

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده فیزیک

گروه اتمی و مولکولی (پلاسما)

عنوان پایان نامه کارشناسی ارشد

مطالعه و بررسی چگونگی تقویت امواج الکترومغناطیس با استفاده از پرتو

سیکلوترونی

دانشجو

علی سعیدی

اساتید راهنما

دکتر مهدی مومنی

دکتر امیر چخماچی دوم

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۹۲

الهی.....

مرا مدد کن تا دانش اندک من

نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور

نه حلقه ای برای اسارت

و نه دست مایه ای برای تجارت

بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن خود و

دیگران

آمین

تقدیم به ستارگان آسمان زندگی ام

پدرم

تکیه گاه استوار

مادرم

اسطوره عشق و ایثار

همسرم

همراه همیشگی

در برابر وجود گرامی شان زانوی ادب بر زمین می نهم و با قلبی مملو از عشق و محبت بر دستان  
پر مهرشان بوسه می زنم.

## تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش خدای را سزاست که آدمیان را اندیشیدن و تفکر آموخت تا به سرانگشت  
معرفت، اسرار هستی را یک به یک پرده بردارند. خداوندی که هر پرسشی را به پاسخی ختم نمود  
و ذهن پویای بشر را مشتاق یافتن این پاسخ ها قرار داد. پروردگاری که در سایه رحمت بی پایانش  
توانستم گامی دیگر بر دارم و وجود خویش را به زینت علم بیارایم. باشد که به خود آیم، شاکر  
باشم، اندیشه ای کنم و طریقی گزینم.

اکنون که خداوند متعال بر بنده حقیر خود منت نهاده و از سر لطف و کرم مرا لایق فراگیری علم  
قرار داده، چنانچه این مختصر تلاشم شایسته ارزشی باشد، شایسته تر آن است که زحمات اساتید  
بزرگوام **آقای دکتر مهدی مومنی و آقای دکتر امیر چخماچی** که شاگردی در محضرشان  
برایم کمال امتنان است را ارج نهم که در سایه راهنمایی های عالمانه ایشان، سعی و تلاش بی حد  
و حصرشان، دلسوزی های صبورانه و همکاری های بی دریغشان، این بار گران به منزل رسید.

از دوستان و هم کلاسی های بسیار خوبم که جای این پایان نامه نشانی از حضور پاک و  
صمیمی آنهاست قدردانی می کنم. از پدر، مادر، همسر، خواهر و برادرانم که با فراهم آوردن  
محیطی آرام و صمیمی پیمودن این راه را برایم آسان کردند، متشکرم.

علی سعیدی

شهریور ۹۲

## چکیده

در این پایان نامه ابتدا مکانیزم تقویت و بازده ناپایداری سیکلوترون میزر برای یک باریکه الکترونی نسبیتی در مدل ذره ای بررسی شده است. مجموعه معادلات حرکت خودسازگار الکترون ها بدست آورده شده و بصورت عددی مورد مطالعه قرار گرفته اند. بررسی اثر میدان مغناطیسی و انرژی باریکه الکترون ها بر بازده نشان می دهد که در سیگنالهای بزرگ برای باریکه ای با انرژی مشخص میدان مغناطیسی بهینه ای وجود دارد که در آن بازده بیشینه می شود اما در سیگنالهای ضعیف افزایش میدان مغناطیسی برای باریکه ای با انرژی مشخص سبب افزایش بازده شده در حالی که در یک میدان معین افزایش انرژی باریکه سبب کاهش بازده می شود. سپس با استفاده از نظریه جنبشی محاسبات در چارچوب معادلات ماکسول-ولاسوف خطی شده در خلا با در نظر گرفتن یک موجبر استوانه ای و بدون در نظر گرفتن موجبر انجام یافته است. رابطه پاشندگی برای اختلالات الکترومغناطیس در هر دو مورد بدست آمده است. با حل عددی رابطه پاشندگی اطلاعات مفیدی در مورد انتشار موج و طول موج هایی که سبب تقویت موج می شوند حاصل شده است.

**کلمات کلیدی:** الکترون - سیکلوترون - میزر، تجمع الکترونی، بسامد سیکلوترونی و روش مشخصه ای

## مقالات مستخرج از پایان نامه

- ۱- بررسی اثر میدان مغناطیسی و انرژی باریکه الکترونی بر بازده ناپایداری سیکلوترون- میزر - اولین کنفرانس ملی مهندسی و فیزیک پلاسما - تهران- دانشگاه شهید بهشتی، اول و دوم خرداد ماه ۱۳۹۲

## فهرست مطلب ها

صفحه	عنوان
۱.....	مقدمه و تاریخچه.....
	<b>فصل اول</b>
	<b>تئوری تک ذره - جوابهای مرتبه صفر و یک</b>
۸.....	۱-۱ وارد کردن موج الکترومغناطیس به عنوان یک اختلال.....
۱۰.....	۲-۱ بررسی خطی.....
۱۳.....	۳-۱ جواب های مرتبه صفر و یک.....
	<b>فصل دوم</b>
	<b>تئوری تک ذره - بهره دریافتی موج</b>
۱۹.....	۱-۲ بانچینگ های سمتی و محوری.....
۲۰.....	۲-۲ مکانیزم جابجایی انرژی و محاسبه بهره دریافتی موج.....



- ۳-۲ بررسی عددی مسئله..... ۲۶
- ۳-۲-۱ اثر میدان مغناطیسی..... ۲۸
- ۳-۲-۲ اثر انرژی باریکه الکترونی..... ۳۰

### فصل سوم

#### نظریه جنبشی - بررسی رابطه پاشندگی برای یک تابع توزیع خاص

- ۱-۳ معادلات ماکسول - ولاسوف و بررسی اثر سیگنال اختلالی..... ۳۵
- ۲-۳ روش مشخصه ای..... ۳۷
- ۳-۳ انتگرال گیری بر روی مسیر ذرات در میدان های تعادلی..... ۴۱
- ۴-۳ بررسی عددی رابطه پاشندگی..... ۴۶

### فصل چهارم

#### نظریه جنبشی - بدست آوردن رابطه پاشندگی در درون موجبر

- ۱-۴ ساختار کلی مسئله..... ۴۹
- ۲-۴ ثابت های حرکت ذره..... ۵۰
- ۳-۴ معادلات ماکسول..... ۵۴
- ۴-۴ محدوده چگالی های کم..... ۶۰
- ۵-۴ معادله ولاسوف و روش مشخصه ای..... ۶۳
- ۶-۴ بدست آوردن رابطه پاشندگی..... ۷۰

### نتیجه

- گیری..... ۷۶

پیشنهادات.....

۷۸

پیوست.....

۷۹

منابع.....

۸۸

## فهرست شکل ها

شکل	صفحه
۱-۲	نمایانگر تغییرات بازده دریافتی موج با گذشت زمان که حالت خط تیره-نقطه (dash-dot) ..... ۲۹
	برای مقدار $\varepsilon/\omega=0.06$ و حالت توپر (solid) برای مقدار $\varepsilon/\omega=0.044$ و حالت خط تیره (dash)
	برای مقدار $\varepsilon/\omega=0.03$ در انرژی باریکه 50keV برای سیگنال های قوی
۲-۲	نمایانگر تغییرات بازده دریافتی موج با گذشت زمان که حالت خط تیره-نقطه (dash-dot) ..... ۳۰
	برای مقدار $\varepsilon/\omega=0.07$ و حالت توپر (solid) برای مقدار $\varepsilon/\omega=0.055$ و حالت خط تیره (dash)
	برای مقدار $\varepsilon/\omega=0.04$ در انرژی باریکه 50keV برای سیگنال های ضعیف
۳-۲	نمایانگر تغییرات بازده دریافتی موج با گذشت زمان که حالت خط تیره-نقطه (dash-dot) ..... ۳۱
	برای مقدار انرژی 60keV و حالت توپر (solid) برای مقدار 50keV و حالت خط تیره (dash)
	برای مقدار 40keV در میدان مغناطیسی بهنجار ( $\Omega_e/\omega=1.05$ ) برای سیگنال های قوی
۴-۲	نمایانگر تغییرات بازده دریافتی موج با گذشت زمان که حالت خط تیره-نقطه (dash-dot) ..... ۳۲
	برای مقدار انرژی 60keV و حالت توپر (solid) برای مقدار 50keV و حالت خط تیره (dash)
	برای مقدار 40keV در میدان مغناطیسی بهنجار ( $\Omega_e/\omega=1.05$ ) برای سیگنال های ضعیف
۱-۳	تغییرات بسامد زاویه ای حقیقی برای امواج تند و کند بر حسب $k_z c/\omega_{pe}$ ..... ۴۶
۲-۳	نرخ رشد ناپایداری بر حسب $k_z c/\omega_{pe}$ ..... ۴۷
۱-۴	ساختار کلی مسئله ..... ۴۹

## مقدمه و تاریخچه:

تقریباً از سال های ۱۹۳۰ و ۱۹۴۰ تاکنون استفاده از الکترون های پر انرژی برای تولید و تقویت میکروموج ها همواره مورد توجه بوده است و مکانیزم ها و دستگاه های مختلفی نیز پیشنهاد شده و بکار گرفته شده است. دستگاه های اولیه برای این کار شامل مگنترون ها و کلایسترون ها و لوله های موجبر بوده است که در طی جنگ جهانی دوم نیز به خصوص در رادار ها مورد استفاده قرار گرفته اند.

با انجام تحقیقات بر روی مکانیزم های جدید در اواخر دهه ۱۹۵۰ توئیس<sup>۱</sup> و اشتایدر<sup>۲</sup> و گاپانوف<sup>۳</sup> تئوری را به نام الکترون-سیکلوترون-میزر<sup>۴</sup> ارائه دادند [1,2] که بر اساس آن می توانستند از خاصیت گسیل القایی الکترون های چرخنده بسیار پر انرژی استفاده کرده و موج تند همدوس تولید کنند که این امواج مایکروویو دارای فرکانس هایی در محدوده ۰/۳ گیگاهرتز تا ۳۰۰ گیگاهرتز و طول موجی در حدود ۱ میلیمتر تا ۱ متر می باشند [3]. در همان زمان ویبل<sup>۵</sup> ناپایداری های ویستلر<sup>۱</sup> الکترونی را که به علت توزیع

---

<sup>1</sup>-Twiss

<sup>2</sup>-Schneider

<sup>3</sup>-Gaponov

<sup>4</sup>-Electron-Cyclotron-Maser

<sup>5</sup>-Wibel

ناهمسانگرد سرعت الکترون ها بوجود می آید را بررسی کرد که هر دوی اینها شامل میدان امواج عرضی الکترومغناطیسی بود که با الکترون چرخان برهمکنش می کرد[4]. دو دهه بعد چو<sup>۲</sup> و هیرشفیلد<sup>۳</sup> یک رابطه پاشنگی یکپارچه را ارائه کردند و نشان دادند که بانچینگ<sup>۴</sup>(تجمع الکترونها) از یک رقابت بین بانچینگ سمتی (دورانی) و بانچینگ محوری نتیجه می شود[3]. همچنین در اواخر دهه ۱۹۷۰ آقایان دیویدسون و اهم به بررسی تئوری سیکلوترون- میزر برای اختلالات الکترومغناطیسی دارای تقارن سمتی در درون یک موجبر پرداختند[5-9].

از مکانیزم های دیگر برای تولید امواج می توان به لیزر الکترون آزاد<sup>۵</sup> اشاره کرد که در سال ۱۹۷۱ مودی<sup>۶</sup> فرایند گسیل خودبخودی از یک لیزر الکترون آزاد که بر پایه حرکت یک پرتو الکترونی نسبیتی از میان یک میدان مغناطیسی عرضی می باشد را بررسی کرد و بعد آزمایشات موفقیت آمیزی در سال ۱۹۷۶ و ۱۹۷۷ در استنفورد انجام دادند[10,11]. اخیرا وسیله دیگری به نام لیزرکانال یونی<sup>۷</sup> برای تولید تابش استفاده می شود[11] که در آن یک پرتو نسبیتی الکترونی در داخل یک پلاسمای تحت چگال تزریق می شود با این کار جبهه پرتو الکترون های پلازما کنار رفته و تنها یک کانال یونی باقی می ماند. تمرکز یون باعث می شود پرتو الکترونی حول محور نوسان کرده و نقشی شبیه نقش میدان مغناطیسی در میزر سیکلوترونی را ایفا می کند. این دستگاه می تواند تابش هایی در فرکانس میکروموج تا پرتو های ایکس نرم تولید کند.

بطور کلی در طی سه دهه تئوری الکترون- سیکلوترون- میزرها که ابتدا از مفاهیم مقدماتی شروع شد رفته رفته جایگاه واقعی خود را پیدا کرد[3,12,13,14] و بطور محسوسی تکامل یافت. ابزاری که بر اساس

---

1-Whistler

2-Chu

3-Hirshfeld

4-Bunching

5-Free Electron Laser

6-Modey

7- Ion Chanel Laser

این تئوری ساخته شدند در محدوده طول موجی میلیمتری و زیر میلیمتری از طیف امواج الکترومغناطیسی عمل می کنند که به سرعت جایگاه بی نظیری در صنعت پیدا کردند و شاهد کاربردهای متعدد آن می باشیم. از جمله کاربردهای آن می توان به تامین گرمای لازم برای عمل همجوشی هسته ای در رادارهای پیشرفته در فعالیتهای صنعتی در پزشکی و در شتابدهنده ها اشاره کرد.

ابتدا یک باریکه الکترونی که متشکل از الکترون های بسیار پر انرژی می باشد را در نظر می گیریم این باریکه الکترونی به خودی خود میل به واگرا شدن به دلیل وجود نیروهای دافعه کولنی دارد اما باید در نظر داشت که باریکه ای مورد نیاز ما می باشد که به یک نقطه همگرا شده یا حداقل بصورت باریکه الکترونی باقی بماند بدین منظور و برای جلوگیری از واگرا شدن باریکه الکترونی آن را تحت تاثیر یک میدان مغناطیسی استاتیک محوری خارجی  $B_z$  قرار می دهیم که این کار باعث چرخش الکترونها حول میدان مغناطیسی شده و در طول و جهت مورد نظر چرخیده و به سمت جلو یک حرکت مارپیچ را ادامه می دهند و باید در نظر داشت که پرتو الکترونی مورد نظر تک انرژی می باشد و هیچگونه پهن شدگی در سرعت ندارد. حال این حرکت سیکلوترونی الکترون ها را به عنوان محیط زمینه برای تقویت موج الکترومغناطیس یا موج RF (موجی که دارای فرکانسی در محدوده رادیویی می باشد) در نظر می گیریم سپس این موج الکترومغناطیس را که دارای یک قطبش دایروی چپ گرد می باشد و دامنه آن آنقدر کوچک است که بتوان از تئوری اختلال استفاده کنیم را وارد محیط زمینه که همان حرکت سیکلوترونی الکترونها می باشد می کنیم تا بتوان آهنگ تغییرات انرژی الکترون ها و متناسب با آن بهره دریافتی موج را بدست آورده و بدین صورت مکانیزم تقویت توصیف شود.

هنگام ورود موج الکترومغناطیس به درون ساختار مورد نظر دو شرط بانچینگ (منظور تجمع الکترونها که ناشی از ورود موج می باشد) و همچنین شرط هم فاز شدن موج و الکترون از شرایط اساسی برای تولید تابش های الکترومغناطیس می باشد.

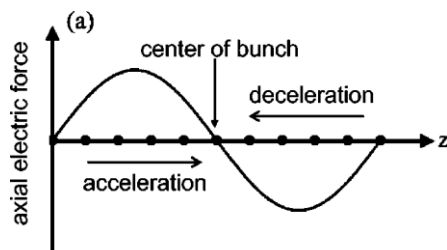
برای همفاز شدن موج و الکترون ها می بایست الکترون ها با سرعتی معادل سرعت فاز موج حرکت کنند تا شرط رزونانس یا تشدید بصورت رابطه زیر اتفاق بیفتد:

$$\omega - k_z v_z \cong 0$$

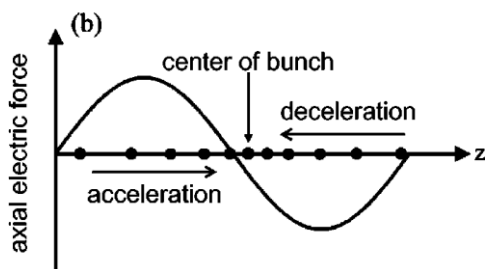
در رابطه فوق  $\omega$  بسامد زاویه ای موج الکترومغناطیس ورودی و  $k_z$  بردار موج و  $v_z$  سرعت محوری الکترونها می باشد. حال اگر بر همکنش مورد نظر بین موج و حرکت سیکلوترونی الکترون هایی که در راستای محور  $z$  حرکت مارپیچ دارند اتفاق بیفتد شرط تشدید بصورت زیر خواهد بود:

$$\omega - k_z v_z - \frac{\Omega_e}{\gamma} \cong 0$$

در این رابطه  $\Omega_e$  بسامد سیکلوترونی الکترونها و  $\gamma$  پارامتر نسبیتی می باشد. اما هنگام ورود موج الکترومغناطیسی به عنوان سیگنال اختلالی ابتدا در یک طول موج خاص تعدادی از الکترون ها شتاب گرفته و تعدادی دیگر شتابشان کم می شود و در نتیجه مطابق شکل زیر الکترون ها در یک نقطه خاص تجمع پیدا کرده یا اصطلاحاً بانچ می شوند.



ولی اگر الکترون ها با سرعتی بیشتر از سرعت فاز موج حرکت کنند مرکز بانچینگ جابجا می شود بصورت زیر:



خاطر نشان می کنیم که در سال ۱۹۵۹ اشنايدر تمامی مباحث را بصورت کوانتومی بررسی کرد اما تمامی عملکردهای ما بصورت کلاسیکی و نسبیتی می باشد.

در ادامه مباحث در فصل یک به این نکته می توان اشاره کرد که نیروی محوری به بانچینگ محوری منجر می شود و بانچینگ سمتی وابسته به اثرات نسبیتی تولید شده از میدان الکتریکی موج است. با محاسبه تغییر فاز الکترون و بکارگیری تئوری اختلال، معادلات کوپل شده حاکم بر حرکت الکترون- موج را بدست آورده و به این نتیجه می رسیم که جواب های مرتبه اول معنی فیزیکی بانچینگ های سمتی و محوری است و جواب های مرتبه دوم تغییرات انرژی الکترون و میزان انرژی که موج می گیرد می باشند.

در قسمت بعد از دیدگاه نظریه جنبشی استفاده می کنیم در واقع به منظور تقویت موج آن را به عنوان یک عامل اختلالی وارد سیستم مورد بحث که باریکه ای از ذرات باردار و پر انرژی می باشد می کنیم. این کار باعث ایجاد ناپایداری در آن می شود که این ناپایداری به عنوان ناپایداری میز سیکلوترونی نامیده می شود. باید در نظر داشت که سیگنال اختلالی باید دارای قطبش دایروی باشد. آنگاه با در نظر گرفتن معادلات ولاسوف و ماکسول و خطی کردن آنها به حل همزمان این معادلات می پردازیم سپس از روش مشخصه ای استفاده می کنیم که در آن با انتگرال گیری روی مسیر ذرات در فضای فاز به یک رابطه پاشندگی نهایی می رسیم. حال می توان در این رابطه پاشندگی توابع توزیع مختلفی را جای گذاری کرده و به تحلیل ناپایداری های سیکلوترون میز پردازیم.

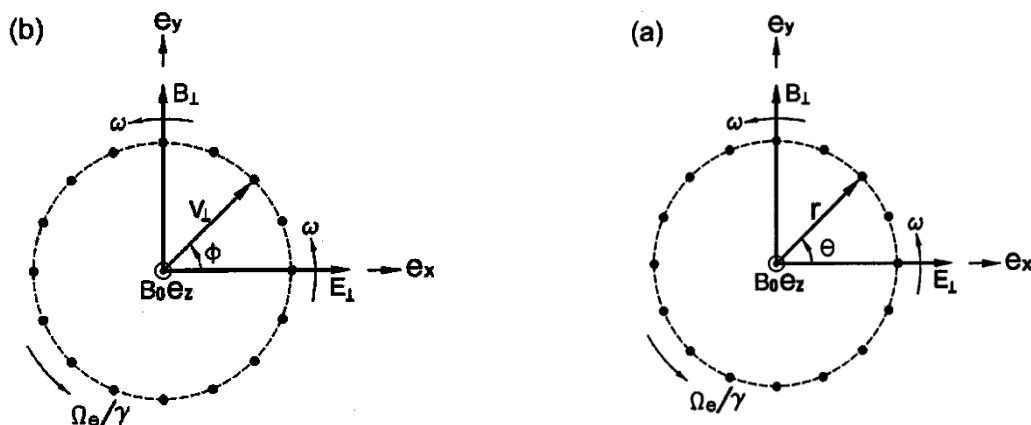
در واقع ناپایداری میز سیکلوترونی در پلاسمایی که در حضور میدان مغناطیسی می باشد اتفاق می افتد و یک نوع ناپایداری موج الکترومغناطیس است که در اثر وارونی جمعیت در اندازه حرکت عرضی که در تعریف تابع توزیع لحاظ شده است بوجود می آید. (منظور از اندازه حرکت عرضی مولفه ای از اندازه حرکت است که عمود بر راستای انتشار پرتو الکترونی می باشد و اندازه حرکت طولی مولفه ای است که



در راستای انتشار پرتو الکترونی می باشد) بنابراین تابع توزیع مورد نظر دارای یک وارونی جمعیت در مولفه عمودی تکانه می باشد که باعث انتقال انرژی از ذره به موج شده و سبب تقویت موج می شود. بهترین تابع توزیعی که می تواند این شرط وارونگی در اندازه حرکت عرضی را برآورد کند تابع توزیع دلتا می باشد که این کار را در فصل سه مورد بررسی قرار داده ایم.

### مدل پایه:

همانطور که در قبل گفتیم باریکه الکترونی هنگام قرار گرفتن در یک میدان مغناطیسی خارجی شروع به حرکت سیکلوترونی می کند در این حالت می توان موج الکترومغناطیس مورد نظر را برای تقویت وارد سیستم کنیم که این وضعیت را می توان با روش های مختلفی نشان داد که مدل زیر نمایانگر آن است [3]



همانطور که در شکل a و b می بینیم الکترونها با بسامد سیکلوترونی خاصی در حال چرخش هستند که در همین وضعیت موج الکترومغناطیس مورد نظر (با قطبش دایروی چپگرد) که هم محور با چرخش الکترون ها است با بسامد زاویه ای مشخصی نیز در حال گردش است که سیستم مورد نظر در راستای محور z که در شکل مشخص شده در حال انتشار می باشد.

در شکل a زاویه  $\theta$  بیانگر زاویه بین بردار مکانی الکترون ها با محور xها است و در شکل b زاویه  $\phi$  نشان دهنده زاویه بین سرعت عرضی الکترون ها و محور xها می باشد.

# فصل اول

تئوری تک ذره

جوابهای مرتبه صفر و یک

## ۱-۱ وارد کردن موج الکترومغناطیس به عنوان یک اختلال:

ابتدا موج الکترومغناطیس مورد نظر را به عنوان یک عامل اختلالی که دارای قطبش دایروی چپگرد می باشد وارد محیط زمينه که همان حرکت سیکلوترونی الکترونها تحت تاثیر یک میدان مغناطیسی خارجی  $B_0 e_z$  است می کنیم. میدان های الکتریکی و مغناطیسی این اختلال بصورت زیر داده می شوند:

$$E_{\perp} = E_0 [\cos(\omega t - k_z z) e_x + \sin(\omega t - k_z z) e_y] \quad (1-1)$$

$$\nabla \times E_{\perp} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_{\perp}}{\partial t}$$

$$B_{\perp} = \frac{ck_z}{\omega} e_z \times E_{\perp}$$

$$B_{\perp} = \frac{ck_z}{\omega} E_0 [-\sin(\omega t - k_z z) e_x + \cos(\omega t - k_z z) e_y] \quad (2-1)$$

در روابط بالا  $E_0$  دامنه میدان الکتریکی اختلالی  $k_z$  و  $\omega$  بترتیب عدد و بسامد زاویه ای موج می باشند. الکترونهاى مورد نظر که دارای حرکت سیکلوترونی هستند بسیار پر انرژی و نسبیتی می باشند که هنگام ورود سیگنال مورد نظر انرژی جنبشی ذرات ( $w$ ) و تغییرات زمانی انرژی جنبشی آنها بصورت زیر خواهد بود:

$$w = (\gamma - 1)mc^2$$

$$\frac{d}{dt} w = -eV_{\perp} \cdot E_{\perp}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{c^2}}}$$

$\gamma$  فاکتور نسبیتی و  $V_{\perp}$  سرعت عرضی الکترون ها و  $V_z$  سرعت طولی الکترون ها می باشند. خاطر نشان می کنیم که میدان مغناطیسی اختلالی هیچگونه کاری انجام نمی دهد.

با داشتن میدان الکتریکی اختلال مورد نظر که در قسمت قبل بدست آورده شد و همچنین سرعت عمودی (عرضی) الکترون ها که در قسمت زیر داده شده است و همچنین استفاده از روابط بالا داریم:

$$V_{\perp} = v_{\perp} (\cos \phi e_x + \sin \phi e_y)$$

$$\frac{d}{dt} w = -eE_0 v_{\perp} \cos(\omega t - k_z z - \phi) \quad (3-1)$$

رابطه (3-1) بیانگر تغییرات زمانی انرژی جنبشی الکترونها می باشد.

زاویه فاز الکترون ها  $\phi$  با بسامد سیکلوترونی یا چرخشی آنها یعنی  $\Omega_e = eB_0/m_e c$  تغییر می کند:

$$\frac{d}{dt} \phi \cong \frac{\Omega_e}{\gamma}$$

$$\frac{d}{dt} (\omega t - k_z z - \phi) = \omega - k_z v_z - \frac{\Omega_e}{\gamma} = 0$$

با معرفی پارامتر جدیدی به نام زاویه فاز سیکلوترونی موثر  $\phi_{eff}$  و جایگذاری آن در رابطه (3-1) به نتیجه نهایی می رسیم:

$$\phi_{eff} = k_z z + \phi \quad (4-1)$$

$$\frac{d}{dt} W = -eE_0 v_{\perp} \cos(\omega t - \phi_{eff})$$

$$\Omega_{eff} = \frac{d}{dt} \phi_{eff} = \frac{d}{dt} (k_z z + \phi) \cong k_z v_z + \frac{\Omega_e}{\gamma}$$

$$\omega \cong \Omega_{eff} \quad (5-1)$$

این رابطه همان شرط تشدید مورد نظر می باشد و بیان کننده آن است که در صورتی جابجایی انرژی بین ذره و موج صورت می گیرد که بسامد سیکلوترونی الکترون ها و بسامد زاویه ای موج با هم برابر باشند.

## ۲-۱ بررسی خطی

در این قسمت با استفاده از معادلات حرکت نسبیتی به بررسی مسئله می پردازیم:

$$\frac{d}{dt} p = \frac{d}{dt} (\gamma m_e v)$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma m_e v) = -eE_{\perp} - \frac{e}{c} v \times (B_0 e_z + B_{\perp}) \quad (۶-۱)$$

$B_0$  میدان مغناطیسی استاتیکی محوری می باشد که باعث حرکت سیکلوترونی ذرات می شود و  $p$  اندازه حرکت و  $m_e$  جرم الکترون ها می باشد. میدان الکتریکی و مغناطیسی اختلالی در این رابطه با استفاده از روابط (۱-۱) و (۲-۱) داده شده است.

با استفاده از رابطه (۳-۱) تغییرات پارامتر نسبیتی که تغییرات انرژی را به ما خواهد داد را بدست می آوریم:

$$\frac{d}{dt} [(\gamma - 1) m_e c^2] = -e E_0 v_{\perp} \cos(\omega t - k_z z - \phi)$$

$$m_e c^2 \frac{d}{dt} \gamma = -e E_0 v_{\perp} \cos(\omega t - k_z z - \phi)$$

$$\frac{d}{dt} \gamma = \frac{-e E_0 v_{\perp}}{m_e c^2} \cos(\omega t - k_z z - \phi) \quad (۷-۱)$$

رابطه (۷-۱) تغییرات زمانی فاکتور نسبیتی که تغییرات انرژی را به ما می دهد می باشد. حال برای بدست آوردن معادلات حرکت توصیف کننده حرکت ذرات هنگام ورود سیگنال اختلالی ابتدا از رابطه (۶-۱) شروع می کنیم و همچنین باید بدانیم که سرعت ذرات و تغییرات زمانی پارامتر نسبیتی با استفاده

از روابط (۷-۱) و (۸-۱) داده شده است. سمت چپ معادله (۶-۱) را محاسبه می کنیم:

$$v = v_{\perp} + v_z$$

$$v = v_{\perp} (\cos \phi e_x + \sin \phi e_y) + v_z e_z \quad (\lambda-1)$$

با ادامه محاسبات به همان صورتی که در قبل گفته شد داریم:

$$\frac{dp}{dt} = m_e \frac{d}{dt}(\gamma v) = m_e \left( v \frac{d}{dt} \gamma + \gamma \frac{d}{dt} v \right)$$

$$\frac{dp}{dt} = m_e \left[ \frac{-eE_0 v_{\perp}}{m_e c^2} \cos(\omega t - k_z z - \phi) (v_{\perp} (\cos \phi e_x + \sin \phi e_y) + v_z e_z) + \right.$$

$$\left. + \gamma \frac{d}{dt} (v_{\perp} (\cos \phi e_x + \sin \phi e_y) + v_z e_z) \right]$$

$$\frac{dp}{dt} = m_e \left[ \frac{-eE_0 v_{\perp}}{m_e c^2} \cos(\omega t - k_z z - \phi) (v_{\perp} (\cos \phi e_x + \sin \phi e_y) + v_z e_z) + \right.$$

$$\left. + \gamma \left( (\cos \phi e_x + \sin \phi e_y) \frac{d}{dt} v_{\perp} + v_{\perp} \frac{d}{dt} (\cos \phi e_x + \sin \phi e_y) + \frac{d}{dt} v_z e_z \right) \right]$$

$$\frac{dp}{dt} = m_e \left[ \frac{-eE_0 v_{\perp}}{m_e c^2} \cos(\omega t - k_z z - \phi) (v_{\perp} (\cos \phi e_x + \sin \phi e_y) + v_z e_z) + \right.$$

$$\left. + \gamma \left( (\cos \phi e_x + \sin \phi e_y) \frac{d}{dt} v_{\perp} + v_{\perp} (-\dot{\phi} \sin \phi e_x + \dot{\phi} \cos \phi e_y) + \frac{d}{dt} v_z e_z \right) \right] \quad (9-1)$$

حال سمت راست معادله (9-1) را محاسبه می کنیم:

$$-eE_{\perp} - \frac{e}{c} v \times (B_0 e_z + B_{\perp}) = -eE_0 \cos(\omega t - k_z z) e_x$$

$$-eE_0 \sin(\omega t - k_z z) e_y -$$

$$\frac{e}{c} (B_0 v_{\perp} \sin \phi e_x - B_0 v_{\perp} \cos \phi e_y) -$$

$$\frac{e k_z c}{c \omega} E_0 [-\cos(\omega t - k_z z) v_z e_x + \sin(\omega t - k_z z) v_z e_y +$$

$$(\sin(\omega t - k_z z) v_{\perp} \sin \phi + \cos(\omega t - k_z z) v_{\perp} \cos \phi) e_z] \quad (10-1)$$

برای بدست آوردن تغییرات زمانی سرعت عمودی الکترون ها طرفین روابط (۹-۱) و (۱۰-۱) را در  $\cos\phi e_x + \sin\phi e_y$  ضرب می کنیم و در رابطه (۶-۱) جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} & \frac{-eE_0 v_{\perp}^2}{c^2} \cos(\omega t - k_z z - \phi) + m_e \gamma \frac{d}{dt} v_{\perp} = \\ & -eE_0 \cos \phi \cos(\omega t - k_z z) - \frac{e}{c} B_0 v_{\perp} \sin \phi \cos \phi + \\ & \frac{ek_z}{\omega} E_0 \cos \phi \cos(\omega t - k_z z) v_z - eE_0 \sin \phi \sin(\omega t - k_z z) + \\ & \frac{ek_z}{\omega} E_0 \sin \phi \sin(\omega t - k_z z) v_z + \frac{e}{c} B_0 v_{\perp} \sin \phi \cos \phi \end{aligned}$$

بدین ترتیب با ادامه محاسبات خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \frac{-eE_0 v_{\perp}^2}{c^2} \cos(\omega t - k_z z - \phi) + m_e \gamma \frac{d}{dt} v_{\perp} = -eE_0 \cos(\omega t - k_z z - \phi) + \\ & \frac{ek_z}{\omega} E_0 v_z \cos(\omega t - k_z z - \phi) \\ & \frac{d}{dt} v_{\perp} = \frac{-eE_0}{m_e \gamma} \left( 1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2} - \frac{k_z v_z}{\omega} \right) \cos(\omega t - k_z z - \phi) \quad (11-1) \end{aligned}$$

پس آهنگ تغییرات سرعت عرضی الکترون ها بدست آمد. دوباره برای بدست آوردن تغییرات زمانی زاویه فاز سمتی الکترون ها طرفین روابط (۱۰-۱) و (۹-۱) را در  $-\sin\phi e_x + \cos\phi e_y$  ضرب می کنیم و در رابطه (۶-۱) جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} & \gamma m_e \phi v_{\perp} = eE_0 \cos(\omega t - k_z z) \sin \phi + \frac{eB_0}{c} v_{\perp} \sin \phi \sin \phi - \\ & \frac{ek_z}{\omega} E_0 \sin \phi \cos(\omega t - k_z z) v_z - eE_0 \sin(\omega t - k_z z) \cos \phi + \end{aligned}$$

$$\frac{eB_0}{c} v_{\perp} \cos \phi \cos \phi + \frac{ek_z}{\omega} E_0 \cos \phi \sin(\omega t - k_z z) v_z$$

با ادامه محاسبات به آسانی داریم:

$$\gamma m_e \dot{\phi} v_{\perp} = -eE_0 \sin(\omega t - k_z z - \phi) + \frac{eB_0}{c} v_{\perp} + \frac{ek_z}{\omega} E_0 v_z \sin(\omega t - k_z z - \phi)$$

$$\frac{d}{dt} \phi = \frac{\Omega_e}{\gamma} - \frac{eE_0}{m_e \gamma v_{\perp}} \left(1 - \frac{k_z v_z}{\omega}\right) \sin(\omega t - k_z z - \phi) \quad (12-1)$$

رابطه (12-1) آهنگ تغییرات زاویه فاز سمتی الکترون ها می باشد. همچنین برای بدست آوردن تغییرات زمانی سرعت طولی الکترون ها طرفین روابط (10-1) و (9-1) را در  $e_z$  ضرب می کنیم و در رابطه (6-1) جایگذاری می کنیم:

$$-\frac{eE_0}{c^2} v_{\perp} v_z \cos(\omega t - k_z z - \phi) + \gamma m_e \frac{d}{dt} v_z =$$

$$-\frac{e}{c} \frac{ck_z}{\omega} E_0 v_{\perp} \cos(\omega t - k_z z - \phi)$$

$$\frac{d}{dt} v_z = \frac{-eE_0 v_{\perp}}{m_e \gamma} \left(\frac{k_z}{\omega} - \frac{v_z}{c^2}\right) \cos(\omega t - k_z z - \phi) \quad (13-1)$$

رابطه (13-1) آهنگ تغییرات سرعت طولی الکترون ها را نشان می دهد.

### ۳-۱ جوابهای مرتبه صفر و یک

ابتدا باید به محاسبه جوابهای مرتبه صفر پرداخت که از آنها در ادامه برای بدست آوردن جوابهای مرتبه یک استفاده می کنیم. ابتدا در مرتبه صفر فرض می کنیم که هیچگونه عامل اختلالی وجود ندارد پس دامنه میدان الکتریکی اختلالی صفر خواهد شد پس از معادلات (11-1) و (12-1) و (13-1) و (7-1) نتیجه خواهد شد:



$$\int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d}{dt} \gamma dt = 0 \quad \gamma = \gamma_0 \quad (14-1)$$

$$\int_{v_{\perp 0}}^{v_{\perp}} \frac{d}{dt} v_{\perp} dt = 0 \quad v_{\perp} = v_{\perp 0} \quad (15-1)$$

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d}{dt} \phi dt = \int_0^t \frac{\Omega_e}{\gamma_0} dt \quad \phi = \frac{\Omega_e}{\gamma_0} t + \phi_0 \quad (16-1)$$

$$\int_0^{v_z} \frac{d}{dt} v_z dt = 0 \quad v_z = z = 0 \quad (17-1)$$

معادلات (۱۴-۱) و (۱۵-۱) و (۱۶-۱) و (۱۷-۱) جوابهای مرتبه صفر مورد نظر ما می باشند. تمامی

مقادیری که با شاخصه "0" نشان داده شده اند بیانگر مقدار کمیات موردنظر در  $Z=0$  می باشند.

از روابط (۲۱-۱) و (۲۲-۱) که بصورت زیر بدست می آیند در ادامه برای ساده سازی معادلات استفاده

خواهیم کرد:

$$\omega t - k_z z - \phi = \omega t - k_z z - \frac{\Omega_e}{\gamma_0} t - \phi_0 = \quad (18-1)$$

$$\omega t - k_z v_{z0} t - \frac{\Omega_e}{\gamma_0} t - \phi_0 = \varepsilon t - \phi_0$$

$$\varepsilon = \omega - k_z v_{z0} - \frac{\Omega_e}{\gamma_0} \xrightarrow{v_{z0}=0}$$

$$\varepsilon = \omega - \frac{\Omega_e}{\gamma_0} \quad (19-1)$$

پارامتر  $\varepsilon$  فاکتور عدم تطبیق می باشد که در حقیقت مقیاسی برای اندازه گیری همزمانی بین حرکت

سیکلوترونی ذرات و چرخش میدان های موج ورودی ارائه می دهد.

اینک برای بدست آوردن کمیات  $\gamma$  (فاکتور نسبیتی) و  $v_{\perp}$  (سرعت عرضی) و  $v_z$  (سرعت طولی) تا مرتبه اول در  $E_0$  ابتدا با جایگذاری جوابهای مرتبه صفر یعنی روابط (۱۴-۱) تا (۱۷-۱) در روابط (۷-۱) و (۱۱-۱) و (۱۳-۱) و همچنین استفاده از خطی سازی و پارامترهایی که در صفحه قبل برای ساده سازی تعریف کردیم نتیجه خواهیم گرفت:

$$\frac{d}{dt} \gamma = \frac{-eE_0 v_{\perp 0}}{m_e c^2} \cos(\varepsilon t - \phi_0) \quad (20-1)$$

$$\frac{d}{dt} v_{\perp} = \frac{-eE_0}{m_e \gamma_0} \left(1 - \frac{v_{\perp 0}^2}{c^2}\right) \cos(\varepsilon t - \phi_0) \quad (21-1)$$

$$\frac{d}{dt} v_z = \frac{-eE_0 v_{\perp 0}}{m_e \gamma_0} \left(\frac{k_z}{\omega} - \frac{v_{z0}}{c^2}\right) \cos(\varepsilon t - \phi_0)$$

$$\frac{d}{dt} v_z = \frac{-eE_0 v_{\perp 0} k_z}{m_e \gamma_0 \omega} \cos(\varepsilon t - \phi_0) \quad (22-1)$$

حال به راحتی با انتگرال گیری از روابط بالا می توان خود کمیات را تا مرتبه اول بدست آورد:

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d}{dt} \gamma dt = \int_0^t \frac{-eE_0 v_{\perp 0}}{m_e c^2} \cos(\varepsilon t - \phi_0) dt$$

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{eE_0 v_{\perp 0}}{m_e c^2 \varepsilon} [\sin(\varepsilon t - \phi_0) + \sin \phi_0] \quad (23-1)$$

$$\int_{v_{\perp 0}}^{v_{\perp}} \frac{d}{dt} v_{\perp} dt = \int_0^t \frac{-eE_0}{m_e \gamma_0} \left(1 - \frac{v_{\perp 0}^2}{c^2}\right) \cos(\varepsilon t - \phi_0) dt$$

$$v_{\perp} = v_{\perp 0} - \frac{eE_0}{m_e \gamma_0 \varepsilon} \left(1 - \frac{v_{\perp 0}^2}{c^2}\right) [\sin(\varepsilon t - \phi_0) + \sin \phi_0] \quad (24-1)$$

$$\int_0^{v_z} \frac{d}{dt} v_z dt = \int_0^t \frac{-eE_0 v_{\perp 0} k_z}{m_e \gamma_0 \omega} \cos(\varepsilon t - \phi_0) dt$$

$$v_z = \frac{-eE_0 v_{\perp 0} k_z}{m_e \gamma_0 \omega \varepsilon} [\sin(\varepsilon t - \phi_0) + \sin \phi_0] \quad (25-1)$$

بدین ترتیب تحول زمانی پارامتر نسبیتی که نشان دهنده انرژی می باشد و همچنین سرعت طولی و عمودی تا مرتبه اول بدست آمد.

می توان با انتگرالگیری از رابطه (25-1) تحول زمانی مکان طولی ذرات را تا مرتبه اول محاسبه کرد:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-eE_0 v_{\perp 0} k_z}{m_e \gamma_0 \omega \varepsilon} [\sin(\varepsilon t - \phi_0) + \sin \phi_0]$$

$$\int_0^z dz = \int_0^t \frac{-eE_0 v_{\perp 0} k_z}{m_e \gamma_0 \omega \varepsilon} [\sin(\varepsilon t - \phi_0) + \sin \phi_0] dt$$

$$z = \frac{eE_0 v_{\perp 0} k_z}{m_e \gamma_0 \omega} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} [\cos(\varepsilon t - \phi_0) - \cos \phi_0] - \frac{t}{\varepsilon} \sin \phi_0 \right) \quad (26-1)$$

اما برای بدست آوردن آهنگ تغییرات فاز سمتی کار کمی دشوارتر است زیرا ابتدا باید رابطه (23-1) را در (12-1) جایگذاری کرد و سپس با تقریب مناسب به ساده سازی پرداخت:

$$\frac{d}{dt} \phi = \frac{\Omega_e}{\gamma_0 \left( 1 - \frac{eE_0 v_{\perp 0}}{m_e \gamma_0 c^2 \varepsilon} [\sin(\varepsilon t - \phi_0) + \sin \phi_0] \right)} - \frac{eE_0}{m_e \gamma_0 v_{\perp 0}} \sin(\varepsilon t - \phi_0)$$

$$\frac{d}{dt} \phi = \frac{\Omega_e}{\gamma_0 - \frac{eE_0 v_{\perp 0}}{m_e c^2 \varepsilon} [\sin(\varepsilon t - \phi_0) + \sin \phi_0]} - \frac{eE_0}{m_e \gamma_0 v_{\perp 0}} \sin(\varepsilon t - \phi_0)$$

$$\frac{d}{dt} \phi = \frac{\Omega_e}{\gamma_0} \left( 1 - \frac{eE_0 v_{\perp 0}}{m_e \gamma_0 c^2 \varepsilon} [\sin(\varepsilon t - \phi_0) + \sin \phi_0] \right)^{-1} - \frac{eE_0}{m_e \gamma_0 v_{\perp 0}} \sin(\varepsilon t - \phi_0)$$

$$\frac{d}{dt} \phi = \frac{\Omega_e}{\gamma_0} \left( 1 + \frac{eE_0 v_{\perp 0}}{m_e \gamma_0 c^2 \varepsilon} [\sin(\varepsilon t - \phi_0) + \sin \phi_0] \right) - \frac{eE_0}{m_e \gamma_0 v_{\perp 0}} \sin(\varepsilon t - \phi_0) \quad (27-1)$$

سپس با انتگرال گیری از رابطه (۲۷-۱) تحول زمانی فاز سمتی را تا مرتبه اول بدست می آوریم:

$$\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi = \int_0^t \left( \frac{\Omega_e}{\gamma_0} \left( 1 + \frac{eE_0 v_{\perp 0}}{m_e \gamma_0 c^2 \varepsilon} [\sin(\varepsilon t - \phi_0) + \sin \phi_0] \right) - \frac{eE_0}{m_e \gamma_0 v_{\perp 0}} \sin(\varepsilon t - \phi_0) \right) dt$$

$$\phi = \frac{\Omega_e}{\gamma_0} t + \phi_0 - \frac{eE_0 v_{\perp 0}}{m_e \gamma_0^2 c^2} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} [\cos(\varepsilon t - \phi_0) - \cos \phi_0] - \frac{t}{\varepsilon} \sin \phi_0 \right) +$$

$$\frac{eE_0}{m_e \gamma_0 v_{\perp 0} \varepsilon} [\cos(\varepsilon t - \phi_0) - \cos \phi_0] \quad (28-1)$$

رابطه (۲۸-۱) بیانگر زاویه فاز سمتی الکترون ها می باشد.

روابط (۲۶-۱) و (۲۸-۱) اطلاعات بسیار مفیدی درباره بانچینگ های سمتی و محوری در اختیار ما قرار

می دهد که بصورت کامل در فصل بعد توضیح داده خواهد شد.

# فصل دوم

تئوری تک ذره

بهره دریافتی موج

## ۱-۲ بانچینگ های سمتی و محوری:

با توجه به رابطه (۱-۲۸) الکترون هایی که اختلاف فاز  $180^\circ$  درجه با هم دارند یعنی آنهایی که ابتدا در زاویه بین  $270^\circ$  تا  $90^\circ$  درجه قرار دارند به جلو رانده شده و در فاز ناشی از کاهش جرم قرار می گیرند و آنهایی که در زاویه بین  $90^\circ$  تا  $270^\circ$  درجه قرار دارند به عقب رانده شده و در فاز ناشی از افزایش جرم قرار می گیرند در نتیجه الکترون ها در یک نقطه خاص تجمع یا اصطلاحا بانچ می شوند و چون بانچ مورد نظر در راستای سمتی است به آنها بانچینگ سمتی گویند و همچنین این قضیه را می توان با توجه به رابطه زیر که از فصل اول بدست آمد نیز توصیف کرد:

$$\Omega_{eff} = \frac{d}{dt} \phi_{eff} = \frac{d}{dt} (k_z z + \phi) \cong k_z v_z + \frac{\Omega_e}{\gamma}$$

که الکترونهايي که در زاویه بین  $270^\circ$  تا  $90^\circ$  درجه قرار دارند انرژی جنبشی آنها کاهش پیدا کرده که این امر باعث کاهش پارامتر نسبی  $\gamma$  شده و در نتیجه سرعت زاویه ای الکترون ها افزایش پیدا کرده و به همین ترتیب برای الکترون هایی که در زاویه بین  $90^\circ$  تا  $270^\circ$  درجه قرار دارند سرعت زاویه ای الکترون ها کاهش پیدا کرده و در نتیجه الکترونها در نقطه خاصی بانچینگ سمتی پیدا می کنند.

اما با توجه به رابطه (۱-۲۹) الکترون هایی که اختلاف فاز  $180^\circ$  درجه با هم دارند یعنی آنهایی که ابتدا در زاویه بین  $270^\circ$  تا  $90^\circ$  درجه قرار دارند در یک جهت شتاب می گیرند و الکترون هایی که در زاویه بین  $90^\circ$  تا  $270^\circ$  درجه قرار دارند در جهت مخالف شتاب می گیرند و در نتیجه در راستای طولی بر روی محور تجمع های الکترونی یا اصطلاحا بانچینگ های محوری را خواهیم داشت [3].

## ۲-۲ مکانیزم جابجایی انرژی و محاسبه بهره دریافتی موج:

تمامی اختلالات مورد نظر که در فصل پیش محاسبه شد بر روی جابجایی انرژی از طریق زاویه فاز سیکلوترونی موثر تاثیر خود را خواهد گذاشت که بصورت زیر با استفاده از روابط (۱-۲۶) و (۱-۲۸) بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}\phi_{eff} &= \phi + k_z z \\ \phi_{eff} &= \frac{\Omega_e}{\gamma_0} t + \phi_0 - \frac{eE_0 v_{\perp 0}}{m_e \gamma_0^2 c^2} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} [\cos(\varepsilon t - \phi_0) - \cos \phi_0] - \frac{t}{\varepsilon} \sin \phi_0 \right) + \\ &\quad \frac{eE_0}{m_e \gamma_0 v_{\perp 0} \varepsilon} [\cos(\varepsilon t - \phi_0) - \cos \phi_0] + \\ &\quad \frac{eE_0 v_{\perp 0} k_z^2}{m_e \gamma_0 \omega} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} [\cos(\varepsilon t - \phi_0) - \cos \phi_0] - \frac{t}{\varepsilon} \sin \phi_0 \right) \\ \phi_{eff} &= \frac{\Omega_e}{\gamma_0} t + \phi_0 - \frac{eE_0 v_{\perp 0}}{m_e \gamma_0 \omega} \left( \frac{\Omega_e \omega}{\gamma_0 c^2} - k_z^2 \right) \left( \frac{1}{\varepsilon^2} [\cos(\varepsilon t - \phi_0) - \cos \phi_0] - \frac{t}{\varepsilon} \sin \phi_0 \right) + \\ &\quad \frac{eE_0}{m_e \gamma_0 v_{\perp 0} \varepsilon} [\cos(\varepsilon t - \phi_0) - \cos \phi_0] \tag{۱-۲}\end{aligned}$$

حال با استفاده از بسط تیلور تابع کسینوس که بصورت زیر تعریف می شود و قرار دادن آن در رابطه (۱-۲) و همچنین استفاده از تقریب  $|\varepsilon|t \gg 1$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}f(x + \Delta) &= f(\Delta) + x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \phi_{eff} &= \frac{\Omega_e}{\gamma_0} t + \phi_0 - \frac{eE_0 v_{\perp 0}}{m_e \gamma_0 \omega} \left( \frac{\Omega_e \omega}{\gamma_0 c^2} - k_z^2 \right) \left( \frac{1}{\varepsilon^2} [\cos(-\phi_0) - \varepsilon t \sin(-\phi_0)] - \right. \\ &\quad \left. \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} \cos(-\phi_0) - \cos(\phi_0) \right] - \frac{t}{\varepsilon} \sin \phi_0 + \frac{eE_0}{m_e \gamma_0 v_{\perp 0} \varepsilon} [\cos(-\phi_0) - \\ &\quad \varepsilon t \sin(-\phi_0) - \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} \cos(-\phi_0) - \cos \phi_0]\end{aligned}$$

$$\phi_{eff} \cong \frac{\Omega_e}{\gamma_0} t + \phi_0 + \frac{eE_0 v_{\perp 0} t^2}{m_e \gamma_0 \omega} \left( \frac{\Omega_e \omega}{\gamma_0 c^2} - k_z^2 \right) \cos \phi_0 + \frac{eE_0 t}{m_e \gamma_0 v_{\perp 0}} \sin \phi_0 \quad (2-2)$$

که بدین ترتیب زاویه فاز سیکلوترونی موثر و به تبع آن زاویه فاز سمتی و مکان طولی بصورت ساده تری تبدیل شده است.

همانطور که در پیش اشاره کردیم تغییرات انرژی شامل فاز اختلالی می باشد که هم بانچینگ سمتی و هم بانچینگ محوری را شامل می شود پس می توان تغییرات انرژی را با جای گذاری روابط (1-27) و (1-28) در رابطه (1-7) بصورت زیر محاسبه کرد:

$$\frac{d}{dt} \gamma = \frac{-eE_0}{m_e c^2} \left( v_{\perp 0} - \frac{eE_0}{m_e \gamma_0 \varepsilon} \left( 1 - \frac{v_{\perp 0}^2}{c^2} \right) [\sin(\varepsilon t - \phi_0) + \sin \phi_0] \right) \cos(\omega t - k_z z - \phi) \quad (3-2)$$

فاز اختلالی را می توان با تقریبهای زیر ساده کرد:

$$\cos(\omega t - k_z z - \phi) = \cos(\omega t - \phi_{eff}) =$$

$$\cos(\varepsilon t - \phi_0) \cos(k_z z + \phi_1) + \sin(\varepsilon t - \phi_0) \sin(k_z z + \phi_1)$$

$$k_z z + \phi_1 \ll 1 \longrightarrow \sin(k_z z + \phi_1) = k_z z + \phi_1$$

$$\cos(k_z z + \phi_1) \cong 1$$

$$\cos(\omega t - k_z z - \phi) = \cos(\varepsilon t - \phi_0) + \sin(\varepsilon t - \phi_0) k_z z + \phi_1$$

با ادامه از رابطه (2-3) و حذف جملات شامل توان های سوم و بالاتر دامنه میدان الکتریکی اختلالی نتیجه

می گیریم:

$$\frac{d}{dt} \gamma = \frac{e^2 E_0^2 v_{\perp 0}^2}{m_e^2 \gamma_0 c^2 \omega} \left( \frac{\Omega_e \omega}{\gamma_0 c^2} - k_z^2 \right) \left[ \frac{1}{2\varepsilon^2} \sin 2(\varepsilon t - \phi_0) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{\varepsilon^2} \sin(\varepsilon t - \phi_0) \cos \phi_0 - \frac{t}{\varepsilon} \sin(\varepsilon t - \phi_0) \sin \phi_0 \right] -$$



$$\frac{e^2 E_0^2}{m_e^2 \gamma_0 c^2 \varepsilon} \left[ \frac{1}{2} \sin 2(\varepsilon t - \phi_0) - \sin(\varepsilon t - \phi_0) \cos \phi_0 \right] -$$

$$\frac{e E_0 v_{\perp 0}}{m_e c^2} \cos(\varepsilon t - \phi_0) + \frac{e^2 E_0^2}{m_e^2 \gamma_0 c^2 \varepsilon} \left( 1 - \frac{v_{\perp 0}^2}{c^2} \right) \left[ \frac{1}{2} \sin 2(\varepsilon t - \phi_0) - \right.$$

$$\left. \cos(\varepsilon t - \phi_0) \sin \phi_0 \right] \quad (4-2)$$

رابطه (4-2) بیانگر آهنگ تبادل انرژی یک تک الکترون می باشد که این الکترون می تواند بر اساس زاویه فاز اولیه خود انرژی بگیرد و از دست بدهد که این زاویه فاز اولیه می تواند بین صفر و  $2\pi$  تغییر کند پس می توان با توجه به قرار گرفتن الکترون در زوایای فاز اولیه مختلف میانگین آهنگ تبادل انرژی الکترون را با استفاده از رابطه (4-2) محاسبه کرد:

$$\left\langle \frac{d}{dt} \gamma \right\rangle_{\phi_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{d}{dt} \gamma \right) d\phi_0$$

$$\left\langle \frac{d}{dt} \gamma \right\rangle_{\phi_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^2 E_0^2 v_{\perp 0}^2}{m_e^2 \gamma_0 c^2 \omega} \left( \frac{\Omega_e \omega}{\gamma_0 c^2} - k_z^2 \right) \left[ \frac{1}{2\varepsilon^2} \sin 2(\varepsilon t - \phi_0) - \right. \right.$$

$$\left. \frac{1}{\varepsilon^2} \sin(\varepsilon t - \phi_0) \cos \phi_0 - \frac{t}{\varepsilon} \sin(\varepsilon t - \phi_0) \sin \phi_0 \right] -$$

$$\frac{e^2 E_0^2}{m_e^2 \gamma_0 c^2 \varepsilon} \left[ \frac{1}{2} \sin 2(\varepsilon t - \phi_0) - \sin(\varepsilon t - \phi_0) \cos \phi_0 \right] -$$

$$\frac{e E_0 v_{\perp 0}}{m_e c^2} \cos(\varepsilon t - \phi_0) + \frac{e^2 E_0^2}{m_e^2 \gamma_0 c^2 \varepsilon} \left( 1 - \frac{v_{\perp 0}^2}{c^2} \right) \left[ \frac{1}{2} \sin 2(\varepsilon t - \phi_0) - \right.$$

$$\left. \cos(\varepsilon t - \phi_0) \sin \phi_0 \right] d\phi_0$$

در حل انتگرال بالا می توان از روابط زیر در ادامه بهره گرفت:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi_0 \sin \phi_0 \cos \varepsilon t d\phi_0 = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi_0 \sin \varepsilon t d\phi_0 = \pi \sin \varepsilon t$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi_0 \cos \varepsilon t d\phi_0 = \pi \cos \varepsilon t$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi_0 \cos \phi_0 \sin \varepsilon t d\phi_0 = 0$$

حال محاسبات را به منظور بدست آوردن میانگین تغییرات زمانی فاکتور نسبیتی به ازای زوایای فاز اولیه

مختلف ادامه می دهیم که بدین منظور به محاسبه تک تک انتگرال ها می پردازیم:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} \gamma \right\rangle_{\phi_0} &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^2 E_0^2 v_{\perp 0}^2}{m_e^2 \gamma_0 c^2 \omega} \left( \frac{\Omega_e \omega}{\gamma_0 c^2} - k_z^2 \right) \left[ \frac{1}{4\varepsilon^2} \cos 2(\varepsilon t - \phi_0) + \right. \\ &\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{2\pi} \cos \phi_0 \sin \phi_0 \cos \varepsilon t d\phi_0 - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi_0 \sin \varepsilon t d\phi_0 + \\ &\left. \frac{t}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi_0 \cos \varepsilon t d\phi_0 - \frac{t}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} \sin \phi_0 \cos \phi_0 \sin \varepsilon t d\phi_0 \right] - \\ &\frac{e^2 E_0^2}{2\pi m_e^2 \gamma_0 c^2 \varepsilon} \left[ \frac{1}{4} \cos 2(\varepsilon t - \phi_0) + \int_0^{2\pi} \sin \phi_0 \cos \phi_0 \cos \varepsilon t d\phi_0 - \right. \\ &\left. \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi_0 \sin \varepsilon t d\phi_0 \right] + \frac{e E_0 v_{\perp 0}}{2\pi m_e c^2} [\sin(\varepsilon t - \phi_0)] + \\ &\frac{e^2 E_0^2}{2\pi m_e^2 \gamma_0 c^2 \varepsilon} \left( 1 - \frac{v_{\perp 0}^2}{c^2} \right) \left[ \frac{1}{4} \cos 2(\varepsilon t - \phi_0) + \int_0^{2\pi} \sin \phi_0 \cos \phi_0 \cos \varepsilon t d\phi_0 + \right. \\ &\left. \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi_0 \cos \varepsilon t \right] \end{aligned}$$

سرانجام میانگین تغییرات زمانی انرژی الکترون بصورت رابطه (۵-۲) بدست می آید:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} \gamma \right\rangle_{\phi_0} &= -\frac{e^2 E_0^2 v_{\perp 0}^2}{2m_e^2 \gamma_0 c^2 \omega} \left( \frac{\Omega_e \omega}{\gamma_0 c^2} - k_z^2 \right) \left( \frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon^2} - \frac{t \cos \varepsilon t}{\varepsilon} \right) + \\ &\frac{e^2 E_0^2}{m_e^2 \gamma_0 c^2} \left( 1 - \frac{v_{\perp 0}^2}{2c^2} \right) \frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (۵-۲)$$

با داشتن میانگین تغییرات زمانی انرژی الکترون می توان به محاسبه بهره دریافتی موج یا همان بازده مورد نظر پرداخت.

بازده یا بهره دریافتی موج عبارت است از نسبت تغییر انرژی ذرات به انرژی اولیه باریکه با علامت مخالف که بصورت زیر داده می شود:

$$\eta = \frac{-1}{\gamma_0 - 1} \int_0^t \left\langle \frac{d}{dt} \gamma \right\rangle_{\phi_0} dt$$

با استفاده از رابطه (۵-۲) به محاسبه بهره دریافتی موج یعنی رابطه بالا می پردازیم

$$\eta = \frac{-1}{\gamma_0 - 1} \int_0^t \left( -\frac{e^2 E_0^2 v_{\perp 0}^2}{2m_e^2 \gamma_0 c^2 \omega} \left( \frac{\Omega_e \omega}{\gamma_0 c^2} - k_z^2 \right) \left( \frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon^2} - \frac{t \cos \varepsilon t}{\varepsilon} \right) + \frac{e^2 E_0^2}{m_e^2 \gamma_0 c^2} \left( 1 - \frac{v_{\perp 0}^2}{2c^2} \right) \frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon} \right) dt$$

پس از محاسبه انتگرال ها به نتیجه زیر می رسیم:

$$\eta = \frac{-1}{\gamma_0 - 1} \left[ -\frac{e^2 E_0^2 v_{\perp 0}^2}{2m_e^2 \gamma_0 c^2 \omega} \left( \frac{\Omega_e \omega}{\gamma_0 c^2} - k_z^2 \right) \left( \frac{1}{\varepsilon^3} (-\cos \varepsilon t + 1) - \frac{t \sin \varepsilon t}{\varepsilon^2} + \frac{2 \sin^2 \frac{\varepsilon t}{2}}{\varepsilon^3} \right) + \frac{e^2 E_0^2}{m_e^2 \gamma_0 c^2} \left( 1 - \frac{v_{\perp 0}^2}{2c^2} \right) \left( \frac{1}{\varepsilon^2} (-\cos \varepsilon t + 1) \right) \right]$$

$$\eta = \frac{e^2 E_0^2}{(\gamma_0 - 1) m_e^2 \gamma_0 c^2} \left[ \frac{v_{\perp 0}^2}{\omega} \left( \frac{\Omega_e \omega}{\gamma_0 c^2} - k_z^2 \right) \left( \frac{2 \sin^2 \frac{\varepsilon t}{2}}{\varepsilon^3} - \frac{t \sin \varepsilon t}{2\varepsilon^2} \right) - 2 \left( 1 - \frac{v_{\perp 0}^2}{2c^2} \right) \left( \frac{\sin^2 \frac{\varepsilon t}{2}}{\varepsilon^2} \right) \right] = \quad (۶-۲)$$

با استفاده از شرط رزونانس که تقریبی مناسب برای ساده کردن رابطه (۶-۲) می باشد به نتیجه دلخواه

خود که همان بهره دریافتی موج می باشد می رسیم:

$$\eta_{lin} \cong \frac{e^2 E_0^2}{(\gamma_0 - 1) m_e^2 \gamma_0 c^2} \left[ \frac{v_{\perp 0}^2}{\omega} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \left( \frac{2 \sin^2 \frac{\varepsilon t}{2}}{\varepsilon^3} - \frac{t \sin \varepsilon t}{2 \varepsilon^2} \right) - \right. \\ \left. 2 \left( 1 - \frac{v_{\perp 0}^2}{2c^2} \right) \left( \frac{\sin^2 \frac{\varepsilon t}{2}}{\varepsilon^2} \right) \right] \quad (7-2)$$

حال با کمی ساده سازی در رابطه (۷-۲) به نتیجه نهایی دست می یابیم [3]:

$$\eta_{lin} \cong \frac{e^2 E_0^2}{(\gamma_0 - 1) m_e^2 \gamma_0 c^2} \left[ \frac{v_{\perp 0}^2}{24\omega} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \varepsilon t^4 - \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{v_{\perp 0}^2}{2c^2} \right) t^2 \right] \quad (8-2)$$

با استفاده از رابطه (۸-۲) به این نتیجه مهم می رسیم که اگر مقدار  $\varepsilon(\omega^2 - c^2 k^2) > 0$  مثبت باشد در

اینصورت بهره دریافتی موج مثبت بوده و موج انرژی جذب می کند.

همچنین می توان دریافت که همواره جابجایی انرژی هم بین ذره و موج و همچنین بین موج و ذره وجود

خواهد داشت اما مقدار انرژی که موج جذب می کند بیشتر است از میزان انرژی که الکترون ها جذب

می کنند در نتیجه میزان انرژی دریافتی موج مثبت خواهد بود.

## ۳-۲ بررسی عددی مسئله:

مجددا در این بخش با در نظر گرفتن فاکتور عدم تطبیق  $\varepsilon$  که در قبل بدست آوردیم به بررسی مسئله می پردازیم:

$$\varepsilon = \omega - k_z v_{z0} - \frac{\Omega_e}{\gamma_0}$$

در رابطه فوق  $\Omega_e = eB_0/m_e c$  بسامد سیکلوترونی و  $v_{z0}$  سرعت اولیه محوری الکترون ها می باشد. در شرایط تشدید فاکتور عدم تطبیق به سمت صفر میل کرده ( $\varepsilon \approx 0$ ) و در این شرایط بیشینه جابجایی انرژی بین موج و ذرات صورت می گیرد. از جنبه دیگر برای باریکه ای با انرژی و سرعت اولیه مشخص فاکتور عدم تطبیق مقیاسی از میدان مغناطیسی اعمالی را از طریق  $\Omega_e$  برای ما مشخص می کند. جهت بررسی این تبادل انرژی از دیدگاه نظریه ذره ای معادلات حرکت الکترون ها را در میدان موج الکترومغناطیس ورودی بصورتی که در قبل بدست آوردیم بازنویسی می کنیم:

$$\xrightarrow{(7-1)} \frac{d}{dt} \gamma = -\frac{eE_0 v_{\perp}}{m_e c^2} \cos(\omega t - k_z z - \phi)$$

$$\xrightarrow{(12-1)} \frac{d}{dt} v_{\perp} = \frac{-eE_0}{m_e \gamma} \left(1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2} - \frac{k_z v_z}{\omega}\right) \cos(\omega t - k_z z - \phi)$$

$$\xrightarrow{(14-1)} \frac{d}{dt} \phi = \frac{\Omega_e}{\gamma} - \frac{eE_0}{m_e \gamma v_{\perp}} \left(1 - \frac{k_z v_z}{\omega}\right) \sin(\omega t - k_z z - \phi)$$

$$\xrightarrow{(16-1)} \frac{d}{dt} v_z = \frac{-eE_0 v_{\perp}}{m_e \gamma} \left(\frac{k_z}{\omega} - \frac{v_z}{c^2}\right) \cos(\omega t - k_z z - \phi)$$

$$\frac{d}{dt} z = v_z$$

این روابط به ترتیب نشان دهنده تغییرات انرژی  $\gamma$  و سرعت عرضی  $v_{\perp}$  و فاز حرکت  $\phi$  و سرعت طولی و مکان طولی ذرات نسبت به زمان هستند. آنچه که در دسته معادلات (۶) تا (۱۰) مشهود است وابستگی این روابط بصورت خود سازگار به یکدیگر است بنابراین برای بررسی آن نیاز است که این روابط بصورت همزمان حل شوند. هدف اصلی در این بخش تعیین بازده مکانیزم می باشد که طبق رابطه زیر بیان می شود:

$$\eta = \frac{-1}{\gamma_0 - 1} \int_0^t \left\langle \frac{d}{dt} \gamma \right\rangle_{\phi_0} dt \quad (9-2)$$

حال تاثیر میدان مغناطیسی و نیز انرژی باریکه را بر روی بازده مکانیزم برای امواج تند (امواجی که سرعت فازشان بیشتر از سرعت نور است) مطالعه می کنیم. برای تحلیل بازده باید معادلات خودسازگار بالا را بصورت همزمان حل کنیم بدین منظور از روش رونگ-کوتا مرتبه چهارم استفاده شده است (پیوست ۱). شرایط اولیه مسئله بدین صورت است که الکترون نمونه ابتدا در محور طولی  $z=0$  و در فاز اولیه  $\phi_0=0$  قرار دارد و فرض می کنیم که ذره در ابتدا حرکت محوری نداشته ( $v_{z0}=0$ ) و تنها سرعت عرضی تحت تاثیر میدان مغناطیسی دارا می باشد ( $v_{\perp 0} \neq 0$ ) و فاکتور نسبیتی باریکه بصورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp 0}^2}{c^2}}} \quad (10-2)$$

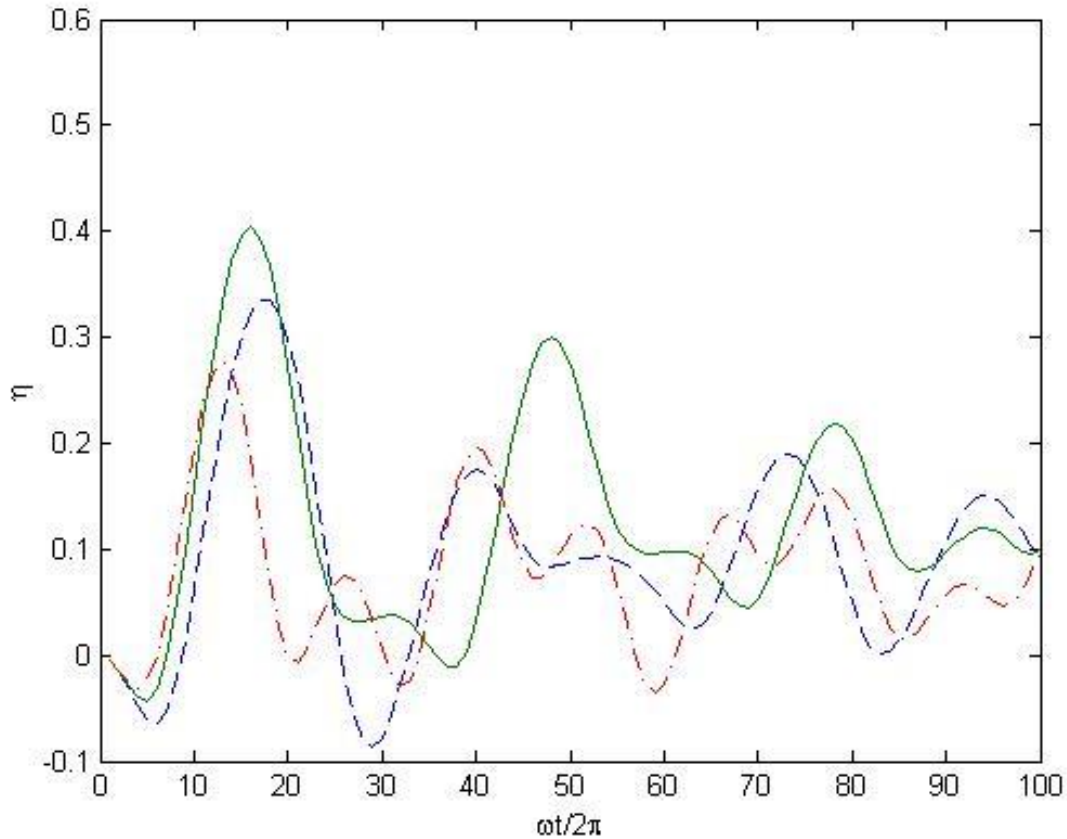
مسئله برای دو دسته سیگنال بررسی شده است که اولی سیگنال های قوی با دامنه بهنجار شده  $E_0=0.005$  و سیگنال های ضعیف با دامنه بهنجار شده  $E_0=0.00005$  می باشد [3].

### ۱-۲-۳ اثر میدان مغناطیسی:

در شکل (۱-۲) بازده مکانیزم برای یک سیگنال بزرگ با دامنه  $E_0=0.005$  و باریکه الکترونی با انرژی 50keV در میدان های مختلف رسم شده است حال اگر به فاکتور عدم تطبیق توجه کنیم بصورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\varepsilon}{\omega} = 1 - \frac{\Omega_e}{\omega\gamma_0} \quad (11-2)$$

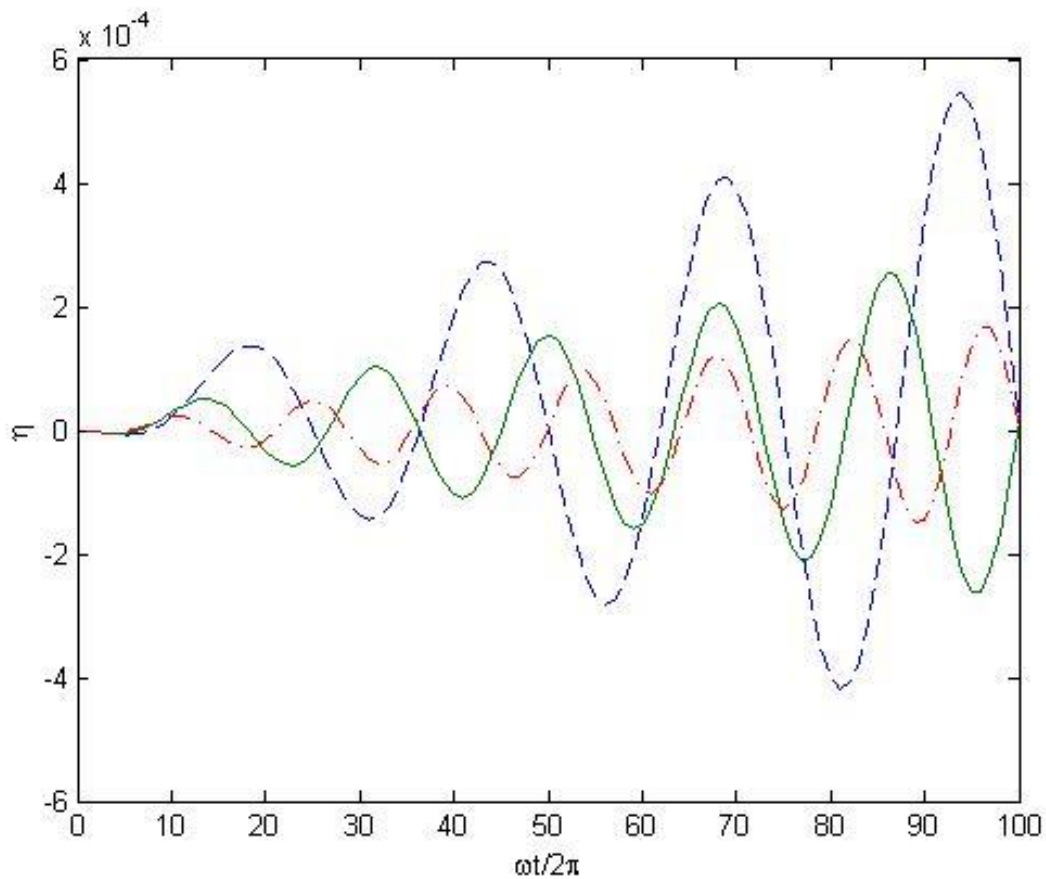
که نشان دهنده آن است که به ازای میدان مغناطیسی مشخص فاکتور عدم تطبیق خاصی خواهیم داشت. در شکل (۱-۲) مشهود است که با افزایش میدان مغناطیسی یا کاهش نسبت  $\omega/\varepsilon$  بازده ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد. این امر نشان می دهد که برای سیگنال های قوی مقدار بهینه ای برای میدان مغناطیسی وجود دارد که در آن بازده مکانیزم برای باریکه ای با انرژی مشخص بیشینه می شود. در مورد باریکه 50keV می بینیم که در مقدار ( $\omega/\varepsilon=0.06$ ) بازده تقریباً برابر 2.8 است (حالت خط تیره-نقطه) هنگامی که ( $\omega/\varepsilon=0.044$ ) بازده 0.4 شده (حالت خط-توپر) ولی برای ( $\omega/\varepsilon=0.03$ ) بازده کاهش یافته و به 3.2 می رسد (حالت خط تیره).



شکل (۱-۲): نمایانگر تغییرات بازده دریافتی موج با گذشت زمان که حالت خط تیره- نقطه (dash-dot) برای مقدار  $\varepsilon/\omega=0.06$  و حالت توپر (solid) برای مقدار  $\varepsilon/\omega=0.044$  و حالت خط تیره (dash) برای مقدار  $\varepsilon/\omega=0.03$  در انرژی باریکه 50keV برای سیگنال های قوی می باشد.

در مورد سیگنال های ضعیف با دامنه  $E_0=0.00005$  وضع به گونه متفاوتی است به طوری که با افزایش میدان مغناطیسی بازده مکانیزم به طور منظم و پیوسته افزایش می یابد. این موضوع در شکل (۲-۲) به ترتیب برای مقادیر  $(\omega/\varepsilon=0.07)$  و  $(\omega/\varepsilon=0.055)$  و  $(\omega/\varepsilon=0.04)$  نشان داده شده است.

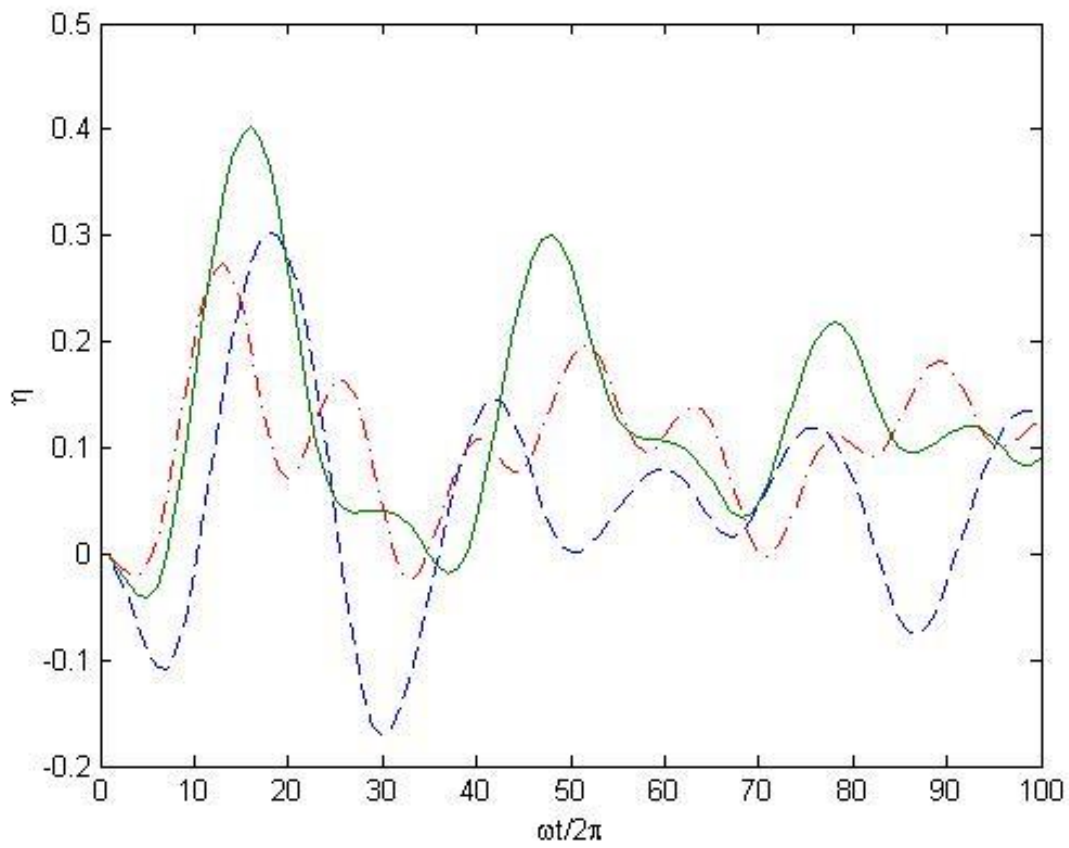




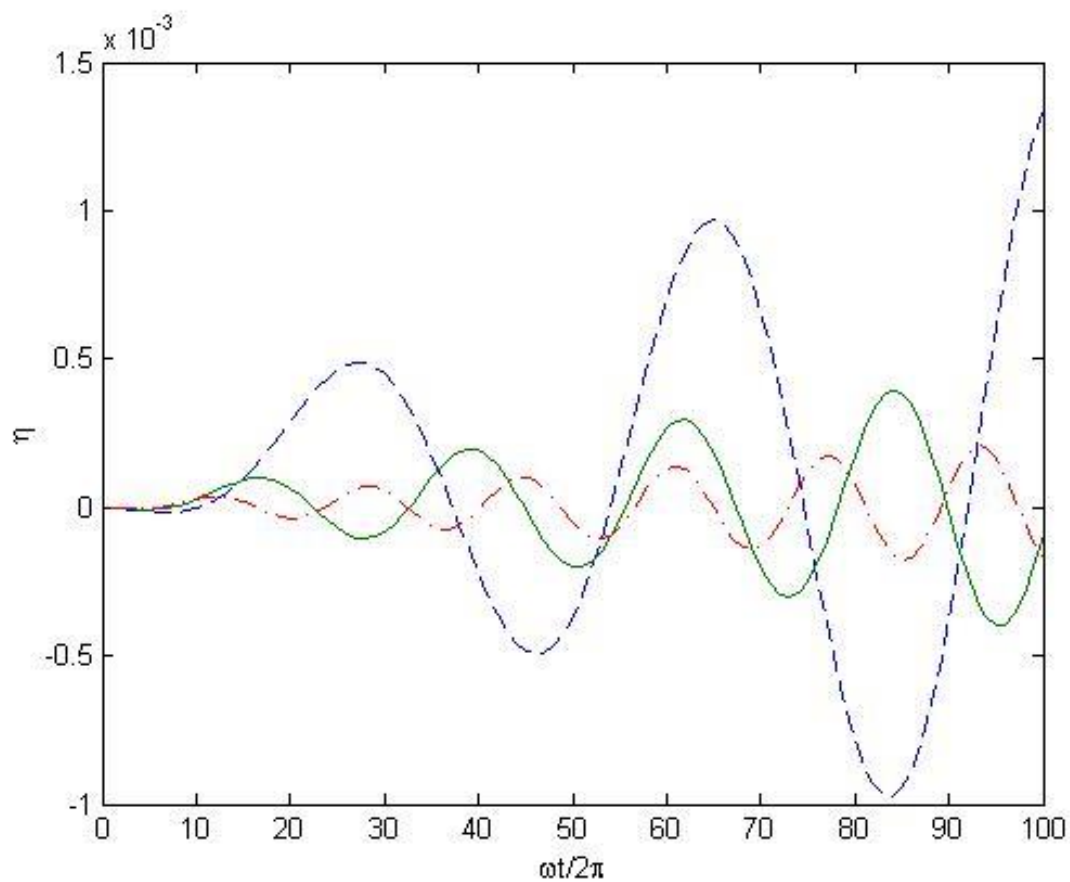
شکل (۲-۲): نمایانگر تغییرات بازده دریافتی موج با گذشت زمان که حالت خط تیره (dash) برای مقدار  $\omega/\varepsilon=0.04$  و حالت توپر (solid) برای مقدار  $\omega/\varepsilon=0.055$  و حالت خط تیره-نقطه (dash-dot) برای مقدار  $\omega/\varepsilon=0.07$  در انرژی باریکه 50keV برای سیگنال های ضعیف می باشد.

### ۳-۲-۲ اثر انرژی باریکه الکترونی:

برای بررسی اثر تغییرات انرژی باریکه الکترونی، یک میدان مغناطیسی مشخص را با مقدار بهنجار  $(\Omega_e/\omega=1.05)$  در نظریه گیریم (شکل های (۳-۲) و (۴-۲)).



شکل (۲-۳): نمایانگر تغییرات بازده دریافتی موج با گذشت زمان که حالت خط تیره (dash) برای مقدار انرژی 40keV و حالت توپر (solid) برای مقدار 50keV و حالت خط تیره-نقطه (dash-dot) برای مقدار 60keV در میدان مغناطیسی بهنجار ( $\Omega_e/\omega=1.05$ ) برای سیگنال های قوی می باشد.



شکل (۲-۴): نمایانگر تغییرات بازده دریافتی موج با گذشت زمان که حالت خط تیره (dash) برای مقدار انرژی 40keV و حالت توپر (solid) برای مقدار 50keV و حالت خط تیره-نقطه (dash-dot) برای مقدار 60keV در میدان مغناطیسی بهنجار ( $\Omega_e / \omega = 1.05$ ) برای سیگنال های ضعیف می باشد.

مطابق شکل (۲-۳) برای سیگنال قوی با دامنه  $E_0=0.005$  باریکه هایی با انرژی های 40 و 50 و 60 کیلو الکترون ولت در نظر گرفته شده است. آنچه که واضح است آن است که با افزایش انرژی باریکه از 40keV (حالت خط تیره) بازده افزایش یافته در 50keV به بیشینه خود می رسد (حالت توپر) سپس با افزایش انرژی باریکه به 60keV بازده کاهش می یابد (حالت خط تیره-نقطه). این موضوع تاکید می کند که برای باریکه ای با انرژی معین میدان مغناطیسی می توان یافت که در آن بازده بیشینه مقدار خود را خواهد داشت. در سیگنال ضعیف با دامنه  $E_0=0.00005$  آنچه که در شکل (۲-۴) مشاهده می شود این است که با افزایش انرژی باریکه از 40 تا 60 کیلو الکترون ولت بازده مکانیزم به طور پیوسته کاهش می یابد.

توجه به این نکته بسیار مهم است که بدانیم مکانیزم الکترون - سیکلوترون - میزر تنها زمانی اتفاق می افتد که مسئله بصورت نسبیتی بررسی شود و انجام تمامی بانچینگ های (تجمع الکترونی) محوری و سمتی تنها در صورت نسبیتی بودن مسئله معنا پیدا خواهند کرد و همچنین در مورد نتایجی که در قسمت فوق بدست آوردیم باید خاطر نشان کرد که اگر سیستم بصورت غیر نسبیتی بررسی شود یعنی فاکتور نسبیتی  $\gamma$  حذف شود در نتیجه تغییرات زمانی فاکتور نسبیتی وجود نخواهد داشت و در نهایت بهره دریافتی موج ( $\eta$ ) صفر خواهد بود. بنابراین نتیجه می گیریم که این مکانیزم تنها بصورت نسبیتی قابل بررسی است.

# فصل سوم

## نظریه جنبشی

بررسی رابطه پاشندگی برای

یک تابع توزیع خاص

### ۳-۱ معادلات ماکسول - ولاسوف و برسر، ثنال اختلالی:

ابتدا یک بیم الکترونی نسبیتی را در نظر می گیریم - دارای یک چگالی یکنواخت است و در راستای یک میدان مغناطیسی خارجی که در راستای محور Z می باشد منتشر می شود و همچنین میدان مغناطیسی خارجی را بزرگ در نظر گرفته که در اینصورت از اثر خود میدان ها صرف نظر می کنیم سپس یک موج الکترومغناطیسی را که دارای یک قطبش دایروی راست گرد می باشد را وارد سیستم می کنیم که میدان های الکتریکی و مغناطیسی این موج اختلالی به صورت زیر داده می شوند:

$$E_1 = E_0(e_x + ie_y)e^{-i\omega t + ik_z z} \quad (1-3)$$

$$B_1 = \frac{k_z c}{\omega} e_z \times E_1 \quad (2-3)$$

فرض می کنیم که تمامی کمیات اختلالی بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\delta\psi(x,t) = \psi(x) \exp(i(kz - \omega t))$$

در رابطه بالا  $\omega$  یک عدد مختلط است که اگر  $\text{Im}\omega > 0$  باشد موج تقویت و اگر  $\text{Im}\omega < 0$  باشد موج دمپ می شود. حال از معادلات ماکسول استفاده کرده و با ترکیب آنها خواهیم داشت:

$$\nabla \times E_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_1}{\partial t}$$

$$\nabla \times B_1 = \mu j_1 - \mu \varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times E_1 = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} j_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2}$$

$$(k_z \cdot k_z) E_1 = \frac{4\pi}{c^2} i\omega j_1 + \frac{1}{c^2} \omega^2 E_1$$

در محاسبات بالا از روابط زیر استفاده کرده ایم:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$$

$$\vec{\nabla} = ik_z \hat{e}_z$$

در روابط بالا از چگالی جریان اختلالی می باشد که بصورت زیر تعریف می شود. با استفاده از روابط بالا و نوشتن آنها برای مولفه های مختلف x و y به محاسبات ادامه می دهیم:

$$j_1 = -e \int f_1 v d^3 p \quad (3-3)$$

$$(\omega^2 - c^2 k_z^2) E_x = 4\pi i \omega e \int f_1 v_x d^3 p \quad (4-3)$$

$$(\omega^2 - c^2 k_z^2) E_y = 4\pi i \omega e \int f_1 v_y d^3 p \quad (5-3)$$

طرفین رابطه (5-3) را در (-i) ضرب کرده و با رابطه (4-3) جمع می کنیم:

$$(\omega^2 - c^2 k_z^2) (E_x - iE_y) = 4\pi i \omega e \int f_1 (v_x - i v_y) d^3 p \quad (6-3)$$

از رابطه (6-3) در ادامه استفاده خواهیم کرد.

اکنون با در نظر گرفتن معادله ولاسوف و خطی سازی آن به نتایج زیر می رسیم:

$$\frac{\partial}{\partial t} f + v \cdot \frac{\partial}{\partial x} f - e \left( E + \frac{v \times B}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial p} f = 0 \quad (7-3)$$

$$f = f_0 + f_1$$

$$E = E_0 + E_1$$

$$B = B_0 + B_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1 + v \cdot \frac{\partial}{\partial x} f_1 - e \left( \frac{v \times B_0}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial p} f_1 = e \left( E + \frac{v \times B_1}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial p} f_0 \quad (8-3)$$

رابطه (۸-۳) حالت خطی شده معادله ولاسوف است.  $f_0$  تابع توزیع تعادلی و  $f_1$  تابع توزیع اختلالی می باشد.

### ۲-۳ روش مشخصه ای:

برای بدست آوردن تابع توزیع اختلالی از رابطه (۸-۳) باید از روشی به نام روش مشخصه ای استفاده کرد که در این روش ذره ای تحت تاثیر میدان های اختلالی قرار می گیرد که در اینصورت مسیری مشخص در فضای فاز خود یعنی  $x(t), p(t)$  طی خواهد کرد از طرف دیگر اگر این ذره در زمان  $t$  تنها تحت تاثیر میدان های تعادلی باشد مسیری را در فضای پیکربندی خود طی خواهد کرد که با معادلات زیر مشخص می شوند [15,16]:

$$\frac{dx'(t')}{dt'} = v'(t')$$

$$\frac{dp'(t')}{dt'} = -e[E_0 + \frac{v' \times B_0}{c}]$$

حال تحت شرایط اولیه مساله این دو مسیر در یک زمان مشخص همدیگر را قطع می کنند:

$$p'(t')_{t=t'} = p(t)$$

$$x'(t')_{t=t'} = x(t)$$

از طرفی معادله خطی شده ولاسوف برای تمامی زمانها از جمله  $t=t'$  برقرار است:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1 + v \cdot \frac{\partial}{\partial x} f_1 - e \left( \frac{v \times B_0}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial p} f_1 =$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} f_1 + v' \cdot \frac{\partial}{\partial x'} f_1 - e \left( \frac{v' \times B_0}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial p'} f_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} f_1 + \frac{dx'}{dt'} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} f_1 - \frac{dp'}{dt'} \cdot \frac{\partial}{\partial p'} f_1 = \frac{df_1}{dt'}$$

در نتیجه از رابطه (۸-۳) داریم:



$$\frac{df_1}{dt'} = e(E_1 + \frac{v' \times B_1}{c}) \cdot \frac{\partial}{\partial p'} f_0$$

$$f_1 = e \int_{-\infty}^t dt' (E_1 + \frac{p' \times B_1}{\gamma mc}) \cdot \frac{\partial}{\partial p'} f_0 e^{i(k_z(z'-z) - \omega(t'-t))} \quad (9-3)$$

که تابع توزیع اختلالی بصورت (9-3) بدست می آید که باید به محاسبه آن پرداخت.

حال انتگرالده مورد نظر را می توان برای مولفه های x,y,z بصورت زیر جدا کنیم:

$$(1 - \frac{p'_z k_z}{\gamma m \omega}) E_x \frac{\partial}{\partial p'_x} f_0$$

$$(1 - \frac{p'_z k_z}{\gamma m \omega}) E_y \frac{\partial}{\partial p'_y} f_0$$

$$(\frac{p'_x k_z}{\gamma m \omega} E_x + \frac{p'_y k_z}{\gamma m \omega} E_y) \frac{\partial}{\partial p'_z} f_0$$

$$(\frac{\gamma m}{p'_x} - \frac{p'_z k_z}{\omega p'_x}) v'_x E_x \frac{\partial}{\partial p'_x} f_0 \quad (10-3)$$

$$(\frac{\gamma m}{p'_y} - \frac{p'_z k_z}{\omega p'_y}) v'_y E_y \frac{\partial}{\partial p'_y} f_0 \quad (11-3)$$

$$\frac{k_z}{\omega} (v'_x E_x + v'_y E_y) \frac{\partial}{\partial p'_z} f_0 \quad (12-3)$$

در روابط بالا  $p_x$  و  $p_y$  اندازه حرکت‌های عرضی و  $p_z$  اندازه حرکت طولی می باشد. تمامی کمیات پرایم دار

مربوط به حالت‌های تعادلی می باشند.

حال می توان مسیر ذرات را در میدانهای تعادلی بدست آورد که بدین منظور بصورت زیر عمل می کنیم:

$$\frac{dv'_x}{dt'} = -e \frac{v'_y B_z}{\gamma mc} \rightarrow \frac{d^2 v'_x}{dt'^2} = -e \frac{B_z}{\gamma mc} \frac{dv'_y}{dt'}$$

$$\frac{dv'_y}{dt'} = e \frac{v'_x B_z}{\gamma mc} \rightarrow \frac{d^2 v'_y}{dt'^2} = e \frac{B_z}{\gamma mc} \frac{dv'_x}{dt'}$$

با استفاده از روابط بالا داریم:

$$\frac{d^2 v'_x}{dt'^2} = -\frac{eB_z}{\gamma mc} \frac{dv'_y}{dt'} \rightarrow \frac{d^2 v'_x}{dt'^2} = -\left(\frac{eB_z}{\gamma mc}\right)^2 v'_x$$

$$\frac{d^2 v'_y}{dt'^2} = \frac{eB_z}{\gamma mc} \frac{dv'_x}{dt'} \rightarrow \frac{d^2 v'_y}{dt'^2} = -\left(\frac{eB_z}{\gamma mc}\right)^2 v'_y$$

پس در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 v'_x}{dt'^2} = -\frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{eB_z}{mc}\right)^2 v'_x \rightarrow \frac{d^2 v'_x}{dt'^2} = -\frac{\Omega_e^2}{\gamma^2} v'_x$$

$$\frac{d^2 v'_y}{dt'^2} = -\frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{eB_z}{mc}\right)^2 v'_y \rightarrow \frac{d^2 v'_y}{dt'^2} = -\frac{\Omega_e^2}{\gamma^2} v'_y$$

از طرفی مولفه های سرعت های عرضی و تکانه های عرضی با توجه به شرایط مرزی مسئله و همچنین

استفاده از روابط بالا که از مسیر ذرات در میدان های تعادلی بدست آمد بصورت زیر محاسبه می شوند:

$$p'_x = p'_\perp \cos \phi \longrightarrow v'_x = \frac{p'_\perp}{\gamma m} \cos\left(\phi + \frac{\Omega_e}{\gamma}(t' - t)\right) \quad (۱۳-۳)$$

$$p'_y = p'_\perp \sin \phi \longrightarrow v'_y = \frac{p'_\perp}{\gamma m} \sin\left(\phi + \frac{\Omega_e}{\gamma}(t' - t)\right) \quad (۱۴-۳)$$

$$\psi = \left(\phi + \frac{\Omega_e}{\gamma}(t' - t)\right)$$

$$p_\perp = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = p'_\perp$$

$$p'_x = p'_\perp \cos \psi$$

$$p'_y = p'_\perp \sin \psi \quad (15-3)$$

$p_\perp$  اندازه حرکت عرضی می باشد. روابط زیر نیز در ساده سازی انتگرالده مورد نظر در رابطه (9-3) به ما کمک خواهد کرد:

$$\frac{\partial}{\partial p'_x} = \frac{\partial p'_\perp}{\partial p'_x} \frac{\partial}{\partial p'_\perp} = \frac{p'_x}{p'_\perp} \frac{\partial}{\partial p'_\perp} = \cos \psi \frac{\partial}{\partial p'_\perp} \quad (16-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial p'_y} = \sin \psi \frac{\partial}{\partial p'_\perp} \quad (17-3)$$

با استفاده از روابط (15-3) تا (17-3) در روابط (10-3) تا (12-3) داریم:

$$\left(\frac{\gamma m}{p'_\perp} - \frac{p'_z k_z}{\omega p'_\perp}\right) v'_x E_x \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial}{\partial p'_\perp} f_0 \quad (18-3)$$

$$\left(\frac{\gamma m}{p'_\perp} - \frac{p'_z k_z}{\omega p'_\perp}\right) v'_y E_y \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial}{\partial p'_\perp} f_0 \quad (19-3)$$

$$\frac{k_z}{\omega} (v'_x E_x + v'_y E_y) \frac{\partial}{\partial p'_z} f_0 \quad (20-3)$$

با استفاده از روابط (18-3) تا (20-3) درانتگرالده مورد نظر برای محاسبه تابع توزیع اختلالی یعنی رابطه (9-3) به ادامه محاسبات خواهیم پرداخت:

$$f_1 = \frac{en_0}{\omega} \int_{-\infty}^t dt' \left( \left( \frac{\gamma m \omega}{p'_\perp} - \frac{p'_z k_z}{p'_\perp} \right) \frac{\partial}{\partial p'_\perp} f_0 + k_z \frac{\partial}{\partial p'_z} f_0 \right) (v'_x E_x + v'_y E_y) e^{i(k_z(z'-z) - \omega(t'-t))} \quad (21-3)$$

### ۳-۳ انتگرال گیری بر روی مسیر ذرات در میدان های تعادلی:

معادلات زیر توصیف کننده مسیر ذرات در فضای فاز برای حالتی که تنها میدان های تعادلی وجود دارند می باشد:

$$v_x' = \frac{p_{\perp}'}{\gamma m} \cos\left(\phi + \frac{\Omega_e}{\gamma}(t' - t)\right) \quad (۲۲-۳)$$

$$v_y' = \frac{p_{\perp}'}{\gamma m} \sin\left(\phi + \frac{\Omega_e}{\gamma}(t' - t)\right) \quad (۲۳-۳)$$

$$z' = z + \frac{p_z}{\gamma m}(t' - t) \quad (۲۴-۳)$$

با استفاده از روابط (۲۲-۳) تا (۲۴-۳) انتگرال رابطه (۲۱-۳) را بر روی مسیر فاز ذرات با استفاده از این مطلب که رابطه (۲۵-۳) در مورد موج الکترومغناطیسی که دارای قطبش دایروی راستگرد می باشد صدق می کند محاسبه خواهیم کرد:

$$E_x = -iE_y \quad (۲۵-۳)$$

$$f_1 = \frac{en_0}{\omega} \int_{-\infty}^t dt' \left( \left( \frac{\gamma m \omega}{p_{\perp}'} - \frac{p_z' k_z}{p_{\perp}'} \right) \frac{\partial}{\partial p_{\perp}'} f_0 + k_z \frac{\partial}{\partial p_z'} f_0 \right)$$

$$\frac{p_{\perp}'}{\gamma m} (\cos \psi E_x + \sin \psi E_y) e^{i(k_z(z'-z) - \omega(t'-t))} =$$

$$\frac{en_0}{\omega} \int_{-\infty}^t dt' \left( \left( \frac{\gamma m \omega}{p_{\perp}'} - \frac{p_z' k_z}{p_{\perp}'} \right) \frac{\partial}{\partial p_{\perp}'} f_0 + k_z \frac{\partial}{\partial p_z'} f_0 \right)$$

$$\frac{p_{\perp}'}{\gamma m} (-iE_y) e^{i\left(\phi + \frac{\Omega_e}{\gamma}(t'-t)\right)} e^{i(k_z(z'-z) - \omega(t'-t))} =$$

در ساده سازی از رابطه (۲۵-۳) استفاده شده است.

با کمی تغییرات و اثر دادن شرایط مرزی مورد نظر و استفاده از رابطه (۲۶-۳) بدست می آوریم:

$$\tau = t' - t \quad (۲۶-۳)$$

$$\frac{en_0}{\omega} \int_{-\infty}^t dt' \left( \left( \frac{\gamma m \omega}{p'_\perp} - \frac{p'_z k_z}{p'_\perp} \right) \frac{\partial}{\partial p'_\perp} f_0 + k_z \frac{\partial}{\partial p'_z} f_0 \right)$$

$$\frac{p'_\perp}{\gamma m} (-iE_y) e^{i\phi} e^{\frac{i\Omega_e(t'-t)}{\gamma}} e^{i(k_z \frac{p'_z}{\gamma m}(t'-t) - \omega(t'-t))} =$$

$$\frac{en_0}{\omega} \left( \left( \frac{\gamma m \omega}{p_\perp} - \frac{p_z k_z}{p_\perp} \right) \frac{\partial}{\partial p_\perp} f_0 + k_z \frac{\partial}{\partial p_z} f_0 \right) \frac{p_\perp}{\gamma m} (-iE_y) e^{i\phi} \int_{-\infty}^0 e^{-i(\omega - k_z \frac{p_z}{\gamma m} - \frac{\Omega_e}{\gamma})\tau} d\tau =$$

$$\frac{en_0}{\omega} \left( \left( \frac{\gamma m \omega}{p_\perp} - \frac{p_z k_z}{p_\perp} \right) \frac{\partial}{\partial p_\perp} f_0 + k_z \frac{\partial}{\partial p_z} f_0 \right) \frac{p_\perp}{\gamma m} (-iE_y) e^{i\phi} \frac{i}{\omega - k_z \frac{p_z}{\gamma m} - \frac{\Omega_e}{\gamma}} \quad (۲۷-۳)$$

که رابطه (۲۷-۳) همان تابع توزیع اختلالی مورد نظری که بدنبال آن بودیم می باشد.

هم اکنون با استفاده از تابع توزیع اختلالی بدست آمده یعنی رابطه (۲۷-۳) و همچنین روابط (۲۲-۳) و

(۲۳-۳) و جای گذاری آنها در (۶-۳) به ادامه محاسبات تا بدست آمدن نتیجه نهایی خواهیم پرداخت:

$$(\omega^2 - c^2 k_z^2)(E_x - iE_y) = 4\pi i \omega e \int \frac{en_0}{\omega} \left( \left( \frac{\gamma m \omega}{p_\perp} - \frac{p_z k_z}{p_\perp} \right) \frac{\partial}{\partial p_\perp} f_0 \right. \\ \left. + k_z \frac{\partial}{\partial p_z} f_0 \right) \frac{p_\perp}{\gamma m} (-iE_y) e^{i\phi} \frac{i}{\omega - k_z \frac{p_z}{\gamma m} - \frac{\Omega_e}{\gamma}} (v_x - iv_y) d^3 p$$

$$(\omega^2 - c^2 k_z^2)(E_x - iE_y) = 4\pi i \omega e \int \frac{en_0}{\omega} \left( \frac{\gamma m \omega}{p_\perp} - \frac{p_z k_z}{p_\perp} \right) \frac{\partial}{\partial p_\perp} f_0 + k_z \frac{\partial}{\partial p_z} f_0 \frac{p_\perp}{\gamma m} \left( \frac{E_x - iE_y}{2} \right) e^{i\phi} \frac{i}{\omega - k_z \frac{p_z}{\gamma m} - \frac{\Omega_e}{\gamma}} \frac{p_\perp}{\gamma m} e^{-i\phi} d^3 p$$

با توجه به مختصات مورد نظر که استوانه ای می باشد انتگرال مورد نظر بصورت زیر خواهد بود:

$$\int d^3 p = 2\pi \int_0^\infty p_\perp dp_\perp \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \quad (28-3)$$

در نهایت با استفاده از رابطه (28-3) به رابطه پاشندگی مورد نظر خواهیم رسید:

$$(\omega^2 - c^2 k_z^2) = -\pi \omega_{pe}^2 \int p_\perp dp_\perp \int dp_z \frac{(\omega - \frac{p_z k_z}{\gamma m}) p_\perp \frac{\partial}{\partial p_\perp} f_0 + \frac{k_z p_\perp^2}{\gamma m} \frac{\partial}{\partial p_z} f_0}{\gamma \omega - k_z \frac{p_z}{m} - \Omega_e} \quad (29-3)$$

در بدست آوردن رابطه پاشندگی (29-3) از روابط زیر استفاده کرده ایم.

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e}$$

$$\Omega_e = \frac{eB_0}{m_e c}$$

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{p_\perp^2}{m_e^2 c^2} + \frac{p_z^2}{m_e^2 c^2}}$$

اینک می توان رابطه پاشندگی (29-3) را با محاسبه انتگرال های موجود در آن ساده تر کرده و به یک

رابطه یکپارچه نهایی برسیم .

بدین منظور ابتدا از رابطه (29-3) شروع کرده و ابتدا انتگرالده مورد نظر را به دو قسمت تبدیل می کنیم:

$$-\pi\omega^2_{pe} \left[ \int p_{\perp} dp_{\perp} \int dp_z \frac{(\omega - \frac{p_z k_z}{\gamma m}) p_{\perp}}{\gamma\omega - k_z \frac{p_z}{m} - \Omega_e} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f_0 + \int p_{\perp} dp_{\perp} \int dp_z \frac{\frac{k_z p_{\perp}^2}{\gamma m} \frac{\partial}{\partial p_z} f_0}{\gamma\omega - k_z \frac{p_z}{m} - \Omega_e} \right]$$

سپس مولفه های طولی و عرضی را با توجه به انتگرال های مربوطه جدا نموده:

$$-\pi\omega^2_{pe} \left[ \int p_{\perp}^2 \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f_0 dp_{\perp} \int \frac{dp_z}{\gamma} \frac{(\omega - \frac{p_z k_z}{\gamma m})}{\omega - k_z \frac{p_z}{\gamma m} - \frac{\Omega_e}{\gamma}} + \right. \\ \left. \frac{k_z}{m} \int p_{\perp}^3 dp_{\perp} \int \frac{dp_z}{\gamma^2} \frac{\frac{\partial}{\partial p_z} f_0}{\omega - k_z \frac{p_z}{\gamma m} - \frac{\Omega_e}{\gamma}} \right] \quad (30-3)$$

اکنون در رابطه (30-3) با گرفتن انتگرال جزء به جزء از انتگرال اول در جمله اول و همچنین از انتگرال دوم در جمله دوم و استفاده از روابط (31-3) و (32-3) و (33-3) به آنچه در انتظارتان بودیم خواهیم رسید:

$$\frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \gamma = \frac{p_{\perp}}{\gamma m^2 c^2} \quad (31-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_z} \gamma = \frac{p_z}{\gamma m^2 c^2} \quad (32-3)$$

$$\omega = \frac{k_z p_z}{\gamma m} + \frac{\Omega_e}{\gamma} \longrightarrow \frac{\omega^2}{\gamma^2 m^2 c^2} = \frac{k_z^2 p_z^2}{\gamma^4 m^4 c^2} + \frac{2k_z p_z \Omega_e}{\gamma^4 m^3 c^2} + \frac{\Omega_e^2}{\gamma^4 m^2 c^2} \quad (33-3)$$

$$(\omega^2 - c^2 k_z^2) = 2\pi\omega_{pe}^2 \int_0^\infty p_\perp dp_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_z \frac{f_0}{\gamma} \left[ \frac{(\omega - \frac{p_z k_z}{\gamma m})}{\omega - k_z \frac{p_z}{\gamma m} - \frac{\Omega_e}{\gamma}} - \frac{p_\perp^2 (\omega^2 - c^2 k_z^2)}{2\gamma^2 m^2 c^2 (\omega - k_z \frac{p_z}{\gamma m} - \frac{\Omega_e}{\gamma})^2} \right] \quad (34-3)$$

حال در این رابطه پاشندگی می توان توابع توزیع تعادلی متفاوتی را جایگذاری کرد و به بررسی مسئله پرداخت در اینجا تابع توزیع تعادلی مورد نظری که ما در نظر گرفته ایم بصورت زیر تعریف می شود:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi p_\perp} \delta(p_\perp - p_{\perp 0}) \delta(p_z) \quad (35-3)$$

با جایگذاری تابع توزیع تعادلی در رابطه (34-3) و استفاده از رابطه (36-3) به نتیجه نهایی و رابطه پاشندگی که در انتظارش بودیم خواهیم رسید:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (36-3)$$

$$\omega^2 - c^2 k_z^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_0} \left[ \frac{\omega}{\omega - \frac{\Omega_e}{\gamma_0}} - \frac{p_{\perp 0}^2 (\omega^2 - c^2 k_z^2)}{2\gamma^2 m^2 c^2 (\omega - \frac{\Omega_e}{\gamma_0})^2} \right]$$

$$\omega^2 - c^2 k_z^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_0} \left[ \frac{\omega}{\omega - \frac{\Omega_e}{\gamma_0}} + \frac{k_z^2 v_{\perp 0}^2 (1 - \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2})}{2(\omega - \frac{\Omega_e}{\gamma_0})^2} \right] \quad (37-3)$$

با بدست آمدن رابطه پاشندگی بصورت رابطه (37-3) می توان این رابطه را بصورت عددی حل کرده و به نتایج مطلوبی رسید [3].



### ۴-۳ بررسی عددی رابطه پاشندگی:

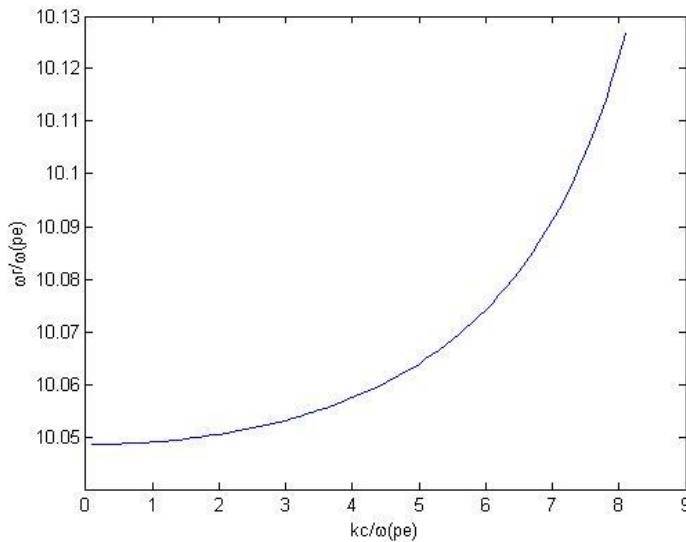
در این قسمت به بررسی عددی مسئله یعنی رابطه (۳۷-۳) می پردازیم برای حل عددی این رابطه ابتدا آن را بی بعد کرده سپس در این رابطه معادله (۳۸-۳) را جایگذاری می کنیم. باید یادآوری کرد که  $\omega$  عددی موهومی است:

$$\omega = \omega_r + i\omega_i \quad (38-3)$$

قسمت های حقیقی و موهومی رابطه (۳۷-۳) را پس از جایگذاری رابطه (۳۸-۳) در آن بصورت دو معادله از هم تفکیک کرده سپس این دو معادله را بصورت همزمان حل می کنیم (پیوست ۲). از حل عددی آنها بصورت همزمان برای مقادیر ورودی مورد نظری که در زیر داده شده است به نتایج مطلوبی خواهیم رسید:

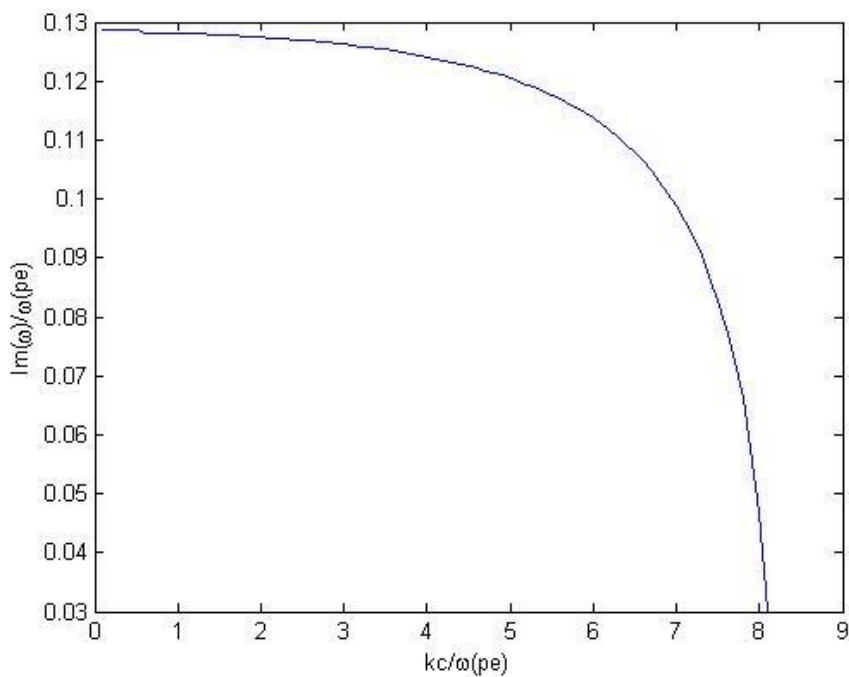
$$\gamma_0 = 1.02$$

$$\frac{\Omega_e}{\gamma_0 \omega_{pe}} = 10$$



شکل (۳-۱): تغییرات بسامد زاویه ای حقیقی بر حسب  $\frac{k_z c}{\omega_{pe}}$

شکل (۱-۳) بیانگر تغییرات بسامد زاویه ای حقیقی بر حسب  $kzc/\omega_{pe}$  می باشد که با استفاده از آن می توان طول موجی که انتشار در آن صورت می گیرد و همچنین نواحی قطع برهمکنش را پیش بینی کرد.



شکل (۲-۳): نرخ رشد ناپایداری بر حسب  $\frac{kc}{\omega_{pe}}$

شکل (۲-۳) بیانگر تغییرات بسامد زاویه ای موهومی است. همانطور که در قبل اشاره کردیم بر اساس کمیات اختلالی تنها بسامد زاویه ای موهومی می تواند نرخ رشد ناپایداری یا تقویت را بیان کند و اگر  $Im\omega > 0$  باشد موج تقویت و اگر  $Im\omega < 0$  باشد موج دمپ می شود پس بر اساس شکل (۲-۳) توانسته ایم بازه ای که در آن بسامد زاویه ای موهومی مثبت می شود و همچنین متناسب با آن طول موج هایی که سبب تقویت موج می شوند را پیدا کنیم.

# فصل چهارم

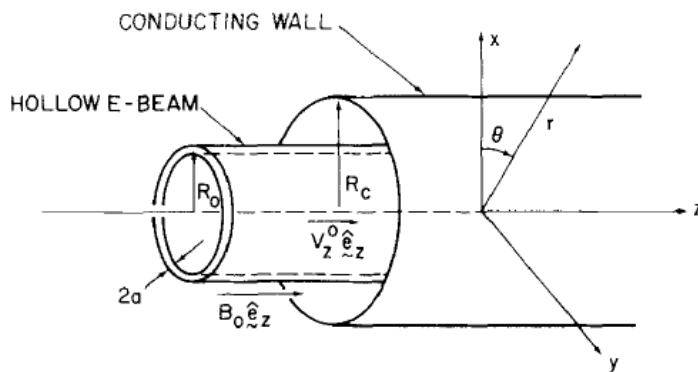
## نظریه جنبشی

بدست آوردن رابطه پاشندگی

در درون موجبر

در این فصل رابطه پاشندگی که توصیف کننده میزان تقویت موج الکترومغناطیس مورد نظر می باشد را همانند قبل با در نظر گرفتن یک پرتو الکترونی پر انرژی که تحت تاثیر یک میدان مغناطیسی خارجی دارای یک حرکت سیکلوترونی می باشد و همگی در درون یک موجبر استوانه ای کاملاً رسانا قرار دارند را بدست می آوریم. ساختار و فرضیات مسئله بصورت زیر می باشد:

۱- شعاع متوسط پرتو الکترونی  $R_0$  و ضخامت آن  $2a$  می باشد که در داخل یک موجبر به شعاع  $R_c$  قرار دارد و مختصات مورد نظر استوانه ای می باشد. (شکل (۱-۴))



شکل (۱-۴): ساختار کلی مسئله

۲- ضخامت پرتو الکترونی خیلی کوچکتر از شعاع متوسط پرتو می باشد:

$$a \ll R_0 \quad (1-4)$$

۳- از خود میدان ها چشم پوشی شده است:

$$\nu = \frac{N_e e^2}{\gamma_e m_e c^2} \ll 1 \quad (2-4)$$

۴- موجبر مورد نظر رسانای کامل می باشد.

## ۲-۴ ثابت های حرکت ذره:

ابتدا از معادله لاگرانژ برای بدست آوردن ثابتهای حرکت ذره استفاده می کنیم که معادله لاگرانژ نسبیتی بصورت زیر می باشد [17]:

$$L = T - V$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{e}{c} v \cdot A(r) \quad (3-4)$$

سرعت ذره و همچنین پتانسیل برداری طبق روابط زیر تعریف می شود:

$$v = r e_r + r \theta e_\theta + z e_z$$

$$A = A_\theta(r) + A_z(r)$$

در رابطه بالا پتانسیل برداری سمتی ناشی از میدان مغناطیسی محوری و پتانسیل برداری محوری ناشی از خود میدان مغناطیسی سمتی می باشد.

محاسبات مورد نظر را برای بدست آوردن ثابتهای حرکت ادامه می دهیم:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{(r^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)}{c^2}} - \frac{e}{c} (r e_r + r \dot{\theta} e_\theta + \dot{z} e_z) \cdot (A_\theta e_\theta)$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \rightarrow P_\theta = const$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r p_\theta - \frac{e}{c} r A_\theta(r) \quad (4-4)$$

$$B(r) = \nabla \times A(r)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta(r)) \rightarrow A_\theta(r) = \frac{1}{2} r B_z = \frac{1}{2} r B_0 \quad (5-4)$$

در ادامه از روابط (۴-۴) و (۵-۴) برای بدست آوردن اندازه حرکت سمتی کانونیکی استفاده می کنیم:

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r p_\theta - \frac{eB_0 r^2}{2c} \quad (۶-۴)$$

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0 \rightarrow P_z = const \quad (۷-۴)$$

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = p_z \rightarrow P_z = p_z$$

$$H = \sum_{i=1}^3 q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - L \rightarrow H = \gamma m c^2 = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} \quad (۸-۴)$$

در روابط بالا  $P_i$  اندازه حرکت کانونیکی و  $p_i$  اندازه حرکت مکانیکی و  $L$  لاگرانژ و  $H$  هامیلتونی می باشد.

با توجه به اینکه از نظریه جنبشی استفاده می کنیم تابع توزیع مورد نظری که از آن استفاده می کنیم و

تابعی از ثابت های حرکت ذره می باشد بصورت زیر است:

$$f_0(r, p) = \frac{N_e \omega_c}{4\pi^2 \hat{\gamma}_e m c^2} \delta(\gamma - \hat{\gamma}_e) \delta(p_z - \hat{\gamma}_e m V_{ze}) \delta(P_\theta - P_0) \quad (۹-۴)$$

$\gamma$  و  $P_\theta$  و  $p_z$  در روابط (۴-۶) و (۴-۷) و (۴-۸) تعریف شده اند  $N_e$  تعداد الکترونها در واحد طول

محوری می باشد  $\omega_c = eB_0 / m_e c$  فرکانس سیکلوترونی غیر نسبیتی و  $\hat{\gamma}_e$  و  $P_0$  بصورت زیر تعریف

می شوند [7,10]:

$$P_0 = -\frac{1}{2} m \omega_c (R_0^2 - a^2)$$

$$\hat{\gamma}_e = \left(1 - \frac{V_{\perp e}^2}{c^2} - \frac{V_{ze}^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

حال با استفاده از شرایط مسئله و تابع توزیع در رابطه (۴-۹) و همچنین استفاده از تعریف  $P_0$  در بالا و

رابطه (۴-۶) به محاسبه اندازه حرکت سمتی مکانیکی می پردازیم:

$$P_0 = -\frac{1}{2}m\omega_c(R_0^2 - a^2)$$

$$P_\theta = P_0 \rightarrow rp_\theta - \frac{eB_0r^2}{2c} = -\frac{1}{2}m\omega_c(R_0^2 - a^2)$$

$$rp_\theta = -\frac{1}{2}m\omega_c(R_0^2 - a^2) + \frac{1}{2}m\omega_cr^2$$

$$rp_\theta = \frac{1}{2}m\omega_c(r^2 - R_0^2 + a^2)$$

با توجه به شرط (۴-۱) داریم:

$$rp_\theta = \frac{1}{2}m\omega_c(r^2 - R_0^2) = \frac{1}{2}m\omega_c(r - R_0)(r + R_0)$$

$$\rho = (r - R_0)$$

$$p_\theta = \frac{1}{2}m\omega_c(r + R_0)\frac{\rho}{r}$$

$$p_\theta = m\omega_c\rho \quad (۴-۱۰)$$

با توجه به اینکه  $\gamma_0$  مقدار پارامتر نسبیتی در شعاع  $R_0$  می باشد:

$$\gamma_0 = \sqrt{1 + \frac{P^2}{m^2c^2}} \xrightarrow{r=R_0} \begin{cases} p_r = \gamma_0 m r = 0 \\ p_\theta = 0 \\ p_z = p_0 \end{cases}$$

$$\gamma_0 = \sqrt{1 + \frac{P_0^2}{m^2c^2}} \quad (۴-۱۱)$$

حال فاکتور نسبیتی را که بصورت زیر تعریف می شود را ساده کرده تا به رابطه (۴-۱۲) برسیم:

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} = \sqrt{1 + \frac{p_r^2 + p_\theta^2 + p_z^2}{m^2 c^2}} = \sqrt{1 + \frac{p_z^2}{m^2 c^2}} \sqrt{1 + \frac{p_r^2 + p_\theta^2}{(1 + \frac{p_z^2}{m^2 c^2}) m^2 c^2}}$$

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{p_z^2}{m^2 c^2}} + \frac{p_r^2 + p_\theta^2}{2m^2 c^2 \sqrt{1 + \frac{p_z^2}{m^2 c^2}}}$$

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{p_0^2}{m^2 c^2}} + \frac{p_r^2 + p_\theta^2}{2m^2 c^2 \sqrt{1 + \frac{p_0^2}{m^2 c^2}}} \quad (12-4)$$

با جایگذاری رابطه (۱۱-۴) در (۱۲-۴) فاکتور نسبیتی و هامیلتونی را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{p_r^2 + p_\theta^2}{2m^2 c^2 \gamma_0} = \gamma_0 + \frac{p_r^2}{2m^2 c^2 \gamma_0} + \frac{p_\theta^2}{2m^2 c^2 \gamma_0}$$

$$H = \gamma m c^2 = \gamma_0 m c^2 + \frac{p_r^2}{2m\gamma_0} + \frac{p_\theta^2}{2m\gamma_0}$$

با استفاده از رابطه (۱۰-۴) می توان به آنچه در انتظارش بودیم برسیم:

$$H = \gamma m c^2 = \gamma_0 m c^2 + \frac{p_r^2}{2m\gamma_0} + \frac{m^2 \omega_c^2 \rho^2}{2m\gamma_0}$$

$$H = \gamma_0 m c^2 + \frac{p_r^2}{2m\gamma_0} + \frac{1}{2} m \gamma_0 \rho^2 \omega_{c0}^2 \quad (13-4)$$

از رابطه (۱۳-۴) در ادامه محاسبات برای بدست آوردن رابطه پاشندگی استفاده خواهیم کرد.



### ۳-۴ معادلات ماکسول:

ابتدا فرض می کنیم که تمامی کمیات اختلالی بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\delta\psi(x,t) = \psi(x) \exp(i(kz - \omega t)) \quad (۱۴-۴)$$

$\omega$  یک عدد مختلط می باشد و اگر  $\text{Im}\omega > 0$  در اینصورت موج تقویت می شود.

معادلات ماکسول بطور کلی بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\nabla \times E(x) = \frac{-1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B(x) \quad (۱۵-۴)$$

$$\nabla \times B(x) = \frac{4\pi}{c} j(x) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E(x) \quad (۱۶-۴)$$

در روابط بالا  $j(x)$  چگالی جریان اختلالی می باشد.

ابتدا معادلات ماکسول را برای فضای درونی بیم الکترونی که حاوی چگالی جریان های مورد نظر خواهد

بود می نویسیم که از رابطه (۱۵-۴) خواهیم داشت:

$$-ikE_{\theta}(r) = \frac{i\omega}{c} B_r(r) \quad (۱۷-۴)$$

$$ikE_r(r) - \frac{\partial}{\partial r} E_z(r) = \frac{i\omega}{c} B_{\theta}(r)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_{\theta}(r)) = \frac{i\omega}{c} B_z(r) \quad (۱۸-۴)$$

وهمچنین از رابطه (۱۶-۴) نتیجه می گیریم:

$$-ikB_{\theta}(r) = -\frac{i\omega}{c}E_r(r) + \frac{4\pi}{c}J_r(r)$$

$$ikB_r(r) - \frac{\partial}{\partial r}B_z(r) = -\frac{i\omega}{c}E_{\theta}(r) + \frac{4\pi}{c}J_{\theta}(r) \quad (19-4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}B_{\theta}(r) + \frac{1}{r}B_{\theta}(r) = -\frac{i\omega}{c}E_z(r) + \frac{4\pi}{c}J_z(r)$$

با جایگذاری رابطه (۱۷-۴) در (۱۹-۴) رابطه (۲۰-۴) را بدست می آوریم:

$$\frac{\partial}{\partial r}B_z(r) - \frac{ic(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2)}{\omega}E_{\theta}(r) = -\frac{4\pi}{c}J_{\theta}(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}B_z(r) - \frac{ic\rho^2}{\omega}E_{\theta}(r) = -\frac{4\pi}{c}J_{\theta}(r) \quad (20-4)$$

$$\rho^2 = (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2)$$

در رابطه (۲۰-۴)،  $E_{\theta}(r)$  مولفه میدان الکتریکی سمتی اختلالی و  $B_z(r)$  مولفه میدان مغناطیسی

محوری اختلالی می باشد.

از طرفین رابطه (۲۰-۴) انتگرال می گیریم:

$$\int_{R_1^-}^{R_2^+} \partial B_z(r) - \frac{ic\rho^2}{\omega} \int_{R_1^-}^{R_2^+} E_{\theta}(r) dr = -\frac{4\pi}{c} \int_{R_1^-}^{R_2^+} J_{\theta}(r) dr$$

از آنجایی که مولفه میدان الکتریکی سمتی اختلالی در عبور از مرزهای درونی و بیرونی پرتو پیوسته است

داریم:

$$B_z(R_2^+) - B_z(R_1^-) = -\frac{4\pi}{c} \int_{R_1^-}^{R_2^+} J_{\theta}(r) dr \quad (21-4)$$

که رابطه (۲۱-۴) رابطه اصلی برای بدست آوردن رابطه پاشندگی نهایی می باشد.

در این قسمت معادلات ماکسول را برای خلا می نویسیم:

$$\nabla \times E(x) = \frac{i\omega}{c} B(x)$$

$$\nabla \times B(x) = -\frac{i\omega}{c} E(x)$$

با ساده سازی معادلات ماکسول برای خلا داریم:

$$-ikE_\theta(r) = \frac{i\omega}{c} B_r(r)$$

$$ikE_r(r) - \frac{\partial}{\partial r} E_z(r) = \frac{i\omega}{c} B_\theta(r)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\theta(r)) = \frac{i\omega}{c} B_z(r)$$

$$-ikB_\theta(r) = -\frac{i\omega}{c} E_r(r) \quad (۲۲-۴)$$

$$ikB_r(r) - \frac{\partial}{\partial r} B_z(r) = -\frac{i\omega}{c} E_\theta(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} B_\theta(r) + \frac{1}{r} B_\theta(r) = -\frac{i\omega}{c} E_z(r)$$

با استفاده از سری معادلات بالا می توانیم روابط مهم زیر را بدست آوریم:

$$E_\theta(r) = -\frac{\omega}{kc} B_r(r)$$

$$B_r(r) = \frac{ik}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial r} B_z(r)$$

$$E_r(r) = \frac{kc}{\omega} B_\theta(r) \quad (۲۳-۴)$$

$$B_{\theta}(r) = \frac{ik}{\rho^2 c} \frac{\partial}{\partial r} E_z(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_{\theta}(r)) \right) + \rho^2 E_{\theta}(r) = 0 \quad (24-4)$$

از آنجایی که ما در این بخش به بررسی ناپایداری سیکلوترون میز با مد TE می پردازیم با توجه به

شرطی که برای این مد داریم و همچنین استفاده از روابط بالا نتایج زیر را بدست خواهیم آورد:

$$TE \rightarrow E_z(r) = 0 \rightarrow B_{\theta}(r) = 0 \rightarrow E_r(r) = 0$$

پس اجزا موج الکترومغناطیس اختلالی برای مد TE شامل اجزا  $E_{\theta}(r)$  و  $B_r(r)$  و  $B_z(r)$  می باشد.

با استفاده از رابطه (24-4) که برای محیط خلا می باشد و استفاده از تغییر متغیر مناسب داریم:

$$x = \rho r$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_{\theta}(r) + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} E_{\theta}(r) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) E_{\theta}(r) = 0 \quad (25-4)$$

رابطه (25-4) همان معادله بسل است که جوابهای آن برای محیط خلا بصورت زیر است:

$$E_{\theta}(r) = \begin{cases} AJ_1(\rho r) + DN_1(\rho r) \rightarrow r \langle R_1 \\ BJ_1(\rho r) + CN_1(\rho r) \rightarrow R_2 \langle r \langle R_C \end{cases}$$

$$r \langle R_1 \Rightarrow r \rightarrow 0 \rightarrow N_1(\rho r) \rightarrow \infty \Rightarrow D = 0$$

$J_1$  و  $N_1$  بترتیب توابع بسل مرتبه اول و دوم می باشند.

$$E_{\theta}(r) = \begin{cases} AJ_1(\rho r) \rightarrow r \langle R_1 \\ BJ_1(\rho r) + CN_1(\rho r) \rightarrow R_2 \langle r \langle R_C \end{cases}$$

از سری معادلات (۲۳-۴) که برای خلا نوشتیم و همچنین (۲۶-۴) استفاده می کنیم و میدان مغناطیسی محوری اختلالی را بصورت زیر می نویسیم:

$$E_{\theta}(r) = \frac{-i\omega}{c\rho^2} \frac{\partial}{\partial r} B_z(r) \rightarrow B_z(r) = \frac{-i\omega}{c\rho^2} \int E_{\theta}(r) dr$$

$$\begin{aligned} N_0(\rho r) &= -\rho \int N_1(\rho r) dr \\ J_0(\rho r) &= -\rho \int J_1(\rho r) dr \end{aligned} \quad (۲۶-۴)$$

$$B_z(r) = \begin{cases} -A \frac{ic\rho}{\omega} J_0(\rho r) \rightarrow r \langle R_1 \\ -B \frac{ic\rho}{\omega} J_0(\rho r) - C \frac{ic\rho}{\omega} N_0(\rho r) \rightarrow R_2 \langle r \langle R_c \end{cases} \quad (۲۷-۴)$$

در این قسمت باید به محاسبه ضرایب A,B,C پردازیم بدین منظور باید از شرایط مرزی مسئله استفاده کنیم از آنجایی که موجبر مورد نظر رسانای کامل می باشد پس مولفه سمتی میدان الکتریکی اختلالی که همان مولفه مماسی میدان الکتریکی می باشد بر روی رسانای مورد نظر که همان موجبر می باشد صفر است  $E_{\theta}(r) = 0$  با استفاده از سری معادلات (۲۳-۴) که برای خلا نوشتیم :

$$\left[ \frac{\partial B_z(r)}{\partial r} \right]_{r=R_c} = 0 \rightarrow B \frac{ic\rho}{\omega} J_1(\rho R_c) + C \frac{ic\rho}{\omega} N_1(\rho R_c) = 0$$

$$c = -\frac{J_1(\rho R_c)}{N_1(\rho R_c)}$$

با داشتن مقدار C میتوان میدان الکتریکی و مغناطیسی را بازنویسی کرد:

$$E_{\theta}(r) = \begin{cases} J_1(\rho r) \rightarrow r \langle R_1 \\ J_1(\rho r) - \frac{J_1(\rho R_c)}{N_1(\rho R_c)} N_1(\rho r) \rightarrow R_2 \langle r \langle R_c \end{cases} \quad (۲۸-۴)$$

$$B_z(r) = \begin{cases} -\frac{ic\rho}{\omega} J_0(\rho r) \rightarrow r \langle R_1 \\ -\frac{ic\rho}{\omega} J_0(\rho r) + \frac{J_1(\rho R_c)}{N_1(\rho R_c)} \frac{ic\rho}{\omega} N_0(\rho r) \rightarrow R_2 \langle r \langle R_c \end{cases} \quad (29-4)$$

در این قسمت با تعریف ضرایب ادمیتنس مغناطیسی موج در سطوح داخلی و خارجی پرتو الکترونی داریم [8]:

$$b_- = -i \left( \frac{\omega}{\rho^2 c R_0} \right) \frac{B_z(R_1^-)}{E_\theta(R_1)} \quad (30-4)$$

$$b_+ = i \left( \frac{\omega}{\rho^2 c R_0} \right) \frac{B_z(R_2^+)}{E_\theta(R_2)}$$

با استفاده از روابط (28-4) و (29-4) و همچنین استفاده از شرط (1-4) یعنی نازک بودن باریکه الکترونی ( $R_1=R_2=R_0$ ) نتیجه می گیریم:

$$b_- = -\left( \frac{1}{\rho R_1} \right) \frac{J_0(\rho R_1)}{J_1(\rho R_1)} = -\left( \frac{1}{\rho R_0} \right) \frac{J_0(\rho R_0)}{J_1(\rho R_0)}$$

$$b_+ = \left( \frac{1}{\rho R_2} \right) \left[ \frac{J_0(\rho R_2) N_1(\rho R_c) + J_1(\rho R_c) N_0(\rho R_2)}{J_1(\rho R_2) N_1(\rho R_c) - J_1(\rho R_c) N_1(\rho R_2)} \right]$$

$$b_+ = \left( \frac{1}{\rho R_0} \right) \left[ \frac{J_0(\rho R_0) N_1(\rho R_c) + J_1(\rho R_c) N_0(\rho R_0)}{J_1(\rho R_0) N_1(\rho R_c) - J_1(\rho R_c) N_1(\rho R_0)} \right]$$

$$b_- + b_+ = \frac{1}{\rho R_0} \left[ \frac{J_1(\rho R_c) (J_0(\rho R_0) N_1(\rho R_0) - J_1(\rho R_0) N_0(\rho R_0))}{J_1(\rho R_0) (J_1(\rho R_0) N_1(\rho R_c) - J_1(\rho R_c) N_1(\rho R_0))} \right]$$

با استفاده از بسط زیر مجموع ضرایب ادمیتنس مغناطیسی موج را می توان بصورت زیر نوشت:

$$J_1(x) N_0(x) - J_0(x) N_1(x) = \frac{2}{\pi x}$$

$$b_- + b_+ = -\frac{2J_1(\rho R_c) / \pi \rho^2 R_0^2}{J_1(\rho R_0) (J_1(\rho R_0) N_1(\rho R_c) - J_1(\rho R_c) N_1(\rho R_0))} \quad (31-4)$$

با استفاده از روابط (۳۰-۴) می توان نوشت:

$$B_z(R_1^-) = \left(\frac{i\rho^2 c R_0}{\omega}\right) E_\theta(R_0) b_- \quad (۳۲-۴)$$

$$B_z(R_2^+) = -\left(\frac{i\rho^2 c R_0}{\omega}\right) E_\theta(R_0) b_+$$

اکنون از رابطه (۲۱-۴) که در قسمت های قبل بدست آوردیم استفاده می کنیم و به رابطه زیر که یکی از مهمترین روابط در بدست آوردن رابطه پاشندگی نهایی است می رسیم:

$$b_- + b_+ = \frac{-4\pi i \omega}{c^2 R_0 \rho^2 E_\theta(R_0)} \int_{R_1^-}^{R_2^+} J_\theta(r) dr \quad (۳۳-۴)$$

#### ۴-۴ محدوده چگالی های کم:

رابطه (۳۳-۴) رابطه اصلی برای بدست آوردن رابطه پاشندگی می باشد. از آنجایی که سمت راست این

رابطه بر حسب مقدار  $\left(\frac{v}{\hat{\gamma}}\right)$  می باشد و پارامتر بودکر  $(v = \frac{N_e e^2}{mc^2})$  نیز بر حسب تعداد الکترونها

تشکیل دهنده پرتو الکترونی می باشد لذا از فرض اولیه مسئله در این قسمت مبنی بر کم بودن چگالی

پرتو الکترونی برای ساده سازی رابطه پاشندگی استفاده می کنیم و همچنین با توجه به رابطه (۳۱-۴) و

(۳۳-۴) داریم:

$$\frac{v}{\hat{\gamma}} \rightarrow 0$$

$$b_- + b_+ = 0 \rightarrow -\frac{2J_1(\rho R_c) / \pi \rho^2 R_0^2}{J_1(\rho R_0)(J_1(\rho R_0)N_1(\rho R_c) - J_1(\rho R_c)N_1(\rho R_0))} = 0$$

$$\rightarrow J_1(\rho R_c) = 0 \rightarrow \rho R_c = x_{0n}$$

$$\rho^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)$$

$$\rho^2 R_c^2 = x_{0n}^2$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) R_c^2 = x_{0n}^2$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) = \frac{x_{0n}^2}{R_c^2} = k_{0n}^2$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) R_c^2 = x_{0n}^2$$

$$\omega^2 - c^2 k^2 = c^2 k_{0n}^2 \quad (34-4)$$

رابطه (۳۴-۴) رابطه پاشندگی در خلا می باشد. قابل ذکر است که  $x_{0n}$  ریشه نام  $J_1(x_{0n})=0$  می باشد.

حال در این قسمت به بسط تیلور رابطه (۳۱-۴) حول جوابهای خلا می پردازیم و برای سادگی بیشتر از

تغییر متغیرهای زیر نیز استفاده می کنیم.

$$\rho R_c = x_{0n} = \xi$$

$$\rho^2 R_c^2 = x_{0n}^2 = \xi^2$$

$$\xrightarrow{(31-4)} b_- + b_+ = -\frac{(2J_1(\xi) / \pi)(R_c^2 / \xi^2 R_0^2)}{J_1(\xi R_0 / R_c)(J_1(\xi R_0 / R_c)N_1(\xi) - J_1(\xi)N_1(\xi R_0 / R_c))}$$

محاسبات مورد نظر بصورت مستقیم انجام می شود:

$$b_- + b_+ = (b_- + b_+) \Big|_{\xi^2 = x_{0n}^2} + (\xi^2 - x_{0n}^2) \frac{\partial}{\partial \xi^2} (b_- + b_+) \Big|_{\xi^2 = x_{0n}^2}$$



$$\begin{aligned}
b_- + b_+ &= - \frac{(2J_1(\xi) / \pi)(R_c^2 / \xi^2 R_0^2)}{J_1(\xi R_0 / R_c)(J_1(\xi R_0 / R_c)N_1(\xi) - J_1(\xi)N_1(\xi R_0 / R_c))} \Big|_{\xi^2 = x_{0n}^2} \\
&- (\xi^2 - x_{0n}^2) \frac{1}{2\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{(2J_1(\xi) / \pi)(R_c^2 / \xi^2 R_0^2)}{J_1(\xi R_0 / R_c)(J_1(\xi R_0 / R_c)N_1(\xi) - J_1(\xi)N_1(\xi R_0 / R_c))} \Big|_{\xi^2 = x_{0n}^2} \\
b_- + b_+ &= - \frac{(2J_1(x_{0n}) / \pi)(R_c^2 / x_{0n}^2 R_0^2)}{J_1(x_{0n} R_0 / R_c)(J_1(x_{0n} R_0 / R_c)N_1(x_{0n}) - J_1(x_{0n})N_1(x_{0n} R_0 / R_c))} \Big|_{\xi^2 = x_{0n}^2} \\
&- (\xi^2 - x_{0n}^2) \frac{1}{2\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{(2J_1(\xi) / \pi)(R_c^2 / \xi^2 R_0^2)}{J_1(\xi R_0 / R_c)(J_1(\xi R_0 / R_c)N_1(\xi) - J_1(\xi)N_1(\xi R_0 / R_c))} \Big|_{\xi^2 = x_{0n}^2} \\
b_- + b_+ &= - (\xi^2 - x_{0n}^2) \frac{1}{2\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{(2J_1(\xi) / \pi)(R_c^2 / \xi^2 R_0^2)}{J_1(\xi R_0 / R_c)(J_1(\xi R_0 / R_c)N_1(\xi) - J_1(\xi)N_1(\xi R_0 / R_c))} \Big|_{\xi^2 = x_{0n}^2} = \\
&- (\xi^2 - x_{0n}^2) \frac{1}{2} \frac{2}{\pi \xi} \frac{R_c^2}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\xi^2} \frac{J_1(\xi)}{J_1(\xi R_0 / R_c)(J_1(\xi R_0 / R_c)N_1(\xi) - J_1(\xi)N_1(\xi R_0 / R_c))} \Big|_{\xi^2 = x_{0n}^2} = \\
&- (\xi^2 - x_{0n}^2) \frac{1}{2} \frac{2}{\pi \xi} \frac{R_c^2}{R_0^2} \frac{J_1'(\xi) \xi^2 J_1(\xi R_0 / R_c)(J_1(\xi R_0 / R_c)N_1(\xi) - J_1(\xi)N_1(\xi R_0 / R_c))}{(\xi^2 J_1(\xi R_0 / R_c)(J_1(\xi R_0 / R_c)N_1(\xi) - J_1(\xi)N_1(\xi R_0 / R_c)))^2} \Big|_{\xi^2 = x_{0n}^2} = \\
&- (\xi^2 - x_{0n}^2) \frac{1}{2} \frac{2}{\pi \xi} \frac{R_c^2}{R_0^2} \frac{J_1'(\xi)}{\xi^2 J_1(\xi R_0 / R_c)(J_1(\xi R_0 / R_c)N_1(\xi) - J_1(\xi)N_1(\xi R_0 / R_c))} \Big|_{\xi^2 = x_{0n}^2}
\end{aligned}$$

از روابط زیر در ادامه محاسبات استفاده می کنیم:

$$J_1(x)N_0(x) - J_0(x)N_1(x) = \frac{2}{\pi x}$$

$$J_1'(x) = \frac{1}{x} J_1(x) - J_2(x) \quad (۳۵-۴)$$

$$J_0(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_2(x)$$

$$\begin{aligned}
b_- + b_+ &= (\xi^2 - x_{0n}^2) \frac{1}{2} \frac{R_c^2}{R_0^2} \frac{J_1'(\xi)(J_0(\xi)N_1(\xi) - J_1(\xi)N_0(\xi))}{\xi^2 J_1(\xi R_0/R_c)(J_1(\xi R_0/R_c)N_1(\xi) - J_1(\xi)N_1(\xi R_0/R_c))} \Big|_{\xi^2=x_{0n}^2} = \\
&= (\rho^2 R_c^2 - x_{0n}^2) \frac{1}{2} \frac{R_c^2}{R_0^2} \frac{J_1'(x_{0n})J_0(x_{0n})}{\rho^2 R_c^2 J_1(x_{0n}R_0/R_c)(J_1(x_{0n}R_0/R_c))} \\
b_- + b_+ &= \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - k_{0n}^2\right) \frac{1}{2\rho^2} \frac{R_c^2}{R_0^2} \frac{J_2^2(x_{0n})}{J_1^2(x_{0n}R_0/R_c)} \\
b_- + b_+ &= (\omega^2 - c^2 k_z^2 - c^2 k_{0n}^2) \frac{1}{2c^2 \rho^2} \frac{R_c^2}{R_0^2} \frac{J_2^2(x_{0n})}{J_1^2(x_{0n}R_0/R_c)} \quad (36-4)
\end{aligned}$$

رابطه (36-4) همان چیزی است که در انتظارش بودیم و در ادامه از آن استفاده خواهیم کرد.

#### 4-5 معادله ولاسوف و روش مشخصه ای:

در این قسمت به محاسبه تابع توزیع اختلالی با استفاده از معادله ولاسوف و روش مشخصه ای می پردازیم. هدف آن است که پس از بدست آوردن این تابع توزیع با استفاده از آن چگالی جریان سمتی را بدست آورده و با جایگذاری چگالی جریان سمتی در رابطه (4-33) و همچنین استفاده از رابطه (4-36) در رابطه (4-33) به رابطه پاشندگی نهایی برسیم. همانند آنچه در فصل سوم انجام دادیم ابتدا معادله ولاسوف را نوشته و خطی می کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} f + v \cdot \frac{\partial}{\partial x} f - e(E + \frac{v \times B}{c}) \cdot \frac{\partial}{\partial p} f &= 0 \\
f(x, p, t) &= f_0(x, p) + f_1(x, p, t) \\
E(x, t) &= E_0(x) + E_1(x, t) \\
B(x, t) &= B_0(x, t) + B_1(x, t) \\
\frac{\partial}{\partial t} f_1 + v \cdot \frac{\partial}{\partial x} f_1 - e(E_0 + \frac{v \times B_0}{c}) \cdot \frac{\partial}{\partial p} f_1 &= e(E + \frac{v \times B_1}{c}) \cdot \frac{\partial}{\partial p} f_0 \quad (37-4)
\end{aligned}$$

برای بدست آوردن تابع توزیع اختلالی از رابطه (4-37) که معادله خطی شده ولاسوف می باشد باید از روشی به نام روش مشخصه ای استفاده کرد که در این روش ذره ای تحت تاثیر میدان های اختلالی قرار

می گیرد که در اینصورت مسیری مشخص در فضای فاز خود یعنی  $x(t), p(t)$  طی خواهد کرد از طرف دیگر اگر این ذره در زمان  $t$  تنها تحت تاثیر میدان های تعادلی باشد مسیری را در فضای پیکربندی خود طی خواهد کرد که با معادلات زیر مشخص می شوند:

$$\frac{dx'(t')}{dt'} = v'(t')$$

$$\frac{dp'(t')}{dt'} = -e[E_0 + \frac{v' \times B_0}{c}]$$

حال تحت شرایط اولیه مساله این دو مسیر در یک زمان مشخص همدیگر را قطع می کنند:

$$p'(t')_{t=t'} = p(t)$$

$$x'(t')_{t=t'} = x(t)$$

از طرفی معادله خطی شده ولاسوف برای تمامی زمانها از جمله  $t = t'$  برقرار است:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1 + v \cdot \frac{\partial}{\partial x} f_1 - e \left( \frac{v \times B_0}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial p} f_1 =$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} f_1 + v' \cdot \frac{\partial}{\partial x'} f_1 - e \left( \frac{v' \times B_0}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial p'} f_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} f_1 + \frac{dx'}{dt'} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} f_1 - \frac{dp'}{dt'} \cdot \frac{\partial}{\partial p'} f_1 = \frac{df_1}{dt'}$$

$$\frac{df_1}{dt'} = e \left( E_1 + \frac{v' \times B_1}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial p'} f_0$$

$$f_1 = e \int_{-\infty}^t dt' \left( E_1(r') + \frac{v' \times B_1(r')}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial p'} f_0 e^{i(k_z(z'-z) - \omega(t'-t))}$$

$$f_1 = e \int_{-\infty}^{\tau} d\tau \left( E_1(r') + \frac{v' \times B_1(r')}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial p'} f_0 e^{i(k_z(z'-z) - \omega\tau)} \quad (38-4)$$

در نتیجه تابع توزیع اختلالی بصورت رابطه (۴-۳۸) بدست می آید.

حال به بررسی مسیر الکترون در میدان های تعادلی می پردازیم که بدین منظور از معادلات حرکت

استفاده می کنیم:

$$\frac{dp'_r}{dt'} = -e[E(r')e_r + \frac{v'}{c} \times (B_\theta(r')e_\theta + B_z(r')e_r)]$$

$$\frac{dp'_r}{dt'} = -e[E_r(r')e_r - \frac{v'_z}{c} B_\theta(r') + \frac{v'_\theta}{c} B_z(r')]$$

در رابطه بالا میدان مغناطیسی سمتی خود میدان مغناطیسی می باشد که طبق فرض مسئله از آن

چشمپوشی می کنیم:

$$\frac{dp'_r}{dt'} = -e[\frac{v'_\theta}{c} B_z(r')]$$

$$p'_\theta = m\omega_c \rho' \quad (۴-۳۹)$$

$$\rho' = r' - R_0$$

با استفاده از روابط (۴-۳۹) محاسبات را ادامه می دهیم:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m v'_r) = \gamma m \frac{d \rho'}{dt} = \gamma m \frac{d \rho'}{dt} = \frac{v'_\theta}{c} B_z(r')$$

$$\int_{-a}^{\rho'} \gamma m \frac{d \rho'}{dt} d \rho' = -e \int_{-a}^{\rho'} \frac{v'_\theta}{c} B_z(r') d \rho'$$

$$\gamma m \int_{-a}^{\rho'} \frac{d \rho'}{dt} \frac{d \rho'}{dt} dt = \gamma m \int_{-a}^{\rho'} \frac{d \rho'}{dt} \rho' dt = \gamma m \int_{-a}^{\rho'} \frac{1}{2} \frac{d \rho'^2}{dt} dt = \frac{-e}{c} B_0 \int_{-a}^{\rho'} v'_\theta d \rho'$$

$$\frac{1}{2} \gamma m \rho'^2 = \frac{-e}{c} B_0 \int_{-a}^{\rho'} v'_\theta d \rho' = -m\omega_c \int_{-a}^{\rho'} \frac{p'_\theta}{\gamma m} d \rho'$$

$$\frac{1}{2} \gamma m \rho'^2 = -m\omega_c \int_{-a}^{\rho'} \frac{\omega_c \rho'}{\gamma} d \rho' = \frac{-m\omega_c^2}{\gamma} \int_{-a}^{\rho'} \rho' d \rho' = -\frac{1}{2} m\omega_c^2 (\rho'^2 - a^2)$$

$$\rho'^2 = -\frac{\omega_c^2}{\gamma^2} (\rho'^2 - a^2)$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به زمان مشتق می گیریم:

$$\frac{d}{dt} \rho'^2 = -\frac{\omega_c^2}{\gamma^2} \frac{d}{dt} (\rho'^2 - a^2) = -\frac{\omega_c^2}{\gamma^2} (2\rho' \dot{\rho}')$$

$$\dot{\rho}' = -\frac{\omega_c^2}{\gamma^2} \dot{\rho}' \rightarrow \dot{\rho}' + \frac{\omega_c^2}{\gamma^2} \dot{\rho}' = 0 \rightarrow \begin{cases} \rho' = A e^{i\frac{\omega_c}{\gamma} t'} + B e^{-i\frac{\omega_c}{\gamma} t'} \\ V'_\rho = iA \frac{\omega_c}{\gamma} e^{i\frac{\omega_c}{\gamma} t'} - iB \frac{\omega_c}{\gamma} e^{-i\frac{\omega_c}{\gamma} t'} \end{cases}$$

با توجه به آنچه بدست آمد مشاهده می کنیم که حرکت ذرات در راستای شعاعی بصورت یک حرکت هارمونیک ساده می باشد. حال فرض می کنیم که مسیر ذرات در فضای فاز و فضای مکانیکی در زمان

$t = t'$  یکدیگر را قطع می کنند:

$$t = t' \rightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \\ v'_\rho = v_\rho \end{cases}$$

$$A = \frac{V_\rho + i\frac{\omega_c}{\gamma} \rho}{2i\frac{\omega_c}{\gamma}} e^{-i\frac{\omega_c}{\gamma} t}, B = \frac{i\frac{\omega_c}{\gamma} \rho - V_\rho}{2i\frac{\omega_c}{\gamma}} e^{i\frac{\omega_c}{\gamma} t}$$

$$\rho' = \frac{V_\rho + i\frac{\omega_c}{\gamma} \rho}{2i\frac{\omega_c}{\gamma}} e^{i\frac{\omega_c}{\gamma} \tau} + \frac{i\frac{\omega_c}{\gamma} \rho - V_\rho}{2i\frac{\omega_c}{\gamma}} e^{-i\frac{\omega_c}{\gamma} \tau}$$

$$\rho' = \frac{V_\rho}{2i\frac{\omega_c}{\gamma}} (e^{i\frac{\omega_c}{\gamma} \tau} + e^{-i\frac{\omega_c}{\gamma} \tau}) + \frac{\rho}{2} (e^{i\frac{\omega_c}{\gamma} \tau} - e^{-i\frac{\omega_c}{\gamma} \tau})$$

$$\rho' = \frac{V_\rho}{\frac{\omega_c}{\gamma}} \sin \frac{\omega_c}{\gamma} \tau + \rho \cos \frac{\omega_c}{\gamma} \tau = \frac{p_r}{m\omega_c} \sin \frac{\omega_c}{\gamma} \tau + \rho \cos \frac{\omega_c}{\gamma} \tau \quad (40-4)$$

از رابطه (40-4) در ادامه استفاده خواهیم کرد.

مجدداً به تابع توزیع اختلالی که در قبل بدست آورده شد باز می‌گردیم و با استفاده از روابط (۴-۶) و (۴-۷) به ساده‌سازی آن می‌پردازیم:

$$f_1 = e \int_{-\infty}^{\tau} d\tau (E_1(r') + \frac{v' \times B_1(r')}{c}) \cdot \frac{\partial}{\partial p'} f_0 e^{i(k_z(z'-z) - \omega\tau)}$$

$$\frac{\partial}{\partial p'} f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial p'} + \frac{\partial f_0}{\partial P_\theta} \frac{\partial P_\theta}{\partial p'} + \frac{\partial f_0}{\partial P_z} \frac{\partial P_z}{\partial p'}$$

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial p'} = \frac{V}{mc^2} = \frac{1}{mc^2} (v'_r e_r + v'_\theta e_\theta + v'_z e_z)$$

$$\frac{\partial P_\theta}{\partial p'} = r' e_\theta, \quad \frac{\partial P_z}{\partial p'} = e_z$$

با توجه به اینکه کمیات پرایم دار مربوط به حالت‌های تعادلی می‌باشد و با یادآوری اینکه مولفه‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی اختلالی را در قبل با توجه به مد TE بدست آوردیم خواهیم داشت:

$$f_1 = e \int_{-\infty}^{\tau} d\tau (E_\theta e_\theta + \frac{(v'_r e_r + v'_\theta e_\theta + v'_z e_z) \times (B_r e_r + B_z e_z)}{c}) \cdot \frac{\partial}{\partial p'} f_0 e^{i(k_z(z'-z) - \omega\tau)}$$

$$f_1 = e \int_{-\infty}^{\tau} d\tau (E_\theta e_\theta + \frac{1}{cr} (v'_\theta B_z) e_r - (\frac{v'_r B_z}{c} - \frac{v'_z B_r}{c}) e_\theta - \frac{1}{cr} (v'_\theta B_r) e_z).$$

$$(\frac{\partial f_0}{\partial \gamma} \frac{1}{mc^2} (v'_r e_r + v'_\theta e_\theta + v'_z e_z) + \frac{\partial f_0}{\partial p_\theta} r' e_\theta + \frac{\partial f_0}{\partial p_z} e_z) e^{i(k_z(z'-z) - \omega\tau)}$$

$$f_1 = e \int_{-\infty}^{\tau} d\tau (\frac{1}{mc^2} E_\theta v'_\theta \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} + (r' E_\theta + \frac{r' v'_z}{c} B_r - \frac{r' v'_r}{c} B_z) \frac{\partial f_0}{\partial p_\theta} - \frac{1}{c} \frac{v'_\theta B_r}{c} \frac{\partial f_0}{\partial p_z}) e^{i(k_z(z'-z) - \omega\tau)}$$

در این قسمت از رابطه زیر که در قبل با استفاده از معادلات ماکسول در خلا بدست آوردیم استفاده می‌کنیم:

$$E_{\theta}(r) = -\frac{\omega}{kc} B_r(r)$$

با استفاده از معادله بالا به انجام محاسبات ادامه می دهیم:

$$f_1 = e \int_{-\infty}^{\tau} d\tau \left( \frac{1}{mc^2} E_{\theta} v'_{\theta} \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} + (r' E_{\theta} - \frac{r' v'_z}{c} \frac{kc}{\omega} E_{\theta}) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\theta}} \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \frac{v'_{\theta}}{c} \frac{kc}{\omega} E_{\theta} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right) e^{i(k_z(z'-z) - \omega\tau)}$$

$$f_1 = e \int_{-\infty}^{\tau} d\tau e^{i(k_z(z'-z) - \omega\tau)} \left( E_{\theta} v'_{\theta} \left( \frac{1}{mc^2} \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} + \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right) + r' E_{\theta} \left( 1 - \frac{kv'_z}{\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\theta}} \right)$$

$$f_1 = e \left( \frac{1}{mc^2} \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} + \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right) \int_{-\infty}^{\tau} d\tau e^{i(k_z(z'-z) - \omega\tau)} E_{\theta} v'_{\theta} \quad (41-4)$$

از تابع  $\phi$  که در زیر تعریف می کنیم و همچنین شرط نازک بودن پرتو الکترونی در ادامه استفاده خواهیم کرد:

$$\phi(r) = irE_{\theta}(r) \quad (42-4)$$

$$r = R_0 \rightarrow \phi(r) = \phi(R_0) = \phi_0$$

از رابطه (40-4) در ادامه استفاده می کنیم:

$$p'_{\theta} = m\omega_c \rho'$$

$$p'_{\theta} = m\omega_c \left( \frac{p_r}{m\omega_c} \sin \frac{\omega_c}{\gamma} \tau + \rho \cos \frac{\omega_c}{\gamma} \tau \right)$$

$$v'_{\theta} = \frac{\omega_c}{\gamma} \left( \frac{p_r}{m\omega_c} \sin \frac{\omega_c}{\gamma} \tau + \rho \cos \frac{\omega_c}{\gamma} \tau \right) \quad (43-4)$$

$$z' - z = \frac{p_z}{\gamma m} \quad (44-4)$$

با استفاده از روابط (۴۲-۴) و (۴۳-۴) و (۴۴-۴) و همچنین با توجه به اینکه پس از محاسبه تابع توزیع اختلالی از آن برای محاسبه چگالی جریان سمتی استفاده می شود یعنی در رابطه (۳۳-۴) پس باید از آن نسبت به  $r$  انتگرال گرفت و چون حدود انتگرال متقارن است پس تمامی جملاتی که تابع فردی از  $v_r$  یا  $p_r$  می باشند را حذف می کنیم پس:

$$f_1 = e \frac{\omega_c \rho}{\gamma} \frac{\phi_0}{iR_0} \left( \frac{1}{mc^2} \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} + \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right) \int_{-\infty}^{\tau} d\tau e^{i(k_z(z'-z) - \omega\tau)} \cos \frac{\omega_c}{\gamma} \tau d\tau$$

$$f_1 = e \frac{\omega_c \rho}{\gamma} \frac{\phi_0}{iR_0} \left( \frac{1}{mc^2} \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} + \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(k_z \frac{p_z}{\gamma m} - \omega)\tau} \frac{e^{\frac{i\omega_c}{\gamma}\tau} + e^{-\frac{i\omega_c}{\gamma}\tau}}{2} d\tau$$

$$f_1 = e \frac{\omega_c \rho}{2\gamma} \frac{\phi_0}{iR_0} \left( \frac{1}{mc^2} \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} + \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right) \int_{-\infty}^0 d\tau \left( e^{i(k_z \frac{p_z}{\gamma m} - \omega - \frac{\omega_c}{\gamma})\tau} + e^{i(k_z \frac{p_z}{\gamma m} - \omega + \frac{\omega_c}{\gamma})\tau} \right) d\tau$$

$$f_1 = e \frac{\omega_c \rho}{2\gamma} \frac{\phi_0}{iR_0} \left( \frac{1}{mc^2} \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} + \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right) \left[ \frac{1}{i(k_z \frac{p_z}{\gamma m} - \omega - \frac{\omega_c}{\gamma})} + \left( \frac{1}{i(k_z \frac{p_z}{\gamma m} - \omega + \frac{\omega_c}{\gamma})} \right) \right]$$

$$f_1 = e \frac{\omega_c \rho}{R_0} \phi_0 \left( \frac{1}{mc^2} \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} + \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right) \frac{\gamma\omega - \frac{k_z p_z}{m}}{(\gamma\omega - \frac{k_z p_z}{m})^2 - \omega_c^2} \quad (۴۵-۴)$$

رابطه (۴۵-۴) تابع توزیع اختلالی مورد نظر است که از آن برای محاسبه چگالی جریان سمتی استفاده می کنیم:

$$J_\theta(r) = -e \int d^3 p v_\theta f_1$$

$$J_\theta(r) = \frac{-e^2 \phi_0 \omega_c^2 \rho^2}{2mc^2 \omega R_0} \int d^3 p \left( \frac{1}{mc^2} \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} + \frac{k}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right) \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma\omega - \frac{k_z p_z}{m}}{(\gamma\omega - \frac{k_z p_z}{m})^2 - \omega_c^2} \quad (۴۶-۴)$$

رابطه (۴۶-۴) چگالی جریان سمتی باریکه الکترونی می باشد.



#### ۴-۶ بدست آوردن رابطه پاشندگی

قبل از حل انتگرال (۴-۴۶) به منظور بدست آوردن رابطه پاشندگی ابتدا کمیاتی را بدست خواهیم آورد که در حل این انتگرال از آنها استفاده خواهیم کرد. از رابطه (۴-۱۳) که در قبل بدست آوردیم نتیجه می گیریم:

$$H = \gamma_0 mc^2 + \frac{p_r^2}{2m\gamma_0} + \frac{1}{2} \gamma_0 m \omega_{c0}^2 \rho^2$$

$$H^2 = \gamma_0^2 m^2 c^4 + \frac{p_r^4}{4m^2 \gamma_0^2} + \frac{1}{4} \gamma_0^2 m^2 \omega_{c0}^4 \rho^2 + \gamma_0^2 m^2 c^2 \omega_{c0}^2 \rho^2$$

$$+ p_r^2 c^2 + \frac{1}{2} \omega_{c0}^2 p_r^2 \rho^2$$

$$H^2 - \gamma_0^2 m^2 c^4 = p_r^2 c^2 + \gamma_0^2 m^2 c^2 \omega_{c0}^2 \rho^2 \quad (4-47)$$

با توجه به اینکه الکترون بیشترین دامنه ای که در حرکت سیکلوترونی خود می تواند طی کند برابر شعاع لارمورش یعنی  $a$  است:

$$p_\theta = m \omega_c \rho$$

$$H^2 - \gamma_0^2 m^2 c^4 = \gamma_0^2 m^2 c^2 \omega_{c0}^2 a^2 \quad (4-48)$$

از تساوی روابط (۴-۴۸) و (۴-۴۷) داریم:

$$\gamma_0^2 m^2 c^2 \omega_{c0}^2 a^2 = p_r^2 c^2 + \gamma_0^2 m^2 c^2 \omega_{c0}^2 \rho^2$$

$$\frac{1}{c^2} (\gamma_0^2 m^2 c^2 \omega_{c0}^2 a^2) = \frac{1}{c^2} (p_r^2 c^2 + \gamma_0^2 m^2 c^2 \omega_{c0}^2 \rho^2)$$

$$m^2 \omega_c^2 a^2 = p_r^2 + m^2 \omega_c^2 \rho^2 \rightarrow p_r^2 = m^2 \omega_c^2 (a^2 - \rho^2)$$

از روابط زیر در انجام محاسبات بهره می گیریم:

$$p_\theta = p_\perp \sin \phi, p_r = p_\perp \cos \phi \xrightarrow{p_\perp = m \omega_c a}$$

$$p_\theta = m \omega_c a \sin \phi, p_r = m \omega_c a \cos \phi$$

فرض می کنیم زاویه فاز مناسبی که در روابط بالا صدق می کند  $\phi_0$  باشد:

$$p_\theta = m\omega_c a \sin \phi_0, p_r = m\omega_c a \cos \phi_0$$

$$\cos \phi_0 = \frac{p_r}{m\omega_c a} = \frac{m\omega_c (a^2 - \rho^2)^{1/2}}{p_\perp} \rightarrow p_\perp \cos \phi_0 = m\omega_c (a^2 - \rho^2)^{1/2} \quad (49-4)$$

قسمت مربوط به اندازه حرکت کانونیکی در تابع توزیع را با استفاده از رابطه (4-6) بصورت زیر ساده می کنیم:

$$\delta(P_\theta - P_0) = \delta(rp_\theta - \frac{e}{2c} B_0 r^2 - P_0) = \frac{1}{r} \delta(p_\theta - \frac{e}{2c} B_0 r - \frac{P_0}{r})$$

$$\delta(f(\phi)) = \sum_{\phi_0} \frac{\delta(\phi - \phi_0)}{\frac{\partial f(\phi_0)}{\partial \phi}}$$

$$\delta(f(\phi)) = \delta(p_\theta - \frac{e}{2c} B_0 r - \frac{P_0}{r})$$

$$f(\phi) = p_\theta - \frac{e}{2c} B_0 r - \frac{P_0}{r} = m\omega_c \rho - \frac{e}{2c} B_0 r - \frac{P_0}{r} =$$

$$= p_\perp \sin \phi - \frac{e}{2c} B_0 r - \frac{P_0}{r}$$

$$\frac{\partial f(\phi_0)}{\partial \phi} = m\omega_c a \cos \phi_0$$

$$\delta(p_\theta - P_0) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\delta(\phi - \phi_0)}{p_\perp \cos \phi_0} + \frac{\delta(\phi - (\pi - \phi_0))}{p_\perp \cos \phi_0} \right]$$

$$\delta(p_\theta - P_0) = \frac{1}{rm\omega_c (a^2 - \rho^2)^{1/2}} (\delta(\phi - \phi_0) + \delta(\phi - (\pi - \phi_0))) \quad (50-4)$$

بنابراین تابع توزیع مورد نظر در رابطه (۹-۴) را با استفاده از رابطه (۵۰-۴) بصورت زیر می نویسیم:

$$f_0(r, p) = \frac{N_e \omega_c}{4\pi^2 \hat{\gamma}_e mc^2} \frac{1}{rm\omega_c (a^2 - \rho^2)^{1/2}} \delta(\gamma - \hat{\gamma}_e) \delta(p_z - \hat{\gamma}_e m V_{ze}) \times \quad (۵۱-۴)$$

$$(\delta(\phi - \phi_0) + \delta(\phi - (\pi - \phi_0)))$$

با در نظر گرفتن رابطه (۸-۴) می توان روابط زیر را نتیجه گرفت:

$$\int d^3 p = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_r dp_z dp_\theta = \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_0^{\infty} p_\perp dp_\perp \int_0^{2\pi} d\phi = \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_{mc^2}^{\infty} mc^2 \gamma d\gamma \int_0^{2\pi} d\phi \quad (۵۲-۴)$$

حال به چگالی جریان مورد نظر در رابطه (۴۶-۴) بازمی گردیم و با جایگذاری (۵۲-۴) در آن نتیجه می شود:

$$J_\theta(r) = \frac{-e^2 \phi_0 \omega_c^2 \rho^2}{2\omega mc^2 R_0} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_0^{2\pi} d\phi \int_{mc^2}^{\infty} mc^2 \gamma d\gamma \left( \omega \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} + kmc^2 \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right) \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma\omega - \frac{k_z p_z}{m}}{(\gamma\omega - \frac{k_z p_z}{m})^2 - \omega_c^2}$$

$$J_\theta(r) = \frac{-e^2 \phi_0 \omega_c^2 \rho^2}{2\omega R_0} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_0^{2\pi} d\phi \int_{mc^2}^{\infty} d\gamma \left( \omega \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} + kmc^2 \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right) \frac{\gamma\omega - \frac{k_z p_z}{m}}{(\gamma\omega - \frac{k_z p_z}{m})^2 - \omega_c^2}$$

$$J_\theta(r) = \frac{-e^2 \phi_0 \omega_c^2 \rho^2}{2\omega R_0} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_0^{2\pi} d\phi \int_{mc^2}^{\infty} d\gamma \omega \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} \frac{\gamma\omega - \frac{k_z p_z}{m}}{(\gamma\omega - \frac{k_z p_z}{m})^2 - \omega_c^2} + \right.$$

$$\left. \int_0^{2\pi} d\phi \int_{mc^2}^{\infty} d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} dp_z kmc^2 \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \frac{\gamma\omega - \frac{k_z p_z}{m}}{(\gamma\omega - \frac{k_z p_z}{m})^2 - \omega_c^2} \right]$$

حال از فرض زیر برای ادامه محاسبات استفاده می کنیم:

$$\left| \omega - \frac{k_z p_z}{\gamma m} - \frac{\omega_c}{\gamma} \right| \square \frac{\omega_c}{\gamma}$$

$$J_\theta(r) = \frac{-e^2 \phi_0 \omega_c^2 \rho^2}{2\omega R_0} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_0^{2\pi} d\phi \int_{mc^2}^{\infty} d\gamma \omega \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} \frac{\omega - \frac{k_z p_z}{\gamma m}}{2\omega_c \left( \omega - \frac{k_z p_z}{\gamma m} - \frac{\omega_c}{\gamma} \right)} + \right. \\ \left. \int_0^{2\pi} d\phi \int_{mc^2}^{\infty} d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} dp_z k m c^2 \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \frac{1}{2\gamma \left( \omega - \frac{k_z p_z}{\gamma m} - \frac{\omega_c}{\gamma} \right)} \right]$$

حال برای حل انتگرال بالا از انتگرال جز به جز استفاده می کنیم :

$$J_\theta(r) = \frac{-e^2 \phi_0 \omega_c^2 \rho^2}{2\omega R_0} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_0^{2\pi} d\phi \int_{mc^2}^{\infty} d\gamma \omega \frac{\omega - \frac{k_z p_z}{\gamma m}}{2\omega_c \left( \omega - \frac{k_z p_z}{\gamma m} - \frac{\omega_c}{\gamma} \right)} f_0 + \right. \\ \left. \int_0^{2\pi} d\phi \int_{mc^2}^{\infty} d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} dp_z k m c^2 \frac{\omega^2 - k^2 c^2}{2\gamma^2 \left( \omega - \frac{k_z p_z}{\gamma m} - \frac{\omega_c}{\gamma} \right)^2} f_0 \right]$$

با جایگذاری تابع توزیع مورد نظر یعنی رابطه (۴-۵۱) در انتگرال بالا خواهیم داشت:

$$J_\theta(r) = \frac{-e^2 \phi_0 \omega_c^2 \rho^2}{2\omega R_0} \frac{N_e \omega_c}{4\pi^2 \hat{\gamma}_e m c^2} \frac{1}{r m \omega_c (a^2 - \rho^2)^{1/2}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(p_z - \hat{\gamma}_e m V_{ze}) dp_z \right. \\ \left. \int_0^{2\pi} (\delta(\phi - \phi_0) + \delta(\phi - (\pi - \phi_0))) d\phi \int_{mc^2}^{\infty} d\gamma \delta(\gamma - \hat{\gamma}_e) \omega \frac{\omega - \frac{k_z p_z}{\gamma m}}{2\omega_c \left( \omega - \frac{k_z p_z}{\gamma m} - \frac{\omega_c}{\gamma} \right)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{2\pi} (\delta(\phi - \phi_0) + \delta(\phi - (\pi - \phi_0))) d\phi \times \\
& \int_{mc^2}^{\infty} \delta(\gamma - \hat{\gamma}_e) d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \delta(p_z - \hat{\gamma}_e m V_{ze}) dp_z \frac{(\omega^2 - k^2 c^2)}{2\gamma^2 (\omega - \frac{k_z p_z}{\gamma m} - \frac{\omega_c}{\gamma})^2} \quad (53-4)
\end{aligned}$$

مجددا رابطه اصلی در بدست آوردن رابطه پاشندگی یعنی رابطه (۳۳-۴) را بازنویسی می کنیم:

$$b_- + b_+ = \frac{-4\pi i \omega}{c^2 R_0 \rho^2 E_\theta(R_0)} \int_{R_1^-}^{R_2^+} J_\theta(r) dr$$

حال با جایگذاری چگالی جریان موردنظر از رابطه (۵۳-۴) در سمت راست رابطه بالا و گرفتن انتگرال از آن و همچنین با جایگذاری رابطه (۳۶-۴) در سمت چپ این رابطه و ساده سازی معادلات به رابطه پاشندگی اصلی خواهیم رسید [10]:

$$\begin{aligned}
\omega^2 - c^2 k^2 - c^2 k_{0n}^2 &= \frac{4vc^2}{\hat{\gamma}_e |R_c J_2(k_{0n} R_c)|^2} \times \\
\left[ Q_1 \frac{\omega - k_z V_{ze}}{(\omega - k_z V_{ze} - \frac{\omega_c}{\hat{\gamma}_e})} - H_1 \frac{V_\perp^2}{c^2} \frac{(\omega^2 - k_z^2 c^2)}{(\omega - k_z V_{ze} - \frac{\omega_c}{\hat{\gamma}_e})^2} \right] & \quad (54-4)
\end{aligned}$$

$$H_1 = [J_1(k_{0n} R_0) J_1'(k_{0n} a)]^2$$

$$Q_1 = 2H_1 + 2(k_{0n} a) [J_1(k_{0n} R_0)]^2 J_1'(k_{0n} a) J_1''(k_{0n} a)$$

رابطه (۵۴-۴) رابطه پاشندگی نهایی می باشد که توصیف کننده برهمکنش موج الکترومغناطیس با باریکه الکترونی در درون یک موجبر استوانه ای است.

با استفاده از این رابطه می توان اطلاعات مفیدی درباره انتشار موج و طول موجی که در آن موج الکترومغناطیس انتشار پیدا می کند و شرایط قطع برهمکنش بدست آورد و همچنین می توان به نتایج

بسیار مفیدی در مورد میزان رشد ناپایداری موج یا همان میزان تقویت موج و طول موج هایی که در آن تقویت صورت می گیرد برسیم.

## نتیجه گیری:

در قسمت اول از تئوری تک ذره استفاده کردیم و با استفاده از کمیات اختلالی که تا مرتبه صفر و اول بدست آوردیم اطلاعات بسیار مفیدی درباره بانچینگ های سمتی و محوری بدست آورده شد سپس از کمیات اختلالی تا مرتبه اول برای بدست آوردن تغییرات انرژی تا مرتبه دوم و متعاقبا بهره دریافتی موج استفاده شد و مشاهده کردیم که جابجایی انرژی تنها از ذره به موج انجام نمی شود بلکه از موج به ذره نیز جابجایی انرژی داریم و در صورتی که میزان  $\epsilon(\omega^2 - c^2 k^2) > 0$  باشد بهره دریافتی موج مثبت و موج انرژی جذب می کند.

همچنین اثر افزایش میدان مغناطیسی محوری و افزایش انرژی باریکه الکترونی بر روی بازده مکانیزم از طریق عددی تحلیل شد. این بررسی نشان داد که برای سیگنال های قوی با باریکه ای با انرژی معین میدان مغناطیسی می توان پیدا کرد که در آن بازده مکانیزم بیشینه شده و مکانیزم بصورت بهینه موج را تقویت می کند و همچنین مشاهده شد که با در نظر گرفتن یک میدان مغناطیسی ثابت افزایش انرژی سبب افزایش بازده شده سپس بازده مکانیزم در یک انرژی خاص به بیشینه خود رسیده و بعد از آن بازده کاهش می یابد. در مورد سیگنال های کوچک افزایش میدان مغناطیسی در انرژی ثابت سبب افزایش بازده مکانیزم شده در حالی که هنگامی که میدان مغناطیسی معینی در نظر گرفته می شود افزایش انرژی باریکه سبب کاهش بازده مکانیزم شد.

در قسمت بعد از نظریه جنبشی استفاده شد و مشاهده کردیم که با حل همزمان معادلات ماکسول - ولاسوف می توان به یک رابطه کلی بر حسب تابع توزیعی خاص رسید سپس با جایگذاری تابع توزیع مورد نظر خود در آن رابطه پاشندگی نهایی را برای امواج تند بصورت زیر بدست آوردیم:

$$\omega^2 - c^2 k_z^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_0} \left[ \frac{\omega}{\omega - \frac{\Omega_e}{\gamma_0}} + \frac{k_z^2 v_{\perp 0}^2 (1 - \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2})}{2(\omega - \frac{\Omega_e}{\gamma_0})^2} \right]$$

از حل عددی این رابطه پاشندگی نرخ رشد ناپایداری مورد نظر نشان داده شد که از روی آنها می توان طول موج هایی که باعث تقویت موج می شوند را بدست آورد.

در قسمت آخر نیز با استفاده از نظریه جنبشی به بررسی تقویت موج الکترومغناطیس در درون یک موجبر استوانه ای کاملاً رسانا بدون در نظر گرفتن خود میدانها و همچنین اثرات امپدانس دیواره پرداخته ایم. که رابطه پاشندگی نهایی را بصورت زیر بدست آوردیم:

$$\omega^2 - c^2 k^2 - c^2 k_{0n}^2 = \frac{4\nu c^2}{\hat{\gamma}_e |R_c J_2(k_{0n} R_c)|^2} \times \left[ Q_1 \frac{\omega - k_z V_{ze}}{(\omega - k_z V_{ze} - \frac{\omega_c}{\hat{\gamma}_e})} - H_1 \frac{V_{\perp}^2}{c^2} \frac{(\omega^2 - k_z^2 c^2)}{(\omega - k_z V_{ze} - \frac{\omega_c}{\hat{\gamma}_e})^2} \right]$$

که  $H_1$  و  $Q_1$  بصورت زیر تعریف می شوند:

$$H_1 = [J_1(k_{0n} R_0) J_1'(k_{0n} a)]^2$$

$$Q_1 = 2H_1 + 2(k_{0n} a) [J_1(k_{0n} R_0)]^2 J_1'(k_{0n} a) J_1''(k_{0n} a)$$

که با استفاده از این رابطه پاشندگی به نتایج مفیدی در مورد انتشار موج و طول موج هایی که در آن تقویت صورت می گیرد می رسیم.



## پیشنهادات:

- ۱- در بدست آوردن رابطه پاشندگی در فصل چهارم از اثرات خود میدانها چشمپوشی شده است که می توان این کار را با در نظر گرفتن خود میدانها انجام داد.
- ۲- در بدست آوردن رابطه پاشندگی در فصل چهارم از اثرات امپدانس دیواره چشمپوشی شده است که می توان این کار را با در نظر گرفتن این اثرات انجام داد.
- ۳- در فصل چهارم می توان اثر خود میدانها و اثر امپدانس دیواره را بصورت همزمان در نظر گرفته و مکانیزم را بررسی کرد.
- ۴- همچنین در فصل چهارم می توان به بررسی مکانیزم زمانی که فاصله بین موجبر و پرتو الکترونی با یک ماده دی الکتریک پر شده است پرداخت.
- ۵- در فصل چهارم می توان تمامی موارد گفته شده را برای مد TM موج اختلالی محاسبه و بررسی کرد.

پیوست

پیوست ۱) همانطور که در قبل گفته شد معادلات الکترون ها را در میدان موج الکترومغناطیس

ورودی با استفاده از نظریه ذره ای می توان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt} \gamma = -\frac{eE_0 v_{\perp}}{m_e c^2} \cos(\omega t - k_z z - \phi) \quad (1-1)$$

$$\frac{d}{dt} v_{\perp} = -\frac{eE_0}{\gamma m_e} \left(1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2} - \frac{k_z v_z}{\omega}\right) \cos(\omega t - k_z z - \phi) \quad (2-1)$$

$$\frac{d}{dt} \phi = \frac{\Omega_e}{\gamma} - \frac{eE_0}{\gamma m_e v_{\perp}} \left(1 - \frac{k_z v_z}{\omega}\right) \sin(\omega t - k_z z - \phi) \quad (3-1)$$

$$\frac{d}{dt} v_z = -\frac{eE_0 v_{\perp}}{\gamma m_e} \left(\frac{k_z}{\omega} - \frac{v_z}{c^2}\right) \cos(\omega t - k_z z - \phi) \quad (4-1)$$

$$\frac{d}{dt} z = v_z \quad (5-1)$$

آنچه که در این دسته معادلات (۱) تا (۵) مشهود است وابستگی این روابط بصورت خود سازگار به یکدیگر

است بنابراین برای بررسی آن نیاز است که این روابط بصورت همزمان حل شوند. اما هدف اصلی تعیین

بازده مکانیزم می باشد که بصورت زیر تعریف می شود:

$$\eta = \frac{-1}{\gamma_0 - 1} \int_0^t \left\langle \frac{d}{dt} \gamma \right\rangle_{\phi_0} dt \quad (6-1)$$

حال برای حل عددی و همزمان روابط (۱) تا (۵) و همچنین تعیین بازده مکانیزم برای دو دسته سیگنال

بزرگ و کوچک با استفاده از زبان برنامه نویسی فرترن به روش رونگ - کوتا مرتبه چهارم برنامه ای (کد)

مناسب بصورت زیر ارائه شده است:

program maser

implicit none

```

real::l1,l2,l3,l4,r1,r2,r3,r4,w1,w2,w3,w4,b1,b2,b3,b4,k1,k2,k3,k4,h,c,sum,mm,f,u,a,d,v
integer::ii,i,s,j,jj
real,dimension(:,:),allocatable::mat
real,dimension(:),allocatable::t,va,g,fi,vz,z,miy,dg
"print*,"enter the number of steps
read(*,*) s
allocate(dg(s))
allocate(t(s))
allocate(va(s))
allocate(g(s))
allocate(fi(s))
allocate(vz(s))
allocate(z(s))
allocate(mat(628,s))
allocate(miy(s))
!*****
print*,"enter the c"
read(*,*) c
h=c/s
print*,"enter the t0"
read(*,*) t(0)
print*,"enter the va0"
read(*,*) va(0)
print*,"enter the g0"
read(*,*) g(0)
print*,"enter the vz0"
read(*,*) vz(0)
print*,"enter the z0"
read(*,*) z(0)
print*,"here"
!*****

```

```

do ii=1,628
fi(0)=(ii-1)*0.01
do i=1,s
k1=h*f(t(i-1),g(i-1),va(i-1),fi(i-1),vz(i-1),z(i-1) )
l1=h*v(t(i-1),g(i-1),va(i-1),fi(i-1),vz(i-1),z(i-1))
r1=h*u(t(i-1),g(i-1),va(i-1),fi(i-1),vz(i-1),z(i-1))
w1=h*a(t(i-1),g(i-1),va(i-1),fi(i-1),vz(i-1),z(i-1))
b1=h*d(t(i-1),g(i-1),va(i-1),fi(i-1),vz(i-1),z(i-1))
k2=h*f(t(i-1)+h/2,g(i-1)+k1/2,va(i-1)+l1/2,fi(i-1)+r1/2,vz(i-1)+b1/2,z(i-1)+w1/2)
l2=h*v(t(i-1)+h/2,g(i-1)+k1/2,va(i-1)+l1/2,fi(i-1)+r1/2,vz(i-1)+b1/2,z(i-1)+w1/2)
r2=h*u(t(i-1)+h/2,g(i-1)+k1/2,va(i-1)+l1/2,fi(i-1)+r1/2,vz(i-1)+b1/2,z(i-1)+w1/2 )
w2=h*a(t(i-1)+h/2,g(i-1)+k1/2,va(i-1)+l1/2,fi(i-1)+r1/2,vz(i-1)+b1/2,z(i-1)+w1/2)
b2=h*d(t(i-1)+h/2,g(i-1)+k1/2,va(i-1)+l1/2,fi(i-1)+r1/2,vz(i-1)+b1/2,z(i-1)+w1/2)
k3=h*f(t(i-1)+h/2,g(i-1)+k2/2,va(i-1)+l2/2,fi(i-1)+r2/2,vz(i-1)+b2/2,z(i-1)+w2/2)
l3=h*v(t(i-1)+h/2,g(i-1)+k2/2,va(i-1)+l2/2,fi(i-1)+r2/2,vz(i-1)+b2/2,z(i-1)+w2/2 )
r3=h*u(t(i-1)+h/2,g(i-1)+k2/2,va(i-1)+l2/2,fi(i-1)+r2/2,vz(i-1)+b2/2,z(i-1)+w2/2 )
w3=h*a(t(i-1)+h/2,g(i-1)+k2/2,va(i-1)+l2/2,fi(i-1)+r2/2,vz(i-1)+b2/2,z(i-1)+w2/2 )
b3=h*d(t(i-1)+h/2,g(i-1)+k2/2,va(i-1)+l2/2,fi(i-1)+r2/2,vz(i-1)+b2/2,z(i-1)+w2/2 )
k4=h*f(t(i-1)+h,g(i-1)+k3,va(i-1)+l3,fi(i-1)+r3,vz(i-1)+b3,z(i-1)+w3 )
l4=h*v(t(i-1)+h,g(i-1)+k3,va(i-1)+l3,fi(i-1)+r3,vz(i-1)+b3,z(i-1)+w3 )
r4=h*u(t(i-1)+h,g(i-1)+k3,va(i-1)+l3,fi(i-1)+r3,vz(i-1)+b3,z(i-1)+w3)
w4=h*a(t(i-1)+h,g(i-1)+k3,va(i-1)+l3,fi(i-1)+r3,vz(i-1)+b3,z(i-1)+w3)
b4=h*d(t(i-1)+h,g(i-1)+k3,va(i-1)+l3,fi(i-1)+r3,vz(i-1)+b3,z(i-1)+w3)
t(i)=t(i-1)+h
g(i)=g(i-1)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
va(i)=va(i-1)+(l1+2*l2+2*l3+l4)/6
fi(i)=fi(i-1)+(r1+2*r2+2*r3+r4)/6
z(i)=z(i-1)+(w1+2*w2+2*w3+w4)/6
vz(i)=vz(i-1)+(b1+2*b2+2*b3+b4)/6
print*,t(i)
print*,g(i)

```

```

print*,va(i)
print*,fi(i)
print*,z(i)
print*,vz(i)
dg(i)=(g(i)-g(i-1))/(t(i)-t(i-1))
print*,"*****"
mat(ii,i)=dg(i)
enddo
enddo
do ii=1,628
print*,(mat(ii,i),i=1,s)
enddo
!*****
do ii=1,s
do jj=1,ii
sum=0
do i=1,628
sum=sum+mat(i,jj)
enddo
enddo
print*,"sum=",sum
sum=sum/(628)
sum=-sum/0.1
print*,sum
miy(ii)=sum
enddo
open(unit=1,file="c:\data8.txt",action="write",status="new")
mm=0
do i=1,s
miy(i)=miy(i)+mm
mm=miy(i)

```

```

write(1,*)miy(i)

enddo

close(1)

end

!*****
function f(t,g,va,fi,vz,z)
real,intent(in)::t,g,va,fi,vz,z
f=-2*3.14*0.005*va*cos(t*2*3.14-(3.14*z)-fi)
endfunction

!*****
function v(t,g,va,fi,vz,z)
real,intent(in)::t,g,va,fi,vz,z
v=-((0.005*2*3.14)/g)*(1-va**2-vz/2)*cos(t*2*3.14-(3.14*z)-fi)
endfunction

!*****
function u(t,g,va,fi,vz,z)
real,intent(in)::t,g,va,fi,vz,z
u=((2*3.14*1.05)/g)-((0.005*2*3.14)/(va*g))*(1-vz/2)*sin(t*2*3.14-(3.14*z)-fi)
endfunction

!*****
function a(t,g,va,fi,vz,z)
real,intent(in)::t,g,va,fi,vz,z
a=vz
endfunction

!*****
function d(t,g,va,fi,vz,z)
real,intent(in)::t,g,va,fi,vz,z
d=-((0.005*2*3.14*va)/g)*(.5-vz)*cos(t*2*3.14-(3.14*z)-fi)
endfunction

```

پیوست ۲) بعد از بدست آوردن رابطه پاشندگی بصورت رابطه (۳-۳۷) به شکل زیر:

$$\omega^2 - c^2 k_z^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_0} \left[ \frac{\omega}{\omega - \frac{\Omega_e}{\gamma_0}} + \frac{k_z^2 v_{\perp 0}^2 (1 - \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2})}{2(\omega - \frac{\Omega_e}{\gamma_0})^2} \right] \quad (1-2)$$

ابتدا مقدار  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  در رابطه (۱-۲) جایگذاری خواهیم کرد و دو معادله حقیقی و موهومی را در آن تفکیک می کنیم سپس باید به حل همزمان این دو معادله برای یافتن جواب های آن پرداخت که بدین منظور از برنامه (کد) مناسبی که با استفاده از زبان برنامه نویسی فرترن به روش نیوتن - رافسون بصورت زیر نوشته شده است بهره گرفته ایم:

```

program gheyre_khati
  implicit none
  integer::i,n
  real::f,fr,fe,g,gr,ge,x0,y0,x1,y1
  double precision::d,d1,d2,h,k,t
  real,dimension(:),allocatable::s,x,y
  print*,"enter the dimension"
  read(*,*) n
  allocate(s(n))
  allocate(x(n))
  allocate(y(n))
  do i=1,n
    s(i)=i*0.1
  enddo
  print*,'enter the tolerance'
  read(*,*) t
  !*****
  x0=10

```



y0=0.125

do i=1,n

```
  \ d=(8*(x0**3)+400*x0+120*(y0**2)+40*s(i)**2-
120*(x0**2)+.076*x0+(19.60)-3.92*x0-4*x0*s(i)**2-24*(y0**2)*x0)*
(-3.92*x0+19.60+.076*x0+120*(y0**2)+400*x0-4*x0*s(i)**2-24*x0*(y0**2)-
120*(x0**2)+40*s(i)**2+8*(x0**3))-(-400*y0+240*x0*y0+8*(y0**3)+3.92*y0-
24*(x0**2)*y0+4*y0*s(i)**2-.076*y0)*(-3.92*y0+.076*y0+400*y0-4*y0*s(i)**2-
8*(y0**3)-240*x0*y0+24*y0*(x0**2))
  d1=(-200*(y0**2)+2*(x0**4)+200*(x0**2)-
200*s(i)**2+120*(y0**2)*x0+40*x0*s(i)**2+2*(y0**4)-
40*(x0**3)+1.96*(y0**2)+.038*(x0**2)+(19.60*x0)-1.96*(x0**2)-2*(x0**2)*s(i)**2-
12*(x0**2)*(y0**2)+2*(y0**2)*s(i)**2-.038*(y0**2)-.038*s(i)**2)*
(-3.92*x0+19.60+.076*x0+120*(y0**2)+400*x0-4*x0*s(i)**2-24*x0*(y0**2)-
120*(x0**2)+40*s(i)**2+8*(x0**3))+
(-3.92*x0*y0+19.60*y0+.076*x0*y0+40*(y0**3)+400*x0*y0-4*x0*y0*s(i)**2-
8*x0*(y0**3)-120*(x0**2)*y0+40*y0*s(i)**2+8*(x0**3)*y0)*
(-400*y0+240*x0*y0+8*(y0**3)+3.92*y0-24*(x0**2)*y0+4*y0*s(i)**2-.076*y0)
  d2=(-3.92*x0*y0+19.60*y0+.076*x0*y0+40*(y0**3)+400*x0*y0-4*x0*y0*s(i)**2-
8*x0*(y0**3)-
120*(x0**2)*y0+40*y0*s(i)**2+8*(x0**3)*y0)*(8*(x0**3)+400*x0+120*(y0**2)+40*
s(i)**2-120*(x0**2)+.076*x0+(19.60)-3.92*x0-4*x0*s(i)**2-24*(y0**2)*x0)+
(-200*(y0**2)+2*(x0**4)+200*(x0**2)-
200*s(i)**2+120*(y0**2)*x0+40*x0*s(i)**2+2*(y0**4)-
40*(x0**3)+1.96*(y0**2)+.038*(x0**2)+(19.60*x0)-1.96*(x0**2)-2*(x0**2)*s(i)**2-
12*(x0**2)*(y0**2)+2*(y0**2)*s(i)**2-.038*(y0**2)-.038*s(i)**2)*
(-3.92*y0+.076*y0+400*y0-4*y0*s(i)**2-8*(y0**3)-240*x0*y0+24*y0*(x0**2))
  h=d1/d
  k=d2/d
  if((k .lt. t) .and. (h .lt. t))go to 2
  do while(d .ne. 0)
    x1=x0+h
```

```
y1=y0+k
x0=x1
    y0=y1
    go to 1
enddo
Υ print*,x1,y1
    x(i)=x1
    y(i)=y1
    enddo
    open(unit=1,file="c:\data8.txt",action="write",status="new")
do i=1,n
write(1,*)y(i)
enddo
close(1)
end
```

# منابع

- [1] R.Q. Twiss (1958) "Radiation Transfer and the Possibility of Negative Absorption in Radio Astronomy" **Aust.J.Phys.**, 11, F
- [2] J. Schneider (1959) "Stimulated Emission of Radiation by Relativistic Electrons in a Magnetic Field" **Phys. Rev. Lett.**, 2, PP504
- [3] K.R. Chu (2004) "The Electron Cyclotron Maser" **Rev. Mod.Phys.**, 76, PP 489.
- [4] E.S. Weibel (1959) "Spontaneously Growing Transverse Waves in a Plasma Due to an Anisotropic Velocity Distribution" **Phys. Rev. Lett.**, 2, PP83
- [5] Hwansup Uhm, R.C. Davidson, and K.R. Chu (1978) "Selfconsistent Theory of Cyclotron Maser Instability for Intense Hollow Electron Beams" **Phys. Fluids.**, 21, PP1866.
- [6] Hwansup Uhm, R.C. Davidson, and K.R. Chu (1978) "Cyclotron Maser Instability for General Magnetic Harmonic Number" **Phys. Fluids.**, 21, PP 1877.
- [7] Han S. Uhm and Ronald C. Davidson (1979) "Cyclotron Maser Instability for Intense Solid Electron Beams" **J. Appl. Phys.**, 50, PP696.
- [8] Han S. Uhm and Ronald C. Davidson (1980) "Influence of Wall Impedance on the Electron Cyclotron Maser Instability" **Phys. Fluids.**, 23, PP2538.
- [9] E. khalilzadeh, B. Maraghechi, and A. Chakhmachi (2009) "Influence of Wall Impedance and Self-fields on the Cyclotron Maser Instability" **J. Appl. Phys.**, 106, PP053110.
- [10] Ronald C. Davidson (2001), "**Physics of Nonneutral Plasmas**", Imperial College Press and World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., PP.367.
- [11] K.R.Chen,J.M.Dawson,A.T.Lin and T.Katsouleas (1991) "Unified Theory and Comparative of Cyclotron Masers,Ion-Channel Lasers and Free Electron Lasers" **Phys. Fluids.**, B3, PP 1270.
- [12] K.R. Chu and J.L. Hirshfield (1978) "Comparative Study of the Axial and Azimuthal Bunching Mechanisms in Electromagnetic Cyclotron Instabilities" **Phys. Fluids.**, 21, PP461.
- [13] Han S.Uhm and Ronald C. Davidson (1986) "Influence of Intense Equilibrium Self-Fields on the Cyclotron Maser Instability in High-Current Gyrotrons" **Phys. Fluids.**, 29, PP 2713.

- [۱۴] P.H. Yoon and R.C. Davidson (1986) “Closed form Analytical Model of the Electron Whistler and Cyclotron Maser Instabilities in Relativistic Plasma with Arbitrary Energy Anisotropy” **Physical Review A**, Vol.35, Number 6, PP2619
- [۱۵] D.G. Swanson (2003), “**Plasma Waves**”, 2nd edition, IOP Publishing Ltd., PP
- [۱۶] Nicholas A. Krall and Alvin W. Trivelpiece (1973), “**Principle of Plasma Physics**”, McGraw-Hill, INC, PP.396.
- [۱۷] J.D.Jackson (2001), “**Classical Electrodynamics**”, Third Edition, Tehran: Nowpardazan, PP.582.

## **Abstract**

In the present study in context of one particle theory, amplification mechanism and efficiency of electron cyclotron maser instability are investigated primarily. Solving equations of motion for relativistic electrons numerically, the effects of magnetic field and electron beam energy on efficiency are studied. It is found that, in large signal regime for an electron beam by specific energy, there is an optimum magnetic field. The efficiency in this optimum magnetic field is maximized. In small signal regime, for a fixed of electron beam energy, increasing the magnetic field value increases the efficiency, but for a fixed magnetic field, increasing the beam energy decreases the efficiency. Then, applying kinetic theory, a stability analysis is carried out within the framework of the Vlasov-Maxwell equations with considering cylindrical waveguide and regardless of waveguide in the vacuum. Dispersion relation for electromagnetic perturbations has achieved in both cases. Numerical solving of dispersion relations provided precious information on wave propagation and the wavelengths resulting in wave amplifying.

**Key words:** Electron-Cyclotron-Maser, Bunching, Cyclotron frequency and Characteristic method



**Shahrood University Of Technology**

**Faculty Of Physics**

Thesis M.Sc

**Study of electromagnetic waves amplification by electron beam with cyclotron  
motion**

**A. Saeedi**

Supervisors

**Dr. M. Momeni**

**Dr. A. Chakhmachi**

**September 2013**