p_B)_\mu (-p_D + p_C)^\mu}{(p_C + p_D)^2}) \quad (1-106)$$

مشاهده می کنیم که تحت $p_C \leftrightarrow p_D$ متقارن است، یعنی، تحت تعویض دو الکترون "خروجی". اما نیازی به انجام این کار نداریم؛ برای بدست آوردن $\mathcal{M}_{e^-e^-}$ ، به آسانی می توانیم از

دستور پاد ذرات برای نتیجه " تعویض " که $\mathcal{M}_{e^-e^-}$ را استخراج کردیم استفاده کنیم (شکل ۱-۱۲ را ببینید).



شکل ۱-۱۲ تعویض ذرات A و B

در این روش ، بدست می آوریم :

$$\mathcal{M}_{e^-e^+ \rightarrow e^-e^+}(p_A, p_B, p_C, p_D) = \mathcal{M}_{e^-e^- \rightarrow e^-e^-}(p_A, -p_D, p_C, -p_B) \quad (107-1)$$

در عوض ، دیدیم که (۱۰۶-۱) به آسانی (۱۰۵-۱) با $p_D \leftrightarrow -p_B$ است [1,2].

۱-۲-۷- متغیرهای ناوردا

برای فرآیند پراکندگی به شکل $AB \rightarrow CD$ ، دو متغیر سینماتیکی مستقل انتظار داریم ؛ برای مثال ، انرژی فرودی و زاویه پراکندگی . اگرچه ممکن و مطلوب است که دامنه ناوردا \mathcal{M} بعنوان تابعی از متغیرهای ناوردا تحت تبدیلات لورنتس بیان شود . در این حالت بر حسب اندازه حرکتیهای $p_i^2 = m_i^2$ ، می توان متغیرهای ناوردا را مشخص نمود . از آنجاییکه $p_A \cdot p_D$ ، $p_A \cdot p_C$ ، $p_A \cdot p_B$ و از آنجاییکه $p_A + p_B = p_C + p_D$ در خلال پایستگی انرژی-تکانه ، فقط دو تا از سه متغیر مستقل هستند . بنابراین مناسب است از متغیرهای مرتبط (مندل استام^{۱۵}) استفاده شود [1,2,3,6] ؛

¹⁵ Mandelstam

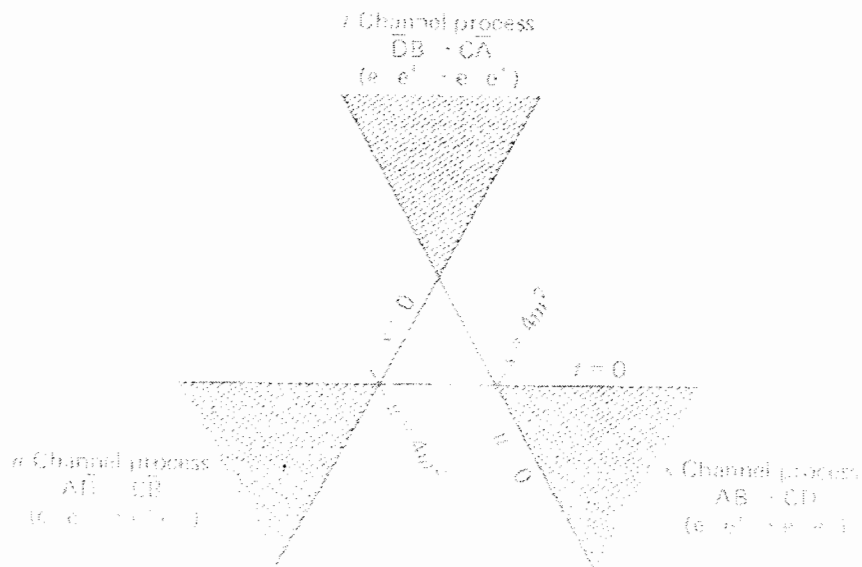
$$\begin{aligned}
 s &= (p_A + p_B)^2 \\
 t &= (p_A - p_C)^2 \\
 u &= (p_A - p_D)^2
 \end{aligned}
 \tag{108-1}$$

و همچنین؛

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2
 \tag{109-1}$$

که m_i جرم سکون ذره i است.

برای نمایش نواحی سینماتیکی (یا فیزیکی) فرآیندهای مرتبط با تعویض، یک طرح دو بعدی که تقارن s, t, u را ابقا می کند، می سازیم. سه محور s, t, u ، به شکل یک مثلث متساوی الاضلاع با ارتفاع $\sum m_i^2$ (شکل ۱۳-۱) رسم شده اند. از هر نقطه داخل و همچنین خارج مثلث (اگر به علامت های s, t, u توجه شود)، مجموع فواصل عمود بر محورها برابر با ارتفاع مثلث است [(۱۰۹-۱) را ببینید].

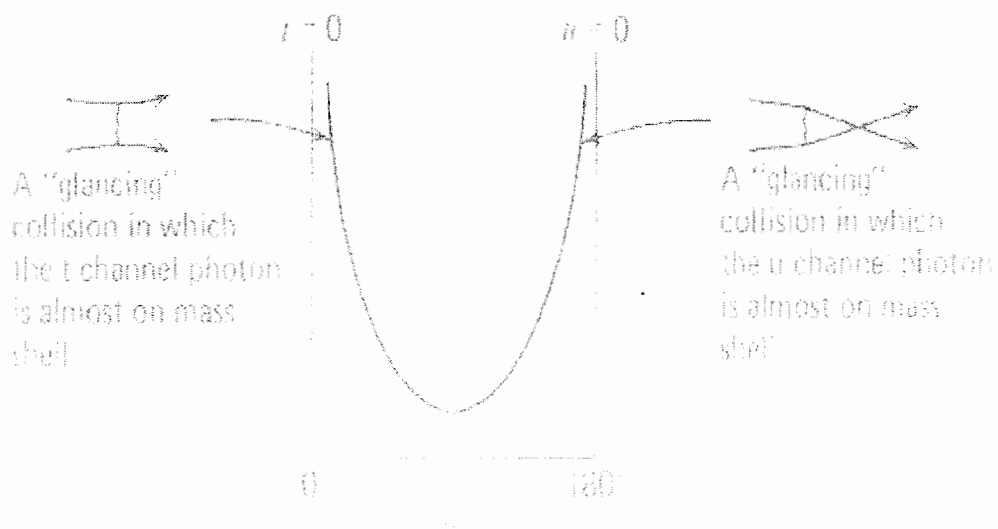


شکل ۱۳-۱ طرح مندل استام

s مربع انرژی کل مرکز جرم فرآیند $AB \rightarrow CD$ است. مناسب است که برهم کنش تحت مطالعه، فرآیند کانال s باشد، در مثال آخر که پراکندگی $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ بود. برهم کنش های تعویض $\overline{AD} \rightarrow \overline{CB}$ و $\overline{DB} \rightarrow \overline{CA}$ کانالهای u و t به ترتیب نامیده می شوند. اجازه دهید به دامنه برای پراکندگی الکترون-الکترون بدون اسپین برگردیم. دامنه $(1-105)$ با انتخاب اینکه فرآیند $AB \rightarrow CD$ باشد استنتاج می شود، یعنی، فرآیند کانال s . در جملاتی از متغیرهای ناورد، $(1-105)$ بصورت زیر درمی آید:

$$\mathcal{M}_{e^-e^-} = e^2 \left(\frac{u-s}{t} + \frac{t-s}{u} \right) \quad (1-110)$$

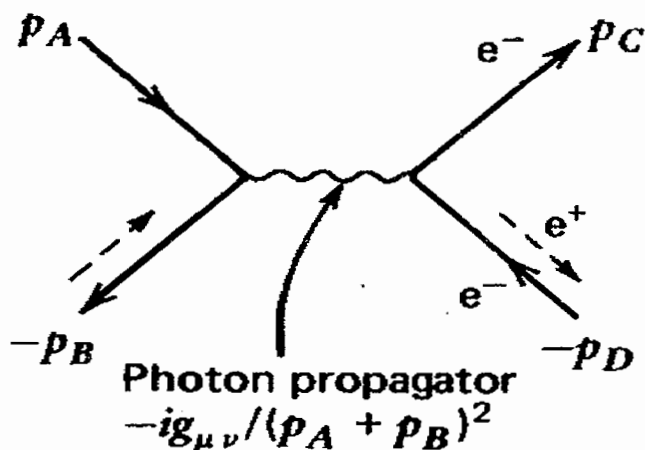
نتیجه سطح مقطع در شکل ۱۴-۱ رسم شده است، و منشأ پیکان های بسمت جلو و بسمت عقب مشخص شده اند؛ $-t$ و $-u$ مربع بردار تکانه انتقال یافته در شکل ۱۰-۱ الف و ۱۰-۱ ج به ترتیب هستند، یعنی تکانه حمل شده توسط فوتون مجازی. هنگامی که فوتون مربع تکانه $(-q^2)$ خیلی کوچک دارد محدوده برهم کنش خیلی بزرگ است. بنابراین برهم کنش های با پیچشهای کوچک با سطوح مقطع بزرگ ظاهر می شوند.



شکل ۱۴-۱ سطح مقطع دیفرانسیلی، $d\sigma/d\Omega$ ، برای پراکندگی الکترون-الکترون

۱-۲-۸- منشأ انتشارگر

در بخش ۱-۲-۴ دیدیم که یک خط فوتون مجازی در نمودار فاینمن با یک انتشارگر $\frac{1}{q^2}$ مشابه است، که q چاربردار تکانه حمل شونده توسط فوتون مجازی است. برای مثال، انتشارگر فوتون در فرآیند نابودی $e^-e^+ \rightarrow \gamma \rightarrow e^-e^+$ در شکل ۱-۱۵، به فرم $\frac{1}{q^2}$ می باشد که $q = p_A + p_B$ توسط پایستگی چار تکانه داده می شود.



شکل ۱-۱۵ نمودار نابودی $e^-e^+ \rightarrow \gamma \rightarrow e^-e^+$ ، که فقط خطوط ذرات (الکترون) رسم شده اند.

در کل (جدا از مشکلات اسپین)، یک ذره با جرم m انتشارگر $\frac{1}{(p^2 - m^2)}$ دارد [1,2,6]. در این مورد فاینمن در سال ۱۹۶۲ توضیح زیبایی بیان نموده است.

بقیه کار، کاملاً موجود در طبیعت است. الکترون ها، میون ها و کوارک ها اسپین $\frac{1}{2}$ دارند. بنابراین آنها در معادله دیراک صدق می کنند، نه در معادله کلاین-گوردن. تکرار فرآیند توصیف شده این بخش برای ذرات صادق در معادله دیراک بوضوح منجر به نتایج اصلاح شده برای عوامل رأس و انتشارگرها می شود، اگرچه فرآیند محاسبات یکسان است.

۳-۱- معادله دیراک

مقدمه :

در حقیقت کوارک ها و لپتون ها ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ هستند . برای مدتی تفکر این بود که معادله کلاین-گوردن تنها شکل نسبیتی معادله شرودینگر بوده تا زمانیکه دیراک چاره ای دیگر پیشنهاد کرد . هدف او این بود که معادله ای ، عکس معادله کلاین-گوردن ، خطی نسبت به $\frac{\partial}{\partial t}$ را بنویسد، همچنین باید نسبت به $\vec{\nabla}$ خطی باشد و بنابراین شکل کلی زیر را نوشت [1,2,3,6,7] :

$$H\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \beta m)\psi \quad (113-1)$$

چهار ضریب β و α_i ($i=1,2,3$) توسط این التزام که ذره آزاد باید در رابطه نسبیتی انرژی-تکانه (۱۳-۱) صدق کند ، تعیین می شوند :

$$H^2\psi = (\vec{p}^2 + m^2)\psi \quad (114-1)$$

معادلات (۱۱۳-۱) و (۱۱۴-۱) معادله دیراک را نشان خواهند داد . از (۱۱۳-۱) داریم :

$$\begin{aligned} H^2\psi &= (\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m)\psi \\ &= (\underbrace{\alpha_i^2}_{\downarrow 1} p_i^2 + \underbrace{(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i)}_0 p_i p_j + \underbrace{(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i)}_0 p_i m + \underbrace{\beta^2}_{\downarrow 1} m^2)\psi \end{aligned} \quad (115-1)$$

که روی اندیسه‌های تکراری جمع می کنیم ؛ با شرط $i > j$ روی جمله دوم . در مقایسه با (۱-۱۱۴) درمی یابیم که

$$\beta, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 \quad \blacksquare$$

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 1 \quad \blacksquare \quad (116-1)$$

از آنجایی که ضرایب β و α_i جابجا نمی شوند ، آنها به آسانی نمی توانند عدد باشند ، در نتیجه منجر به بررسی اپراتورهای ماتریسی روی یک تابع موج ψ می شویم ، که یک بردار ستونی چند

جزئی است. پایین ترین ماتریسهایی که همه نیازها را ارضاء می کنند 4×4 هستند. انتخاب چهار ماتریس $(\bar{\alpha}, \beta)$ منحصر به فرد نیستند. نمایش دیراک-پاولی بطور غالب استفاده می شوند:

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma} \\ \bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (117-1)$$

که I ماتریس یکه 2×2 را یادآوری می کند (که بطور غالب بصورت 1 نوشته می شود) و $\bar{\sigma}$ ماتریسهای پاولی هستند؛

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (118-1)$$

نمایش دیگر، نمایش ویل^{۱۶}، بصورت زیر است؛

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} -\bar{\sigma} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (119-1)$$

بیشتر نتایج، مستقل از انتخاب نمایش هستند [2,3,6]. در حقیقت، تا زمانی که جوابهای روشن معادله را در (۱۱۶-۱) ارائه دهیم از یک نمایش ویژه استفاده می کنیم.

یک بردار ستونی چهار مولفه ای ψ که در معادله دیراک (۱۱۳-۱) صدق می کند، اسپینور دیراک نامیده می شود.

۱-۳-۱- شکل هم وردای معادله دیراک، ماتریسهای γ -دیراکی

با ضرب معادله دیراک، (۱۱۳-۱)، از چپ در β ، بدست می آوریم؛

$$i\beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\beta \bar{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + m\psi \quad (120-1)$$

که ممکن است بصورت زیر نوشته شود؛

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (121-1)$$

که چهار ماتریس γ -دیراکی را معرفی نموده ایم؛

$$\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta \bar{\alpha}) \quad (122-1)$$

^{۱۶} Weyl

بدست می آوریم ؛

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (131-1)$$

اکنون می توانیم یک معادله پیوستگی استنتاج کنیم ، $\partial_\mu j^\mu = 0$ ، با ضرب (131-1) از چپ در $\bar{\psi}$ و (131-1) از راست در ψ و با جمع آنها بدست می آوریم ؛

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu + (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 \quad (132-1)$$

بنابراین می بینیم که ؛

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (133-1)$$

در معادله پیوستگی صدق می کند ، که پیشنهاد می کند باید j^μ با چگالیهای احتمال و شار ، ρ ، \vec{j} ، را مشخص کنیم . چگالی احتمال

$$\rho \equiv j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2 \quad (134-1)$$

اکنون بوضوح مثبت است . اگرچه ، از دستور پاولی-ویسکف در بخش 1-1 ، دیدیم که $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ باید یک چگالی جریان باری را تعریف کند . بنابراین بار $-e$ را در j^μ وارد می کنیم ؛

$$j^\mu = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (135-1)$$

و حال j^μ چگالی جریان (چاربرداری) الکترون محسوب می شود [3,6,7] .

1-3-3- اسپینورهای ذره آزاد

$\partial_\mu \gamma^\mu \psi_i$ را روی (131-1) اثر می دهیم و می بینیم که هریک از چهار جزء ψ_i در معادله کلاین-گوردن صدق می کنند ؛

$$(\square + m^2) \psi_i = 0 \quad (136-1)$$

برای یک ذره آزاد ، می توانیم ویژه جوابهای معادله دیراک به شکل زیر را جستجو کنیم ؛

$$\psi = u(\vec{p}) e^{-i p \cdot x} \quad (137-1)$$

که u یک اسپینور چهار مولفه ای مستقل از x است. با جایگذاری در (۱۲۱-۱) بدست می آوریم؛

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(\bar{p}) = 0 \quad (138-1)$$

یا، با استفاده از فرم کوتاه $A \equiv \gamma^\mu A_\mu$ برای هر چاربرداری A_μ ، بدست می آوریم؛

$$(p - m)u = 0 \quad (139-1)$$

از آنجاییکه به دنبال ویژه بردارهای انرژی هستیم، آسان تر است که از فرم زیر استفاده کنیم،
(۱۱۳-۱)؛

$$Hu = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)u = Eu \quad (140-1)$$

چهار جواب مستقل برای این معادله وجود دارد؛ دو تا برای $E > 0$ و دو تا برای $E < 0$. ابتدا، ذره را در سکون در نظر می گیریم $\vec{p} = 0$. با استفاده از (۱۱۷-۱) داریم؛

$$Hu = \beta mu = \begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{pmatrix} u \quad (141-1)$$

با ویژه مقادیر انرژی $E = m, m, -m, -m$ و ویژه بردارهای

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (142-1)$$

همان طوری که قبلاً گفته بودیم، الکترون، با بار $-e$ بعنوان ذره محسوب می شود. بنابراین دو جواب اول یک الکترون با $E > 0$ را توصیف می کنند. $E < 0$ جوابهای ذره هستند که یک پاد ذره با $E > 0$ را توصیف می کنند (پوزیترون).

برای $\vec{p} \neq 0$ ، با استفاده از (۱۱۷-۱)، (۱۴۰-۱) بفرم زیر در می آید؛

$$Hu = \begin{pmatrix} m & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad (143-1)$$

که u به دو جزء اسپینوری تقسیم شده است، u_B و u_A ، که تبدیل می شود به؛

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} \cdot \bar{p} u_B &= (E - m) u_A \\ \bar{\sigma} \cdot \bar{p} u_A &= (E + m) u_B\end{aligned}\quad (144-1)$$

برای دو جواب $E > 0$ ، $u_A^{(s)} = \chi^{(s)}$ را در نظر می‌گیریم، که؛

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\quad (145-1)$$

اجزای پایینی مشابه u ، توسط معادله دومی (144-1) معین می‌گردند؛

$$u_B^{(s)} = \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{p}}{E + m} \chi^{(s)}\quad (146-1)$$

و بنابراین جواب چهار اسپینور انرژی-مثبت معادله دیراک بصورت زیر هستند؛

$$u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{p}}{E + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad E > 0\quad (147-1)$$

با $s = 1, 2$ ، که N ثابت بهنجارش است. برای جوابهای $E < 0$ ، $u_B^{(s)} = \chi^{(s)}$ را در نظر می

گیریم، و بنابراین از (144-1) داریم؛

$$u_A^{(s)} = \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{p}}{E - m} u_B^{(s)} = -\frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{p}}{|E| + m} \chi^{(s)}\quad (148-1)$$

و از این رو، بدست می‌آوریم؛

$$u^{(s+2)} = N \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{p}}{|E| + m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad E < 0\quad (149-1)$$

برای یک الکترون با اندازه حرکت داده شده \bar{p} ، چهار جواب داریم؛ $u^{(1,2)}$ متناسب با انرژی

مثبت، و $u^{(3,4)}$ متناسب با انرژی منفی. همچنین داریم؛

$$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 0 \quad r \neq s\quad (150-1)$$

با $r, s = 1, 2, 3, 4$.

(۱-۱۴۳) دارای تبهگنی دوگانه فوق العاده ای است ، به این معنا که مشاهده گر دیگری باید وجود داشته باشد که با P, H جابجا شود ، بطوریکه ویژه مقادیر بتوانند حالت‌های متمایز بخود بگیرند .
 با جستجو می بینیم که اپراتور

$$\bar{\Sigma} \cdot \hat{p} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \quad (1-151)$$

با P, H جابجا می شود . \hat{p} بردار یکه در جهت اندازه حرکت است ، بنابراین جزء اسپین

در راستای حرکت ، $\frac{1}{2} \bar{\sigma} \cdot \hat{p}$ ، یک عدد کوانتومی خوب است و می تواند برای برچسب زدن جوابها

بکار رود . این عدد کوانتومی را helicity حالت می نامیم . ویژه مقادیر ممکن λ برای اپراتور

helicity $\frac{1}{2} \bar{\sigma} \cdot \hat{p}$ بصورت زیر هستند [3,6] ؛

$$\lambda = \begin{cases} +\frac{1}{2} & \text{positive helicity} \\ -\frac{1}{2} & \text{negative helicity} \end{cases} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \quad (1-152)$$

با انتخاب فوق ، (۱-۱۴۵) اسپینورهای $\chi^{(s)}$ ، مناسب است که \bar{p} را در امتداد محور z انتخاب

کنیم $\bar{p} = (0, 0, p)$. پس ؛

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma} \cdot \hat{p} \chi^{(s)} = \frac{1}{2} \sigma_3 \chi^{(s)} = \lambda \chi^{(s)} \quad (1-153)$$

با $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ به ترتیب مشابه با $s = 1, 2$.

بوضوح علاقه مند به اندازه حرکت زاویه ای هستیم ، بنابراین در ابتدا باید جابجایی اندازه حرکت

زاویه‌های مداری $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$ با هامیلتونی را جستجو کنیم . با استفاده از $[x_i, p_j] = i \delta_{ij}$ خواهیم

داشت ؛

$$[H, \bar{L}] = -i(\bar{\alpha} \times \bar{p}) \quad (1-154)$$

بنابراین \bar{L} پایسته نیست . اما تعدادی دیگر اندازه حرکت زاویه ای باید وجود داشته باشند . داریم:

$$[H, \bar{\Sigma}] = +2i(\bar{\alpha} \times \bar{p}) \quad , \quad \bar{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix} \quad (155-1)$$

بوضوح نه \bar{L} و نه $\bar{\Sigma}$ پایسته نیستند . با ترکیب آنها ؛

$$\bar{J} = \bar{L} + \frac{1}{2}\bar{\Sigma} \quad (156-1)$$

که اندازه حرکت زاویه ای کل می باشد پایسته است و داریم ؛

$$[H, \bar{J}] = 0 \quad (157-1)$$

و ویژه مقادیر $\pm \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\bar{\Sigma}$ هستند [1,2,3,6,7].

۱-۳-۴- پاد ذرات

دو جواب معادله دیراک ،

$$u^{(1,2)}(\bar{p})e^{-i p \cdot x} \quad (158-1)$$

بوضوح یک الکترون آزاد با انرژی E و اندازه حرکت \bar{p} را توصیف می کند . دو جواب الکترون

انرژی-منفی $u^{(3,4)}$ مرتبط با پاد ذرات می باشند ، پوزیترون . در عوض ، با استفاده از دستور پاد

ذره بخش ۱-۱-۶ یک پوزیترون با انرژی E و اندازه حرکت \bar{p} توسط یک الکترون با $-E$ و

$-\bar{p}$ توصیف می شود ، یعنی ؛

$$u^{(3,4)}(-\bar{p})e^{-i[-p] \cdot x} \equiv v^{(2,1)}(\bar{p})e^{i p \cdot x} \quad (159-1)$$

که $p^0 \equiv E > 0$. یادآوری می کنیم که معادله دیراک برای $u(\bar{p})$ بصورت زیر بود ؛

$$(p - m)u = 0 \quad (160-1)$$

برای یک الکترون با انرژی $-E$ و اندازه حرکت $-\bar{p}$ ، داریم ؛

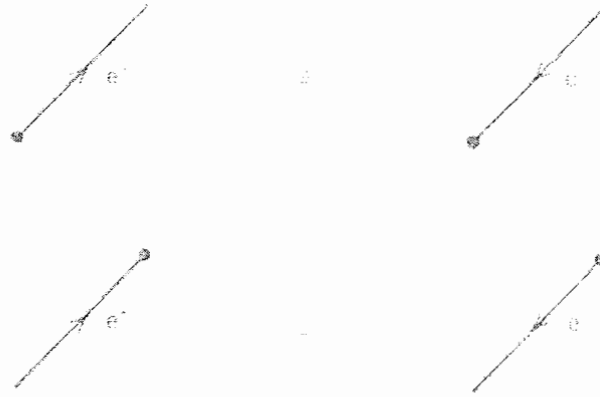
$$(-p - m)u(-\bar{p}) = 0 \quad (161-1)$$

و بنابراین ؛

$$(p + m)v(\bar{p}) = 0 \quad (162-1)$$

تأکید می کنیم در اینجا $p^0 \equiv E > 0$.

همانند قبل ، رسم نمودارهای فاینمن را بطور کلی در جملاتی از حالت‌های ذره (الکترون) ادامه می دهیم . این نتایج را بصورت زیر خلاصه می کنیم :



$$p, \bar{\Sigma}, \lambda$$

$$-p, -\bar{\Sigma}, but + \lambda$$

(۱۶۳-۱)

معادله دیراک برای یک الکترون (با بار $-e$) در یک میدان الکترومغناطیسی بصورت زیر است :

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\psi = 0 \quad (۱۶۴-۱)$$

اکنون ، یک معادله هم ارز برای پوزیترون ($+e$) باید وجود داشته باشد ؛

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi_C = 0 \quad (۱۶۵-۱)$$

یک تشابه یک به یک بین ψ و ψ_C باید وجود داشته باشد [3,6,7] . برای ارتباط ψ_C با ψ ، در

ابتدا مختلط همیوگ (۱۶۴-۱) را در نظر می گیریم ؛

$$[-\gamma^{\mu*} (i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi^* = 0 \quad (۱۶۶-۱)$$

بنابراین ، اگر بتوانیم یک ماتریس پیدا کنیم ، { با $C\gamma^0$ علامت گذاری می شود } ، که در معادله

زیر صدق می کند ؛

$$-(C\gamma^0)\gamma^{\mu*} = \gamma^\mu (C\gamma^0) \quad (۱۶۷-۱)$$

سپس (۱۶۶-۱) می تواند به شکل (۱۶۵-۱) نوشته شود ؛

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m](C\gamma^0\psi^*) = 0 \quad (۱۶۸-۱)$$

و خواهیم داشت :

$$\psi_C = C\gamma^0\psi^* = C\bar{\psi}^T \quad (۱۶۹-۱)$$

که T ترانهاده یک ماتریس را مشخص می کند .

با توجه به دو نمایش (۱۱۷-۱) و (۱۲۲-۱) ماتریسهای γ ، یک انتخاب ممکن برای C بصورت زیر است :

$$C\gamma^0 = i\gamma^2 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \quad (۱۷۰-۱)$$

بعلاوه در این نمایش داریم :

$$\begin{aligned} C^{-1}\gamma^\mu C &= (-\gamma^\mu)^T \\ C &= -C^{-1} = -C = -C^T \\ \bar{\psi}_C &= -\psi^T C^{-1} \end{aligned} \quad (۱۷۱-۱)$$

دیدیم که جریان الکترومغناطیسی بصورت زیر است :

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (۱۷۲-۱)$$

بنابراین جریان مرتبط با میدان همیوگ باری بصورت زیر است :

$$\begin{aligned} j_C^\mu &= -e\bar{\psi}_C\gamma^\mu\psi_C \\ &= +e\psi^T C^{-1}\gamma^\mu C\bar{\psi}^T \\ &= -e\psi^T (\gamma^\mu)^T \bar{\psi}^T \\ &= -(-)e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \quad (۱۷۳-۱)$$

منشأ علامت منفی اضافه شده در خط آخر دقیق اما مهم است . C یک حالت الکترون با انرژی مثبت را به یک حالت الکترون با انرژی منفی تبدیل می کند . در نتیجه ، باید این نیاز را به نتایج فاینمن اضافه کنیم که خودمان یک علامت منفی اضافی برای هر الکترون با انرژی منفی در حالت نهایی قرآیند وارد می کنیم . پس C از رابطه زیر تبعیت می کنند :

$$j_\mu^C (A^\mu)^C = (-j_\mu)(-A^\mu) = j_\mu A^\mu \quad (۱۷۴-۱)$$

۱-۳-۵- نرمالیزاسیون اسپینورها و روابط مکملی

برای فرمیونها نرمالیزاسیون هم وردا را انتخاب می کنیم که در آن $2E$ ذره در واحد حجم داریم ، درست همانند بوزون ها ، یعنی :

$$\int_{\text{unit vol.}} \rho dV = \int \psi^\dagger \psi dV = u^\dagger u = 2E \quad (175-1)$$

که از (۱۳۴-۱) و (۱۳۷-۱) استفاده کرده ایم . بنابراین ، روابط تعامد را بصورت زیر داریم ؛

$$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 2E \delta_{rs} , \quad v^{(r)\dagger} v^{(s)} = 2E \delta_{rs} \quad (176-1)$$

که $s = 1, 2$. اکنون با استفاده از (۱۴۷-۱) ؛

$$u^{(s)\dagger} u^{(s)} = |N|^2 \left[1 + \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right)^2 \right] = |N|^2 \frac{2E}{E+m} \quad (177-1)$$

و بنابراین ثابت نرمالیزاسیون بصورت زیر است ؛

$$N = \sqrt{E+m} \quad (178-1)$$

و بطور مشابه برای $v^{(s)}$.

برای بدست آوردن معادله دیراک برای $\bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0$ ، به همیوگ هریتی (۱۳۸-۱) نیاز داریم ؛

$$u^\dagger \gamma^{\mu\dagger} p_\mu - m u^\dagger = 0 \quad (179-1)$$

اگر معادله را از راست در γ^0 ضرب کنیم وبا یادآوری (۱۲۴-۱) و (۱۲۶-۱) که

$$\gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu \quad (180-1)$$

به رابطه زیر می رسیم ؛

$$\bar{u}(p-m) = 0 \quad (181-1)$$

و بطور مشابه ،

$$\bar{v}(p+m) = 0 \quad (182-1)$$

و با استفاده از (۱۷۶-۱) داریم ؛

$$\bar{u}^{r's'} u^{rs} = 2m , \quad \bar{v}^{r's'} v^{rs} = -2m \quad (183-1)$$

و برای روابط مکملی داریم [1,2] :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) &= p + m \\ \sum_{s=1,2} v^{(s)}(p) \bar{v}^{(s)}(p) &= p - m \end{aligned} \quad (184-1)$$

این روابط ماتریسی 4×4 بطور گسترده در سنجش نمودارهای فاینمن بکار برده می شوند .

۱-۳-۶ Bilinear Covariants

به منظور تشکیل کلی ترین شکل جریان های نامتناقض با هم وردایی لورنتس ، نیاز به فهرست

کردن مقادیر Bilinear به شکل زیر داریم ؛

$$(\bar{\psi})(4 \times 4)(\psi) \quad (185-1)$$

که خواص معین تحت انتقالات لورنتس را داریم ، که ماترس 4×4 یک ضرب از ماتریسهای γ -

می باشد [1,2,3,6,7] . برای آسان تر کردن نوشتار ، عبارت زیر را معرفی می کنیم ؛

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (186-1)$$

که از روابط زیر تبعیت می کند ؛

$$\gamma^{5\dagger} = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = I, \quad \gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0 \quad (187-1)$$

در نمایش دیراک-پاولی (1-117) ،

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (188-1)$$

به رفتار مقادیر Bilinear تحت انتقالات مناسب لورنتس (یعنی چرخشها ، boosts) و تحت

وارونی فضا (اپراتور پاریته) علاقه مند هستیم . یک لیست جامع بصورت زیر است [1,2] :

وارنی فضا ، P تعداد اجزاء

Scalar	$\bar{\psi} \psi$	1	+ under P
Vector	$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$	4	Space compts. : - under P
Tensor	$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$	6	
Axial Vector	$\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi$	4	Space coppts. : + under P
Pesudoscalar	$\bar{\psi} \gamma^5 \psi$	1	- under P

جدول ۱ رفتار مقادیر Bilinear تحت انتقالات مناسب لورنتس

از طریق روابط پادجابجایی ، (۱-۱۲۴) ، تانسور پاد متقارن است ؛

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \quad (1-189)$$

که به ترتیب در افزایش تعداد ماتریسهای γ^μ که بین $\bar{\psi}$ و ψ ساندویچ شده اند مرتب شده است . شبه اسکالر ، حاصلضرب چهار ماتریس است . اگر پنج ماتریس بکار برده شوند ، حداقل دو تا یکسان می باشند ، در موردی که حاصلضرب به سه تا کاهش می یافت و همچنین شامل بردار محوری می شد .

مفید است که چگونگی تشکیل خواص فوق را ببینیم . برای انجام این کار ، معادله دیراک را باید از دید دو ناظر x و x' که توسط انتقال لورنتس بهم مربوط می شوند را مورد بررسی قرار دهیم . از (۱-۱۲۱) داریم ؛

$$i\gamma^\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu} - m\psi(x) = 0 \quad (1-190)$$

$$i\gamma^\mu \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x'^\mu} - m\psi'(x') = 0 \quad (1-191)$$

که $x' = \Lambda x$. یک رابطه باید بصورت زیر وجود داشته باشد ؛

$$\psi'(x') = S\psi(x) \quad (1-192)$$

اگر (۱۳۷-۱) را یادآوری کنیم ، واضح است که S مستقل از x است و فقط اسپینور u عمل می کند . با جایگذاری (۱۹۲-۱) در (۱۹۱-۱) وبا (۱۹۰-۱) بدست می آوریم ؛

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu \quad (193-1)$$

که از $\partial/\partial x^\mu = \Lambda_\nu^\mu \partial/\partial x'^\nu$ استفاده کرده ایم .

۱-۳-۷- فرمیونهای جرم-صفر : نوترینوی دو جزئی

به معادله دیراک (۱۱۳-۱) ،

$$H\psi = (\bar{\alpha}\cdot\bar{p} + \beta m)\psi \quad (194-1)$$

و بحث ابتدای این بخش برمی گردیم . روابط جبری که α_i ها و β مطالبه کرده بودند را استنتاج کردیم ، و یافتیم که آنها می توانند در ماتریسهای 4×4 صدق کنند . اگرچه متذکر می شویم β شامل مورد ذرات جرم-صفر نمی شود و تنها نیاز داریم که در روابط زیر صدق کند ؛

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} , \quad \alpha_i = \alpha_i^\dagger \quad (195-1)$$

این روابط می توانند توسط ماتریسهای پاولی 2×2 تحقیق شوند . معادله دیراک بدون جرم به دو معادله غیر جفت شده برای دو اسپینور $\chi(\bar{p})$ و $\phi(\bar{p})$ تبدیل می شود ؛

$$E\chi = -\bar{\sigma}\cdot\bar{p}\chi \quad (196-1)$$

$$E\phi = +\bar{\sigma}\cdot\bar{p}\phi \quad (197-1)$$

هر معادله بر اساس رابطه انرژی-تکانه پایه ریزی شده است ، $E^2 = \bar{p}^2$ ، و بنابراین یکی جواب انرژی مثبت و دیگری جواب انرژی منفی دارد .

فرض کنید (۱۹۶-۱) معادله موج برای یک فرمیون بدون جرم ، یک نوترینو ، است . جواب انرژی

مثبت ، $E = |\bar{p}|$ است و در رابطه زیر صادق است ؛

$$\bar{\sigma}\cdot\hat{p}\chi = -\chi \quad (198-1)$$

یعنی ، χ یک نوترینوی چپگرد ($\lambda = -\frac{1}{2}$ helicity) با انرژی E و تکانه \bar{p} را توصیف می کند .
 جواب باقی مانده انرژی منفی دارد . برای تفسیر این ، یک جواب نوترینو با انرژی $-E$ و
 تکانه $-\bar{p}$ را در نظر می گیریم که در رابطه زیر صدق می کند ؛

$$\bar{\sigma} \cdot (-\hat{p}) \chi = \chi \quad (1-199)$$

با helicity مثبت ، واز این رو یک پاد نوترینوی راستگرد ($\lambda = +\frac{1}{2}$) با انرژی E و تکانه \bar{p} را
 توصیف می کند . بطور سمبولیک ، می گوئیم (1-196) $\bar{\nu}_R$ و ν_L را توصیف می کند [1,2,3,6] .

۱-۴- الکترو دینامیک ذرات اسپین $\frac{1}{2}$

مقدمه :

در این بخش قصد داریم به هدف نهایی که از ابتدای فصل شروع شده برسیم : محاسبه سطح مقطع برای برهم کنشهای الکترومغناطیسی لپتون ها و فوتون ها ؛ این الکترو دینامیک کوانتومی است .

۱-۴-۱- الکترون برهمکنش کننده با میدان الکترومغناطیسی A^μ

دیدیم که الکترون آزاد با چارتکانه p^μ توسط تابع موج چهار مولفه ای توصیف می شود ؛

$$\psi = u(\vec{p})e^{-ip \cdot x} \quad (200-1)$$

که در معادله دیراک ، (۱۳۸-۱) ، صدق می کند ؛

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = 0 \quad (201-1)$$

برای الکترون در میدان الکترومغناطیسی A^μ تبدیل زیر را خواهیم داشت ؛

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + eA^\mu \quad (202-1)$$

و بدست می آوریم ؛

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = \gamma^0 V \psi \quad (203-1)$$

که اختلال توسط رابطه زیر داده می شود ؛

$$\gamma^0 V = -e\gamma_\mu A^\mu \quad (204-1)$$

با استفاده از تئوری اختلال مرتبه اول ، دامنه پراکندگی الکترون از حالت ψ_i به حالت ψ_f

بصورت زیر است ؛

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int \bar{\psi}_f(x) \mathcal{V}(x) \psi_i(x) d^4x \\ &= ie \int \bar{\psi}_f \gamma_\mu A^\mu \psi_i d^4x \\ &= -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \end{aligned} \quad (205-1)$$

که :

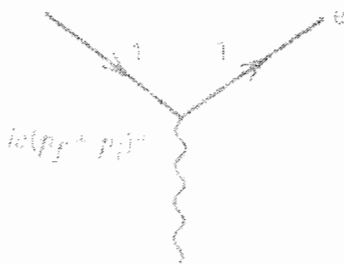
$$j_{\mu}^{fi} = -e \bar{\psi}_f \gamma_{\mu} \psi_i \quad (206-1)$$

$$= -e \bar{u}_f \gamma_{\mu} u_i e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \quad (207-1)$$

با مقایسه این نتایج با (۱-۱۳۵)، می بینیم که j_{μ}^{fi} می تواند بعنوان جریان انتقالی الکترومغناطیسی میان حالت های الکترونی i و f محسوب شود. یادآوری می کنیم که جریان انتقالی که برای یک الکترون " بدون اسپین " بدست آورده بودیم، بصورت زیر بود،

$$j_{\mu}^{fi} = -e(p_f + p_i)_{\mu} e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \quad (208-1)$$

که در قوانین فاینمن شکل ۱-۱۶ الف نشان داده شده است. در شکل ۱-۱۶ ب قوانین مشابه را برای الکترون اسپین $\frac{1}{2}$ نشان دادیم. عامل رأس اکنون یک ماتریس 4×4 در فضای اسپین است که بین اسپینورهای $u^{(s)}(p_i)$ ستونی و $u^{(r)}(p_f)$ سطری که الکترونهای فرودی و خروجی با تکانه p_i ، p_f و حالت های اسپینی اش s و r ، به ترتیب را توصیف می کند، ساندویچ شده است.



(الف) الکترون بدون اسپین



(ب) الکترون اسپین 1/2

شکل ۱-۱۶ عوامل رأس برای قوانین فاینمن

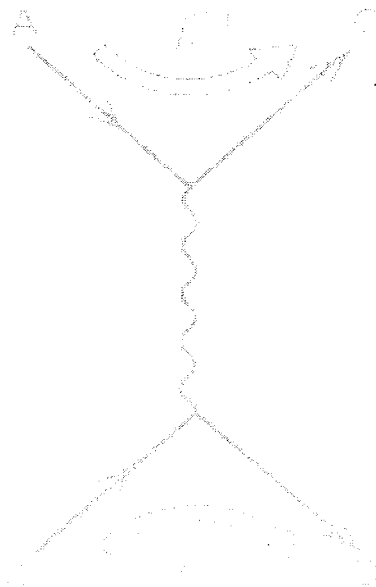
یک الکترون بدون اسپین ، تنها می تواند از طریق بارش با A^μ برهمکنش کند ؛ که جفت شدگی شامل $(p_f + p_i)^\mu$ است . اما الکترون اسپین $\frac{1}{2}$ هم از طریق بارش و هم ممان مغناطیسی اش برهمکنش می کند ؛

$$\bar{u}_f \gamma^\mu u_i = \frac{1}{2m} \bar{u}_f ((p_f + p_i)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p_f - p_i)_\nu) u_i \quad (209-1)$$

معادله (209-1) بعنوان جریان تجزیه گوردن شناخته می شود [1,2,6].

$$1-4-2- \text{پراکندگی مولر } e^-e^- \rightarrow e^-e^-$$

بعنوان یک مثال که چگونه از عامل رأس QED شکل 1-16 پ استفاده می کنیم ، نمودار فاینمن شکل 1-17 برای پراکندگی e^-e^- را رسم می کنیم و محاسبات را انجام می دهیم .



شکل 1-17 نمودار فاینمن برای $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$

با تکرار مراحل در بخش 1-2-2 ، دامنه توسط رابطه زیر داده می شود ؛

¹⁷ Moller

$$T_{fi} = -i \int j_{\mu}^{(1)}(x) \left(-\frac{1}{q^2} \right) j_{(2)}^{\mu} d^4x \quad (210-1)$$

$$= -i(-e\bar{u}_C \gamma_{\mu} u_A) \left(-\frac{1}{q^2} \right) (-e\bar{u}_D \gamma^{\mu} u_B) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D)$$

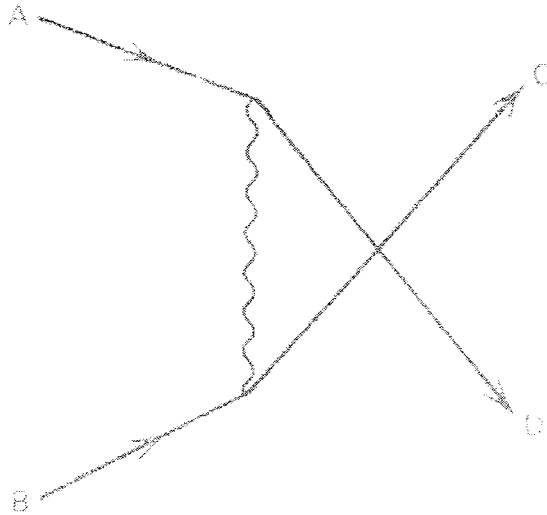
با $q = p_A - p_C$ یادآوری می کنیم دامنه ناورد \mathcal{M} توسط رابطه زیر تعریف می شود؛

$$T_{fi} = -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \mathcal{M} \quad (211-1)$$

و بنابراین داریم؛

$$-i\mathcal{M} = (ie\bar{u}_C \gamma^{\mu} u_A) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) (ie\bar{u}_D \gamma^{\nu} u_B) \quad (212-1)$$

برای پراکندگی e^-e^- نمودار دومی وجود دارد، شکل ۱۸-۱. دامنه از تعویض $C \leftrightarrow D$ بدست آورده می شود.



شکل ۱۸-۱ نمودار دوم برای $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$

بنابراین دامنه کامل (پایین ترین مرتبه) برای پراکندگی مولر بصورت زیر است؛

$$\mathcal{M} = -e^2 \frac{(\bar{u}_C \gamma^{\mu} u_A)(\bar{u}_D \gamma_{\mu} u_B)}{(p_A - p_C)^2} + e^2 \frac{(\bar{u}_D \gamma^{\mu} u_A)(\bar{u}_C \gamma_{\mu} u_B)}{(p_A - p_D)^2} \quad (213-1)$$

برای محاسبه سطح مقطع، جانشینی زیر را انجام دهیم؛

$$|\mathcal{U}|^2 \rightarrow \overline{|\mathcal{U}|^2} \equiv \frac{1}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)} \sum_{\text{all spin states}} |\mathcal{U}|^2 \quad (214-1)$$

که s_A و s_B اسپین ذرات فرودی هستند. یعنی روی اسپینهای ذرات فرودی میانگین می گیریم و روی اسپینهای ذرات در حالت نهایی جمع می بندیم. بوضوح انجام این محاسبات یک وظیفه مهم است [1,2,3,6,7].

برای درگیر شدن با مسئله، ابتدا سطح مقطع برای پراکندگی مولر در حد غیر نسبیتی را محاسبه می کنیم. در این مورد، مجموع اسپین نسبتاً آسان می شود. در حد $|\vec{p}| \rightarrow 0$ ، (1-147) و (1-178)، روابط زیر را می دهند:

$$\text{Ingoing } e^- : u^{(s)} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (215-1)$$

$$\text{Outgoing } e^- : \bar{u}^{(s)} = \sqrt{2m} (\chi^{(s)} \quad 0)$$

که $s = 1, 2$ متناسب با اسپین بالا و پایین در امتداد محور z هستند. با استفاده از نمایش (1-117) که:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \end{pmatrix} \quad (216-1)$$

بدست خواهیم آورد:

$$\bar{u}^{(s)} \gamma^\mu u^{(s)} = \begin{cases} 2m & \text{if } \mu = 0 \\ 0 & \text{if } \mu \neq 0 \end{cases} \quad (217-1)$$

$$\bar{u}^{(s)} \gamma^\mu u^{(s')} = 0 \quad \text{for all } \mu, \text{ if } s \neq s'$$

به معنای دیگر، جهت اسپین الکترون در پراکندگی غیر نسبیتی الکترون ها تغییر نمی کند. این مورد انتظار بود، همانطوریکه الکترون ها غالباً از طریق یک میدان الکتریکی برهم کنش می کنند که نمی تواند جهت اسپین آنها را تغییر دهد. در انرژیها (سرعتها) ی بالا، میدان مغناطیسی است که تلنگری به اسپینها می زند. با وارد کردن (1-217) در (1-213) و با برجسب زدن شش دامنه غیر صفر توسط اسپینهای الکترون بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow\uparrow) &= \mathfrak{M}(\downarrow\downarrow\rightarrow\downarrow\downarrow) = -e^2 4m^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right) \\ \mathfrak{M}(\uparrow\downarrow\rightarrow\uparrow\downarrow) &= \mathfrak{M}(\downarrow\uparrow\rightarrow\downarrow\uparrow) = -e^2 4m^2 \frac{1}{t} \\ \mathfrak{M}(\uparrow\downarrow\rightarrow\downarrow\uparrow) &= \mathfrak{M}(\downarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\downarrow) = e^2 4m^2 \frac{1}{u} \end{aligned} \quad (218-1)$$

که $\frac{1}{u}$ و $\frac{1}{t}$ توسط (1-108) تعریف می شوند، انتشارگرهای فوتون هستند. اکنون می توانیم

جمع روی اسپین (1-214) را انجام دهیم و بدست می آوریم؛

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{1}{4} (4m^2 e^2)^2 \left[\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right)^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} \right] \quad (219-1)$$

در مقیاس مرکز جرم؛

$$\begin{aligned} t &= -2p^2(1 - \cos\theta) = -4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ u &= -2p^2(1 + \cos\theta) = -4p^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (220-1)$$

که θ زاویه پراکندگی است و $p = |\vec{p}_i|$ با $i = A, B, C, D$. با استفاده از این و با وارد کردن (1-)

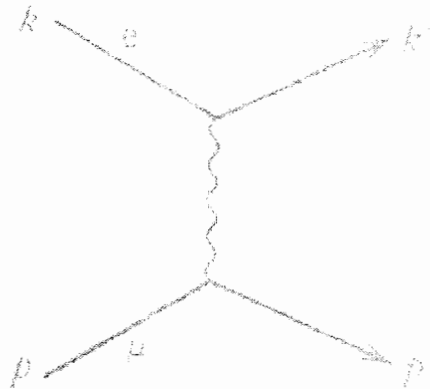
(219) در (1-99)، در می یابیم که سطح مقطع دیفرانسیلی e^-e^- بصورت زیر است؛

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{m^2 \alpha^2}{16p^4} \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right) \quad (221-1)$$

در حد غیر نسبیتی، که $s \cong 4m^2$ و $\alpha \cong e^2/4\pi$.

۳-۴-۱- پراکندگی $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

پراکندگی $e^- \mu^-$ فقط یک نمودار فاینمن (در پایین ترین مرتبه) را دارد، شکل ۱-۱۹.



شکل ۱۹-۱ نمودار فاینمن برای پراکندگی الکترون-میون

$$\mathcal{M} = -e^2 \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \frac{1}{q^2} \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \quad (222-1)$$

برای بدست آوردن سطح مقطع ، مربع \mathcal{M} را بدست آورده و سپس مجموع اسپینی را انجام دهیم . مناسب است که مجموع روی اسپینهای الکترون و میون در (۲۱۴-۱) را بصورت زیر جدا کنیم ؛

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{e^2}{q^4} L_e^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{\muon} \quad (223-1)$$

که تانسور مرتبط با رأس الکترونی بصورت زیر است ؛

$$L_e^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{(e \text{ spins})} [\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] [\bar{u}(k') \gamma^\nu u(k)]^* \quad (224-1)$$

و با یک عبارت مشابه برای $L_{\mu\nu}^{\muon}$ [3,6,7] .

مجموع اسپینی یک کار ملال آور بنظر می رسد . خوشبختانه ، تکنیکهای ماتریسی قابل توجهی برای ساده سازی چنین محاسباتی بنا شده اند . برای شروع ، متذکر می شویم که کرشه دوم در (۲۲۴-۱) برابر است با ؛

$$\begin{aligned} [u^\dagger(k') \gamma^0 \gamma^\nu u(k)]^\dagger &= [u^\dagger(k) \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 u(k)] \\ &= [\bar{u}(k) \gamma^\nu u(k')] \end{aligned} \quad (225-1)$$

که در آن از $\gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\nu$ استفاده کردیم . اکنون ضرب کامل در (۲۲۴-۱) را بوضوح در

جملاتی از عناصر ماتریسی منفرد (برچسب زده شده با α ، β ، ...) می نویسیم ؛

$$L_e^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s'} \underbrace{\bar{u}_\alpha^{(s')}(k')}_{(k'+m)_{\delta\alpha}} \gamma_{\alpha\beta}^\mu \sum_s \underbrace{u_\beta^{(s)}(k) \bar{u}_\gamma^{(s)}(k)}_{(k+m)_{\beta\gamma}} \gamma_{\gamma\delta}^\nu u_\delta^{(s')}(k') \quad (226-1)$$

رابطه مکملی (۱۸۳-۱) اجازه می دهد که مجموع روی اسپینهای الکترون اولیه و نهایی انجام شود . بنابراین L تریس حاصلضرب چهار ماتریس 4×4 می شود ؛

$$L_e^{\mu\nu} = \frac{1}{2} Tr((k' + m)\gamma^\mu (k + m)\gamma^\nu) \quad (227-1)$$

که m جرم الکترون است . برای محاسبه L از قضایای تریس استفاده می کنیم .

۱-۴-۴- قضایای تریس و خواص ماتریسهای γ

یادآوری می کنیم که ماتریسهای γ در جبر جابجایی زیر صدق می کنند ؛

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (228-1)$$

در نتیجه محاسبه تریس حاصلضرب ماتریسهای γ ، حتی می تواند بدون محاسبه صریح ضرب ماتریسی حل شود . قضایای تریس شامل موارد زیر هستند ؛

$$Tr 1 = 4 \quad (229-1)$$

تریس یک عدد فرد از γ_μ ها حذف می شود .

$$Tr(a\cancel{b}) = 4a.b$$

$$Tr(\cancel{a}b\cancel{c}d) = 4[(a.b)(c.d) - (a.c)(b.d) + (a.d)(b.c)]$$

$$Tr \gamma_5 = 0$$

$$(230-1)$$

$$Tr(\gamma_5 \cancel{a}b) = 0$$

$$Tr(\gamma_5 \cancel{a}b\cancel{c}d) = 4i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} a^\mu b^\nu c^\lambda d^\sigma$$

که $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = +1(-1)$ برای $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ یک ترکیب دوره ای زوج (فرد) از $0, 1, 2, 3$ ؛ و 0

اگر دو تا از اندسیها مشابه باشند [1,2] . نتایج مفید دیگر برای آسان سازی محاسبات تریس روابط

زیر می باشند ؛

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \gamma^\mu &= 4 \\
\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu &= -2\not{a} \\
\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu &= 4a \cdot b \\
\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu &= -2\not{c} \not{b} \not{a}
\end{aligned}
\tag{۲۳۱-۱}$$

۱-۴-۵- پراکندگی $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ و $e^-\mu^-$

محاسبه تانسور مرتبط با رأس الکترونی (۲۲۷-۱) با استفاده از قضایای تریس که در (۲۳۰-۱) لیست شده اند برابر است با :

$$\begin{aligned}
L_e^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr}(k' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu) + \frac{1}{2} m^2 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) \\
&= 2(k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - (k' \cdot k - m^2) g^{\mu\nu})
\end{aligned}
\tag{۲۳۲-۱}$$

محاسبه $L_{\mu\nu}^{muon}$ در (۲۲۳-۱) نیز مشابه است ، و می رسیم به :

$$L_{\mu\nu}^{muon} = 2(p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - (p' \cdot p - M^2) g_{\mu\nu})
\tag{۲۳۳-۱}$$

که M جرم میون است . با تشکیل ضرب (۲۳۲-۱) و (۲۳۳-۱) سرانجام به فرم دقیق برای میانگین اسپینی دامنه $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ می رسیم ، (۲۲۳-۱) :

$$\begin{aligned}
|\overline{|\mathcal{M}|^2}| &= \frac{8e^4}{q^4} [(k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p')] \\
&\quad - m^2 p' \cdot p - M^2 k' \cdot k + 2m^2 M^2
\end{aligned}
\tag{۲۳۴-۱}$$

در حد نسبیتی (خیلی بالا) ، از جملات شامل m^2 و M^2 صرف نظر می کنیم ، بنابراین :

$$|\overline{|\mathcal{M}|^2}| = \frac{8e^4}{(k-k')^4} [(k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p')]
\tag{۲۳۵-۱}$$

بعلاوه ، در این حد ، متغیرهای (مندل استام) (۱۰۸-۱) بصورت زیر در می آیند :

$$\begin{aligned}
s &\equiv (k+p)^2 \cong 2k \cdot p \cong 2k' \cdot p' \\
t &\equiv (k-k')^2 \cong -2k \cdot k' \cong -2p \cdot p' \\
u &\equiv (k-p')^2 \cong -2k \cdot p' \cong -2k' \cdot p
\end{aligned}
\tag{۲۳۶-۱}$$

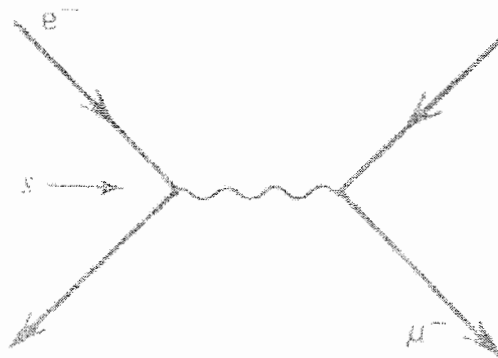
بنابراین ، در انرژیهای خیلی بالا ، پراکندگی $e^-\mu^-$ ، (۲۳۵-۱) ، توسط رابطه زیر داده می شود :

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2} \quad (237-1)$$

همچنین دامنه برای $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ با توجه به نتیجه فوق برای $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ را توسط جابجایی بدست آوریم؛ تغییر لازم $k' \leftrightarrow -p$ ، یعنی $s \leftrightarrow t$ در (237-1)، و بدست می آوریم؛

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2} \quad (238-1)$$

که اکنون $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ یک فرآیند کانال- s است. نمودار مشابه در شکل ۲۰-۱ ترسیم شده است.



شکل ۲۰-۱ نمودار فاینمن برای $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

در مقیاس مرکز جرم، داریم [8,9,10,11]؛

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 s} 2e^4 \left[\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \right] \quad (239-1)$$

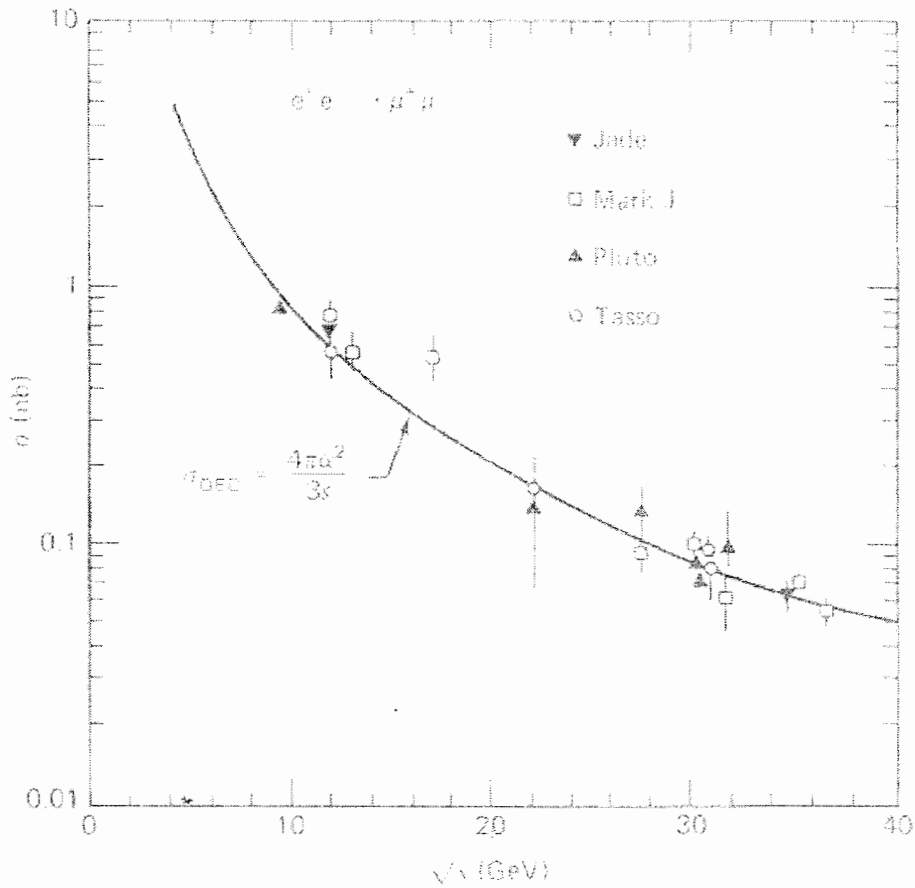
که کمیت داخل کروشه $(t^2 + u^2)/s^2$ است. با استفاده از $\alpha = e^2/4\pi$ ، تبدیل به فرم زیر می شود؛

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{\alpha^2}{4s} [1 + \cos^2 \theta] \quad (240-1)$$

برای بدست آوردن سطح مقطع برهم کنش، روی θ و φ انتگرال می گیریم؛

$$\sigma(e^-e^- \rightarrow \mu^-\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (241-1)$$

مقایسه ای از این نتایج با داده های PETRA در شکل ۱-۲۱ نشان داده شده است .



شکل ۱-۲۱ سطح مقطع کل برای $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

معادله (۱-۲۱۴) می تواند به فرم عددی زیر نوشته شود :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \cong \frac{20(nb)}{E_b^2 (in GeV^2)} \quad (۱-۲۴۲)$$

که E_b انرژی باریکه الکترونی و پوزیترونی است [1,2,9,10,11].

۱-۴-۶ $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ در مقیاس آزمایشگاهی

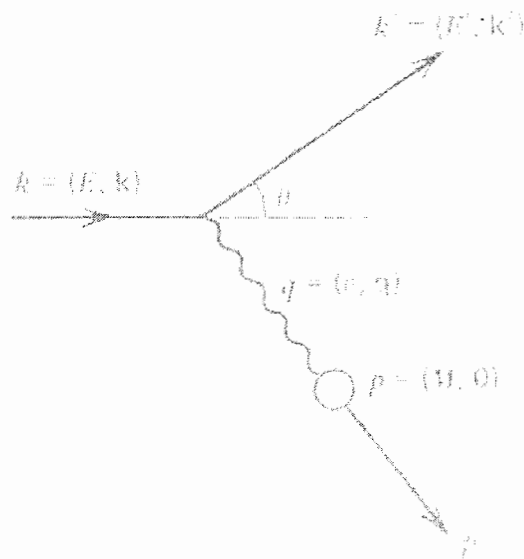
مفید است که سینماتیک مقیاس آزمایشگاهی را معرفی کنیم . یعنی مقیاسی که در آن میون ابتدایی در حال سکون است . بنابراین می توانیم این نتایج را برای پراکندگی الکترون-کوارک که ساختمان هادرونی را جستجو می کنیم ، بکار ببریم .

به فرمول دقیق (۲۳۴-۱) ، برای $e^-(k) + \mu^-(p) \rightarrow e^-(k') + \mu^-(p')$ برمی گردیم و از جملاتی که شامل جرم الکترون m هستند صرف نظر می کنیم ؛

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{8e^4}{q^4} [(k'.p')(k.p) + (k'.p)(k.p') - M^2 k'.k] \\ &= \frac{8e^4}{q^4} \left[-\frac{1}{2} q^2 (k.p - k'.p) + 2(k'.p)(k.p) + \frac{1}{2} M^2 q^2 \right] \end{aligned} \quad (243-1)$$

که $q = k - k'$. برای بدست آوردن خط آخر از $p' = k - k' + p$ ، $k^2 = k'^2 \cong 0$ و $q^2 \cong -2k.k'$ استفاده کردیم .

می خواهیم سطح مقطع را در مقیاس آزمایشگاهی محاسبه کنیم ، مقیاسی که در آن میون در ابتدا ساکن است ، $p = (M, \vec{0})$. تکانه این ذره در شکل ۲۲-۱ نشان داده شده است .



شکل ۲۲-۱ فرآیند $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ در مقیاس آزمایشگاهی

با محاسبه (۲۴۳-۱) در مقیاس آزمایشگاهی ، بدست می آوریم ؛

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{8e^4}{q^4} \left(-\frac{1}{2}q^2 M(E-E') + 2EE'M^2 + \frac{1}{2}M^2 q^2 \right) \\
&= \frac{8e^4}{q^4} 2M^2 E'E \left\{ 1 + \frac{q^2}{4EE'} - \frac{q^2}{2M^2} \frac{M(E-E')}{2EE'} \right\} \quad (244-1) \\
&= \frac{8e^4}{q^4} 2M^2 E'E \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}
\end{aligned}$$

برای رسیدن به خط آخر از روابط سینماتیکی زیر استفاده کرده ایم :

$$q^2 \cong -2k \cdot k' \cong -2EE'(1 - \cos \theta) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (245-1)$$

همچنین با مربع $q + p = p'$ ، بدست می آوریم :

$$q^2 = -2p \cdot q = -2vM \quad \text{so} \quad v = E - E' = -\frac{q^2}{2M} \quad (246-1)$$

برای محاسبه سطح مقطع $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ از (۹۰-۱) استفاده می کنیم :

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{1}{(2E)(2M)} \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{4\pi^2} \frac{d^3 k'}{2E'} \frac{d^3 p'}{2p'_0} \delta^{(4)}(p+k-p'-k') \\
&= \frac{1}{4ME} \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{4\pi^2} \frac{1}{2} E' dE' d\Omega \frac{d^3 p'}{2p'_0} \delta^{(4)}(p+q-p') \quad (247-1)
\end{aligned}$$

و همچنین داریم :

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^3 p'}{2p'_0} \delta^{(4)}(p+q-p') &= \int d^3 p' d p'_0 \delta^{(4)}(p+q-p') \theta(p'_0) \delta(p'^2 - M^2) \\
&= \frac{1}{2M} \delta\left(v + \frac{q^2}{2M}\right) \quad (248-1) \\
&= \frac{1}{2MA} \delta\left(E' - \frac{E}{A}\right)
\end{aligned}$$

که $A = 1 + (2E/M) \sin^2 \frac{\theta}{2}$ و تابع پله ای $\theta(x)$ ، 1 است اگر $x > 0$ و در غیر اینصورت 0 .

با جایگذاری (۲۴۴-۱) در (۲۴۷-۱) و با استفاده از (۲۴۸-۱) ، بدست می آوریم :

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{(2\alpha E')^2}{q^4} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \delta\left(v + \frac{q^2}{2M}\right) \quad (249-1)$$

با استفاده از (۲۴۸-۱)، روی dE' انتگرال گیری می کنیم و q^2 را توسط (۲۴۵-۱) جایگذاری می کنیم و سرانجام به فرمول زیر برای سطح مقطع دیفرانسیلی برای پراکندگی $e^- \mu^-$ در مقیاس آزمایشگاهی می رسیم [1,2,8,9,10,11]:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{lab} = \left(\frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{E'}{E} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (250-1)$$

یک تکنیک قدرتمند برای کاوش ساختار داخلی یک هدف، بمباران کردن آن با یک باریکه از الکترونهاى انرژی بالا و مشاهده توزیع زاویه ای الکترون و انرژی الکترون پراکنده شده می باشد. چنین آزمایشاتی بارها منجر به پیشرفتهای بزرگی در فهم مان از ساختار ماده شده است. در ادامه توصیف می کنیم که چگونه این روش ساختار پروتون را فاش می کند و معادله (۲۵۰-۱) نقش اصلی در این داستان بازی می کند [1,2,3,4].

جدول ۲ قوانین فاینمن برای $i\mathcal{L}$ -

عامل ضربی		
		خطوط خارجی
1		بوزون (یا پاد بوزون) اسپین 0
u, \bar{u}		فرمیون اسپین $\frac{1}{2}$
$\bar{\nu}, \nu$		پاد فرمیون اسپین $\frac{1}{2}$
$\varepsilon_\mu, \varepsilon_\mu^*$		فوتون اسپین 1
		خطوط داخلی - انتشارگرها
$\frac{i}{p^2 - m^2}$		بوزون اسپین 0
$\frac{i(p+m)}{p^2 - m^2}$		فرمیون اسپین $\frac{1}{2}$
$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$		فوتون اسپین 1
		عوامل رأس
$-ie(p+p')^\mu$		فوتون - اسپین 0 (بار $-e$)
$ie\gamma^\mu$		فوتون - اسپین $\frac{1}{2}$ (بار $-e$)

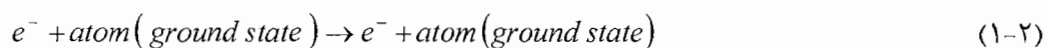
فصل دوم

فرم فاکتورها

- ❧ فرم فاکتور اتمی (پراکندگی الکترون از روی بار استاتیکی)
- ❧ فرم فاکتور هسته ای (الکتریکی)
- ❧ فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون

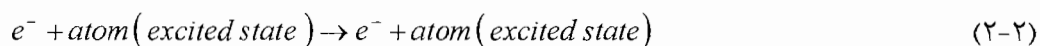
۲-۱- فرم فاکتور^۱ اتمی (پراکندگی الکترون از روی بار استاتیکی)

برهم کنش باریکه الکترونی با اتم هایی که فرض می شود در حالت پایه شان قرار دارند را در نظر می گیریم . اگر اتم های نهایی در حالت پایه بمانند ، الکترون فرودی می تواند بطور کشسان پراکنده شود ؛



این فرآیند مثالی از پراکندگی کشسان است . در حوزه ای که بتوان اتم را بی نهایت سنگین در نظر گرفت ، انرژی جنبشی الکترون تغییر نمی کند .

اتم هدف ممکن است به حالت برانگیخته هم برود ؛



در این حالت از پراکندگی ناکشسان صحبت می کنیم ، زیرا انرژی جنبشی الکترون خروجی کمتر از الکترون فرودی است ، این اختلاف صرف برانگیختگی اتم هدف شده است .

کت اولیه الکترون بعلاوه سیستم اتمی را بصورت زیر می نویسیم ؛

$$|\bar{k}, 0\rangle \quad (3-2)$$

^۱ Form Factor

که در آن \vec{k} بر بردار موج الکترون فرودی، 0 بر حالت پایه اتمی دلالت دارد. به بیان دقیقتر، (۳-۲) بصورت حاصلضرب مستقیم کت الکترون فرودی $|\vec{k}\rangle$ و کت حالت پایه اتمی $|0\rangle$ است. تابع موج مورد نظر بصورت زیر است؛

$$\frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \psi_0(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_z) \quad (۴-۲)$$

که در آن برای موج تخت از بهنجارش جعبه ای استفاده کرده ایم [5]. به حالت نهایی الکترون با بردار موج معین \vec{k}' علاقمند هستیم. کت نهایی و تابع موج متناظر آن عبارتند از؛

$$|\vec{k}', n\rangle, \quad \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \psi_n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_z) \quad (۵-۲)$$

که در آن $n=0$ برای پراکندگی کشسان و $n \neq 0$ برای پراکندگی ناکشسان است [1,5]. از نظریه اختلال فوراً سطح مقطع دیفرانسیلی را می نویسیم؛

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(0 \rightarrow n) &= \frac{1}{(\hbar k/mL^3)} \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \vec{k}'n | V | \vec{k}0 \rangle \right|^2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \left(\frac{k'm}{\hbar^2} \right) \\ &= \left(\frac{k'}{k} \right) L^6 \left| \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \langle \vec{k}', n | V | \vec{k}, 0 \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (۶-۲)$$

برای پراکندگی ناکشسان، در حالت کلی داریم $k \equiv |\vec{k}| \neq k' \equiv |\vec{k}'|$.

الکترون فرودی می تواند با هسته که فرض می شود در مبدأ قرار گرفته، برهم کنش کند؛ همچنین می تواند با هر یک از الکترون های اتمی نیز برهم کنش داشته باشد. پس می توان V را بصورت زیر نوشت؛

$$V = -\frac{Ze^2}{r} + \sum_i \frac{e^2}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \quad (۷-۲)$$

در اینجا به دلیل یکسان بودن الکترون های فرودی با هر یک از الکترون های اتمی، پیچیدگی هایی حادث می شوند؛ بررسی دقیق آن مشکل است. خوشبختانه برای الکترون های سریع

مجازیم که مسئله یکسان بودن را نادیده بگیریم ، زیرا بین الکترون حالت مقید و الکترون فرودی در فضای تکانه همپوشانی بسیار کمی وجود دارد . باید عنصر ماتریسی $\langle \bar{k}'n|V|\bar{k}0\rangle$ را محاسبه کنیم که بطور صریح عبارتست از ؛

$$\begin{aligned} \langle \bar{k}'n|V|\bar{k}0\rangle &= \frac{1}{L^3} \int d^3x e^{i\bar{q}\cdot\bar{x}} \left\langle n \left| -\frac{Ze^2}{r} + \sum_i \frac{e^2}{|\bar{x}-\bar{x}_i|} \right| 0 \right\rangle \\ &= \frac{1}{L^3} \int d^3x e^{i\bar{q}\cdot\bar{x}} \prod_i \int d^3x_i \psi_n^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_z) \\ &\quad \times \left[-\frac{Ze^2}{r} + \sum_i \frac{e^2}{|\bar{x}-\bar{x}_i|} \right] \psi_0(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_z) \end{aligned} \quad (8-2)$$

با $\bar{q} \equiv \bar{k} - \bar{k}'$.

حال اجازه دهید ببینیم چگونه باید عنصر ماتریسی جمله اول $-Ze^2/r$ ، که در آن r به معنای $|\bar{x}|$ است را محاسبه کرد . در ابتدا توجه می کنیم که این عبارت ، پتانسیل بین الکترون فرودی و هسته است و مستقل از مختصات الکترونها ایتمی می باشد . پس می توان در (8-2) ،

$$\prod_i \int d^3x_i \quad (9-2)$$

را از انتگرال گیری خارج کرد و برای آنچه باقی می ماند بدست آورد ؛

$$\langle n|0\rangle = \delta_{n0} \quad (10-2)$$

بعبارت دیگر ، این جمله فقط در پراکندگی کشسان ، یعنی وقتی که اتم هدف غیر برانگیخته باقی بماند ، سهم دارد . در حالت کشسان ، همچنان باید از $e^{i\bar{q}\cdot\bar{x}}/r$ نسبت به \bar{x} انتگرال بگیریم که همان تبدیل فوریه گرفتن از پتانسیل کولنی است ؛

$$\int d^3x \frac{e^{i\bar{q}\cdot\bar{x}}}{r} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int d^3x \frac{e^{i\bar{q}\cdot\bar{x} - \mu r}}{r} = \frac{4\pi}{q^2} \quad (11-2)$$

برای جمله دوم در (8-2) ، می توان تبدیل فوریه $1/|\bar{x}-\bar{x}_i|$ را حساب کرد . این کار را می توان با تغییر متغیر $\bar{x} \rightarrow \bar{x} + \bar{x}_i$ انجام داد ؛

$$\sum_i \int \frac{d^3x e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{x}-\vec{x}_i|} = \sum_i \int \frac{d^3x e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_i)}}{|\vec{x}|} = \frac{4\pi}{q^2} \sum_i e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}_i} \quad (12-2)$$

توجه داشته باشید که این رابطه همان تبدیل فوریه پتانسیل کولنی است، که در تبدیل چگالی الکترونی ناشی از الکترونهاى اتمى که \vec{x}_i قرار گرفته اند هم ضرب شده است؛

$$\rho_{atom}(\vec{x}) = \sum_i \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_i) \quad (13-2)$$

فرم فاکتور $F_n(\vec{q})$ برای برانگیختگی از $|0\rangle$ به $|n\rangle$ را بصورت زیر تعریف می کنند [1,2,5,10,11]؛

$$ZF_n(\vec{q}) \equiv \left\langle n \left| \sum_i e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}_i} \right| 0 \right\rangle \quad (14-2)$$

در حد $\vec{q} \rightarrow 0$ ، برای $n=0$ داریم؛

$$\frac{1}{Z} \left\langle n \left| \sum_i e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}_i} \right| 0 \right\rangle \rightarrow 1 \quad (15-2)$$

بنابراین فرم فاکتور در حالت پراکندگی کشسان به سمت واحد میل می کند. با توجه به تعامد بین $|n\rangle$ و $|0\rangle$ ، برای $n \neq 0$ (پراکندگی ناکشسان) $F_n(\vec{q}) \rightarrow 0$ هرگاه $\vec{q} \rightarrow 0$. پس می توان عناصر ماتریسی در (2-8) را بصورت زیر نوشت؛

$$\int d^3x e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \left\langle n \left| \left(-\frac{Ze^2}{r} + \sum_i \frac{e^2}{|\vec{x}-\vec{x}_i|} \right) \right| 0 \right\rangle = \frac{4\pi Ze^2}{q^2} [-\delta_{n0} + F_n(\vec{q})] \quad (16-2)$$

سرانجام در موقعیتی هستیم که سطح مقطع دیفرانسیلی را برای پراکندگی ناکشسان (یا کشسان) الکترونها توسط اتم بنویسیم؛

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(0 \rightarrow n) &= \left(\frac{k'}{k} \right) \left| \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{4\pi Ze^2}{q^2} [-\delta_{n0} + F_n(\vec{q})] \right|^2 \\ &= \frac{4m_e^2}{\hbar^4} \frac{(Ze^2)^2}{q^4} \left(\frac{k'}{k} \right) [-\delta_{n0} + F_n(\vec{q})]^2 \end{aligned} \quad (17-2)$$

برای پراکندگی ناکشسان جمله δ_{n0} سهمی ندارد ، و سطح مقطع دیفرانسیلی را بر حسب شعاع بوهر

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{e^2 m_e} \quad (18-2)$$

بصورت زیر می نویسیم ؛

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(0 \rightarrow n) = 4Z^2 a_0^2 \left(\frac{k'}{k}\right) \frac{1}{(qa_0)^4} |F_n(\bar{q})|^2 \quad (19-2)$$

اغلب بجای $d\sigma/d\Omega$ از $d\sigma/dq$ استفاده می شود ؛ با استفاده از

$$q^2 = |\bar{k} - \bar{k}'|^2 = k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \theta \quad (20-2)$$

و $dq = -d(\cos \theta)kk'/q$ می توان نوشت ؛

$$\frac{d\sigma}{dq} = \frac{2\pi q}{kk'} \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (21-2)$$

۲-۲- فرم فاکتور هسته ای (الکتریکی)

برای $q \approx 10^9 \text{ cm}^{-1} - 10^{10} \text{ cm}^{-1}$ ، برانگیختگی اتم ها ناشی از پراکندگی ناکشسان اهمیت دارد [1,2,5,7]. اگر q بسیار بزرگ باشد ، سهم ناشی از $F_0(\bar{q})$ یا $F_n(\bar{q})$ بسیار سریع افت می کند . در q های بغایت بزرگ ، که در آن q از مرتبه $10^{12} \text{ cm}^{-1} \approx 1/R_{nucleus}$ است ، ساختار هسته بسیار مهم می شود . در اینجا باید پتانسیل کولنی ناشی از هسته نقطه ای را با پتانسیل کولنی ناشی از یک جسم بسیط جایگزین کنیم ؛

$$-\frac{Ze^2}{r} \rightarrow -Ze^2 \int \frac{d^3x' \rho(r')}{|\bar{x} - \bar{x}'|} \quad (22-2)$$

که در آن $\rho(r)$ توزیع بار هسته ای است و آن چنان بهنجار شده که ؛

$$\int d^3x' \rho(r') = 1 \quad (23-2)$$

هسته نقطه گونه را می توان به عنوان حالت خاصی با

$$N(r') = \delta^{(3)}(r') \quad (24-2)$$

در نظر گرفت. می توان با مقایسه با (۱۱-۲) تبدیل فوریه سمت راست (۲۲-۲) را محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} Ze^2 \int d^3x \int \frac{d^3x' e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \rho(r')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} &= Ze^2 \int d^3x' e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}'} \rho(r') \int \frac{d^3x e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{r} \\ &= Ze^2 \frac{4\pi}{q^2} F_{nucleus}(\vec{q}) \end{aligned} \quad (25-2)$$

که در قدم اول مختصات را جابجا کردیم $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{x}'$ و سپس قرار دادیم:

$$F_{nucleus} = \int d^3x e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \rho(r) \quad (26-2)$$

پس می توان انحراف از فرمول راترفورد^۲، که ناشی از اندازه محدود هسته ها است، را بدست آورد:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford} |F(\vec{q})|^2 \quad (27-2)$$

که در آن $(d\sigma/d\Omega)_{Rutherford}$ سطح مقطع دیفرانسیلی برای پراکندگی الکتریکی الکترون ها از هسته های نقطه گونه با بار $Z|e|$ است. برای مقادیر کوچک q داریم:

$$\begin{aligned} F_{nucleus}(\vec{q}) &= \int d^3x \left(1 + i\vec{q}\cdot\vec{x} - \frac{1}{2}q^2 r^2 (\hat{q}\cdot\hat{r})^2 + \dots \right) \rho(r) \\ &= 1 - \frac{1}{6}q^2 \langle r^2 \rangle_{nucleus} + \dots \end{aligned} \quad (28-2)$$

به دلیل تقارن کروی، جمله $\vec{q}\cdot\vec{x}$ صفر می شود و در جمله q^2 از این واقعیت که میانگین زاویه

ای $\cos^2 \theta$ (که θ زاویه بین \hat{q} و \hat{r} است) $\frac{1}{3}$ است

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \cos^2 \theta = \frac{1}{3} \quad (29-2)$$

² Rutherford

استفاده کرده ایم. کمیت $\langle r^2 \rangle_{nucleus}$ را بعنوان شعاع میانگین مربعی می شناسیم. از همین طریق می توان اندازه هسته و همچنین پروتون را اندازه گرفت. در مورد پروتون، اثر اسپین (گشتاور مغناطیسی) نیز مهم است [5,6,7].

۲-۳- فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی^۳ پروتون

بحث فوق نمی تواند بطور مستقیم برای نتیجه دادن ساختمان پروتون بکار برده شود. اولاً، گشتاور مغناطیسی پروتون در پراکندگی الکترون درگیر می شود، نه تنها بار آن. دوماً، پروتون استاتیک نیست، بلکه تحت بمباران الکترونی پس زده خواهد شد. اگر پروتون یک بار نقطه ای e با گشتاور مغناطیسی $\frac{e}{2M}$ بود، همچنان جواب را می دانیم. می توانیم جواب برای پراکندگی الکترون-میون را در نظر بگیریم، (۱-۲۵۰)، و به آسانی جرم میون را توسط پروتون جایگزین کنیم؛

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{lab} = \left(\frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{E'}{E} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (۲-۳۰)$$

که عامل

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (۲-۳۱)$$

توسط (۱-۲۴۸) داده می شود، از پس زنی هدف بر می آید.

با کپی برداری از محاسبات سطح مقطع الکترون-میون، پایین ترین مرتبه دامنه برای پراکندگی الکترون-پروتون، شکل ۲-۱، توسط رابطه زیر داده می شود؛

$$T_{fi} = -i \int j_{\mu} \left(-\frac{1}{q^2} \right) J^{\mu} d^4x \quad (۲-۳۲)$$

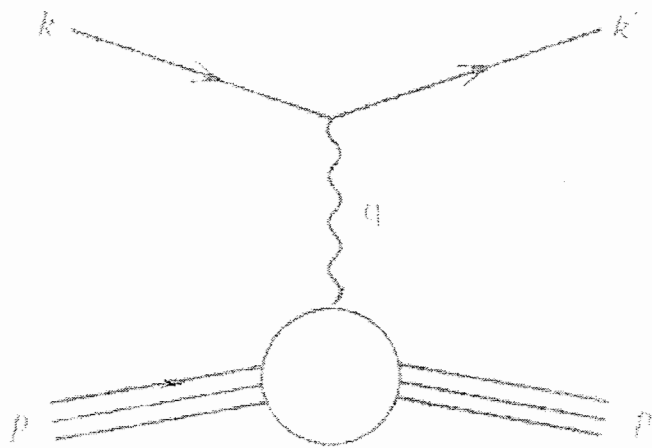
³ Electromagnetic Form Factors

که $q = p' - p$ و جریانهای گذار الکترون و پروتون بترتیب بصورت زیر هستند؛

$$j^\mu = -e\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)e^{i(k'-k)\cdot x} \quad (2-33)$$

$$J^\mu = e\bar{u}(p')[\]u(p)e^{i(p'-p)\cdot x} \quad (2-34)$$

(۱-۲۰۷) را ببینید .



شکل ۱-۲ پایین ترین مرتبه پراکندگی کشسان الکترون-پروتون

از آنجایی که پروتون دارای یک ساختار گسترده می باشد، نمی توانیم براکت در (۲-۳۴) را توسط γ^μ ، همانند آنچه برای ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ در (۲-۳۳)، جایگزین کنیم. اما می دانیم که J^μ یک چها بردار لورنتس باشد، بنابراین باید از کلی ترین فرم چاربرداری که از p ، p' و q می تواند ساخته شود و ماتریسهای γ -دیراک که بین u و \bar{u} ساندویچ می شوند، استفاده کنیم. فقط دو جمله مستقل وجود دارد؛ γ^μ و $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ ، و ضرائب آنها که توابعی از q^2 (تنها متغیر عددی در رأس پروتون است) هستند. جملات شامل γ^5 توسط پایستگی پاریته کنار گذاشته می شوند [5,6,7,8]. بنابراین، بطور کلی، ممکن است براکت (۲-۳۴) را در فرم زیر بنویسیم؛

$$[] = \left[F_1(q^2) \not{p}^\mu + \frac{\kappa}{2M} F_2(q^2) i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] \quad (35-2)$$

F_1 و F_2 فرم فاکتورهای پاولی و دیراک نامیده می شوند که مستقل می باشند و κ گشتاور مغناطیسی anomalous است [1,2,5,8]. می بینیم که همچنان $\partial_\mu J^\mu = 0$ برای $q^2 \rightarrow 0$ ، یعنی هنگامی که با فوتونهای طول موج بلند تحقیق می کنیم، هیچ تفاوتی ایجاد نمی کند که پروتون ساختاری در مرتبه یک فرمی دارد. بطور موثر یک ذره با بار e و گشتاور مغناطیسی $(1+\kappa)e/2M$ را می بینیم که κ ، گشتاور anomalous، 1.79 اندازه گیری می شود. فاکتورها در (35-2) بنابراین در این حد باید آن چنان انتخاب شوند که؛

$$F_1(0) = 1, \quad F_2(0) = 0 \quad (36-2)$$

و مقادیر مشابه برای نوترون $F_1(0) = 0, F_2(0) = 0$ هستند و بصورت تجربی $\kappa_n = -1.91$. اگر (35-2) را برای محاسبه سطح مقطع دیفرانسیلی برای پراکندگی الکترون-پروتون بکار ببریم، به یک عبارتی مشابه با (30-2) دست می یابیم؛

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{lab} = \left(\frac{\alpha^2}{2E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{E'}{E} \times \left\{ \left(F_1^2 - \frac{\kappa^2 q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} (F_1 + \kappa F_2)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (37-2)$$

این فرمول بعنوان فرمول روزنیلاس⁴ شناخته می شود [2,12,13]. فرم فاکتورهای پاولی و دیراک $F_{1,2}(q^2)$ ، ناشناسی مان از جزئیات ساختار پروتون، نشان داده شده توسط حباب در شکل 8-2، را مشخص می کند. این فرم فاکتورها می توانند بطور تجربی با اندازه گیری $d\sigma/d\Omega$ بعنوان تابعی از θ و q^2 مشخص شوند. توجه کنید اگر پروتون یک ذره نقطه ای شبیه میون بوده، پس $\kappa = 0$ و $F_1(q^2) = 1$ برای همه q^2 و (37-2) به (30-2) رجوع خواهد شد.

⁴ Rosenbluth

در عمل ، بهتر است از ترکیب $F_{1,2}$ استفاده کنیم ؛

$$G_E \equiv F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2 \quad (38-2)$$

$$G_M \equiv F_1 + \kappa F_2$$

و معادله (37-2) بصورت زیر در می آید ؛

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{lab} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (39-2)$$

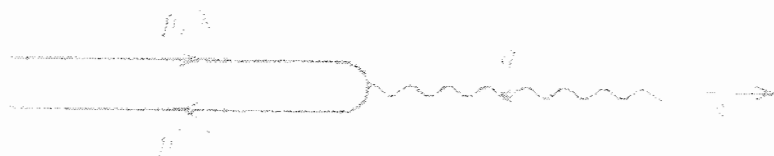
با $\tau \equiv -q^2/4M^2$ [12,13].

این فرم فاکتورهای پروتون بعنوان تعمیمی از فرم فاکتور غیر نسبیتی معرفی شده در بخش 2-2 محسوب می شوند و بنابراین ، زیبا خواهد بود اگر تبدیلات فوریه آنها را بعنوان توزیع باری و توزیع گشتاور مغناطیسی پروتون تفسیر کنیم . همچنین این امکان وجود دارد نشان دهیم که فرم فاکتورهای $G_E(q^2)$ و $G_M(q^2)$ بطور نزدیک بترتیب به توزیع باری و توزیع گشتاوری مغناطیسی پروتون مرتبط می شوند ، بویژه در مقیاس لورنتس ، که مقیاس بریت⁵ (دیوار سخت) نامیده می شود ، با تعریف $\vec{p}' = -\vec{p}$ [1,2,12,13].

همچنین جریان گذار پروتون ، $J^\mu(x)$ در (2-34) ، می تواند بفرم زیر نوشته شود ؛

$$J^\mu(0) = e\bar{u}(p') \left[\gamma^\mu (F_1 + \kappa F_2) - \frac{(p^\mu + p'^\mu)}{2M} \kappa F_2 \right] u(p) \quad (40-2)$$

که در مقیاس بریت می باشد . در این مقیاس انرژی انتقالی به پروتون وجود ندارد ، شکل 2-2 .



شکل 2-2 مقیاس بریت یا دیوار سخت ، $\vec{p}' = -\vec{p}$

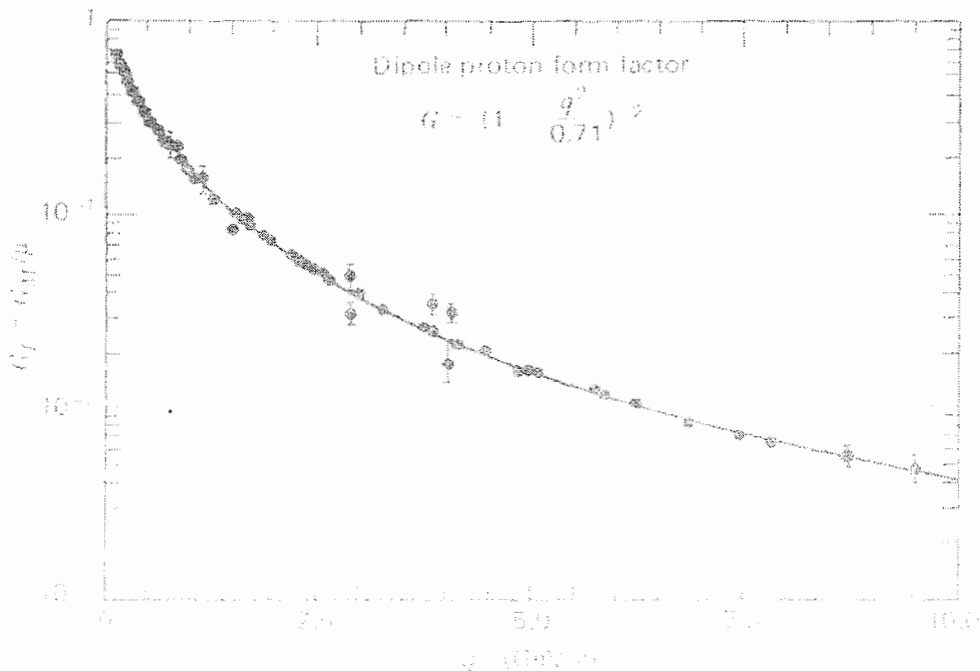
⁵ Breit

اگر محور z در امتداد \vec{p} انتخاب شود و helicity اسپینورها مورد استفاده قرار گیرد، داریم:

$$\begin{aligned} \rho &= 2M e G_E(q^2) & \text{for } \lambda = -\lambda' \\ J_1 \pm i J_2 &= \mp 2|\vec{q}| e G_M & \text{for } \lambda = \lambda' = \mp \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (41-2)$$

و دیگر عناصر ماتریس صفر هستند؛ λ و λ' بترتیب helicity اولیه و نهایی پروتون هستند. برای عمومیت بخشیدن به فرم فاکتور بخش ۲-۲، $F(|\vec{q}|)$ را توسط $F(q^2)$ جایگزین کردیم. اگرچه، هنگامی که $\langle\langle M^2 | \vec{q}^2 \rangle\rangle$ می‌توانیم تفسیر تبدیل فوریه بخش ۲-۲ را بکار ببریم؛ یعنی هنگامیکه $\langle\langle M^2 | \vec{q}^2 \rangle\rangle$ ، فرم فاکتورهای G_M و G_E تبدیلات فوریه توزیع باری و توزیع گشتاور مغناطیسی پروتون بترتیب هستند [12,13,14,15,16,17,25,26,28].

G_M و G_E بترتیب بعنوان فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی تلقی می‌شوند. اطلاعات در وابستگی زاویه ای پراکندگی $ep \rightarrow ep$ می‌تواند برای جدا کردن G_M و G_E در مقادیر مختلف q^2 استفاده شود، (۲-۳۹) را ببینید. نتیجه برای $G_E(q^2)$ در شکل ۲-۳ نشان داده شده است.



شکل ۲-۳ فرم فاکتورهای پروتون بعنوان تابعی از q^2

$G_M(q^2)$ وابستگی q^2 مشابه دارد [12,13,25,26]. رفتار در q^2 - کوچک می تواند برای

تعیین جملات باقی مانده در (۲۸-۲) بکار برده شود. بویژه، شعاع میانگین مربعی باری پروتون

بصورت زیر است؛

$$\langle r^2 \rangle = -6 \left(\frac{dG_E(q^2)}{dq^2} \right)_{q^2=0} \quad (42-2)$$

فصل سوم

فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون

- مقدمه
- معرفی پتانسیل پیشنهادی
- حل معادله دیراک با پتانسیل پیشنهادی
- محاسبه تابع موج پروتون با استفاده از معادله دیراک برای سیستم سه ذره ای
- محاسبه فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون
- نتیجه گیری
- پیشنهادات

۳-۱- مقدمه

در این فصل قصد داریم پتانسیل پیشنهادی خود را معرفی و پس از آن معادله دیراک را برای این پتانسیل حل کرده تا تابع موج پروتون حاصل شود. در قسمت بعد با داشتن تابع موج خواص الکترومغناطیسی پروتون یعنی؛

الف) فرم فاکتور الکتریکی

ب) فرم فاکتور مغناطیسی

را محاسبه کرده تا شعاع باری و گشتاور مغناطیسی آنرا بدست آوریم و پاسخها را با نتایج تجربی مقایسه کنیم.

۳-۲- معرفی پتانسیل پیشنهادی

می دانیم که پروتون از سه کوارک تشکیل شده است، و نیز می دانیم اثرات بار الکتریکی کوارک ها در برهم کنش های قوی بسیار بسیار ناچیز می باشد؛ پس از ابتدا مشخص می شود که اثر پتانسیل الکتریکی بار کوارک ها در این پتانسیل پیشنهادی ما جایی ندارد.

اما همان طوری که می دانیم برای هر کوارک نوعاً "رنگی تعریف می شود، در واقع این بار رنگ است که در برهم کنش ها خود را نمایان می کند؛ پس بایستی پتانسیل مربوط به باررنگ را در نظر بگیریم.

می دانیم برای محاسبه دامنه پراکندگی با استفاده از قواعد فاینمن برای پراکندگی الکترون-پوزیترون؛ شکل ضریب $i\mathcal{M}$ - به صورتی خواهد شد (در فصل اول محاسبه نموده ایم) که مشابه این رابطه را در پراکندگی کوارک-پادکوارک داریم. از این موضوع این نتیجه را می توان گرفت که بایستی پتانسیل حاکم بین کوارک و پادکوارک مشابه پتانسیل حاکم بین الکترون و پوزیترون باشد.

پس پتانسیل رنگ بین کوارک ها را به صورت $-\frac{c}{r}$ که c ضریبی ثابت است در نظر می گیریم.

پتانسیل دومی که ما بین کوارک ها در درون پروتون پیشنهاد می کنیم پتانسیل محدود کننده ای است که مانع از آن می شود تا کوارک ها از یکدیگر فاصله بگیرند؛ یعنی با زیاد شدن فاصله، این پتانسیل نیز زیاد می شود و این مطلب از این موضوع بسیار مهم ناشی می شود که کوارک آزاد در طبیعت وجود ندارد، بنابراین پتانسیل دوم را به صورت br در نظر می گیریم.

اما پتانسیل سوم را مربوط به حرکت نوسانی کوارک ها حول نقطه تعادلشان در نظر می گیریم. این حرکت نوسانی هماهنگ ساده می باشد پس پتانسیلی که در اینجا پیشنهاد می شود پتانسیل نوسانگر ساده است که به صورت ar^2 بیان می شود. اگر به شکل این پتانسیل توجه کنیم مشاهده می کنیم که این پتانسیل نیز خود یک پتانسیل محدود کننده است [12,13,34,35,36]. دقت شود که پتانسیل های دیگری نیز یافت می شوند ولی ما در اینجا فقط پتانسیل

$$U(r) = ar^2 + br - \frac{c}{r} \quad (1-3)$$

را در نظر گرفته ایم.

۳-۳- حل معادله دیراک با پتانسیل پیشنهادی

در این بخش ابتدا معادله دیراک را برای پتانسیل محدود کننده

$$U(r) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0)(ar^2 + br - \frac{c}{r})$$

حل می کنیم. در این پتانسیل، پتانسیل بر همکنش

کوارک های موجود در نوکلئون در فواصل کوتاه کولنی متناسب با $\frac{1}{r}$ که منشاء آن وجود بار رنگ

در کوآرک ها می باشد . در حالی که در فواصل دور پتانسیل برهم کنشی به صورت خطی و متناسب با r است ، چرا که وقتی $r \rightarrow \infty$ میل می کند پتانسیل بایستی بینهایت شود تا سه کوآرک درون پروتون را در کنار هم نگه دارد . در این پتانسیل جمله مربوط به نوسانگر هارمونیک را ، که متناسب با r^2 است ، نیز در نظر گرفته ایم . حال اگر ؛

$$U = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0)M(r) \quad (2-3)$$

که در آن $M(r)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم [12,34,35] ؛

$$M(r) = ar^2 + br - \frac{c}{r} \quad (3-3)$$

در این صورت معادله جفت شده دیراک را همان طور که گفته شد از شکل ماتریسی آن نتیجه می شود به شکل زیر بر حسب مؤلفه بالایی $g(r)$ و مؤلفه پایینی $f(r)$ می نویسیم [1,2,6] ؛

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})f(r) + (m + U + V_0)g(r) &= Eg(r) \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})g(r) + (m + U - V_0)f(r) &= Ef(r) \end{aligned} \quad (4-3)$$

ما در این موارد پتانسیل اسکالر را با مقدار پتانسیل سه بردار از پتانسیل چاربردار برابر قرار می دهیم . بدین معنی که پتانسیل چاربردار

$$V^\mu = (V_0, \vec{V}) \quad (5-3)$$

با توجه به شرایط بالا

$$V_0 = |\vec{V}| = U \quad (6-3)$$

اکنون با توجه به شرایط بالا و باقی گذاشتن U به مقدار زیر می رسم ؛

$$f(r) = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} g(r) \quad (7-3)$$

از قرار دادن این رابطه در یکی از معادله های جفت شده برای یافتن $g(r)$ اقدام می کنیم که به رابطه زیر می رسیم :

$$\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{E+m} g(r) + (m - E + 2U)g(r) = 0 \quad (8-3)$$

و با توجه به روابط زیر به معادله دیفرانسیل (۱۰-۳) می رسیم [34,35,36] :

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2 \quad \text{و} \quad \vec{p}^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (9-3)$$

$$g''(r) + \frac{2}{r} g'(r) + \left\{ \frac{-l(l+1)}{r^2} + E^2 - m^2 - M(r)(E+m) \right\} g(r) = 0 \quad (10-3)$$

ما هم اکنون می خواهیم عدد کوانتومی جدیدی را تعریف کنیم [3,6,12,13] :

$$k = \pm \left(j + \frac{1}{2} \right) \begin{cases} + \Rightarrow j = l - \frac{1}{2} \\ - \Rightarrow j = l + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = l \\ k = -(l+1) \end{cases} \quad (11-3)$$

در این صورت :

$$g''(r) + \frac{2}{r} g'(r) + \left\{ \frac{-k(k+1)}{r^2} + E^2 - m^2 - M(r)(E+m) \right\} g(r) = 0 \quad (12-3)$$

برای حل این معادله دیفرانسیل جواب فرضی به صورت زیر در نظر می گیریم [34,35,36] :

$$g(r) = \frac{1}{r} \phi_k(r) \quad (13-3)$$

با جایگذاری رابطه (۱۳-۳) در رابطه (۱۰-۳) به معادله دیفرانسیل زیر خواهیم رسید :

$$\phi_k''(r) + \left\{ \frac{-k(k+1)}{r^2} + E^2 - m^2 + (E+m)M(r) \right\} \phi_k(r) = 0 \quad (14-3)$$

اکنون اگر تغییر متغیرهای زیر را در نظر بگیریم معادله (۱۴-۳) به معادله (۱۶-۳) تبدیل می شود :

$$\lambda = E^2 - m^2$$

$$M_1(r) = (E+m)M(r)$$

$$a_1 = (E+m)a \quad (15-3)$$

$$b_1 = (E+m)b$$

$$c_1 = (E+m)c$$

پس معادله (۱۴-۳) به معادله زیر تبدیل می شود :

$$\phi_k''(r) + \left\{ \frac{-k(k+1)}{r^2} + \lambda - M_1(r) \right\} \phi_k(r) = 0 \quad (16-3)$$

و پتانسیل برهمکنش نیز به فرم $M_1(r) = a_1 r^2 + b_1 r - \frac{c_1}{r}$ تبدیل خواهد شد .

برای حل معادله دیفرانسیل (۱۶-۳) با پتانسیل برهم کنشی بالا از جواب حدسی زیر استفاده می کنیم :

$$\phi_k(r) = \exp(h(r))$$

$$h(r) = -\frac{1}{2}\alpha r^2 + \beta r + \delta \ln r \quad (17-3)$$

که α و β و δ اعداد ثابتی هستند که بایستی محاسبه شوند . اکنون برای حالت پایه یعنی $k = -1$ جوابهای معادله دیراک (مؤلفه های بالا و پایین) را محاسبه می کنیم .

$$g_{-1}(r) = \frac{1}{r} \phi_{-1}(r) = \exp\left(-\frac{\sqrt{a_1}}{2} r^2 - \frac{c_1}{2} r\right) \quad (18-3)$$

$$f_{-1}(r) = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} g_{-1}(r)$$

بنابراین تابع موج پروتون برای حالت پایه به صورت زیر تبدیل می شود :

$$\psi_{-1,-1}(r) = \frac{N}{4\pi} \left[\frac{-i\vec{\sigma} \cdot \hat{r}}{E+m} \left(-\sqrt{a_1} r - \frac{c_1}{2} \right) \right] \chi \exp\left(-\frac{\sqrt{a_1}}{2} r^2 - \frac{c_1}{2} r\right) \quad (19-3)$$

ثابت نرمالیزاسیون از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$N^2 \int_0^\infty \{ |g_{-1}(r)|^2 + |f_{-1}(r)|^2 \} r^2 dr = 1 \quad (20-3)$$

می توانیم با استفاده از قرار دادن جوابهای حدسی معادله دیفرانسیل در رابطه (۳-۱۶) ضرایب α و

β و δ را بر حسب مقادیر a_1 و b_1 و c_1 محاسبه کنیم و از اینرو؛

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{a_1} \\ \beta &= \frac{-b_1}{2\sqrt{a_1}} \\ \delta &= 0 \end{aligned} \quad (۳-۲۱)$$

$$\delta = 1 \Rightarrow b_1 = c_1 \sqrt{a_1}$$

$$\delta = -\frac{c_1}{2\beta} \Rightarrow \beta = \frac{-c_1}{2}$$

که از این ضرایب در نوشتن فرم $g_{-1}(r)$ در (۳-۱۸) نیز استفاده شده است.

از ترکیب تغییر متغیرهای رابطه (۳-۱۵) به رابطه زیر خواهیم رسید؛

$$E^2 - m^2 = (E + m)^2 \left\{ 3\sqrt{a} - \frac{(E + m)^2}{4} c^2 \right\} \quad (۳-۲۲)$$

$$\frac{g_A}{g_V} \quad \text{۳-۳-۱ محاسبه}$$

با استفاده تابع موج حاصل شده (۳-۱۹) می توانیم این نسبت را بدست آوریم. اما می دانیم که دو

پارامتر a_1 و c_1 مجهول می باشند که می توانیم با استفاده از مقدار عددی $\frac{g_A}{g_V} = 1.26$ این

مقادیر مجهول را محاسبه کنیم. از آنجا که $\langle \sigma_z \rangle = \frac{5}{3}$ لذا [12,13]؛

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} \left\{ 1 - \frac{4 \int_0^\infty |f_{-1}(r)|^2 r^2 dr}{3 \int_0^\infty (|f_{-1}(r)|^2 + |g_{-1}(r)|^2) r^2 dr} \right\} \quad (۳-۲۳)$$

مقدار تجربی $\frac{g_A}{g_V}$ برابر 1.26 است که با توجه به این مقدار $\langle \sigma_z \rangle = 1.122$ خواهد شد.

با توجه به رابطه (۳-۱۹) خواهیم داشت؛

$$3\sqrt{a_1} - \frac{c_1^2}{4} = E^2 - m^2 \quad (24-3)$$

$$b_1 = c_1\sqrt{a_1}$$

اگر تغییر متغیر زیر را در نظر بگیریم :

$$K^{\frac{3}{2}} = (E - m)(E + m)^{\frac{1}{2}} \rightarrow K = \{(E - m)(E + m)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{2}{3}}$$

$$K = \left\{ 3\sqrt{a} - \frac{(E + m)^2}{4} c^2 \right\}^{\frac{2}{3}} \quad (25-3)$$

مقدار f را بصورت زیر خواهیم نوشت :

$$E = m + Kf$$

$$f = \left(\frac{K}{E + m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$m = \frac{1}{2}K \left(\frac{1}{f^2} - f \right) \quad (26-3)$$

$$E = \frac{1}{2}K \left(\frac{1}{f^2} + f \right)$$

از روابط بالا مشخص است که برای آنکه کوارکها بدون جرم باشند، بایستی $f = 1$ باشد در این

صورت دستگاه معادله (24-3) بصورت زیر در می آید :

$$3\sqrt{a_1} - \frac{c_1^2}{4} = E^2$$

$$b_1 = c_1\sqrt{a_1}$$

(27-3)

$$\frac{g_A}{g_V} = 1.26$$

محاسبات کامپیوتری نشان می دهد که اگر مقدار $f = 1$ باشد، یا به عبارت دیگر اگر مقدار جرم

کوارک را صفر در نظر بگیریم، در این صورت برای مقدار a_1 و c_1 جوابی پیدا نمی کنیم. یعنی

برای آنکه بتوانیم حداقل جوابی برای a_1 و c_1 داشته باشیم مقدار جرم کوارک نباید صفر باشد؛ و

حداقل $f = 0.74$ باید باشد تا بتوان جوابی با توجه به قید $\frac{g_A}{g_V} = 1.26$ پیدا کرد. رای این مقدار f

جرم کوارک موجود در نوکلئونی به جرم $M = 938 \text{ MeV} / c^2$ برابر $M_q = 132 \text{ MeV} / c^2$ خواهد شد. پس دستگاه معادله به صورت زیر تبدیل می شود؛

$$3\sqrt{a_1} - \frac{c_1^2}{4} = 2.061 \text{ fm}^{-2} \quad (28-3)$$

$$\frac{g_A}{g_V} = 1.26$$

البته کسری از انرژی سه کوارک مربوط به انرژی مرکز جرم می باشد، که در اینجا در مقایسه با جرم پروتون در نظر گرفته نشده است. ولذا؛ $3E = 928 \text{ MeV}$ در نتیجه $E = 312.7 \text{ MeV}$ از دستگاه معادله (28-3) ضرایب پتانسیل a_1 و c_1 محاسبه می شوند و با توجه به رابطه $b_1 = c_1 \sqrt{a_1}$ می توان مقدار b_1 را نیز محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.476 \text{ fm}^{-4} \\ b_1 &= 0.129 \text{ fm}^{-3} \\ c_1 &= 0.187 \text{ fm}^{-1} \end{aligned} \quad (29-3)$$

بنابراین $U(r) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0)(0.271r^2 + 0.057r - \frac{0.082}{r})$ در نتیجه تابع موج به شکل زیر در می آید؛

$$\psi_{-1,-1}(r) = \frac{N}{4\pi} \left[\frac{1 + i\vec{\sigma} \cdot \hat{r}}{E + m} (0.094 + 0.69r) \right] \chi \exp(-0.345r^2 - 0.094r) \quad (30-3)$$

دقت شود که ما می توانیم تمامی محاسباتمان را با توجه به تصحیح مرکز جرم نیز انجام دهیم. اکنون با توجه به تابع موج بدست آمده در رابطه (30-3) می توانیم شعاع باری پروتون را با استفاده از رابطه بدست آوردیم؛

$$\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = N^{-2} \int_0^\infty r^4 \left[|g_{-1}|^2 + |f_{-1}|^2 \right] dr \quad (31-3)$$

و با توجه به رابطه مربوط به ثابت نرمالیزاسیون

$$\begin{aligned}
 [\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{p}_1 + \beta(m_1 + U_0(x))]\psi_1(x) &= (E - V_0)\psi_1(x) \\
 [\bar{\alpha}_2 \cdot \bar{p}_2 + \beta(m_2 + U_0(x))]\psi_2(x) &= (E - V_0)\psi_2(x) \\
 [\bar{\alpha}_3 \cdot \bar{p}_3 + \beta(m_3 + U_0(x))]\psi_3(x) &= (E - V_0)\psi_3(x)
 \end{aligned}
 \tag{35-3}$$

که در سه معادله بالا ψ_3, ψ_2, ψ_1 به ترتیب توابع موج مربوط به ذره اول، ذره دوم و ذره سوم هستند. یعنی؛

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} \phi_3 \\ \chi_3 \end{pmatrix}
 \tag{36-3}$$

$$\psi_{proton} = \psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \psi_3 \Rightarrow \psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}
 \tag{37-3}$$

بنابراین در کل معادله دیراک جفت شده برای مؤلفه بالا و پایین تابع موج پروتون به صورت زیر خواهد شد؛

$$\begin{aligned}
 (\bar{\sigma}_i \cdot \bar{p}_i)\chi + (m_i + U_0 + V_0)\phi &= \varepsilon_i \phi \\
 (\bar{\sigma}_i \cdot \bar{p}_i)\phi - (m_i + U_0 - V_0)\chi &= \varepsilon_i \chi
 \end{aligned}
 \tag{38-3}$$

اگر ما در این مرحله پتانسیل اسکالر و شبه اسکالر را باهم برابر در نظر بگیریم، و از دستگاه (3-38) χ را بر حسب ϕ محاسبه می کنیم پس در آن صورت خواهیم داشت؛

$$\chi = \frac{\bar{\sigma}_i \cdot \bar{p}_i}{\varepsilon_i + m_i} \phi
 \tag{39-3}$$

با قرار دادن معادله (39-3) در (38-3) معادله ای را به صورت زیر بر حسب ϕ می یابیم؛

$$(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\phi = 9(\varepsilon^2 - m^2)\phi - 6V_0(\varepsilon + m)\phi
 \tag{40-3}$$

که

$$(\bar{\sigma}_i \cdot \bar{p}_i)^2 = \bar{p}_i^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2
 \tag{41-3}$$

اکنون از مختصات ژاکوبی¹ که به صورت زیر می باشند استفاده می کنیم [34,35,36]؛

$$\bar{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3}{\sqrt{6}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\sqrt{2}}
 \tag{42-3}$$

¹ Jacubian Coordinats

با جدا سازی متغیرها و کنار گذاشتن جمله مربوط به مرکز جرم به معادله زیر می رسیم ؛

$$(p_\rho^2 + p_\lambda^2)\phi = 3[3(\varepsilon^2 - m^2)\phi - 2V_0(\varepsilon + m)\phi] \quad (43-3)$$

که در این رابطه

$$p_\rho^2 = -\nabla_\rho^2, \quad p_\lambda^2 = -\nabla_\lambda^2 \quad (44-3)$$

اکنون با وارد کردن تغییر متغیرهای

$$x = \sqrt{\rho^2 + \lambda^2}, \quad t = \text{Arctan} \frac{\rho}{\lambda} \quad (45-3)$$

که در واقع فوق شعاع مربوط به فوق کره نامیده می شوند ؛ به معادله زیر می رسیم [34,35] :

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{5}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{L^2}{x^2}\right]\phi = 3\left[3(\varepsilon^2 - m^2) - 2V_0(\varepsilon + m)\right]\phi \quad (46-3)$$

که در معادله بالا $L^2 = -\gamma(\gamma + 4)$ می باشد . که در این رابطه نیز $\gamma = 2n + l_\rho + l_\lambda$ که به ازای

$n = 1, 2, 3, \dots$ برقرار بوده و حالت پایه که مربوط به مباحث ماست به ازای $\gamma = 0$ برقرار است

[8,9] .

اکنون با قرار دادن پتانسیل رابطه (۳-۲) در و با در نظر گرفتن تغییر متغیرهای زیر

$$\begin{aligned} a_1 &= (E + m)a \\ b_1 &= (E + m)b \\ c_1 &= (E + m)c \\ \lambda &= \varepsilon^2 - m^2 \end{aligned} \quad (47-3)$$

به معادله زیر می رسیم ؛

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{5}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{L^2}{x^2}\right]\phi = 3\left[\left(3\lambda - a_1x^2 - b_1x + \frac{c_1}{x}\right)\right]\phi \quad (48-3)$$

برای حل این معادله دیفرانسیل مرتبه دوم از تغییر متغیر

$$\phi = x^{-\frac{5}{2}} \xi \quad (49-3)$$

استفاده می کنیم [34,35,36]. با قرار دادن این رابطه در معادله (۳-۴۸) به معادله زیر می رسیم ؛

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} - \frac{15}{4x^2}\xi = -3\left[3\xi - a_1x^2 - b_1x + \frac{c_1}{x}\right]\xi \quad (۳-۵۰)$$

با قرار دادن

$$\xi(x) = \exp(h(x)) \quad , \quad h(x) = -\frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x + \delta \ln x \quad (۳-۵۱)$$

در رابطه (۳-۵۰) ضرایب مجهول را بر حسب یکدیگر پیدا می کنیم ؛

$$\alpha = \sqrt{3a_1} \quad , \quad b_1 = \frac{c_1}{2}\sqrt{3a_1} \quad , \quad \delta = 1 \quad , \quad \lambda = \frac{1}{9}(-\beta^2 + 5\alpha) \quad (۳-۵۲)$$

برای اینکه ضرایب مجهول را بیابیم همانند قبل بایستی از یک کمیتی که مقدار عددی آن برای ما

مشخص است همانند $\frac{g_A}{g_V} = 1.26$ استفاده کنیم . بنابراین ؛

$$\frac{5}{9}\sqrt{3a_1} - \frac{1}{16}c_1^2 = \varepsilon^2 - m^2$$

$$2b_1 = c_1\sqrt{3a_1} \quad (۳-۵۳)$$

$$\frac{g_A}{g_V} = 1.26$$

را برای یافتن ضرایب پتانسیل به کار می بریم .

پس با توجه به ضرایب رابطه (۳-۵۳) تابع موج به صورت زیر محاسبه می شود ؛

$$\psi = \frac{N}{4\pi} \left(\frac{i\bar{\sigma}\cdot\bar{r}}{\varepsilon+m} \left(\sqrt{3a_1}x + \frac{3c_1}{2} \right) \right) e^{\frac{1}{2}(\sqrt{3a_1}x^2 + \frac{3c_1}{2}x)} Y_{00}(\Omega_{\rho}, \Omega_{\lambda}) \quad (۳-۵۴)$$

که در رابطه بالا $\Omega_{\rho}, \Omega_{\lambda}$ زوایای فضایی مربوط به فوق کره می باشند .

اما در اینجا مشاهده می شود که حتی با داشتن مقدار $E' = 0.197 \text{ fm}^{-1}$ به عنوان کمیتی معلوم

باز هم برای حل این دستگاه یک معلوم کم می باشد . برای حل این مشکل کافی است تا یکی از

ضرایب پتانسیل را معلوم در نظر گرفته یعنی به آن عدد دلخواهی را نسبت دهیم و پس از آن

ضرایب دیگر را بیابیم . ما در این مرحله از کار مقدار a_1 را برابر یک قرار داده و مابقی ضرایب را بر این اساس با توجه به اینکه مقدار

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} \left\{ 1 - \frac{4}{3} \frac{\int_0^{\infty} |\chi_0(x)|^2 x^5 dx}{\int_0^{\infty} (|\chi_0(x)|^2 + |\phi_0(x)|^2) x^5 dx} \right\} \quad (55-3)$$

1.26 می باشد ، دستگاه دو معادله و دو مجهولی را که در آن مقدار m, c_1 مجهول هستند را حل می کنیم و پس از حل این دستگاه مقادیر زیر را محاسبه نموده ایم ؛

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \text{ fm}^{-4} \\ c_1 &= 0.535 \text{ fm}^{-1} \\ m_q &= 1.251 \text{ fm}^{-1} \\ b_1 &= 0.463 \text{ fm}^{-3} \end{aligned} \quad (56-3)$$

با این رویکرد تابع موج حالت پایه به صورت زیر حاصل گردیده است ؛

$$\psi = \frac{N}{4\pi} \left(\frac{i \vec{\sigma} \cdot \hat{x}}{\varepsilon + m} (1.732 x + 0.401) \right) \times \exp(-0.866 x^2 - 0.401 x) \quad (57-3)$$

که در رابطه بالا ثابت بهنجارش $N = 2.788$ می باشد .

۳-۵- محاسبه فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون

همانطوریکه در بخش ۲-۳ گفته شده ، فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی تبدیلات فوریه توزیع بار و گشتاور مغناطیسی هستند . ابتدا از فرم فاکتور الکتریکی شروع می کنیم ، داریم

[12,27,28,29,30,31,32,33] ؛

$$\begin{aligned} G_E(q^2) &= \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \rho(r) d^3r \\ &= \int e^{iqr \cos \theta} \rho(r) r^2 d(\cos \theta) d\varphi dr \\ &= \int dr [g^2(r) + f^2(r)] \frac{\sin qr}{qr} \\ &= \int_0^c dr r^2 j_0(qr) [g^2(r) + f^2(r)] \end{aligned} \quad (58-3)$$

$$(59-3)$$

که در آن از $\rho(r) = |\psi|^2 = g^2(r) + f^2(r)$ استفاده کرده ایم و برای $q = 0$ خواهیم داشت :

$$G_E(0) = \int d^3r \psi^\dagger \psi = 1 \quad (60-3)$$

و همانند فصل قبل در q های کوچک ، (۲۸-۲) و (۴۲-۲) ، رابطه زیر را خواهیم داشت
؛ [12,13,25,31,32]

$$\langle r^2 \rangle = -6 \left(\frac{dG_E(q^2)}{dq^2} \right)_{q^2=0} \quad (61-3)$$

و سپس فرم فاکتور مغناطیسی [12,13,20,21,22] :

$$G_M(q^2) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \mu(r) d^3r \quad (62-3)$$

$$\mu(r) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}) \quad (63-3)$$

$$\vec{j} = e_q \bar{\psi} \gamma \psi \quad (64-3)$$

با توجه به رابطه $\int j_0(qr) \cos \theta d(\cos \theta) = j_1(qr)$ بدست خواهیم آورد ؛

$$G_M(q^2) = -\frac{4M}{|\vec{q}|} \int_0^\infty dr r^2 j_1(qr) f(r) g(r) \quad (65-3)$$

و برای گشتاور مغناطیسی بدست می آوریم [3,8,9,12,13] :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{e}{2M} G_M(q^2=0) = \frac{1}{2} \int (\vec{r} \times \vec{j}) d^3r \\ &= -\frac{2}{3} e \int_0^\infty dr r f(r) g(r) \end{aligned} \quad (66-3)$$

نتیجه آخر می تواند همچنین از تعریف استاندارد گشتاور مغناطیسی بدست آورده شود [1,12] :

$$\mu_p = \frac{1}{2c} \sum_j e_j \int d^3r \bar{\psi}_j(\vec{r}) (\vec{r} \times \vec{\gamma}) \psi_j(\vec{r}) \quad (67-3)$$

با استفاده از معادله دیراک ، (۳۵-۳) ، در یک پتانسیل محدود کننده ، معادله (۶۷-۳) بصورت زیر در می آید :

$$\mu_p = \frac{e}{2E_0} \left(1 - \frac{2}{3} \int_0^\infty dr f^2(r) \right) \quad (68-3)$$

که E_0 پایین ترین مقدار انرژی یک کوآرک در حالت پایه است .

قبل از آنکه معادله موج بدست آمده در بخش ۳-۴ را در (۳-۵۹) و (۳-۶۵) جایگزین کنیم و فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی را در این حالت خاص بدست آوریم ، خالی از لطف نیست که ابتدا نتایج مربوطه را برای پتانسیل محدود کننده cr^2 بدست آوریم و در آخر با نتایج بدست آمده در پتانسیل محدود کننده (۳-۱) مقایسه کنیم .

اگر پتانسیل محدود کننده را بصورت cr^2 انتخاب کنیم و معادله دیراک برای کوآرکهای بدون جرم ، در حالت پایه بصورت زیر خواهد شد [12] :

$$E_{nl} = \left[2\sqrt{c} \left(2n + l - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$g(r) = N \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 e^{-\frac{r^2}{2r_0^2}} \quad (۳-۶۹)$$

$$f(r) = -\frac{N}{\sqrt{3}} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 e^{-\frac{r^2}{2r_0^2}}$$

با

$$N = \left[\frac{8}{3r_0\sqrt{\pi}} \right]^{\frac{1}{2}}, r_0^2 \cdot E_0^2 = 3, c = \frac{E_0^3}{9} \quad (۳-۷۰)$$

و با جایگذاری (۳-۶۹) در (۳-۵۹) و (۳-۶۵) ، فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی بفرم زیر خواهند شد ؛

$$G_E^p(q^2) = \exp\left(-\frac{q^2 r_0^2}{4}\right) \left(1 - \frac{q^2 r_0^2}{18}\right)$$

$$G_M^p(q^2) = \frac{4M}{3E_0} \sqrt{1 + \frac{q^2}{4M^2}} \exp\left(-\frac{q^2 r_0^2}{4}\right) \quad (۳-۷۱)$$

که برای بدست آوردن آنها از روابط زیر استفاده نموده ایم ؛

$$\int_0^{\infty} x^{\mu} e^{-\alpha x^2} J_{\nu}(\beta x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)}{\beta \alpha^{\frac{1}{2}\mu} \Gamma(\nu+1)} e^{-\frac{\beta^2}{8\alpha}} M_{\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}\nu}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$$

$$M_{\lambda, \mu}(z) = z^{\mu + \frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} \phi\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; z\right) \quad (72-3)$$

$$\phi(\alpha, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} z + \dots$$

و همین طور برای شعاع باری (۲-۴۲) و گشتاور مغناطیسی (۳-۶۶) خواهیم داشت [12] :

$$\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(-6 \frac{dG_E}{dq^2} \Big|_{q^2=0} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2} \frac{1}{E_0}} = \frac{2.345}{E_0} = 0.64 \text{ fm} \quad (73-3)$$

$$\mu_p = -\frac{2}{3} e \int_0^{\infty} dr r g(r) f(r) = \frac{e}{2M} \frac{4M}{3E_0} = \frac{2e}{3E_0} = 2.12 \text{ n.m}$$

حال به جوابهای معادله دیراک در پتانسیل محدود کننده $ar^2 + br - \frac{c}{r}$ ، (۳-۵۷) ، برمی گردیم

و با جایگذاری در (۳-۵۹) و (۳-۶۵) بدست می آوریم [12,38,39,40,41] :

$$G_E(q^2) = \exp(-0.1443q^2) (1 + 0.01q^2) \quad (74-3)$$

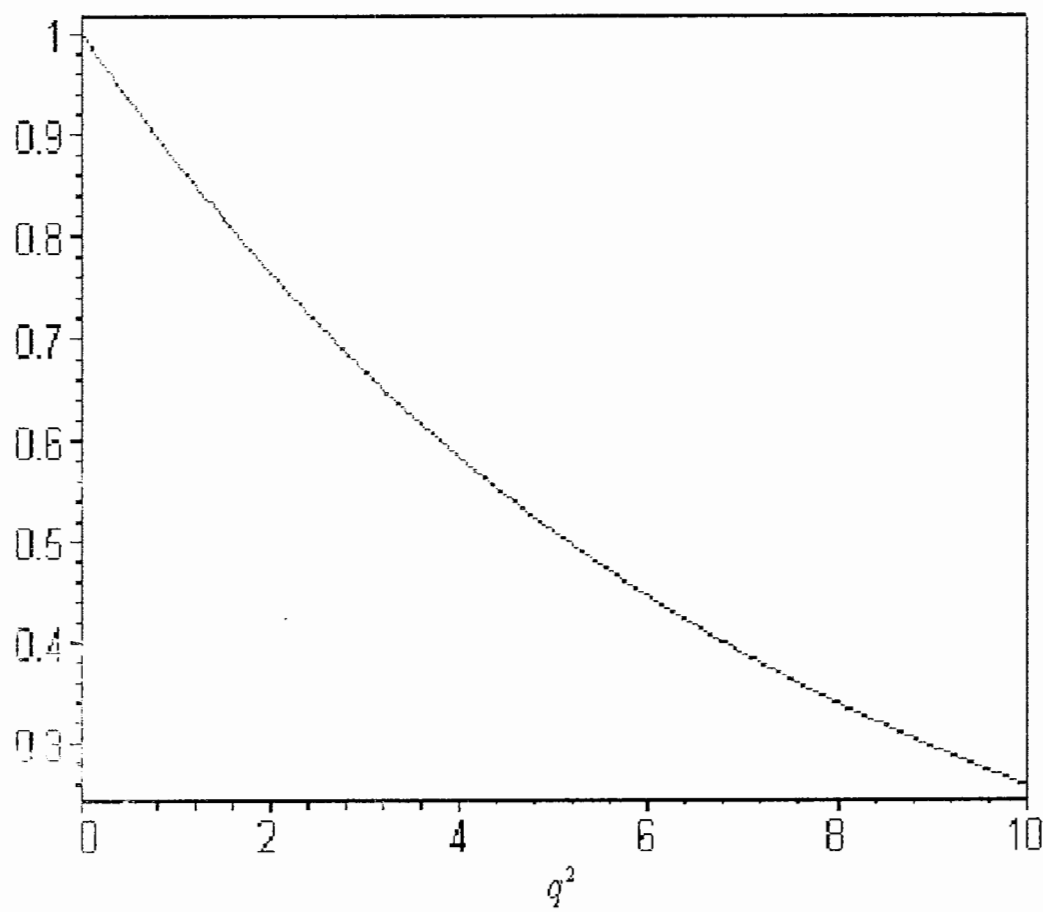
که نمودار تغییرات آن بر حسب q^2 در شکل ۳-۱ رسم شده است ، و :

$$\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(-6 \frac{dG_E}{dq^2} \Big|_{q^2=0} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.897 \text{ fm} \quad (75-3)$$

و برای فرم فاکتور مغناطیسی :

$$G_M(q^2) = 2.19 \sqrt{1 + \frac{q^2}{56.34}} \exp(-0.1443q^2) \quad (76-3)$$

$$\mu = \frac{e}{2M} G_M(q^2 = 0) = \frac{e}{2E_0} \left(1 - \frac{2}{3} \int_0^{\infty} dr \chi^2(r) \right) = 3.089 \text{ n.m} \quad (77-3)$$



شکل ۱-۳ تغییرات G_E بر حسب q^2

۳-۶- نتیجه گیری

همانطور که در جدول ۳ دیده می شود ، روش محاسبه شعاع باری و گشتاور مغناطیسی پروتون با استفاده از فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی ، به مقادیر تجربی نزدیک بوده و این صحت محاسبات را نشان می دهد . دلیل این اختلافات اندک به پتانسیل انتخاب شده ، تصحیحات مرکز جرم و تصحیحات ابر مزونی (روی گشتاور مغناطیسی) و ... برمی گردد [3,12,30,31,32].

	$U=0$ (مدل کیسه ای)	$U=cr^2$ (مدل کیسه ای)	$U=ar^2+br-\frac{c}{r}$ (تک ذره ای)	$U=ar^2+br-\frac{c}{r}$ (سه ذره ای)	مقدار تجربی
$\langle r^2 \rangle_p^{1/2}$	0.73 fm	0.64 fm	1.439 fm	0.897 fm	0.88 fm
μ_p	1.9 n.m	2.12 n.m	3.447 n.m	3.089 n.m	2.79 n.m

جدول ۳ مقایسه شعاع باری و گشتاور مغناطیسی پروتون در پتانسیلهای مختلف با مقادیر تجربی

۳-۷- پیشنهادات

مطالبی را که در این بخش مطرح می گردد به عنوان پیشنهاداتی است که می توان برای ادامه کار و دستیابی به پاسخهایی بهتر و واقعیت‌تر به کار بست . بعنوان پیشنهاد اول می توانیم تصحیحات مرکز جرم و ابر مزونی را روی تابع موج پروتون بدست آمده انجام دهیم . همان طور که مشاهده گردید معادله دیراک را برای پتانسیلی خاص حل کرده ایم ، یعنی در این پتانسیل پیشنهادی ما اثرات گلئون ها را بر روی تابع موج پروتون محاسبه نکرده ایم . پس به عنوان دومین پیشنهاد می توانیم این پتانسیل ها را نیز در نظر گرفته و معادله دیراک را حل کنیم ، یعنی پتانسیل هایی مانند dx^3 و ex^4 و fx^5 و ... که هر کدام مربوط به نوعی برهم کنش در ساختار درونی هادرون ها است .

1. F.E. Close;" An Introduction to Quarks and Partons". 1979
2. F. Halzen, Alen D.Martin;" Quarks and Leptons: An Introductory course in modern particle physics".1984
3. Ryder;" Quantum Field theory". 1996
4. Samuel S.M. Wong;" Introduction Nuclear Physics". 1982
5. J.J. Sakurai;" Modern Quantum Mechanics".1982
6. Gross;" Relativistic to Quantum Mechanics". 1994
7. Jeremy Bernstein;" Elementary Particles and Their Currents".1968
8. W.A.Benjamin, INC;" Nuclei and Particle".
9. Bowler;" Nuclear Physics".
10. M. Danos, V. Gillet, M. Canvim;" Method in relativistic Nuclear Physics".
11. M. Lozano, G. Madurga;" Theory of Nuclear Structure and Reactions".
12. Tegen. R, Brockmann. R, Weise. W.: Z.hys. A – Atoms and Nuclei **307**, 339-350 (1982)
13. Tegen. R, Schedl. M, Weise. W.,: Phys Letters V.125, **N1**; 1983
14. Theberg, S., Thomas, A.W., miller, G.A.: Phys. Rev. **D22**, 2838(1980); Phys. Rev. **D24**,216 (1981)
15. Margaritisz, T., Szego, K.: Budapest : (preprint) 1981
16. Nambu, Y., Jona-Lasinio, G.: Phys Rev. **122**, 345 (1961)
17. Brockmann, R., Weise, W., Werner, E.: Preprint (1982)
18. Barnhill, M.V.: Phys. Rev. **D20**, 123 (1979)
19. Fujimura, K., Kobayashi, T., Namaki, M.: Prog. Theor. Phys. **43**, 73 (1970)
20. Lipes, R.G.: Phys. Rev. **D5**, 2849 (1972)
21. Feynman, R.P., Kislinger, M.,M., Ravndal, F.: Phys. Rev. **D3**, 2706 (1971)
22. Borkowski, F. et al.: Phys. A – Atoms and Nuclei **275**, 29 (1975)
23. Hohler, G. et al.: Nuclei. Phys. **B114**, 505 (1976)
24. Brown, G.E.: Nucl. Phys. **A358**, 39 (1981)
25. Weise, W., Werner, E.: Phys. Lett **101B**, 223 (1981)
26. Brockmann, R.: Phys. Rev. **C18**, 1510 (1978)
27. Donoghue, J.F. Johnson, K.: Phys. Rev. **D21**. 1975 (1980)
28. Wong. C.W.: Phys. Rev. **D24**, 1416 (1981)

29. Myhrer, F.: Phys. Lett. **110B**, 353 (1982)
30. de Tar, C.: Phys. Rev. **D24**, 752, 762 (1981)
31. Brown, G.E., Myhrer, F.: Preprint (1982)
32. Brown, G.E., Rho, M.: Phys. Lett. **82B**, 177 (1979)
33. Vento, V., Rho, Myman, E.M., Jun, J.H., Brown, G.E.: Nucl. Phys. **A345**, 413 (1980)
34. A.A. Rajabi; Few-Body Systems 37,197-213 (2005).
35. A.A. Rajabi, Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, Vol, 28. No.A2 (2004).
36. A.A. Rajabi., Indian Journal of pure and applied phys vol, 141, pp 89-94 Feb (2003).
37. T.VAN CAUTEREN, T. COTHALS, S. JANSSEN AND J. RYCKEBUSCH
Ghent University, B-9000 Gent, Belgium
38. Donal Day , Department of Physics, University of Virginia, Chorlottesville, Virginia 22904
39. H.W.Hammer and M.J.Ramsey-Musolf TRI-PP-41 Dec 1998
40. Glen Warren, Battelle & Jefferson Lab, Division of Nuclear Physics ,
October 31,2003
41. Marc Vanderhaeghen College of William & Mary / JLab JLab, may 12th 2004

Abstract:

Human had always been trying to find the answer of this question that what is inside the materials and what kind of structure do they have inside? To identify this structure, he used different ways. The most common way to reach this important, were chemical methods that definitely had direct effect on materials to ruin them as much as possible. One of the methods used nowadays is to bombard the materials by light high energy particles such as electron and examine the consequences after crashing to the special points to find out the inner structure of them. In this paper, we also use this method to identify the inner structure of proton, so;

- In the first chapter we recognize you the theory of scattering and its formula.
- In the next chapter we describe the consequences of scattering with form factors and gain their relations with target wave function.
- In the end, in third chapter the wave function of proton with $ar^2 + br - \frac{c}{r}$ potential (proton as a target) is acquired and after that we calculate proton electromagnetic form factors. In this special case, the charge radius and magnetic moment of the proton is calculate by more attention to electromagnetic form factors that are $\langle r_p^2 \rangle^{1/2} = 0.897 \text{ fm}$ and $\mu_p = 3.089 \text{ n.m}$, respectively. These quantities are much better than those of experimental $\langle r_p^2 \rangle^{1/2} = 0.88 \text{ fm}$ and $\mu_p = 2.79 \text{ n.m}$.