

الحمد لله الذي هدانا لهذا
الذي كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله



دانشکده : فیزیک
گروه : فیزیک ذرات بنیادی

مطالعهٔ تابش کوآرک سنگین با استفاده از AdS/CFT

دانشجو : هستی زاهدی قصبه

استاد راهنما :

دکتر کاظم بی تقصیر فدافن

استاد مشاور:

دکتر محمد علی اکبری

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ماه ۱۳۹۲

تقدیم بہ

او

کہ با مہربانی حدّ ام بہ او، تنہا کسی بودہ ام کہ پیوستہ خدائش دادہ ام...

حمد و سپاس

ای بوده و هست و بودنی! کفایت شنیدنی! امرت پیوستنی و خود دیدنی! عظیم شانی و مهربان! نه شنای تو را زبان، نه یافت تو را درمان!

الهی! به هر صفت که هستم، به هر خواست تو موقوفم! به هر نام که مرا خوانند، به بندگی تو معروفم! تا جان دارم، رخت ازین کوی بر ندارم! او که تو آن اوی، بهشت اورا بنده ست! او که تو در زندگانی اوی، جاوید زنده ست!

با قلمی فرزند آفتاب، با کلماتی زاینده می مسیح، با کلامی رشک رب النوع شعر، و آهنگی که خون بر دل ناپسند آورد، با آتشی که ذرات خاک اندام زرتشت را برقصاند، با فصاحتی که علی را از خلوت نخلستان های شب های دردمندش بیرون کشید، با شوری که حلاج را بر سردار بی قرار کرد، با لطافتی که مغل نرم پاره ابرهای آسمان تابستان را به آن تشبیه کنند و با اعجازی که صمیمیت الهام دارد و سگوه وحی را الهام است،

من؛ پدر و مادر مه واره ام، همه ی آیات آسمانی را که بر لبان خدا رفته است، از نخستین روز که با آدم سخن گفت تا آن پنجشنبه می بزرگ که لبان محمد ص، خاموش گشت، نخواهم جست، و از آن میان اعجازی ترین آیات خداوندی را برایتان برخواهم گزید.

ستایش خداوند مهربان را که روش پندارها و بارش واژه‌ها، جز با اراده‌ی او ممکن نخواهد شد.

سپاس از استاد محترم جناب دکتر کاظم بی‌تقصیر فدافن، که سایه‌ی اندیشه‌ی او در بی‌نهایت راه‌نمایی‌های خورشیدگونه‌ی‌شان تابناک‌گشت و سازم‌گارش این مکتوب را به‌همراهی ایشان گوگ‌شد. با قدردانی از مشاوره‌های ارزشمند و راه‌گشای جناب دکتر محمدعلی اکبری و با کمال تشکر از جناب دکتر علی واحدی و جناب دکتر مصطفی عنابستانی، که داورای این تحقیق را با سعی صدر پذیرفتند.

به رسم ادب از اساتید محترم آقایان دکتر محمدرضا سرکرده‌ای، دکتر حسین موحدیان، دکتر فرهنگ لران و دکتر نوید عباسی نیز سپاسگزارم که در این مسیر یاری‌گرا م بوده‌اند. همچنین با تشکر از کارمندان محترم دانشگاه‌های فنی‌یک جناب آقایان صفری و احمدی که لطفشان بی‌مضائقه‌ی هم‌راهم بود.

با مهرمندان‌ترین احساس، ارج می‌نهم برادرانم، خواهرم و به‌همراهی دوستان آشنایم را؛ سرکار خانم سمیه قدیری، آقایان مجید مرادی، محمدعلی‌پنی، روح‌الله اکبری و محسن حیدری که بی‌دریغ رفیق بوده‌اند. مدیون حادرضی زاده و سمانه‌ی سالمی، هستم که همیشه امید رو به انقطاع را دمانند. و سرانجام زینب فصاحت و علیرضا بزرگر؛ دو بزرگوار، دو عزیز و دو بهدل‌ام که بی‌چگاه‌ندانتم چگونه جواب‌گویی دریای محبتشان شوم، آنان که شکل، اسم و آثارشان جاودان با من است و محبوبیت و منعشان همواره دوست‌دانشینست. زین پس با دیدگان دور اما سبزی حضورشان و با قلبی آکنده از هرچه آرزوی خوبست برایشان، نم‌نم بارش باران نقره‌ای زانگاهم را به‌نظاره‌ی نشینم تا هر قطره باران آینه‌ی باشد به آرزوهایشان.

تعهد نامه

اینجانب هستی زاهدی قصبه دانشجوی دوره کارشناسی ارشد فیزیک ذرات بنیادی دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه مطالعه تابش کوآرک سنگین با استفاده از AdS/CFT تحت راهنمایی آقای دکتر کاظم بی تقصیر فدافن متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

یکی از مساله‌های اساسی در فیزیک، تابش یک ذره‌ی باردار کلاسیکی می‌باشد. ما در این تحقیق با استفاده از تناظر AdS/CFT در تقریب ابرگرانشی، چگالی انرژی تابشی یک کوارک سنگین را مطالعه می‌کنیم. که توسط یک نیروی خارجی در خلاء $N=4$ نظریه‌ی ابرتقارن یانگ-میلز با ثابت جفت شدگی قوی، به حرکت در آمده است.

پس از محاسبه‌ی چگالی انرژی تابشی کوارک، توان تابشی برای نمونه حرکت های مقید و مقایسه‌ی نتیجه‌ها با حالت کلاسیکی متناظر، چند ویژگی غیرطبیعی زیر را به دست آوردیم:

- توزیع انرژی، الگوی فضا-زمانی مشابهی با تابش کلاسیکی دارد که توسط یک کوارک سنگین در جفت شدگی ضعیف ایجاد می‌شود.
- انرژی تابشی در حد غیرنسبیتی ناهمسانگرد به دست می‌آید.
- چگالی انرژی در چند ناحیه منفی می‌شود.

سرانجام دریافتیم این نتیجه‌ها در استفاده از تقریب ابرگرانشی ناشی شده‌اند که اگر نوسان‌های ریسمان در نظر گرفته شوند، تصحیح می‌شوند.

کلمات کلیدی: نظریه‌ی ریسمان، تابش کوارک سنگین، دوگانگی AdS/CFT

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

- ۱- دکتر کاظم بی تقصیر فدافن ، هستی زاهدی قصبه “محاسبه چگالی انرژی تابشی کوآرک سنگین شتابدار با استفاده از تناظر AdS/CFT” کنفرانس بهاره فیزیک ذرات بنیادی (IPM) ،

۱-۲ خرداد ماه ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فصل اول : مقدمه

۱-۱	نگاهی کوتاه بر موضوع تحقیق	۲
۲-۱	ارتباط موضوع تحقیق با مطالعه‌های قبلی	۳
۳-۱	اهداف تحقیق	۷
۴-۱	اشاره به مطالب فصل‌های بعد	۸

فصل دوم : آشنایی با نظریه‌ی ریسمان و تناظر AdS/CFT

۱-۲	نیروهای بنیادی طبیعت	۱۱
۲-۲	نظریه‌ی کوانتومی رنگ	۱۳
۳-۲	مدل استاندارد	۱۶
۴-۲	نظریه‌ی وحدت یافته‌ی ریسمان	۱۷
۵-۲	جهان - سطح	۲۲
۶-۲	کنش ریسمان نسبیتی (نامبو گوتو)	۲۳
۷-۲	معادله حرکت ریسمان نسبیتی	۲۵
۸-۲	شامه‌های چند بعدی	۲۶
۹-۲	ابرتقارن	۲۸
۱۰-۲	دوگانگی پیمانہ / گرانش (gauge/gravity)	۲۹
۱۱-۲	تناظر AdS/CFT	۳۰
۱-۱۱-۲	فضای AdS	۳۰
۲-۱۱-۲	چرا AdS ؟	۳۲
۳-۱۱-۲	نظریه‌ی ابر تقارن $N=4$ یانگ-میلز با پیمانہ ی $SU(N_c)$ و تناظر AdS/CFT	۳۵
۱۲-۲	مقایسه‌ی پارامترهای تناظر در حد N_c بزرگ	۴۰
۱۳-۲	ارتباط UV/IR	۴۲

فصل سوم : مطالعه‌ی تابش کوآرک سنگین با استفاده از تناظر AdS/CFT

- ۳-۱-۱ تعریف مساله ۴۶
- ۳-۲-۲ معادله حرکت شتابدار با استفاده از ریسمان نامبو گوتو ۴۹
- ۳-۳-۳ محاسبه‌ی تانسور انرژی - تکانه ی پنج بعدی در فضای گرانشی ۵۶
- ۳-۴-۴ محاسبه‌ی چگالی انرژی کوآرک شتابدار در خلاء نظریه‌ی پیمانهای ۶۱
- ۳-۴-۱-۴ حل نمونه‌ای ساده به عنوان کاربردی از روابط چگالی انرژی ۷۶
- ۳-۵-۵ محاسبه‌ی چگالی انرژی تابشی و توان تابشی کوآرک شتابدار در خلاء ۷۸
- ۳-۶-۶ در نظر گرفتن حرکت‌های متفاوت برای کوآرک شتابدار ۸۵
- ۳-۶-۱-۶ چرخش یکنواخت ۸۵
- ۳-۶-۲-۶ حرکت دایروی غیر یکنواخت ۸۹
- ۳-۶-۳-۶ حرکت با شتاب خطی یکنواخت ۹۰
- ۳-۷-۷ مقایسه با نتیجه‌های کلاسیکی ۹۴
- ۳-۸-۸ نتیجه گیری ۹۷

پیوست

پیوست ۱ ۱۰۱

پیوست ۲ ۱۰۶

مراجع ۱۰۸

فهرست اشکال

- شکل ۱-۲- تصویری از اتم هیدروژن که شامل یک الکترون و یک پروتون است ۱۴
- شکل ۲-۲- تغییرات قدرت جفت شدگی در QCD و QED برحسب مقیاس فاصله، مقیاس انرژی و دما ۱۵
- شکل ۳-۲- تصویری از پنج نوع از نظریه ریسمان ۲۱
- شکل ۴-۲- تصویری از مسیر طی شده توسط ریسمان بسته و ریسمان باز در فضا-زمان (جهان-سطح) ۲۲
- شکل ۵-۲- ویژه سطح در فضا-زمان که شامل دو بردار $d\vec{v}_1$ و $d\vec{v}_2$ است و فضای پارامتری با دو پارامتر σ و τ ۲۳
- شکل ۶-۲- تصویری از ریسمان های باز که به دو شامه ختم شده اند ۲۷
- شکل ۷-۲- تصویری از برهم کنش ضعیف بین شامه ها ۳۱
- شکل ۸-۲- تصویری از برهم کنش قوی بین شامه ها و ایجاد فضای آنتی دو سیت ۳۱
- شکل ۹-۲- نمایی از دوگانگی پیمانه / ریسمان ۳۳
- شکل ۱۰-۲- برانگیختگی ها در توصیف ریسمان بسته ۳۸
- شکل ۱۱-۲- بعد اضافه در حجم گرانشی به عنوان مقیاسی در نظریه میدان ۴۳
- شکل ۱-۳- نمونه‌ی حرکت چرخش یکنواخت ۸۶
- شکل ۲-۳- تقسیم انرژی کوآرک به دو قسمت انرژی ذاتی و انرژی تابشی آن ۹۳

فهرست جداول

- جدول ۱-۲- مشخصات چهار نیروی طبیعت ۱۳

فصل اول

مقدمه

❖ نگاهی کوتاه بر موضوع تحقیق

❖ ارتباط موضوع تحقیق با مطالعه‌های قبلی

❖ اهداف تحقیق

❖ اشاره به مطالب فصل‌های بعدی

۱-۱- نگاهی کوتاه بر موضوع تحقیق

مطالعه‌ی تابش ذره‌ی باردار شتابدار کلاسیکی، یکی از مساله‌های پایه‌ای و اساسی فیزیک است. کلاسیکی^۱ به این معنی است که ذره به اندازه‌ی کافی سنگین در نظر گرفته شود که به عنوان جسمی نقطه‌ای رفتار و در یک مسیر^۲ کلاسیکی خوش تعریف^۳ یا به عبارتی دیگر، تحت تأثیر یک نیروی خارجی حرکت کند و تابش^۴ به این معنی است که ذره با گسیل کوانتای میدان انرژی خود را از دست می‌دهد.

دو مورد جفت شدگی ضعیف و قوی دارای خاصیت‌های متفاوتی می‌باشند؛ به طوری که در جفت شدگی ضعیف، این کوانتاهای گسیلی به طور ذاتی روی پوسته‌ی جرمی خود قرار گرفته اند^۵ و در نتیجه در مورد تابش در خلاء، این کوانتاها با سرعت نور انتشار می‌یابند. اما در حالت کلی برای این مورد جفت شدگی، ذرات گسیلی می‌توانند با سرعتی کمتر از سرعت نور هم حرکت کنند یعنی خارج از پوسته‌ی جرمی خود قرار گیرند^۶، که در این حالت آنها باعث تحولات بیشتری می‌شوند به این معنی که کوانتاهای زمان‌گونه^۷ که با سرعتی کمتر از سرعت نور حرکت می‌کنند، می‌توانند واپاشی کنند.

اما هنگامی که جفت شدگی قوی است، تنها انتظار می‌رود که کوانتاهای گسیلی زمان‌گونه باشند و در مقایسه با جفت شدگی ضعیف، الگوی به طور کامل متفاوتی برای تابش انرژی نشان دهد.

1 Classical
2 Trajectory
3 Well-Identified
4 Radiation
5 On-Shell
6 Off-shell
7 Time-like

به عنوان نمونه، تابش کوآرک سنگینی در نظر گرفته می‌شود که توسط یک ضربه^۱ و به عبارتی یک نیروی خارجی که در فضا و زمان جایگزیده^۲ است، به حرکت در می‌آید.

در جفت شدگی قوی^۳، تابش توسط گسیل تعدادی کوانتاهای مجازی^۴ که به کوانتاهای دیگر واپاشی می‌شوند، تولید می‌شود و در انتها توزیع انرژی جایگزیده‌ای نداریم. زیرا از آن جا که کوانتاهای زمان‌گونه با سرعتی کمتر از سرعت نور منتشر می‌شوند، انرژی حاصل از این ذرات گسیلی، یک توزیع به نسبت گسترده را نشان می‌دهد و به این دلیل که کوانتاهای مختلف می‌توانند به طور تصادفی در هر راستایی در چارچوب سکون^۵ کوآرک گسیل شوند، انتظار می‌رود که در جفت شدگی قوی، توزیع انرژی (مربوط به یک خیز لورنتسی^۶) همسانگرد^۷ باشد.

در این پایان‌نامه، مساله‌ی معرفی شده، با استفاده از دوگانگی AdS/CFT بررسی می‌شود [۱].

۱-۲- ارتباط موضوع تحقیق با مطالعه‌های قبلی

ابتدا در فصل دوم، دوگانگی AdS/CFT معرفی می‌شود. به طور خلاصه، دوگان مساله‌ی کوآرک شتابدار در خلاء، یک نظریه‌ی ریسمان است. یک کاربرد مشخص و شناخته شده از دوگانگی عبارت است از:

نظریه‌ی ریسمان نوع IIB در فضا-زمان $AdS_5 \times S^5$ ↔ نظریه‌ی ابرتقارن $N=4$ یانگ-میلز با

پیمانه‌ی $SU(N_c)$

1 Kick
2 Localized
3 Strong Coupling
4 Virtuality
5 Rest Frame
6 Lorentz Boost
7 Isotropic

در فصل دوم کمیت‌ها و معرفی آن‌ها ریزنگری می‌شوند. بنابراین، مساله در نظریه‌ی ابرتقارنی یانگ-میلز معرفی شده و با استفاده از دوگانی در نظریه ریسمان بررسی می‌شود. در مقالات [۲ و ۳] از این روش استفاده شده و توزیع شعاعی انرژی کوآرک محاسبه شده است.

نتیجه‌ی حاصل، فقدان هرگونه گستردگی انرژی^۱ را، دست‌کم در محاسبه‌های مربوط، نشان می‌دهد. این نتیجه به عنوان یکی از نتیجه‌های غیرمنتظره به حساب می‌آید:

انرژی تابشی در خلاء $N = 4$ نظریه‌ی ابرتقارن یانگ-میلز در ثابت جفت شدگی قوی، بیان می‌کند که تابش همانند حالت کلاسیکی متناظر، به طور کامل جایگزیده است.

این نکته برای تابش سینکروترونی^۲ تولید شده توسط یک کوآرک سنگین، به عنوان نمونه‌ای از چرخش یکنواخت مورد توجه قرار گرفت [۲]. نمونه‌های دیگر در منبع [۳] بررسی شده‌اند. مساله‌ی چرخش کوآرک، برای اولین بار در منبع [۴] مطالعه شده است و می‌توان ریزنگری‌های بیشتر را در [۵] یافت.

همانطور که در منبع [۲] و همچنین در محاسبه‌های منبع [۳] آمده است، این فقدان گستردگی شعاعی به این واقعیت مربوط می‌شود که کل مشارکت انرژی تنها توسط پاسخ نقاط نزدیک به مرز مینکوفسکی فضای AdS_5 ایجاد می‌شود، که البته به دلیل تقریب ابرگرانشی^۳ در AdS/CFT است.

تقریب ابرگرانشی، حد کلاسیکی نظریه‌ی ریسمان^۴ دوگان متناظر است که در آن حلقه‌ها^۵ و نوسان‌های^۶ ریسمان نادیده گرفته شده و به طور کلی می‌تواند حد جفت شدگی قوی توفت $\lambda = g_{YM}^2 N_c \rightarrow \infty$ (g_{YM} ثابت جفت شدگی یانگ-میلز است و N_c نشانگر تعداد رنگ می‌باشند) با

1 Energy Broadening

2 Synchrotron

3 Supergravity Approximation

4 String Theory

5 Loops

6 Fluctuation

ثابت جفت شدگی مشخص $1 \ll g_{YM}$ از نظریه‌ی ابرتقارن $N=4$ یانگ-میلز را توضیح دهد که در فصل دوم توضیح داده می‌شود.

ذره‌ی باردار شتابدار معادل یک ریسمان نامبو گوتو^۱ است که در فضای حجم^۲ گرانشی گسترش یافته است و بنا بر دوگانگی AdS/CFT باید پاسخ متریک AdS₅ به تانسور انرژی-تکانه‌ی پنج بعدی کوآرک شتابدار را به صورت اختلال‌های فیزیکی روی مرز در نظر گرفت. این فرایند همان پاسخ محیط یا به عبارتی پاسخ فضای گرانشی^۳ نامیده می‌شود.

محاسبه‌ی این پاسخ فضای گرانشی، شامل انتگرال‌گیری روی کل نقاط در راستای ریسمان معرف کوآرک سنگین است که توسط تانسور انرژی-تکانه‌ی فضای گرانشی انجام می‌شود. محاسبه‌های مشابه در دمای محدود [۹-۶]، بیان می‌کنند که تمام نقاط در طول ریسمان، سهمی را برای چگالی انرژی روی مرز فراهم می‌کنند که در نتیجه گستردگی انرژی را نشان می‌دهد.

نقاطی از ریسمان که بسیار دورتر از مرز قرار دارند، سهمی را ایجاد می‌کنند که در فضا-زمان گسترش بیشتری می‌یابند. این نکته در ذات تناظر فرابنفش/مادون قرمز^۴ [۱۱ و ۱۰] نهفته است، که در فصل دوم توضیح داده می‌شود.

محاسبه‌های در [۳ و ۲] نشان می‌دهد که برای تابش در خلاء که توسط کوآرک شتابدار تولید می‌شود؛ انتگرالی که بیانگر پاسخ فضای گرانشی است، تنها شامل مشارکت مرزی نقطه‌ی انتهایی در مرز مینکوفسکی می‌باشد.

1 Nambu-Goto
2 Bulk
3 Backreaction
4 Ultraviolet/Infrared

این مفاهیم بیانگر یک تناقض فیزیکی است که چرا تابش در نظریه‌ی میدان کوانتومی و جفت شدگی قوی، تنها شامل اثرهای نورگونه‌ی^۱ مد‌ها یا ذرات گسیلی، بدون هیچگونه اثری از نوسان‌های کوانتومی، می‌شود.

در منبع [۳]، راه حلی پیشنهاد می‌شود که دربرگیرنده‌ی تصحیح ریسمانی^۲ است که در حد جفت شدگی‌های قوی و هرکجا که شامل محاسبه پاسخ فضای گرانشی می‌شود، تغییر نکند. این راه حل ابتکاری که شامل کوانتیده کردن ریسمان فضا-زمان تخت است (که البته باید در فضا-زمان خمیده در نظر گرفته شود)، با حذف رفتار ذاتی نوسان‌های ریسمان در فضای AdS₅، گسترده‌ی انرژی را نشان می‌دهد که در تفاهم کامل با تناظر UV/IR است. داشتن درک بیشتری از تصحیح ریسمان در فضای AdS₅، همچنان مسأله‌ی باز^۳ به شمار می‌آید که البته هدف این تحقیق نمی‌باشد.

یکی از مهم‌ترین نتیجه‌های مطالعه‌های قبلی، توسط میخایلیف [۱۲] ارائه شده است. در این تحقیق، با استفاده از جواب‌های به دست آمده توسط میخایلیف برای وضعیت ریسمان متناظر با حرکت دلخواه کوآرک سنگین، مسأله‌ی تابش کوآرک شتابدار به دقت تحلیل می‌شود. جواب نهایی به طور جالبی با مورد تابش ذره‌ی باردار در الکترودینامیک یکسان است. به عبارتی دیگر، با مطالعه‌ی انرژی حمل شده توسط ریسمان شتابدار، میخایلیف رابطه‌ای برای توان تابشی به دست آورد که مشابه با فرمول لنارد^۴ در الکترودینامیک کلاسیکی است. نتیجه‌ی او در [۱۳ و ۱۴] گسترش داده شد به طوری که انرژی کل کوآرک در حال حرکت (انرژی ذاتی^۵ به علاوه‌ی انرژی تابشی)، توسط محاسبه‌های جهان - سطح^۶ به دست می‌آید.

1 Light-Like
2 String Corrections
3 Open Problem
4 Lienard
5 Proper
6 World-Sheet

۱-۳- اهداف تحقیق

در این تحقیق، باید نتیجه‌ی تحلیلی و دقیقی برای چگالی انرژی تابشی و توان تابشی یک کوآرک سنگین شتابدار، با استفاده از تقریب ابرگرانشی در خلاء $N = 4$ نظریه‌ی ابرتقارن یانگ-میلز، به دست آید. نتایج به دست آمده به دلایل مختلف جالب توجه است:

- دانش دقیق از نتایج ابرگرانش کلاسیکی، مهم‌ترین و الزامی‌ترین گام برای وارد کردن تصحیح ریسمان در مساله‌ها است.
- این محاسبه‌ی کلاسیکی به نسبت غیر بدیهی است، زیرا که نیازمند یک راه حل تحلیلی دقیق برای پاسخ فضای گرانشی می‌باشد. در فصل سوم حالت‌های کلی برای حرکت کوآرک در نظر گرفته می‌شوند که یکی از آن حرکات شامل محاسبه‌ی تابش سینکروترونی در [۲] می‌باشد. نتیجه‌ی کلی، یافته‌های قبل را به خوبی پوشش داده و آن‌ها را به هر حرکت دلخواهی بسط می‌دهد.
- در نمونه‌های کلی‌تر نیز، به طور دقیق مشخص می‌شود که سهم کلی پاسخ فضای گرانشی، همچنان از نقطه‌ی انتهایی ریسمان که نزدیک مرز واقع شده است، به دست می‌آید. بنابراین در این تقریب، تابش متناظر با نظریه‌ی میدان کلاسیکی، با سرعت نور منتشر می‌شود.
- علاوه بر دلایل ذکر شده که فقدان گستردگی شعاعی را نشان می‌دهد، ویژگی‌های جالب توجه دیگری نیز به دست می‌آید که بیان‌کننده‌ی محدودیت‌های تقریب ابرگرانشی است:
۱. ناهمسانگردی^۱ چگالی انرژی تابشی: ناهمسانگردی در جفت شدگی قوی، غیر طبیعی است. این خاصیت در نظریه‌ی $N = 4$ ابرتقارن یانگ-میلز، جایی که

1 Anisotropic

نتایج کلاسیکی متناظر وابسته به خیز لورنتسی همسانگرد است، نمود بیشتری دارد که به طور مفصل در فصل نتایج ذکر می‌شود.

۲. منفی^۱ بودن چگالی انرژی تابشی در برخی نواحی در فضا - زمان: منفی بودن چگالی انرژی در تابش بسیار غیرطبیعی است که این نتیجه نیز در بخش نتیجه‌گیری به طور دقیق‌تر توضیح داده می‌شود.

همچنین برای محاسبه‌ی پاسخ فضای گرانشی، از فرمول کلی چگالی انرژی در منبع [۲] استفاده می‌شود که چگالی انرژی روی مرز را به عنوان ارتباطی^۲ بین تانسور انرژی - تکانه ریسمان در فضای گرانشی و انتشارگر^۳ فضای گرانشی به مرز، در نظر می‌گیرد.

۱-۴- اشاره به مطالب فصل‌های بعدی

با استفاده از حل میخایلف برای وضعیت ریسمان، باید تانسور انرژی - تکانه فضای گرانشی را بر حسب حرکت کوآرک روی مرز بیان کرد و در نتیجه انتگرال‌های حاصل از پاسخ فضای گرانشی محاسبه می‌شوند. این محاسبه‌ها در بخش سوم از فصل سوم آمده است. نتیجه به این صورت است که به واسطه‌ی حذف‌های بارز بین سهم‌های مربوط به مؤلفه‌های مختلف تانسور انرژی - تکانه، تنها جمله‌هایی در نتیجه‌ی نهایی چگالی انرژی باقی می‌مانند که وابسته به مشارکت مرزی نقطه‌ی انتهایی ریسمان در مکان کوآرک سنگین است که این نتیجه‌ی بسیار مهم است.

سپس در بخش چهارم از فصل سوم، چگالی انرژی تابشی^۴ به دست می‌آید که به عنوان مؤلفه‌ای از انرژی کل تعریف می‌شود که با فاصله گرفتن از ذره‌ی شتابدار به صورت عکس مجذوری کم

1 Negative
2 Convolution
3 Propagator
4 Radiative Energy Density

می‌شود. با انتگرال‌گیری از این نتیجه روی سطح کره‌ای در بی‌نهایت (عملگر خوش تعریف برای مسیر کواری که به ناحیه ی مقیدی از فضا محدود می‌شود)، توان تابشی به دست می‌آید.

در ادامه‌ی پایان‌نامه و در بخش ششم از فصل سوم، تمرکز بیشتری روی نتایج به دست آمده می‌شود و سپس چند کاربرد خاص بررسی شده و همچنین نتایج با همتای کلاسیکی متناظر که مربوط به نظریه‌ی ابر تقارن $N = 4$ یانگ-میلز است، مقایسه می‌شوند.

و در نهایت در بخش آخر از فصل سوم به عنوان نتیجه گیری، ویژگی‌های غیر منتظره و غیر منطقی اشاره می‌شوند که نشانه‌ی محدودیت‌های تقریب ابرگرانشی هستند.

فصل دوم

آشنایی با نظریه‌ی ریسمان و تناظر AdS/CFT

- ❖ نیروهای بنیادی طبیعت
- ❖ نظریه‌ی کوانتومی رنگ
- ❖ مدل استاندارد
- ❖ نظریه‌ی وحدت یافته‌ی ریسمان
- ❖ جهان سطح
- ❖ کنش ریسمان نسبیتی (نامبو گوتو)
- ❖ معادله حرکت ریسمان نسبیتی
- ❖ شامه‌های چند بعدی
- ❖ ابرتقارن
- ❖ دوگانگی پیمانانه/گرانیش (gauge/gravity)
- ❖ تناظر AdS/CFT
- ❖ مقایسه‌ی پارامترهای تناظر در حد N_c بزرگ
- ❖ ارتباط UV/IR

۲-۱- نیروهای بنیادی طبیعت

نیروهای بنیادی در طبیعت شامل گرانشی، ضعیف، الکترومغناطیسی و قوی می‌باشند. نیروی گرانشی در برهم‌کنش‌های بنیادی بین ذرات در قلمرو زیر اتمی، خیلی مهم نیست. نیروی گرانشی بین پروتون‌ها وقتی سطحشان بر یکدیگر مماس باشند، در حدود 10^{-38} برابر نیروی قوی بین آنها است. نیروی گرانشی دارای برد بی‌نهایت می‌باشد. و کوانتای میدان آن گراویتون‌ها^۱ می‌باشند که دارای جرم سکون صفر و بار الکتریکی صفر و اسپین دو می‌باشند. گراویتون‌ها با یکدیگر برهم‌کنش دارند. این ذرات میدان را نمی‌توان کوانتیده کرد چرا که نظریه غیر قابل باز بهنجار پذیر^۲ می‌باشد. یعنی اینکه وقتی دو جسم را به هم نزدیک می‌کنیم میدان گرانشی به شدت افزایش می‌یابد و تعداد گراویتون‌های تبادلی به صورت تصاعدی زیاد می‌شود و بنا به اصل عدم قطعیت به ازای کوچکتر شدن Δx ، تکانه Δp گراویتون‌ها افزایش می‌یابد. و از آنجایی که خود گراویتون‌ها با هم برهم‌کنش دارند در نتیجه میدان و انرژی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و نمی‌توان آن را بهنجار کرد. تاکنون هیچ نظریه کوانتومی ارائه نشده که سازش بین نسبیت عام^۳ و مکانیک کوانتومی را توصیف کند و به همین دلیل از مسائل غیرقابل حل فیزیک می‌باشد. نظریه ریسمان به عنوان یکی از مهمترین پیشنهادها برای نظریه کوانتومی گرانش است که هنوز در مرحله‌ی نظری است و با نتایج تجربه فاصله‌ی زیادی دارد.

نیروی ضعیف، عامل واپاشی بتا است و این برهم‌کنش نقشی در پیوند هسته‌ها ندارد و نیروی ضعیف بین دو پروتون مجاور در حدود 10^{-7} برابر نیروی قوی بین آنها می‌باشد. برد نیروهای ضعیف کمتر از 0.001fm است و ذرات میدان آن بوزون ضعیف W^-, W^+ که دارای بار ± 1 و اسپین یک و

1 Gravitons
2 Renormalization
3 General Relativity

جرم سکون آن 80.2Mev می‌باشد و بوزون ضعیف Z^0 که دارای بار صفر و اسپین یک و جرم سکون 91.2Mev می‌باشد. نیروی ضعیف در شناخت رفتار ذرات بنیادی اهمیت دارد [۱۵].

نیروی الکترومغناطیس در قرن نوزدهم و با کارهای بزرگانی مثل فارادی، هانری، لورنتس، آمپر، اورستد و... قوام پیدا کرد و سرانجام ماکسول توانست این نظریه‌ها را وحدت بخشیده و در یک نظریه واحد الکترومغناطیسی کلاسیک توضیح دهد. در نیروی الکترومغناطیسی ذرات باردار، ماده را می‌سازند و نیروی الکترومغناطیس در ساختار و برهم‌کنش‌های ذرات بنیادی^۱ اهمیت دارند. برد برهم‌کنش الکترومغناطیسی بی‌نهایت است و این نیرو بین پروتون‌های مجاور در هسته در حدود 10^{-2} برابر نیروی قوی بین آنها می‌باشد. نظریه مربوط به برهم‌کنش الکترومغناطیس در ابعاد اتمی را الکترودینامیک کوانتومی^۲ (QED) می‌نامند و ذره میدان آنها فوتون می‌باشد که دارای بار الکتریکی صفر و اسپین یک و جرم سکون صفر دارد. فوتون‌ها با یکدیگر برهم‌کنش ندارند.

نیروی قوی عامل پیوند هسته‌ها می‌باشد و برد این نیرو نسبتاً کوتاه و در حدود 1fm است. نظریه مربوط به برهم‌کنش قوی را کرومودینامیک کوانتومی^۳ (QCD) می‌نامند. ذره تبدالی بین آنها گلوئون‌ها^۴ می‌باشد که بار الکتریکی صفر و اسپین یک و جرم سکون صفر دارد. گلوئون‌ها حاوی بار رنگ هستند و خودشان با یکدیگر برهم‌کنش دارند.

ذرات می‌توانند از طریق هر یک از این نیروهای بنیادی با یکدیگر برهم‌کنش داشته باشند یا واپاشیده شوند جدول ۱-۲ نشان می‌دهد که چه ذراتی می‌توانند از طریق چهار نیرو، برهم‌کنش داشته باشند.

1 Elementary Particle
2 Quantum Electrodynamics
3 Quantum Chromodynamics
4 Gluons

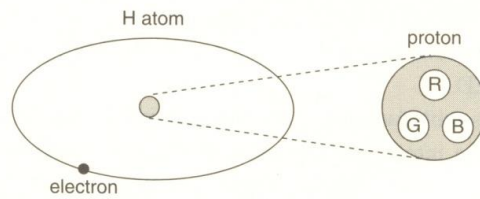
جدول ۱-۲- مشخصات چهار نیروی طبیعت [۱۵].

ذرات نمونه	زمان مشخصه	شدت نسبی	برد	نوع
p, n, K, Π	$< 10^{-22} s$	1	$1 fm$	قوی
p, n, K, Π, μ, e	$10^{-20} s - 10^{-14}$	10^{-2}	∞	الکترو مغناطیس
همه	$10^{-13} s - 10^{-8}$	10^{-7}	$10^{-3} fm$	ضعیف
همه	سالها	10^{-38}	∞	گرانشی

۲-۲- نظریه‌ی کوانتومی رنگ

اتم هیدروژن از یک الکترون و یک پروتون تشکیل شده است (شکل ۱-۲). در صورتی که در حال حاضر، الکترون مطابق دقت تجربی یک ذره نقطه ای است و پروتون از سه کوارک تشکیل شده است. کوارک‌ها، فرمیون‌هایی هستند که درجه آزادی طعم (بالا)^۱(u)، پایین^۲(d)، عجیب^۳(s)، افسون^۴(c)، سر^۵(t)، ته^۶(b) و درجه آزادی رنگ (قرمز)^۷(R)، آبی^۸(B)، سبز^۹(G) دارند. البته تمام ذرات موجود در طبیعت بی رنگ اند [۱۶].

-
- 1 Up
 - 2 Down
 - 3 Strange
 - 4 Charm
 - 5 Top
 - 6 Bottom
 - 7 Red
 - 8 Blue
 - 9 Green



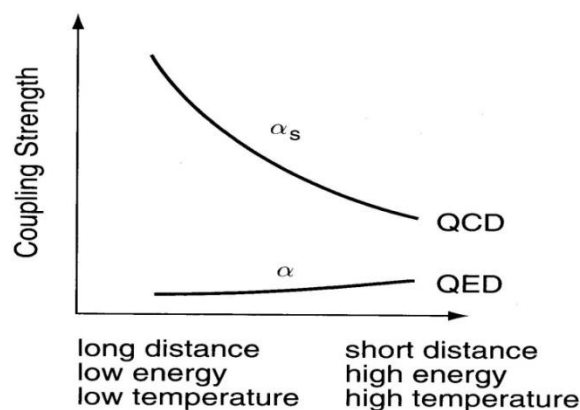
شکل ۲-۱- تصویری از اتم هیدروژن که شامل یک الکترون و یک پروتون است [۱۵].

رنگ و کوارک هرگز به تنهایی در آزمایش مشاهده نشده است. این نکته نشان می‌دهد که کوارک‌ها همیشه به یکدیگر مقیدند تا ذرات مرکب (هادرون‌ها) رنگ سفید داشته باشند. هادرون‌ها شامل باریون‌ها و مزون‌ها هستند. باریون‌ها (پروتون، نوترون، Λ ، Σ ، ...) از ۳ کوارک تشکیل شده‌اند و مزون‌ها (π ، ρ ، K ، ...) شامل یک جفت کوارک-پادکوارک هستند. مفهوم رنگ و دینامیک کوانتومی رنگ در سال ۱۹۶۴ توسط نامبو^۱ پیشنهاد شد و نظریه کوانتومی رنگ (QCD) نامیده شد.

نظریه کوانتومی رنگ تعمیمی از الکترو دینامیک کوانتومی (QED) است که نظریه کوانتومی ذرات باردار و میدان الکترومغناطیسی است. در QCD و QED به ترتیب گلوئون و فوتون با اسپین یک وجود دارد، که نیروی بین کوارک‌ها و ذرات باردار را تبادل می‌کنند. اگرچه QCD و QED مشابه به نظر می‌رسند، یک تفاوت بسیار مهم دارند: فوتون‌ها از نظر بارالکتریکی خنثی هستند بنابراین هیچ باری را انتقال نمی‌دهند. ولی گلوئون‌ها حامل بار رنگ هستند که به مفهوم اساسی غیر آبلی^۲ یا نظریه‌ی پیمان‌ه ای یانگ-میلز^۳ مربوط می‌شود. غیرآبلی به معنای جایجا ناپذیری عملگر است. نظریه‌ی کوانتومی رنگ ویژگی مهم دینامیک کوارک و گلوئون را برای ما فراهم می‌کند:

1 Nambu
2 Non-Abelian
3 Yang-Mills

در انرژی‌های بالا شدت برهم‌کنش‌ها کوچک می‌شوند و کوارک‌ها و گلوئون‌ها به طور ضعیف با هم برهم‌کنش می‌کنند (آزادی مجانبی^۱)، در حالی که در انرژی‌های پایین برهم‌کنش‌ها قوی می‌شد و به محبوسیت رنگ منجر می‌شود. آزادی مجانبی به خاصیت ضد-استتار^۲ بار رنگ مربوط می‌شود. یک بار برهنه^۳ دارای رنگ است و خود گلوئون‌ها رنگ دارند، بنابراین به کوارک رنگی نزدیک می‌شوند و از شدت برهم‌کنش رنگ کم می‌کنند. در نتیجه اگر کسی بخواهد با عبور کردن از ابرگلوئون‌ها بار برهنه را پیدا کند، سهم کوچک‌تری را می‌بیند که این مخالف چیزی است که در QED اتفاق می‌افتد. در QED، ابرجفت الکترون-پوزیترون که بار را احاطه کرده، بار برهنه را استتار می‌کنند یعنی این که با دور شدن از بار برهنه، بار موثر کاهش می‌یابد و میدان آن کوچک می‌شود، بنابراین سهم کوچک‌تری از بار دیده خواهد شد. در نتیجه در فواصل کوتاه، جفتیدگی افزایش می‌یابد.



شکل ۲-۲- تغییرات قدرت جفت‌شدگی در QCD و QED برحسب مقیاس فاصله، مقیاس انرژی و دما [۱۵].

1 Asymptotic Freedom
2 Screening
3 Bare

باتوجه به اینکه مقیاس طول و مقیاس انرژی عکس یکدیگر هستند، وقتی که مقیاس طول کوچک می‌شود یا به طور معادل مقیاس انرژی افزایش می‌یابد، قدرت جفت شدگی در QCD کاهش می‌یابد (شکل ۲-۲).

۳-۲- مدل استاندارد

از مجموع دو نظریه ی دینامیک رنگ و نظریه الکتروضعیف، مدلی به نام مدل استاندارد^۱ شکل گرفت که این مدل کامل ترین توصیفی است که از برهم کنش ذرات بنیادی در اختیار داریم. در این مدل ماده از سه نوع ذرات بنیادی ساخته شده است: لپتون ها، کوارک ها و ذرات تبدالی (واسطه).

لپتون ها و کوارک ها، فرمیون^۲ هستند و از آمار فرمی- دیراک پیروی می کنند و اسپین آنها نیم صحیح است و تابع موج آنها تحت تعویض ذرات پاد متقارن هستند. واسطه ها بوزون^۳ می باشند و از آمار بوز- اینشتین پیروی می کنند و اسپین آنها صحیح است و دارای تابع موج متقارن می باشند. طبق این نظریه شش لپتون و شش کوارک (و پاد ذرات آنها) به اضافه ذرات میدان (فوتون، سه بوزون ضعیف، هشت گلوئون) است و در مجموع شصت و یک ذره می باشد و یک ذره ی آن به نام هیگز^۴ است که ائنها ذره ی مدل استاندارد است که هنوز به صورت تجربی مشاهده نشده است. به تازگی نتایج LHC شاهی بر وجود چنین ذره ای است. هر چند هنوز اسپین آن همانند ذره ی هیگز نیست. مشاهده تجربی این ذره ممکن است بتواند درباره چگونگی جرم دار شدن ماده توسط ذرات بنیادی بدون جرم دیگر، توضیح دهد. به طور خاص، بوزون هیگز احتمالاً می تواند دلایلی برای تفاوت های بین فوتون که بدون جرم است و بوزون W, Z که نسبتاً پر جرم هستند ارائه کند. بنابراین بوزون هیگز در صورت وجود یک مؤلفه بسیار مهم در دنیای ماده است.

1 Standard Model
2 Fermion
3 Boson
4 Higgs

چند مورد از مشکلات مدل استاندارد

مشکلات مختلفی در این مدل وجود دارند که چند نمونه از مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

۱. در این مدل گرانش به علت ضعیف بودن بیش از اندازه در ابعاد اتمی، جایگاهی ندارد.
۲. حدود ۲۰ پارامتر است که در این مدل به صورت دستی وارد می‌شوند در نتیجه فیزیک نظریه یکتا نمی‌باشد و این یک ضعف در این مدل می‌باشد زیرا که به ازای پارامترهای مختلف، فیزیک متفاوتی به دست می‌آید.
۳. ماده‌ی تاریک را توضیح نمی‌دهد. همانطور که می‌دانیم بیشترین مقدار عالم از ماده‌ی تاریک است.
۴. مسأله سلسله مراتبی^۱: یعنی تصحیح وارد شده بر جرم هیگز بسیار بزرگتر از جرم هیگز است.

۲-۴- نظریه‌ی وحدت یافته‌ی ریسمان

نظریه‌ی ریسمان یک انتخاب به جا برای داشتن نظریه‌ای وحدت یافته از تمامی نیروهای طبیعت است و مدلی مؤثر از یک نظریه‌ی کامل فیزیکی است. این نظریه، یک نظریه‌ی کوانتومی است و از آن‌جا که گرانش را نیز شامل می‌شود، یک نظریه‌ی گرانشی کوانتومی است.

این بیان که نظریه‌ی ریسمان به عنوان نظریه‌ای وحدت یافته پنداشته می‌شود، به ذات این نظریه بر می‌گردد. در نظریه‌ی ریسمان، هر ذره به عنوان یک مد ارتعاشی خاص از یک ریسمان میکروسکوپی بنیادی تعریف می‌شود. مد های ارتعاشی یک ریسمان بنیادی به عنوان ذرات مختلفی که در طبیعت شناخته شده اند، معرفی می‌شوند. یکی از حالت‌های ارتعاشی ریسمان‌ها، گراویتون است که ذره‌ی تبدالی یا به عبارت دیگر حامل انرژی میدان گرانشی می‌باشد. از آنجا که همه‌ی ذرات از ارتعاشات ریسمان تولید می‌شوند، در نتیجه تمامی ذرات به طور طبیعی به یک نظریه‌ی واحد وابسته

¹ Hierarchy

هستند و چون ریسمان بسیار کوچک در نظر گرفته می‌شود (در حد طول بنیادی پلانک)، نمی‌توان طبیعت ریسمان گونه‌ی ذرات را به طور مستقیم مشاهده کرد.

سوال مهمی که مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان نظریه‌ی ریسمان را به عنوان یک نظریه‌ی کوانتومی خوب از گرانش دانست؟ جواب این است که این نظریه هنوز به طور کامل قطعی نیست اما دارای اعتباری بسیار قوی می‌باشد.

یکی از مهم‌ترین نشانه‌هایی که نظریه‌ی ریسمان را به عنوان نظریه‌ای وحدت یافته متمایز کرد، این است که فاقد هرگونه پارامتر بی‌بعد است که به صورت دستی تنظیم شده باشد. یک نظریه با پارامترهای بی‌بعد قابل تنظیم، نمی‌تواند یک نظریه متحد باشد زیرا که وقتی پارامترها به مقادیر دیگر تبدیل شوند، می‌توان نظریه‌های متفاوت با پیش‌گویی‌های ذاتی متفاوت به دست آورد [۱۷].

نظریه‌ی ریسمان دارای یک پارامتر بعددار است که به عنوان طول ریسمان در نظر گرفته می‌شود و مقدار آن به عنوان اندازه‌ی نوعی ریسمان در نظر گرفته می‌شود ($l_g \sim 10^{-33} \text{ cm}$).

یکی دیگر از نشانه‌های وحدت نظریه‌ی ریسمان این است که بعدپذیری فضا - زمان در آن ثابت است. فضا - زمان فیزیکی شناخته شده، چهار بعدی است که دارای یک بعد زمانی و سه بعد فضایی می‌باشد. در مدل استاندارد این داده‌ها، پایه‌ی ایجاد نظریه شدند و محاسبه نشده‌اند. اما از سویی دیگر، در نظریه‌ی ریسمان تعداد فضا- زمان از راه محاسبه به دست می‌آید که جواب چهار نیست و فضا - زمان را ده بعدی به دست می‌آورد. تعدادی از این ابعاد از دیدگاه تجربی پنهان هستند زیرا در یک فضای به اندازه کافی کوچک فشرده شده‌اند که در انرژی‌های کم از دید تجربی دور می‌ماند. برای نمونه یک لوله بی‌نهایت دراز را در نظر بگیرید. در واقع سطح این لوله دو بعدی است. یعنی مورچه‌ای که روی سطح این لوله قرار دارد می‌تواند در دو راستای مستقل از هم حرکت کند. فرض کنید که سر مورچه در راستای طول لوله است. مورچه می‌تواند به سمت عقب - جلو یا چپ و راست حرکت کند. اما اگر به فرض این مورچه به اندازه کافی (یعنی به اندازه محیط لوله) در جهت چپ حرکت کند به

جای اول خود باز می‌گردد اما قضیه در مورد عقب جلو رفتن صدق نمی‌کند. پس یکی از بعدهای این فضای دو بعدی (یعنی یکی از بعدهای سطح لوله) فشرده و یکی نافشرده است. این بار فرض کنید که محیط این لوله خیلی کم باشد یا مثلاً به جای لوله یک کابل برق داشته باشیم. برای مورچه، این کابل هنوز یک سطح دو بعدی است یعنی وقتی که روی سطح کابل قرار دارد می‌تواند در دو راستای مستقل از هم حرکت کند. اما برای ما انسان‌ها کابل برق یک جسم یک بعدی محسوب می‌شود چون فقط طول آن قابل درک است. حالتی بسیار شبیه به این مثال‌ها در مورد ابعاد اضافه در نظریه ریسمان رخ می‌دهد. به این معنی که ما به خاطر اندازه بزرگ خود از درک این ابعاد اضافی عاجز هستیم اما این ابعاد برای بعضی از ذره‌ها با انرژی زیاد قابل دسترسی می‌باشد.

اگر نظریه ی ریسمان صحیح باشد باید بتواند تعداد ابعاد مشاهده پذیر فضا - زمان را چهار به دست آورد.

" فقدان قابل تنظیم بودن پارامترهای بی بعد، یکی از نشانه های وحدت نظریه ی ریسمان است " به این معنی است که این نظریه تغییر شکل نمی دهد و یا با تعویض پیوسته ی پارامترها، تغییر نمی کند [۱۷].

حال باید دید چند نظریه ی ریسمان وجود دارد؟ دو نوع ریسمان باز و بسته در نظر گرفته می شود که ریسمان های باز^۱ دارای دو انتها هستند در حالی که ریسمان های بسته^۲ هیچ انتهایی ندارند. میتوان نظریه های متفاوتی در نظر گرفت که تنها ریسمان های بسته و یا هر دو ریسمان بسته و باز را در نظر بگیرد. از آن جا که ریسمان های باز می توانند بسته شوند و به شکل ریسمان بسته درآیند، در نتیجه نظریه ریسمان باز جداگانه وجود ندارد.

1 Open Strings
2 Close Strings

از سویی دیگر، دو نظریه‌ی دیگر با نام‌های نظریه‌ی ریسمان بوزونی^۱ و نظریه‌ی ابرریسمان^۲ نیز وجود دارد. ریسمان‌های بوزونی در ۲۶ بعد زندگی می‌کنند. عدد ۲۶ از روی معادله‌های ریاضی و نظریه گروه‌ها^۳ برای حفظ تقارن لورنتس به دست می‌آید. در طیف ذرات آن، تاقیون^۴ وجود دارد که ذره‌ای است که سریعتر از نور حرکت می‌کند و دارای جرم موهومی است. بنابراین نمی‌تواند مدلی از طبیعت باشد. همچنین از آمار بوز-اینشتین پیروی می‌کند و همه‌ی ارتعاشات آن‌ها معرف بوزون‌ها هستند و بنابراین به طور طبیعی نمی‌تواند توصیف‌گر ذراتی مثل الکترون باشد و از آنجا که فاقد فرمیون‌هاست، واقعی نیست. البته این نظریه در توصیف ذرات میدانی مانند گراویتون‌ها و فوتون‌ها موفق است و بسیار ساده‌تر از نظریه‌ی ابرریسمان است و بسیاری از مفاهیم مهم در نظریه‌ی ریسمان توسط مفاهیم خاص نظریه‌ی بوزونی توضیح داده می‌شود.

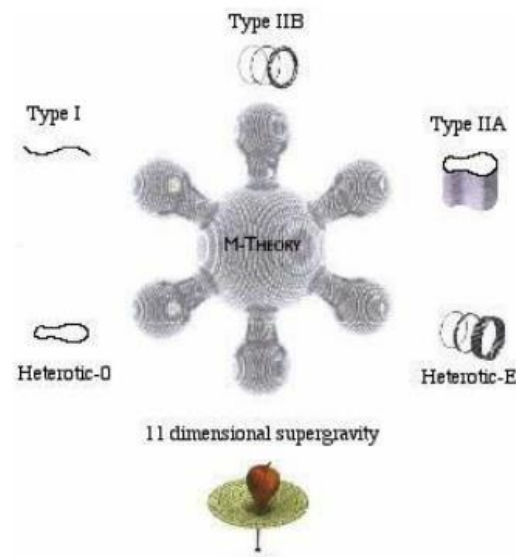
نظریه‌ی ابرریسمان در ۱۰ بعد فضا-زمانی زندگی می‌کند و در طیف شناسی حالت‌های آن هم بوزون و هم فرمیون دیده می‌شود. با اضافه کردن درجه آزادی (یعنی اضافه کردن اسپین نیم صحیح که مربوط به فرمیون‌هاست) به جهان-سطح ریسمان، نظریه‌ی ریسمان به نظریه ابرریسمان تبدیل می‌شود. در این مورد از فرض ابرتقارن^۵ استفاده می‌شود. یعنی در مقابل هر ذره بوزونی ذره‌ای فرمیونی وجود دارد (نتایج ابرتقارن در آزمایشات ذرات مشاهده نشده‌اند اما نظریه پردازان معتقد هستند که ذرات ابرتقارن بزرگتر و سنگین‌تر از آن هستند که در شتابدهنده‌های فعلی بتوان آنها را مشاهده کرد. مثلاً در LHC هنوز شواهدی در این مورد پیدا نشده است). تعداد ابعاد مورد نیاز در ابرریسمان ده می‌باشد. همه‌ی مدل‌های واقعی ریسمان از ابرریسمان‌ها ساخته می‌شوند. در حال حاضر

1 Bosonic
2 Super String
3 Groups Theory
4 Tacyon
5 Super Symmetry

پنج نظریه‌ی ابررسمان وجود دارند که این پنج نظریه شامل نوع I، IIA، IIB و دو نظریه ابررسمان دیگر که شامل هتروتیک^۱ می‌باشند.

در همه‌ی نظریه‌های ریمان، گراویتون به عنوان مد ارتعاشی ریمان‌های بسته ظاهر می‌شود. در نظریه‌ی ریمان گرانش اجتناب ناپذیر است.

در سال‌های اخیر، نظریه‌ای دیگر با در نظر گرفتن حد مشخصی از جفت شدگی قوی از یکی از نظریه‌های ابررسمان به دست آمد. این نظریه ۱۱ بعدی است و به نظریه‌ی -ام^۲ معروف شد. امروزه روشن شده است که پنج نظریه‌ی ابررسمان، حد‌های متفاوتی از نظریه‌ی -ام هستند که در حال حاضر ناشناخته باقی مانده است. در شکل (۲-۵) تصویری از نظریه‌های ریمان گرد هم نشان داده شده‌اند.

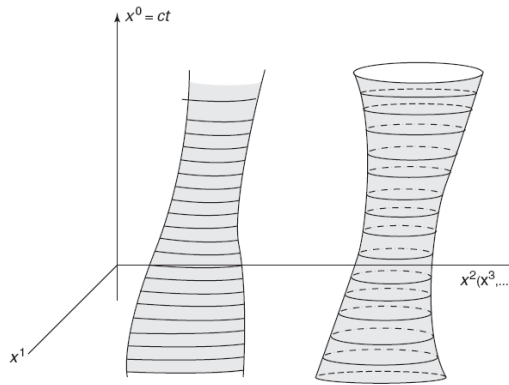


شکل ۲-۳- تصویری از انواع نظریه‌های ریمان.

^۱ Heterotic
^۲ M-Theory

۲-۵- جهان سطح

ریسمان‌ها می‌توانند دارای دوسر باشند که به اصطلاح ریسمان‌های باز نامیده می‌شوند یا آن که در حلقه‌های بسته‌ای به خودشان متصل می‌شوند که ریسمان‌های بسته هستند و یک ریسمان در هر لحظه یک خط را در فضا-زمان اشغال می‌نماید.



شکل ۲-۴- تصویری از مسیر طی شده توسط ریسمان بسته (راست) و ریسمان باز (چپ) در فضا-زمان (جهان-سطح) [۱۷].

بنابراین تاریخچه‌اش در فضا-زمان، سطحی دوبعدی است که جهان-سطح نامیده می‌شود. هر نقطه روی این جهان-سطح با دو بعد مشخص می‌شود که یکی بیانگر زمان و دیگری مشخص‌کننده موقعیت نقطه روی ریسمان می‌باشد. جهان سطح یک ریسمان باز، نواری است که لبه‌هایش نمایشگر مسیر دو سر ریسمان در فضا-زمان می‌باشد (شکل ۲-۴ سمت چپ). صفحه یک ریسمان بسته، استوانه یا لوله‌ایست که با یک برش از میان آن، دایره‌ای به دست می‌آید که موقعیت ریسمان را در لحظه‌ای معین نمایش می‌دهد (شکل ۲-۴ سمت راست). خطوط ثابت x^0 در این سطوح، ریسمان‌ها هستند [۱۷].

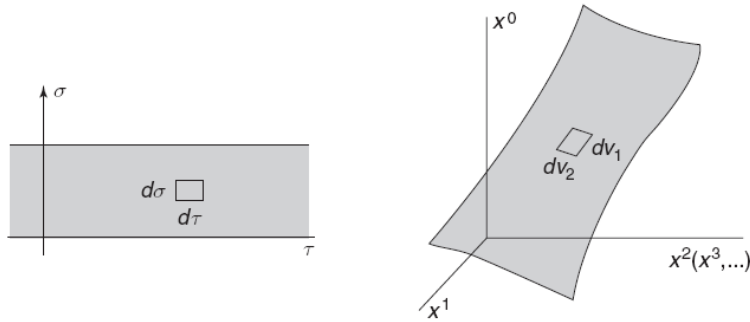
۲-۶- کنش ریسمان نسبیتی (کنش نامبو- گوتو)

کنش ریسمان‌های نسبیتی را می‌توان متناسب با ویژه سطح که ناوردای لورنتس است تعریف

کرد و همچنین باید بعد کنش را در نظر گرفت که $\frac{ML^2}{T}$ است.

کنشی که برای ریسمان نسبیتی به دست می‌آید، کنش نامبو- گوتو نامیده می‌شود. ریسمان در

فضای d بعدی قرار دارد که مختصات فضا-زمان آن $X^\mu = (X^0, X^1, \dots, X^d)$ می‌باشد.



شکل ۲-۵- ویژه سطح در فضا-زمان که شامل دو بردار $d\vec{v}_1$ و $d\vec{v}_2$ است (شکل سمت راست). فضای پارامتری با دو پارامتر σ و τ (شکل سمت چپ) [۱۷].

ویژه سطح که دو بردار $d\vec{v}_1$ و $d\vec{v}_2$ دارد (شکل ۲-۵ سمت راست)، عبارت است از:

$$dA = |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| \sin \theta = \sqrt{|d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 - |d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2|^2} \quad (۱-۲)$$

که θ زاویه بین بردارهای $d\vec{v}_1$ و $d\vec{v}_2$ است. می‌توان رابطه را بر حسب ضرب داخلی نوشت:

$$dA = \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2} \quad (۲-۲)$$

جهان - سطح را پارامتر بندی می‌کنیم. از آنجایی که جهان - سطح دو بعدی است، برای پارامتر بندی کردن جهان - سطح، به فضای پارامتری دو بعدی نیاز است. می‌توان پارامترهای این فضا را τ و σ انتخاب کرد:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)) \quad (3-2)$$

با پارامتر بندی کردن جهان - سطح داریم:

$$dv_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau \quad , \quad dv_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma \quad (4-2)$$

در نتیجه ویژه سطح به صورت زیر بدست می‌آید:

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right) - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2} \quad (5-2)$$

عبارت زیر رادیکال منفی است و می‌توان عبارت زیر رادیکال را در یک منفی ضرب کرد. این تغییر علامت، تاثیری در ناوردائی لورنتس ندارد. بنابراین ویژه سطح بدست می‌آید:

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2} \quad (6-2)$$

برای این که کنش، بعد $\frac{ML^2}{T}$ داشته باشد، یک فاکتور را در ویژه سطح که بعد L^2 دارد، ضرب می‌کنیم، می‌توان فاکتور $\frac{T_0}{c}$ را انتخاب کرد که بعد $\frac{M}{T}$ دارد.

با معرفی نماد گذاری زیر:

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \quad , \quad X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \quad (7-2)$$

کنش نامبو-گوتو عبارت است از:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (۸-۲)$$

که علامت منفی پشت انتگرال برای این است که وقتی انرژی جنبشی ریسمان نسبیتی $T = 0$ باشد، انرژی پتانسیل، مثبت بدست آید. انرژی پتانسیل ذخیره شده منفی، برای ریسمان بی معنی است [۱۷].

۷-۲- معادله حرکت ریسمان نسبیتی

برای بدست آوردن معادله حرکت ریسمان نسبیتی، کنش نامبو-گوتو را می توان به صورت دیگری

نوشت:

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau L = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu) \quad (۹-۲)$$

که \mathcal{L} چگالی لاگرانژی است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (۱۰-۲)$$

بر اساس معادله (۹-۲)، می توان وردش کنش δS را به این صورت نوشت:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu) \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial (\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \frac{\partial (\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right] \end{aligned} \quad (۱۱-۲)$$

با معرفی دو نماد p_μ^σ ، p_μ^τ و محاسبه $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}$ ، $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}$ خواهیم داشت:

$$p_{\mu}^{\tau} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^{\mu}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_{\mu} - (X')^2 \dot{X}_{\mu}}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}$$

$$p_{\mu}^{\sigma} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^{\mu}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_{\mu} - (\dot{X})^2 X'_{\mu}}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (12-2)$$

در نتیجه وردش کنش، عبارت است از:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[p_{\mu}^{\tau} \frac{\partial(\delta X^{\mu})}{\partial \tau} + p_{\mu}^{\sigma} \frac{\partial(\delta X^{\mu})}{\partial \sigma} \right] \quad (13-2)$$

با استفاده از روش جزء به جزء δS را بازنویسی می‌کنیم:

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\delta X^{\mu} p_{\mu}^{\tau}) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta X^{\mu} p_{\mu}^{\sigma}) - \delta X^{\mu} \left(\frac{\partial p_{\mu}^{\tau}}{\partial \tau} + \frac{\partial p_{\mu}^{\sigma}}{\partial \sigma} \right) \right] \quad (14-2)$$

با توجه به اینکه $\delta X^{\mu}(t_i, \sigma) = \delta X^{\mu}(t_f, \sigma) = 0$ برابر صفر هستند. بنابراین عبارت اول در طرف راست صفر می‌شود. با انتگرال‌گیری و اعمال شرایط مرزی دیریکله، معادله حرکت ریسمان نسبیتی بدست می‌آید [۱۷]:

$$\frac{\partial p_{\mu}^{\tau}}{\partial \tau} + \frac{\partial p_{\mu}^{\sigma}}{\partial \sigma} = 0 \quad (15-2)$$

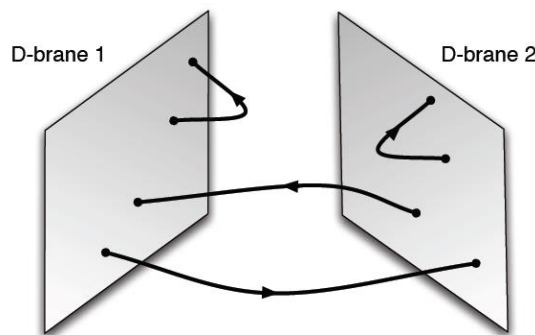
۲-۸- شامه‌های چند بعدی^۱

دو سر ریسمان باز روی شامه‌ها قرار دارند و این شامه‌ها دارای جرم و بار می‌باشند. میدان‌ها نیز روی این شامه‌ها زندگی می‌کنند. براین اساس می‌توان رویه‌هایی با ابعاد مختلف در یک فضای p بعدی داشت. به طوری که تعداد ابعاد آنها از صفر تا p تغییر کند. مثلاً شامه‌ی D_0 یعنی ذرات

^۱ D-branes

نقطه ای، شامه‌ی D_1 ریسمان است و شامه‌ی D_2 مانند یک صفحه کاغذ با ضخامت صفر می‌باشد و غیره. شامه‌های p بعدی پایدار در نظریه ابر ریسمان نوع IIA به ازای $p=0,2,4,6,8$ وجود دارند و برای نظریه ابر ریسمان نوع IIB، $p=1,3,5,7$ می‌باشند.

به عنوان مثال شامه‌های دو بعدی دارای جهت طولی و عرضی می‌باشند. ریسمان‌های باز فقط می‌توانند در جهت طولی x حرکت کنند (یعنی اینکه ریسمان‌های باز نمی‌توانند از سطح شامه بیرون بروند) و ریسمان‌های بسته در جهت عرضی y حرکت می‌کنند. به عنوان مثال از ریسمان‌های باز و شامه‌ها می‌توان شکل (۶-۲) را در نظر بگیریم. ملاحظه می‌شود که ریسمان باز می‌تواند به یک شامه یا به دو شامه متصل شود.



شکل ۶-۲ - تصویری از ریسمان‌های باز که به دو شامه ختم شده‌اند [18].

فرض می‌کنیم که دو شامه موازی در فاصله l از یکدیگر واقع‌اند و بسته به اینکه نقطه ابتدایی و انتهایی ریسمان باز به کدام شامه متصل است، چهار نوع ریسمان باز وجود خواهد داشت. ریسمان‌های که هر دو نقطه ابتدایی و انتهایی آن به یک شامه متصل است بدون جرم می‌باشند و میدان‌های برداری آن را با $(A_\mu)_1^1, (A_\mu)_2^2$ مشخص می‌شود. اندیس‌های بالا و پایین به ترتیب مربوط به شامه و ریسمان می‌باشد. و ریسمان‌هایی که به دو شامه متصل هستند دارای جرم می‌باشند و میدان برداری آن‌ها با $(A_\mu)_1^2, (A_\mu)_2^1$ مشخص می‌شود و رابطه جرم با تنش ریسمان و فاصله بین شامه‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$m = \frac{l}{2\pi\alpha'} \quad (۱۶-۲)$$

هرگاه شامه‌ها خیلی به هم نزدیک شوند فاصله به سمت صفر میل می‌کند و در نتیجه از میان ریسمان‌های باز فقط ریسمان بدون جرم باقی می‌مانند. در این مورد چهار میدان برداری بدون جرم $(A_\mu)_b^a$ با $a, b = 1, 2$ وجود دارد که متناظر با میدان‌های پیمان‌های غیر آبلی از گروه پیمان‌های $U(2)$ می‌باشد و همچنین $9-p$ میدان‌های اسکالر بدون جرم $(\phi^i)_b^a$ وجود دارد و نمایش آن یک ماتریس 2×2 است و در حالت کلی می‌توان دو شامه را به N_c شامه تعمیم دهیم که در این صورت گروه پیمان‌های $U(N_c)$ می‌باشد و نمایش آن یک ماتریس $N_c \times N_c$ است [۱۸].

۹-۲- ابرتقارن

ابرتقارن به این معنی است که به ازای هر ذره‌ی بنیادی فرمیونی، یک ذره‌ی بوزونی هم داشته باشیم و بر عکس. سازگاری ابرریسمان به ما می‌گوید که حتما باید طبیعت این تقارن را داشته باشد ولی طبیعی است که در مقیاس انرژی‌های کم که در آن زندگی می‌کنیم و شتابدهنده‌ها آن را تولید می‌کنند، این ابرتقارن دیده نشده و از این موضوع نتیجه گرفته می‌شود که این تقارن شکسته شده است. در نتیجه بر اثر شکسته شدن این تقارن بوزون و فرمیون که هم‌تاهای هم هستند که یکی دارای جرم زیاد است و دیگری بی‌جرم باقی می‌ماند. بنابراین در اثر شکست خود بخودی تقارن^۱، به عنوان نمونه همزاد بوزونی الکترون جرم بسیار زیادی یافته و این مقدار جرم آنقدر زیاد است که هنوز آشکار سازی نشده است. یکی از تلاش‌های نظریه‌ی ریسمان این است که ابرتقارن را به دست آورد و LHC همچنان در صدد آشکار سازی این هم‌تای بوزونی است.

۲-۱۰- دوگانگی پیمانه/گرانیش (gauge/gravity)

نظریه ی $N = 4$ ابرتقارن یانگ-میلز یک نظریه ی پیمانه‌ای با بیشینه‌ی ابرتقارن در $(3+1)$ بعد است که میدان‌های آن شامل یک میدان پیمانه ای A_μ و شش میدان اسکالر حقیقی $\phi^i, i = 1, \dots, 6$ می‌شود و دارای چهار فرمیون وایل^۱ $\chi_a, a = 1, \dots, 4$ است که همه‌ی آنها در نمایش الحاقی گروه پیمانه‌ای هستند.

متریک فضای $AdS_5 \times S^5$ توسط رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$ds^2 = ds_{AdS_5}^2 + R^2 d\Omega_5^2 \quad (17-2)$$

که در آن $d\Omega_5^2$ متریک روی کره‌ی پنج بعدی واحد می‌باشد و متریک فضای AdS_5 به صورت زیر است:

$$ds_{AdS_5}^2 = \frac{r^2}{R^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{R^2}{r^2} dr^2 \quad (18-2)$$

در معادله ی بالا $x^\mu = (t, \mathbf{x}), r \in (0, \infty)$ است و $\eta_{\mu\nu}$ متریک مینکوفسکی در چهار بعد فضا-زمان است. متریک $(18-2)$ ، مسیر معروف به پوآنکاره^۲ را پوشش می‌دهد که از فضا-زمان سرتاسری^۳ AdS است و در بیشتر زمان‌ها با استفاده از مختصه‌ی شعاعی $z = R^2/r \in (0, \infty)$ ، به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۸]:

$$ds_{AdS_5}^2 = g_{MN} dx^M dx^N = \frac{R^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2) \quad (19-2)$$

که در آن $x^M = (z, x^\mu)$ است.

1 Weyl
2 Poincare
3 Global

در این رابطه ثابت z مربوط به فضای AdS_5 با فضا-زمان چهار بعدی مینکوفسکی با تعریف x^4 ، که مختصه‌های نظریه‌ی پیمانه‌ای می‌باشند، یکسان هستند.

نظریه‌ی یانگ-میلز در مرز فضای AdS_5 زندگی می‌کند که گاهی این نظریه به نظریه‌ی مرزی نیز معرفی می‌شود. هنگامی که $z \rightarrow \infty$ به افق^۱ پوآنکاره می‌رسیم که در آن ضریب R^2/z^2 و دترمینان متریک به صفر میل می‌کند [۱۸].

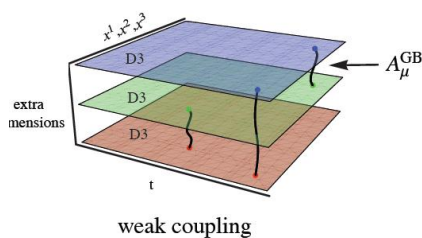
۱۱-۲- تناظر AdS/CFT

ابتدا فضای AdS و دلیل استفاده از آن را توضیح داده و در ادامه به توصیف دقیق‌تر این تناظر می‌پردازیم:

۱۱-۲-۱- فضای AdS

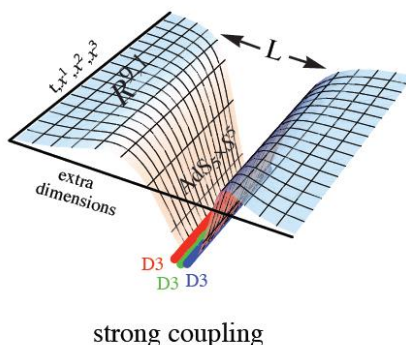
ابتدا یک مجموعه از N عدد شامه‌های سه بعدی موازی را در فضا-زمان ده بعدی در نظر می‌گیریم. نظریه‌ی ریسمان روی این زمینه، شامل مد‌های ریسمان‌های باز و ریسمان‌های بسته است. ریسمان‌های بسته برانگیختگی‌های فضای تهی هستند و ریسمان‌های باز روی انتهای شامه‌ها، مد‌های برانگیخته‌ی شامه‌ها را توصیف می‌کنند. ریسمان‌های باز می‌توانند بین دو شامه متصل باشند. در شکل (۲-۷) نشان داده شده است که چگونه یک ریسمان باز می‌تواند به دو یا سه شامه موازی متصل شود. در این حالت برهم‌کنش بین شامه‌ها ضعیف می‌باشد و فضای اطراف آن فضای ده بعدی مینکوفسکی است.

¹ Horizon



شکل ۲-۷ - تصویری از برهم‌کنش ضعیف بین شامه‌ها.

چنان‌که طول ریسمان به سمت صفر میل کند آنگاه شامه‌ها روی هم واقع می‌شوند و جرم آن بسیار سنگین می‌شود و برهم‌کنش بین آنها زیاد می‌شود و در نتیجه باعث خمیدگی فضا می‌شوند که در اطراف خود فضای AdS را بوجود می‌آورند. در این صورت ریسمان‌های بسته در فضا منتشر می‌شوند که این فضا را فضای آنتی دو سیته می‌نامند. شکل (۲-۸) چگونگی تشکیل فضای AdS را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۸ - تصویری از برهم‌کنش قوی بین شامه‌ها

و ایجاد فضای آنتی دو سیته [۵].

فضا - زمان AdS یکی از جواب‌های معادله‌ی اینشتین است. جواب‌های متقارن معادله‌ی میدان

اینشتین با ثابت کیهان‌شناسی λ به صورت زیر می‌باشد [۵]:

۱. اگر $\lambda < 0$ منفی باشد، آنگاه فضا - زمان پنج بعدی آنتی دو سیته (AdS_5) می‌باشد.

۲. اگر $\lambda > 0$ مثبت باشد، فضا-زمان پنج بعدی دو سیته (dS) را خواهیم داشت.

۳. اگر $\lambda = 0$ صفر باشد، فضا-زمان چهار بعدی مینکوفسکی^۱ است.

فضا زمان ده بعدی به شکل $AdS_5 \times S^5$ می باشد که S^5 ابرکره های پنج بعدی فشرده هستند و پنج بعد دیگر آن در فضای غیر فشرده آنتی دو سितه AdS_5 قرار دارد. این فضای پنج بعدی دارای سه بعد مکانی، یک بعد زمانی و یک بعد هولوگرام یا بعد شعاعی می باشد. و برای سادگی کار در برخی از مساله ها فقط متریک AdS_5 نوشته می شود زیرا در جهت فشرده گی حرکتی وجود ندارد.

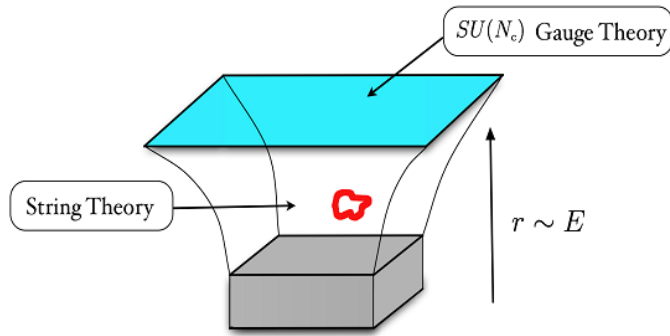
به علت این که تناظر در حد انرژی پایین است باید حد انرژی های پایین را مورد بررسی قرار دهیم.

در این حالت، هنگامی که طول ریسمان به سمت صفر میل می کند فقط مد های ریسمان بدون جرم برانگیخته می شود و حالت های سنگین ریسمان های باز، روی شامه ها قابل دسترسی نیستند. بنابراین فیزیک روی شامه ها به وسیله میدان های بدون جرم یانگ میلز $U(N_c)$ کنترل می شوند. ریسمان های بسته که روی تمام فضا- زمان منتشر می شوند، آزاد می شوند و در این حد ریسمان های بسته با هم برهم کنش ندارند زیرا طبق معادله گرانش ده بعدی انیشتین $G^{(10)} = g^2 a'^4$ میدان گرانش به سمت صفر میل می کند در نتیجه ریسمان های بسته با هم برهم کنش نخواهند داشت.

۲-۱۱-۲- چرا AdS ؟

فرض کنید که یک نظریه میدان d بعدی بتواند بر اساس یک ریسمان یا یک نظریه ی گرانشی $d+1$ بعدی توصیف شود، در آن صورت می توان خواص فضا- زمان $d+1$ بعدی را از آن نتیجه گرفت. در شکل (۲-۹) طرحی از این دوگانگی آمده است.

1 Minkowski



شکل ۲-۹- نمایشی از دوگانگی پیمانانه / ریسمان.

عمومی ترین متریک در $d+1$ بعد با تقارن d بعدی پوانکاره سازگار است و به صورت زیر نوشته می شود:

$$ds^2 = \Omega^2(z)(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2) \quad (20-2)$$

که z بعد اضافی فضایی است.

برای داشتن تقارن های انتقالی در جهت های t و \vec{x} ، عامل خمش $\Omega(z)$ می تواند تنها به z بستگی داشته باشد. در این حالت نمی توان شکل $\Omega(z)$ را برای یک نظریه ی میدان کوانتومی کلی استفاده کرد. اما اگر نظریه های میدانی در نظر گرفته شوند که هم دیس هستند، یعنی فیزیک مساله در انرژی های کم و زیاد بدون تغییر باقی می ماند (CFT)، در آن صورت می توان $\Omega(z)$ را با استفاده از قیده های تقارنی اضافی محاسبه کرد [۱۸]. در ادامه شکل $\Omega(z)$ مشخص می شود.

یک نظریه ی ناوردای هم دیس، تحت مقیاس بندی زیر بی تغییر باقی می ماند. یعنی:

$$(t, \vec{x}) \rightarrow c (t, \vec{x}) \quad (21-2)$$

که در آن c یک ثابت است. نظریه ی میدانی که توسط رابطه ی (۲۰-۲) فرمول بندی شد، معرف این گونه میدان هاست و متریک آن باید به مقیاس بندی (۲۱-۲) با مقیاس مشابهی برای مختصه ی z ,

1 Invariant

احترام بگذارد. زیرا که z یک مقیاس طول در نظریه‌ی مرزی را بیان می‌کند. به این منظور، نیاز است که $\Omega(z)$ به صورت زیر مقیاس بندی شود:

$$\Omega(z) \rightarrow c^{-1}\Omega(z) \quad (22-2)$$

که در آن $z \rightarrow cz$ است و نتیجه می‌شود که :

$$\Omega(z) = \frac{R}{z} \quad (23-2)$$

که در آن R یک ثابت است.

متریک (۲۰-۲) اکنون به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2) \quad (24-2)$$

که دیفرانسیل خطی از فضا-زمان آنتی دوسپتیه^۱ $d+1$ بعدی می‌باشد، AdS_5 .

همان گونه که اشاره شد این فضا-زمان با تقارن بیشینه و خمشی به شعاع R و ثابت کیهان شناسی منفی متناسب با $1/R^2$ است.

علاوه بر تقارن پوانکاره و مقیاس بندی (۲۱-۲)، یک نظریه میدان در d بعد، زیر نظر d تبدیل هم‌مدیس فضایی ناورداست که گروه هم‌مدیس d بعدی $SO(2,d)$ را تشکیل می‌دهند. این بیان کننده‌ی این نکته است که گروه فضایی^۲ رابطه‌ی (۲۴-۲) نیز یک گروه $SO(2,d)$ است که به طور دقیق بر این نظریه میدان منطبق شده است [۱۸].

در نتیجه می‌توان گفت که یک نظریه‌ی میدان هم‌مدیس باید توصیفی توسط یک نظریه میدان در فضا-زمان AdS داشته باشد.

1 Anti De Sitter
2 Isometry

۳-۱۱-۲- نظریه‌ی ابرتقارن $N=4$ یانگ-میلز با پیمانهای $SU(N_c)$ و تناظر AdS/CFT

هر چه یک نظریه متقارن‌تر باشد، ساده‌تر است. برای ساده کردن یک نظریه‌ی میدان کوانتومی چهار بعدی، می‌توان علاوه بر تقارن پوانکاره، چند ابرتقارن هم به نظریه اضافه کرد. اگر بخواهیم که اسپین ذرات بی جرم نظریه، از یک بیشتر نباشد آن گاه تعداد ابرتقارن‌ها نمی‌تواند از $N=4$ بیشتر باشد. چرا که هر عملگر ابرتقارن اسپین یک ذره را به اندازه‌ی یک دوم تغییر می‌دهد. در نتیجه نظریه‌ای که شامل یک میدان بی جرم با هلیسیتی‌ی یک باشد، آن گاه یک میدان بی جرم با هلیسیتی‌ی $1 - N/2$ هم دارد که نباید از (-1) کمتر باشد [۱۹].

به این ترتیب در نظریه‌ی $N=4$ با تقارن $SU(N_c)$ یک میدان پیمانهای اسپین یک وجود دارد که در نمایش الحاقی گروه $SU(N_c)$ نشسته و چهار فرمیون مایورانا و شش اسکالر حقیقی که همه در همان نمایش الحاقی هستند، آن را همراهی می‌کنند. از آن جا که چهار بار ابرتقارنی وجود دارد، این نظریه یک تقارن $SU(4)$ هم دارد که به آن گروه تقارن R می‌گویند. این گروه با گروه $SO(6)$ هم ارز است. گروه $SU(4)$ را گروه تقارنی میدان‌های فرمیونی و گروه $SO(6)$ را گروه تقارنی اسکالرها در نظر می‌گیرند.

به جز ابرتقارن می‌توان تقارن هم‌مدیس را هم به نظریه اضافه کرد. تقارن هم‌مدیس فضا-زمان چهاربعدی، با گروه $SO(2,4)$ داده می‌شود. جبر گروه ابرتقارن هم در این صورت به جبر گروه هم‌مدیس تبدیل می‌شود که علاوه بر ۱۶ بار ابرتقارن اولیه (چهار مولد فرمیونی مایورانا)، دارای ۳۲ بار ابرتقارنی است.

ساده‌ترین نظریه میدان پیمانهای ای چهاربعدی، تقارن $SO(6) \times SO(2,6)$ و ۳۲ بار دارد. تقارن $SO(2,6)$ تقارن یک فضای AdS_5 است و $SO(6)$ هم تقارن با یک فضای S^5 می‌باشد. از سوی دیگر، در یک فضا-زمان ده بعدی، نظریه‌ای که ۳۲ ابربار داشته باشد شامل گرانش می‌شود. در واقع فضای $AdS_5 \times S^5$ یک حل از ابرگرانش نوع IIB است.

بر اساس این تقارن‌ها ادعا می‌شود که نظریه‌ی میدان چهار بعدی $SU(N_c)$ با تقارن همدیس $N=4$ هم ارز یک نظریه‌ی ابرگرانش ده بعدی است. با توجه به رهیافت توفت در حد N_c خیلی بزرگ، مشاهده پذیرهای یک نظریه‌ی پیمانهای با یک نظریه‌ی ریسمان هم ارز است. و از طرفی ابرگرانش نوع IIB نظیر حد کم انرژی نظریه‌ی ابرریسمان نوع IIB می‌باشد.

توسط مالداسنا پیشنهاد شد که حد N_c های بزرگ از نظریه میدان‌های همدیس معینی در d بعد، می‌توانند بر حسب ابرگرانش یا نظریه‌ی ریسمان موجود در فضای AdS در $d+1$ بعد توصیف شوند که این فضا دارای ابعاد فشرده است.

در حد جفت شدگی‌های بالای توفت، $\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c \gg 1$ و عدد بزرگ (حد بالای رنگ) $N_c \rightarrow \infty$ ، کوارک‌هایی که حرکت آن‌ها در حال بررسی است، ذراتی در نمایش پایه‌ای^۱ هستند که توسط نظریه‌ی ابرتقارن $N=4$ یانگ-میلز و با اضافه کردن یک ابرچندگانه^۲ $N=2$ با جرم دلخواه توصیف می‌شوند [۲۰].

برای نمونه‌ی خاص نظریه‌ی ابرتقارن $N=4$ یانگ-میلز با پیمانهای $SU(N_c)$ ، تناظر AdS/CFT بیان می‌کند که این نظریه به طور دقیق برابر با نظریه‌ی IIB ریسمان در پس زمینه‌ی^۳ گرانشی $AdS_5 \times S^5$ است که در آن فضای پنج بعدی آنتی دو سیته و S^5 یک کره‌ی پنج بعدی می‌باشد. در حد بالای N_c و λ ثابت، نظریه‌ی ریسمان جفت شدگی ضعیف دارد و ابرگرانش تقریب خوبی برای آن است.

در حد N_c و λ های بزرگ، نظریه‌ی ریسمان توسط ابرریسمان IIB تقریب زده می‌شود. این تقریب اجازه می‌دهد که به طور دقیق محاسبه‌های غیراختلالی در نظریه‌ی میدان کوانتومی به مساله‌های موجود در نسبیت عام کلاسیکی مرتبط شود.

1 Fundamental Representation
2 Super Multiplet
3 Background

پس به طور خلاصه، نظریه‌ی میدان چهاربعدی $SU(N_c)$ با ابرتقارن $N=4$ در حد $N_c \rightarrow \infty$ هم ارز با نظریه‌ی ابرریسمان نوع IIB در پس زمینه ی $AdS_5 \times S^5$ است.

در این تناظر هر مفهوم فیزیکی در یک سمت تساوی، همتایی در سوی دیگر تساوی دارد. برای نمونه، ابعاد عملگرها در نظریه‌ی میدان همدیس توسط جرم ذرات در طرف ابرگرانشی داده می‌شود [۲۱] و یا تابش در نظریه میدان با نوسان‌های متریک در فضای گرانشی توصیف می‌شود.

در واقع مرز d بعدی فضای AdS_{d+1} ، یک تصویر از فضای d بعدی مینکوفسکی است و تقارن $SO(2,d)$ روی این مرز به عنوان گروه همدیس عمل می‌کند. همدیس تبدیلی است که شامل تبدیل‌های انتقال، دوران و لورنتس می‌باشد و به آن گروه تقارنی همدیس می‌گویند و از نظر فیزیکی یعنی مقیاس انرژی نداریم و همان‌طور که قبلاً ذکر شد، فیزیک مساله در انرژی‌های کم و زیاد بدون تغییر باقی می‌ماند.

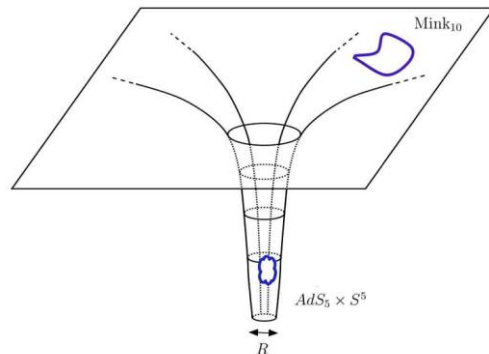
اکنون با دقت بیشتری این دوگانگی را بررسی می‌کنیم [۱۸]: دو نوع توصیف از شامه‌های سه بعدی وجود دارد: توصیف ریسمان باز و توصیف ریسمان بسته.

در توصیف ریسمان باز، این شامه‌ها متناظر با ابرصفحه‌ای^۱ در فضا-زمان تخت است. در این توصیف، برانگیختگی‌های این شامه‌ها ریسمان‌های باز هستند که روی شامه‌ها زندگی می‌کنند و ریسمان‌های بسته خارج از شامه‌ها انتشار می‌یابند.

در توصیف ریسمان بسته، شامه‌ها متناظر با هندسه‌ی فضا-زمانی است که تنها ریسمان‌های بسته منتشر می‌شوند. در این توصیف ریسمان بازی وجود ندارد. در شکل (۲-۱۰) طرحی از این توصیف آمده است.

1 Hyperplane

در این نمونه، در حد انرژی پائین دو نوع درجه‌ی آزادی ذاتی وجود دارد؛ آنهایی که در ناحیه‌ی مرز مینکوفسکی منتشر می‌شوند و آن دسته که در گلوگاه فضای AdS منتشر می‌شوند.



شکل ۲-۱۰- برانگیختگی‌ها در توصیف ریسمان بسته.

در ناحیه‌ی مینکوفسکی تنها مد هایی باقی می‌مانند که از ابرچندگانه های ده بعدی گراویتون بی‌جرم هستند. علاوه بر این، در انرژی‌های پایین این مد ها از هم تفکیک می‌شوند. اما در ناحیه‌ی گلوگاه کل برانگیختگی‌های ریسمان‌های جرم‌دار باقی می‌مانند. این بیان به این معنی است که یک مد در گلوگاه باید از یک پتانسیل گرانشی فراتر رود تا به ناحیه‌ی تخت مجانبی برسد. در نتیجه یک ریسمان بسته با انرژی بالا در ناحیه‌ی گلوگاه، ممکن است از دید یک مشاهده‌گر روی بی-نهایت مجانبی^۱، دارای یک انرژی پایین باشد؛ به شرط آن که ریسمان به طور مناسب در انتهای گلوگاه قرار گرفته باشد.

هرچه به انرژی‌های پایین‌تر برویم، این مدها بیشتر و بیشتر در عمق گلوگاه یافت می‌شوند و بنابراین از آن دسته که در ناحیه‌ی مجانبی هستند تفکیک می‌شوند. در نتیجه در توصیف ریسمان بسته، ناحیه‌ی برهم‌کنش مربوط به انرژی‌های کم به ریسمان‌های بسته در $AdS_5 \times S^5$ خلاصه می‌شود.

¹ Asymptotic Infinity

این دو نمایش در دو محدوده‌ی پارامتری متفاوت کنترل می‌شوند :

برای $1 \ll g_s N_c$ از $R^4 = 4\pi g_s N_c l_s^4$ دیده می‌شود که $R \ll l_s$. به عبارتی توصیف شعاعی اثر گرانشی شامه‌ها در واحد ریسمان بسیار کوچک می‌شود و ریسمان‌های بسته یک فضا- زمان تخت را در جاهای دیگر غیر از نزدیک به ابرصفحه حس می‌کنند یعنی جایی که شامه‌ها قرار گرفته‌اند. یعنی اینکه مشخصه‌ی شعاعی اثرهای گرانشی شامه‌ها نسبت به واحد طول ریسمان کوچک می‌شود و در نتیجه خمش فضا زیاد می‌شود و کار کردن در این فضا بسیار سخت و محاسبه بسیار سنگین می‌شود. در این ناحیه توصیف ریسمان بسته مفید نیست زیرا ممکن است به فهم هندسه‌ی مقیاس کوچکتر از ریسمان^۱ نیاز باشد.

در ناحیه‌ی مخالف، $1 \ll g_s N_c$ و در نتیجه $R \gg l_s$ به دست می‌آید و این هندسه خمش کمی پیدا می‌کند. در این حد، ریسمان بسته ساده‌سازی می‌شود و به طور ذاتی به گرانش کلاسیک تبدیل می‌شود و از آنجا که $g_s N_c$ بسط حلقه‌ها را کنترل می‌کند، ریسمان باز کنترل ناپذیر شده و ممکن است با جفت شدگی قوی ریسمان‌های باز سر و کار داشته باشیم. در نتیجه در این حد، ریسمان را فقط به شکل یک ذره می‌بینیم و در این شرایط خمش فضا کم می‌شود و فضا به سمت فضای تخت^۲ پیش می‌رود و در نتیجه کار کردن در این فضا (با توجه به گرانش آن) و محاسبه در آن آسان می‌شود. ولی با زیاد شدن ثابت جفت شدگی توفت برهم‌کنش بین ذرات در نظریه‌ی یانگ- میلز زیاد می‌شود و همچنین تعداد رنگ‌ها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند $N_c \rightarrow \infty$ و محاسبه بسیار سنگین می‌شود.

در مجموع، دو توصیف از تعداد N_c شامه‌های سه بعدی موجود است و در حد انرژی‌های کم به صورت زیر معرفی می‌شوند:

1 Sub-String-Scale
2 Flat

۱- یک ابرصفحه در فضا - زمان تخت با ریسمان‌های باز متصل به آن موجود است که حد انرژی پایین آن توسط نظریه‌ی ابر تقارن $N=4$ یانگ- میلز با گروه پیمان‌ه‌ی $SU(N_c)$ توصیف می‌شود.

۲- هندسه‌ی فضا- زمان تخت شامل ریسمان‌های بسته موجود است که حد انرژی پایین آن توسط نظریه‌ی ریسمان‌های بسته‌ی IIB در فضای $AdS_5 \times S^5$ توصیف می‌شود.

طبیعی است که نتیجه بگیریم این دو توصیف یکسان اند. بنابراین، رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

{نظریه‌ی ریسمان نوع IIB در فضا- زمان $AdS_5 \times S^5$ }



{نظریه‌ی ابر تقارن $N=4$ یانگ- میلز با پیمان‌ه‌ی $SU(N_c)$ }

۱۲-۲- مقایسه‌ی پارامترهای تناظر در حد N_c بزرگ

نظریه ریسمان شامل دو پارامتر بدون بعد می‌باشد:

شعاع کره‌ی پنج بعدی در واحد طول ریسمان $\frac{R}{\sqrt{\alpha'}}$ که R انحنای فضا-زمان $AdS_5 \times S^5$ می‌باشد

و ثابت جفت شدگی ریسمان، g_s ، که شدت برهم‌کنش بین ریسمان‌ها را نشان می‌دهد.

نظریه ابر تقارن یانگ- میلز شامل دو پارامتر بدون بعد می‌باشد:

یکی N_c که تعداد رنگ‌ها است و دیگری ثابت جفت شدگی یانگ- میلز g_{YM} ، که قدرت برهم‌کنش

بین ذرات را نشان می‌دهد. ثابت جفت شدگی توفت که مربوط به نظریه یانگ- میلز می‌باشد به

صورت $\lambda = g_{YM}^2 N_c$ بیان می‌شود.

معادله‌ی زیر

$$R^4 = g_{YM}^2 N_c l_s^4 = 4\pi g_s N_c l_s^4 \quad (25-2)$$

که در آن $g_{YM}^2 = 4\pi g_s$ است و معرف ارتباط بین ثابت جفت شدگی یانگ-میلز و ثابت جفت شدگی ریسمان است.

نظریه‌ی پیمانهای توسط مرتبه‌ی گروه پیمانهای، N_c ، و ثابت جفت شدگی توفت^۱، $\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c = R^4/l_s^4$ ، مشخص می‌شود. نظریه‌ی ریسمان توسط ثابت جفت شدگی ریسمان، g_s ، و ابعاد فضای AdS_5 و S^5 تخمین زده می‌شود.

هر دوی این‌ها، فضاهایی با بیشینه تقارن هستند که به طور کامل توسط مقیاس یکسانی مشخص می‌شوند که شعاع خمش R^2 است. این بیان می‌کند که دو فضای موجود در توصیف ریسمان که توسط شامه‌های ده بعدی تقویت می‌شوند، دارای شعاع‌های یکسان هستند. این نکته مربوط به پارامترهای درون نظریه‌ی پیمانهای است به این منظور که:

$$\frac{R^2}{\alpha'} \sim \sqrt{g_s N_c} \sim \sqrt{\lambda} \quad (26-2)$$

α' تصحیح ریسمان را کنترل کرده و مرتبط به ابعاد محدود ریسمان است و از طرفی فضا-زمانی که در آن ریسمان منتشر می‌شود، متناظر است با ثابت جفت شدگی قوی که با بسط $1/\sqrt{\lambda}$ در نظریه‌ی پیمانهای به دست می‌آید.

حد ابرگرانشی نظریه‌ی ریسمان این است که $\lambda \rightarrow \infty$ یا $R^4/l_s^4 \gg 1$ شود. این شرطی لازم و اما نه کافی است؛ باید شرط دیگر $g_s \rightarrow 0$ که نشان دهنده‌ی $N_c \rightarrow \infty$ است، نیز اضافه شود. که بیان کننده این است که درجات آزادی از قبیل ریسمان‌های جرم دار که تنش آنها بر اساس $1/g_s$

1 't Hooft
2 Curvature

مقیاس‌بندی می‌شود، سنگین باقی بماند [۱۸]. که در این صورت، گرانش دارای جفت شدگی ضعیف است و در حد گرانش کلاسیکی باقی می‌ماند.

با استفاده از روابط ذکر شده می‌توان دید که ثابت جفت شدگی ریسمان به پارامترهای نظریه‌ی میدان مرتبط می‌شود:

$$g_s \sim g_{YM}^2 \sim \frac{\lambda}{N_c} \quad (27-2)$$

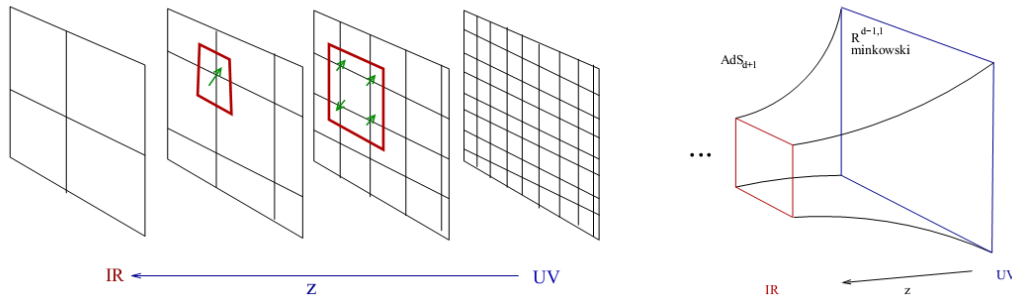
یعنی برای هندسه‌ی $AdS_5 \times S^5$ با اندازه‌ی ثابت یا به عبارتی λ های ثابت، بسط حلقه‌های ریسمان به طور دقیق با بسط $1/N_c$ مربوط به نظریه‌ی میدان متناظر هستند.

به طور خلاصه می‌توان گفت که محاسبه‌های آسان در گرانش نظیر انجام محاسبه‌های سخت در سمت نظریه میدان (یانگ-میلز) است. زیرا هنگامی که ثابت جفت شدگی قوی باشد نمی‌توان محاسبه را به صورت اختلالی حل کرد چون حلقه‌های کوانتومی میدان نیز وارد محاسبه می‌شوند اما با استفاده از تناظر معرفی شده می‌توان در سمت گرانش که ثابت جفت شدگی ضعیف و در نتیجه بر هم‌کنش میدان ضعیف است، محاسبه را با روش‌های اختلالی حل کرد.

۲-۱۳- ارتباط UV/IR

یکی از مقوله‌های مهم در تناظر AdS/CFT، دوگانگی شعاع / مقیاس^۱ یا UV/IR است. می‌توان گفت که هر چه قدر به برانگیختگی‌های فضای گرانشی در مرز AdS نزدیک شویم، اندازه‌ی برانگیختگی‌های میدانی در سمت CFT کوچک‌تر می‌شود.

¹ Scale/Radius



شکل ۱۱-۲- بعد اضافه در حجم گرانشی به عنوان مقیاسی در نظریه‌ی میدان.

از آن جا که نظریه‌ی پیمانه‌ای روی مرز فضا- زمان ریسمان زندگی می‌کند، دوگانگی AdS/CFT به اصل هولوگرافی نیز معروف است. فضا- زمان ریسمان را با نام حجم گرانشی^۱ معرفی کرده و بعد اضافی در این حجم را به عنوان مختصه‌ی هولوگرافی مشخص می‌کنند. این مختصه مرتبط با گروه باز بهنجارش^۲ یا مقیاس انرژی در نظریه‌ی پیمانه‌ای است، $r \sim E$ ، به این معنا که رویدادهای فیزیکی که در مکان‌های شعاعی متفاوت در حجم گرانشی روی می‌دهند، با رویدادهای متفاوت از نظر مقیاس انرژی در نظریه‌ی پیمانه‌ای متناظر است [۲۲].

برای داشتن یک دیدگاه معتبر از طبیعت هولوگرافی این دوگانگی، می‌توان گفت که بعد اضافی (شعاعی) در فضای گرانشی از مقیاسی در نظریه‌ی میدان هم‌دیس متناظر به دست می‌آید. طرحی از این ارتباط در شکل (۱۱-۲) دیده می‌شود. این دیدگاه رویدادهای دینامیکی متفاوتی می‌دهد. برای مثال، تصور شفافیت رنگ‌های نظریه‌ی میدان که در آن برانگیختگی‌هایی با مقیاس متفاوت بدون برهم‌کنش از میان یکدیگر عبور می‌کنند، به زیبایی توسط فضای گرانشی توصیف می‌شود: در فضای گرانشی، برانگیختگی‌های متناظر به واسطه‌ی قرار گرفتن در جهت‌های شعاعی متفاوت، با یکدیگر برهم‌کنش نمی‌کنند [۲۳]. از طرفی این دوگانگی حاکی از آن است که فیزیک فواصل کوتاه در نظریه‌ی پیمانه‌ای به فیزیک نزدیک مرز AdS مرتبط است، در حالی که فیزیک فواصل بلند به فیزیک نزدیک افق مربوط می‌شود. یعنی حد انرژی بالا UV ($E_{YM} \rightarrow \infty$)، به $z \rightarrow 0$ متناظر می‌شود. به

1 Bulk

2 Renormalization Group Flow

عبارت دیگر به ناحیه‌ی نزدیک به مرز- در حالی که حد انرژی پایین IR ($E_{YM} \rightarrow 0$)، متناظر با $z \rightarrow \infty$ است و یا به عبارتی به ناحیه‌ی نزدیک به افق [۱۸]. در نتیجه اثرهای مادون قرمز^۱ در فضای AdS با اثرهای فرابنفش^۲ در نظریه‌ی مرزی (یانگ-میلز) متناظر است.

1 Infrared Effects
2 Ultraviolet Effects

فصل سوم

مطالعه‌ی تابش کوارک سنگین با استفاده از

AdS/CFT

- ❖ تعریف مساله
- ❖ معادله حرکت کوارک شتابدار با استفاده از ریسمان نامبو گوتو
- ❖ محاسبه‌ی تانسور انرژی-تکانه‌ی پنج بعدی در فضای گرانشی
- ❖ محاسبه‌ی چگالی انرژی کوارک شتابدار در خلاء نظریه پیمانه‌ای
- ❖ محاسبه‌ی چگالی انرژی تابشی و توان تابشی کوارک شتابدار در خلاء
- ❖ در نظر گرفتن حرکت‌های متفاوت برای کوارک شتابدار
- ❖ مقایسه با نتیجه‌های کلاسیکی
- ❖ نتیجه‌گیری

۳-۱- تعریف مساله :

در سال‌های اخیر پیشرفت‌های بسیاری در مسائل فیزیک نظری انجام شده که بسیاری از آن‌ها را مدیون تناظر AdS/CFT هستیم و به کمک آن می‌توان محاسبه در ناحیه‌ای با جفت شدگی بالا مربوط به نظریه‌های پیمان‌های خاص با تقارن بیشینه را، با روش‌هایی در جفت شدگی ضعیف در نظریه‌ی ریسمان متناظر به دست آورد.

یکی از این نمونه‌ها، مطالعه‌ی توزیع فضا-زمانی تابش انرژی است که محاسبه‌های آن نیازمند حل مساله‌های پاسخ فضای گرانشی است.

در این تحقیق نشان داده می‌شود که تابش ذره شتابدار در خلاء $N=4$ نظریه‌ی ابرتقارن یانگ-میلز با استفاده از تقریب ابرگرانشی، توزیع انرژی را ایجاد می‌کند که دارای الگوی فضا-زمانی مشابهی با توزیع کلاسیکی متناظر است، یا به عبارتی دیگر تابش با سرعت نور منتشر می‌شود بدون اینکه اثری از گستردگی کوانتومی انرژی نشان دهد.

فقدان گستردگی انرژی به این واقعیت مربوط می‌شود که پاسخ انرژی روی مرز از اختلال درون حجم گرانشی از نقاط تقریباً مرزی یا مرزی به دست می‌آید. این نکته در بخش UV/IR در فصل دوم توضیح داده شد.

این ویژگی‌ها به عنوان نتایجی از تقریب ابرگرانشی تفسیر می‌شوند که در نشان دادن نوسان‌های کوانتومی ناتوان است که باید در حد جفت شدگی قوی حضور داشته باشند.

چنان که در فصل دوم بیان شد، تقریب ابرگرانشی، حد شبه کلاسیکی نظریه ریسمان است که در آن حلقه‌های ریسمان و برانگیختگی‌های داخلی ریسمان حذف شده‌اند. فرض می‌شود که این تقریب بتواند به درستی حد جفت شدگی قوی توفت از نظریه‌ی ابرتقارن $N=4$ یانگ-میلز را توصیف کند که همانطور که در فصل دوم توضیح داده شد در آن $\lambda = g_{YM}^2 N_c \rightarrow \infty$ با جفت شدگی $g \ll 1$ است.

اما این موفقیت همیشگی نیست؛ تقریب ابرگرانشی^۱ از ذکر جزئیات توزیع فضا- زمانی تابش گسیل شده در خلاء و در حد جفت شدگی‌های قوی ناتوان است. در حالت کلی، این توزیع از نوسان‌های طولی ریسمان که در حد جفت شدگی قوی نادیده گرفته شده، اثر می‌پذیرد.

گسترده‌تری به عنوان نتیجه‌ای که با استفاده از تقریب ابرگرانشی به دست نمی‌آید، به معنای این است که اثرات زمان‌گونه‌ی کوانتاهای گسیلی در نظر گرفته شوند و مولفه‌های تابشی را دهد که با سرعتی کمتر از سرعت نور در حرکتند. بنابراین یک توزیع در تابش گسیل شده از منبع دیده می‌شود. اما در این محاسبه‌ی خاص که در تقریب ابرگرانشی نوشته می‌شود، تابش همیشه با سرعت نور انتشار یافته که شبیه به حل معادله‌های کلاسیکی ماکسول است.

یکی از دلایلی که در نگاه اول این نتیجه را غیر منتظره می‌شمارد، این است که تناقض با تناظر UV/IR است که همانطور که در فصل پیش ذکر شد یکی از پایه‌های دوگانگی پیمانانه / ریسمان^۲ است.

همان گونه که در فصل دوم توضیح داده شد، فضا- زمان آنتی دو سیتة AdS_5 ، که نظریه‌ی ریسمان در آن پایه‌ریزی شده است، از ضرب فضایی فضا- زمان چهار بعدی مینکوفسکی (مرز فضای AdS_5)، در بعد پنجم یا شعاعی z ($0 \leq z < \infty$) به دست می‌آید که مرز مینکوفسکی روی $z = 0$ قرار گرفته است. این بعد پنجم به عنوان مخزن نوسان‌های کوانتومی برای نظریه پیمانانه‌ای متناظر در نظر گرفته می‌شود [۳]؛ تناظر UV/IR که ابزاری یگانه برای تفسیر فیزیکی نتایج نظریه‌ی ریسمان وابسته به نظریه‌ی پیمانانه‌ای است، معتبرترین دلیل برای بیان این نکته است.

1 Super Gravity Approximation (SUGRA)

2 Gauge/ String

به عبارت دقیق تر ، ارتباط UV/IR به مقیاس‌های انرژی- تکانه‌ی پدیده‌های فیزیکی روی مرز مربوط می‌شود (توسط اصل عدم قطعیتی که برای مقیاس فضا- زمانی تعریف می‌شود) که خود به مکان شعاعی Z ، وابسته به برانگیختگی های ریسمان متناظر در حجم گرانشی ارتباط دارند.

در مساله‌ی تابش در خلاء، هنگامی که یک منبع فیزیکی مانند کوارکی سنگین که جسم دوگان آن یک ریسمان نامبو گوتو در حجم گرانشی است، به حرکت درآید؛ در نتیجه اختلال ایجاد شده در حجم گرانشی که با سرعت پنج بعدی نور منتشر می‌شود، مقداری انرژی از ریسمان خارج می‌شود.

در نتیجه می‌توان گفت تابش تولید شده که توسط اثرهای مربوط به فضای گرانشی روی مرز تولید می‌شود، با سرعت نور گسترش می‌یابد. این یکی از همبستگی‌های UV/IR است که بین اندازه‌ی سرتاسری^۱ روی مرز و نفوذ^۲ شعاعی مربوط به برانگیختگی‌های متناظر در حجم گرانشی کاربرد دارد.

از طرف دیگر با وجود منبع‌هایی در فاصله‌های بزرگ Z در حجم گرانشی، تابش در خلاء همانند یک کوانتای بی جرم نورگونه، بدون هیچ اثری از گستردگی، منتشر می‌شود.

این ناهماهنگی بسیار غیرمنتظره است. زیرا همبستگی بین گستردگی توزیع انرژی روی مرز و مکان منبعی در حجم گرانشی، نتیجه‌ای از علیت است (به عنوان نمونه، در محاسبه چگالی گلوبال، $Tr F_{\mu\nu}^2$ ، که توسط یک اختلال کوچک ریسمان ایستا روی مرز تشکیل می‌شود [۲۴]).

به طور خلاصه این که تمام اثرهای روی مرز مربوط به تابش، از منبعی در حجم گرانشی ایجاد می‌شوند که بسیار نزدیک به مرز واقع شده‌اند و در فاصله‌ی Z از یک اختلال فیزیکی با پهنای σ قرار گرفته‌اند.

1 Overall Size
2 Penetration

به طور خاص در حدی که منبع فیزیکی پهنای صفر دارد، اثرهای مرزی به طور کامل از حد $z \rightarrow 0$ وابسته به اختلال در فضای گرانشی به دست می‌آید. در واقع هنگامی که منبع فیزیکی روی مرز غیرمستقر باشد، مانند یک کوارک چرخان [۲]، دیده می‌شود که با تغییر متغیرهای مناسب برای بیان اثرهای روی مرز، کل نتیجه برای چگالی انرژی به عنوان مشارکت نقطه مرزی $z = 0$ حاصل می‌شود.

سرانجام در پاسخ به این نکته که منابع درون فضای گرانشی که بسیار دورتر از مرز واقع شده اند، هیچ بازتابی در چگالی انرژی وابسته به نظریه‌ی پیمانه‌ای ندارند چنین توضیح داده می‌شود که منبع‌های درون حجم گرانشی که در فضای AdS₅ با سرعت نور منتشر می‌شوند اثری از انرژی روی مرز باقی نمی‌گذارند و این گویای این خاصیت ذاتی است که وقتی منبعی موازی با مرز در حرکت است، می‌توان گفت که در یک نقطه‌ی ثابت z (مختصه پنجم) قرار گرفته است و در نتیجه این اثرها مانند یک موج ضربه‌ای^۱ گرانشی منتشر می‌شود که به علت اتساع زمانی لورنتس یا تاخیر زمانی لورنتس، که خود به طور کامل در زمان‌های اولیه‌ی $t \rightarrow -\infty$ تولید می‌شود، به وجود می‌آید. و در این حالت به طور طبیعی هیچ اثر انرژی از زمان‌های محدود t وجود ندارد.

۳-۲- معادله حرکت کوارک شتابدار با استفاده از ریسمان نامبو گوتو

در این بخش کوارک سنگینی در نمایش پایه‌ای نظریه گروه $SU(N_c)$ در نظر گرفته می‌شود که در خلاء $N=4$ نظریه‌ی ابرتقارن یانگ-میلز با ثابت جفت شدگی قوی تحت حرکت دلخواه با مسیر r $r_q(t) =$ در حرکت است. فرض می‌شود که این کوارک به اندازه‌ی دلخواه سنگین است. بنابراین استفاده از عبارت مسیر کلاسیکی، برای حرکت این کوارک صحیح می‌باشد. کوارک هم می‌تواند منفرد باشد و یا قسمتی از جفت کوارک-پادکوارک باشد. توصیف ابرگرانشی متناظر با این

¹ Shock-Wave

کوارک، یک ریسمان نامبو گوتو در فضای AdS_5 است که یک سر آن متصل به یک شامه‌ی هفت بعدی است.

اگر کوارک جزئی از جفت کوارک - پادکوارک باشد، ریسمان دوگان می‌تواند محدود بوده به این منظور که سر دیگر آن متصل به شامه‌ی هفت بعدی مشابه دیگر است. و اگر منفرد باشد، ریسمان متصل به کوارک می‌تواند تا مرکز AdS_5 گسترش یابد.

از دیدگاه نظریه‌ی پیمانهای، معرفی شامه‌های هفت بعدی در پس زمینه، برابر با اضافه کردن تعداد N_f ابرچندگانه‌هایی در نمایش گروه پیمانهای $SU(N_c)$ است که تقارن را به $N=2$ می‌شکنند. این‌ها درجه‌های آزادی هستند که از آن‌ها به عنوان کوارک یاد می‌کنیم، اگرچه می‌توانند شامل هر دو میدان با اسپین $1/2$ و اسپین صفر باشند. برای $N_f \ll N_c$ ، اثر شامه‌های هفت بعدی روی مرز به طور محسوس حذف می‌شود [۲۵]. در این تحقیق نیز، اثر شامه‌ی هفت بعدی حذف گشته و به عنوان شامه‌ی آزمون معرفی می‌شود.

اکنون فضا-زمان AdS_5 توسط مختصات پوانکاره با متریک زیر پارامتر بندی می‌شود:

$$ds^2 \equiv G_{MN} dx^M dx^N = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + d\vec{r}^2 + dz^2). \quad (1-3)$$

در این جا $x^M = (x^\mu, z)$ است و $x^\mu = (t, \vec{r})$ مختصات مینکوفسکی در فضا-زمان فیزیکی است و z همان گونه که در تعریف مساله آمد بعد پنجم است و همچنین به عنوان مختصات شعاعی در فضای AdS_5 شناخته می‌شود.

در این مختصات، مرز مینکوفسکی را در $z = 0$ قرار داده و مرکز فضای AdS_5 در $z \rightarrow \infty$ واقع

می‌شود. و شامه‌ی هفت بعدی تا فاصله‌ی $z_m = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m_q}$ از مرز کشیده می‌شود که در آن m_q جرم

کوارک است و باید به اندازه‌ی کافی بزرگ گرفته شود تا در نتیجه پارامتر شامه‌ی هفت بعدی، Z_m ، از هر مقیاس مورد توجه در فضا-زمان، کوچکتر باشد.

شناخت حرکت ریسمان یا به عبارتی دینامیک ریسمان، با توجه به کنش نامبو گوتو معرفی

می‌شود:

$$S = \frac{-1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma L \xrightarrow{L = \sqrt{-\det g_{ab}}} \frac{-1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det g_{ab}} \rightarrow$$

$$S = -T_0 \int d\tau d\sigma \sqrt{-g}, \quad g_{ab} = G_{MN} \partial_a X^M \partial_b X^N. \quad (2-3)$$

که در آن $T_0 = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi L^2}$ تنش ریسمان است، L در رابطه‌ی تنش معرف شعاع خمش فضای گرانشی است که در فصل دوم با R نشان داده شد. و همچنین σ و τ دو مختصه‌ی روی جهان سطح هستند و $x^M(\tau, \sigma)$ مختصه‌ی ریسمان در فضای AdS_5 است و g_{ab} با $a, b = \tau, \sigma$ متریک القایی روی جهان سطح ریسمان است و L به عنوان لاگرانژی سیستم معرفی می‌شود. با انتخاب $\tau = t$ و $\sigma = z$ به عنوان دو مختصه برای پارامتربندی جهان-سطح می‌توان توابع انتخاب شده و مشتق هایشان را به صورت زیر نوشت:

$$X^M = (t, \vec{r}_s, z), \quad \dot{X}^M = \frac{\partial X^M}{\partial t} = (1, \dot{\vec{r}}_s, 0), \quad X^{M'} = \frac{\partial X^M}{\partial z} = (0, \vec{r}'_s, 1). \quad (3-3)$$

که در آن علامت نقطه و پرایم، به ترتیب نشان دهنده‌ی مشتق بر حسب t و z هستند. هر یک از مولفه‌های متریک القایی و دترمینان آن به قرار زیر می‌باشند:

$$g_{\tau\tau} = \dot{X} \cdot \dot{X} \xrightarrow{\dot{X}^2 = G_{MN} \dot{X}^M \dot{X}^N, \quad \dot{X}^M = (1, \dot{\vec{r}}_s, 0)} \rightarrow$$

$$= \dot{X}^M \dot{X}^N G_{MN} = \dot{X}^0 \dot{X}^0 G_{00} + \dot{X}^i \dot{X}^i G_{ii} + \dot{X}^z \dot{X}^z G_{zz} =$$

$$= (1 \times 1) \frac{-L^2}{z^2} + (\dot{\vec{r}}_s^2) \frac{L^2}{z^2} + 0 \xrightarrow{|G_{00}| = G_{ii} = G_{zz} = \frac{L^2}{z^2}} \rightarrow$$

$$= |G_{00}| (-1 + \dot{\vec{r}}_s^2),$$

$$\begin{aligned}
g_{\sigma\sigma} &= X' \cdot X' = \frac{X'^2 = G_{MN} X'^M X'^N, \quad X^{M'} = (0, \vec{r}'_s, 1)}{\rightarrow} \\
&= \dot{X}^M \dot{X}^N G_{MN} = \dot{X}^0 \dot{X}^0 G_{00} + \dot{X}^i \dot{X}^i G_{ii} + \dot{X}^z \dot{X}^z G_{zz} = \\
&= 0 + (\vec{r}'_s)^2 \frac{L^2}{z^2} + (1 \times 1) \frac{L^2}{z^2} = \frac{L^2}{z^2} (1 + \vec{r}'_s{}^2) = |G_{00}| (1 + \vec{r}'_s{}^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{\tau\sigma} &= \dot{X} \cdot X' = \frac{\dot{X} \cdot X' = G_{MN} \dot{X}^M X'^N, \quad \dot{X}^M = (1, \dot{\vec{r}}_s, 0), \quad X^{M'} = (0, \vec{r}'_s, 1)}{\rightarrow} \\
&= \dot{X}^M \dot{X}^N G_{MN} = \dot{X}^0 \dot{X}^0 G_{00} + \dot{X}^i \dot{X}^i G_{ii} + \dot{X}^z \dot{X}^z G_{zz} = \\
&= (1 \times 0) \frac{-L^2}{z^2} + (\dot{\vec{r}}_s \cdot \vec{r}'_s) \frac{L^2}{z^2} + (0 \times 1) \frac{L^2}{z^2} = \\
&= \frac{L^2}{z^2} (\dot{\vec{r}}_s \cdot \vec{r}'_s) = |G_{00}| (\dot{\vec{r}}_s \cdot \vec{r}'_s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= \sqrt{-g} = \sqrt{-(g_{\tau\tau} g_{\sigma\sigma} - g_{\tau\sigma}^2)} = \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} = \\
&= \sqrt{|G_{00}|^2 (\dot{\vec{r}}_s \cdot \vec{r}'_s)^2 - |G_{00}|^2 (-1 + \dot{\vec{r}}_s{}^2)(1 + \vec{r}'_s{}^2)} = \\
&= |G_{00}| \sqrt{(\dot{\vec{r}}_s \cdot \vec{r}'_s)^2 - (-1 - \vec{r}'_s{}^2 + \dot{\vec{r}}_s{}^2 + \dot{\vec{r}}_s{}^2 \vec{r}'_s{}^2)} = \\
&= |G_{00}| \sqrt{(\dot{\vec{r}}_s \cdot \vec{r}'_s)^2 + 1 + \vec{r}'_s{}^2 - \dot{\vec{r}}_s{}^2 - \dot{\vec{r}}_s{}^2 \vec{r}'_s{}^2} = \\
&= |G_{00}| \sqrt{1 - \dot{\vec{r}}_s{}^2 + \vec{r}'_s{}^2 + [(\dot{\vec{r}}_s \cdot \vec{r}'_s)^2 - \dot{\vec{r}}_s{}^2 \vec{r}'_s{}^2]} \rightarrow \|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 + |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 \Rightarrow [(\dot{\vec{r}}_s \cdot \vec{r}'_s)^2 - \dot{\vec{r}}_s{}^2 \vec{r}'_s{}^2] = -(\dot{\vec{r}}_s \times \vec{r}'_s)^2 \\
\rightarrow L &= \sqrt{-g} = |G_{00}| \sqrt{1 - \dot{\vec{r}}_s{}^2 + \vec{r}'_s{}^2 - (\dot{\vec{r}}_s \times \vec{r}'_s)^2}.
\end{aligned}$$

(۴-۳)

که در آن $|G_{00}| = L^2/z^2$ می باشد که L شعاع خمش فضای گرانشی است و Z بعد هولوگرام می باشد. به شرط ایستا ماندن نوسان های کوچک $\vec{r}_s = \vec{r}_s + \delta \vec{r}_s(t, z)$ برای ریسمان، معادله ی حرکت ریسمان به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_M^t + \frac{\partial}{\partial z} P_M^z = 0.$$

$$\begin{aligned}
P_M^t &= -T_0 \frac{X'_M (\dot{X} \cdot X') - \dot{X}_M X'^2}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} = T_0 \frac{\dot{X}_M X'^2 - X'_M (\dot{X} \cdot X')}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \\
&\xrightarrow{\dot{X}_M = G_{MN} \dot{X}^N = |G_{00}| (1, \dot{\vec{r}}_s, 0), \quad \dot{X}^2 = |G_{00}| (-1 + \dot{\vec{r}}_s{}^2), \quad X'_M = G_{MN} X'^N = |G_{00}| (0, \vec{r}'_s, 1), \quad X'^2 = |G_{00}| (1 + \vec{r}'_s{}^2), \quad (\dot{X} \cdot X') = |G_{00}| (\dot{\vec{r}}_s \cdot \vec{r}'_s)} \\
&= T_0 \frac{|G_{00}|^2 [\dot{\vec{r}}_s (1 + \vec{r}'_s{}^2) - \vec{r}'_s (\dot{\vec{r}}_s \cdot \vec{r}'_s)]}{|G_{00}| \sqrt{1 - \dot{\vec{r}}_s{}^2 + \vec{r}'_s{}^2 - (\dot{\vec{r}}_s \times \vec{r}'_s)^2}} = T_0 \frac{|G_{00}| [(1 + \vec{r}'_s{}^2) \dot{\vec{r}}_s - (\dot{\vec{r}}_s \cdot \vec{r}'_s) \vec{r}'_s]}{\sqrt{1 - \dot{\vec{r}}_s{}^2 + \vec{r}'_s{}^2 - (\dot{\vec{r}}_s \times \vec{r}'_s)^2}},
\end{aligned}$$

$$P_M^z = -T_0 \frac{\dot{X}_M (\dot{X} \cdot X') - X'_M \dot{X}^2}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

$$\xrightarrow{\dot{X}_M = G_{MN} \dot{X}^N = |G_{00}|(1, \dot{r}_s, 0), \dot{X}^2 = |G_{00}|(-1 + \dot{r}_s^2), X'_M = G_{MN} X'^N = |G_{00}|(0, \vec{r}'_s, 1), X'^2 = |G_{00}|(1 + \vec{r}'_s{}^2), (\dot{X} \cdot X') = |G_{00}|(\dot{r}_s \cdot \vec{r}'_s)}$$

$$= -T_0 \frac{|G_{00}|^2 [\dot{r}_s (\dot{r}_s \cdot \vec{r}'_s) - (\vec{r}'_s (-1 + \dot{r}_s^2))]}{|G_{00}| \sqrt{1 - \dot{r}_s^2 + \vec{r}'_s{}^2 - (\dot{r}_s \times \vec{r}'_s)^2}} = -T_0 \frac{|G_{00}| [\dot{r}_s (\dot{r}_s \cdot \vec{r}'_s) + \vec{r}'_s (1 - \dot{r}_s^2)]}{\sqrt{1 - \dot{r}_s^2 + \vec{r}'_s{}^2 - (\dot{r}_s \times \vec{r}'_s)^2}}$$

$$= -T_0 \frac{|G_{00}| [(1 - \dot{r}_s^2) \vec{r}'_s + (\dot{r}_s \cdot \vec{r}'_s) \dot{r}_s]}{\sqrt{1 - \dot{r}_s^2 + \vec{r}'_s{}^2 - (\dot{r}_s \times \vec{r}'_s)^2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_M^t + \frac{\partial}{\partial z} P_M^z = 0 \rightarrow$$

$$|G_{00}| T_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{[(1 + \vec{r}'_s{}^2) \dot{r}_s - (\dot{r}_s \cdot \vec{r}'_s) \vec{r}'_s]}{\sqrt{1 - \dot{r}_s^2 + \vec{r}'_s{}^2 - (\dot{r}_s \times \vec{r}'_s)^2}} - T_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{|G_{00}| [(1 - \dot{r}_s^2) \vec{r}'_s + (\dot{r}_s \cdot \vec{r}'_s) \dot{r}_s]}{\sqrt{1 - \dot{r}_s^2 + \vec{r}'_s{}^2 - (\dot{r}_s \times \vec{r}'_s)^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{[(1 + \vec{r}'_s{}^2) \dot{r}_s - (\dot{r}_s \cdot \vec{r}'_s) \vec{r}'_s]}{\sqrt{1 - \dot{r}_s^2 + \vec{r}'_s{}^2 - (\dot{r}_s \times \vec{r}'_s)^2}} - \frac{1}{|G_{00}|} \frac{\partial}{\partial z} \frac{|G_{00}| [(1 - \dot{r}_s^2) \vec{r}'_s + (\dot{r}_s \cdot \vec{r}'_s) \dot{r}_s]}{\sqrt{1 - \dot{r}_s^2 + \vec{r}'_s{}^2 - (\dot{r}_s \times \vec{r}'_s)^2}} = 0. \quad (5-3)$$

همان گونه که در [۱۲] آمده است، جواب عمومی $\vec{r}_s(t, z)$ برای معادله‌ی بالا به صورت ضمنی

توسط روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$t = t_q + \gamma_q z, \quad \vec{r}_s = \vec{r}_q + \vec{v}_q (t - t_q) = \vec{r}_q + \vec{v}_q \gamma_q z. \quad (6-3)$$

که در آن مکان \mathbf{r}_q و سرعت \mathbf{v}_q و فاکتور نسبیتی $\gamma_q = \frac{1}{\sqrt{1 - v_q^2}}$ مربوط به کوآرک، در زمان t_q محاسبه

می‌شوند که در آن $\vec{v}_q = \frac{d\vec{r}_q}{dt_q}$ می‌باشد.

دو معادله‌ی رابطه‌ی (۶-۳)، به صورت زیر تفسیر می‌شوند:

با حل اولین معادله در رابطه‌ی (۶-۳)، t_q بر حسب تابعی از t و z به دست می‌آید و سپس در

معادله‌ی دوم جاگذاری شده تا تابع $\vec{r}_s(t, z)$ به دست آید. برای روشن‌تر شدن تفسیر فیزیکی این

رابطه، نتیجه‌ی آن بررسی می‌شود به این صورت که (سرعت نور در فضا زمان پنج بعدی

آنتی دو سیته، بنا به قرار داد برابر با یک است):

$$1) t = t_q + \gamma_q z \Rightarrow (t - t_q) = \frac{z}{\sqrt{1 - v_q^2}} \rightarrow (t - t_q)^2 = \left(\frac{z}{\sqrt{1 - v_q^2}} \right)^2 = \frac{z^2}{(1 - v_q^2)} \rightarrow (1 - v_q^2) = \frac{z^2}{(t - t_q)^2} \rightarrow$$

$$v_q^2 = 1 - \frac{z^2}{(t - t_q)^2}.$$

$$2) \vec{r}_s = \vec{r}_q + \vec{v}_q (t - t_q) \Rightarrow (\vec{r}_s - \vec{r}_q) = \vec{v}_q (t - t_q).$$

$$3) (\vec{r}_s - \vec{r}_q)^2 = v_q^2 (t - t_q)^2.$$

با جاگذاری ۳ در ۱:

$$(\vec{r}_s - \vec{r}_q)^2 = \left(1 - \frac{z^2}{(t - t_q)^2}\right) (t - t_q)^2 \rightarrow (\vec{r}_s - \vec{r}_q)^2 = (t - t_q)^2 - z^2 \rightarrow (\vec{r}_s - \vec{r}_q)^2 + z^2 = (t - t_q)^2 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow t_q = t, \vec{r}_s = \vec{r}_q.$$

یا به عبارت دقیق‌تر:

$$(\vec{r}_s - \vec{r}_q)^2 + z^2 = (t - t_q)^2; \quad t_q(t, z = 0) = t, \quad \vec{r}_s(t, z = 0) = \vec{r}_q(t).$$

(۷-۳)

یعنی سیگنال نوری که در زمان t_q در نقطه‌ای با موقعیت $\mathbf{r} = \mathbf{r}_q$ و $z = 0$ گسیل شده، در زمان بعدی t ، در نقطه‌ای با مختصات \mathbf{r}_s و z به ریسمان می‌رسد. بنابراین رابطه‌ی (۳-۶) نشان می‌دهد که ریسمان چگونه داخل فضای گرانشی توسط تابش کوآرک روی مرز، ساخته می‌شود.

بررسی مشتق‌های t_q بر حسب t و z به صورت زیر است که اگر $\vec{a}_q = \frac{d\vec{v}_q}{dt_q}$ ، در نتیجه:

$$t = t_q + \gamma_q z = t_q + \frac{z}{\sqrt{1 - v_q^2}}$$

$$\frac{\partial t}{\partial t} = \frac{\partial t_q}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_q}{\partial t} z + \gamma_q \frac{\partial z}{\partial t} \rightarrow$$

$$\frac{\partial t_q}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}_q} \frac{\partial \vec{v}_q}{\partial t_q} \frac{\partial t_q}{\partial t} (1 - v_q^2)^{-1/2} \right) z + \gamma_q \frac{\partial z}{\partial t} = 1 \xrightarrow{\frac{\partial z}{\partial t} = 0, \frac{\partial \vec{v}_q}{\partial t_q} = \vec{a}_q, \frac{\partial (1 - v_q^2)^{-1/2}}{\partial \vec{v}_q} = \vec{v}_q (1 - v_q^2)^{-3/2} = \gamma_q^3 \vec{v}_q}$$

$$\frac{\partial t_q}{\partial t} (1 + z \gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) = 1 \rightarrow \frac{\partial t_q}{\partial t} = \frac{1}{1 + z \gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q}.$$

(۸-۳)

$$t = t_q + \gamma_q z = t_q + \frac{z}{\sqrt{(1-v_q^2)}}$$

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial t_q}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_q}{\partial z} z + \gamma_q \frac{\partial z}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial t_q}{\partial z} + \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}_q} \frac{\partial \vec{v}_q}{\partial t_q} \frac{\partial t_q}{\partial z} (1-v_q^2)^{-1/2} \right) z + \gamma_q \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0, \frac{\partial \vec{v}_q}{\partial t_q} = -\vec{a}_q, \frac{\partial (1-v_q^2)^{-1/2}}{\partial \vec{v}_q} = \vec{v}_q (1-v_q^2)^{-3/2} = \gamma_q^3 \vec{v}_q, \frac{\partial z}{\partial z} = 1,$$

$$\frac{\partial t_q}{\partial z} (1 + z \gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + \gamma_q = 0 \rightarrow \frac{\partial t_q}{\partial z} (1 + z \gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) = -\gamma_q \rightarrow \frac{\partial t_q}{\partial z} = \frac{-\gamma_q}{1 + z \gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} \quad (9-3)$$

با استفاده از این دو رابطه به همراه معادله‌ی (۳-۶)، می‌توان به طور مستقیم به مشتق‌های \mathbf{r}_s بر

حساب حرکت مرزی رسید:

$$\vec{r}_s = \vec{r}_q + \vec{v}_q (t - t_q) \rightarrow \dot{\vec{r}}_s = \dot{\vec{r}}_q + \dot{\vec{v}}_q t - \vec{v}_q \dot{t}_q \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t_q} \vec{r}_s = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_q}{\partial t_q} + \frac{\partial \dot{\vec{v}}_q}{\partial t_q} t + \frac{\partial t}{\partial t_q} \dot{\vec{v}}_q - \frac{\partial \dot{\vec{v}}_q}{\partial t_q} t_q - \frac{\partial t_q}{\partial t_q} \dot{\vec{v}}_q$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_s}{\partial t} = \dot{\vec{r}}_s, \frac{\partial t}{\partial t_q} = 1 + z \gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q$$

$$\dot{\vec{r}}_s (1 + z \gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) = \dot{\vec{v}}_q + \vec{a}_q t + \dot{\vec{v}}_q (1 + z \gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - \dot{\vec{v}}_q - \vec{a}_q t_q =$$

$$= \vec{a}_q (t - t_q) + \dot{\vec{v}}_q (1 + z \gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) = \vec{a}_q \gamma_q z + \dot{\vec{v}}_q (1 + z \gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \rightarrow \dot{\vec{r}}_s = \dot{\vec{v}}_q + \frac{\gamma_q z \vec{a}_q}{1 + z \gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q}.$$

(۱۰-۳)

و نیز:

$$\vec{r}_s = \vec{r}_q + \vec{v}_q (t - t_q) = \vec{r}_q + \vec{v}_q \gamma_q z \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \vec{r}_s = \frac{\partial}{\partial t_q} \frac{\partial t_q}{\partial z} \vec{r}_q + \frac{\partial}{\partial t_q} \frac{\partial t_q}{\partial z} (\vec{v}_q \gamma_q z) \rightarrow$$

$$\vec{r}'_s = \frac{\partial}{\partial t_q} \frac{\partial t_q}{\partial z} \vec{r}_q + \gamma_q z \left(\frac{\partial \vec{v}_q}{\partial t_q} \frac{\partial t_q}{\partial z} \right) + \vec{v}_q z \left(\frac{\partial}{\partial t_q} \gamma_q \right) \frac{\partial t_q}{\partial z} + \vec{v}_q \gamma_q \left(\frac{\partial z}{\partial t_q} \frac{\partial t_q}{\partial z} \right) \rightarrow$$

$$\vec{r}'_s = \frac{\partial}{\partial t_q} \frac{\partial t_q}{\partial z} \vec{r}_q + \gamma_q z \left(\frac{\partial \vec{v}_q}{\partial t_q} \frac{\partial t_q}{\partial z} \right) + \vec{v}_q z \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}_q} \frac{\partial \vec{v}_q}{\partial t_q} \gamma_q \right) \frac{\partial t_q}{\partial z} + \vec{v}_q \gamma_q \left(\frac{\partial z}{\partial t_q} \frac{\partial t_q}{\partial z} \right) =$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial z} &= \frac{-\gamma_q}{1+z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q}, \quad \frac{\partial \vec{v}_q}{\partial t_q} = \vec{a}_q, \quad \frac{\partial(1-v_q^2)^{-1/2}}{\partial \vec{v}_q} = \vec{v}_q(1-v_q^2)^{-3/2} = \gamma_q^3\vec{v}_q \\
&\rightarrow \\
&= \vec{v}_q \left(\frac{-\gamma_q}{1+z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} \right) + \left(\frac{-\vec{a}_q\gamma_q^2 z}{1+z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} \right) + \left(\frac{(-z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)\vec{v}_q\gamma_q}{1+z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} \right) + \vec{v}_q\gamma_q = \\
&= \left(\frac{-\vec{a}_q\gamma_q^2 z}{1+z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} \right) + \left(-\frac{\vec{v}_q\gamma_q}{1+z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} - \frac{\vec{v}_q\gamma_q(z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)}{1+z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} + \vec{v}_q\gamma_q \right) = \\
&= \left(\frac{-\vec{a}_q\gamma_q^2 z}{1+z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} \right) + \vec{v}_q\gamma_q \left(\frac{-1}{1+z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} - \frac{z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q}{1+z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} + 1 \right) = \\
&= \left(\frac{-\vec{a}_q\gamma_q^2 z}{1+z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} \right) + \vec{v}_q\gamma_q \left(\frac{-1-z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q+1+z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q}{1+z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} \right) = \\
&= \left(\frac{-\vec{a}_q\gamma_q^2 z}{1+z\gamma_q^3\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} \right).
\end{aligned} \tag{۱۱-۳}$$

معرفی رابطه‌ی زیر برای محاسبه در گام‌های بعدی، مفید است:

$$\sqrt{1-\dot{\vec{r}}_s'^2 + \vec{r}_s'^2 - (\dot{\vec{r}}_s' \times \vec{r}_s')^2} = \frac{1}{\gamma_q} \frac{\partial t_q}{\partial t} \tag{۱۲-۳}$$

۳-۳- محاسبه‌ی تانسور انرژی-تکانه‌ی پنج بعدی در فضای گرانشی

محاسبه‌ی توزیع فضا-زمانی انرژی تولید شده توسط کوآرک سنگین، نیازمند حل مساله‌های مربوط به پاسخ فضای گرانشی^۱ است، که منظور از آن محاسبه‌ی اختلال δG_{MN} متریک AdS₅ وابسته به ریسمان است.

کوآرک در حال حرکت، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی رنگ تولید می‌کند که نوع خیز داده شده‌ی میدان کولنی است که توسط کوآرک، در چارچوب سکون آن تولید می‌شود [۳]. چگالی انرژی $\langle T_{00} \rangle \equiv \varepsilon$ که در این میدان‌ها ذخیره شده است در بخش بعد محاسبه می‌شود که T_{00} از تانسور

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}}$$

به دست می‌آید که g دترمینان $g_{\mu\nu}$ است.

با استفاده از مفاهیم ابرگرانشی، این انرژی توسط اثر ریسمان نامبوگوتو مرتبط با کوآرک روی مرز

مینکوفسکی به دست می‌آید.

به صورت کلی هر اختلال فیزیکی یا حالت مقید روی مرز نظریه‌ی پیمانهای، متناظر است با داشتن منبعی از انرژی و تکانه در حجم گرانشی که با تانسور انرژی-تکانه‌ی پنج بعدی محاسبه می‌شود. برای محاسبه‌ی تانسور انرژی-تکانه‌ی مرز، باید وضعیت ریسمان متناظر با حرکت کوآرک را یافته و تانسور انرژی-تکانه‌ی پنج بعدی آن را محاسبه کرد.

در حد $N_c \rightarrow \infty$ ، ثابت گرانشی پنج بعدی کوچک است و در نتیجه ریسمان به عنوان یک اختلال کوچک روی هندسه‌ی فضا-زمان عمل می‌کند. مرتبه‌ی این اختلال از $\frac{1}{N_c}$ به دست می‌آید و متریک کلی به صورت $G_{MN} = G_{MN}^{(0)} + h_{MN}$ نوشته می‌شود که $G_{MN}^{(0)}$ متریک مختل نشده است و معادلات اینشتین در اختلال h_{MN} خطی می‌شوند [۲]. منظور از اختلال کوچک، منابع t_{MN} است (تانسور انرژی-تکانه‌ی ریسمان به عنوان منبع انتخاب می‌شود) که در حد $N_c \rightarrow \infty$ مانند $N_c^0 = 1$ مقیاس‌بندی می‌شود در نتیجه تغییر متغیر مربوطه به صورت $h_{MN} \equiv \delta G_{MN}$ در فضای گرانشی و از مرتبه‌ی کوچک $\frac{1}{N_c^2}$ می‌باشد [۳]. در نتیجه معادله‌ی خطی پنج بعدی اینشتین در حضور منبع ریسمان حل شده و سپس تانسور انرژی-تکانه‌ی مرز از نوسان‌های کنش گرانشی نورگونه به دست می‌آید. یا به عبارتی دیگر، تانسور انرژی-تکانه‌ی مربوط به نظریه‌ی پیمانهای $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ ، توسط مطالعه‌ی رفتار اختلال متریک h_{MN} نزدیک به مرز مینکوفسکی در $z = 0$ به دست می‌آید.

در نتیجه واضح است که ابتدا باید تانسور پنج بعدی فضای گرانشی محاسبه شود و از آنجا که منبع یک ریسمان است، این تانسور باید متناسب با $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_s)$ باشد. به عبارت دیگر:

$$t^{MN}(t, \vec{r}, z) = -\frac{T_0}{\sqrt{-G}} \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^M \partial_b X^N \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_s) \equiv \tilde{t}_{MN} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_s). \quad (۱۳-۳)$$

که \tilde{t}_{MN} در آن به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$g^{ab} \rightarrow g_{ab}, \quad g^{ab} = \begin{pmatrix} g^{\tau\tau} & g^{\tau\sigma} \\ g^{\sigma\tau} & g^{\sigma\sigma} \end{pmatrix}, \quad g^{ab^{-1}} = \frac{1}{-\det g_{ab}} \begin{pmatrix} g_{\tau\tau} & g_{\tau\sigma} \\ g_{\sigma\tau} & g_{\sigma\sigma} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\sqrt{-g}}{-g} = \frac{1}{\sqrt{-g}}, \quad \det G = -\frac{L^{10}}{z^{10}} \rightarrow \sqrt{-\det G} = \frac{L^5}{z^5},$$

$$\tilde{t}_{MN} = \frac{T_0}{\sqrt{-g}\sqrt{-G}} \left[g_{\sigma\sigma} \dot{X}_M \dot{X}_N + g_{\tau\tau} X'_M X'_N - g_{\tau\sigma} (\dot{X}_M X'_N + X'_M \dot{X}_N) \right]. \quad (14-3)$$

اکنون باید مولفه های تانسور انرژی-تکانه را محاسبه کرد. متریک موجود در رابطه با ضرب هر

مولفه در $\pm |G_{00}|^2$ قطری می شود و هنگامی از علامت منفی این عبارت استفاده می شود که یکی از

دو زیروند صفر باشد:

$$\begin{aligned} \frac{T_0 |G_{00}|^3}{\sqrt{-g}\sqrt{-G}} &= \frac{\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi L^2} \right) |G_{00}|^3}{\left(|G_{00}| \sqrt{1 - \dot{r}_s^2 + \vec{r}'_s{}^2 - (\dot{r}_s \times \vec{r}'_s)^2} \right) \left(\frac{L^5}{z^5} \right)} = \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi L^2} \right) \times \frac{L^4}{z^4} \times \frac{z^5}{L^5} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{r}_s^2 + \vec{r}'_s{}^2 - (\dot{r}_s \times \vec{r}'_s)^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \times \frac{z}{L^3} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{r}_s^2 + \vec{r}'_s{}^2 - (\dot{r}_s \times \vec{r}'_s)^2}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \times \frac{z\gamma_q}{L^3} \times \frac{\partial t}{\partial t_q} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \times \frac{z\gamma_q}{L^3} \times (1 + z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q). \end{aligned}$$

$$X^M = (t, \vec{r}_s, z), \quad \dot{X}^M = \frac{\partial X^M}{\partial t} = (1, \dot{r}_s, 0), \quad X^{M'} = \frac{\partial X^M}{\partial z} = (0, \vec{r}'_s, 1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{00} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left[g_{\sigma\sigma} \dot{X}_M \dot{X}_N + g_{\tau\tau} X'_M X'_N - g_{\tau\sigma} (\dot{X}_M X'_N + X'_M \dot{X}_N) \right] = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left[g_{\sigma\sigma} (1 \times 1) + g_{\tau\tau} (0 \times 0) - g_{\tau\sigma} ((0 \times 0) + (0 \times 0)) \right] = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} (g_{\sigma\sigma}) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} (1 + \vec{r}'_s{}^2). \end{aligned} \quad (15-3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{0i} &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left[g_{\sigma\sigma} \dot{X}_M \dot{X}_N + g_{\tau\tau} X'_M X'_N - g_{\tau\sigma} (\dot{X}_M X'_N + X'_M \dot{X}_N) \right] = \\ &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left[g_{\sigma\sigma} (\dot{x}_s^i) + g_{\tau\tau} (0) - g_{\tau\sigma} (x_s'^i) \right] = \\ &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left(-(1 + \vec{r}'_s{}^2) \dot{x}_s^i + (\dot{r}_s \cdot \vec{r}'_s) x_s'^i \right). \end{aligned} \quad (16-3)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{05} &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left[g_{\sigma\sigma} \dot{X}_M \dot{X}_N + g_{\tau\tau} X'_M X'_N - g_{\tau\sigma} (\dot{X}_M X'_N + X'_M \dot{X}_N) \right] = \\
&= -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left[g_{\sigma\sigma}(0) + g_{\tau\tau}(0) - g_{\tau\sigma}((1 \times 1) + (0 \times 0)) \right] = \\
&= -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} (-g_{\tau\sigma}) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} (\dot{\vec{r}}_s \cdot \vec{r}'_s).
\end{aligned} \tag{۱۷-۳}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{ij} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left[g_{\sigma\sigma} \dot{X}_M \dot{X}_N + g_{\tau\tau} X'_M X'_N - g_{\tau\sigma} (\dot{X}_M X'_N + X'_M \dot{X}_N) \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left[g_{\sigma\sigma} (\dot{x}_s^i \dot{x}_s^j) + g_{\tau\tau} (x_s'^i x_s'^j) - g_{\tau\sigma} (\dot{x}_s^i x_s'^j + \dot{x}_s^j x_s'^i) \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left((1 + \dot{\vec{r}}_s^2) (\dot{x}_s^i \dot{x}_s^j) + (-1 + \dot{\vec{r}}_s^2) (x_s'^i x_s'^j) - (\dot{\vec{r}}_s \cdot \vec{r}'_s) (\dot{x}_s^i x_s'^j + \dot{x}_s^j x_s'^i) \right).
\end{aligned} \tag{۱۸-۳}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{i5} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left[g_{\sigma\sigma} \dot{X}_M \dot{X}_N + g_{\tau\tau} X'_M X'_N - g_{\tau\sigma} (\dot{X}_M X'_N + X'_M \dot{X}_N) \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left[g_{\sigma\sigma} (\dot{x}_s^i \times 0) + g_{\tau\tau} (x_s'^i \times 1) - g_{\tau\sigma} ((\dot{x}_s^i \times 1) + 0) \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left((-1 + \dot{\vec{r}}_s^2) x_s'^i - (\dot{\vec{r}}_s \cdot \vec{r}'_s) \dot{x}_s^i \right).
\end{aligned} \tag{۱۹-۳}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{55} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left[g_{\sigma\sigma} \dot{X}_M \dot{X}_N + g_{\tau\tau} X'_M X'_N - g_{\tau\sigma} (\dot{X}_M X'_N + X'_M \dot{X}_N) \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left[g_{\sigma\sigma}(0) + g_{\tau\tau}(1 \times 1) - g_{\tau\sigma}(0 + 0) \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} \left[g_{\sigma\sigma}(0) + (-1 + \dot{\vec{r}}_s^2)(1 \times 1) - g_{\tau\sigma}(0 + 0) \right] = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t}{\partial t_q} (-1 + \dot{\vec{r}}_s^2).
\end{aligned} \tag{۲۰-۳}$$

با بیان مولفه‌ها بر حسب حرکت مرزی مطابق با رابطه‌های (۱۰-۳) و (۱۱-۳)، در نهایت

مولفه‌های تانسور انرژی-تکانه‌ی ریسمان به دست می‌آیند.

به دلیل طولانی بودن محاسبه‌ی این مولفه‌ها، مولفه‌ی \tilde{t}_{00} در اینجا با ریزنگری در محاسبه بیان

شده ولی سایر محاسبه‌های مربوط به مولفه‌های باقی مانده در پیوست آورده شده است.

محاسبه‌ی \tilde{t}_{00} به این صورت است که:

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{00} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} (1 + z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \left(1 + \left(\frac{-\gamma_q^2 z \vec{a}_q}{1 + z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} \right)^2 \right) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} (1 + z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \left(1 + \left(\frac{\gamma_q^4 z^2 \vec{a}_q^2}{(1 + z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)^2} \right) \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} (1 + z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \left(\frac{(1 + z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)^2 + \gamma_q^4 z^2 \vec{a}_q^2}{(1 + z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)^2} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} (1 + z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \left(\frac{1 + 2z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q + z^2 \gamma_q^6 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)^2 + \gamma_q^4 z^2 \vec{a}_q^2}{(1 + z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)^2} \right) \xrightarrow{(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)^2 = \vec{v}_q^2 \vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2} \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \left(\frac{1 + 2z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q + z^2 \gamma_q^6 \vec{v}_q^2 \vec{a}_q^2 - z^2 \gamma_q^6 (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2 + \gamma_q^4 z^2 \vec{a}_q^2}{(1 + z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(1 + 2z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q + z^2 \gamma_q^6 \left(\vec{v}_q^2 \vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2 + \frac{\vec{a}_q^2}{\gamma_q^2} \right) \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(1 + 2z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q + z^2 \gamma_q^6 (\vec{v}_q^2 \vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2 + \vec{a}_q^2 (1 - \vec{v}_q^2)) \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(1 + 2z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q + z^2 \gamma_q^6 (\vec{v}_q^2 \vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2 + \vec{a}_q^2 - \vec{a}_q^2 \vec{v}_q^2) \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(1 + 2z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q + z^2 \gamma_q^6 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \right).
\end{aligned} \tag{۲۱-۳}$$

$$\tilde{t}_{05} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-z\gamma_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - z^2 \gamma_q^5 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \right). \tag{۲۲-۳}$$

$$\tilde{t}_{0i} = (-\tilde{t}_{00} \dot{x}_s^i + \tilde{t}_{05} \dot{x}_s'^i) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-\gamma_q z \vec{a}_q^i - (1 + 2z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \vec{v}_q^i - (z^2 \gamma_q^6 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \vec{v}_q^i) \right).$$

$$\tilde{t}_{i5} = (\tilde{t}_{55} \dot{x}_s^i - \tilde{t}_{05} \dot{x}_s'^i) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(z \vec{a}_q^i + z\gamma_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \vec{v}_q^i + z^2 \gamma_q^5 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \vec{v}_q^i \right). \tag{۲۳-۳}$$

(۲۴-۳)

$$\tilde{t}_{55} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(\frac{-1}{\gamma_q^2} + z^2 \gamma_q^4 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \right). \quad (۲۵-۳)$$

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{ij} &= (\tilde{t}_{00} \dot{x}_s^i \dot{x}_s^j + \tilde{t}_{55} x_s^i x_s^j - \tilde{t}_{05} (\dot{x}_s^i x_s^j + \dot{x}_s^j x_s^i)) = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} (z\gamma_q (\bar{v}_q^i \bar{a}_q^j + \bar{v}_q^j \bar{a}_q^i) + (1 + 2z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \bar{v}_q^i \bar{v}_q^j + (z^2 \gamma_q^6 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \bar{v}_q^i \bar{v}_q^j). \end{aligned} \quad (۲۶-۳)$$

همان‌گونه که در قبل بیان شد، محاسبه‌ی دقیق مولفه‌های تانسور انرژی-تکانه در پیوست ۱ آمده است.

۳-۴- محاسبه‌ی چگالی انرژی کوارک شتابدار در خلاء نظریه پیمانه‌ای

در این بخش، چگالی انرژی تابشی توسط یک اختلال کوچک (سیگنال نور) که از یک ریسمان ایستا^۱ در حال انتشار است، محاسبه می‌شود. به بیان فیزیکی؛ این ریسمان، تابع موج کوارک سنگینی را توصیف می‌کند که سیگنال نور بیان‌کننده‌ی پاسخ اختلال خارجی است که در یک مکث زمانی کوتاه اعمال می‌شود. شرطی که در آن اختلال ریسمان، کوچک باقی می‌ماند معادل با تقریب غیرنسبیتی برای حرکت کوارک سنگین است [۳]. باید نتیجه شود که کل مشارکت تابشی، پس از کم کردن انرژی کولنی، تنها توسط اثر نقطه‌ی انتهایی ریسمان روی مرز تولید می‌شود. با استفاده از تناظر UV/IR، این خاصیت به فقدان گستردگی انرژی منجر می‌شود.

جزئیات تحلیلی استفاده از رابطه‌ی زیر

$$\varepsilon \equiv \langle T^{00} \rangle. \quad (۲۷-۳)$$

که معرف چگالی انرژی روی مرز است، برای تانسور انرژی-تکانه در فضای گرانشی در [۲] آمده است، که ما از نتیجه‌ی نهایی آن استفاده می‌کنیم که به صورت زیر است:

¹ Steady

$$\varepsilon(t, \vec{r}) = \frac{L^3}{\pi} \int d^4 r' \int_0^\infty dz \Theta(t-t') \left[\begin{aligned} & (4zt_{00} - t_{M5} \nabla'_M w) \frac{\delta''(w)}{z^2} + |\vec{r} - \vec{r}'|^2 (4t_{00} - 4t_{55} + 2t_{ii}) \frac{\delta'''(w)}{3z} - \\ & - (t_{ij} \nabla'_i w \nabla'_j w) \frac{\delta'''(w)}{2z} \end{aligned} \right]. \quad (28-3)$$

که در آن تابع پله‌ای هویساید، $\Theta(t - \hat{t})$ برای جدا کردن زمان‌های تاخیری و حقیقی معرفی می‌شود.

و کمیت زیر

$$w \equiv -(t-t')^2 + (\vec{r} - \vec{r}')^2 + z^2 \quad (29-3)$$

متناسب با فاصله‌ی ناوردای پنج بعدی بین نقطه‌ای از منبع در فضای گرانشی و نقطه‌ی اندازه‌گیری روی مرز است. و $\nabla'_M w$ مشتق جزئی نسبت به $X^M = (\hat{t}, \hat{r}, z)$ است. تابع دلتای دیراک $\delta(w)$ ، که توسط انتشارگر تاخیری مرز به حجم گرانشی وارد می‌شود، نشان می‌دهد که اختلال متریک در فضای AdS₅، همان‌طور که برای میدان‌های بی‌جرم و کلاسیکی در این فضا انتظار می‌رود، با سرعت پنج بعدی نور منتشر می‌شود که در محاسبه‌های این تحقیق، بنا بر قرارداد این سرعت برابر با یک است.

حضور مشتق‌های تابع دلتای دیراک، ویژگی کلی انتشارگرهای تاخیری در فضای AdS می‌باشد. این مشتق‌ها بر حسب یکی از متغیرهای خارجی موجود در رابطه‌ی w گرفته می‌شود و در نتیجه از انتگرال بیرون می‌آید، البته از آن جایی که ممکن است وابستگی ضمنی به متغیر در انتگرالده وجود داشته باشد، در این حالت بهتر است نوشته شود که [3]:

$$\delta^{(n)}(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \partial_\varepsilon^n \delta(w + \varepsilon). \quad (30-3)$$

دو سهم انرژی در ادامه نوشته می‌شوند:

$$\varepsilon_A = \frac{L^3}{\pi} \int d^4 r' \int_0^\infty du \Theta(t-t') \left[(4ut_{00} - t_{M5} \nabla'_M w) \frac{\delta''(w)}{u^2} \right]$$

$\xrightarrow{w \equiv -(t-t')^2 + (\vec{r} - \vec{r}')^2 + z^2 \rightarrow \nabla'_M w = (t-t') - (\vec{r} - \vec{r}')$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_A &= \frac{L^3}{\pi} \int d^4 r' \int_0^\infty dz \Theta(t-t') \left[(4zt_{00} - t_{05}(2(t-t')) + t_{i5}(2(\vec{r} - \vec{r}')) - 2t_{55}z) \frac{\delta''(w)}{u^2} \right] = \\
&= \frac{L^3}{\pi} \int d^4 r' \int_0^\infty dz \Theta(t-t') \left[(4zt_{00} - 2t_{05}(t-t') + 2t_{i5}(\vec{r} - \vec{r}') - 2t_{55}z) \frac{\delta''(w)}{z^2} \right] = \\
&= \frac{L^3}{\pi} \int d^4 r' \int_0^\infty dz \Theta(t-t') \left[(4zt_{00} - 2t_{05}(t-t') + 2t_{i5}(\vec{x} - \vec{x}')^i - 2t_{55}z) \frac{\delta''(w)}{z^2} \right] = \\
&= \frac{2L^3}{\pi} \int \frac{d^4 r' dz}{z^2} \Theta(t-t') \left[(z(2t_{00} - t_{55}) - 2t_{05}(t-t') + 2t_{i5}(\vec{x} - \vec{x}')^i) \delta''(w) \right].
\end{aligned} \tag{۳۱-۳}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_B &= \frac{L^3}{\pi} \int d^4 r' \int_0^\infty du \Theta(t-t') \left[|\vec{r} - \vec{r}'|^2 (4t_{00} - 4t_{55} + 2t_{ii}) \frac{\delta'''(w)}{3u} - (t_{ij} \nabla'_i w \nabla'_j w) \frac{\delta'''(w)}{2u} \right] \\
&\xrightarrow{w = -(t-t')^2 + (\vec{r}-\vec{r}')^2 + z^2 \rightarrow \nabla'_i w = 2(t-t') - 2(\vec{r}-\vec{r}')^i + 2z, \nabla'_j w = -2(\vec{x}-\vec{x}')^j, \nabla'_j w = -2(\vec{x}-\vec{x}')^j} \\
&= \frac{L^3}{\pi} \int \frac{d^4 r' dz}{z^2} \Theta(t-t') \left[\left(|\vec{r} - \vec{r}'|^2 \times \frac{2}{3} (2t_{00} - 2t_{55} + t_{ii}) - \frac{1}{2} (4t_{ij} (\vec{x} - \vec{x}')^i (\vec{x} - \vec{x}')^j) \right) \delta'''(w) \right] = \\
&= \frac{2L^3}{3\pi} \int \frac{d^4 r' dz}{z^2} \Theta(t-t') \left[\left(|\vec{r} - \vec{r}'|^2 (2t_{00} - 2t_{55} + t_{ii}) - 3(t_{ij} (\vec{x} - \vec{x}')^i (\vec{x} - \vec{x}')^j) \right) \delta'''(w) \right]
\end{aligned} \tag{۳۲-۳}$$

آرگومان t_{MN} برابر است با (t, \vec{r}, z) و از آن جایی که $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_s(t, z))$ ، $t_{MN}(t, \vec{r}, z) \propto \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_s(t, z))$ در نتیجه انتگرال‌های فضایی در روابط چگالی انرژی به راحتی محاسبه می‌شوند. به عبارت دیگر، انتگرال روی $d^3 \vec{r}$ خود به خود توسط تابع دلتای دیراک مربوط به تانسور انرژی-تکانه‌ی ریسمان انجام می‌شود. با استفاده از مولفه‌های تانسور انرژی-تکانه که در روابط (۳۱-۳) تا (۳۶-۳) به دست آمدند، می‌توان انتگرال‌های مربوط به روابط (۳۱-۳) و (۳۲-۳) را بر حسب حرکت مرزی بیان کرد. از آنجا که همه‌ی مولفه‌های حرکتی مربوط به کوآرک مانند بردارهای مکان، سرعت و شتاب در t_q محاسبه

می‌شوند در نتیجه در طول محاسبه، تغییر متغیر $t \rightarrow t_q$ به دست می‌آید. در نتیجه برای عبارت ε_A

حاصل به صورت زیر است:

$$\varepsilon_A = \frac{2L^3}{\pi} \int \frac{d^3\vec{r}' dt' dz}{z^2} \left[\delta''(w) \left(z(2t_{00} - t_{55}) - 2t_{05}(t - t') + 2t_{i5}(\vec{x} - \vec{x}')^i \right) \right]$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{w = -(t-t')^2 + (\vec{r}-\vec{r}')^2 + z^2, \quad w_q = -(t-t_q)^2 + |\vec{r}-\vec{r}_q|^2, \quad \frac{dw_q}{dt} = 2(t-t_q) - 2\frac{d\vec{r}_q}{dt} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_q) = 2[(t-t_q) - \vec{v}_q \cdot (\vec{r}-\vec{r}_q)], \quad \Xi = (t-t_q) - \vec{v}_q \cdot (\vec{r}-\vec{r}_q) = \frac{1}{2} \frac{dw_q}{dt_q}} \\ & \rightarrow \delta''(-(t-t')^2 + (\vec{r}-\vec{r}')^2 + z^2) \xrightarrow{t'=t_q+\gamma_q z, \quad \vec{r}'=\vec{r}_q+\vec{v}_q \gamma_q z} \\ & \delta''(-(t-t_q - \gamma_q z)^2 + (\vec{r}-\vec{r}_q - \vec{v}_q \gamma_q z)^2 + z^2) = \\ & = \delta''(-[(t-t_q) - \gamma_q z]^2 + [(\vec{r}-\vec{r}_q) - \vec{v}_q \gamma_q z]^2 + z^2) = \delta''(-(t-t_q)^2 - (\gamma_q z)^2 + 2\gamma_q z(t-t_q) + \\ & + (\vec{r}-\vec{r}_q)^2 + \vec{v}_q^2 \gamma_q^2 z^2 - 2\gamma_q z \vec{v}_q \cdot (\vec{r}-\vec{r}_q) + z^2) = \delta''(-(t-t_q)^2 + (\vec{r}-\vec{r}_q)^2 + 2\gamma_q z[(t-t_q) - \vec{v}_q \cdot (\vec{r}-\vec{r}_q)]) = \\ & = \delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{t_{MN} \equiv \tilde{t}^{MN} \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}'), \int d^3\vec{r}' \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}') = 1, t' = t_q + \gamma_q z, dt = dt' = dt_q}$$

$$\varepsilon_A = \frac{2L^3}{\pi} \int \frac{dt dz}{z^2} \delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \left[\begin{aligned} & z \left[\left(2 \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left\{ 1 + 2z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q + z^2 \gamma_q^6 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \right\} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(\frac{-1}{\gamma_q^2} + z^2 \gamma_q^4 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \right) \right] \\ & - (t-t_q - \gamma_q z) \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left\{ -z\gamma_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - z^2 \gamma_q^5 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \right\} + \\ & + (\vec{r}-\vec{r}_q - \vec{v}_q \gamma_q z) \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left\{ \left(z\vec{a}_q^i + z\gamma_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \vec{v}_q^i + \right. \right. \\ & \left. \left. + z^2 \gamma_q^5 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \vec{v}_q^i \right) \right\} \end{aligned} \right] =$$

$$\xrightarrow{\frac{2L^3}{\pi} \times \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \times \frac{1}{L^3} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int \frac{dt dz \gamma_q z}{z^2} \frac{\partial t_q}{\partial t} \delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \left[\begin{aligned} & z \left[\left(2 \left\{ 1 + 2z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q + z^2 \gamma_q^6 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \right\} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{-1}{\gamma_q^2} + z^2 \gamma_q^4 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \right) \right] \\ & - (t-t_q - \gamma_q z) \left\{ -z\gamma_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - z^2 \gamma_q^5 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \right\} + \\ & + (\vec{r}-\vec{r}_q - \vec{v}_q \gamma_q z) \left\{ \left(z\vec{a}_q^i + z\gamma_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \vec{v}_q^i + z^2 \gamma_q^5 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \vec{v}_q^i \right) \right\} \end{aligned} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \left[\frac{\gamma_q}{z} \left[\begin{array}{l} \left(2 \left\{ 1 + 2z\gamma_q^3 \bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q + z^2 \gamma_q^6 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] \right\} \right) - \\ z \left(\frac{-1}{\gamma_q^2} + z^2 \gamma_q^4 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] \right) \right] - \\ -(t - t_q - \gamma_q z) \left\{ (-z\gamma_q^2 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) - z^2 \gamma_q^5 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2]) \right\} + \\ + (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_q - \bar{\mathbf{v}}_q \gamma_q z) \left\{ (z\bar{\mathbf{a}}_q^i + z\gamma_q^2 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) \bar{\mathbf{v}}_q^i + z^2 \gamma_q^5 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] \bar{\mathbf{v}}_q^i) \right\} \end{array} \right] \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \left[\begin{array}{l} 2\gamma_q + 4z\gamma_q^3 \bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q + 2z^2 \gamma_q^7 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] + \frac{1}{\gamma_q} - \\ -z^2 \gamma_q^5 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] + (t - t_q) \gamma_q^3 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) - \\ -z\gamma_q^4 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) + (t - t_q) z\gamma_q^6 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] - \\ -z^2 \gamma_q^7 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] + (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_q) \gamma_q \bar{\mathbf{a}}_q^i + (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_q) \gamma_q^3 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) \bar{\mathbf{v}}_q^i + \\ + \bar{\mathbf{v}}_q \cdot (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_q) z\gamma_q^6 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] - z\gamma_q^2 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) - z\gamma_q^4 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) \bar{\mathbf{v}}_q^2 - \\ -z^2 \gamma_q^7 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] \bar{\mathbf{v}}_q^2 \end{array} \right] \right] =$$

$$\frac{2\gamma_q + (\gamma_q - \gamma_q) + \frac{1}{\gamma_q} = 3\gamma_q - (\gamma_q - \frac{1}{\gamma_q}) = 3\gamma_q - \gamma_q (1 - \frac{1}{\gamma_q^2}) = 3\gamma_q - \gamma_q^2 \gamma_q}{\longrightarrow}$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \left[\begin{array}{l} (3\gamma_q - \gamma_q^2 \gamma_q + 4z\gamma_q^3 \bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q + 2z^2 \gamma_q^7 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2]) - \\ -z^2 \gamma_q^5 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] + (t - t_q) \gamma_q^3 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) - \\ -z\gamma_q^4 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) + (t - t_q) z\gamma_q^6 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] - \\ -z^2 \gamma_q^7 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] + (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_q) \gamma_q \bar{\mathbf{a}}_q^i + (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_q) \gamma_q^3 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) \bar{\mathbf{v}}_q^i + \\ + \bar{\mathbf{v}}_q \cdot (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_q) z\gamma_q^6 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] - z\gamma_q^2 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) - z\gamma_q^4 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) \bar{\mathbf{v}}_q^2 - \\ -z^2 \gamma_q^7 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] \bar{\mathbf{v}}_q^2 \end{array} \right] \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \left[\begin{array}{l} 3\gamma_q - \gamma_q^2 \gamma_q + 4z\gamma_q^3 \bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q + \left\{ 2z^2 \gamma_q^7 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] - z^2 \gamma_q^5 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] \right\} - \\ -z^2 \gamma_q^7 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] - z^2 \gamma_q^7 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] \bar{\mathbf{v}}_q^2 \right\} + \\ + (t - t_q) \gamma_q^3 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) - z\gamma_q^4 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) + (t - t_q) z\gamma_q^6 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] + (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_q) \gamma_q \bar{\mathbf{a}}_q^i + \\ + (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_q) \gamma_q^3 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) \bar{\mathbf{v}}_q^i + \bar{\mathbf{v}}_q \cdot (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_q) z\gamma_q^6 [\bar{\mathbf{a}}_q^2 - (\bar{\mathbf{v}}_q \times \bar{\mathbf{a}}_q)^2] - z\gamma_q^2 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) - z\gamma_q^4 (\bar{\mathbf{v}}_q \cdot \bar{\mathbf{a}}_q) \bar{\mathbf{v}}_q^2 \end{array} \right] \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \left(\begin{aligned} &3\gamma_q - v_q^2 \gamma_q + 4z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q + \{0\} + (t-t_q)\gamma_q^3(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - z\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + \\ &+(t-t_q)z\gamma_q^6[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + (\vec{r} - \vec{r}_q)\gamma_q \vec{a}_q^i + (\vec{r} - \vec{r}_q)\gamma_q^3(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)\vec{v}_q^i + \\ &+\vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q)z\gamma_q^6[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] - z\gamma_q^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - z\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)\vec{v}_q^2 \end{aligned} \right) \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \left(\begin{aligned} &3\gamma_q - v_q^2 \gamma_q + (t-t_q)\gamma_q^3(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + (\vec{r} - \vec{r}_q)\gamma_q \vec{a}_q^i + (\vec{r} - \vec{r}_q)\gamma_q^3(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)\vec{v}_q^i + 4z\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - \\ &-z\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + z\gamma_q^6[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2](t-t_q) + \\ &+z\gamma_q^6\vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q)[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] - z\gamma_q^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - z\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)\vec{v}_q^2 \end{aligned} \right) \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \left(\begin{aligned} &3\gamma_q - v_q^2 \gamma_q + (t-t_q)\gamma_q^3(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + (\vec{r} - \vec{r}_q)\gamma_q \vec{a}_q^i + (\vec{r} - \vec{r}_q)\gamma_q^3(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)\vec{v}_q^i + 4z\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + \\ &+\{ -z\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - z\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)v_q^2 \} + z\gamma_q^6[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2](t-t_q) + \\ &+z\gamma_q^6\vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q)[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] - z\gamma_q^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \end{aligned} \right) \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \left(\begin{aligned} &3\gamma_q - v_q^2 \gamma_q + (t-t_q)\gamma_q^3(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + (\vec{r} - \vec{r}_q)\gamma_q \vec{a}_q^i + (\vec{r} - \vec{r}_q)\gamma_q^3(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)\vec{v}_q^i + 4z\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + \\ &+\{ z\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)(-1-v_q^2) \} + z\gamma_q^6[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2](t-t_q) + \\ &+z\gamma_q^6\vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q)[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] - z\gamma_q^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \end{aligned} \right) \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \left(\begin{aligned} &3\gamma_q - v_q^2 \gamma_q + (t-t_q)\gamma_q^3(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + (\vec{r} - \vec{r}_q)\gamma_q \vec{a}_q^i + (\vec{r} - \vec{r}_q)\gamma_q^3(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)\vec{v}_q^i + 4z\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + \\ &+\{ -2z\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + z\gamma_q^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \} + z\gamma_q^6[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2](t-t_q) + \\ &+z\gamma_q^6\vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q)[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] - z\gamma_q^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \end{aligned} \right) \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \left(\begin{aligned} &3\gamma_q - v_q^2 \gamma_q + (t-t_q)\gamma_q^3(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + (\vec{r} - \vec{r}_q)\gamma_q \vec{a}_q^i + (\vec{r} - \vec{r}_q)\gamma_q^3(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)\vec{v}_q^i + \\ &+2z\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + z\gamma_q^6[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2](t-t_q) + \\ &+z\gamma_q^6\vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q)[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \end{aligned} \right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \left(\begin{aligned} &3\gamma_q - v_q^2 \gamma_q + \gamma_q^3(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)[(t-t_q) + \vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q)] + \gamma_q \vec{a}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q) + \\ &+2z\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + z\gamma_q^6[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2][(t-t_q) + \vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q)] + 0 \end{aligned} \right) \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) (A_0(t_q) + zA_1(t_q) + z^2A_2(t_q)) \right].
\end{aligned}$$

(۳۳-۳)

که می توان ضرایب بر حسب درجات مختلف z را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
A_0(t_q) &= 3\gamma_q - v_q^2 \gamma_q + \gamma_q^3(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)[(t-t_q) + \vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q)] + \gamma_q \vec{a}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q). \\
A_1(t_q) &= 2z\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + \gamma_q^6[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2][(t-t_q) + \vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q)]. \\
A_2(t_q) &= 0.
\end{aligned}$$

(۳۴-۳)

با در نظر گرفتن وابستگی مولفه‌های تانسور \tilde{t}_{MN} به Z در معادلات (۳-۲۱) تا (۳-۲۶) و دیگر عوامل در انتگرال‌های مربوط به رابطه‌ی (۳-۳۱) که بر حسب Z هستند، می‌توان انتظار داشت که انتگرالده در رابطه (۳-۳۳) شامل درجات Z تا توان دوم می‌باشد. اما در حقیقت این جملات خطی هستند. و در نتیجه همان‌طور که در رابطه‌ی (۳-۳۴) آمده است، ضریب A_2 که به توان دوم Z مربوط است به واسطه‌ی حذف عباراتی برابر با صفر است.

بعد از اعمال تغییر متغیر $t \rightarrow t_q$ به عنوان متغیر انتگرال‌گیری، آرگومان تابع دلتای دیراک بر حسب Z خطی می‌شود و در نتیجه بهتر است که ابتدا انتگرال متناظر با Z انجام شود. دو مشتق مربوط به دلتای دیراک که بر حسب w_q گرفته می‌شود، می‌تواند از انتگرال مربوط به Z به عنوان عبارت ثابت، خارج شود. در نتیجه تابع دلتای دیراک در نقطه‌ی $Z = \frac{-w_q}{2\gamma_q \Xi}$ ثابت می‌شود. از آنجایی که علیت ایجاب می‌کند که $\Xi > 0$ و Z تنها مقادیر نامنفی را شامل می‌شود، واضح است که Z تنها برای $w_q \leq 0$ ، غیرصفر است. بنابراین:

$$\varepsilon_A = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \left(A_0(t_q) + z A_1(t_q) + z^2 A_2(t_q) \right) \right]$$

$$\xrightarrow{\int u dv = uv - \int v du}$$

$$I) \int dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \right] A_0(t_q) = \int dz \left[\delta'' \left(2\gamma_q \Xi \left(z - \left(-\frac{w_q}{2\gamma_q \Xi} \right) \right) \right) \right] A_0(t_q) =$$

$$\xrightarrow{u=A_0(t_q) \rightarrow du=0, dv = \int dz \left[\delta'' \left(2\gamma_q \Xi \left(z - \left(-\frac{w_q}{2\gamma_q \Xi} \right) \right) \right) \right] \times 1 \xrightarrow{w_q < 0, \int \delta(az) dz = \frac{1}{a} \int \delta(u) du = \frac{1}{a} \Theta(u)} v = \frac{1}{2\gamma_q \Xi} \times 1 \times \frac{\partial^2}{\partial w_q^2} \Theta(-w_q)}$$

$$uv - \int v du = \frac{A_0}{2\gamma_q \Xi} \frac{\partial^2}{\partial w_q^2} \Theta(-w_q) + 0 = \frac{A_0}{2\gamma_q \Xi} \frac{\partial^2}{\partial w_q^2} \Theta(-w_q) \Rightarrow$$

$$\int dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \right] A_0(t_q) = \frac{A_0}{2\gamma_q \Xi} \frac{\partial^2}{\partial w_q^2} \Theta(-w_q).$$

$$II) \int dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \right] z A_1(t_q) = \int dz \left[\delta'' \left(2\gamma_q \Xi \left(z - \left(-\frac{w_q}{2\gamma_q \Xi} \right) \right) \right) \right] z A_1(t_q) =$$

$$u = A_1(t_q) \rightarrow du = 0, dv = \int dz \left[\delta'' \left(2\gamma_q \Xi \left(z - \left(-\frac{w_q}{2\gamma_q \Xi} \right) \right) \right) \right] \xrightarrow{w_q < 0, \int \delta'(az) dz = \frac{1}{a} [\delta(u) du = \frac{1}{a} \Theta(u), f(z_0) = \frac{-w_q}{2\gamma_q \Xi}] \rightarrow v = \frac{1}{2\gamma_q \Xi} \times \frac{-1}{2\gamma_q \Xi} \times \frac{\partial^2}{\partial w_q^2} \Theta((-w_q)(w_q))}$$

$$uv - \int v du = \frac{-A_1}{4\gamma_q^2 \Xi^2} \frac{\partial^2}{\partial w_q^2} \Theta((-w_q)(w_q)) + 0 = -\frac{A_1}{4\gamma_q^2 \Xi^2} \frac{\partial^2}{\partial w_q^2} \Theta((-w_q)(w_q)) \Rightarrow$$

$$\int dz \left[\delta''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \right] z A_1(t_q) = -\frac{A_1}{4\gamma_q^2 \Xi^2} \frac{\partial^2}{\partial w_q^2} \Theta((-w_q)(w_q)).$$

$\xrightarrow{I, II}$

$$\rightarrow \varepsilon_A = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q \left\{ -\frac{A_1}{4\gamma_q^2 \Xi^2} \frac{\partial^2}{\partial w_q^2} \Theta((-w_q)(w_q)) + \frac{A_0}{2\gamma_q \Xi} \frac{\partial^2}{\partial w_q^2} \Theta(-w_q) \right\}. \quad (35-3)$$

برای اولین عبارت مربوط به انتگرال (35-3)، می توان به آسانی دو مشتق مربوط را محاسبه کرد.

برای عبارت دوم، ابتدا باید یک مشتق را گرفته و سپس دومین مشتق را به صورت $\frac{\partial}{\partial w_q} = \frac{1}{2\Xi} \frac{\partial}{\partial t_q}$

جاگذاری کرده و در نهایت این انتگرال به صورت رابطه‌ی (36-3) به دست می آید، مراحل محاسبه به

صورت زیر است:

$$\begin{aligned} 1) \int dt_q \left\{ -\frac{A_1}{4\gamma_q^2 \Xi^2} \frac{\partial^2}{\partial w_q^2} \Theta((-w_q)(w_q)) \right\} &= \int dt_q \left\{ -\frac{A_1}{4\gamma_q^2 \Xi^2} \frac{\partial}{\partial w_q} \left[\frac{\partial}{\partial w_q} [\Theta((-w_q)(w_q))] \right] \right\} = \\ &= \int dt_q \left\{ -\frac{A_1}{4\gamma_q^2 \Xi^2} \frac{\partial}{\partial w_q} \left[\frac{\partial}{\partial w_q} \left[[\Theta(-w_q)] w_q + \Theta(-w_q) \left(\frac{\partial w_q}{\partial w_q} \right) \right] \right] \right\} = \\ &= \int dt_q \left\{ -\frac{A_1}{4\gamma_q^2 \Xi^2} \left(\frac{\partial}{\partial w_q} \left[\frac{\partial}{\partial w_q} [\Theta(-w_q)] w_q \right] - \delta(w_q) \right) \right\} = \int dt_q \left\{ -\frac{A_1}{4\gamma_q^2 \Xi^2} \left(\frac{\partial}{\partial w_q} [(\delta(w_q)) w_q] - \delta(w_q) \right) \right\} = \\ &= \int dt_q \left\{ -\frac{A_1}{4\gamma_q^2 \Xi^2} (0 - \delta(w_q)) \right\} = \int dt_q \delta(w_q) \frac{A_1}{4\gamma_q^2 \Xi^2}. \end{aligned}$$

$$2) \int dt_q \left\{ \frac{A_0}{2\gamma_q \Xi} \frac{\partial^2}{\partial w_q^2} \Theta(-w_q) \right\} = \int dt_q \left\{ \frac{A_0}{2\gamma_q \Xi} \frac{\partial}{\partial w_q} \left(\frac{\partial}{\partial w_q} \Theta(-w_q) \right) \right\} =$$

$$\xrightarrow{\Xi = (t-t_q) - \bar{v}_q^2 (\bar{r} - \bar{r}_q) = \frac{1}{2} \frac{dw_q}{dt_q} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial w_q} = \frac{1}{2\Xi} \frac{\partial}{\partial t_q}}$$

$$= \int dt_q \delta(w_q) \left\{ \frac{\partial}{\partial t_q} \frac{A_0}{4\gamma_q \Xi^2} \right\}.$$

$$\xrightarrow{1,2} \varepsilon_A = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q \delta(w_q) \left[\frac{A_1}{4\gamma_q^2 \Xi^2} + \frac{\partial}{\partial t_q} \frac{A_0}{4\gamma_q \Xi^2} \right] = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2} \int dt_q \delta(w_q) \left[\frac{A_1}{\gamma_q^2 \Xi^2} + \frac{\partial}{\partial t_q} \frac{A_0}{\gamma_q \Xi^2} \right].$$

(۳۶-۳)

t_r به صورت $t_r = t_r(t, \mathbf{r})$ معرفی می‌شود که نشان دهنده‌ی مقادیری از t_q است که به ازای آن‌ها $w_q(t_q) = 0$ و در نهایت داریم :

$$t - t_r = |\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)| \quad (۳۷-۳)$$

و با نوشتن رابطه زیر [۱]:

$$\delta(w_q) = \frac{\delta(t_q - t_r)}{2\Xi} \quad (۳۸-۳)$$

رابطه‌ی نهایی به دست می‌آید :

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2} \int dt_q \delta(w_q) \left[\frac{A_1}{\gamma_q^2 \Xi^2} + \frac{\partial}{\partial t_q} \frac{A_0}{\gamma_q \Xi^2} \right] = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2} \int \frac{\delta(t_q - t_r)}{2\Xi} \left[\frac{A_1}{\gamma_q^2 \Xi^2} + \frac{\partial}{\partial t_q} \frac{A_0}{\gamma_q \Xi^2} \right] dt_q = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2} \int \frac{\delta(t_q - t_r)}{2\Xi} \left[\frac{A_1}{\gamma_q^2 \Xi^2} + \frac{\partial}{\partial t_q} \frac{A_0}{\gamma_q \Xi^2} \right] dt_q = \\ &\xrightarrow{\int \delta(z-z_0) f(z) dz = f(z_0)} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \int \delta(t_q - t_r) \left[\frac{A_1}{\gamma_q^2 \Xi^3} + \frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_q} \frac{A_0}{\gamma_q \Xi^2} \right] dt_q \rightarrow \\ \varepsilon_A &= \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{A_1}{\gamma_q^2 \Xi^3} + \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{A_0}{\gamma_q \Xi^2} \end{aligned} \quad (۳۹-۳)$$

باید در استفاده از t_r احتیاط کرد و از آن به عنوان متغیری نمادین استفاده کرد. به عبارتی دیگر

می‌توان t_r را توسط وابستگی حقیقی آن به t و \mathbf{r} توسط جواب معادله‌ی (۳۷-۳) جاگذاری کرد.

بحث در مورد کران بالا و پایین انتگرال در منبع [۱] آمده است. به طور خلاصه، انتگرال بالا روی

t_q تنها زمانی جواب می‌دهد که $t_q = t_r$ یعنی جایی که در رابطه‌ی (۳۶-۳)، $w_q(t_q) = 0$ شود.

در نتیجه عبارت $z = \frac{-w_q}{2\gamma_q \Xi}$ ایجاب می‌کند که انتگرال روی z تنها شامل سهم نقطه انتهایی

ریسمان در $z = 0$ شود.

نتیجه‌ی نهایی، رابطه‌ی (۳-۳۹)، ساختار علیتی مشابهی با نتیجه‌ی کلاسیکی متناظر دارد که منظور، چگالی انرژی تولید شده توسط منبعی با مسیر $\mathbf{r}_q(t_q)$ در نظریه میدان کلاسیکی است. در واقع $w_q(t_q)=0$ به عنوان شرط تاخیر کلاسیکی برای انتشار سیگنالی با سرعت نور معرفی می‌شود. به ویژه، $t_r(t, \mathbf{r})$ بیان کننده‌ی زمان تاخیری - زمان t_q ای که در آن سیگنال نور توسط منبع در مکان \mathbf{r}_q گسیل شده و در زمان بعدی t به موقعیت \mathbf{r} می‌رسد - می‌باشد.

علاوه بر این، الگوی فضا-زمانی انرژی در (۳-۳۹) باید مشابه با مساله کلاسیکی باشد زیرا توسط مسیر منبع با شرطی که انتشار سیگنال را با سرعت نور می‌دهد، ثابت می‌شود. به ویژه، وقتی که بر قسمت تابشی تمرکز شود، انتظار می‌رود که هیچ گونه گستردگی کوانتومی پدید نیاید.

برای محاسبه‌ی ε_B مراحل مشابهی دنبال می‌شود. با بیان انتگرالده بر حسب حرکت مرزی و انجام محاسبه‌ها به صورت زیر جواب نهایی به دست می‌آید:

$$\varepsilon_B = \frac{2L^3}{3\pi} \int \frac{d^4 \vec{r}' dz}{z} \Theta(t-t') \delta^m(w) \left[|\vec{r} - \vec{r}'|^2 (2t_{00} - 2t_{55} + t_{ii}) - (3(\vec{x} - \vec{x}')^i (\vec{x} - \vec{x}')^j) t_{ij} \right]$$

$$\xrightarrow{d^4 \vec{r}' = d^3 \vec{r}' dt' \rightarrow \int \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3 \vec{r}' = 1, \quad dt_q \xrightarrow{dt'=dt} dt \times \frac{\partial t_q}{\partial t} \times \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \times \frac{z \gamma_q}{L^3} \times \frac{2L^3}{3\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{3\pi^2} \times \gamma_q, \quad \delta^m(w) = \delta^m(w_q + 2\gamma_q \Xi z), \quad \vec{r}' = \vec{r}_q + \vec{v}_q \gamma_q z}$$

$$\varepsilon_B = \frac{\sqrt{\lambda}}{3\pi^2} \int dt_q dz \Theta(t-t') \delta^m(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \times \gamma_q \left[|\vec{r} - \vec{r}'|^2 (2t_{00} - 2t_{55} + t_{ii}) - (3(\vec{x} - \vec{x}')^i (\vec{x} - \vec{x}')^j) t_{ij} \right] \rightarrow$$

$$1) |\vec{r} - \vec{r}'|^2 (2t_{00} - 2t_{55} + t_{ii}) = \left[(\vec{r} - \vec{r}_q)^2 + \vec{v}_q^2 \gamma_q^2 z^2 + 2\gamma_q z [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] \right] \times \left\{ - \left[\frac{1}{\gamma_q} + z^2 \gamma_q^5 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \right] + \left[\begin{aligned} & 2 \left(\gamma_q + 2z \gamma_q^4 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q + \right. \\ & \left. + z^2 \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \right) - \\ & \left(- \frac{1}{\gamma_q} + z^2 \gamma_q^5 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \right) \right] + \left[\begin{aligned} & z \gamma_q^2 (\vec{v}_q^i \vec{a}_q^i + \vec{v}_q^i \vec{a}_q^i) + \\ & + (\gamma_q + 2z \gamma_q^4 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \vec{v}_q^{i2} + \\ & \left(z^2 \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \vec{v}_q^{i2} \right) \end{aligned} \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{aligned} &2\gamma_q(\vec{r}-\vec{r}_q)^2 + 4z\gamma_q^4\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q(\vec{r}-\vec{r}_q)^2 + 2z^2\gamma_q^7(\vec{r}-\vec{r}_q)^2[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q\times\vec{a}_q)^2] + \\ &+ 2\gamma_q^3\vec{v}_q^2z^2 + 4z^3\gamma_q^6\vec{v}_q^2(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q) + 2z^4\gamma_q^9\vec{v}_q^2[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q\times\vec{a}_q)^2] - \\ &- 4\gamma_q^2z[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q] - 8z^2\gamma_q^5[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q](\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q) - 4z^3\gamma_q^8[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q][\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q\times\vec{a}_q)^2] \end{aligned} \right\} + \\
&+ \left\{ \begin{aligned} &\frac{2(\vec{r}-\vec{r}_q)^2}{\gamma_q} - 2z^2\gamma_q^5(\vec{r}-\vec{r}_q)^2[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q\times\vec{a}_q)^2] + 2\gamma_q\vec{v}_q^2z^2 - 2z^4\gamma_q^7\vec{v}_q^2[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q\times\vec{a}_q)^2] - \\ &- 4z[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q] + 4z^3\gamma_q^6[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q][\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q\times\vec{a}_q)^2] \end{aligned} \right\} + \\
&+ \left\{ \begin{aligned} &2z\gamma_q^2(\vec{r}-\vec{r}_q)^2(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q) + (\vec{r}-\vec{r}_q)^2\gamma_q\vec{v}_q^2 + 2z\gamma_q^4\vec{v}_q^2(\vec{r}-\vec{r}_q)^2(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q) + z^2\vec{v}_q^2\gamma_q^7(\vec{r}-\vec{r}_q)^2[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q\times\vec{a}_q)^2] + \\ &+ 2z^3\gamma_q^3\vec{v}_q^2(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q) + \gamma_q^3\vec{v}_q^4z^2 - 2\gamma_q^2\vec{v}_q^2z[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q] - 4z^2\vec{v}_q^2\gamma_q^5(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q)[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q] - \\ &- 2z^3\vec{v}_q^2\gamma_q^8[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q][\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q\times\vec{a}_q)^2]. \end{aligned} \right\} \\
2) - 3(\vec{x}-\vec{x}')^i(\vec{x}-\vec{x}')^jt_{ij} &= (\vec{r}-\vec{r}')^i(\vec{r}-\vec{r}')^j \times \left\{ \begin{aligned} &-3z\gamma_q^2(\vec{v}_q^i\vec{a}_q^j + \vec{v}_q^j\vec{a}_q^i) - 3\gamma_q\vec{v}_q^i\vec{v}_q^j - 6z\gamma_q^4(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q)\vec{v}_q^i\vec{v}_q^j - \\ &- 3z^2\gamma_q^7[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q\times\vec{a}_q)^2]\vec{v}_q^i\vec{v}_q^j \end{aligned} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I) (\vec{r}-\vec{r}')^i(\vec{r}-\vec{r}')^j &[-3z\gamma_q^2(\vec{v}_q^i\vec{a}_q^j + \vec{v}_q^j\vec{a}_q^i)] = \\
&= -3z\gamma_q^2(\vec{r}-\vec{r}')^i\vec{v}_q^j(\vec{r}-\vec{r}')^j\vec{a}_q^i - 3z\gamma_q^2(\vec{r}-\vec{r}')^i\vec{a}_q^j(\vec{r}-\vec{r}')^j\vec{v}_q^i = \\
&= -3z\gamma_q^2[(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{v}_q][(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{a}_q] - 3z\gamma_q^2[(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{a}_q][(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{v}_q] = \\
&= -6z\gamma_q^2\left(\left\{[(\vec{r}-\vec{r}_q) - \vec{v}_q\gamma_qz]\cdot\vec{v}_q\right\}\left\{[(\vec{r}-\vec{r}_q) - \vec{v}_q\gamma_qz]\cdot\vec{a}_q\right\}\right) = \\
&= -6z\gamma_q^2\left(\left\{[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q] - \vec{v}_q^2\gamma_qz\right\}\left\{[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{a}_q] - \gamma_qz(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q)\right\}\right) = \\
&= \left(-6z\gamma_q^2\left\{[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q][(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{a}_q]\right\} + 6z^2\gamma_q^3[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q](\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q) + 6z^2\gamma_q^3\vec{v}_q^2[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{a}_q] - 6z^3\gamma_q^4\vec{v}_q^2(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q)\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
II) (\vec{r}-\vec{r}')^i(\vec{r}-\vec{r}')^j &[-3\gamma_q\vec{v}_q^i\vec{v}_q^j] = \\
&= -3\gamma_q[(\vec{r}-\vec{r}')^i\vec{v}_q^j][(\vec{r}-\vec{r}')^j\vec{v}_q^i] = \\
&= -3\gamma_q[(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{v}_q]^2 \xrightarrow{|A|^2|B|^2=|A\cdot B|^2\|A\times B\|^2} \\
&= -3\gamma_q\left[|\vec{r}-\vec{r}'|^2|\vec{v}_q|^2 - |[(\vec{r}-\vec{r}')\times\vec{v}_q]|^2\right] = \\
&= -3\gamma_q\left(\left\{[(\vec{r}-\vec{r}_q)^2 + \vec{v}_q^2\gamma_q^2z^2 - 2\gamma_qz[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q]]\vec{v}_q^2\right\} - \left\{[(\vec{r}-\vec{r}_q) - \vec{v}_q\gamma_qz]\times\vec{v}_q\right\}^2\right) = \\
&= -3\gamma_q(\vec{r}-\vec{r}_q)^2\vec{v}_q^2 - 3\gamma_q^3z^2\vec{v}_q^4 + 6\gamma_q^2z\vec{v}_q^2[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q] + 3\gamma_q[(\vec{r}-\vec{r}_q)\times\vec{v}_q]^2 - 3\gamma_q^2z[(\vec{r}-\vec{r}_q)\times\vec{v}_q] \xrightarrow{[(\vec{v}_q\times\vec{v}_q)=0]} \\
&= -3\gamma_q(\vec{r}-\vec{r}_q)^2\vec{v}_q^2 - 3\gamma_q^3z^2\vec{v}_q^4 + 6\gamma_q^2z\vec{v}_q^2[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q] + 3\gamma_q[(\vec{r}-\vec{r}_q)\times\vec{v}_q]^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
III) (\vec{r}-\vec{r}')^i(\vec{r}-\vec{r}')^j &[-6z\gamma_q^4(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q)\vec{v}_q^i\vec{v}_q^j] = \\
&= -6z\gamma_q^4(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q)(\vec{r}-\vec{r}')^i\vec{v}_q^j(\vec{r}-\vec{r}')^j\vec{v}_q^i = \\
&= -6z\gamma_q^4(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q)[(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{v}_q]^2 \xrightarrow{|A|^2|B|^2=|A\cdot B|^2\|A\times B\|^2} \\
&= -6z\gamma_q^4(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q)\left\{|\vec{r}-\vec{r}'|^2|\vec{v}_q|^2 - |[(\vec{r}-\vec{r}')\times\vec{v}_q]|^2\right\} = \\
&= -6z\gamma_q^4(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q)\left\{[(\vec{r}-\vec{r}_q)^2 + \vec{v}_q^2\gamma_q^2z^2 - 2\gamma_qz[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q]]\vec{v}_q^2 - [[(\vec{r}-\vec{r}_q) - \vec{v}_q\gamma_qz]\times\vec{v}_q]^2\right\} = \\
&= -6z\gamma_q^4(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q)(\vec{r}-\vec{r}_q)^2\vec{v}_q^2 - 6z^3\gamma_q^6\vec{v}_q^4(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q) + 12z^2\gamma_q^5\vec{v}_q^2(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q)[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q] + 6z\gamma_q^4(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q)[(\vec{r}-\vec{r}_q)\times\vec{v}_q] - 0 = \\
&= -6z\gamma_q^4(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q)(\vec{r}-\vec{r}_q)^2\vec{v}_q^2 - 6z^3\gamma_q^6\vec{v}_q^4(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q) + 12z^2\gamma_q^5\vec{v}_q^2(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q)[(\vec{r}-\vec{r}_q)\cdot\vec{v}_q] + 6z\gamma_q^4(\vec{v}_q\cdot\vec{a}_q)[(\vec{r}-\vec{r}_q)\times\vec{v}_q].
\end{aligned}$$

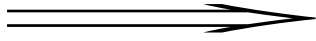
$$\begin{aligned}
& IV)(\vec{r} - \vec{r}')^i (\vec{r} - \vec{r}')^j \left[-3z^2 \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \vec{v}_q^i \vec{v}_q^j \right] = \\
& = -3z^2 \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] [(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{v}_q] = \frac{|A|^2 |B|^2 = |A \cdot B|^2}{\|A \times B\|^2} \rightarrow \\
& = -3z^2 \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \left\{ |\vec{r} - \vec{r}'|^2 |\vec{v}_q|^2 - |(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{v}_q|^2 \right\} = \\
& = -3z^2 \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \left\{ [(\vec{r} - \vec{r}_q)^2 \vec{v}_q^2 + \vec{v}_q^4 \gamma_q^2 z^2 - 2\gamma_q z \vec{v}_q^2 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q]] - [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2 - 0 \right\} = \\
& = -3z^2 \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 \vec{v}_q^2 - 3z^4 \vec{v}_q^4 \gamma_q^9 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + 6z^3 \gamma_q^8 \vec{v}_q^2 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] + \\
& + 3z^2 \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2.
\end{aligned}$$

I, II, III, IV

$$\begin{aligned}
& 2) -3(\vec{x} - \vec{x}')^i (\vec{x} - \vec{x}')^j t_{ij} = (\vec{r} - \vec{r}')^i (\vec{r} - \vec{r}')^j \times \left\{ \begin{aligned} & -3z\gamma_q^2 (\vec{v}_q^i \vec{a}_q^j + \vec{v}_q^j \vec{a}_q^i) - 3\gamma_q \vec{v}_q^i \vec{v}_q^j - 6z\gamma_q^4 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \vec{v}_q^i \vec{v}_q^j - \\ & -3z^2 \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \vec{v}_q^i \vec{v}_q^j \end{aligned} \right\} = \\
& = \left(\begin{aligned} & (-6z\gamma_q^2 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{a}_q] + 6z^2 \gamma_q^3 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 6z^2 \gamma_q^3 \vec{v}_q^2 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{a}_q] - 6z^3 \gamma_q^4 \vec{v}_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)) - \\ & -3\gamma_q (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 \vec{v}_q^2 - 3\gamma_q^3 z^2 \vec{v}_q^4 + 6\gamma_q^2 z \vec{v}_q^2 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] + 3\gamma_q [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2 - 6z\gamma_q^4 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 \vec{v}_q^2 - \\ & -6z^3 \gamma_q^6 \vec{v}_q^4 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 12z^2 \gamma_q^5 \vec{v}_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] + 6z\gamma_q^4 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q] - \\ & -3z^2 \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 \vec{v}_q^2 - 3z^4 \vec{v}_q^4 \gamma_q^9 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + 6z^3 \gamma_q^8 \vec{v}_q^2 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] + \\ & + 3z^2 \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2 \end{aligned} \right).
\end{aligned}$$

1, 2

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_B = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \Theta(t - t') \delta^m(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \times \frac{\gamma_q}{3} \left[|\vec{r} - \vec{r}'|^2 (2t_{00} - 2t_{55} + t_{ii}) - (3(\vec{x} - \vec{x}')^i (\vec{x} - \vec{x}')^j) t_{ij} \right] = \\
& = \frac{1}{3} \left\{ \begin{aligned} & 2\gamma_q (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 + 4z\gamma_q^4 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 + 2z^2 \gamma_q^7 (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + \\ & + 2\gamma_q^3 \vec{v}_q^2 z^2 + 4z^3 \gamma_q^6 \vec{v}_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 2z^4 \gamma_q^9 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] - \\ & -4\gamma_q^2 z [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] - 8z^2 \gamma_q^5 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - 4z^3 \gamma_q^8 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \end{aligned} \right\} + \\
& + \frac{1}{3} \left\{ \begin{aligned} & \frac{2(\vec{r} - \vec{r}_q)^2}{\gamma_q} - 2z^2 \gamma_q^5 (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + 2\gamma_q \vec{v}_q^2 z^2 - 2z^4 \gamma_q^7 \vec{v}_q^2 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] - \\ & -4z [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] + 4z^3 \gamma_q^6 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \end{aligned} \right\} + \\
& + \frac{1}{3} \left\{ \begin{aligned} & 2z\gamma_q^2 (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 \gamma_q \vec{v}_q^2 + 2z\gamma_q^4 \vec{v}_q^2 (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + z^2 \vec{v}_q^2 \gamma_q^7 (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + \\ & + 2z^3 \gamma_q^4 \vec{v}_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + \gamma_q^3 \vec{v}_q^4 z^2 - 2\gamma_q^2 \vec{v}_q^2 z [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] - 4z^2 \vec{v}_q^2 \gamma_q^5 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] - \\ & -2z^3 \vec{v}_q^2 \gamma_q^8 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \end{aligned} \right\} + \\
& + \frac{1}{3} \left(\begin{aligned} & (-6z\gamma_q^2 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{a}_q] + 6z^2 \gamma_q^3 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 6z^2 \gamma_q^3 \vec{v}_q^2 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{a}_q] - 6z^3 \gamma_q^4 \vec{v}_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)) - \\ & -3\gamma_q (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 \vec{v}_q^2 - 3\gamma_q^3 z^2 \vec{v}_q^4 + 6\gamma_q^2 z \vec{v}_q^2 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] + 3\gamma_q [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2 - 6z\gamma_q^4 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 \vec{v}_q^2 - \\ & -6z^3 \gamma_q^6 \vec{v}_q^4 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 12z^2 \gamma_q^5 \vec{v}_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] + 6z\gamma_q^4 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q] - \\ & -3z^2 \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 \vec{v}_q^2 - 3z^4 \vec{v}_q^4 \gamma_q^9 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + 6z^3 \gamma_q^8 \vec{v}_q^2 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] + \\ & + 3z^2 \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2 \end{aligned} \right),
\end{aligned}$$



$$\varepsilon_B = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \Theta(t-t') \delta^m(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \times \frac{\gamma_q}{3} [B_0(t_q) + zB_1(t_q) + z^2B_2(t_q) + z^3B_3(t_q) + z^4B_4(t_q)]. \quad (40-3)$$

که ضرایب B_i ، توسط روابط زیر داده می‌شوند. محاسبه‌ی کامل مربوط به $B_0(t_q)$ ، یعنی ضریب مربوط به توان درجه‌ی صفرم کمیت z در انتگرال ε_B ، در این قسمت انجام می‌شود و انجام محاسبه‌ی دقیق باقی ضرایب در پیوست ۲ آمده است.

محاسبه‌ی ضریب $B_0(t_q)$ عبارت است از :

$$\begin{aligned} B_0(t_q) &= \frac{1}{3} \left\{ 2\gamma_q (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 + \frac{2(\vec{r} - \vec{r}_q)^2}{\gamma_q} + \gamma_q (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 \vec{v}_q^2 - 3\gamma_q (\vec{r} - \vec{r}_q)^2 \vec{v}_q^2 + 3\gamma_q [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 2(\vec{r} - \vec{r}_q)^2 \left(\gamma_q + \frac{1}{\gamma_q} - \gamma_q \vec{v}_q^2 \right) + 3\gamma_q [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2 \right\} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{2(\vec{r} - \vec{r}_q)^2 \left(\gamma_q + \frac{1}{\gamma_q} - \gamma_q \left(1 - \frac{1}{\gamma_q^2}\right) \right)}{+ 3\gamma_q [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 2(\vec{r} - \vec{r}_q)^2 \left(\gamma_q + \frac{1}{\gamma_q} - \gamma_q + \frac{1}{\gamma_q} \right) + 3\gamma_q [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2 \right\} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{4(\vec{r} - \vec{r}_q)^2}{\gamma_q} + 3\gamma_q [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2 \right\} = \\ &= \frac{4(\vec{r} - \vec{r}_q)^2}{3\gamma_q} + \gamma_q [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2. \end{aligned} \quad (41-3)$$

$$B_1(t_q) = -\frac{8}{3} \vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q) + \left(2\gamma_q^2 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q] \cdot \left\{ (\vec{r} - \vec{r}_q) \times [\gamma_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \vec{v}_q + \vec{a}_q] \right\} \right). \quad (42-3)$$

$$B_2(t_q) = \frac{4}{3} \gamma_q v_q^2 - 2\gamma_q^3 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q] \cdot [(\vec{v}_q \times \vec{a}_q)] + \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2. \quad (43-3)$$

$$B_3(t_q) = 0. \quad (44-3)$$

$$B_4(t_q) = 0. \quad (45-3)$$

همانطور که در محاسبه‌ی دقیق در پیوست ۲ آمده است، سهم درجات سوم و چهارم z از

انتگرالده حذف می‌شوند.

بار دیگر انتگرال روی z و t_q به ترتیب توسط رابطه‌ی $z = \frac{-w_q}{2\gamma_q \Xi}$ و شرط $w_q = 0$ که با هم دو شرط

$z=0$ و $t_q=t_r$ را ایجاب می‌کنند، ثابت می‌شود. گام‌های محاسبه به صورت زیر است که ابتدا به روش

جز به جز سه انتگرال یگانه بر حسب t_q به دست می‌آید :

$$\varepsilon_B = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \Theta(t-t') \delta'''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \times \frac{\gamma_q}{3} [B_0(t_q) + zB_1(t_q) + z^2 B_2(t_q) + z^3 B_3(t_q) + z^4 B_4(t_q)],$$

$$\xrightarrow{\int u dv = uv - \int v du} \begin{cases} I) \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q \left(\frac{B_0}{2\gamma_q \Xi} \right) \frac{\partial^3}{\partial w_q^3} \Theta(-w_q) \\ II) \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q \left(\frac{-B_1}{4\gamma_q^2 \Xi^2} \right) \frac{\partial^3}{\partial w_q^3} [\Theta((-w_q)w_q)] \\ III) \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q \left(\frac{B_2}{8\gamma_q^3 \Xi^3} \right) \frac{\partial^3}{\partial w_q^3} [\Theta((-w_q)w_q^2)] \end{cases} \quad (46-3)$$

که برای دو انتگرال اول، ابتدا دو مشتق را گرفته و با جاگذاری رابطه‌ی (47-3) حاصل به دست

خواهد آمد. به عنوان مثال برای انتگرال اول محاسبه به این صورت است که :

$$\rightarrow \Xi \equiv (t-t_q) - \vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q) = \frac{1}{2} \frac{dw_q}{dt_q} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial w_q} = \frac{1}{2\Xi} \frac{\partial}{\partial t_q} \quad (47-3)$$

$$\begin{aligned} I) \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q \left(\frac{B_0}{2\gamma_q \Xi} \right) \frac{\partial^3}{\partial w_q^3} \Theta(-w_q) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q \left(\frac{B_0}{2\gamma_q \Xi} \right) \frac{\partial^2}{\partial w_q^2} \left(\frac{\partial}{\partial w_q} \Theta(-w_q) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q \left(\frac{B_0}{2\gamma_q \Xi} \right) \frac{\partial}{\partial w_q} \left(-\frac{\partial}{\partial w_q} \delta(w_q) \right) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q \delta(w_q) \frac{\partial}{\partial w_q} \left(\frac{\partial}{\partial w_q} \left(\frac{B_0}{2\gamma_q \Xi} \right) \right) = \\ &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q \frac{\delta(t_q - t_r)}{2\Xi} \left(\frac{1}{2\Xi} \frac{\partial}{\partial t_q} \right) \left(\frac{1}{2\Xi} \frac{\partial}{\partial t_q} \left(\frac{B_0}{2\gamma_q \Xi} \right) \right) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q \frac{\delta(t_q - t_r)}{2\Xi} \left(\frac{1}{2\Xi} \frac{\partial}{\partial t_q} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t_q} \left(\frac{B_0}{4\gamma_q \Xi^2} \right) \right) = \\ &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \right) \left(\frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{B_0}{\gamma_q \Xi^2} \right), \end{aligned} \quad (48-3)$$

در نتیجه برای دومین انتگرال نیز:

$$II) \int dt_q \left(\frac{-B_1}{4\gamma_q^2 \Xi^2} \right) \frac{\partial^3}{\partial w_q^3} [\Theta((-w_q)w_q)] = -\frac{\sqrt{\lambda}}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{B_1}{\gamma_q^2 \Xi^3} \right), \quad (49-3)$$

برای سومین انتگرال هر سه مشتق را اعمال کرده و نتیجه مستقیم به صورت زیر است :

$$III) \int dt_q \left(\frac{B_2}{8\gamma_q^3 \Xi^3} \right) \frac{\partial^3}{\partial w_q^3} \left[\Theta((-w_q)w_q^2) \right] = -\frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \left(\frac{B_2}{\gamma_q^3 \Xi^4} \right), \quad (50-3)$$

و بنابراین:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon_B &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2} \int dt_q dz \Theta(t-t') \delta'''(w_q + 2\gamma_q \Xi z) \times \frac{\gamma_q}{3} \left[B_0(t_q) + z B_1(t_q) + z^2 B_2(t_q) + z^3 B_3(t_q) + z^4 B_4(t_q) \right] = \\ &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \left(\frac{B_2}{\gamma_q^3 \Xi^4} \right) - \frac{\sqrt{\lambda}}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{B_1}{\gamma_q^2 \Xi^3} \right) - \frac{\sqrt{\lambda}}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \right) \left(\frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{B_0}{\gamma_q \Xi^2} \right) \end{aligned} \quad (51-3)$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} B_0 &= \frac{4(\bar{r} - \bar{r}_q)^2}{3\gamma_q} + \gamma_q [(\bar{r} - \bar{r}_q) \times \bar{v}_q]^2 \xrightarrow{\times \gamma_q} \gamma_q B_0 = \frac{4(\bar{r} - \bar{r}_q)^2}{3} + \gamma_q^2 [(\bar{r} - \bar{r}_q) \times \bar{v}_q]^2 \\ \frac{\partial \gamma_q^2}{\partial t_q} &= \frac{\partial}{\partial \bar{v}_q} \frac{\partial \bar{v}_q}{\partial t_q} \gamma_q^2 = 2\gamma_q^4 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t_q} (\gamma_q B_0) &= -\frac{8}{3} \bar{v}_q \cdot (\bar{r} - \bar{r}_q) + \left(2\gamma_q^2 [(\bar{r} - \bar{r}_q) \times \bar{v}_q] \cdot \{ (\bar{r} - \bar{r}_q) \times [\gamma_q^2 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \bar{v}_q + \bar{a}_q] \} \right) = B_1 \Rightarrow B_1 = \frac{\partial}{\partial t_q} (\gamma_q B_0) \end{aligned} \right. , \quad (52-3)$$

در نهایت حاصل زیر به دست می آید:

$$\Rightarrow \varepsilon_B = -\frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \left(\frac{B_2}{\gamma_q^3 \Xi^4} \right) - \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \right) \left(\frac{1}{\gamma_q \Xi^2} \frac{\partial B_0}{\partial t_r} \frac{1}{\Xi} \right). \quad (53-3)$$

معادله‌های (3-39) و (3-53) نتیجه‌های نهایی برای محاسبه‌ی چگالی انرژی تولید شده توسط

کوارک سنگین است. در بخش بعد، از این نتیجه‌ها برای به دست آوردن انرژی و توان تابشی توسط

کوارک سنگین استفاده می‌شود.

۳-۴-۱- حل نمونه‌ای ساده به عنوان کاربردی از روابط چگالی انرژی

با استفاده روابط به دست آمده برای چگالی انرژی، نتیجه‌های مربوط به انرژی کولنی یک کوآرک سنگین که با سرعت ثابت در حال حرکت است، محاسبه می‌شود. که در این حرکت، بدیهی است که کوآرک تابش نمی‌کند.

یک حرکت خطی با سرعت ثابت در راستای محور x در نظر گرفته می‌شود، از آن جا که شتاب حرکت این کوآرک صفر است، $\mathbf{a}_q=0$ ، در نتیجه ضرایب A_i و B_i به آسانی محاسبه می‌شوند. و نتیجه پس از انجام گام های ریاضیاتی به دست می‌آید :

$$\varepsilon_A = \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{A_1}{\gamma_q^2 \Xi^3} + \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{A_0}{\gamma_q \Xi^2} \xrightarrow{\vec{v}_s = \vec{v}} \begin{cases} A_0 = 3\gamma_q - \gamma_q \vec{v}^2 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \varepsilon_A = \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{A_0}{\gamma_q \Xi^2},$$

$$\rightarrow \begin{cases} w_q \equiv -(t-t_q)^2 + |\vec{r} - \vec{r}_q|^2, \Xi \equiv (t-t_q) - \vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q) = (t-t_q) - \vec{v}(x-vt_q) \\ t_r = t_r(t, \vec{r}), t-t_r = |\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)| \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{A_0}{\gamma_q \Xi^2} = \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{3\gamma_q - \gamma_q v^2}{\gamma_q \Xi^2} = \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{3-v^2}{\Xi^2} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{3-v^2}{\Xi^2} = \frac{\partial}{\partial t_q} \frac{3-v^2}{[(t-t_q) - \vec{v}(x-vt_q)]^2} = \frac{\partial}{\partial t_q} \frac{3-v^2}{[(t-t_q)^2 + v^2(x-vt_q)^2 - 2(t-t_q)\vec{v}(x-vt_q)]^2} \\ &= \frac{0 - (3-v^2)[-2(t-t_q) - 2\vec{v}^3(x-vt_q) + 2\vec{v}(x-vt_q) + 2v^2(t-t_q)]}{\Xi^4} = \\ &= \frac{-(3-v^2)[-2(t-t_q) - 2\vec{v}^3(x-vt_q) + 2\vec{v}(x-vt_q) + 2v^2(t-t_q)]}{\Xi^4} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{3-v^2}{\Xi^2} = \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{-(3-v^2)[-2(t-t_q) - 2\vec{v}^3(x-vt_q) + 2\vec{v}(x-vt_q) + 2v^2(t-t_q)]}{\Xi^5} = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{(3-v^2)[2(t-t_q) - 2\vec{v}(x-vt_q)(1-v^2) - 2v^2(t-t_q)]}{[(t-t_q) - \vec{v}(x-vt_q)]^5} = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{(3-v^2)[2(t-t_q)(1-v^2) - 2\vec{v}(x-vt_q)(1-v^2)]}{[(t-t_q) - \vec{v}(x-vt_q)]^5} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\lambda} (3-v^2) \left[\frac{2(t-t_q)}{\gamma_q} - \frac{2\bar{v}(x-vt_q)}{\gamma_q} \right]}{8\pi^2 [(t-t_q) - \bar{v}(x-vt_q)]^5} = \frac{\sqrt{\lambda} (3-v^2) [2[(t-t_q) - \bar{v}(x-vt_q)]]}{8\pi^2 \gamma^2 [(t-t_q) - \bar{v}(x-vt_q)]^5} = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda} (3-v^2) [(t-t_q) - \bar{v}(x-vt_q)]}{4\pi^2 \gamma^2 [(t-t_q) - \bar{v}(x-vt_q)]^5} = \frac{\sqrt{\lambda} (3-v^2)}{4\pi^2 \gamma^2 [(t-t_q) - \bar{v}(x-vt_q)]^4} \rightarrow
\end{aligned}$$

t_q در ادامه به دست آمده و در عبارت ε_A جاگذاری می‌شود.

t_q از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned}
\rightarrow t - t_r &= \left| \vec{r} - \vec{r}_q(t_r) \right|_{t_r=t_q} \rightarrow \\
t - t_q &= \sqrt{(x-vt_q)^2 + \bar{x}_\perp^2} \rightarrow \\
(t-t_q)^2 &= (x-vt_q)^2 + \bar{x}_\perp^2 \rightarrow \\
t^2 + t_q^2 - 2tt_q &= x^2 + v^2t_q^2 - 2xvt_q + \bar{x}_\perp^2 \rightarrow \\
t_q^2 - 2tt_q - v^2t_q^2 + 2xvt_q &= x^2 + \bar{x}_\perp^2 - t^2 \rightarrow \\
t_q^2(1-v^2) - 2t_q(t-xv) &= x^2 + \bar{x}_\perp^2 - t^2 \rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{t_q^2}{\gamma^2} - 2t_q(t-xv) &= x^2 + \bar{x}_\perp^2 - t^2 \rightarrow \\
\frac{1}{\gamma^2} (t_q^2 - 2\gamma^2 t_q(t-xv)) &= x^2 + \bar{x}_\perp^2 - t^2 \rightarrow \\
t_q^2 - 2\gamma^2 t_q(t-xv) &= \gamma^2 (x^2 + \bar{x}_\perp^2 - t^2) \rightarrow \\
t_q^2 - 2\gamma^2 (t-xv)t_q + \gamma^2 (-x^2 - \bar{x}_\perp^2 + t^2) &= 0 \rightarrow
\end{aligned}$$

$$t_q = \frac{2\gamma^2(t-xv) \pm \sqrt{4\gamma^4(t-xv)^2 - 4 \times 1 \times \gamma^2(-x^2 - \bar{x}_\perp^2 + t^2)}}{2 \times 1},$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sqrt{4\gamma^4[\gamma^2(t-xv)^2 - (-x^2 - \bar{x}_\perp^2 + t^2)]} = \\
&= 2\gamma \sqrt{\gamma^2(t^2 + x^2v^2 - 2txv) + x^2 + \bar{x}_\perp^2 - t^2} = \\
&= 2\gamma \sqrt{\gamma^2 t^2 + x^2 v^2 \gamma^2 - 2\gamma^2 txv + x^2 + \bar{x}_\perp^2 - t^2} = \\
&= 2\gamma \sqrt{t^2(\gamma^2 - 1) + x^2(v^2\gamma^2 + 1) - 2\gamma^2 txv + \bar{x}_\perp^2} \\
&\xrightarrow{\gamma^2 - 1 = v^2\gamma^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= 2\gamma \sqrt{t^2 v^2 \gamma^2 + x^2 \gamma^2 - 2\gamma^2 txv + \bar{x}_\perp^2} = \\
&= 2\gamma \sqrt{\gamma^2 (x-vt)^2 + \bar{x}_\perp^2}.
\end{aligned}$$

$$t_q = \frac{2 \left[\gamma^2(t-xv) \pm \gamma \sqrt{\bar{x}_\perp^2 + \gamma^2(x-vt)^2} \right]}{2} = \gamma^2(t-xv) \pm \gamma \sqrt{\bar{x}_\perp^2 + \gamma^2(x-vt)^2} \Rightarrow$$

$$t_q = \gamma^2(t-xv) - \gamma \sqrt{\bar{x}_\perp^2 + \gamma^2(x-vt)^2}$$

علامت منفی بین عبارت بالا از آن جهت انتخاب می‌شود که در گام های بعدی، علامت مثبت بین

دو جمله‌ی عبارت ε_A نیاز است. با جاگذاری t_q در ε_A نتیجه‌ی نهایی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2} \frac{(3-v^2)}{\gamma^2 [t - \gamma^2(t-xv) \mp \gamma \sqrt{\bar{x}_\perp^2 + \gamma^2(x-vt)^2} - \bar{v}(x-v\gamma^2(t-xv) \mp \gamma v \sqrt{\bar{x}_\perp^2 + \gamma^2(x-vt)^2})]^4} = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2} \frac{(3-v^2)}{\gamma^2 \left(t - \gamma^2(t-xv) + \gamma \sqrt{\bar{x}_\perp^2 + \gamma^2(x-vt)^2} - \bar{v}(x-v\gamma^2(t-xv) + \gamma v \sqrt{\bar{x}_\perp^2 + \gamma^2(x-vt)^2}) \right)^4} = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2} \frac{(3-v^2)}{\gamma^2 \left(\left\{ \gamma \sqrt{\bar{x}_\perp^2 + \gamma^2(x-vt)^2} (1-v^2) \right\} + \left\{ t - \gamma^2 t + \gamma^2 tv^2 - vx + \gamma^2 vx - \gamma^2 v^3 x \right\} \right)^4} = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2} \frac{(3-v^2)}{\gamma^2 \left(\left\{ \gamma \sqrt{\bar{x}_\perp^2 + \gamma^2(x-vt)^2} \gamma^{-2} \right\} + \left\{ t(1-\gamma^2 + \gamma^2 v^2) - vx(1-\gamma^2 - \gamma^2 v^2) \right\} \right)^4} = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2} \frac{(3-v^2)}{\gamma^2 \left\{ \gamma^{-1} \sqrt{\bar{x}_\perp^2 + \gamma^2(x-vt)^2} \right\}^4 + \{0\}} \rightarrow \\ \varepsilon_A &= \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi^2} \frac{\gamma^2(3-v^2)}{[\bar{x}_\perp^2 + \gamma^2(x-vt)^2]^2}, \end{aligned} \quad (54-3)$$

و همچنین ε_B نیز مانند روش بالا محاسبه شده و حاصل زیر را می‌دهد:

$$\varepsilon_B = -\frac{\sqrt{\lambda}}{6\pi^2} \frac{(4-2v^2)[\bar{x}_\perp^2 + \gamma^2(x-vt)^2] + v^2 \gamma^2(x-vt)^2}{[\bar{x}_\perp^2 + \gamma^2(x-vt)^2]^3}, \quad (55-3)$$

که پس از ترکیب دو رابطه‌ی بالا، نتیجه‌ی مورد انتظار به دست می‌آید:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\lambda}}{12\pi^2} \frac{(1+v^2)\bar{x}_\perp^2 + (x-vt)^2}{[\bar{x}_\perp^2 + \gamma^2(x-vt)^2]^3}. \quad (56-3)$$

۳-۵- محاسبه‌ی چگالی انرژی تابشی و توان تابشی کوارک شتابدار در

خلاء

از این مرحله به بعد، بر روابطی از چگالی انرژی تمرکز می‌شود که تابش را نتیجه می‌دهد. با

تعریفی که در متن آمده، تابش به عنوان سهمی از انرژی در نظر گرفته می‌شود که در فاصله های \mathbf{R}

$(R \equiv r - r_q)$ ، دور از منبع بصورت $\frac{1}{R^2}$ کاهش می‌یابد. برای واضح بودن این تعریف می‌توان گفت که، تنها نقطه‌ی مشاهده‌ی r که به طور قابل قبولی دور از مکان کوآرک در زمان مشاهده‌ی t ، $r_q(t)$ قرار دارد؛ برای محاسبه‌ی سهم چگالی انرژی در r در نظر گرفته می‌شود که به صورت $\frac{1}{R^2}$ کاهش می‌یابد (در واقع، اگر r تقریباً به $r_q(t)$ نزدیک باشد، در نتیجه شرط تاخیری (۳-۳۷)، جواب t_r با $t_r = t$ و $r_q(t) \cong r$ را می‌دهد و در نتیجه چگالی انرژی در r توسط میدان کوآرک یا به عبارت دیگر توسط انرژی کولنی و تابش آن محاسبه می‌شود).

برای $t_q = t_r$ که از شرط (۳-۳۷) پیروی می‌کند، عبارت $\vec{E} = R(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_q)$ نوشته می‌شود که \mathbf{n} به عنوان بردار نرمال در راستای R در نظر گرفته می‌شود. و با توجه به بحث‌های قبل، می‌توان بررسی کرد که قسمت‌هایی که واپاشی آرام را در فاصله‌های دور R در رابطه‌های (۳-۳۹) و (۳-۵۳) نشان می‌دهند، آن‌هایی هستند که رفتاری مانند $\frac{1}{R^2}$ دارند و همچنین برای جدا کردن این قسمت‌ها، کافیسست جمله‌هایی از ضرایب A_i باقی بمانند که متناسب با R یا با توجه به رابطه‌ی (۳-۳۷)، $t - t_q$ هستند و عباراتی از B_i باقی می‌مانند که متناسب با R^2 باشد. با انجام این عمل، سرانجام نتیجه گرفته می‌شود که سهم‌های تابشی متناسب با $\frac{1}{R^2}$ برای چگالی انرژی از جمله‌های موجود در رابطه‌های (۳-۳۹) و (۳-۵۳) می‌آیند که یا متناسب با مربع شتاب و یا متناسب با مشتق‌های زمانی آن‌ها هستند.

بنابراین، همان‌گونه که انتظار می‌رود، تابش در غیاب شتاب ناپدید می‌شود. برخلاف آنچه در نظریه‌ی کلاسیکی یا در نظریه جفت شدگی ضعیف رخ می‌دهد، که در آن تابش تنها جملاتی را شامل می‌شود که متناسب با مربع شتابند؛ در محاسبات حاضر در جفت شدگی قوی، سهم‌های متناسب با مشتق‌های زمانی شتاب، \dot{a}_q ، نیز دیده می‌شود.

در ادامه، سهم های تابشی مربوط به چگالی انرژی در رابطه های (۳-۳۹) و (۳-۵۳) نشان داده می شود. از دیدگاه فیزیکی و همچنین مقایسه با نتایج کلاسیکی مربوط به بخش هفتم، می توان دو نوع مشارکت انرژی را از هم تفکیک کرد:

۱. قسمتی از انرژی که توسط جمله هایی از تانسور انرژی-تکانه تولید می شود که به طور خود به خود متناسب با مربع شتاب هستند.

۲. قسمتی از انرژی که از جمله هایی در رابطه های (۳-۳۹) و (۳-۵۳) می آید که شامل مشتق هایی بر حسب زمان گسیل اند.

این دو مشارکت در ادامه، بیشتر توضیح داده می شوند:

دسته ی اول، سهم های متناسب با مربع شتاب یا به معنای دقیق تر، با ساختار $\mathbf{a}^2 - (\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2$ هستند. و جمله هایی که از سهم هایی در روابط (۳-۲۱) تا (۳-۲۷) برای \tilde{t}_{MN} ناشی می شوند، برای A_1 در رابطه ی (۳-۳۴) و برای B_2 در رابطه ی (۳-۴۳) قابل مشاهده است. آن ها در روابط چگالی انرژی به واسطه ی عبارت هایی وارد می شوند که بدون مشتق هستند و نتیجه می دهند که:

$$A_1(t_q) \rightarrow \gamma_q^6 [\tilde{a}_q^2 - (\tilde{\mathbf{v}}_q \times \tilde{\mathbf{a}}_q)^2] [(t - t_q) + \tilde{\mathbf{v}}_q \cdot (\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}_q)],$$

$$\varepsilon_A = \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{A_1}{\gamma_q^2 \Xi^3} + \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{A_0}{\gamma_q \Xi^2} \Rightarrow \begin{cases} t_q = t_r \rightarrow t - t_r = |\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}_q(t_r)| \Rightarrow \\ \Xi \equiv (t - t_q) - \tilde{\mathbf{v}}_q \cdot (\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}_q) = |\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}_q| (1 - \tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_q) \xrightarrow{\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}_q(t_r)} \\ \Xi = R(1 - \tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_q), \\ [(t - t_q) + \tilde{\mathbf{v}}_q \cdot (\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}_q)] = R(1 + \tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_q), \\ (\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}_q) \times \tilde{\mathbf{v}}_q = R(\tilde{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{v}}_q). \end{cases}$$

$$\varepsilon_A^{(1)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{A_1}{\gamma_q^2 \Xi^3} = \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{\gamma_q^6 [\tilde{a}_q^2 - (\tilde{\mathbf{v}}_q \times \tilde{\mathbf{a}}_q)^2] R(1 + \tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_q)}{\gamma_q^2 R^3 (1 - \tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_q)^3} \rightarrow \varepsilon_A^{(1)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{\gamma_q^4 [\tilde{a}_q^2 - (\tilde{\mathbf{v}}_q \times \tilde{\mathbf{a}}_q)^2]}{R^2} \frac{(1 + \tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_q)}{(1 - \tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_q)^3},$$

(۳-۵۷)

$$\begin{aligned}
B_2(t_q) &\rightarrow \gamma_q^7 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] [(\bar{r} - \bar{r}_q) \times \bar{v}_q]^2, \\
\mathcal{E}_B^{(1)} &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \left(\frac{B_2}{\gamma_q^3 \Xi^4} \right) - \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \right) \left(\frac{1}{\gamma_q \Xi^2} \frac{\partial B_0}{\partial t_r} \right) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{B_2}{\gamma_q^3 \Xi^4} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{\gamma_q^7 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] R^2 (\bar{n} \times \bar{v}_q)^2}{\gamma_q^3 R^4 (1 - \bar{n} \cdot \bar{v}_q)^4} \rightarrow \\
\mathcal{E}_B^{(1)} &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{\gamma_q^4 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]}{R^2} \frac{(\bar{n} \times \bar{v}_q)^2}{(1 - \bar{n} \cdot \bar{v}_q)^4},
\end{aligned} \tag{58-3}$$

این دو سهم ترکیب شده و نتیجه‌ی نهایی را می‌دهد:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{rad}^{(1)}(t, r) &= \mathcal{E}_A^{(1)} + \mathcal{E}_B^{(1)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{[\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]}{R^2} \left[\frac{\gamma_q^4 (1 + \bar{n} \cdot \bar{v}_q)(1 - \bar{n} \cdot \bar{v}_q) - (\bar{n} \times \bar{v}_q)^2}{(1 - \bar{n} \cdot \bar{v}_q)^4} \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{[\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]}{R^2} \left[\frac{\gamma_q^4 (1 - \bar{n} \cdot \bar{v}_q)^2 - (\bar{n} \times \bar{v}_q)^2}{(1 - \bar{n} \cdot \bar{v}_q)^4} \right] = \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{[\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]}{R^2} \left[\frac{\gamma_q^4 - \gamma_q^4 (\bar{n} \cdot \bar{v}_q)^2 - \gamma_q^4 (\bar{n} \times \bar{v}_q)^2}{(1 - \bar{n} \cdot \bar{v}_q)^4} \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{[\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]}{R^2} \left[\frac{\gamma_q^4 - \gamma_q^4 [(\bar{n} \cdot \bar{v}_q)^2 - (\bar{n} \times \bar{v}_q)^2]}{(1 - \bar{n} \cdot \bar{v}_q)^4} \right] = \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{[\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]}{R^2} \left[\frac{\gamma_q^4 - \gamma_q^4 [(\bar{n} \cdot \bar{v}_q)^2 - (\bar{n} \times \bar{v}_q)^2]}{(1 - \bar{n} \cdot \bar{v}_q)^4} \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{[\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]}{R^2} \left[\frac{\gamma_q^4 - \gamma_q^4 [|\bar{n}|^2 |\bar{v}_q|^2]}{(1 - \bar{n} \cdot \bar{v}_q)^4} \right] = \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{[\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]}{R^2} \left[\frac{\gamma_q^4 [1 - v_q^2]}{(1 - \bar{n} \cdot \bar{v}_q)^4} \right] \xrightarrow{[1 - v_q^2] = \gamma_q^{-2}} \\
\mathcal{E}_{rad}^{(1)}(t, \bar{r}) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{\gamma_q^2 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]}{R^2 (1 - \bar{n} \cdot \bar{v}_q)^4}
\end{aligned} \tag{59-3}$$

که همه‌ی کمیت‌های وابسته به حرکت کوارک در $t_q = t_r(t, \mathbf{r})$ محاسبه می‌شوند. توجه شود که جمله‌های دیگر در A_1 و B_2 برای چگالی انرژی، سهمی از درجه ی $\frac{1}{R^2}$ تولید نمی‌کنند.

دسته‌ی دوم، باقی جمله‌هایی هستند که از درجه ی $\frac{1}{R^2}$ می‌باشند و از سومین و چهارمین عبارت در A_0 و B_0 و از دومین جمله مربوط به B_1 به دست می‌آیند. این جمله‌ها، وابسته به سرعت کوارک‌اند و در بیشتر مواقع بر حسب شتاب، خطی‌اند. اما در روابط چگالی انرژی، پس از مشتق‌گیری بر حسب t_r ، سهم‌های متناسب با مربع شتاب و مشتق‌های آن‌ها را تولید می‌کنند.

با تعریف $\xi = 1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_q$ و روشی مشابه به قبل، رابطه‌های به دست آمده عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} A_0(t_q) \rightarrow \gamma_q^3 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) [(t - t_q) + \vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q)] + \gamma_q \vec{a}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q) \\ B_0(t_q) \rightarrow \frac{4(\vec{r} - \vec{r}_q)^2}{3\gamma_q} + \gamma_q [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2 \\ B_1(t_q) \rightarrow \left(2\gamma_q^2 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q] \cdot \left\{ (\vec{r} - \vec{r}_q) \times [\gamma_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \vec{v}_q + \vec{a}_q] \right\} \right) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \xi = 1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_A^{(2)} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2 R^2 \xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \left[\frac{\vec{n} \cdot \vec{a}_q + \gamma_q^2 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q (2 - \xi)}{\xi^2} \right] \\ \varepsilon_B^{(2)} &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2 R^2 \xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \left[-\frac{\vec{n} \cdot \vec{a}_q (1 - \xi)}{\xi^3} + \frac{\gamma_q^2 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q (2 - \xi)}{\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \left(\frac{1}{6\gamma_q^2 \xi^2} + \frac{1}{\xi} \right) \right] \xrightarrow{\frac{\partial \xi}{\partial t_r} = -\vec{n} \cdot \vec{a}_q} \\ \varepsilon_B^{(2)} &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2 R^2 \xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \left[\frac{\vec{n} \cdot \vec{a}_q + \gamma_q^2 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q (2 - \xi)}{\xi^2} + \frac{1}{6\xi} \frac{\partial}{\partial t_r} \left(\frac{1}{\gamma_q^2 \xi^2} \right) \right] \\ \varepsilon_{rad}^{(2)}(t, \vec{r}) &= \varepsilon_A^{(2)} + \varepsilon_B^{(2)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{24\pi^2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)} \frac{\partial}{\partial t_r} \left[\frac{\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^3} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}_q}{\gamma_q^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^4} \right] \rightarrow \\ \varepsilon_{rad}^{(2)}(t, \vec{r}) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{24\pi^2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)} \frac{\partial}{\partial t_r} \left[\frac{\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^3} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}_q}{\gamma_q^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^4} \right]. \end{aligned}$$

(۶۰-۳)

در محاسبه‌ی بالا از مشتق‌گیری روی \mathbf{R} یا با توجه به رابطه‌ی (۳-۳۷)، $t - t_q$ ، صرف نظر شد، زیرا که این عمل جمله‌هایی را می‌دهد که سریعتر از $\frac{1}{R^2}$ کاهش می‌یابند. و همچنین بنابر دلیل بیان شده، از بردار نرمال نیز مشتق گرفته نمی‌شود. اگر آخرین مشتق در رابطه‌ی (۳-۶۰) اعمال شود، دیده می‌شود که همه جمله‌های به دست آمده با مربع شتاب یا مشتق شتاب متناسب هستند.

چگالی انرژی تابشی ε_{rad} ، با جمع دو رابطه‌ی (۳-۵۹) و (۳-۶۰) به دست می‌آید که مهم‌ترین

نتیجه در این تحقیق به شمار می‌آید.

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{rad}^{(1)}(t, \vec{r}) = \frac{\sqrt{\lambda} \gamma_q^2 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2]}{8\pi^2 R^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^4} \\ \varepsilon_{rad}^{(2)}(t, \vec{r}) = \frac{\sqrt{\lambda}}{24\pi^2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)} \frac{\partial}{\partial t_r} \left[\frac{\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^3} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}_q}{\gamma_q^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^4} \right] \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_{rad} = \varepsilon_{rad}^{(1)} + \varepsilon_{rad}^{(2)}.$$

(۶۱-۳)

توان‌های به نسبت بالای ξ که در مخرج این رابطه‌ها دیده می‌شود، اصول نسبیت خاص را برآورده می‌کند یعنی آن‌ها تابش را بر حسب خیز لورنتس بیان می‌کنند که مستقل از مقدار جفت شدگی است.

در حد فرا نسبیتی $1, \gamma_q \gg 1, v_q \cong 1$ ، با بسط کسینوس می‌توان نوشت:

$$1 - v_q \cos \alpha \cong \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma_q^2} + \alpha^2 \right) \quad (62-3)$$

که در آن α نشان دهنده‌ی زاویه‌ی بین بردار سرعت و بردار نرمال می‌باشد.

این ادعا نشان می‌دهد که تابش با یک زاویه کوچک $\alpha \sim \frac{1}{\gamma_q}$ در اطراف جهت حرکت کوارک با

سرعت $v_q(t_r)$ گسیل می‌شود که با مساله‌های کلاسیکی متناظر می‌باشد [۲۶].

اکنون توان تابشی محاسبه می‌شود:

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی زیر

$$\partial_t \langle T^{00} \rangle + \partial_i \langle T^{0i} \rangle = 0 \quad (63-3)$$

روی کل فضا و همچنین استفاده از قانون گاوس، به همراه شرط

$$\langle T^{0i} \rangle \approx n^i \langle T^{00} \rangle \quad (64-3)$$

برای محاسبه‌ی سهم‌های مربوط متناسب با $\frac{1}{R^2}$ در فاصله‌های دور \mathbf{R} ، نتایج زیر به دست می‌آیند یعنی انرژی تابشی بر واحد زمان مشاهده را می‌توان به توان تابشی بر واحد زمان گسیل در نظر گرفت. در نتیجه به همراه شرط $\xi = \frac{dt}{dt_r}$ برای فاصله‌های بسیار دور حاصل زیر به دست می‌آید:

$$\xrightarrow{\langle T^{00} \rangle = \varepsilon} - \frac{dE}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int d\Omega \varepsilon(t, \vec{r}) \rightarrow \frac{dP_{rad}}{d\Omega} = \frac{dt}{dt_r} R^2 \varepsilon_{rad} \Rightarrow P_{rad} = \int d\Omega (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q) R^2 \varepsilon_{rad} \quad (65-3)$$

با استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری، اولین سهم از توان تابشی که از $\varepsilon_{rad}^{(1)}$ به دست می‌آید، به

این صورت است :

$$\begin{aligned}
 P_{rad} &= \int d\Omega (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q) R^2 \varepsilon_{rad} \\
 &\xrightarrow{R=|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|=r} \\
 P_{rad}^{(1)} &= \int d\Omega (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q) R^2 \varepsilon_{rad}^{(1)} = \int d\Omega (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q) R^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda} \gamma_q^2 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2]}{8\pi^2 R^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^4} \right) = \\
 &= \int d\Omega \left(\frac{\sqrt{\lambda} \gamma_q^2 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2]}{8\pi^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^3} \right) \rightarrow \int d\Omega \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^3} = 4\pi\gamma^4 \rightarrow \\
 P_{rad}^{(1)} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \gamma_q^6 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2]. \tag{۶۶-۳}
 \end{aligned}$$

که شبیه به محاسبه‌های انجام شده بر اساس تحلیل‌های جهان-سطح است که در منبع [۱۲] آمده است. این عبارت ساختار مشابهی با نتیجه‌های کلاسیکی دارد که با رابطه‌ی لنارد در الکتروپدینامیک کلاسیکی داده می‌شود [۲۶]، که در بخش هفتم به حالت N=4 نظریه‌ی ابرتقارن یانگ-میلز گسترش می‌یابد. برای دومین سهم از توان تابشی از $\varepsilon_{rad}^{(2)}$ ، به دست می‌آید که :

$$\begin{aligned}
 P_{rad}^{(2)} &= \int d\Omega (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q) R^2 \varepsilon_{rad}^{(2)} = \\
 &= \int d\Omega (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q) R^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{24\pi^2} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q|^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)} \frac{\partial}{\partial t_r} \left[\frac{\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^3} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}_q}{\gamma_q^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^4} \right] \right) = \\
 &= \int d\Omega \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{24\pi^2} \frac{\partial}{\partial t_r} \left[\frac{\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^3} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}_q}{\gamma_q^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^4} \right] \right) \rightarrow \begin{cases} \int d\Omega \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^3} = 4\pi\gamma^4 \\ \int d\Omega \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}_q}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})^4} = \frac{16\pi}{3} \gamma^6 \vec{v} \cdot \vec{a} \end{cases} \\
 P_{rad}^{(2)} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{24\pi^2} \frac{\partial}{\partial t_r} \left(4\pi\gamma_q^4 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q - \frac{16\pi\gamma_q^6 \vec{v} \cdot \vec{a}}{3\gamma_q^2} \right) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{18\pi} \frac{\partial}{\partial t_r} \gamma_q^4 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q.
 \end{aligned}$$

(۶۷-۳)

این رابطه از آن جا که شامل مشتقی بر حسب زمان گسیل است، عامل ایجاد نتیجه غیرمنتظره‌ای است که در بخش‌های بعد توضیح داده می‌شود؛ جمله‌هایی با ساختار مشابه در [۱۳ و ۱۴]، به عنوان سهم انرژی ذاتی کوآرک و نه تابش تفسیر می‌شوند. نتیجه نهایی برای توان تابشی از ترکیب دو

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{rad}^{(1)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \gamma_q^6 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \\ P_{rad}^{(2)} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{18\pi} \frac{\partial}{\partial t_r} \gamma_q^4 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q \end{array} \right. \Rightarrow P_{rad} = P_{rad}^{(1)} + P_{rad}^{(2)} \quad (68-3)$$

رابطه‌ی (۶۶-۳) و (۶۷-۳) به دست می‌آید :

نتیجه‌ی مهم این است که این نتیجه‌ها مربوط به مسیر محدود و مقید کوآرک هستند، یا به عبارت دیگر رابطه‌های به دست آمده برای توان تابشی تنها زمانی معتبر هستند که فاصله‌ی ثابت r_0 وجود داشته باشد که در آن $r_q(t_q) \leq r_0$ برای تمام t_q برقرار باشد. در نتیجه در گام‌های بعدی محاسبه، می‌توان از تقریب زیر استفاده کرد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}_q \cong \vec{r} \\ t - t_r = \vec{r} - \vec{r}_q \cong \vec{r} \end{array} \right. \Rightarrow t_r \cong t - \vec{r} \quad (69-3)$$

در انتهای بخش ششم، به نمونه‌ای از حرکت نامقید اشاره می‌شود.

۳-۶- در نظر گرفتن حرکت‌های متفاوت برای کوآرک شتابدار

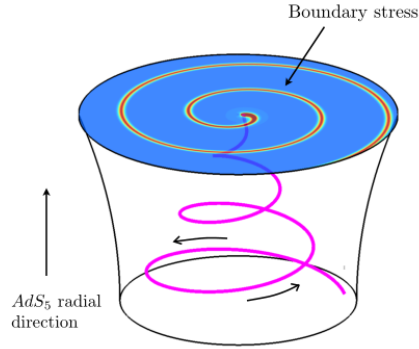
اکنون نتیجه‌های کلی به دست آمده را برای چگالی انرژی تابشی و توان تابشی را برای چند حرکت خاص کوآرک به کار می‌بریم:

۳-۶-۱- چرخش یکنواخت

نتیجه‌های این حرکت در منبع [۲] به دست آمد. در این قسمت، از محاسبه‌های انجام شده در این تحقیق استفاده شده و حاصل مشابه با [۲] به دست می‌آید. در شکل (۳-۱) نمایی از این حرکت آمده است.

با استفاده از مختصات کروی $\vec{r} = (r, \theta, \phi)$ و پارامتریابی حرکت مرزی کوآرک، داده‌های این

نمونه از حرکت عبارتند از:



شکل ۳-۱- نمونه ی حرکت چرخش یکنواخت [۲].

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_q(t_r) = (R_0, \frac{\pi}{2}, \omega t_r), \quad v = \omega R_0, \quad a = \omega^2 R_0 \\ \vec{n} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}, \quad \vec{r}_q = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} = R \cos \omega t_r \hat{i} + R \sin \omega t_r \hat{j} \\ \vec{v}_q = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = -R\omega \sin \omega t_r \hat{i} + R\omega \cos \omega t_r \hat{j} = -v \sin \omega t_r \hat{i} + v \cos \omega t_r \hat{j}, \quad \vec{a}_q = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \\ \vec{n} \cdot \vec{v}_q = -v \sin \theta \cos \phi \sin \omega t_r + v \sin \theta \sin \phi \cos \omega t_r = v \sin \theta \{ \sin \phi \cos \omega t_r - \cos \phi \sin \omega t_r \} \rightarrow \\ \vec{n} \cdot \vec{v}_q = v \sin \theta \sin(\phi - \omega t_r) \\ \xi = 1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q = 1 - v \sin \theta \sin(\phi - \omega t_r) \\ \vec{n} \cdot \vec{a}_q = -R\omega^2 \sin \theta \cos \phi \cos \omega t_r - R\omega^2 \sin \theta \sin \phi \sin \omega t_r = a \sin \theta \{ \cos \phi \cos \omega t_r + \sin \phi \sin \omega t_r \} \rightarrow \\ \vec{n} \cdot \vec{a}_q = a \sin \theta \cos(\phi - \omega t_r) \end{array} \right.$$

(۷۰-۳)

سهام‌های مربوط به چگالی انرژی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{E}_{rad}^{(1)}(t, \vec{r}) = \frac{\sqrt{\lambda} \gamma_q^2 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2]}{8\pi^2 R^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^4} \xrightarrow{\vec{v}_q \times \vec{a}_q = |\vec{v}_q| |\vec{a}_q| \sin \frac{\pi}{2} = v_q a_q, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)| \cong r} \\ \mathcal{E}_{rad}^{(1)} = \frac{\sqrt{\lambda} \gamma_q^2 [a_q^2 - (v_q a_q)^2]}{8\pi^2 r^2 \xi^4} = \frac{\sqrt{\lambda} \gamma_q^2 [a_q^2 (1 - v_q^2)]}{8\pi^2 r^2 \xi^4} = \frac{\sqrt{\lambda} \gamma_q^2 [a_q^2 (\gamma_q^{-2})]}{8\pi^2 r^2 \xi^4} = \frac{\sqrt{\lambda} a_q^2}{8\pi^2 r^2 \xi^4},$$

(۷۱-۳)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{rad}^{(2)}(t, \vec{r}) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{24\pi^2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)} \frac{\partial}{\partial t_r} \left[\frac{\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^3} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}_q}{\gamma_q^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^4} \right] \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{a}_q = -R\omega^2 \sin \theta \cos(\phi - \omega t_r) \end{cases} \\ \mathcal{E}_{rad}^{(2)} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{24\pi^2 r^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)} \frac{\partial}{\partial t_r} \left(-\frac{R\omega^2 \sin \theta \cos(\phi - \omega t_r)}{\gamma_q^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^4} \right) = \frac{\sqrt{\lambda} \omega^2}{24\pi^2 r^2} \left(\frac{4 - 7\xi - 4v_q^2 \sin^2 \theta + 3\xi^2}{\gamma_q^2 \xi^6} \right), \end{aligned} \quad (72-3)$$

همان گونه که در محاسبه نشان داده شد، در این نمونه حرکت بردار سرعت و بردار شتاب حرکت کوآرک بر هم عمود بوده و ضرب داخلی آن‌ها برابر با صفر خواهد شد. با جمع دو رابطه ی (71-3) و (72-3)، در نهایت چگالی انرژی تابشی مربوط به چرخش کوآرک عبارت است از :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{rad} &= \mathcal{E}_{rad}^{(1)} + \mathcal{E}_{rad}^{(2)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi^2} \frac{a_q^2}{r^2 \xi^4} + \frac{\sqrt{\lambda} \omega^2}{24\pi^2 r^2} \left(\frac{4 - 7\xi - 4v_q^2 \sin^2 \theta + 3\xi^2}{\gamma_q^2 \xi^6} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{24\pi^2} \left(\frac{3a_q^2}{r^2 \xi^4} + \frac{\omega^2}{r^2} \left(\frac{4 - 7\xi - 4v_q^2 \sin^2 \theta + 3\xi^2}{\gamma_q^2 \xi^6} \right) \right) = \frac{\sqrt{\lambda}}{24\pi^2} \left(\frac{3R^2 \omega^4 \gamma_q^2 \xi^2}{r^2 \gamma_q^2 \xi^6} + \frac{\omega^2}{r^2} \left(\frac{4 - 7\xi - 4v_q^2 \sin^2 \theta + 3\xi^2}{\gamma_q^2 \xi^6} \right) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda} \omega^2}{24\pi^2 r^2} \left(\frac{3v^2 \gamma_q^2 \xi^2}{\gamma_q^2 \xi^6} + \frac{4 - 7\xi - 4v_q^2 \sin^2 \theta + 3\xi^2}{\gamma_q^2 \xi^6} \right) = \frac{\sqrt{\lambda} \omega^2}{24\pi^2 r^2} \left(\frac{3\xi^2 [v^2 \gamma_q^2 + 4 - 7\xi - 4v_q^2 \sin^2 \theta + 1]}{\gamma_q^2 \xi^6} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda} \omega^2}{24\pi^2 r^2} \left(\frac{3\xi^2 [(v^2 \gamma_q^2 + 1) + 4 - 7\xi - 4v_q^2 \sin^2 \theta]}{\gamma_q^2 \xi^6} \right) = \frac{\sqrt{\lambda} \omega^2}{24\pi^2 r^2} \left(\frac{3\xi^2 [(\gamma_q^2 - 1) + 1] + 4 - 7\xi - 4v_q^2 \sin^2 \theta}{\gamma_q^2 \xi^6} \right) \rightarrow \\ \mathcal{E}_{rad} &= \frac{\sqrt{\lambda} \omega^2}{24\pi^2 r^2} \left(\frac{4 - 7\xi - 4v_q^2 \sin^2 \theta + 3\gamma_q^2 \xi^2}{\gamma_q^2 \xi^6} \right). \end{aligned} \quad (73-3)$$

که در واقع مشابه با نتیجه ی به دست آمده در [2] می باشد.

چگالی انرژی به دست آمده متناسب با $\frac{1}{\xi^6}$ است و در حد فرا نسبیتی $1, \gamma_q \gg 1, v_q \cong 1$ دارای یک قله در کمترین مقدار ξ است که توسط رابطه ی زیر تعریف می شود و همان گونه که در محاسبه ی زیر نشان داده شده، این شرط یک مسیر مارپیچ را در صفحه ی $\theta = \frac{\pi}{2}$ توصیف می کند که در زاویه سمتی φ واقع شده است:

$$\begin{cases} 1 - v \sin \theta \sin(\phi - \omega t_r) = \xi \xrightarrow{v \approx 1, \gamma < 1 \Rightarrow \xi_{\min}} \sin \theta \sin(\phi - \omega t_r) = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2}, t_r \cong t - r \rightarrow \phi(t, r) \cong \frac{\pi}{2} + \omega(t - r) \end{cases} \quad (74-3)$$

با استفاده از رابطه ی زیر

$$1 - v \cos \alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta} = 1 - v \sin \theta \cong \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \alpha^2 \right) \quad (75-3)$$

واضح است که انرژی با زاویه ی کوچک $\alpha \sim \frac{1}{\gamma}$ حول $\alpha = 0$ یا $\theta = \frac{\pi}{2}$ جایگزیده است که این زاویه به واسطه ی خیز لورنتس به وجود می آید که برای رابطه های (3-59) و (3-60) بحث شد.

به علاوه، با استفاده از رابطه ی (3-73)، می توان بررسی کرد که مسیر ماریپیچی یک پهنای شعاعی

$$\text{کوچک به اندازه ی } \Delta r \sim \frac{R_0}{\gamma^3} \text{ دارد [2]، که مشابه با مساله ی کلاسیکی متناظر با آن است [26].}$$

همان گونه که در مقدمه توضیح داده شد، این ویژگی یک نتیجه ی غیرمنتظره در نظریه ی کوانتومی با ثابت جفت شدگی قوی است که در آن یک توزیع گسترده ی انرژی به واسطه ی نوسان های کوانتومی انتظار می رود. در بخش چهارم توضیح داده شد که این نتیجه از آن جا ناشی می شود که تمام اثرهای فضای گرانشی از انتهای ریسمان در نزدیک و یا روی مرز ناشی می شود.

اکنون توان تابشی را بر حسب زمان حرکت خود کوآرک محاسبه می کنیم. در نتیجه سهم های

توان تابشی عبارتند از:

$$\begin{cases} P_{rad}^{(1)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \gamma_q^6 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \gamma_q^6 [a_q^2 (1 - v_q^2)] = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \gamma_q^6 [a_q^2 (\gamma_q^{-2})] = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \gamma_q^4 a_q^2 \\ P_{rad}^{(2)} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{18\pi} \frac{\partial}{\partial t_r} \gamma_q^4 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q \xrightarrow{\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q = 0} P_{rad}^{(2)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{rad} = P_{rad}^{(1)} + P_{rad}^{(2)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \gamma_q^4 a_q^2 + 0 = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \gamma_q^4 a_q^2. \quad (76-3)$$

این نتیجه با روابط مربوط به منبع [2] و همچنین با نتیجه های تحلیلی جهان - سطح [12] نیز

سازگار است.

۳-۶-۲- حرکت دایروی غیر یکنواخت

می توان نتیجه کلی را به هر حرکت دایروی دلخواهی بسط داد که برای دقت بیشتر روی حرکت خاص زیر تمرکز می شود که در آن سرعت زاویه ای، که اندازه ی آن به سرعت نور در زمان های بزرگ نزدیک است، و شتاب به صورت زیر معرفی می شوند. قابل توجه است که در این نمونه حرکت، بردارهای سرعت و شتاب بر هم عمود نیستند :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_q(t_r) = \left(R_0, \frac{\pi}{2}, \phi_q(t_r) \right), \quad \phi_q(t_r) = \frac{\sqrt{t_r^2 + b^2}}{R_0}, \quad \vec{v}_q(t_r) = \frac{t_r}{\sqrt{t_r^2 + b^2}} \hat{e}_\phi \\ \vec{a}_q(t_r) = -\frac{1}{R_0} \frac{t_r^2}{t_r^2 + b^2} \hat{e}_r + \frac{b^2}{(t_r^2 + b^2)^{3/2}} \hat{e}_\phi, \quad \gamma_q = \frac{1}{\sqrt{1 - v_q^2}} = \frac{\sqrt{t_r^2 + b^2}}{b} \end{array} \right. \quad (۷۷-۳)$$

که در این حرکت، به طور مستقیم توان تابشی محاسبه می شود.

برای نمونه حرکت مد نظر، سهم های توان تابشی به این صورت به دست می آیند :

$$P_{rad}^{(1)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \gamma_q^6 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_q^2 = \left(-\frac{1}{R_0} \frac{t_r^2}{t_r^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{b^2}{(t_r^2 + b^2)^{3/2}} \right)^2 = \frac{t_r^4(t_r^2 + b^2) + R_0^2 b^4}{R_0^2(t_r^2 + b^2)^3} \\ (\vec{v}_q \times \vec{a}_q) = \begin{pmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ 0 & 0 & \frac{t_r}{\sqrt{t_r^2 + b^2}} \\ -\frac{1}{R_0} \frac{t_r^2}{t_r^2 + b^2} & 0 & \frac{b^2}{(t_r^2 + b^2)^{3/2}} \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{R_0} \frac{t_r^3}{(t_r^2 + b^2)^{3/2}} \hat{e}_\theta \right) \rightarrow \\ (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2 = \left(\frac{1}{R_0^2} \frac{t_r^6}{(t_r^2 + b^2)^3} \right) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} P_{rad}^{(1)} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left(\frac{\sqrt{t_r^2 + b^2}}{b} \right)^6 \left[\frac{t_r^4(t_r^2 + b^2) + R_0^2 b^4}{R_0^2(t_r^2 + b^2)^3} - \frac{1}{R_0^2} \frac{t_r^6}{(t_r^2 + b^2)^3} \right] = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left(\frac{\sqrt{t_r^2 + b^2}}{b} \right)^6 \left[\frac{t_r^4(t_r^2 + b^2) + R_0^2 b^4 - t_r^6}{R_0^2(t_r^2 + b^2)^3} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left(\frac{\sqrt{t_r^2 + b^2}}{b} \right)^6 \left[\frac{t_r^4(t_r^2 + b^2 - t_r^2) + R_0^2 b^4}{R_0^2(t_r^2 + b^2)^3} \right] = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{(t_r^2 + b^2)^3}{b^6} \left[\frac{b^2(t_r^4 + R_0^2 b^2)}{R_0^2(t_r^2 + b^2)^3} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{(t_r^2 + b^2)^3}{(t_r^2 + b^2)^3} \left[\frac{b^2(t_r^4 + R_0^2 b^2)}{R_0^2 b^6} \right] = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{t_r^4 + R_0^2 b^2}{b^4 R_0^2}, \end{aligned}$$

$$P_{rad}^{(2)} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{18\pi} \frac{\partial}{\partial t_r} \gamma_q^4 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q \xrightarrow{\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q \neq 0, \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q = \frac{t_r b^2}{(t_r^2 + b^2)^2}}$$

$$P_{rad}^{(2)} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{18\pi} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{(t_r^2 + b^2)^2}{b^4} \times \frac{t_r b^2}{(t_r^2 + b^2)^2} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{18\pi} \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{t_r}{b^2} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{18\pi} \frac{1}{b^2},$$

$$\Rightarrow P_{rad} = P_{rad}^{(1)} + P_{rad}^{(2)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{t_r^4 + R_0^2 b^2}{b^4 R_0^2} - \frac{\sqrt{\lambda}}{18\pi} \frac{1}{b^2}. \quad (78-3)$$

که در حد فرا نسبیتی، و همچنین برای زمان‌های به اندازه‌ی کافی بزرگ در مساله‌هایی که سرعت با زمان به واسطه‌ی شتابش افزایش می‌یابد، سهم اولین جمله‌ی توان تابشی بر سهم دوم غالب می‌شود.

این مثال، چند دیدگاه فیزیکی در پی دارد :

اولین سهم از توان تابشی شامل مولفه‌ای از شتاب است که بر سرعت عمود می‌شود [مولفه شعاعی در رابطه‌ی (3-77)]، به عبارت دقیق‌تر؛ جمله‌ی a_q^2 ، هر دو مولفه‌ی شعاعی و سمتی را دریافت می‌کند، اما سهم غالب در زمان‌های بزرگ مانند $t_r^2 \gg bR_0$ توسط جمله‌ی متناسب با t_r^4 ، گویای این نکته است که اولین سهم توسط جمله‌ی شعاعی ایجاد می‌شود. در حالی که دومین سهم از توان تابشی شامل مولفه‌ی طولی یا همان مماسی در رابطه‌ی (3-77)، نمی‌شود. بنابر این، یک نتیجه‌ی مشابه با تابش کلاسیکی به دست می‌آید [26].

چرخش در تابش تولید شده نسبت به شتاب مماسی، بسیار موثرتر است، زیرا سرعت کوارک هم‌زمان با چرخش ذره در حال تغییر است. حتی اگر بزرگی تغییر این سرعت، بسیار کوچک و یا صفر (مانند چرخش یکنواخت) باشد.

۳-۶-۳- حرکت با شتاب خطی یکنواخت

ذره‌ای کلاسیکی انتخاب می‌شود که در مقابل نیروی ثابتی قرار گرفته است و از مسیری پیروی می‌کند که دارای خواص زیر است :

$$x_q(t_r) = \sqrt{t_r^2 + b^2}, \quad \vec{F} = F\hat{e}_1, \quad x \equiv x^1, \quad b = m/F \quad (79-3)$$

که شرط اولیه در $t=0$ انتخاب می‌شود. این حرکت نمونه‌ای از حرکت نامقید است زیرا مسیر در نهایت، کره‌ای در بی‌نهایت را طی می‌کند که از آن در تعریف توان تابشی استفاده می‌شود. در این حالت، نمی‌توان برای توان تابشی نتیجه‌های قبلی را به دست آورد. با این وجود ابتدا همین نتیجه‌ها در نظر گرفته می‌شوند تا داده‌های به دست آمده بررسی شوند. با استفاده از رابطه‌های

$$\left\{ \begin{aligned} v_q &= \frac{t_r}{\sqrt{t_r^2 + b^2}}, \quad \gamma_q = \frac{\sqrt{t_r^2 + b^2}}{b}, \quad a_q = \frac{b^2}{(t_r^2 + b^2)^{3/2}} \\ \gamma_q^4 v_q a_q &= \left(\frac{(t_r^2 + b^2)^2}{b^4} \right) \left(\frac{t_r}{\sqrt{t_r^2 + b^2}} \right) \left(\frac{b^2}{(t_r^2 + b^2)\sqrt{t_r^2 + b^2}} \right) = t_r / b^2 \end{aligned} \right. \quad (۸۰-۳)$$

می‌توان دو سهم مربوط به توان تابشی (۳-۶۶) و (۳-۶۷) را محاسبه کرد :

$$\left\{ \begin{aligned} P_{rad}^{(1)} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \gamma_q^6 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \xrightarrow{\vec{v}_q \times \vec{a}_q = 0} P_{rad}^{(1)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \gamma_q^6 a_q^2 = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left(\frac{(t_r^2 + b^2)^3}{b^6} \right) \left(\frac{b^4}{(t_r^2 + b^2)^3} \right) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi b^2} \\ P_{rad}^{(2)} &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{18\pi} \frac{\partial}{\partial t_r} \gamma_q^4 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q = -\frac{\sqrt{\lambda}}{18\pi} \frac{\partial}{\partial t_r} \left(\frac{(t_r^2 + b^2)^2}{b^4} \right) \left(\frac{t_r}{\sqrt{t_r^2 + b^2}} \right) \left(\frac{b^2}{(t_r^2 + b^2)\sqrt{t_r^2 + b^2}} \right) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{18\pi b^2} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow P_{rad} = P_{rad}^{(1)} + P_{rad}^{(2)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi b^2} - \frac{\sqrt{\lambda}}{18\pi b^2}. \quad (۸۱-۳)$$

که بر خلاف انتظار اولیه و با محاسبه‌های انجام شده در منبع‌های [۱۴ و ۱۳] در تناقض است که از تحلیل‌های جهان - صفحه استنباط می‌شود. البته این محاسبه نتیجه‌ای مشابه با $P_{rad}^{(1)}$ در رابطه‌ی بالا می‌دهد که با پیش بینی منبع [۱۲] یکسان است [زیرا در این تحلیل‌ها، توان کل به $P_{rad}^{(1)}$ کاهش می‌یابد].

بار دیگر محاسبه با داده‌های اولیه انجام می‌شود:

به این منظور، فرض می‌شود که کوآرک با شتاب یکنواخت، تنها برای یک دوره‌ی محدود زمانی t_0 ، در حال حرکت باشد و انرژی تابشی در فاصله‌ی $r \ll t_0$ اندازه‌گیری می‌شود. با انجام این عمل، حرکت به نوع مقید محدود می‌شود.

به عنوان مثال خاص، حرکت یک بعدی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$x_q(t_r) = \Theta(-t_r)b + \Theta(t_r)\Theta(t_0 - t_r)\sqrt{t_r^2 + b^2} + \Theta(t_r - t_0)\frac{t_0 t_r + b^2}{\sqrt{t_0^2 + b^2}} \quad (۸۲-۳)$$

که در آن t_0 می‌تواند از b بسیار بزرگتر در نظر گرفته شود که کوآرک را فرا نسبی می‌کند.

آخرین جمله در رابطه‌ی (۸۲-۳)، یک حرکت با سرعت ثابت را توصیف می‌کند که سرعت آن در $t_r = t_0$ محاسبه می‌شود.

در نتیجه، انرژی تابشی کل با انتگرال‌گیری روی t_r از رابطه‌ی (۶۶-۳)، به دست می‌آید. معادله‌ی (۶۷-۳) سهمی در نتیجه‌ی نهایی ندارد زیرا شامل مشتقی بر حسب t_r می‌شود و شتاب بیرون از بازه‌ی $[0, t_0]$ حذف می‌شود. در نهایت رابطه‌ی توان تابشی کل به این عبارت است از:

$$E_{rad} = \int dt_r P_{rad}^{(1)} \xrightarrow{t_r=t_0, \vec{v}_q \times \vec{a}_q=0} E_{rad} = \int dt_r \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi b^2} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{t_0}{b^2} \quad (۸۳-۳)$$

که در توافق با [۸ و ۱۲] است.

این محاسبه، ویژگی غیرمنتظره‌ی دیگری از $P_{rad}^{(2)}$ را نشان می‌دهد که مفهوم فیزیکی تابش را پیچیده می‌کند. این جمله، هیچ سهمی در انرژی تابشی برای هر حرکت دلخواهی، تولید نمی‌کند که در آن شتاب روی یک بازه‌ی محدود و همچنین هر حرکت دوره‌ای، روی یک دوره یا مضرب صحیح از آن؛ غیر صفر باشد.

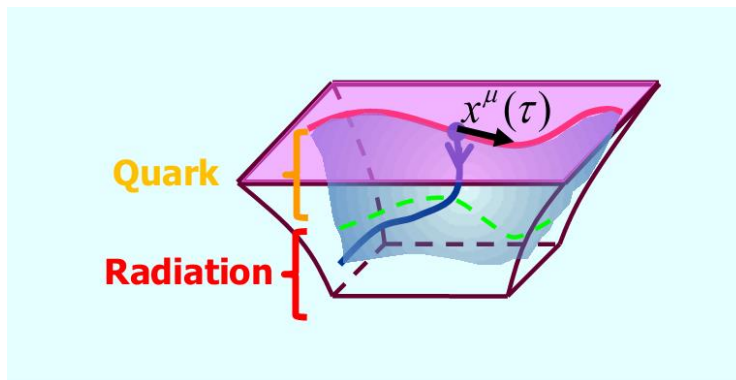
همان‌گونه که در بخش پنجم برای دومین سهم از توان تابشی گفته شد، یک جمله با ساختار مشابه در محاسبه‌های جهان - سطح برای انرژی کوآرک در حال حرکت پدید می‌آید که با انرژی کل حمل شده توسط ریسمان در [۱۳ و ۱۴] یکسان است.

بر اساس منبع [۱۴]، برای انرژی کوارک می‌توان نوشت:

$$E_q(t) = m_q \gamma_q(t) - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \gamma_q^4 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q + \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt_q \gamma_q^6 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \quad (۸۴-۳)$$

که دو جمله‌ی اول به عنوان انرژی ذاتی (جنبشی) کوارک تفسیر می‌شود [۱۴ و ۱۳]. در حالی که سومین جمله که انتگرال زمانی $P_{rad}^{(1)}$ در رابطه‌ی (۳-۶۶) است، به عنوان تابش معرفی می‌شود. دومین جمله در رابطه‌ی (۳-۸۴)، ساختار مشابه با سهم انرژی تابشی دارد که از $P_{rad}^{(2)}$ در رابطه‌ی (۳-۶۷) به دست می‌آید که تنها اختلافشان در ضریب عددی است.

دلیل این که چرا این جمله در بخش پنجم، به عنوان تابش مطرح شد، این است که از قسمتی از چگالی انرژی ناشی می‌شود که مانند $\frac{1}{R^2}$ در فاصله‌های دور R ، کاهش می‌یابد. این نتیجه، امکانی جالب توجه را پیشنهاد می‌دهد که یک قسمت از انرژی ذاتی کوارک، یک دنباله^۱ در فاصله‌های دور دارد که نمی‌توان آن را از تابش تشخیص داد [۱]. این تفسیر در شکل (۳-۲) نشان داده شده است.



شکل ۳-۲- تقسیم انرژی کوارک به دو قسمت انرژی ذاتی و انرژی تابشی آن.

۳-۷- مقایسه با نتیجه‌های کلاسیکی

در بخش‌های قبل، چند شباهت بین پیشگویی‌های تقریب ابرگرانشی برای حد ثابت جفت شدگی قوی، و نتیجه‌های متناظر در تقریب کلاسیکی بیان شد.

در این بخش، کمی روشن‌تر مساله کلاسیکی متناظر حل می‌شود که تابش توسط یک کوآرک سنگین که در حرکتی دلخواه در نظریه $N=4$ ابرتقارن یانگ-میلز با ثابت جفت شدگی ضعیف است. نتیجه‌ی کلی به دست آمده به غیر از نمونه‌ی خاص حرکت دایروی در منبع [۲]، در جای دیگری نیامده است.

ساختار کلی، نظریه‌ی کلاسیکی کوآرک آزمون جرم داری را توصیف می‌کند که در خلاء $N=4$ نظریه‌ی ابرتقارن یانگ-میلز در حال انتشار است که این مساله در منبع‌های [۲ و ۲۷] معرفی می‌شوند.

همان‌گونه که در آنجا توضیح داده شد؛ کوآرک سنگین، هم میدان‌های برداری و هم میدان‌های اسکالر را تابش می‌کند و در محدودیت‌های مد نظر به عبارتی در جفت شدگی ضعیف دلخواه و جرم بسیار بالای کوآرک، این تابش توسط معادله‌های خطی جداگانه‌ای توصیف می‌شود که در این نظریه با نام معادله‌های ماکسول شناخته می‌شوند.

این معادله‌ها به راه‌های استاندارد حل شده و نتایج زیر را می‌دهد:

$$A^\mu = \frac{e_{eff}}{4\pi(1-\vec{n}\cdot\vec{v}_q)R} (1, \vec{v}_q) \quad , \quad \chi = \frac{e_{eff}}{4\pi\gamma_q(1-\vec{n}\cdot\vec{v}_q)R} \quad (۳-۸۵)$$

که A^μ میدان برداری و χ میدان اسکالر می‌باشند و $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q$ است و \mathbf{n} یکه در راستای \mathbf{R} است و مقدار ذاتی درجه‌ی آزادی رنگ برای میدان تابش شده با $\frac{\lambda}{2} \equiv e_{eff}^2$ دارای ضریب می‌شود.

همانند قبل، جمله‌های بالا در زمان تاخیری t_r محاسبه می‌شوند که جواب رابطه‌ی (۳-۳۷) می‌باشد.

به طور کلی چگالی انرژی با روابط زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{E}_{vector} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2) \quad , \quad \mathcal{E}_{scalar} = \frac{1}{2}[(\partial_t \chi)^2 + (\nabla \chi)^2]. \quad (۳-۸۶)$$

که B بردار مغناطیسی است. از آنجا که انرژی تابشی مد نظر می‌باشد، تنها سهم‌هایی از انرژی الکتریکی که مانند $\frac{1}{R}$ کاهش می‌یابند و از طرفی دیگر مشتق‌های زمانی میدان اسکالر، باقی می‌مانند که نتیجه زیر را می‌دهند:

$$E_{rad} = \frac{e_{eff}}{4\pi R} \left[-\frac{\vec{a}_q}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^2} + \frac{(\vec{n} \cdot \vec{a}_q)(\vec{n} - \vec{v}_q)}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^3} \right],$$

$$(\partial_t \chi)_{rad} = \frac{e_{eff}}{4\pi R} \left[-\frac{\gamma_q \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^2} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}_q}{\gamma_q (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^3} \right]. \quad (۳-۸۷)$$

همچنین برای تابش روابط زیر را داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} |B_{rad}| = |E_{rad}| \\ |(\partial_t \chi)_{rad}| = |(\nabla \chi)_{rad}| \end{array} \right. \xrightarrow{e_{eff}^2 = \frac{\lambda}{2}} \quad (۳-۸۸)$$

در نتیجه:

$$\mathcal{E}_{vector} = \frac{\lambda}{32\pi^2 R^2} \left[\frac{\vec{a}_q^2}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^4} + 2 \frac{(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)(\vec{n} \cdot \vec{a}_q)}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^5} - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{a}_q)^2}{\gamma_q^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^6} \right],$$

$$\mathcal{E}_{scalar} = \frac{\lambda}{32\pi^2 R^2} \left[\frac{\gamma_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)^2}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^4} - 2 \frac{(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)(\vec{n} \cdot \vec{a}_q)}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^5} + \frac{(\vec{n} \cdot \vec{a}_q)^2}{\gamma_q^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^6} \right], \quad (۳-۸۹)$$

و با جمع دو سهم انرژی برداری و اسکالر بالا، انرژی کل حاصل می‌شود و واضح است که جمله‌های وابسته به $\vec{n} \cdot \vec{a}_q$ حذف می‌شوند. البته این حذف در منبع [۲] برای نمونه‌ی خاص حرکت دایروی انجام نشد زیرا برای رابطه‌های انرژی برداری و اسکالر، به ترتیب ضرایب $1/2$ و 2 را به کار نبرده بودند [۱]. در نتیجه:

$$\Rightarrow \varepsilon_{rad}^{class} = \varepsilon_{vector} + \varepsilon_{scalar} = \frac{\lambda}{32\pi^2} \frac{\gamma_q^2 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2]}{(\vec{r} - \vec{r}_q)^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}_q)^4}. \quad (90-3)$$

نکته‌ی جالب توجه این جاست که اگر جاگذاری $\lambda \rightarrow 4\sqrt{\lambda}$ انجام شود، این نتیجه به طور دقیق مشابه با رابطه‌ی (۵۹-۳) برای چگالی انرژی تابشی در جفت شدگی قوی است.

با فرض $r \gg r_q$ ، و زمان تاخیری که از $t_r \cong t - r$ به دست می‌آید، تنها وابستگی زاویه‌ای، یک عامل خیز $(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_q)^4$ در مخرج است. به این معنا که در حد غیرنسبیتی، معادله‌ی (۹۰-۳) همسانگرد است و به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$\varepsilon_{rad}^{class} \cong \frac{\lambda}{32\pi^2} \frac{\vec{a}_q^2}{r^2} \quad (91-3)$$

و این خاصیتی است که در QED تفسیری ندارد، یعنی جایی که تنها میدان برداری در حال شتاب است و انرژی تابشی برداری در رابطه‌ی (۸۹-۳)، شامل جمله‌های ناهمسانگرد نیز می‌شود.

سرانجام سهم‌های برداری و اسکالر مربوط به توان، توسط روش‌های انتگرال‌گیری محاسبه می‌شود [۱]:

$$P_{vector} = \frac{\lambda}{12\pi} \gamma_q^6 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2], \quad P_{scalar} = \frac{\lambda}{24\pi} \gamma_q^6 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \quad (92-3)$$

که توان کل زیر را می‌دهد:

$$P_{rad}^{class} = \frac{\lambda}{8\pi} \gamma_q^6 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \quad (93-3)$$

در این محاسبه نیز اگر $\lambda \rightarrow 4\sqrt{\lambda}$ جاگذاری شود، نتیجه‌ی ابرگرانشی متناظر در رابطه‌ی (۶۶-۳) حاصل می‌شود.

۳-۸- نتیجه گیری

یکی از نتیجه‌های مهم این تحقیق، فرضی است که برای حرکت نسبیتی دلخواه برای یک کوآرک سنگین بیان می‌شود و این است که در تقریب ابرگرانشی متناظر با نظریه‌ی ریسمان، تنها نقطه‌ی انتهایی ریسمان وابسته به کوآرک در مرز فضای گرانشی در تابش انرژی، مشارکت اصلی را بر عهده دارد.

از آن جا که این تابش با سرعت نور منتشر می‌شود، در نتیجه توزیع فضا- زمانی انرژی بسیار مشابه با تابش کلاسیکی متناظر است که در آن هیچ‌گونه نشانه‌ای از گستردگی کوانتومی دیده نمی‌شود. در نتیجه توزیعی پدید می‌آید که با مکانیک کوانتومی سازگار نیست و بنابراین اعتبار تقریب ابرگرانشی را به عنوان حد درستی از جفت شدگی قوی، کاهش می‌دهد. که اگر تصحیح ویژه‌ی نوسان‌های کوانتومی ریسمان وارد محاسبه شود، مشکل پیش آمده حل می‌شود.

دو ویژگی غیرمنتظره‌ی دیگر در استفاده از تقریب ابرگرانشی وجود دارند که در زمینه‌ی فیزیک غیرطبیعی هستند و جدا از فقدان گستردگی کوانتومی، به عنوان ضعف بیشتری از این تقریب به شمار می‌آیند. تمامی بحث‌های به وجود آمده به سهم دوم از چگالی انرژی تابشی، رابطه‌ی (۳-۶۰)، مربوط می‌شوند:

$$1 - \text{ناهمسانگردی چگالی انرژی تابشی در حد غیر نسبیتی } 1 \ll v:$$

همان‌طور که در مقدمه بیان شد برای جفت شدگی قوی، انتظار می‌رود که تابش انرژی، به صورت همسانگرد در فاصله‌های دور از منبع، توزیع شود [۲۸ و ۲۹].

تابش، توسط گسیل کوانتاهای زمان‌گونه که با سرعتی کمتر از سرعت نور در حرکت هستند تولید می‌شود. این بیان از اصل عدم قطعیت پیروی می‌کند که کوانتاهای مجازی Q ، بازه‌ی زمانی کوتاه $\Delta t \sim \frac{\omega}{Q^2}$ دارند که ω انرژی حمل شده توسط کوانتاهاست. پس از گسیل، این دست از ذرات گسیلی به

تابش بیشتری نیاز دارند تا به کوانتاهای نورگونه با سرعت بیشتر از نور، تبدیل شوند. این عمل یک جریان از ذرات گسیلی را تولید می‌کنند که انرژی و تکانه ی اولیه میان آن ها تقسیم می‌شوند. به واسطه ی تعداد زیاد این ذرات، آن‌ها باید یک توزیع همسانگرد را نشان دهند. بنابراین، عجیب است که نتیجه ی به دست آمده در تقریب ابرگرانشی، در حد غیرنسبیتی، ناهمسانگرد باشد. به ویژه در استفاده از ابرتقارن $N=4$ نظریه یانگ-میلز، که در آن برای جفت شدگی قوی، توزیع همسانگرد انرژی منطقی است.

در واقع وقتی $v \ll 1$ ، رابطه های (۳-۵۹) و (۳-۶۰) به معادله های زیر کاهش می‌یابند:

$$\mathcal{E}_{rad}^{(1)} \cong \frac{\sqrt{\lambda} \bar{a}_q^2}{8\pi^2 r^2} \quad (۳-۹۴)$$

که همسانگرد است و مشابه با ساختار (۳-۹۱) است و همچنین:

$$\mathcal{E}_{rad}^{(2)} \cong -\frac{\sqrt{\lambda} \bar{n} \cdot \dot{\bar{a}}_a - [\bar{a}_q^2 - 4(\bar{n} \cdot \bar{a}_q)^2 + \bar{v}_q \cdot \dot{\bar{a}}_a + (\bar{n} \cdot \bar{v}_q)(\bar{n} \cdot \dot{\bar{a}}_a)]}{24\pi^2 r^2} \quad (۳-۹۵)$$

که همسانگرد نیست.

آخرین رابطه ی ناهمسانگرد، در بعضی از نمونه ها مانند چرخش یکنواخت، بر جمله ی اول غالب

می شود. زیرا:

$$a = \omega^2 R_0 = \omega v \rightarrow \dot{a} = \omega^3 R_0 = \omega^2 v \quad (۳-۹۶)$$

و از آن جا که هنگام تغییر جهت، علامت $\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{a}}_q$ در حال نوسان است، چگالی انرژی منفی به دست می‌آید که نتیجه ی غیر منتظره ی دیگری را معرفی می‌کند.

۲- منفی بودن چگالی انرژی:

برای نمونه، چگالی انرژی تابشی در نمونه حرکت چرخش یکنواخت، رابطه ی (۳-۷۳)، در برخی از

ناحیه های فضا- زمان منفی به دست می‌آید. این رفتار، تنها مربوط به سهم دوم تابش یا به عبارتی

رابطه‌ی (۷۲-۳) است که در این ناحیه‌ها منفی می‌شود و از آن‌جا که از نظر اندازه بزرگتر از سهم اول، رابطه‌ی (۷۱-۳) است، در نتیجه به عنوان جمله‌ی غالب عمل می‌کند.

هنگامی که نمونه‌ی نسبیتی مورد توجه قرار گیرد، ناحیه‌هایی با انرژی منفی به نسبت کوچک ایجاد می‌شوند. اما در نمونه‌ی غیر نسبیتی برای تابش، دیده می‌شود که جمله‌ی (۹۵-۳) با نوسان علامتش، در همه جا به غیر از نقطه‌های خاصی که در آن‌ها $n \cdot \dot{a}_q$ حذف می‌شود، بر (۹۴-۳) چیره می‌شود.

سرانجام، نتیجه‌گیری نهایی به این صورت است که پیش‌گویی‌های تقریب ابرگرانشی برای تابش قابل قبول نیست و ویژگی‌های غیرمنطقی ایجاد شده، پس از اضافه کردن نوسان‌های ریسمان تصحیح می‌شوند.

پیوست

❖ محاسبه‌ی مولفه‌های تانسور انرژی – تکانه‌ی ریسمان

❖ محاسبه‌ی ضرایب مربوط به توان‌های درجه اول تا چهارم کمیت Z در انتگرال ϵ_B

پیوست ۱: محاسبه‌ی دقیق مولفه‌های تانسور انرژی-تکانه‌ی ریسمان مربوط به روابط (۳-۲۲) تا

(۳-۲۶).

$$\begin{aligned}
 \tilde{t}_{05} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} (1+z\gamma_q^3(\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)) \left(\left(\bar{v}_q + \frac{\gamma_q z \bar{a}_q}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right) \cdot \left(\frac{-\gamma_q^2 z \bar{a}_q}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right) \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} (1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \left(\left(\frac{-z\gamma_q^2(\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right) + \left(\frac{-\gamma_q^3 z^2 \bar{a}_q^2}{(1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2} \right) \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} (1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \left(\frac{-z\gamma_q^2(\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) - z^2 \gamma_q^5 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2 - z^2 \gamma_q^3 \bar{a}_q^2}{(1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2} \right) = \\
 &\xrightarrow{(\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2 = \bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \left(\frac{-z\gamma_q^2(\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) - z^2 \gamma_q^5 \bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 + z^2 \gamma_q^5 (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2 - z^2 \gamma_q^3 \bar{a}_q^2}{(1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)} \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-z\gamma_q^2(\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) - z^2 \gamma_q^5 \left(\bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2 - \frac{\bar{a}_q^2}{\gamma_q^2} \right) \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-z\gamma_q^2(\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) - z^2 \gamma_q^5 \left(\bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2 - \bar{a}_q^2 (1 - \bar{v}_q^2) \right) \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-z\gamma_q^2(\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) - z^2 \gamma_q^5 \left(\bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2 - \bar{a}_q^2 - \bar{a}_q^2 \bar{v}_q^2 \right) \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-z\gamma_q^2(\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) - z^2 \gamma_q^5 \left[\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2 \right] \right)
 \end{aligned}$$

(۳-۲۲)

$$\begin{aligned}
 \tilde{t}_{0i} &= (-\tilde{t}_{00} \dot{x}_s^i + \tilde{t}_{05} \dot{x}_s^i) = \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(\left[-\left((1+2z\gamma_q^3(\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)) - z^2 \gamma_q^6 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \right) \left(\bar{v}_q^i + \frac{\gamma_q z \bar{a}_q^i}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-z\gamma_q^2(\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) - z^2 \gamma_q^5 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \right] \left(\frac{-\gamma_q^2 z \bar{a}_q^i}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right) \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(\left[-\left((1+2z\gamma_q^3(\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)) \bar{v}_q^i - (z^2 \gamma_q^6 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \bar{v}_q^i) - (1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \frac{\gamma_q z \bar{a}_q^i}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left[-\left[z^2 \gamma_q^6 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \right] \frac{\gamma_q z \bar{a}_q^i}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{z^2 \gamma_q^4 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \bar{a}_q^i}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} + \frac{z^3 \gamma_q^7 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \bar{a}_q^i}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right] \right) \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(\left(-\left((1+2z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \bar{v}_q^i - (z^2 \gamma_q^6 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \bar{v}_q^i) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{\gamma_q z \bar{a}_q^i}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \left(-\left((1+z\gamma_q^3(\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)) - z^2 \gamma_q^6 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \right) + \right) \right) \right) \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-(1+2z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \bar{v}_q^i - (z^2 \gamma_q^6 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]) \bar{v}_q^i + \frac{\gamma_q z \bar{a}_q^i}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} (-1 - z\gamma_q^3 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)) \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-(1+2z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \bar{v}_q^i - (z^2 \gamma_q^6 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]) \bar{v}_q^i - \gamma_q z \bar{a}_q^i \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-\gamma_q z \bar{a}_q^i - (1+2z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \bar{v}_q^i - (z^2 \gamma_q^6 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]) \bar{v}_q^i \right)
\end{aligned}$$

(23-3)

$$\tilde{t}_{i5} = (\tilde{t}_{55} x_s^i - \tilde{t}_{05} \dot{x}_s^i) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(\left(\left[\frac{-1}{\gamma_q^2} + z^2 \gamma_q^4 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \right] \left[\frac{-\gamma_q^2 z \bar{a}_q^i}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right] \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\left[-z\gamma_q^2 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) - z^2 \gamma_q^5 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \right] \left[\bar{v}_q^i + \frac{\gamma_q z \bar{a}_q^i}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right] \right) \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(\frac{z \bar{a}_q^i}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} - \frac{z^3 \gamma_q^6 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} + z\gamma_q^2 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \bar{v}_q^i + \right. \\
&\quad \left. + z^2 \gamma_q^5 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \bar{v}_q^i + \frac{z^2 \gamma_q^3 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \bar{a}_q^i}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} + \frac{z^3 \gamma_q^6 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(\frac{z \bar{a}_q^i + z^2 \gamma_q^3 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \bar{a}_q^i}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} + z\gamma_q^2 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \bar{v}_q^i + z^2 \gamma_q^5 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \bar{v}_q^i \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(\frac{z \bar{a}_q^i [1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q]}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} + z\gamma_q^2 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \bar{v}_q^i + z^2 \gamma_q^5 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \bar{v}_q^i \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(z \bar{a}_q^i + z\gamma_q^2 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \bar{v}_q^i + z^2 \gamma_q^5 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \bar{v}_q^i \right)
\end{aligned}$$

(24-3)

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{55} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} (1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \left(-1 + \left(\bar{v}_q + \frac{\gamma_q z \bar{a}_q}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right)^2 \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} (1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \left(-1 + \bar{v}_q^2 + \frac{\gamma_q^2 z^2 \bar{a}_q^2}{(1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2} + \frac{2\gamma_q z \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q}{1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} (1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \left(\frac{-1(1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2 + \bar{v}_q^2 (1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2 + \gamma_q^2 z^2 \bar{a}_q^2 + 2\gamma_q z \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + 2\gamma_q^4 z^2 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2}{(1+z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(\frac{-1 - z^2 \gamma_q^6 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2 - 2z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + \bar{v}_q^2 + z^2 \gamma_q^6 \bar{v}_q^2 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2 + 2\bar{v}_q^2 z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + \gamma_q^2 z^2 \bar{a}_q^2 + 2\gamma_q z \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q}{+2\gamma_q^4 z^2 (\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2} \right) =
\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2 = \bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-1 - z^2 \gamma_q^6 \bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 + z^2 \gamma_q^6 (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2 - 2z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + \bar{v}_q^2 + z^2 \gamma_q^6 \bar{v}_q^4 \bar{a}_q^2 - z^2 \gamma_q^6 \bar{v}_q^2 (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2\bar{v}_q^2 z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + \gamma_q^2 z^2 \bar{a}_q^2 + 2\gamma_q z \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + 2\gamma_q^4 z^2 \bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 - 2\gamma_q^4 z^2 (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2 \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-1 - z^2 \gamma_q^6 \bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 (1 - \bar{v}_q^2) + z^2 \gamma_q^6 (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2 (1 - \bar{v}_q^2) - 2z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + \bar{v}_q^2 + 2\bar{v}_q^2 z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + \gamma_q^2 z^2 \bar{a}_q^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2\gamma_q z \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + 2\gamma_q^4 z^2 \bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 - 2\gamma_q^4 z^2 (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2 \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-1 - z^2 \gamma_q^4 \bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 + z^2 \gamma_q^4 (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2 - 2z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + \bar{v}_q^2 + 2\bar{v}_q^2 z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + \gamma_q^2 z^2 \bar{a}_q^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2\gamma_q z\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + 2\gamma_q^4 z^2 \bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 - 2\gamma_q^4 z^2 (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2 \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-1 + z^2 \gamma_q^4 \bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 - z^2 \gamma_q^4 (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2 - 2z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + \bar{v}_q^2 + 2\bar{v}_q^2 z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + \gamma_q^2 z^2 \bar{a}_q^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2\gamma_q z\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-(1 - \bar{v}_q^2) + z^2 \gamma_q^4 (\bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2) + \frac{\bar{a}_q^2}{\gamma_q^2} + (-2z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + 2\bar{v}_q^2 z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + 2\gamma_q z\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-(1 - \bar{v}_q^2) + z^2 \gamma_q^4 (\bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2) + \bar{a}_q^2 (1 - \bar{v}_q^2) + (-2z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + 2\bar{v}_q^2 z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + 2\gamma_q z\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(-(1 - \bar{v}_q^2) + z^2 \gamma_q^4 (\bar{v}_q^2 \bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2) + \bar{a}_q^2 - \bar{a}_q^2 \bar{v}_q^2 + (-2z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + 2\bar{v}_q^2 z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q + 2\gamma_q z\bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(\frac{-1}{\gamma_q^2} + z^2 \gamma_q^4 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \right)
\end{aligned}$$

(25-3)

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{ij} &= (\tilde{t}_{00} \dot{x}_s^i \dot{x}_s^j + \tilde{t}_{55} x_s^i x_s^j - \tilde{t}_{05} (\dot{x}_s^i x_s^j + \dot{x}_s^j x_s^i)) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(\left\{ \left[(1 + 2z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) + (z^2 \gamma_q^6 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]) \right] \left[(\bar{v}_q^i + \frac{\gamma_q z \bar{a}_q^i}{1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q}) (\bar{v}_q^j + \frac{\gamma_q z \bar{a}_q^j}{1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q}) \right] \right\} + \right. \\
&\quad \left. \left\{ \left(\frac{-1}{\gamma_q^2} \right) + z^2 \gamma_q^4 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \right\} \left[\left(\frac{-\gamma_q^2 z \bar{a}_q^i}{1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right) \left(\frac{-\gamma_q^2 z \bar{a}_q^j}{1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right) \right] \right\} - \\
&\quad \left\{ \left[(-z\gamma_q^2 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q - z^2 \gamma_q^5 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]) \right] \left[\left(\bar{v}_q^i + \frac{\gamma_q z \bar{a}_q^i}{1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right) \left(\frac{-\gamma_q^2 z \bar{a}_q^j}{1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. \left[(\bar{v}_q^j + \frac{\gamma_q z \bar{a}_q^j}{1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q}) \left(\frac{-\gamma_q^2 z \bar{a}_q^i}{1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} \right) \right] \right\} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(\left\{ \left[(1 + 2z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q) + (z^2 \gamma_q^6 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]) \right] \left[\frac{\bar{v}_q^i \bar{v}_q^j + \frac{\gamma_q z \bar{v}_q^i \bar{a}_q^j}{1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} + \frac{\gamma_q z \bar{v}_q^j \bar{a}_q^i}{1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} + \frac{\gamma_q^2 z^2 \bar{a}_q^i \bar{a}_q^j}{(1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2} \right] \right\} + \right. \\
&\quad \left\{ \left(\frac{-1}{\gamma_q^2} \right) + z^2 \gamma_q^4 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2] \right\} \left[\frac{\gamma_q^4 z^2 \bar{a}_q^i \bar{a}_q^j}{(1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2} \right] \right\} - \\
&\quad \left\{ \left[(-z\gamma_q^2 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q - z^2 \gamma_q^5 [\bar{a}_q^2 - (\bar{v}_q \times \bar{a}_q)^2]) \right] \left[\frac{\gamma_q^2 z \bar{v}_q^i \bar{a}_q^j}{1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} - \frac{\gamma_q^3 z^2 \bar{a}_q^i \bar{a}_q^j}{(1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{\gamma_q^2 z \bar{v}_q^j \bar{a}_q^i}{1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q} - \frac{\gamma_q^3 z^2 \bar{a}_q^j \bar{a}_q^i}{(1 + z\gamma_q^3 \bar{v}_q \cdot \bar{a}_q)^2} \right] \right\} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left[(1+2z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \vec{v}_q^i \vec{v}_q^j + (z^2\gamma_q^6 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \vec{v}_q^i \vec{v}_q^j) + \left(\frac{\gamma_q z \vec{v}_q^i \vec{a}_q^j}{1+z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} + \frac{z^2 \gamma_q^4 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q \vec{v}_q^i \vec{a}_q^j}{1+z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} \right) + \left(\frac{\gamma_q z \vec{v}_q^j \vec{a}_q^i}{1+z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} + \frac{z^2 \gamma_q^4 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q \vec{v}_q^j \vec{a}_q^i}{1+z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} \right) \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left[(1+2z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \vec{v}_q^i \vec{v}_q^j + (z^2\gamma_q^6 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \vec{v}_q^i \vec{v}_q^j) + \left[\frac{\gamma_q z \vec{v}_q^i \vec{a}_q^j (1+z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)}{1+z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q} + \frac{\gamma_q z \vec{v}_q^j \vec{a}_q^i (1+z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)}{(1+z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)} \right] \right] = \\
&= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{z\gamma_q}{L^3} \frac{\partial t_q}{\partial t} \left(z\gamma_q (\vec{v}_q^i \vec{a}_q^j + \vec{v}_q^j \vec{a}_q^i) + (1+2z\gamma_q^3 \vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \vec{v}_q^i \vec{v}_q^j + (z^2\gamma_q^6 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \vec{v}_q^i \vec{v}_q^j) \right)
\end{aligned}$$

(26-3)

پیوست ۲: محاسبه‌ی دقیق ضرایب مربوط به توان‌های درجه اول تا چهارم کمیت Z در انتگرال

.EB

$$B_1(t_q) = \frac{1}{3} \left\{ \begin{aligned} &4\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)(\vec{r} - \vec{r}_q) - 4\gamma_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] - 4[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] + 2\gamma_q^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)(\vec{r} - \vec{r}_q)^2 + \\ &+ 2\gamma_q^4\vec{v}_q^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)(\vec{r} - \vec{r}_q)^2 - 2\gamma_q^2\vec{v}_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] - 6\gamma_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q][(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{a}_q] + \\ &+ 6\gamma_q^2\vec{v}_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] - 6\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)(\vec{r} - \vec{r}_q)^2\vec{v}_q^2 + 6\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)[(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2 \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \begin{aligned} &(-4\gamma_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] - 4[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] - 2\gamma_q^2\vec{v}_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] + 6\gamma_q^2\vec{v}_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q]) + \\ &+ (4\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)(\vec{r} - \vec{r}_q) + 2\gamma_q^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)(\vec{r} - \vec{r}_q)^2 - 4\gamma_q^4\vec{v}_q^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)(\vec{r} - \vec{r}_q)^2) - \\ &- 6\gamma_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q][(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{a}_q] + 6\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)[(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2 \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ -8\vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q) + (6\gamma_q^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)(\vec{r} - \vec{r}_q)^2 - 6\gamma_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q][(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{a}_q] + 6\gamma_q^4(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)[(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2) \right\}$$

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C), \quad A = C = (\vec{r} - \vec{r}_q), \quad B = \vec{v}_q, \quad C = \vec{a}_q \rightarrow$$

$$\rightarrow [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q] \cdot [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{a}_q] = ((\vec{r} - \vec{r}_q)^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)) - ([(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{a}_q][(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q]) \Rightarrow$$

$$[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{a}_q][(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] = ((\vec{r} - \vec{r}_q)^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)) - [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q] \cdot [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{a}_q].$$

$$\Rightarrow B_1(t_q) = \frac{1}{3} \left\{ -8\vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q) + \left(6\gamma_q^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)(\vec{r} - \vec{r}_q)^2 - 6\gamma_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q)^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q] \cdot [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{a}_q]] + \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ -8\vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q) + (6\gamma_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q] \cdot \{(\vec{r} - \vec{r}_q) \times [\gamma_q^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)\vec{v}_q + \vec{a}_q]\}) \right\} =$$

$$= -\frac{8}{3}\vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q) + (2\gamma_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q] \cdot \{(\vec{r} - \vec{r}_q) \times [\gamma_q^2(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)\vec{v}_q + \vec{a}_q]\})$$

(۴۲-۳)

$$B_2(t_q) = \frac{1}{3} \left\{ \begin{aligned} &2\gamma_q^7(\vec{r} - \vec{r}_q)[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + 2\gamma_q^3\vec{v}_q^2 - 8\gamma_q^5[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q](\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - 2\gamma_q^5(\vec{r} - \vec{r}_q)^2[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + \\ &+ 2\gamma_q\vec{v}_q^2 + \vec{v}_q^2\gamma_q^2(\vec{r} - \vec{r}_q)^2[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + \gamma_q^3\vec{v}_q^4 - 8\gamma_q^3[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q](\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - \\ &- 4\gamma_q^5\vec{v}_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q](\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 6\gamma_q^3[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q](\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 6\gamma_q^3\vec{v}_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{a}_q] - 3\gamma_q^3\vec{v}_q^4 + \\ &+ 12\gamma_q^3\vec{v}_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q](\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - 3\vec{v}_q^2\gamma_q^7(\vec{r} - \vec{r}_q)^2[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + 3\gamma_q^7[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2][(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2 \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \begin{aligned} &(2\gamma_q^3\vec{v}_q^2 + 2\gamma_q\vec{v}_q^2 - 2\gamma_q^3\vec{v}_q^4) + \left(\begin{aligned} &-8\gamma_q^5[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q](\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - 4\gamma_q^3[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q](\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - \\ &- 4\gamma_q^5\vec{v}_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q](\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 6\gamma_q^3[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q](\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + \end{aligned} \right) + \left. \begin{aligned} &+ 12\gamma_q^3\vec{v}_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q](\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + [6\gamma_q^3[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{a}_q][\vec{v}_q^2] \\ &+ (3\gamma_q^7[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2][(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\gamma_q = (1 - v_q^2)^{-1/2} \rightarrow \frac{1}{\gamma_q} = (1 - v_q^2)}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \begin{aligned} &(4\gamma_q\vec{v}_q^2) + \left(\begin{aligned} &\{-8\gamma_q^5[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q](\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 8\gamma_q^3[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q](\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 8\gamma_q^5\vec{v}_q^2[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q](\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)\} + \\ &+ [6\gamma_q^3[(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{a}_q][\vec{v}_q^2] \end{aligned} \right) + \left. \begin{aligned} &+ (3\gamma_q^7[\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2][(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2) \end{aligned} \right\} =$$

$$(A \times B) \cdot (B \times C) = (A \cdot B)(B \cdot C) - (A \cdot C)B^2 \Rightarrow [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{a}_q][\vec{v}_q^2] = [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q][(\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q)] - [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q] \cdot [(\vec{v}_q \times \vec{a}_q)] \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \left\{ \left(4\gamma_q v_q^2 \right) + \left(\left\{ -8\gamma_q^5 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 8\gamma_q^3 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 8\gamma_q^5 \vec{v}_q^2 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \right\} + \right) \right. \\
&\quad \left. + \left[6\gamma_q^3 ([(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q] \cdot [(\vec{v}_q \times \vec{a}_q)]) \right] \right. \\
&\quad \left. + (3\gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2) \right\} + \\
&= \frac{1}{3} \left\{ \left(4\gamma_q v_q^2 \right) + \left(\left\{ -8\gamma_q^5 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 8\gamma_q^3 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 8\gamma_q^5 \vec{v}_q^2 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + \right\} - \right) \right. \\
&\quad \left. + \left[6\gamma_q^3 ([(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - [6\gamma_q^3 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q] \cdot [(\vec{v}_q \times \vec{a}_q)]) \right] \right. \\
&\quad \left. + (3\gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2) \right\} + = \\
&= \frac{1}{3} \left\{ \left(4\gamma_q v_q^2 \right) + \left(\{0\} - [6\gamma_q^3 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q] \cdot [(\vec{v}_q \times \vec{a}_q)]] \right) + \right\} = \\
&\quad \left. + (3\gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2) \right\} = \\
&= \frac{4}{3} \gamma_q v_q^2 - 2\gamma_q^3 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q] \cdot [(\vec{v}_q \times \vec{a}_q)] + \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] [(\vec{r} - \vec{r}_q) \times \vec{v}_q]^2 \tag{43-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3(t_q) &= 4\gamma_q^6 \vec{v}_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - 4\gamma_q^8 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + 4\gamma_q^6 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + \\
&+ 2\gamma_q^4 \vec{v}_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 2\gamma_q^6 \vec{v}_q^4 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - 2\vec{v}_q^2 \gamma_q^8 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] - 6\gamma_q^4 \vec{v}_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - 6\gamma_q^6 \vec{v}_q^4 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + \\
&+ 6\vec{v}_q^2 \gamma_q^8 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] = \\
&= \left\{ 4\gamma_q^6 \vec{v}_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 2\gamma_q^4 \vec{v}_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) + 2\gamma_q^6 \vec{v}_q^4 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - 6\gamma_q^4 \vec{v}_q^2 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) - 6\gamma_q^6 \vec{v}_q^4 (\vec{v}_q \cdot \vec{a}_q) \right\} + \\
&+ \left\{ -4\gamma_q^8 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + 4\gamma_q^6 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] - \right\} \\
&\quad \left\{ -2\vec{v}_q^2 \gamma_q^8 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + 6\vec{v}_q^2 \gamma_q^8 [(\vec{r} - \vec{r}_q) \cdot \vec{v}_q] [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \right\} = \\
&\xrightarrow{\gamma_q = (1-v_q^2)^{-1/2} \rightarrow \frac{1}{\gamma_q^2} = (1-v_q^2)} \\
&= \{0\} + \{0\} = 0 \tag{44-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4(t_q) &= 2\vec{v}_q^2 \gamma_q^9 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] - 2\vec{v}_q^2 \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] + \vec{v}_q^4 \gamma_q^9 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] - 3\vec{v}_q^4 \gamma_q^9 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] = \\
&= 2\vec{v}_q^2 \gamma_q^9 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] - 2\vec{v}_q^2 \gamma_q^7 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] - 2\vec{v}_q^4 \gamma_q^9 [\vec{a}_q^2 - (\vec{v}_q \times \vec{a}_q)^2] \\
&\xrightarrow{\gamma_q = (1-v_q^2)^{-1/2} \rightarrow \frac{1}{\gamma_q^2} = (1-v_q^2)} \\
&= 0 \tag{45-3}
\end{aligned}$$

مراجع :

- [1] Hatta Y., Iancu E., Mueller A.H., and Triantafyllopoulos D.N., “Radiation by heavy quark in N=4 SYM at strong coupling,” Nucl.Phys. B850 (2011)31-52[arXiv:hep-th/1102.0232].
- [2] Christiana Athanasiou, Paul M. Chesler, Hong Liu, Dominik Nickel, and Krishna Rajagopal, “Synchrotron radiation in strongly coupled conformal field theories,” Phys.Rev. D81 (2010) 126001, Erratum-ibid. D84 (2011) 069901 [arXiv: hep-th/1001.3880].
- [3] Hatta Y, Iancu E, Mueller A.H., and Triantafyllopoulos D.N., “Aspects of the UV/IR correspondence: Energy broadening and string fluctuations,” JHEP (to appear) [arXiv: hep-th/1011.3763].
- [4] Fadafan K. B., Liu H., Rajagopal K., and Wiedemann U. A., “ Stirring strongly coupled plasma,” Eur.phys. J. C61 (2009) 553-567.
- [5] عابدینی، م ، (۱۳۹۱)، پایان نامه ارشد، مطالعه حرکت شتابدار کوارک سنگین در پلاسمای کوارک گلوئون، فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [6] Gubser S.S., Pufu S.S., and Yarom A., “ Energy disturbances due to a moving quark from gauge-string duality,” JHEP 09 (2007) 108 [arXiv :0706.0213].
- [7] Chesler P.M., and L.G. Yaffe, “ The wake of a quark moving through a strongly-coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma,” Phys. Rev. Lett. 99 (2007) 152001 [arXiv : 0706.0368].
- [8] Dominguez F., Marquet C., Mueller A., Wu B., and Xiao B.-W., “ Comparing

energy loss and p-perpendicular - broadening in perturbative QCD with strong coupling $N = 4$ SYM theory,” Nucl.Phys. A811 (2008) 197–222 [arXiv:0803.3234].

[9] Chesler P. M., Jensen K., and Karch A., “*Jets in strongly-coupled $N = 4$ super Yang-Mills theory,*” Phys. Rev. D79 (2009) 025021 [arXiv:0804.3110].

[10] Susskind L. and Witten E., “*The holographic bound in anti-de Sitter space*”, [hep-th/9805114].

[11] Peet A. W. and Polchinski J., “*UV/IR relations in AdS dynamics*”, Phys. Rev. D59 (1999) 065011 [hep-th/9809022].

[12] Mikhailov A., “*Nonlinear waves in AdS/CFT correspondence* ,” May 2003. 16 pp. NSF-KITP-03-38 [arxiv : hep-th/0305196].

[13] Chernicoff M., Garcia J. A., and Guijosa A., “*Generalized Lorentz-Dirac equation* 0903.2047].

[14] Chernicoff M., Garcia J. A., and Guijosa A., “*A Tail of a Quark in $N=4$ SYM,*” JHEP 09 (2009) 080 [arXiv:0906.1592].

[۱۵] کنت اس. کرین، "فیزیک جدید"، ترجمه منیژه رهبر، بهرام معلمی، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، (۱۳۸۲).

[۱۶] گریفیث، دیوید جفری، "مقدمه‌ای بر ذرات بنیادی"، ترجمه حمید رضا مشفق، سلیمه کیمیاگر، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، (۱۳۸۵).

[17] Barton Zwiebach, “*A first course in string theory*”, Cambridge University Press, Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York, USA: (2009).

- [18] Casalderrey-Solana J. , Liu H., Mateos D., Rajagopal K. and Wiedemann U.A.,
 “*Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions*,” [arXiv:1101.0618].
- [۱۹] لران، فرهنگ، درس نامه : " مقدمه ای بر دوگانگی AdS/CFT "، دانشکده ی فیزیک،
 دانشگاه صنعتی اصفهان، (۱۳۹۱).
- [20] Herzog C.P., Karch A., Kovtun P., KozcazandL C. and Yaffe G., “ *Energy loss of a heavy quark moving through N =4 supersymmetric Yang-Mills plasma*,” JHEP 0607 (2006) 013 [arXiv:hep-th/0605158].
- [21] Witten E., “*Anti-de Sitter space and holography*,” Adv.Theor.Math.Phys. 2,253(1998) [arXiv:hep-th/ 9802150v1].
- [22] David Mateos, “*Gauge/string duality applied to heavy ion collisions: Limitations, insights and prospects*,” [arXiv: hep-th/ 1106.3295v1].
- [23] Veronika E. Hubeny, “ *Relativistic beaming in AdS/CFT*,” [arXiv: hep-th/ 1011.1270v1].
- [24] Callan C. G., Guijosa Jr. and A., “*Undulating strings and gauge theory waves*,” Nucl. Phys. B565 (2000) 157–175, [hep-th/9906153].
- [25] Mariano Chernicoff And Alberto Guijosa, “*Acceleration, energy Loss and screening in strongly-coupled gauge theories* ,” [arXiv : hep-th/ 0803.3070v1].
- [26] Jackson J. D., *Classical Electrodynamics*, New York, USA: Wiley (1999) 808 p.
- [27] Chesler P. M., Gynther A., and Vuorinen A., “*On the dispersion of fundamental particles in QCD and N=4 Super Yang-Mills theory*,” JHEP 09 (2009) 003 [arXiv:0906.3052].
- [28] Hatta Y., Iancu E., and Mueller A. H., “*Jet evolution in the N=4 SYM plasma at*

strong coupling,” JHEP 05 (2008) 037 [arXiv:0803.2481].

[29] Hofman D. M. and Maldacena J., “ *Conformal collider physics: Energy and charge correlations,*” [arXiv:0803.1467].

Abstract

One of the basic problems in physics is radiation by a moving, classical, charged particle. In this thesis, using the AdS/CFT correspondence in the supergravity approximation, we study the energy density radiated by a heavy quark subjected to an external force in the vacuum of the strongly coupled $N=4$ supersymmetric Yang-Mills theory.

After computing the energy density radiated by the quark and the radiated power for the case where the quark trajectory is bounded, we obtain some unnatural features for those as compared to the corresponding classical results. As follows:

- The energy distribution shows the same space-time localization as the classical radiation that would be produced by the heavy quark at weak coupling.
- The radiated energy is anisotropic in the non-relativistic limits.
- The presence of some regions with negative energy density in the non-relativistic limits.

We find these strange results are artifacts of the supergravity approximation, which will be corrected after considering string fluctuations.

Key Words: String Theory, The radiation by heavy quark, AdS/CFT Correspondence



Shahrood University of Technology

Faculty of physics

Master of Science Thesis

**Study of the radiation by a heavy quark
using AdS/CFT**

Hasti zahedi Ghasabeh

Supervisor:

Dr. K. Bitaqsir Fadafan

Advisor:

Dr. M. Ali Akbari

September – 2013