

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک هسته‌ای

محاسبه ترازهای انرژی حالت پایه و برانگیخته ایزوتوپ های

زوج-زوج و زوج-فرد کربن

دانشجو:

مریم کلایی

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا شجاعی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

به پدر و مادر مهربانم

خدا را بسی سپاسگزارم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پر بار وجودشان بیاسایم و از ریشه های آنها شاخ و برگ گیرم و در سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش کنم. والدینی که وجودشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفته اند و راه رفتن در این وادی زندگی پر فراز و نشیب را به من آموخته اند. عزیزانی که برایم زندگی کردن و انسان بودن را معنا کردند.

حال این برگ سبز تحفه ای است تقدیم به ایشان

## با ژرفترین سپاس ها:

- از لطف بی پایان الهی که مرا توفیق تحول دوباره عطا کرد و هدایتگر دورنم را شوق نگاشتن هدیه نمود
- از قلب پاک مادرم برای همه محبت ها ، فرزاندگی ها و تشویق هایش
- از استاد ارجمند و فرزانه ام جناب آقای دکتر محمد رضا شجاعی برای حضور گسترده صداقتش
- و از همه آموزگارانم ، دوستان و دوستدارانم که بر شادمانی و دانش و آگاهی ام افزوده اند.

## تعهد نامه

اینجانب مریم کلائی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد، رشته فیزیک هسته ای دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده‌ی پایان نامه‌ی محاسبه ترازهای انرژی حالت پایه و برانگیخته ایزوتوپ های زوج زوج و زوج فرد کرین تحت راهنمایی دکتر محمد رضا شجاعی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

### امضای دانشجو

### تاریخ

#### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده:

بررسی و مطالعه ایزوتوپ های هسته های مختلف از مباحث مورد علاقه در فیزیک هسته ای می باشد در این میان ایزوتوپ های کربن به علت استفاده در باستان شناسی مورد توجه خاص قرار گرفته است. از میان ایزوتوپ های مختلف این هسته ایزوتوپ های کربن ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ دارای اهمیت بسزایی هستند. از طرفی کربن ۱۲ و ۱۴ هسته های هستند که دارای تعداد پروتون و نوترون زوج-زوج می باشد اما ایزوتوپ ۱۳ دارای تعداد پروتون و نوترون زوج-فرد است. این موضوع به موضوع مهمی برای مطالعه برهم کنش نوکلئون - نوکلئون تبدیل شده است تا بتوان به بررسی این ایزوتوپ پرداخت. کارهای انجام گرفته در زمینه هسته های سبک منحصر به هسته ها و ایزوتوپ های هیدروژن و هلیوم گردیده است. در این پایان نامه سعی نمودیم با پیشنهاد دادن پتانسیل های مناسب به بررسی و مطالعه ایزوتوپ های زوج-زوج و زوج-فرد کربن بپردازیم و با استفاده از روش تحلیلی NU و استفاده از تقریب مناسب به حل شرودینگر پرداخته و انرژی حالت پایه و برانگیخته ایزوتوپ های کربن را محاسبه

نمائیم و همچنین ضرائب مناسب برای پتانسیل  
ها را به دست آوریم.

### کلمات کلیدی:

ایزوتوپ‌های کربن - انرژی حالت پایه - انرژی حالت  
برانگیخته - پتانسیل کوتاه برد - ضرایب پتانسیل

## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

✓ بررسی و محاسبه انرژی حالت پایه و تابع موج  
ایزوتوپ های زوج- زوج کربن (بیستمین کنفرانس  
بهاره فیزیکتهران ۱۳۹۲)

✓ بررسی و مطالعه ایزوتوپ های کربن در برهم کنش  
کوتاه برد بین نوکلئونها (کنفرانس فیزیک ایران،  
بیرجند ۱۳۹۲)





## فهرست مطالب

۱	فصل اول: نیروها و پتانسیل های هسته ای
۲	۱-۱ خواص عمومی نیروهای هسته ای
۶	۲-۱ ویژگی های استاتیکی هسته
۶	۱-۲-۱ پاریده
۷	۲-۲-۱ اسپین هسته
۷	۳-۲-۱ ایزو اسپین
۸	۴-۲-۱ انرژی بستگی
۱۰	۳-۱ مدل های هسته ای
۱۰	۱-۳-۱ مروری بر مدل لایه ای هسته ای
۱۳	۲-۳-۱ مدل قطره مایع
۱۵	۳-۳-۱ مدل اپتیکی
۱۵	۴-۳-۱ مدل جمعی
۱۶	۴-۱ شکل عمومی پتانسیل های نوکلئون - نوکلئون
۱۸	۵-۱ مدل نیروی تبادل
۱۹	۱-۵-۱ پتانسیل بارتلت
۱۹	۲-۵-۱ نیروی ماژرونا
۲۰	۳-۵-۱ نیروی هایزنبرگ
۲۱	۶-۱ توجیح حضور نیروی تبدالی در هسته
۲۳	۷-۱ نظریه یوکاوا و ذره یوکاوا
۲۵	۸-۱ معرفی چند پتانسیل
۲۵	۱-۸-۱ پتانسیل وود ساکسون
۲۸	۲-۸-۱ پتانسیل شبه حلقوی کوارتز تعمیم یافته
۲۸	۳-۸-۱ پتانسیل یوکاوا
۳۰	۴-۸-۱ پتانسیل مای تایپ
۳۱	۹-۱ مروری بر ویژگی های کربن
۳۳	۱-۹-۱ کربن ۱۲
۳۴	۲-۹-۱ کربن ۱۳
۳۵	۳-۹-۱ کربن ۱۴
۳۶	۴-۹-۱ کربن ۱۵
۳۹	۱۰-۱ کاربرد های کربن

۴۰	فصل دوم
۴۱	۱-۲ مقدمه
۴۲	۲-۲ دستگاره مختصات ژاکوبی
۴۳	۳-۲ متغیرهای فوق کروی
۴۵	۴-۲ کلیات روش NU
۴۷	۱-۴-۲ تعمیم پارامتری NU
۴۹	۱-۵-۲ حل معادلات دیفرانسیل به روش Runge-Kutta
۵۲	۲-۵-۲ مراحل روش R-K4
۵۳	فصل سوم
۵۴	۳مقدمه ..
	۲-۳ محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ های زوج-زوج کربن
	۵۷.....
	۱-۲-۳ اثرات اسپینی
	۶۶.....
	۳-۳ محاسبه انرژی حالت پایه کربن
	۱۳.....
	۱-۳-۳ بررسی پتانسیل تانسوری به صورت
	اختلالی.....
	۷۱.....
	۴-۳ حالت های برانگیخته
	هسته.....
	۷۲.....
	۱-۴-۳ محاسبه حالت های برانگیخته
	کربن ۱۲.....
	۷۴.....
	۲-۴-۳ محاسبه حالت های برانگیخته کربن
	۱۳.....
	۷۵.....
	۳-۴-۳ محاسبه حالت های برانگیخته کربن
	۱۴.....
	۷۶.....
	نتیجه
	گیری.....
	۷۹.....
	مراجع.....
	۸۰

## فهرست شکل ها

- شکل ۱-۱ انرژی بستگی میانگین هر نوکلئون در هسته های  
سبک..... ۹
- شکل ۲-۱ سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون-پروتون..... ۲۲
- شکل ۳-۱ پتانسیل یوکاوا بر حسب تابعی از  $r$  بر حسب  
مقادیر خاص..... ۲۹
- شکل ۴-۱ رفتار کلی و شرایط مرزی پتانسیل Mie Type..... ۳۱
- شکل ۱-۳ انرژی حالت پایه ایزوتوپ های کربن..... ۶۲

شکل ۲-۳ نحوه پر شدن تراز های نوکلئونی کربن  
۱۲.....۷۵

شکل ۳-۳ نحوه پر شدن تراز های نوترونی کربن  
۱۳.....۷۵

## فهرست جدول ها

- جدول ۱-۱ نیروهای بنیادی شناخته شده در طبیعت.....۵
- جدول ۲-۱ برخی خصوصیات ایزوتوپ های کربن.....۳۷
- جدول ۱-۳ مقایسه عددی انرژی حالت پایه برخی ایزوتوپ  
های زوج-زوج کربن.....۶۱
- جدول ۲-۳ میزان انرژی حالت پایه و اختلاف انرژی ناشی از  
اثر اسپین-اسپین.....۶۷
- جدول ۳-۳ ویژگیه مقدار انرژی حالت پایه کربن ۱۳.....۷۰

جدول ۳-۴ انرژی برانگیختگی محاسبه شده برای برخی  
ایزوتوپ ها و مقایسه آنها با مقادیر تجربی.....۷۷

جدول ۳-۵ انرژی برانگیختگی محاسبه شده برای کربن ۱۳.....۷۸



# فصل اول

## مفاهیم و ویژگی های کربن

۱-۱ خواص هسته ای



فیزیک هسته ای مطالعه ساختار هسته و برهم کنش بین اجزای تشکیل دهنده آن است. هسته ها هم مانند بسیاری از سیستم های پیرو قوانین مکانیک کوانتومی، جسمی پیچیده و اسرار آمیز است که توصیف رفتار و خواص آن خیلی دشوارتر از اجسام ماکروسکوپی است. مثلا توصیف کامل یک هسته میان وزن ۵۰ نوکلئونی بر حسب کلیه برهم کنش های بین نوکلئون های موجود در هسته مستلزم! ۵۰ عبارت یا در حدود  $10^{64}$  جمله است [1]. میتوان هسته ها را به کمک تعدادی از پارامترهای هسته ای، تا حد قابل توجهی توصیف کرد. این پارامترها به دو گروه عمده تقسیم می شوند: گروه اول، خواص استاتیکی<sup>۱</sup> هسته هستند که عبارتند از: بارالکتریکی، انرژی بستگی، جرم، شعاع، تکانه زاویه ای، پاریتته، گشتاور دو قطبی مغناطیسی، گشتاور چار قطبی الکتریکی و انرژی حالت های برانگیخته. گروه دوم خواص دینامیکی<sup>۲</sup> هسته ها مثل: احتمال واپاشی و احتمال واکنش آنها هستند. درک و تفسیر خواص استاتیکی و دینامیکی هسته ها بر پایه برهم کنش بین تک تک نوکلئون های موجود در هسته، موضوع بسیار مهمی است که هرمتخصص فیزیک هسته ای باید با آن دست و پنجه نرم کند. مطالعه فیزیک هسته ای را با بررسی برهم کنش بنیادی موجود در طبیعت آغاز می کنیم. منشا تمام نیروهای موجود در طبیعت چهار نیروی بنیادی است که عبارتند از نیروهای گرانشی، الکترومغناطیسی، هسته ای ضعیف و هسته ای قوی. در جدول (۱-۱) قدرت نسبی چهار نیروی بنیادی شناخته شده در طبیعت به همراه نظریه فیزیکی مرتبط و ذره واسطه در برهم کنش، لیست شده است. هسته مجموعه ای مقید از نوترون ها و پروتون ها است  ${}^A_ZX$  نشان دهنده هسته اتم

<sup>1</sup> Static Properties

<sup>2</sup> Dinamical Propertice

عنصر شیمیایی X است که با A نوکلئون که Z تایی آن پروتون و مقدار  $N = A - Z$  تایی آن نوترون می باشد. به  $A = Z + N$  عدد جرمی هسته می گویند. هسته هایی که تنها از لحاظ تعداد نوترون تفاوت دارند ایزوتوپ<sup>3</sup> می گویند. به هسته هایی با A یکسان اما Z متفاوت ایزوبار<sup>4</sup> گویند [2]. رسیدن به یک تفسیر مناسب برای ایزوتوپ نیاز به گذشت زمان داشت. در ابتدا تصور بر این بود که هسته متشکل از پروتون ها و الکترون هاست و تعداد پروتون ها حدوداً دو برابر تعداد الکترون هاست. با اینکه این موضوع مبنای آماری داشت اما تصور می شد با مشاهده گسیل الکترون از بعضی هسته های رادیو اکتیو، پشتیبانی می شود. همچنین انتظار می رفت که طول موج دوبروی<sup>5</sup> هر الکترون دورن هسته، از مرتبه اندازه هسته باشد. این می طلبید که انرژی الکترون گسیلی (پرتوی  $\beta$ ) از مرتبه بالاتر از  $10 \text{ MeV}$  باشد در حالیکه مقادیر اندازه گیری های تجربی انرژی تابش  $\beta$ ، فقط از مرتبه  $2 \text{ MeV}$  بود. ابهام فوق در سال ۱۹۳۲ با کشف نوترون توسط چادویک<sup>6</sup> برطرف شد. این کشف به نقطه عطفی در پیشرفت فیزیک هسته ای تبدیل شد. نوترون به عنوان یک ذره دیگر در کنار پروتون در نظر گرفته شد که با هم هسته را می ساختند. آنگاه ایزوتوپ های مختلف به عنوان هسته هایی با تعداد پروتون برابر و نوترون متفاوت در نظر گرفته شدند. این مدل « نوترون - پروتون » بعدها با تعداد مختلفی از واکنش های هسته ای تایید شد [3]. طبیعت دقیق نیروهای بستگی هسته ای، ناشناخته است. مع هذا این نیروها باید دارای برد کوتاه باشند و قوی تر از نیروهای الکتروستاتیکی که

<sup>3</sup> Isotope

<sup>4</sup> Isobar

<sup>5</sup> L.de Broglie

<sup>6</sup> J.Chadwick

تمایل به دور کردن پروتون های همنام دارند باشند. به علاوه ماهیت این نیروها باید چنان باشد که از ترکیب ذرات با یکدیگر و به وجود آوردن یک جسم منسجم جلوگیری کند. از طرف دیگر نوترون های بدون بار نیز باید به طور محکم پیوند یابند. کلید درک نیروی قوی، که هسته اتم را نگه می دارد، ممکن است در ساختمان داخلی نوترون ها و پروتون ها نهفته باشد. نوترون ها و پروتون ها هر دو نسبت به نیروهای الکترومغناطیسی حساس اند. خواص نیروهای بین نوکلئون ها را می توان به دو شکل استخراج کرد:

(الف) روش مستقیم: با مطالعه فرایندهای پراکندگی (برخوردهای میان دو نوکلئون)

(ب) روش غیر مستقیم: با مطالعه سیستم های مقید مثل دوترون (هسته ها)

ویژگی های نیروی بین نوکلئون ها را بطور خلاصه به صورت زیر بیان می کنیم [4,5,6]

۱-۱-۱-۱ بر هم کنش بین دو نوکلئون از پایین ترین مرتبه پتانسیل مرکزی جاذبه حاصل می شود. این نیرو غالباً جاذبه است، در غیر این صورت دافعه ی کولنی بین نوکلئون ها موجب فروپاشی هسته می گردید و هسته های پایدار نمی توانستند وجود داشته باشند و همچنین این نیرو در برابر سایر نیروها بسیار قویتر است.

۱-۱-۲ بر هم کنش بین نوکلئون- نوکلئون در فواصل خیلی کوتاه دافعه می شود. نیروی هسته ای در فواصلی که در حدود ابعاد اتمی است به حدی ضعیف می شود که می توان از آن صرف نظر کرد.

۳-۱-۱ نیروهای هادرونی اشباع پذیرند، اگر هر نوکلئون، تک تک نوکلئون های دیگر را جذب می کرد تعداد  $\frac{A(A-1)}{2}$  زوج بر هم کنش متمایز وجود می داشت. در آن صورت انتظار می رفت که انرژی بستگی با  $A(A-1) \approx A^2$  متناسب باشد و تمام هسته ها قطری برابر با برد نیروی هسته ای داشته باشند. هر دو پیش بینی یعنی: انرژی بستگی متناسب با  $A^2$  و حجم هسته ای ثابت برای هسته های  $A > 4$  شدیداً با تجربه مخالفت می کند. حجم و انرژی بستگی برای اغلب هسته ها با عدد جرمی  $A$  متناسب اند. پس هر ذره فقط تعداد محدودی از سایر ذرات اطراف خود را جذب می کند و نوکلئون های دیگر یا تحت تأثیر قرار نمی گیرند یا دفع می شوند.

۴-۱-۱ نیروی بین نوکلئون ها تقریباً مستقل از بار الکتریکی است.

۵-۱-۱-۵ بر هم کنش نوکلئون - نوکلئون قویا وابسته به اسپین است. این نتیجه گیری از عدم موفقیت مشاهده ی حالت مقید تک تایه دو ترون و همچنین از اندازه گیری اختلاف سطح مقطع های حال تک تایه و سه تایه حاصل می شود.

۶-۱-۱-۶ پتانسیل بین نوکلئونی شامل یک جمله غیر مرکزی به نام پتانسیل تانسوری (غیر مرکزی) است [4,5,6]. عمده ترین دلیل وجود نیروی تانسوری از مشاهده گشتاور چار قطبی در حالت پایء دوترون حاصل می شود. حالت پایه در یک پتانسیل مرکزی همیشه یک حالت S است بنابراین وجود حالت d در دوترون حاکی از این واقعیت است که نیروی هسته ای به طور خالص نمی تواند مرکزی باشد.

۷-۱-۱ نیروهای هادرونی مستقل از بار هستند و پس از تصحیح برهمکنش الکترومغناطیسی نیروهای

p-n و p-p بین نوکلئون هایی که در یک حالت باشند یکسان است.

۸-۱-۱ نیروی هادرونی به سرعت نسبی نوکلئون ها وابسته است. از آزمایشات برخورد شواهدی وجود دارد مبنی بر اینکه نیروی نوکلئون- نوکلئون به سرعت نسبی نوکلئون ها وابسته است.

۹-۱-۱ نیروی هادرونی در فواصل کوتاه تبدیل به دافعه می شود. اگر به طور ساده چگالی هسته ای را مورد مطالعه قرار دهیم متوجه می شویم که رشد هسته در اثر افزایش نوکلئون ها به صورتی است که چگالی مرکزی آن تقریباً ثابت است از این رو باید عاملی وجود داشته باشد که از تجمع و نزدیک شدن بیش از حد نوکلئون ها جلوگیری می کند.

جدول (۱-۱) نیروهای بنیادی شناخته شده در طبیعت [7]

نیرو	قدرت	نظریه	واسطه
هسته ای قوی	10	دینامیک رنگ	گلوئون
الکترومغناطیس	$10^{-2}$	الکترو دینامیک	فوتون
هسته ای ضعیف	$10^{-13}$	دینامیک رنگ	$Z^0, W^\pm$
گرانشی	$10^{-42}$	دینامیک هندسی	گراویتون

## ۲-۱ ویژگی های استاتیکی هسته

ویژگی های هسته را که با گذشت زمان مقدار آنها تغییر نمی کند و ثابت است، ویژگی استاتیکی هسته گویند. این ویژگی ها شامل جرم هسته، انرژی بستگی هسته، شعاع هسته، پاریتته، گشتاور دو قطبی مغناطیسی، گشتاور چار قطبی الکتریکی، ایزواسپین هسته، اسپین هسته است که در ادامه برخی از این ویژگی ها را که در این پایان نامه از آن استفاده خواهیم کرد شرح می دهیم.

### ۱-۲-۱ پاریتته

هامیلتونی های قوی هسته ای و الکترو مغناطیسی، پاریتته را پایسته نگه می دارند. بنابراین ویژه حالت ها به دو دسته از حالات که هر کدام پاریتته مشخص  $\pi = +1$  یا  $\pi = -1$  دارند تقسیم می شوند و هامیلتونی، این دو دسته را با هم مخلوط نمی کند. در ساختار هسته ای، پاریتته کل، از پاریتته ذاتی نوکلئون  $\pi_{int} = +1$  و پاریتته مربوط به اندازه حرکت زاویه ای مداری نوکلئون  $\pi_l = (-1)^l$  نشأت می گیرد. پاریتته کل هسته، برابر حاصلضرب پاریتته کل نوکلئون های آن است

$$(1-1)$$

$$\pi = \prod_i \pi_{int}(i) \pi_l(i) = \prod_i (-1)^{l_i}$$

و معمولا حالت های پایه و ویژه حالت ها به گونه ای انتخاب می شوند که پاریتته مشخصی داشته باشند. هامیلتونی ضعیف هسته ای، پاریتته را پایسته نگه نمی دارد. به عنوان یک اختلال، عناصر ماتریسی هامیلتونی ضعیف نوعا از مرتبه چند eV یا کمتر هستند. بنابراین

اختلال پارایته را میتوان از نظریه اختلال مرتبه اول محاسبه کرد [8].

## ۲-۲-۱ اسپین هسته

هر حالت هسته را با یک عدد کوانتومی اسپین منحصر بفرد  $I$  مشخص می کنند که نمایانگر تکانه کل (مداری و ذاتی) تمام نوکلئون های هسته می باشد. بردار  $I$  را می توان به صورت حاصل جمع مولفه های مداری و ذاتی تکانه زاویه ای در نظر گرفت:

$$(۲-۱)$$

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^A (\vec{I}_i + \vec{S}_i) = \vec{L} + \vec{S} = \sum_{i=1}^A \vec{J}_i$$

و همچنین عدد کوانتومی  $I$  رابطه ساده ای با بردار  $\vec{I}$  دارد:

$$(۱)$$

$$(۳)$$

$$|\vec{I}| = \sqrt{I(I+1)}h$$

$$I_z = m_I h \quad (m_I = I, I-1, \dots, -I+1, -I)$$

تنها علت علت اینکه در رابطه (۲-۱) از محاسبه بردارها و همچنین از ساختمان داخلی هسته صرف نظر شده است می تواند این باشد که برهمکنشی که هسته تحت تاثیر آن است مانند میدان های الکترومغناطیسی ایستا به اندازه کافی قوی نیست که ساختمان داخلی را تغییر دهد یا جفت شدگی نوکلئون ها را بگسلد.

### ۱-۲-۳ ایزو اسپین

استقلال نیروهای هسته ای از بار منجر به معرفی عدد کوانتومی پایسته جدیدی به نام ایزواسپین می شود. در سال ۱۹۳۲، هایزنبرگ پروتون و نوترون را به عنوان دو حالت از یک ذره، نوکلئون، در نظر گرفت. برای توصیف دو حالت نوکلئون، یک فضای ایزو اسپینی معرفی می شود به طوریکه دو حالت یک ذره معمولی با اسپین  $1/2$  نه به عنوان دو ذره، بلکه به صورت دو حالت از یک ذره تلقی می شود. بدین ترتیب پروتون به صورت حالت بالا و نوترون به صورت حالت پایین نوکلئون در نظر گرفته می شود. این وضعیت را به صورت یک کمیت جدید، ایزو اسپین  $I$  معرفی می کنند. نوکلئونی که دارای ایزواسپین  $1/2$  است، تعداد  $2I+1=2$  سمتگیری ممکن در فضای ایزو اسپینی دارد. بنابراین به هر دو نوکلئون، ایزو اسپین  $1/2$  نسبت می دهیم که پروتون تصویر  $T_z=1/2$  و نوترون تصویر  $T_z=-1/2$  آن است. عملگر ایزواسپین  $t$  برای درجات آزادی ایزو اسپین، شبیه عملگر اسپین  $s$  برای درجات آزادی اسپین است. برای چندین نوکلئون، ایزو اسپین کل و تصویر  $z$  اش با روابط زیر داده می شود

(۴-۱)

$$\vec{T} = \sum_i \vec{t}(i)$$

$$T_z = \sum_i t_z(i)$$

تعداد  $2T+1$  مقدار برای  $T_z$ ، از  $T_z=-T$  تا  $T_z=+T$  با گام های صحیح، وجود دارد. برای هسته ای با تعداد  $z$  پروتون

$$\text{و تعداد } N \text{ نوترون، } T_z = \frac{N-Z}{2} \text{، است [8].}$$



## ۴-۲-۱ انرژی بستگی

انرژی بستگی B یک هسته اختلاف بین جرم هسته ای و مجموع جرم اجزای تشکیل دهنده آن می باشد:

(۵-۱)

$$B(A, Z) = Nm_n c^2 + Zm_p c^2 - m(A, Z)c^2$$

انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون با عبارت  $\frac{B}{A}$  بیان می شود که خود تابعی از می باشد همانگونه که در شکل (۱-۱) نشان داده شده است مقدار  $\frac{B}{A}$  با افزایش A در هسته های سبک افزایش می یابد و به یک پهن شدگی در حدود  $A \approx 55-60$  می رسیم و در ادامه آن به آرامی به عنوان تابعی از A کاهش می یابد. با توجه به شکل متوجه می شویم که با همجوشی هسته های سبک یا با شکافت هسته های سنگین انرژی آزاد می شود. در هسته های پایدار که خیلی سبک نیستند ( $A > 12$ ) انرژی بستگی در تقریب اول با  $B$  د جرمی متناسب است یعنی [9]:

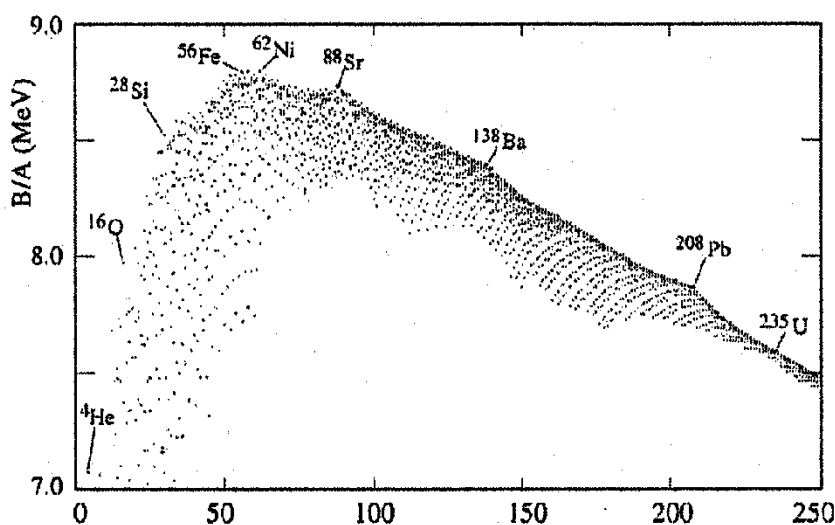
(۶-۱)

$$B(A, Z) \approx A \times 8 \text{ MeV}$$

و به طور دقیقتر:

(۷-۱)

$$7.7 \text{ MeV} < \frac{B(A, Z)}{A} < 8.8 \text{ MeV} \quad \text{for} \quad 12 < A < 225$$



A

شکل (۱-۱): انرژی بستگی میانگین هر نوکلئون در هسته های سبک [9]

### ۱-۳ مدل های هسته ای

برای بررسی هسته ها، عمدتاً یک نظریه فوق العاده ساده را که از لحاظ ریاضی بدون مشکل و از لحاظ فیزیکی غنی باشد، انتخاب می کنیم. اگر این نظریه در توصیف دستکم چند خاصیت هسته ای نسبتاً موفق باشد، آنگاه با افزودن جمله های اضافی آن را تکمیل می کنیم. بدین ترتیب، معیار موفقیت هر مدلی را باید در دو نکته دانست:

۱. مدل باید بتواند خواص هسته ای تا کنون اندازه گیری شده را به طور قابل قبولی توضیح دهد.
۲. مدل باید خواص دیگری را پیش بینی کند که در آزمایش های جدیدی قابل اندازه گیری باشد.

مدل های متعددی جهت توضیح خواص و واکنش های هسته ای پیشنهاد شده اند. از آنجا که هیچکدام از این مدل ها برای توضیح کل مشاهدات تجربی بطور کامل رضایت بخش نیستند، مدل های مختلفی برای تفسیر پدیده های گوناگون هسته ای بکار می روند. از جمله مفیدترین مدل ها در

مورد ساختمان هسته‌ای عبارتند از مدل لایه ای، مدل قطره مایع، مدل جمعی، مدل اپتیکی.

### ۱-۳-۱ مروری بر مدل لایه ای هسته ای

هسته از پروتون ها و نوترون ها (نوکلئون ها) تشکیل شده اند که همدیگر را با برهم کنش قوی در داخل حجمی با شعاع چند فرمی نگه می دارند. میتوان چنین پنداشت که حرکت نوکلئون ها در چنین سیستم بسته ای به واسطه تعداد زیادی برخورد بین آنها، خیلی پیچیده است. نیلس بوهر حرکت نوکلئون ها را به حرکت توپ های بلیارد تشبیه کرد [10,8] و گفت که تشبیه حرکت نوکلئون ها با حرکت الکترون های اتمی فاقد اعتبار لازم است [11,8]. در سال ۱۹۴۸ ماریا ج مایر موفق شد داده های تجربی را طبقه بندی کرده و نشان دهد که هسته هایی که تعداد پروتون ها یا نوترون های آنها برابر یکی از اعداد ۲۰ و ۵۰ و ۸۲ یا ۱۲۶ باشند، پایدارترند [12,8]. در سال ۱۹۴۹ نقش کلیدی شکافتگی اسپین مدار در پتانسیل تک جسمی هسته ای توسط مایر [13,8] و هاگسل، جنسن و سوئس [14] معرفی شد. این پتانسیل تک جسمی نقطه شروع مدل لایه ای هسته ای است. در مدل لایه ای، مسئله مکانیک کوانتومی برای حرکت یک نوکلئون در هسته شبیه حرکت الکترون در اتم هیدروژن است، با این تفاوت که ابعاد به جای  $10^{-10}$  در حدود  $10^{-15}$  متر است. تفاوت مهم دیگر بین پتانسیل های هسته ای و اتمی، وابستگی بسیار قوی پتانسیل هسته ای به جهت گیری اندازه حرکت زاویه ای ذاتی و اندازه حرکت زاویه ای مداری نوکلئون است که از نظر علامت نیز مخالف وابستگی مشابه، در مورد اتمی است. پتانسیل تک ذره ای، ویژه حالت هایی دارد که با انرژی های تک - ذره ای و اعداد کوانتومی شان مشخص می شوند و خواص یک

هسته با تعداد مشخصی پروتون و نوترون، با پر کردن پایین ترین تراز های انرژی تک- ذره ای و با رعایت اصل طرد پائولی برای سیستمی متشکل از فرمیون های یکسان (در این مورد نوکلئون ها) تعیین می شود. اصل طرد پائولی ایجاب می کند که هر حالت با یک مجموعه اعداد کوانتومی، فقط با یک پروتون یا یک نوترون اشغال شود. متوسط پتانسیل هسته ای از برهم کنش کوتاه برد و جاذب نوکلئون - نوکلئون ناشی شده و توسط شکل توزیع چگالی هسته ای تعیین می شود. شواهد اعتبار مدل لایه ای هسته، از مشاهده پذیر های تجربی نظیر انرژی بستگی، اندازه، اسپین و چگالی ترازها نشأت می گیرد. مخصوصاً، ملاحظه می شود که انرژی بستگی هسته تابع همواری از تعداد پروتون ها و نوترون ها نبوده و نوسانات کوچکی دارد. انحراف انرژی های بستگی تجربی از مقادیر مدل قطره مایع دیده شده است. انرژی بستگی مدل قطره مایع، تابع همواری از تعداد پروتون ها و نوترون ها است. وقتیکه مقادیر انرژی بستگی مدل قطره مایع از مقادیر تجربی کم شوند، اختلاف ها قله هایی را در اعداد جادویی،  $N_m = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$  نشان می دهند. قله ها نشان می دهند که هسته ها با این اعداد جادویی از سایر هسته ها مقید ترند. هسته هایی که تعداد پروتون و نوترون آن برابر اعداد جادویی است را دو - جادویی گویند.  $^{208}Pb$  با تعداد ۱۲۶ نوترون و ۸۲ پروتون مثالی از یک هسته دو - جادویی است. اگرچه از داده های انرژی بستگی خیلی واضح نیست، ولی  $N_m = 2, 6, 8, 14, 16, 20, 32$  برای برخی هسته ها، عدد جادویی محسوب می شوند. بعلاوه  $N_m = 34$  برای  $^{54}Ca$  اخیراً به عنوان عدد جادویی گزارش شده است [15]. اعداد جادویی در هسته، نقشی مشابه خواص الکترون ها در پر شدن تراز های اتمی دارند. به هر

حال برای الکترون ها ، مقادیر ۲ و ۵ و ۸ و ۱۸ و ۵۴ و ۸۶ به عنوان عدد جادویی شناخته می شوند . مطابق اصل طرد پائولی، اگر نوترونی به یک هسته اضافه شود، به تراز اشغال نشده با کمترین انرژی می رود . اگر یک نوترون به هسته اضافه شود، در حالیکه تعداد نوترون های موجود با یکی از اعداد اشغال جمعی برابر باشد، در آن صورت نوترون بایستی به حالتی با انرژی بیشتر (و قید کمتر ) برود . بنابراین هسته ها یی با انرژی بستگی نسبی بالا، آنهایی اند که تعداد پروتون ها یا تعداد نوترون های آنها برابر یکی از اعداد اشغال جمعی باشد . یک عدد جادویی هنگامی به وجود می آید که شکافی نسبتا بزرگ، بالای هر کدام از اعداد اشغال جمعی وجود داشته باشد . بنابراین اعداد جادویی به یک بغچه از ترازهای انرژی مربوط اند . پتانسیل وود - ساکسون اعداد جادویی  $N_m = 2, 8, 20$  را به درستی نتیجه می دهد ولی برای سایر اعداد جادویی نادرست است. در سال ۱۹۴۹ مایر و دیگران برای مشاهده اعداد جادویی وجود یک پتانسیل اضافی قوی اسپین - مدار را فرض کردند . پتانسیل اسپین - مدار به صورت  $V_{so}(r)\vec{L}\vec{S}$  فرض شد که  $\vec{L}$  اندازه حرکت زاویه ای مداری نوکلئون و  $\vec{S}$  اندازه حرکت زاویه ای ذاتی نوکلئون است . با وجود پتانسیل اسپین - مدار،  $m$  و  $S_z$  اعداد کوانتومی خوبی محسوب نمی شوند . اندازه حرکت های زاویه ای مداری و ذاتی بایستی جفت شده و اندازه حرکت زاویه ای کل  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$  را بسازند . ویژه حالت های پتانسیل اسپین - مدار توسط عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای کل  $j = l \pm \frac{1}{2}$  (غیر از  $j=1/2$  برای  $l=0$ ) و عدد کوانتومی  $m_j$  مربوط به تصویر  $j$ ، تعیین می شوند . مقدار چشمداشتی  $\vec{l}\vec{s}$  از رابطه عملگری زیر به دست می آید :

-۱)

(۸

$$j^2 = (\vec{l} + \vec{s})^2 = l^2 + s^2 + 2\vec{l} \cdot \vec{s}$$

متوسط پتانسیل هسته ای در مقیاس میکروسکوپی با در نظر گرفتن برهم کنش نوکلئون - نوکلئون توسط نظریه هارتری- فوک و نظریه بروکسر ( این نظریه، دافعه بین نوکلئون ها در فواصل خیلی کوتاه را وارد محاسبات می کند ) محاسبه می شود. قدرت پتانسیل اسپین - مدار برای نوکلئون ها خیلی بزرگتر و از نظر علامت مخالف، پتانسیل اسپین - مدار الکترون های اتمی است. قسمت شعاعی پتانسیل اسپین - مدار  $V_{so}(r)$ ، در سطح هسته بیشینه است و اغلب متناسب با مشتق تابع وود- ساکسون در نظر گرفته می شود. مهم ترین ایده فیزیکی نهفته در مدل لایه ای این است که برخورد های چند - نوکلئونی داخل هسته، عموماً در سطح انرژی پایه و چند تراز پایین روی می دهند زیرا نوکلئون ها پس از برخورد به حالت هایی پراکنده می شوند که عموماً از نظر اصل طرد پائولی ممنوع است. در انرژی های برانگیختگی بزرگتر، تعداد حالت های مجاز در دسترس نوکلئون، افزایش یافته و خواص هسته های پیچیده می شود. مدل لایه ای در ساده ترین شکل، به خوبی قادر به پیشگویی خواص هسته هایی با یک نوکلئون بیشتر یا یک نوکلئون کمتر از اعداد جادویی است. مدل لایه ای همچنین می تواند به پیکر بندی های پیچیده مربوط به هسته هایی که تعداد نوکلئون های آن حد واسط اعداد جادویی است، نیز توسعه یابد. برای بسیاری از کاربردها، پیکر بندی پیچیده را می توان با قطری کردن ماتریس هامیلتونی، به طور دقیق محاسبه کرد. در سایر موارد، از روش های تقریبی استفاده می شود که شامل به کار بردن پتانسیل تک ذره ای تغییر

شکل یافته و استفاده از نظریه گروه برای تجزیه و تحلیل پیکربندی است. چنین پیکربندی های پیچیده ای در کانون توجه بررسی های نظری جاری مدل لایه ای قرار دارند.

### ۱-۳-۲ مدل قطره مایع

به واسطه برهم کنش قوی جاذب بین نوکلئون ها، هسته ها به طور کلی مقید اند. برهم کنش قوی از تبادل مزون ها ناشی می شود. برهم کنش ها کوتاه برد اند و عموماً بین نوکلئون های همسایه رخ می دهد. بعلاوه، برهم کنش هسته ای اشباع می شود که نتیجه این امر چگالی نوکلئونی تقریباً ثابت داخل هسته و شعاعی است که به طور تقریبی با رابطه داده می شود. تشابه این مسئله با قطره مایع، به مدل قطره مایع منجر می شود که از ایده هسته مرکب نیلز بوهر الهام گرفته شده بود که می گفت وقتی یک نوکلئون وارد یک هسته می شود ویژگی های حرکت انفرادی خود را به خاطر برهم کنش بسیار قوی نوکلئون - نوکلئون داخل هسته از دست می دهد مدل قطره مایع توسط وایزاکر<sup>۸</sup> و برای یافتن جرم های هسته ای و انرژی های بستگی برحسب پارامترهای ماکروسکوپی نظیر انرژی حجمی، انرژی سطحی، انرژی کولونی، انرژی تزویج و هسته با در نظر گرفتن هسته به صورت یک قطره مایع توسعه یافت که انرژی بستگی آن با رابطه زیر داده می شود:

$$B(A, Z) = \alpha_1 A - \alpha_2 A^{2/3} - \alpha_3 \frac{z(z-1)}{A^{1/3}} - \alpha_4 \frac{(N-Z)^2}{A} \pm \delta \quad (9-1)$$

جملات بالا از سمت راست، به ترتیب جمله انرژی حجمی،

<sup>7</sup> Compound Nucleos

<sup>8</sup> C.F. Von weiszaacker

جمله انرژی سطحی، جمله انرژی کولونی و جمله انرژی تقارنی و جمله تصحیح انرژی زوجیت می باشند. اولین جمله بیانگر برهم کنش نوکلئون با نزدیکترین همسایه ها است. این بدان معناست که هر نوکلئون در هسته فقط نزدیکترین نوکلئون های اطرافش را جذب می کند و همه نوکلئون های دیگر را جذب نمی کند (خاصیت اشباع پذیری). از آزمایش های پراکندگی الکترون معلوم شده است که چگالی هسته تقریباً ثابت است، یعنی تعداد نوکلئون های موجود در اطراف هر نوکلئون تقریباً ثابت می ماند. بدین ترتیب نتیجه می گیریم که سهم هر نوکلئون در انرژی بستگی هسته تقریباً مقداری ثابت است. دومین جمله تصحیحی است بر جمله اول مبنی بر این مضمون که نوکلئون های سطحی، همسایه کمتری دارد. به همین دلیل بستگی آن به هسته از نوکلئون های مرکزی کمتر است. سومین جمله ناشی از وجود دافعه کولونی بین پروتون ها است که این مولفه در جهت تضعیف انرژی بستگی هسته عمل می کند. چهارمین جمله که جمله انرژی تقارنی نامیده می شود، به این دلیل کم شده است که، اول: برهم کنش قوی نوترون - پروتون به طور متوسط جاذب تر از برهم کنش های قوی پروتون - پروتون و نوترون - نوترون است و دوم: انرژی جنبشی کل هسته هنگامی که تعداد پروتون هایش با تعداد نوترون هایش برابر است، کمینه می باشد. جمله تزویج تمایل نوکلئون های مشابه را به تشکیل زوج و تحکیم پیکر بندی پایدار هسته ای نشان می دهد. ثابت  $\alpha_3 = 0.697 \text{ MeV}$  توسط برهم کنش کولونی و اندازه هسته، بهینه شده است. مقادیر نوعی ثابت های مدل قطره مایع که منحنی بهینه به داده های تجربی برازش می دهد به صورت  $\alpha_4 = 22.6 \text{ MeV}$  ,  $\alpha_2 = 17.23 \text{ MeV}$  ,  $\alpha_1 = 15.49 \text{ MeV}$  به دست آمده اند [8].



### ۳-۳-۱ مدل اپتیکی

این مدل در سالهای ۱۹۴۰ پیشنهاد گردید. هسته در این مدل به عنوان یک توپ کریستال مات دیده می‌شود که می‌تواند ذرات ورودی را منعکس، منحرف، جذب، یا عبور دهد. روش‌های ریاضی متداول در اپتیک برای توضیح این پدیده‌ها که ممکن است در واکنش‌های هسته‌ای رخ دهند، بکار می‌روند. مدل اپتیکی از نظر توضیح نتایج پراکندگی ذرات ورودی بوسیله یک هسته بهترین مدل است. این مدل نمی‌تواند بطور دقیق نتایج را برای پراکندگی غیرالاستیک یا برای واکنشهایی که در آنها یک ذره به وسیله یک هسته جذب می‌گردد، پیش‌بینی نماید.

### ۴-۳-۱ مدل جمعی

این مدل در اوایل سال‌های ۱۹۵۰ بوسیله *A.Bohr* و *B.Mottelson* توسعه یافت. این مدل سعی دارد ویژگی‌های هر دو مدل پوسته‌ای و قطره مایع را با در نظر گرفتن هسته بطور کامل، حرکت‌های اختصاصی نوکلئون‌های خارجی تلفیق نماید. وقتی هسته‌های زوج - زوج را مورد بررسی قرار می‌دهیم به این واقعیت در خور توجه می‌رسیم: از کاربرد مدل پوسته‌ای در صدها مورد هسته‌ای زوج - زوج شناخته شده معلوم می‌شود که همگی آنها دارای یک حالت بیهنجار  $2^+$  هستند که انرژی آن معادل یا کوچکتر از نصف انرژی لازم برای شکستن یک زوج نوکلئونی است این حالت  $2^+$ ، جز در چند مورد استثنایی، در همه موارد پایین‌ترین حالت برانگیخته است. از این رو، ظهور این حالت یک امر تصادفی نیست بلکه از یک خاصیت کلی هسته‌های زوج - زوج ناشی می‌شود که صرفنظر از اشغال حالت‌های خاص مدل پوسته‌ای، در سراسر گستره جرم معتبر است. خواص کلی دیگری نیز وجود دارند که در همه هسته‌ها

مشترک اند، پس بهتر است این خواص را نه با حرکت چند نوکلئون ظرفیت بلکه با تمام هسته مرتبط بدانیم. اینگونه خواص را که منشا آنها در حرکت دسته جمعی اجزای هسته است و بسیاری از نوکلئون های هسته در ایجادشان شرکت دارند، خواص جمعی گویند. این مدل در توضیح و تفسیر ترازها انرژی مشاهده شده در مورد هسته های دور از اعداد جادویی موفق بوده است. این مدل می تواند گشتاورهای مغناطیسی، گشتاورهای چهار قطبی، و گذارهای ایزومری مشاهده شده برای هسته های دور از اعداد جادویی را نیز توضیح دهد [1].

## ۱-۴ شکل عمومی پتانسیل های نوکلئون نوکلئون

در چند دهه گذشته پتانسیل های نوکلئون- نوکلئون زیادی ارائه شده است. همه این پتانسیل ها به روش تطبیق با اطلاعات پراکندگی در انرژی های بالا و پایین، نظریه مزونی یوکاوا<sup>۹</sup> و نتایج بدست آمده در مسأله ی دوترون ساخته شده اند. پتانسیلی که برای برهم کنش بین نوکلئون- نوکلئون در نظر می گیریم بایستی اسکالر و متضمن برخی از تقارن ها باشد و بتواند ساختمان نوکلئون را به خوبی توصیف کند. برای مقایسه پتانسیل ها ابتدا لازم است که سه جزء برهمکنش را در سیستم دو نوکلئونی در نظر بگیریم:

(الف) بخش بلند برد ( $r \geq 2fm$ ):

پتانسیل تبادل تک - پیون (OPEP) به واسطه جرم کوچک پیون، بلند برد ترین قسمت برهم کنش نوکلئون -

<sup>9</sup> Yukawa's Meson Theory

نوکلئون است. شکل کلی برهم کنش نوکلئون - نوکلئون به صورت زیر است [8]:

$$(10-1)$$

$$V_{OPEP} = g^2(\tau_1, \tau_2) [(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\nabla})] f(r)$$

که  $g$  ثابت جفت شدگی پيون - نوکلئون و  $f(r)$  به شکل یوکاواي زیر است:

$$(11-1)$$

$$f(r) = \frac{e^{-(r/\rho_\pi)}}{r/\rho_\pi}$$

برد  $\rho_\pi$  با رابطه زیر داده می شود:

$$(12-1)$$

$$\rho_\pi = \hbar / (m_\pi c) = 1.414 \text{ fm}$$

رابطه (10-1) را میتوان بسط داد و برحسب جملات عملگرهای مرکزی و اسپین - تانسوری نوشت:

$$(13-1)$$

$$V_{OPEP} = \frac{g^2}{3}(\tau_1, \tau_2) \left\{ s_{12} \left[ \frac{3}{r^3} + \frac{3}{\rho_\pi r} + \frac{1}{\rho_\pi^2} \right] f(r) + \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)}{\rho_\pi^2} f(r) - 4\pi(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \delta(r) \right\}$$

این پتانسیل با در نظر گرفتن مقدار اختلاف بین پيون های باردار و خنثی به خوبی برای p-n, p-p, n-n, به صورت مناسب تری ارائه شده است.

ب) بخش متوسط برد  $(1 \text{ fm} \leq r \leq 2 \text{ fm})$ : که از تبادلات مزون های اسکالر بدست می آید (دو پيون و مزون های سنگین)

ج) بخش کوتاه برد ( $r \leq 1\text{fm}$ ) که از تبادلات مزون های برداری بدست می آید (مزون های سنگین و تبادلات پیون های چندگانه که به خوبی در QCD مشهود است).

شرایطی که پتانسیل هسته ای باید آن ها را دارا باشد:

۱-۴-۱ پتانسیل باید یک کمیت نرده ای باشد.

۲-۴-۱ از آنجا که دو نوترون یا دو پروتون غیر قابل تشخیص هستند، هرگاه جای دو ذره را با هم عوض می کنیم نباید پتانسیل تغییر کند.

۳-۴-۱ طبق اصل ناوردایی و ارونی زمانی، اگر جهت حرکت زمان معکوس شود، پتانسیل نباید تغییر کند.

۴-۴-۱ ابتدا نیروهایی را که مستقل از سرعت هستند در نظر می گیریم، به این نیروها، نیروهای استاتیکی می گویند. اگر پتانسیل استاتیکی باشد نمی تواند به  $\vec{P}, \vec{L}$  بستگی داشته باشد. زیرا این ها به سرعت وابسته هستند. بنابراین پتانسیل استاتیکی تنها شامل  $\vec{r}, \vec{s}$  است. بنابراین جمله ای که وابستگی پتانسیل استاتیکی به اسپین را نشان می دهد به صورت: را می توان به عنوان جمله ای که مولفه تانسوری را شامل می شود نشان دهیم.

۵-۴-۱ ویژگی دیگری که نیروی استاتیکی نوکلئون-نوکلئون می تواند به آن وابسته باشد، پاریته تابع موجی است که سیستم را توصیف می کند. از آن جا که پاریته به فرد یا زوج بودن  $L$  بستگی دارد، نیروی هسته ای برای  $L$  زوج و  $L$  فرد متفاوت است.

در نهایت با در نظر گرفتن اطلاعات بدست آمده پتانسیل های پدیده شناختی را می توان به شکل زیر در نظر گرفت [6]:

$$(1-14)$$

$$V = V_C + V_{CS} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_T S_{12} + V_{LS} \vec{L} \cdot \vec{\sigma}$$

$V_C$  انرژی پتانسیل مرکزی معمولی را توصیف می کند .

$V_{CS}$  جمله مرکزی وابسته به اسپین است.  $V_T$  معرف نیروی تانسوری است.  $S_{12}$  عملگر تانسوری است.  $V_{LS}$  نیروی اسپین - مداری را مشخص می کند .

## ۱-۵ مدل نیروی تبادل<sup>۱۰</sup>

در نگاه اول شاید به نظر رسد که نیروی هسته ای نباید به اینکه  $s=0$  یا  $s=1$  و زوج و فرد بود  $L$  وابسته باشد ولی شواهدی دال بر وابستگی نیروی هسته ای به اسپین و تکانه مداری وجود دارد. موارد مشاهده شده را به صورت زیر در نظر می گیریم [16]

۱. انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون مقدار اشباعی دارد .

۲. نوکلئون ها چگالی ثابت دارند .

۳. تحلیل های انتقال فاز و قطبیدگی در انرژی بالا مستلزم حضور نیروهای تبدالی می باشد .

این رفتار به این واقعیت مربوط می شود که نیروهای هسته ای از تبادل مزون نتیجه می شود و تبادل مزون منجر به نیروهای تبدالی می شود. سه نوع نیروی تبدالی وجود دارد: تبادل فضایی یا نیروی ماژرونا، تبادل

<sup>10</sup> Exchange Force Model

اسپینی یا نیروی بارتلت، تبادل فضایی - اسپینی یا نیروی هایزنبرگ که در ادامه به معرفی آنها می پردازیم .

### ۱-۵-۱- پتانسیل بارتلت

این پتانسیل به صورت زیر تعریف می شود :

$$(۱۵-۱)$$

$$V_B \psi = V_B(r) P^s \psi$$

که اسپین دو ذره را در تابع موجی که بر آن عمل می کند، عوض می کند. اگر  $S=1$  (حالت سه تاییه) مبادله اسپین اثری بر تابع موج ندارد و اگر  $S=0$  باشد (حالت تک تاییه) مبادله اسپین صرفاً علامت تابع موج را تغییر می دهد. بنابراین داریم :

$$(۱۶-۱)$$

$$V_B \psi = \begin{cases} +V_B(r)\psi & S=1 \\ -V_B(r)\psi & S=0 \end{cases}$$

### ۲-۵-۱- نیروی ماژرونا

متغیر دیگری که پتانسیل به آن وابسته است و متغیر پاریتته حالت نامیده می شود را توسط اپراتور  $P_x$  نمایش می دهیم که به آن اپراتور تبدیل فضایی گویند و این اپراتور مختصات مکانی دو ذره را تغییر می دهد به این صورت که  $P_x(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ . برای سیستم دو ذره ای به نظر می آید اگر پاریتته سیستم زوج باشد با تبدیل مختصات فضایی، تابع موج ثابت باقی می ماند. در غیر این صورت اگر تابع موج دارای پاریتته فرد باشد، علامت تابع موج تغییر می کند. از آنجا که زوج یا فرد بودن پاریتته، بستگی به زوج یا فرد بودن  $L$  دارد خواهیم داشت:

(۱۷-۱)

$$V_M \psi = \begin{cases} +V_M(r)\psi & L \text{ is even} \\ -V_M(r)\psi & L \text{ is odd} \end{cases}$$

که در آن پتانسیل ماژرونا را به صورت زیر تعریف می کنیم

(۱۸-۱)

$$V_M \psi = V_M(r) P^X \psi$$

مشاهده می شود که نیروی ماژرونا بیان این واقعیت است که پتانسیل هسته ای بستگی به زوج یا فرد بودن  $L$  دارد.

### ۳-۵-۱ نیروی هایزنبرگ

اپراتور دیگر ، اپراتور هایزنبرگ است

(۱۹-۱)

$$V_H = P^X P^S$$

که پتانسیل مربوط به آن به صورت زیر تعریف می شود

(۲۰-۱)

$$V_H \psi = V_H(r) P^X P^S \psi$$

همانطور که دیده می شود اپراتور هایزنبرگ هم مختصات فضایی و هم مختصات اسپینی را تغییر می دهد. علاوه بر این سه نیروی تبادلی، نیروی دیگری به نام نیروی وینگر یا نیروی بدون تبادل وجود دارد که آن را به صورت زیر تعریف می کنیم

(۲۱-۱)

$$V_W \psi = V_W(r) \psi$$

برای خلاصه کردن این بحث، نیروها را به صورت زیر می نویسیم که به صورت ذاتی مرکزی هستند و وابستگی اسپین و پاریته را به صورت زیرنمایش می دهد

(۲۲-۱)

$$V = -V_0 [W(r) + B(r)P^s + M(r)P^x + H(r)P^H]$$

این معادله برای پتانسیل های متفاوت کاربرد دارد زیرا حالت های یک تاییه و سه تاییه و حالت های با پاریده زوج و فرد را در برمی گیرد.

### ۱-۶ توجیه حضور نیروی تبادل در هسته ها

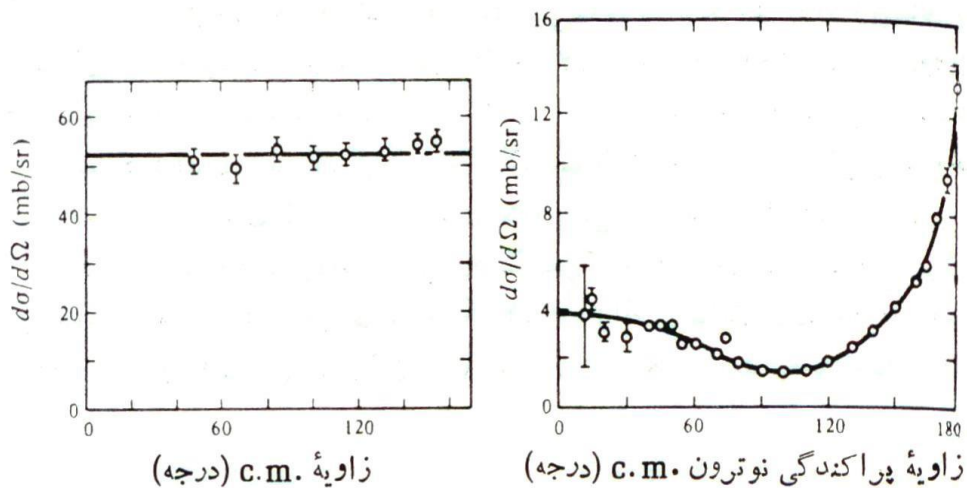
دو دلیلی را که حضور نیروی تبادل را در هسته ها تائید می کند به صورت زیر می باشد:

الف) خاصیت اشباع نیروی هسته ای: از تجربه می دانیم که چگالی هسته ای نسبتاً ثابت است و انرژی بستگی تقریباً به ازای هر نوکلئون  $8MeV$  و ثابت است. به نظر می رسد که هر نوکلئون فقط تعداد کمی از همسایه های نزدیکش را جذب می کند و در فواصل خیلی کوتاه همین نوکلئون همان همسایه های نزدیکش را نیز دفع می کند تا از نزدیکی بیش از حد آنها جلوگیری کند که این را در فیزیک هسته ای با انتخاب یک پتانسیل مرکزی مناسب که برد محدودی و مرکزیتی به صورت یک مغز دافعه داشته باشد توضیح می دهند. شباهت فیزیک اتمی و فیزیک هسته ای در این مورد قابل توجه است.

ب) وجود قله بزرگ رو به عقب در پراکندگی نوترون-پروتون

از مطالعه پراکندگی نوترون-پروتون در انرژی های بالا دلایلی بدست می آید که به نوعی مدل نیروی تبادل را تائید می کند. سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون-پروتون در شکل (۱-۲) نشان داده شده است [16].





شکل (۱-۲): سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون - پروتون (الف) توزیع زاویه ای برای نوترون های با انرژی

۱۴ MeV همسانگرد است. (ب) برای پروتونهای با انرژی ۴۰۰ MeV یک قله برجسته در ۱۸۰° وجود دارد.

سطح مقطع پراکندگی در زوایای نزدیک به صفر دارای قله ای بزرگ است و این یعنی اینکه انتقال تکانه در برخورد بین ذرات فرودی و هدف کوچک است ولی وجود قله ای بزرگ در زاویه پراکندگی  $180^\circ$  توجیهی می تواند داشته باشد؟ اگر فرض کنیم که در طی برخورد نوترون و پروتون جایشان را با هم عوض می کنند مدل تبادل می تواند توضیح قانع کننده ای ارائه کند، و این یعنی اینکه نوترونی که به طرف جلو در حرکت است به پروتون تبدیل می شود و پروتونی که به طرف عقب (از دیدگاه چارچوب مرکز جرم) در حرکت است به نوترون تبدیل می شود. به طور خلاصه اینکه نیروی تبادل هم خصوصیت اشباع نیروهای هسته ای و هم وجود قله بزرگ رو به عقب را در پراکندگی نوترون- پروتون توجیه می کند. در مورد اولی می گوئیم که برای آن که نوعی پیوند اشباعی بین نوکلئون ها وجود داشته باشد باید بین آنها ذره ای (پیونی) رد و بدل شود و در مورد دومی هم می گوئیم که

بین نوکلئون ها ذره ای (پیونی) مبادله می شود که عملاً خصوصیت آنها را تغییر می دهد .

## ۷-۱ نظریه یوکاوا و ذره یوکاوا

مفهوم نیروهای تبادل اولین بار توسط یوکاوا در نظریه مزونی اش بیان شد. طبق این نظریه اگر ما رفتار نیروهای هسته ای را در چارچوب مکانیک کوانتومی نسبیتی مورد بررسی قرار دهیم، یک رفتار طبیعی را مبنی بر این که برد نیروهای هسته ای کوتاه برد است مشاهده خواهیم کرد [3]. برد نیروهای هسته ای از مرتبه  $\frac{\hbar}{m_\pi c}$  می باشد که در آن  $m_\pi$  جرم مزون  $\pi$  یا پیون است. این نظریه توسط داده های تجربی نیز ثابت شده است.  $m_\pi = 266m_e$ . طبق این نظریه عامل برهم کنش بین نوکلئون ها مزون  $\pi$  است. اساس نظریه مزونی یوکاوا معادله نسبیتی شرودینگر است که به آن معادله کلاین-گوردن می گوئیم [3]. همان طور که می دانیم انرژی نسبیتی برای یک ذره آزاد به صورت زیر نوشته می شود:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_\pi^2 c^4 \quad (۲۳-۱)$$

و  $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  و  $P \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$$(۲۴-۱)$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Phi + m_\pi^2 c^4 \Phi$$

با در نظر گرفتن چهار بردار  $x_1, x_2, x_3$  برای قسمت فضایی و  $x_4 = ict$  قسمت وابسته به زمان رابطه بالا به صورت زیر نوشته می شود.

(۲۵-۱)

$$\left[-\hbar^2 c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + m_\pi^2 c^4 \right)\right] \Phi = 0$$

که معادله ی کلاین گوردن را در دو حالت وابسته به زمان و مستقل از زمان به صورت های زیر می توانیم بنویسیم .

وابسته به زمان:

(۲۶-۱)

$$(\square^2 + \mu^2) \Phi = 0 \quad \square^2 = -\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

مستقل از زمان:

 $(\nabla^2 +$ 

(۲۷-۱)

$$\mu^2) \Phi = 0 \quad \nabla^2 = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \mu = \frac{m_\pi c}{\hbar}$$

معادله ی کلاین گوردن :

(۲۸-۱)

$$(\square^2 + \mu^2) \Phi = 0$$

که برای حالت پایا معادله ی کلاین گوردن به صورت زیر در خواهد آمد:

(۲۹-۱)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \rightarrow \square^2 = \nabla^2 \rightarrow (\nabla^2 + \mu^2) \Phi = 0$$

با حل معادله ی اخیر برای  $\Phi$  به جواب  $\Phi = \frac{e^{-\mu r}}{r}$  می رسیم . که برد نیروی هسته ای از مرتبه  $\frac{1}{\mu}$  یا  $\frac{\hbar}{m_\pi c}$  می شود . اگر برد نیروی هسته ای را با  $\frac{\hbar}{m_\pi c}$  مساوی قرار دهیم (برد نیروی هسته ای  $10^{-13} \text{ cms}$ ) به نتیجه ی  $m_\pi = 200 m_e$  می رسیم که با جواب بدست آمده از آزمایشات  $m_\pi = 266 m_e$  قابل مقایسه است. پس معادله ی کلاین گوردن مزون  $\pi$  را توجیه می کند [3].

ذرات تبادلی حامل نیروی هسته ای را مزون می نامند . سبک ترین مزون ها را که مزون  $\pi$  یا پیون نامیده می شود، عامل اصلی آن قسمت از پتانسیل نوکلئون - نوکلئون که برد بلندتر از ۱ تا ۱/۵ فرمی دارد می دانیم . شاید بتوان عامل پیوند هسته ای را تبادل دو پیونی دانست. در صورتی که دو نوکلئون به اندازه کافی به هم نزدیک شوند ممکن است که دو مزون به طور همزمان مبادله شوند . متأسفانه، تبادل چند مزونی فرایند پیچیده ای است که نمی توان آن را به روشنی با نظریه های فعلی میدان محاسبه کرد . بنابراین، اثر آن را در نیروی هسته ای نمی توان با اطمینان حساب کرد . به صورت تجربی می دانیم ۳ نوع مزون  $\pi$  وجود دارد :

۱- مزون  $\pi^0$  که به عنوان کوانتای برهم کنش  $p-p, n-n, n-p$  می باشد .

۲- مزون  $\pi^+$  که فقط در برهم کنش های  $p-p, n-p$  وجود دارد .

مزون  $\pi^-$  که فقط در برهم کنش  $n-p$  وجود دارد

## ۸-۱ معرفی چند پتانسیل

در چند دهه گذشته پتانسیل های نوکلئون - نوکلئون زیادی ارائه شده است. در این قسمت سعی داریم به معرفی و بررسی چند پتانسیل مهم که در چند سال اخیر بسیار به آنها پرداخته شده است و پارامترهای موجود در پتانسیل ها بپردازیم .

### ۸-۱-۱ پتانسیل وود - ساکسون

پتانسیل وود - ساکسون یک انتخاب ساده پدیده شناختی برای پتانسیل تک جسمی است. این پتانسیل، مدلی را برای

خواص توابع موج تک ذره ای حالت مقید و پیوسته تهیه می کند. پتانسیل وود - ساکسون نمی تواند برای انرژی بستگی کل به کار رود چون بر مبنای برهم کنش دو - جسمی استوار نیست. پارامتر های وود ساکسون برای یک برآزش خوب انرژی های تک ذره ای هسته ای و شعاع هسته ای انتخاب شده اند. پتانسیل وود ساکسون حاصل جمع یک پتانسیل مرکزی مستقل از اسپین، یک پتانسیل اسپین مدار و پتانسیل کولونی است [8]:

$$(30-1)$$

$$V(r) = V_0(r) + V_{so}(r)l.s + V_c(r)$$

$V_0(r)$  پتانسیل مرکزی مستقل از اسپین است :

$$(31-1)$$

$$V_0(r) = V_0 f_0(r)$$

$f_0(r)$  شکل فرمی زیر را دارد .

$$(32-1)$$

$$f_0(r) = \frac{1}{1 + \exp[(r - R_0)/a]}$$

$V_{so}$  پتانسیل اسپین - مدار است :

$$(33-1)$$

$$V_{so}(r) = V_{so} \frac{1}{r} \frac{df_{so}(r)}{dr}$$

$f_{so}(r)$  به صورت زیر نوشته می شود :

(۳۴-۱)

$$f_{so}(r) = \frac{1}{1 + \exp[(r - R_{so})/a_{so}]}$$

$V_c(r)$  پتانسیل کولونی پروتون ها است که بر مبنای پتانسیل کولونی یک کره به شعاع  $R_c$  نوشته می شود:

(۳۵-۱)

$$V_c(r) = \frac{Ze^2}{r} \quad r \geq R_c$$

(۳۶-۱)

$$V_c(r) = \frac{Ze^2}{R_c} \left[ \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R_c^2} \right] \quad r \leq R_c$$

شعاع های  $R_0, R_{so}, R_c$  معمولا از رابطه زیر پیروی می کنند.

(۳۷-۱)

$$R_i = r_i A^{1/3}$$

برای هسته ای با فزونی نوترون، پروتون ها پتانسیل قوی تری را نسبت به نوترون ها حس می کنند، چون میانگین پتانسیل پروتون- نوترون از میانگین پتانسیل نوترون - نوترون (یا پروتون - پروتون) قوی تر است.

بنابراین، برای پروتون ها

(۳۸-۱)

$$V_{op} = V_o + \frac{(N - Z)}{A} V_1$$

و برای نوترون ها

(۳۹-۱)

$$V_{on} = V_o + \frac{(N - Z)}{A} V_1$$

داریم و  $r_0, a_0$  در هسته ای نامتقارن (که در آن  $N \neq Z$  است) برای پروتون ها و نوترون ها اندکی متفاوت اند. بنابراین پتانسیل مستقل از اسپین می تواند شش پارامتر داشته باشد (و حتی پارامتر های بیشتری برای نشان دادن وابستگی به جرم). مقادیر این پارامتر ها به گونه ای انتخاب می شوند تا یک همخوانی کلی با انرژی های تک - ذره ای مشاهده شده، جذر میانگین مربع شعاع بار اندازه گیری شده و عامل های شکل پراکندگی الکترون از هسته، داشته باشند. شکل برهم کنش اسپین - مدار ابتدا توسط توماس و فرنکل از شکل برهم کنش اسپین - مدار الکترون های اتمی مبتنی بر نظریه دیراک استخراج شد [8]. در فیزیک هسته ای، برهم کنش اسپین - مدار تماما از برهم کنش نوکلئون - نوکلئون ناشی می شود، اما هنوز بر سر اینکه آیا اثرات نسبیتی خیلی مهم اند یا نه، اختلاف نظرهایی وجود دارد. برهم کنش برای نوکلئون ها در هسته، علامت مخالف دارد و قوی تر از برهم کنش مشابه برای الکترون های اتمی است. در داخل هسته، یک نوکلئون تعداد برابری نوکلئون با اسپین بالا و اسپین پایین در اطرافش می بیند و برهم کنش اسپین - مدار بایستی صفر شود. بنابراین، پتانسیل اسپین مدار در سطح هسته مشابه با رابطه (۱-۳۳) داده می شود و شکل خاص این معادله، توصیف خوبی از وابستگی به اندازه حرکت زاویه ای مداری و جرم می دهد در مقایسه با پتانسیل مستقل از اسپین، میتوان تا شش پارامتر برای برهم کنش اسپین - مدار معرفی کرد. قدرت برهم کنش اسپین - مدار به گونه ای انتخاب می شود که شکافتگی های لازم در مدل (خصوصا برای مقادیر بزرگ  $L$ ) تولید شوند. برای مورد  $N \neq Z$  قدرت  $V_{so}$  می تواند برای پروتون ها و نوترون ها متفاوت باشد، اما در عمل

یکسان فرض می شود. به لحاظ هندسی معمولاً فرض می کنیم که  $r_{so}=r_0$  و  $a_{so}=a_0$  بنابراین، معرفی یک پارامتر برای برهم کنش اسپین - مدار  $V_{so}$  توصیف خوبی از داده ها می دهد. یک مجموعه نوعی از پارامتر های پتانسیل وود - ساکسون عبارت از:  $V_0=-53 MeV, V_1=-30 MeV, V_{so}=22 MeV$  برای قدرت و  $r_{so}=r_0=1.25 fm$  و  $a_{so}=a_0=0.6 fm$  برای هندسه است: برای جمله کولونی، شعاع اندکی کوچکتر است،  $r_c=1.20 fm$ . در مقالات میتوان مجموعه های دیگری از پارامتر ها برای هسته های خاص یا ناحیه های خاص از جرم را مناسب تر یافت [8]

### ۲-۸-۱ پتانسیل شبه حلقوی کراتزر تعمیم یافته<sup>۱۱</sup>

در چند سال اخیر پتانسیل جدیدی را به نام پتانسیل مولکولی کراتزر تعمیم یافته معرفی کردند [17]:

(۱-)

(۴۰)

$$V(r) = D_e \left( \frac{r-r_e}{r} \right)^2$$

به  $D_e, r_e$  ترتیب فاصله تعادلی بین هسته ها و انرژی جدایی می باشد. بعد از آن گروهی دیگر با اضافه کردن جمله زاویه ای پتانسیل جدیدی به نام پتانسیل شبه حلقوی کراتزر تعمیم یافته را ارائه دادند:

(۴۱-۱)

$$V(r, \theta) = D_e \left( \frac{r-r_e}{r} \right)^2 + \eta \frac{\cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta}$$

<sup>11</sup> Ring shaped Kratzer potential



که در آن  $\eta$  یک مقدار حقیقی مثبت می باشد هرچند در این پتانسیل هنگامی که مقدار آرگومان به صفر میل می کند جمله دوم پتانسیل به بینهایت میل می کند .

### ۱-۸-۳ پتانسیل یوکاوا و ۱۲۱

حدود هفتاد سال پیش یوکاوا نظریه مزون را برای توضیح برهمکنش های میان نوکلئون ها پیشنهاد کرد و پتانسیل را به شکل زیر معرفی نمود [18]:

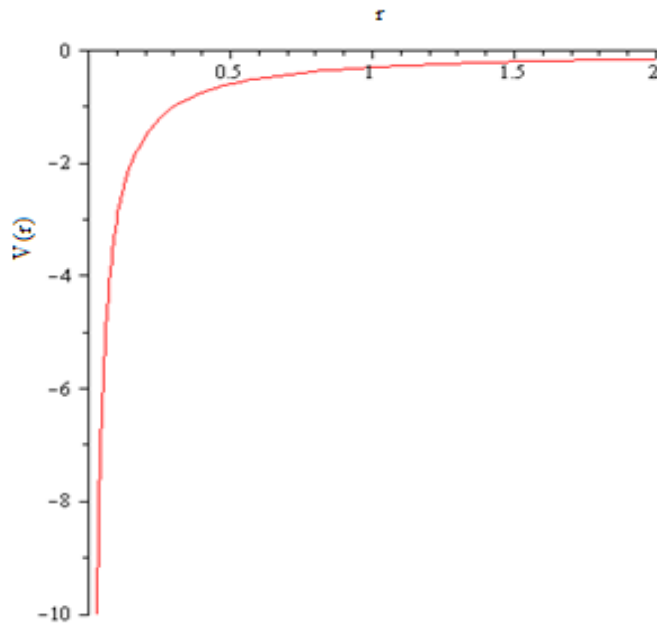
$$(۱-۴۲)$$

$$v_c(r) = -v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

که در آن  $\alpha$  برد نیروی هسته ای و  $v_0$  عمق پتانسیل می باشد. بر خلاف نیروی کولنی که بستگی ساده ای به فاصله دارد، نیروی هسته ای به طور خیلی پیچیده ای به فاصله وابسته است. پتانسیل یوکاوا برای بیان این منظور یکی از بهترین پتانسیل ها می باشد. این پتانسیل تابع نمایی از فاصله است به همین علت، پتانسیل و نیرو سریعاً با افزایش فاصله به صفر میل می کند. یکی از نکات مهم در مورد پتانسیل یوکاوا آن است که معادله شرودینگر با این پتانسیل به طور دقیق و تحلیلی قابل حل نمی باشد.

---

<sup>12</sup> Yukawa potential



شکل (۳-۱): پتانسیل یوکاوا بر حسب تابعی از  $r$  بر حسب مقادیری خاص

### ۱-۸-۴ پتانسیل مای تایپ (*Mie-type*)

پتانسیل *Mie-type*، یک دسته عمومی از پتانسیل‌ها را با فرم کلی زیر را تعریف می‌کند [19,20]:

(۴۳-۱)

$$V(r) = -V_e \left[ \frac{p}{p-q} \left( \frac{r_e}{r} \right)^q - \frac{q}{p-q} \left( \frac{r_e}{r} \right)^p \right] \quad (V_e > 0)$$

این پتانسیل معمولاً برای توصیف برهم‌کنش بین دو اتم در فیزیک مولکولی [21]، اسپکتروسکوپی مولکولی<sup>۱۳</sup> [22] و مکانیک سیالات [23] به کار رفته است؛ اما در برهم‌کنش‌های مربوط به ذرات درون یک هسته استفاده نشده است. در (۴۳-۱)،  $r_e$  فاصله تعادل بین هسته‌ای<sup>۱۴</sup>،  $V_e$  انرژی جدایی<sup>۱۵</sup> بین دو اتم و  $p$  و  $q$  دو پارامتر هستند. گرچه با تغییر

<sup>13</sup> Molecular Spectroscopy

<sup>14</sup> Equilibrium Internuclear Length

<sup>15</sup> Disassociation Energy

مقادیر  $p$  و  $q$  پتانسیل *Mie-type* تغییر می‌کند؛ اما فرم کلی و شرایط مرزی آن تغییر نمی‌کند. این شرایط عبارتند از:

$$(۴۴-۱)$$

$$\begin{cases} V(0) = +\infty \\ V(+\infty) = 0 \\ V(r_e) = -V_e \\ \left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=r_e} = 0 \end{cases}$$

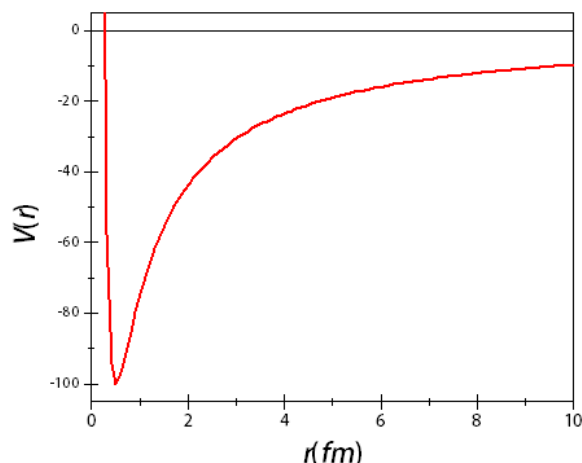
که با رفتار کلی و شرایط مرزی یک پتانسیل مناسب هسته - ای نیز سازگار است. اختیاری بودن پارامترهای  $p$  و  $q$  امکان تغییر پتانسیل را تا جایی که نتایج تجربی به خوبی باز تولید شوند، ایجاد می‌کند.

این پتانسیل به ازای  $p=2$  و  $q=1$  به صورت

$$(۴۵-۱)$$

$$V(r) = -V_e \left( \frac{2r_e}{r} - \frac{r_e^2}{r^2} \right)$$

در می‌آید که آن را در شکل (۴-۱) به ازای  $r_e = 0.5 (fm)$  و  $V_e = 100 (MeV)$  رسم کرده ایم.



شکل (۴-۱) رفتار کلی و شرایط مرزی یک پتانسیل *Mie-type*

بعد از معرفی کلی در مورد نیروهای هسته ای و خواص برهم کنش های نوکلئون - نوکلئون، به معرفی ویژگی های ایزوتوپ های کربن می پردازیم.

## ۹-۱ مروری بر ویژگی های کربن

کربن<sup>۱۶</sup> (C) را می توان یک عنصر استثنائی در جدول تناوبی دانست. ترکیبات کربنی تا به آن حد گسترده است که یکی از گرایش های رشته شیمی با عنوان شیمی آلی<sup>۱۷</sup> به طور کامل به بررسی ترکیبات این عنصر از جدول تناوبی می پردازد. پیوند کوالانسی هر اتم کربن با انواع دیگر اتم ها یا اتم های کربن دیگر، ساختارهای نامحدود و بسیار متنوع را ایجاد می نماید. از جهت دیگر بسیاری از ترکیباتی که در طبیعت طی روش های طبیعی سنتز ساخته می شوند نیز از خانواده ترکیبات کربنی اند. گستره وسیعی از ترکیبات شامل ترکیبات متنوع نفتی تا مواد دارویی و بسپارهای آلی<sup>۱۸</sup> زیرمجموعه ترکیبات کربن قرار می گیرند [24]. در نانوفناوری نیز، ترکیبات کربنی دسته مهم و مشخصی را به خود اختصاص می دهند که با عنوان نانوساختارهای کربنی<sup>۱۹</sup> خوانده می شوند. نانوساختارهای کربنی خصوصیات فیزیکی- شیمیایی منحصر به فردی از خود نشان می دهند و نقش گسترده ای در زمینه فناوری های نوین و پیشرفته دارند [25]. از نظر فراوانی کربن یازدهمین عنصر موجود در قشر جامد زمین است اما از لحاظ تعداد ترکیبات شناخته شده کربن بعد از هیدروژن رتبه دوم را به خود اختصاص می دهد، که اغلب این ترکیبات را به عنوان مواد آلی طبقه بندی می کنند. ترکیبات کربن زیر بنای حیات را در زمین می سازند و چرخه کربن - نیتروژن قسمتی از انرژی تولید شده توسط خورشید و ستارگان

---

<sup>16</sup> Carbon

<sup>17</sup> Organic Chemistry

<sup>18</sup> Polymers

<sup>19</sup> Carbon Nanostructures

دیگر را تامین می کند. کربن در اثر انفجار بزرگ  $^{20}$  حاصل نشده، چون این عنصر برای تولید نیاز به یک برخورد سه مرحله ای ذرات آلفا ( هسته اتم هلیم ) دارد. تاکنون چهار شکل مختلف از کربن شناخته شده است: غیر متبلور (آمورف)، گرافیت، الماس و فولرن (مولکولهایی در حد بیلیونیوم متر هستند که در شکل ساده آن،  $^{60}$  اتم کربن یک لایه گرافیتی با ساختمان  $^3$  بعدی منحنی، تشکیل می دهند) [24]. کربن دارای  $^{15}$  ایزوتوپ است از  $^8C$  تا  $^{22}C$ . این ایزوتوپ ها در تعداد نوترونهای هسته نابرابرند و فقط دو تا از آن ها به فراوانی یافت می شود و پایدار هستند. (کربن  $^{12}$  و کربن  $^{13}$ ) و یکی از آن ها (کربن  $^{14}$ ) به مقادیر کم در اتمسفر بالایی در اثر واکنش نوترون های موجود در پروتون های کیهانی با نیتروژن  $^{14}$  تولید می شود.  $^{12}$  ایزوتوپ باقی مانده کربن فقط به صورت مصنوعی تولید شده اند. دو ایزوتوپ کربن  $^{12}$  و کربن  $^{13}$  پایدار هستند.  $^{12}$  ایزوتوپ دیگر دستخوش واکنش های هسته ای خود به خودی قرار می گیرند، که هسته آن ها را تغییر می دهند. مثلا کربن  $^{14}$  به کندی به نیتروژن  $^{14}$  و الکترون تجزیه می شود. بیشترین رادیو ایزوتوپ مصنوعی  $^{11}C$  است با نیمه عمر  $^{20/33}$  دقیقه و بقیه رادیو ایزوتوپ ها دارای نیمه عمر زیر  $^{20}$  ثانیه و گاهی کمتر از  $^{200}$  میلی ثانیه (هزارم ثانیه) هستند. فراوانی کربن در طبیعت به صورت زیر است: ایزوتوپ  $^{12}C$  با فراوانی  $^{98,89}$  درصد و  $^{13}C$  با میزان فراوانی  $^{1,11}$  درصد می باشد [26]. برای بررسی خصوصیات فیزیکی ایزوتوپ های کربن در یک دسته بندی نوعی آنها را به دو دسته ایزوتوپ های زوج - زوج (تعداد پروتون زوج - تعداد نوترون زوج) و ایزوتوپ های زوج - فرد

<sup>20</sup> Big Bang

(تعداد پروتون زوج- تعداد نوترون فرد) تقسیم بندی می کنیم. برای محاسبه ویژگی های استاتیکی ایزوتوپ های زوج - زوج و همچنین محاسبه ترازهای انرژی حالت پایه و برانگیخته این ایزوتوپ ها از مدل لایه ای<sup>21</sup> و جمعی استفاده می کنیم و با توجه به آنکه هم پروتون و هم نوترون این ایزوتوپ ها زوج هستند اسپین پاریته حالت پایه آنها  $0^+$  است و برای ایزوتوپ های هسته های زوج - فرد معمولاً از مدل تک - ذره ای<sup>22</sup> استفاده می کنیم [27] و اسپین پاریته حالت پایه را با توجه به نوترون مزدوج نشده محاسبه می کنیم. البته اسپین پاریته حالت پایه کربن 17 و 19 متفاوت با آنچه از مدل لایه ای انتظار داریم به دست می آید برای توجیح این حالت  $J=j-1$  در نظر می گیریم که توسط Bohr و Mottelson توضیح داده شده است [28]. در این قسمت به معرفی برخی از کاربردها و ویژگی های فیزیکی ایزوتوپ های کربن می پردازیم.

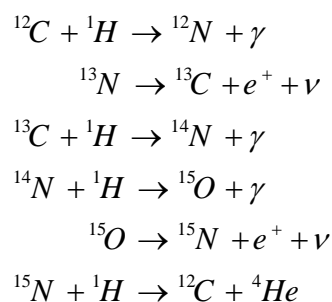
## ۱-۹-۱ کربن ۱۲

فراوان ترین ایزوتوپ کربن،  $^{12}\text{C}$  است که دارای ۶ پروتون و ۶ نوترون است. ایزوتوپ کربن ۱۲ به خاطر اهمیت در علم ستاره شناسی و نجوم، به طور گسترده ای، هم از لحاظ تجربی و هم از لحاظ تئوری مورد مطالعه قرار گرفت است. همچنین در مبحث همجوشی ها، هرگاه علاوه بر هیدروژن و هلیم عناصر سنگین تری در داخل یک ستاره موجود باشد، رشته متفاوتی از واکنش های همجوشی ممکن است به وقوع بپیوندد. یکی از این رشته های ممکن چرخه کربن یا چرخه CNO است که به صورت زیر است [1]

<sup>21</sup> Shell Model

<sup>22</sup> Single Particle

(۴۶-۱)



در این حالت،  ${}^{12}\text{C}$  نه تولید می شود و نه از بین می رود، بلکه به صورت یک عامل فعل و انفعال وارد عمل می شود تا به فرآیند همجوشی کمک کند. چرخه کربن می تواند سریعتر از چرخه پروتون- پروتون دنبال شود. اسپین پارितه حالت پایه آن  $0^+$  است و مقدار انرژی بستگی تجربی آن  $92/16 \text{ MeV}$  است [29] و ایزواسپین حالت

پایه آن با توجه به رابطه  $T = \frac{Z-N}{2}$  دارای مقدار 0

است. در حیطه پزشکی میتوان به پرتودرمانی با یون کربن<sup>۲۳</sup> اشاره کرد، که نوعی پرتودرمانی است که در آن از ایزوتوپ کربن-۱۲، استفاده می گردد. کاربرد این روش در درمان برخی گونه های سرطان است [30]. این روش نخستین بار در آزمایشگاه ملی لارنس برکلی توسعه پیدا کرد. امروزه مراکز معدودی در حال حاضر صاحب این نوع فناوری نوین در فیزیک پزشکی هستند، که اکثر آنها در ژاپن و اروپا هستند. این روش هنوز تحت پژوهش قرار دارد و بصورت بالینی وارد پرتودرمانی نگردیده است.

### ۱-۹-۲ کربن ۱۳

کربن ۱۳ دارای عدد جرمی فرد و اسپین هسته ای  $I=1/2$  است. فراوانی طبیعی کربن ۱۳ بسیار پایین است و فقط ۱,۱۱ درصد از کلیه اتم های کربن در طبیعت اتم های

<sup>23</sup> Carbon Ion Radiotherapy

کربن ۱۳ است. بررسی ایزوتوپ های فرد به صورت خواص هامیلتونی تک ذره صحیح است. مقدار انرژی بستگی تجربی برای این هسته  $97/118 \text{ MeV}$  است و دارای پارامتر منفی می باشد [29]. کربن ۱۳ وسیله مناسبی برای مشاهده مکانیزم تشکیل پیوند و ساختمان ترکیبات کربن از طریق طیف سنجی تشدید مغناطیسی هسته<sup>۲۴</sup> محسوب می شود که تکنیک بسیار خوب و دقیق در بررسی ساختار مولکولی است [31].

### ۱-۹-۳ کربن ۱۴

کربن ۱۴ نیز از جمله ایزوتوپ های زوج-زوج کربن است که بر خلاف دو ایزوتوپ توضیح داده شده (کربن ۱۲ و ۱۳) پایدار نبوده و دستخوش واکنش های هسته ای می شود و دارای مد واپاشی  $\beta^-$  است. البته خصوصیات ایزوتوپ های کربن در جدول (۱-۲) نشان داده شده است. از جمله کاربرد های کربن ۱۴، تخمین سن اشیا است. از طرفی می دانیم بمباران زمین بوسیله پرتو های کیهانی ذخیره ثابتی از نوترون ها را در جو زمین تولید می کند. این نوترون ها با ازت جو واکنش می کنند و  $^{14}\text{C}$ ،  $^3\text{H}$  و احتمالاً مقدار کمی  $^4\text{He}$  با  $^{11}\text{Be}$  به وجود می آورند.  $^{14}\text{C}$  و  $^3\text{H}$  پرتو زا هستند، نیمه عمر  $^{14}\text{C}$ ، ۵۵۶۸ سال است. فرض می شود که کربن پرتوزا با اکسیژن واکنش می کند و  $\text{CO}_2$  تشکیل می دهند و این  $\text{CO}_2$  با  $\text{CO}_2$  موجود در جو مخلوط می شود. بنابراین می توان گفت که جذب پرتو های کیهانی معادل است با تولید دی اکسید کربن پرتوزا مخلوط با دی اکسید کربن جو. از آنجا که گیاهان و موجودات زنده نهایتاً برای ادامه حیات به دی اکسید کربن محتاج اند، آنها نیز پرتو زا می شوند. فرضیه های علمی و آزمایش ها نشان می



دهد که تعادلی بین آهنک واپاشی اتم های کربن پرتوزا و آهنک جذب اتم های کربن پرتوزا برای تمام موجودات زنده وجود دارد. هنگامی که موجود زنده می میرد، جذب متوقف می شود و  $^{14}\text{C}$  در بافت واپاشیده می شود. مقدار تعیین شده تعادل برابر  $10/3$  فروپاشی در دقیقه برای هر گرم کربن است. با استفاده از این مقدار می توان سن پس از مرگ مواد آلی را تعیین کرد. معادله فعالیت ویژه ، در یک ماده آلی به صورت زیر است:

$$\text{Spact} = 10.3 e^{-0.693 t/556} \quad (1-47)$$

که در آن  $t$  تعداد سال های پس از مرگ است. هنگامیکه اندازه گیری سن مورد نظر است، نمونه گیری باید به طور دقیق صورت گیرد. این نمونه باید حاوی اتم های کربنی باشد که در زمان مرگ آن وجود داشته است، تغییرات شیمیایی نمی تواند سبب جایگزینی اتم های کربن گردد. از آنجا که نونه ها طی هزاران سال پس از مرگ مستعد تغییرات فراوان اند، سن یابی به وسیله  $^{14}\text{C}$  به تنهایی قابل اعتماد نیست. فنون سن یابی به وسیله کربن اخیرادر برنامه مخاطرات راکتور در بررسی زمین شناسی ایلات متحد امریکا به کار رفته است. هدف از این برنامه مشخص کردن فرآیندهای زمین شناختی است که ممکن است در تعیین محل راکتور قدرت تاثیر داشته باشند [32].

### ۱-۹-۴ کربن ۱۵

کربن ۱۵ دارای ۹ نوترون می باشد و دارای اسپین نیم صحیح است. مقدار تجربی انرژی بستگی برای این ایزوتوپ  $10.6/5 \text{ MeV}$  است و حالت پایه آن  $J^{\pi} = \frac{1}{2}^{+}$  است و انرژی اولین

حالت برانگیخته  $E(\frac{5}{2}^+) = 0.74 \text{ MeV}$  است [29]. در جدول (۲-۱) جرم ایزوتوپ ها و اسپین پارितه و ایزواسپین ایزوتوپ های کربن محاسبه و نمایش داده شده است .

جدول (۲-۱) برخی خصوصیات ایزوتوپ های کربن [33]

ایزوا اسپین	اسپین ن	نیمه عمر	ایزوتوپ دختر	مد واپاشی	جرم ایزوتوپ (u)	${}^A_Z X_N$
-2	$0^+$	$2 \times 10^{-21} (s)$	${}^6\text{Be}$	$2p$	8.0376	${}^8_6\text{C}_2$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}^-$	126.5(ms)	${}^9\text{B}$	$\beta^+ (60\%)$	9.031036	${}^9_6\text{C}_3$
			${}^8\text{Be}$	$\beta^+, p (23\%)$		
			${}^5\text{Li}$	$\beta^+, \alpha (17\%)$		
-1	$0^+$	19.290(s)	${}^{10}\text{B}$	$\beta^+$	10.01685	${}^{10}_6\text{C}_4$
-1/2	$\frac{3}{2}^-$	20.334(min)	${}^{11}\text{B}$	$\beta^+ (99.79\%)$	11.01143	${}^{11}_6\text{C}_5$
			${}^{11}\text{B}$	$K - \text{Capture}$		
0	$0^+$	پایدار			12	${}^{12}_6\text{C}_6$

$1/2$	$1/2^-$	پاید ار			13.003355	$^{13}_6C_7$
1	$0^+$	$5.730 \times 10^3$ years	$^{14}N$	$\beta^-$	14.00324	$^{14}_6C_8$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}^+$	2.449(s)	$^{15}N$	$\beta^-$	15.01059	$^{15}_6C_9$

جدول (۲-۱) برخی خصوصیات ایزوتوپ های کربن [33]

ایزوا سپین	اسپین ن	نیمه عمر	ایزوتوپ دختر	مد واپاشی	جرم ایزوتوپ (u)	$^A_Z X_N$
2	$0^+$	0.747(s)	$^{15}N$	$\beta^-, n(97.9\%)$	16.01470	$^{16}_6C_{10}$
			$^{16}N$	$\beta^-(2.1\%)$		
$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}^+$	193(ms)	$^{17}N$	$\beta^-(71.59\%)$	17.02258	$^{17}_6C_{11}$
			$^{16}N$	$\beta^-, n(28.49\%)$		
3	$0^+$	92(ms)	$^{18}N$	$\beta^-(68.5\%)$	18.02676	$^{18}_6C_{12}$
			$^{17}N$	$\beta^-, n(31.5\%)$		
$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}^+$	46.2(ms)	$^{18}N$	$\beta^-(46\%)$	19.03480	$^{19}_6C_{13}$
			$^{19}N$	$\beta^-, n(47\%)$		
			$^{17}N$	$\beta^-, 2n(7\%)$		

4	$0^+$	16(ms)	$^{19}N$	$\beta^-$ (28%)	20.04032	$^{20}_6C_{14}$
			$^{20}N$	$\beta^-, n$ (72%)		
$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}^+$	< 30ns	$^{20}C$	n	21.04938	$^{21}_6C_{15}$
5	$0^+$	6.2(ms)	$^{22}N$	$\beta^-$	22.02258	$^{22}_6C_{16}$

### ۱۰-۱ کاربرد های کربن

۱۰-۱-۱ عمده ترین کاربرد اقتصادی کربن، فرم هیدروکربن ها می باشد که قابل توجه ترین آنها سوخت های فسیلی، گاز متان و نفت خام است.

۱۰-۱-۲ ایزوتوپ  $^{14}C$  که در ۲۷ فوریه ۱۹۳۰ کشف شد در سن یابی کربن پرتوزا مورد استفاده است.

۱۰-۱-۳ گرافیت در ترکیب با خاک رس بعنوان مغز مداد بکار می رود.

۱۰-۱-۴ الماس جهت تزئین و نیز در مته ها و سایر کاربرد هایی که سختی آن مورد استفاده است کاربرد دارد.

۱۰-۱-۵ برای تولید فولاد، به آهن کربن اضافه می کنند.

۱۰-۱-۶ کربن در میله کنترل در رآکتورهای اتمی بکار می رود.

۱۰-۱-۷ گرافیت به شکل پودر و سفت شده به عنوان ذغال چوب برای پخت غذا، در آثار هنری و موارد دیگر مورد استفاده قرار می گیرد.

۱-۱۰-۸ قرص های ذغال چوب در پزشکی که به صورت قرص یا پودر وجود دارند برای جذب سم از دستگاه گوارشی مورد استفاده اند.

۱-۱۰-۹ خصوصیات ساختمانی و شیمیایی فولرن به شکل ریزتیوب کربن، کاربردهای بالقوه امیدوار کننده ای در رشته در حال شکل گیری نانوتکنولوژی دارد.

## فصل دوم

### روش های تحلیلی و عددی حل مساله

## ۱-۲ مقدمه

در این فصل یک فضای لازم برای حل مسائل چند جسمی - یعنی فضای فوق کروی<sup>۲۵</sup> - را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا یک مجموعه مناسب از مختصات (مختصات ژاکوبی) و بعد از آن متغیرهای فوق کروی را معرفی می‌کنیم. در ادامه مروری بر روشهای تحلیلی و عددی برای حل برخی مسائل داریم. از جمله معادلاتی که برای توصیف فیزیک سیستم‌های غیرنسبیتی و نسبیتی به کار می‌روند می‌توان به معادلات شرودینگر<sup>۲۶</sup>، دیراک<sup>۲۷</sup> و کلاین گردن<sup>۲۸</sup> و  $DKP^{29}$  اشاره نمود. برای این معادلات، برخی پتانسیل‌ها از جمله پتانسیل کولونی، نوسانگر هماهنگ ساده، سد پتانسیل به روش تحلیلی به صورت دقیق قابل حل می‌باشند لذا برای دیگر پتانسیل‌ها روش‌های حل عددی ممکن است راه‌گشا باشد. همچنین برای حل مسائلی که به طور دقیق حل نمی‌شوند به تکنیک‌های جبری دیگری متوسل می‌شویم. از جمله روش‌هایی که برای حل معادله شرودینگر پیشنهاد شده می‌توان به روش  $NU[34]$ ، روش ابرتقارنی $[35]$ ، انتگرال مسیر  $[36]$ ، اشاره کرد. در سال‌های اخیر توجه زیادی به روش  $NU$  برای حل سیستم‌های کوانتوم مکانیکی شده است. این تکنیک جبری برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم پایه ریزی شده و علاوه بر

---

<sup>25</sup> Hyperspherical Space

<sup>26</sup> Schrodinger

<sup>27</sup> Dirac

<sup>28</sup> Klein-Gordon

<sup>5</sup> Duffin – Kemmer - Petiau

معادله شرودینگر برای حل معادلات دیراک، کلاین گردن و DKP در حضور پتانسیل های مرکزی و غیر مرکزی به کار برده می شود [37, 38, 39]. اغلب روش های حل معادله ی شرودینگر بر اساس سیستم های دو جسی می باشد، پس نیاز به دستگاه مختصات جدیدی داریم تا برای سیستم های چند جسی نیز بتوانیم از این روش ها استفاده کنیم. همچنین تمام هسته ها به صورت چند نوکلئونی می باشند یعنی برای بدست آوردن ویژگی های استاتیکی و دینامیکی هسته ها در نظر گرفتن تأثیر تمام اجزا هسته مورد نیاز است که امکان پذیر نیست، مگر تعریف دستگاه مختصات جدید که با توجه به تعداد ذرات هسته قابل انعطاف باشد. دستگاه مختصات "ژاکوبی" این نیاز ما را به خوبی رفع می کند.

## ۲-۲ دستگاه مختصات ژاکوبی<sup>۳۰</sup>

در یک سیستم دو نوکلئونی کمیت هایی که نیرو به آنها وابسته است عبارتند از:  $r_{12}$  یعنی برداری که مکان ذره ۱ را به ۲ ارتباط می دهد،  $P_{12} = P_2 - P_1$  یعنی تکانه نسبی آنها و  $S$  که اسپین کل است و تکانه زاویه ای مداری آنها یعنی  $L = r_{12} \times p_{12}$ . حال اگر سیستم مورد مطالعه ما یک سیستم  $A$  ذره ای باشد در این صورت معادله ی شرودینگر مستقل از زمان آن به صورت  $H\Psi = E\Psi$  نوشته می شود که در آن هامیلتونی به صورت زیر معرفی می شود [40, 41]:

(۱-۲)

$$H = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j \\ i < j}}^N \left( \frac{p_i}{2m_i} + V(r_i) + V(r_i, r_j) \right)$$

<sup>30</sup> Jacobi Coordinates

$i \neq j$  به این معنا که : هیچ ذره ای با خودش بر هم کنش ندارد .

$i < j$  از نوشتن جملات تکراری صرفنظر می شود .

$V(r_i)$  پتانسیل محبوس کننده که اثرات محیطی را شامل می شود، مثلا وقتی ذره ای تحت تأثیر میدان الکتریکی یا مغناطیسی باشد تأثیر این میدان های خارجی بر روی ذره را در  $V(r_i)$  مشاهده می کنیم .  $V(r_i, r_j)$  این جمله شامل بر هم کنش هر دو ذره با یکدیگر است. برای حل معادلات نیاز به دستگاه مختصات مناسب برای آن مسأله داریم . یکی از این دستگاه های مختصات که برای مجموعه ای  $A$  ذره ای مورد استفاده قرار می گیرد، مختصات ژاکوبی می باشد. برای یک سیستم  $A$  ذره ای میتوان  $N=A-1$  بردار ژاکوبی و در نتیجه  $3N$  مختصه ژاکوبی تعریف کرد و در هر تعریف هر بردار ژاکوبی در واقع مرکز جرم یک زیر سیستم را به ذرات باقی مانده وصل می کند [42]. وقتی ذرات مورد بررسی نوکلئون ها باشند میتوان با چشم پوشی از اختلاف جرم بین پروتون و نوترون، ذرات سیستم را هم جرم در نظر گرفت. برای چنین سیستمی میتوان  $N$  بردار ژاکوبی را به صورت زیر تعریف کرد [43]

$$\vec{\xi}_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}} \left( \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \vec{r}_j - \vec{r}_{i+1} \right) \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2-2)$$

$\vec{\xi}_i$  بردار مکان هر نقطه نسبت به مرکز نقاط قبلی است. بردار مرکز جرم برای هر  $A$  ذره به صورت زیر تعریف می شود



(۳-۲)

به صورت زیر است:

$$R = \frac{1}{A}(r_1 + r_2 + \dots + r_A) = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A r_i = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} r_i$$

(۴-۲)

$$\prod_{i=1}^N d\vec{r}_i = N^{\frac{3}{2}} dR \prod_{j=1}^{N-1} d\vec{\xi}_j = dx$$

اگر پتانسیل بین ذرات تنها وابسته به توان هایی از فاصله نسبی آنها باشند می توان آنها را بر حسب ابر شعاع نوشت. در این صورت به این پتانسیل ها ، پتانسیل های فوق مرکزی می گویند .

### ۳-۲ متغیر های فوق کروی<sup>۳۱</sup>

هسته ها شکلی تقریبا کروی دارند و معمولا پتانسیل برهم کنش بین نوکلئون ها را ، پتانسیل مرکزی در نظر می گیرند لذا به جای مختصه دکارتی با مختصات فوق کروی سرو کار خواهیم داشت. از بین  $D=3N$  مختصه فوق کروی ،  $2N$  مختصه به زوایای قطبی و سمتی بردار های ژاکوبی مربوط می شوند ،  $N-1$  مختصه فوق زاویه<sup>۳۲</sup> هستند و تک مختصه دیگر نیز فوق شعاع است.

فوق شعاع  $r$  با رابطه زیر تعریف می شود [44]

(۵-۲)

$$r^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_N^2 = \sum_{i=1}^N \xi_i^2$$

<sup>31</sup> Hyperspherical Variables

<sup>32</sup> Hyperangle

3N-1 مختصه دیگر بر اسا تعریف «زرنیک-برینکمن»<sup>۳۳</sup> به صورت زیر است [45]

$$(۶-۲)$$

$$\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$$

که در آن  $\omega_i$  معرف دو زاویه سمتی و قطبی مربوط به هر بردار ژاکوبی  $\xi_i$  است که مجموعا شامل 2N زاویه می شود و N-1 مختصه دیگر  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$  فوق زاویه هستند که با رابطه زیر تعریف می شوند

$$(۷-۲)$$

$$|\xi_i| = \xi_i = r \cos \varphi_i \sin \varphi_{i+1} \sin \varphi_{i+2} \dots \sin \varphi_N \quad (i = 1, 2, \dots, N); (0 < \varphi_i < \pi/2)$$

در یک نمایش دیگر زوایا و فوق زوایا به صورت زیر تعریف می شوند [46]

$$(۸-۲)$$

$$r = \left( \sum_{i=1}^D x_i^2 \right)^{1/2}$$

$$(۹-۲)$$

$$x_1 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{D-1}$$

$$x_2 = r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{D-1}$$

⋮

$$x_i = r \cos \theta_{i-1} \sin \theta_i \sin \theta_{i+1} \dots \sin \theta_{D-1}$$

⋮

$$x_{D-1} = r \cos \theta_{D-2} \sin \theta_{D-1}$$

$$x_D = r \cos \theta_{D-1}$$

که در آن داریم  $0 \leq r < \infty; -\pi \leq \theta_i \leq \pi; 0 \leq \theta_i \leq \pi (2 \leq i \leq D-1)$

کمياتی  $\xi_N, \xi_{N-1}, \dots, \xi_2, \xi_1$  و  $\xi_N$  که در (۷-۲) آورده شده اند، به

ترتیب متناظرند با کميات  $(\sum_{j=1}^{2N+1} x_j^2)^{1/2}; x_D, x_{D-1}, \dots, x_{2N+2}$  در

<sup>33</sup> Zernike-Brinkman

رابطه (۹-۲). با استفاده از رابطه (۹-۲) اندازه زوایا به صورت

(۱۰-۲)

$$\tan \theta_i = \frac{(\sum_{j=1}^i x_j^2)^{1/2}}{x_{i+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, D-1)$$

به دست می آید.

## ۴-۲ کلیات روش $^{34}NU$

این روش براساس تقلیل یک معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی دوم است. در اینجا معادله شرودینگر، به یک معادله از نوع فوق هندسی پایه ریزی شده است [34]. پس از انتخاب یک تغییر متغیر مناسب،  $s=s(r)$  معادله ی تبدیل یافته را به صورت زیر داریم:

$$(11-2)$$

که  $\sigma$  و  $\tilde{\sigma}$  چند جمله ای هایی حداکثر از درجه ی دوم و  $\tilde{\tau}$  یک چند جمله ای حداکثر از درجه ی اول است. با در نظر گرفتن تابع موج  $\Psi_n(s)$  به صورت:

$$(12-2) \quad \Psi_n(s) = \phi_n(s) y_n(s)$$

معادله ی (۱۱-۲) به صورت یک معادله از نوع فوق هندسی تقلیل داده می شود؛ [34]

$$(13) \quad \sigma(s) y_n''(s) + \tau(s) y_n'(s) + \lambda y_n(s) = 0$$

<sup>34</sup> The Nikiforov – Uvarov

$$\tau' < 0, \quad \tau(s) = \tilde{\tau}(s) + \tau\pi(s) \quad (14-2)$$

چند جمله ای  $\tau(s)$  با علامت پریم نشان می دهد که باید مشتق مرتبه ی اولش منفی باشد .

$\lambda$  پارامتری است که به صورت زیر تعریف می شود [34].

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad (15-2)$$

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s)$$

باید به این نکته توجه کرد که  $\lambda$  و  $\lambda_n$  از یک جواب خاص، شکل  $y(s) = y_n(s)$  که چند جمله ای درجه  $n$  است بدست می آیند، بعلاوه این که جمله  $y_n(s)$  تابع موج معادله (2-12)، یکی تابع از نوع فوق هندسی که از رابطه رد ریگز ذیل بدست می آید [34].

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho_n} \frac{d^n}{ds^n} (\sigma^n(s) \rho(s)) \quad (16-2)$$

که در آن  $B_n$  ثابت نرمالیزاسیون است و  $\rho(s)$  تابع وزنی است که باید شرط زیر را برآورده کند .

$$\omega(s) = \sigma(s) \rho(s) \quad \frac{d}{ds} \omega(s) = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \omega(s) \quad (17-2)$$

تابع  $\pi(s)$  و پارامتر  $\lambda$  به صورت زیر تعریف می شوند [34].

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + K\sigma(s)} \quad (18-2)$$

(۱۹-۲)

از آنجایی که باید  $\pi(s)$  حداکثر یک چند جمله‌ای درجه یک باشد، جملات زیر رادیکال در معادله (۱۸-۲) باید به صورت یک چند جمله‌ای درجه اول مرتب شوند که این در صورتی ممکن است که مشخص کننده ی آن،  $\Delta = b^2 - 4ac$ ، صفر باشد. در این حالت یک معادله برای  $K$  بدست می آید که پس از حل معادله، مقادیر بدست آمده برای  $K$  را در معادله (۱۸-۲) جایگذاری می کنیم و با مقایسه با معادلات (۱۵-۲) و (۱۹-۲) ویژه مقادیر انرژی را بدست می آوریم.

#### ۲-۴-۱ تعمیم پارامتری NU

برای تعمیم پارامتری معادله NU فرض می‌کنیم فرم کلی معادله شرودینگر به صورت زیر باشد

(۲۰-۲)

$$\left[ \frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{(s(1 - \alpha_3 s))^2} \right] \psi = 0$$

در اینجا سعی می‌کنیم عناصر اصلی تعمیم روش NU را توضیح دهیم [47]

با مقایسه معادله (۲۰-۲) با فرم کلی NU، معادله (۱۱-۲) به روابط زیر می‌رسیم:

(۲۱-۲)

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \alpha_1 - \alpha_2 s \\ \sigma &= s(1 - \alpha_3 s) \\ \bar{\sigma} &= -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3 \end{aligned}$$

با جایگذاری آن در معادله (۱۸-۲) خواهیم داشت

(۲۲-۲)

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5 s \pm \sqrt{(\alpha_6 - k \alpha_3) s^2 + (\alpha_7 + k) s + \alpha_8}$$

که در آن داریم :

$$(۲۳-۲)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_1)$$

$$(۲۴-۲)$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3)$$

$$\alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2 \quad (۲۵-۲)$$

$$(۲۶-۲)$$

$$\alpha_6 = \alpha_5^2 + \xi_1$$

$$(۲۷-۲)$$

$$\alpha_8 = \alpha_4^2 + \xi_3$$

چون تابع زیر رادیکال باید مربع کامل باشد لذا خواهیم داشت

$$(۲۸-۲)$$

$$K_{\pm} = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) \pm 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9}$$

که در آن

$$(۲۹-۲)$$

$$\alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3^2\alpha_8 + \alpha_6$$

برای  $K_-$  معادلات زیر به دست می آید

$$(۳۰-۲)$$

$$\pi = \alpha_4 + \alpha_5 s - \left[ (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})s - \sqrt{\alpha_8} \right]$$

$$(۳۱-۲)$$

$$\tau = \alpha_1 + 2\alpha_4 - (\alpha_2 - 2\alpha_5)s - 2 \left[ (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})s + \sqrt{\alpha_8} \right]$$

$$\tau' = -(\alpha_2 - 2\alpha_5) - 2[(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})] = -2\alpha_3 - 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \quad (۳۲-۲)$$

معادله ویژه مقداری انرژی می تواند به سهولت با استفاده از رابطه زیر به دست آید

$$(۳۳-۲)$$

$$\alpha_2 n - (2n+1)\alpha_5 + (2n+1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) + n(n-1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} = 0$$

به منظور به دست آوردن توابع موج از رابطه های زیر استفاده می کنیم

$$(۳۴-۲)$$

$$\rho(s) = s^{\alpha_{10}-1} (1 - \alpha_3 s)^{\frac{\alpha_{11}-\alpha_{10}-1}{\alpha_3}}$$

$$(۳۵-۲)$$

$$y_n(s) = \rho^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}-\alpha_{10}-1}{\alpha_3})} (1 - \alpha_3)$$

که در آن ضرایب  $\alpha_{10}$  تا  $\alpha_{13}$  به صورت زیر حساب می شود

$$(۳۶-۲)$$

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8}$$

$$(۳۷-۲)$$

$$\alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})$$

$$(۳۸-۲)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8}$$

$$(۳۹-۲)$$

$$\alpha_{13} = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})$$

۵-۲-۱ حل معادلات دیفرانسیل به روش Runge-

**Kutta**

در بسیاری از مسائل علوم و مهندسی وقتی به صورت ریاضی مدل سازی می شوند، به سادگی در قالب يك معادله دیفرانسیل معمولی با مقدار اولیه یا شرایط مرزی بیان می گردند. شاید نتوان فرم کلی جواب ها را برای هر مسئله مدل سازی شده بدست آورد ولی با استفاده از کامپیوتر و روش هایی عددی می توان آنها را حل کرد. از نظر محاسباتی، اغلب روش های کارآمد از نظر دقت، توسط دو ریاضی دان مشهور رونگ و کوتا<sup>۳۵</sup> توسعه یافته اند. این روش ها به رونگ کوتا R-K مشهورند. این روش ها با توجه به مرتبه ی شان تمیز داده می شوند، یعنی مطابقت آن ها با جواب های سری تیلور تا جمله  $h^r$  که  $r$  مرتبه روش است. روش R-K4 برای حل عددی معادلات خطی و غیر خطی بطور گسترده استفاده می شود که بسط آن از نظر جبری پیچیده است. ایده ی اصلی این روش ها را با روش R-K2 بررسی می کنیم [48]. ایده اصلی این روش، (میانگین شیب ها) است. یعنی:

$$y_{n+1} = y_n + \quad (۴۰-۲)$$

$$hx$$

مسأله مقدار اولیه را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$(۴۱-۲)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) , \quad y(t_n) = y_n$$

$$k_1 = \quad (۴۲-۲)$$

$$hf(t_n, y_n) , \quad k_2 = hf(t_n + \alpha h, y_n + \beta k_1)$$

میانگین وزنی  $k_1$  و  $k_2$  را انتخاب و برای تعیین  $y_{n+1}$  به  $y_n$  اضافه می کنیم.

---

<sup>35</sup> Runge-Kutta



(۴۳-۲)

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2$$

$w_1, w_2, \alpha, \beta$  مقادیر ثابتی هستند که باید تعیین شوند.

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \quad (۴۴-۲)$$

$$\frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{6}y'''(t_n) + \dots$$

رابطه (۴۴-۲) با استفاده از روابط (۴۲-۲) و (۳۹-۲) به صورت زیر در می آید:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}(f_t + ff_y) + \frac{h^3}{6}[f_{tt} + 2ff_{ty} + f^2 f_{yy} + f_y(f_t + ff_y)] + O(h^4) \quad (۴۵-۲)$$

در این جا همه مشتقات در نقطه  $(t_n, y_n)$  محاسبه شده اند [48].

با قراردادن معادلات (۴۲-۲) معادله ی (۴۵-۲) به صورت زیر در می آید:

$$y_{n+1} = y_n + \quad (۴۶-۲)$$

$$w_1 hf(t_n, y_n) + w_2 hf(t_n + \alpha h, y_n + \beta k_1)$$

حال با استفاده از بسط سری تیلور دو متغیره، داریم:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 hf(t_n, y_n) + \quad (۴۷-۲)$$

$$w_2 h \left[ f(t_n, y_n) + (\alpha h f_t + \beta k_1 f_y) + \left( \frac{\alpha^2 h^2}{2} f_{tt} + \alpha h \beta k_1 f_{ty} + \frac{\beta^2 k_1^2}{2} f_{yy} \right) \right] + O(h^3)$$

از قرار دادن عبارت  $K_1$  در معادله ی بالا و سپس مرتب کردن بر حسب توان های صعودی  $h$  داریم:

$$y_{n+1} = y_n + (w_1 + w_2)hf + w_2 h^2 (\alpha f_t + \beta f f_y) + w_2 h^3 \left( \frac{\alpha^2}{2} f_{tt} + \alpha \beta f f_{ty} + \frac{\beta^2}{2} f_{yy} \right) + o(h^4)$$

(۴۸-۲)

با مساوی قرار دادن ضرایب در معادلات (۲-۴۸) و (۲-۴۵) داریم:

$$(۲-۴۹)$$

$$w_1 + w_2 = 1 \quad w_2(\alpha f_t + \beta f_{fy}) = \frac{f_t f_{fy}}{2}$$

که نتیجه می شود:

$$(۲-۵۰)$$

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2 \alpha = w_2 \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{در نتیجه}} \begin{cases} w_1 = 1 - w_2 \\ \alpha = \frac{1}{2w_2} \\ \beta = \frac{1}{2w_2} \end{cases}$$

$w_2$  دلخواه است و مقادیر گوناگونی را می توان به آن اختصاص داد [48]:

حالت اول:

$$(۲-۵۱)$$

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{در نتیجه}} \alpha = \beta = \frac{3}{2}$$

$$(۲-۵۲)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3}(2k_1 + k_2)$$

$$(۲-۵۳)$$

$$k_1 = hf(t, y)$$

$$(۲-۵۴)$$

$$k_2 = hf\left(t + \frac{3}{2}h, y + \frac{3}{2}k_1\right)$$

حالت دوم:

$$(۲-۵۵)$$

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{در نتیجه}} \alpha = \beta = 1$$

$$(56-2)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$(57-2)$$

$$k_1 = hf(t, y)$$

$$(58-2)$$

$$k_2 = hf(t + h, y + k_1)$$

به روشی مشابه، فرمول R-K از هر مرتبه را می توان به دست آورد. هرچند که مشتقات آنها بسیار طولانی و پیچیده می شود. از بین آنها R-K4 متداول تر و مرسوم تر است [48].

## ۲-۵-۲ مراحل روش R-K4 :

$$(59-2)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$(60-2)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$(61-2)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$(62-2)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$(63-2)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)$$

## فصل سوم

محاسبه ترازهای انرژی حالت پایه و  
برانگیخته ایزوتوپ های کربن

### ۳-۱ مقدمه

در دهه های گذشته ایزوتوپ های کربن به صورت گسترده ای به لحاظ تجربی و تئوری مورد بررسی قرار گرفته اند. از میان ایزوتوپ های مختلف این هسته، ایزوتوپ های کربن ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ به علت اینکه به صورت طبیعی یافت می شوند دارای اهمیت بسزایی هستند. از طرفی کربن ۱۲ و ۱۴ هسته های هستند که دارای تعداد پروتون و نوترون زوج - زوج می باشد اما کربن ۱۳ دارای تعداد زوج - فرد است. این مطلب به موضوع مهمی برای مطالعه برهم کنش نوکلئون - نوکلئون تبدیل شده است تا بتوان به بررسی این ایزوتوپ ها پرداخت. در این پایان نامه برای بررسی ایزوتوپ های کربن ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ از مدل پوسته ای و جمعی استفاده می کنیم و با توجه به شرایط این مدل ها، ترازهای نوکلئونی را در نظر گرفته و برای حل مسئله، نوکلئون های لایه آخر را در نظر گرفتیم و برای ایزوتوپ های زوج - زوج از مدل جمعی استفاده می کنیم و با استفاده از مشخصات ژاکوبی که توضیحات آن در فصل قبل داده شده است، انرژی حالت پایه و برانگیخته را برای این ایزوتوپ ها محاسبه می کنیم. از طرفی با مقایسه انرژی نوکلئون های داخل هسته و جرم آنها به این نکته پی می بریم که نوکلئون ها در داخل هسته نسبتی نیستند لذا با اطمینان از مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی که با معادله شرودینگر بیان می شود، استفاده می کنیم و انرژی حالت پایه را به دست می آوریم. معادله شرودینگر یک معادله دیفرانسیلی درجه دوم با مشتق های جزئی و با پتانسیل های برهم کنش مختلف است که فقط می توان آن را برای چند مسئله خاص حل کرد. معمولاً این معادلات دیفرانسیلی درجه دوم بیشتر با استفاده از روش های تقریبی حل می شوند. در این پایان

نامه با توجه به دغدغه اصلی مان برای انتخاب پتانسیل مناسبی که نمایش دهنده برهم کنش میان نوکلئون ها باشد و با توجه به اطلاعاتی که در

مورد سیستم در دست داشتیم سعی نمودیم جملاتی را در نظر بگیریم تا

بتوانند در حد امکان مقادیر نزدیک به واقعیت در مورد سیستم کربن بدست آورد. بنابراین با توجه به ویژگی های یک پتانسیل هسته ای مناسب، یک پتانسیل مناسب کوتاه برد را برای نمایش برهم کنش بین نوکلئون ها استفاده کردیم. در مرحله اول پتانسیل پیشنهادی خود را به صورت یک پتانسیل مرکزی فرض کردیم که به صورت زیر است :

$$(۱-۳)$$

این پتانسیل شبیه پتانسیل مای تایپ (Mie-type) است که در فصل اول در مورد آن توضیحاتی داده شد و در آن شده می تواند بسیاری از خواص اندازه گیری شده نوکلئون - نوکلئون را با موفقیت تعیین کند و می توان امیدوار بود با افزایش تعداد جملات دخیل در برهمکنش، قدرت و دقت این پتانسیل را افزایش دهیم. از طرفی می دانیم نظریه اختلال در حالتی به کار می رود که دستگاه واقعی را بتوان برای پتانسیل تقریبا واقعی با تغییری کوچک نسبت به دستگاه اصلی حل نمود. در این صورت هامیلتونی دستگاه به صورت زیر است (۲-۳)

$$H = H_0 + \lambda A$$

هامیلتونی  $H_0$  و هامیلتونین اختلال  $A$  اختلاف زیادی با هم ندارند.  $H_0$  هامیلتونین دستگاه مختل نشده است (یعنی دستگاهی که بتوان آن را به صورت دقیق حل نمود). عامل

اختلال  $1A$  باید خیلی کوچک باشد به نحوی که  $1$  پارامتری حقیق بوده و طوری است که می توان تابع موج و انرژی ها بر حسب سری توانی آن بسط داد [49]. بدین صورت میتوان تعداد زیادی از مسائلی را که در فیزیک کوانتومی با آن مواجه هستیم، توصیف کنیم. در این نوع مسائل فیزیک کوانتومی، پتانسیل های مرکزی قوی برای نوکلئون ها ایجاد می شود و سایر برهم کنش ها با قدرت کمتر با اختلال توصیف می گردند. لذا در مراحل بعد سعی می کنیم با در نظر گرفتن اثرات اختلالی برهم کنش های اسپینی پتانسیل ارائه داده شده را بهبود بخشیم. همچنین در مرحله ای سعی نمودیم پتانسیل تانسوری را نیز به عنوان یک اثر اختلالی بررسی کنیم تا پتانسیل هسته ای را به صورت جمع پتانسیل مرکزی و تانسوری بنویسیم. از طرفی چون حل دقیق معادله شرودینگر با این پتانسیل کوتاه برد امکان پذیر نمی باشد با استفاده از برخی تقریب های مناسب و روش تحلیلی NU می توانیم ویژه مقادیر و تابع موج ها را به دست آوریم و نتایج را برای ایزوتوپ های زوج - زوج در جدول (۳-۱) به نمایش گذاشته ایم. برای تمام ایزوتوپ های مورد بررسی، در ابتدا با استفاده از شرایط مدل پوسته ای و جمعی، ترازهای انرژی نوکلئون ها را با در نظر گرفتن واگنی  $2(2l+1)$  پر می کنیم. برای کربن ۱۲ می دانیم این هسته شامل ۶ پروتون و ۶ نوترون می باشد که تا تراز  $1p_{\frac{3}{2}}$  پر می شوند. برای بررسی انرژی حالت پایه ایزوتوپ های زوج - زوج، یک هسته در نظر می گیریم که این هسته می بایستی هم عدد پروتونی و هم عدد نوترونی جادویی داشته باشد [50]. برای ایزوتوپ های زوج - زوج، هلیوم را به عنوان هسته برمی گزینیم. برای کربن ۱۲، هشت نوکلئون ظرفیتی باقی مانده را برای محاسبه انرژی

حالت پایه استفاده می کنیم و سیستم مورد مطالعه ما ، هشت ذره ای خواهد بود و با توجه به رابطه  $D=3N-3$  ، برای این هسته  $D=21$  و به همین صورت برای کربن ۱۴ نیز ۱۰ نوکلئون ظرفیتی در نظر می گیریم و  $D=27$  می شود البته ما معادله شرودینگر را در حالت کلی و در  $D$  بعد حل می کنیم تا بتوان برای دیگر ایزوتوپ های زوج - زوج تعمیم داد . بدین صورت میتوان با در نظر گرفتن نحوه پر شدن ترازهای نوکلئونی و تشخیص تعداد نوکلئون های ظرفیتی به معادله ویژه مقدارهای انرژی دست یافت . همچنین برای ایزوتوپ های زوج - فرد می بایستی نوترون های جفت نشده در ترازهای نوکلئونی را در نظر گرفت لذا برای کربن ۱۳ چون دارای تنها یک نوترون تزویج نشده است سیستم را به صورت سیستم نوترونی منفرد در نظر می گیریم و به حل مسئله ویژه مقدار انرژی برای این سیستم می پردازیم . ما در ابتدا به حل انرژی حالت پایه ایزوتوپ های زوج - زوج می پردازیم سپس اثرات اسپینی را برای این ایزوتوپ ها در نظر می گیریم و سعی می کنیم با در نظر گرفتن اثرات اختلالی ، نتایج را برای این ایزوتوپ ها بهبود ببخشیم . سپس انرژی حالت پایه را برای ایزوتوپ فرد مورد نظر (کربن ۱۳) را محاسبه می کنیم و در انتها به تفسیر حالت های برانگیخته مشاهده شده برای این ایزوتوپ ها می پردازیم و انرژی حالت های برانگیخته آنها را محاسبه می نمائیم .

## ۲-۳ محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ های زوج \_ زوج کربن

برای ایزوتوپ های زوج - زوج مسئله را در حالت کلی برای سیستم  $N$  ذره ای حل می نمایم که نحوه تشخیص



تعداد ذرات سیستم (N) را در قسمت قبل توضیح دادیم . برای سیستم های N ذره ای برهم کنش بین ذرات را با استفاده از مختصات فوق کروی در نظر می گیریم که در این صورت اگر فرض کنیم  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$  موقعیت ذرات را مشخص نمایند مختصات ژاکوبی و مرکز جرم را به صورت زیر تعریف می کنیم [51] (۳-۳)

$$i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$$

$$(۴-۳)$$

در این صورت می توانیم فوق شعاع را به صورت زیر معرفی کنیم :

$$x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} \zeta_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} \left( \sqrt{\frac{i}{i+1}} \left( r_{i+1} - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i r_j \right) \right)^2} \quad (۵-۳)$$

از طرفی معادله شرودینگر در D بعد (D=3N-3) با رابطه زیر نمایش داده می شود: [51]

$$(۶-۳)$$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_D^2 + V(x) - E \right) \psi(x) = 0$$

که در آن عملگر لاپلاسی به صورت زیر نمایش داده می شود

$$\nabla_D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D-1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{l(l+D-2)}{x^2} \quad [51]$$

$$(۷-۳)$$

لذا قسمت شعاعی معادله شرودینگر با پتانسیل

پیشنهادی به صورت رابطه زیر می شود:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{dR}{dx} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E - \left( \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right) e^{-ax} - \frac{\hbar^2 l(l+D-2)}{2\mu x^2} \right] R = 0 \quad (۸-۳)$$

برای انجام حل تحلیلی معادله شرودینگر با این پتانسیل، سعی می کنیم با استفاده از بسط تیلور پتانسیل ارائه شده به این هدف دست یابیم .

جالب توجه است که این تقریب به ازای  $\alpha$  های کوچک از تطابق خوبی برخوردار است:

$$v = \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}\right)e^{-\alpha x} \approx \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}\right)(1 - \alpha x) \quad (9-3)$$

با قرار دادن پتانسیل بسط داده شده در معادله شرودینگر خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{(D-1)}{x} \frac{dR}{dx} + \frac{1}{x^2} \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} (E + \alpha a)x^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} x(a - \alpha b) - \frac{2\mu}{\hbar^2} \left( b + \frac{l(l+D-2)\hbar^2}{2\mu} \right) \right) R = 0 \quad (10-3)$$

برای حل تغییر متغیر زیر را انجام می دهیم:

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} (E + \alpha a) = -\varepsilon^2 \quad (\varepsilon > 0) \quad (11-3)$$

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} (a - \alpha b) = \beta \quad (12-3)$$

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} \left( b + \frac{l(l+D-2)\hbar^2}{2\mu} \right) = \gamma \quad (13-3)$$

در این صورت معادله (10-3) به شکل (14-3) تبدیل می شود

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{dR}{dx} + \frac{1}{x^2} [-\varepsilon^2 x - \beta x - \gamma] R = 0 \quad (14-3)$$

با مقایسه با شکل NU داریم

$$\tilde{\tau} = D-1 \quad \sigma = x \quad \tilde{\sigma} = -\varepsilon^2 x^2 - \beta x - \gamma$$

بنابراین از معادله (13-2)  $\pi(x)$  را به صورت زیر می نویسیم

$$\pi(x) = \frac{2-D}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\varepsilon^2 x^2 + 4(\beta + k)x + \delta_l} \quad (15-3)$$

که در آن  $\delta_l = 4\gamma + (2-D)^2$  است. از معادله فوق با توجه به

اینکه زیر رادیکال مجذور یک چند جمله ای درجه اول

باشد،  $k$  را تعیین می کنیم و در ادامه مقدار مناسب  $\pi(x)$

را که شرط  $\tau' < 0$  را برآورده می کند را انتخاب می کنیم

$$(i) \pi(x) = \frac{2-D}{2} - \frac{1}{2} [2\varepsilon x + \delta_l^{1/2}] \quad k_1 = -\beta + \varepsilon \delta_l^{1/2}$$

$$(۱۶-۳)$$

$$(ii) \pi(x) = \frac{2-D}{2} - \frac{1}{2} [2\varepsilon x - \delta_l^{1/2}] \quad k_1 = -\beta - \varepsilon \delta_l^{1/2} \quad (۱۷-۳)$$

بنابراین برای حالت (i) از معادله (۹-۲)،  $\tau(x)$  را به

$$\tau(x) = -2\varepsilon x + (1 - \delta_l^{1/2}) \quad \text{صورت زیر به دست می آوریم}$$

$$(۱۸-۳)$$

بعد از محاسبه  $\tau(x)$  و از تساوی  $\lambda = \lambda_n$  برای هر حالت می توانیم ویژه مقادیر انرژی را به دست آوریم

$$(۱۹-۳)$$

$$\lambda_n = 2n\varepsilon \quad (۲۰-۳)$$

$$\lambda = -\beta + \varepsilon(\delta_l^{1/2} - 1)$$

بنابراین  $\lambda = \lambda_n$  داریم :

$$2n\varepsilon = -\beta + \varepsilon(\delta_l^{1/2} - 1) \quad (۲۱-۳)$$

و در نهایت از معادله فوق می توانیم  $\varepsilon$  را به دست آوریم

$$\varepsilon = \frac{-\beta}{[-\delta_l^{1/2} + (2n+1)]} \quad (۲۲-۳)$$

با توجه به رابطه (۱۱-۳) ویژه مقادیر انرژی را به صورت زیر داریم

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{-\beta^2}{[\delta_l^{1/2} - (2n+1)]^2} - \alpha a \quad (۲۳-۳)$$

که با جایگذاری  $\delta_l^{1/2}$ ،  $\beta$  مربوط به معادله

$$E_n = \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{(\alpha a + \alpha b)^2}{\left[ \sqrt{\frac{8\mu}{\hbar^2} b + 4l(l+D-2) + (2-D)^2} - (2n+1) \right]^2} - \alpha a \quad (۲۴-۳)$$

به همین ترتیب برای حالت (ii)، با تکرار فرایند بالا ویژه مقادیر انرژی را به دست می آوریم .

از معادله (۱۴-۲)،  $\tau(x)$  را به صورت زیر به دست می آوریم

$$\tau = -2\varepsilon x + (1 + \delta_i^{1/2}) \quad (25-3)$$

و از معادلات (2-15) و (2-19) را محاسبه می کنیم

$$\lambda_n = 2n\varepsilon \quad (26-3)$$

$$\lambda = -\beta - \varepsilon(\delta_i^{1/2} + 1) \quad (27-3)$$

$$\lambda = \lambda_n \quad (28-3)$$

$$2n\varepsilon = -\beta - \varepsilon(\delta_i^{1/2} + 1) \quad (29-3)$$

و بدین ترتیب  $\varepsilon$  را به دست می آوریم

$$(30-3)$$

و مجدداً با استفاده از روابط  $(\delta_i^{1/2} + (2n+1))^2 = \frac{-\beta}{\varepsilon}$  حالت پایه را به صورت زیر به دست می آوریم

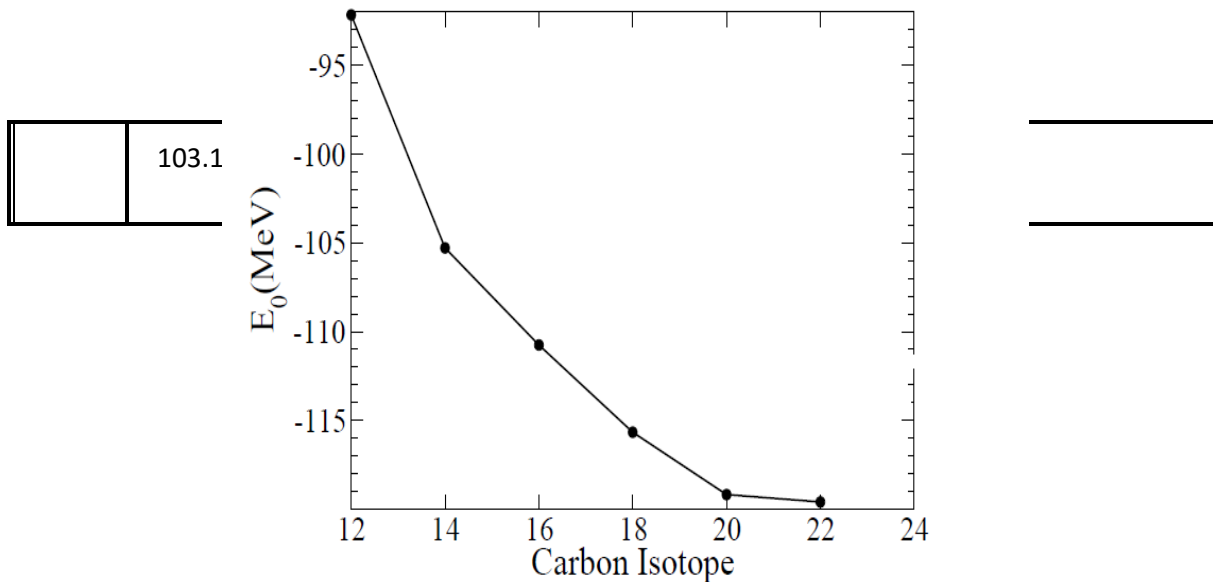
$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{-\beta^2}{[\delta_i^{1/2} + (2n+1)]^2} - \alpha a \quad (31-3)$$

در حالت کلی اگر بخواهیم مسئله ویژه مقدار انرژی را با استفاده از معادله شرودینگر برای پتانسیل معرفی شده بررسی کنیم و فرض کنیم از ماهیت روابط پارامترهای  $a, b$  موجود در پتانسیل آگاه نباشیم، حل مسئله مشابه همین مورد است فقط بایستی به این نکته توجه می کنیم که در روابط به دست آمده برای  $\varepsilon$ ، چون  $\varepsilon > 0$  در نظر گرفته شده بنابراین  $\beta$  فقط مقادیر منفی را می پذیرد و از مقادیر مثبت باید صرف نظر شود زیرا در غیر این صورت  $\varepsilon < 0$  می شود که با فرض اولیه مغایرت دارد. لذا یکی از جملات در پتانسیل همواره به صورت جاذبه عمل خواهد کرد که می بینیم مطابق با شرایط تعریف شده برای پتانسیل ما و روابط  $a, b$  است. بعد از این توضیحات، برای به دست آوردن بهترین مقادیر ممکن

انرژی حالت پایه سعی نمودیم با استفاده از معادله (۳-۲۴) و بر اساس مقادیر ورودی  $r, V$  و با زبان برنامه نویسی فرترن، برنامه ای نوشته و نتایج در جدول (۳-۱) زیر برای بهترین مقادیر انرژی به ازای  $0.3 \leq r_0 \leq 1 \text{ fm}$  و  $50 \leq V_0 \leq 170 \text{ MeV}$  همچنین برای مقایسه بهتر داده های به دست آمده با مقادیر تجربی، انرژی حالت پایه تجربی را به صورت جداگانه در شکل (۳-۱) رسم نمودیم .

جدول (۳-۱) مقادیر عددی انرژی حالت پایه برای برخی ایزوتوپ های زوج-زوج کربن و مقایسه با مقادیر موجود در مرجع [29]

${}^A_Z X_N$	E(MeV)	(MeV) $V_0$	(fm) $r_0$	a (MeV.fm)	b (MeV.fm <sup>2</sup> )	$\alpha$ (fm <sup>-1</sup> )	$E_{\text{exp}}$ (MeV)[31]
${}^{12}_6\text{C}_6$	87.75	115	0.3	-69	10.35	0.073	92.16
	88.65	50	0.7	-70	24.5	0.073	
	88.68	70	0.5	-70	17.5	0.073	
	91.10	60	0.6	-72	21.6	0.073	
	91.12	90	0.4	-72	14.4	0.073	
	91.43	120	0.3	-72	10.8	0.073	
${}^{14}_6\text{C}_8$	98.12	95	0.3	-57	8.55	0.073	105.284
	103.04	60	0.5	-60	15	0.073	
	103.05	75	0.4	-60	12	0.073	



شکل (۳-۱) انرژی حالت پایه ایزوتوپ های کربن [52]

اکنون در ادامه این بخش ویژه توابع وابسته به ویژه مقادیر را به دست می آوریم

(۳-۳۲)

$$\ln(\phi(s)) = \int \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} ds$$

با جایگذاری مقدار  $\pi(x), \sigma(x)$  در رابطه فوق و با اندکی عملیات جبری ساده  $\phi(x)$  را در هر حالت محاسبه می کنیم .

(۳-۳)

(۳۳)

$$(i) \phi(x) = x^{-1/2[-(2-D)+\delta^{1/2}]} e^{-\varepsilon x}$$

$$(ii) \phi(x) = x^{1/2[(2-D)-\delta^{1/2}]} e^{-\varepsilon x} \quad (۳۴-۳)$$

از طرفی از معادله (۲-۱۷) داریم :

(۳۵-۳)

$$\ln(\omega(x)) = \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx$$

لذا برای حالت (i) با جایگذاری  $\tau(x), \sigma(x)$  مقدار  $\omega(x)$  را به صورت زیر به دست می آوریم .

(۳۶-۳)

و همچنین تابع وزنی را با توجه به  $\rho(x) = \frac{\omega(x)}{\sigma(x)}$  می

توانیم به صورت زیر بنویسیم

(۳۷-۳)

$$\rho(x) = x^{(-\delta_i^{1/2})} e^{-2\epsilon x}$$

از معادله (۱۶-۲)،  $y_n(x)$  را به صورت زیر می نویسیم

(۳۸-۳)

$$y_n = B_n x^{(\delta_i^{1/2})} e^{2\epsilon x} \frac{d^n}{dx^n} (x^{(n-\delta_i^{1/2})} e^{-2\epsilon x})$$

نمایش چند جمله ای ردیگرز توابع وابسته لاگر را به صورت زیر داریم [53]

-۳)

(۳۹

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k})$$

از مقایسه بین این دو معادله (۳۸-۳) و (۳۹-۳) با در نظر گرفتن  $k = -\delta_i^{1/2}$  و  $x = 2\epsilon x$  داریم :

(۴۰-۳)

$$y_n = B_n n! L_n^{(-\delta_i^{1/2})} (2\epsilon x)$$

به همین صورت برای حالت (ii) با جایگذاری  $\tau(x), \sigma(x)$  مقدار  $\omega(x)$  را به صورت زیر به دست می آوریم .

$$(۴۱-۳)$$

$$\omega(x) = x^{(\delta_i^{1/2}+1)} e^{-2\epsilon x}$$

$$(۴۲-۳)$$

$$\rho(x) = \frac{\omega(x)}{\sigma(x)} = x^{\delta_i^{1/2}} e^{-2\epsilon x}$$

و در نهایت از معادله (۱۶-۲) به رابطه زیر می رسیم

$$(۴۳-۳)$$

$$(ii) y_n(x) = B_n x^{-\delta_i^{1/2}} e^{2\epsilon x} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\delta_i^{1/2}} e^{-2\epsilon x})$$

و با مقایسه با نمایش چند جمله ای ردیگرز توابع وابسته لاگرو و با در نظر گرفتن  $k = \delta_i^{1/2}$  و  $x = 2\epsilon x$  می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$(۴۴-۳)$$

$$y_n(x) = B_n n! L_n^{\delta_i^{1/2}}(2\epsilon x)$$

لذا با توجه به معادله (۱۲-۲) تابع موج شعاعی را به صورت زیر می نویسیم

$$(۴۵-۳)$$

$$(i) R_{n,l} = B_{n,l} n! x^{\frac{(\delta_i^{1/2}+1)}{2}} e^{-\epsilon x} L_n^{\delta_i^{1/2}}(2\epsilon x)$$

$$(۴۶-۳)$$

$$(ii) R_{n,l} = B_{n,l} n! x^{\frac{(\delta_i^{1/2}-1)}{2}} e^{-\epsilon x} L_n^{\delta_i^{1/2}}(2\epsilon x)$$



توابع موج به دست آمده دو جواب از معادله دیفرانسیلی درجه دو هستند لذا ترکیب خطی آنها را به صورت جواب کل در نظر می گیریم بنابراین :

(۳-۴۷)

$$R(x) = B_n^i R^{(i)}(x) + B_n^{ii} R^{(ii)}(x)$$

$$R^i(x)$$

از طرفی با توجه به رابطه (۳-۴۵) تابع موج

در  $x \rightarrow 0$  بی نهایت می شود، بنابراین  $B_n^i = 0$  در نظر می گیریم، از طرفی با توجه به رابطه (۳-۴۶) برای اینکه تابع موج در  $x \rightarrow 0$  بینهایت نشود باید  $\delta_l^{1/2} > 1$

باشد در غیر این صورت  $x$  دارای توان منفی خواهد شد و هنگامیکه  $x$  به سمت صفر میل کند تابع موج را بینهایت می کند.

ضریب بهنجارش از طریق رابطه  $\int_0^\infty x^2 [R_{n,l}(x)]^2 dx = 1$  و با توجه به شرط تعامد چند جمله ای های وابسته لاگر تعیین می شود و داریم

(۳-۴۸)

$$B_{n,l}^{ii} = \sqrt{\frac{(2\epsilon x)^{\delta_l^{1/2}+2}}{n!(n+\delta_l^{1/2})!(2n+\delta_l^{1/2}+1)}}$$

### ۳-۲-۱ اثرات اسپینی

در این قسمت برای بهبود نتایج انرژی حالت پایه با پتانسیل مورد نظر برخی از اثرات را که در مرحله اول از آنها صرف نظر شده بود را بررسی می کنیم. یکی از این اثرات، اسپین نوکلئون ها است. چون نوکلئون ها دارای اسپین ۱/۲ هستند، بنابراین برای بررسی دقیق برهم کنش

$$H_s = A_s \left( \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma_s} \right)^3 e^{-\frac{x^2}{\sigma_s^2}} (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) \quad ۷۴$$

ها باید اسپین نوکلئون ها را در نظر گرفت. اثرات اسپینی را میتوان به صورت زیر در نظر گرفت [54]

$$(3-49)$$

که در رابطه فوق  $\sigma_s = 0.8 fm$  و  $A_s = 38.4 (fm)^2$  می باشد [55]

این اثرات معرفی شده را به صورت اختلالی در نظر می گیریم که به پتانسیل کوتاه برد معرفی شده اضافه می کنیم. برای انجام محاسبات باید در نظر داشته باشیم که در چند جمله ای های وابسته لاگر باید  $\delta_l^{1/2} > -1$  و یک عدد صحیح باشد، از طرفی برای واگرا نشدن تابع موج در  $x \rightarrow 0$  باید  $\delta_l^{1/2} > 1$  هم باشد به منظور برآورده شده این شرایط  $\delta_l^{1/2}$  را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\delta_l^{1/2} = \sqrt{4\gamma + (2-D)^2} = N \quad N = 2, 3, 4, \dots$$

$$(3-50)$$

با توجه به اینکه  $\delta_l^{1/2}$  تابع صعودی از  $l$  است مقدار  $\delta_l^{1/2}$  به ازای هر  $l$  در تناظر یک به یک با مقادیر  $N$  است مثلاً  $\delta_1^{1/2} = 2$  و  $\delta_2^{1/2} = 3$  و .....

برای اجتناب از وارد کردن عدد کوانتومی جدید، مقدار را برحسب  $l$  می نویسم لذا خواهیم داشت  $N = l + 1$  در ادامه

با جایگذاری  $\delta_l^{1/2} = l + 1$  در روابط (3-48) و (3-46) شکل تبدیل یافته رابطه ها را به صورت  $B_{n,l}^{ii} = \sqrt{\frac{(2\epsilon x)^{l+3}}{n!(n+l+1)!(2n+l+2)}}$  (3-51)

$$(3-52)$$

در این حالت پتانسیل اسپین - اسپین را به صورت اختلال در نظر می گیریم و برای حالت پایه تغییر انرژی آن را

با  $\Delta_s^{(1)}$  نمایش می دهیم.

$$\nabla_s^{(1)} = \langle R | H_s | R \rangle = \frac{1}{30} (2\epsilon)^4 A_s \left( \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_s}} \right)^3 (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) \int_0^\infty x^3 e^{-2\epsilon x} L_1^2(2\epsilon x) e^{-\frac{x^2}{\sigma_s^2}} L_1^2(2\epsilon x) dx$$

(۵۳-۳)

و با فرض  $\alpha = \frac{-1}{4\varepsilon^2\sigma_s^2}$  رابطه بالا به صورت زیر ساده می شود

$$\nabla_s^{(1)} = \langle R | H_s | R \rangle = \frac{1}{30} A_s \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_s} \right)^3 (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) \int_0^\infty x^3 e^{\alpha x^2 - x} (3-x)^2 dx$$

(۵۴-۳)

با به کار بردن انتگرال فوق برای ایزوتوپ کربن ۱۲ اثر اختلالی ناشی از اثرات اسپینی را در حالت پایه این هسته محاسبه می کنیم. برای این منظور در رابطه

برای محاسبه مقدار  $\varepsilon$  از رابطه (۳۰-۳) استفاده

کرده و مقادیر  $a = -72(\text{MeV}\cdot\text{fm})$  و  $b = 10.8(\text{MeV}\cdot\text{fm}^2)$  برای کربن ۱۲ قرار دادیم و مقدار  $\varepsilon = 0.08844$  را به دست آوردیم. بعد از حل و جایگذاری مقادیر خواسته شده، جواب را به صورت زیر داریم

(۵۵-۳)

$$\Delta_s^1 = 0.0005376 (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)$$

$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$  به ازای  $S=0$  برابر با  $-\frac{3}{4}$  و با ازای  $S=1$  برابر با

$\frac{1}{4}$  می باشد. از آنجا که اسپین-پاریته هسته کربن ۱۲

$0^+$  است. بنابراین برای حالت پایه این هسته باید  $S=0$

باشد و در نتیجه  $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = -\frac{3}{4}$ ، با جاگذاری این مقدار در

رابطه بالا داریم

$$\Delta_s^1 = 0.000404 (\text{fm})^{-1} = 89.72 \text{keV}$$

(۵۶-۳)

به همین صورت برای کربن ۱۴ نیز اثرات ناشی از اسپین - اسپین محاسبه می شود که برای آن مقدار  $\varepsilon = 0.073$  را

در رابطه  $\alpha = \frac{-1}{4\epsilon^2\sigma_s^2}$  قرار دادیم و نتایج را در جدول زیر نمایش داده ایم

جدول (۲-۳) میزان انرژی حالت پایه و اختلاف انرژی ناشی از اثرات اسپینی

${}^A_Z X_N$	$E_{\text{exp}}$ (MeV)	E(MeV)	a (MeV.fm)	b (MeV.fm <sup>2</sup> )	$\Delta_s^1$ (kev)
${}^{12}_6 C_6$	92.16	91.43	-72	10.8	89.72
${}^{14}_6 C_8$	105.284	103.18	-60	9	41.14

### ۳-۳ محاسبه انرژی حالت پایه کربن ۱۳

در این قسمت برای محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ های زوج - فرد یکی از ایزوتوپ ها یعنی کربن ۱۳ را در نظر می گیریم، برای کربن ۱۳ نیز مانند ایزوتوپ های زوج - زوج نوکلئون ها را در تراز جداگانه چیدیم و بدین صورت پروتون ها تا تراز  $1p_{\frac{3}{2}}$  پر می شوند و نوترون ها تا تراز  $1p_{\frac{1}{2}}$  پر می شوند که در این تراز یک نوترون منفرد داریم. برای محاسبه انرژی حالت پایه این هسته، با این فرض مسئله را حل می کنیم که سیستم مورد بررسی ما یک سیستم دو جسی متشکل از یک نوترون منفرد به علاوه یک هسته است [56] لذا سعی نمودیم با استفاده از همان پتانسیل کوتاه برد معرفی شده در بخش پیشین و استفاده از تقریب مناسب دیگری به محاسبه انرژی حالت پایه و ویژه توابع آن پردازیم. با قرار دادن

پتانسیل در معادله شرودینگر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r^2} (\epsilon r^2 + \beta r e^{-ar} + \gamma e^{-ar} + L^2) = 0 \quad (57-3)$$

که در آن داریم

$$\epsilon = -\frac{2\mu}{\hbar^2} E \quad \beta = \frac{2\mu}{\hbar^2} a \quad \gamma = \frac{2\mu}{\hbar^2} b \quad (58-3)$$

که با اعمال تغییر متغیر و تقریب زیر معادله به شکل معادله (61-3) در می‌آید: [57]

$$(59-3)$$

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\alpha^2}{(e^{-ar} - 1)^2}$$

$$(60-3)$$

$$(e^{-ar} - 1) = s(r)$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{2\alpha}{s(r)} \frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{s^2(r)} [(\epsilon - \beta\alpha)s^2(r) + (\gamma - \beta\alpha)s(r) + \delta] = 0 \quad \delta = \gamma + L^2 \quad (61-3)$$

برای حل این معادله از روش NU استفاده می‌کنیم.

با مقایسه معادله (61-3) با رابطه (11-2) به شباهت

آن با شکل NU می‌رسیم لذا داریم:

$$\tilde{\tau} = -2\alpha$$

$$\sigma = s(r)$$

$$\tilde{\sigma} = -[(\epsilon - \beta\alpha)s^2(r) + (\gamma - \beta\alpha)s(r) + \delta] \quad (62-3)$$

وبا جایگذاری عبارت بالا در رابطه (18-2)  $\pi(r)$  را به دست می‌آوریم. از آنجاییکه عبارت زیر رادیکال باید حداکثر یک چند جمله ای درجه یک باشد، جملات زیر رادیکال را با صورت یک چند جمله ای درجه اول مرتب می‌کنیم که این در صورتی ممکن است که مشخص کننده آن،

، مساوی صفر باشد در این حالت یک معادله  $\Delta = b^2 - 4ac$  برای  $k$  به دست می‌آید

$$k = -\gamma + \beta\alpha \pm 2\sqrt{(\epsilon - \beta\alpha)\left(\delta + \left(\frac{1+2\alpha}{2}\right)^2\right)}$$

(۶۳-۳)

با جایگذاری مقدار  $k$  به دست آمده به رابطه زیر می  
رسیم

$$\pi(s) = \frac{1+2\alpha}{2} - \left[ (\varepsilon - \beta\alpha)^{\frac{1}{2}} s(r) \pm \left( \delta + \left( \frac{1+2\alpha}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (64-3)$$

که در آن مقدار مناسب  $\pi(x)$  را که شرط  $\tau' < 0$  را برآورده می  
کند را انتخاب کردیم. از معادله (۹-۲)،  $\tau(s)$  را به  
صورت زیر به دست می آوریم:

$$\tau(s) = 1 - 2 \left[ (E - \beta\alpha)^{1/2} s(r) \pm \left( \delta + \left( \frac{1+2\alpha}{2} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \quad (65-3)$$

و از معادلات (۱۵-۲) و (۱۹-۲)  $\lambda, \lambda_n$  را محاسبه می کنیم

$$\lambda_n = -n(-2)(E - \beta\alpha)^{1/2} \quad (66-3)$$

و به این ترتیب ویژه مقدار انرژی را به صورت زیر به  
دست می آوریم

$$E = -\alpha a + \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{(-b + \alpha a)^2}{(2n+1+2\sqrt{L^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2} b + \left( \frac{1+2\alpha}{2} \right)^2})^2} \quad (68-3)$$

و با استفاده از رابطه (۱۷-۲) خواهیم داشت:

(۶۹-۳)

$$\phi(s) = s(r)^{\left( \frac{1+2\alpha}{2} \right) \pm \left( \delta + \left( \frac{1+2\alpha}{2} \right)^2 \right)^{1/2}} e^{-\left( \varepsilon - \beta\alpha \right)^{\frac{1}{2}} s(r)}$$

و در انتها به کمک رابطه (۱۶-۲) خواهیم داشت

$$y_n = B_n s(r)^{\pm \left( \delta + \left( \frac{1+2\alpha}{2} \right)^2 \right)^{1/2}} e^{2(\varepsilon - \beta\alpha)^{1/2} s(r)} \frac{d^n}{ds^n} (s(r)^{n \pm \left( \delta + \left( \frac{1+2\alpha}{2} \right)^2 \right)^{1/2}} e^{-2(\varepsilon - \beta\alpha)^{1/2} s(r)}) \quad (70-3)$$

و با توجه به رابطه زیر تابع موج سیستم به دست می  
آید

$$\psi_n = \phi_n y_n \quad (۷۱-۳)$$

$$\psi_n = N s(r)^{\left(\frac{1+2\alpha}{2}\right) \pm 2\left(\delta + \left(\frac{1+2\alpha}{2}\right)^2\right)^{1/2}} e^{(\varepsilon - \beta\alpha)^{1/2} s(r)} \frac{d^n}{ds^n} (s(r))^{n \pm \left(\delta + \left(\frac{1+2\alpha}{2}\right)^2\right)^{1/2}} e^{-2(\varepsilon - \beta\alpha)^{1/2} s(r)} \quad (۷۲-۳)$$

که در آن N ثابت نرمالیزاسیون است. برای به دست آوردن مقادیر انرژی با توجه به رابطه (۳-۶۸) سعی نمودیم با استفاده از زبان برنامه نویسی فورترن علاوه بر به دست آوردن ضرایب مناسب برای پتانسیل، مقادیر انرژی را به دست آورده و نتایج را در جدول (۳-۳) نمایش داده ایم و در قسمت بعد برای بهبود نتایج، پتانسیل تانسوری را نیز به پتانسیل اولیه اضافه کرده و اثرات پتانسیل تانسوری را به صورت اختلالی بررسی کنیم.

جدول (۳-۳) ویژه مقدار انرژی حالت پایه کربن ۱۳

${}^A_Z X_N$	E(MeV)	$V_0$ (MeV)	$r_0$ (fm)	a (MeV.fm)	B (MeV fm <sup>2</sup> )	$\alpha$ (fm <sup>-1</sup> )	E(exp)[31]
${}^{13}_6 C_7$	94.02	85	0.8	-136	54.4	0.073	97.11
	95.07	105	0.7	-147	51.45	0.073	
	95.13	90	0.8	-144	57.6	0.073	

	96.41	95	0.8	-152	60.8	0.073	
	95.59	80	0.9	-144	64.8	0.073	

### ۱-۳-۳ بررسی پتانسیل تانسوری به صورت اختلالی

قبل از انجام محاسبات می توانیم انرژی حالت پایه را با استفاده از روش بسط تیلور مشابه با آنچه که برای ایزوتوپ های زوج-زوج انجام دادیم به دست آوریم که در این صورت تابع موج بر اساس توابع لاگر به دست خواهند آمد که ما از نتایج این روش برای این بخش استفاده خواهیم کرد. همانطور که قبلاً متذکر شدیم پتانسیل بین نوکلئون ها شامل یک جمله غیر مرکزی به نام پتانسیل تانسوری است که عمده ترین دلیل وجود آن از مشاهده گشتاور چارکطبی در حالت پایه دوترون حاصل می شود. در این بخش ، سعی داریم با استفاده از حل اختلالی پتانسیل تانسوری برای کربن ۱۳ به شکل  $V_c = V_c(r) + V_{cs}(r)S_{12}$  و نیزه مقادیر انرژی پردازیم . برای این منظور پتانسیل بین نوکلئون ها را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$(۳-۷۳)$$

که در آن  $V_c(r)$  همان پتانسیل کوتاه برد معرفی شده در

$$V_T(r) = -ae^{-\beta r} \left( \frac{1}{\beta r} + \frac{3}{(\beta r)^2} + \frac{3}{(\beta r)^4} \right)$$



بخش پیشین است که به عنوان پتانسیل مرکزی است و  $V_T(r)S_{12}$  پتانسیل اختلالی تانسوری است که در آن [58]:

$$(۷۴-۳)$$

$$S_{12} = \left[ \frac{3(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r})}{r^2} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right] \quad (۷۵-۳)$$

که  $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$  ماتریس های پائولی هستند. میتوان اسپین نوترون و پروتون را با  $r$  موازی در نظر گرفت پس  $S_{12}=2$  و نیروی تانسوری جاذبه می شود و اگر اسپین آن دورا با  $r$  پادموازی در نظر بگیریم  $S_{12}=-1$  و نیروی تانسوری دافعه خواهد شد [58]. برای حل پتانسیل

تانسوری را بسط می دهیم و سپس آن را به صورت اختلالی حل خواهیم کرد.

$$(۷۶-۳)$$

برای حالت پایه تغییر انرژی آن را با  $\Delta_T^{(1)}$  نمایش می دهیم .

$$\nabla_T^{(1)} = \langle R | H_T | R \rangle = \frac{1}{30} (2\varepsilon)^4 \left( \frac{-a}{\beta} \right) \int_0^\infty r^2 L_1^2(2\varepsilon r) e^{-2\varepsilon r} L_1^2(2\varepsilon r) dr \quad (۷۷-۳)$$

که با محاسبه

انتگرال فوق و کمی عملیات ریاضی به عبارت زیر می رسیم

$$\nabla_T^{(1)} = -0.0034 S_{12} \quad (۷۸-۳)$$

که در حالت  $S_{12}=2$  برابر با  $\nabla_T^{(1)} = -150 \text{ keV}$  و در حالت  $S_{12}=-1$  برابر  $\nabla_T^{(1)} = 75.4 \text{ keV}$  است

### ۳-۴ حالت های برانگیخته هسته

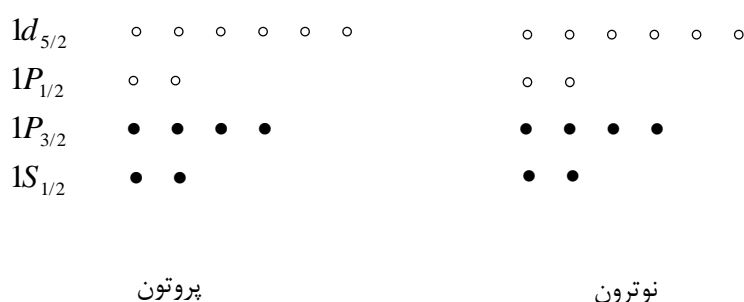
همچنانکه از مطالعه حالت های برانگیخته اتمی اطلاعاتی از ساختار اتم ها به دست می آوریم، با توجه به حالت های برانگیخته هسته ای نیز می توانیم تا حدودی ساختار هسته ها را بشناسیم. حالت های برانگیخته هسته هم، مانند حالت های برانگیخته اتمی، ناپایدارند و سریعاً به حالت پایه برمی گردند. برانگیختگی اتم ها در اثر جابه جا کردن الکترون ها و رساندن آنها به مدارهای انرژی بالاتر صورت می گیرد. همین کار را برای نوکلئون های موجود در هسته نیز میتوان انجام داد. بدین ترتیب به کمک حالت های برانگیخته میتوان بعضی از خصوصیات مداری نوکلئونی را در هسته ها نشان داد. حالت های برانگیخته هسته ای را می توانیم با افزودن انرژی به قلب نوکلئون های تزویج شده در هسته تولید کنیم. این انرژی ممکن است به صورت انرژی نوسانات یا دوران جمعی در کل قلب هسته ظاهر شود، و یا اینکه صرف شکستن یکی از زوج های نوکلئونی شود و از این طریق دو نوکلئون بر نوکلئون های ظرفیتی هسته بیافزاید. بخشی از هدف طیف نمایی هسته ای، مشاهده حالت های قابل برانگیزش و اندازه گیری خواص آنهاست. از جمله نکاتی که در اندازه گیری خواص هر حالت برانگیخته باید در نظر گرفت، انرژی برانگیزش، طول عمر و مد واپاشی، اسپین پاریتته، گشتاور دوقطبی مغناطیسی و گشتاور چار قطبی الکتریکی است. منشا تعداد کمی از حالت های برانگیخته را میتوان تشخیص داد و فهمید که از برانگیختگی نوکلئون های ظرفیت تولید شده اند یا از برانگیختگی قلب هسته. این تشخیص هم فقط بعد از اندازه گیری تمامی خواص فوق الذکر و مقایسه آنها با پیش بینی مبتنی بر محاسبات برانگیزش تک ذره ای و برانگیزش جمعی قلب هسته، و همچنین مشاهده سازگاری بین آزمایش و محاسبه، امکان پذیر می شود [1]. می دانیم

اگر یک زوج نوکلئونی در یک تراز تشکیل شود یک مقدار سیستم ما پایدار تر می شود اما سوال این است که این مقدار پایداری چقدر است؟ اگر این زوج نوکلئون در حالت  $I=0$  با هم جفت شوند یعنی در حالت  $s$  باشند این زوج نوکلئون، زوج سستی است و با تشکیل آن انرژی سیستم زیاد تغییر نمی کند و شکستن این زوج کار سختی نیست. هر چه جفت شدگی در  $I$  بالاتر رخ دهد این جفت شدگی ها انرژی بیشتری تولید می کنند و بنابراین برای شکستن این زوج هم به انرژی بیشتری احتیاج است. با شکستن زوج سستی (مثل زوجی که در لایه  $s$  است) و تشکیل دادن زوج قوی، ممکن است انرژی تولید شده در این حالت بیش از انرژی لازم برای برانگیختن باشد. به عبارت دیگر وقتی شما با صرف انرژی یک زوج نوکلئونی را در تراز می شکنید مجدداً مقداری انرژی صرف می کنید تا این زوج نوکلئون شکسته شده را به تراز برانگیخته منتقل کنید و در نهایت از تشکیل جفت نوکلئون در تراز جدید برانگیخته مقداری انرژی حاصل خواهد شد. حال اگر کاهش انرژی از مجموع انرژی هایی که صرف شکستن زوج و انتقال آن به تراز برانگیخته می کنید بیشتر باشد دیگر این حالت برانگیخته نخواهد بود و این دلیل آن است که علی رغم انتظار بعضی حالت های برانگیخته در هسته مشاهده نمی شود. همچنین در بحث برانگیختگی ها گاهی از برانگیختگی های حفره و ذره یاد می شود و باید اشاره کرد که حفره و نوکلئون معادل هم هستند. به عنوان مثال اگر تراز برای کامل شدن یک نوکلئون منفرد کم داشته باشد جای خالی این نوکلئون را حفره می گویند و برانگیختگی آن را برانگیختگی حفره ذره گویند.

### ۳-۴-۱ محاسبه حالت برانگیخته کربن ۱۲

بنا بر پیش بینی مدل پوسته ای، حالت پایه تمام هسته های زوج - زوج به صورت  $0^+$  (اسپین صفر - پاریته زوج) خواهد بود زیرا همه نوکلئون ها در این گونه هسته ها تزویج شده اند. موافق مدل پوسته ای، تعداد ۶ پروتون هسته کربن ۱۲ پوسته  $P_{3/2}$  را پر می کند و ۶ نوترون آن پوسته  $P_{3/2}$  را پر می کند. یکی از راه های تشکیل حالت برانگیخته این است که میتوان یکی از زوج نوکلئون ها را شکست و یک نوکلئون آن را به تراز بالاتری برد که در این صورت جفت شدگی بین این دو نوکلئون فرد، اسپین پاریته ترازها را مشخص می کند. حالت برانگیخته را میتوان با شکستن زوج  $P_{3/2}$  و رساندن یکی از نوکلئون ها به زیر پوسته  $P_{1/2}$  به وجود آورد. احتمال دیگر در تشکیل حالت برانگیخته این است که یکی از زوج های  $P_{3/2}$  شکسته شود و هر دو عضو شکسته در همان زیر پوسته  $P_{3/2}$  نگه داشته شوند. در این صورت جفت شدگی مجدد این دو نوکلئون به اسپینی غیر از صفر قبلی منجر می شود که بنابر قواعد جفت شدگی تکانه زاویه ای می تواند مقادیری حداکثر  $(j_1 + j_2)$  تا حداقل  $|j_1 - j_2|$  داشته باشد [1] لذا می تواند هر مقداری از  $3/2 + 3/2 = 3$  تا  $3/2 - 3/2 = 0$  باشد این دو نوکلئون موجود در  $P_{3/2}$  را باید مانند ذرات یکسان تلقی کرد و بنابراین تابع موج مربوط به آنها را باید متقارن در نظر گرفت. این شرط، اسپین برآیند حاصل از جفت شدگی را به مقادیر زوج محدود می کند. از کاربرد مدل پوسته ای در صدها مورد هسته های زوج زوج شناخته شده معلوم می شود که همگی آنها دارای یک حالت

بیهنجار  $2^+$  هستند که انرژی آن معادل یا کوچکتر از نصف انرژی لازم برای شکستن یک زوج نوکلئون است. این حالت اکثراً پایین ترین حالت برانگیخته است.

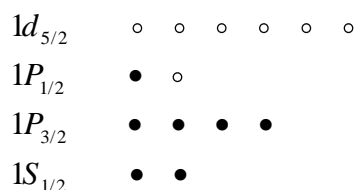


شکل (۲-۳) نحوه پر شدن ترازهای نوکلئونی کربن ۱۲

### ۲-۴-۳ محاسبه جابجایی کربن ۱۳

در تمام ایزوتوپ های کربن نحوه پر شدن ترازهای پروتونی یکسان است و فقط ترازهای نوترونی آنها با هم متفاوت است. لذا ترازهای نوترونی را رسم می کنیم. یکی از حالت های برانگیخته مجاز برای این ایزوتوپ حالت برانگیخته  $\frac{3^-}{2}$  است که می توان آن را بدین صورت توجیه کرد که یکی از زوج نوترون پوسته  $P_{3/2}$  می شکند و به تراز  $P_{1/2}$  می رود و بدین ترتیب پوسته  $P_{1/2}$  پر می شود و پوسته  $P_{3/2}$  دارای نوکلئون فرد می شود که میزان انرژی آن برابر  $E(\frac{3^-}{2}) = 3.36 \text{ MeV}$  می شود. می دانیم پارامتر مثبت برای حالت های s و d است لذا یکی از راه های برانگیختگی  $\frac{1^+}{2}$  برای این هسته به این صورت است که یکی از نوترون های تراز  $S_{1/2}$  می شکند و به تراز  $P_{1/2}$  می رود و

به این صورت حالت برانگیخته  $\frac{1}{2}^+$  توجیه می شود که میزان انرژی به دست آمده برای این حالت 2.03 MeV است.



شکل (۳-۳) نحوه پر شدن ترازهای نوترونی کربن ۱۳

### ۳-۴-۳ م د ب — — — بر — — — ربن ۱۴

دو حالت برانگیختگی برای این هسته در نظر گرفت شده حالت برانگیخته  $E(1^-)$  ، که این حالت برانگیختگی بیشتر برانگیختگی نوترون هاست. بدین صورت که یک جفت نوترون از لایه  $1P_{1/2}$  شکسته می شود اما به صورت دو نوکلئون مجزا در همان لایه باقی می ماند و حالت برانگیخته دیگر حالت  $E(2^+)$  است که در این حالت انتظار داریم پروتون برانگیخته شود و یک جفت پروتون لایه  $P_{3/2}$  شکسته شود و حالت برانگیخته را ایجاد کند [29]. بعد از بررسی برخی حالت های برانگیخته ممکن برای ایزوتوپ ها ، به منظور محاسبه انرژی حالت های برانگیخته سعی می کنیم با استفاده از روش محاسبه انرژی و شکل انرژی های به دست آمده در بخش پیشین و با توجه به اینکه حالت های برانگیخته معمولاً یک جفت نوکلئون برانگیخته می شوند و به این صورت که این جفت نوکلئون شکسته شده و به ترازهای دیگری منتقل می شود و میزان انرژی برانگیختگی برابر با میزان انرژی لازم برای رفتن به ترازهای نوکلئونی مشخصی است لذا سعی کردیم انرژی حالت های برانگیخته را با توجه به تعداد نوکلئون های برانگیخته شونده در تراز معلوم و مشخصات تراز

نوکلئونی که نوکلئون ها به آن منتقل شده و اختلاف انرژی بین دو تراز مشخص به دست آوریم که نتایج را به همراه ضرایب مناسب در جدول (۳-۳) نمایش داده ایم که در آن نتایج با مقادیر تجربی برگرفته از مقاله puddu [29] مقایسه شده است. همچنین برای مقایسه بهتر بین مقادیر محاسبه شده توسط ما و مقادیر تجربی ترازهای حالت های برانگیخته را رسم کردیم.

جدول (۳-۴) انرژی برانگیختگی محاسبه شده برای برخی ایزوتوپ ها و مقایسه آنها با مقادیر تجربی

${}^A_Z X_N$	$E(2^+)$ MeV	$V_0$ (MeV)	$r_0$ (fm)	a (MeV.fm)	b (MeV fm <sup>2</sup> )	$\alpha$ (fm <sup>-1</sup> )	E(exp)[31]
${}^{12}_6 C_6$	3.78	115	0.3	-69	10.35	0.073	4.44
	4.08	120	0.3	-72	10.8	0.073	

${}^{14}_6\text{C}_8$	2.67	95	0.3	-57	8.55	0.073	6.09
	3.11	100	0.3	-60	9	0.073	

${}^A_Z X_N$	$E(\frac{1}{2}^+)$ MeV	$V_0$ (MeV)	(fm) $r_0$	a (MeV.fm)	b (MeV fm <sup>2</sup> )	$\alpha$ (fm <sup>-1</sup> )	$E(\frac{3}{2}^-)$ MeV
${}^{13}_6\text{C}_7$	1.86	85	0.8	-136	54.4	0.073	1.87
	2.92	105	0.7	-147	51.45	0.073	2.95



	2.97	90	0.8	-144	57.6	0.073	2.99
	4.27	95	0.8	-152	60.8	0.073	4.30
	3.43	80	0.9	-144	64.8	0.073	3.46

جدول (۳-۵) انرژی برانگیختگی محاسبه شده برای کربن ۱۳

## نتیجه گیری

در این پایان نامه با استفاده از روش تحلیلی NU و با بهره مندی از تقریب های مناسب انرژی حالت پایه و برانگیخته ایزوتوپ های زوج - زوج و زوج - فرد کربن را توسط حل معادله شعاعی شرودینگر در حضور پتانسیل کوتاه برد پیشنهادی به دست آوردیم سپس برای بهبود نتایج مدل پیشنهادی خود ، برخی اثرات موثر در پتانسیل را به صورت اختلالی بررسی کردیم و سعی در شناخت بهترین ضرائب برای پتانسیل معرفی شده کردیم . در بررسی ایزوتوپ ها به تشخیص تعداد ذرات سیستم پرداخته و چون سیستم مورد مطالعه ما سیستم های N ذره

ای بودند در این صورت پتانسیل را بر حسب ابر شعاع معرفی کردیم و با استفاده از مختصات ژاکوبی مسئله را حل نمودیم. همینطور برای حالت های برانگیخته ایزوتوپ های مورد بررسی، در ابتدا توضیحی برای حالت های برانگیخته مشاهده شده برای ایزوتوپ های کربن ۱۲ و ۱۳ دادیم و در انتها به محاسبه برخی از این حالت ها پرداختیم. ما در این پایان نامه سعی نمودیم معادله شرودینگر را در حالت کلی و در  $D$  بعد حل نماییم تا بتوانیم برای ایزوتوپ های دیگر این هسته آن را تعمیم دهیم و نتایج به دست آمده از کار خود را نیز با دیگر نتایج موجود در مقالات دیگر را در جداول جداگانه ای مقایسه و به نمایش گذاشته ایم.

## مراجع

[1] کنت اس. کرین، (۱۳۷۳)، **آشنایی با فیزیک هسته ای**، جلد اول، ناصر میرفخرایی و مجید مدرس، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی، تهران

، مبانی فیزیک هسته ای، رحیمی ف، چاپ سوم، دانشگاه فردوسی مشهد، کاتینگهام، گرینوود، (۱۳۸۷) [2]

- [3] H.S.Hans, (2001), **Nuclear Physics-Exoerimental and Theoretical**, New Age International(P) Limited Publishers, New Dehli.
- [4] K.S. Krane, (1988), **Introductory Nuclear physics**, John Willey & sons, 1.2 .
- [5] س علمدار میلانی و م قرآن نویس (۱۳۸۲)، **آشنایی با فیزیک هسته ای**، انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ص ۱۸۵
- [6] B.L Cohen (1971), **Concepts of Nuclear physics**, McGraw-Hill, New York.
- [7] D.Griffiths (2004), **Introduction to Elementary Particles**, WILY-VCH Verlag GmbH& Co. KGaA, Weinheim.
- [8] ب الکس برون ، (۱۳۹۱)، **مباحثی در فیزیک ساختار هسته ای** ، علی اکبر مهمان دوست خواجه داد، انتشارات مرنیز، مشهد
- [9] J.L.Basdevant, J. Rich, M. Spiro. (2005), "**Fundamentals In Nuclear Physics From Nuclear Structure to cosmology**"; Springer, USA.
- [10] N. Bohr (1937), Science 86, **161**.
- [11] N. Bohr (1936), Nature, February.
- [12] M. G. Mayer (1948), **Phys. Rev.** 74, 235.
- [13] M. G. Mayer (1949), **Phys. Rev.** 75, 1969.
- [14] O. Haxel, J. H. D. Jensen and H. E. Suess (1949), **Phys. Rev.** 75, 1766 .
- [15] M. Honma, T. Otsuka, B. A. Brown and T. Mizusaki (2002), **Phys. Rev. C** 65, 061301.
- [16] K.S. Krane, (1988), "**Introductory Nuclear physics**", John Willey & sons, 1.2.
- [17] C. Berkdemir, A. Berkdemir, and J.G. Han, Chem (2006) **Phys. Lett.** 417326.
- [18] H. Bahlouli (2012) ,Analytical treatment of the oscillating Yukawa Potentialm, **Chem. Phys** 393,153-156 .
- [19] G. Mie (1903), **Ann. Phys.** (Leipzig), 11, 657 .
- [20] D.Agboola (2011), **Acta Phys.Polo. A**,120, 3, 371-376.
- [21] R. J. LeRoy and W.Lam (1970), **Chem. Phys. Lett.** 71,544
- [22] J. Plieva (1997), **J. Mol. Spectros.** 193, 7 .
- [23] Y. K. Toubin et al (2003), **J. of Engineering Phys. And Thermophysics**, 76,619 .
- [24] رابرت تورنتون موریسون، رابرت نیلسون بوید (۱۳۸۸-۱۳۹۰)، **شیمی آلی**، عیسی یاوری، سید احمد میرشکرایبی، علی سیدی اصفهانی، علوم دانشگاهی، جلد اول، دوم، سوم .

- [25] T. D. Burchell, (1999), **Carbon Materials for Advanced Technologies**, Elsevier Science .
- [26] M. S. Dresselhaus, G. P. Dresselhaus, (1996) **Science of Fullerenes and Carbon Nanotubes**, Elsevier Science.
- [27] G. Puddu, (2010) ,**Eur. Phys. J. A** 45, 233–238 .
- [28] T. Tarutina, A.R. Samana, F. Krmpotić, and M.S. Hussein, (2006), **Brazilian Journal of Physics**, 36, 4.
- [29] G. Puddu (2011), **Acta Physica Polonica B**, 6, 42 .
- [30] M. S.Dresselhaus, G. P. Dresselhaus, C.EKLUND (1996), **Science of Fullerenes and Carbon Nanotubes**, Elsevier Science.
- [31] R. W. Pekala, C. T. Alviso, C. L. Renschler, J. J.Pouch, and D. M. Cox (1992), **Novel Forms of Carbon**, 270, 3-14.
- [32] فوسنر رآكتور، (۱۳۶۴)، مهندسی هسته ای پایه ، منیژه رهبر، مرکز نشر دانشگاهی
- [33] G. Audi, A. H. Wapstra, C. Thibault, J. Blachot and O. Bersillon (2003). **Nucl. Phys. A** 729, 3–128.
- [34] A.F.Nikiforov, V.B uvarov (1988), **Special functions of Mathematical physics**, Brikhauser, Basel.
- [35] C. Erko, R. Sever (1984), **Phys. Rev. D** 30, 2117
- [36] R. Dutt, A. Khare and U.P. Sukhatme (1988),**Am.J.Phys.**56:163-168
- [37] C.Berkdemire ( 2006), **Nucl.Phys.A** 770 32.
- [38]G. Levai (1989),**J.phys.A:Math. Gen.**37,4379.
- [39] A.A.Rajabi (2005), **Ir.J.Phys.R**,15,2.
- [40] A.A. Rajabi(2005),”**Exact Analytical solution of the shrodinger equation for an N-identical body-force system**”,*Few Body system* ,**37**,267.
- [41] M. Aiello,M. Ferraries,M. MGiannini,M. Pizzo, E. Santopinto (1996), **Phys.Lett.B** ,387,215.
- [42] A. Kievshy,A. Viviani, L. Girlanda, L.E. Maecucci, S. Rosatti(2009), **Few body System**,45,115-118 .
- [43]A. Kievsky, M.Viviani,L. E. Marcucci and S. Rosati(2006), **Few body System**,38, 63-66.

- [44] M. Fabre de la Ripelle, H. Friedeldey, and S. A. Sofianos (1988), **Phys. Rev. C**, 38, 1, 449-466.
- [45] M. Fabre, de.le Ripelle (1986), **Models and methods in Few body Physics**, 8<sup>th</sup> Autumn School.
- [46] S. H. Dong (2002), **Foundations of Physics Letters**, 15, 4, 385-390.
- [47] A. Arda, R. Sever and C. Tezcan, (2010) , **Chin.J.Phys.**, 48(1) 27.
- [48] W. H. Press, (1992), **Numerical Recipes in Fortran**”2<sup>th</sup> edition, Cambridge press.
- [49] علی اکبر رجبی (۱۳۸۲)، روش های تقریبی در مکانیک کوانتومی، چاپ دوم، انتشارات دانشگاه صنعتی شاهرود
- [50] K.Muto, E.Bender, H.V.Klapdor-Kleingrothaus, **Z.phys.A** 399(1991)435-444
- [51] A. A. Rajabi, (2005), **Few Body System** 37, 267.
- [52] R. Id Betan, (2012), **Phys. Rev. C**, 70, 124.
- [53] G. B. Arfken, (1985), **mathematical methods for physicistics**, Academic press
- [54] M. M. Gianini, E. Santopinto and A. Vassallo, (2002), **Nucl.phys.R**, 5, 2.
- [55] A. A. Rajabi, (2005), **Iran.J.phys.R**, 6.2.
- [56] B. Laurent and N. Vinh Mau, (2013), **Phys. Rev. C**, 74, 225.
- [57] E .H .Hill (1954) **Am. J. Phys.** 22 211.
- [58] B. Laurent and N. Vinh Mau, (2013), **EPJ manuscript**, 74, 225.