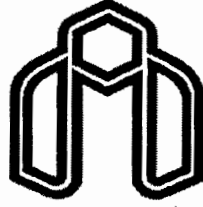


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

پایان نامه کارشناسی ارشد  
فیزیک ذرات بنیادی

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

عنوان:

اثر ایزواسپین بر خواص استاتیک پروتون

ارائه دهنده:

مجید امیرفخریان

استاد راهنما:

دکتر علی اکبر رجبی

بهار ۱۳۸۵



پیشکش به

رنج پدر و

شفقت مادر

## تقدیر و تشکر

در طول این مسیر پر از رنج و محنت این رنج پدر و مهربانی مادر بود که در هر لحظه دمی تازه در جانم می فشاند زیباترین، خالصانه ترین، پرشکوه ترین و گرمترین درود و سپاسم را به این دو روانه می دارم.

یاد مهربان استادم را تا ابد در ذهنم زنده نگه خواهم داشت که هر دم از محنت طی این مسیر آزرده می گشتم این او بود که آرامم می نمود. زیباترین درود و سپاس از آن استاد گرامیم دکتر حسین موحدیان.

و اما او که تا ابد معلم من خواهد ماند، او که راهنمایم در این سلوک علمیم بود بی منت هر آنچه را که می دانست در ذهن تهی گشته از علم من می ریخت خالصانه ترین درود و سپاس را بر پیشگاهت آورده ام آقای دکتر علی اکبر رجبی.

می گویند هم‌رهان آناند که در هر زمان در طریقتان بگویند آنچه را که می نمایی در ملامتها یاور و در شادی و طربناکی ها هم‌ره. من نیز از این یاورانم صمیمانه سپاسگزارم و پرشکوه ترین درودم را از آن اینان می خواهم:

روح ... امیری، مرتضی اسماعیلی، مهدی پور محمدی، محمود صابونی، خانم مریم انصاری، جعفر پور ابراهیم.

اما در این طریقتم منزلگاهی داشته ام که آرامش و روح بزرگی در کالبدش می باشد و یقیناً اگر آن مکان مقدس نمی بود هیچ معلوم نبود که در کدامین وادی سیر می کردم از این رو گرم ترین درود و سپاسم را پیشکش به این مکان مقدس، پایگاه سیدالشهداء روستای دروار، می کنم. و درود می فرستم بر همه آنان که ذهن ناتوانم یارای به خاطر آوردن محبت‌هایشان را ندارد.

## چکیده

از زمانی که معین گردید پروتونها و نوترونها ذرات بنیادی نیستند، تلاش دانشمندان بر این قرار گرفت که ساختار این ذرات را معین کنند. از این رو مدل‌های مختلفی ارائه شد که مدل کوارکی بهترین نمونه ارائه شده ای است که به واقعیت نزدیکتر است و بیان می کند که نوکلئونها از ذرات کوچکتری بنام کوارکها تشکیل شده اند. بر این اساس ما در این پایان نامه با استفاده از مبنای این مدل بر آن شدیم تا ساختاری را برای پتانسیل نگه دارنده کوارکها در نوکلئونها (به ویژه پروتون)، پیشنهاد کرده و با استفاده از حل معادله دیراک برای این پتانسیل و بدست آوردن تابع موج این ذره خواص مربوط به پروتون (گشتاور مغناطیسی،  $\frac{g_A}{g_V}$  و شعاع باری) را بدست آورده و آن را با نتایج تجربی این خواص

مقایسه کنیم. پتانسیلی که پیشنهاد داده ایم عبارت است از  $U = ax^2 + bx - \frac{c}{x}$ . با حل معادله دیراک برای این

پتانسیل تابع موج را محاسبه کرده و با استفاده از این تابع موج گشتاور مغناطیسی پروتون را  $\alpha_p = 3.447 n.m$ ، و

شعاع باری پروتون را  $\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 1.439 fm$  محاسبه نموده ایم. بعد از این مرحله پتانسیل ایزواسپین را به پتانسیل

بالا افزوده و مسأله را با در نظر گرفتن این پتانسیل به عنوان پتانسیل اختلال، شعاع باری پروتون را

$$\alpha_p = 3.117 n.m \text{ و } \langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 0.998 fm \text{ محاسبه کرده ایم.}$$

در قسمت بعدی پروتون را به عنوان یک سیستم سه ذره ای در نظر گرفته و معادله دیراک را برای یک سیستم سه ذره

ای با توجه به مختصات ژاکوبی حل کرده و مقادیر شعاع باری پروتون و گشتاور مغناطیسی آن را به ترتیب

$\alpha_p = 3.089 n.m$  و  $\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 0.897 fm$  قبل از اعمال اختلال در محاسبه کرده ایم. همین مقادیر را بعد از

اعمال پتانسیل ایزواسپین به ترتیب  $\alpha_p = 3.019 n.m$  و  $\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 0.883 fm$  به دست آورده ایم.

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
الف.....	تقدیر و تشکر.....
ب.....	چکیده.....
ج.....	فهرست مطالب.....
ه.....	فهرست شکل ها.....
و.....	فهرست جداول.....
ا.....	مقدمه.....
	<b>فصل اول</b>
۴.....	چرا کوارکها.....
۶.....	کوارکها و رنگها.....
۸.....	خواص کوارکها.....
۱۰.....	رنگ: عامل بار برهمکنش هسته ای.....
۱۴.....	مدل کوارکی.....
۱۸.....	باریونها.....
	<b>فصل دوم</b>
۲۵.....	ایزواسپین.....
۲۸.....	ایزواسپین کوارکها.....
	<b>فصل سوم</b>
۳۱.....	معادله دیراک.....
۳۳.....	گشتاور مغناطیسی پروتون.....
۳۴.....	$g_A$ $g_V$
۳۶.....	مدل کیسه ای MIT.....
۳۶.....	ساختار هادرونی.....

۴۲	..... کوارکهای آزاد محدود شده در یک کره
۴۵	..... جرم هادرونها در مدل کیسه ای
۴۶	..... گشتاور مغناطیسی
۴۹	..... $\frac{g_A}{g_V}$
۵۱	..... حل معادله شعاعی بای یک ذره دیراک در یک پتانسیل کروی
<b>فصل چهارم</b>	
۵۹	..... مقدمه
۵۹	..... معرفی پتانسیل پیشنهادی
۶۱	..... حل معادله دیراک با پتانسیل پیشنهادی
۶۴	..... محاسبه $\frac{g_A}{g_V}$
۶۸	..... تأثیر پتانسیل ایزواسپین بر تابع موج پروتون
۷۴	..... محاسبه تابع موج پروتون با استفاده از معادله دیراک برای یک سیستم سه ذره ای
۷۸	..... تأثیر پتانسیل ایزواسپین - ایزواسپین بر روی تابع موج
۸۱	..... نتیجه گیری
۸۲	..... پیشنهادات

## فهرست شکلها

- شکل (۱-۱): نمودار فاینمن مربوط به نابودی زوج ..... ۱۰
- شکل (۲-۱): (a) واکنش الکترومغناطیسی با تبدیل فوتون. (b) واکنش قوی با تبدیل گلئون. (c) ادامه نمودار b (رنگ کوارکها) ..... ۱۱
- شکل (۳-۱): اندر کنش گلوئونها با یکدیگر ..... ۱۳
- شکل (۴-۱): چند تایه های کوارک آنتی کوارک مربوط به  $SU(3)$  ..... ۱۵
- شکل (۵-۱): اعداد کوانتمی  $Q, S$  برای سه کوارک با طعمهای  $d, u, s$  ..... ۱۶
- شکل (۶-۱): ده تایه باریونی ..... ۱۷
- شکل (۷-۱): چند تایه های  $SU(3)$  مربوط به دو کوارک  $(qq)$  ..... ۱۹
- شکل (۸-۱): چند تایه های  $SU(3)$  مربوط به سه کوارک  $(qqq)$  ..... ۲۰
- شکل (۹-۱): حالت پایه باریونها برای  $(4 و 10) + (2 و 8)$  ..... ۲۱
- شکل (۱-۳): تصویر کلی از MIT Bag Model ..... ۳۶
- شکل (۲-۳): رسم مولفه بالایی تابع موج در حالت پایه شعاع کیسه در حدود  $x_0 = 2.04$  است ..... ۴۱
- شکل (۳-۳): رسم توابع بسل کروی. نقطه ای که دو تابع برابرند نشان داده شده است ..... ۴۲



## فهرست جداول

- جدول ( ۱-۱): برخی از اعداد کوانتومی کوارکها ..... ۹
- جدول (۱-۲): برخی از اعداد کوانتومی لپتونها و واسطه گر ها ..... ۱۰
- جدول یانگ مربوط به ایزواسپین کوارکها ..... ۷۰

## مقدمه

بشر همیشه در پی پاسخ این پرسش بوده است که جهان از چه چیزی ساخته شده است، از آب، آتش، خاک، هوا و یا چیزهای دیگر مثل عناصر جدول مندلیف و یا ذرات بنیادی تری که هنوز ما آنها را بدرستی نمی‌شناسیم. الکترونها، و یا پروتونها و یا نوترونها، کدامیک از این ذرات جهان پیرامون ما را از آن خود کرده اند. پس از آنکه دانشمندان در قرن بیستم و از ابتدای این قرن با پیشنهاد تامسون ساختار مواد را تشریح و تحلیل کردند، مدل‌های متفاوت و کثیری مطرح شد تا اینکه مشخص گردید ذرات تشکیل دهنده هسته (نوکلئونها) نیز خود یک ذره ای بنیادی نیستند، بلکه از ذرات بنیادی تری بنام کوارکها ساخته شده اند که در واقع این طرح در مدل کوارکی مطرح گردید. در واقع این مدل تنها مدلی است که می توان نتایج حاصل از آن را با آنچه که در طبیعت مشاهده می شود، مقایسه قابل قبولی انجام داد. این پایان نامه به بررسی مدل کوارکی پرداخته و مطالب زیر را بنابر آنچه در زیر آمده در فصلهای مختلف بررسی نموده ایم.

□ در فصل نخست کوارکها و خواص کوارکها و یا به طور خلاصه مدل کوارکی را بررسی نموده ایم.

□ در فصل دوم این پایان نامه در مورد ایزواسپین به عنوان یکی دیگر از درجات آزادی ذرات زیر اتمی بحث کرده ایم و اثرات آن را بر روی نوکلئونها توضیح داده ایم.

□ در فصل سوم با استفاده از معادله دیراک به معرفی برخی خواص استاتیکی پروتون؛ از قبیل گشتاور مغناطیسی،  $\frac{g_A}{g_V}$  و شعاع باری پرداخته ایم.

□ و بالاخره در فصل چهارم معادله دیراک را به ازای پتانسیلی خاص، که در واقع مدل پیشنهادی ما برای پتانسیل حاکم بین کوارکها در پروتون است، حل کرده و خواص پروتون را با استفاده از تابع موج بدست آمده، محاسبه کرده ایم. و در گام آخر پتانسیل ایزواسپین را به عنوان یک پتانسیل اختلالی در نظر گرفته و نتایج را با آنچه که در تجربه

مشاهده شده است مقایسه کرده ایم و این بیانگر نزدیکی نتایج مدل پیشنهادی ما با مشاهدات تجربی است.

# فصل اول

➤ چرا کوارکها

➤ کوارکها و رنگها

➤ خواص کوارکها

➤ رنگ: به عنوان بار واکنش هسته ای

➤ مدل کوارکی

➤ باریونها(حالتهای سه کوارکی)

## ۱-۱) چرا کوارکها؟

۲۵۰۰ سال پیش زمانی که تالس فیلسوف یونانی آب را عنصر اصلی سازنده جهان هستی دانست اندیشه بشر برای آنکه بداند بنای هستی از چه چیزی است، به تکاپو افتاد. ۲۰۰۰ سال بعد ارسطو سه عنصر هوا خاک و آتش را به عنصر پیشنهادی تالس افزود و این چهار عنصر را عنصرهای سازنده کائنات تصور کرد. این دیدگاه تا دو هزار سال بعد نیز مورد پذیرش بود تا اینکه در سال ۱۶۶۱ میلادی رابرت بویل در کتاب شیمی دان شکاک مفهوم تازه ای از عنصر را معرفی کرد. و در سال ۱۸۰۳ جان دالتون شیمی دان انگلیسی با نظریه اتمی خود گام مهمی در راه مطالعه ماده و ساختار آن برداشت. و بالاخره در ابتدای قرن بیستم تامسون پیشنهاد کرد که اتمها از الکترون های در یک توپ با بار الکتریکی مثبت محاط شده اند. ولی بعدها مشاهده شد که ذرات  $\alpha, \beta$  در یک میدان مغناطیسی از مسیر خود منحرف می شوند. اما رادفورد با بمباران کردن اتم بوسیله ذرات  $\alpha$  دریافت که قسمت سنگین اتم در نقطه ای بنام هسته نهفته است که بار مثبت دارد. وی در سال ۱۹۱۹ ذره پروتون را کشف کرد و در نهایت در سال ۱۹۳۲ چادویک ذره ای خنثی بنام نوترون را کشف کرد.

در اواخر قرن بیستم در حدود ۶۲ ذره کشف گردید که پروتون و نوترون سبکترین ذرات در بیناب حالت‌های فرمیونی بر هم کنش قوی به نام باریونها هستند و به همین نسبت یک رشته متعدد از بوزونهایی که سخت با هم اندرکنش می کنند، مزونها هستند که پیون سبکترین آنهاست. مجموع باریونها و مزونها را هادرون می‌نامیم. و اما کوارک ذرات تشکیل دهنده باریونها و مزونها هستند که در شش نوع مختلف یافت می‌شوند. البته ذرات دیگری مثل الکترون و نوترینو هستند که از کوارک تشکیل نمی‌شوند و دسته دیگری از ذرات به نام لپتونها هستند. در حقیقت پیون، پروتون، نوترون و ... تکه‌ها و ذرات نهایی نیستند بلکه کوارکها آنها را به هسته‌ها و اتمها که حالت مقید ساختارشان می‌باشد، پیوند می‌دهد. نوترینو ( $\nu$ ) منحصراً در برهم کنشهای ضعیف وارد می‌شود اما الکترون در برهم کنشهای الکترومغناطیسی نیز شرکت می‌کند. یک چارچوب نظری لازم بود که این مفاهیم را به یک طرح محاسباتی کمی تبدیل کند. طبیعی است که این چارچوب نظری نمی‌توانست معادله

شرویدینگر باشد چرا که معادله شرویدینگر آفرینش و فناى ذراتى را که درواپاشى نوترون مشاهده مى شود نمى تواند پیش‌بینى کند و همچنین ذرات فوق‌العاده نسبیتى را نمى تواند توصیف کند. در سال ۱۹۶۰ از پرتوهای الکترونی با انرژی بسیار بالا در مرکز شتابدهنده خطى استنفورد (SLAC) در یک آزمایشی که عمر ذره  $\alpha$  بررسی می شد، مورد استفاده قرار گرفت. پرتوهای الکترونی به سوى یک پروتون شلیک می شدند و آنچه که دیده شد این بود که: الکترونها با فرکانس بیشتری نسبت به آنچه که انتظار می رفت پراکنده شدند.<sup>۱</sup> با مشاهده این برخوردهای شدید پیشنهاد شد که پروتون دارای یک مرکز پراکندگی است. بنابراین توزیع الکترونهای پراکنده شده در این حالت چنان بود که در سال ۱۹۶۹ فاینمن<sup>۲</sup> و جورکن<sup>۳</sup> پیشنهاد دادند که مرکز پراکندگی شبه نقطه ای است.<sup>[۱]</sup>

اخیراً<sup>۴</sup> در CERNISR از برخورد رودرروى دو پروتون نشان داده شده است که تغییر در گشتاور پروتون از حالتی که پروتون از یک ماده پراکنده می شد بیشتر است<sup>[۱]</sup>. از این رو این مطلب نیز گواهی دیگر بر وجود یک مرکز پراکندگی در داخل یک پروتون است. مقایسه اطلاعات بدست آمده از الکترونهای پراکنده شده با نوترینوهای پراکنده شده ما را قادر می سازد که مطالب بیشتری درباره طبیعت و یا بهتر است بگوییم اعداد کوانتومی ذرات تشکیل دهنده پروتون یاد بگیریم.

دقت شود که هنوز برای شناسای ساختار پروتون احتیاج به بمباران کردن پروتون با انرژیهای بسیار بالاست. با بمباران کردن پروتون توسط برخی از لپتونها در آزمایشگاه فرمی و CERN SPS تا حدودی ساختار پروتون مشخص شد. با توجه به این آزمایشات معلوم گردید که پروتون و نوترون خود ذراتی بنیادی نیستند اما از ذرات بنیادی بنام پارتون<sup>۴</sup> که نامی است کلی برای ذرات تشکیل دهنده نوکلونها، ساخته شده اند.

---

<sup>1</sup> Panofsky

<sup>2</sup> Feynman

<sup>3</sup> Bjorkan

<sup>4</sup> Parton

دو نکته در مورد پارتونها مهم است:

۱ - ذرات الکتریکی خنثی که گلوئون نامیده می شوند بطور نظری پیشنهاد می شود که ذراتی بدون جرم هستند.

۲ - ذرات فرمیونی با اسپین  $\frac{1}{2}$  را که هر کدام دارای بار الکتریکی هستند را کوارک می نامیم.

### ۱-۲) کوارکها و رنگها

در قسمت قبل گفته شد که ذرات از نظر اسپینی به دو دسته باریونها و مزونها طبقه بندی می شوند. باریونها از سه کوارک و مزونها از یک کوارک و یک آنتی کوارک تشکیل شده اند.

هنگامی که از کوارک u و یا d نام می بریم صحبت در مورد طرحهای متفاوت کوارک است. در اوایل تشکیل نظریه کوارک دو طعم متفاوت فوق برای کوارکها پیشنهاد شد تا بر اساس آن خواص هادرونها کشف شده تا آن زمان قابل توجیه باشد. بعدها به علت آن که هادرونها دیگری نیز در شتاب دهنده ها تولید شده دانشمندان برای توجیه خواص ذرات جدید ناگزیر از پذیرفتن طعمهای جدید برای کوارکها شدند. طعمهای شناخته شده هم اکنون با اسامی ذیل نامیده می شوند:

up	charm	top
Down	strang	beauty

تمام کوارکها دارای اسپین  $\frac{1}{2}$  بوده و از این جهت جزء فرمیونها طبقه بندی می شوند و بنابراین از آمار فرمی - دیراک<sup>۵</sup> تبعیت می کنند و از نظر بار الکتریکی به دو گروه تقسیم می شوند.

همانطور که توضیح داده شد پروتون و نوترون خود ذرات بنیادی نیستند بلکه از ذرات دیگری بنام کوارکها تشکیل شده اند. بررسی های انجام شده چه از لحاظ نظری و چه از لحاظ عملی نشان می دهد که پروتون و نوترون بایستی از سه کوارک تشکیل شده باشند. یعنی پروتون از دو کوارک u و

<sup>5</sup> Fermi - Dirac statistic

«مزونها و باریونها بعنوان ذرات قابل مشاهده متعلق به حالت تکتایه<sup>6</sup> یا بدون رنگ می‌باشند.» و یا «تمام ذرات در طبیعت بی‌رنگ<sup>7</sup> هستند.» و یا به عبارتی تحت چرخش در فضای RGB ناوردا هستند. به آنتی کوارکها رنگهای مکمل نسبت داده می‌شود:  $\bar{R}$  (آبی آسمانی)،  $\bar{G}$  (بنفش)،  $\bar{B}$  (زرد).

پس سه حالت  $q\bar{q}$  یعنی  $BB\bar{B}, GG\bar{G}, RR\bar{R}$  بدون رنگ هستند اما ترکیب  $\bar{R}\bar{R} + \bar{B}\bar{B} + \bar{G}\bar{G}$  تحت چرخش در فضای رنگ ناورداست. خلاصه اینکه ما بی‌رنگی را برای نمایش تکتایی از گروه رنگ به کار می‌بریم.

بنابراین یک عدد کوانتومی رنگ را به کوارکها نسبت داده‌ایم، رنگ در جهان از حس و ادراک ما پوشیده است بطوری که همه ذرات یا کوارکها حالت‌های مقیدیند که با آنچه در آشکارسازها و آزمایشات مشاهده می‌شوند مطابقت دارند.

### ۳-۱) خواص کوارکها

کوارکها را می‌توان یک وسیله مناسب ریاضی برای یافتن نتایج تقارن  $SU(3)$  در نظر گرفت و مطلقاً لزومی ندارد که به صورت موجود فیزیکی در نظر گرفته شوند. اما اگر کوارکها وجود داشته باشند خواص آنها بسیار قابل توجه خواهد بود. بار الکتریکی کوارکها را با استفاده از  $Q=I_3+Y_{12}$  می‌توان بصورت زیر نوشت.

پایستگی بار و عدد باریونی تضمین می‌کند که حداقل یک کوارک یعنی کوارک دارای کمترین جرم  $q_1$  بطور مطلق پایدار خواهد بود. آن دو کوارک دیگر از طریق واپاشی‌های ضعیف به کوارک پایدار واپاشیده خواهند شد. مانند:

$$q_2 \rightarrow q_1 + \alpha + D$$

$$q_3 \rightarrow q_1 + \alpha + D$$

<sup>6</sup> Singlet

<sup>7</sup> Colorless



اگر کوارکها وجود داشته باشند می توان انتظار داشت که کوارک و پادکوارک پایداری را که بصورت زوج توسط پرتوهای کیهانی و یا توسط ذرات حامل از شتابدهنده های انرژی بتوان مشاهده کرد. کاوشهایی که برای یافتن کوارکها انجام یافته است توسط مورپورگور (۱۹۷۰) مرور شده اند. اما ناتوانی در کشف کوارکها را می توان با فرض بزرگ بودن فوق العاده جرم آنها و بنابراین نیاز به انرژی هایی بیش از توان شتاب دهنده های فعلی، توضیح داد. ولی فرض بزرگ بودن جرم کوارکها با خود وضعیت ناآشنایی را به همراه می آورد. برای آنکه مثلاً زوج کوارک - پادکوارک جرم صحیح نسبتاً کوچک فزونی داشته باشد انرژی بستگی باید قابل مقایسه با مجموع جرم های ذرات تشکیل دهنده باشد. معمولاً در فیزیک اتمی و هسته ای مجموع جرم های تشکیل دهنده با کل جرم یک ذره تفاوت اندکی با هم دارند.

در جدول زیر تعدادی ذرات بنیادی را همراه با اعداد کوانتومی با اعداد باریونی و لپتونی آورده ایم:

جدول (۱-۱): برخی از اعداد کوانتومی کوارکها

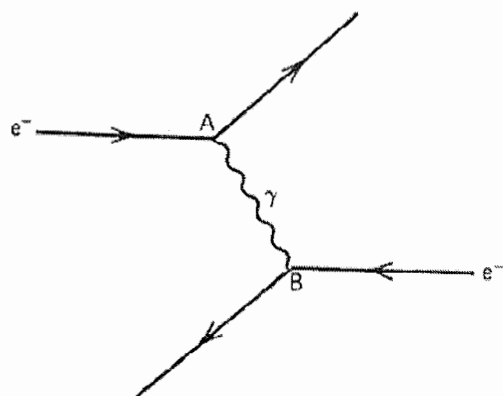
کوارک	اسپین	B	L	Q بار
U(up)	۱/۲	۱/۳	۰	+۲/۳
D(down)	۱/۲	۱/۳	۰	-۱/۳
C(charm)	۱/۲	۱/۳	۰	۲/۳
T(top)	۱/۲	۱/۳	۰	۲/۳
S(strang)	۱/۲	۱/۳	۰	-۱/۳
B(beauty)	۱/۲	۱/۳	۰	-۱/۳

جدول (۱-۲): برخی از اعداد کوانتومی لپتونها و واسطه گرها

لپتونها	اسپین	B	L	Q
E	۱/۲	۰	۱	-۱
$\nu$	۱/۲	۰	۱	۰
واسطه گرها	اسپین	B	L	Q
$\gamma$	۱	۰	۰	۰
$W^{\pm}, Z$	۱	۰	۰	$0 \pm 1$

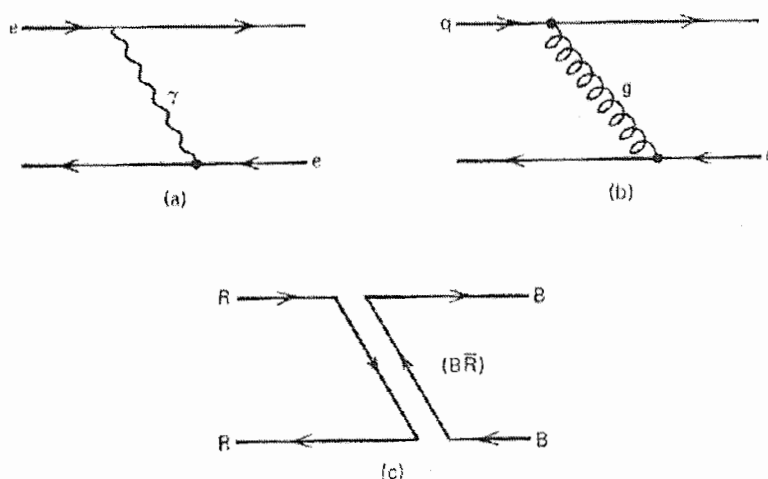
#### ۱-۴) رنگ: عامل برابر هم کنش هسته ای

در تئوری الکترومغناطیسی ماکسول ذرات باردار از قبیل الکترونها در برابر میدانهای الکترومغناطیسی از خود واکنش نشان می دهند. برای مدت درازی مشکل بود که بتوانند ارتباطی ملموس در این اندرکنش بین ذرات باردار پیدا کنند. اما در نظریه میدانهای کوانتومی ما این ارتباط ملموس را خواهیم یافت یعنی: «همه نیروهای طبیعی نتیجه ذرات تبادلی هستند». همانطور که در شکل (۱-۱) دیده می شود یک الکترون در نقطه A یک فوتون نشر می کند یعنی یک کوانتم میدان الکترومغناطیسی. و برای پایستگی تکانه یکی هم برگشت می کند.



شکل (۱-۱): نمودار فاینمن مربوط به نابودی زوج

فوتون منتشر شده یک فوتون واقعی نیست بلکه این فوتون، فوتونی مجازی است. با وجود این یک الکترون می‌تواند یک فوتون منتشر کند به شرطی که آن فوتون بقدر کافی سریع در آشامیده شود. این فوتون بنابراین اصل عدم قطعیت به مدت  $\Delta t \leq \frac{\hbar}{\Delta E}$  وجود خواهد داشت. که  $\Delta E$  انرژی نا پیدا و یا انرژی نهان است. فرض می‌کنیم به جای بازدرآشامیده شدن بوسیله همان الکترون فوتونی بوسیله الکترونهاي دیگر جذب شود (شکل بالا). در نقطه B که عمل جذب فوتونهاي مجازی صورت می‌گیرد الکترون مذکور برخورد گشت. در نظریه کوانتومی میدان ذرات مبادله شده عهده‌دار دافعه کلمبی برای ذرات با بار هم نام هستند. در شرح تصویر شکل بالا نیروی طرح شده در شکل ممکن است که فقط یک نیروی دافعه‌ای باشد که بوسیله تعویض ذرات اتفاق افتاده باشد. تکانه یک ذره مجازی در تئوری میدان کوانتومی می‌تواند علامت دار باشد چرا که بردار تکانه احتیاجی به سمتگیری تجویز شده توسط فیزیک کلاسیک ندارد. فوتونهاي مجازی نمی‌توانند بصورت یک وجود مستقل از بارها که آنها را جذب و یا نشر می‌کند وجود داشته باشند. آنها فقط یک فاصله ممکن را که بوسیله ذره ای نامعلوم که به اندازه  $c\Delta t$  است طی می‌کنند که c سرعت نور می‌باشد. واکنشهای الکترومغناطیسی ذرات باردار بوسیله تصاویر شکل زیر نشان داده شده‌اند که همان نمودارهای فاینمن می‌باشند.



شکل (۱-۲): (a) واکنش الکترومغناطیسی با تبدیل فوتون (b) واکنش قوی با تبدیل گلئون (c) ادامه نمودار b (رنگ کوارکها).

همچنین کوارکهای باردار با فوتونهای مبادله شده اندرکنش می کنند، اگرچه ما با حقیقت واکنشهای الکترومغناطیسی پوزیترونیم مقید<sup>8</sup>  $e+e^-$  آشنایم اما واضح است که واکنش الکترومغناطیسی نمی تواند کوارکهای موجود در هادرونها را دربرگیرد. یک نیروی قوی باید حضور داشته باشد که دافعه الکترومغناطیسی حاصل از سه ذره یکسان  $u$  را در  $\Delta^{++}$  از بین برده و سه ذره را قویاً مقید کند.

شکل (b) واکنش بین دو کوارک، همراه با تبدیل گلوئون مجازی می باشد. گلوئون کوانتمهای میدان رنگ هستند که از کوارکهای مقید در نوکلونهای هسته بوجود می آیند. دنبال کردن مسیر رنگ در شکل (b) مفید خواهد بود که آن را در شکل (c) می بینیم. کوارک قرمز از سمت چپ صفحه حرکت می کند و به خط دیگری با کوارک رنگی آبی می افتد و سپس از سمت راست به سمت چپ صفحه می آید. اندرکنش قوی کوارکها با تبدیل رنگها به یکدیگر می باشد. اکنون شکل های (b) و (c) را با هم مطابقت می دهیم. گلوئون در شکل (b) بوسیله خط مجعدی (همانند فنر) نشان داده شده است و گلوئون رنگین در واقع در شکل (c) بایستی بصورت  $(\bar{B}\bar{R})$  برچسب خورده باشد. پایه و اساس تصاویر مقایسه شده در شکل (۱-۲) می تواند یک تئوری رنگ یا نیروی هسته ای قوی بنا کند. نام این تئوری را همانند تئوری کوانتیزه ماکسول الکترودینامیک کوانتمی (QED) ; QCD<sup>9</sup> می نامیم. این تئوری خوشبختانه به قدر کافی شبیه QED، علی الخصوص در قسمت باز بهنجار تئوری پیمانهای است. تمام مطالب گفته شده در QCD را از طریق محاسبه بدست می آوریم. در شکل (1.2C) یک نوع حالت رنگین از نه حالت اتفاق می افتد که حالت های دیگر عبارتند از:

$\bar{B}\bar{B}, \bar{B}\bar{G}, \bar{B}\bar{R}, \bar{G}\bar{B}, \bar{G}\bar{G}, \bar{G}\bar{R}, \bar{R}\bar{B}, \bar{R}\bar{G}, \bar{R}\bar{R}$  توجه شود که گلوئون رسم شده در (1.2c) با برچسب  $\bar{B}\bar{R}$  می باشد نه BR چرا که گلوئون بایستی از یک کوارک و یک آنتی کوارک تشکیل شده باشد. حالت بعدی مربوط به حالت تکتایی است که از ترکیب  $\bar{R}\bar{R} + \bar{G}\bar{G} + \bar{B}\bar{B}$  تشکیل می شود که این حالت در فیزیک اتفاق نمی افتد. چرا که اگر وجود داشت بایستی برد نیروی قوی هسته ای بی نهایت

<sup>8</sup> bind Positronium

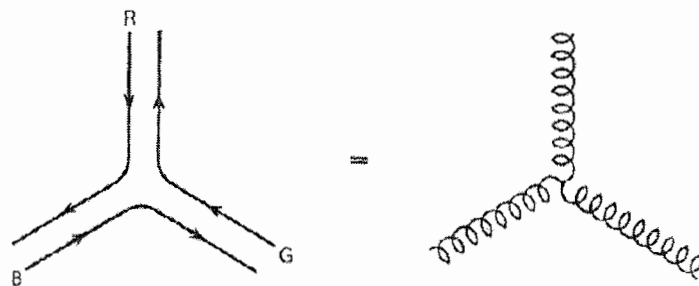
<sup>9</sup> Quantum Chromodynamics

می‌شد. پس در حالت کلی برحسب تقارن  $SU(3)$  رنگ این نه حالت به صورت یک هشت‌تایه و یک تک‌تایه درمی‌آید که عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{b} + b\bar{r}) & |5\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(r\bar{g} - g\bar{r}) \\
 |2\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(r\bar{b} - b\bar{r}) & |6\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b\bar{g} + g\bar{b}) \\
 |3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - b\bar{b}) & |7\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(b\bar{g} - g\bar{b}) \\
 |4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{g} + g\bar{r}) & |8\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g})
 \end{aligned} \tag{1-1}$$

حالت تک‌تایه  $|9\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})$

پس کروودینامیک نظریه‌ای شبیه به الکترومغناطیسی است با این تفاوت که در آنجا یک فوتون و در اینجا ۸ نوع گلوئون رنگی وجود دارد. پس گلوئون با خود بار رنگ را حمل می‌کند، آنها می‌توانند با دیگر گلوئونها برهم‌کنش داشته باشند همانند آنچه که در شکل ۳-۱ نشان داده شده است.



شکل (۳-۱): اندرکنش گلوئونها با یکدیگر

که این مکان در الکتروودینامیک به خاطر عدم داشتن بار و یا فرض کردن بار برای فوتونها امکان پذیر نیست. تئوریهای کوانتمهای میدان ممکن است که بطور مستقیم باشند که غیر آبله نامیده می‌شوند [۲].

## ۱-۵) مدل کواری

بنابر مدل کواری تمام هادرونها از ذرات و یا موجودات بنیادین کوچک مختلفی ساخته شده‌اند که کواریک نامیده می‌شوند. در واقع این کلمه را گلن<sup>۱۰</sup> در سال ۱۹۶۴ برای یک سه‌تایه  $SU(3)$  از ذراتی فرضی که بتوان تمام هادرونها را از آنها ساخت بنا نهاد. چرا که هادرونها را می‌توان در چند تایه‌هایی مرتب کرد که چندتاییگی آنها ممکن است از نظریه گروه بدست آید اما تمام چندتاییگی‌هایی که از تقارن  $SU(3)$  پیش‌بینی می‌شوند در میان هادرونها وجود ندارد. این شاید زیاد ایجاد تعجب نکند اگر حالت مشابه موجود در نظریه اسپین معمولی را در نظر بگیریم که در آنها چندتاییگی‌های مجاز عبارتند از  $4, 3, 2, 1$  و غیره که متناظر با اسپین‌های  $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  می‌باشند. ولی برای هر دستگاه مفروضی فقط اسپین درست و یا اسپین نیمه درست می‌تواند رخ دهد. بنابراین چندتاییگی‌های یک دستگاه خاص یا همه زوج خواهند بود یا همه فرد.

دستگاه‌های دیگری هم در فیزیک هستند که گروه تقارنی دارند ولی همه چندتاییگی‌هایی که از لحاظ نظریه گروه مجازند در این دستگاهها رخ نمی‌دهد وجود شرایط اضافی برای چندتایه‌های مربوط به ذرات بنیادی بطوری که آنها را به چندتایه‌های موجود در طبیعت محدود کند امری منطقی نیست. بویژه به نظر می‌رسد که سه‌تایه  $SU(3)$  برای هادرونها رخ نمی‌دهد. سه‌تایه، چندتایه اصلی گروه  $SU(3)$  بشمار می‌رود و تمام چندتایه‌های دیگر  $SU(3)$  را می‌توان با ترکیب سه‌تایه‌ها ساخت.

بنابراین گفته شد که هادرونها از کواریکها تشکیل شده‌اند و نمایش اساسی  $SU(3)$  چندتایه‌ای که بتوان از آن چندتایه‌های دیگری ساخت یک سه‌تایه<sup>۱۱</sup> است. چندتایه بنیادین کواریک در شکل زیر نمایش داده شده است. همچنین چندتایه پادکواریکی که در آن علامتهای اعداد کوانتومی جمع‌پذیر معکوس می‌شوند نیز نشان داده شده است.

<sup>10</sup> Gellman

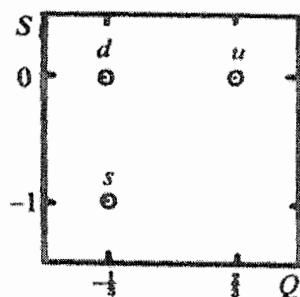
<sup>11</sup> Triplet

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ \bar{e} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \nu_\alpha \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \bar{\tau} \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} t \\ b \end{bmatrix}$$

در این دوتایه‌ها بار الکتریکی کوارکهای  $u, c, t$   $\frac{2}{3}$  و کوارکهای  $d, s, b$   $-\frac{1}{3}$  بار پوزیترون می‌باشد. اما هیچ نظریه کاملاً قابل درکی که گویای آن باشد که کوارکها و لپتونها باید همواره بصورت دوتایه‌های چپ گرد پدیدار شوند وجود ندارد کوارکهای موجود هر یک از این دوتایه‌ها، از طریق برهم کنش ضعیف به هم وابسته می‌شوند. بدین صورت که کوارک بار  $(d, s, b) \frac{-1}{3}$  با گسیل یک بوزون مجازی  $\bar{W}$  به کوارک بار  $(u, c, t) + \frac{2}{3}$  واپاشیده می‌شود.

گفته شد که کشش نوع کوارک داریم که با اعداد کوانتمی  $d, t, c, s, Q$  قابل تشخیص هستند. که با اشکال  $u, d, s, c, t, b$  نوشته می‌شوند. برای سه کوارک  $d, u, s$  اعداد کوانتمی  $Q, S$  در شکل ۱-۵ نشان داده شده‌اند.



شکل (۱-۵): اعداد کوانتمی  $Q, S$  برای سه کوارک با طعمهای  $d, u, s$ .

در اینجا ما یک چندتایه ۱۰ باریونی را دنبال می‌کنیم. باریونها از سه فرمیون یکسان ساخته شده‌اند. همچنین حالت‌های امکان پذیر ممکن است بر طبق تقارنشان از برچسب کوارکها طبقه‌بندی شوند. با این اوصاف اگر سه کوارک  $u, d, s$  را در نظر بگیریم در حالت کلی بایستی  $3^3 = 27$  حالت ممکن وجود داشته باشد و یک حالت تقارنی به شکل:

$$uds+dsu+sud-usd-sdu-dus$$

(۳-۱)

اکنون حالت‌های متقارن ده‌تایی را فهرست می‌کنیم:

$$uuu \quad udd+ddu+dud$$

$$ddd \quad uss+ssu+sus$$

$$sss \quad dds+dsd+sdd$$

$$uud+udu+duu \quad dss+ssd+sds$$

(۴-۱)

$$uus+usu+suu \quad uds+dsu+sud+usd+sdu+dus$$

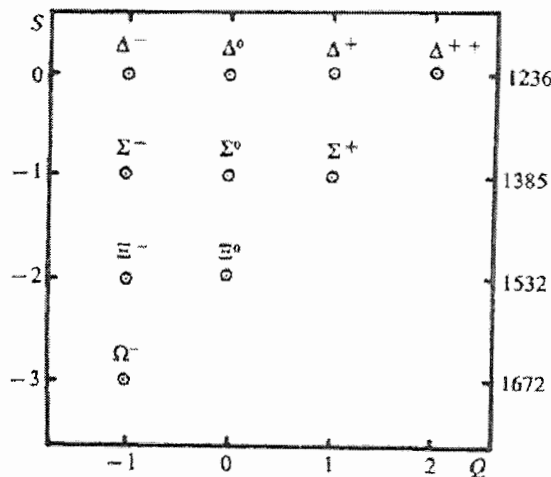
بنابراین ۱۱ حالت از ۲۷ حالت ممکن را داریم. ۱۶ حالت باقی مانده را به دو مجموعه ۸‌تایی تقسیم

می‌کنیم. حالت‌های سه کوارک در حالت کلی به شکل چندتاییه‌های  $10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$  تبدیل خواهند

شد. ده‌تاییه را در شکل زیر می‌آوریم.

همچنین ما می‌توانیم به این نکته پی ببریم که  $\sum^{\circ} = uds, \Delta^{++} = uuu$  و الی آخر.

پروتون و نوترون دو حالت از هشتاییه هستند [۲].



شکل (۶-۱): ده تاییه باریونی

(۶-۱) باریونها (حالت‌های سه کوارکی)



باریونها را می توان بصورت حالت‌های مقید سه کوارک در نظر گرفت چون برای هر کوارک سه امکان طعم  $s, d, u$  وجود دارد برای ترکیب سه کوارک مجموعاً  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$  حالت وجود دارد. می‌خواهیم بدانیم چه چندتایی‌هایی از ترکیب سه سه‌تایه بدست می‌آید. برای  $SU(2)$  که گروه مربوط به اسپین یا ایزواسپین است چندتایی‌ها را می توان توسط الگوی برداری بدست آورد. مثلاً ترکیب دو دستگاه با چندتایی‌های  $(2J_1 + 1), (2J_2 + 1)$  چندتایی‌های زیر بدست می دهد:

$$\{2(j_1 + j_2) + 1\}, \{2(j_1 + j_2) - 1\}, \dots, \{2(j_1 - j_2) + 1\} \quad (5-1)$$

یعنی بصورت  $2j+1$  که در آن زاز  $j_1 + j_2$  و  $|j_1 - j_2|$  با گام واحد تغییر می‌کند. برای ترکیب ایزو اسپین می‌توان از این الگوی برداری استفاده کرد. ولی بقیه مساله به مراتب دشوارتر است. چندتایی‌ها را می توان توسط نظریه گروه، تعیین کرد. جواب ترکیب سه سه‌تایه بطو نمادی در زیر داده شده است:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \quad (6-1)$$

حالت‌های ۲۷ گانه سه کوارک از یک تک‌تایه، دوهشت‌تایه و یک ده‌تایه تشکیل می‌شود. و اینها فقط چندتایی‌های مشاهده شده برای باریونها هستند. در معادله بالا هشت‌تایه دوبار ظاهر می شود که شبیه حالت جمع کردن سه اسپین  $\frac{1}{2}$  است.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  که در آن اسپین  $\frac{1}{2}$  دو بار ظاهر می‌شود زیرا می توان نوشت:

$$S = S_{12} + S_3 \quad \text{که} \quad S_{12} = S_1 + S_2$$

بنابراین داریم:

$$S_{12} = 0 \rightarrow S = \frac{1}{2}$$

$$S_{12} = 1 \rightarrow S = \frac{1}{2}, S = \frac{3}{2}$$

چند تایی‌های بالا را می‌توان با ترکیب تصویری سه کوارک بدست آورد. ابتدا حالت‌های ترکیب دو کوارک را آنچنان که در شکل ۱-۶ نموده شده است در نظر می‌گیریم نتیجه این ترکیب را می توان به صورت زیر نوشت:

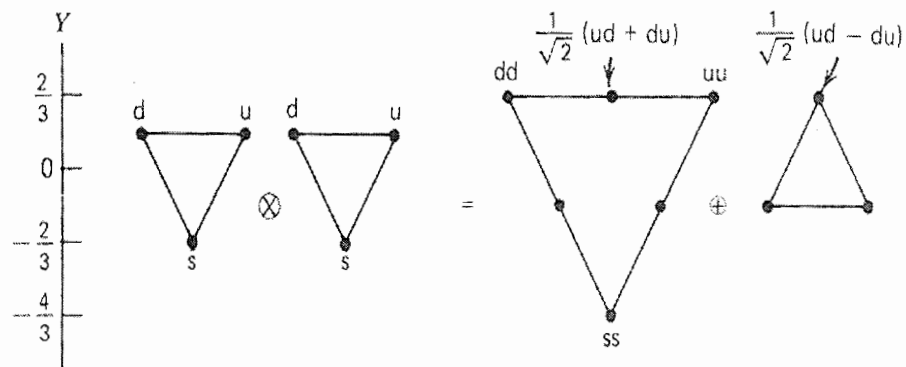
$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3} \quad (7-1)$$

که  $\bar{3}$  مربوط به حالت پادذره‌ها است.

این شش‌تاییه و سه‌تاییه دارای بار و عدد باریونی درست نیستند. و بنابراین در میان هادرونهای فیزیکی یافت نمی‌شوند حال کوارک سوم را به نوبت با ۶ و ۳ جمع می‌کنیم شکل (۸-۱) نشان می‌دهد که:

$$6 \otimes 3 = 10 \oplus 8, \quad 3 \otimes 3 \rightarrow 1 \oplus 8$$

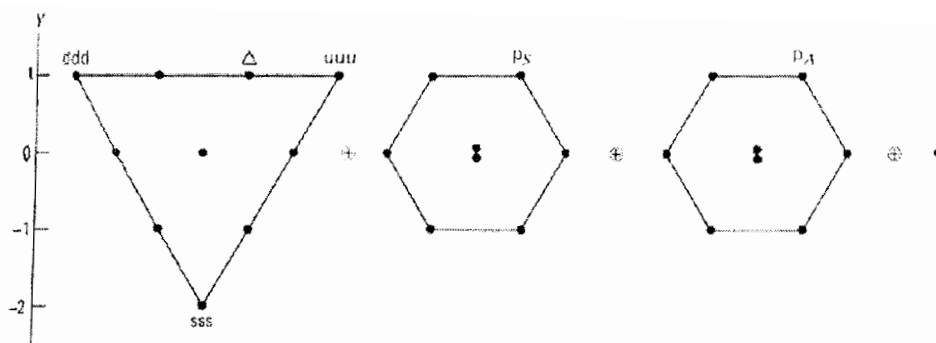
$$\Rightarrow 3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \oplus \bar{3}) \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \quad (8-1)$$



شکل (۷-۱): چندتاییه های  $SU(3)$  مربوط به دو کوارک (qq)

پس هر گاه ۲ کوارک  $qq$  را در  $SU(3)$  در نظر بگیریم نه حالت  $qq$  برای چندتاییه  $SU(3)$  اتفاق خواهد افتاد که در شکل (۶-۱) نشان داده شده است. که ۶ تا از ۹ حالت تحت تعویض کوارکها متقارن و سه تا  $\bar{3}$  بار متقارن هستند. و در نهایت برای ترکیب سه کوارک در  $SU(3)$  بنا بر آنچه که در بالا گفته شد و نیز در شکل (۷-۱) آمده است:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \otimes 3) \oplus (\bar{3} \otimes 3) = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \quad (9-1)$$



شکل (۸-۱): چند تایه های SU(3) مربوط به سه کوارک (qqq)

بعنوان مثال ما ترکیبات uud را در شکل بالا با  $\Delta, P_A, P_S$  ساخته ایم. ترکیب اعضای غیرشگفتی  $\bar{3}$  در شکل (۶-۱) در کوارک u در ۳ ما را فوراً به رابطه زیر می رساند:

$$P_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u \quad (10-1)$$

حالتهای (decuplet) تحت تعویض کوارکها متقارن هستند. گواه این مطلب sss,ddd,uuu می باشد. اما ترکیب متقارن uud عبارتند از:

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{3}}[uud + (ud + du)u] \quad (11-1)$$

لزوم تعامد حالت uud باقیمانده برای دو حالت  $P_A$  و  $\Delta$  ما را به  $P_S$  می رساند یعنی:

$$P_S = \frac{1}{\sqrt{6}}[(ud + du)u - 2uud] \quad (12-1)$$

از طرفی در حالت پایه اسپین باریونها به سادگی با جمع سه اسپین  $\frac{1}{2}$  کوارکها پیدا می شوند. پس حالتهای دیگر مربوط به SU (۲) اسپین به شکل:

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = (3 \oplus 1) \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2 \quad (13-1)$$

به عبارت دیگر اسپین باریونهای چندتایه با  $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  داده می شوند. شاخصهای پائین برای  $(M_A, M_S)$  بر این امر دلالت دارد که حالتهای اسپینی تحت تعویض ۲ کوارک اول متقارن یا پادمقارن

هستند. اگر ما برای  $u \rightarrow \uparrow$  و برای  $d \rightarrow \downarrow$  را در نظر بگیریم با توجه به روابط مربوط به  $P_A, P_S, \Delta$  خواهیم داشت:

$$X(S) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow)$$

$$X(M_S) = \sqrt{\frac{1}{6}}(\uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow - 2\uparrow\uparrow\downarrow) \quad (14-1)$$

$$X(M_A) = \sqrt{\frac{1}{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)$$

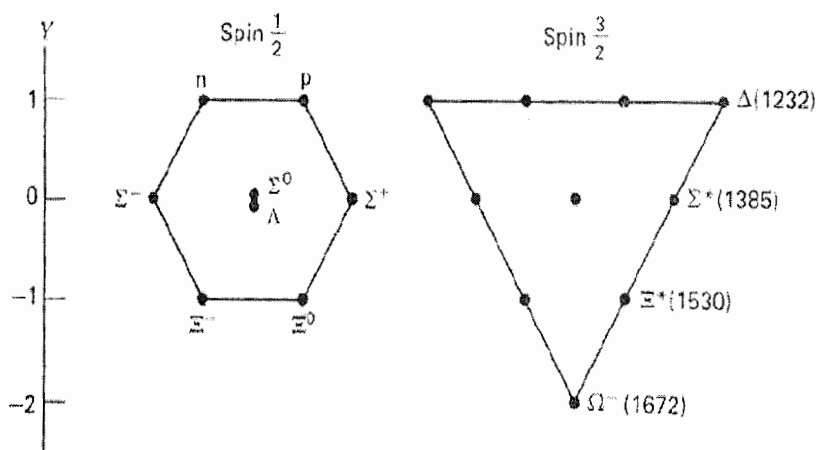
برای معین کردن باریونها در مدل کوارکی انتظار می رود که ما باید ترکیبهای طعم  $SU(3)$  رابطه  $(9-1)$  را با ترکیب اسپین  $SU(2)$  رابطه  $(13-1)$  یعنی:  $(10+8+8+1)$  و  $(4+2+2)$  هم اکنون با توجه به تقارنهای گفته شده در قبل و همچنین در نظر گرفتن  $SU(2)$  چندتایه های مهم  $SU(3)$  و  $SU(2)$  را معین می کنیم:

$$S : (10,4) + (8,2) \quad M_S : (10,2) + (8,4) + (8,2) + (10,2)$$

$$M_A : (10,2) + (8,4) + (8,2) + (10,2) \quad (15-1)$$

$$A : (10,4) + (8,2)$$

برای مثال حالت پایه باریونها برای  $(10,4) + (8,2)$  به شکل زیر می باشد:



شکل (۹-۱): حالت پایه باریونها برای (۴ و ۱۰) + (۲ و ۸)

و برای مثال گروه هشت تاییه<sup>۱۳</sup> متقارن (S) تماماً از ترکیب  $\frac{1}{\sqrt{2}}[(8,2) + (8,2)]$  اتفاق می افتد.

پایین ترین جرم باریونها بطور مرتب با جفت اسپین متقارن  $(10,4), \frac{3}{2}$  و گروه هشت نفری (۸,۲)

اسپین  $\frac{1}{2}$  ، مطابقت می کند، (شکل ۸-۱).

تقارن حالت پایه یک مساله جدیدی را ایجاد می کند. برای مثال یک  $J_3 = \frac{3}{2}, \Delta^{++}$  با تابع موج  $U \uparrow U \uparrow U \uparrow$  توصیف می شود. در صورتیکه انتظار داریم تحت تعویض کوارکهای حالت ما پاد متقارن شود. همانطور که در قسمتهای قبل گفته شد ما یک خاصیت اضافی را به کوارکها نسبت دادیم. که آن را به رنگ می نامیم. که در سه مقدار R,G,B هستند.

این شکل کوارکها یک سه تاییه از SU(3) رنگ هستند که شبیه به SU(3) طعم کوارکها می باشد. همه هادرونها بی رنگ (Colorless) فرض می شوند. به این معنی که آنها به نمایش تک تاییه از گروه SU(3) متعلق هستند. تابع موج رنگ مربوط به یک باریون به شکل زیر است:

$$(qqq) = \frac{1}{\sqrt{6}}[RGB - RBG + BRG - BGR + GBR - GRB] \quad (۱۶-۱)$$

که شبیه حالت تک تاییه سه کوارگی مربوط به SU(3) طعم کوارک است:

$$(qqq) = \frac{1}{\sqrt{6}}[uds - usd + sud - sdu + dsu - dus] \quad (۱۷-۱)$$

لزوم عبارت پاد تقارن از کل تابع موج رسانده می شود که شامل تقارن در ساختار فضا - اسپین و طعم و پاد تقارنی در رنگ می باشد. ساختار رنگی رابطه بالا برای همه باریونها معمول است و باز به یاد می آوریم که نمایش های تقارنی شامل:

فضا × اسپین × طعم بودند.

یک مثال مناسب از یک تابع موج مدل کوارکی آشکار مربوط به اسپین بالای پروتون است. از رابطه (۱۷-۱) خواهیم داشت:

<sup>13</sup> OCTET

$$|p \uparrow\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}[p_s \chi(M_s) + p_A \chi(M_A)] \quad (18-1)$$

که طعم واسپین اجزاء با روابط (۱۰-۱)، (۱۲-۱)، (۱۴-۱) داده می شوند بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} |p \uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}}[uud(\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow - 2\uparrow\uparrow\downarrow) + udu(\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow - 2\uparrow\downarrow\uparrow)] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{18}}duu(\uparrow\downarrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow - 2\downarrow\uparrow\uparrow) \\ &= \frac{1}{\sqrt{18}}[u \uparrow u \downarrow d \uparrow + u \downarrow u \uparrow d \uparrow - 2u \uparrow u \uparrow d \downarrow + \dots]. \end{aligned} \quad (19-1)$$

اکنون اپراتور بار را به صورت  $Q = \sum_i Q_i$  تعریف می کنیم یعنی برای محاسبه بار می توانیم از اپراتور بار با توجه به ویژه مقدارش و یه به عبارتی از ویژه مقدار بار برای محاسبه بار استفاده کنیم. یعنی از ویژه حالت‌های  $|p \uparrow\rangle, |n \uparrow\rangle, |p \downarrow\rangle, |n \downarrow\rangle$  و اثر دادن عملکرد بار روی آن که  $Q_I$  بارهای کوارک در بار واحد پروتون هستند، استفاده کنیم و می توانیم نشان دهیم که:

$$\langle P \uparrow | Q | P \uparrow \rangle = \langle P \downarrow | Q | P \downarrow \rangle = 1$$

$$\langle N \uparrow | Q | N \uparrow \rangle = \langle N \downarrow | Q | N \downarrow \rangle = 0$$

# فصل دوم

➤ ایزواسپین

➤ ایزواسپین کوارکها

## ۱-۲) ایزواسپین<sup>۱</sup>

پروتون و نوترون را می توانیم دو حالت مختلف یک ذره توصیف کنیم که آن ذره را نوکلئون می نامیم. اسپین آنها  $\frac{1}{2}$  و جرم نوترون  $939/566 \text{Mev}/c^2$  و جرم پروتون  $938/272 \text{Mev}/c^2$  می باشد. فرق عمده این دو ذره در خواص الکترومغناطیسی آنهاست: یعنی بار و گشتاور دو قطبی مغناطیسی.

اگر ما فقط واکنش های قوی را در نظر بگیریم تفاوتها آشکار نمی شود یعنی در غیاب یک واکنش الکترومغناطیسی یک پروتون را نمی توان از یک نوترون تشخیص داد. این مساله شبیه به مورد ذراتی با  $m_s$  مختلف است. در غیاب میدان مغناطیسی B ذرات با دو مقدار ممکن  $m_s = \pm \frac{1}{2}$  در یک حالت انرژی یکسان هستند و در نتیجه از یکدیگر قابل تشخیص نیستند. وقتی یک میدان مغناطیسی محدود معرفی می شود تبهگنی از بین می رود و ذرات با انرژیهای مختلف مشاهده می شوند اعم از اینکه اسپین ذاتی S آنها موازی با  $\vec{B}$  و یا خلاف جهت  $\vec{B}$  باشد. اختلاف بین یک پروتون و یک نوترون با اختلاف بین ذراتی با  $m_s = \pm \frac{1}{2}$  در صورتی که میدان کولمبی را با میدان مغناطیسی جایگزین کنیم قابل قیاس است.

اگر پروتون و نوترون بایک ذره یکسان شرح داده شوند ما به یک برچسب جدید برای تشخیص آنها نیاز داریم. برای این منظور مفهوم ایزواسپین معرفی می شود. از اینرو آنها فقط دو حالت ممکن برای یک نوکلئون هستند، حالت پروتون و حالت نوترون، می توانیم ایزواسپین یک نوکلئون را  $t = \frac{1}{2}$  تخصیص دهیم. دو نوکلئون با  $t_0 = \pm \frac{1}{2}$  قابل تشخیص هستند، ویژه مقدار انتظاری عملگر ایزواسپین

t

<sup>۱</sup> Isospin



می باشد. این مطلب قراردادی است که ما حالت  $\left|t = \frac{1}{2}; t_0 = \frac{1}{2}\right\rangle$  را مربوط به حالت پروتون و  $\left|t = \frac{1}{2}; t_0 = -\frac{1}{2}\right\rangle$  را برای حالت نوترون در نظر بگیریم و یا اینکه راه دیگری را انتخاب کنیم. ولی ما هر دو قرار داد بالا را که عمومیت بیشتری دارند می پذیریم یعنی:

$$|p\rangle = \left|t = \frac{1}{2}; t_0 = \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$|n\rangle = \left|t = \frac{1}{2}; t_0 = -\frac{1}{2}\right\rangle$$

که  $|p\rangle$  و  $|n\rangle$  توابع موج یک پروتون و یک نوترون را نمایش می دهند.

در غیاب واکنش های الکترومغناطیسی انتظار داریم که ایزواسپین ثابت حرکت باشد؛ یعنی هاملتونین می تواند با ویژه حالت های مجذور عملگر ایزواسپین  $t^2$  یکسان باشد. در این صورت ویژه مقدار عملگر  $t^2$  مقدار  $t(t+1)$  است.

همچنین می توانیم در نوشتار ریاضی ایزواسپین همانند ذرات با اسپین  $\pm \frac{1}{2}, 1/2$  که آنها را به صورت ماتریسی می نوشتیم، استفاده کنیم یعنی :

(۱-۲)

$$\left|S = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|S = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

که توابع ایزواسپینی نوکلئونها در قیاس با روابط بالا به صورت زیر نوشته می شوند:

(۲-۲)

$$|p\rangle = \left| t = \frac{1}{2}; t_0 = \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_t$$

$$|n\rangle = \left| t = \frac{1}{2}; t_0 = -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_t$$

عملگرهای ایزواسپینی را برای سیستمهای با  $t = \frac{1}{2}$  می توانیم همانند ماتریسهای اسپینی پائولی

بنا کنیم:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۳-۲)$$

که هر کدام به ترتیب مؤلفه های ایزواسپین  $\tau$  در راستای  $X$  و  $Y$  و  $Z$  هستند. رابطه بین ماتریس های بالا به صورت زیرنوشته می شود:

$$\bar{\tau}_i \bar{\tau}_j = \delta_{ij} I + i \varepsilon_{ijk} \bar{\tau}_k \quad (۴-۲)$$

که  $I$  ماتریس واحد  $2 \cdot 2$  و  $\varepsilon_{ijk}$  نماد لوی-سیتا<sup>۲</sup> است و مقدارش ۱ است اگر  $i, j, k$  از قاعده جایگشت ۱، ۲ و ۳ پیروی کنند و -۱ است اگر از این قاعده جایگشت پیروی نکنند و صفر است اگر دو مؤلفه و یا بیشتر از آنها با هم مساوی باشند (مثلاً  $i=j$ ).

برای یک نوکلئون تابع موج با رابطه (۲-۲) داده می شود که در حقیقت ویژه توابع عملگر  $\tau_3$  و یا  $\tau_0$  در مختصات کروی هستند یعنی:

<sup>2</sup> Levi-Cita

$$\tau_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tau_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \tau_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

مقدار مؤلفه سوم ایزواسپین  $t_0$  برابر است با مقدار انتظاری  $\tau_0$  یعنی همان اتفاقی که برای مؤلفه سوم اسپینی و ماتریسهای پائولی می یافتند، در اینجا نیز شاهد آن هستیم. همچنین بوسیله اپراتورهای ماتریسی  $\tau$  که در رابطه (۳-۲) شاهد آن هستیم می توانیم عملگرهای بالا برنده و پایین برنده  $\tau_+$ ،  $\tau_-$  را بنا کنیم که به ترتیب یک نوترون به پروتون و یک پروتون به یک نوترون تبدیل می شود.

$$\tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2)$$

$$\tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2)$$
(۵-۲)

در اینجا نیز همانند عملگرهای بالا برنده و پایین برنده اندازه حرکت زاویه ای می توانیم عملگرهای جدید ایزواسپین را به همان صورت بنویسیم:

$$(۶-۲)$$

$$\tau_{\pm} |t, t_0\rangle = \sqrt{t(t+1) - t_0(t_0 \pm 1)} |t, t_0 \pm 1\rangle$$

ایزواسپین تحت واکنشهای قوی ثابت حرکت است و این یک تقارن اساسی است همچنین ایزواسپین در دسته بندی هادرونها بسیار مفید است، برای مثال پیونها در سه حالت مختلف باری ظاهر می شوند؛  $\pi^+$  با جرم در حال سکون  $139 \text{ Mev}/c^2$ ،  $\pi^0$  با جرم در حال سکون  $135 \text{ Mev}/c^2$  و  $\pi^-$  که انرژی سکونش با انرژی سکون  $\pi^+$  یکی است. آنها ممکن اند در سه حالت  $t_0 = 1, 0, -1$  برای سیستم با  $t=1$  ظاهر شوند بنابراین پیون یک باریون نیست و عدد باریونی  $A=0$  دارد.

## ۲-۲) ایزواسپین کوارکها

یکی از نتایج رفتار پروتون و نوترون در حالت مختلف ایزواسپینی این است که می توانیم تبدیل یک پروتون به نوترون و یا بالعکس را بوسیله تأثیر عملگرهای بالا برنده و پایین برنده ایزواسپینی مشاهده کنیم یعنی:

$$\begin{aligned}\tau_+|n\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |p\rangle \\ \tau_-|p\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |n\rangle\end{aligned}\tag{۷-۲}$$

و همانطور که می دانیم  $|p\rangle = |uud\rangle$  و نوترون  $|n\rangle = |udd\rangle$  است. از اینرو روابط بالا به صورت زیر تغییر می یابند:

$$\tau_+|udd\rangle = |udd\rangle \quad \tau_-|uud\rangle = |uud\rangle\tag{۸-۲}$$

در واقع عملگرهای بالا برنده و پایین برنده ایزواسپینی بدین صورت عمل می کنند که :

عملگر  $\tau_+$  بر روی کوارکهای d عمل می کند و آن را به کوارک u تبدیل میکند و همچنین

$\tau_+|u\rangle = 0, \tau_-|d\rangle = 0$  خواهد شد. همچنین اگر مؤلفه سوم ایزواسپین هر کوارک u را  $\frac{1}{2}$  و هر کوارک

d را  $-\frac{1}{2}$  در نظر بگیریم در این صورت ایزواسپین پروتون با دو کوارک u و یک کوارک d،  $+\frac{1}{2}$  و

ایزواسپین نوترون با دو کوارک d و یک کوارک u،  $-\frac{1}{2}$  محاسبه می شود. [4]

# فصل سوم

➤ معادله دیراک

➤ گشتاور مغناطیسی پروتون

➤ مدل کیسه ای (MIT Bag Model)

$$\frac{g_A}{g_V} \quad \text{➤}$$

➤ حل معادله شعاعی برای یک ذره دیراک در پتانسیل کروی

### ۳-۱) معادله دیراک

همانطور که می دانیم در مکانیک کوانتومی نسبیتی ذرات با اسپین صفر با معادله کلین - گوردن<sup>۱</sup>، ذرات با اسپین  $\frac{1}{2}$  با معادله دیراک و ذرات با اسپین ۱ با معادله پروکا<sup>۲</sup> توصیف می شوند. اما همانطور که می دانیم رابطه کلاسیکی انرژی تکانه عبارت است از:

$$\frac{p^2}{2m} + V = E$$

و بنابر آنچه که در مکانیک کوانتومی مقرر شده است، یعنی برای رسیدن به معادله شرودینگر بایستی:

$$p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (1-3)$$

بنابراین اگر نتیجه روی تابعی مثل  $\psi$  عمل کند به معادله شرودینگر رسیده ایم:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

اما معادله کلین-گوردن برای ذرات نسبیتی بکار می رود پس در این حالت با استفاده از رابطه نسبیتی انرژی-تکانه برای یک ذره آزاد خواهیم داشت:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

دقت شود که در رابطه بالا اندازه حرکت  $p$  یک سه بردار است. و ما می توانیم از نماد گذاری چار بردار استفاده کنیم یعنی:

$$p^\alpha p_\alpha - m_0^2 c^2 = 0 \quad (2-3)$$

که در رابطه بالا

$$p_\alpha = i\hbar \partial_\alpha, \quad x^\alpha = (ct, x, y, z), \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

در رابطه فوق  $p^\alpha$  مؤلفه چاربردار CONTRAVARIANT و  $p_\alpha$  مؤلفه چاربردار COVARIANT نامیده می شوند.

از ترکیب دو رابطه (۱-۳) و (۲-۳) به رابطه زیر می رسیم:

$$-\hbar^2 \partial^\alpha \partial_\alpha \psi - m^2 c^2 \psi = 0 \quad (3-3)$$

به معادله بالا معادله کلین - گوردن می گوئیم.

اکنون با فرض  $c = \hbar = 1$  به اشکالات معادله K-G می رسیم، این اشکال همان منفی شدن چگالی احتمال است. یعنی اگر معادله (۳-۳) را در  $i\psi^*$  ضرب و سپس همیوگ آن را در  $i\psi$  ضرب کرده و

<sup>1</sup> Klein-Gordon

<sup>2</sup> Proca

آنگاه این دو رابطه را از یکدیگر کم کنیم با توجه به روابط زیر به رابطه ای برای چگالی احتمال و چگالی جریان خواهیم رسید:

$$\rho = |\psi|^2, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\rho = i \left[ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \psi \right], \quad j = -i [\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi] \quad (4-3)$$

اگر برای یک وضعیت تابع موج به صورت زیر باشد:

$$\psi = A e^{-i(Et + \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

در این صورت با توجه به روابط (4-3) مقدار

$$\rho = 2|A|^2 E$$

خواهد شد. حال در صورتی که مقدار E منفی باشد، چگالی احتمال نیز منفی خواهد شد. که علت این امر نیز آن است که معادله K-G بر حسب t از درجه دوم زمان است و بنابراین بایستی معادله ای بدست آورد که بر حسب t خطی باشد، که این کار را دیراک به طور خلاصه به صورت زیر انجام داد: دیراک از معادله K-G شروع کرده و آن را به صورت زیر نوشت:

$$p^\alpha p_\alpha - m_0^2 c^2 = (\beta^k p_k + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc)$$

که بایستی ضرایب  $\beta^k, \gamma^\lambda$  را پیدا کنیم. از رابطه رابطه فوق داریم:

$$p^\alpha p_\alpha - m_0^2 c^2 = \beta^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda - mc(\beta^k - \gamma^\lambda) p_k - m^2 c^2 \quad (5-3)$$

از تساوی قرار دادن دو طرف رابطه بالا به نتایج زیر می رسیم:

$$\beta^k = \gamma^\lambda$$

$$-(\gamma^0)^2 = (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$$

$$\gamma^\alpha \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\alpha = 0 \quad \alpha \neq \nu \quad (6-3)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & o \\ o & -I \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad o = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} o & \sigma^i \\ -\sigma^i & o \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

در واقع مجموعه استاندارد ماتریسهای  $\gamma$  که می توانست سه رابطه نخست روابط (6-3) را برآورده سازد، با سه رابطه انتهایی رابطه (6-3) نوشته ایم. اکنون با توجه به روابط فوق خواهیم داشت:

$$\gamma^\alpha p_\alpha \psi - m_0 c \psi = 0 \quad (7-3)$$

رابطه بالا همان معادله دیراک است. در واقع این معادله حرکت را کوانتیزه می کند. با توجه به معادله دیراک که در رابطه بالا آمده است، در یافت می شود که بایستی  $\psi$  نیز خود چهار مؤلفه ای از درجه چهار باشد یا به زبانی ساده تر چون همه ماتریسهای بالا 4x4 هستند باید  $\psi$  نیز 4x1 باشد. اولین ماتریسی که در اینجا به ذهن ما می رسد این است که بایستی  $\psi$  به صورت زیر باشد:

$$\psi_k(r) = \begin{pmatrix} g_k(r) \\ f_k(r) \end{pmatrix} \chi_{jm}^k$$

در رابطه فوق  $g(r)$  مؤلفه بالایی و  $f(r)$  مؤلفه پایینی تابع موج می باشد که در واقع هر کدام خود یک ماتریس 2x1 می باشند.  $\chi_{jm}^k$  نیز اسپینور ذره می باشد.

### ۳-۲) گشتاور مغناطیسی پروتون:

همانطور که در بخش (۱-۶) حاتهای سه کوارکی باریونها را توضیح دادیم و مشاهده نمودیم که چگونه به تابع موج پروتون و نوترون که خود مثالهایی از حالت سه کوارکی هستند، با در نظر گرفتن طعم، اسپین و حالت فضایی کوارکها رسیدیم. و بالاخره توضیح دادیم که می توانیم بار یک باریون را در حالت کلی با استفاده از رابطه  $Q = \sum_i Q_i$  که  $Q_I$  بار کوارکهای باریون هستند بدست آوردیم. در اینجا اپراتور ممان مغناطیسی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vec{\alpha} = \sum_i \alpha_i (\sigma_3)_i$$

که در واقع جمع روی کوارکهای تشکیل دهنده باریونها هستند. گشتاور مغناطیسی ذره ای با اسپین  $\frac{1}{2}$  و بار  $e$  بصورت  $\frac{e}{2m}$  است [5]. بنابراین یک کوارک بدون ساختار با بار  $Q_I$  و جرم  $m_I$  گشتاور مغناطیسی  $\alpha_j = Q_j \left( \frac{E}{2m_j} \right)$  دارد. از این رو در حالت غیر نسبیتی می توانیم گشتاور مغناطیسی را به

صورت

$$\alpha_p = \sum_{j=1}^3 \langle P \uparrow | (\alpha_j \sigma_3) | P \uparrow \rangle \quad (۳-۸)$$



بنویسیم که از توابع موج رابطه (۱-۱۹) استفاده کرده‌ایم. بنابراین گشتاور مغناطیسی پروتون به صورت زیر در می‌آید:

$$\alpha_p = \frac{1}{18} \{ (\alpha_u - \alpha_u + \alpha_d) + (-\alpha_d + \alpha_u + \alpha_d) + 4(2\alpha_u - \alpha_d) \} \cdot 3 \quad (۹-۳)$$

ضریب ۳ از جایگشتها بدست آمده است. گشتاور مغناطیسی پروتون از ترکیب گشتاورهای کوارکها که در رابطه بالا نموده شده است به دست می‌آید:

$$\alpha_p = \frac{1}{3} (4\alpha_u - \alpha_d) \quad (۱۰-۳)$$

و گشتاور مغناطیسی نوترون از تبدیل  $u \rightarrow d$  حاصل می‌شود یعنی:

$$\alpha_n = \frac{1}{3} (4\alpha_d - \alpha_u) \quad (۱۱-۳)$$

در حالت حدی که  $m_u = m_d$  خواهیم داشت:

$$\alpha_u = -2\alpha_d$$

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_p} = -\frac{2}{3} \text{ که: پیش‌بینی می‌شود که:}$$

که این مقدار با مقداری که از آزمایش بدست آمده توافق دارد یعنی: [2]

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_p} = 0.68497945 + 0.00000058$$

$$\frac{g_A}{g_V} \quad (۳-۳)$$

تجربه نشان می‌دهد که لپتونها در برهم کنش های ضعیف به صورت چپگرد عمل می‌کنند در صورتی که ضد ذرات لپتونها له صورت راستگرد شرکت می‌کنند، بنابراین پارته را نقض می‌کند. جریان لپتونی که در برهم کنش های ضعیف شرکت می‌کنند به صورت:

$$j_{\alpha}^{weak} = j_{\alpha}^V - j_{\alpha}^A \quad (۱۲-۳)$$

می باشد.  $j_\alpha^V$  جریان برداری و  $j_\alpha^A$  جریان شبه برداری است. اگر فقط قسمت برداری جریان و یا فقط قسمت شبه برداری آن را در نظر بگیریم پارامتر نقض نخواهد شد. به همین خاطر تئوری V-A را وارد می کنیم. جریان برداری و شبه برداری به ترتیب به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} j_\alpha^V &= \bar{\psi} \gamma_\alpha \psi \\ j_\alpha^A &= \bar{\psi} \gamma_\alpha \gamma^5 \psi \end{aligned} \quad (13-3)$$

که در آن  $\psi$  اسپینور چهار مؤلفه ای دیراک است. اگر به عنوان نمونه ای واپاشی نوترون را در نظر بگیریم:

$$n \rightarrow p + \bar{e} + \bar{\nu}_e \quad \Rightarrow \quad n + \nu_e \rightarrow p + \bar{e}$$

جریان لپتون  $e, \nu_e$  را می توان بر حسب دو جریان برداری و شبه برداری نوشت:

$$\begin{aligned} J_\alpha^V &= g \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \psi_{\nu_e} \\ J_\alpha^A &= g \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \gamma^5 \psi_{\nu_e} \end{aligned} \quad (14-3)$$

و جریان کل به صورت زیر خواهد بود:

$$J_\alpha^{weak} = g \bar{\psi}_e \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e}$$

در واپاشی بتا نیز ساختار نوکلئونها در فرم فاکتورهای برداری و شبه برداری  $g_V$  و  $g_A$  ظاهر می شود. در

مدل های غیر نسبیتی نسبت  $\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3}$  است ولی از لحاظ تجربی مقدار این نسبت  $1.259 \pm 0.017$  است با

توجه به رابطه مربوط به  $\frac{g_A}{g_V}$ :

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} \langle L_z \rangle \quad (15-3)$$

و با توجه به مقدار  $\langle L_z \rangle = 1 - 2\delta$  داریم:

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} (1 - 2\delta) \quad (16-3)$$

که در آن:

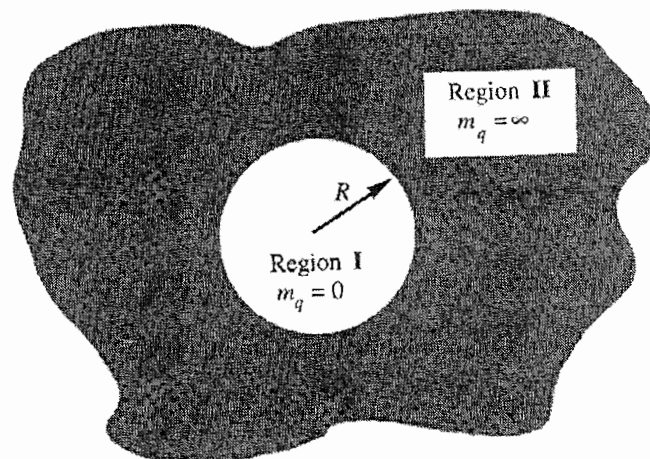
$$\delta = \frac{\frac{2}{3} \int_0^\infty |\chi_{\omega\gamma}(x)|^2 x^5 dx}{\int_0^\infty [|\varphi_{\omega\gamma}(x)|^2 + |\chi_{\omega\gamma}(x)|^2] x^5 dx} \quad (17-3)$$

که در واقع رابطه از بالا در بخشهای بعدی برای محاسبه  $\frac{g_A}{g_V}$  استفاده شده است. [8,9,18]

### ۳-۵ (مدل کیسه ای) MIT Bag Model

#### ۳-۵-۱ ساختار هادرونی

همانطور که می دانیم هادرونها اعم از باریونها و مزونها از کوآرک تشکیل شده اند یعنی باریونها از سه کوآرک و مزونها از یک کوآرک و یک آنتی کوآرک تشکیل شده اند و می دانیم که کوآرکها هیچگاه به صورت منفرد یافت نمی شوند، یعنی همواره به صورت ترکیبی از مجموع سه کوآرک یا کوآرک بعلاوه آنتی کوآرک کنار هم قرار گرفته اند و برای جداکردن این مجموعه باید انرژی بسیار زیادی در حد بینهایت به کوآرک داده شود تا آنها از هم فاصله گیرند یعنی با زیاد شدن فاصله انرژی نیز بالا می رود. این اتفاق تا زمانی که شرایط برای تولید یک جفت  $q\bar{q}$  فراهم شود ادامه دارد. این مسأله به تلاش دانشمندان برای جدا سازی تک قطبی های مغناطیسی بی شباهت نیست. اگرما یک قطعه شیئ مغناطیسی را ببریم، خود باز هم به یک دو قطبی مغناطیسی تبدیل می شود یعنی یک دو قطبی مغناطیسی جدید خلق شده است. جمع شدگی کوآرکها را در کنار هم محدود شدگی آنها می نامیم. در این بخش قصد داریم جمع شدگی در فضایی محدود، یعنی ذره ای واقع در چاه پتانسیل کروی را که نخستین بار توسط Bogolioubove [16] مطرح گردید و پس از آن به عنوان مدل MIT گسترش یافت را به نام MIT Bag Model ، بررسی کنیم [17].



شکل (۳-۱) : تصویر کلی از MIT Bag Model

*MIT Bag Model* یک مدل خیلی ساده برای توصیف ساختار هادرونهاست. فرض کنید هادرون یک حجم کروی به شعاع  $R$  را اشغال می کند. اگر یک کوارک درون این حجم باشد، فرض می کنیم جرم آن کوچک باشد، یعنی جرم آن به سمت صفر میل کند، و اگر کوارک در خارج آن قرار گیرد جرم آن را بی نهایت بزرگ در نظر می گیریم و این به آن معنی است که کوارک در بیرون از فضای کیسه نمی تواند قرار گیرد. پس کوارکها به بیرون از حجم هادرون رخنه نخواهند کرد که این حجم و ناحیه را ناحیه I یا همان کیسه می نامیم. برای شرح این مدل به شکل کوانتومی، بایستی معادله دیراک را، به ازای  $V=0$  و جرم کوارک را  $m=m_q=0$  درون حجم و  $m=m_q \rightarrow \infty$  در بیرون از این ناحیه در نظر گرفته، حل کنیم. در حل برای دو ناحیه مختلف بایستی تابع موج در مرکز (سطح کره) پیوسته باشد. معادله دیراک را برای تقارن کروی که  $V(r)=0$  حل می کنیم. در اینجا برای یک جرم اختیاری  $m$  جوابها را به دست می آوریم سپس در موارد دیگر و محدودتر به مسائل ساختار هادرونها وارد می شویم. با توجه به:

$$\begin{aligned} [E - m - V(r)]f(r) &= -\frac{dg(r)}{dr} - \frac{(1-k)}{r}g(r) \\ [E + m - V(r)]g(r) &= \frac{df(r)}{dr} + \frac{(1+k)}{r}f(r) \end{aligned} \quad (18-3)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} - \frac{k(k+1)}{r^2} f + (E^2 - m^2) = 0$$

که معادله بالا یک معادله بسل است:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2d}{rdr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k_0^2 \right] f_l(k_0 r) = 0$$

که اگر  $k_0^2 = E^2 - m^2 \geq 0$  باشد از حل معادله (1) به جواب زیر می رسیم:

$$j_0(k_0 r) \quad \text{منظم} \quad r \rightarrow 0$$

$$n_l(k_0 r) \quad \text{نامنظم} \quad r \rightarrow 0$$

و اگر  $-k_0^2 = E^2 - m^2 < 0$  جوابها به هنکل کروی تبدیل می شوند:

$$h_l^{(1)}(ik_0 r) \quad \text{منظم} \quad r \rightarrow \infty \left( h_l^{(1)} \rightarrow \frac{e^{-kr}}{r} \right)$$

$$h_l^{(2)}(ik_0 r) \quad \text{نامنظم} \quad r \rightarrow \infty \left( h_l^{(2)} \rightarrow \frac{e^{kr}}{r} \right)$$

پس با توجه به پاسخهای بالا روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{2l+1}{2} f_l(x) = f_{l-1}(x) + f_{l+1}(x) \quad (19-3)$$

$$f_l'(x) = \frac{1}{2l+1} [l f_{l-1}(x) - (l+1) f_{l+1}(x)]$$

برای مطالعه ساختار هادرونها به پاسخهای با انرژی مثبت با جرم  $m$  علاقمند می شویم.

وابستگی به پارامتر را با مدنظر قرار دادن علامت  $k$  بررسی می کنیم. اگر  $l = k > 0$  باشد برای

پاسخهایی که در نزدیکی ناحیه I هستند بایستی

$$f(r) = f_k(r) = N j_k(k_0 r) \quad (20-3)$$

را انتخاب کنیم که  $N$  ثابت نرمالیزاسیون و  $x = k_0 r$  می باشد. پاسخ دیگر متناسب با  $n_k$  است، و از

اینرو غیر قابل پذیرش است. همچنین برای یک پاسخ قابل نرمالیزاسیون می توانیم عبارت زیر را

انتخاب کنیم:

$$f(r) = f_k(r) = N h_k^{(1)}(ik_0 r) \quad (21-3)$$

$$x = ik_0 r$$

در مورد دیگر از رابطه (3-18)،  $g$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$g = \frac{1}{E+m} \left[ \frac{df}{dr} + \frac{1+k}{r} f \right] = \frac{k}{E+m} \left[ f_k'(x) + \frac{1+k}{x} f_k \right] \quad (22-3)$$

به ازای  $k = k_0$  پاسخها متناسب با  $l$  و به ازای  $k = ik_0$  پاسخها متناسب با  $h^{(1)}$  هستند. معادله ای که

برای  $g$  نوشته شده است به سادگی از ترکیب دو رابطه (3-19) بدست می آید:

$$f'_l(x) = \frac{1}{2l+1} \left[ l f_{l-1}(x) - (l+1) \left( \frac{2l+1}{x} f_l(x) - f_{l-1}(x) \right) \right]$$

$$\Rightarrow f'_l(x) = -\frac{l+1}{x} f_l(x) + f_{l-1}(x)$$

و از اینرو برای  $k=1$  خواهیم داشت:

$$g = \frac{k}{E+m} f_{k-1}(x)$$

و در نهایت جواب کلی برای این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$\psi_{jm}^k(r) = \left( -i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} \frac{k}{E+m} f_{k-1}(x) \right) Y_{jm}^k(\hat{r}) \quad (23-3)$$

روابط (۲۰-۳) و (۲۱-۳) بستگی به این دارند که  $r < R$  یا  $r > R$  باشد. اما پاسخ دیگر زمانی اتفاق می افتد که  $k < 0$  باشد در این مورد  $l = -(k+1)$  است و بایستی روابط زیر را انتخاب کنیم:

$$f(r) = f_{-(k+1)}(x) = N j_{-(k+1)}(k_0 r) \quad \text{اگر} \quad r < R \quad (24-3)$$

$$f(r) = f_{-(k+1)}(x) = N h^{(1)}_{-(k+1)}(ik_0 r) \quad \text{اگر} \quad r > R \quad (25-3)$$

در این حالت مؤلفه پایینی به صورت زیر حاصل می شود:

$$g = \frac{1}{E+m} \left[ \frac{df}{dr} - \frac{l}{r} f \right] = \frac{k}{E+m} \left[ f'_l(x) - \frac{l}{x} f_l(x) \right]$$

که  $k$  همانند قبل می باشد. در این صورت:

$$f'_l(x) = \frac{1}{2l+1} \left[ l \left( \frac{2l+1}{x} f_l(x) - f_{l+1}(x) \right) - (l+1) f_{l+1}(x) \right]$$

$$\Rightarrow f'_l(x) = \frac{l}{x} f_l(x) - f_{l+1}(x)$$

$$= \frac{\ell}{x} f_\ell(x) - f_{\ell+1}(x)$$

از این رو

$$g = -\frac{K}{E+m} f_{-K}(x)$$

پس برای این حالت جواب کلی تابع موج به شکل زیر در می آید:

$$\psi_{jm}^K(r) = \left( \begin{array}{c} f_{-(K+1)}(x) \\ i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} \frac{K}{E+m} f_{-K}(x) \end{array} \right) y_{jm}^K(\hat{r}) \quad (26-3)$$

که f با روابط (24-3) و (25-3) داده می شود. توجه شود که پاسخ های (23-3) و (26-3) شامل f های یکسان (که فقط l ها متفاوتند) می باشند و با یک تعریف برابر از K و x هستند. اکنون با مسأله ساختار هادرونها بر می گردیم البته فقط پاسخ مربوط به K = -1 را که در این جا به دست آمده را در نظر می گیریم. می دانیم به ازای K = -1 انرژی در حالت پایه است پاسخ در ناحیه I (درون هادرون یعنی  $r < R$ ) با جرم  $m = 0$ ، در این صورت:

$$\psi_I(r) = N_I \left( \begin{array}{c} j_0(Er) \\ i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} j_1(Er) \end{array} \right) \chi^{(s)} \quad r < R$$

که  $\chi^{(s)}$  یک اسپینور دو مؤلفه ای است. (هنگامی که  $K = -1$ ،  $y_{jm}^K$  به دو مؤلفه اسپینور وابسته به  $\hat{r}$  تبدیل می شود.) در خارج، یعنی در ناحیه II، ما  $E \gg m$  در نظر می گیریم و یا  $E$  را در نظر نمی گیریم:

$$\psi_{II}(r) = N_{II} \left( \begin{array}{c} h_0^{(1)}(imr) \\ i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} h_1^{(1)}(imr) \end{array} \right) \chi^{(s)} \quad ; \quad r > R$$

که  $h_0^{(1)}(ix) = -\frac{e^{-x}}{x}$  و  $h_1^{(1)}(ix) = \frac{ie^{-x}}{x}(1+1/x)$  داده می شود در این صورت:

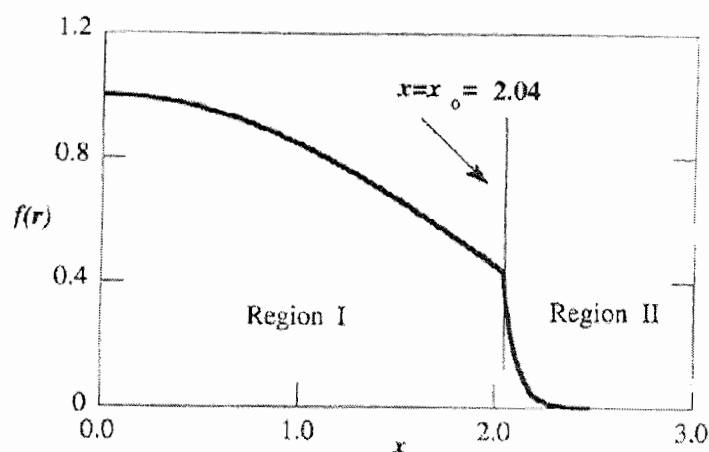
$$\psi_{II}(r) = -\frac{N_{II}}{mr} e^{-mr} \left( \begin{array}{c} 1 \\ i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} (1 + \frac{1}{mr}) \end{array} \right) \chi^{(s)}$$

اما اگر پاسخ ها را به ازای  $r = R$  بررسی کنیم و یا هنگامی که  $m \rightarrow \infty$  میل کند؛ حد توابع موج را به دست آوریم در این صورت با انتخاب که  $N_0$  محدود است. خواهیم داشت:

$$N_{II} = -mN_0 e^{mR}$$

$$\psi_{II}(r) = \frac{N_0}{r} e^{-m(r-R)} \left( 1 + i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} \left( 1 + \frac{1}{mr} \right) \right) \chi^{(s)}$$

$$\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{N_0}{R} \left( 1 + i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} \right) \chi^{(s)} & r = R \\ 0 & r > R \end{cases}$$



شکل (۲-۳): رسم مؤلفه بالایی تابع موج در حالت پایه شعاع کیسه در حدود  $x_0 = 2.04$  است.

مؤلفه بالایی این جواب در شکل (۲-۳) نشان داده شده است. ما می بینیم که شکل  $\psi_{II}$  در  $r = R$  به مؤلفه های بالا و پایین نیازمند است ولی در شکل کلی در

$$\psi_I(R) = \psi_{II}(R) \Rightarrow \begin{cases} N_{\pm} j_0(ER) = \frac{N_0}{R} \\ N_{\pm} j_1(ER) = \frac{N_0}{R} \end{cases} \quad \text{در } r = R \text{ داریم:}$$

شرط ویژه مقدار برای یک کوارک بدون جرم محدود شده در یک حجم با شعاع  $R$  به صورت زیر داده می شود:

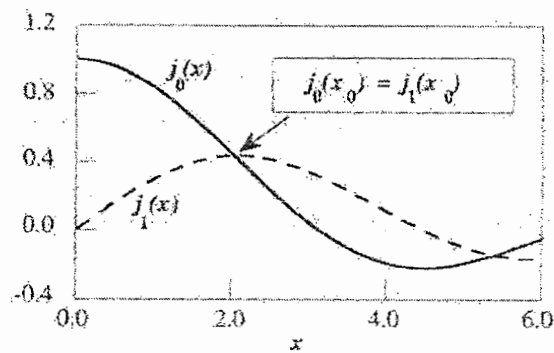
$$j_0(ER) = j_1(ER)$$



از طریق حل عددی این معادلات مقدار  $X_0$  را  $2/0.4$  به دست می آوریم که در این صورت انرژی یک کوآرک بدون جرم محدود شده در یک ناحیه ای به شعاع  $R$  با  $R$  نسبت عکس دارد یعنی

$$E = \frac{2.04}{R}$$

که مقدار  $X_0$  در شکل (۳-۳) نشان داده شده اند.



شکل (۳-۳): رسم توابع بسل کروی. نقطه ای که دو تابع برابرند نشان داده شده است.

### ۳-۵-۲) کوآرک های آزاد محدود شده در یک کره:

مطالعه طیف سنجی و بررسی پراکندگی غیرالاستیک کوآرک ها این اعتقاد را برای ما آورد که کوآرک ها ذرات نقطه گونه ای با اسپین  $\frac{1}{2}$  هستند. هم چنین می دانیم که کوآرک ها در خارج از پروتون آشکار نمی شوند. بنابراین معادله دیراک برای یک فرمیون آزاد با جرم  $m$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$i\partial\psi(x) = m\psi(x) \quad (۳-۲۷)$$

که ما حل معادله بالا را برای یک فضای محدود شده به شعاع R بررسی می کنیم. دو نوع جواب برای معادله بالا با  $j = \frac{1}{2}$  مطابق با دو حالت پارितه مربوط به  $S_{\frac{1}{2}}$  و  $P_{\frac{1}{2}}$  به وسیله عدد کوانتمی جدید  $K = \mp(j + \frac{1}{2}) = \mp 1$  داریم. که این پاسخ ها به صورت:

$$\psi_{-1} = N \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega + m}{\omega}} i j_0\left(\frac{rx}{R}\right) \\ -\sqrt{\frac{\omega - m}{\omega}} j_1\left(\frac{rx}{R}\right) \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{r}}{r} \end{pmatrix} U_m \quad (28-3)$$

$$\psi_{+1} = N' \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega + m}{\omega}} i j_1\left(\frac{rx}{R}\right) \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{r}}{r} \\ \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega}} j_0\left(\frac{rx}{R}\right) \end{pmatrix} U_m \quad (29-3)$$

که N و N' ثابت نرمالیزاسیون هستند و  $U_m$  اسپینور ذره و  $\omega$  انرژی است که با رابطه زیر داده می شود:

$$\omega = (m^2 + \frac{x^2}{R^2})^{1/2} \quad (30-3)$$

که x گشتاور کوارک در واحد  $\frac{1}{R}$  است.

اگر در ابتدا حالت غیر نسبیتی را مطالعه کنیم حد  $\omega - m \rightarrow 0$  میل خواهد کرد بنابراین فقط مؤلفه بالایی اسپینور باقی می ماند. تحت تبدیل پاریته

$$\psi_{\pm 1} \xrightarrow{r \rightarrow -r} \pm \psi_{\pm 1} \quad (31-3)$$

تبدیل خواهد شد. یعنی بسته به مقدار 1 پاریته می تواند زوج و یا فرد باشد.

فرض معقولی است که حالت پایه هادرون ها تقارن کروی دارند و کوارک ها نتیجتاً در کره ای به شعاع R محدود خواهند شد.

اگر  $n_\infty$  عمود بر سطح کره و به سمت بیرون باشد ، بنابراین بر روی مرز  $r=R$  هیچگونه جریانی نخواهیم داشت. یعنی:

$$n^\infty \bar{\psi} \gamma_\infty \psi = 0 \quad (32-3)$$

این معادله در صورتی برقرار است که :

$$-i\gamma_\infty n^\infty \psi = \psi \quad (33-3)$$

از این رو احتیاج می شود که

$$i\bar{\psi} \gamma_\infty . n = \bar{\psi} \quad (34-3)$$

$$\bar{\psi} \psi = (i\bar{\psi} \gamma_\infty . n) \psi \equiv \bar{\psi} (i\gamma_\infty . n \psi) = -\bar{\psi} \psi \quad (35-3)$$

که به طور آشکارا  $\bar{\psi} \psi = 0$  و از این رو  $n . \bar{\psi} \gamma_\infty \psi = 0$  خواهد شد. با توجه به فرمول بندی که در رابطه (33-3) مربوط به شرایط مرزی است می توانیم  $\psi_{\pm 1}$  را (معادله های (3-28) و (3-29)) در معادله (33-3) جایگزین کنیم. با نوشتن رابطه (33-3) با  $\psi_{-1}$  خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} \\ i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega+m}{\omega}} j_0(x) \\ -\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega}} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} j_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega+m}{\omega}} j_0(x) \\ -\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega}} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} j_1(x) \end{pmatrix} \quad (34-3)$$

که این معادله ما را به رابطه زیر می رساند:

$$j_1(x) = \sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}} j_0(x) \quad (35-3)$$

اکنون اگر  $j_1(z) = A j_0(z)$  باشد بنابراین  $\tan Z = \frac{Z}{1-AZ}$  و برابر مورد ما:

$$\tan x = \frac{x}{1-mr - \sqrt{m^2 R^2 + x^2}} \quad (36-3)$$

که ما از رابطه (3-30) نیز در نوشتن رابطه بالا استفاده کرده ایم. و به ازای  $\psi_{+1}$  رابطه زیر را داریم:

$$\tan x = \frac{x}{1-mR + \sqrt{m^2 R^2 + x^2}} \quad (36-3)$$

هنگامی که  $m \rightarrow \infty$  (در حد غیرنسبیتی) خواهیم داشت:

$$\tan x = \frac{x}{1-2mR} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \tan x = x$$

که به ترتیب پاسخ های  $x = \pi$  و  $x = 0$  می باشند. که مقدار  $x = \pi$  شبیه به نتایج معادله شرودینگر می باشد.

در حد فرا نسبیتی ( $m \rightarrow 0$ ) معادله غیرتجربی با رابطه زیر داده می شود.

$$\tan x = \frac{x}{1 \pm x}$$

و برای پایین ترین حالت جواب ها به صورت  $\psi_+(x=3.81)$  ;  $\psi_-(x=2.04)$  می باشند.

یک کوارک تنها با جرم  $m$  محصور در یک کره ای به شعاع  $R$  انرژی  $\omega = (m^2 + \frac{x^2}{R^2})^{1/2}$  را دارا می باشد.

هنگامی در پایین ترین حالت  $x(mR)$  داده شده در شکل (۳-۳) است و انرژی با جرم کوارک رابطه دارد اما اگر  $R \rightarrow \infty$  آن گاه  $\omega = R$  خواهد شد. برای یک سیستم از  $N_{ij}$  تا کوارک با طعم های  $j$  و  $i$  و جرم های  $m_{ij}$  انرژی نهایی کوارک با رابطه زیر داده می شود.

$$E = \sum_i N_i (m_i^2 + \frac{x_i^2}{R^2})^{1/2} \quad (37-3)$$

### ۳-۵-۳) جرم ها درون ها در مدل کیسه ای:

در این مدل با افزایش  $R$  انرژی به شکل یکنواختی تا  $R = \infty$  کاهش می یابد. که این یک محدودیت خود به خودی ایجاد می کند. برای جلوگیری از این شرایط کمیتی به نام فشار،  $B$  را تعریف می کنیم که این سیستم را به حالت موازنه ای درآورد. که این یک طرح ضروری و مهم از مدل کیسه ای MIT می باشد.

در این صورت انرژی نهایی به صورت:

$$E_i^{(e)} = \sum N_i (m_i^2 + x^2 / R^2)^{1/2} + B \frac{4\pi R^3}{3} \quad (38-3)$$

رابطه بالا در حالی که E به کم ترین مقدار خود برسد به حال تعادل می رسد یعنی  $\frac{\partial E}{\partial R} = 0$  شود. رتبه بندی پدیده ها در پراکندگی های ناکشسان اظهار می دارد که جرم کوارک های u و d بایستی کوچک باشد بنابراین برای ساده تر کردن فرمول جرم کوارک ها را صفر در نظر می گیریم. پس انرژی مربوط به N کوارک از یک مجموعه به صورت زیر خواهد شد:

$$E = \frac{N \cdot 2.04}{R} + \frac{4\pi R^3}{3} B \quad (39-3)$$

که  $X(0) = 2.04$  و

$$\frac{\partial E}{\partial R} = 0 = 4\pi R^2 B - \frac{N \cdot 2.04}{R^2} \Rightarrow R = \left(\frac{N \cdot 2.04}{4\pi B}\right)^{1/4} \quad (40-3)$$

اکنون رابطه (39-3) را در رابطه (40-3) جایگزین می کنیم و رابطه مربوط به جرم یا انرژی مجموعه ای وابسته به فشار (B) را می یابیم:

$$M_N = \frac{4}{3} (4\pi B)^{1/4} (N \cdot 2.04)^{3/4} \quad (41-3)$$

رابطه بالا دلالت بر افزایش جرم به وسیله افزایش تعداد کوارک ها دارد و یا به عبارتی

$$\frac{M_{Meson}}{M_{Baryon}} = \frac{M_2}{M_3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/4} \cong \frac{3}{4} \quad (42-3)$$

یعنی اگر  $N = 3$  و  $M = M_{(Proton)}$  در این صورت از رابطه بالا می توانیم مقدار  $R \approx 1.6 \text{ fm}$  محاسبه کنیم. که این اندازه برای تولید یک پروتون جرم دار با کوارک های بدون جرم لازم می شود. این جرم از انرژی جنبشی کوارک ها و فشار محدود آمده است.

### 3-5-4) گشتاور مغناطیسی:

ما گفتیم که در مثال های غیرنسبیتی کوارک و پروتون گشتاورهای مغناطیسی یکسانی دارند. برای این که گشتاور مغناطیسی پروتون در یک حالت غیرنسبیتی از کوارک ها  $\alpha_p = 2.8 \text{ Bohr}$  شود بایستی از کوارک هایی با جرم  $M_q = 340 \text{ Mev}$  برای  $\alpha_q = \frac{e}{2mq}$  استفاده کنیم. اما این حالت را برای یک پروتون طبیعی و واقعی نمی توان به حق و به مورد دانست. چرا که در واقع کوارک های

تشکیل دهنده پروتون در ناحیه R محدودند، ولی مطالب گفته شده در بالا به ازای کوارک های آزاد می باشد.

گشتاور مغناطیسی یک کوارک با تابع موج  $\psi$  در ناحیه  $r < R$  با رابطه زیر داده می شود:

$$\alpha = \frac{1}{2} \int_{|r| < R} d^3 \vec{r} \vec{r} \cdot \vec{j} = \frac{1}{2} \int_{|r| < R} d^3 r \vec{r} \cdot (\bar{\psi} \gamma \psi) e \quad (3-43)$$

نتیجه  $\alpha = \frac{e}{2m_q}$  فقط هنگامی داده می شود که  $\frac{1}{R} \gg m_q$  باشد. ( $\frac{1}{R}$  ممنتوم ذره محدود شده در ناحیه R است.)

برای ارضای این مطلب ابتدا  $R \rightarrow \infty$  میل می دهیم. تا این که ذره محدود شده آزاد شود. و یا جرم کوارک را در موردی که کوارک بایستی گشتاور غیرعادی بزرگی داشته باشد خیلی بزرگ اختیار می کنیم پس برخوردهای غیرالاستیک را می توانیم در نظر بگیریم.

برای کوارک های محدود شده در کره ای به شعاع R و با جرم m می توانیم آشکارا گشتاور مغناطیسی را از معادله (3-43) محاسبه کنیم. با جانشانی تابع موج در معادله (3-28) و در معادله (3-43) خواهیم داشت:

$$\alpha = \frac{e}{2mQ} f(mR)$$

$$f(mR) \equiv \frac{1}{3} mR \frac{4\omega R + 2mR - 3}{2(\omega R)^2 - 2\omega R + mR}$$

$$\text{که } \left\{ \omega = \left( m^2 + \frac{x^2}{R^2} \right)^{1/2} \right.$$

می توانیم بگوییم که هر گاه  $mR \rightarrow \infty$  پس  $f \rightarrow 1$  و نتایج غیر نسبیتی حاصل می شود. در حدی

دیگر هنگامی که  $mR \rightarrow 0$  می توانیم  $\omega R \equiv x(0) = 2.04$  در نظر بگیریم و بنابراین

$$f \rightarrow \frac{1}{3} mR \cdot 1.22$$

از این رو

$$\alpha \approx e \cdot (0.2)R \quad (3-44)$$

که رابطه گشتاور مغناطیسی کوارک های بدون جرم محدود شده است.

توجه شود که اگر  $R \rightarrow \infty$  آن گاه  $\alpha \rightarrow \infty$  یعنی  $\frac{1}{m}$  به سمت بی نهایت میل می کند که به این معنی است که  $m_q \rightarrow 0$  میل میکند. و این انتظاری است که از یک ذره آزاد داریم. برای مشخص شدن نتیجه حاصله آموزنده است که این نتیجه را با مباحث پدیدار شناسی QCD مقایسه ای کنیم که

$$\text{فرض می شود } \alpha = \frac{e}{2\varepsilon} \text{ با } \varepsilon \approx 340 \text{ Mev}$$

یک کوارک بی جرم محدود شده در کره به ما رابطه زیر را نمایان می کند:

$$\alpha = \frac{e}{2\omega} \frac{1}{6} \left\{ \frac{4\omega R - 3}{\omega R - 1} \right\} \approx \frac{5}{6} \frac{e}{2\omega} = \frac{5}{6} \alpha_{QCD}$$

برای یک کوارک با جرم زیاد  $m \rightarrow \omega$  گشتاور مغناطیسی کیسه با گشتاور مغناطیسی در QCD یکسان خواهد شد یعنی

$$\alpha_{bag} = \alpha_{QCD}$$

در مدل کیسه ای ما می توانیم از معادله (۳-۴۴) و گشتاور مغناطیسی پروتون به ازای کوارک های بدون جرم به رابطه زیر دست یابیم که:

$$0.2R = \frac{1}{660 \text{ Mev}}$$

و از این رو  $R \approx 1.5 \text{ fm}$  به دست می آید. اگر ما جرم کوارک را بزرگ تر از صفر در نظر بگیریم بنابراین  $\alpha_q$  کاهش می یابد و  $R > 1.5$  خواهد شد. بنابراین به ازای گشتاور مغناطیسی پروتون برای آن که اندازه آن سیستم یک اندازه قابل قبولی باشد باید جرم کوارک ها سبک باشد.

$$\frac{g_A}{g_V} \quad (3-5-5)$$

فرض کنید کوارکی مستقل از کوارک های دیگر در یک پتانسیل متقارن اسکالر شعاعی حرکت کند تابع موجی که این کوارک را تعریف می کند.

$$\psi_r = \begin{pmatrix} f(r) U_m \\ ig(r) \vec{\sigma} \cdot \hat{r} U_m \end{pmatrix}$$

می باشد که  $U_m$  اسپینور دو مؤلفه ای کوارک و  $f$  و  $g$  توابعی از  $r$  هستند که وابسته به شکل پتانسیل مورد نظر می باشند. مؤلفه های بالایی و پایینی یک اسپینور چهار مؤلفه ای به ترتیب مربوط به  $L = 0$  و  $L = 1$  می باشد. در نتیجه ماتریس اسپینی کوارک به صورت  $\langle q | \sigma_z | q \rangle$  می باشد :

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} \langle \sigma_z \rangle$$

که  $\langle \sigma_z \rangle$  مقدار انتظاری مربوط به تصویر 3 اسپین کوارک نسبیتی است و اندازه حرکت زاویه ای کل برای هر کوارک به صورت  $j_z = \frac{1}{2} \sigma_z + l_z$  می باشد که برای هر کوارک با  $j_z = \frac{1}{2}$  رابطه ای به شکل  $\langle \sigma_z \rangle = 1 - 2\delta$  داریم که

$$\delta = \frac{\int \psi_0^* l_z \psi_0 dr}{\int \psi_0^* \psi_0 dr} \Big|_{j_z = \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{3} \int |g(r)|^2 r^2 dr}{\int \{|f(r)|^2 + |g(r)|^2\} r^2 dr}$$

بوگولیوبو کوارک ها را در یک مجذور چاه پتانسیلی قرار داد و  $\frac{g_A}{g_V} = 1.1$  محاسبه کرد که در مدل کیسه ای MIT این مقدار به دقت محاسبه می شود که شبیه به مقدار محاسبه شده توسط بوگولیوبو می باشد. برای کوارک های بی جرم آزاد محدود شده در یک حجم و برای پایین ترین حالت معادله موج با رابطه (3-28) داده می شود. با مقایسه با تابع موج مربوط به یک مورد متقارن کروی مؤلفه های بالایی و پایینی به صورت زیر حاصل می شوند.



$$f(r) = N \sqrt{\frac{\omega + m}{\omega}} j_0\left(\frac{rx}{R}\right) \quad (45-3)$$

$$g(r) = N \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega}} j_1\left(\frac{rx}{R}\right) \quad (46-3)$$

که  $N$  ضریب نرمالیزاسیون است که از رابطه  $\int_0^R dr r^2 (|f(r)|^2 + |g(r)|^2) = 1$  به دست می آید. و اکنون برای کوآرک های بدون جرم  $\delta$  به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\delta = \frac{\frac{2}{3} \int_0^R \left| j_1\left(\frac{rx}{R}\right) \right|^2 r^2 dr}{\int_0^R dr r^2 \left\{ \left| j_0\left(\frac{rx}{R}\right) \right|^2 + \left| j_1\left(\frac{rx}{R}\right) \right|^2 \right\}} = \frac{2x-3}{6(x-1)}$$

که  $x = 2.04$  برای پایین ترین حالت می باشد. از این رو

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} \left[ 1 - \frac{2x-3}{3(x+1)} \right] \cong 1/1$$

که این مقدار تقریباً با مقادیر و داده های آزمایشگاهی مطابقت می کند. حدود 30% انحراف ناشی از

نتیجه  $\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3}$  ناشی از مؤلفه های پایینی  $1/0$  مربوط به کوآرک های بدون جرم اما محدود شده در

یک حجم می باشد. با اعمال یک محاسبه مربوط به تابع موجی که تابعی از  $m$  است یعنی معادلات

(45-3) و (46-3) مقدار دقیق تری را می توانیم با در نظر گرفتن جرم کوآرک برای  $\frac{g_A}{g_V}$  به دست

آوریم و یا برعکس با داشتن مقدار تجربی این نسبت  $\frac{g_A}{g_V} = 1.26$  مقدار دقیقی برای جرم کوآرک

حاصل کنیم. [1]

### ۳-۶) حل معادله های شعاعی برای یک ذره دیراک در یک پتانسیل کروی

در این قسمت می خواهیم به عنوان نمونه ای از حل معادله دیراک، معادله دیراک را به ازای پتانسیل کولومبی حل کنیم. در واقع معادله های شعاعی جفت شده به ازای این پتانسیل را نوشته و انرژی حالت پایه را محاسبه می کنیم.  
پتانسیل مربوط به یک ذره بار دار به صورت زیر است:

$$V = -\frac{Ze^2}{r}$$

و بنابراین معادله های شعاعی جفت شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{k}{r}G + \left[ \frac{E + m_0c^2}{\hbar c} + \frac{Z\alpha}{r} \right] F(r)$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{k}{r}F - \left[ \frac{E - m_0c^2}{\hbar c} + \frac{Z\alpha}{r} \right] G(r) \quad (3-47)$$

که  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \cong \frac{1}{137}$  ثابت ساختار ریز می باشد و  $G$  مؤلفه بالایی و  $F$  مؤلفه پایینی تابع موج می باشد یعنی در اینجا ما  $G=rg(r)$  و  $F=rf(r)$  در نظر گرفته ایم. در ابتدا حل معادلات (۳-۴۷) را برای  $r$  های کوچک بررسی می کنیم یعنی در نزدیکی مبدأ ( $r \approx 0$ ). در این مورد جملات  $E \pm m_0c^2$  می توانند حذف شوند و بنابراین:

$$\frac{dG}{dr} + \frac{k}{r}G - \frac{Z\alpha}{r}F(r) = 0$$

$$\frac{dF}{dr} - \frac{k}{r}F + \frac{Z\alpha}{r}G(r) = 0 \quad (3-48)$$

در این قسمت از بسط سری های توانی برای حل دستگاه (۳-۴۸) استفاده می کنیم، جمله اول از این سری را ناحیه نزدیک به مبدأ اختیار می کنیم. بنابراین  $G = ar^\gamma$  و  $F = br^\gamma$ . با استفاده از مطالب گفته شده خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a\gamma r^\gamma + k ar^{\gamma-1} - Z\alpha br^{\gamma-1} &= 0 \\ b\gamma r^\gamma + k br^{\gamma-1} + Z\alpha ar^{\gamma-1} &= 0 \end{aligned} \quad (۳-۴۹)$$

بنابراین

$$a(\gamma + k) - bZ\alpha = 0 \quad \text{و} \quad aZ\alpha + b(\gamma - k) = 0 \quad (۳-۵۰)$$

از دو معادله بالا با حذف ضرایب  $a, b$  به رابطه زیر می رسیم:

$$\gamma^2 = k^2 - (Z\alpha)^2 \Rightarrow \gamma = \pm \sqrt{k^2 - (Z\alpha)^2} = \pm \sqrt{(j+1/2)^2 - Z^2\alpha^2} \quad (۳-۵۱)$$

ما در اینجا علامت مثبت را برای  $\gamma$  در نظر می گیریم چرا که تابع موج با این علامت قابل نرمالیزه است.

می توانیم ثابت نرمالیزاسیون را با توجه به انتگرال  $\int \psi^* \hat{H} \psi d^3r$  بدست آوریم:

$$\int \psi^* \left(-\frac{Z\alpha}{r}\right) \psi d^3r = \int (F^2 + G^2) \left(-\frac{Ze^2}{r}\right) dr$$

توجه شود که عامل ضرب  $r^2$  خود در  $(F^2 + G^2)$  نهفته است. انتگرال بالا همانند  $(r^{2\gamma}/r) dr$  یعنی  $r^{2\gamma-1} dr$  رفتار می کند. در حد وقتی  $r \rightarrow 0$  یک سهم محدودی با توجه به اینکه  $-1 < 2\gamma - 1$  باشد، داده خواهد شد. به عبارت دیگر  $\gamma > 0$  باشد. و یا اینکه فقط پاسخهای مثبت در رابطه (۳-۵۱) معنای فیزیکی دارند. برای  $(Z\alpha)^2 > k^2$  قسمت حقیقی تابع موج نشان داده می شود.

برای حل معادله (۳-۴۷) جانشین سازیهای زیر را انجام می دهیم:

$$\xi = 2\lambda r \quad \text{که} \quad \lambda = (m_0^2 c^4 - E^2)^{1/2} / \hbar c \quad \text{و} \quad \frac{d}{dr} = 2\lambda \frac{d}{d\xi} \quad (۳-۵۲)$$

پس معادلات (۳-۴۷) به صورت زیر خواهند شد:

$$\frac{dG(\xi)}{d\xi} = -\frac{k}{\xi}G(\xi) + \left[ \frac{E + m_0c^2}{2\lambda\hbar c} + \frac{Z\alpha}{\xi} \right] F(\xi)$$

$$\frac{dF(\xi)}{d\xi} = \frac{k}{\xi}F(\xi) - \left[ \frac{E - m_0c^2}{2\lambda\hbar c} + \frac{Z\alpha}{\xi} \right] F(\xi) \quad (53-3)$$

استفاده از این نوع شکل معادله، رفتار  $F(\xi), G(\xi)$  را برای حالتی که  $\xi \rightarrow \infty$  مشخص کند. از اینرو معادلات دیفرانسیل (53-3) به صورت زیر خواهند شد:

$$\frac{dG(\xi)}{d\xi} = \frac{E + m_0c^2}{2\hbar c\lambda} F(\xi)$$

$$\frac{dF(\xi)}{d\xi} = -\frac{E - m_0c^2}{2\lambda\hbar c} G(\xi)$$

ترکیب روابط بالا با روابط (52-3) مارا به رابطه زیر خواهند رساند:

$$\frac{d^2G(\xi)}{d\xi^2} = -\frac{(E^2 - m_0^2c^4)}{(2\lambda\hbar c)^2} G(\xi) = \frac{1}{4} G(\xi)$$

که دو جواب ممکن از معادله بالا با فرم  $G(\xi) \approx e^{\pm\xi/2}$  خواهد داد. اما پاسخ  $G(\xi) \approx e^{-\xi/2}$  می تواند مورد استفاده قرار گیرد. یک نتیجه مشابه این مورد را نیز می توانیم برای  $F(\xi)$  در نظر بگیریم.

بنابراین:

$$G(\xi) = (m_0c^2 + E)^{1/2} e^{-\xi/2} (\phi_1(\xi) + \phi_2(\xi))$$

$$F(\xi) = (m_0c^2 - E)^{1/2} e^{-\xi/2} (\phi_1(\xi) - \phi_2(\xi)) \quad (54-3)$$

از قرار دادن این روابط در روابط (53-3) و تقسیم روابط حاصله بر  $e^{-\xi/2}$  و همچنین تقسیم طرفین معادله اول بر  $(E + m_0c^2)^{1/2}$  و معادله دوم بر  $(m_0c^2 - E)^{1/2}$  به روابط زیر می رسیم:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\xi} + \frac{d\phi_2}{d\xi} &= -\frac{k}{\xi}(\phi_1 + \phi_2) + \left[ \frac{E + m_0c^2}{2\lambda\hbar c} + \frac{Z\alpha}{\xi} \right] \frac{(m_0c^2 - E)^{1/2}}{(m_0c^2 + E)^{1/2}} (\phi_1 - \phi_2) \\
-\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\xi} - \frac{d\phi_2}{d\xi} &= +\frac{k}{\xi}(\phi_1 - \phi_2) - \left[ \frac{E - m_0c^2}{2\lambda\hbar c} + \frac{Z\alpha}{\xi} \right] \frac{(m_0c^2 + E)^{1/2}}{(m_0c^2 - E)^{1/2}} (\phi_1 + \phi_2)
\end{aligned}
\tag{55-3}$$

و با توجه به اینکه

$$\frac{(m_0c^2 - E)^{1/2}}{(m_0c^2 + E)^{1/2}} = \frac{m_0c^2 - E}{\hbar c\lambda} \quad , \quad \frac{(m_0c^2 + E)^{1/2}}{(m_0c^2 - E)^{1/2}} = \frac{m_0c^2 + E}{\hbar c\lambda}
\tag{56-3}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\xi} + \frac{d\phi_2}{d\xi} &= -\frac{k}{\xi}(\phi_1 + \phi_2) + \left[ \frac{E + m_0c^2}{2\lambda\hbar c} + \frac{Z\alpha}{\xi} \right] \frac{m_0c^2 - E}{\hbar c\lambda} (\phi_1 - \phi_2) \\
-\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\xi} - \frac{d\phi_2}{d\xi} &= +\frac{k}{\xi}(\phi_1 - \phi_2) - \left[ \frac{E - m_0c^2}{2\lambda\hbar c} + \frac{Z\alpha}{\xi} \right] \frac{m_0c^2 + E}{\hbar c\lambda} (\phi_1 + \phi_2)
\end{aligned}
\tag{57-3}$$

از جمع طرفین رابطه (57-3) خواهیم داشت:

$$-\phi_1 + 2\frac{d\phi_1}{d\xi} = -\frac{2k}{\xi}\phi_2 + \phi_1 + \frac{Z\alpha}{\xi} \frac{(m_0c^2 - E)}{\hbar c\lambda} (\phi_1 - \phi_2) - \frac{Z\alpha}{\xi} \frac{(m_0c^2 + E)}{\hbar c\lambda} (\phi_1 + \phi_2)
\tag{58-3}$$

و با تفریق طرفین رابطه (57-3) خواهیم داشت:

$$-\phi_2 + 2\frac{d\phi_2}{d\xi} = -\frac{2k}{\xi}\phi_1 - \phi_2 + \frac{Z\alpha}{\xi} \frac{(m_0c^2 - E)}{\hbar c\lambda} (\phi_1 - \phi_2) + \frac{Z\alpha}{\xi} \frac{(m_0c^2 + E)}{\hbar c\lambda} (\phi_1 + \phi_2)
\tag{59-3}$$

در نهایت با استفاده از دو معادله (58-3) و (59-3) به روابط زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_1}{d\xi} &= \left( 1 - \frac{Z\alpha E}{\hbar c\lambda\xi} \right) \phi_1 - \left( \frac{k}{\xi} + \frac{Z\alpha m_0c^2}{\hbar c\lambda\xi} \right) \phi_2 \\
\frac{d\phi_1}{d\xi} &= \left( 1 + \frac{Z\alpha E}{\hbar c\lambda\xi} \right) \phi_2 + \left( -\frac{k}{\xi} + \frac{Z\alpha m_0c^2}{\hbar c\lambda\xi} \right) \phi_1
\end{aligned}
\tag{60-3}$$

اکنون از دو معادله دیفرانسیل (60-3) پیدا کردن  $\phi_1, \phi_2$  هدف ماست که آنها را با استفاده از سریهای توانی

می یابیم

$$\phi_1 = \xi^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \xi^m \quad \text{و} \quad \phi_2 = \xi^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \xi^m \quad (61-3)$$

با قرار دادن روابط در رابطه (60-3) و مقایسه ضرایب مربوطه جملات یکسان خواهیم داشت:

$$\beta_m (m + \gamma) = \left( -k + \frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda} \right) \alpha_m + \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \beta_m \quad (62-3)$$

$$\Rightarrow \frac{\beta_m}{\alpha_m} = \frac{-k + Z\alpha m_0 c^2 / \hbar c \lambda}{m + \gamma - Z\alpha E / \hbar c \lambda} = \frac{k - Z\alpha m_0 c^2 / \hbar c \lambda}{n' - m} \quad (63-3)$$

که

$$n' = \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} - \gamma \quad (64-3)$$

و برای  $m=0$  رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{k - Z\alpha m_0 c^2 / \hbar c \lambda}{n'} = \frac{k - (n' + \gamma) m_0 c^2 / E}{n'} \quad (65-3)$$

با قرار دادن رابطه (63-3) در معادله اول رابطه (62-3) خواهیم داشت:

$$\alpha_m \left[ \left( m + \gamma + \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \right) (n' - m) + k^2 - \frac{Z^2 \alpha^2 m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2 \lambda^2} \right] = \alpha_{m-1} (n' - m) \quad (66-3)$$

با قرار دادن مقدار  $\gamma^2 = k^2 - (Z\alpha)^2$  معادله (66-3) به صورت زیر خواهد شد:

$$\alpha_m \left[ -m + (2\gamma + m) + (Z\alpha)^2 + \left( \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \right)^2 - \frac{Z^2 \alpha^2 m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2 \lambda^2} \right] = \alpha_{m-1} (n' - m) \quad (67-3)$$

بنابراین با خلاصه سازی رابطه بالا با مقادیر داده شده قبلی رابطه زیر حادث می شود:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= -\frac{(n' - m)}{m(2\gamma + m)} \alpha_{m-1} \\ &= \frac{(-1)^m (n' - 1) \dots (n' - m)}{m! (2\gamma + 1) \dots (2\gamma + m)} \alpha_0 \\ &= \frac{(1 - n')(2 - n') \dots (m - n')}{m! (2\gamma + 1) \dots (2\gamma + m)} \alpha_0 \end{aligned} \quad (68-3)$$

بر طبق رابطه (63-3)  $\beta_m$  نیز به صورت زیر پیدا خواهد شد:

$$\beta_m = (-1)^m \frac{n'(n'-1)\dots(n'-m+1)}{m!(2\gamma+1)\dots(2\gamma+m)} \beta_0 \quad (69-3)$$

ثابت می شود این سری توانی تابع فوق هندسی همشار<sup>۱</sup> است:

$$F(a, c; x) = 1 + \frac{a}{c}x + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (70-3)$$

بنابراین  $\phi_1, \phi_2$  را به صورت زیر پیدا می کنیم:

$$\phi_1 = \alpha_0 \xi^\gamma F(1-n', 2\gamma+1; \xi)$$

$$\phi_2 = \beta_0 \xi^\gamma F(-n', 2\gamma+1; \xi)$$

$$= \left( \frac{k - Z\alpha m_0 c^2 / \hbar c \lambda}{n'} \right) \alpha_0 \xi^\gamma F(-n', 2\gamma+1; \xi) \quad (71-3)$$

اینکه تابع موج به صورت نرمالیزه باقی خواهد ماند امری صحیح است و ما بایستی سریهای  $\phi_1, \phi_2$  را به صورت مشخص بیان کنیم. بنابراین توابع فوق هندسی به صورت چند جمله ایهای ساده خواهند شد و این در صورتی است که  $n'$  عدد صحیح غیر منفی باشد یعنی:

$$n' = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ما اعداد کوانتمی اصلی را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = n' + |k| = n' + j + 1/2$$

و ویژه مقدار انرژی را با استفاده از رابطه (۶۴-۳) می یابیم:

$$\frac{Z\alpha E}{(m_0^2 c^4 - E^2)^{1/2}} = n' + \gamma = n - j - 1/2 + \gamma$$

$$\Rightarrow E = \pm m_0 c^2 \left[ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left[ n - j - 1/2 + \left[ (j+1/2)^2 - (Z\alpha)^2 \right]^{1/2} \right]^2} \right]^{-1/2}$$

که

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k = \pm(j+1/2) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (72-3)$$

علامت منفی در رابطه (۷۲-۳) بایستی مستثنی شود چرا که انرژی منفی رابطه (۷۰-۳) را برآورده نمی کند. سر انجام توابع موج شعاعی را با توجه به مقادیر به دست آمده کامل می کنیم. که تابع موج نرمالیزه شده بر طبق  $\int \psi^+ \psi dV = 1$  است، بنابراین:

$$\int_0^{\infty} (f^2 + g^2) r^2 dr = 1 \quad (۷۳-۳)$$

و این رابطه ما را به تابع موج نهایی نرمالیزه راهنمایی می کند [19]:

$$\begin{aligned} \begin{cases} g(r) \\ f(r) \end{cases} &= \frac{\pm (2\lambda)^{3/2}}{\Gamma(2\gamma+1)} \cdot \sqrt{\frac{(m_0 c^2 \pm E) \Gamma(2\gamma + n' + 1)}{4m_0 c^2 \frac{(n' + \gamma)m_0 c^2}{E} \left( \frac{(n' + \gamma)m_0 c^2}{E} - k \right) n'!}} \\ &\cdot (2\lambda r)^{\gamma-1} e^{-\lambda r} \left[ \left( \frac{(n' + \gamma)m_0 c^2}{E} - k \right) \cdot F(-n', 2\gamma + 1; 2\lambda r) \mp n' F(1 - n', 2\gamma + 1; 2\lambda r) \right]. \end{aligned} \quad (۷۴-۳)$$



# فصل چهارم

➤ مقدمه

➤ معرفی پتانسیل پیشنهادی

➤ حل معادله دیراک با پتانسیل محدود کننده

➤ تاثير پتانسیل ایزواسپینی بر تابع موج پروتون

➤ نتایج

➤ پیشنهادات

#### ۴-۱) مقدمه

در این فصل قصد داریم پتانسیل پیشنهادی خود را معرفی و پس از آن معادله دیراک را برای این پتانسیل حل کرده تا تابع موج پروتون حاصل شود. در قسمت بعد با داشتن تابع موج سه خاصیت استاتیکی پروتون یعنی:

الف) گشتاور مغناطیسی پروتون.

ب) شعاع باری پروتون.

$$\frac{g_A}{g_V} \text{ (ج)}$$

را محاسبه کرده و پاسخها را با نتیجه تجربی مقایسه می کنیم. در بخش بعد پتانسیل ایزواسپین را معرفی کرده و اثر آن را به شکل اختلال بر روی تابع موج پروتون محاسبه می کنیم و نتایج را با نتایج قسمت قبل و مشاهدات تجربی؛ مقایسه می کنیم.

## ۴-۲) معرفی پتانسیل پیشنهادی

می دانیم که پروتون از سه کوارک تشکیل شده است، و نیز می دانیم اثرات بار الکتریکی کوارکها در برهمکنش های قوی بسیار بسیار ناچیز می باشد؛ پس از ابتدا مشخص می شود که اثر پتانسیل الکتریکی بار کوارکها در این پتانسیل پیشنهادی ما جایی ندارد.

اما همانطور که در فصل نخست توضیح داده شد برای هر کوارک نوعاً رنگی تعریف می شود، در واقع این بار رنگ است که در برهمکنش های خود را نمایان می کند؛ پس بایستی پتانسیل مربوط به باررنگ را در نظر بگیریم.

می دانیم برای محاسبه دامنه پراکندگی با استفاده از قواعد فاینمن برای پراکندگی الکترون-پوزیترون؛ شکل ضریب  $iM$  به صورتی خواهد شد که مشابه این رابطه را در پراکندگی کوارک-پادکوارک محاسبه می کنیم [8]. از این موضوع این نتیجه را می توان گرفت که بایستی پتانسیل حاکم بین کوارک و پادکوارک مشابه پتانسیل حاکم بین الکترون و پوزیترون باشد. اما این تفاوت در این روابط وجود دارد که  $g_s$  جایگزین  $g_e$  گردیده است و یک عامل رنگ نیز در اینجا اضافه شده است. پس پتانسیل رنگ بین کوارکها را به صورت  $\frac{C}{r}$  که  $C$  ضریبی ثابت است در نظر می گیریم.

پتانسیل دومی که ما بین کوارکها در درون پروتون پیشنهاد می کنیم پتانسیل محدود کننده ای است که مانع از آن می شود تا کوارکها از یکدیگر فاصله بگیرند یعنی با زیاد شدن فاصله، این پتانسیل نیز زیاد می شود و این مطلب از این موضوع بسیار مهم ناشی می شود که کوارک آزاد در طبیعت وجود ندارد. بنابراین پتانسیل دوم را به صورت  $br$  در نظر می گیریم.

اما پتانسیل سوم را مربوط به حرکت نوسانی کوارکها حول نقطه تعادلشان در نظر می گیریم. این حرکت نوسانی هماهنگ ساده می باشد پس پتانسیلی که در اینجا پیشنهاد می شود پتانسیل نوسانگر

ساده است که به صورت  $ar^2$  بیان می شود. اگر به شکل این پتانسیل توجه کنیم مشاهده می کنیم که این پتانسیل نیز خود یک پتانسیل محدود کننده است. دقت شود که پتانسیل های دیگری نیز یافت می شوند ولی ما در اینجا فقط پتانسیل

$$U(r) = ar^2 + br - \frac{c}{r}$$

را در نظر گرفته ایم.

#### ۳-۴) حل معادله دیراک با پتانسیل پیشنهادی

در این بخش ابتدا معادله دیراک را برای پتانسیل محدود کننده

$$U(r) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0)(ar^2 + br - \frac{c}{r})$$

حل می کنیم. در این پتانسیل، پتانسیل بر همکنش کوارکهای

موجود در نوکلئون در فواصل کوتاه کولنی متناسب با  $(1/r)$  که منشاء آن وجود بار رنگ در کوارکها می باشد. در حالی که در فواصل دور پتانسیل بر همکنشی به صورت خطی و متناسب با  $r$  است. چرا که وقتی  $r \rightarrow \infty$  میل می کند پتانسیل بایستی بینهایت شود تا سه کوارک درون پروتون را در کنار هم نگه دارد. در این پتانسیل جمله مربوط به نوسانگر هارمونیک را، که متناسب با  $r^2$  است، نیز در نظر گرفته ایم. حال اگر:

$$U = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0)M(r) \tag{۱-۴}$$

که در آن  $M(r)$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$M(r) = ar^2 + br - \frac{c}{r}$$

در این صورت معادله جفت شده دیراک را همانطور که گفته شد از شکل ماتریسی آن نتیجه می شود به شکل زیر بر حسب مؤلفه بالایی  $g(r)$  و مؤلفه پایینی  $f(r)$  می نویسیم:

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})f(r) + (m + U + V_0)g(r) &= Eg(r) \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})g(r) + (m + U - V_0)f(r) &= Ef(r) \end{aligned} \quad (2-4)$$

ما در این موارد پتانسیل اسکالر را با مقدار پتانسیل سه بردار از پتانسیل چهار بردار برابر قرار می دهیم. بدین معنی که:

$$V^\infty = (V_0, \vec{V}) \quad \text{پتانسیل چهار بردار}$$

با توجه به شرایط بالا

$$V_0 = |\vec{V}| = U$$

اکنون با توجه به شرایط بالا و باقی گذاشتن  $U$  به مقدار زیر می رسم:

$$f(r) = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} g(r) \quad (3-4)$$

از قرار دادن این رابطه در یکی از معادله های جفت شده برای یافتن  $g(r)$  اقدام می کنیم که به رابطه زیر می رسم:

$$\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{E + m} g(r) + (m - E + 2U)g(r) = 0$$

و با توجه به روابط زیر به معادله دیفرانسیل (4-4) می رسم:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2 \quad \text{و} \quad \vec{p}^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}$$

$$g''(r) + \frac{2}{r}g'(r) + \left\{ \frac{-l(l+1)}{r^2} + E^2 - m^2 - M(r)(E+m) \right\} g(r) = 0 \quad (4-4)$$

ما هم اکنون می خواهیم عدد کوانتومی جدیدی را تعریف کنیم:

$$k = \pm(j + \frac{1}{2}) \left\{ \begin{array}{l} + \Rightarrow l = j + \frac{1}{2} \\ - \Rightarrow l = j - \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k = l \\ k = -(l+1) \end{array} \right\}$$

در این صورت:

$$g''(r) + \frac{2}{r}g'(r) + \left\{ \frac{-k(k+1)}{r^2} + E^2 - m^2 - M(r)(E+m) \right\} g(r) = 0$$

برای حل این معادله دیفرانسیل جواب فرضی به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$g(r) = \frac{1}{r} \phi_k(r) \quad (5-4)$$

با جایگذاری رابطه (5-4) در رابطه (4-4) به معادله دیفرانسیل زیر خواهیم رسید:

$$\phi_k''(r) + \left\{ \frac{-k(k+1)}{r^2} + E^2 - m^2 + (E+m)M(r) \right\} \phi_k(r) = 0 \quad (6-4)$$

اکنون اگر تغییر متغیرهای زیر را در نظر بگیریم معادله (6-4) به معادله (7-4) تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \lambda &= E^2 - m^2 \\ M_1(r) &= (E+m)M(r) \\ a_1 &= (E+m)a \\ b_1 &= (E+m)b \\ c_1 &= (E+m)c \end{aligned} \quad (7-4)$$

پس معادله (۴-۶) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$\phi_k''(r) + \left\{ \frac{-k(k+1)}{r^2} + \lambda - M_1(r) \right\} \phi_k(r) = 0 \quad (۸-۴)$$

و پتانسیل برهمکنش نیز به فرم  $M_1(r) = a_1 r^2 + b_1 r - \frac{c_1}{r}$  تبدیل خواهد شد.

برای حل معادله دیفرانسیل (۸-۴) با پتانسیل برهمکنشی بالا از جواب حدسی زیر استفاده

می کنیم:

$$\begin{aligned} \phi_k(r) &= \exp(h(r)) \\ h(r) &= -\frac{1}{2}\alpha r^2 + \beta r + \delta \ln r \end{aligned} \quad (۹-۴)$$

که  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\delta$  اعداد ثابتی هستند که بایستی محاسبه شوند. اکنون برای حالت پایه یعنی  $k=-1$  جوابهای معادله دیراک (مؤلفه های بالا و پایین) را محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} g_{-1}(r) &= \frac{1}{r} \phi_{-1}(r) = \exp\left(-\frac{\sqrt{a_1}}{2} r^2 - \frac{c_1}{2} r\right) \\ f_{-1}(r) &= \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} g_{-1}(r) \end{aligned} \quad (۱۰-۴)$$

بنابراین تابع موج پروتون برای حالت پایه به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\psi_{-1,-1}(r) = \frac{N}{4\pi} \left[ \frac{-i\vec{\sigma} \cdot \hat{r}}{E+m} \left( -\sqrt{a_1} r - \frac{c_1}{2} \right) \right] \chi \exp\left(-\frac{\sqrt{a_1}}{2} r^2 - \frac{c_1}{2} r\right) \quad (۱۱-۴)$$

ثابت نرمالیزاسیون از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$N^2 \int_0^{\infty} \{ |g_{-1}(r)|^2 + |f_{-1}(r)|^2 \} r^2 dr = 1$$

می توانیم با استفاده از قرار دادن جوابهای حدسی معادله دیفرانسیل در رابطه (۸-۴) ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  و

$\delta$  را بر حسب مقادیر  $a_1$  و  $b_1$  و  $c_1$  محاسبه کنیم و از این رو:

$$\alpha = \sqrt{a_1}$$

$$\beta = \frac{-b_1}{2\sqrt{a_1}}$$

$$\delta = 0 \tag{۱۲-۴}$$

$$\delta = 1 \Rightarrow b_1 = c_1 \sqrt{a_1}$$

$$\delta = -\frac{c_1}{2\beta} \Rightarrow \beta = \frac{-c_1}{2}$$

که از این ضرایب در نوشتن فرم  $g_{-1}(r)$  در ابتدای صفحه نیز استفاده شده است.

از ترکیب تغییر متغیرهای رابطه (۷-۴) به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$E^2 - m^2 = (E + m)^2 \left\{ 3\sqrt{a} - \frac{(E + m)^2}{4} c^2 \right\} \tag{۱۳-۴}$$

محاسبه  $\frac{g_A}{g_V}$

با استفاده تابع موج حاصل شده (۱۱-۴) می توانیم این نسبت را بدست آوریم. اما می دانیم که دو

پارامتر  $a_1$  و  $c_1$  مجهول می باشند که می توانیم با استفاده از مقدار عددی  $\frac{g_A}{g_V} = 1.26$  این مقادیر

مجهول را محاسبه کنیم. از آنجا که  $\langle \sigma_z \rangle = \frac{5}{3}$  لذا:

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} \left\{ 1 - \frac{4 \int_0^\infty |f_{-1}(r)|^2 r^2 dr}{3 \int_0^\infty (|f_{-1}(r)|^2 + |g_{-1}(r)|^2) r^2 dr} \right\} \tag{۱۴-۴}$$

مقدار تجربی  $\frac{g_A}{g_V}$  برابر  $1/26$  است که با توجه به این مقدار  $\langle l_z \rangle = 1.122$  خواهد شد.

با توجه به رابطه (۱۱-۴) خواهیم داشت:



$$3\sqrt{a_1} - \frac{c_1^2}{4} = E^2 - m^2 \quad (15-4)$$

$$b_1 = c_1\sqrt{a_1}$$

اگر تغییر متغیر زیر را در نظر بگیریم:

$$K^2 = (E - m)(E + m)^2 \rightarrow K = \{(E - m)(E + m)^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (16-4)$$

$$K = \left\{3\sqrt{a} - \frac{(E + m)^2}{4} c^2\right\}^{\frac{3}{2}}$$

مقدار  $f$  را به صورت زیر خواهیم نوشت:

$$E = m + Kf$$

$$f = \left(\frac{K}{E + m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$m = \frac{1}{2}K\left(\frac{1}{f^2} - f\right) \quad (17-4)$$

$$E = \frac{1}{2}K\left(\frac{1}{f^2} + f\right)$$

از روابط بالا مشخص است که برای آنکه کوارکها بدون جرم باشند، بایستی  $f=1$  باشد در این صورت دستگاه معادله (15-4) به صورت زیر در می آید:

$$3\sqrt{a_1} - \frac{c_1^2}{4} = E^2$$

$$b_1 = c_1\sqrt{a_1} \quad (18-4)$$

$$\frac{g_A}{g_V} = 1.26$$

محاسبات کامپیوتری نشان می دهد که اگر مقدار  $f=1$  باشد [18,19,20]، یا به عبارت دیگر اگر مقدار جرم کوارک را صفر در نظر بگیریم، در این صورت برای مقدار  $a_1$  و  $c_1$  جوابی پیدا نمی کنیم. یعنی برای آنکه بتوانیم حداقل جوابی برای  $a_1$  و  $c_1$  داشته باشیم مقدار جرم کوارک نباید صفر باشد؛ و

حداقل  $f = 0.74$  باید باشد تا بتوان جوابی با توجه به قید  $\frac{g_A}{g_V} = 1.26$  پیدا کرد. برای این مقدار  $f$  جرم

کوارک موجود در نوکلئونی به جرم  $M = 938 \text{ MeV} / c^2$  برابر  $M_q = 132 \text{ MeV} / c^2$  خواهد شد. پس دستگاه معادله به صورت زیر تبدیل می شود:

$$3\sqrt{a_1} - \frac{c_1^2}{4} = 2.061 \text{ fm}^{-2} \quad (19-4)$$

$$\frac{g_A}{g_V} = 1.26$$

البته کسری از انرژی سه کوارک مربوط به انرژی مرکز جرم می باشد، که در اینجا در مقایسه با جرم پروتون در نظر گرفته نشده است. ولذا:

$3E = 928 \text{ MeV}$  در نتیجه  $E = 312.7 \text{ MeV}$  از دستگاه معادله (۱۹-۴) ضرایب پتانسیل  $a_1$  و  $c_1$  محاسبه

می شوند و با توجه به رابطه  $b_1 = c_1 \sqrt{a_1}$  می توان مقدار  $b_1$  را نیز محاسبه کرد.

$$a_1 = 0.476 \text{ fm}^{-4}$$

$$b_1 = 0.129 \text{ fm}^{-3}$$

$$c_1 = 0.187 \text{ fm}^{-1}$$

بنابراین  $U(r) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0)(0.271r^2 + 0.057r - \frac{0.082}{r})$  در نتیجه تابع موج به شکل زیر در می آید:

$$\psi_{-1,-1}(r) = \frac{N}{4\pi} \left[ \frac{1}{E+m} + i\vec{\sigma} \cdot \hat{r} (0.094 + 0.69r) \right] \chi \exp(-0.345r^2 - 0.094r) \quad (20-4)$$

دقت شود که ما می توانیم تمامی محاسباتمان را با توجه به تصحیح مرکز جرم نیز انجام دهیم.

اکنون با توجه به تابع موج بدست آمده در رابطه (۴-۲۰) می توانیم شعاع باری پروتون را با استفاده از رابطه

$$\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = N^2 \int_0^{\infty} r^4 \left[ |g_{-1}|^2 + |f_{-1}|^2 \right] dr \quad (۴-۲۱)$$

و با توجه به رابطه مربوط به ثابت نرمالیزاسیون

$$\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 1.439 \text{ fm} \quad (۴-۲۲)$$

محاسبه می شود [8,9,10,18,19]. البته بایستی دقت شود که این مقدار با مقدار تجربی شعاع باری یعنی  $\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 0.88 \text{ fm}$  اختلاف اندکی دارد که این اختلاف به این علت است که ما تمامی پتانسیلهایی را که واقعا در درون پروتون وجود دارند را در نظر نگرفته ایم. و نیز این علت که مقداری از تابع موج محاسبه شده به بیرون از کیسه رفته است.

اما برای محاسبه گشتاور مغناطیسی پروتون از رابطه

$$\alpha_p = \frac{e}{2E_0} \left( 1 - \frac{2}{3} \int_0^{\infty} dr f^2(r) \right) \quad (۴-۲۳)$$

استفاده می کنیم [8,9,19]. که  $E_0$  پایین ترین مقدار انرژی یک کوارک در حالت پایه است. بنابراین:

$$\alpha_p = 3.447 \text{ n.m} \quad (۴-۲۴)$$

که باز هم مشاهده می شود که این مقدار با مقدار تجربی محاسب شده یعنی  $\alpha_p = 2.79 \text{ n.m}$  اندکی

اختلاف دارد [12,13,14,18].

#### ۴-۴) تا ثیر پتانسیل ایزواسپینی بر تابع موج پروتون:

در این بخش قصد داریم در ابتدا پتانسیلی را که به ایزواسپین مربوط است، معرفی کرده سپس تابع موج پروتون را با توجه به پتانسیل جدید که همانا پتانسیل رابطه (۴-۱) و پتانسیل ایزواسپین است؛ را محاسبه می کنیم.

پتانسیل ایزواسپین را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$U'(r) = A_I \sum_{i < j} \frac{1}{(\sqrt{\pi} \sigma_I)^3} \vec{T}_i \cdot \vec{T}_j e^{-\frac{r_{ij}^2}{\alpha}} \quad (۲۵-۴)$$

که  $\alpha$  مقدار ثابتی است که برابر با  $11/9$  ،  $A_I = 51.7 \text{ fm}^2$  و  $\sigma_I = 3.45 \text{ fm}$  می باشد [15].

اکنون ما می توانیم پتانسیل جدید را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$U(r) = 1/2(1 + \gamma_0)M(r) + U'(r)$$

می توانیم تابع موج را مستقیم با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مربوط به مؤلفه بالایی و پایینی تابع موج به دست آوریم که البته این راه را ما انتخاب نکرده ایم چرا که حل این معادلات دیفرانسیل جدید که توابع نمایی در آن وجود دارد بسیار مشکل و چه بسا حل تحلیلی نخواهد داشت. از این رو بر آن شدیم تا پتانسیل ایزواسپین را به صورت یک اختلال در شکل انرژی تعریف کنیم. و با محاسبه انرژی مختل شده از نوع اختلال درجه اول، انرژی جدید سیستم را به دست آورده و پس از آن می توانیم ضرایب پتانسیلی را که مربوط است به اثر ایزواسپین محاسبه کنیم. در نهایت تابع موج جدید را به دست آورده و از آنجا

خواص پروتون (شعاع باری پروتون، گشتاور مغناطیسی پروتون و  $\frac{g_A}{g_V}$ ) را بررسی می کنیم.

اکنون با در نظر گرفتن اختلال نوع اول انرژی مختل شده را محاسبه می کنیم:

$$E = \langle \psi_{-1,-1} | U'(r) | \psi_{-1,-1} \rangle$$

$$\langle E \rangle = \int \psi^+ U'(r) \psi d^3r$$

ولی در رابطه بالا باید وضعیت  $U'(r)$  را مشخص کنیم و برای این کار می دانیم که  $T$  کل پروتون مجموع ایزواسپین سه کوارک می باشد یعنی:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

بنابراین:

$$\sum_{i \neq j} T_i T_j = 1/2 [T(T+1) - T_1(T_1+1) - T_2(T_2+1) - T_3(T_3+1)] \quad (26-4)$$

دقت شود در بالا ایزواسپین را با  $T$  نمایش داده ایم و نیز برای هر کوارک با هر طعمی  $T_{3q} = \frac{1}{2}$  است

پس:

$$\sum_{i \neq j} T_i T_j = 1/2 \left[ T(T+1) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \right] = \frac{1}{2} \left( T(T+1) - \frac{9}{4} \right) \quad (27-4)$$

اما اینک در رابطه بالا بایستی مقدار  $T$  را معین کنیم، یعنی برای یک سیستم سه ذره ای حالت  $T$  چیست برای این کار از جداول یانگ استفاده می کنیم:

۱	۱	۱
۲	۱	۱
۲	۲	۱
۲	۲	۲

با توجه به جدول بالا تنها دو حالت متقارن کامل وجود دارد و حالت پاد متقارن کامل اصلا وجود ندارد در جدول بالا عدد یک را مربوط به کوارک با اسپین  $1/2$  و عدد دو مربوط به کوارک با اسپین  $1/2$  - است بنابراین اگر ما فقط کوارکهای با اسپین  $1/2$  را در نظر بگیریم:

$$T = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{i \neq j} T_i \cdot T_j = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} + 1 \right) - \frac{9}{4} \right] = \frac{3}{4} \quad (28-4)$$

در رابطه بالا فقط به ازای حالت up ایزواسپین یعنی به ازای  $S = 1/2 + 1/2 + 1/2 = \frac{3}{2}$  حالت ایزواسپینی پروتون را در نظر گرفته ایم.

اکنون اگر تابع موج حالت پایه مربوط به پتانسیل مختل نشده را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\psi_{-1,-1}(r) = \frac{N}{4\pi} \left[ \frac{-i\vec{\sigma} \cdot \hat{r}}{E+m} \frac{1}{(0.094 + 0.69r)} \right] \chi \exp(-0.345r^2 - 0.094r)$$

تصحیح مرتبه نخست انرژی را با توجه به ثابت نرمالیزاسیون N به دست می آوریم:

با توجه به محاسبات کامپیوتری میزان انرژی مختل شده برابر است با 0.05012. بنابراین انرژی

سیستم پس از اختلال برابر است با:

$$E = .05012 + 1.584 = 1.634 \text{ fm}^{-1}$$

در رابطه بالا مقدار انرژی سیستم قبل از اختلال را با توجه به واقعیت زیر نوشته ایم که:

$1 \text{ fm} = 5.068 \text{ GeV}^{-1}$  و با توجه به اینکه انرژی هر کوارک را  $312.7 \text{ MeV}$  در نظر گرفته ایم در این

صورت انرژی هر کوارک  $E_q = 1.584 \text{ fm}^{-1}$  خواهد شد. به همین صورت می توانیم جرم کوارکها را نیز

با واحد  $\text{fm}^{-1}$  بنویسیم.

اکنون با توجه به روابط (4-17) و با حذف K از آن روابط می توانیم M, E را بر حسب f بنویسیم

یعنی:

$$\frac{m}{E} = \frac{\frac{1}{f^2} - f}{\frac{1}{f^2} + f} \xrightarrow{f=0.74} m = 0.423E \quad (29-4)$$

در این قسمت می توانیم جرم جدید کوارکها را پس از اختلال با توجه به رابطه بالا بدست آوریم:

$$m_q = 0.691 fm^{-1}$$

اگر به مقادیر جدید  $m, E$  توجه کنیم می بینیم که می توانیم تابع موج جدیدی را برای پروتون با پتانسیل جدید بنویسیم ولی باید دقت شود که ضرایب پتانسیل در این حالت دیگر  $a_1, b_1, c_1$  نیستند چرا که انرژی و جرم کوارکها تغییر یافته است.

برای بدست آوردن ضرایب پتانسیل جدید که ما آنها را  $a'_1, b'_1, c'_1$  می نامیم از دستگاه معادله زیر بهره می بریم:

$$3\sqrt{a'_1} - \frac{c_1'^2}{4} = 2.669 fm^{+2} \quad (30-4)$$

$$\frac{g_A}{g_V} = 1.26$$

از حل دستگاه فوق ضرایب پتانسیل را که مربوط به پتانسیل جدید سیستم است محاسبه می کنیم بنابراین

$$\begin{aligned} a'_1 &= 0.539 fm^{-4} \\ b'_1 &= 0.159 fm^{-3} \\ c'_1 &= 0.216 fm^{-1} \end{aligned} \quad (31-4)$$

با توجه به ضرایب پتانسیل بالا می توانیم تابع موج جدید سیستم را به صورت زیر بنویسیم:

$$\psi_{-1,-1}(r) = \frac{N'}{4\pi} \left[ \frac{1}{E+m} (-i\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) (-0.108 - 0.734r) \right] \chi \exp(-0.367r^2 - 0.108r) \quad (32-4)$$

که ثابت نرمالیزاسیون همانند قبل محاسبه می شود.

با این رویکرد نسبت  $\frac{g_A}{g_V}$  با شرایط بالا  $1/2596$  حاصل می شود. با استناد به محاسبات کامپیوتری که

انجام داده ایم میزان شعاع باری پروتون را با استفاده از همان رابطه (۴-۲۱)؛

$$\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 0.998 \text{ fm} \quad (۴-۲۳)$$

بدست آورده ایم که در مقایسه با حالتی که اثر ایزواسپین را در نظر نگرفته بودیم یعنی رابطه (۴-۲۲) عددی بسیار بهتر و نزدیکتر به مقدار تجربی خواهد بود.

در این مرحله با استفاده از رابطه گشتاور مغناطیسی پروتون (۴-۲۳) را بعد از اختلال محاسبه می کنیم. بر این اساس مقدار گشتاور مغناطیسی پروتون برابر خواهد شد با:

$$\alpha_p = 3.117 \text{ n.m} \quad (۴-۲۴)$$

پس مشاهده می شود که تأثیر پتانسیل ایزواسپین به گونه ای است که بر روی شعاع باری و گشتاور مغناطیسی اثر گذاشته و مقدار آنها به مقدار واقعیشان نزدیکتر گردیده است.



#### ۴-۵) محاسبه تابع موج پروتون با استفاده از معادله دیراک برای یک سیستم سه ذره ای

همانطور که می دانیم پروتون از سه ذره (کوارک) تشکیل شده است بنابراین می توانیم برای یافتن تابع موج پروتون معادله دیراک را برای یک سیستم سه ذره ای حل کنیم. بدین معنی که تابع موج مربوط به هر یک از کوارکها را محاسبه کرده و با ضرب تانسوری این توابع موج به تابع موج پروتون برسیم.

برای هر کوارک در این اینجا برای راحتی کار جرم و انرژی آنها را یکسان در نظر می گیریم. در واقع ما در این شرایط سه ذره با انرژی و جرم یکسان داریم. معادله دیفرانسیل جفت شده را برای یک کوارک به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} [\bar{\alpha}_1 \cdot \vec{p}_1 + \beta(m_1 + U_0(x))] \psi_1(x) &= (E - V_0) \psi_1(x) \\ [\bar{\alpha}_2 \cdot \vec{p}_2 + \beta(m_2 + U_0(x))] \psi_2(x) &= (E - V_0) \psi_2(x) \\ [\bar{\alpha}_3 \cdot \vec{p}_3 + \beta(m_3 + U_0(x))] \psi_3(x) &= (E - V_0) \psi_3(x) \end{aligned} \quad (۳۵-۴)$$

که در سه معادله بالا  $\psi_3, \psi_2, \psi_1$  به ترتیب توابع موج مربوط به ذره یک، ذره دوم و ذره سوم هستند. یعنی:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} \phi_3 \\ \chi_3 \end{pmatrix} \quad (۳۶-۴)$$

$$\psi_{proton} = \psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \psi_3 \Rightarrow \psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (۳۷-۴)$$

بنابراین در کل معادله دیراک جفت شده برای مؤلفه بالا و پایین تابع موج پروتون به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{p}_i) \chi + (m_i + U_0 + V_0) \phi &= \varepsilon_i \phi \\ (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{p}_i) \phi + (m_i + U_0 - V_0) \chi &= \varepsilon_i \chi \end{aligned} \quad (۳۸-۴)$$

اگر ما در این مرحله پتانسیل اسکالر و شبه اسکالر را باهم برابر در نظر بگیریم، و از دستگاه (۳۸-۴)  $\chi$  را بر حسب  $\phi$  محاسبه می کنیم پس در آن صورت خواهیم داشت:

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}_i \cdot \vec{p}_i}{\varepsilon_i + m_i} \phi \quad (39-4)$$

با قرار دادن معادله (۳۹-۴) در (۳۸-۴) معادله ای را به صورت زیر بر حسب  $\phi$  می یابیم:

$$(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\phi = 9(\varepsilon^2 - m^2)\phi - 6V_0(\varepsilon + m)\phi \quad (40-4)$$

که

$$(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{p}_i)^2 = \vec{p}_i^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$$

اکنون با استفاده از مختصات ژاکوبی که به صورت زیر می باشند استفاده می کنیم [19]:

$$\bar{R} = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3}{3}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2 - 2\bar{r}_3}{\sqrt{6}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\sqrt{2}} \quad (41-4)$$

اکنون با جدا سازی متغیرها و کنار گذاشتن جمله مربوط به مرکز جرم به معادله زیر می رسم:

$$(p_\rho^2 + p_\lambda^2)\phi = 3[3(\varepsilon^2 - m^2)\phi - 2V_0(\varepsilon + m)\phi] \quad (42-4)$$

که در این رابطه

$$p_\rho^2 = -\nabla_\rho^2, \quad p_\lambda^2 = -\nabla_\lambda^2 \quad (43-4)$$

اکنون با وارد کردن تغییر متغیرهای

$$x = \sqrt{\rho^2 + \lambda^2}, \quad t = \text{Arc tan } \frac{\rho}{\lambda}$$

که در واقع فوق شعاع مربوط به فوق کره نامیده می شوند؛ به معادله زیر می رسم:

$$-\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{5}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{L^2}{x^2} \right] \phi = 3[3(\varepsilon^2 - m^2) - 2V_0(\varepsilon + m)]\phi \quad (44-4)$$

که در معادله بالا  $L = -\gamma(\gamma + 4)$  می باشد. که در این رابطه نیز  $\gamma = 2n + l_p + l_\lambda$  که به ازای  $n = 1, 2, 3, \dots$  برقرار بوده و حالت پایه که مربوط به مباحث ماست به ازای  $\gamma = 0$  برافرار است [21, 22].

اکنون با قرار دادن پتانسیل رابطه (۴-۱) در و با در نظر گرفتن تغییر متغیرهای زیر

$$\begin{aligned} a_1 &= (E + m)a \\ b_1 &= (E + m)b \\ c_1 &= (E + m)c \\ \lambda &= \varepsilon^2 - m^2 \end{aligned} \quad (۴۵-۴)$$

به معادله زیر می رسیم:

$$-\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{5}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{L^2}{x^2} \right] \phi = 3 \left[ \left( 3\lambda - a_1 x^2 - b_1 x + \frac{c_1}{x} \right) \right] \phi \quad (۴۶-۴)$$

برای حل این معادله دیفرانسیل مرتبه دوم از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

$$\phi = x^{-\frac{5}{2}} \xi$$

استفاده می کنیم. با قرار دادن این رابطه در معادله (۴۶-۴) به معادله زیر می رسیم:

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} - \frac{15}{4x^2} \xi = -3 \left[ 3\xi - a_1 x^2 - b_1 x + \frac{c_1}{x} \right] \xi \quad (۴۷-۴)$$

با قرار دادن

$$\xi(x) = \exp(h(x)) \quad , \quad h(x) = -\frac{1}{2} \alpha x^2 + \beta x + \delta \ln x \quad (۴۸-۴)$$

در رابطه (۴۷-۴) ضرایب مجهول را بر حسب یکدیگر پیدا نموده ایم:

$$\alpha = \sqrt{3a_1} \quad , \quad b_1 = \frac{c_1}{2} \sqrt{3a_1} \quad , \quad \delta = 1 \quad , \quad \lambda = \frac{1}{9} (-\beta^2 + 5\alpha) \quad (۴۹-۴)$$

برای اینکه ضرایب مجهول را بیابیم همانند قبل بایستی از یک کمیتی که مقدار معلوم و عددی آن

برای ما مشخص است همانند  $\frac{g_A}{g_V} = 1.26$  استفاده کنیم. بنابراین

$$\frac{5}{9}\sqrt{3a_1} - \frac{1}{16}c_1^2 = \varepsilon^2 - m^2$$

$$2b_1 = c_1\sqrt{3a_1} \quad (50-4)$$

$$\frac{g_A}{g_V} = 1.26$$

را برای یافتن ضرایب پتانسیل به کار می بریم.

پس با توجه به ضرایب رابطه (50-4) تابع موج به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\psi = \frac{N}{4\pi} \left( \frac{i\vec{\sigma} \cdot \hat{r}}{\varepsilon + m} \left( \sqrt{3a_1}x + \frac{3c_1}{2} \right) \right) e^{-\frac{1}{2}(3a_1x^2 + \frac{3c_1}{2}x)} Y_{00}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda) \quad (51-4)$$

که در رابطه بالا  $\Omega_\rho, \Omega_\lambda$  زوایای فضایی مربوط به فوق کره می باشند.

اما در اینجا مشاهده می شود که حتی با داشتن مقدار  $E' = 0.197 \text{ fm}^{-1}$  به عنوان کمیتی معلوم باز هم برای حل این دستگاه یک معلوم کم می باشد. برای حل این مشکل کافی است تا یکی از ضرایب پتانسیل را معلوم در نظر گرفته یعنی به آن عدد دلخواهی را نسبت دهیم، و پس از آن ضرایب دیگر را بیابیم. ما در این مرحله از کار مقدار  $a_1$  را برابر یک قرار داده و مابقی ضرایب را بر این اساس با توجه به اینکه مقدار

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} \left\{ 1 - \frac{4 \int_0^\infty |\chi_0(x)|^2 x^5 dx}{3 \int_0^\infty (|\chi_0(x)|^2 + |\phi_0(x)|^2) x^5 dx} \right\} \quad (52-4)$$

می باشد، دستگاه دو معادله و دو مجهولی را که در آن مقدار  $m, c_1$  مجهول هستند را حل

می کنیم. و پس از حل این دستگاه مقادیر زیر را محاسبه نموده ایم:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1 \text{ fm}^{-4} \\
 c_1 &= 0.535 \text{ fm}^{-1} \\
 m_q &= 1.251 \text{ fm}^{-1} \\
 b_1 &= 0.463 \text{ fm}^{-3}
 \end{aligned}
 \tag{۵۳-۴}$$

با این رویکرد تابع موج به صورت زیر حاصل گردیده است:

$$\psi = \frac{N}{4\pi} \left( \frac{i\vec{\sigma} \cdot \hat{x}}{\varepsilon + m} (1.732x + 0.401) \right) \cdot \exp(-0.866x^2 - 0.401x)
 \tag{۵۴-۴}$$

حال با توجه به رابطه بالا می توانیم مقدار شعاع باری پروتون را محاسبه کنیم:

که در رابطه بالا  $N = 2.788$  می باشد .

با توجه به رابطه (۴-۲۱) که در واقع به جای  $r$  از  $x$  استفاده می کنیم. یعنی:

$$\langle x^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = N^2 \int_0^{\infty} [|\phi|^2 + |\chi|^2] x^5 dx
 \tag{۵۵-۴}$$

$$\langle x^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 0.897 \text{ fm}$$

برای محاسبه گشتاور مغناطیسی پروتون از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\alpha_p = \frac{e}{2E_0} \left( 1 - \frac{2}{3} \int_0^{\infty} dr \chi^2(r) \right)
 \tag{۵۶-۴}$$

بنابراین

$$\alpha_p = 3.089 \text{ n.m}
 \tag{۵۷-۴}$$

در این قسمت پتانسیل ایزواسپین - ایزواسپین را به صورت زیر در نظر می گیریم [3]:

$$U'(r) = A_l \sum_{i < j} \frac{1}{(\sqrt{\pi} \sigma_l)^3} \vec{T}_i \cdot \vec{T}_j e^{-\frac{r_{ij}^2}{\alpha}} \quad (58-4)$$

با توجه به پتانسیل بالا می توانیم اثر اختلالی این پتانسیل را همانند آنچه که در بخش (4-4) دیده ایم با توجه به رابطه زیر محاسبه کنیم:

$$E' = \langle \psi | U'(x) | \psi \rangle$$

$$\langle E' \rangle = \int \psi^\dagger U'(r) \psi x^3 dx \quad (59-4)$$

در این صورت میزان انرژی مختل شده برابر است با:

$$E' = 0.197 \text{ fm}^{-1}$$

بنابراین میزان انرژی سیستم بعد از تأثیر پتانسیل ایزواسپین عبارت است از:

$$E = 1.584 + 0.197 = 1.781 \text{ fm}^{-1} \quad (60-4)$$

با این رویکرد ضرایب پتانسیل جدید و به عبارت دیگر تابع موج جدید سیستم عبارت است از:

$$a'_1 = 1 \text{ fm}^{-4}$$

$$c'_1 = 0.445 \text{ fm}^{-1}$$

$$m'_q = 1.490 \text{ fm}^{-1}$$

$$b'_1 = 0.385 \text{ fm}^{-3}$$

(61-4)

و تابع موج عبارت است از:

$$\psi' = \frac{N'}{4\pi} \left( \frac{i \vec{\sigma} \cdot \hat{r}}{\varepsilon + m} (1.732 x + 0.334) \right) \cdot \exp(-0.866 x^2 - 0.334 x) \quad (62-4)$$

ثابت نرمالیزاسیون برای این تابع موج

$$N' = 2.535$$

می باشد. و با توجه به رابطه (۴-۵۵) مقدار شعاع باری پروتون بعد از اعمال اختلال ایزواسپین عبارت است از:

$$\langle x^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 0.883 \text{ fm} \quad (۴-۶۳)$$

اما گشتاور مغناطیسی پروتون را با توجه به رابطه (۴-۲۳) می توان محاسبه نمود. در این حالت خواهیم داشت:

بنابراین

$$\alpha_p = 3.019 \text{ n.m} \quad (۴-۶۴)$$

#### ۴-۵) نتیجه گیری

در این پایان نامه مشخص گردید که می توان با استفاده از معادله دیراک و حل آن با پتانسیل هایی که در ارتباط با کوارکهای پروتون می باشند؛ تابع موج پروتون را محاسبه کرده و هنگامی که پتانسیل ایزواسپین را وارد و آن را به شکل اختلال روی تابع موج اثر می دهیم پاسخهای ما در ارتباط با خواص پروتون از قبیل شعاع باری پروتون و گشتاور مغناطیسی آن به گونه ای خواهد بود که پاسخها به مقادیر تجربی نزدیکتر خواهند شد. یعنی روابط (۴-۳۳) و (۴-۳۴) که مربوط است به شعاع باری و گشتاور مغناطیسی ذره بعد از اعمال پتانسیل ایزواسپین با مقدار این خواص قبل از اعمال پتانسیل ایزواسپین روابط (۴-۲۲) و (۴-۲۴) متفاوت و به مقدار تجربی نزدیکتر خواهد بود.

همچنین به این مطلب رسیده ایم که پروتون را به صورت یک سیستم سه ذره ای در نظر گرفته و تابع موج پروتون را با استفاده از حل معادله دیراک برای این سیستم سه ذره ای به دست آوریم. در این شرایط بدون اعمال پتانسیل ایزواسپین به عنوان عامل اختلال شعاع باری و گشتاور مغناطیسی پروتون را ؛ که همان روابط (۴-۵۵) و (۴-۵۷) می باشند؛ محاسبه کرده ایم. بعد از اعمال پتانسیل ایزواسپین این خواص پایداری پروتون با روابط (۴-۶۳) و (۴-۶۴) به دست آمده اند. که با مقایسه این اعداد و کمیتهای محاسبه شده با مقادیر تجربی به این نتیجه رسیده ایم که مدل پیشنهادی ما برای محاسبه تابع موج پروتون یک مدل بسیار خوبی است که کمیتهای محاسبه شده با مقادیر تجربی در تأیید قرار دارند.



## ۴-۵) پیشنهادات

مطالبی را که در این بخش مطرح می گردد به عنوان پیشنهاداتی است که می توان برای ادامه کار و دستیابی به پاسخهایی به کار بست.

همانطور که در پایان نامه مشاهده گردید معادله دیراک را برای پتانسیلی خاص حل کرده ایم یعنی در این پتانسیل پیشنهادی ما اثرات گلوئونها را بر روی تابع موج پروتون محاسبه نکرده ایم پس به عنوان اولین پیشنهاد می توانیم این پتانسیلها را نیز در نظر گرفته و معادله دیراک را حل کنیم. یعنی پتانسیلهایی مانند  $dx^3$  و  $ex^4$  و  $fx^5$  و ... که هر کدام مربوط به نوعی برهمکنش در ساختار درونی هادرونها است.

پیشنهاد دومی که مطرح است این می باشد که ؛ ما در این پایان نامه فقط اثر ایزواسپین را به عنوان اختلال در نظر گرفته ایم در صورتی که می توان اثرات پتانسیلهای اسپین - اسپین و حتی اسپین - ایزواسپین را نیز به عنوان اختلال در محاسبات وارد کرد.

- [1] F.E. Close;"An Introduction to Quarks and Partons". 1979.
- [2] F. Halzen, Alen D.Martin;"Quarka and Leptons:An Introductory cours in modern particle physics."
- [3] Ryder;"Quantum Field theory". 1996.
- [4] Samuel S.M. Wong;"Introduction Nuclear Physics". 1982.
- [5] F. Halzen, Alen D.Martin;"Quarka and Leptons:An Introductory cours in modern particle physics.";page of 107,108.
- [6] Gross;"Relativistic to Quantum Mechanich". 1994.
- [7] F. Halzen, Alen D.Martin;"Quarka and Leptons:An Introductory cours in modern particle physics.";page of 118,119.
- [8] Tegen,R. , Brockmann,R. Weise,W : Z.Phys.A 307,339 (1982).
- [9] Tegen,R. , M.Schedl and W.Weise , Phys Letters V.125, N1;1983
- [10] C.W.Wong, Phys.Rev . D24 (1981) 1416.
- [11] G.B. Smith and L.J . Tassie , Ann , Phys . 65 (1971) 352 .
- [12] G.E .Brown and M.Rho, Phys lett . 82 B (1979) 177;  
G.E .Brown , M .Rho and V. Vento , Phys . Lett,84 B (1979) 383;
- [13] C.Detar , Phys . Rev . D 24 (1981) 752 ; 762.
- [14] G.E. Brown and F.Myhrer , preprint (1982).
- [15] M.M. Giannini , E. SSantopinto , and A. Vassallo; Europ Phys. A 12 , 447-452 (2001).
- [16] P.N. Bogoliou bov, Ann . Inst.Henri Poincare ,8-163 (1976).
- [17] A. Chodos , R.l.Jaffe , K.Johnson, C.B. Thornand V. Weisskoph. Phys Rev D9 ,34-71(1974).
- [18] A.A. **Rajabi** ; Few-Body Systems 37,197-213 (2005).
- [19] A.A.**Rajabi**, Iranian Journa of Science & Technology, Transaction A, Vol, 28. No.A2 (2004).
- [20] A.A **Rajabi**., Indian Journal of pure and applied phys vo 141, pp 89-94 Feb (2003).
- [21] Oezelik,S.,Simek,M.:Phys.Lett.A152,145(1991)
- [22] Aqulanti,v.,Tonzanu,S.:Chem.J.Phys.126,4066(2004)

## Abstract

While it was specified that Protons and Neutrons aren't elementary particles. Scientists try to define the structure of these particles.

So different models were presented which Quark model is the best model that is presented and it is closer to relating and presents nucleons are formed from smaller particles named quarks.

On the basis of that in this thesis we use the base of this model to offer a structure for quark's confinement potential in nucleons (specially Proton). With solving Dirac equation for this potential and with calculating wave function of this particle, we'll calculate the properties related to proton (magnetic moment,  $\frac{g_A}{g_V}$  and charge radius)

and we'll compare it with experimental results of this properties.

The potential which we have offered is  $U = ax^2 + bx - \frac{c}{x}$ .

With solving Dirac equation we calculate wave function for this potential. And with using of this wave function calculate magnetic moment of proton  $\alpha_p = 3.447 n.m$ .

And charge radius of proton  $\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 1.439 fm$ .

After this stage we add isospin potential to the potential as a perturbation potential we calculate  $\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 0.998 fm$  and  $\alpha_p = 3.117 n.m$ .

In the next stage we consider to proton as a three body system and calculate Dirac equation for a three body system with due attention to Jacobian coordinate.

And we calculate the values of charge radius of proton and it's magnetic moment in order  $\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 0.897 fm$ ,  $\alpha_p = 3.089 n.m$  before using perturbation. We have

calculated these values offer using isospin potential in order  $\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 0.883 fm$ ,  $\alpha_p = 3.019 n.m$ .