

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده: فیزیک

گروه: هسته ای

محاسبه ویژگیهای استاتیکی (انرژی و شعاع باری) دوترون بر اساس برهم کنشهای
مرکزی مناسب و پتانسیل ناشی از تبادل یک پيون

دانشجو: مریم فرخ

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا شجاعی

پروفسور علی اکبر رجبی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۹۱

تقدیم به

دستان پاک پدرم

چشمان نگران مادرم

و همچنین تقدیم به

دیگر اعضای خانواده‌ی عزیزم که در تمام مراحل زندگی مدیون حمایت‌هایشان هستم.

تقدیر و تشکر

ستایش خدایی را سزااست که آغاز و انجام تمامی امور در اراده اوست. پروردگاری که جهان را بر پایه نظم آفرید و با علم و دانش خداوندی آنرا بیاراست و لطف بیکرانش این بنده حقیر را نیز در بر گرفت تا بتوانم این دوره از تحصیل را نیز با موفقیت پشت سر بگذارم. چندی پیش بود که گذر حادثه ما را در مسیری از زندگی قرار داد که به موجب آن با خاطره ها و زیبایی های فراوانش قسمتی از زندگانی خویش را سپری کردیم. حال وقت آن است که به یاد آن ایام و با یاد عزیزانی که روزگاری مملو از خاطره را با آنان سپری کردم حتی الامکان به رسم ادب، نهایت سپاس گذاری و احترام را در چند سطر کوتاه به تصویر بکشم زیرا که قلم و کاغذ را یارای بازگوی لطف های این بزرگواران و پیشامدهای خوب و بد نیست. یادم نمی رود که چه دشواریهایی زیبایی این جاده را صد چندان نمود. از اعضای خانواده ام خصوصاً پدر و مادر عزیزم که همیشه حامی و پشتیبان و نگرانم بودند بسیار سپاسگذارم. از زحمات استاد گرامیم جناب آقای پروفسور علی اکبر رجبی صمیمانه تشکر می کنم. همچنین از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر محمد رضا شجاعی که با صبر و تحمل برادرانه اینجانب را در تمام مراحل این دوره حمایت کردند بسیار ممنونم. و همچنین از اساتید دوران تحصیلی کارشناسی ارشدم جناب آقایان دکتر موحدیان و دکتر حسن آبادی و دکتر توکلی به خاطر همه زحماتی که متحمل شدند سپاسگذارم. و همچنین از جناب آقای دکتر موحدیان و سرکار خانم دکتر صالحی به خاطر قبول زحمت داوری پایان نامه این جانب بسیار ممنونم. و در آخر بر خود لازم میدانم از همه دوستان دوران تحصیلم که همواره خود را مدیون ایشان میدانم کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. باشد که به لطف پروردگارم فرد مفیدی برای خود و خانواده و جامعه باشم.

تعهد نامه

اینجانب مریم فرخ دانشجوی دوره کارشناسی ارشد، رشته فیزیک هسته ای، دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده‌ی پایان نامه‌ی محاسبه ویژگیهای استاتیکی (انرژی و شعاع باری) دوترون بر اساس برهم کنشهای مرکزی مناسب و پتانسیل ناشی از تبادل یک پیون تحت راهنمایی..... متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.

- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.

- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.

- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.

- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

امضای دانشجو

تاریخ

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نم‌باشد.

چکیده

هسته ها را می توان به کمک تعدادی از ویژگیهای استاتیکی تا حد قابل توجهی توصیف کرد. از مهمترین این ویژگی ها، انرژی بستگی و شعاع باری می باشد. درک خواص استاتیکی و دینامیکی و تفسیر آنها بر پایه برهمکنش بین تک تک نوکلئونهای موجود در هسته، یکی از مهمترین اهداف فیزیک هسته ای می باشد. در این پایان نامه برای مطالعه و بررسی سازوکار درون هسته ها سعی کردیم از ساده ترین هسته که شامل حداقل برهمکنش های درون هسته ای می باشد استفاده کنیم به همین منظور دوترون را انتخاب کردیم و از طرفی دیگر یکی از مهمترین پتانسیل هایی که برای برهمکنش درون هسته ها در نظر گرفته شده است، پتانسیل یوکاوا می باشد. به همین منظور برای محاسبه انرژی بستگی و شعاع باری دوترون این پتانسیل را انتخاب کردیم. از آنجایی که حل دقیق معادله شرودینگر با پتانسیل یوکاوا بدون تقریب امکان پذیر نمی باشد در این کار در مرحله اول با استفاده از تقریب مناسب و روش تحلیلی NU ، معادله شرودینگر را در حضور این پتانسیل حل کرده، تابع موج و مقدار انرژی بستگی دوترون را بدست آوردیم. در مرحله دوم به کمک روش عددی به حل دقیق این مساله پرداخته ایم. سپس طیف انرژی معادله نسبیتی دیراک را با در نظر گرفتن تقارن اسپینی و شبه اسپینی با دو پتانسیل مختلف بدست آوردیم و در انتها طیف انرژی معادله کلاین گوردن را با در نظر گرفتن وابستگی جرمی محاسبه کردیم.

کلمات کلیدی:

دوترون - انرژی بستگی - شعاع باری - پتانسیل های هسته ای - معادله شرودینگر

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

✓ محاسبه انرژی بستگی و شعاع باری دوترون در حضور پتانسیل یوکاوا و پتانسیل تبادلی پیون با استفاده از روش تحلیلی Nikiforov-Uvarov (نوزدهمین کنفرانس هسته ای ایران مشهد-۱۳۹۱)

✓ محاسبه انرژی و ویژه تابع معادله نسبیتی دیراک با پتانسیل هولسن بر اساس تئوری Relativistic Mean Field (سومین کنفرانس فیزیک ذرات و میدان ها تهران-۱۳۹۱)

✓ طیف انرژی معادله دیراک با در نظر گرفتن تقارن اسپینی و شبه اسپینی (نوزدهمین کنفرانس هسته ای ایران مشهد-۱۳۹۱)

✓ Klein-Gordon Equation with Hulthen potential and position dependent Mass (The European Physical Journal-Plus-2013)

فهرست مطالب

۱۰	فهرست شکل ها
۱۲	فهرست جدول ها

فصل اول: کلیات

۱۴	۱-۱ مقدمه
۱۶	۲-۱ نیروهای چهارگانه
۱۷	۳-۱ فرمیون ها و بوزون ها
۱۹	۴-۱ اسپین هسته
۱۹	۵-۱ ایزواسپین
۲۱	۶-۱ ویژگی های استاتیکی پروتون و نوترون
۲۲	۷-۱ ویژگی های استاتیکی هسته
۲۳	۱-۷-۱ انرژی بستگی
۲۶	۲-۷-۱ شعاع هسته
۲۷	۸-۱ خواص عمومی هسته

فصل دوم: برهمکنش نوکلئون - نوکلئون

۳۰	۱-۲ مقدمه
۳۰	۲-۲ دوترون
۳۱	۱-۲-۲۷ انرژی بستگی دوترون
۳۳	۲-۲-۲۷ جرم دوترون
۳۳	۳-۲-۲۷ اسپین یا اندازه حرکت زاویه ای کل دوترون
۳۳	۴-۲-۲۷ پارینته دوترون
۳۴	۵-۲-۲۷ گشتاور دو قطبی مغناطیسی دوترون
۳۵	۶-۲-۲۷ گشتاور چهار قطبی الکتریکی دوترون
۳۶	۳-۲ خواص نیروی هسته ای
۳۹	۴-۲ نظریه یوکاوا و ذره یوکاوا
۴۲	۵-۲ پتانسیل های نوکلئون-نوکلئون
۴۳	۱-۵-۲۷ پتانسیل شبه حلقوی کراتزر تعمیم یافته
۴۴	۲-۵-۲۷ پتانسیل وودز-ساکسون
۴۵	۳-۵-۲۷ پتانسیل وودز-ساکسون استاندارد
۴۷	۴-۵-۲۷ پتانسیل یوکاوا
۴۸	۵-۵-۲۷ پتانسیل هولسن عمومی
۵۰	۶-۵-۲۷ پتانسیل اکارت
۵۶	۶-۲ نیروهای تبدیلی

- ۵۶ ۱-۴-۲۷ خواص عملگرهای تبدالی موثر بر تابع موج
- ۵۷ P^M عملگر ۲-۴-۲۷
- ۵۸ P^H عملگر ۳-۴-۲۷
- ۵۹ ۷-۲ ویژگی های پتانسیل نوکلئون-نوکلئون بر حسب نیروهای تبدالی
- ۶۲ ۸-۲ توجه حضور نیروهای تبدالی در هسته ها

فصل سوم: روش های تحلیلی و عددی حل مساله

- ۶۵ ۱-۳ مقدمه
- ۶۶ ۲-۳ کلیات روش NU
- ۶۸ ۳-۳ روش های رایانه ای و عددی
- ۶۹ ۴-۳ پتانسیل های بین ذره ای و روش های رایانه ای
- ۷۱ ۵-۳ برهمکنش دو و سه ذره ای
- ۷۱ ۱-۵-۳۷ پتانسیل کره سخت
- ۷۲ ۲-۵-۳۷ پتانسیل لنارد-جونز
- ۷۳ ۶-۳ روش مونت کارلوی کوانتومی وردشی
- ۷۵ ۷-۳ معادلات دیفرانسیل و روش های عددی
- ۷۷ ۱-۷-۳۷ روش سری تیلور
- ۸۰ ۲-۷-۳۷ روش اویلر
- ۸۲ ۳-۷-۳۷ روش های رونگ-کوتا

فصل چهارم: محاسبه انرژی و شعاع باری دوترون

- ۸۵ ۱-۴ مقدمه
- ۸۶ ۲-۴ محاسبه ویژگی های استاتیکی دوترون (انرژی و شعاع باری) با استفاده از برهمکنش مرکزی و پتانسیل تبادل یک پیون
- ۸۶ ۱-۲-۴۷ مطالعه اثرات ضرایب پتانسیل یوکاوا بر انرژی بستگی دوترون
- ۹۱ ۲-۲-۴۷ محاسبه ویژگی های استاتیکی دوترون (انرژی و شعاع باری)
- ۹۲ ۳-۲-۴۷ حل معادله شرودینگر در حضور پتانسیل یوکاوا به روش عددی
- ۹۲ ۱-۳-۲-۴۷ محاسبه تابع موج دوترون در حالت پایه
- ۹۳ ۲-۳-۲-۴۷ محاسبه تابع موج دوترون در حالت شبه برانگیخته
- ۹۵ ۴-۲-۴۷ حل تحلیلی معادله شرودینگر با پتانسیل یوکاوا
- ۹۹ ۳-۴ طیف انرژی معادله نسبیتی دیراک با در نظر گرفتن تقارن اسپینی و شبه اسپینی
- ۹۹ ۱-۳-۴۷ معادله اساسی دیراک
- ۱۰۰ ۲-۳-۴۷ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن اسپینی
- ۱۰۲ ۳-۳-۴۷ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن شبه اسپینی

۴-۴ محاسبه انرژی و ویژه تابع معادله نسبیتی دیراک با پتانسیل هولسن بر اساس تئوری Relativistic Mean

۱۰۴	Field
۱۰۴	۱-۴-۴۷ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن اسپینی
۱۰۶	۱-۱-۴-۴۷ حل معادله دیراک به روش NU
۱۰۷	۲-۴-۴۷ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن شبه اسپینی
۱۰۹	۵-۴ طیف انرژی معادله کلاین گوردن با در نظر گرفتن وابستگی جرمی
۱۱۴	نتیجه گیری
۱۱۵	مراجع

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱ انرژی بستگی میانگین هر نوکلئون در هسته های سبک ۲۴
- شکل ۲-۱ نمودار هسته های پایدار و ناپایدار ۲۸
- شکل ۱-۲ تشکیل دوترونی با اسپین ۱ ۳۴
- شکل ۲-۲ نیروی تانسوری در دوترون ۳۸
- شکل ۳-۲ اختلاف فاز حاصل از پراکندگی نوترون-پروتون در انرژی متوسط ۳۹
- شکل ۴-۲ مقایسه شکل پتانسیل "تبادل تک پایونی" یوکاوا با پتانسیل کولنی (تبادل فوتونی) ۴۰
- شکل ۵-۲ پتانسیل وودز-ساکسون ۴۵
- شکل ۶-۲ پتانسیل وودز-ساکسون تعمیم یافته ۴۶
- شکل ۷-۲ پتانسیل وودز-ساکسون تعمیم یافته (۲) ۴۶
- شکل ۸-۲ پتانسیل یوکاوا بر حسب تابعی از r ۴۷
- شکل ۹-۲ پتانسیل نمایی بر حسب تابعی از r ۴۸
- شکل ۱۰-۲ پتانسیل هولسن استاندارد بر حسب تابعی از r ۴۹
- شکل ۱۱-۲ پتانسیل وودز-ساکسون بر حسب تابعی از r ۴۹
- شکل ۱۲-۲ پتانسیل اکارت بر حسب تابعی از r ۵۰
- شکل ۱۳-۲ پتانسیل $V(r) = -\frac{e^{-r}}{1+e^{-r}}$ بر حسب تابعی از r ۵۱
- شکل ۱۴-۲ پتانسیل $V(r) = -\frac{v_0}{1+e^{-ar}}$ بر حسب تابعی از r ۵۱
- شکل ۱۵-۲ پتانسیل $V(r) = -v_0 e^{-r}$ بر حسب تابعی از r ۵۲
- شکل ۱۶-۲ پتانسیل $V(r) = -\frac{v_0}{1+e^{ar}} - \frac{v_1}{(1+e^{ar})^2}$ بر حسب تابعی از r ۵۲
- شکل ۱۷-۲ پتانسیل $V(r) = -v_0 e^{-ar} - v_1 e^{-br}$ بر حسب تابعی از r ۵۳
- شکل ۱۸-۲ پتانسیل $V(r) = -v_0 \frac{e^{br}}{1+e^r}$ بر حسب تابعی از r ۵۳
- شکل ۱۹-۲ پتانسیل $V(r) = -v_0 \frac{e^{br}}{(1+ae^{br})^2}$ بر حسب تابعی از r ۵۴
- شکل ۲۰-۲ پتانسیل $V(r) = -v_0 \frac{e^{ar}}{(1+e^{ar})^2} - \frac{1}{(1+e^{ar})}$ بر حسب تابعی از r ۵۵
- شکل ۲۱-۲ پتانسیل $V(r) = -v_0 \frac{e^{ar^2}}{(1+r^2)}$ بر حسب تابعی از r ۵۵
- شکل ۲۲-۲ سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون-پروتون ۶۳

- شکل ۳-۱ شکل پتانسیل کره سخت..... ۷۲
- شکل ۴-۱ تغییرات انرژی بستگی حالت پایه دوترون بر حسب V_0 ۸۹
- شکل ۴-۲ تغییرات انرژی بستگی حالت پایه دوترون بر حسب α ۹۰
- شکل ۴-۳ تابع موج دوترون در حالت $L=0$ ۹۳
- شکل ۴-۴ تابع موج دوترون در حالت $L=2$ ۹۴

فهرست جدول‌ها

- جدول ۱-۱ نیروهای موجود در طبیعت ۱۷
- جدول ۲-۱ اسپین پروتون و نوترون ۲۰
- جدول ۳-۱ ایزواسپین پروتون و نوترون ۲۰
- جدول ۴-۱ ویژگی های استاتیکی پروتون و نوترون ۲۲
- جدول ۵-۱ انرژی بستگی و اسپین و پارته ی چند هسته سبک ۲۵
- جدول ۶-۱ شعاع برخی از هسته های سبک ۲۶
- جدول ۷-۱ خواص عمومی هسته ها ۲۷
- جدول ۱-۲ سه ایزوتوپ هیدروژن و ویژگی های آنها ۳۱
- جدول ۱-۴ انرژی بستگی حالت پایه دوترون و اختلاف انرژی حاصل از پتانسیل اختلافی ۹۲
- جدول ۲-۴ شعاع باری دوترون در حالت پایه و همچنین حالت شبه برانگیخته آن ۹۴
- جدول ۳-۴ مقایسه انرژی بستگی دوترون حاصل از کار ما و کارهای دیگران ۹۸

فصل اول

مفاهیم

۱-۱ مقدمه

تلاش برای درک ماهیت اساسی ماده، ریشه در تفکرات فیلسوفان یونان باستان دارد یونانیان در سده چهارم پیش از میلاد، معتقد بودند هر نوع ماده را می توان به اجزای کوچکتر و کوچکتر تقسیم کرد تا حدی که دیگر ادامه کار میسر نباشد. در طی ۲۴۰۰ سال بعد نیز، همچنان این نظریه به عنوان اندیشه ای فلسفی باقی ماند تا آنکه پژوهشگران اوایل سده نوزدهم میلادی به کمک روشهای علوم تجربی درباره این مسئله به تحقیق پرداختند و تا به امروز جوابگویی به حس کنجکاوی این بشر کنکاشگر کامل نشده است بلکه روز به روز سوالاتش بیشتر و به مطالعه فیزیک حریص تر می شود و تا کنون جواب سوالاتی مانند این سوال که ماهیت نیروی قوی بین نوکلئون ها چیست به طور دقیق کامل نشده است.

سوال جالبی که می توان مطرح کرد این است که مطالعه هسته و فیزیک هسته ای به چه طریقی در زندگی ما و دنیای اطرافمان اثر می گذارد؟ مهمترین نقش هسته اتم، اثر غیر مستقیم آن به عنوان مرکز اتم می باشد. هر اتم شامل یک قسمت میانی کوچک و سنگین می باشد که این قسمت کوچک تعداد الکترونها را برای تشکیل اتم را تعیین می کند و این به نوبه خود کلیه رفتارهای شیمیایی و خواص فیزیکی مواد را مشخص می کند و در برخی از موارد ساختمان هسته، خواص و واپاشی آن و واکنش هایی که انجام می دهد اثرات مستقیم و تعیین کننده ای در جهان دارند. از طرف دیگر در هر مکانی فیزیک وقوانین آن درگیر است و انسان را قادر می سازد که پدیده های طبیعی را توجیه و تجزیه و تحلیل کند و حتی در قدم های بزرگتر پیشامدهای بعدی را پیش گوئی کند. از کیهکشان ها سیارات، ستارگان و کوتوله ها گرفته تا درون ذرات اتم هسته و کوارک همه و همه با فیزیک و قوانین آن پابرجا هستند.

در این میان خود فیزیک نیز شاخه های متعددی دارد که هر یک نقش بسزایی را ایفا می کنند. یکی از مهمترین شاخه ها، فیزیک هسته ای می باشد. پس از کشف نوترون توسط چادویک در سال ۱۹۳۲ از نظر علمی پذیرفته شد که هسته ای با عدد اتمی Z از Z تا پروتون و N تا نوترون تشکیل شده است تا

این زمان تصور می شد که پروتون و نوترون ذرات بنیادی اند اما امروزه همگان می دانیم که اینگونه نیست بلکه آنها خود از اجزای کوچکتری تشکیل شده اند.

سال ۱۸۹۶ را می توان زمان آغاز مبحث فیزیک هسته ای دانست. در این سال بکرل پرتو - زایی ترکیب های اورانیوم را کشف کرد پس از آن دانشمندان زیادی با انجام آزمایش های متعدد و ارائه مدل ها و نظریات متنوع در چارچوب مکانیک کوانتومی به گسترش و تکمیل این مبحث پرداختند. هسته اتم برای اولین بار در سال ۱۹۱۱ در آزمایشی که رادرفورد و دستیارانش با استفاده از پراکندگی ذرات آلفا توسط اتم انجام دادند کشف شد. رادرفورد متوجه شد که پراکندگی حاصل در صورتی قابل توجیه است که اتم از یک هسته کوچک سنگین با بار مثبت تشکیل شده باشد به طوری که الکترونیایی در مدارهایی در اطراف این هسته در حرکت باشند. پس از آن، تحقیقات و فرضیه ها و اختراعات و ابداعات مهمی در فیزیک هسته ای به ظهور رسید از آن جمله می توان به ظهور مکانیک کوانتومی، فرضیه نوترینو، کشف دوتریم، کشف نوترون، کشف شکافت هسته ای، کشف مزون π ، فرضیه شگفتی، فرضیه مدل جمعی بر ساختار هسته ای، مشاهده نقض CP در واپاشی k^0 ، فرضیه مدل کوارک برای هادرونها، کشف ذره J/ψ و تائید کوارک افسونگر، کشف بوزون های ضعیف w^{\pm}, z^0 را عنوان کرد. در هر حال به روشنی معلوم است که مطالعات تجربی و نظری فیزیک هسته ای نقش برجسته ای در توسعه فیزیک قرن بیست و یکم ایفا کرده است در نتیجه همین زحمات و تلاش هاست که ما امروزه درک نسبتا خوبی از خواص هسته ها و ساختاری که منشا این خواص است به دست آورده ایم. اکتشافات دهه های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ نشان دادند علاوه بر نوکلئونها مرتبه دیگری از ساختار ماده وجود دارد که از هسته هم بنیادی تر و ابتدائی تر است. امروزه بررسی و مطالعه اینگونه ذرات را که عناصر اصلی ساختار هسته ای هستند را در شاخه خاصی به نام فیزیک ذرات بنیادی یا فیزیک انرژی بالا ادامه می دهند.

فیزیک هسته ای از طرفی به فیزیک اتمی و از طرف دیگر به فیزیک ذرات بنیادی متصل است. تحقیق در خواص هسته ها و قوانین حاکم بر ساختار هسته ای زمینه مهمی را در پژوهش های فیزیک هسته ای بنیان نهاده است.

می توان برای فیزیک هسته ای سه نقش عمده را در نظر گرفت:

الف) تحقیق و تفحص در قلمرو ذرات ماده و برهمکنش بین آنها

ب) مطالعه و تفسیر خواص هسته ای

ج) طراحی و پیش بینی روش ها و ابزارهایی برای مسائل پیش رو جهت خدمت به جامعه بشری.

ما در این کار به مورد اول توجه ویژه ای داریم. به همین منظور در ادامه برای رسیدن به این هدف ابتدا به معرفی نیروهای چهارگانه در طبیعت می پردازیم.

۱-۲ نیروهای چهارگانه

چهار نیروی اصلی در طبیعت شناخته شده است: قوی، الکترومغناطیس، ضعیف و گرانش. به هر یک از این نیروها یک تئوری فیزیکی تعلق می گیرد. البته تئوری کلاسیکی غیر نسبیتی گرانش قانون های جاذبه نیوتون است و نتیجه تعمیم نسبیتی آن، تئوری نسبیت عام انیشتین است. برای دستیابی به یک تئوری کوانتومی گرانش، باید هنوز کار کرد چون گرانش خیلی ضعیف است، ولی فعلا، غالبا فرض می شود که نقش مهمی در فیزیک هسته ای ندارد.

تئوری فیزیکی که نیروهای الکترومغناطیس را توصیف می کند، الکترودینامیک نامیده می شود. فرمول کلاسیک الکترودینامیک صدها سال پیش بوسیله ماکسول کشف شد. تئوری ماکسول و تئوری نسبیت خاص باهم سازگاری داشتند. تئوری کوانتومی الکترومغناطیس در سال ۱۹۴۰ بوسیله توماناگا و فاینمن و شوینگر تکمیل شد. نیروهای ضعیفی که نحوه واپاشی هسته ای β را توصیف می کردند برای فیزیک کلاسیک امری ناشناخته محسوب می شدند و توصیف تئوری آنها مستلزم به کار بردن فرمول های کوانتوم نسبیتی بود. نخستین تئوری نیروهای ضعیف در سال ۱۹۳۳ بوسیله فرمی ارائه

شد. این تئوری در دهه ۵۰ توسط لی و یانگ و فاینمن و گلمن و دیگران مورد بازنگری و اصلاح قرار گرفت و در دهه ۶۰ توسط گلاشو و اینبرگ و سلام بصورت کنونی ارائه شد. در طبیعت چهارگونه از میدان های برهمکنشی را می توان تشخیص داد. نیروی گرانشی برای مقیاس های بزرگ فیزیک و اجسام ماکروسکوپی مهم اند و در مقیاس کوچک فیزیک اتمی و هسته ای اثر نیروهای گرانشی ناچیز است [1].

جدول (۱-۱) نیروهای موجود در طبیعت [1,7]

میدان برهمکنشی	نوع بوزون واسطه	نام نظریه مرتبط	اسپین	جرم بوزون مرتبط (MeV/c^2)	بار	شدت
گرانشی	گراویتون	ژئومترودینامیک	۲	۰	۰	10^{-42}
ضعیف	Z^0, W^\pm	فلیورودینامیک	۱	۹۳,۸۱	$0, \pm 1$	10^{-13}
الکترومغناطیس	فوتون	الکتروودینامیک	۱	۰	۰	10^{-2}
قوی	گلوئون	کرومودینامیک	۱	۰	۰	۱۰

همانگونه که از جدول بالا مشهود است همه ذرات تبدالی بوزون بوده و دارای اسپین صحیح می باشند. در ادامه کار می خواهیم ذرات را به صورت دو گروه عمده در نظر بگیریم.

۱-۳ فرمیون ها و بوزون ها

فیزیک ذرات بنیادی جهان را بر اساس فرمیون های بنیادی توصیف می کند. فرمیون ها ذراتی هستند که از اصل طرد پائولی پیروی می کنند. اگر مجموعه ای از فرمیون های یکسان بر حسب توابع موج تک ذره ای بیان شوند هیچ دو فرمیونی نمی توان یافت که توابع موج یکسان داشته باشند. به عنوان مثال الکترون ها فرمیون اند. فرمیون ها به دلیل اینکه از آمار فرمی-دیراک (F-D) در مکانیک آماری تبعیت می کنند به این نام خوانده می شوند [3].

رابطه مشهودی هم بین اندازه حرکت مداری ذاتی یا اسپین ذره و آمار آن وجود دارد. برای فرمیون ها

$$\text{مقدار اسپین نیم صحیح است } \dots, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}.$$

بوزون ها ذراتی هستند که از آمار بوز- انیشتین (B.E) پیروی می کنند و با این ویژگی مشخص می شوند که هر تعداد از این ذرات می توانند تابع موج تک ذره ای یکسانی داشته باشند. بنابراین در مورد بوزون ها امکان تشکیل امواج همدوس با دامنه ماکروسکوپی وجود دارد و چنین امواجی را می توان با تقریب خوبی به طور کلاسیکی بیان کرد. همچنین برای بوزون ها مقدار اسپین یکی از مقادیر صحیح $1, 2, 3, \dots$ می باشد. به عنوان مثال فوتون ها بوزون هستند اگر بخواهیم بنیادی تر بحث کنیم باید گفت این ویژگی پیامد تقارن های ممکن تابع موج سیستمی از ذرات یکسان است که مختصات هر دو تای آن در تبادله با یکدیگرند. در مورد فرمیون ها تابع موج تغییر علامت می دهد و کاملاً نامتقارن است. ارتباط بین اسپین و آمار تا آنجا که می دانیم یک قانون دقیق طبیعت بدون هیچ استثنای شناخته شده ای می باشد. یک نتیجه مهم از اینکه الکترون فرمیون است آن است که الکترون باید در اصل طرد پائولی صدق کند. در حقیقت پایداری جهان بر اساس اصل طرد پائولی و وجود فرمیون ها می باشد. اگر فرمیون ها وجود نداشتند جدول تناوبی مندلیف نیز بی معنا می بود. اصل طرد پائولی سنگ بنای فیزیک اتمی و مولکولی و تمام شیمی می باشد. فرمیون ها بیشتر منزوی هستند و کمتر به اجتماع علاقه مندند. آنها از یکدیگر دوری می جویند تا مطمئن شوند که در حالت یکسانی قرار نگرفته اند. در مقابل بوزون ها بسیار اجتماعی اند. آنها می خواهند در حالت یکسانی قرار گیرند. اختلاف بین فرمیون ها و بوزون ها به طور برجسته ای در دماهای پائین تجلی پیدا می کند. برای سیستمی متشکل از بوزون ها نظیر ${}^4\text{He}$ مایع تمام ذرات تمایل دارند که در دماهای بسیار پائین به حالت پایه یکسانی بروند. این پدیده را به نام چگالش بوز- انیشتین می شناسیم خصوصیتی که به وسیله سیستم های متشکل از فرمیون ها پدیدار نمی شود.

فرمیون ها از طریق میدان هایی که خود سرچشمه آن هستند با یکدیگر برهمکنش می کنند. ذرات مرتبط با این برهمکنش همان بوزون ها هستند. مثال بسیار آشنای این موضوع الکترون است که

فرمیونی بنیادی می باشد الکترون حامل بار الکتریکی e بوده و این بار میدان الکترومغناطیسی E, B را بوجود می آورد که نیرویی بر دیگر بارهای الکتریکی وارد می کنند. در واقع نخستین بار آمار بوز-نیشترین برای فوتون ها استفاده شد. در ادامه می خواهیم ویژگی های نوکلئون ها و سپس ویژگی های هسته ها را مورد بررسی قرار دهیم.

۴-۱ اسپین هسته

هر حالت هسته را با یک عدد کوانتومی اسپین منحصر بفرد I مشخص می کنند که نمایانگر تکانه کل (مداری و ذاتی) تمام نوکلئون های هسته می باشد. بردار I را می توان به صورت حاصل جمع مولفه های مداری و ذاتی تکانه زاویه ای در نظر گرفت:

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^A (\vec{I}_i + \vec{S}_i) = \vec{L} + \vec{S} = \sum_{i=1}^A \vec{J}_i \quad (۸-۱)$$

و همچنین عدد کوانتومی I رابطه ساده ای با بردار \vec{I} دارد:

$$|\vec{I}| = \sqrt{I(I+1)}h$$

$$I_z = m_I h \quad (m_I = I, I-1, \dots, -I+1, -I) \quad (۹-۱)$$

تنها علت اینکه در رابطه (۸-۱) از محاسبه بردارها و همچنین از ساختمان داخلی هسته صرف نظر شده است می تواند این باشد که برهمکنشی که هسته تحت تاثیر آن است مانند میدان های الکترومغناطیسی ایستا به اندازه کافی قوی نیست که ساختمان داخلی را تغییر دهد یا جفت شدگی نوکلئون ها را بگسلد.

۵-۱ ایزو اسپین

در قالب بندی ایزواسپین با نوترون و پروتون به عنوان دو حالت تبهگن نوکلئون برخورد می شود. در مقایسه با فرمول بندی ماتریس های اسپین حالت های ایزواسپین نوترون و پروتون را به ترتیب زیر تعریف می کنیم [2].

جدول (۳-۱) اسپین پروتون و نوترون [2]

	بالا	پایین
اسپین	$ +\rangle = \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$ -\rangle = \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

جدول (۳-۱) ایزواسپین پروتون و نوترون [2]

	پروتون	نوترون
ایزواسپین	$\eta(p) = \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\eta(n) = \delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

پس در فضای ایزواسپین ماتریس γ مانند α و ماتریس δ مانند β رفتار می کند.

و برای عملگرهای ایزواسپین در تشابه با عملگرهای اسپین داریم:

عملگرهای اسپین

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9-1)$$

عملگرهای ایزواسپین

$$t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad t_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10-1)$$

در تشابه با مورد اسپین قرارداد می کنیم از سه عملگر ایزواسپین فقط ویژه مقدار τ_3 قابل اندازه

گیری می باشد بنابراین:

$$\begin{cases} s_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z \\ t_3 = \frac{1}{2} \tau_3 \end{cases} \quad (11-1)$$

و همچنین

$$\begin{cases} \tau_3 \gamma = \frac{1}{2} \tau_3 \gamma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \gamma \Rightarrow \tau_3 \gamma = \gamma \\ \tau_3 \sigma = \frac{1}{2} \tau_3 \sigma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \sigma \Rightarrow \tau_3 \sigma = -\sigma \end{cases} \quad (12-1)$$

پس ویژه مقدار عملگر τ_3 می باشد و ویژه مقدار عملگر t_3 برای پروتون $\frac{1}{2}$ و برای نوترون $-\frac{1}{2}$ می

باشد و با معرفی عملگر خلق τ_+ و فنا τ_- به قرار زیر داریم:

$$\tau_+ = (\tau_1 + i\tau_2) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2t_+ \quad (13-1)$$

$$\tau_- = (\tau_1 - i\tau_2) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2t_-$$

با توجه به روابط بالا محاسبه موارد زیر نیز به سهولت امکان پذیر است:

$$(1) \begin{cases} t_+ \gamma = \frac{1}{2} \tau_+ \gamma = 0 \\ t_+ \sigma = \frac{1}{2} \tau_+ \sigma = \gamma \end{cases} \quad (2) \begin{cases} t_- \gamma = \frac{1}{2} \tau_- \gamma = \sigma \\ t_- \sigma = \frac{1}{2} \tau_- \sigma = 0 \end{cases} \quad (14-1)$$

پس در عبارت ۱ عملگر t_+ با اعمال روی پروتون حالت پروتون را نابود می کند و با اعمال روی نوترون حالت پروتون را می دهد. و در عبارت ۲ عملگر t_- با اعمال روی پروتون حالت نوترون را می دهد و با اعمال روی نوترون حالت آن را نابود می کند.

۶-۱ ویژگی های استاتیکی پروتون و نوترون

همه هسته ها از دو نوع ذره ی پروتون و نوترون موسوم به نوکلئون تشکیل شده اند. برخی از خواص استاتیکی نوکلئون ها در جدول (۲-۱) آورده شده است.

با توجه به جدول زیر نوترون بدون بار است اما دارای گشتاور مغناطیسی است و این اولین دلیلی است که نشان می دهد نوکلئون ها ذرات بنیادی نقطه ای شکلی مانند الکترون نیستند، بلکه ساختاری داخلی دارند.

جدول (۱-۲): ویژگی های استاتیکی پروتون و نوترون [3]

نوترون	پروتون	
0 C	1.6×10^{-19} C	بار
1.67482×10^{-27} kg 939.550 MeV	1.67252×10^{-27} kg 938.256 MeV	جرم سکون
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	اسپین
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	مولفه سوم ایزواسپین
$-1.9128 \beta_n$	$+2.7928 \beta_n$	گشتاور مغناطیسی

که در جدول بالا مگنتون هسته β_n از رابطه زیر بدست می آید که در آن m_p جرم سکون پروتون می باشد.

$$\beta_n = \frac{eh}{2m_p} = \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(6.58 \times 10^{-16} \text{ ev.s})}{2(1.673 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 3.15 \times 10^{-8} \frac{\text{ev}}{\text{T}} \quad (1-1)$$

۱-۷ ویژگی های استاتیکی هسته

ویژگی های هسته را که با گذشت زمان مقدار آنها تغییر نمی کند و ثابت است ویژگی های استاتیکی هسته می گویند. ویژگی های استاتیکی هسته شامل موارد زیر می باشد [6]:

۱-جرم هسته

۲-انرژی بستگی هسته

۳-شعاع هسته

۴-پارایته هسته

۵- گشتاور دو قطبی مغناطیسی هسته

۶- چهار قطبی الکتریکی هسته

۷- یزو اسپین هسته

۸- اسپین هسته

از میان موارد بالا هدف ما در این کار بدست آوردن انرژی بستگی و شعاع هسته دوترون به عنوان ساده ترین هسته می باشد در ادامه انرژی بستگی و شعاع تعریف می شوند.

۱-۷-۱ انرژی بستگی

انرژی بستگی B یک هسته اختلاف بین جرم هسته ای و مجموع جرم اجزای تشکیل دهنده آن می باشد:

$$B(A, Z) = Nm_n c^2 + Zm_p c^2 - m(A, Z)c^2 \quad (۲-۱)$$

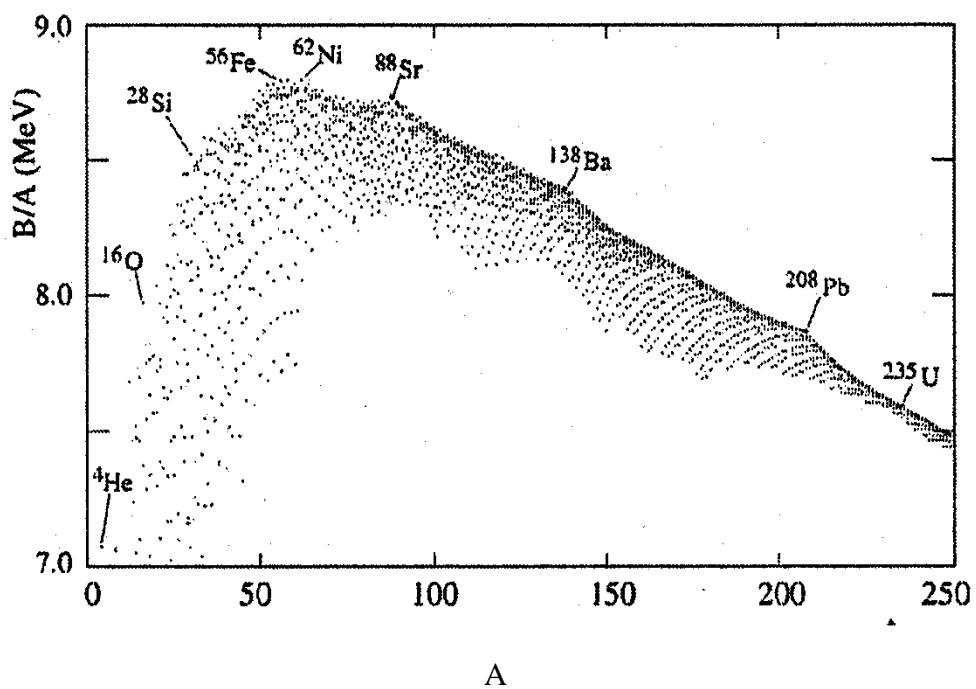
انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون با عبارت $\frac{B}{A}$ بیان می شود که خود تابعی از A می باشد. همانگونه که در شکل (۱-۱) نشان داده شده است مقدار $\frac{B}{A}$ با افزایش A در هسته های سبک افزایش می یابد و به یک پهن شدگی در حدود $55-60 \approx A$ می رسیم و در ادامه آن به آرامی به عنوان تابعی از A کاهش می یابد.

با توجه به شکل متوجه می شویم که با همجوشی هسته های سبک یا با شکافت هسته های سنگین انرژی آزاد میشود. در هسته های پایدار که خیلی سبک نیستند ($A > 12$) انرژی بستگی B در تقریب اول با عدد جرمی متناسب است یعنی [4]:

$$B(A, Z) \approx A \times 8 \text{ MeV} \quad (۳-۱)$$

و به طور دقیقتر:

$$7.7 \text{ MeV} < \frac{B(A, Z)}{A} < 8.8 \text{ MeV} \quad \text{for} \quad 12 < A < 225 \quad (۴-۱)$$



شکل (۱-۱): انرژی بستگی میانگین هر نوکلئون در هسته های سبک [4]

همچنین در ادامه کار انرژی بستگی و پارامترهای چند هسته سبک آورده شده است.

جدول (۱-۵): انرژی بستگی و اسپین و پاریته ی چند هسته سبک [3]

اسپین و پاریته	انرژی بستگی بر نوکلئون (MeV)	انرژی بستگی آخرین نوکلئون (MeV)	انرژی بستگی (MeV)	هسته
1^+	۱.۱	۲.۲	۲.۲۲	2_1H
$\frac{1^+}{2}$	۲.۸	۶.۳	۸.۴۸	3_1H
0^+	۷.۱	۱۹.۸	۲۸.۳۰	4_1He
$\frac{3^-}{2}$	۵.۵	-۱.۰	۲۷.۳۴	5_1He
1^+	۵.۳	۴.۷	۳۱.۹۹	6_3Li
$\frac{3^-}{2}$	۵.۶	۷.۳	۳۹.۲۵	6_3Li
0^+	۷.۱	۱۷.۳	۵۶.۵۰	8_4Be
$\frac{3^-}{2}$	۶.۵	۱.۷	۵۸.۱۶	9_4Be
3^+	۶.۵	۶.۶	۶۴.۷۵	${}^{10}_5B$
$\frac{3^-}{2}$	۶.۹	۱۱.۵	۷۶.۲۱	${}^{11}_5B$
0^+	۷.۷	۱۶.۰	۹۲.۱۶	${}^{12}_6C$
$\frac{1^-}{2}$	۷.۵	۵.۰	۹۷.۱۱	${}^{13}_6C$
1^+	۷.۵	۷.۶	۱۰۴.۶۶	${}^{14}_7N$
$\frac{1^-}{2}$	۷.۷	۱۰.۸	۱۱۵.۴۹	${}^{15}_7N$
0^+	۸.۰	۱۲.۱	۱۲۷.۶۲	${}^{16}_8O$

۲-۷-۱ شعاع هسته

با وجود اینکه اثرات کوانتومی درون هسته بسیار زیاد است ولی می توان نشان داد که حجم v هسته با تقریب خوبی با عدد جرمی A متناسب است و هر نوکلئونی حجمی در حدود $v_0 = 7.2 \text{ fm}^3$ را اشغال می کند. در تقریب اول هسته پایدار کروی است و حجمی در حدود $v \cong Av_0$ را اشغال می کند که در آن شعاع هسته از رابطه زیر بدست می آید [4]:

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad r_0 = 1.2 \text{ fm} \quad (5-1)$$

می توان نشان داد که توزیع فضایی نوکلئون های درون هسته ها با پراکندگی الکترون ها مشخص می شود. الکترون ها به درون هسته نفوذ می کنند و مسیر حرکت آنها تعیین می شود.

در جدول ۱-۶ شعاع برخی هسته ها که توسط پراکندگی الکترون-نوکلئون مشخص شده است آورده

شده است. که در آن r_{ms} از رابطه $(r_{ms})^2 = \frac{\int d^3r r^2 \rho(r)}{\int d^3r \rho(r)}$ مشخص می شود و R از رابطه

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad r_0 = 1.2 \text{ fm} \quad (7-1)$$

جدول (۱-۶): شعاع برخی از هسته های سبک که از پراکندگی الکترون-نوکلئون بدست آمده است [5].

هسته	$r_{ms} \text{ (fm)}$	$R \text{ (fm)}$	$\frac{R}{A^{\frac{1}{3}}} \text{ (fm)}$	هسته	$r_{ms} \text{ (fm)}$	$R \text{ (fm)}$	$\frac{R}{A^{\frac{1}{3}}} \text{ (fm)}$
1H	۰.۷۷	۱.۰	۱.۰	^{16}O	۲.۶۴	۳.۴۱	۱.۳۵
2H	۲.۱۱	۲.۷۳	۲.۱۶	^{24}Mg	۲.۹۸	۳.۸۴	۱.۳۳
4He	۱.۶۱	۲.۰۸	۱.۳۱	^{40}Ca	۳.۵۲	۴.۵۴	۱.۳۲
6Li	۲.۲۰	۲.۸	۱.۵۶	^{122}Sb	۴.۶۳	۵.۹۷	۱.۲۰
7Li	۲.۲۰	۲.۸	۱.۴۹	^{181}Ta	۵.۵۰	۷.۱۰	۱.۲۵
9Be	۲.۲	۲.۸۴	۱.۳۷	^{209}Bi	۵.۵۲	۷.۱۳	۱.۲۰
^{12}C	۲.۳۷	۳.۰۴	۱.۳۳				

همان گونه که مشاهده می شود رفتار غیر طبیعی شعاع دوترون حائز اهمیت می باشد.

۸-۱ خواص عمومی هسته ها

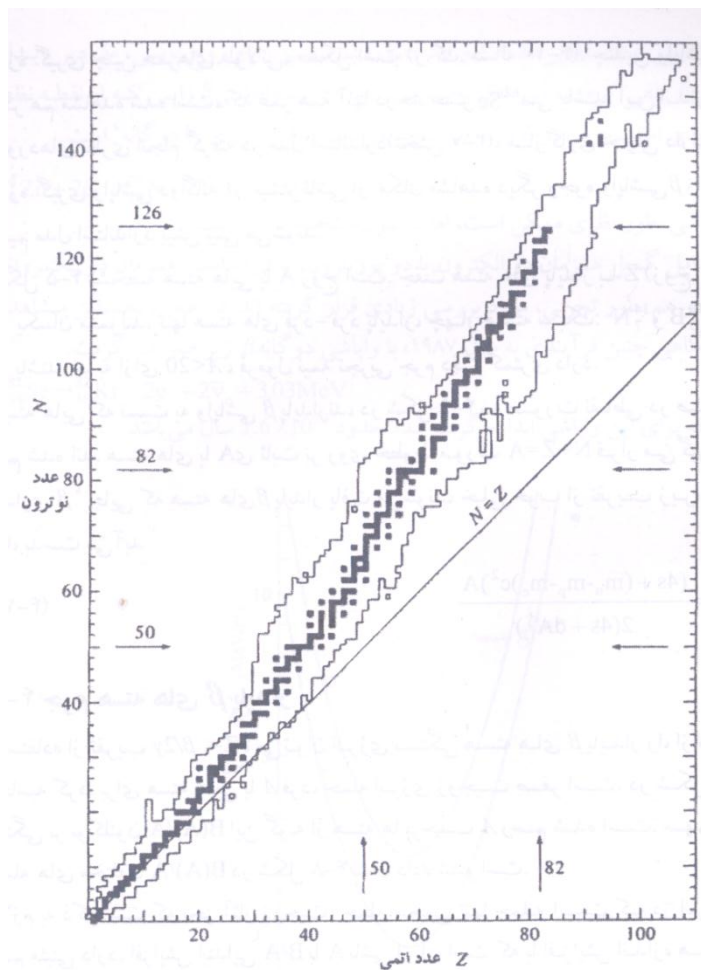
هسته حالت مقید سیستم شامل نوکلئون ها را می گویند همانگونه که اتم حالت مقید سیستم شامل نوکلئون ها و الکترون ها می باشد. واحدهایی که در فیزیک اتمی و فیزیک هسته ای بکار برده می شود باهم متفاوت می باشند [4].

جدول (۷-۱): خواص عمومی هسته ها

	اتم	نوکلئون
فاصله	10^{-10} m	10^{-15} m
انرژی	eV	MeV

اندازه هسته ای 10^{-5} مرتبه کوچکتر از اندازه اتمی می باشد و اندازه انرژی بستگی هسته ای 10^6 مرتبه بزرگتر از انرژی های اتمی می باشد و همین اختلافات منشأ قدرت نسبی نیروهایی است که باعث انسجام اتم ها و هسته ها می باشد. قابل ذکر است که انرژی های بستگی هسته ای هنوز هم کوچک است زیرا آنها فقط 1% انرژی سکون نوکلئون می باشد. از آنجایی که انرژی بستگی نوکلئون از مرتبه انرژی جنبشی آن $\frac{1}{2}mv^2$ می باشد پس با اطمینان می توان گفت نوکلئون ها با سرعت غیر نسبیتی در درون هسته حرکت می کنند $\frac{v^2}{c^2} \cong 10^{-2}$. هر هسته با عدد اتمی Z که تعداد پروتون های هسته و N تعداد نوترون ها می باشد مشخص می شود. هزاران ترکیب متفاوت از N و Z وجود دارد ولی تعداد محدودی از آنها از لحاظ پایداری و ناپایداری برای محققین حائز اهمیت می باشد.

در شکل (۳-۱) هسته های پایدار و هسته های ناپایدار بسیار دراز عمر (مربع های سیاه رنگ) در امتداد خاصی قرار می گیرند که به آن خط پایداری می گویند. هسته ای که بالاتر یا پایین تر از خط پایداری قرار بگیرد دارای جرم اتمی بزرگ تر از مقدار کمینه متناظر به عدد جرمی A خاص خودش است و در نتیجه باید ناپایدار باشد. یک تحقیق جالب در فیزیک هسته ای تولید هسته های جدید است و این احتمال را باید بیشتر در طرفین هسته های پایدار جستجو کرد.



شکل (۳-۱): نمودار هسته های پایدار و ناپایدار. هسته های پایدار (وناپایدار بسیار دراز-عمر) با مربع های سیاه نشان داده شده اند.

فصل دوم

برهمکنش

نوکلئون - نوکلئون

۱-۲ مقدمه

انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوکلئون‌ها که در هسته در حدود یکدیگرند، از لحاظ بزرگی از انرژی‌های لازم برای برانگیختن کوارک‌ها در یک نوکلئون خاص (290MeV) کمتر می‌باشند [7]. بنابراین منطقی است که هسته را مجموعه‌ای از نوکلئون‌ها در نظر بگیریم که با یکدیگر برهم‌کنش دارند و اساساً در حالت پایه خود باقی می‌مانند. از این رو توانایی توصیف برهم‌کنش‌های بین نوکلئون‌ها برای درک فیزیک هسته‌ها بسیار مهم است. از آنجا که نوکلئون‌ها ذرات مرکبی هستند انتظار می‌رود که برهم‌کنش آنها با یکدیگر ساده نباشد. در واقع این برهم‌کنش‌ها تا حدی پیچیده نیز هستند. خواص نیروهای بین نوکلئون‌ها را می‌توان به طور مستقیم در آزمایش‌های برخورد یا بطور غیرمستقیم با استخراج آنها از خواص سیستم‌های مقید یعنی هسته‌ها مطالعه کرد. از اطلاعات بدست آمده از خواص هسته‌ها می‌توان نتایجی را در باره نیروی هسته‌ای بدست آورد. از طرفی بهتر است هر پدیده‌ای را در ساده‌ترین شرایط ممکن و ساده‌ترین حالت آن مطالعه کرد. ساده‌ترین موردی که نیروی هسته‌ای در آن اثر می‌کند هنگامی است که تنها دو نوکلئون برهم‌کنش داشته باشند. در عمل دو وضعیت پیش می‌آید؛ (۱) هنگامی که نوترون و پروتون به هم مقیدند (مانند یک دوترون)، (۲) در برخوردهای میان دو نوکلئون که معمولاً به آنها فرآیندهای پراکندگی می‌گویند.

دوترون (هسته 2H) از گردهمایی یک پروتون و یک نوترون تشکیل می‌شود و تنها سیستم دو نوکلئونی مقید در طبیعت است. به همین دلیل سیستمی ایده‌آل برای مطالعه برهم‌کنش نوکلئون - نوکلئون به شمار می‌رود.

۲-۲ دوترون

سه ایزوتوپ مختلف H را که نسبتاً پایدار هستند در جدول زیر آورده شده است [3].

جدول (۱-۲): سه ایزوتوپ هیدروژن و ویژگی های آنها [3]

فراوانی یا نیمه عمر	I^π	جرم (u)	A	Z
99.985 %	$\frac{1^+}{2}$	1.007825	1	1
0.015 %	1^+	2.014102	2	1
12.3 year	$\frac{1^+}{2}$	3.016049	3	1

از میان سه ایزوتوپ بالا گزینه دوم برای مطالعات هسته ای بسیار حائز اهمیت است زیرا دوترون تنها سیستم مقید دو نوکلئونی در طبیعت است و هیچ حالت برانگیخته ای ندارد بستگی این سیستم چنان ضعیف است که حالت برانگیخته آن فقط به صورت پروتون و نوترون آزاد در سیستم نامقید ظاهر می شود. حالت های ممکن دیگر از سیستم دو نوکلئونی متشکل از دو پروتون یا دو نوترون است که مقید نمی مانند ولی حتی این اطلاعات نیز سودمند می باشد. به برخی از خواص دوترون در ادامه اشاره شده است.

۱-۲-۲ انرژی بستگی دوترون

انرژی بستگی دوترون 2.226 MeV می باشد [8]. انرژی بستگی دوترون، کمیتی است که با دقت بسیار زیاد اندازه گیری می شود و به سه روش مختلف قابل تعیین است [6]. از آنجایی که جرم و انرژی رابطه مستقیمی باهم دارند $E = mc^2$ می توان با محاسبه جرم، انرژی بستگی را بدست آورد. الف) می توان با محاسبه مستقیم جرم دوترون یا هر هسته دیگر از طریق طیف نمایی یا با استفاده از روش دوتایه جرمی (که در آن اختلاف جرم بین جرم های خیلی نزدیک به هم را اندازه می گیرند) سپس به کمک رابطه زیر انرژی بستگی آن را محاسبه کرد و از آنجایی که اختلاف انرژی بین جرم هسته

Z پروتون ها (Z پروتون) و نوترون های تشکیل دهنده آن (N نوترون) همان انرژی بستگی هسته مورد نظر می باشد داریم:

$$B = \{Zm_p + Nm_n - [m(A_X) - Zm_e]\}c^2 \quad (1-2)$$

ب) در روش دوم با نزدیک کردن یک پروتون به یک نوترون و تشکیل ^2H و اندازه گیری انرژی فوتون پرتو گامای گسیل شده در این فرآیند نیز می توانیم انرژی بستگی دوترون را مستقیماً تعیین کنیم



انرژی بستگی حاصل از این روش که از انرژی فوتون تولید شده و پس از مختصری تصحیح، به خاطر پس زنی ^2H ، به دست می آید برابر $2.224589 \pm 0.000002 \text{ MeV}$ است که به خوبی با مقدار حاصل از روش طیف نمایی جرمی سازگاری دارد.

ج) در روش سوم از واکنش معکوس موسوم به تجزیه فوتونی استفاده می شود:



که در آن فوتون پرتو گاما، دوترون را به دو پاره تقسیم می کند. کمینه انرژی پرتو گامایی که بتواند چنین فرایندی را انجام دهد، برابر انرژی بستگی است. در اینجا هم باید تصحیح مربوط به پس زنی محصولات نهایی در نظر گرفته شود. مقدار مشاهده شده برابر $2.224 \pm 0.002 \text{ MeV}$ است که با مقدار حاصل از روش طیف نمایی جرمی سازگاری خوبی دارد.

ولی اغلب تلاش های اخیر برای محاسبه انرژی بستگی در راستای فرآیند گیراندازی نوترون با پروتون انجام گرفته است تا دوترون تولید شود برای این کار می توان نوترون های گرمایی (انرژی در حدود 0.025 MeV) را به پروتون برخورد داده و از اندازه گیری انرژی $h\nu$ به مقدار انرژی بستگی دوترون پی برد:



انرژی پرتو گاما با دقت بسیار بالایی توسط اسپکتروسکوپی پرتو گاما محاسبه می شود.

۲-۲-۲ جرم دوترون

جرم اتم دوتریم (Amu) 2.0147 می باشد، اگر مقدار جرم الکترون m_e و انرژی بستگی الکترون را از آن کم کنیم جرم دوترون بدست می آید [2]

$$m_d = 2.0136 \text{ Amu} \quad (۵-۲)$$

۳-۲-۲ اسپین یا اندازه حرکت زاویه ای کل دوترون

اسپین کل دوترون برابر با برابند اسپین های ذاتی پروتون و نوترون و تکانه زاویه ای l نوکلئون ها حول مرکز جرم مشترکشان می باشد به عبارت دیگر:

$$\vec{I} = \vec{s}_p + \vec{s}_n + \vec{l} \quad (۶-۲)$$

چون اسپین های پروتون و نوترون یا باهم موازی (اسپین ۱) یا پاد موازی (اسپین ۰) هستند بردارهای

\vec{s}_p و \vec{s}_n به چهار صورت باهم جمع می شوند به طوری که نتیجه \vec{I} برابر ۱ شود [2].

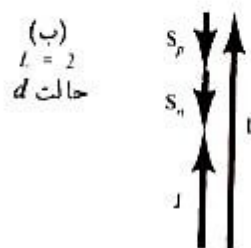
- 1) $\vec{l} = 0$ $\vec{s} = 1$
 - 2) $\vec{l} = 1$ $\vec{s} = 0$
 - 3) $\vec{l} = 1$ $\vec{s} = 1$
 - 4) $\vec{l} = 2$ $\vec{s} = 1$
- (۷-۲)

که \vec{s} برابند اسپین پروتون و نوترون می باشد. در ادامه اشاره خواهیم کرد که از موارد بالا کدامیک و به چه دلیلی برای دوترون مناسب است. دو راه ممکن که در آنها اشتراکهای اسپینی و مداری می توانند تشکیل دوترونی با اسپین ۱ را بدهند.

۴-۲-۲ پاریده دوترون

پاریده تابع موج حالت پایه دوترون زوج است [2]. از مطالعه واکنش هایی که دوترون در آن شرکت دارد و همچنین از بررسی خواص فوتون گسیل شده در طی تشکیل دوترون پاریده آن بدست می آید. پاریده منتسب به حرکت مداری به صورت $l^1(-1)$ قابل تعیین است که l تکانه زاویه مداری است. یعنی برای $l=0$ (حالت s) و $l=2$ (حالت d) پاریده زوج است. با توجه به این امر که زوج بودن پاریده دوترون یک

نتیجه تجربی می باشد از چهار ترکیب ذکر شده فقط موارد ۱ و ۴ قابل قبول می باشند ترکیب های ۲ و ۳ که در آنها پاریده فرد است قابل قبول نمی باشند. پس می توان گفت که پاریده زوج دوترون ایجاب می کند که l زوج باشد، به این ترتیب برای اینکه تکانه زاویه ای کل (اسپین هسته) مساوی یک باشد فقط دو امکان وجود دارد؛ یکی $l=0$ و دیگری $l=2$. در نخستین حالت که در شکل (۲-۱ الف) نشان داده شده است. اسپین دو نوکلئون با یکدیگر جمع و اسپین دوترون را تشکیل می دهند. در دومین حالت نشان داده شده در شکل (۲-۱ ب) اشتراک های اسپینی و مداری پاد موازی یکدیگرند.



شکل (۲-۱) دو راه ممکن که در آنها اشتراک های اسپینی و مداری می توانند تشکیل دوترونی با اسپین ۱ را بدهند.

۲-۲-۵- گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون

مقدار گشتاور دوقطبی مغناطیسی اندازه گیری شده به روش پرتو مولکولی به صورت زیر می باشد [2]:

$$\mu_d = 0.8574376 \pm 0.000009 \text{ n.m} \quad (۲-۸)$$

اگر فرض $l=0$ برای دوترون درست باشد پس حرکت مداری هیچ گونه سهمی در گشتاور مغناطیسی نباید داشته باشد و می توانیم گشتاور مغناطیسی کل را حاصل ترکیب گشتاورهای نوترون و پروتون

تلقی کرد

$$\mu = \mu_p + \mu_n \quad (۲-۹)$$

از طرفی گشتاور دوقطبی مغناطیسی نوکلئون از رابطه زیر بدست می آید:

$$\mu_{\text{nucl}} = (g_l l + g_s s) \mu_N \quad (10-2)$$

با توجه به این رابطه گشتاور مغناطیسی نوکلئون‌ها در حالت $l=0$ برابر است با:

$$\mu_{\text{nucl}} = g_s s \mu_N \quad (11-2)$$

که s عدد کوانتومی اسپین است. با جایگذاری رابطه (۱۱-۲) در رابطه (۹-۲) خواهیم داشت:

$$\mu = \left(g_{sp} s_p + g_{sn} s_n \right) \mu_N = \frac{1}{2} (g_{sp} + g_{sn}) \mu_N \quad (12-2)$$

با جایگذاری مقادیر $g_{sp} = 5.585$ و $g_{sn} = -3.82608$ به دست می‌آوریم [6]:

$$\mu = 0.87 \mu_N \quad (13-2)$$

که سازگاری خوبی با مقدار تجربی دارد. این موضوع مجدداً "موازی بودن اسپین‌های پروتون و نوترون و فرض $l=0$ را تأیید می‌کند. اختلاف کوچک بین تئوری و تجربه در مقدار گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون را می‌توان ناشی از وجود سهم کوچکی از حالت d ($l=2$) در تابع موج دوترون در نظر گرفت. به عبارت دیگر تابع موج دوترون به صورت ترکیبی از تابع موج حالت s ($l=0$) و حالت d ($l=2$) نوشت:

$$\psi = a_s \psi(l=0) + a_d \psi(l=2) \quad (14-2)$$

گشتاور مغناطیسی دوترون به کمک این تابع موج چنین بدست می‌آید:

$$\mu = a_s^2 \mu(l=0) + a_d^2 \mu(l=2) \quad (15-2)$$

مقدار مشاهده شده گشتاور مغناطیسی با $|a_s|^2 = 0.94$ و $|a_d|^2 = 0.06$ سازگار است یعنی دوترون از ترکیب ۹۴٪ حالت $l=0$ و ۶٪ حالت $l=2$ تشکیل می‌شود [2].

۶-۲-۲ گشتاور چهارقطبی الکتریکی دوترون

این واقعیت که دوترون دارای گشتاور چهارقطبی الکتریکی است به وسیله آزمایشات آشکار شده است [2]. این آزمایش و اطلاعات دیگر نشان می‌دهد که گشتاور چهار قطبی الکتریکی دوترون مقداری مثبت دارد:

$$Q_d = (2.875 \pm 0.00002) \times 10^{-27} \text{ cm}^2 \quad (16-2)$$

که مقدار بسیار کوچکی است اما صفر نیست. چون نوترون و پروتون به طور جداگانه هیچ گونه گشتاور چهار قطبی الکتریکی ندارد. پس هر مقدار غیر صفری که از اندازه گیری گشتاور چهار قطبی به دست آید باید از حرکت مداری تلقی شود. در این صورت گشتاور چهار قطبی حاصل از تابع موج $l=0$ خالص برابر صفر خواهد شد. ولی محاسبه گشتاور چهار قطبی الکتریکی دوترون مجدداً نتایج $|a_s|^2 = 0.94$ و $|a_d|^2 = 0.06$ را تائید می کند. مقدار مثبت گشتاور چهار قطبی الکتریکی دوترون نشان می دهد که هسته دوترون غیر کروی کشیده است. اما از آنجایی که مقدار گشتاور چهار قطبی دوترون کوچک است این کشیدگی خیلی زیاد نیست. پس از اطلاعاتی که در مورد دوترون بدست آوردیم لازم است که دیگر ویژگی های برهمکنش نوکلئون-نوکلئون را نیز مورد بررسی قرار دهیم.

۳-۲ خواص نیروی هسته ای

خواص نیروی بین نوکلئون- نوکلئون را می توان به دو روش متفاوت مطالعه کرد. هم به طور مستقیم از آزمایش های برخورد و یا به طور غیر مستقیم از استخراج اطلاعات از خواص سیستم های مقید یا هسته ها. برخی از مهمترین نتایج در مورد نیروی قوی هسته ای یا نیروی هادرونی بین نوکلئون ها در زیر آورده شده است:

۱- این نیرو غالباً جاذب است. در غیر این صورت دافعه کولنی بین نوکلئون ها موجب فروپاشی هسته می گردید و هسته های پایدار نمی توانستند وجود داشته باشند. همچنین این نیرو در برابر سایر نیروها بسیار قوی است. می توان قدرت های نسبی برهمکنش ها را تا حدودی به صورت زیر در نظر گرفت:

$$1/10^{-2} / 10^{-13} / 10^{-42} \approx \text{گرانشی} / \text{ضعیف} / \text{الکترومغناطیسی} / \text{هادرونی}$$

۲- نیروی هادرونی کوتاه برد است. آزمایش های اولیه پراکندگی α توسط رادرفورد نشان داد که حداکثر برد نیروی هسته ای باید در حدود چند فرمی باشد. مطالعات ویگنر می گوید که نیروی هسته ای باید دارای بردی در حدود ۱ فرمی و بسیار قوی باشد [2].

۳- نیروی هادرونی اشباع پذیر است. اگر بپذیریم که هر تک نوکلئون همه نوکلئون های اطراف خود را جذب می کند باید تعداد $\frac{A(A-1)}{2}$ زوج برهمکنش متمایز وجود می داشت در این صورت باید انرژی بستگی با $A^2 \approx A(A-1)$ متناسب باشد و تمام هسته ها قطری برابر با برد نیروی هسته ای داشته باشند. هر دو پیش بینی انرژی بستگی متناسب با A^2 و حجم هسته ای ثابت برای هسته های $A > 4$ با تجربه مخالفت می کند. تجربه نشان داده است که حجم و انرژی بستگی برای اغلب هسته ها با عدد جرمی A متناسب اند و نیروی هسته ای اشباع پذیر است و هر نوکلئون درون هسته فقط تعداد محدودی از نوکلئون های دیگر را تحت تاثیر قرار می دهد جالب توجه است که در پدیده های شیمیایی نیز نیروی واندروالس رفتاری مشابه دارد. پدیده اشباع را می توان به دو روش مختلف توضیح داد هم از طریق نیروهای تبدالی^۱ و یا از طریق نیروهایی که در فواصل کوتاه برد به شدت دافعه هستند (سخت مغز)^۲. در پیوند های شیمیایی نیروهای تبدالی منجر به پدیده اشباع می شوند و نیروهای سخت مغز در مایعات کلاسیکی مسئولیت این پدیده را بر عهده دارند ولی از آزمایش های پراکندگی هر دو عامل ذکر شده یعنی سخت مغز و نیروهای تبدالی دارای سهمی در پدیده اشباع دارند.

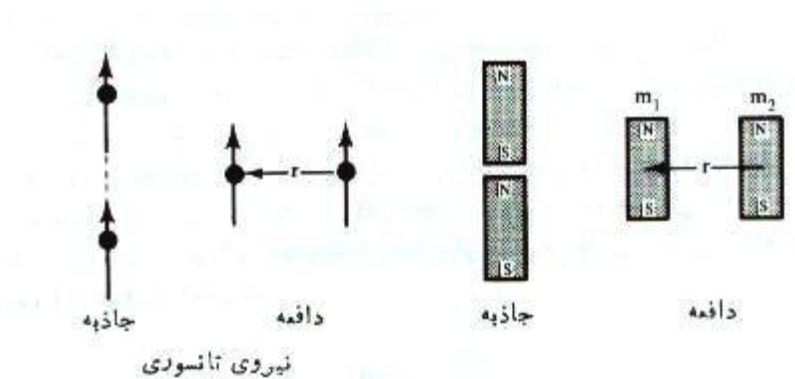
۴- نیروی بین نوکلئون ها در هسته به جهت گیری اسپین هر دو نوکلئون وابسته است. به عنوان مثال عدم مشاهده حالت تک تایه در دوترون و همچنین وجود اختلاف سطح مقطع های حالت های تک تایه و سه تایه در آن ثابت می کند که علاوه بر جمله پتانسیل مرکزی در برهمکنش نوکلئون- نوکلئون جمله پتانسیل اسپینی را نیز باید در نظر گرفت.

۵- نیروی هسته ای شامل یک مولفه تانسوری (غیر مرکزی) می باشد. حالت پایه در یک پتانسیل مرکزی همیشه یک حالت s است بنابراین وجود حالت d در دوترون حاکی از این واقعیت است که نیروی هسته ای به طور خالص نمی تواند مرکزی باشد. انرژی های حالت هایی با $L \neq 0$ توسط

¹ W.Heisenberg, Z.Physik, 77, 1 (1932)

² R. Jastrow, Phys.Rev, 81,165(1951)

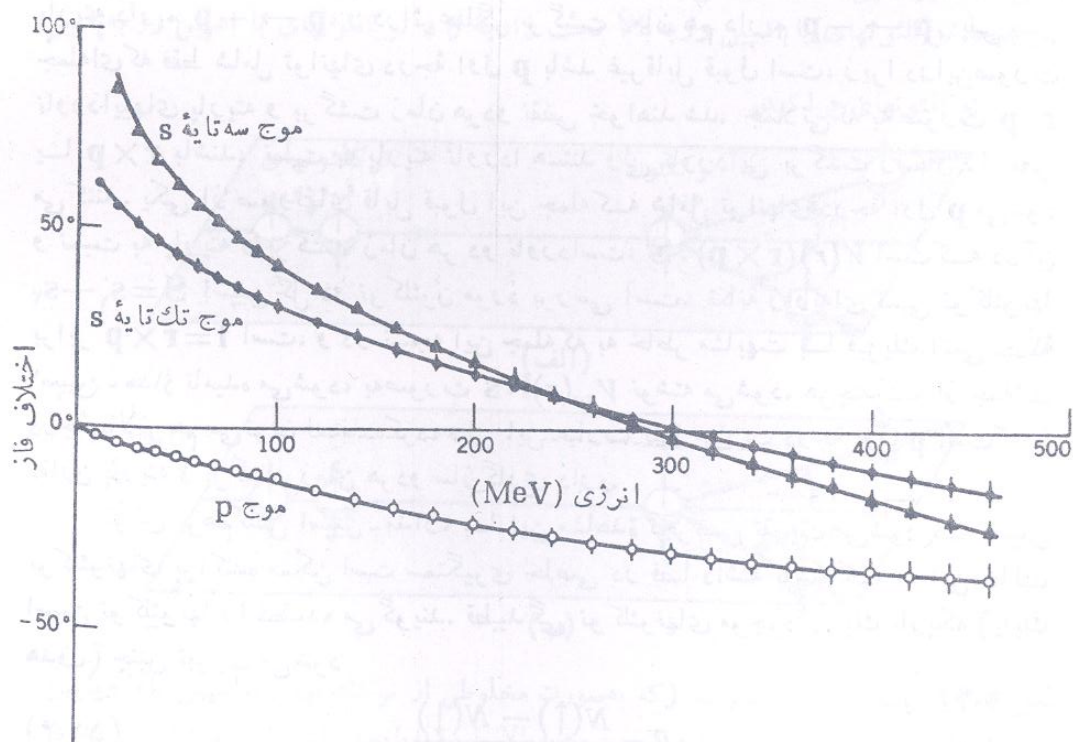
پتانسیل مرکز گریز بالاتر برده می شود. نیروی غیر مرکزی که باعث ایجاد گشتاور چارقطبی در دوترون می شود را نیروی تانسوری می نامند. این نیرو به زاویه بین بردار واصل بین نوکلئون ها و بردار اسپین دوترون وابسته است. جالب توجه است که نیروی تانسوری در پیکره بندی پخت جاذب و در پیکره بندی کشیده دافع است. یک مثال ساده کلاسیکی برای این مورد مثال دو آهن ربای میله ای با گشتاورهای دوقطبی m_1, m_2 در آرایش سیگاری و آرایش قرصی می باشد. در آرایش سیگاری آهنرباها یکدیگر را جذب و در آرایش قرصی یکدیگر را دفع می کنند شکل (۲-۲) [7].



شکل (۲-۲): نیروی تانسوری در دوترون برای پیکربندی سیگاری شکل جاذبه و برای پیکره بندی قرصی شکل دافعه است. با دو آهن ربای میله ای می توان مثالی کلاسیکی برای یک نیروی تانسوری ارائه داد.

۶- نیروهای هادرونی مستقل از بار هستند و پس از تصحیح برهمکنش الکترومغناطیسی نیروهای p-p و p-n بین نوکلئون هایی که در یک حالت باشند یکسان است. بعداً به صورت مشروح به این مطلب می پردازیم که نهایتاً منجر به معرفی عدد کوانتومی جدیدی به نام ایزواسپین می شود.

۷- نیروی هادرونی در فواصل کوتاه تبدیل به دافعه می شود. اگر به طور ساده چگالی هسته ای را مورد مطالعه قرار دهیم متوجه می شویم که رشد هسته در اثر افزایش نوکلئون ها به صورتی است که چگالی مرکزی آن تقریباً ثابت است از این رو باید عاملی وجود داشته باشد که از تجمع و نزدیک شدن بیش از حد نوکلئون ها جلوگیری می کند.



شکل (۲-۳): اختلاف فاز حاصل از پراکندگی نوترون- پروتون در انرژی متوسط. تغییر اختلاف فاز موج S از مقادیر مثبت به منفی در انرژی حدود 300 MeV نشان می دهد که در این انرژی ها نوکلئون فرودی با مغز دافعه در برهمکنش نوکلئون-نوکلئون روبرو شده است.

۸- نیروی هادرونی به سرعت نسبی نوکلئون ها وابسته است. از آزمایشات برخورد شواهدی وجود دارد مبنی بر اینکه نیروی نوکلئون- نوکلئون به سرعت نسبی نوکلئون ها وابسته است. حال که با نیروی هادرونی تا حدودی آشنا شدیم نوبت آن است که به این موضوع بپردازیم که چه عاملی موجب برهمکنش نوکلئون ها می شود. در ادامه سعی می کنیم این موضوع را مورد بررسی قرار دهیم.

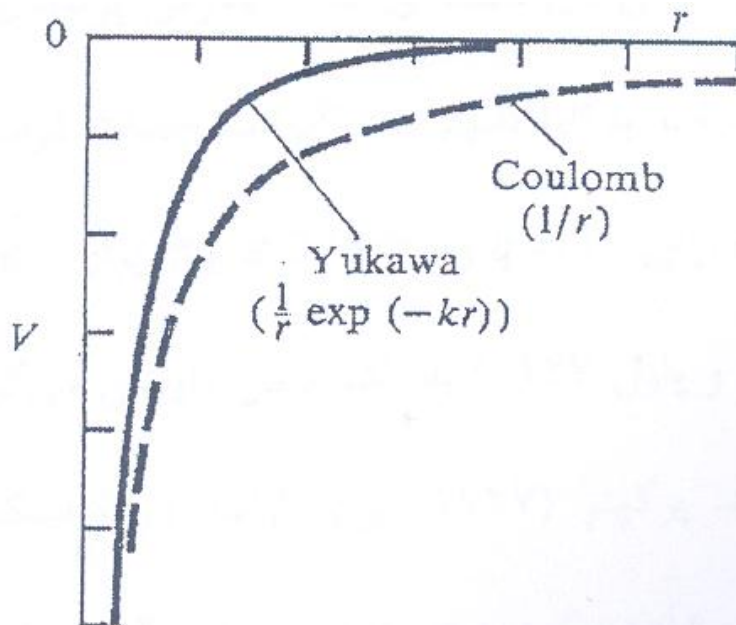
۲-۴ نظریه یوکاوا و ذره یوکاوا

قانون عکس مجذوری میدان الکتروستاتیک، تقریبی از نظریه ظریف اما دشوار و بحث انگیز الکترودینامیک کوانتومی محسوب می شود. فرض اساسی این نظریه این است که برهمکنش ناشی از

فوتون های رد و بدل شده بین بارهای الکتریکی است. فوتون دارای انرژی $h\nu$ است و ممکن است در نگاه اول موجب شکست نوردایی انرژی سیستم به نظر برسد، با این حال اصل هایزنبرگ ، عدم قطعیت انرژی ΔE را در بازه Δt با شرط $\Delta E \Delta t \leq \hbar$ تائید می کند. برای برهمکنش تا فاصله r با سرعت نور، می توان نوشت: $\Delta t \approx \frac{r}{c}$ و بنابراین طول موج فوتون مجازی به صورت $\lambda = 2\pi r$ بدست می آید. یوکاوا در سال ۱۹۳۵ مشخص نمود که " نظریه کوانتومی میدان های هسته ای باید بر اساس کوانتوم جدیدی مرتب گردند." او با هوشیاری فراوان اضافه کرد "علاوه بر نیروی تبادل و نیروهای اولیه الکتریکی و مغناطیسی، نیروهای دیگری نیز ممکن است بین ذرات وجود داشته باشند." او عبارتی برای پتانسیل هسته ای به صورت زیر بدست آورد [9]:

$$V = -\frac{g^2}{r} \exp(kr) \quad (۱۷-۲)$$

در شکل زیر نمودار پتانسیل کولنی و یوکاوا با یکدیگر مقایسه شده اند:



شکل (۲-۴): مقایسه شکل پتانسیل "تبادل تک پایونی" یوکاوا با پتانسیل کولنی (تبادل فوتونی)

یوکاوا با مقایسه نتایج بدست آمده و نتایج تجربی، تخمینی برای مقادیر k و g بدست آورد. در حال

حاضر "ثابت جفت شدگی" نیروی هسته ای به صورت $\frac{g^2}{hc} \approx 1$ و نیروهای الکترومغناطیسی به صورت

بدست آمده است. یوکاوا با فرض اینکه کوانتوم میدان هسته ای دارای بار الکتریکی $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$

و e است دریافت که جرم M این ذرات باید در حدود 200 برابر جرم الکترون باشد. این مطلب به دنبال این واقعیت است که نیروهای نوکلئون-نوکلئون در یک دامنه کوتاه $r = 2 \text{ fm}$ که در حدود شعاع دوترون است عمل می کند. بنابراین ما می توانیم با استفاده مجدد از رابطه اصل عدم قطعیت هایزنبرگ $\Delta E \Delta t \leq \hbar$ و $\Delta t \approx \frac{r}{c}$ و $\Delta E = mc^2$ مقدار 200 MeV را برای کوانتوم میدان هسته ای بدست آوریم. همچنین یوکاوا فروتنانه و با اعتماد بنفس اظهار داشت که اگر ذراتی با جرم یاد شده و با بار مثبت یا منفی توسط آزمایش آشکار نشوند، به نظر می رسد نظریه فوق دارای اشکال است. دو سال بعد، با کشف میون با ویژگی های $m_\mu \cong 207m_e$ و $q = \pm e$ توسط ندرمایر و اندرسون (۱۹۳۷) به نظر می رسید که شک و تردید یوکاوا برطرف گردیده است. متأسفانه میون به هیچ طریقی به صورت قوی با پروتون، نوترون و یا هسته های دیگر برهمکنش نمی کند و بنابراین تا سال ۱۹۴۷ که پاول و همکارانش مزون پای (یا پیون) را در امولسیون های هسته ای که در معرض پرتوهای کیهانی خارج از جو قرار گرفته بود مشاهده کردند، هویت ذره یوکاوا تأیید نشد. آنها مشخصات ذره پیشگویی شده توسط یوکاوا را به صورت $m_\pi \cong 264m_e$ برای $q = 0$ و $m_\pi \cong 273m_e$ برای $q = \pm e$ بدست آوردند. مزون های باردار (لتیس، اوجیالینی و پاول ۱۹۴۷) به یک میون واپاشی می کردند که به نوبه خود به یک الکترون واپاشی می کرد. پرکینز (۱۹۴۷) برای اولین بار برهمکنش پیون و هسته را که موجب فروپاشی هسته می شد مشاهده کرد و در عرض چند سال بسیاری از ذرات ناپایدار جدید مشاهده شدند.

مدل ساده "پتانسیل تبادل تک پیونی" یوکاوا به عنوان یک راهنما، به خصوص برای نیروهای هسته ای فراتر از 2 fm بسیار مفید است، اما دارای تعدادی ویژگی نامطلوب است. به عنوان مثال، در حال حاضر به طور کلی مشاهده شده است که به منظور توضیح پراکندگی نوکلئون-نوکلئون در انرژی بالا، نوعی از پتانسیل مغز دافعه هسته ای در محدوده زیر 2 fm مورد نیاز است و چنین خاصیتی به

توضیح "اشباع نیروهای هسته ای و چگالی تقریباً ثابت ماده هسته ای" کمک می کند. نظریه های مزونی در اوایل، با انواع خاصی از نیروی تبادل، جمله نیروی دافعه مورد نیاز برای ایجاد جلوگیری از فروپاشی ماده هسته ای به درون ابعاد نوکلئون را تولید کردند، اما این نظریه ها نمی توانند پراکندگی را در انرژی بالا توضیح دهند. معلوم شده است که بجز پیون سایر ذرات نیز با نوکلئون ها به صورت قوی برهمکنش می کنند و برای توضیح اثرات قطبش در طول پراکندگی های هسته ای مزون های برداری با اسپین غیر صفر هستند نیز لازم شناخته شده اند، با این حال پیون ها و کائون ها هنوز دارای اسپین صفر هستند. ممکن است که برهمکنش کامل نوکلئون- نوکلئون مشکلی فراتر از پیچیدگی اصولی باشد که اهمیت آن ساختار کوارک- گلوئون نوکلئون ها در انرژی های بالاتر، به طور فزاینده افزایش می یابد.

۲-۵ پتانسیل های نوکلئون-نوکلئون

در چند دهه گذشته پتانسیل های نوکلئون- نوکلئون زیادی ارائه شده است. همه این پتانسیل ها به روش تطبیق با اطلاعات پراکندگی ساخته شده اند. به عبارت دیگر مقیاس یک پتانسیل تطابق اطلاعات پراکندگی با $1 \approx \frac{\chi^2}{N_{\text{data}}}$ است. اما از آنجایی که این مقیاس تا حدودی شکست خورده بود، این مقیاس تنها مقیاس اندازه گیری کیفی پتانسیل نیست. بنابراین مقایسه پتانسیل های نوکلئون- نوکلئون به روش های دیگر لازم خواهد بود. نتایج وقتی رضایت بخش خواهد بود که پتانسیل بتواند ساختمان نوکلئون را به خوبی توصیف کند. برای مقایسه پتانسیل ها ابتدا لازم است که سه جزء برهمکنش را در سیستم دو نوکلئونی در نظر بگیریم:

(الف) بخش بلند برد ($r \geq 2\text{fm}$):

در اغلب مدل های پتانسیل، پتانسیل تبادل تک پیونی^۱ در نظر گرفته شده است و به دنبال اجزای پتانسیل های دیگر به عنوان بخش بلند برد اضافه می شود. در ساده ترین حالت بخش پتانسیل تک پیونی از رابطه زیر تبعیت می کند:

$$V_{\text{ope}}(r) = g^2 \bar{\mu} (\tau_1 \cdot \tau_2) \left[S_{12} \left(\frac{1}{(\mu r)^3} + \frac{1}{(\mu r)^2} + \frac{1}{3\mu r} \right) e^{-\mu r} + (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{1}{3} \left(\frac{e^{-\mu r}}{r} - \frac{4\pi}{\mu^3} \delta(r) \right) \right] \quad (18-2)$$

که در آن

$$S_{12} = 3 \left(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r} \right) \left(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r} \right) - \left(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right) \quad (19-2)$$

عملگر تانسوری معمولی است g مقدار ثابت جفت شدگی است که از آزمایش بدست می آید. این پتانسیل با در نظر گرفتن مقدار اختلاف بین پیون های باردار و خنثی به خوبی برای $p-n$, $p-p$, $n-n$ به صورت مناسب تری ارائه شده است.

ب) بخش متوسط برد ($1\text{fm} \leq r \leq 2\text{fm}$): که از تبادلات مزون های اسکالر بدست می آید (دو پیون و مزون های سنگین)

ج) بخش کوتاه برد ($r \leq 1\text{fm}$): که از تبادلات مزون های برداری بدست می آید (مزون های سنگین و تبادلات پیون های چندگانه که به خوبی در QCD مشهود است).

هدف ما در این کار بیشتر در نظر گرفتن بخش اول است یعنی بیشتر با فواصل بلند برد کار می کنیم. در ادامه سعی کردیم به بررسی برخی از پتانسیل های مهم که در چند سال اخیر بسیار به آنها پرداخته شده است بپردازیم.

۲-۵-۱ پتانسیل شبه حلقوی کراتزر تعمیم یافته^۲

در چند سال اخیر پتانسیل جدیدی را به نام پتانسیل مولکولی کراتزر تعمیم یافته معرفی کردند [10]:

$$V(r) = D_e \left(\frac{r - r_e}{r} \right)^2 \quad (20-2)$$

¹ One pion exchange Potential (opep)

² Ring shaped Kratzer potential

به ترتیب فاصله تعادلی بین هسته ها و انرژی جدایی می باشد . D_e, r_e

بعد از آن گروهی دیگر با اضافه کردن جمله زاویه ای پتانسیل جدیدی به نام پتانسیل شبه حلقوی کراتزر تعمیم یافته را ارائه دادند:

$$V(r, \theta) = D_e \left(\frac{r - r_e}{r} \right)^2 + \eta \frac{\cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (21-2)$$

در آن η یک مقدار حقیقی مثبت می باشد هرچند در این پتانسیل هنگامی که مقدار آرگومان به صفر میل می کند جمله دوم پتانسیل به بینهایت میل می کند.

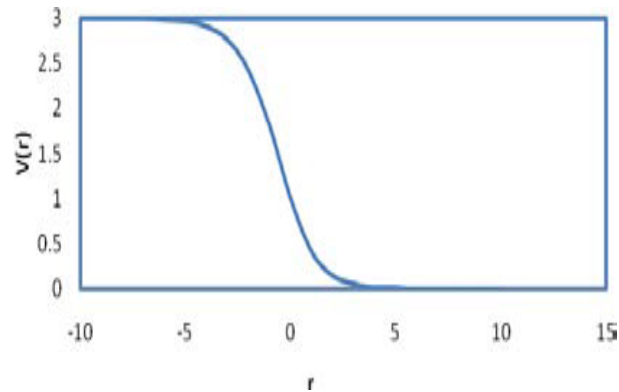
۲-۵-۲ پتانسیل وودز-ساکسون^۱

یکی از پتانسیل های مهم در فیزیک هسته ای پتانسیل وودز-ساکسون است. این پتانسیل کوتاه برد که اولین بار توسط وودز و ساکسون در سال ۱۹۵۴ معرفی شد بخش اصلی مدل پوسته ای و مدل اپتیکی را که در پراکندگی هسته ای کاربرد دارد تشکیل می دهد. همچنین این پتانسیل به صورت گسترده ای برای توصیف برهمکنش نوترون با هسته های سنگین استفاده می شود. در حوزه پتانسیل میانگین جزئیات پتانسیل با پارامترهای آزادی مانند عمق پهنا و شیب پتانسیل تعریف می شود که باید با مشاهدات تجربی سازگار باشند. شکل این پتانسیل که برحسب فاصله از مرکز هسته است به صورت زیر می باشد [11]:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\left(\frac{r - R_0}{a} \right)}} \quad (35-2)$$

V_0 و R_0 به ترتیب عمق و پهنا ی پتانسیل و ضخامت سطح می باشد که اغلب با مقادیر تجربی در سازگاری می باشد .

¹ Woods-Sax on potential



شکل (۲-۵): پتانسیل وودز-ساکسون بر حسب تابعی از r به ازای پارامترهایی خاص

۳-۵-۲ پتانسیل وودز-ساکسون استاندارد^۱

پتانسیل وودز-ساکسون استاندارد با رابطه زیر تعریف می شود [12,13]:

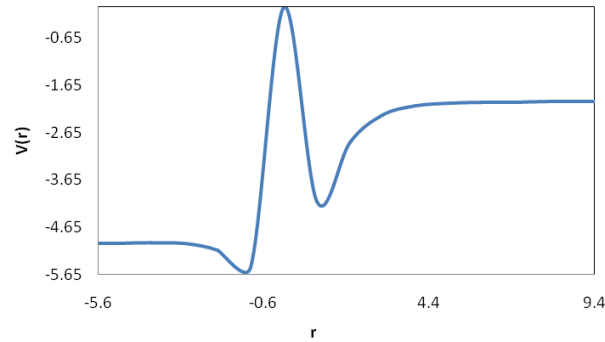
$$V(r) = \frac{-v_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}} + \frac{-v_1}{\left(1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}\right)^2} \quad (۳۶-۲)$$

به ترتیب عمق و پهنای پتانسیل و ضخامت سطح می باشد. این پتانسیل برای توصیف برهمکنش نوکلئون ها در هسته های سنگین به کار می رود. با اضافه کردن دو جمله به این پتانسیل، پتانسیل جدیدی ارائه شده است [13]:

$$V_{\text{Mod}}(r) = \frac{-v_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}} + \frac{\tau}{\left(1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}\right)^2} + \mu \coth\left(\frac{r-R_0}{a}\right) + \eta \coth^2\left(\frac{r-R_0}{a}\right) \quad (۳۷-۲)$$

که در آن پارامترهای حقیقی هستند، همچنین اشاره می شود که جملات سوم و چهارم رابطه بالا در حد $(r-R_0) \ll a$ به $\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r}$ میل می کند که با پتانسیل دافعه کولنی و توان دوم آن مطابقت دارد.

¹ Standard woods-saxon



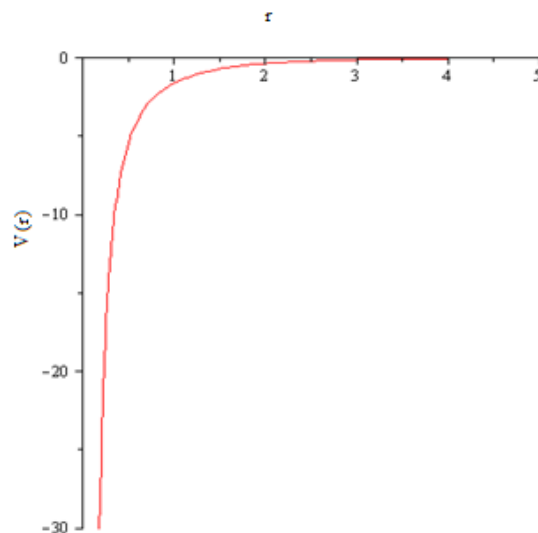
شکل (۶-۲): پتانسیل وودز-ساکسون تعمیم یافته

بعد از آن گروهی دیگر بر اساس استدلال و بدون از دست دادن کلیت پتانسیل وودز-ساکسون معکوس پتانسیل Manning-Rosen را به صورت زیر در نظر گرفته اند [14]:

$$V_{\text{inverted}}(r) = \frac{-v_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}} + \frac{-v_1}{\left(1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}\right)^2} + v_2 \tan\left(\frac{r-R_0}{a}\right) + v_3 \tan^2\left(\frac{r-R_0}{a}\right) \quad (۳۸-۲)$$

و در آخر نوع دیگری از پتانسیل وودز-ساکسون تعمیم یافته در نظر گرفته شده است.

$$V(r) = -2.4 \frac{e^{-1.02r}}{1 - e^{-1.02r}} - 0.8 \left(\frac{e^{-1.02r}}{1 - e^{-1.02r}} \right)^2 \quad (۳۹-۲)$$



شکل (۷-۲): پتانسیل وودز-ساکسون تعمیم یافته ۲

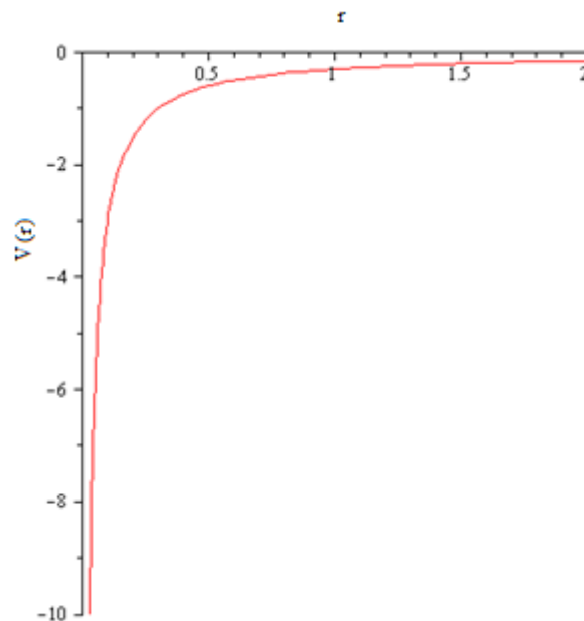
۴-۵-۲ پتانسیل یوکاوا^۱

حدود هفتاد سال پیش یوکاوا نظریه مزون را برای توضیح برهمکنش های میان نوکلئون ها پیشنهاد کرد و پتانسیل را به شکل زیر معرفی نمود [15]:

$$V_C(r) = -v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad (۴۰-۲)$$

که در آن α برد نیروی هسته ای و v_0 عمق پتانسیل می باشد.

بر خلاف نیروی کولنی که بستگی ساده ای به فاصله دارد، نیروی هسته ای به طور خیلی پیچیده ای به فاصله وابسته است. پتانسیل یوکاوا برای بیان این منظور یکی از بهترین پتانسیل ها می باشد. این پتانسیل تابع نمایی از فاصله است به همین علت، پتانسیل و نیرو سریعاً با افزایش فاصله به صفر میل می کند. یکی از نکات مهم در مورد پتانسیل یوکاوا آن است که معادله شرودینگر با این پتانسیل به طور دقیق و تحلیلی قابل حل نمی باشد.



شکل (۴-۸): پتانسیل یوکاوا برحسب تابعی از r برحسب مقادیری خاص

¹ Yukawa potential

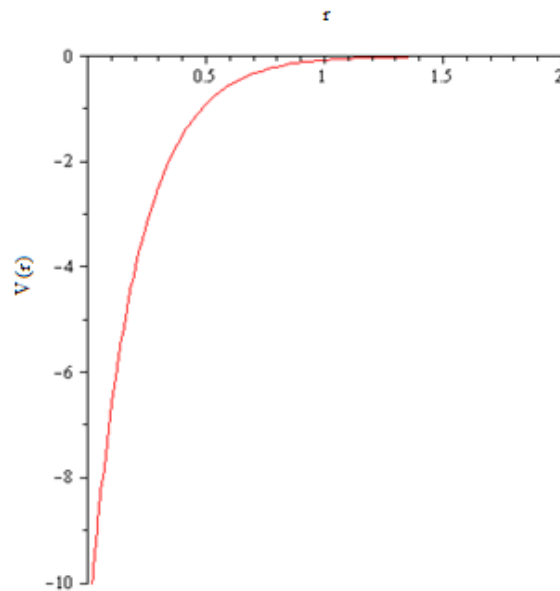
۵-۵-۲ پتانسیل هولسن عمومی

$$V_q(r) = -v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{1 - qe^{-\alpha r}} \quad (۴۱-۲)$$

که در آن پارامتر q شکل پتانسیل را تعیین می کند [16]. قابل توجه است که به ازای مقادیر بخصوص پارامتر q پتانسیل معینی را نتیجه می دهد:

اگر $q = 0$ باشد پتانسیل نمایی حاصل می شود که در شکل (۹-۲) رسم شده است.

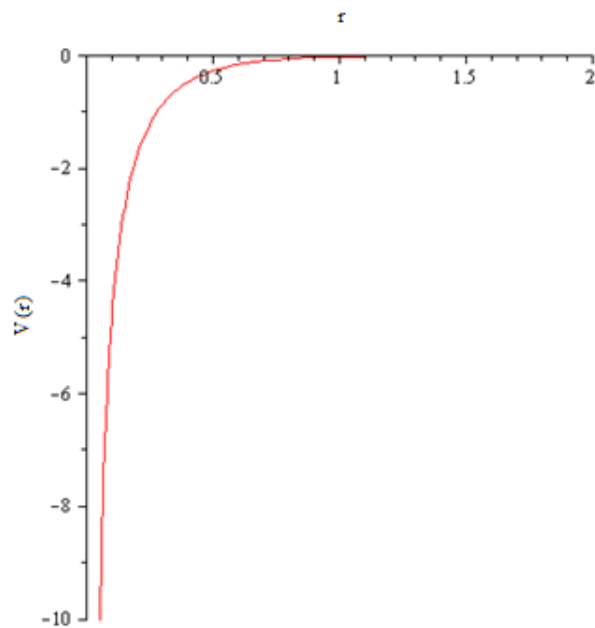
$$V_q(r) = -v_0 e^{-\alpha r} \quad (۴۲-۲)$$



شکل (۹-۲): پتانسیل نمایی بر حسب r (به ازای $v_0 = 11$, $\alpha = 5$)

اگر $q = 1$ باشد شکل پتانسیل به صورت پتانسیل هولسن استاندارد در می آید که در شکل (۱۰-۲) رسم شده است:

$$V_q(r) = -v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{1 - e^{-\alpha r}} \quad (۴۳-۲)$$

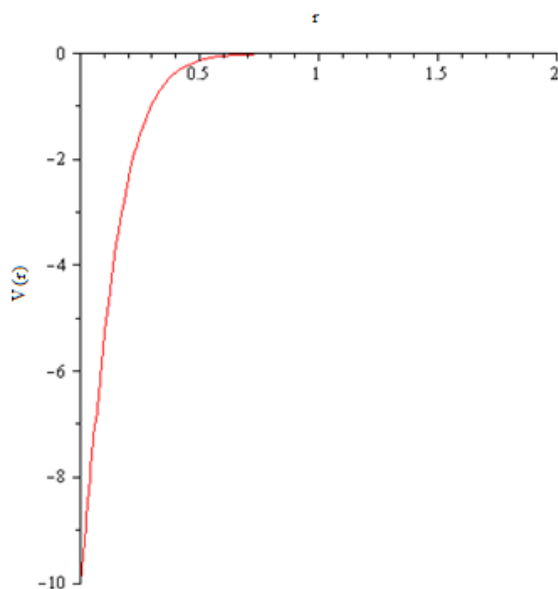


شکل (۲-۱۰): پتانسیل هولسن استاندارد بر حسب تابعی از r (به ازای $\alpha = 5$, $v_0 = 3$)

اگر $q = -1$ باشد شکل پتانسیل وودز-ساکسون را خواهیم داشتین پتانسیل را به ازای مقادیری

خاص در شکل (۲-۱۱) رسم کرده ایم:

$$V_q(r) = -v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{1 + e^{-\alpha r}} \quad (۲-۴۴)$$

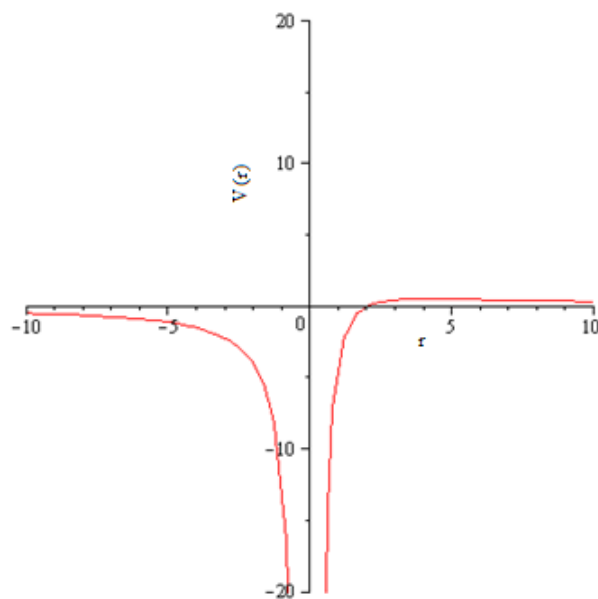


شکل (۲-۱۱): پتانسیل وودز-ساکسون بر حسب تابعی از r (به ازای $\alpha = 10$, $v_0 = 20$)

۲-۵-۶ پتانسیل اکارت^۱:

پتانسیل اکارت به صورت زیر تعریف می شود:

$$V_{Ec}(r) = \beta \frac{e^{\frac{r}{a}}}{\left(1 - e^{\frac{r}{a}}\right)^2} - \alpha \frac{1 + e^{\frac{r}{a}}}{1 - e^{\frac{r}{a}}} \quad (۲-۴۵)$$

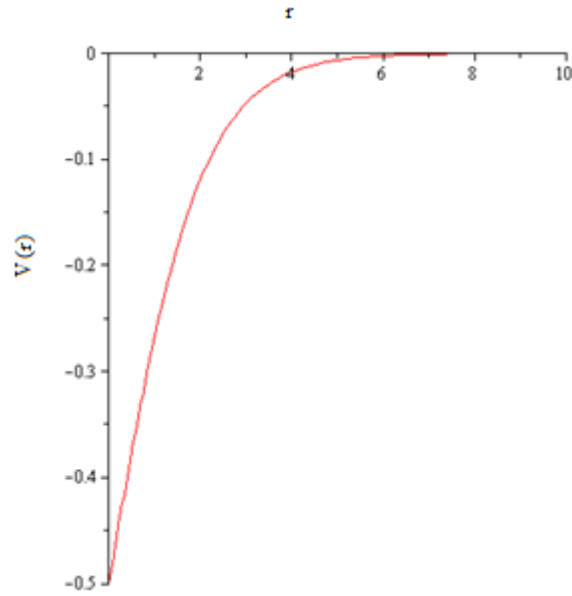


شکل (۲-۱۲): پتانسیل اکارت بر حسب تابعی از r (به ازای $\beta = -0.02$, $a = 20$, $\alpha = 0.1$)

پارامترهای α, β عمق پتانسیل را تعریف می کنند [10,17,18]. در ادامه برخی از پتانسیل های بدون نام مشخصی را که در تطابق خوبی با پتانسیل های هسته ای می باشد با شکل آنها آورده شده است:

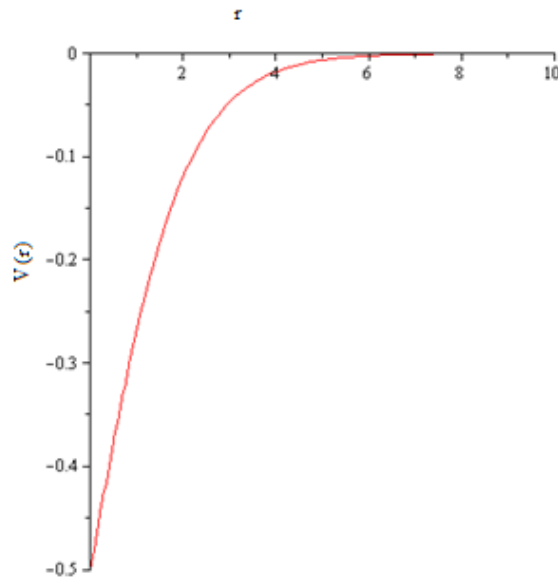
$$V(r) = -\frac{e^{-r}}{1 + e^{-r}} \quad (۲-۴۶)$$

¹ Eckhart Potential



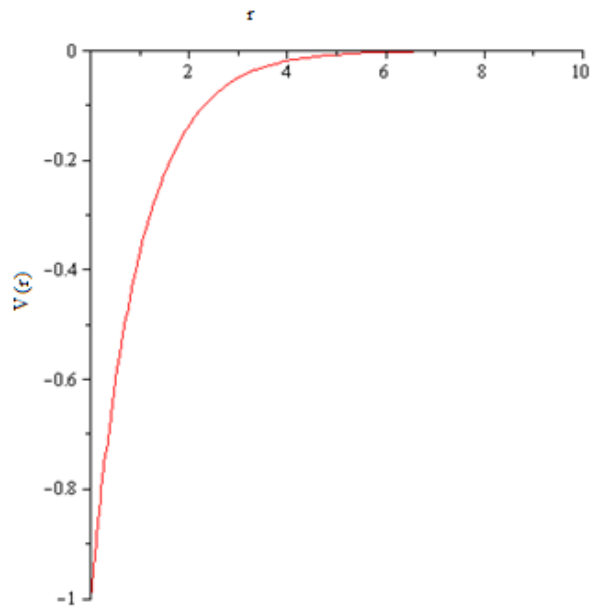
شکل (۲-۱۳): پتانسیل $V(r) = -\frac{e^{-r}}{1+e^{-r}}$

$V(r) = -\frac{V_0}{1+e^{-\alpha r}}$ (۲-۴۷)



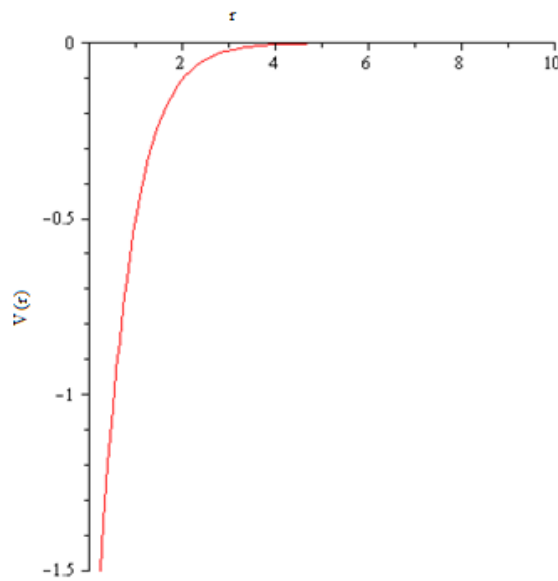
شکل (۲-۱۴): پتانسیل $V(r) = -\frac{V_0}{1+e^{-\alpha r}}$ بر حسب تابعی از r (به ازای $v_0 = 1$)

$V(r) = -v_0 e^{-r}$ (۲-۴۸)



شکل (۱۵-۲): پتانسیل $V(r) = -v_0 e^{-r}$ بر حسب تابعی از r (به ازای $v_0 = 1$)

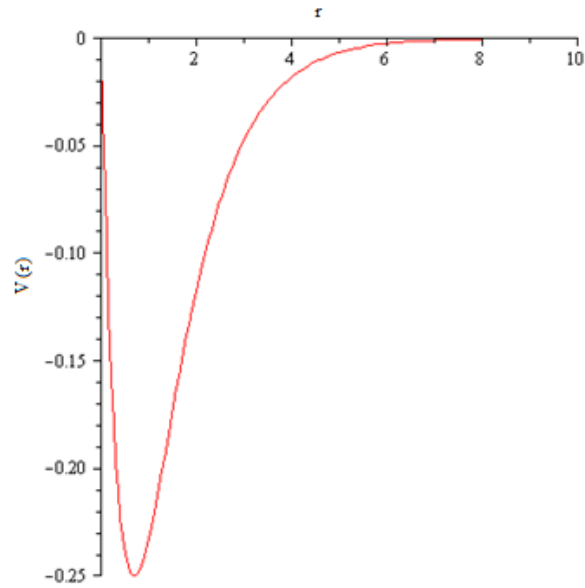
$$V(r) = -\frac{v_0}{1+e^{ar}} - \frac{v_1}{(1+e^{ar})^2} \quad (۴۹-۲)$$



شکل (۱۶-۲): پتانسیل $V(r) = -\frac{v_0}{1+e^{ar}} - \frac{v_1}{(1+e^{ar})^2}$ بر حسب تابعی از r

(به ازای $v_0 = 4, v_1 = 2, a = 1.5$)

$$V(r) = -v_0 e^{-ar} - v_1 e^{-br} \quad (۵۰-۲)$$

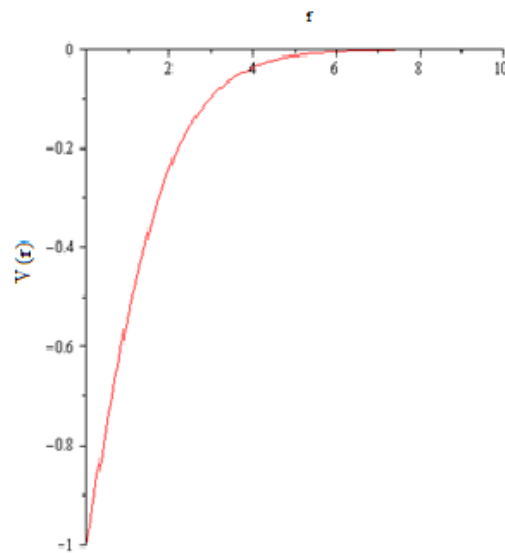


شکل (۱۷-۲): پتانسیل $V(r) = -v_0 e^{-ar} - v_1 e^{-br}$ بر حسب تابعی از r

(به ازای $v_0 = 1, v_1 = 1, a = 2, b = 1$)

$$V(r) = -v_0 \frac{e^{br}}{1+e^r}$$

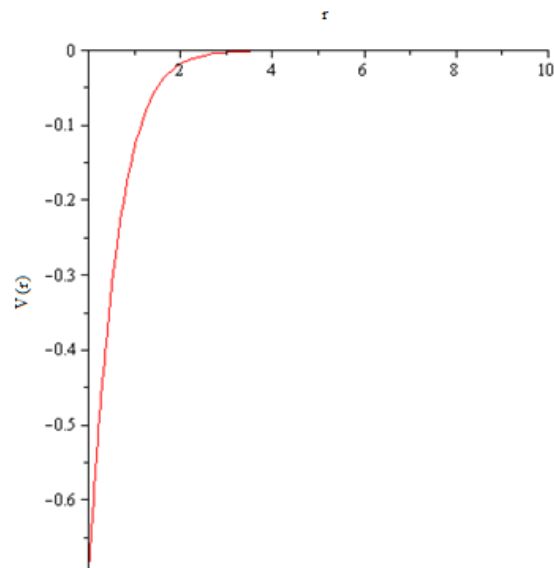
(۵۱-۲)



شکل (۱۸-۲): پتانسیل $V(r) = -v_0 \frac{e^{br}}{1+e^r}$ بر حسب تابعی از r

(به ازای $v_0 = 1, b = 0.002$)

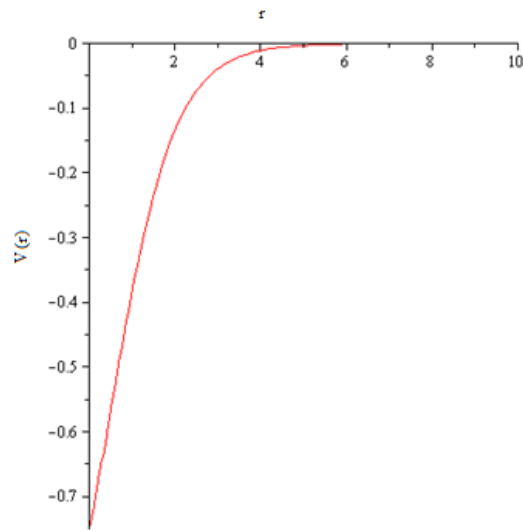
$$V(r) = -v_0 \frac{e^{br}}{(1+ae^{br})^2} \quad (52-2)$$



شکل (۱۹-۲): پتانسیل $V(r) = -v_0 \frac{e^{br}}{(1+ae^{br})^2}$ بر حسب تابعی از r

(به ازای $v_0 = 1, a = 0.2, b = -2$)

$$V(r) = -v_0 \frac{e^{ar}}{(1+e^{ar})^2} - \frac{1}{(1+e^{ar})} \quad (53-2)$$

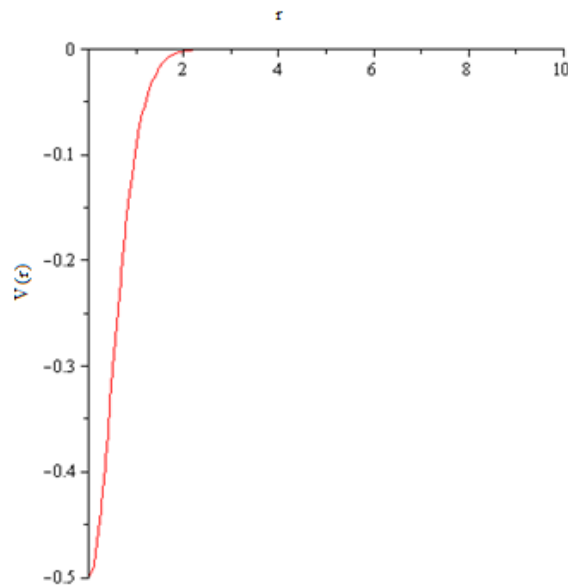


شکل (۲-۲۰): پتانسیل $V(r) = -v_0 \frac{e^{ar}}{(1+e^{ar})^2} - \frac{1}{(1+e^{ar})}$ بر حسب تابعی از r

(به ازای $v_0 = 1, a = 1.3$)

$$V(r) = -v_0 \frac{e^{ar^2}}{(1+r^2)}$$

(۲-۵۴)



شکل (۲-۲۱): پتانسیل $V(r) = -v_0 \frac{e^{ar^2}}{(1+r^2)}$ بر حسب تابعی از r

(به ازای $v_0 = 0.5, a = -1$)

۴-۲ نیروهای تبادلی

در نگاه اول شاید به نظر رسد که نیروی هسته ای نباید به اینکه $s=0$ یا $s=1$ و زوج و فرد بودن L وابسته باشد. ولی شواهدی دال بر وابستگی نیروی هسته ای به اسپین و تکانه مداری وجود دارد.

موارد مشاهده شده را به صورت زیر در نظر می گیریم: [6]

۱. انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون مقدار اشباعی دارد.

۲. نوکلئون ها چگالی ثابت دارند.

۳. تحلیل های انتقال فاز و قطبیدگی در انرژی بالا مستلزم حضور نیروهای تبادلی می باشد.

۴-۲-۱ خواص عملگرهای تبادلی موثر بر تابع موج

سه عملگر P^B و P^H و P^M به شکل زیر می باشند:

$$\begin{aligned} P^B &\equiv P^\sigma \equiv \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) \\ P^H &\equiv -P^\tau \equiv -\frac{1}{2}(1 + \tau_1 \cdot \tau_2) \\ P^M &\equiv -\frac{1}{4}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2)(1 + \tau_1 \cdot \tau_2) \end{aligned} \quad (۱۲-۲)$$

عملگر برتلت اعداد کوانتومی اسپینی را مبادله می کند و عملگر هایزنبرگ اعداد کوانتومی ایزواسپینی را مبادله می کند و عملگر ماژورانا هر دو عدد کوانتومی اسپینی و ایزواسپینی را مبادله می کند که خود مستلزم مبادله فضایی تابع موج می باشد زیرا تابع موج خود از سه بخش اسپینی و ایزواسپینی و فضایی تشکیل شده است.

$$\Psi_{tot} = \Psi_{spin} \Psi_{isospin} \Psi_{space} \quad (۱۳-۲)$$

¹ Bratlett

² Heisenberg

³ Majorana

و به همین خاطر است که در برخی از منابع عملگر مازورانا را عملگر فضایی نیز می نامند. جهت توضیح این مطلب که عملگر برتلت اعداد کوانتومی اسپینی را مبادله می کند دو فرمیون که دارای اسپین $\sigma(1)$ و $\sigma(2)$ هستند را در نظر می گیریم که دارای یکی از شرایط زیر می باشند:

$$1) \text{Singlet} \quad s = 0$$

$$|s\rangle = \left| \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right\rangle = 0 \quad \vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_2 \quad S^2 = s_1^2 + s_2^2 + 2s_1 \cdot s_2$$

$$(14-2)$$

$$s_1^2 = s_1(s_1 + 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow S^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 2\left(\frac{1}{2}\sigma_1 \times \frac{1}{2}\sigma_2\right)$$

$$S^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = \frac{1}{2}(3 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) = 0 \Rightarrow \sigma_1 \cdot \sigma_2 = -3 \Rightarrow P^\sigma = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) = -1$$

$$2) \text{Triplet} \quad s = 1$$

$$|s\rangle = \left| \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right\rangle = 1$$

$$(15-2)$$

$$s^2 = s(s + 1) = 2 = \frac{1}{2}(3 + \sigma_1 \cdot \sigma_2)$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 1 \Rightarrow P^\sigma = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) = 1$$

از روابط بخش اول مشاهده می شود که اگر $S = 0$ باشد مبادله اسپین اثری بر تابع موج ندارد و از روابط بخش دوم ملاحظه می شود که اگر $S = 1$ باشد مبادله اسپین صرفاً علامت تابع موج را تغییر می دهد پس می توان نوشت:

$$P^\sigma \chi_0^0 = -\chi_0^0 \quad \text{Singlet}$$

$$P^\sigma \chi_1^{-1,0,1} = \chi_1^{-1,0,1} \quad \text{Triplet}$$

$$(16-2)$$

۲-۴-۲ عملگر P^M

قبلاً اشاره شد که P^M هر دو عدد کوانتومی اسپینی و ایزو اسپینی را مبادله می کند که خود مستلزم مبادله فضایی تابع موج می باشد. در سیستم دو نوکلئونی تبادل دو ذره مترادف است با انعکاس حول مبدأ مختصات و چنین انعکاسی علامت ψ را اگر پاریته فرد باشد عوض می کند و اگر

پارپته زوج باشد عوض نمی کند و از آنجایی که زوج و فرد بودن پارپته فقط بستگی به L دارد خواهیم داشت:

$$P^M \psi = \begin{pmatrix} v^M \psi & \text{if } L \text{ is odd} \\ -v^M \psi & \text{if } L \text{ is even} \end{pmatrix} \quad (17-2)$$

از همین رابطه می توان نتیجه گرفت که عملگر P^M روی تابع موج دوترون عملاً بی تاثیر است. زیرا L دوترون فقط مقادیر ۰ و ۲ را دارد و زوج است. در حقیقت نیروی ماژورانا بیان این واقعیت است که پتانسیل هسته ای به زوج یا فرد بودن L نیز بستگی دارد.

۲-۴-۳ عملگر P^H

از آنجایی که P^σ اسپین و P^τ ایزواسپین دو نوکلئون را عوض می کند. می توان نشان داد که P^H از آنجایی که $(P^H = -P^\tau)$ اسپین و مختصات فضایی سیستم را عوض می کند. برای عملگر P^H می توان با ترکیب اثرات P^M و P^τ نوشت:

$$P^H \psi = \begin{pmatrix} +\psi \text{ if } \begin{bmatrix} s=1 & L \text{ odd} \\ s=0 & L \text{ even} \end{bmatrix} & T=0 \\ -\psi \text{ if } \begin{bmatrix} s=0 & L \text{ odd} \\ s=1 & L \text{ even} \end{bmatrix} & T=1 \end{pmatrix} \quad (18-2)$$

T ایزواسپین برداری است که همان خواص ریاضی s را دارا می باشد.

برخی دیگر از خواص نیروهای تبدالی را به صورت زیر می توان در نظر گرفت [2]

$$\begin{aligned} P^\sigma P^\tau P^M \psi &= -\psi \\ P^\tau P^H \psi &= -\psi \\ P^M P^\tau \psi &= -\psi \\ P^H &= P^M P^\sigma = P^M P^B \\ P^M &= -P^\sigma P^\tau = P^B P^H \\ (P^B)^2 &= (P^H)^2 = (P^\tau)^2 = (P^M)^2 = 1 \end{aligned} \quad (19-2)$$

حال که با ویژگی های عملگرهای تبدلی آشنا شدیم، در ادامه می خواهیم ویژگی های یک پتانسیل را بر حسب نیروهای تبدلی مورد بررسی قرار دهیم.

۲-۵ ویژگی های پتانسیل نوکلئون- نوکلئون بر حسب نیروهای تبدلی

خواص عمده ای را می توان برای برهمکنش نوکلئون- نوکلئون در نظر گرفت که این اطلاعات از طریق بررسی سیستم های مقید هسته ای و همچنین آزمایش های پراکندگی در انرژی های بالا و پایین و نظریه مزونی (که وابستگی نیروهای هسته ای به اسپین را توضیح می دهد) و... بدست می آید. کمیت های موجود در سیستم دو نوکلئونی که نیرو به آنها وابسته است به قرار زیر می باشند:

\vec{r}_{12} : برداری که مکان نوکلئون ۱ را به نوکلئون ۲ ارتباط می دهد.

\vec{P}_{12} : تکانه نسبی دو ذره

\vec{S} : اسپین کل دو ذره

\vec{L} : حاصلضرب خارجی دو بردار \vec{r}_{12} و \vec{P}_{12} می باشد.

و اما خواصی که از پتانسیل هسته ای انتظار داریم به قرار زیر می باشد. اول اینکه پتانسیل باید یک کمیت نرده ای باشد زیرا انرژی است و متضمن برخی از تقارن ها باشد و خود این امر مستلزم این است که ما در انتخاب شکل پتانسیل محدودیت داریم. برای دو نوکلئونی که دارای اسپین هستند ۴ بردار به صورت $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$ در نظر بگیریم. در قسمت وابسته به اسپین پتانسیل ما مجاز به انتخاب هر ترکیبی از $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$ نیستیم زیرا نیروی هسته ای باید برخی از تقارن ها را حفظ کند. به عنوان مثال جملاتی مانند \vec{S}_1, \vec{S}_2 یا ترکیبی از آنها را به صورت $A\vec{S}_1 + B\vec{S}_2$ را نمی توانیم در نظر بگیریم زیرا وجود این جملات باعث نقض ناوردایی برگشت زمان خواهد شد. اما می توانیم جملاتی مانند S_1^2, S_2^2 یا S_1, S_2 را که نسبت به برگشت زمان ناوردا هستند در نظر بگیریم. می توان به عنوان نمونه پتانسیل برهمکنش بین نوکلئون- نوکلئون اسکالر را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$V = v_W(r) + v_B(r) \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) + v_T(r) \sum_{ij} T_{ij} r_i \cdot r_j \quad (20-2)$$

و یا به طور خلاصه

$$V = v_W(r) + v_B(r) P^\sigma + v_T(r) S_{12} \quad (21-2)$$

که در آن:

$$P^\sigma \equiv \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2) \quad (22-2)$$

$$S_{12} = 3(\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\hat{\sigma}_2 \cdot \hat{r}) - \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

که v_W پتانسیل ویگنر و v_B پتانسیل برتلت و v_T پتانسیل تانسوری می باشد.

پتانسیل بین نوکلئون ها علاوه بر اسپین و فاصله می تواند به سرعت نسبی یا تکانه نوکلئون ها نیز بستگی داشته باشد. ولی نیروهای وابسته به سرعت یا تکانه را نمی توان با پتانسیل نرده ای نشان داد. با توجه به اینکه تحت عمل پاریته و انعکاس زمان $p \rightarrow -p$ تبدیل می شود بنابراین اگر در پتانسیل جمله ای از مرتبه p وجود داشته باشد به دلیل نقض پاریته و انعکاس زمان پتانسیل مناسبی نخواهد بود. جملاتی مانند $r \cdot p$, $r \times p$ تحت پاریته ناوردا هستند ولی ناوردایی انعکاس زمان را نقض می کنند پس قابل قبول نیستند. یکی از صورت های قابل قبول این جمله که شامل توان های درجه اول p است و نسبت به پاریته و زمان ناوردا می باشد $\vec{v}(r) = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{s}$ است که در آن $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ اسپین کل ذره می باشد. با توجه به اینکه تکانه زاویه ای نسبی نوکلئون ها $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ می باشد. پس می توان عبارت $\vec{v}(r)$ را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\vec{v}(r) = \vec{L} \cdot \vec{s} \quad (23-2)$$

که این عبارت تنها عبارت درجه اول p است که با تقارن پاریته و برگشت زمان سازگاری دارد که همان جمله جفت شدگی اسپین-مدار می باشد. پتانسیل کلی و عمومی که برهمکنش بین نوکلئون ها را نمایش می دهد توسط مارشاک-اوکوبو¹ بیان شد که این پتانسیل تحت انتقال، دوران، پاریته،

¹Marshak-okubo

برگشت زمان و تبدیلات گالیله ناوردا می ماند. محدودیت های دیگری برای پتانسیل های هسته ای مانند وابسته نبودن به بار، تقارن نیز توسط همین افراد اضافه شد که نتیجه آن پتانسیلی به شرح زیر می باشد [12]:

$$V = v_0 + (\sigma_1 \cdot \sigma_2)v_1 + s_{12}v_2 + (\vec{L} \cdot \vec{s})v_3 + \frac{1}{2} \left[(\sigma_1 \cdot \vec{L})(\sigma_2 \cdot \vec{L}) + (\sigma_2 \cdot \vec{L})(\sigma_1 \cdot \vec{L}) \right] v_4 + (\sigma_1 \cdot \vec{p})(\sigma_2 \cdot \vec{p})v_5 + hc \quad (2-24)$$

می توان نشان داد که برای پراکندگی کشسان نوکلئون- نوکلئون مزونی مبادله نمی شود زیرا به محدوده برد نیروی هسته ای وارد نشده ایم. در پراکندگی کشسان می توان از جمله دارای v_5 صرف نظر کرد این بدان معناست که تا انرژی حدوداً "300 MeV نیروی هسته ای به p وابسته نیست بعلاوه می توان نشان داد که حتی جمله شامل v_4 نیز در حالت کلی تا انرژی حدوداً "300 MeV برای تحلیل اطلاعات مورد نیاز نیست. می توان معادله بالا را به صورت زیر در نظر گرفت [2]:

$$V = v_d(r) + v_\sigma(r)(\sigma_1 \cdot \sigma_2) + v_\tau(r)(\tau_1 \cdot \tau_2) + v_{\sigma\tau}(r)(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(\tau_1 \cdot \tau_2) + v_{Td}(r)s_{12} + v_{\pi T}(r)(\tau_1 \cdot \tau_2)s_{12} + v_{l,s}(\vec{L} \cdot \vec{s}) + v_{l,s,\tau}(\vec{L} \cdot \vec{s})(\tau_1 \cdot \tau_2) \quad (2-25)$$

که در آن :

v_d : جمله تبادله مستقیم

v_{Td} : جمله مستقیم تانسوری

v_σ : جمله تبادله اسپینی

$v_{\pi T}$: جمله تانسوری با تبادله ایزواسپینی

v_τ : جمله تبادله مستقیم ایزواسپینی

$v_{l,s}$: جمله جفت شدگی اسپین-مدار

$v_{\sigma\tau}$: جمله مستقیم تبادله اسپین و ایزواسپینی

$v_{l,s,r}$: جمله تبدالی ایزواسپین و اسپین - مدار

و در نهایت می توان پتانسیل هسته ای را بر حسب جملات پتانسیل ها و عملگرهای تبدالی برتلت و هایزبرگ و ماژورانا و ویگنر^۱ نوشت:

$$V = v_w(r) + v_M(r)P^M + v_B(r)P^B + v_H(r)P^H + v_{T_w}(r)s_{12} + v_{T_M}(r)s_{12}P^M + v_{l,s}(\vec{L} \cdot \vec{s}) \quad (2-26)$$

و اما سوال بعدی که می توان مطرح کرد این نکته است که چه دلیلی برای حضور نیروهای تبدالی وجود دارد. در ادامه می خواهیم به این مورد بپردازیم.

۲-۶ توجیه حضور نیروی تبدالی در هسته ها

دو دلیلی را که حضور نیروی تبدالی را در هسته ها تائید می کند به صورت زیر می باشد:

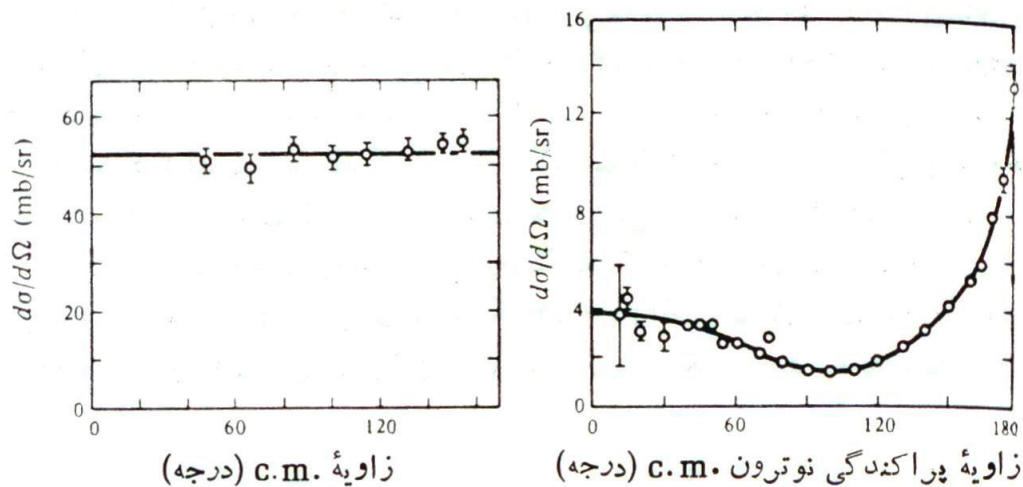
الف) خاصیت اشباع نیروی هسته ای:

از تجربه می دانیم که چگالی هسته ای نسبتاً ثابت است و انرژی بستگی تقریباً به ازای هر نوکلئون $8MeV$ و ثابت است. به نظر می رسد که هر نوکلئون فقط تعداد کمی از همسایه های نزدیکش را جذب می کند و در فواصل خیلی کوتاه همین نوکلئون همان همسایه های نزدیکش را نیز دفع می کند تا از نزدیکی بیش از حد آنها جلوگیری کند که این را در فیزیک هسته ای با انتخاب یک پتانسیل مرکزی مناسب که برد محدودی و مرکزیتی به صورت یک مغز دافعه داشته باشد توضیح می دهند. شباهت فیزیک اتمی و فیزیک هسته ای در این مورد قابل توجه است.

ب) وجود قله بزرگ رو به عقب در پراکندگی نوترون- پروتون

از مطالعه پراکندگی نوترون- پروتون در انرژی های بالا دلایلی بدست می آید که به نوعی مدل نیروی تبادل را تائید می کند. سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون- پروتون در شکل (۲-۲۲) نشان داده شده است [6].

¹ Wigner



شکل (۲-۲۲): سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون- پروتون (الف) توزیع زاویه ای برای نوترون های با انرژی 14MeV همسانگرد است. (ب) برای پروتونهای با انرژی 400MeV یک قله برجسته در 180° وجود دارد.

سطح مقطع پراکندگی در زوایای نزدیک به صفر دارای قله ای بزرگ است و این یعنی اینکه انتقال تکانه در برخورد بین ذرات فرودی و هدف کوچک است ولی وجود قله ای بزرگ در زاویه پراکندگی 180° توجیهی می تواند داشته باشد؟ اگر فرض کنیم که در طی برخورد نوترون و پروتون جایشان را باهم عوض می کنند مدل تبادل می تواند توضیح قانع کننده ای ارائه کند، و این یعنی اینکه نوترونی که به طرف جلو در حرکت است به پروتون تبدیل می شود و پروتونی که به طرف عقب (از دیدگاه چارچوب مرکز جرم) در حرکت است به نوترون تبدیل می شود. به طور خلاصه اینکه نیروی تبادل هم خصوصیت اشباع نیروهای هسته ای و هم وجود قله بزرگ رو به عقب را در پراکندگی نوترون- پروتون توجیه می کند. در مورد اولی می گوئیم که برای آن که نوعی پیوند اشباعی بین نوکلئون ها وجود داشته باشد باید بین آنها ذره ای (پیونی) رد و بدل شود و در مورد دومی هم می گوئیم که بین نوکلئون ها ذره ای (پیونی) مبادله می شود که عملاً خصوصیت آنها را تغییر می دهد.

فصل سوم

روش های حل مساله

۱-۳ مقدمه

در فصل اول به بررسی مفاهیم اولیه فیزیک هسته ای پرداختیم. سپس در فصل دوم جنبه های متفاوت برهمکنش نوکلئون- نوکلئون در نظر گرفتیم. حال در این فصل می خواهیم به روش های حل مساله هم به روش تحلیلی و هم روش عددی و رایانه ای نگاه مختصری داشته باشیم. معادلات شرودینگر^۱، دیراک^۲، کلاین گردون^۳ و DKP^۴ از مهمترین معادلاتی هستند که برای توصیف فیزیک سیستم های غیر نسبیتی و نسبیتی به کار می روند. در این میان می توان این پتانسیل ها را با روش های متفاوت تحلیلی و عددی حل کرد. از آنجایی که فقط پتانسیل های محدودی به روش تحلیلی دقیق قابل حل می باشند روش های حل عددی از اهمیت ویژه ای برخوردار است. در ادامه بحث ابتدا به معرفی روش تحلیلی NU می پردازیم و سپس به بررسی روش های حل عددی مساله خواهیم پرداخت. در سالهای اخیر به حل سیستمهای کوانتوم مکانیکی در چارچوب روش NU تمایل زیادی نشان داده شده است. این تکنیک جبری برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم پایه ریزی شده است که با موفقیت برای حل معادلات موج شرودینگر، دیراک، کلاین گردون و DKP در حضور پتانسیل های مرکزی و غیرمرکزی بکار برده شده است. برای مطالعه و بررسی بیشتر موفقیت این روش، مراجع [19-38] را ببینید. بکارگیری این روش در حل معادله شرودینگر، دستورالعمل روشنی برای بدست آوردن جوابهای دقیق حالت های مقید، ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع وابسته اشان، بر حسب چند جمله ایهای متعامد ارائه می دهد که در عین سادگی بسیار موثر است. از آنجایی که یافتن جوابهای دقیق معادله شرودینگر جز در مواردی خاص همچون سیستمی با پتانسیل کولنی و یا نوسانگر هماهنگ به روشهای معمول و سنتی غیر ممکن است لذا بکار بستن این روش می تواند ما را در حل این مشکل یاری رساند و گامی به جلو محسوب می شود. از جمله مواردی که ناگزیر به کنار

¹Schrodinger

² Dirac

³ Klein-Gordon

⁴ Duffin - Kemmer - petiau

گذاشتن روشهای معمول و جستجوی روشهای جدید هستیم، حل معادله شرودینگر با پتانسیل‌های غیرمرکزی است. اینگونه پتانسیل‌ها در شیمی کوانتومی بسیار مورد توجه‌اند و اخیراً مطالعات فراوانی در این زمینه انجام شده و در حال انجام است. روشهای مختلفی برای حل معادله شرودینگر با پتانسیل‌های غیرمرکزی استفاده شده است. ابر تقارنی¹، ایده SIP [39-43]، انتگرال مسیر [44-48]، روش فاکتورگیری [49,50] از آن دسته روشهایی هستند که بدین منظور بکار برده شده‌اند. البته باید توجه داشت که روش NU هم همچون روشهای قبلی در حل معادله شرودینگر با هر نوع پتانسیل معین دلخواه ناکارآمد است و تنها با نوع خاصی از پتانسیل‌ها که الزامات روش را برآورده می‌کنند می‌توان از این روش به نتیجه مطلوب رسید.

در ادامه این فصل روش NU در حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم بررسی و معرفی می‌شود. اساس کار این روش بر پایه تقلیل یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم، به طور خاص در اینجا معادله شرودینگر، به یک معادله از نوع فوق هندسی پایه ریزی شده است.

۲-۳ کلیات روش NU ^۲

این روش براساس تقلیل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، در اینجا معادله شرودینگر، به یک معادله از نوع فوق هندسی پایه‌ریزی شده است [51]. پس از انتخاب یک تغییر متغیر مناسب، $s = s(r)$ معادله تبدیل‌یافته را به صورت زیر داریم

$$\Psi_n''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \Psi_n'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \Psi_n(s) = 0 \quad (1-3)$$

که σ و $\tilde{\sigma}$ چند جمله‌ایهایی حداکثر از درجه دوم و $\tilde{\tau}$ یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه اول است. با

در نظر گرفتن تابع موج $\Psi_n(s)$ به صورت زیر داریم:

$$\Psi_n(s) = \phi_n(s) y_n(s) \quad (2-3)$$

¹ SUSY

² Nikiforov – Uvarov Method

معادله (۱-۳) به صورت یک معادله از نوع فوق هندسی تقلیل داده می شود [51]:

$$\sigma(s)y_n''(s) + \tau(s)y_n'(s) + \lambda y_n(s) = 0 \quad (3-3)$$

که در آن

$$\sigma(s) = \pi(s) \frac{\phi(s)}{\phi'(s)} \quad (4-3)$$

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad , \quad \tau' < 0 \quad (5-3)$$

λ پارامتری است که به صورت زیر تعریف می شود [51]:

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2} \sigma''(s) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6-3)$$

چندجمله ای $\tau(s)$ با علامت پریم نشان می دهد که باید مشتق مرتبه اولش منفی باشد.

باید به این نکته توجه کرد که λ و λ_n از یک جواب خاص شکل $y(s) = y_n(s)$ که چندجمله ای

درجه n است بدست می آیند، بعلاوه اینکه جمله $y_n(s)$ تابع موج معادله (۲-۳)، یک تابع از نوع فوق

هندسی که از رابطه ردیگز ذیل بدست می آید [51]:

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho_n} \frac{d^n}{ds^n} (\sigma^n(s) \rho(s)) \quad (7-3)$$

که در آن B_n ثابت نرمالیزاسیون است و $\rho(s)$ تابع وزنی است که باید شرط زیر را برآورده کند

$$\frac{d}{ds} \omega(s) = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \omega(s) \quad \omega(s) = \sigma(s) \rho(s) \quad (8-3)$$

تابع $\pi(s)$ و پارامتر λ به صورت زیر تعریف می شوند

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + K\sigma(s)} \quad (9-3)$$

$$\lambda = K + \pi'(s) \quad (10-3)$$

از آنجاییکه باید $\pi(s)$ حداکثر یک چندجمله ای درجه یک باشد، جملات زیر رادیکال در معادله (۹-۳)

باید به صورت یک چند جمله ای درجه اول مرتب شوند که این در صورتی ممکن است که مشخص

کننده آن، $\Delta = b^2 - 4ac$ ، صفر باشد. در این حالت یک معادله برای K بدست می آید که پس از حل معادله مقادیر بدست آمده برای K را در معادله (۳-۹) جایگذاری می کنیم و با مقایسه با معادلات (۳-۶) و (۳-۱۰) ویژه مقادیر انرژی را بدست می آوریم. قابل ذکر است که ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع وابسته اشان را برای سیستمی تحت یک پتانسیل غیر مرکزی معین به آسانی می توان با بکار بستن روش NU بدست آورد البته باید توجه داشت همانطور که قبلاً هم اشاره شد، این روش همچون روشهای دیگر در حل معادله شرودینگر با هر نوع پتانسیل غیرمرکزی دلخواه ناکارآمد است و تنها با نوع خاصی از پتانسیلها که الزامات روش را برآورده می کنند، می توان از این روش به نتیجه مطلوب رسید که در فصل چهارم ما با در نظر گرفتن تمامی این الزامات پتانسیلهای مورد نظرمان را معرفی کرده و به نتایج مورد اشاره رسیده ایم. در این میان روش های یارانه ای در حل مسایل پر دردسر و طاقت فرسا نقش مهمی را ایفا می کنند لذا در ادامه کار می خواهیم به طور مختصر با برخی از روش های یارانه ای حل مسایل آشنا شویم [52].

۳-۳ روش های رایانه ای و عددی

یکی از بهترین روش های موجود برای بررسی ساختار و رفتار مواد روش های رایانه ای و عددی می باشد. روش های رایانه ای از لحاظ کم هزینه بودن کنترل پذیر بودن و برخی مزایای دیگر نسبت به روش های آزمایشگاهی برترند. امروزه با پیشرفت فناوری رایانه ها روش های رایانه ای نقش به سزایی در پیشبرد و اثبات نظریه و فرضیه های علمی دارد. حتی جهت بررسی و تحلیل سیستم های چند ذره ای نیز می توان از روش های رایانه ای و عددی بهره جست. به این منظور در ابتدای امر باید پتانسیلی میان ذرات در نظر بگیریم. این کار یعنی انتخاب پتانسیل بین ذرات که اصول و قواعد خاص خود را می طلبد.

۴-۳ پتانسیل های بین ذره ای و روش های رایانه ای

شناخت پتانسیل بین ذرات یکی از پایه های اصلی برای شناخت و توصیف و پیش بینی رفتار ذرات می باشد. معمولا به دلیل وجود تعداد زیاد ذره ها در یک دستگاه تعیین شکل دقیق پتانسیل واقعی میسر نیست. در عمل پتانسیل با تقریب و بر اساس ملاحظات پدیده شناختی انتخاب می شود. اهمیت و درستی اکثر نتایج حاصل از محاسبات رایانه ای و آنچه آنها از رفتار واقعی حالت های مختلف مواد و گذار حالت تحت شرایط مختلف را نشان می دهند به انتخاب صحیح انرژی پتانسیل بستگی دارد. در شبیه سازی های کلاسیک همه اثر های کوانتومی دستگاه های بس ذره ای در پتانسیل بین ذره ای نهفته است. برای مدل سازی فیزیکی اقسام مختلف مواد مثل فلز ها نیم رساناها و غیره پتانسیل های بس ذره ای مختلفی توسعه داده شده اند. پتانسیل های مورد استفاده در شبیه سازی ها اغلب مرکزی اند. یعنی فقط به فاصله ذرات وابسته اند. یک پتانسیل بس ذره ای را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$U_{pot} = \sum_i u_1(\vec{r}_i) + \sum_i \sum_{j>i} u_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \sum_i \sum_{j>i} \sum_{k>j>i} u_3(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k) \quad (۱۱-۳)$$

در این رابطه شاخص های i, j مشخص کننده ذره ها هستند. جمله اول سمت راست نشان دهنده وجود پتانسیل خارجی اعمال شده بر ذره های دستگاه است. این جمله معمولا در نظر گرفته نمی شود. جمله دوم عبارت است از برهمکنش های دو ذره ای بین ذره ها که معمولا مقدار آن فقط به فاصله نسبی دو ذره از یکدیگر یعنی $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ بستگی دارد. جمله های بالاتر برهمکنش های سه ذره ای و چهار ذره ای و ... را نشان می دهند. در اکثر شبیه سازی ها از برهمکنش های مراتب بالاتر صرف نظر می شود و در عوض از یک پتانسیل دو ذره ای موثر که می تواند به دما و چگالی وابسته باشد برای به حساب آوردن اثر متوسط جمله های صرف نظر شده استفاده می شود:

$$u(\vec{r}) = \sum_i \sum_{j>i} u(\vec{r}_{ij}) \quad (۱۲-۳)$$

که در آن $u(\vec{r}_{ij})$ انرژی پتانسیل برای جفت ذره های z, i با جدایی \vec{r}_{ij} است. استفاده از این تقریب بیشتر برای دستگاه های رقیق مناسب است. در فاز های متراکم مانند مایعات و جامدات برهمکنش های چند ذره ای بالاتری رخ می دهند که باید در انرژی پتانسیل کل آنها را لحاظ کرد.

در نظر گرفتن برهمکنش های چند ذره ای در تعیین بعضی خواص مایعات اتمی اهمیت ویژه ای دارد. مثلاً برای آرگون مایع صرف نظر کردن از برهمکنش های سه تایی در محاسبه کشش سطحی باعث ۲۵٪ خطا می شود. از آنجایی که اکثر محاسبات در نانو فناوری مرطوب روی فاز های رقیق است به نظر می رسد که استفاده از پتانسیل دو ذره ای موثر مناسب باشد. در حقیقت بیشتر تعیین پتانسیل به صورت پدیده شناختی در عمل دارای دو مرحله می باشد. در مرحله اول با توجه به نوع ذره های دستگاه و برهمکنش های بین آنها شکلی برای پتانسیل بین ذره ای دستگاه حدس زده می شود که با آن برخی شبیه سازی های اولیه انجام می شود. در مرحله بعد با مقایسه نتایج حاصل از شبیه سازی اولیه و نتایج تجربی شکل پتانسیل بهسازی می شود. این فرایند چندین بار تکرار می شود تا نتایج حاصل از شبیه سازی و تجربه یکسان شوند. در برخی شبیه سازی علاوه بر محاسبه پتانسیل بین ذره ای برای تعیین مسیر ذرات دستگاه نیاز به محاسبه نیروهای بین ذره ای هم داریم. برای محاسبه نیروی بین ذره ای باید از پتانسیل بین ذره ای نسبت به مکان ذرات دستگاه مشتق بگیریم. اگر شکل پتانسیل بین ذره ای پیچیده باشد و تعداد ذره های دستگاه نیز خیلی زیاد باشد محاسبه صریح مقدار پتانسیل و مشتق های آن در برنامه شبیه سازی بسیار زمان بر می شود. در چنین مواردی بهتر است به جای محاسبه صریح پتانسیل و مشتق های آن در برنامه اصلی از جدول جستجو استفاده کنیم. روش کار به این صورت است که قبل از اجرای برنامه اصلی شبیه سازی برنامه دیگری را اجرا می کنیم که فقط مقدار عددی پتانسیل و مشتق های مورد نیاز آن را از برنامه اصلی بر حسب r_{ij}^2 محاسبه و در جدولی ذخیره می کند. در هنگام اجرای برنامه اصلی با استفاده از الگوریتم های درونیابی از داده های عددی جدول ایجاد شده برای یافتن مقدار عددی پتانسیل و مشتق هایش

در هر مکان استفاده می کنیم. ولی بیشتر برهمکنش های بنیادی در فیزیک معمولاً به صورت مرکزی و دو ذره ای می باشد.

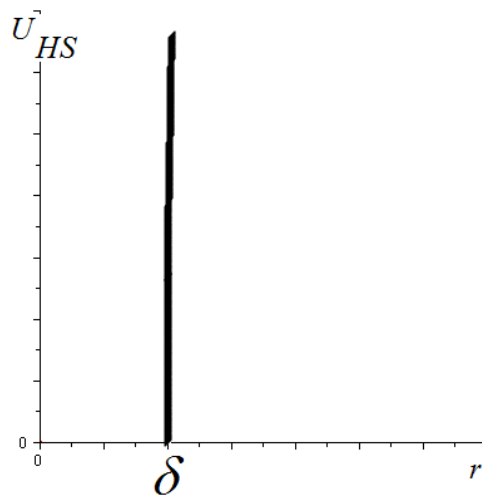
۳-۵-۵ برهم کنش های دو و سه ذره ای

اشاره کردیم که برهمکنش های بنیادی در فیزیک معمولاً به صورت مرکزی و دو ذره ای است. از جمله این برهمکنش ها می توان به برهمکنش کولنی که بین ذرات باردار وجود دارد و برهمکنش گرانشی که بین اجسام مادی موجود است اشاره کرد. معروف ترین پتانسیل دو ذره ای که در شبیه سازی از آن استفاده می شود برهمکنش لنارد- جونز است که در ادامه به تشریح بیشتر آن خواهیم پرداخت. با توجه به این که تابع پتانسیل دو ذره ای ساده است و برای محاسبه آن تنها کافی است از پتانسیل کل نسبت به فاصله نسبی ذرات مشتق بگیریم. در ادامه به معرفی چند پتانسیل فیزیکی در محاسبات عددی کاربرد ویژه ای دارند خواهیم پرداخت.

۳-۵-۱ پتانسیل کره سخت

در پتانسیل کره سخت ذره را کره ای نفوذ ناپذیر با شعاع σ در نظر می گیریم به طوری که اگر فاصله دو ذره بیشتر از σ باشد پتانسیل بین آنها صفر است و در غیر این صورت پتانسیل بین دو ذره بینهایت است (شکل ۳-۱)

$$U(r) = \begin{cases} \infty & r < \sigma \\ 0 & r \geq \sigma \end{cases} \quad (3-13)$$



شکل (۳-۱): شکل پتانسیل کره سخت

۳-۵-۲ پتانسیل لنارد-جونز

یکی از ساده ترین پتانسیل های بین اتمی که برای بلورهای گازهای بی اثر خنثی و فلزات FCC مناسب است پتانسیل دو ذره ای لنارد-جونز است [53]. این پتانسیل اولین بار در سال ۱۹۵۷ توسط وود و پارکر در شبیه سازی مونت کارلو و در سال ۱۹۶۴ توسط رحمان در توزیع الکترونی در بلورهای گاز های بی اثر شباهت زیادی به توزیع الکترونی اتم های آزاد دارد، استفاده شد. اگر دو اتم خنثی در فاصله زیادی نسبت به شعاع اتمی قرار گیرند برهمکنش بین آنها را نیروهای واندروالس (یا برهمکنش دوقطبی- دوقطبی لاندون) تعیین می کنند. در واقع برهمکنش دوقطبی های القایی لحظه ای از یکی به دیگری جمله جاذب (عکس توان ششم) این پتانسیل را می سازد:

$$E_{att} = -\frac{A}{r^6} \quad (۳-۱۴)$$

هنگامی که دو اتم بر اثر نیروی جاذب به هم نزدیک می شوند بر اثر تداخل ابر الکترونی انرژی کل دستگاه تغییر می کند. طبق اصل طرد پائولی برهمکنش ناشی از تداخل دافعه ای است. با استفاده از اصول اولیه مکانیک کوانتومی و تطبیق دادن مقادیر تجربی با یک رابطه عکس توان دوازده می توان یک پتانسیل دافع کوتاه برد را به رابطه بالا اضافه کرد:

$$E_{rep} = \frac{B}{r^{12}} \quad (۳-۱۵)$$

ثابت های A, B پارامتر های تجربی اند و از طریق اندازه گیری های مستقلی در فاز گازی تعیین می شوند. معمولا انرژی پتانسیل کل دستگاه با برهمکنش لنارد- جونز به شکل زیر است. ($A = 4\epsilon\sigma^6$ و

$$(B = 4\epsilon\sigma^{12})$$

$$U_{LJ} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}, \quad U_{ij} = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_{ij}} \right)^6 \right]. \quad (16-3)$$

که در آن ϵ نشان دهنده بزرگی برهمکنش یا عمق پتانسیل با بعد انرژی و σ نشان دهنده شعاع تقریبی ذره با بعد طول است. در ادامه کار می خواهیم جهت آشنایی بیشتر با روش های رایانه ای و عددی به معرفی روش وردشی یارانه ای بپردازیم.

۳-۶ روش مونت کارلوی کوانتومی وردشی

روشی مناسب برای تعیین انرژی حالت پایه سیستم روش وردشی می باشد. یک دستگاه فیزیکی را با هامیلتونی زیر در نظر می گیریم [52,54]:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \quad (17-3)$$

طبق اصل وردش مقدار انتظاری هامیلتونی متناظر با یک تابع موج آزمایشی دلخواه مانند ψ برابر است با:

$$\langle H \rangle = E = \frac{\int \psi^*(x) H \psi(x) dx}{\int \psi^*(x) \psi(x) dx} \geq E_0 \quad (18-3)$$

که E_0 مقدار دقیق انرژی حالت پایه است. متغیر x مجموعه تمام مکان های الکترون های موجود در دستگاه است. حالت تساوی تنها وقتی برقرار است که ψ ویژه تابع عملگر H با ویژه مقدار E_0 باشد (یعنی سیستم در حالت پایه باشد).

برای بکار بردن روش وردشی ابتدا تابع موج آزمایشی $\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n, x)$ که از نظر فیزیکی شکل قابل قبولی دارد و به یک یا چند پارامتر λ_i وابسته است انتخاب کرده و سپس مقدار انتظاری $E\psi$ را به

ازای مقادیر مختلف پارامترها محاسبه می کنیم. این کار را تا زمانی که یک مقدار کمینه برای $E\psi$ بدست آید ادامه می دهیم. این مقدار کمینه $E\psi$ یک حد بالا برای انرژی واقعی حالت پایه است. همان طور که می بینیم نیاز به محاسبه انتگرال های معادله (۳-۱۸) داریم. برای این کار از روش های انتگرال گیری مونت کارلو استفاده می کنیم. اما استفاده از اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت برای محاسبه انتگرال با روش مونت کارلو کارآمد نیست چرا که خطای محاسبه و به عبارت دیگر انحراف معیار آن بزرگ خواهد بود. به همین دلیل باید از روش های کاهش خطا در محاسبات استفاده کنیم. یکی از این روش ها انتخاب اعداد تصادفی با شیوه نمونه برداری با اهمیت است. باید معادله (۳-۱۸) را به گونه ای بازنویسی کنیم که بتوان از روش نمونه گیری با اهمیت در انتخاب نقاط استفاده کرد:

$$E = \frac{\int \psi^2(x) E_L(x) dx}{\int \psi^2(x) dx} \quad (۳-۱۹)$$

که E_L انرژی موضعی است و با رابطه زیر بدست می آید:

$$E_L = \frac{H\psi(x)}{\psi(x)} \quad (۳-۲۰)$$

باید توجه داشت که H یک عملگر است که روی تابع $\psi(x)$ اثر می کند. معادله (۳-۱۹) مانند یک

میانگین گیری وزنی با چگالی احتمال بهنجار شده $\frac{\psi^2(x)}{\int \psi^2(x) dx}$ است. با فرض بهنجار بودن $\psi(x)$

مخرج این رابطه برابر یک است. حال تخمین $E\psi$ توسط مونت کارلو با جمع بندی زیر تعیین می شود:

$$E\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_L(x_i) \quad (۳-۲۱)$$

که در آن n تعداد دفعاتی است که x از توزیع $\psi^2(x)$ نمونه گیری می شود. طبق روش نمونه برداری با اهمیت x را با استفاده از تابع توزیع $\psi^2(x)$ نمونه برداری می کنیم. یک روش مناسب و قابل اعتماد برای این کار روش متروپلیس است. که در آن فقط نیاز به ψ^2 داریم و کمیت ناشناخته

توان به شکل زیر نوشت:

$$\int \psi^2(x) dx$$

ندارد. نمونه ای از یک الگوریتم روش وردشی را برای یک دستگاه یک بعدی می

۱. تابع آزمایشی دلخواه ψ را که به یک پارامتر وردشی مثل λ وابسته باشد انتخاب می کنیم.

۲. یک جابجایی امتحانی در متغیر x به صورت $x_{trial} = x_n + \delta_n$ که δ_n یک عدد تصادفی از بازه $[-\delta, \delta]$ است انتخاب می کنیم. مقدار δ را چنان تعیین می کنیم که نرخ پذیرش حدود ۵۰٪ باشد.

۳. نسبت $w = \frac{P(x_{trial})}{P(x)}$ را محاسبه می کنیم که $P(x) = \psi^2(x)$ چگالی احتمال بهنجار شده است.

۴. اگر $w \geq 1$ بود x جدید را قبول می کنیم و قرار می دهیم: $x_{n+1} = x_{trial}$. در غیر این صورت یعنی اگر $w < 1$ بود یک عدد تصادفی مانند ξ را با w مقایسه می کنیم و در صورتی که $\xi \leq w$ بود x جدید را قبول می کنیم.

۵. در صورتی که جابجایی مورد قبول نبود قرار می دهیم: $x_{n+1} = x_n$.

۶. مقدار انرژی را با استفاده از x_n ها و جایگذاری رابطه (۳-۲۰) و (۳-۲۱) محاسبه می کنیم.

۷. مراحل ۲ تا ۶ را برای مقادیر مختلف پارامتر وردشی λ تکرار می کنیم تا $E\psi$ کمینه بدست آید.

ذکر این نکته لازم است که باید قبل از محاسبه انرژی تعادل در دستگاه برقرار شده باشد یعنی همگرایی به توزیع ψ^2 صورت گرفته باشد. در الگوریتم ذکر شده در اینجا انرژی دستگاه کمینه می شود ولی روش های مشابهی وجود دارند که در آنها واریانس انرژی دستگاه کمینه می شود.

۳-۷ معادلات دیفرانسیل و روش های عددی

بسیاری از مسایل علوم و مهندسی وقتی به صورت ریاضی مدل سازی می شوند، به سادگی در قالب معادلات دیفرانسیل معمولی با مقدار اولیه یا شرایط مرزی بیان می گردند. برای مثال، مسیر پرتاب یک موشک، حرکت یک قمر مصنوعی حول مدارش، با معادله دیفرانسیل بیان می شوند. نظریه های شبکه های الکترونیکی، خمیدگی ستون ها، پایداری هواپیما و غیره، همگی به صورت معادلات

دیفرانسیلی مدل سازی می شوند. به طور دقیق تر، نرخ تغییرات هر کمیت نسبت به دیگری را می توان به کمک معادله دیفرانسیل معمولی مدل سازی کرد. شاید نتوان فرم کلی جواب ها را برای هر مساله مدل سازی شده به دست آورد، ولی با استفاده از کامپیوتر و روش هایی عددی، می توان آنها را حل کرد، به طور کلی می توان یک معادله دیفرانسیل خطی یا غیر خطی را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right) \quad (22-3)$$

با این حال بحث را روی معادله دیفرانسیل مرتبه اول با شرایط اولیه زیر، دنبال می کنیم:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0 \quad (23-3)$$

که آن را یک مساله مقدار اولیه^۱ می نامند. این درست است که هر معادله دیفرانسیل مرتبه بالاتر را می توان با تغییر متغیر به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کرد. برای مثال، یک معادله مرتبه دوم به صورت $y'' = f(t, y, y')$ را در نظر بگیرید. با جایگذاری $p = y'$ به یک دستگاه با دو معادله دیفرانسیل تبدیل می شود.

$$p = y' \quad , \quad p' = f(t, y, p) \quad (24-3)$$

قضیه زیر، وجود یکتایی جواب یک مساله مقدار اولیه معادله (۲۳-۳) را بیان می کند.

قضیه: فرض کنید $f(t, y)$ یک تابع حقیقی و پیوسته بر ناحیه زیر باشد:

$$R : t \in [t_0, T] \quad , \quad -\infty \leq y \leq \infty \quad (25-3)$$

به ازای هر $t \in [t_0, T]$ و برای هر y_1, y_2 یک ثابت L وجود دارد که در نامساوی زیر صدق می کند:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad (26-3)$$

در این صورت $|f_y(t, y)| \leq L$ برای هر $t, y \in R$. L ثابت لیب شیتس^۲ نامیده می شود.

¹ Initial value problem

² Lipschitz

اگر شرایط بالا برقرار باشند، آنگاه برای هر y_0 مساله مقدار اولیه دارای یک جواب یکتای $y(t)$ برای هر $t \in [t_0, T]$ است. در حقیقت، وجود و یکتای جواب برای مساله مقدار اولیه با معادله (۳-۲۳) را فرض کرده ایم. تابع f ممکن است خطی یا غیر خطی باشد. همچنین فرض می کنیم تابع $f(t, y)$ نسبت به هریک از متغیرهای t یا y به حد کافی مشتق پذیر باشد. در بخش های بعدی، روش های عددی را برای تعیین جواب یک مساله مقدار اولیه بررسی می کنیم.

۳-۷-۱ روش سری تیلور

مساله مقدار اولیه (۳-۲۳) را در نظر بگیرید:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0 \quad (۳-۲۷)$$

فرض کنید $f(t, y)$ نسبت به متغیر t و y به حد کافی مشتق پذیر است. اگر $y(t)$ جواب واقعی مساله (۳-۲۷) باشد، با بسط سری تیلور تابع $y(t)$ حول نقطه $t = t_0$ داریم:

$$(۳-۲۸)$$

$$y(t) = y(t_0) + (t - t_0)y'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!}y''(t_0) + \frac{(t - t_0)^3}{3!}y'''(t_0) + \frac{(t - t_0)^4}{4!}y^{IV}(t_0) + \dots$$

چون جواب معادله مشخص نیست، مشتقات بسط بالا را نمی توان به طور صریح تعیین کرد. با این حال با فرض اینکه f به حد کافی مشتق پذیر است، پس می توان مشتقات تابع را به طور مستقیم از معادله دیفرانسیل بدست آورد. با توجه به این که f تابع ضمنی از y است، داریم:

$$(۳-۲۹)$$

$$\left\{ \begin{aligned} y' &= f(t, y) \\ y'' &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = f_t + ff_y \\ y''' &= f_{tt} + ff_{ty} + f(f_{ty} + ff_{yy}) + f_y(f_t + ff_y) \\ &= f_{tt} + 2ff_{ty} + f^2 f_{yy} + f_y(f_t + ff_y) \\ y^{IV} &= f_{ttt} + 3ff_{tty} + 3f^2 f_{tyy} + f_y(f_{tt} + 2ff_{ty} + f^2 f_{yy}) \\ &\quad + 3(f_t + ff_y)(f_{ty} + ff_{yy}) + f_y^2(f_t + ff_y) \end{aligned} \right.$$

و الی آخر با ادامه این روند، می توان تمام مشتق های y را بر حسب $f(t, y)$ و مشتقات جزئی آن

بیان کرد. این روش را با یک مثال شرح می دهیم.

مثال:

با استفاده از روش سری تیلور جواب مساله مقدار اولیه

$$\frac{dy}{dt} = t + y, \quad y(1) = 0 \quad (30-3)$$

را در $t = 1.2$ با $h = 0.1$ می خواهیم پیدا کنیم و در انتها نتیجه را با جواب واقعی مقایسه می نماییم.

جواب چند مشتق اول معادله را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$y' = t + y, \quad y'' = 1 + y', \quad y''' = y'', \quad y^{IV} = y''', \quad y^V = y^{IV} \quad (31-3)$$

با اعمال شرایط اولیه $t_0 = 1, y_0 = y(t_0) = 0$ داریم:

$$y'_0 = 1, \quad y''_0 = 2, \quad y'''_0 = y^{IV}_0, \quad y^V_0 = 2 \quad (32-3)$$

حال با استفاده از روش تیلور، خواهیم داشت:

$$(33-3)$$

$$y(t) = y_0 + (t - t_0)y'_0 + \frac{(t - t_0)^2}{2}y''_0 + \frac{(t - t_0)^3}{6}y'''_0 + \frac{(t - t_0)^4}{24}y^{IV}_0 + \frac{(t - t_0)^5}{120}y^V_0 + \dots$$

با جایگذاری مقادیر مشتقات و شرط اولیه، در معادله (33-3) داریم:

$$y(1.1) \cong 0.1103414 \quad (34-3)$$

سپس نتیجه می شود:

$$y(1.1) + y_1 \cong 0.1103414 \cong 0.1103 \quad (35-3)$$

با در نظر گرفتن $y_1 = 0.1103$ در $t = 1.1$ ، مقادیر مشتقات در معادله (31-3) به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$\begin{aligned} y_1' &= 1.1 + 0.1103 = 1.2103 \\ y_1'' &= 1 + 1.2103 = 2.2103 \\ y_1''' &= y_1^{IV} = y_1^V = 2.2103 \end{aligned} \quad (36-3)$$

با جایگذاری مقدار y_1 و مشتقات آن در سری تیلور (33-3) و بکار گیری سری تا مشتق پنجم داریم:

$$\begin{aligned} y(1.2) &= y_1 + (t-t_1)y_1' + \frac{(t-t_1)^2}{2}y_1'' + \frac{(t-t_1)^3}{6}y_1''' + \frac{(t-t_1)^4}{24}y_1^{IV} + \frac{(t-t_1)^5}{120}y_1^V \\ &= 0.1103 + 0.12103 + 0.0110515 + 0.0003683 + 0.000184 + 0.0000003 \\ &= 0.2429341 \end{aligned} \quad (37-3)$$

بنابراین داریم:

$$y(1.2) = 0.242934 \cong 0.2429 \quad (38-3)$$

برای تعیین جواب واقعی مساله مقدار اولیه آن را به شکل زیر می نویسیم:

$$\frac{dy}{dt} - y = x \quad \text{یا} \quad d(ye^{-t}) = te^{-t} \quad (39-3)$$

با انتگرال گیری، خواهیم داشت:

$$y = -e^t(te^{-t} + e^{-t}) + ce^t = ce^t - t - 1 \quad (40-3)$$

با استفاده از شرط اولیه، داریم:

$$0 = ce - 2 \quad \text{یا} \quad c = \frac{2}{e} \quad (41-3)$$

بنابراین جواب واقعی به صورت زیر می باشد:

$$y = -t - 1 + 2e^{t-1} \quad (42-3)$$

وقتی $t = 1.2$ ، جواب واقعی برابر است با :

$$y(1.2) = -1.2 - 1 + 2(1.2214028) = -2.2 + 2.4428056 = 0.2428 \quad (43-3)$$

با مقایسه نتایج (۳-۴۳) و (۳-۳۸) مشاهده می‌کنیم که جواب عددی و واقعی بدست آمده تا چهار رقم اعشار یکسان هستند.

۳-۷-۲ روش اویلر

روش اویلر^۱ از قدیمی‌ترین روش‌های حل معادلات دیفرانسیل معمولی است. معادله دیفرانسیل مرتبه اول:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (۳-۴۴)$$

را با شرط اولیه $y(t_0) = y_0$ در نظر بگیرید. جواب معادله، یک منحنی در صفحه $t-y$ است. در اینجا به طور متوالی مقادیر y_1, y_2, \dots, y_m را تعیین می‌کنیم y_m مقدار y در $t = t_m = t_0 + mh$ ، $m = 1, 2, \dots$ باشد و h به قدر کافی کوچک است. در روش فوق از این خاصیت استفاده می‌شود که در یک بازه کوچک منحنی تقریباً با یک پاره خط برابر است. بنابراین منحنی در نقطه (t_0, y_0) با مماس آن تقریب می‌شود و داریم:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{(t_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{t - t_0} = f(t_0, y_0) \quad (۳-۴۵)$$

که آن را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$y = y_0 + (t - t_0)f(t_0, y_0) \quad (۳-۴۶)$$

لذا مقدار y در $t = t_1$ ، برابر است با:

$$y_1 = y_0 + (t_1 - t_0)f(t_0, y_0) \quad (۳-۴۷)$$

به طور مشابه منحنی جواب را در بازه بعدی (t_1, t_2) ، با یک پاره خط که از (t_1, y_1) می‌گذرد و دارای شیب $f(t_1, y_1)$ است، تقریب می‌کنیم. (شکل (۳-۸) را ببینید)

^۱ Euler

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) \quad (48-3)$$

بنابراین در حالت کلی جواب معادله دیفرانسیل فوق با رابطه بازگشتی زیر بدست می آید.

$$y_{m+1} = y_m + hf(t_m, y_m) \quad (48-3)$$

از نظر هندسی، این روش دارای مفهوم بسیار ساده ای است. منحنی تابع مورد نظر با یک چند ضلعی پیوسته تقریب می شود که راستای هر قسمت از آن با مقدار تابع $f(t, y)$ در نقطه شروع تعیین می شود. برای تشریح این روش مثال زیر را در نظر می گیریم:

مثال) معادله دیفرانسیل زیر داده شده است:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y-t}{y+t}, \quad y(0) = 1 \quad (48-3)$$

با استفاده از روش اویلر می خواهیم تقریبی برای y در $t = 0.1$ در پنج مرحله بیابیم. از آنجایی که

تعداد مراحل پنج می باشد، پس مقدار t را بر تعداد مراحل تقسیم می کنیم، داریم $t = \frac{0.1}{5} = 0.02$.

بنابراین طول گام را $h = 0.02$ انتخاب و مقدار y را به ازای مقادیر $t = 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1$

محاسبه می کنیم، پس داریم:

$$y_1 = 1, \quad t = 0 \quad y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) \quad (48-3)$$

بنابراین نتیجه می شود:

$$y_1 = 1 + 0.02 \frac{1-0}{1+0} = 1.02 \quad (48-3)$$

به طور مشابه خواهیم داشت:

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 1.02 + 0.02 \frac{1.02-0.02}{1.02+0.02} = 1.0392$$

$$y_3 = y_2 + hf(t_2, y_2) = 1.0392 + 0.02 \frac{1.0392-0.04}{1.0392+0.04} \quad (48-3)$$

$$y_4 = y_3 + hf(t_3, y_3) = 1.0577 + 0.02 \frac{1.0577-0.06}{1.0577+0.06}$$

$$y_5 = y_4 + hf(t_4, y_4) = 1.0738 + 0.02 \frac{1.0738-0.08}{1.0738+0.08}$$

بنابراین مقدار y متناظر با $t = 0.1$ برابر 1.0910 است.

۳-۷-۳ روش های رونگ-کوتا

از نظر محاسباتی اغلب روش های کار آمد از نظر دقت توسط دو ریاضی دان مشهور به نام های رونگ و کوتا^۱ توسعه یافته اند. این روش ها به روش های رونگ-کوتا مشهورند. این روش ها با توجه به مرتبه شان از هم تمیز داده می شوند، یعنی مطابقت آنها با جواب های سری تیلور تا جمله h^r که r مرتبه روش است. در این روش ها برخلاف سری تیلور به محاسبه مشتقات مراتب بالای $y(t)$ نیازی نیست. روش رونگ-کوتای مرتبه چهار برای حل عددی معادلات دیفرانسیل خطی یا غیرخطی بطور گسترده استفاده می شود که بسط آن از نظر جبری پیچیده است. اگر معادله زیر را برای حل عددی در نظر بگیریم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (۱۵-۳)$$

می توان با کمی عملیات جبری به نتیجه زیر دست یافت:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (۱۶-۳)$$

که مقادیر k_i به صورت زیر به کمک هم و پی در پی - ساخته می شوند:

$$\begin{cases} k_1 = dx f(x_n, y_n) \\ k_2 = dx f(x_n + \frac{1}{2} dx, y_n + k_1) \\ k_3 = dx f(x_n + \frac{1}{2} dx, y_n + \frac{1}{2} k_2) \\ k_4 = dx f(x_n + dx, y_n + k_3) \end{cases} \quad (۱۷-۳)$$

تحلیل هندسی این الگوریتم به ما نشان می دهد که چگونه از شیب های میانی برای تخمین نهایی استفاده می شود. روند تخمین بالا می تواند تا مراحل بیشتری نیز پیش برود. معمولا در شبیه سازی ها همراه رابطه (۵-۱۹) رابطه مشابهی هم برای سرعت ها داریم. به دلیل اهمیت این روش حل، کدی

نمونه برای حل معادله دیفرانسیل نوسانگر هماهنگ یک بعدی $\left(m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \right)$ ارائه شده

است. امروزه در بسیاری از محاسبات تحقیقاتی استفاده از این الگوریتم به چشم می خورد.

¹ Runge-Kutta

```

PROGRAM oscillator
IMPLICIT none
c
c      declarations
c N:number of equations, nsteps:number of steps, tstep:length of steps
c      y(1): initial position, y(2):initial velocity
REAL*8 t, tstep, y(5)
INTEGER N, i, j, nsteps
N=2: nsteps=300: tstep=0.1: y(1)=1.0: y(2)=0.0
c
c      open file
OPEN(6, FILE='rungef.dat')
WRITE (6,*) 0, y(1)
c
c      do loop n steps of Runge-Kutta algorithm
DO 60 j = 1, nsteps
t=j*tstep
call rk4(t, y, tstep, N)
WRITE (6,*) t, y(1)
60 CONTINUE
CLOSE(6)
STOP
END

c-----end of main program-----
c      fourth-order Runge-Kutta subroutine
SUBROUTINE rk4(t, y, tstep, N)
IMPLICIT none
c
c      declarations
REAL*8 DERIV, h, t, tstep, y(5)
REAL*8 k1(5), k2(5), k3(5), k4(5), temp1(5), temp2(5), temp3(5)
INTEGER i, N
h=tstep/2.0
c
DO 10 i = 1, N
k1(i) = tstep * DERIV(t, y, i)
temp1(i) = y(i) + 0.5*k1(i)
10 CONTINUE
c
DO 20 i = 1, N
k2(i) = tstep * DERIV(t+h, temp1, i)
temp2(i) = y(i) + 0.5*k2(i)
20 CONTINUE
c
DO 30 i = 1, N
k3(i) = tstep * DERIV(t+h, temp2, i)
temp3(i) = y(i) + k3(i)
30 CONTINUE
c
DO 40 i = 1, N
k4(i) = tstep * DERIV(t+tstep, temp3, i)
y(i) = y(i) + (k1(i) + (2.*(k2(i) + k3(i))) + k4(i))/6.0
40 CONTINUE
RETURN
END

c      function which returns the derivatives
FUNCTION DERIV(t, temp, i)
IMPLICIT none
c
c      declarations
REAL*8 DERIV, t, temp(5)
INTEGER i
c
IF (i .EQ. 1) DERIV=temp(2)
IF (i .EQ. 2) DERIV=-temp(1)
RETURN
END

```

فصل چہارم

تابع موج و انرژی دو ترون

۴-۱ مقدمه

در فصل اول به مقدماتی در مورد فیزیک هسته ای و در فصل دوم به بررسی برهمکنش های نوکلئون-نوکلئون پرداختیم. سپس در فصل سوم به روش های تحلیلی و عددی که در حل مسایل از آنها استفاده شده است پرداختیم و همچنین خلاصه مروری نیز بر کارهای انجام شده قبلی داشتیم. حال در این فصل می خواهیم به حل تحلیلی و عددی معادلات شرودینگر و کلاین گوردون و دیراک بپردازیم. در مرحله اول ابتدا اثرات ضرایب پتانسیل یوکاوا بر انرژی بستگی دوترون را مورد مطالعه قرار دادیم. سپس در مرحله دوم به محاسبه ویژگی های استاتیکی دوترون (انرژی و شعاع باری) با استفاده از برهمکنش مرکزی و پتانسیل ناشی از تبادل یک پیون پرداختیم. بعد از آن به منظور مقایسه بیشتر نتایج به حل عددی معادله شرودینگر در حضور پتانسیل یوکاوا پرداختیم. سپس طیف انرژی معادله نسبیتی دیراک را با در نظر گرفتن تقارن اسپینی و شبه اسپینی را با دو پتانسیل مختلف بدست آوردیم و در انتها طیف انرژی معادله کلاین گوردون را با در نظر گرفتن وابستگی جرمی محاسبه کردیم.

۲-۴ محاسبه ویژگیهای استاتیکی (انرژی و شعاع باری) دوترون بر اساس برهم کنشهای

مرکزی مناسب و پتانسیل ناشی از تبادل یک پیون^۱

رفتار نوکلئونهای درون هسته، شباهتی به رفتار ذرات کلاسیک ندارد. خواص هسته را رفتار موجی نوکلئونها تعیین میکند و تحلیل این رفتار مستلزم کاربرد تکنیک های ریاضی مکانیک کوانتومی است [6]. برای توصیف حرکت نوکلئون ها می توان با حل معادله شرودینگر در فضای سه بعدی تراز های انرژی نوکلئون ها را بدست آورد. از آزمایشات پراکندگی می دانیم که انرژی جنبشی نوکلئون ها در درون هسته در حدود 10 MeV بنابراین می توانیم با اطمینان از مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی که با معادله شرودینگر بیان می شود استفاده کنیم.

۱-۲-۴ مطالعه اثرات ضرایب پتانسیل یوکاوا بر انرژی بستگی دوترون

معادله شرودینگر در سه بعد به صورت زیر می باشد [6]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] + v(r) \psi(r, \theta, \phi) = \epsilon \psi(r, \theta, \phi) \quad (1-4)$$

در مرحله بعد به دلیل اینکه پتانسیل در معادله بالا تابعی از Γ می باشد می توانیم از جداسازی متغیرها در حل این معادله استفاده کرد. در این حالت تابع موج به صورت زیر بدست می آید:

$$\psi(r, \theta, \phi) = \psi(r) Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (2-4)$$

سپس باید پتانسیل مناسبی برای برهمکنش بین نوکلئون ها انتخاب شود، در اینجا فرض می کنیم که پتانسیل بین نوکلئون ها فقط تابعی از فوق شعاع می باشد و هر نوکلئون خود را تحت تاثیر نیرویی که از نوکلئون های دیگر وارد می شود می بیند و لذا پتانسیل مورد نظر مرکزی می باشد. در این مرحله پتانسیل یوکاوا را به صورت زیر در نظر می گیریم [56]:

^۱(پذیرفته شده در نوزدهمین کنفرانس هسته ای ایران مشهد-۱۳۹۱)

$$v_c(r) = v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad (3-4)$$

که در آن ضرایب α, v_0 به برد نیروی هسته ای و عمق چاه پتانسیل اشاره دارند. در این صورت معادله شعاعی شرودینگر در حضور پتانسیل یوکاوا به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{L^2}{r^2} \right) R_{n,l}(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\varepsilon_{n,l} + v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \right) R_{n,l}(r) = 0 \quad 0 \leq r \leq \infty \quad (4-4)$$

در این معادله L عملگر تکانه زاویه ای است که موجب دور شدن نوکلئونها از مرکز هسته می شود و μ جرم کاهش یافته پروتون- نوترون است. برای حل این معادله تابع موج را به صورت $U_{nl}(r) = rR_{nl}(r)$ در نظر می گیریم. در این صورت معادله (4-4) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{d^2 U_{n,l}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\varepsilon_{n,l} + v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} - \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2} \right) U_{n,l}(r) = 0 \quad (5-4)$$

در جوابهای معادله شرودینگر در مسائل سه بعدی، عدد کوانتومی L نقش برجسته ای دارد. برای نمونه در فیزیک اتمی این عدد تابع موج الکترونیهای مختلف را مشخص می کند و اطلاعاتی از رفتار فضایی تابع موج به دست می دهد. در مورد دوترون اگر فرض $L=0$ درست باشد، حرکت مداری هیچ گونه سهمی در گشتاور مغناطیسی نباید داشته باشد و می توانیم گشتاور مغناطیسی کل را حاصل ترکیب گشتاورهای مغناطیسی نوترون و پروتون تلقی کنیم ولی این فرض ما با مقدار مشاهده شده در تطابق کامل نیست این اختلاف کوچک را به مواردی چون مبادله مزون بین پروتون و نوترون نسبت می دهند به گونه ای که قبلا نیز اشاره شد دوترون از ترکیب ۹۶٪ حالت $L=0$ و فقط ۴٪ حالت $L=2$ حاصل می شود. بنابراین در این ادامه هر دو حالت $L=0, L=2$ را در نظر می گیریم. از آنجایی که حل تحلیلی معادله شرودینگر با پتانسیل یوکاوا میسر نمی باشد. ما در این کار سعی کردیم با تقریب زیر این کار را انجام دهیم. با بسط تیلور پتانسیل یوکاوا به شرح زیر

$$v_c(r) = v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \approx \frac{v_0}{r} (1 - \alpha r) \quad (6-4)$$

جالب توجه است که این تقریب به ازای αr های کوچک از تطابق خیلی خوبی برخوردار است. با قرار دادن پتانسیل بسط داده شده در معادله شرودینگر یعنی رابطه (۴-۴) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\Psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} \left[(E - \nu_0' \alpha) r^2 + \nu_0' r + L^2 \right] \Psi(r) = 0 \quad (۷-۴)$$

که در آن

$$E = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \varepsilon \quad \text{و} \quad \nu_0' = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \nu_0 \quad (۸-۴)$$

برای حل معادله (۷-۴) از روش NU استفاده کردیم.

با مقایسه روابط (۷-۴) و رابطه (۱-۳) به شباهت این معادله با معادله اصلی NU بدست آمده پی می بریم که در آن [51]

$$\sigma(r) = r \quad \tilde{\tau}(r) = 2 \quad \tilde{\sigma}(r) = -\{(E - \nu_0' \alpha) r^2 + \nu_0' r + L^2\} \quad (۹-۴)$$

بنابراین طبق تعریف $\pi(r)$ را به صورت زیر می توانیم بنویسیم:

$$\pi(r) = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(E - \nu_0' \alpha) r^2 + (\nu_0' + k) r + L^2 + \frac{1}{4}} \quad (۱۰-۴)$$

از معادله فوق با توجه به اینکه زیر رادیکال باید مجذور یک چند جمله ای درجه اول باشد k را تعیین می کنیم و در ادامه مقدار مناسب $\pi(r)$ را که شرط $\tau'(0) > 0$ را برآورده میکند انتخاب می کنیم:

$$(۱۱-۴)$$

$$(i) \pi(r) = -\frac{1}{2} \pm \left\{ (E - \nu_0' \alpha)^{\frac{1}{2}} r + \left(L^2 + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad k_1 = -\nu_0' + \left\{ 4(E - \alpha \nu_0') \left(L^2 + \frac{1}{4} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$(ii) \pi(r) = -\frac{1}{2} \pm \left\{ (E - \nu_0' \alpha)^{\frac{1}{2}} r - \left(L^2 + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad k_2 = -\nu_0' - \left\{ 4(E - \alpha \nu_0') \left(L^2 + \frac{1}{4} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

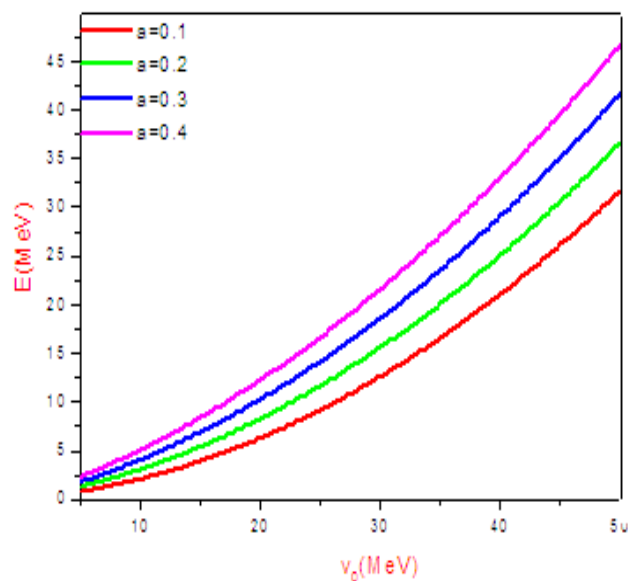
با توجه به معادله فوق پس از محاسبه $\tau(s)$ و از تساوی $\lambda = \lambda_n$ برای هر حالت می توانیم ویژه مقادیر انرژی را بدست می آوریم:

$$E_n = \alpha v_0' + \frac{v_0'^2}{(n + 2(L^2 + \frac{1}{4}) + 1)^2} \quad (12-4)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۸-۴) و همچنین با قرار دادن $n = L = 0$ معادله به صورت ساده تر زیر در می آید.

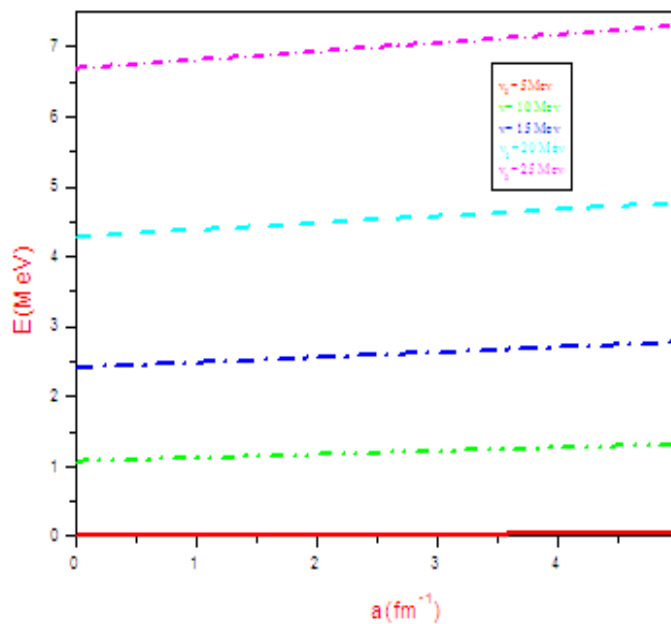
$$\varepsilon_0 = \alpha v_0 + 2.2083 v_0^2 \quad (13-4)$$

تاثیر گذاری ضرایب پتانسیل یوکاوا بر انرژی بستگی دوترون به طریق زیر انجام گرفته است. الف) ابتدا با ثابت در نظر گرفتن α ، انرژی را بر حسب عمق چاه پتانسیل v_0 رسم کردیم. و این کار را چهار بار به ازای چهار α متفاوت رسم کردیم که نتیجه کار را در شکل (۱-۴) درج کرده ایم.



شکل ۱-۴: تغییرات انرژی بستگی حالت پایه دوترون بر حسب v_0

ب) در مرحله بعد با ثابت در نظر گرفتن v_0 ، انرژی را بر حسب ضرایب α های متفاوت رسم کردیم این کار را به ازای ۴ ضرایب پتانسیل مختلف v_0 انجام می دهیم. نتایج این کار در شکل (۲-۴) آورده شده است.



شکل ۴-۲: تغییرات انرژی بستگی حالت پایه دوترون بر حسب α

با استفاده از شکل های بالا و همچنین رابطه (۴-۱۳) بهترین مقادیر زیر را برای انرژی حالت پایه دوترون ضرایب α و v_0 بدست آوردیم:

$$\alpha = 0.063(\text{fm}^{-1}) , v_0 = 17.75(\text{MeV}) , \varepsilon = 2.253474(\text{MeV}) \quad (4-14)$$

در ادامه کار ویژه توابع شعاعی را برای حالت پایه دوترون با کمک رابطه (۳-۸) محاسبه کردیم [51].

$$\ln \Phi(s) = \int \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} dx \quad (4-15)$$

با جاگذاری روابط (۴-۹) و (۴-۱۱) در رابطه (۴-۱۵) خواهیم داشت:

$$\Phi(r) = Nr \omega_0 e^{\pm(\varepsilon - \alpha \omega_0) 2r} \quad (4-16)$$

که در آن N ضریب نرمالیزاسیون است و همچنین

$$\omega_0 = \left(-\frac{1}{2} \pm \left(L^2 + \frac{1}{4} \right) \right) \quad (4-17)$$

حال با استفاده از رابطه (۳-۷) داریم:

$$y_n = B_n r^{-\left(L^2 + \frac{1}{4}\right)^2} e^{\pm(\varepsilon - \alpha v_0) \frac{1}{2} r^2} \frac{d^n}{dr^n} \left[r^{n - \left(L^2 + \frac{1}{4}\right)^2} e^{\pm(\varepsilon - \alpha v_0) \frac{1}{2} r^2} \right] \quad (18-4)$$

که در آن B_n ثابت نرمالیزاسیون می باشد.

از آنجایی که تابع موج $\Psi_n(s)$ به صورت زیر در نظر گرفته شده بود

$$\Psi_n(s) = \phi_n(s) y_n(s) \quad (19-4)$$

بنابراین تابع موج کل سیستم را می توان به صورت زیر نوشت:

$$R_{n,l}(r) = N r^{\omega_0 + \left(L^2 + \frac{1}{4}\right)^2 + 1} e^{(E - \alpha v_0) \frac{1}{2} r} \frac{d^n}{dr^n} \left[r^{n - \left(L^2 + \frac{1}{4}\right)^2} e^{(E - \alpha v_0) \frac{1}{2} r} \right] \quad (20-4)$$

توانستیم با استفاده از روش تحلیلی NU و استفاده از تقریب (۴-۶) تابع موج کل سیستم به صورت معادله بالا بنویسیم.

۲-۲-۴ محاسبه ویژگی های استاتیکی دوترون (انرژی و شعاع باری)

علاوه بر کارهایی که در بخش قبلی برای مطالعه ضریب پتانسیل یوکاوا انجام گرفت در ادامه کار سعی داریم با استفاده از حل اختلالی برهمکنش تبادل یک پیون، برخی از ویژگی های دوترون را محاسبه

کنیم. به همین منظور پتانسیل بین دو نوکلئون را به صورت زیر در دوترون در نظر می گیریم [57]:

$$v = v_c(r) + v_T(r) s_{12} \quad (21-4)$$

که در آن $v_c(r)$ همان پتانسیل یوکاوا رابطه (۴-۳) به عنوان پتانسیل مرکزی می باشد و $v_T(r) s_{12}$

پتانسیل اختلالی حاصل از مبادله تک پیون است که در آن:

$$v_T(r) = -ae^{-\beta r} \left(\frac{1}{\beta r} + \frac{3}{(\beta r)^2} + \frac{3}{(\beta r)^4} \right) \quad (22-4)$$

(۲۳-۴)

$$s_{12} = \left[\frac{3 \left(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r} \right) \cdot \left(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r} \right)}{r^2} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right]$$

می توان اسپین نوترون و پروتون را با Γ موازی در نظر گرفت $\vec{\sigma}_2$ و $\vec{\sigma}_1$ ماتریس های پائولی هستند. پس $S_{12}=2$ و نیروی تانسوری جاذبه می شود و اگر اسپین آن دو را با Γ پاد موازی در نظر بگیریم $S_{12}=-1$ شده و نیروی تانسوری دافعه می شود [2]. در نهایت توانستیم با در نظر گرفتن نظریه اختلال با پتانسیل opep اختلاف انرژی بستگی دوترون را در حالت پایه بدست آوریم. (جدول ۱)

جدول ۱-۴: انرژی بستگی حالت پایه دوترون و اختلاف انرژی حاصل از پتانسیل اختلالی (OPEP)

	$S_{12}=-1$	$S_{12}=2$
Binding Energy(MeV)	2.2544	2.2634
Energy shift in opep(KeV)	-3.9490	7.7980

۳-۲-۴ حل معادله شرودینگر در حضور پتانسیل یوکاوا به روش عددی به جهت اینکه حل تحلیلی معادله شرودینگر در حضور پتانسیل یوکاوا بدون تقریب امکان پذیر نمی باشد از روش های عددی برای محاسبات استفاده کردیم. ما در این کار از روش رانگ-کوتای^۱ مرتبه چهارم و زبان برنامه نویسی فرترن^۲ استفاده کردیم [58].

۱-۳-۲-۴ محاسبه تابع موج دوترون در حالت پایه

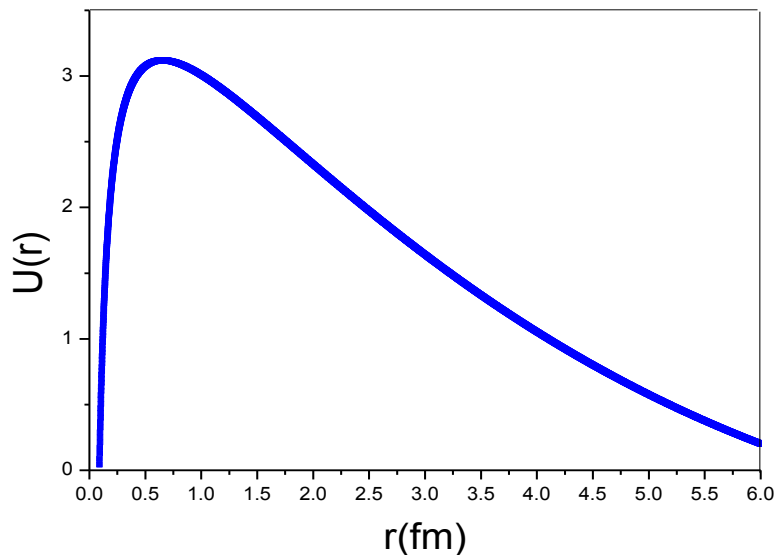
این حالت ۹۶٪ حالت دوترون را تشکیل می دهد و مقدار تکانه زاویه ای مداری در آن صفر است $L=0$ بنابراین معادله شماره (۴-۵) به صورت زیر در می آید

¹ Rang-Kotta

² Fortran

$$\frac{d^2 U_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} + v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \right) U_{nl}(r) = 0 \quad (24-4)$$

به ازای انرژی $E=2.48 \text{ MeV}$ شکل (۳-۴) تابع موج دوترون را در این حالت نشان می دهد.



شکل ۳-۴: تابع موج دوترون در حالت $L=0$ به ازای انرژی $E=2.48 \text{ MeV}$ و

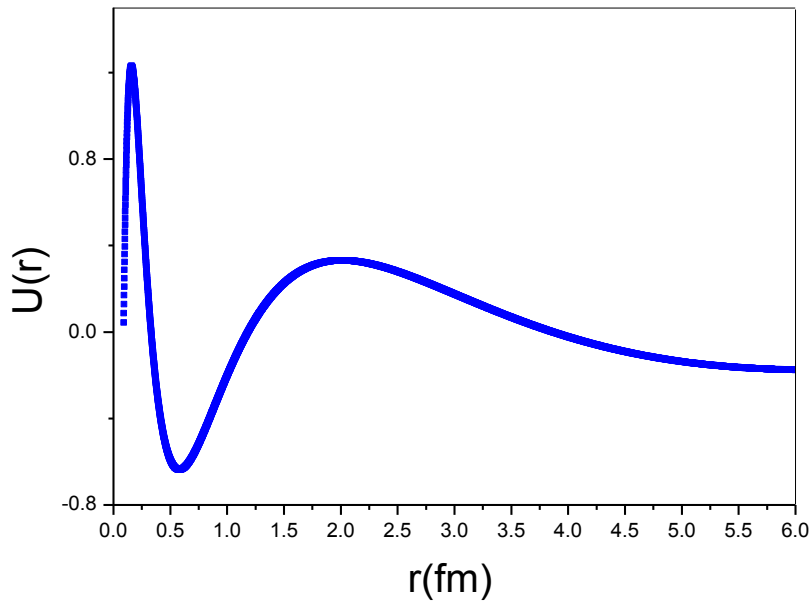
$$\alpha = 0.0063 \text{ fm}, v_0 = 25 \text{ MeV}$$

۲-۳-۲-۴ محاسبه تابع موج دوترون در حالت شبه برانگیخته

در این حالت که ۴٪ حالت دوترون را شامل می شود مقدار تکانه زاویه ای $L=2$ می باشد حالت $L=2$ یک حالت شبه برانگیخته به حساب می آید. از طرفی می دانیم که حالت های برانگیخته هسته ای را می توانیم با افزودن انرژی به قلب نوکلئونهای درون هسته ها بدست آورد در این حالت معادله (۴-۵) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{d^2 U_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} + v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} - 3 \frac{\hbar^2}{\mu r^2} \right) U_{nl}(r) = 0 \quad (25-4)$$

در نهایت به ازای انرژی $E=0.895 \text{ MeV}$ و همچنین ضرایب پتانسیل یوکاوا تابع موج دوترون در حالت $L=2$ بدست آمد که با نتایج فیزیکی تطابق خوبی دارد .



شکل ۴-۴: تابع موج دوترون در حالت $L=2$ به ازای انرژی $E=0.895\text{MeV}$ و

$$\alpha = 0.0063 \text{ fm}, v_0 = 25 \text{ MeV}$$

همچنین به ازای هر دو حالت دوترون توانستیم شعاع باری را محاسبه کنیم (جدول ۴-۲)

جدول ۴-۲: شعاع باری دوترون در حالت پایه و همچنین حالت شبه برانگیخته آن

	شعاع باری دوترون $r(\text{fm})$
حالت پایه $L=0$	2.2048
حالت شبه برانگیخته $L=2$	2.5930

پس در این بخش ابتدا به حل تحلیلی معادله شرودینگر با پتانسیل یوکاوا پرداختیم و در ادامه کار با حل اختلالی پتانسیل حاصل از تبادل یک پیون انرژی را بدست آوردیم و سپس به حل عددی معادله شرودینگر با پتانسیل یوکاوا پرداخته شده است توابع موج و همچنین انرژی بستگی و شعاع باری حاصل شد که کاملاً با مقادیر تجربی مطابقت دارد [6].

۴-۲-۴ حل تحلیلی معادله شرودینگر با پتانسیل یوکاوا

از آنجایی که حل تحلیلی قبلی معادله شرودینگر با پتانسیل یوکاوا با تقریب نسبتاً ضعیفی صورت گرفته بود در ادامه سعی داریم به روش دیگری این پتانسیل را با معادله شرودینگر به صورت تحلیلی حل کنیم. به مانند قبل معادله شرودینگر با رابطه زیر نوشته می شود [6]:

$$(۲۶-۴)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] + v(r) \psi(r, \theta, \phi) = \varepsilon \psi(r, \theta, \phi)$$

در مرحله بعد به دلیل اینکه پتانسیل در معادله بالا تابعی از Γ می باشد می توانیم از جداسازی متغیرها در حل این معادله استفاده کرد. در این حالت تابع موج به صورت زیر بدست می آید:

$$\psi(r, \theta, \phi) = \psi(r) Y_{l, m_l}(\theta, \phi) \quad (۲۷-۴)$$

در مرحله بعد باید پتانسیل مناسبی برای برهمکنش بین نوکلئون ها انتخاب شود، در اینجا فرض می کنیم که پتانسیل بین نوکلئون ها پتانسیل یوکاوا است که آن را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$v(r) = v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad (۲۸-۴)$$

با قرار دادن پتانسیل یوکاوا در معادله شعاعی شرودینگر داریم:

$$\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} [Er^2 + v_1 r e^{-\alpha r} + L^2] \psi(r) = 0 \quad (۲۹-۴)$$

که در آن از تغییر متغیرهای زیر استفاده کرده ایم:

$$E = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \varepsilon \quad v_1(r) = -\frac{2\mu}{\hbar^2} v_0 \quad (۳۰-۴)$$

قبل از ادامه کار، از آنجایی که حل تحلیلی و دقیق معادله (۲۸-۴) به صورت بالا امکان پذیر نیست،

سعی داریم با معرفی تقریب زیر به ادامه کار بپردازیم [59]:

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\alpha^2}{(e^{-\alpha r} - 1)^2} \quad (۳۱-۴)$$

با جایگذاری تقریب بالا در معادله (۲۹-۴) داریم:

(۳۲-۴)

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} - \frac{2\alpha}{e^{-\alpha r} - 1} \frac{d\psi(r)}{dr} - \frac{\alpha^2}{(e^{-\alpha r} - 1)^2} \left[\frac{E}{\alpha^2} (e^{-\alpha r} - 1)^2 - v_1 (e^{-\alpha r} - 1) e^{-\alpha r} + L^2 \right] \psi(r) = 0$$

با استفاده از تغییر متغیر زیر

$$(e^{-\alpha r} - 1) = s(r) \quad (۳۳-۴)$$

رابطه (۳۱-۴) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} - \frac{2\alpha}{s(r)} \frac{d\psi(r)}{dr} - \frac{1}{s^2(r)} \left[(E - v_1\alpha) s^2(r) - v_1\alpha s(r) + L^2 \right] \psi(r) = 0 \quad (۳۴-۴)$$

برای حل معادله (۳۳-۴) از روش تحلیلی NU استفاده کرده ایم. با مقایسه رابطه بالا با رابطه (۱-۳)

عبارت های زیر بدست می آید:

$$\tilde{\tau}(s) = -2\alpha$$

$$\sigma(s) = s(r)$$

(۳۵-۴)

$$\tilde{\sigma}(s) = (E - v_1\alpha) s^2(r) - v_1\alpha s(r) + L^2$$

و با جایگذاری عبارت های بالا در معادله زیر ما عبارت های زیر را خواهیم داشت:

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + K\sigma(s)} \quad (۳۶-۴)$$

از آنجایی که باید $\pi(s)$ حداکثر یک چندجمله‌ای درجه یک باشد، جملات زیر رادیکال در معادله

(۳۵-۴) باید به صورت یک چند جمله‌ای درجه اول مرتب شوند که این در صورتی ممکن است که

مشخص کننده آن، $\Delta = b^2 - 4ac$ ، صفر باشد. در این حالت یک معادله برای K بدست می آید:

$$k = v_1\alpha \pm 2 \sqrt{(E - v_1\alpha) \left[L^2 + \left(\frac{1+2\alpha}{2} \right)^2 \right]} \quad (۳۷-۴)$$

با جایگذاری مقدار k بدست آمده در رابطه (۳۶-۴) به رابطه زیر می رسیم:

$$\pi(s) = \frac{1+2\alpha}{2} - \left((E - v_1\alpha)^{\frac{1}{2}} s(r) \pm \left(L^2 + \left(\frac{1+2\alpha}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (۳۸-۴)$$

با دنبال کردن ترتیبی روش NU و با احتساب رابطه (۴-۳۰) ویژه مقدار انرژی برای این سیستم به

صورت زیر بدست می آید:

(۴-۳۹)

$$\varepsilon = v_0 \alpha + \left(-\frac{2\mu}{\hbar^2} \right) \left[\frac{v_0 \alpha}{2n \pm \left(2 \left\{ L^2 + \left(\frac{1+2\alpha}{2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \right)} \right]^2$$

با استفاده از رابطه (۴-۳) خواهیم داشت:

$$\phi(s) = s(r) \left[\left(\frac{1+2\alpha}{2} \right) \pm \left\{ L^2 + \left(\frac{1+2\alpha}{2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] e^{-(E-v_1\alpha)^{\frac{1}{2}} s(r)} \quad (۴-۴۰)$$

و در انتها به کمک رابطه (۳-۷) خواهیم داشت:

(۴-۴۱)

$$y(n) = B_n s(r) \left[\left(\frac{1+2\alpha}{2} \right) \pm \left\{ L^2 + \left(\frac{1+2\alpha}{2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] e^{-(E-v_1\alpha)^{\frac{1}{2}} s(r)} \frac{d^n}{ds^n} \left(s(r) \left[n \pm \left\{ L^2 + \left(\frac{1+2\alpha}{2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] e^{-2(E-v_1\alpha)^{\frac{1}{2}} s(r)} \right)$$

با توجه به رابطه زیر تابع موج سیستم بدست می آید:

$$\Psi_n(s) = \phi_n(s) y_n(s) \quad (۴-۴۲)$$

(۴-۴۳)

$$\psi_n = N s(r) \left[\left(\frac{1+2\alpha}{2} \right) \pm \left\{ L^2 + \left(\frac{1+2\alpha}{2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] e^{(E-v_1\alpha)^{\frac{1}{2}} s(r)} \frac{d^n}{ds^n} \left(s(r) \left[n + \left\{ L^2 + \left(\frac{1+2\alpha}{2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] e^{-2(E-v_1\alpha)^{\frac{1}{2}} s(r)} \right)$$

تا اینجای کار توانستیم معادله شرودینگر را با پتانسیل یوکاوا هم به روش (الف) تحلیلی-تقریبی (ب) عددی حل کرده و علاوه بر آن با حل اختلالی این معادله با پتانسیل OPEP ویژگی های استاتیکی (انرژی و شعاع باری) دوترون را محاسبه کردیم و همچنین بهترین ضرایب را برای پتانسیل یوکاوا بدست آوردیم. که کارهای انجام شده با نتایج تجربی و دیگر کارها مطابقت قابل توجهی دارد که در جدول زیر ارائه شده است [2].

جدول ۳-۴: مقایسه انرژی بستگی دوترون حاصل از کار ما و کارهای دیگران

E (MeV)	v_0 (MeV)	α (fm)	L	n	
2.2543	17.75	0.063	0	0	با تقریب اول
2.2048	15	0.063	0	0	با تقریب دوم
2.4800	25	0.0063	0	0	روش عددی
2.2245	-	-	-	-	مقادیر تجربی [2]
2.2267	-	-	0	0	کارهای دیگران [8]

۳-۴ طیف انرژی معادله نسبیتی دیراک با در نظر گرفتن تقارن اسپینی و شبه اسپینی^۱

معادله دیراک کامل ترین نمونه یک معادله نسبیتی است که می تواند یک سیستم نسبیتی از ذرات را توصیف کند. در سال های اخیر توجه قابل ملاحظه ای به حل معادله دیراک شده است. در حقیقت معادله دیراک برای برخی پتانسیل های محدودی به طور دقیق قابل حل می باشد. همچنین روش های متفاوتی مانند ابر تقارن و روش تحلیلی NU نیز برای حل این معادله در نظر گرفته شده است [60-64]. در حدود ۳۰ سال قبل یک شبه تبهگنی در هسته های سنگین در یک نوکلئون با اعداد کوانتومی جفت $(n-1, l+2, j=l+\frac{3}{2})$ و $(n, l, j=l+\frac{1}{2})$ مشاهده شد که در آن j, l, n اعداد کوانتومی شعاعی و مداری و تکانه زاویه ای کل هستند [65,66]. این شبه تبهگنی پدیده های طبیعی در ساختار هسته شامل تغییر هسته و ابر تغییر هسته و گشتاور مغناطیسی و ترازهای یکسان را به خوبی توصیف می کند [67-73]. به خاطر همین موفقیت ها تلاش های بسیاری برای کشف و درک منشا این شبه تبهگنی انجام گرفته است [74-75]. بر اساس تئوری (RMF)^۲، Ginocchio این تقارن را حاصل یکسانی تقریبی در اندازه اسکالر پتانسیل جاذب $S(r)$ و بردار پتانسیل دافع $V(r)$ فرض کرده است [76]. این تقارن منجر به ساده سازی و حل دقیق معادله دیراک می گردد.

۱-۳-۴ معادله اساسی دیراک

در توصیف نسبیتی معادله دیراک برای تک ذره ای به جرم M که تحت پتانسیل اسکالر جاذب $S(r)$ و پتانسیل برداری دافع $V(r)$ با در نظر گرفتن $\hbar=c=1$ و تابع موج زیر به صورت رابطه (۴-۴۵) و (۴-۴۶) می توان نوشت [77]:

$$\psi_{n_r, k}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} F_{n_r, k}(r) Y_{jm}^l(\theta, \phi) \\ iG_{n_r, k}(r) Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta, \phi) \end{bmatrix} \quad (44-4)$$

^۱ پذیرفته شده در نوزدهمین کنفرانس هسته ای ایران مشهد-۱۳۹۱

^۲ Relativistic Mean Field

معادلات جفت شده دیراک برای بخش شعاعی به صورت زیر در می آید:

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right)F_{n_r,k}(r) = \left[M + E_{n_r,k} - V(r) + S(r)\right]G_{n_r,k}(r) \quad (45-4)$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right)G_{n_r,k}(r) = \left[M - E_{n_r,k} + V(r) + S(r)\right]F_{n_r,k}(r) \quad (46-4)$$

معادلات جفت شده بالا را می توانیم با پیدا کردن یک تابع بر حسب دیگری و قرار دادن در معادله

دیگر بر حسب یک تابع به صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{n_r,k} - \Delta(r))(M - E_{n_r,k} + \Sigma(r)) + \frac{d\Delta}{dr}\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right)\right)F_{n_r,k}(r) = 0 \quad (47-4)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{n_r,k} - \Delta(r))(M - E_{n_r,k} + \Sigma(r)) - \frac{d\Sigma}{dr}\left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right)\right)G_{n_r,k}(r) = 0 \quad (48-4)$$

برای توجیه حالت تبهگنی در هسته های سنگین و در نظر گرفتن مقادیر مساوی به ازای پتانسیل های اسکالر و برداری سعی شده است که معادله دیراک به ازای این تساوی و تفاضل حل شود که در آن $\Delta(r) = V(r) - S(r)$ و $\Sigma(r) = V(r) + S(r)$ می باشد. حالت اول را با تقارن اسپینی و حالت دوم را با تقارن شبه اسپینی نشان می دهند.

۲-۳-۴ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن اسپینی

این تقارن از نزدیکی مقدار دو پتانسیل جاذب و دافع ناشی می شود زیرا در پتانسیل میانگین نسبتی مقادیر $V(r) \approx S(r)$ تقریباً یکسان است [78]. تحت این شرایط یعنی تقارن اسپینی $\Delta(r) = C_s$ می شود و معادله (۲-۴۶) به صورت زیر در می آید:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{n_r,k} - C_s)(M - E_{n_r,k} + \Sigma(r))\right]F_{n_r,k}(r) = 0 \quad (49-4)$$

یکی از پتانسیل های مهم در فیزیک هسته ای پتانسیل یوکاوا می باشد [79]. این پتانسیل را به ازای تفاضل $\Sigma(r)$ در نظر می گیریم. از آن جایی که معادله دیراک با این پتانسیل به طور دقیق و تحلیلی

قابل حل نمی باشد معمولا از روشهای تقریبی یا عددی برای حل آن استفاده می کنند. در اینجا ما از تقریب زیر برای حل مساله استفاده کردیم:

$$\Sigma(r) = \frac{v_0}{r} e^{-\alpha r} \approx \frac{v_0}{r} (1 - \alpha r) \quad (50-4)$$

معادله (49-4) را با این تقریب باز نویسی می کنیم:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M^2 - E_{n_r,k}^2 - C_s(M - E_{n_r,k})) \right) F_{n_r,k}(r) = 0 \quad (51-4)$$

$$+ (M + E_{n_r,k} - C_s) \left(\frac{v_0}{r} - \alpha v_0 \right)$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیرهای زیر داریم:

$$M^2 - E_{n_r,k}^2 - C_s(M - E_{n_r,k}) = \varepsilon_{n_r,k} ,$$

$$(M + E_{n_r,k} - C_s) = A \quad (52-4)$$

$$\varepsilon_{n_r,k} - A \alpha v_0 = \tilde{E}_{n_r,k}$$

$$k(k+1) = L^2$$

رابطه (50-4) به رابطه زیر تقلیل می یابد:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L^2}{r^2} - (\tilde{E}_{n_r,k} + A \frac{v_0}{r}) \right) F_{n_r,k}(r) = 0 \quad (53-4)$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر زیر خواهیم داشت:

$$F_{n_r,k}(r) = r S_{n_r,k}(r) \quad (54-4)$$

$$\frac{d^2 S_{n_r,k}(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d S_{n_r,k}(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(-\tilde{E}_{n_r,k} r^2 - A v_0 r - L^2 \right) S_{n_r,k}(r) = 0 \quad (55-4)$$

معادله دیراک به روشهای متفاوتی قابل حل می باشند و از طرف دیگر معادلات شرودینگر و DKP از مهمترین معادلاتی هستند که برای توصیف فیزیک سیستمهای غیر نسبیتی و نسبیتی به کار می

روند. در این میان روش NU یکی از بهترین روش هایی است که می توان از آن برای حل این معادلات استفاده کرد.

از مقایسه روابط (۴-۵۵) و (۳-۱) خواهیم داشت:

$$\tilde{\tau} = 2, \quad \sigma = r, \quad \sigma^2 = r^2, \quad \tilde{\sigma} = -\tilde{E}_{n_r, k} r^2 - Av_0 r - L^2 \quad (۴-۵۶)$$

با جایگذاری عبارت های بالا در رابطه (۳-۹) خواهیم داشت:

$$\pi(r) = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\tilde{E}_{n_r, k} r^2 \pm (Av_0 r + k)r + L^2 + \frac{1}{4}} \quad (۴-۵۷)$$

با دنبال کردن روابط ترتیبی حل روش NU حالت تقارن اسپینی سیستم نسبیتی را بر حسب توابع لاگر محاسبه می گردد [51]:

$$\psi(r) = N n! (2\tilde{E}_{n_r, k}^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}(L^2 + \frac{1}{4})} r^{(L^2 + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}} e^{-\tilde{E}_{n_r, k}^{\frac{1}{2}} r} L_n^k(r) \quad (۴-۵۸)$$

با توجه به معادله (۴-۵۷) پس از محاسبه $\tau(s)$ واز تساوی $\lambda = \lambda_n$ برای هر حالت می توانیم ویژه مقادیر انرژی را بدست می آوریم:

$$(۴-۵۹)$$

$$E_{n_r, k} = \frac{1}{2} \left\{ (C_s - \alpha v_0) + \sqrt{(C_s - \alpha v_0)^2 - 4(-M^2 + C_s M + (M - C_s)\alpha v_0 + \frac{(Av_0)^2}{2(L^2 + \frac{1}{4})^2 + 2n \pm 1})} \right\}$$

۳-۳-۴ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن شبه اسپینی

تحت این شرایط یعنی تقارن اسپینی $\Sigma(r) = C_s$ می شود و معادله (۴-۴۷) به صورت زیر در می آید:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M - E_{n_r, k} + c_p)(M + E_{n_r, k} + \frac{v_0}{r}(\alpha r - 1)) \right) G_{n_r, k}(r) = 0 \quad (۴-۶۰)$$

با انتخاب پارامتر های زیر خواهیم داشت:

$$M^2 - E_{n_r, k}^2 + C_p(M + E_{n_r, k}) = \varepsilon_{p_{n_r, k}}, \quad (M - E_{n_r, k} + C_p) = A_p \quad (61-4)$$

$$\varepsilon_{p_{n_r, k}} + A_p \omega_0 = \tilde{E}_{p_{n_r, k}}, \quad k(k+1) = L_p^2 \quad (62-4)$$

به مانند تابع موج حالت اسپینی تابع موج حالت شبه اسپینی نیز بر حسب توابع لاگر بدست می آید:

$$\psi(r) = N n! (2\tilde{E}_{p_{n_r, k}})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{L_p} \right)^{2(L+1/4)} e^{-\frac{r}{L_p}} L_n^k \left(\frac{r}{L_p} \right) \quad (63-4)$$

محاسبه انرژی حالت تقارن شبه اسپینی نیز به مانند حال تقارن اسپینی می باشد:

$$\tilde{E}_{p_{n_r, k}} = \frac{1}{2} \left\{ C_p + \sqrt{C_p^2 + 4(M^2 + C_p M + A_p \omega_0) - \frac{(A_p \omega_0)^2}{\left[2n+1+2\left(L_p^2 + \frac{1}{4}\right)^2 \right]}} \right\} \quad (64-4)$$

ما در این کار با در نظر گرفتن سیستم نسبیتی در پتانسیل RMF توانستیم معادله دیراک را با پتانسیل یوکاوا به روش NU حل کرده و ویژه تابع و رابطه انرژی را بدست آوریم. این کار همچنان می تواند در تشابه با سیستم های نسبیتی دیگر قابل استفاده بوده و با در نظر گرفتن پتانسیل های مختلف نتایج بهتری کسب کرد. همچنین برای توصیف بهتر دیگر سیستم های فیزیکی نیز می تواند مفید باشد.

۴-۴ محاسبه انرژی و ویژه تابع معادله نسبیتی دیراک با پتانسیل هولسن بر اساس

تئوری Relativistic Mean Field^۱

همان گونه که در بخش قبل نیز اشاره شد در حدود ۳۰ سال قبل یک شبه تبهگنی در هسته های سنگین در یک نوکلئون با اعداد کوانتومی جفت $(n-1, l+2, j=l+\frac{3}{2})$ و $(n, l, j=l+\frac{1}{2})$ مشاهده شد که در آن n, l, j اعداد کوانتومی شعاعی و مداری و تکانه زاویه ای کل هستند [65,66]. این شبه تبهگنی پدیده های طبیعی در ساختار هسته شامل تغییر هسته و ابر تغییر هسته و گشتاور مغناطیسی و ترازهای یکسان را به خوبی توصیف می کند و به همین منظور به دنبال حل معادله دیراک با پتانسیل هولسن هستیم. برای شروع کار می توانیم از روابط (۴-۴۳) تا (۴-۴۷) استفاده کنیم به همین منظور برای توجیه حالت تبهگنی در هسته های سنگین و در نظر گرفتن مقادیر مساوی به ازای پتانسیل های اسکالر و برداری سعی شده که معادله دیراک با ازای این تساوی و تفاضل حل شود که در آن $\Delta(r) = V(r) - S(r)$ و $\Sigma(r) = V(r) + S(r)$ می باشد. حالت اول را با تقارن اسپینی و حالت دوم را با تقارن شبه اسپینی نشان می دهند.

۴-۴-۲ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن اسپینی

این تقارن از نزدیکی مقدار دو پتانسیل جاذب و دافع ناشی می شود زیرا در پتانسیل میانگین نسبیتی مقادیر $V(r) \approx S(r)$ تقریباً یکسان است [78]. تحت این شرایط یعنی تقارن اسپینی $\Delta(r) = C_s$ می شود و رابطه (۴-۴۷) به صورت زیر در می آید:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M + E_{n_r, k} - C_s)(M - E_{n_r, k} + \Sigma(r)) \right) F_{n_r, k}(r) = 0 \quad (۴-۶۵)$$

یکی از پتانسیل های مهم پتانسیل هولسن می باشد [80,84]. پتانسیل هولسن را به ازای تفاضل $\Sigma(r)$ در نظر می گیریم.

^۱ (پذیرفته شده در سومین کنفرانس فیزیک ذرات و میدان ها تهران-IPM-۱۳۹۱)

این پتانسیل را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\Sigma(r) = V_0 \frac{e^{\delta r}}{1 - e^{\delta r}} \quad (66-4)$$

که در آن v_0, δ اعداد ثابتی هستند.

معادله (65-4) را با این پتانسیل باز نویسی می کنیم:

$$(67-4)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M^2 - E_{n_r, k}^2 - C_s(M - E_{n_r, k}) + (M + E_{n_r, k} - C_s)V_0 \frac{e^{\delta r}}{1 - e^{\delta r}}) \right) F_{n_r, k}(r) = 0$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر های زیر

$$M^2 - E_{n_r, k}^2 - C_s(M - E_{n_r, k}) = \gamma,$$

$$(M + E_{n_r, k} - C_s)V_0 = \beta \quad (68-4)$$

$$k(k+1) = L^2$$

رابطه (67-4) به رابطه زیر تقلیل می یابد:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L^2}{r^2} - (\gamma + \beta \frac{e^{\delta r}}{1 - e^{\delta r}}) \right) F_{n_r, k}(r) = 0 \quad (69-4)$$

با در نظر گرفتن تقریب پکرینس گونه مناسب و تغییر متغیر های زیر داریم [59]:

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\delta^2}{(1 - e^{\delta r})^2}$$

$$F_{n_r, k}(r) = r U_{n_r, k}(r) \quad (70-4)$$

$$s(r) = 1 - e^{\delta r}$$

$$(71-4)$$

$$\frac{d^2 U_{n_r, k}(r)}{dr^2} - \frac{2\delta}{s(r)} \frac{dU_{n_r, k}(r)}{dr} + \frac{1}{s^2(r)} \left[(\beta - \gamma)S^2(r) - \beta S(r) - L^2 \delta^2 \right] U_{n_r, k}(r) = 0$$

معادله دیراک به روش های متفاوتی قابل حل می باشند و از طرف دیگر معادلات شرودینگر و DKP از مهمترین معادلاتی هستند که برای توصیف فیزیک سیستم های غیر نسبیتی و نسبیتی به کار می روند. در این میان روش NU یکی از بهترین روش هایی است که می توان از آن برای حل این معادلات استفاده کرد.

۳-۴-۴ حل معادله دیراک به روش NU

از مقایسه روابط (۴-۷۱) و (۳-۱) خواهیم داشت:

$$\tilde{\tau} = -2\delta, \quad \sigma = S(r), \quad \tilde{\sigma} = (\beta - \gamma)S^2(r) - \beta S(r) - L^2\delta^2 \quad (۴-۷۲)$$

با جایگذاری عبارت های بالا در رابطه (۱۵) خواهیم داشت:

$$\pi(r) = \frac{1+2\delta}{2} \pm \sqrt{(\gamma - \beta)S^2(r) + (K + \beta)S(r) + L^2\delta^2 + \left(\frac{1+2\delta}{2}\right)^2} \quad (۴-۷۳)$$

به کمک روابط NU تابع موج حالت تقارن اسپینی سیستم نسبیتی را با در نظر گرفتن تغییر متغیر زیر محاسبه می گردد:

$$A = \left(L^2\delta^2 + \left(\frac{1+2\delta}{2}\right)^2 \right) \quad (۴-۷۴)$$

$$F_{n_r, k}^{(r)} = Nr(1-e^{\delta r})^{\left(\frac{1+2\delta}{2}\right)+A} e^{(\gamma-\beta)\frac{1}{2}} \frac{d^n}{dr^n} \left[(1-e^{\delta r})^{n \pm A} e^{-2(\gamma-\beta)\frac{1}{2}} (1-e^{\delta r}) \right]$$

با در نظر گرفتن عبارت های رابطه (۴-۶۸) و روابط NU ویژه مقدار انرژی حالت تقارن اسپینی به صورت زیر بدست می آید:

$$E_{n_r,k} = \frac{(1-V_0) \left\{ \pm \left[L^2 \delta^2 + \left(\frac{1+2\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 2n-1 \right\}^2}{\left[V_0^2 + \left\{ \pm \left[L^2 \delta^2 + \left(\frac{1+2\delta}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 2n-1 \right\}^2 \right]} \quad (75-4)$$

۴-۴-۴ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن شبه اسپینی

تحت این شرایط یعنی تقارن اسپینی $\Sigma(r) = C_s$ می شود و رابطه (۴۸-۴) به صورت زیر در می آید:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - (M - E_{n_r,k} + c_p)(M + E_{n_r,k} - V_0 \frac{e^{\delta r}}{1-e^{\delta r}}) \right) G_{n_r,k}(r) = 0 \quad (76-4)$$

با انتخاب پارامترهای زیر خواهیم داشت:

$$M^2 - E_{n_r,k}^2 + C_p(M + E_{n_r,k}) = \xi_{p_{n_r,k}}, \quad (M - E_{n_r,k} + C_p)V_0 = \eta \quad (77-4)$$

$$k(k+1) = L_p^2 \quad (78-4)$$

به مانند تابع موج حالت اسپینی تابع موج حالت شبه اسپینی نیز با معرفی A به صورت زیر بدست می آید:

$$A = \left(L_p^2 \delta^2 + \left(\frac{1+2\delta}{2} \right)^2 \right) \quad (79-4)$$

$$G_{n_r,k}(r) = Nr(1-e^{\delta r})^{\left(\frac{1+2\delta}{2} \right)} \frac{d^n}{dr^n} \left[(1-e^{\delta r})^n \bar{A} e^{-(\gamma-\beta)\frac{1}{2}(1-e^{\delta r})} \right]$$

محاسبه انرژی حالت تقارن شبه اسپینی به صورت زیر می باشد:

$$H = 1 + n \mp 2A$$

$$\theta = (-4v_0^2 - H^2 - v_0 H^2) - 4(H^2 + v_0)(4v_0^2 - 2H^2 + 2v_0 H) \quad (۸۰-۴)$$

$$E_{n,l} = \frac{(4v_0^2 + H^2 + v_0 H^2) \pm (\theta)^{\frac{1}{2}}}{2(H^2 + v_0^2)}$$

ما در این کار با در نظر گرفتن سیستم نسبیتی در پتانسیل Relativistic Mean Field توانستیم معادله دیراک را با پتانسیل هولسن به روش NU حل کرده و ویژه تابع و رابطه انرژی را بدست آوریم. این کار همچنان می تواند در تشابه با سیستم های نسبیتی دیگر قابل استفاده بوده و با در نظر گرفتن پتانسیل های مختلف نتایج بهتری کسب کرد. همچنین برای توصیف بهتر دیگر سیستم های فیزیکی نیز می تواند مفید باشد.

۴-۵ طیف انرژی معادله کلاین گوردن با در نظر گرفتن وابستگی جرمی^۱

توصیف پدیده ها در انرژی بالا مستلزم بکارگیری معادلات نسبیتی می باشد معادله کلاین گوردن^۲ یکی از معادلات اساسی در مکانیک کوانتوم نسبیتی می باشد که حرکت ذرات با اسپین صفر را در یک میدان پتانسیل توصیف می کند [85-86]. یکی از مساله های جالب توجه در این زمینه حل دقیق معادلات نسبیتی مانند کلاین گوردن و دیراک^۳ با در نظر گرفتن پتانسیل های برداری و اسکالر می باشد. حل دقیق فقط معادله کلاین گوردن با پتانسیل های برداری و اسکالر فقط برای چند پتانسیل محدود میسر می باشد [77]. معادله کلاین گوردن برای توصیف حرکت ذرات با اسپین صفر مانند بوزون ها برای گروه زیادی از پتانسیل ها بکار می رود.

در چند سال اخیر تلاش های زیادی برای حل این معادله با پتانسیل های مختلف و به روش های متعددی صورت گرفته است. این معادلات نسبیتی شامل دو عامل می باشند عملگر چار-بردار تکانه خطی و جرم سکون اسکالر. این دو عامل به ما اجازه می دهند که دو نوع پتانسیل جفت شده را معرفی کنیم: پتانسیل برداری (V) و پتانسیل اسکالر (S).

از طرف دیگر، مفهوم وابستگی جرمی در سیستم های مکانیک کوانتومی جالب توجه بسیاری از محققین بوده است. و به راستی که این تحقیقات بسیار مفید بوده و استفاده های زیادی در زمینه های مختلفی مانند فیزیک نیمه هادی ها، کوانتوم دات و کوانتوم، مایع های کوانتومی و غیره... داشته است [87-90]. برخی معادله دیراک را با وابستگی جرمی پتانسیل های PT, non PT به حل دقیق معادله کلاین گوردن تک بعدی با در نظر گرفتن وابستگی جرمی پرداختند. ما در اینجا می خواهیم به بررسی معادله کلاین گوردن یک بعدی با پتانسیل هولسن و با توجه ویژه به وابستگی جرمی بپردازیم. ما این معادله را به روش NU حل خواهیم کرد.

معادله کلاین گوردن با وابستگی جرمی به صورت زیر نوشته می شود [91]:

¹ Accepted in European Physical Journal-Plus-2013

² Klein-Gordon

³ Dirac

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + [E - V(r)]^2 - [M(r) + S(r)]^2 \right) U(r) = 0 \quad (۸۱-۴)$$

که در آن تابع موج $\varphi(r) = \frac{U(r)}{r}$ می باشد و $V(r)$ و $S(r)$ پتانسیل های اسکالر و برداری هستند. از معادله (۸۱-۴) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \left(E^2 + V^2(r) - 2EV(r) - M^2(r) - S^2(r) - 2M(r)S(r) \right) U(r) = 0 \quad (۸۲-۴)$$

اگر پتانسیل هولسن را برای پتانسیل اسکالر و برداری در نظر بگیریم داریم [92]:

$$V(r) = -v_0 \frac{e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}} \quad (۸۳-۴)$$

$$S(r) = -s_0 \frac{e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}}$$

برای موقعیت وابسته به جرم عبارت زیر را که به پتانسیل هولسن شباهت دارد در نظر می گیریم:

$$M(r) = m_0 + \frac{m_1 e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}} \quad (۸۴-۴)$$

با جایگذاری معادله (۸۳-۴) و (۸۴-۴) در معادله (۸۲-۴) خواهیم داشت:

$$(۸۵-۴)$$

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \left\{ E^2 + v_0^2 \frac{e^{-2\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})^2} + 2Ev_0 \frac{e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}} - m_0^2 - m_1^2 \frac{e^{-2\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})^2} - 2m_0 m_1 \frac{e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}} - s_0^2 \frac{e^{-2\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})^2} + 2m_0 s_0 \frac{e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}} + 2m_1 s_0 \frac{e^{-2\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})^2} \right\} U(r) = 0$$

با تعریف تغییر متغیر زیر معادله (۸۶-۴) به صورت معادله زیر در می آید

$$\phi(r) = \frac{U(r)}{r} \quad (۸۶-۴)$$

$$\frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} + \left\{ \gamma + \eta \frac{e^{-2\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})^2} + \xi \frac{e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}} \right\} \phi(r) = 0 \quad (۸۷-۴)$$

که در آن:

$$E^2 - m_0^2 = \gamma, (v_0^2 - m_1^2 - s_0^2 + 2m_1s_0) = \eta, (2Ev_0 - 2m_0m_1 + 2m_0s_0) = \xi \quad (88-4)$$

قبل از ادامه کار، یک تقریب پکرینس گونه به صورت زیر در نظر می گیریم [59]:

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\delta^2}{(e^{\delta r} - 1)^2} \quad (89-4)$$

با استفاده از تقریب بالا و تغییر متغیر زیر

$$s = (1 - e^{-ar}) \quad (90-4)$$

معادله (88-4) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{d^2\phi(r)}{dr^2} - \frac{2\delta}{s(r)} \frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{1}{s^2(r)} [s^2(r)(\eta - \xi + \gamma) + s(r)(-2\eta + \xi) + \eta] \phi(r) = 0 \quad (91-4)$$

برای حل معادله بالا ما از روش حل NU استفاده می کنیم. با مقایسه روابط (91-4) و (1-3) عبارت

های زیر بدست می آیند:

$$\tilde{\tau} = -2\delta, \quad \sigma = s, \quad \tilde{\sigma} = As^2 + Bs + C \quad (92-4)$$

و با جایگذاری عبارت های بالا در معادله (9-3) ما عبارت های زیر را خواهیم داشت:

$$\pi(r) = 1 \pm \left[(-A)^{\frac{1}{2}} s(r) + (1-C)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \text{for} \quad k = B + 2\sqrt{A(C-1)} \quad (93-4)$$

$$\pi(r) = 1 \pm \left[(-A)^{\frac{1}{2}} s(r) - (1-C)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \text{for} \quad k = B - 2\sqrt{A(C-1)} \quad (94-4)$$

با انتخاب k مناسب خواهیم داشت:

$$\pi(r) = 1 \pm \left[(-A)^{\frac{1}{2}} s(r) - (1-C)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \text{for} \quad k = B - 2\sqrt{A(C-1)} \quad (95-4)$$

با دنبال کردن ترتیبی روش NU و در انتها ویژه مقدار انرژی معادله کلاین گوردون برای این سیستم

به صورت زیر بدست می آید [51]:

$$E = \frac{-\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4\eta\omega}}{2} + \frac{2(v_0^2 - m_1^2 - s_0^2 + 2m_1s_0) - (-2m_0m_1 + 2m_0s_0)}{2v_0} \quad (96-4)$$

که در آن

$$\omega = \left[(2n+1) + 2((v_0^2 - m_1^2 - s_0^2 + 2m_1s_0) - 1)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \quad (97-4)$$

حال می خواهیم تابع موج این سیستم را پیدا کنیم. با استفاده از معادلات (3-3) و (3-4) به دست می آید:

$$\phi(s) = s \left[1 - (1-C)^{\frac{1}{2}} \right] e^{-(-A)^{\frac{1}{2}}s} \quad (98-4)$$

$$\rho(s) = s \left[2 \left[\left(\frac{1-\delta}{2} \right) - (1-C)^{\frac{1}{2}} \right] \right] e^{-2(-A)^{\frac{1}{2}}s} \quad (99-4)$$

با جایگذاری معادله بالا در معادله (3-7) چند جمله ای $y_n(s)$ به صورت زیر بدست می آید:

(100-4)

$$y_n = B_n s \left[2 \left[(1-\delta) - (1-C)^{\frac{1}{2}} \right] \right] e^{2(-A)^{\frac{1}{2}}s} \frac{d^n}{ds^n} \left[s^{n+1} \left[\left(\frac{1-\delta}{2} \right) - (1-C)^{\frac{1}{2}} \right] \right] e^{-2(-A)^{\frac{1}{2}}s}$$

با استفاده از $U(s) = \phi(s)y_n(s)$ تابع موج سیستم نسبیتی به صورت زیر در می آید:

(101-4)

$$U(s) = N s \left[\left(\left(\frac{1-\delta}{2} \right) + (1-C)^{\frac{1}{2}} \right) \left[2(1-C)^{\frac{1}{2}} \right] \right] e^{(-A)^{\frac{1}{2}}s} \frac{d^n}{ds^n} \left[s^{n+2} \left[\left(\frac{1-\delta}{2} \right) - (1-C)^{\frac{1}{2}} \right] \right] e^{-2(-A)^{\frac{1}{2}}s}$$

و در آخر تابع موج کل سیستم به صورت تابعی از چند جمله ای لاگر به صورت زیر در می آید:

(102-4)

$$\phi(r) = N_n n! r^{-2} (-A)^{\frac{1}{2}} (1 - e^{-\delta r})^3 \left[\left(\frac{1-\delta}{2} \right) + (1-C)^{\frac{1}{2}} \right] e^{3(-A)^{\frac{1}{2}}(1-e^{-\delta r})} L_n^K$$

که در آن N ثابت نرمال سازی می باشد. ما در این کار ویژه مقادیر انرژی معادله کلاین گوردون را با وابستگی جرمی با پتانسیل هولسن بدست آوردیم. ما در این کار توانستیم به بررسی معادله کلاین گوردون با وابستگی جرمی به ازای پتانسیل های اسکالر و برداری با استفاده از روش NU پردازیم. تابع موج بر حسب چند جمله ای های لاگر بدست آمد و انرژی سیستم در معادله (۴-۷۹) بدست آمده است و برای کارهای بعدی پیشنهاد می کنیم که به حل معادله کلاین گوردون با پتانسیل های دیگر به ازای پتانسیل های اسکالر و برداری و وابستگی جرمی می توان پرداخت.

نتیجه گیری

در این پایان نامه ما با استفاده از روش حل تحلیلی NU و روش های عددی و تقریب های مناسب تابع موج حالت پایه و حالت شبه برانگیخته و انرژی بستگی و شعاع باری دوترون را توسط حل معادله شعاعی شرودینگر در حضور پتانسیل یوکاوا در حالت های $L=0$ و $L=2$ بدست آوریم. همان طور که مشاهده شد تابع موج شرایط مرزی را برآورده می کند و نتایج بدست آمده توافق خوبی با تجربه دارد. در قسمت ۳-۴ ما با استفاده از حل معادله دیراک با پتانسیل یوکاوا توانستیم تابع موج و رابطه انرژی را تحت تقارن اسپینی و شبه اسپینی به روش NU بدست آوریم. در قسمت ۴-۴ توانستیم به محاسبه رابطه انرژی و تابع موج معادله نسبیتی دیراک با پتانسیل هولسن بر اساس تئوری RMF بپردازیم. و در انتها در بخش ۴-۵ توانستیم با حل تحلیلی معادله کلاین گوردن با در نظر گرفتن وابستگی جرمی به رابطه انرژی و تابع موج این معادله نسبیتی نیز بدست آوریم. مزیت این کارها نسبت به کارهای دیگر این است که به راحتی می توان این معادلات را برای هر سیستم نسبیتی دیگر با تعداد n ذره نوشت و ویژگی های این سیستم ها را بدست آورد. توابع موج بدست آمده شرایط مرزی را برآورده می کند. لازم به یاد آوری است که این نتایج در مطالعه سایر جنبه های فیزیک هسته ای و فیزیک انرژی های بالا بسیار پر کاربرد هستند.

- [1] Griffiths D. J. (1984), "Introduction to Elementary Particles", John Wiley & Sons, Inc, pp.27 .
- [2] H.S.Hans. (2001), "Nuclear Physics Experimental and Theoretical" .
- [3] W.N.Cottingham,D.A.Greenwood.(2000),"An introduction to nuclear physics" ; Cambridge University Press.
- [4] J.L.Basdevant,J. Rich,M. Spiro. (2005),"Fundamentals In Nuclear Physics From Nuclear Structure to cosmology";Springer, USA.
- [5] R. Hofstadter, (1957) Annu. Rev. Nucl. Sci. **7** 231.
- [6] K.S. Krane, (1988), "Introductory Nuclear physics", John Willey & sons, Vol 1.2.
- [7] H. Frauenfelder, E. M. Henley,(1977), "subatomic physics", prentice – Hall. Vol 1.2.
- [8] C. W. Li, W.Whaling, W. A. Fowler, and C. C. Lauretsen(1951)Phy. Rev. 82: 512.
- [9] E. J. BURGE :(1988) "atomic Nuclei and their particles", Second Edition Clarendon press, oxford physics.
- [10] C. Berkdemir, A. Berkdemir, and J.G. Han, Chem. (2006) Phys. Lett. 417 326.
- [11] R. D. Woods and D. S. Saxon, (1954) Phys. Rev. **95**, 577.
- [12] J. Sadeghi and M. R. Pahlavani, (2004) Afr. J. Math. Phys. 1 (2), 195.
- [13] M. R. Pahlavani, J. Sadeghi and M. Ghezlbash, (2009) App. Sci. 11, 106.
- [14] A. N. Ikot1, L. E. Akpabio, and E. B. Umoren, (2011) Scientific Research, J. Sci. Res. **3** (1), 25-33.
- [15] H.Bahlouli; (2012) "Analytical treatment of the oscillating Yukawa Potential"; Chemical Phys 393,153-156.
- [16] M. .simsek, H. Ėgrifes, (2004) J. Phys. A–Math. Gen. 37, 4379.
- [17] Chun-Sheng Jia, Ping Gao, and Xiao-Long Peng, (2006)J. Phys. A: Math. Gen. 39 7737.
- [18] Xia Zou, Liang-Zhong Yi, and Chun-Sheng Jia, (2005) Phys. Lett. A 346 54.
- [19] H. Ėgrifes, D. Demirhan, F. Büyükkılıç, (1999), Phys. Scr. **59** 90; **60**, 195.
- [20] N. Cotfas, J.2002 Phys. A: Math. Gen. **35** 9355; Cent. Eur. J. Phys **2** 456.
- [21] O. Yeşiltaş, M. Şimşek, R. Sever and C. Tezcan, 2003, Phys. Scr. **67** 472.
- [22] M. Şimşek, H. Ėgrifes, 2004, J. Phys. A: Math. Gen. **37** 4379.
- [23] M. Aktaş, R. Sever, 2004, J. Mol. Struc. (Theochem) **710** 223.
- [24] A. Berkdemir, C.Berkdemir and R. Sever, 2004, Phys. Rev. C **72** 27001.
- [25] F. Yaşuk, C. Berkdemir and A. Berkdemir, 2005, J. Phys. A: Math. Gen. **38** 6579.
- [26] F. Yaşuk, C. Berkdemir, A. Berkdemir and C.onem, 2005, Phys. Scr. **71**340–3.
- [27] C. Berkdemir, A. Berkdemir and R. Sever, 2006, nucl-th/0501030 v4.
- [28] C. Berkdemir, 2006, Nucl. Phys. A **770** 32.
- [29] G. Levai, 1989, J. Phys. A: Math. Gen. **22** 689.
- [30] S. M. Ikhdair and R. Sever, 2007 Ann. Phys. (Leipzig) **16**, 218.
- [31] M. Simsek and H. Ėgrifes, 2004, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 4379.
- [32] H. Ėgrifes and R. Sever, 2005, Phys. Lett. A 344, 117.
- [33] S.M. Ikhdair, R. Sever, 2007, Int. J. Theor. Phys. **46**, 1643; J. Math. Chem. **42**, 461.
- [34] A.A. Rajabi,2005,“A three-body force model for the harmonic and anharmonic oscillator”, Iranian.J.Phys.R,Vol 5,No 2
- [35]A.A. Rajabi,2006,“Spectrum of mesons and hyperfine dependence potentials”.Iranian.J.Phys.R,Vol 6,No 2

- [36] M.R.Shojaei, A.A. Rajabi,2007,“Hypercentral constituent quark model and the hyperfine dependence potential”, Iranian.J.Phys.R,Vol 7,No 2
- [37] M. Aktaş and R. Sever, 2004, Mod. Phys. Lett. A **19**, 2871.
- [38] O. Yeşiltaş, 2007, Phys. Scr. **75**, 41.
- [39] F. Yasuk, A. Durmuş and I. Boztosun,2006, J. Math. Phys. **47**, 082302 .
- [40] G. Junker, 1996, “Super symmetric Methods in Quantum and statistic physics”, Heidelberg, Springer.
- [41] R. Dutt, A. Gangopadhyaya, and U.P. Sukhatme, 1997, “Noncentral potentials and spherical harmonics using super symmetry and shape invariance”, Am. J. Phys. **65** 5, 400–403.
- [42] H. Katsura, H. Aoki, 2006,“Exact Supersymmetry in the relativistic Hydrogen in general dimension –supercharge and the generalized johnson –Lippmann operator” J.Math.Phys.**47**:032301.
- [43] F. Cooper, J. Ginocchio A. Khare, 1988, “Derivation of the S matrix using Supersymmetry”, Phys.LettA **129**, 145-147.
- [44] R. Dutt, A. Khare and U.P. Sukhatme, , 1988 “Supersymmetry and shape invariance and Exactly solvable potentials”,Am.J.Phys.**56**:163-168.
- [45] C. Erko, R. Sever, 1984, Phys. Rev. D **30**, 2117.
- [46] G.J. Papadopoulos, J.T. Devres, 1978, “Path Integral And Their Applications in Quantum, Statistical and solid state physics”, Plenum Press New York and London.
- [47] M. Chaichian, A. Demichev, 2001, “Path Integrals in Physics”, Iop, vol 1,2.
- [48] H.F.Jones, R.J.Rivers, 2009, “Which Green Function does the path integral for quassi hermitian Hamiltonians represent”, Phys.Lett.**A373**, 3304, 3308.
- [49] S.Sakoda, 2008,“Exactness in the path integral of the coulomb potential in one dimension” Mod.Phys.Lett.A **23**, 3057,3076 .
- [50] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, 1995, Phys. Rep. **251**, 267.
- [51] A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov, 1988 *Special Functions of Mathematical Physics*, Birkhauser, Basel.
- [۵۲] نیک عمل مهدی و واعظ او لهراسبی امیر " آشنایی با روش های شبیه سازی در فیزیک " انتشارات دانشگاه صنعتی شریف چاپ اول ۱۳۸۶
- [53] S.Erkoc, Ann. Rev. (2001). Com. Phys. IX , 1-103.
- [54] J.J. Sakurai, 1994" *Modern Quantum Mechanics*"; S. F. Tuan, Editor. Rev. ed, , Addison – Wesley publishing Company, Inc.
- [55] Sankara. Rao K, 1996"*Numerical Methods for Science and Engineers*".
- [56] H.Bahlouli; (2012) "*Analytical treatment of the oscillating Yukawa Potential*"; Chemical Phys 393153-156.
- [57] D.W.L.Sprung;et al(1994) "*Deuteron Properties using a truncated One –pion Exchange Potential*"; Phys Rev C.
- [58] W.H.Press;et al(1992) "*Numerical Recipes in Fortran*"2th edition, Cambridge press.
- [59] Hill E H 1954 Am. J. Phys. 22 211.
- [60] A.D. Alhaidari, H. Bahlouli, and A. Al-Hasan, (2006) *Phys. Lett. A* **349** ,87.
- [61] A. Schulze-Halberg, (2006) *Chin. Phys. Lett.* **23** 1365.
- [62] R.K. Su and Z.Q. Ma, J. (1986) *Phys. A: Math. Gen.* **19** 1739.
- [63] J.N. Ginocchio, (2004) *Phys. Rev. C* 69 034318.
- [64] Chun-Sheng Jia, Ping Gao, and Xiao-Long Peng(2006), *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 7737.
- [65] A. Arima, M. Harvey, K. Shimizu, (1969) *Phys. Lett. B* **30** 517.
- [66] K.T. Hecht, A. Adler, (1969) *Nucl. Phys. A* **137** 129.
- [67] A. Bohr, I. Hamamoto, B.R. Mottelson, (1982) *Phys. Scr.* **26** 267.
- [68] J. Dudek, W. Nazarewicz, Z. Szymanski, (1987) G.A. Leander, *Phys. Rev. Lett.* **59** 1405.

- [69] D. Troltenier, W. Nazarewicz, Z. Szymanski, J.P. Draayer(1994), Nucl. Phys. A **567** 591.
- [70] A.E. Stuchbery, (2002) Nucl. Phys. A **700** 83.
- [71] W. Nazarewicz, P.J. Twin, P. Fallon, J.D. Garrett, (1990) Phys. Rev. Lett. **64** 1654.
- [72] F.S. Stephens, et al. (1990), *Phys. Rev. Lett.* **65** 301.
- [73] J.Y. Zeng, J. Meng, C.S. Wu, et al(1991)., *Phys. Rev. C* **44** R1745.
- [74] A.L. Blokhin, C. Bahri, J.P. Draayer, (1995) Phys. Rev. Lett. **74** 4149.
- [75] C. Bahri, J.P. Draayer, S.A. Moszkowski, (1992) Phys. Rev. Lett. **68** 2133.
- [76] J.N. Ginocchio, (1997) Phys. Rev. Lett. **78** 436.
- [77] W. Greiner, 2000, *Relativistic quantum mechanics: wave equations* (Springer).
- [78] J.N. Ginocchio, A. Leviatan, (2001) Phys. Rev. Lett. **87** 072502.
- [79] R. Messina, H. Lowen, (2003) Phys. Rev. Lett. **91** 146101.
- [80] A.D. Alhaidari, (2002) *Phys. Rev. Lett. Erratum* 88, 189901.
- [81] J.N. Ginocchio, A. Leviatan, (2001) Phys. Rev. Lett. **87** 072502.
- [82] A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov, 1988 *Special Functions of Mathematical Physics*, Birkhauser, Basel.
- [83] B. J. Falaye, K. J. Oyewumi, (2011) The African Review of Physics 6:0025.
- [84] M. .simsek, H. Ėgrifes, (2004) J. Phys. A–Math. Gen. 37, 4379.
- [85] L. Z. Yi, Y. F. Diao, J. Y. Liu, and C. S. Jia, (2004)Phys. Lett. A 333, 212.
- [86] Y. F. Diao, L. Z. Yi, and C. S. Jia, Phys. Lett. A 332, 157 (2004).
- [87] G. Bastard, 1988, *Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructures* (Editions de Physique,Les Ulis,).
- [88] L. Serra, E. Lipparini, (2008),Europhys. Lett. 40 , 667.
- [89] M. Barranco, M. Pi, S. M. Gatica, E. S. Hernandez, and J. Navarro, (1997)Phys. Rev. B 56 , 8997.
- [90] F. Arias de Saavedra, J. Boronat, A. Pollas, and A. Fabrocini, (1994)Phys. Rev. B 50 , 4248.
- [91] A. de Souza Dutra, C. S. Jia, (2006).Phys. Lett. A 352 , 484.
- [92] C. S. Jia, A. de Souza Dutra, (2006). J. Phys. A: Math. Gen. 39 ,11877.