





دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: هسته‌ای

محاسبه انرژی بستگی و برخی خواص سیستم سه نوکلئونی
با استفاده از یک پتانسیل فوق‌مرکزی مناسب آن

دانشجو:

ابوالقاسم صفدری

اساتید راهنما:

پروفسور علی اکبر رجبی

دکتر محمد رضا شجاعی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: هسته‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای:

ابوالقاسم صفدری

تحت عنوان:

محاسبه انرژی بستگی و برخی خواص سیستم سه نوکلئونی
با استفاده از یک پتانسیل فوق مرکزی مناسب آن

در تاریخ ۱۳۹۱/۱۱/ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با

درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
			پروفسور علی اکبر رجبی
			دکتر محمد رضا شجاعی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	دکتر		دکتر
			دکتر

تقدیم به:

پدر زحمتکش، مادر مهربان و ...

همسر صبورم؛ او که بیشترین سختی‌ها را طی این دوره از تحصیل متحمل شد
و میوه معطر زندگی‌مان: الیکا؛ او که لبخندهایش خستگی کار را از یادم می‌برد.

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس پروردگار بی‌همتا را که لطف بی‌منتش، سبب شد تا چند سال دیگر از عمرم را در مسیر شناخت ذات بی‌کرانش بردارم؛ گرچه هیچوقت بر بنده معلوم نشد که حرکت در این مسیر، بالاخره دانش انسان را بیشتر می‌کند یا جهل او را؟!!

اکنون که به یاری او، این دوره از تحصیلاتم را به پایان رسانده‌ام، به رسم ادب از پدر ارجمند، مادر مهربان و سایر اعضای خانواده‌ام، که در تمام مراحل زندگی همواره مشوق و همراه بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

به رسم وظیفه و قدرشناسی، از راهنمایی‌های روشنگر استاد راهنمای اولم جناب آقای پروفیسور علی-اکبر رجبی و زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای دومم، جناب آقای دکتر محمدرضا شجاعی که نقش مهمی در به ثمر رساندن این کار داشته‌اند، نیز از زحمات اساتید ارجمندم در دوره کارشناسی ارشد، آقایان دکتر حسن‌آبادی، دکتر موحدیان، دکتر سوهانی و دکتر توکلی صمیمانه تشکر و برای کلیه این بزرگواران آرزوی توفیقات روزافزون می‌نمایم. همچنین از آقایان دکتر مولوی و دکتر حسن‌آبادی که برای داوری این کار وقت گذاشتند سپاسگزاری می‌کنم.

از کلیه دانشجویان هم‌دوره‌ای‌ام - و به طور ویژه از دوست عزیزم آقای حامد فیضی - نیز تشکر و بهترین‌ها را برای آنها آرزو می‌کنم.

تعهد نامه

اینجانب ابوالقاسم صفدری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک-هسته‌ای دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه محاسبه انرژی بستگی و برخی خواص سیستم سه نوکلئونی با استفاده از یک پتانسیل فوق مرکزی مناسب آن تحت راهنمایی‌های پروفسور علی اکبر رجیبی و دکتر محمدرضا شجاعی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

امضای دانشجو

تاریخ

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

هسته‌ها به نوعی پیچیده‌ترین سیستم‌های کوانتومی هستند. زیرا از یک طرف، خود نیروی هسته‌ای ماهیتی پیچیده دارد و از طرف دیگر در هسته‌ای شامل چند ذره، مرکز نیروی مشترکی مشابه آنچه در اتمهاست وجود ندارد. بنابراین بررسی یک هسته چند نوکلئونی کاری است بس دشوار. در این تحقیق، پس از معرفی خواص نیروی هسته‌ای، در مورد ویژگی‌های یک پتانسیل مناسب هسته‌ای بحث شده است. سپس با بررسی دو پتانسیل معروف یوکاوا و هامادا-جانسون و الهام از رفتار حدی آنها، پتانسیلی به نام *Mie-type* برای اولین بار برای توصیف برهم‌کنش بین نوکلئونها معرفی شده است. در ادامه متغیرهای فوق‌کروی و هماهنگ‌های فوق‌کروی معرفی شده اند و نحوه به کارگیری آنها در معادله شرودینگر برای بررسی سیستم‌های چند نوکلئونی توضیح داده شده است. در آخرین گام با حل معادله شرودینگر به روش سری توانی، کلیه ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی برای مقدار دلخواه γ ی یک سیستم دلخواه A نوکلئونی تعیین شده‌است. در پایان نیز به طور ویژه انرژی بستگی، جرم و شعاع باری تریتون محاسبه و نتایج با مقادیر تجربی مقایسه شده است.

کلمات کلیدی:

سیستم سه نوکلئونی، تریتون، انرژی بستگی، شعاع باری، پتانسیل فوق مرکزی مای تایپ (*Mie-type*)، معادله شرودینگر

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

فصل اول؛ کلیات

۱-۱) مقدمه	۱
۲-۱) تاریخچه فیزیک هسته‌ای	۱
۳-۱) مقایسه ساختار هسته و اتم	۴
۴-۱) خواص هسته‌ای	۵
۱-۴-۱) جرم و انرژی بستگی هسته	۶
۲-۴-۱) اندازه هسته	۱۱
۵-۱) مدل‌های هسته‌ای	۱۵
۱-۵-۱) مدل قطره مایع	۱۶
۲-۵-۱) مدل لایه‌ای	۱۶
۶-۱) نیروی هسته‌ای	۱۷

فصل دوم؛ نیرو و پتانسیل هسته‌ای

۱-۲) مقدمه	۲۱
۲-۲) ویژگی‌های نیروی هسته‌ای	۲۱
۱-۲-۲) جاذب و مرکزی بودن	۲۲
۲-۲-۲) وابستگی به اسپین	۲۲
۳-۲-۲) تانسوری بودن	۲۶
۴-۲-۲) تقارن نسبت به بار نوکلئون	۲۹
۵-۲-۲) استقلال از بار الکتریکی	۳۰
۶-۲-۲) مغز دافع	۳۰
۷-۲-۲) وابستگی به سرعت	۳۲
۳-۲) پتانسیل مناسب هسته‌ای	۳۳
۴-۲) نیروی هسته‌ای و تبادل ذره	۳۵
۱-۴-۲) عملگرهای تبدیلی	۳۵

عنوان	صفحه
۲-۴-۲) مدل نیروی تبادل	۳۸
۳-۴-۲) نظریه مزونی یوکاوا	۴۵
۴-۴-۲) پتانسیل هامادا-جانسون	۴۹
۵-۴-۲) نیروهای چند جسمی	۵۲
۵-۲) پتانسیل مای تایپ (Mie-type)	۵۴

فصل سوم؛ معادله شرودینگر در فضای فوق کروی

۱-۳) مقدمه	۵۷
۲-۳) مختصات ژاکوبی	۵۷
۳-۳) متغیرهای فوق کروی	۵۹
۴-۳) هامیلتونی سیستم	۶۱
۱-۴-۳) پتانسیل فوق مرکزی	۶۲
۲-۴-۳) عملگر انرژی جنبشی	۶۳
۳-۴-۳) عملگر تکانه زاویه‌ای بزرگ	۶۵
۵-۳) ویژه توابع و ویژه مقادیر عملگر تکانه زاویه‌ای بزرگ	۶۶
۱-۵-۳) هماهنگیهای فوق کروی (H.H.)	۶۶
۲-۵-۳) معادله ویژه مقداری	۶۹
۶-۳) فرم معادله فوق شعاعی D بعدی شرودینگر	۷۰

فصل چهارم؛ محاسبه خواص استاتیکی سیستم سه نوکلئونی در حضور پتانسیل

Mie-type

۱-۴) مقدمه	۷۲
۲-۴) حل معادله فوق شعاعی D بعدی شرودینگر به روش سری توانی	۷۳
۱-۲-۴) تعیین ویژه مقادیر و ویژه توابع انرژی حالت پایه	۷۷

صفحه	عنوان
۷۹	۲-۲-۴) تعیین ویژه مقادیر و ویژه توابع انرژی حالات برانگیخته
۸۰	۳-۴) تعیین جرم تریتون
۸۰	۴-۴) تعیین شعاع باری تریتون
۸۱	۵-۴) نتایج محاسبات مربوط به خواص استاتیکی تریتون
۸۴	جمع بندی
۸۵	مراجع

فهرست اشکال

صفحه	عنوان
۷	شکل (۱-۱) انرژی بستگی متوسط نوکلئونها
۱۱	شکل (۲-۱) سهم جملات فرمول نیمه تجربی جرم در انرژی بستگی متوسط نوکلئونها
۱۲	شکل (۳-۱) ترتیب آزمایش اندازه گیری تغییرات زاویه پراکندگی الکترون از هسته
۱۳	شکل (۴-۱) توزیع زاویه ای پراکندگی الکترونهای $185 MeV$ از هسته های مختلف
۱۴	شکل (۵-۱) نمودار رابطه (۶-۱)
۱۴	شکل (۶-۱) چگالی نوکلئونها در هسته های مختلف حاصل از برازش
۲۹	شکل (۱-۲) تاثیر نیروی تانسوری بر دوترون
۳۰	شکل (۲-۲) اختلاف ایجاد شده در طول پراکندگی در اثر برونیایی، در ازای تغییر مختصر تابع موج
۳۱	شکل (۳-۲) اختلاف فاز حاصل از پراکندگی نوترون- پروتون در انرژی های متوسط
۳۸	شکل (۴-۲) چند نمونه از پتانسیل های نوکلئون- نوکلئون
۴۰	شکل (۵-۲) سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون-پروتون در انرژی های متوسط
۴۸	شکل (۶-۲) فرم پتانسیل یوکاوا
۵۰	شکل (۷-۲) مولفه های پتانسیل هامادا- جانسون
۵۲	شکل (۸-۲) یک سیستم سه جسمی
۵۵	شکل (۹-۲) رفتار کلی و شرایط مرزی یک پتانسیل می تایپ (<i>Mie-type</i>)
۵۸	شکل (۱-۳) بردارهای ژاکوبی برای یک سیستم چهار ذره ای
۶۲	شکل (۲-۳) هندسه یک سیستم سه ذره ای
۸۳	شکل (۱-۴) تابع موج فوق شعاعی تریتون در حالت پایه

فهرست جداول

صفحه	عنوان
۱۸	جدول (۱-۱) نیروهای بنیادی شناخته شده در طبیعت
۵۱	جدول (۱-۲) ضرابی که باید در مولفه‌های شکل (۷-۲) ضرب شوند
۶۹	جدول (۱-۳) تعدادی از کمیت های فضای فوق کروی
۸۲	جدول (۱-۴) مقادیر محاسبه شده برای پارامترهای تابع موج حالت پایه و خواص استاتیکی تریتون
۸۲	جدول (۲-۴) مقادیر محاسبه شده برای پارامترهای تابع موج حالت پایه و شعاع باری تریتون
۸۳	جدول (۳-۴) مقادیر محاسبه شده برای انرژی بستگی و جرم تریتون

فصل اول

کلیات

۱-۱) مقدمه

در این فصل، پس از یک مرور گذرا بر تاریخچه فیزیک هسته‌ای و مقایسه‌ای بین هسته و اتم، وارد مبحث خواص هسته‌ای خواهیم شد و از بین خواص استاتیکی هسته، انرژی بستگی، جرم و شعاع را - که جزو اهداف اصلی این تحقیق هستند- به تفصیل بررسی خواهیم کرد. در پایان هم، مدل‌های هسته‌ای و نیروی هسته‌ای را مختصراً معرفی خواهیم کرد. مبحث نیروی هسته‌ای به تفصیل در فصل دوم بررسی خواهد شد.

۱-۲) تاریخچه فیزیک هسته‌ای

تلاش برای درک ماهیت اساسی ماده، ریشه در تفکرات فیلسوفان یونان باستان، بویژه دموکریتوس^۱ دارد. دموکریتوس که در سده چهارم پیش از میلاد می‌زیست، معتقد بود که هر نوع ماده‌ای را می‌توان به اجزای کوچک و کوچکتر تقسیم کرد تا آنکه حدی نهایی فرا می‌رسد که دیگر ادامه تقسیم مسیر

¹ Democritus

نیست. از نظر دموکریتوس، این جزء لایتجزای ماده (یا اتم) که با چشم قابل دیدن نبود، ذره بنیادی سازنده ماده به شمار می‌رفت. در طی ۲۴۰۰ سال بعد این نظریه به صورت اندیشه‌ای فلسفی باقی ماند تا آنکه پژوهشگران آغاز سده نوزدهم میلادی با استفاده از روشهای علوم تجربی در باره این مسئله به تحقیق پرداختند و با بدست آوردن شواهد کافی فرضیه اتم گرایی را تا سطح یک نظریه علمی تمام عیار بالا بردند.

اما فیزیک هسته‌ای مانند سایر شاخه‌های فیزیک شروع متواضعانه‌ای داشته است. در سال ۱۸۹۶ بکرل^۱ به پیشنهاد پوانکاره^۲، نمکهای اورانیوم را به منظور یافتن رابطه بین ویژگی فلورسانس نوری و اشعه ایکس تازه کشف شده مورد بررسی قرار داد. در طی جستجوی این رابطه ابهامی به وجود آمد. او تصادفا دریافت که نمکهای اورانیوم، یک تابش نافذی را گسیل می‌کنند که صفحه‌های عکاسی را حتی در شرایطی که با لفافه کاغذی مناسبی هم پوشیده شده باشد، تیره می‌کند. از آن زمان تاکنون پیشرفت‌های نظری و تجربی زیادی در فیزیک هسته‌ای صورت گرفته است؛ طوریکه می‌توان ویژگیهای مختلف هسته در حالت پایه و حالات برانگیخته را تا حد زیادی بدست آورد.

برای درک ماهیت ساختار هسته، اولین اتفاق را رادرفورد^۳ بهمراه گایگر^۴ و مارسدن^۵ در سال ۱۹۱۳ با انجام آزمایشهای معروف پراکندگی α از ورقه‌های طلا و پلاتینوم رقم زدند. آنها دریافتند که تعداد ذرات α ی پراکنده شده به عقب از یک ورقه نازک پلاتینیوم ۱ به ۸۰۰۰ است؛ در حالی که طبق مدل اتمی دانه هندوانه‌ای تامسون، انتظار می‌رفت که این نسبت به اندازه ۱ در 10^{14} باشد! رادرفورد این آزمایشها را به طرز موفق آمیزی بر مبنای مدلی توجیه کرد که در آن یک هسته سنگین با بار مثبت، در مرکز اتم قرار می‌گرفت و الکترون‌ها آن را احاطه می‌کردند. در همان سال این مدل با فرضیه «مدار مانا» توسط نیلز بور^۶ تکمیل و منجر به تولد مدل بور-رادرفورد (یا به طور رایج‌تر مدل اتمی بور)

¹ H. Becquerel

² Poincare

³ E. Rutherford

⁴ H. Geiger

⁵ E. Marsden

⁶ Niels Bohr

بور) گردید. آزمایشهای پرتوهای مثبت انجام گرفته توسط تامسون^۱ در سال ۱۹۱۲ و پس از آن توسط استون^۲ در سال ۱۹۱۹ نشان داد که هسته‌های هیدروژن، پروتون هستند و جرم هسته تقریباً با مجموع جرم پروتون‌ها برابر است. استون همچنین دریافت که تعداد زیادی از هسته‌ها بیش از یک ایزوتوپ (یعنی یک بار یکسان و جرم متفاوت) دارند؛ با این حال هر ایزوتوپ تقریباً جرمی معادل مجموع جرم پروتون‌ها دارد.

رسیدن به یک تفسیر مناسب برای ایزوتوپ نیاز به گذشت زمان داشت. در ابتدا تصور بر این بود که هسته متشکل از پروتون‌ها و الکترون‌هاست و تعداد پروتون‌ها حدوداً دو برابر تعداد الکترون‌هاست. با اینکه این موضوع مبنای آماری داشت اما تصور می‌شد با مشاهده گسیل الکترون از بعضی از هسته‌های رادیواکتیو، پشتیبانی می‌شود. نیز انتظار می‌رفت که طول موج دوبروی^۳ هر الکترون درون هسته، از مرتبه اندازه هسته باشد. این می‌طلبید که انرژی الکترون گسیلی (پرتوی β) از مرتبه‌ای بالاتر از 10 MeV باشد در حالی که مقادیر اندازه‌گیری‌های تجربی انرژی تابش β ، فقط از مرتبه 2 MeV بود! ابهام فوق در سال ۱۹۳۲ با کشف نوترون توسط چادویک^۴ برطرف شد. این کشف به نقطه عطفی در پیشرفت فیزیک هسته‌ای تبدیل شد. نوترون به عنوان یک ذره «دیگر» در کنار پروتون در نظر گرفته شد که با هم هسته را می‌ساختند. آنگاه ایزوتوپهای مختلف به عنوان هسته‌هایی با تعداد پروتون برابر و نوترون متفاوت در نظر گرفته شدند. این مدل «نوترون-پروتون» بعدها با تعداد مختلفی از واکنش‌های هسته‌ای تایید شد. این مدل همچنین طبیعتاً مشکلات مدل «الکترون-پروتون» را حل کرد [۱].

در این اثنا، پیشرفت‌های زیادی در جنبه نظری بالاخص در مکانیک کوانتومی در سال ۱۹۰۰ تا ۱۹۲۸ توسط انسانهای بزرگی مثل پلانک^۵ [۲]، دوبروی [۳]، شرودینگر^۶ [۴]، هایزنبرگ^۷ [۵] و

^۱ J.J. Thomson

^۲ F.W. Aston

^۳ L.de Broglie

^۴ J. Chadwick

^۵ M. Planck

^۶ E. Schrodinger

^۷ W. Heisenberg

دیراک^۱ [۶] اتفاق افتاد و در نتیجه یک چارچوب نظری برای درک ساختارهای میکروسکوپی چند جسمی نظیر اتم‌ها و مولکول‌ها ساخته شد و کاربرد این مفاهیم به هسته‌ها یک نتیجه منطقی شد. این پیشرفت نظری در توضیح ویژگیهای مشاهده شده هسته‌ها بر حسب برهم‌کنش نوترون‌ها و پروتون‌های داخل هسته (که نوکلئون نامیده شدند)، فرض می‌کند که یک چارچوب نظری مشابه آنچه پدیده های اتمی را توضیح می‌دهند، قابل استفاده در هسته-که یک سیستم بسیار کوچکتر است- باشد.

اکتشافات دهه‌های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ نشان دادند که مرتبه دیگری از ساختار ماده وجود دارد که از هسته هم بنیادی‌تر و ابتدایی‌تر است. امروزه بررسی و مطالعه این گونه ذرات که عناصر اصلی ساختار هسته‌ای هستند، در شاخه خاصی به نام فیزیک ذرات بنیادی (یا فیزیک انرژی بالا) دنبال می‌شود. بدین ترتیب فیزیک هسته‌ای را می‌توان از سویی فرزند شیمی و فیزیک اتمی و از سویی دیگر پدر فیزیک ذرات بنیادی به شمار آورد.

۱-۳) مقایسه ساختار هسته و اتم

در این قسمت به بعضی تشابهات و اختلافات ساختار هسته با ساختار الکترونی اتمها اشاره می‌کنیم. در یک اتم، الکترون‌ها در مدارها یا به بیان صحیح‌تر در حالت‌های انرژی، که تابع قوانین مکانیک کوانتومی هستند، آرایش می‌یابند و طبق اصل طرد پاولی^۲ بر روی چندین حالت توزیع می‌شوند. الکترون‌های اتمی را می‌توان به حالت‌هایی که در وضعیت عادی اشغال نشده‌اند برانگیخت و یا کاملاً از اتم خارج کرد و با استفاده از این پدیده‌ها می‌توان به ساختار الکترونی اتمها پی برد.

اما در هسته‌ها دو گروه ذرات شبیه به هم وجود دارند: پروتون‌ها و نوترون‌ها. هر کدام از این گروه ذرات بر اثر محدودیت‌های ناشی از اصل طرد پاولی «به طور جداگانه» بر روی حالت‌های انرژی معینی

¹ P.A.M. Dirac

² Pauli exclusion principle

توزیع می‌شوند. هسته‌ها دارای حالت‌های برانگیخته نیز هستند. می‌توان نوکلئون‌ها را از هسته جدا کرد و یا به آنها افزود.

ساختار هسته‌ها پیچیده‌تر از اتم‌هاست. در یک اتم، هسته مرکز جاذبه مشترکی برای الکترون‌هاست، در حالی که نیروهای بین الکترونی عموماً نقش ثانوی را بازی می‌کنند و نیروی غالب (کولنی) نیز به خوبی شناخته شده است. در هسته‌ها مرکز جاذبه وجود ندارد؛ نوکلئون‌ها توسط برهم‌کنش‌های دسته‌جمعی، که جزئیات آن بسیار مفصل است یکدیگر را نگه می‌دارند. با این همه همانطور که در فصل بعد خواهیم دید برد کوتاه نیروهای هسته‌ای و اصل طرد پاولی عواملی هستند که روی هم رفته یک مرکز نیروی موثر برای هر نوکلئون بوجود می‌آورند. همچنین الکترون‌های اتمی معرف یک گروه از ذرات شبیه به هم هستند؛ در صورتی که در هسته‌ها دو گروه مختلف ذرات شبیه به هم وجود دارند. این مطلب ساختارهای خیلی متنوع‌تری را ممکن می‌سازد. تقریباً ۱۰۰ نوع مختلف اتم وجود دارد ولی اکنون بیش از ۱۰۰۰ نوع ویژه هسته مختلف پیدا شده‌اند [۷].

۴-۱) خواص هسته‌ای

هسته هم مانند بسیاری از سیستم‌های پیرو قوانین مکانیک کوانتومی، جسمی پیچیده و اسرار آمیز است که توصیف رفتار و خواص آن خیلی دشوارتر از اجسام ماکروسکوپی است. مثلاً توصیف کامل یک هسته میان وزن ۵۰ نوکلئونی بر حسب کلیه برهم‌کنش‌های بین نوکلئون‌های موجود در هسته مستلزم تعداد ۵۰! عبارت یا در حدود $۱۰^{۶۴}$ جمله است [۸].

بنابراین باید رهیافتی متفاوت درپیش‌گرفت و مشخصات «کلی» هر سیستم هسته‌ای را به عنوان یک واحد جداگانه شناسایی کرد. اکنون سوالی که به وجود می‌آید این است که آیا خواص فیزیکی‌ای وجود دارند که بتوان با استفاده از آنها توصیف کاملی از هر هسته به دست آورد؟

می‌توان هسته‌ها را به کمک تعدادی از پارامترهای هسته‌ای، تا حد قابل توجهی توصیف کرد. این پارامترها به دو گروه عمده تقسیم می‌شوند: گروه اول، **خواص استاتیکی**^۱ هسته هستند که عبارتند از: بار الکتریکی، انرژی بستگی، جرم، شعاع، تکانه زاویه‌ای، پاریتته، گشتاور دوقطبی مغناطیسی، گشتاور چارقطبی الکتریکی و انرژی حالت‌های برانگیخته. گروه دوم **خواص دینامیکی**^۲ هسته‌ها مثل: احتمال واپاشی و احتمال واکنش آنها هستند. درک و تفسیر خواص استاتیکی و دینامیکی هسته‌ها بر پایه برهم‌کنش بین تک تک نوکلئون‌های موجود در هسته، موضوع بسیار مهمی است که هر متخصص فیزیک هسته‌ای باید با آن دست و پنجه نرم کند.

۱-۴-۱) جرم و انرژی بستگی^۳ هسته

انرژی متناظر به جرم هر هسته ($m_N c^2$) عبارت است از حاصل تفریق انرژی جرم اتمی آن هسته ($m_A c^2$) و انرژی جرمی Z الکترون و انرژی بستگی الکترونی کل آن:

$$m_N c^2 = m_A c^2 - Z m_e c^2 + \sum_{i=1}^Z B_i \quad (1-1)$$

که در آن B_i انرژی بستگی الکترون است. انرژی بستگی الکترونی در اتم‌های سنگین از مرتبه ۱۰ تا 100 keV است، در حالی که انرژی جرم اتمی از مرتبه 1000 MeV است. بنابراین با دقت حدود ۱ قسمت در 10^6 می‌توان از آخرین جمله معادله بالا صرف‌نظر کرد.

انرژی بستگی B عبارتست از اختلاف انرژی بین جرم هسته ${}^A_Z X_N$ و جرم کل پروتونها (Z پروتون) و نوترونهای تشکیل دهنده آن (N نوترون)

$$B = [Z m_p + N m_n - (m({}^A X) - Z m_e)] c^2 \quad (2-1)$$

که در آن شاخص پایین جرم اتمی m_A را حذف کرده‌ایم.

اگر مجموع جرم Z پروتون و Z الکترون را به صورت جرم Z اتم خنثای هیدروژن در نظر بگیریم،

¹ Static Properties

² Dinamical Properties

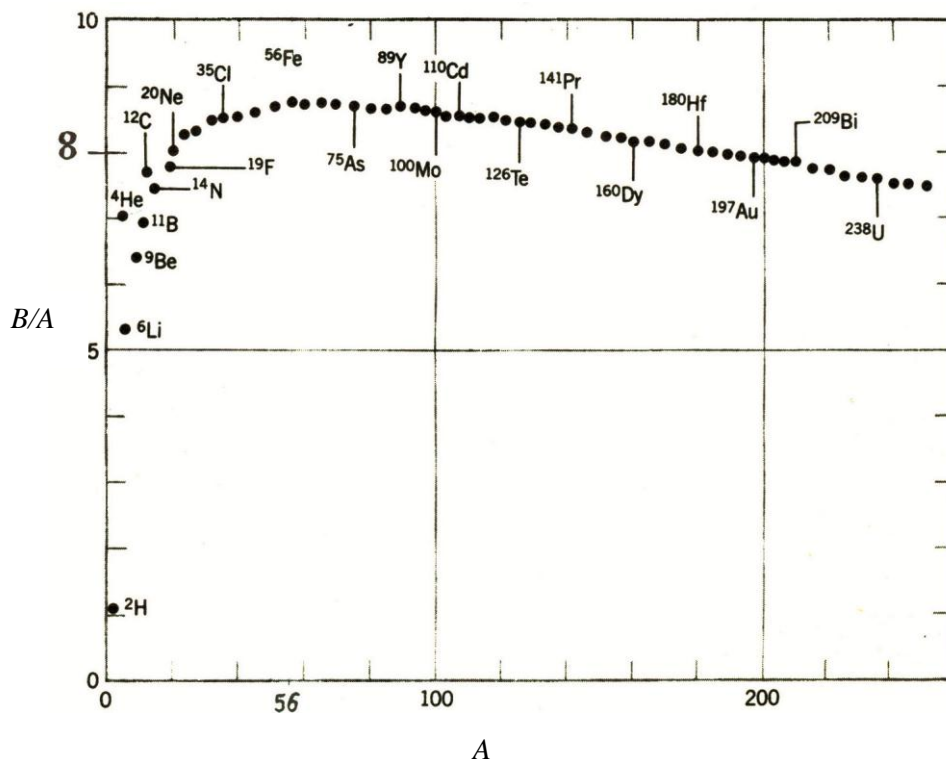
³ Binding Energy (B.E.)

معادله فوق چنین می شود:

$$B = [Zm(^1H) + Nm_n - m(^AX)]c^2 \quad (3-1)$$

با توجه به اینکه جرم‌ها معمولاً بر حسب یکای جرم اتمی بیان می‌شوند بهتر است که ضریب تبدیل c^2 را به صورت $c^2 = 931.50 \text{ MeV/u}$ در نظر بگیریم تا B بر حسب MeV حساب شود.

فرمول نیمه تجربی جرم: با بررسی نظم و ترتیب انرژی بستگی هسته‌ها می‌توان مدارک ارزنده‌ای از ساختار هسته به دست آورد. چون انرژی بستگی کم و بیش به طور خطی بر حسب A افزایش می‌یابد، عموماً در عمل انرژی بستگی متوسط هر نوکلئون یعنی B/A را به صورت تابعی از A نشان می‌دهند. در شکل (۱-۱) تغییرات B/A بر حسب عدد نوکلئونی نشان داده شده است. در این شکل، چند ویژگی مهم مربوط به هسته‌ها جلب توجه می‌کند. نخست اینکه منحنی جز در ناحیه هسته‌های بسیار سبک، مقدار نسبتاً ثابتی را نشان می‌دهد. انرژی بستگی متوسط بسیاری از هسته‌ها با تقریب ۱۰٪، در حدود 8 MeV برای هر نوکلئون است. دوم اینکه منحنی در نزدیکی $A=60$ قله پهنی دارد و در



شکل (۱-۱) انرژی بستگی متوسط نوکلئونها.

محور عمودی، انرژی بستگی متوسط B/A است و محور افقی عدد جرمی A است [۸].

همین ناحیه است که انرژی بستگی هسته‌ای به حداکثر می‌رسد. وجود این قله بدان معنی است که به دو طریق می‌توان به «تولید» انرژی دست یافت: در نواحی پایینتر از $A=60$ از طریق ترکیب هسته‌های سبک و تشکیل هسته‌های سنگین‌تر و در نواحی بالاتر از $A=60$ از طریق شکستن هسته‌های سنگین و تبدیل آن به هسته‌های سبکتر. در هر دو صورت باید «از منحنی انرژی بستگی بالا رفت» که این امر به آزاد سازی انرژی هسته‌ای منجر می‌شود. روش اول، همجوشی¹ هسته‌ای (یا گداخت هسته‌ای) و روش دوم، شکافت² هسته‌ای نام دارد. تلاش برای درک منحنی انرژی بستگی به فرمول نیمه تجربی جرم منتهی می‌شود که در ادامه با استفاده از چند پارامتر کلی، سعی می‌کنیم که تغییرات B را بر حسب A توضیح دهیم.

جمله حجمی: بدیهی‌ترین جمله‌ای که در برآورد عبارت B/A باید در نظر گرفت، جمله ثابت است؛ زیرا در تمام موارد داریم: $B \propto A$ ؛ بنابراین سهم این جمله «حجمی» را در انرژی بستگی به صورت $B = a_1 A$ می‌نویسیم که در آن a_1 مقدار ثابت قابل تعیین است (مقدار آن باید در حدود 8 MeV باشد). این بستگی خطی بین B و A که در واقع تا حدودی شگفت‌انگیز است، در جهت شناخت خواص نیروی هسته‌ای اولین رهنمودی است که در اختیار ما قرار می‌گیرد. اگر هر نوکلئون همه نوکلئون‌های دیگر موجود در هسته را جذب می‌کرد، آنگاه انرژی بستگی باید متناسب با $A(A-1)$ یا به تقریب متناسب با A^2 می‌شد. چون B به طور خطی بر حسب A تغییر می‌کند، این بدان معنی است که هر نوکلئون در هسته فقط نزدیکترین نوکلئون‌های اطرافش را جذب می‌کند و همه نوکلئون‌های دیگر را جذب نمی‌کند (خاصیت اشباع پذیری). از آزمایش‌های پراکندگی الکترون معلوم شده است که چگالی هسته‌ای تقریباً ثابت است، یعنی تعداد نوکلئون‌های موجود در اطراف هر نوکلئون تقریباً ثابت می‌ماند. بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم که سهم هر نوکلئون در انرژی بستگی هسته تقریباً مقداری ثابت است.

¹ Fusion

² Fission

جمله سطحی: نوکلئونی که در سطح هسته قرار گرفته است، از شمول حکم فوق مستثنی است؛ زیرا چنین نوکلئونی را همسایه‌های کمتری احاطه کرده‌اند و به همین دلیل بستگی آن به هسته از نوکلئون‌های مرکزی کمتر است. سهم نوکلئون‌های سطحی در انرژی بستگی B به همان میزان نوکلئون‌های مرکزی نیست و چون در رابطه $B = a_1 A$ این نکته در نظر گرفته نشده است، مقدار B در آن بیش از حد لازم برآورد شده است. بنابراین از این مقدار B باید جمله‌ای را که متناسب با مساحت سطح هسته است کسر شود. چون شعاع هسته $R \propto A^{1/3}$ است، مساحت سطح هسته متناسب با R^2 یا $A^{2/3}$ می‌شود. بنابراین سهم نوکلئون‌های سطحی هسته را در انرژی بستگی باید به صورت $-a_s A^{2/3}$ در نظر گرفت.

جمله کولنی: در فرمول انرژی بستگی، دافعه کولنی پروتون‌ها را نیز باید در نظر گرفت که این مولفه هم در جهت تضعیف انرژی بستگی هسته عمل می‌کند. چون هر پروتون همه پروتون‌های موجود در هسته را دفع می‌کند، این جمله متناسب با $Z(Z-1)$ می‌شود که با فرض هسته به شکل کره باردار یکنواخت، مقدار دقیق این جمله را می‌توان به صورت $(3/5)(ke^2 / R_0)Z(Z-1) / A^{1/3}$ محاسبه کرد که در آن علامت منفی به معنی کاهش انرژی بستگی در اثر این جمله است. با در نظر گرفتن $R_0 = 1.2 \text{ fm}$ ، مقدار ثابت این جمله 0.72 MeV به دست می‌آید که با جانشین کردن آن بایک ثابت کولنی کلی a_0 می‌توان آن را به شکل ساده‌تر نوشت.

جمله تقارنی: از چگونگی توزیع ایزوتوپ‌های پایدار و رادیواکتیو معلوم شده است که در هسته‌های پایدار، $Z \cong A/2$ است. اگر بخواهیم فرمول انرژی بستگی توصیف واقع بینانه‌ای از هسته‌های پایدار به دست بدهد، خاصیت $Z \cong A/2$ هم باید در نظر گرفته شود (در غیر این صورت بنا بر پیش‌بینی این فرمول، وجود ایزوتوپ‌های پایدار هیدروژن با صدها نوترون هم امکان پذیر می‌شود!). این جمله انرژی بستگی، برای هسته‌های سبک که در آنها رابطه $Z \cong A/2$ بیشتر رعایت می‌شود، اهمیت زیادی دارد. این جمله در هسته‌های سنگین اهمیت کمتری دارد؛ زیرا افزایش سریع دافعه کولنی مستلزم نوترون‌های اضافی است تا به این وسیله پایداری هسته تضمین شود. این جمله را که به خاطر تأثیرش در

مقارن نگه داشتن هسته از لحاظ تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها جمله تقارن نامیده می‌شود، می‌توان به صورت $-a_{sym}(A-2Z)^2/A$ نوشت که شکل آن به علت ترجیح هسته‌های مقارن ($Z=A/2$) و هم به علت کاهش وزن در موارد A بزرگ قابل قبول است.

جمله تزویج: سرانجام جمله دیگری را هم باید در نظر گرفت که تمایل نوکلئون‌های مشابه را به تشکیل زوج و تحکیم پیکربندی پایدار هسته‌ای نشان دهد. هنگامی که با تعداد فرد نوکلئون‌ها (Z فرد و N زوج یا Z زوج و N فرد) سروکار داشته باشیم، این جمله نقشی در انرژی بستگی ندارد. اما اگر Z و N هر دو فرد باشند، انرژی بستگی هسته با تبدیل یکی از پروتون‌های فرد به نوترون (یا برعکس) و قابلیت تزویج نوترون جدید با نوترونی که در هسته به صورت منفرد باقی مانده بود افزایش خواهد یافت. صرفاً با توجه به هسته‌های پایداری که در طبیعت یافت می‌شوند، می‌توان شواهدی دال بر وجود نیروی تزویج در هسته‌ها به دست آورد. تعداد هسته‌های با Z و N فرد در طبیعت فقط ۴ تاست (2H ، 6Li ، ${}^{10}B$ و ${}^{14}N$) ولی تعداد هسته‌های با Z و N زوج ۱۶۷ تاست. انرژی تزویج δ را معمولاً برای Z و N زوج به صورت $+a_p A^{-3/4}$ ، برای Z و N فرد به صورت $-a_p A^{-3/4}$ و برای A فرد برابر صفر در نظر می‌گیرند.

از ترکیب تمام این پنج جمله، فرمول کامل انرژی بستگی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z(Z-1)A^{-1/3} - a_{sym} (A-2Z)^2 / A + \delta \quad (۴-۱)$$

و با به کار بردن این انرژی بستگی، فرمول نیمه تجربی جرم چنین بدست می‌آید:

$$M(Z,A) = Zm({}^1H) + Nm_n - B(Z,A)/c^2 \quad (۵-۱)$$

ضرایب ثابت را باید چنان انتخاب کرد که حداکثر سازگاری بین این فرمول و منحنی تجربی شکل

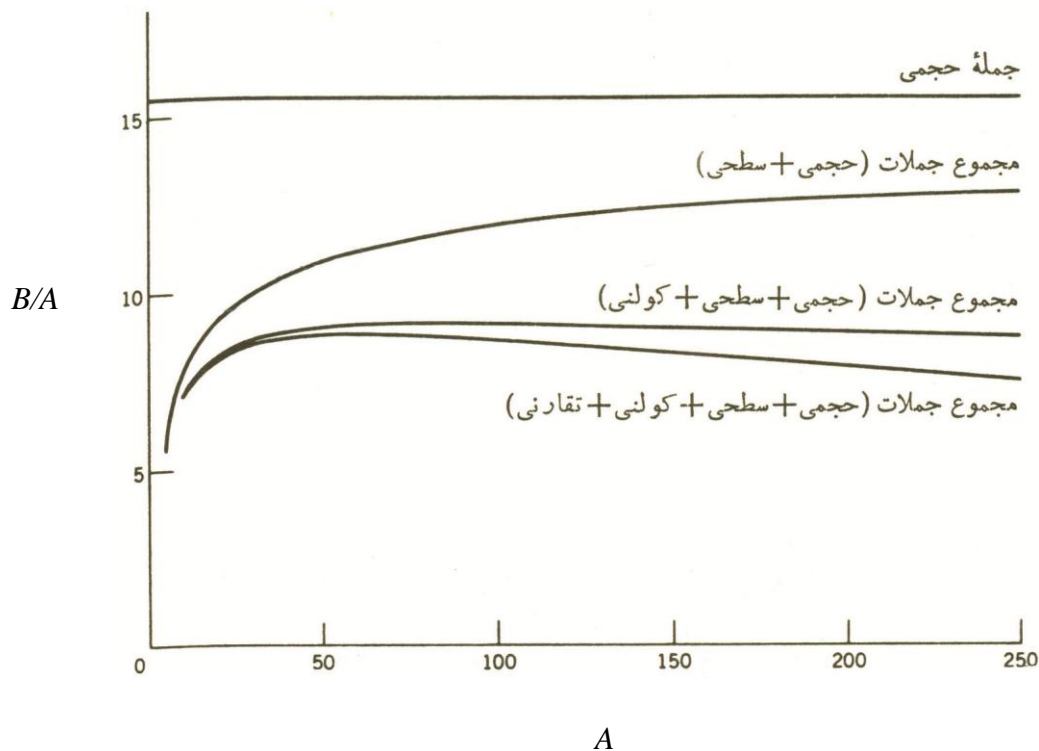
(۱-۱) حاصل شود. گزینش خاصی از این مقادیر ثابت بصورت $a_s=16.8 \text{ MeV}$ ، $a_v=15.5 \text{ MeV}$

$a_c=0.72 \text{ MeV}$ و $a_{sym}=23 \text{ MeV}$ و $a_p=34 \text{ MeV}$ است که منحنی نمایش هر یک از جملات حاصل از

این مقادیر و همچنین مقادیر جمعی آنها که چگونگی تغییرات B را نسبتاً خوب پیش بینی می‌کند،

در شکل (۲-۱) نشان داده شده است. اهمیت فرمول نیمه تجربی جرم در این نیست که با استفاده از

آن بتوان هر پدیده جدید یا عجیب و غریبی را در فیزیک هسته‌ای پیش بینی کرد، بلکه این فرمول را باید نخستین تلاش در کاربرد مدل‌های هسته‌ای (بخش ۱-۵) برای درک قانونمند یکی از خواص هسته که در این مورد همان انرژی بستگی است، تلقی کرد.



شکل (۱-۲) سهم جملات فرمول نیمه تجربی جرم در انرژی بستگی متوسط نوکلئون‌ها [۸]

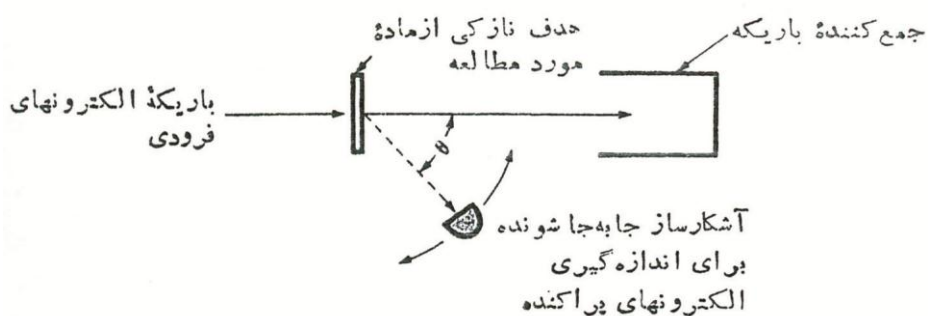
۱-۴-۲) اندازه هسته

یکی از روش‌های مستقیم برای مطالعه شکل و اندازه هسته‌ها اندازه‌گیری پدیده‌های ایجاد شده در اثر پرتاب ذرات به طرف آنهاست؛ ولی محدودیتی در این روش وجود دارد: طول موج ذراتی که با هسته برخورد می‌کنند باید تقریباً از مرتبه اندازه هسته و یا کوچکتر از آن باشد. از آنجا که طول موج معمولی (حدود 10^{-7} متر) چندین برابر ابعاد هسته است، برای این منظور مناسب نخواهد بود. فوتون‌های با طول موج خیلی کوچک مثل پرتوهای گاما نیز قابل استفاده نیستند؛ زیرا در اطراف هسته الکترون‌ها وجود دارند و برهم‌کنش امواج الکترومغناطیس با الکترون‌ها خیلی قوی‌تر از برهم‌کنش این امواج با هسته است؛ در این صورت بهتر است از ذراتی مثل الکترون‌ها، پروتون‌ها و نوترون‌ها استفاده شود که در واقع هر سه این ذرات به کارگرفته می‌شوند. نوترون‌ها و پروتون‌ها این مزیت را دارند که

طول موجشان در انرژی های حدود 20 MeV به اندازه کافی کوتاه است در صورتی که الکترون ها برای داشتن طول موج مناسب به انرژی های حدود 100 MeV نیاز دارند که بدست آوردن آن خیلی دشوار است. اما الکترون ها این مزیت را دارند که برهم کنش آنها با هسته (برهم کنش الکترومغناطیسی) به خوبی شناخته شده است؛ لذا دقیق ترین نتایج با پراکندگی الکترون به دست می آید.

آزمایشها به این ترتیب انجام می گیرند که الکترون های با انرژی زیاد به طرف یک هدف نازک از ماده مورد نظر پرتاب می شود و احتمال انحرافشان تحت زوایای مختلف همانطور که در شکل (۳-۱) نشان داده شده است اندازه گیری می شود. این آزمایشها شبیه آزمایش پراکندگی رادرفورد هستند که اولین بار هسته اتم توسط آن کشف شد.

در شکل (۴-۱) نمونه ای از نتایج این آزمایشها دیده می شود. اگر برای نوکلئون های هسته، تابع توزیع

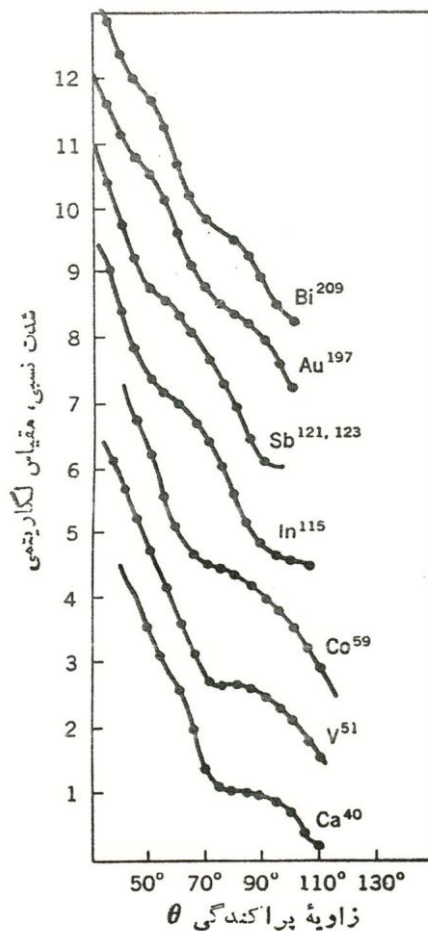


شکل (۳-۱) ترتیب آزمایش اندازه گیری تغییرات زاویه پراکندگی الکترون از هسته [۹].

چگالی $\rho(r)$ را در نظر بگیریم و فرض کنیم که توزیع چگالی نوترون ها و پروتون ها یکسانند می توان احتمال انحراف های زاویه ای مختلف را محاسبه و با نتایج تجربی مقایسه کرد. اگر محاسبات با نتایج تجربی وفق ندهد، باید تابع توزیع چگالی $\rho(r)$ دیگری در نظر گرفت تا برازش بهتری به دست آید. آزمایش هایی برای تعداد زیادی از هسته ها با استفاده از الکترون های فرودی در انرژی های مختلف انجام شده و مورد تحلیل قرار گرفته اند. تمام نتایج به دست آمده تقریباً با تابع توزیع بار زیر قابل توجیه هستند:

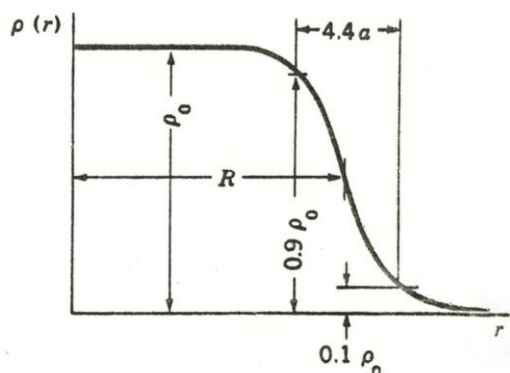
$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp[(r - R)/a]} \quad (۶-۱)$$

ترسیمی از تابع (۶-۱) در شکل (۵-۱) به نمایش درآمده است و معنی فیزیکی پارامترهای مختلف آن



شکل (۴-۱) توزیع زاویه‌ای پراکندگی الکترونهای 185 MeV از هسته‌های مختلف [۹].

مشخص شده است. به طوری که مشاهده می‌شود ρ_0 چگالی نوکلئون در نزدیکی مرکز هسته است. R فاصله‌ای است که در آن چگالی هسته به نصف مقدارش در مرکز تقلیل می‌یابد و a ضخامت سطحی هسته را نشان می‌دهد که در آن فاصله‌ای که چگالی از ۹۰ درصد ρ_0 به ۱۰ درصد ρ_0 تقلیل می‌یابد، برابر با $4.4a$ است. برازش اطلاعات به دست آمده از رابطه (۶-۱) در شکل (۴-۱) با خطوط پر نشان داده شده است و در شکل (۶-۱) منحنی‌های توزیع چگالی تعیین شده از همین برازش‌ها نمایش داده شده است. این منحنی‌ها به پرسش‌های ما درباره اندازه و توزیع چگالی هسته‌ها پاسخ می‌دهند و جالب است ببینیم که چه اطلاعات سیستماتیکی را می‌توان از این برازش‌ها به دست آورد؟



شکل (۵-۱) تابع توزیع چگالی هسته برحسب شعاع [۹].

معلوم شده است که رابطه (۶-۱) با تقریب نسبتاً خوبی برای تمام هسته ها با پارامترهای زیر برقرار

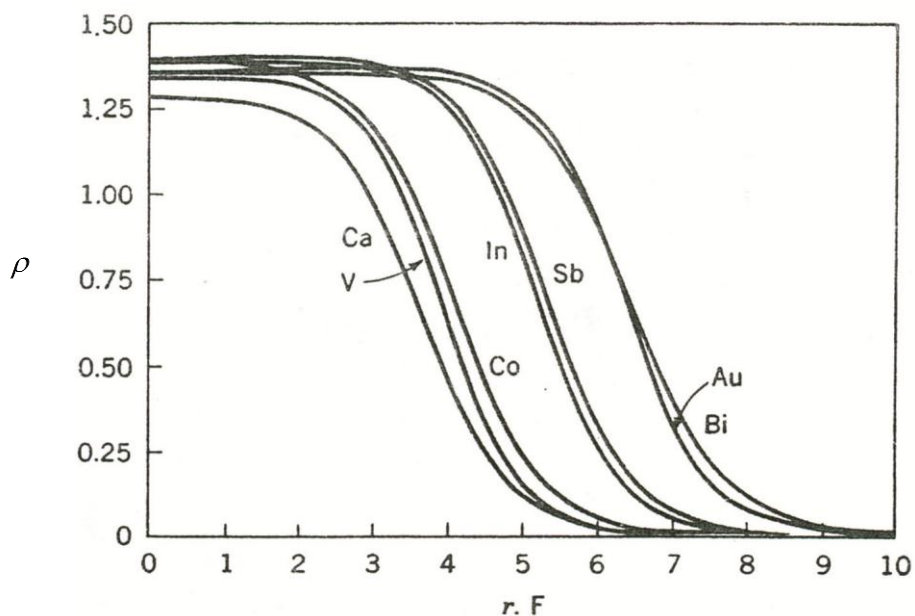
است:

$$\rho_0 \cong 0.165 \text{ (Nucleons / fm}^3\text{)}$$

$$R \cong 1.07 A^{1/3} \text{ (fm)}$$

$$a \cong 0.55 \text{ (fm)}$$

(۷-۱)



شکل (۶-۱) چگالی نوکلئونها در هسته های مختلف که از برازش اطلاعات تجربی شکل (۴-۱) به دست آمده اند [۹].

این نتایج بسیار ساده نشان می‌دهد که چگالی نوکلئون‌ها در نواحی داخلی تمام هسته‌ها یکسان و ضخامت سطحی آنها بسیار شبیه به هم است. این امر در شکل (۱-۶) به روشنی دیده می‌شود. تغییرات شعاع هسته (که اغلب با R نشان داده می‌شود) را که تابعی است از $A^{1/3}$ می‌توان نتیجه‌ای از ثابت بودن ρ_0 دانست؛ چون در این صورت حجم هسته با A متناسب می‌شود و لذا A با R^3 متناسب خواهد شد.

۱-۵) مدل‌های هسته‌ای

قسمت قابل توجهی از اطلاعات ما در ارتباط با نیروی هسته‌ای از بررسی هسته‌های سبکی مثل دوتریوم حاصل شده است. وقتی می‌خواهیم هسته‌های سنگین‌تر را مطالعه کنیم، از همان آغاز به چند مشکل بنیادی برخورد می‌کنیم. یکی از مشکلات این است که ریاضیات حل مسائل چند جسمی دشوار است. اگر در این مورد هم برای پتانسیل هسته‌ای شکل فوق العاده ساده‌ای مانند پتانسیل چاه مربعی یا پتانسیل نوسانگر ساده را در نظر بگیریم، در اساس برای توصیف برهم‌کنش متقابل A نوکلئون می‌توان یک دستگاه معادلات مرتبط به دست آورد. این دستگاه معادلات را نمی‌توان به طور تحلیلی حل کرد؛ بلکه با استفاده از روشهای عددی باید به حل آن پرداخت. مشکل دوم مسئله به ماهیت سه جسمی بودن نیروی هسته‌ای مربوط می‌شود که در فصل دو به آن اشاره‌ای خواهیم کرد.

بنابراین برای بررسی هسته‌ها رهیافت دیگری را در پیش گرفت؛ یعنی یک نظریه فوق‌العاده ساده که از لحاظ ریاضی بدون مشکل و از لحاظ فیزیکی غنی باشد. اگر این نظریه در توصیف حداقل چند خاصیت هسته‌ای نسبتاً موفق باشند آنگاه با افزودن جمله‌های اضافی می‌توان آن را تکمیل کرد. بدین ترتیب یک «مدل هسته‌ای» به وجود می‌آید؛ یعنی چشم انداز ساده‌ای از ساختار هسته که متضمن خصوصیات اصلی فیزیک هسته‌هاست. یک مدل موفق باید:

الف- بتواند خواص هسته‌ای اندازه‌گیری شده را به طور قابل قبولی توضیح دهد.

ب- خواص دیگری را پیش‌بینی کند که در آزمایشهای جدیدی قابل اندازه‌گیری باشد.

۱-۵-۱) مدل قطره مایع^۱

نخستین مدل ساختار هسته‌ای که بسیار گسترش یافت مدل قطره مایع بود این مدل از ایده هسته مرکب^۲ نیلز بور الهام گرفته شده بود که می‌گفت وقتی یک نوکلئون وارد یک هسته می‌شود ویژگی‌های حرکت انفرادی خود را به خاطر برهم‌کنش بسیار قوی نوکلئون- نوکلئون داخل هسته از دست می‌دهد. به همین دلیل در این مدل حرکت نوکلئون‌های منفرد در داخل هسته اهمیتی ندارد، در عوض ماده هسته‌ای مانند یک قطره مایع باردار رفتار می‌کند و باید حرکت کلی مایع را برای محاسبه ویژگی‌های مختلف هسته در نظر گرفت. مدل قطره مایع توسط وایزاکر^۳ و برای یافتن جرم‌های هسته‌ای و انرژی‌های بستگی بر حسب پارامترهای ماکروسکوپی نظیر انرژی حجمی، انرژی سطحی، انرژی کولنی، انرژی تزویج و ... هسته با در نظر گرفتن هسته به صورت یک قطره مایع توسعه یافت. آخرین نسخه این مدل- یعنی مدل جمعی^۴ - که توسط راین واتر^۵، ا. بور^۶ و ب. ماتلسن^۷ گسترش یافت به فهم حرکات ارتعاشی و چرخشی در هسته کمک کرد.

با همه اینها، مدل‌های جمعی و قطره مایع نتوانستند خواص هسته‌های خیلی پایداری را که تعداد پروتون‌ها یا نوترون‌های آنها برابر با یکی از اعداد جادویی ۲، ۸، ۲۰، ۵۰، ۸۲، ۱۲۶ بود را توضیح دهند. این مساله به طرز موفقیت آمیزی توسط «مدل لایه‌ای» توضیح داده شد و توسط مایر^۸ و جنسن^۹ توسعه و البته بعدها توسط افراد دیگری اصلاح یافت [۱].

۱-۵-۲) مدل لایه‌ای^{۱۰}

بر طبق مدل لایه‌ای، نوکلئونهای یک هسته، خودشان را در گروهی از حالات انرژی (لایه‌ها) طوری

¹ Liquid Drop Model

² Compound Nucleos

³ C.F. Von Weizsacker

⁴ Collective Model

⁵ J. Rinwater

⁶ A. Bohr

⁷ B. Mottleson

⁸ M.G. Mayer

⁹ J.H.D. Jenson

¹⁰ Shell Model

جای می‌دهند که لایه‌های بسته در هسته‌های جادویی مشابه لایه‌های بسته اتمی در گازهای نجیب می‌شود. برای ایجاد یک چنین مدل لایه‌ای، فرض می‌شود که هر نوکلئون در پتانسیل عمومی $V(r)$ - که توسط سایر نوکلئونها ایجاد شده است به اضافه یک قسمت اسپین مدار $V_{ls}(r)L \cdot S$ - حرکت می‌کند. بالطبع در این مدل، اعداد جادویی و نیز اسپین حالت پایه تقریباً همه هسته‌ها توجیه می‌شود. با همه اینها این مدل (که مدل ذره بسیار منفرد^۱ هم نامیده می‌شود) در توضیح گشتاور مغناطیسی، گشتاور چهارقطبی و انرژی‌های بستگی هسته در حالت پایه و نیز بسیاری از خواص حالات برانگیخته هسته‌ها ناتوان است.

در اینجا بد نیست یادآوری کنیم که سه جمله اول رابطه (۴-۱) که در بخش (۱-۳-۱) بررسی شد، در واقع متضمن مدل قطره مایع (این سه جمله در محاسبه انرژی یک قطره مایع باردار هم ظاهر می‌شود.) و دو جمله آخر آن نیز با استفاده از مدل لایه‌ای قابل محاسبه است.

اصلاحات اساسی مختلفی در برهم کنش نوکلئون‌های منفرد^۲ در خارج لایه‌ها لحاظ شده است. خود شکل پتانسیل عمومی^۳ در مورد هسته‌های تغییرشکل‌یافته اصلاح شده است طوری که نوکلئونهای منفرد به جای پتانسیل کروی مدل لایه‌ای ساده تحت یک پتانسیل بیضوی حرکت می‌کنند. معرفی پتانسیل بیضوی متناظر است با شناسایی اثر جمعی هسته منفرد. این «یگانگی» بین مدل لایه‌ای و مدل جمعی که توسط نیلسون و افراد دیگری به ویژه دیوداف^۴ و فیلیپاف^۵ بسط یافت، یافت، در توضیح خواص حالات برانگیخته هسته‌های تغییر شکل‌یافته سودمند است [۱].

۱-۶) نیروی هسته‌ای

اصولاً سیستم‌ها با نیرو کنار هم نگه داشته می‌شوند. نیروهایی که در فیزیک کلاسیک و اتمی با آن مواجهیم به ترتیب نیروهای گرانشی و الکترومغناطیسی هستند. آیا این نیروها می‌توانند نوکلئونها را

¹ Extreme Single Particle Model

² Loose Nucleons

³ Common Potential

⁴ A.S. Davidov

⁵ G.F. Philipov

نیز در کنار هم نگه‌دارند؟ مطمئناً نیروی الکترومغناطیسی نمی‌تواند؛ زیرا نوترون‌ها بار الکتریکی ندارند و نیروی الکترومغناطیسی به هیچ وجه نمی‌تواند اثری بر آنها داشته باشد. نیروی الکترومغناطیسی بین پروتون‌ها نیز یک نیروی دافعه کولنی قوی است که باعث از هم پاشیدگی هسته می‌شود. نیروی گرانشی بین هر جفت از نوکلئون‌ها به صورت جاذبه است؛ اما این نیرو 10^{36} مرتبه از نیروی الکتریکی موجود بین پروتون‌ها کوچکتر است. بنابراین اثر آن در تمام پدیده‌های هسته‌ای و اتمی کاملاً قابل اغماض است. بنابراین، این دو نیرو نمی‌توانند علت وجود هسته و انسجام آن باشند. تنها راه توجیه این است که وجود نیروی دیگری را در طبیعت بپذیریم که به آن نیروی هسته‌ای می‌گویند. در جدول (۱-۱) قدرت نسبی چهار نیروی بنیادی شناخته شده در طبیعت به همراه نظریه فیزیکی مرتبط و ذره واسطه در هر برهم‌کنش، لیست شده است. البته در این تحقیق فقط «نیروی هسته‌ای قوی» بررسی می‌شود که برای سادگی از آن فقط با نام «نیروی هسته‌ای» یاد برده می‌شود.

ساده‌ترین موردی که نیروی هسته‌ای در آن اثر می‌کند هنگامی است که تنها دو نوکلئون برهم‌کنش داشته باشند که در عمل در دو وضعیت پیش می‌آید:

جدول (۱-۱) نیروهای بنیادی شناخته شده در طبیعت [۱۰].

نیرو	قدرت	نظریه	واسطه
هسته‌ای قوی	10	دینامیک رنگ ^۱	گلوئون ^۲
الکترومغناطیس	10^{-2}	الکترو دینامیک ^۳	فوتون ^۴
هسته‌ای ضعیف	10^{-13}	دینامیک طعم ^۵	Z و W
گرانشی	10^{-42}	دینامیک هندسی ^۶	گراویتون ^۷

¹ Chromodynamics

² Gluon

³ Electrodynamics

⁴ Photon

⁵ Flavordynamics

⁶ Geometrodynamics

⁷ Graviton

الف) هنگامی که نوترون و پروتون به هم مقیدند (مانند یک دوترون).

ب) در برخورد های میان دو نوکلئون که معمولا به آنها فرآیندهای پراکندگی گفته می شود.

حتی بدون انجام هر گونه آزمایشی برای بررسی نیروی بین دو نوکلئون، می توان بعضی از خواص نیروی نوکلئون - نوکلئون را حدس زد:

۱) این نیرو در فواصل کوتاه قوی تر از نیروی کولنی است، زیرا نیروی هسته ای می تواند بر دافعه کولنی پروتون ها در هسته غلبه کند.

۲) نیروی هسته ای در فواصل بلندی که در حدود ابعاد اتمی باشد، به حدی ضعیف می شود که می توان از آن صرف نظر کرد. برهم کنش هسته های موجود در یک مولکول با یکدیگر فقط بر اساس نیروی کولنی قابل درک است.

۳) بعضی از ذرات تحت تاثیر نیروی هسته ای قرار نمی گیرند؛ برای نمونه هیچ دلیلی از ساختار اتمی در دست نیست که نیروی هسته ای تاثیر روی الکترون ها داشته باشد.

در فصل بعد، مبحث نیروی هسته ای را به طور کاملتر و البته با رویکرد « پتانسیل های هسته ای » مورد بررسی قرار خواهیم داد.

فصل دوم

نیرو

و

پتانسیل هسته‌ای

۲-۱) مقدمه

در این فصل ابتدا خواص نیروی هسته‌ای و بعد از آن ویژگیهای پتانسیل مناسب هسته‌ای را مورد بررسی قرار خواهیم داد؛ زیرا مکانیک کوانتومی بر اساس پتانسیل فرمولبندی شده است. در ادامه مدل نیروی تبادل (که متضمن بسیاری از خصوصیات نیروی هسته‌ای است) و پتانسیلهای معروف یوکاوا و هامادا-جانسون را شرح می‌دهیم و با الهام از رفتار این پتانسیلها، در بخش پایانی این فصل پتانسیل استفاده شده در این کار؛ یعنی پتانسیل *Mie-type* را معرفی خواهیم کرد.

۲-۲) ویژگیهای نیروی هسته‌ای

بر پایه خواص هسته‌ها در انرژی‌های پایین، بسیاری خصوصیات نیروی هسته‌ای قابل بررسی

است. با اضافه شدن نتایج آزمایش‌های انجام شده در انرژی‌های بالاتر، جزئیات بیشتری از نیروی هسته‌ای روشن می‌شود. در اینجا، ویژگی‌های اصلی نیروی بین نوکلئون‌ها را شرح می‌دهیم.

۲-۲-۱) جاذب و مرکزی بودن

برهم‌کنش بین نوکلئون از پایینترین مرتبه پتانسیل مرکزی جاذبه‌ای حاصل می‌شود. می‌توان این پتانسیل را به صورت چاه مربعی در نظر گرفت. این فرض باعث سادگی محاسبات می‌شود و اطلاعات تجربی را به خوبی بازتولید می‌کند. به همین ترتیب می‌توان دیگر صورت‌های واقع بینانه‌تر پتانسیل را در نظر گرفت ولی در نتیجه‌گیری‌های اصلی تغییری حاصل نمی‌شود. ویژگی مشترک همه این پتانسیلها در بستگی انحصاری آنها به فاصله بین نوکلئونی r است. به همین دلیل این عبارت مرکزی را به صورت $V_c(r)$ نشان می‌دهیم. برای بررسی $V_c(r)$ ، وابستگی انرژی پارامترهایی نظیر اختلاف فازهای پراکندگی را اندازه‌گیری می‌کنند و آنگاه شکل $V_c(r)$ را چنان انتخاب می‌کنند که به بهترین وجهی این پارامترها را بازتولید کند.

۲-۲-۲) وابستگی به اسپین

برهم‌کنش نوکلئون- نوکلئون قویا وابسته به اسپین است. این نتیجه‌گیری از عدم موفقیت در مشاهده حالت مقید تک تایه دوترون و همچنین از اندازه‌گیری اختلاف سطح مقطع‌های حالت‌های تک و سه تایه حاصل شده است.

تکانه زاویه‌ای کل یک هسته برابر است با حاصلجمع برداری دو تکانه زاویه‌ای مداری و اسپینی:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I} + \mathbf{S} \quad (1-2)$$

که S عدد کوانتومی اسپین کل است. تکانه زاویه‌ای کل \mathbf{I} دوترون با روشهای مختلف از جمله با استفاده از ساختار فوق‌ریز در طیف‌نمایی نوری اندازه‌گیری شده است. نتیجه به دست آمده

عبارتست از: $I=1$ چون اسپین نوترون و پروتون هر دو برابر $\frac{1}{2}$ است، پس:

$$S = 1 \text{ یا } 0 \quad (2-2)$$

حال می‌توان این دو حالت را به عنوان اسپین‌های موازی و پادموازی فرض کرد. پایین‌ترین حالت انرژی سیستم عبارتست از حالت $1s(l=0)$. پس از رابطه (۲-۱) بدست می‌آید: $S=1$.

اما انرژی حالت‌های دیگر سیستم نوترون-پروتون چقدرند؟ حالت‌های $l>0$ و $n>1$ در انرژی‌های نسبتاً بالاتری قرار دارند؛ بنابراین با در نظر گرفتن این امر که پایین‌ترین حالت به سستی مقید است، احتمالاً این حالت‌ها باید نامقید باشند. ولی درباره $1s$ چطور؟ حالت $S=0$ حالتی است که فرق آن با حالت پایه فقط در پادموازی بودن اسپین‌های نوترون و پروتون است. ظاهراً انرژی این حالت آنقدر بالا هست که نامقید باشد. به کمک آزمایش‌های پراکندگی به وجود این حالت پی‌برده شد و نتیجه‌گیری شده است که فاصله این حالت از حالت نامقید تنها برابر 60 keV است. ولی نکته مهم این است که در اینجا وضعیتی داریم که اختلاف انرژی حالت‌ها، ناشی از موازی یا پادموازی بودن اسپین‌هاست. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که نیروی میان نوترون و پروتون بستگی به اسپین دارد؛ یعنی بستگی به آن دارد که اسپین‌ها موازی هستند یا پاد موازی (اسپین کل آنها $S=1$ است یا $S=0$)؟ پس نیروی هسته‌ای مانند نیروی کولنی و نیروی گرانشی نیست که تنها تابعی از r باشد؛ بلکه به چیزهای دیگری نیز بستگی دارد.

اثرهای اصل طرد پاولی: سیستم‌های دونوترونی و دوپروتونی در حالت‌های پایدار مشاهده نشده‌اند؟ آیا این بدین معناست که نیروی هسته‌ای میان دو نوترون با نیروی بین نوترون و پروتون فرق دارد؟ جواب این سوال، منفی است ولی برای درک مسئله باید اصل طرد پاولی را به حساب آورد که بر اساس آن، تابع موج فرمیونها (از جمله نوکلئون‌ها) یکسان، باید نسبت به تعویض آنها پاد-متقارن باشد. قسمت فضایی تابع موج یک سیستم دونوکلئونی در مختصات کروی چنین است:

$$\psi(\text{spatial}) \propto \frac{u_l(r)}{r} P_{lm_l}(\theta) e^{im_l\phi} \quad (۳-۲)$$

(به علت استفاده از دستگاه مختصات مرکز جرم، دیگر صریحاً r_1 و r_2 وجود ندارند). در این حالت مبادله دو ذره همچون انعکاس حول مبدا است که در آن متقارن یا پادمتقارن بودن قسمت فضایی تابع موج بستگی به این دارد که آیا تابع موج با این تبدیل تغییر علامت می‌دهد یا خیر؟

برای تمام مقادیر l تابع موج تغییر علامت می‌دهد، در صورتی که برای مقادیر زوج l تغییری حاصل نمی‌شود. بنابراین نتیجه می‌گیریم که تابع موج در مختصات فضایی برای l زوج، متقارن و برای l فرد، پادمتقارن است. مشاهده می‌کنیم که تنها تابع موجهای با l زوج و $S=0$ (تقارن فضایی، پادمتقارن بودن اسپین) یا l فرد و $S=1$ (پادمتقارن بودن فضایی و تقارن اسپین)، اصل طرد پاولی را برای نوکلئون‌های مشابه برقرار می‌سازند. این حالتها، حالت‌های $T=1$ نامیده می‌شوند که T اسپین ایزوباری است. حالت‌های دیگر سیستم دو نوکلئونی یعنی آنهایی که دارای l زوج و $S=1$ یا l فرد و $S=0$ هستند، حالت‌های $T=0$ نامیده می‌شوند. می‌بینیم که حالت‌های $T=1$ برای هر سه سیستم دو نوکلئونی پروتون- پروتون و نوترون- نوترون و نوترون- نوترون وجود دارد؛ در صورتی که حالت‌های $T=0$ تنها برای سیستم پروتون- نوترون موجود است؛ زیرا این سیستم شامل دو ذره مشابه نمی‌شود و لذا نیازی به برقراربودن اصل طرد پاولی ندارد. حالت پایه دوترون ($l=0, S=1$) آشکارا یک حالت $T=0$ است و قبلا گفتیم که پایین‌ترین انرژی حالت $T=1$ دوترون، ($l=0, S=0$) نامقید است. بنابراین تعجب‌آور نیست که پایین‌ترین انرژی حالت‌های سیستم‌های دو - نوترونی و دو پروتونی که در آنها $T=1$ می‌شود نیز نامقید باشند. این امر که در سیستم‌های دو نوترونی و دو پروتونی حالت‌های مقید وجود ندارد بدان معنی نیست که نیروی هسته‌ای میان نوترون و پروتون با نیروی هسته‌ای میان دو نوترون یا دو پروتون متفاوت است. این تنها نشانه‌ای از وجود اصل طرد پاولی است.

اما اگر بخواهیم این موضوع را به صورت یک جمله اضافی در پتانسیل بیاوریم، شکل آن باید چگونه باشد؟ روشن است که این جمله باید به اسپین S_1 و S_2 نوکلئون‌ها بستگی داشته باشد، ولی همه ترکیب‌های S_1 و S_2 مجاز نیستند. نیروی هسته‌ای باید متضمن بعضی از تقارن‌ها باشد، که این امر منجر به محدودیت شکل پتانسیل می‌شود. انعکاس پاریته ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) و وارونی زمان¹ ($t \rightarrow -t$) را می‌توان به عنوان نمونه‌هایی از این تقارن‌ها نام برد. آزمایش نشان می‌دهد که پتانسیل

¹ Time Reversal

بین نوکلئونی نسبت به این دو عملیات تا حد زیادی (برای پاریده با دقت یک در 10^7 و برای برگشت زمان یک در 10^3 قسمت) ناورداست. در اثر عملگر پاریده که متضمن انعکاس فضایی است، بردار تکانه زاویه‌ای بدون تغییر می‌ماند. این گفته ممکن است تا حدی عجیب به نظر بیاید زیرا طبیعی است که با معکوس شدن دستگاه مختصات، تمام بردارهای تعریف شده در آن دستگاه نیز وارونه می‌شوند؛ اما تکانه زاویه‌ای از جنس بردار حقیقی یا بردار قطبی نیست بلکه از جنس شبه بردار یا بردار محوری است که در اثر تبدیل $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ معکوس نمی‌شود (این نکته را مستقیماً از تعریف $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ یا از نمودار جسم چرخان می‌توان استنباط کرد). در اثر عملگر برگشت زمان، تمام حرکت‌ها (از جمله تکانه خطی و زاویه‌ای) معکوس می‌شوند؛ از این رو جملاتی مانند \mathbf{S}_1 و \mathbf{S}_2 یا ترکیبی از آنها مثل $A\mathbf{S}_1 + B\mathbf{S}_2$ در تابع پتانسیل باعث نقض ناوردایی برگشت زمان خواهد شد و آنها را نمی‌توان بخشی از پتانسیل هسته‌ای به شمار آورد؛ ولی جملاتی مانند $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ یا $\mathbf{S}_1^2 \cdot \mathbf{S}_2^2$ نسبت به برگشت زمان ناوردا و بنابراین مجاز هستند (تمام این جملات نسبت به پاریده هم ناوردا هستند). ساده‌ترین جمله‌ای که اسپین هر دو نوکلئون را شامل شود به صورت $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ است. اکنون مقدار $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ را برای حالت‌های تک‌تایه و سه‌تایه تعیین می‌کنیم. برای این منظور اسپین کل $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ را به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) \cdot (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) = S_1^2 + S_2^2 + 2 \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$

پس داریم:

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{S}^2 - \mathbf{S}_1^2 - \mathbf{S}_2^2) \quad (۴-۲)$$

برای تعیین مقدار این عبارت، باید یادآور شد که در مکانیک کوانتومی مربع تکانه زاویه‌ای به صورت $\mathbf{S}^2 = \hbar^2 S(S+1)$ محاسبه می‌شود. بنابر این خواهیم داشت:

$$\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \rangle = \frac{1}{2} [S(S+1) - S_1(S_1+1) - S_2(S_2+1)] \hbar^2 \quad (۵-۲)$$

با توجه به اینکه $S_1 = S_2 = 1/2$ است مقدار $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ در حالت سه‌تایه ($S=1$) عبارتست از:

$$\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \rangle = \frac{1}{4} \hbar^2 \quad (۶-۲)$$

و مقدار آن در حالت تک‌تایه ($S=0$) عبارتست از:

$$\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \rangle = -\frac{3}{4} \hbar^2 \quad (۷-۲)$$

بنابراین در تابع پتانسیل عبارتی به صورت $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 V_s(r)$ را می‌توان در نظر گرفت که با وجود آن سطح مقطع‌های مختلف حالت‌های تک‌تایه و سه‌تایه قابل محاسبه خواهد شد. بزرگی V_s را می‌توان چنان تنظیم کرد که اختلاف سطح مقطع‌های تک‌تایه و سه‌تایه را به درستی پیش‌بینی کند و وابستگی شعاعی آن هم چنان قابل تنظیم است که انرژی حالتها نیز به طور مناسبی در نظر گرفته شود.

پتانسیل دربرگیرنده V_c و V_s را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$V(r) = -\left(\frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2}{\hbar^2} - \frac{1}{4}\right)V_1(r) + \left(\frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2}{\hbar^2} + \frac{3}{4}\right)V_3(r) \quad (۸-۲)$$

که در آن $V_1(r)$ و $V_3(r)$ پتانسیل‌هایی هستند که به طور جداگانه رفتار تک‌تایه و سه‌تایه را توضیح می‌دهند.

۲-۲-۳) تانسوری بودن

پتانسیل بین نوکلئونی شامل یک جمله غیرمرکزی به نام پتانسیل تانسوری است. عمده ترین دلیل وجود نیروی تانسوری از مشاهده گشتاور چارکطبی در حالت پایه دوترون حاصل می‌شود. در ساختاری که از دو ذره تشکیل شده باشد انتظار می‌رود که گشتاور مغناطیسی کل برابر باشد با جمع برداری گشتاورهای مغناطیسی مربوط به اسپین و گشتاورهای مغناطیسی مربوط به حرکت مداری ذرات باردار. از آنجا که احتمالاً دوترون در حالت $l=0$ است، حرکت مداری سهمی در گشتاور مغناطیسی کل ندارد بنابراین گشتاور مغناطیسی آن چنین بدست می‌آید:

$$\mu_d = \mu_n + \mu_p = (-1.9128 + 2.7925) \frac{e\hbar}{2m_p} = 0.8797 \frac{e\hbar}{2m_p} \quad (۹-۲)$$

ولی نتیجه اندازه‌گیری گشتاور مغناطیسی دوترون چنین است [۹]:

$$\mu_d = 0.8574 \frac{e\hbar}{2m_p} \quad (10-2)$$

با اینکه اختلاف میان کمیت اندازه‌گیری شده و مقدار نظری چندان زیاد نیست، ولی توجیه همین اختلاف نیز مشکل است. ساده‌ترین تعبیر آن است که برای دوترون حرکت مداری قائل شویم، بدین معنی که فرض قبلی راجع به حالت پایه دوترون که $l=0$ است کاملاً صحیح نیست.

حتی شواهد بهتری برای این نتیجه‌گیری وجود دارد که از اندازه‌گیری گشتاور چارقتبی الکتریکی دوترون بدست می‌آید. اگر دوترون در حالت $l=0$ باشد از رابطه (۲-۳) و اینکه P_{00} عدد ثابتی است، می‌بینیم که تابع موج بستگی به (θ, ϕ) ندارد و لذا فقط تابعی از r است بنابراین دوترون باید دارای تقارن کروی باشد؛ یعنی گشتاور چارقتبی‌اش صفر باشد ولی گشتاور چارقتبی اندازه-گیری شده دوترون چنین است [۹]:

$$Q_d = 2.82e \times 10^{-27} \text{ cm}^2 \quad (11-2)$$

این مقدار گرچه کوچک است ولی صفر نیست. این موضوع نشان می‌دهد که تابع موج، یک تابع موج ساده $l=0$ نیست و این با نتیجه‌ای که از گشتاور مغناطیسی گرفته شد توافق دارد.

این نتایج را نمی‌توان توضیح داد مگر با فرض اینکه حالت پایه مقادیری غیر از $l=0$ داشته باشد. در واقع نتایج بدست آمده به نتایج $l=0$ نزدیک‌تر است تا به نتایج هر مقدار دیگری از l و این بدان معنی است که تابع موج شامل مخلوطی از مقادیر l است. برای $I=1$ و بیشینه مقدار $S=1$ ، بنا بر رابطه (۲-۱)، l تنها می‌تواند صفر، ۱ و ۲ باشد ولی مقادیر زوج و فرد l هر دو نمی‌توانند یکجا در یک تابع موج وجود داشته باشند (به علت نقض پایستگی پاریته)؛ بنابراین تنها $l=2$ می‌تواند در کنار $l=0$ حضور داشته باشد لذا تابع موجی را به اینصورت در نظر می‌گیریم:

$$\psi = a_0\psi_{1s} + a_2\psi_{1d} \quad (12-2)$$

تابع موجی که به صورت جمع نوشته شده است، بدین معنی است که سیستم کسری از زمان را که با a_0 مشخص می‌شود در حالت $l=0$ و کسر a_2 از زمان را در حالت $l=2$ می‌گذراند. نتایج بدست آمده برای گشتاور چار قطبی را می‌توان با $a_0 = 0.94$ و $a_2 = 0.06$ توجیه کرد. نتایج گشتاور مغناطیسی، گرچه با دقت کم ولی با این نتایج توافق دارد. ظاهراً دوترون شش درصد اوقات را در حالت $l=2$ می‌گذراند در حالیکه همچنان که قبلاً فرض کردیم ۹۴ درصد اوقات را در $l=0$ می‌گذراند. توجه کنید که هم به ازای $l=0$ و هم به ازای $l=2$ بنا بر رابطه (۱-۲)، $S=1$ خواهد بود؛ بنابراین در این نتیجه تغییری حاصل نمی‌شود.

هرگاه در تابع موج آمیزه‌ای از مقادیر l وارد شود اصل پایستگی تکانه زاویه ای مداری (و نه تکانه کل) نقض می‌شود. اکنون اثرات این نقض را بررسی می‌کنیم. همانطور که از مکانیک مقدماتی میدانیم، درست مثل تکانه خطی که تنها با نیرو تغییر می‌کند، تکانه زاویه‌ای نیز تنها می‌تواند با گشتاور نیرو تغییر کند. گشتاوری که بر جسم اثر می‌گذارد عبارت است از:

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = rF_{\theta} = -\partial V / \partial \theta \quad (۱۳-۲)$$

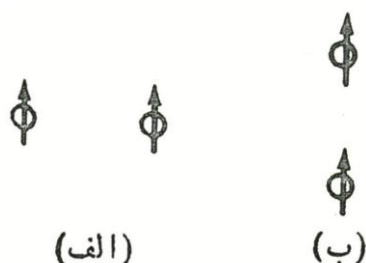
بنابراین تکانه زاویه‌ای مداری متغیر نشانگر آن است که پتانسیل V تابعی از θ هم هست و صرفاً تابعی از r نیست. از آنجایی که نیروی مرکزی برای پتانسیل V تنها تابعی از r است تعریف شده است، این نیرو یک نیروی غیر مرکزی است که **نیروی تانسوری** نامیده می‌شود.

این نیروی تانسوری باید به جای $V(r)$ به صورت $V(\mathbf{r})$ باشد. برای نوکلئون‌های منفرد، بدیهی است که انتخاب یک جهت مشخص در فضا اختیاری است؛ یعنی شمال و جنوب یا شرق و غرب برای آن تفاوتی ندارد. تنها جهت مرجح برای نوکلئون، «جهت اسپین» آن است و از این رو تنها جمله‌ای که می‌توان در نظرگرفت به صورت $\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}$ یا $\mathbf{S} \times \mathbf{r}$ است که بردار مکان \mathbf{r} با جهت \mathbf{S} ارتباط می‌دهد (شکل (۱-۲)). برای آنکه شرط ناوردایی پاریته تامین شود باید با تعداد زوجی از عوامل \mathbf{r} سرو کار داشته باشیم و بنابراین این پتانسیل بین دو نوکلئون می‌بایست به جملاتی مانند

$(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{r})$ یا $(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{r})(\mathbf{S}_2 \times \mathbf{r})$ بستگی داشته باشد. با استفاده از اتحادهای برداری می‌توان نشان داد که صورت دوم همان صورت اول بعلاوه جمله $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ است که قبلاً در پتانسیل $V(r)$ گنجانده شده است. بنابراین بدون آنکه کلیت مسئله از بین برود می‌توان بخش تانسوری پتانسیل بین نوکلئونی را به صورت $V_T(r)S_{12}$ در نظر گرفت که در آن $V_T(r)$ بستگی شعاعی نیرو و بزرگی آن را تامین می‌کند و داریم:

$$S_{12} = \frac{3(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \quad (۱۴-۲)$$

که این عبارت متضمن ویژگی تانسوری نیرو است و متوسط آن در تمام زاویا برابر صفر می‌شود.



شکل (۱-۲) تاثیر نیروی تانسوری بر دوترون. این نیرو در (الف) دافعه و در (ب) جاذبه است [۹].

۴-۲-۲) تقارن نسبت به بار نوکلئون

نیروی نوکلئون-نوکلئون نسبت به بار نوکلئون تقارن دارد. این بدان معنی است که پس از تصحیح نیروی کولنی در سیستم پروتون-پروتون فرقی بین برهم‌کنش پروتون-پروتون و برهم‌کنش نوترون-نوترون نیست. در اینجا منظور از «بار» خصوصیت یا جنس نوکلئون (پروتون یا نوترون) است و نه بار الکتریکی آن. دلیل این امر آنست که طولهای پراکندگی^۱ و همچنین بردهای موثر^۲ در برهم‌کنش‌های nn و pp با هم مساوی است. البته ابتدا لازم است که تصحیح برهم‌کنش کولنی در مورد پارامترهای pp در نظر گرفته شود. با در نظر گرفتن این تصحیح، پارامترهای تک تایه pp چنین می‌شود [۸]:

$$\begin{cases} a = -17.1 \text{ fm} \\ r_0 = 2.84 \text{ fm} \end{cases}$$

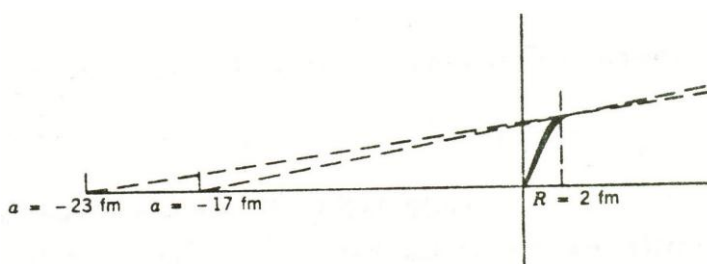
^۱ Scattering Length

^۲ Effective Range

این مقادیر با پارامترهای اندازه‌گیری شده nn ($r_0 = 2.66 fm$, $a = -16.6 fm$) سازگاری خوبی دارند که این سازگاری قویا موید مفهوم تقارن بار است.

۲-۲-۵) استقلال از بار الکتریکی

نیروی نوکلئون-نوکلئون تقریبا مستقل از بار الکتریکی است. این بدان معنی است که - همانند حالت‌های اسپین- پس از تصحیح نیروی کولنی pp هر سه نیروی هسته‌ای nn ، pp و np با هم مساویند. به این ترتیب استقلال بار شرطی قویتر از تقارن بار است. در این مورد شواهد امر چندان قاطع نیست. در واقع به نظر می‌رسد که طول پراکندگی حالت تک‌تایه np ($-23.7 fm$) تفاوت زیادی با طولهای پراکندگی pp و nn ($-17 fm$) داشته باشد. اما با توجه به شکل (۲-۲) معلوم می‌شود که طول پراکندگی نسبت به تابع موج هسته در نزدیکی $r=R$ حساسیت قابل ملاحظه‌ای دارد به طوریکه تغییر بسیار کوچک تابع موج می‌تواند به تغییر بزرگی در طول پراکندگی منجر شود. بنابراین اختلاف زیاد بین طولهای پراکندگی را می‌توان ناشی از اختلاف بسیار کوچکی (در حدود ۱٪) در پتانسیلها دانست که به آسانی به وسیله مدل نیروی تبادلی-چنانکه در بخش بعد خواهیم دید- قابل توجیه است.



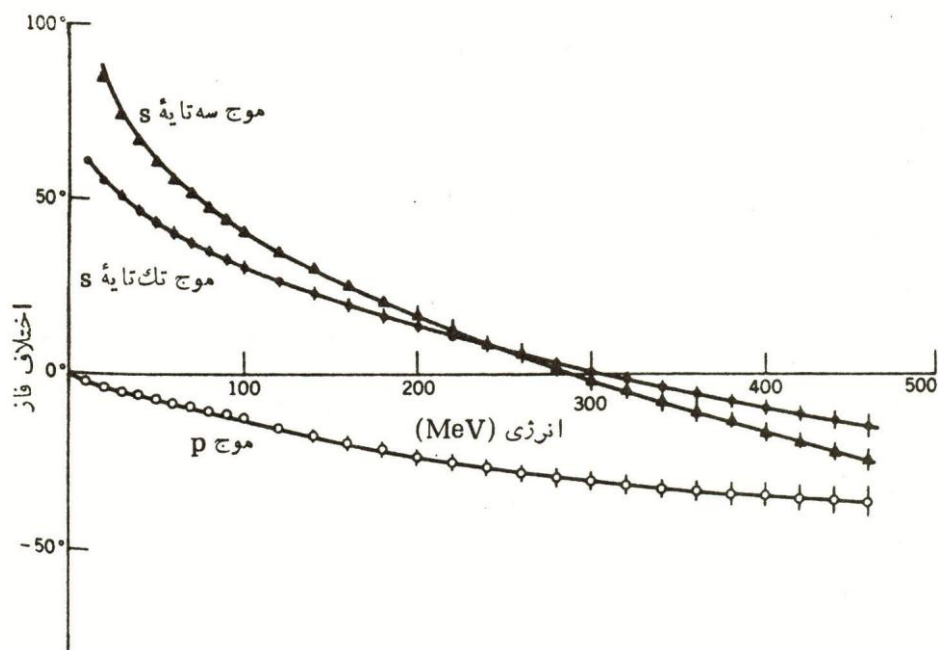
شکل (۲-۲) اختلاف ایجاد شده در طول پراکندگی در اثر برونمایی، در ازای تغییر مختصر تابع موج در نزدیکی $r=R$ [۸].

۲-۲-۶) مغز دافع^۱

از بررسی کیفی چگالی هسته‌ای نتیجه می‌شود که برهم‌کنش نوکلئون- نوکلئون در فواصل خیلی کوتاه دافعه می‌شود. رشد هسته در اثر افزایش نوکلئون ها به صورتی است که چگالی مرکزی آن

¹ Repulsive Core

تقریباً ثابت می‌ماند و از این رو باید عاملی وجود داشته باشد که از تجمع و نزدیک شدن بیش از حد نوکلئون‌ها جلوگیری کند. برای بررسی کمی‌تر مسئله، پراکندگی نوکلئون- نوکلئون را در انرژی‌های بالا در نظر می‌گیریم. اختلاف فاز موج تک تابه s برای پراکندگی نوکلئون- نوکلئون تا انرژی 500 MeV در شکل (۳-۲) نشان داده شده است. (در این انرژی‌ها اختلاف فاز موج جزئی مراتب بالاتر، مثلاً موجهای p و d نیز در سطح مقطع‌ها سهمیند. اختلاف فاز موج s را به آسانی می‌توان از اندازه گیری‌های پراکندگی دیفرانسیل $d\sigma/d\Omega$ بر حسب θ استخراج کرد؛ زیرا این اختلاف فاز به θ بستگی ندارد.) اختلاف فاز موج s در انرژی حدود 300 MeV منفی می‌شود که این امر حاکی از تغییر نیرو از صورت جاذبه به صورت دافعه است.



شکل (۳-۲) اختلاف فاز حاصل از پراکندگی نوترون- پروتون در انرژی‌های متوسط [۸].

برای آنکه مغز دافع را به حساب آوریم باید پتانسیل‌های مورد استفاده را اصلاح کنیم. برای مثال اگر در اینجا هم برای سهولت محاسبات چاه مربعی را انتخاب کنیم، می‌توان تابع پتانسیل را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & r < R_c \\ -V_0 & R_c \leq r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (۱۵-۲)$$

که در آن R_c شعاع مغز دافع است و با تنظیم مقدار آن می‌توان به سازگاری رضایت‌بخشی با اختلاف فاز تجربی موج s دست یافت. با انتخاب $R_c = 0.5 fm$ مقدار حاصل از محاسبه با اختلاف فاز تجربی سازگار می‌شود.

۲-۱-۷) وابستگی به سرعت

می‌دانیم نیروی گرانشی، یک نیروی استاتیک است ولی نیروهای الکترومغناطیسی این گونه نیست؛ زیرا نیروی وارد بر یک ذره باردار در میدان مغناطیسی بستگی به سرعت آن ذره دارد. نیروی هسته‌ای نیز یک نیروی غیراستاتیک و «وابسته به سرعت» نوکلئونهاست. با این حال معمولاً ساده‌ترین وابستگی را در نظر می‌گیرند. در حالی که به طور کلی همین اسم به کار می‌رود، اما آنچه واقعاً مورد بحث قرار می‌گیرد، پتانسیل‌های وابسته به تکانه هستند. دلیل استفاده از پتانسیل بجای نیرو این است که نظریه کوانتومی برحسب پتانسیل فرمول‌بندی شده است.

یک دلیل آشکار برای به‌کاربردن تکانه به جای سرعت این است که سرعت در ناحیه انرژی نسبیتی، به طرز ویژه‌ای رفتار می‌کند و هیچ‌گونه نشانه‌ای حاکی از اینکه نیروی هسته‌ای دارای چنین رفتاری است، وجود ندارد.

همانطور که محتمل است، اگر نیروی هسته‌ای وابستگی بسیار پیچیده‌ای با سرعت داشته باشد، فقط می‌توان آن را از طریق مطالعه مداوم سیستم‌های دو نوکلئونی در انرژی‌هایی که به تدریج اضافه می‌شوند کشف کرد. اما اگر هدف، درک ساختارهای هسته‌ای باشد، کفایت نیروی هسته‌ای را تا حدی که انرژی نوکلئون‌ها در هسته بیش از چند صد میلیون الکترون‌ولت نیست (تقریب انرژی پایین) بشناسیم که در آن جمله‌های از پایین‌ترین درجه تکانه p ، مهمترین اثرات را در پتانسیل وابسته به تکانه دارند. ساده‌ترین جمله‌ها از پایین‌ترین درجه p عبارتند از: حاصلضرب نرده‌ای \mathbf{p} و \mathbf{L} با \mathbf{r} و \mathbf{S} . از چهار ترکیب ممکن، تنها ترکیبی که با قوانین پایستگی سازگار است، حاصلضرب $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ است که آن را اصطلاحاً برهم کنش اسپین-مدار می‌نامند و بزرگی آن آشکارا به زاویه میان اسپین و حرکت مداری و همچنین به بزرگی \mathbf{L} بستگی دارد. اگر $S=0$ باشد، این برهم کنش از بین می‌رود.

۲-۳) پتانسیل مناسب هسته‌ای

اکنون می‌خواهیم وارد بحث پتانسیل هسته‌ای شویم؛ اما قبل از آن، بد نیست کمیت‌های موجود در سیستم دو نوکلئونی که نیرو به آنها وابسته است مشخص کنیم. این کمیت‌ها عبارتند از: \mathbf{r}_{12} یعنی برداری که مکان ذره ۱ را به ۲ ارتباط می‌دهد، $\mathbf{p}_{12} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ یعنی تکانه نسبی آنها و \mathbf{S} یعنی اسپین کل. راحت تر (ولی غیر الزامی) است که به این کمیت‌ها تکانه زاویه‌ای مداری $\mathbf{L} = \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{p}_{12}$ را هم اضافه کنیم.

حال انتظارات خود را از پتانسیلی که نیروی هسته‌ای را نمایش می‌دهد بیان می‌کنیم:

الف) پتانسیل باید یک کمیت زده‌ای باشد چون انرژی است.

ب) از آنجا که دو نوترون یا دو پروتون غیر قابل تشخیص هستند، هرگاه جای ذره ۱ با ذره ۲ عوض شود، پتانسیل نباید تغییر کند. این امر آشکارا مطلوبترین خاصیت برای نیروی بین دو ذره (حتی نایکسان) است. مبادله ذرات، علامت \mathbf{r}_{12} و \mathbf{p}_{12} را معکوس می‌کند ولی علامت \mathbf{S} و \mathbf{L} را تغییر نمی‌دهد. (در حالت دوم، علامت \mathbf{L} طبق تعریف $\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{p}_{12}$ دو بار عوض می‌شود که به معنای عدم تغییر است). لذا نمی‌توان جمله‌ای شبیه $\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}_{12}$ یا $\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}_{12}$ داشت، پس نیروی تانسوری که در بخش (۲-۱-۳) مطرح شد باید متناسب با $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}_{12})^2$ یا توانهای زوج بالاتر از این حاصلضرب اسکالر باشد. با استفاده از اتحادهای ریاضی می‌توان نشان داد که جملات با توان بالاتر به $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}_{12})^2$ تبدیل می‌شوند.

ج) اگر جهت حرکت زمان معکوس شود، پتانسیل نباید تغییر کند. این به اصل ناوردایی وارونی زمان معروف است که در تمام قوانین شناخته شده فیزیک کلاسیک و کوانتومی معتبر است و اعتقاد عمومی بر این است که در پدیده‌هایی که نیروی هسته‌ای دخیل است این امر صحت دارد. اگر جهت زمان معکوس شود، به سادگی دیده می‌شود که \mathbf{S} و \mathbf{p}_{12} علامتشان تغییر می‌کند ولی علامت \mathbf{r}_{12} تغییر نمی‌کند. پس با تعریف تکانه زاویه‌ای، علامت \mathbf{L} معکوس خواهد شد، بنابراین نمی‌توان جملاتی شبیه $\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{S}$ ، $\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{p}_{12}$ یا $\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{L}$ داشت.

البته ما در اینجا نیروهای مستقل از سرعت (استاتیکی) را در نظر می‌گیریم. اگر پتانسیل استاتیکی باشد نمی‌تواند به p_{12} یا به L بستگی داشته باشد زیرا اینها به سرعت وابسته‌اند؛ بنابراین پتانسیل استاتیکی باید تنها شامل r و S باشد. تنها نرده‌ای‌هایی که می‌توان تشکیل داد عبارتند از: $S.S$ ، $r.S$ ، $r.r$ یا حاصل ضرب آنها. تمام جمله‌های ممکن دیگر، مثلاً $(r \times S).(r \times S)$ به ترکیب‌های خطی از این جملات تقلیل می‌یابند. وابستگی به $r.r$ عموماً همان وابستگی به r است که قبلاً فرض کردیم در تمام نیروها وجود دارد. $S.S$ نیروی وابسته به اسپین است که در بخش (۲-۱-۲) بحث شد. $r.S$ که گفتیم مجاز نیست ولی $(r.S)^2$ مجاز است که در حقیقت این همان نیروی تانسوری است که در بخش (۲-۱-۲) بررسی شد. حاصل ضرب $S.S$ و $(r.S)^2$ از نیروی تانسوری غیرقابل تشخیص است؛ زیرا این نیرو فقط برای $S=1$ قابل استفاده است که در این مورد مقدار $S.S$ تعیین می‌شود.

(د) خاصیت دیگری که نیروی استاتیکی نوکلئون- نوکلئون می‌تواند به آن وابسته باشد پارینه تابع موجی است که سیستم را توصیف می‌کند. از آنجا که پارینه بستگی به فرد یا زوج بودن L دارد بنابراین این نیرو برای L زوج و L فرد متفاوت است. فهرست کاملی از نیروهای استاتیکی که شامل شش عضو می‌شود به قرار زیر است:

الف) مرکزی، L فرد، $S=0$ ب) مرکزی، L زوج، $S=0$

ج) مرکزی، L فرد، $S=1$ د) مرکزی، L زوج، $S=1$ (۱۶-۲)

ه) تانسوری، L زوج، $S=1$ و) تانسوری، L فرد، $S=1$

عمومی‌ترین پتانسیل استاتیک مجموع این شش جمله است که هر کدام تابعی از r هستند:

$$V=V_A(r)+V_B(r)+V_C(r)+V_D(r)+V_E(r)+V_F(r) \quad (17-2)$$

با این شرط که همه جمله‌ها صفر هستند مگر اینکه L و S مطابق رابطه (۱۶-۲) باشند (مثلاً در حالت

پایه دوترون، همه جمله‌ها به جز V_D و V_F صفرند) [۹].

۴-۲) نیروی هسته‌ای و تبادل ذره

همانطور که دیدیم در مورد نیروی هسته‌ای، فرق می‌کند که $S=0$ یا $S=1$ و L زوج یا فرد باشد. این رفتار به این واقعیت مربوط می‌شود که نیروی هسته‌ای از تبادل مزون‌ها نتیجه می‌شود و تبادل مزون منجر به نیروهای تبدالی می‌شود.

۱-۴-۲) عملگرهای تبدالی

سه نوع نیروی تبدالی وجود دارند: تبادل فضایی یا نیروی ماژورانا، تبادل اسپینی یا نیروی بارتلت و تبادل فضایی-اسپینی یا نیروی هایزنبرگ که در ادامه به صورت پتانسیل معرفی می‌شوند.

پتانسیل ماژورانا^۱ (V_M): این پتانسیل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_M \Psi = v_M(r) P^x \Psi \quad (18-2)$$

که $v_M(r)$ تابع معمولی از r و P^x عملگریست که مکان (ولی نه اسپین) دو ذره را در تابع موجی که بر آن عمل می‌کند عوض می‌کند. در سیستم دو نوکلئونی تبادل دو ذره مترادف با انعکاس حول مبدا است. در صورتیکه پاریته Ψ فرد باشد یک چنین انعکاسی علامتش را عوض می‌کند و اگر پاریته‌اش زوج باشد عوض نمی‌کند. از آنجا که زوج یا فرد بودن پاریته فقط بستگی به زوج یا فرد بودن L دارد خواهیم داشت:

$$V_M \Psi = \begin{cases} +v_M(r) \Psi & L \text{ is even} \\ -v_M(r) \Psi & L \text{ is odd} \end{cases} \quad (19-2)$$

با توجه به اینکه در معادله شرودینگر، Ψ به دنبال V می‌آید، رابطه (۱۹-۲) اثر عملگر P^x را کاملاً در بر می‌گیرد. مشاهده می‌شود که نیروی ماژورانا بیان این واقعیت است که پتانسیل هسته‌ای بستگی به زوج یا فرد بودن L دارد.

پتانسیل بارتلت^۲ (V_B): این پتانسیل به صورت زیر تعریف می‌شود:

¹ Majorana

² Bartlett

$$V_B \Psi = v_B(r) P^s \Psi \quad (20-2)$$

که $v_B(r)$ تابع معمولی از r و P^s عملگری است که اسپین (ولی نه موقعیت فضایی) دو ذره را در تابع موجی که بر آن عمل می‌کند عوض می‌کند. اگر $S=1$ باشد (حالت سه‌تایه) مبادله اسپین اثری بر تابع موج ندارد و اگر $S=0$ باشد (حالت تک‌تایه) مبادله اسپین صرفاً علامت تابع موج را تغییر می‌دهد. بنابراین داریم:

$$V_B \Psi = \begin{cases} +v_B(r)\Psi & S=1 \\ -v_B(r)\Psi & S=0 \end{cases} \quad (21-2)$$

این رابطه کاملاً اثرات عملگر P^s را در برمی‌گیرد و توضیحی است برای اینکه چرا پتانسیل هسته‌ای برای $S=1$ و $S=0$ متفاوت است. چون از خواص آشنای تکانه زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی داریم:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = S(S+1) = \begin{cases} 2 & S=1 \\ 0 & S=0 \end{cases} \quad (22-2)$$

رابطه (21-2) را می‌توان روشنتر بیان کرد:

$$V_B \Psi = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} - 1) v_B(r) \Psi \quad (23-2)$$

پتانسیل هایزنبرگ (V_H): این پتانسیل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_H \Psi = v_H(r) P^x P^s \Psi \quad (24-2)$$

با ترکیب اثرهای P^s و P^x خواهیم داشت:

$$V_H \Psi = \begin{cases} +v_H(r)\Psi & T=0 \begin{cases} S=1 & L \text{ is even} \\ S=0 & L \text{ is odd} \end{cases} \\ -v_H(r)\Psi & T=1 \begin{cases} S=0 & L \text{ is even} \\ S=1 & L \text{ is odd} \end{cases} \end{cases} \quad (25-2)$$

که $v_H(r)$ تابعی معمولی از r و اسپین ایزوباری T برداری است که همان خواص ریاضی S را دارد. بنابراین رابطه (25-2) را می‌توان به صورت واضح‌تر چنین نوشت:

$$V_H \Psi = -(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} - 1) v_H(r) \Psi \quad (26-2)$$

همچنین می‌توان به سادگی رابطه (19-2) را به صورت زیر نوشت:

$$V_M \Psi = -(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} - 1)(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} - 1)v_M(r)\Psi \quad (27-2)$$

نتیجه رابطه فوق برای L زوج به صورت $v_M(r)\Psi$ و برای L فرد (چه $S=0$ چه $S=1$ باشد) به صورت $\Psi - v_M(r)$ می‌شود [مطابق معادله (2-19)].

علاوه بر این سه نیروی تبدالی، نیروی معمولی دیگری به نام نیروی ویگنر¹ یا نیروی بدون تبادل وجود دارد که بدون در نظر گرفتن S یا L می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$V_W \Psi = v_W(r)\Psi \quad (28-2)$$

برحسب این چهار پتانسیل اصلی، پتانسیل‌های مرکزی رابطه (2-16) را می‌توان بنا بر روابط (2-19) تا (2-21) به صورت زیر نوشت:

$$V_A = v_W - v_M - v_B + v_H \quad S=0 ; L \text{ is odd} \quad (29-2 \text{ الف})$$

$$V_B = v_W + v_M - v_B - v_H \quad S=0 ; L \text{ is even} \quad (29-2 \text{ ب})$$

$$V_C = v_W - v_M + v_B - v_H \quad S=1 ; L \text{ is odd} \quad (29-2 \text{ ج})$$

$$V_D = v_W + v_M + v_B + v_H \quad S=1 ; L \text{ is even} \quad (29-2 \text{ د})$$

از آنجا که چهار معادله خطی مستقل و چهار مجهول وجود دارند، ملاحظه می‌شود که توصیف بخش مرکزی نیروی هسته‌ای به صورت مجموع چهار جمله اول رابطه (2-17) کاملاً هم‌ارز با توصیف آن به صورت مجموع $V_W + V_M + V_B + V_H$ است. از آنجا که نیروهای تبدالی در نظریه مزونی دارای مبنای فیزیکی هستند، چهار پتانسیل مرکزی رابطه (2-17) نیز دارای پایه فیزیکی می‌شوند. به همین ترتیب، دو پتانسیل تانسوری V_E و V_F رابطه (2-17) را می‌توان برحسب مولفه‌های تانسوری V_M ، V_W ، V_H ، V_B بیان کرد که به ترتیب متناسب با $S_{12}v_{WT}(r)$ ، $S_{12}v_{MT}(r)$ ، $S_{12}v_{BT}(r)$ و $S_{12}v_{HT}(r)$ هستند و در آنها v_{WT} و ... توابع ساده‌ای از r اند و S_{12} از رابطه (2-14) به دست می‌آید. در اینجا هم هر دو صورت کاملاً هم‌ارزند.

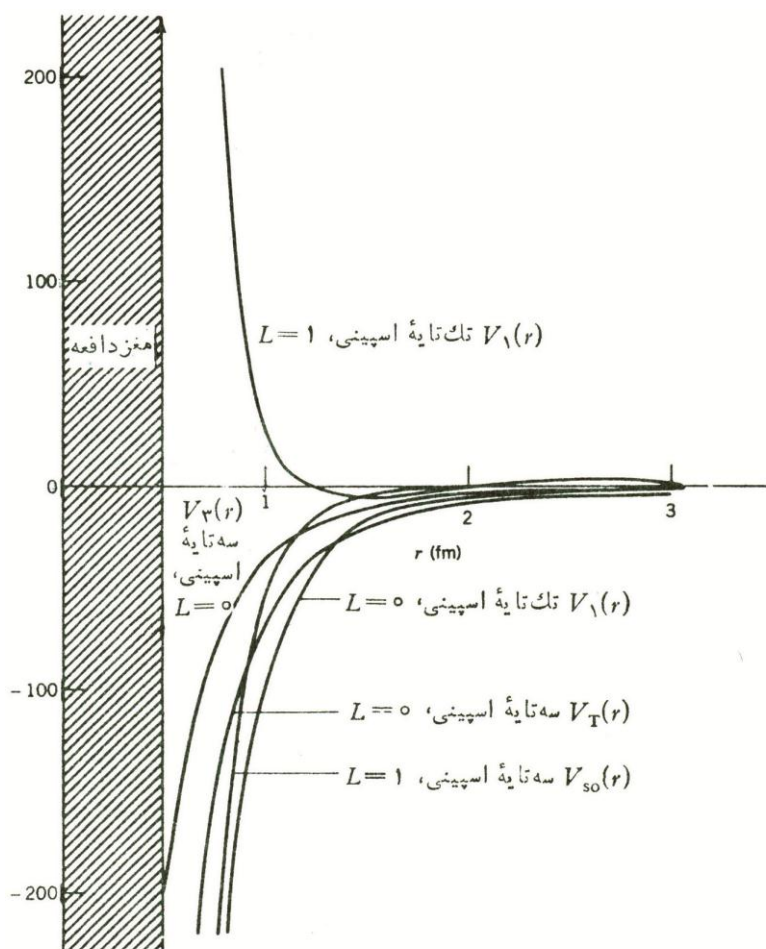
¹ Wigner

در نتیجه این هم‌ارزی، با استفاده از نیروهای تبادلی (۲-۲۷)، (۲-۲۳) و (۲-۲۶) می‌توان رابطه (۲-۱۷) را به صورت یک عبارت منفرد نوشت [۹]:

$$V = v_W(r) + S_{12}v_{WT}(r) - (\mathbf{S}\cdot\mathbf{S} - 1)(\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} - 1)[v_M(r) + S_{12}v_{MT}(r)] + (\mathbf{S}\cdot\mathbf{S} - 1)[v_B(r) + S_{12}v_{BT}(r)] - (\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} - 1)[v_H(r) + S_{12}v_{HT}(r)] \quad (۲-۳۰)$$

۲-۴-۲ مدل نیروی تبادل^۱

باتوجه به مطالبی که گفته شد، می‌توان مجموعه‌ای از پتانسیل‌های پدیده شناختی $V(r)$ را پیشنهاد



شکل (۲-۴) چند نمونه از پتانسیل‌های نوکلئون-نوکلئون. همگی در نزدیکی‌های ۰/۵ فرمی، یک مغز دافع دارند [۸].

کرد که سازگاری قابل قبولی با اطلاعات مربوط به برهم‌کنش نوکلئون-نوکلئون داشته باشد و سپس آنها را در هسته‌های سنگین‌تر مورد استفاده قرار داد. در شکل (۲-۴) یک مجموعه از این پتانسیل‌ها

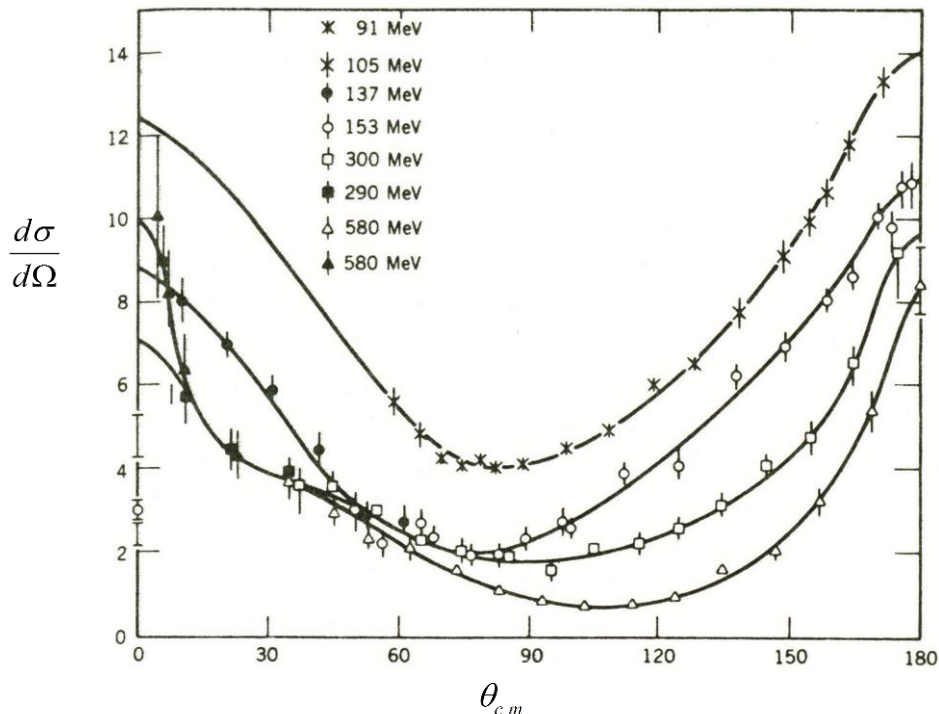
¹ Exchange Force Model

نشان داده شده است. گرچه با افزایش تعداد جملات دخیل در برهم‌کنش، قدرت و دقت پیش‌بینی این پتانسیل‌ها نیز افزایش می‌یابد و حتی ممکن است نتیجه محاسبات بهبود یابد ولی با این کار پتانسیل از سادگی می‌افتد. بعلاوه ممکن است هدف اصلی‌تر (یعنی درک برهم‌کنش نوکلئون-نوکلئون) فراموش شود. صرف اینکه پتانسیل‌ها آنقدر گسترش یابند که محاسبات دقیقی از آنها حاصل‌شود بدین معنی نیست که درک ما از ویژگی بنیادی برهم‌کنش نوکلئون-نوکلئون افزایش یافته است. بنابراین باید سازوکاری فیزیکی برای نیروی نوکلئون-نوکلئون در نظر گرفت که بتواند پتانسیل‌های موفق در محاسبات را به دست دهد. یکی از سازوکارهای موفق، سازوکار «نیروی تبادل» است که برای تایید حضور آن در هسته‌ها دو دلیل اصلی وجود دارد:

دلیل اول خاصیت اشباع نیروی هسته‌ای است. پشتوانه تجربی خاصیت اشباع، چگالی هسته‌ای نسبتاً ثابت و انرژی بستگی متوسط تقریباً ثابت در هسته‌های سنگین گوناگون (شکل ۱-۱) است. به نظر می‌رسد که هر نوکلئون فقط تعداد کمی از همسایه‌های نزدیکش را جذب می‌کند که در فواصل خیلی کوتاه همان‌ها را دفع می‌کند تا از نزدیکی بیش از حد آنها جلوگیری کند (این طرز رفتار را می‌توان با انتخاب یک پتانسیل مرکزی که بردی محدود و مرکزیتی به صورت یک مغز دافع دارد توضیح داد). در مورد مولکولها نیز با طرز رفتاری دقیقاً از همین نوع روبرو هستیم. وقتی دو اتم را به هم نزدیک می‌کنیم تا از ترکیب آنها یک مولکول دو اتمی ایجاد شود، نظیر آنچه در مورد پیوندهای کووالانسی دیده می‌شود الکترونهای بین دو اتم به اشتراک گذاشته می‌شوند یا مبادله می‌شوند. در این صورت در حالی که اتم‌ها در یک فاصله تعادلی از یکدیگر قرار گرفته‌اند، یک مولکول پایدار تشکیل می‌شود. اگر بخواهیم اتم‌ها را به زور به یکدیگر نزدیکتر کنیم در اثر همپوشی پوسته‌های الکترونی پر، یک نیروی دافعه قوی بین اتم‌ها به وجود خواهد آمد. علاوه براین، نزدیک شدن مولکول به یک اتم سوم هم ممکن است فقط به تولید نیروی بسیار ضعیفی بین این اتم و دو اتم قبلی منجر شود. در صورتی که در مجموعه مقید (یا مولکول) اولی، از همه الکترون‌های ظرفیت استفاده شده باشد، هیچ الکترونی برای

تشکیل پیوند جدید وجود نخواهد داشت و در نتیجه پیوندی بین مولکول و اتم سوم ایجاد نمی‌شود.

نیروهای هسته‌ای هم خصوصیت اشباعی مشابهی از خود بروز می‌دهند.



شکل (۵-۲) سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون-پروتون در انرژیهای متوسط (محور عمودی) بر حسب زاویه پراکندگی θ_{cm} . پراکندگی رو به عقب در نزدیکیهای 180° درجه نشانه وجود نیروی تبادلی است [۸].

یکی دیگر از دلایل تاییدکننده مدل نیروی تبادلی از مطالعه پراکندگی np در انرژیهای بالا به دست آمده است. سطح مقطع دیفرانسیلی $d\sigma/d\Omega$ پراکندگی np در شکل (۵-۲) نشان داده شده است. سطح مقطع پراکندگی در زوایای نزدیک به صفر در جهات رو به جلو دارای مقادیر بزرگ قله‌ای است، و این نشانگر آن است که انتقال تکانه در برخورد بین ذرات فرودی و هدف، کوچک است. مرتبه بزرگی این قله رو به جلو را با بررسی بیشینه انتقال تکانه به ترتیب زیر می‌توان برآورد کرد. برای انحراف در زوایای کوچک داریم: $\sin \theta \cong \theta = \Delta p / p$ که در آن p تکانه ذره فرودی و Δp تکانه عرضی حاصل از برخورد است. اگر متوسط نیروی وارد طی زمان برخورد Δt را F بگیریم، داریم: $\Delta p = F \Delta t$. نیروی F برابر $-dV/dr$ است و از این رو نیروی متوسط از مرتبه V_0/R می‌شود که در آن V_0 عمق چاه

پتانسیل مربعی نوکلئون- نوکلئون و R برد آن است. زمان برخورد Δt باید از مرتبه R/v باشد که در آن v سرعت ذره فرودی است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\theta = \frac{\Delta p}{p} = \frac{F \Delta t}{p} = \frac{1}{p} \frac{V_0 R}{v} = \frac{V_0}{pv} = \frac{V_0}{2K} \quad (۳۱-۲)$$

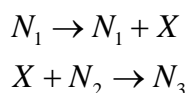
که در آن K انرژی جنبشی ذره فرودی است. برای انرژی‌هایی که در شکل (۲-۵) نموده شده‌اند، مقادیر θ در حدود ۱۰ درجه یا کمتر از آن است. قله موجود در زاویه پراکندگی ۱۸۰ درجه دور از انتظار است! اما این وسوسه وجود دارد که این قله «رو به عقب» نتیجه برخورد رودررو در چارچوب مرکز جرم باشد که در آن حرکت ذره فرودی معکوس می‌شود. برآورد بالا نشان می‌دهد که چنین توضیحی نمی‌تواند درست باشد.

با فرض اینکه طی برخورد، نوترون و پروتون جایشان را با هم عوض کنند، مدل تبادل می‌تواند توضیح قانع‌کننده‌تری ارائه کند. این بدان معنی است که نوترونی که به طرف جلو در حرکت است به پروتون تبدیل می‌شود و پروتونی که- از دیدگاه چارچوب مرکز جرم- به طرف عقب در حرکت است به نوترون تبدیل می‌شود. در این صورت از دیدگاه چارچوب آزمایشگاه، نوکلئون فرودی به صورت نوکلئونی نمایان می‌شود که به طرف جلو در حرکت است. چنین تحلیلی با برآورد زاویه انحراف کوچک در پراکندگی نوکلئون- نوکلئون که در بالا مطرح شد، سازگاری دارد.

بنابراین، هم خصوصیت اشباع نیروهای هسته‌ای و هم وجود قله بزرگ رو به عقب در پراکندگی np را می‌توان با استفاده از نیروی تبادل توضیح داد؛ در مورد اولی می‌گوییم برای آنکه نوعی پیوند اشباعی بین نوکلئون‌ها وجود داشته باشد باید بین آنها «چیزی» رد و بدل شود و در مورد دومی می‌گوییم که بین نوکلئون‌ها «چیزی» مبادله می‌شود که عملاً خصوصیت آنها را تغییر می‌دهد.

در مراحل آغازین تکامل فیزیک کلاسیک، برهم‌کنش بین اجسام را یک «کنش از دور» می‌دانستند. این بدان معنی است که نیروی یک جسم به طریق اسرارآمیزی در فضا به جسم دیگری منتقل می‌شود. پیشرفت بزرگ فیزیک نظری قرن نوزدهم را باید در معرفی مفهوم میدان دانست. طبق این نظر

هر جسمی در فضا، یک میدان نیرو (که نمونه‌های آن میدانهای الکترومغناطیس و گرانش هستند) ایجاد می‌کند و برهم‌کنش جسم دوم نه مستقیماً با جسم اول بلکه فقط از طریق همین میدان صورت می‌گیرد. در مورد میدان الکترومغناطیسی چگونگی انتقال میدان در فضا توسط ماکسول نشان داده شد. عمده‌ترین تحول قرن بیستم را باید پیدایش مکانیک کوانتومی بدانیم که بنابر آن هرگونه تبادل انرژی لزوماً به صورت بسته‌ها یا مضربهایی از یک مقدار گسسته یا کوانتوم انرژی است. میدان کلاسیک کمیتی یکنواخت و پیوسته است و برای اینکه نظریه کلاسیک میدان را با نظریه کوانتومی سازگار کنیم خود میدان را باید به صورت کوانتومی درآوریم؛ یعنی بنابر نظریه کوانتومی میدان، جسم اول در فضای اطرافش یک میدان کلاسیک بوجود نمی‌آورد بلکه از خود کوانتوم میدان گسیل می‌کند در این صورت جسم دوم می‌تواند این کوانتوم‌های میدان را جذب کند (و به طرف جسم اول بازپس فرستد). پس این دو جسم به طور مستقیم با کوانتوم‌های (میدان) مبادله شده و به طور غیرمستقیم با یکدیگر برهم‌کنش دارند. با توجه به بحث پیشین طبیعی است که آن «چیزی» را که در برهم‌کنش نوکلئون- نوکلئون مبادله می‌شود کوانتوم میدان هسته‌ای در نظر گرفته شود. روشن است که برای تبدیل یک نوترون با اسپین $1/2$ به یک پروتون با اسپین $1/2$ ذره مبادله شده باید دارای اسپین درست (صفر یا ۱) و بار الکتریکی باشد. بعلاوه اگر بخواهیم همان مفهوم نیروی تبادل را برای برهم‌کنش pp و nn هم به کار ببریم نوع بدون بار ذره مبادله شونده نیز باید وجود داشته باشد. با استفاده از برد نیروی هسته‌ای که در عمل مشاهده شده است می‌توان جرم ذره تبدالی را برآورد کرد. فرض- کنید که نوکلئون (که آن را با N نشان می‌دهیم تا پروتون و نوترون هر دو را شامل شود) ذره ای مانند X از خود گسیل کند. نوکلئون دومی این ذره X را جذب می‌کند:



یک نوکلئون چگونه می‌تواند یک ذره با انرژی جرمی $m_X c^2$ از خود گسیل کند و بدون نقض پایستگی انرژی همچنان به صورت نوکلئون باقی بماند؟ چنین عملی ممکن نیست مگر اینکه گسیل و جذب

مجدد نوکلئون در چنان فاصله زمانی کوتاه Δt صورت بگیرد که ما نقض پایستگی انرژی مطلع نشویم. چون اصل عدم قطعیت توانایی ما را در اندازه‌گیری انرژی (و در نتیجه در تعیین پایستگی انرژی) محدود می‌کند اگر $\Delta t < \hbar / (m_x c^2)$ باشد ما از نقض پایستگی انرژی به میزان $\Delta E = m_x c^2$ مطلع نخواهیم شد. بیشینه برد نیرو را بیشینه فاصله ای که ذره X می‌تواند در زمان Δt طی کند، تعیین می‌کند. اگر سرعت ذره را از مرتبه c بگیریم، حداکثر برد ذره (R) چنین می‌شود:

$$R = c\Delta t = \frac{\hbar c}{m_x c^2} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{m_x c^2} \quad (۳۲-۲)$$

که در آن به جای $\hbar c$ از تقریب ساده‌ای استفاده شده است. معادله (۳۲-۲) حاکی از وجود رابطه‌ای مفید بین انرژی جرمی ذرات مبادله شونده و برد نیروی تبادل است. روشن است که اگر برد نیروی هسته‌ای در حدود 1 fm باشد انرژی جرمی ذره تبدالی می‌باید در حدود 200 MeV شود.

چنین ذراتی را که فقط برای لحظاتی زودگذر دوام می‌آورند و می‌توانند قانون پایستگی انرژی و تکانه را نقض کنند (در نوکلئون‌های جذب‌کننده و گسیل‌کننده پس‌زنی دیده نمی‌شود)، ذرات مجازی^۱ می‌گویند. می‌توان نیروی حاصل از تبادل ذرات مجازی را مشاهده کرد ولی نمی‌توان خود این ذرات را در حین تبادل مشاهده کرد (اما ذرات مجازی مبادله‌شونده را می‌توان همانند ذرات معمولی در نظر گرفت. بنا بر نظریه میدان، برهم‌کنش کولنی بین بارهای الکتریکی را می‌توان به صورت تبادل فوتونهای مجازی که خواصی مشابه فوتونهای حقیقی و معمولی دارند در نظر گرفت). ذرات تبدالی حامل نیروی هسته ای را «مزون»^۲ می‌نامند (واژه «مزو» یونانی و به معنای میانه است که به جرم متوسط این ذرات که از الکترون بیشتر و از نوکلئون کمتر است اشاره دارد). سبکترین مزون ها را که مزون π یا پیون^۳ نامیده می‌شود، عامل اصلی آن قسمت از پتانسیل نوکلئون- نوکلئون که برد بلندتری (از ۱ تا ۱/۵ فرمی) دارد می‌دانند. برای آنکه انواع تبدالهای لازم در سیستم دو نوکلئونی امکانپذیر باشد باید سه نوع پیون با بارهای الکتریکی $+e$ ، $-e$ و 0 وجود داشته باشند. پیونها اسپین صفر دارند و انرژی

¹ Virtual Particles

² Meson

³ Pion

سکونشان معادل $139/6 \text{ MeV}$ (برای π^\pm) و 135 MeV (برای π^0) است. در بردهای کوتاهتر (از $0/5$ تا 1 فرمی)، شاید بتوان عامل پیوند هسته‌ای را تبادل دو پیونی دانست. در بردهای خیلی کوتاهتر (از $0/5$ تا $0/25$ فرمی)، تبادل مزون ω (با انرژی سکون معادل 783 MeV) ممکن است در تشکیل مغز دافعه دخالت داشته باشد و تبادل مزون ρ (با انرژی سکون معادل 769 MeV) می‌تواند تامین کننده اثر اسپین-مدار در برهم‌کنش هسته‌ای باشد [۸].

اختلاف جرم پیوندهای باردار و خنثی می‌تواند نقض احتمالی کوچکی را که قبلا در مورد استقلال بار مطرح شد، توضیح دهد. پیون منفردی که در برهم‌کنش بین نوکلئون‌های یکسان مبادله می‌شود، لزوماً از نوع π^0 است:

$$n_1 \rightarrow n_1 + \pi^0 \quad \pi^0 + n_2 \rightarrow n_2$$

یا

$$p_1 \rightarrow p_1 + \pi^0 \quad \pi^0 + p_2 \rightarrow p_2$$

چون هیچ نوکلئونی که بار -1 یا $+2$ داشته باشد وجود ندارد، تبادل پیون باردار در این مورد کارساز نیست:

$$n_1 \rightarrow p_1 + \pi^- \quad \text{but} \quad \pi^- + n_2 \rightarrow ?$$

$$p_1 \rightarrow n_1 + \pi^+ \quad \text{but} \quad \pi^+ + p_2 \rightarrow ?$$

(گرچه نوکلئون‌های با بار -1 یا $+2$ در حالت‌های برانگیخته وجود دارند، ولی این حالت‌های پرانرژی در آزمایش‌های انرژی پایین، سهم قابل توجهی ندارد.) اما برهم‌کنش نوترون-پروتون با تبادل هر دو نوع پیون باردار و خنثی تحقق پذیر است:

$$n_1 \rightarrow n_1 + \pi^0 \quad \pi^0 + p_2 \rightarrow p_2$$

$$n_1 \rightarrow p_1 + \pi^- \quad \pi^- + p_2 \rightarrow n_2$$

همین جمله اضافی در برهم‌کنش np (و اختلاف جرم بین پیوندهای باردار و خنثی) است که احتمالاً اختلاف کوچکی را در پتانسیل‌ها موجب می‌شود و این اختلاف به نوبه خود به اختلافی فاحش بین طولهای پراکندگی np از یک سو و pp و nn از سوی دیگر منجر می‌شود.

۲-۴-۳) نظریه مزونی یوکاوا^۱

اساس نظریه یوکاوا معادله کلاین-گوردون^۲ است [۱، ۱۱، ۱۲]. می‌دانیم که معادله نسبیتی برای یک ذره آزاد را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_\pi^2 c^4 \quad (۳۳-۲)$$

از مکانیک کوانتومی می‌توانیم شکل عملگری E و P را بصورت

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad ; \quad p \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (۳۴-۲)$$

بنویسیم و از آنجا با تاثیر عملگرهای رابطه (۳۴-۲) بر روی تابع موج ϕ می‌توانیم معادله (۳۳-۲) را بصورت زیر بنویسیم:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \phi + m_\pi^2 c^4 \phi \quad (۳۵-۲)$$

یا با استفاده از x_1 و x_2 و x_3 برای سه مختصه فضایی و x_4 برای ict می‌توان رابطه (۳۵-۲) را به صورت

$$\left[-\hbar^2 c^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_4^2} \right) + m_\pi^2 c^4 \right] \phi = 0 \quad (۳۶-۲)$$

یا

$$\left(\square^2 + \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0 \quad (۳۷-۲) \text{ الف}$$

یا

$$(\square^2 + \mu^2) \phi = 0 \quad (۳۷-۲) \text{ ب}$$

^۱ Yukawa's Meson Theory

^۲ Klein-Gordon Equation

نوشت که در آن

$$\square^2 \phi = - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_4^2} \right) \quad (۲-۳۸ \text{ الف})$$

و

$$\mu = \frac{m_\pi c}{\hbar} \quad (۲-۳۸ \text{ ب})$$

معادله (۲-۳۷) معادله کلاین-گوردون نامیده نام دارد. در حالت ایستا، $\frac{\partial}{\partial x_4}$ وجود ندارد و داریم:

$$\square^2 = \nabla^2 = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \quad (۲-۳۹)$$

و رابطه (۲-۳۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(\nabla^2 + \mu^2)\phi = 0 \quad (۲-۴۰)$$

این رابطه، یک جواب متقارن کروی مطابق رابطه زیر برای میدان مزونی به دست می‌دهد:

$$\phi(r) = -\gamma \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (۲-۴۱)$$

که در آن، γ یک عدد ثابت است. مشابه مورد الکترومغناطیس، با ضرب تابع (۲-۴۱) در γ می‌توان تابع انرژی پتانسیل را به دست آورد که در شکل (۲-۶) نیز نشان داده شده است. جواب (۲-۴۱)، بردی به اندازه $1/\mu$ یا $\hbar/m_\pi c$ دارد که طول موج کامپتون^۱ ذره‌ای به جرم m_π است. اگر $\hbar/m_\pi c$ را با برد نیروی هسته‌ای ($1fm$) برابر بگیریم بدست می‌آوریم: $m_\pi \approx 200m_e$ این با مقدار تجربی جرم مزون π که $266m_e$ است قابل قیاس است. الان دیگر می‌توان پذیرفت که مزون‌های π ذرات میدان کوانتومی نیروی هسته‌ای هستند. به این ترتیب می‌بینیم که یک کاربرد ساده معادله کلاین-گوردون منجر به توضیح وجود مزون‌های π می‌شود.

سه نوع مزون π وجود دارد که عبارتند از: π^+ ، π^- و π^0 . در حالیکه مزون بی‌بار π^0 می‌تواند به عنوان کوانتوم میدان مزونی تنها بین پروتون- پروتون و نوترون- نوترون و پروتون- نوترون اثر کند،

¹ Compton Wave Length

مزون π^+ فقط می‌تواند بین پروتون-نوترون عمل کند و مزون π^- فقط بین نوترون-پروتون می‌تواند فرض کرد این مزون‌ها به عنوان ذرات تبدالی بین نوکلئون‌ها عمل می‌کنند. یک میدان مزون π^+ که بین پروتون-نوترون عمل می‌کند می‌تواند از یک پروتون گسیل شود، آنرا نوترونش کند و توسط یک نوترون جذب شود و آنرا پروتونش کند و فرایند می‌تواند بصورت عقب و جلو تکرار شود. بطور مشابه مزون π^- نیز می‌تواند از یک نوترون گسیل و جذب یک پروتون شود. در مورد ذرات یکسان، مزون π^0 می‌تواند از هر یک از نوکلئون‌ها گسیل و جذب دیگری شود. این بیان تبادل مزون فقط برای روشن شدن مطلب است اما باید توجه شود که مزونهای جذبی و گسیلی صرفاً مجازی اند. جرم‌ها (یا انرژی) و عمر تبدالی آنها باید از اصل عدم قطعیت پیروی کند:

$$n(m_\pi c^2)\Delta t \approx \hbar \quad (42-2)$$

که در آن n تعداد مزون‌های مبادله شده است. در اینجا،

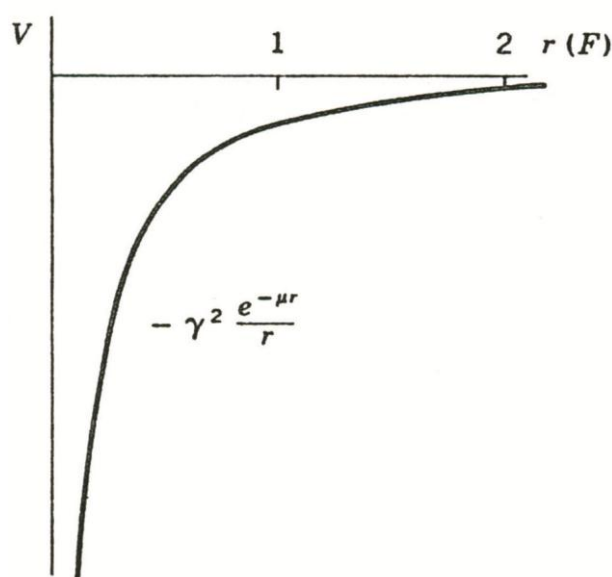
$$c\Delta t \approx \frac{\hbar}{nm_\pi c} \quad (43-2)$$

برد نیروهای هسته‌ای را می‌دهد که در حالت $n=1$ همان طول موج کامپتون و برای $n>1$ کوچکتر از آن است. این بدان معناست که با افزایش تعداد مزونهای تبدالی برد نیرو کمتر می‌شود. همچنین با سنگین‌تر شدن جرم، برد کمتر می‌شود. می‌دانیم مزون‌های K با جرم $m_K \approx 500m_e$ نیز می‌توانند از نوکلئون‌ها گسیل شوند. با این حال به خاطر جرم زیاد آنها، بردشان آنقدر کوچکتر از برد نیروی هسته‌ایست که سهم اصلی را مزون‌های π دارند. توضیح اینکه معادله کلاین-گوردون (۲-۳۷) فقط به میدان تک مولفه ϕ و مزونهای اسکالر می‌پردازد.

محاسبات تفصیلت‌تر نظریه مزونی، رابطه‌ای کاملتر از رابطه (۲-۴۱) می‌دهد که به پتانسیل تبدالی تک

پیونی ($OPEP$)^۱ معروف است و به صورت زیر نوشته می‌شود [۹]:

¹ One-Pion Exchange Potential



شکل (۶-۲) فرم پتانسیل یوکاوا [۹]

$$V = \frac{g^2}{12} m_\pi c^2 \left(\frac{m_\pi}{m_p} \right) (2\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} - 3) \left\{ (2\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} - 3) + S_{12} \left[1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{(\mu r)^2} \right] \right\} \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \quad (۴۴-۲)$$

که S_{12} عبارتی است برای نیروی تانسوری (۲-۱۴). رابطه بالا همان رابطه (۲-۳۰) است که در آن v_W ، v_M ، v_B و v_H غیر صفرند. بنابراین مشاهده می‌شود که نیروی تانسوری و چهار نیروی تبدالی بخش (۲-۳) به طور طبیعی از نظریه مزونی نتیجه می‌شود. در رابطه بالا ثابت g^2 از آزمایش‌های پراکندگی مزون-نوکلئون تعیین شده است. مقدار g^2 چنان است که کمیت بی بعد $g^2 / \hbar c$ حدود 0.3 می‌شود. این کمیت در نظریه‌های میدانی مزون نقشی مشابه کمیت $e^2 / \hbar c = 1/137$ در نظریه الکترومغناطیسی میدان دارد. در محاسبات پدیده‌های الکترومغناطیسی غالباً بسطی از توان $e^2 / \hbar c$ به وجود می‌آید که سری به سرعت همگرا می‌شود ولی در نظریه مزونی این همگرایی بسیار سوال برانگیز است که به اشکالات زیادی منتهی می‌شود.

راه دیگر بیان این مشکل آن است که پتانسیل فوق مربوط به تبادل یک مزون π است. در صورتی که دو نوکلئون به اندازه کافی به هم نزدیک شوند ممکن است که دو مزون به طور همزمان مبادله شوند. در مقایسه با محاسباتی که به رابطه (۲-۳۲) انجامید، هنگامی که ΔE دو برابر می‌شود Δt و در نتیجه

برد نیرو $(1/\mu)$ ، نصف می‌شود. پس اثر این امر در جمله‌های پتانسیل متناسب است با $e^{-2\mu r}$. به همین ترتیب تبادل سه مزونی منجر به جمله‌هایی متناسب با $e^{-3\mu r}$ و غیره می‌شود. متأسفانه تبادل چند مزونی فرایند بسیار پیچیده‌ای است که نمی‌توان آن را به روشنی با نظریه‌های فعلی میدان محاسبه کرد. بنابراین اثر آن را در نیروی هسته‌ای نمی‌توان با اطمینان حساب کرد.

بنا بر رابطه (۲-۳۲) برد نیروهای مربوط به مزونهای سنگینتر و تبادل چند مزونی به طور قابل ملاحظه‌ای کمتر از برد نیروهای تبدالی یک پیونی است. رابطه (۲-۴۴) برای فاصله‌های بزرگ مثلاً $r > 3fm$ معتبر است.

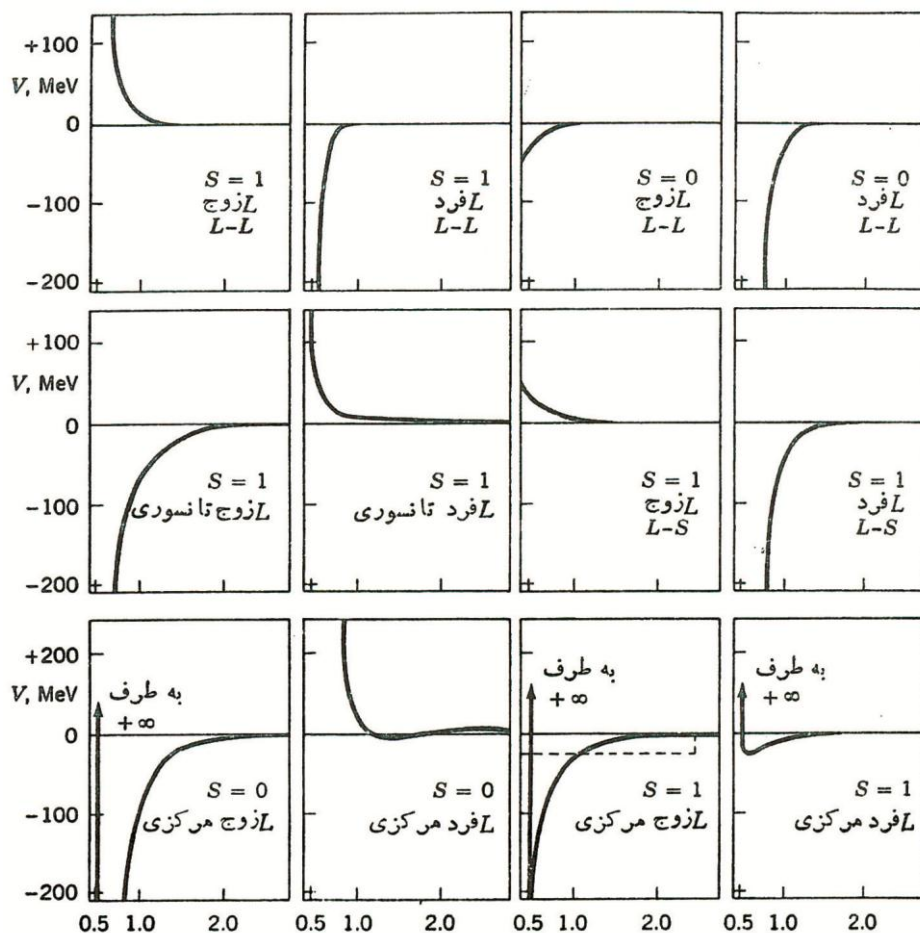
۲-۴-۴) پتانسیل هامادا-جانسون^۱

در بخش (۲-۱-۶) دیدیم که نیروی نوکلئون-نوکلئون در فواصل کمتر از 0.5 فرمی شامل یک مغز دافع است؛ یعنی پتانسیل به ازای یک مقدار r به سمت $+\infty$ می‌رود و دو نوکلئون تحت هیچ شرایطی نمی‌توانند به هم نزدیکتر از این شوند و در بخش (۲-۳-۲) این موضوع را ناشی از تبادل مزون ω دانستیم (متأسفانه به علت محدودیت‌های پرآش ساختار دقیق این قسمت از نیروی هسته‌ای به آسانی قابل درک نیست).

یکی از پتانسیل‌های نوکلئون-نوکلئون که کاربرد گسترده‌ای دارد و این رفتارها را به خوبی برآورده می‌کند، پتانسیل هامادا-جانسون است. این پتانسیل علاوه برآنکه شامل شش پتانسیل استاتیکی رابطه (۲-۱۶) می‌شود، شامل پتانسیل اسپین-مدار برای L زوج و فرد که به $L-S$ موسوم است و پتانسیل وابسته به سرعت درجه دو به صورت $[L.L-(L.S)^2]$ که برای L زوج و فرد و برای $S=1$ و $S=0$ متفاوت است نیز می‌شود. تمام پتانسیل‌های استاتیکی مرکزی چنان در نظر گرفته شده‌اند که دارای یک مغزی سخت به شعاعی در حدود 0.5 فرمی باشند؛ یعنی پتانسیل‌ها در آن فاصله به طور ناپیوسته به $+\infty$ می‌روند. از آنجا که در همه حالتها، یکی از چهار پتانسیل به کار می‌رود و جمع هر چیز با ∞ هنوز هم ∞ است، مغزی سخت در پتانسیل کل موثر است.

¹ Hamada-Johnson Potential

دوازده مولفه پتانسیل هامادا-جانسون که در شکل (۷-۲) نشان داده شده‌اند باید در ضرایبی که در



شکل (۷-۲) مولفه های پتانسیل هامادا-جانسون [۹].

جدول (۱-۲) آمده اند ضرب شوند. این ضرایب بستگی به راستای نسبی بردارهای S و L دارند که می‌توان آنها را از ستون اول آن استخراج کرد. آنها از مقادیر $L.S$ و $L.L$ ناشی می‌شوند. مشاهده می‌شود که این ضرایب گاهی خیلی بزرگتر از واحدند و گاهی پتانسیل را از جاذبه به دافعه و برعکس تغییر می‌دهند (این امر در جمله $L.S$ صادق است). پتانسیل‌های تانسوری، جدا از ضرایب نزدیک به واحد، آنگونه‌اند که در شکل (۷-۲) برای سمتگیری ذرات نسبت به اسپین مطابق شکل (۱-۲) (ب) نشان داده شده است. هنگامی که سمتگیری مطابق شکل (۱-۲) (الف) باشد، ضریب نزدیک به ۱- می‌شود. مشاهده می‌شود که جهت نیروی تانسوری که در شکل (۱-۲) نشان داده شد تنها در حالت‌های L زوج معتبر است.

باید دانست که پتانسیل واقعی در برهم‌کنش دو نوکلئون، جمع همه پتانسیل‌های به‌کاربردی است؛ مثلاً هرگاه اسپین‌های آنها موازی باشند ($S=1$) و در حالت $L=1$ برهم‌کنش کنند، پتانسیل‌های به‌کاربردی عبارت‌اند از: چهارمی از ردیف پایین، دومی و چهارمی در ردیف وسط و دومی در ردیف بالا. اگر نوکلئون‌های که برهم‌کنش دارند هر دو پروتون باشند، علاوه بر اینها نیروی کولنی هم وجود دارد. مقدار این نیروی در ۱ فرمی برابر با $1/4 \text{ MeV}$ + است و البته برحسب $1/r$ تغییر می‌کند که اگر در

جدول (۱-۲) ضرایبی که باید در مولفه‌های شکل (۷-۲) ضرب شوند [۹].

$ L+S $	$\times V_{L-S}$	$\times V_{L-L}$
$L+1$	L	L
$L-1$	$-(L+1)$	$-(L+1)$
$L(S=1)$	-1	$2L^2 + 2L - 1$
$L(S=0)$	—————	$-2L(L+1)$

شکل (۷-۲) رسم شود خیلی کوچکتر از آن خواهد بود که بشود آن را از خط $V=0$ تشخیص داد. از این واقعیت که همه پتانسیل‌های شکل (۷-۲) متفاوت هستند، می‌توان نتیجه گرفت که نیروهای تبدلی نقش خیلی مهمی را در نیروی هسته‌ای بازی می‌کنند. مخصوصاً که پتانسیل‌های مربوط به L زوج و فرد تمایل به علامت مخالف هم دارند. این بدان معنی است که نیروهای تبادلی فضایی خیلی قوی هستند. در بخش (۲-۲) دیدیم که این نیرو بستگی به زوج یا فرد بودن L دارد.

چند پتانسیل هسته‌ای دیگر نیز وجود دارند که رفتار کلی آنها شبیه پتانسیل هامادا-جانسون است

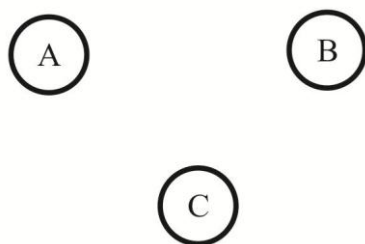
که از جمله آنها می‌توان به پتانسیلهای راید^۱ [۹] و پاریس^۲ [۱۳] اشاره کرد.

¹ Reid

² Paris

۲-۴-۵) نیروهای چند جسمی

تا اینجا بطور ضمنی فرض شد که نیروی هسته‌ای نیرویی دو جسمی است. در صورتی که اگر نوکلئون‌های A ، B و C مطابق شکل (۲-۸) نزدیک هم باشند، نیروی اعمال شده بر A ، $\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC}$ است که اگر C نبود \mathbf{F}_{AB} نیروی میان A و B بود و اگر B نبود \mathbf{F}_{AC} نیروی میان A و C می‌شد.



شکل (۲-۸) یک سیستم سه جسمی.

این البته رفتار نیروهای الکترومغناطیسی و گرانشی است. از آنچه در مدل نیروی تبادل در بخش‌های پیشین دیدیم، چنین بر می‌آید که نیروی تبادل مزونی فقط میان جفتها عمل می‌کنند؛ اما تبادلهای دیگری نیز وجود دارند؛ برای مثال هنگامی که دو نوکلئون حضور دارند و یکی از نوکلئون‌ها دو مزون گسیل می‌کند، هر دو مزون باید جذب نوکلئون دیگر شوند، ولی هرگاه دو نوکلئون دیگر علاوه بر نوکلئون اول حضور داشته باشند دو مزون گسیل شده می‌توانند جداگانه جذب هر یک از دو نوکلئون شوند. این امر منجر به «نیروی سه جسمی»^۱ می‌شود؛ نیرویی که در آن دیگر تعریف بالا از نیروی دو جسمی برقرار نیست. به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که طرح تبادل مزونی، نیروهای چهار جسمی و پنج جسمی و غیره - که به طور کلی نیروی چند جسمی نامیده می‌شوند - را نیز پیش‌بینی می‌کند. از آنجا که باید مزونهای زیادی به طور همزمان در این فرایندها ایجاد شوند، از بحثی که منجر به رابطه (۲-۴۳) شد می‌توان نتیجه گرفت که برد نیروها با افزایش تعداد جسمها کاهش یابد. می‌توان به طور تقریبی تخمین زد که برد نیروی n جسمی، $1/(n-1)$ برابر برد نیروی دو جسمی بشود. اگر برد را $1/\mu$ بگیریم این مقدار برای نیروهای ۲، ۳، ۴ و ۵ جسمی به ترتیب حدود $1/4$ ، $1/7$ ، $1/10$ و $1/14$ را

¹ Three-Body Force

۰/۳۵ فرمی است. برای تخمین فاصله بین نوکلئون‌ها، V/A یعنی حجم به ازای نوکلئون را حساب می‌کنیم که طبق (۷-۱) برابر می‌شود با: $(\frac{4}{3})\pi(1.07fm)^3$ ؛ یعنی حجم هر نوکلئون بطور متوسط برابر است با حجم کره ای به شعاع 1.07 فرمی و بنابراین متوسط فاصله نوکلئون‌ها در یک هسته حدود $2/1$ می‌شود. علاوه بر این، به علت نیروی دافعه قوی، نوکلئونها تقریبا هیچوقت به هم از حدود 0.5 فرمی نزدیکتر نمی‌شوند. براینده بحث این است که در تعیین ساختار هسته نیروی دو جسمی است که اهمیت زیادی دارد و نیروهای چند جسمی - به استثنای نیروی سه جسمی - بی‌اهمیتند. این نیرو به راحتی در سیستم‌هایی که شامل سه نوکلئون هستند مطالعه می‌شود. برای نمونه می‌توان به کارهای کیفسکی^۱ و همکارانش در مراجع [۱۴] و [۱۵] اشاره کرد.

یک روش رهیافت به مسئله، مطالعه سیستم‌های سه‌نوکلئونی است تا ببینیم که آیا می‌توان خصوصیات نیروی سه جسمی را از نیروی دو جسمی محاسبه کرد یا نه؟ جواب منفی شاهدهی بر وجود نیروهای سه جسمی خواهد بود. سیستم‌های سه‌نوکلئونی را می‌توان به صورت حالت‌های مقید نظیر هسته‌های 3H و 3He یا توسط پراکندگی نوترون یا پروتون از دوترون مطالعه کرد که در این زمینه اطلاعات زیادی موجود است.

تجزیه و تحلیل این اطلاعات بسیار مشکل است؛ زیرا مسئله سه جسم در مکانیک کلاسیک نیز هنوز دقیقا حل نشده است. به هر حال کوشش زیادی صرف محاسبه انرژی بستگی 3H (تریتون) شده است که مقدار تجربی آن $8.482 MeV$ است [۱۶،۱۷]. نتایج نشان می‌دهند که انرژی بستگی ناشی از نیروی دو جسم فقط برابر $7 MeV$ است و در نتیجه حدود $1/5 MeV$ از انرژی بستگی آن از نیروی سه جسمی ناشی می‌شود. این نتیجه با تخمین‌هایی که از روشهای دیگر بدست آمده است تفاوت دارد. از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که اهمیت نیروهای سه‌جسمی در هسته در حدود ۲۰ درصد اهمیت نیروهای دو جسمی است. در هسته‌های پیچیده تر این تخمین در حدود ۱۵ درصد است [۹].

¹ A. Kievsky

۵-۲) پتانسیل مای تایپ (*Mie-type*)

پتانسیل *Mie-type*، یک دسته عمومی از پتانسیل‌ها را با فرم کلی زیر را تعریف می‌کند [۱۸ و ۱۹]:

$$V(r) = -V_e \left[\frac{p}{p-q} \left(\frac{r_e}{r} \right)^q - \frac{q}{p-q} \left(\frac{r_e}{r} \right)^p \right] \quad (V_e > 0) \quad (۴۵-۲)$$

این پتانسیل معمولاً برای توصیف برهم‌کنش بین دو اتم در فیزیک مولکولی [۲۰]، اسپکتروسکوپی مولکولی^۱ [۲۱] و مکانیک سیالات [۲۲] به کار رفته است؛ اما در برهم‌کنش‌های مربوط به ذرات درون یک هسته استفاده نشده است. در (۴۵-۲)، r_e فاصله تعادل بین هسته‌ای^۲، V_e انرژی جدایی^۳ بین دو اتم و p و q دو پارامتر هستند. گرچه با تغییر مقادیر p و q پتانسیل *Mie-type* تغییر می‌کند؛ اما فرم کلی و شرایط مرزی آن تغییر نمی‌کند. این شرایط عبارتند از:

$$\begin{cases} V(0) = +\infty \\ V(+\infty) = 0 \\ V(r_e) = -V_e \\ \left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=r_e} = 0 \end{cases} \quad (۴۶-۲)$$

که با رفتار کلی و شرایط مرزی یک پتانسیل مناسب هسته‌ای- که در همین فصل به طور مفصل بررسی شد- نیز سازگار است. این موضوع با توجه به مطالبی که در بخش (۲-۳-۲) بدان اشاره شد، این ایده را در ذهن ما به وجود آورد که آن را به عنوان پتانسیلی برای توصیف یک برهم‌کنش دو نوکلئونی به کار بگیریم. اختیاری بودن پارامترهای p و q امکان تغییر پتانسیل را تا جایی که نتایج تجربی به خوبی باز تولید شوند، ایجاد می‌کند.

این پتانسیل به ازای $p=2$ و $q=1$ به صورت

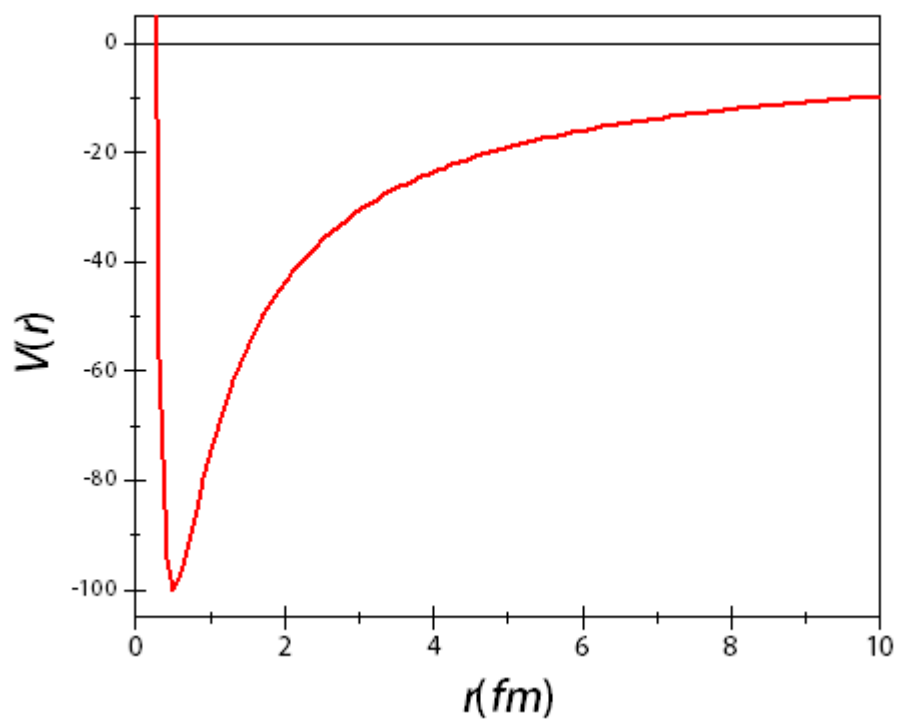
$$V(r) = -V_e \left(\frac{2r_e}{r} - \frac{r_e^2}{r^2} \right) \quad (۴۷-۲)$$

در می‌آید که آن را در شکل (۲-۹) به ازای $r_e = 0.5 \text{ (fm)}$ و $V_e = 100 \text{ (MeV)}$ رسم کرده‌ایم.

¹ molecular spectroscopy

² Equilibrium Internuclear Length

³ Disassociation Energy



شکل (۹-۲) رفتار کلی و شرایط مرزی یک پتانسیل *Mie-type*

فصل سوم

معادله شرودینگر

در

فضای فوق کروی

۳-۱) مقدمه

در این فصل یک فضای لازم برای حل مسایل چند جسمی - یعنی فضای فوق کروی^۱ - را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا یک مجموعه مناسبی از مختصات (مختصات ژاکوبی) و بعد از آن متغیرهای فوق کروی را معرفی می‌کنیم. سپس عملگر هامیلتونی سیستم را برحسب این متغیرها می‌سازیم. در ادامه هماهنگ‌های فوق کروی را بررسی می‌کنیم. در بین روشهای بررسی معادله شرودینگر، روش استفاده از هماهنگهای فوق کروی یکی از کارآمدترین روشهاست [۲۳]. از جمله مزایای این روش، دقت بالا و امکان استفاده از آن در سیستم‌هایی با تعداد ذرات بالاست [۲۴]. در پایان نیز فرم معادله شرودینگر را در D بعد بدست می‌آوریم. این معادله در فصل بعد با پتانسیل Mie -type، حل خواهد شد.

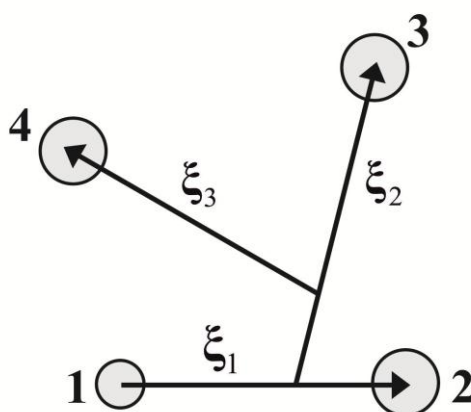
۳-۲) مختصات ژاکوبی^۲

برای بررسی یک سیستم فیزیکی هر مجموعه مختصاتی را می‌توان به کار گرفت. اما بهترین مجموعه

¹ Hyperspherical Space

² Jacobi Coordinates

آن است که حل مساله را روان تر کند. به همین منظور ما مختصات ژاکوبی را معرفی و به کار خواهیم گرفت. برای یک سیستم A ذره‌ای می‌توان $N=A-1$ بردار ژاکوبی و در نتیجه $3N$ مختصه ژاکوبی را تعریف کرد. بردارهای ژاکوبی برای یک سیستم چهارذره‌ای در شکل (۱-۳) نشان داده شده‌اند. در یک تعریف، هر بردار ژاکوبی در واقع مرکز جرم یک زیرسیستم را به یکی از ذرات باقیمانده وصل می‌کند [۱۵]. وقتی ذرات مورد بررسی نوکلئونها باشند، می‌توان با چشم‌پوشی از اختلاف جرم بین پروتون و



شکل (۱-۳) بردارهای ژاکوبی برای یک سیستم چهار ذره‌ای [۲۵]

نوترون، ذرات سیستم را هم جرم در نظر گرفت. برای چنین سیستمی می‌توان N بردار ژاکوبی را به صورت زیر تعریف کرد [۲۶]:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ \xi_2 &= \sqrt{\frac{4}{3}} \left(\mathbf{r}_3 - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) \\ \xi_3 &= \sqrt{\frac{6}{4}} \left(\mathbf{r}_4 - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3} \right) \\ &\vdots \\ \xi_N &= \sqrt{\frac{2N}{N+1}} \left(\mathbf{r}_{N+1} - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_N}{N} \right) = \sqrt{\frac{2N}{N+1}} \left(\mathbf{r}_{N+1} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \right) \end{aligned} \quad (1-3)$$

با تعریف بردار مرکز جرم برای هر A ذره به صورت

$$\mathbf{R} = \frac{1}{A} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_A) = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \mathbf{r}_i = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \mathbf{r}_i \quad (2-3)$$

می‌توان آخرین رابطه از روابط (۱-۳) و همچنین روابط قبل از آن را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}) \\ \xi_2 &= \sqrt{3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{R}) \\ \xi_3 &= \sqrt{\frac{8}{3}}(\mathbf{r}_4 - \mathbf{R}) \\ &\vdots \\ \xi_N &= \sqrt{\frac{2N}{N+1}} \frac{N+1}{N} (\mathbf{r}_{N+1} - \mathbf{R}) = \sqrt{\frac{2(N+1)}{N}} (\mathbf{r}_{N+1} - \mathbf{R})\end{aligned}\quad (3-3)$$

از آنجایی که در مبحث ما، هیچ نیروی خارجی بر هسته وارد نمی‌شود، می‌توان با قراردادن مبدا مختصات در مرکز جرم سیستم، سه مختصه مربوط به \mathbf{R} را حذف و بدین ترتیب به جای A مختصه با $3A-3$ مختصه کار کرد. این تعداد مختصه، مطابق (3-4) در واقع ابعاد (D) فضای ما نیز هستند [27]:

$$D = \begin{cases} 3 & \text{if } A=1 \\ 3A-3=3N & \text{if } A>1 \end{cases} \quad (4-3)$$

3-3 متغیرهای فوق کروی^۱

هسته‌ها شکلی تقریباً کروی دارند و پتانسیلی که در این کار برای توصیف برهم کنش نوکلئونها به کار گرفته می‌شود نیز یک پتانسیل مرکزی است؛ بنابراین بهتر است به جای مختصات دکارتی از مختصات کروی استفاده شود. بدین ترتیب D مختصه دکارتی بخش قبل به D مختصه فوق کروی تبدیل می‌شوند. از این $D=3N$ مختصه، $2N$ مختصه به زوایای قطبی و سمتی N بردار ژاکوبی مربوط می‌شوند، $N-1$ مختصه، فوق زاویه^۲ هستند و تک مختصه دیگر نیز فوق شعاع^۳ است. در ادامه کلیه این کمیت‌ها به طور کامل معرفی می‌شوند.

فوق شعاع r با رابطه زیر تعریف می‌شود [28]:

$$r^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_N^2 = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \quad (3-5 \text{ الف})$$

و می‌توان به کمک روابط (3-1) و (3-2) آن را به دو صورت معادل زیر نوشت:

¹ Hyperspherical Variables

² Hyperangle

³ Hyperradius

فصل سوم؛ معادله شرودینگر در فضای فوق کروی

$$r^2 = \frac{2}{A} (\mathbf{r}_{12}^2 + \mathbf{r}_{23}^2 + \dots + \mathbf{r}_{A1}^2) \quad (\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (۶-۳)$$

$$r^2 = 2 \left[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R})^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{R})^2 + \dots + (\mathbf{r}_A - \mathbf{R})^2 \right] \quad (۷-۳)$$

بر اساس رابطه (۶-۳) فوق شعاع تابع فاصله نسبی ذرات سیستم است و رابطه (۷-۳)، فوق شعاع را بر حسب فاصله ذرات تا مرکز جرم سیستم تعریف می‌کند.

$3N-1$ مختصه دیگر را می‌توان به طرق مختلفی تعریف کرد. در تعریفی که موسوم به «زرنیک-برینکمن»^۱ است و ما در این فصل غالباً همین تعریف را به کار خواهیم گرفت، این مجموعه عبارت است از [۲۹]:

$$\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N; \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N) \quad (۸-۳ \text{ الف})$$

که در آن، ω_i معرف دو زاویه سمتی و قطبی مربوط به هر بردار ژاکوبی ξ_i است که مجموعاً شامل $2N$ زاویه می‌شود و $N-1$ مختصه دیگر $(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N)$ ، فوق زوایه هستند و با رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$(۹-۳)$$

$$|\xi_i| = \xi_i = r \cos \varphi_i \sin \varphi_{i+1} \sin \varphi_{i+2} \dots \sin \varphi_N \quad (i = 1, 2, \dots, N); (\varphi_1 = 0; 0 \leq \varphi_i \leq \pi/2)$$

در یک نمایش دیگر، زوایا و فوق زوایا در یک صورت هم شکل، مطابق رابطه

$$\Omega = \Omega(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1}) \quad (۸-۳ \text{ ب})$$

تعریف می‌شوند که در آن فوق زوایا از θ_{2N+1} شروع می‌شوند. در این نمایش، رابطه بین D مولفه فضایی x_i $D-1$ زاویه θ_i و فوق شعاع

$$r = \left(\sum_{i=1}^D x_i^2 \right)^{1/2} \quad (۵-۳ \text{ ب})$$

به صورت زیر است [۳۰]:

¹ Zernike-Brinkman

فصل سوم؛ معادله شرودینگر در فضای فوق کروی

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cdots \sin \theta_{D-1} \\
 x_2 &= r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cdots \sin \theta_{D-1} \\
 &\vdots \\
 x_i &= r \cos \theta_{i-1} \sin \theta_i \sin \theta_{i+1} \cdots \sin \theta_{D-1} \\
 &\vdots \\
 x_{D-1} &= r \cos \theta_{D-2} \sin \theta_{D-1} \\
 x_D &= r \cos \theta_{D-1}
 \end{aligned} \tag{۱۰-۳}$$

که در آن داریم: $0 \leq r < \infty$; $-\pi \leq \theta_1 \leq \pi$; $0 \leq \theta_i \leq \pi$ ($2 \leq i \leq D-1$)

اکنون کمیات $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}, \xi_N$ و ξ_N که در (۹-۳) آورده شدند، به ترتیب متناظرند با کمیات

$$\left(\sum_{j=1}^{2N+1} x_j^2 \right)^{1/2}; \dots, x_{2N+2}, \dots, x_{D-1}, x_D \text{ در (۱۰-۳).}$$

با استفاده از خود (۱۰-۳) اندازه زوایا به صورت

$$\tan \theta_i = \left(\sum_{j=1}^i x_j^2 \right)^{1/2} / x_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, D-1) \tag{۱۱-۳}$$

به دست می‌آید.

برای یک سیستم $A=3$ ذره‌ای، طبق (۴-۳)، داریم: $D=6$ و در نتیجه شش مولفه رابطه (۱۰-۳) عبارت

می‌شوند از:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \\
 x_2 &= r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \\
 x_3 &= r \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \\
 x_4 &= r \cos \theta_3 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \\
 x_5 &= r \cos \theta_4 \sin \theta_5 \\
 x_6 &= r \cos \theta_5
 \end{aligned} \tag{۱۲-۳}$$

که در آن θ_5 فوق‌زاویه است.

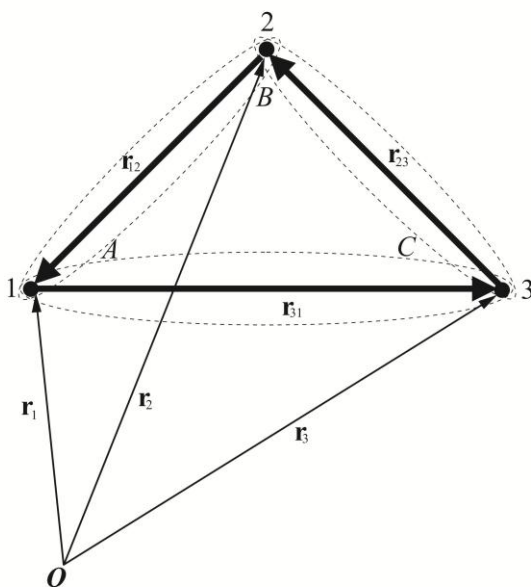
۴-۳ هامیلتونی سیستم

در این قسمت فرم عملگر هامیلتونی (شامل انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی) را در فضای $D=3N$

بعدی و بر حسب متغیرهای فوق کروی به دست می‌آوریم.

۳-۴-۱) پتانسیل فوق مرکزی^۱

در این کار برهم کنشی که بین ذرات در نظر گرفته می‌شود، فقط تابع فاصله ذرات از یکدیگر است لذا به تبعیت از مورد معمولی سه بعدی، آن را پتانسیل فوق مرکزی می‌نامیم. یک پتانسیل فوق مرکزی فقط تابع فوق شعاع r است. ابتدا اثبات کنیم که اگر پتانسیل بین نوکلئونهای یک سیستم سه ذره‌ای، به صورت عکس توانی (از جمله به صورت *Mie-type* که در فصل دو معرفی شد) باشد، می‌توان



شکل (۳-۲) هندسه یک سیستم سه ذره‌ای

آن را به صورت یک پتانسیل فوق مرکزی درآورد. برای این کار توجه می‌کنیم که در مثلث شکل (۳-۲) رابطه بین اضلاع و زوایا عبارت است از:

$$\frac{\sin A}{|\mathbf{r}_{23}|} = \frac{\sin B}{|\mathbf{r}_{31}|} = \frac{\sin C}{|\mathbf{r}_{12}|} = k \quad (13-3)$$

با یک کار ساده ریاضی می‌توان نشان داد:

$$\frac{\sin^2 A}{|\mathbf{r}_{23}|^2} = \frac{\sin^2 B}{|\mathbf{r}_{31}|^2} = \frac{\sin^2 C}{|\mathbf{r}_{12}|^2} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{|\mathbf{r}_{23}|^2 + |\mathbf{r}_{31}|^2 + |\mathbf{r}_{12}|^2} = k^2 \quad (14-3)$$

اگر پتانسیل سیستم سه ذره‌ای به صورت:

¹ Hypercentral Potential

فصل سوم؛ معادله شرودینگر در فضای فوق کروی

$$V = \frac{\sin^{2n} A}{|\mathbf{r}_{23}|^{2n}} + \frac{\sin^{2n} B}{|\mathbf{r}_{31}|^{2n}} + \frac{\sin^{2n} C}{|\mathbf{r}_{12}|^{2n}} \quad (۱۵-۳)$$

نوشته شود، با توجه به رابطه (۱۴-۳) می توان آن را به صورت

$$V = 3k^{2n} = 3 \left(\frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{|\mathbf{r}_{23}|^2 + |\mathbf{r}_{31}|^2 + |\mathbf{r}_{12}|^2} \right)^n \quad (۱۶-۳)$$

و با توجه به رابطه (۶-۳) به صورت

$$V(r) = \frac{c^{2n}}{r^{2n}} \quad (۱۷-۳)$$

نوشت. پس اگر پتانسیل بین هر جفت ذره از ذرات یک سیستم، به صورت عکس توانی (مثل *Mie-type*) باشد، می توان آن را به صورت یک پتانسیل فوق مرکزی با همان مرتبه عکس توانی درآورد. فوق مرکزی بودن پتانسیل به معنی ناوردایی آن نسبت به چرخش در فضای D بعدی است [۳۱].

۳-۴-۲) عملگر انرژی جنبشی

عملگر انرژی جنبشی برای سیستمی متشکل از A ذره با جرمهای یکسان m عبارت است از:

$$K = \sum_{i=1}^A \frac{P_i^2}{2m_i} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^A \nabla_{r_i}^2 \quad (۱۸-۳)$$

با استفاده از روابط (۱-۳) و (۲-۳)، می توان لاپلاسیان را به صورت مجموع دو جمله (یکی مربوط به مختصه مرکز جرم و دیگری مربوط به مختصات نسبی ذرات سیستم نسبت به یکدیگر) نوشت؛ یعنی [۲۹،۳۲]:

$$\sum_{i=1}^A \nabla_{r_i}^2 = \frac{1}{A} \nabla_R^2 + 2 \sum_{i=1}^N \nabla_{\xi_i}^2 \quad (۱۹-۳)$$

بنا بر (۱۸-۳) و (۱۹-۳)، عملگر انرژی جنبشی سیستم، نهایتاً به صورت زیر درمی آید:

$$K = -\frac{\hbar^2}{2mA} \nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{m} \sum_{i=1}^N \nabla_{\xi_i}^2 \quad (۲۰-۳)$$

اکنون می توان تابع موج سیستم را به دو قسمت تجزیه کرد (یکی مربوط به مرکز جرم و یکی مربوط به مکان نسبی ذرات نسبت به یکدیگر):

$$\Psi = \psi(\mathbf{R})\psi(\xi) \quad (21-3)$$

با توجه به اینکه هیچ نیرویی بر مرکز جرم سیستم وارد نمی شود، پتانسیل تابع \mathbf{R} نیست و تابع موج مربوط به مرکز جرم به صورت یک موج تخت درمی آید. پس در ادامه بدون توجه به جمله اول رابطه (20-3)، فقط انرژی جنبشی ذرات سیستم را نسبت به مرکز جرم در نظر می گیریم که عبارتست از:

$$\kappa = -\frac{\hbar^2}{m} \sum_{i=1}^N \nabla_{\xi_i}^2 \quad (22-3)$$

چون هر بردار ژاکوبی ξ_i شامل سه مولفه ξ_{i1} ، ξ_{i2} و ξ_{i3} است، سیگمای رابطه (22-3) در واقع شامل $3N=D$ جمله می شود و می توان نوشت:

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \nabla_{\xi_{ij}}^2 = \nabla_{\xi_{11}}^2 + \nabla_{\xi_{12}}^2 + \nabla_{\xi_{13}}^2 + \dots + \nabla_{\xi_{N1}}^2 + \nabla_{\xi_{N2}}^2 + \nabla_{\xi_{N3}}^2 \quad (23-3)$$

که البته می توان به جای این D مختصه، از مختصات معادل آنها که در (3-10) تعریف شدند استفاده کرد. برای سیستم سه ذره ای، فضا شش بعدی است و لاپلاسیان (23-3) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_5}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_6}\right)^2 \quad (24-3)$$

با دیفرانسیل گیری از (3-12)، جملات (24-3) بر حسب متغیرهای فوق کروی بدست می آیند [33]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 = & \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{5}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_5 \sin^2 \theta_4 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) \\ & + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_5 \sin^2 \theta_4 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) \\ & + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_5 \sin^2 \theta_4 \sin^2 \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \sin^2 \theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right) \\ & + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_5 \sin^3 \theta_4} \frac{\partial}{\partial \theta_4} \sin^3 \theta_4 \frac{\partial}{\partial \theta_4} \right) \\ & + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin^4 \theta_5} \frac{\partial}{\partial \theta_5} \sin^4 \theta_5 \frac{\partial}{\partial \theta_5} \right) \end{aligned} \quad (25-3)$$

۳-۴-۳ عملگر تکانه زاویه‌ای بزرگ

عملگر تکانه زاویه‌ای مداری بزرگ^۱ (یا به طور خلاصه عملگر تکانه زاویه‌ای بزرگ) Γ^2 با روابط زیر تعریف می‌شود [۳۳، ۳۴]:

$$\Gamma^2 = \Gamma_{k=D-1}^2 = \sum_{i,j>i}^D \Gamma_{ij}^2 = \sum_{i,j>i}^D \Gamma_{ij} \Gamma_{ij} \quad (۲۶-۳)$$

$$\Gamma_{ij} = x_i p_j - x_j p_i \quad (۲۷-۳)$$

$$p_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (۲۸-۳)$$

در واقع در آنها داریم: $i = 1, 2, \dots, j-1 ; j = 2, 3, \dots, D$

به کمک این روابط و با دیفرانسیل‌گیری از روابط (۳-۱۰) - که در قسمت (۳-۳-۲) نیز به آنها اشاره شد- می‌توان رابطه بازگشتی زیر را برای Γ_k به دست آورد [۲۰]:

$$\begin{aligned} \Gamma_1^2 &= -\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \\ \Gamma_2^2 &= -\left[\frac{1}{\sin \theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) - \frac{\Gamma_1^2}{\sin^2 \theta_2} \right] \\ &\vdots \\ \Gamma_k^2 &= -\left[\frac{1}{\sin^{k-1} \theta_k} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_k} \sin^{k-1} \theta_k \frac{\partial}{\partial \theta_k} \right) - \frac{\Gamma_{k-1}^2}{\sin^2 \theta_k} \right] \quad (۲۹-۳) \\ &\vdots \\ \Gamma^2 = \Gamma_{D-1}^2 &= -\left[\frac{1}{\sin^{D-2} \theta_{D-1}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}} \sin^{D-2} \theta_{D-1} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}} \right) - \frac{\Gamma_{D-2}^2}{\sin^2 \theta_{D-1}} \right] \end{aligned}$$

(با توجه به اینکه مفهوم زاویه در فضایی حداقل به اندازه $D=2$ بعد تعریف می‌شود، k نمی‌تواند از ۱ کوچکتر باشد؛ به عبارتی $\Gamma_0^2 = 0$).

¹ Grand Angular Momentum Operator

فصل سوم؛ معادله شرودینگر در فضای فوق کروی

برای مورد سه ذره‌ای، داریم: $k = D - 1 = 6 - 1 = 5$ و اگر $\frac{\Gamma_5^2}{r^2}$ به کمک رابطه (۳-۲۹) محاسبه شود،

ملاحظه می‌شود که مقدار آن با مجموع پنج جمله آخر رابطه (۳-۲۵) برابر است؛ بنابراین، (۳-۲۵) را

می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{5}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Gamma_5^2}{r^2} \quad (۳-۳۰)$$

این موضوع کلیت دارد و عملگر لاپلاسیان در یک فضای D بعدی را می‌توان به صورت زیر نوشت

[۱۸]:

$$\nabla_D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{D-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Gamma_{D-1}^2}{r^2} \quad (۳-۳۱)$$

با توجه به مطالب بالا، در حضور یک پتانسیل فوق مرکزی $V(r)$ ، معادله موج شرودینگر در یک فضای

D بعدی به صورت زیر درمی‌آید:

$$H\psi(\xi) = E\psi(\xi) \Rightarrow \left[\frac{-\hbar^2}{m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{D-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Gamma_{D-1}^2}{r^2} \right) + V(r) \right] \psi(\xi) = E\psi(\xi) \quad (۳-۳۲)$$

که در آن، E انرژی کل سیستم است.

۳-۵) ویژه توابع و ویژه مقادیر عملگر تکانه زاویه‌ای بزرگ

در این بخش، ابتدا ویژه توابع عملگر تکانه زاویه‌ای بزرگ (که هماهنگ‌های فوق کروی نام دارند) و

سپس ویژه مقادیر آن را به دست خواهیم آورد.

۳-۵-۱) هماهنگ‌های فوق کروی^۱ ($H.H.$)

برای یک مجموعه مختصات خطی-مثل (۳-۱) - در صورتی که چند جمله‌ای همگن

$H_{[\gamma]}(\xi) = H_{[\gamma]}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ از مرتبه γ ، هماهنگ باشد؛ یعنی در معادله لاپلاس صدق کند:

$$\nabla^2 H_{[\gamma]}(\xi) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \nabla_i^2 H_{[\gamma]}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = 0 \quad (۳-۳۳)$$

^۱ Hyperspherical Harmonics

آنگاه مقدار $H_{[\gamma]}(x)$ بر روی فوق کره‌ای به فوق شعاع واحد؛ یعنی

$$Y_{[\gamma]}(\Omega) = \frac{H_{[\gamma]}(\xi)}{r^\gamma} \quad (34-3)$$

به عنوان یک هماهنگ فوق کروی ($H.H.$) از مرتبه γ تعریف می‌شود [۲۹]. هماهنگ‌های فوق کروی،

در واقع ویژه توابع عملگر تکانه زاویه‌ای مداری بزرگ در نمایش زرنیک-برینکمن؛ یعنی عملگر

$$\Gamma^2(\Omega) = \Gamma_N^2(\Omega_N) \quad (35-3)$$

هستند که $\Gamma_i^2(\Omega_i)$ به صورت

$$\Gamma_i^2(\Omega_i) = \frac{\partial^2}{\partial \varphi_i^2} + [3(i-2) \cot \varphi_i + 2(\cot \varphi_i - \tan \varphi_i)] \frac{\partial}{\partial \varphi_i} + \frac{L^2(\omega_i)}{\cos^2 \varphi_i} + \frac{\Gamma_{i-1}^2(\Omega_{i-1})}{\sin^2 \varphi_i} \quad (36-3)$$

تعریف می‌شود و در آن $L^2(\omega_i)$ همان عملگر آشنای تکانه زاویه‌ای مدار است. با شروع از

$$\Gamma_1^2(\Omega_1) = L^2(\omega_1) ; (\varphi_1=0) \quad (37-3)$$

می‌توان فرم $\Gamma^2(\Omega)$ را از (۳۶-۳) به دست آورد.

مجموعه $[\gamma]$ شامل $3N-1$ عدد کوانتومی متناظر با $3N-1$ درجه آزادی زاویه‌ای (Ω) است که مکان یک

نقطه را روی فوق کره مشخص می‌کنند و در (۳-۸ الف) معرفی شدند (به علت تقارن سیستم نسبت به

مختصه r ، از اعداد کوانتومی متناظر با آن چشمپوشی کرده‌ایم). از این $3N-1$ عدد کوانتومی، $2N$ عدد

کوانتومی مداری و سمتی l_i و m_i ($i=1,2,\dots,N$) مربوط به زوایای قطبی و سمتی N بردار ژاکوبی و $N-$

1 عدد کوانتومی فوق کروی γ_i ($i=2,3,\dots,N$) مربوط به $N-1$ فوق زاویه است [۳۵]. γ_i با رابطه

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^i (2n_j + l_j) = \gamma_{i-1} + 2n_i + l_i ; (n_1=0) \quad (38-3 \text{ الف})$$

تعریف می‌شود که در آن l_j عدد کوانتومی مداری متناظر با j امین بردار ژاکوبی و n_j یک عدد صحیح

نامنفی است [۳۶].

هم چنین عدد کوانتومی مداری بزرگ است عبارت است از:

$$\gamma = \gamma_N \quad (38-3 \text{ ب})$$

پاریمته حالت سیستم عبارت است از:

$$\Pi = (-1)^\gamma = (-1)^{\sum_{i=1}^N (2n_i + l_i)} = (-1)^{l_1 + l_2 + \dots + l_N} \quad (39-3)$$

همانگ‌های فوق کروی همانند هماهنگ‌های کروی یک پایه کامل متعامد را می‌سازند [37]:

$$\int Y_{[\gamma]}^*(\Omega) Y_{[\gamma]}(\Omega) d\Omega = \delta_{[\gamma],[\gamma]} \quad (40-3)$$

و بنابراین می‌توان تابع موج را بر حسب این پایه‌ها بسط داد. در (3-40)، عنصر زاویه ای $d\Omega$ بر روی

فوق کره $D=3N$ بعدی به ابرشعاع واحد عبارت است از [37]:

$$d\Omega = d\omega_1 \prod_{j=2}^N d\omega_j \cos^2 \varphi_j (\sin \varphi_j)^{3j-4} d\varphi_j \quad (41-3)$$

و عنصر حجم فضای D بعدی عبارت می‌شود از:

$$dV = r^{D-1} dr d\Omega \quad (42-3)$$

فرم صریح توابع $H.H$ به صورت زیر است:

$$Y_{[\gamma]}(\Omega) = Y_{l_1}^{m_1}(\omega_1) \prod_{i=2}^N Y_{l_i}^{m_i}(\omega_i) {}^{(i)}F_{\gamma_i}^{l_i, \gamma_{i-1}}(\varphi_i) \quad (43-3)$$

که در آن، $Y_{l_i}^{m_i}(\omega_i)$ ها همان هماهنگ‌های کروی معروفند و ${}^{(i)}F_{\gamma_i}^{l_i, \gamma_{i-1}}(\varphi_i)$ ها توابعی متعامد زاویه‌ای

هستند و با رابطه زیر با چند جمله‌ای‌های معروف ژاکوبی¹ $P_n^{(a,b)}$ متناسب می‌شوند [37]:

$${}^{(i)}F_{\gamma_i}^{l_i, \gamma_{i-1}}(\varphi_i) = \left[\frac{2n_i! \tau_i \Gamma(\tau_i - n_i)}{\Gamma(\tau_i - n_i - l_i - 1/2) \Gamma(n_i + l_i + 3/2)} \right]^{1/2} (\cos \varphi_i)^{l_i} (\sin \varphi_i)^{\gamma_{i-1}} P_{n_i}^{(\tau_i - l_i + 1/2)}(\cos 2\varphi_i) \quad (44-3)$$

$(-1 \leq \cos 2\varphi_i \leq 1)$

که در آن توابع Γ ی داخل کرشه، همان توابع معروف گاما در ریاضیات هستند و τ_i نیز عبارت است

از:

$$\tau_i = \gamma_i + (3i/2) - 1 \quad (45-3)$$

¹ Jacobi Polynomial

برای درک بهتر کمیاتی که در این فصل برشمردیم، تعدادی از آنها را برای سیستم‌های دو، سه و چهار ذره‌ای در جدول (۱-۳) آورده‌ایم. کمیت‌های زاویه‌ای منطبق با تعریف زرنیک-برینکمن هستند.

جدول (۱-۳) تعدادی از کمیت‌های فضای فوق کروی

4	3	2	A	تعداد ذرات سیستم
3	2	1	$N = A - 1$	تعداد بردارهای ژاکوبی
9	6	3	$D = 3N$	ابعاد فضا
6	4	2	$2N$	تعداد متغیرهای زاویه‌ای (تعداد اعداد کوانتومی زاویه‌ای)
l_1, m_1 l_2, m_2 l_3, m_3	l_1, m_1 l_2, m_2	l, m	l_i, m_i ($i = 1, 2, \dots, N$)	اعداد کوانتومی زاویه‌ای
2	1	0	$N - 1$	تعداد متغیرهای فوق زاویه‌ای (تعداد اعداد کوانتومی فوق زاویه‌ای)
φ_2, φ_3	φ_2	-	φ_i ($i = 2, 3, \dots, N$)	نماد فوق زوایا
$2n_2 + l_1 + l_2$ $2(n_2 + n_3) + l_1 + l_2 + l_3$	$2n + l_1 + l_2$	0	$\gamma_i = \sum_{j=1}^i (2n_j + l_j)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) ($n_1 = 0$)	اعداد کوانتومی فوق زاویه‌ای
$\Gamma_3^2(\Omega_3)$	$\Gamma_2^2(\Omega_2)$	$L^2(\omega)$	$\Gamma_N^2(\Omega_N)$	عملگر تکانه زاویه‌ای بزرگ

۳-۵-۲) معادله ویژه مقداری

از قراردادن (۳-۳۱) و (۳-۳۴) در (۳-۳۳) خواهیم داشت:

فصل سوم؛ معادله شرودینگر در فضای فوق کروی

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{D-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Gamma^2}{r^2} \right] r^\gamma Y_{[\gamma]}(\Omega) = 0 \quad (46-3)$$

اعمال مشتق‌ها نتیجه می‌دهد:

$$\left[\gamma(\gamma-1)r^{\gamma-2} + \frac{\gamma(D-1)}{r} r^{\gamma-1} + \Gamma^2 r^{\gamma-2} \right] Y_{[\gamma]}(\Omega) = 0$$

با ضرب طرفین در $r^{2-\gamma}$ و کمی مرتب سازی نهایتاً خواهیم داشت:

$$\Gamma^2 Y_{[\gamma]}(\Omega) = -\gamma(\gamma + D - 2) Y_{[\gamma]}(\Omega) \quad (47-3)$$

γ در (۳۸-۳) معرفی شده است.

۳-۶) فرم معادله فوق شعاعی D بعدی شرودینگر

در بخش (۳۴-۴-۱) گفته شد که تابع موج را می‌توان بر حسب پایه های $H.H.$ بسط داد. بنابراین تابع

موج رابطه (۳۲-۳) را می‌توان به صورت

$$\psi(\xi) = \sum_{[\gamma]} Y_{[\gamma]}(\Omega) R_{[\gamma]}(r) \quad (48-3)$$

نوشت. در حالت کلی این کار باعث می‌شود که معادله (۳۲-۳) به مجموعه‌ای از معادلات جفت شده

برحسب توابع شعاعی $R_{[\gamma]}(r)$ و توابع زاویه‌ای $Y_{[\gamma]}(\Omega)$ درآید که با افزایش تعداد ذرات سیستم (و

بالطبع افزایش ابعاد فضا)، این مجموعه بزرگتر، واگنی پایه‌ها بیشتر و حل معادلات پیچیده‌تر می‌شود

[۳۲]. این موضوع ما را ناگزیر می‌کند که ضمن لحاظ کردن برخی تقریب‌ها، به روشهای عددی مثل

روش وردشی ریلی-ریتس^۱ [۳۸]، کوهن^۲ [۲۶، ۳۹] روی آوریم. چون در کار ما پتانسیل فقط تابع

فوق شعاع r است، قرارداد (۳۸-۳) در (۳۲-۳) یک معادله فوق شعاعی D بعدی را به صورت زیر

نتیجه می‌دهد:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\gamma(\gamma+D-2)}{r^2} \right) + V(r) \right] R_{[\gamma]}(r) = E R_{[\gamma]}(r) \quad (49-3)$$

¹ Rayleigh-Ritz

² Cohn

فصل چهارم

محاسبه خواص استاتیکی

سیستم سه نوکلئونی

در حضور

پتانسیل Mie-Type

۴-۱) مقدمه

در این فصل، معادله D بعدی شرودینگر را که در فصل قبل به دست آوردیم برای یک سیستم دلخواه A ذره‌ای و با پتانسیل فوق‌مرکزی *Mie-type* حل خواهیم کرد و ویژه توابع و طیف کامل ویژه مقادیر انرژی را به دست خواهیم آورد. در قسمت پایانی فصل نیز به منظور بررسی میزان نتیجه بخشی پتانسیل و روشی که در این تحقیق به کار گرفته‌ایم، انرژی بستگی و جرم سیستم سه نوکلئونی تریتون را محاسبه و همچنین شعاع باری آن را برآورد و نتایج را با مقادیر تجربی‌شان مقایسه خواهیم کرد. طی دهه‌های اخیر، روشهای تحلیلی مختلفی برای حل معادله شرودینگر به کار رفته‌اند. اولین روش - های رایج برای حل معادله شرودینگر، تبدیل آن به معادلات دیفرانسیل آشنایی بوده است که

جوابهایشان توابعی خاص (مثل توابع فوق هندسی^۱، چندجمله‌ایهای وابسته لاگر^۲ و ...) است [۴۰]. روش نیکوفوراف-یوواراف^۳ (*NU*) نیز معادله شرودینگر را به یک معادله فوق هندسی گونه درجه دو تبدیل می‌کند [۴۱، ۴۲، ۴۳]. روشهای حدسی^۴ [۴۴، ۴۵] و ابرتقارن^۵ (*SUSY*) [۴۶، ۴۷] نیز از روشهایی هستند که طی سالهای اخیر زیاد به کار گرفته شده‌اند. همچنین می‌توان به قاعده کوانتاش دقیق^۶ (*EQR*) [۴۸] و روش تکرار حدی^۷ (*AIM*) [۴۹، ۵۰] و روشهای مبتنی بر اختلال^۸ [۵۱] اشاره کرد. البته روشی که ما در این کار استفاده خواهیم کرد، موسوم به روش سری توانی^۹ است که در این فصل به طور کامل توضیح داده خواهد شد. این روش در مرجع [۵۲] برای یک پتانسیل دیگر به کار گرفته شده است.

۲-۴ حل معادله فوق شعاعی D بعدی شرودینگر به روش سری توانی

در صورتی که در معادله (۳-۴۹) تغییر متغیر

$$U(r) = r^{(D-1)/2} R(r) \quad (۱-۴)$$

را انجام دهیم، مشتق مرتبه اول حذف می‌شود و معادله شعاعی به فرم زیر درمی‌آید:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{4\gamma(\gamma + D - 2) + (D - 1)(D - 3)}{4r^2} \right) + V(r) \right] U(r) = E U(r) \quad (۲-۴)$$

که با اندکی کار ریاضی، می‌توان آن را به صورت ساده‌تر زیر نوشت:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(2\gamma + D - 1)(2\gamma + D - 3)}{4r^2} + \frac{m}{\hbar^2} (E - V(r)) \right] U(r) = 0 \quad (۳-۴)$$

باتوجه به اتحاد

¹ Hypergeometric Functions

² Associated Laguerre Polynomials

³ Nikoforov-Uvarov Method

⁴ Ansatz Method

⁵ Supersymmetry Method

⁶ Exact Quantization Rule

⁷ Asymptotic Iteration Method

⁸ Pertubation

⁹ Power-Series Method

$$(2\gamma + D - 1)(2\gamma + D - 3) = (2\gamma + D - 2)^2 - 1$$

معادله (۳-۴) به صورت

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\left(\frac{2\gamma + D - 1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \frac{m}{\hbar^2}(E - V(r)) \right] U(r) = 0 \quad (4-4)$$

در می‌آید. با استفاده از متغیر

$$\lambda = \frac{1}{2}(2\gamma + D - 2) \quad (5-4)$$

نهایتاً معادله شعاعی شرودینگر به صورت ساده

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2} + \frac{m}{\hbar^2}(E - V(r)) \right] U(r) = 0 \quad (6-4)$$

در می‌آید. اکنون می‌خواهیم این معادله را با پتانسیل *Mie-type* (۴۷-۲) حل کنیم. این پتانسیل را

می‌توان به صورت

$$V(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} \quad (a = -2V_e r_e; b = V_e r_e^2) \quad (7-4)$$

نوشت. آنگاه رابطه (۶-۴) به ازای این پتانسیل به صورت

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2} + \frac{m}{\hbar^2} \left(E - \frac{a}{r} - \frac{b}{r^2} \right) \right] U(r) = 0 \quad (8-4)$$

در می‌آید. این معادله در مرجع [۵۳] و در یک بعد به روش *NU* حل شده است؛ ولی همانطور که

گفته شد ما برای حل این معادله، $U(r)$ را به صورت یک سری توانی می‌نویسیم؛ یعنی:

$$U_p(r) = e^{kr} \sum_{n=0}^p c_n r^{n+\delta+\frac{1}{2}} \quad (9-4)$$

که در آن، زیروند p اشاره به p امین حالت دارد (مثلا برای یافتن حالت پایه باید قرار دهیم: $p=0$)؛ به عبارتی ما برای یافتن هر حالت از تابع موج، سری را در یک $n=p$ خاصی قطع می‌کنیم. اکنون (۹-۴) را در (۸-۴) قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2} + \frac{m}{\hbar^2} \left(E - \frac{a}{r} - \frac{b}{r^2} \right) \right] e^{kr} \sum_{n=0} c_n r^{n+\delta+\frac{1}{2}} = 0 \quad (10-4)$$

برای محاسبه مشتق دوم نسبت به r می‌نویسیم:

$$\frac{dU}{dr} = \frac{d}{dr} e^{kr} \sum_{n=0} c_n r^{n+\delta+\frac{1}{2}} = k e^{kr} \sum_{n=0} c_n r^{n+\delta+\frac{1}{2}} + e^{kr} \sum_{n=0} (n+\delta+\frac{1}{2}) c_n r^{n+\delta-\frac{1}{2}} \quad (11-4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{dU}{dr} \right) \\ &= k^2 e^{kr} \sum_{n=0} c_n r^{n+\delta+\frac{1}{2}} + 2k e^{kr} \sum_{n=0} (n+\delta+\frac{1}{2}) c_n r^{n+\delta-\frac{1}{2}} + e^{kr} \sum_{n=0} \left((n+\delta)^2 - \frac{1}{4} \right) c_n r^{n+\delta-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (12-4)$$

اکنون با استفاده از (۱۲-۴)، (۱۰-۴) را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &k^2 e^{kr} \sum_{n=0} c_n r^{n+\delta+\frac{1}{2}} + 2k e^{kr} \sum_{n=0} (n+\delta+\frac{1}{2}) c_n r^{n+\delta-\frac{1}{2}} + e^{kr} \sum_{n=0} \left((n+\delta)^2 - \frac{1}{4} \right) c_n r^{n+\delta-\frac{3}{2}} \\ &+ \left(-\frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2} - \frac{mb}{\hbar^2} \frac{1}{r^2} - \frac{ma}{\hbar^2} \frac{1}{r} + \frac{mE}{\hbar^2} \right) e^{kr} \sum_{n=0} c_n r^{n+\delta+\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (13-4)$$

این رابطه را ضمن تقسیم بر عامل ناصفر e^{kr} می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} &k^2 \sum_{n=0} c_n r^{n+\delta+\frac{1}{2}} + 2k \sum_{n=0} (n+\delta+\frac{1}{2}) c_n r^{n+\delta-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0} \left((n+\delta)^2 - \frac{1}{4} \right) c_n r^{n+\delta-\frac{3}{2}} \\ &+ \left(\frac{1}{4} - \lambda^2 - \frac{mb}{\hbar^2} \right) \sum_{n=0} c_n r^{n+\delta-\frac{3}{2}} - \frac{ma}{\hbar^2} \sum_{n=0} c_n r^{n+\delta-\frac{1}{2}} + \frac{mE}{\hbar^2} \sum_{n=0} c_n r^{n+\delta+\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (14-4)$$

نوشت که پس از مرتب کردن، به صورت

$$\begin{aligned} &\left(k^2 + \frac{mE}{\hbar^2} \right) \sum_{n=0} c_n r^{n+\delta+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0} \left(2k(n+\delta+\frac{1}{2}) - \frac{ma}{\hbar^2} \right) c_n r^{n+\delta-\frac{1}{2}} \\ &+ \sum_{n=0} \left((n+\delta)^2 - \lambda^2 - \frac{mb}{\hbar^2} \right) c_n r^{n+\delta-\frac{3}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (15-4)$$

درمی‌آید. این رابطه ایجاب می‌کند که ضرایب کلیه توانهای r صفر باشد؛ بنابراین به عنوان اولین

نتیجه داریم:

$$k^2 + \frac{mE}{\hbar^2} = 0 \quad (۱۶-۴)$$

که در نتیجه خواهیم داشت:

$$E = -\frac{k^2 \hbar^2}{m} \quad (۱۷-۴)$$

از طرفی سومین سری رابطه (۱۵-۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0} \left((n+\delta)^2 - \lambda^2 - \frac{mb}{\hbar^2} \right) c_n r^{n+\delta-\frac{3}{2}} \\ &= (\delta^2 - \lambda^2 - \frac{mb}{\hbar^2}) c_0 r^{\delta-\frac{3}{2}} + \sum_{n=1} \left((n+\delta)^2 - \lambda^2 - \frac{mb}{\hbar^2} \right) c_n r^{n+\delta-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (۱۸-۴)$$

که با تغییر متغیر $i=n-1$ در سری آخر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0} \left((n+\delta)^2 - \lambda^2 - \frac{mb}{\hbar^2} \right) c_n r^{n+\delta-\frac{3}{2}} \\ &= (\delta^2 - \lambda^2 - \frac{mb}{\hbar^2}) c_0 r^{\delta-\frac{3}{2}} + \sum_{i=0} \left((i+1+\delta)^2 - \lambda^2 - \frac{mb}{\hbar^2} \right) c_{i+1} r^{i+\delta-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (۱۹-۴)$$

اکنون با توجه به روابط (۱۶-۴) و (۱۹-۴)، رابطه (۱۵-۴) به صورت

$$\begin{aligned} & \left(\delta^2 - \lambda^2 - \frac{mb}{\hbar^2} \right) c_0 r^{\delta-\frac{3}{2}} + \\ & \sum_{n=0} \left[\left(2k(n+\delta + \frac{1}{2}) - \frac{ma}{\hbar^2} \right) c_n + \left((n+1+\delta)^2 - \lambda^2 - \frac{mb}{\hbar^2} \right) c_{n+1} \right] r^{n+\delta-\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (۲۰-۴)$$

در می‌آید. (۲۰-۴) دو رابطه زیر را ایجاد می‌کند:

$$\delta^2 = \lambda^2 + \frac{mb}{\hbar^2} \quad (۲۱-۴)$$

$$\left(2k(n+\delta + \frac{1}{2}) - \frac{ma}{\hbar^2} \right) c_n + \left((n+1+\delta)^2 - \lambda^2 - \frac{mb}{\hbar^2} \right) c_{n+1} = 0 \quad (۲۲-۴)$$

با نمادگذاری‌های

$$A_n = 2k(n+\delta + \frac{1}{2}) - \frac{ma}{\hbar^2} \quad (۲۳-۴)$$

$$B_n = (n+\delta)^2 - \lambda^2 - \frac{mb}{\hbar^2} \quad (۲۴-۴)$$

رابطه (۲۲-۴)، شکل ساده زیر را به خود می‌گیرد که در واقع یک رابطه بازگشتی برای ضرایب بسط سری (۹-۴) است:

$$A_n c_n + B_{n+1} c_{n+1} = 0 \quad (۲۵-۴)$$

رابطه (یا به تعبیری روابط) (۲۵-۴) را می‌توان به صورت رابطه ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} B_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_0 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{p-1} & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} = 0 \quad (26-4)$$

اکنون برای محاسبه انرژی حالت p ام، طبق آنچه گفته شد، باید داشته باشیم:

$$c_{n \leq p} \neq 0; \quad c_{n > p} = 0 \quad (27-4)$$

این موضوع، طبق (25-4) ایجاب می‌کند که: $A_p = 0$ باشد و بنابراین از (23-4) خواهیم داشت:

$$k_p = \frac{ma}{2\hbar^2(p + \delta + \frac{1}{2})} \quad (28-4)$$

و در نتیجه از (17-4)، ویژه مقدار انرژی حالت p ام به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E_{p,\delta} = -\frac{ma^2}{4\hbar^2(p + \delta + \frac{1}{2})^2} \quad (29-4)$$

بدین ترتیب حل (8-4) کامل شد: ویژه مقادیر انرژی از رابطه (29-4) و ویژه توابع از روابط (1-4) و

(9-4) به دست می‌آیند که در آن δ از رابطه (21-4) - و البته با ملاحظه شرایط مرزی - تعیین

می‌شود. رابطه بین ضرایب بسط $U(r)$ نیز توسط (26-4) بیان می‌شود.

اکنون این فرایند را ابتدا برای حالت پایه و سپس برای حالات برانگیخته انجام می‌دهیم.

4-2-1) تعیین ویژه مقادیر و ویژه توابع انرژی حالت پایه

برای یافتن ویژه مقدار انرژی در حالت پایه، کفایت در (29-4) قرار دهیم: $p=0$. انرژی حالت پایه عبارت خواهد شد از:

$$E_{0,\delta} = -\frac{ma^2}{\hbar^2(2\delta + 1)^2} \quad (30-4)$$

که در آن δ را می‌توان از (26-4) و به ازای $p=0$ به دست آورد.

$$B_0 c_0 = 0 \xrightarrow{c_0 \neq 0} B_0 = 0 \quad (31-4)$$

که با توجه به (24-4) نتیجه می‌دهد:

$$\delta^2 = \lambda^2 + \frac{mb}{\hbar^2} \Rightarrow \delta = \left(\lambda^2 + \frac{mb}{\hbar^2} \right)^{1/2} \quad (32-4)$$

δ را می‌توان با استفاده از (5-4) به صورت زیر نوشت:

$$\delta = \frac{1}{2} \left((2\gamma + D - 2)^2 + \frac{4mb}{\hbar^2} \right)^{1/2} \quad (۳۳-۴)$$

بنابراین انرژی حالت پایه (۴-۳۰) به صورت زیر درمی آید:

$$E_{0,\gamma} = -\frac{ma^2}{\hbar^2} \left[1 + \left((2\gamma + D - 2)^2 + \frac{4mb}{\hbar^2} \right)^{1/2} \right]^{-2} \quad (۳۴-۴)$$

که در آن، a و b در (۴-۷) تعریف شده‌اند.

برای یافتن تابع موج حالت پایه، کافیست در (۴-۹) قرار دهیم: $p=0$ ؛ در این صورت خواهیم داشت:

$$U_0(r) = c_0 e^{k_0 r} r^{\delta + \frac{1}{2}} \quad (۳۵-۴)$$

که در آن، k_0 طبق رابطه (۴-۱۶) عبارت است از:

$$k_0 = -\sqrt{\frac{-mE_0}{\hbar^2}} \quad (۳۶-۴)$$

بنا بر این دو رابطه و با توجه به (۴-۱) تابع موج فوق شعاعی بهنجار نشده در حالت پایه عبارت می-شود از:

$$R_{0,\gamma}(r) = c_0 r^{\frac{\delta-(D-2)}{2}} \exp\left(-\sqrt{\frac{-mE_{0,\gamma}}{\hbar^2}} r\right) \quad (۳۷-۴)$$

که در آن δ از (۴-۳۳) برحسب γ معلوم است.

برای یافتن ضریب بهنجارش c_0 شرط بهنجارش تابع موج در فضای $D=3N$ بعدی؛ یعنی

$$\int |\psi(\xi)|^2 d\nu = 1 \quad (۳۸-۴)$$

را اعمال می‌کنیم که باتوجه به المان حجم در فضای D بعدی؛ یعنی

$$d\nu = r^{D-1} dr d\Omega \quad (۳۹-۴)$$

و نیز روابط (۳-۴۰) و (۳-۴۸) منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$\int_0^\infty |R_{0,\delta}(r)|^2 r^{D-1} dr = 1 \quad (۴۰-۴)$$

با توجه به (۴-۳۷) و (۴-۴۰)، c_0 عبارت خواهد شد از:

$$c_0 = \left[\int_0^\infty r^{2\delta+1} \exp\left(-2\sqrt{\frac{-mE_0}{\hbar^2}} r\right) dr \right]^{-1/2} \quad (۴۱-۴)$$

و با استفاده از رابطه زیر [۵۴]:

$$\int_0^\infty r^m e^{-nr} dr = \frac{m!}{n^{m+1}} \quad (n > 0) \quad (۴۲-۴)$$

c_0 نهایتاً می‌شود:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{(2\delta+1)!}} \left(2\sqrt{\frac{-mE_0}{\hbar^2}} \right)^{\delta+1} \quad (43-4)$$

که در آن δ و E_0 به ترتیب از روابط (۳۳-۴) و (۳۴-۴) معلوم هستند.

۴-۲-۲) تعیین ویژه مقادیر و ویژه توابع انرژی حالات برانگیخته

برای یافتن انرژی اولین حالت برانگیخته، کفایت در (۲۹-۴) و (۹-۴) قرار دهیم: $p=1$. در این صورت ویژه مقدار انرژی و ویژه تابع این حالت به ترتیب عبارت خواهند شد از:

$$E_{1,\delta} = -\frac{ma^2}{\hbar^2(2\delta+3)^2} \quad (44-4)$$

$$U_1(r) = (c_0 + c_1 r) e^{k_1 r} r^{\delta+\frac{1}{2}} \quad (45-4)$$

که در آن، k_1 از روابط (۱۶-۴) و (۴۴-۴) عبارت است از:

$$k_1 = -\sqrt{\frac{-mE_1}{\hbar^2}} \quad (46-4)$$

برای تعیین δ نیز (۲۶-۴) را به ازای $p=1$ در نظر می‌گیریم که به یک دستگاه دو معادله‌ای تقلیل می‌یابد. این دستگاه در صورتی جواب غیربدیهی خواهد داشت که دترمینان ضرایب آن صفر باشد و این موضوع منجر می‌شود به:

$$B_0 B_1 = 0 \quad (47-4)$$

و طبق (۲۴-۴) منجر می‌شود به:

$$\left(\delta^2 - \lambda^2 - \frac{mb}{\hbar^2} \right) \left((1+\delta)^2 - \lambda^2 - \frac{mb}{\hbar^2} \right) = 0 \quad (48-4)$$

این معادله چهار مقدار برای δ می‌دهد؛ ولی فقط جواب زیر شرایط مرزی تابع موج را برآورده می‌کند:

$$\delta = \left(\lambda^2 + \frac{mb}{\hbar^2} \right)^{1/2} \quad (49-4)$$

و در نتیجه تابع موج فوق شعاعی اولین حالت برانگیخته، طبق روابط (۱-۴)، (۴۵-۴) و (۴۶-۴) عبارت است از:

$$R_{1,\delta}(r) = (c_0 + c_1 r) r^{\delta-\frac{D-2}{2}} \exp\left(-\sqrt{\frac{-mE_{1,\delta}}{\hbar^2}} r\right) \quad (50-4)$$

که در آن δ و $E_{1,\delta}$ به ترتیب از روابط (۴۹-۴) و (۴۴-۴) معلومند.

اکنون c_1 را بر حسب c_0 حساب می‌کنیم. برای این منظور، رابطه (۲۵-۴) را به ازای $n=0$ می‌نویسیم. خواهیم داشت:

$$A_0 c_0 + B_1 c_1 = 0 \quad (51-4)$$

که با توجه به روابط (۴-۲۳) و (۴-۲۴) و نیز (۴-۴۹) منجر می شود به:

$$\left(\frac{-ma}{\hbar^2} + 2k_0\left(\delta + \frac{1}{2}\right)\right)c_0 + (2\delta + 1)c_1 = 0 \quad (۵۱-۴)$$

با توجه به (۴-۳۶) و پاره‌ای عملیات سراسر ریاضی، رابطه (۵۱-۴) منجر به رابطه زیر می شود:

$$(2\delta + 1)^2 c_1 = \frac{4ma}{\hbar^2} (\delta + 1)c_0 \quad (۵۲-۴)$$

با فرآیندهای مشابهی، می توان ویژه مقادیر انرژی و ویژه تابع فوق شعاعی حالت دلخواه p ام را به صورت زیر به دست آورد. نتیجه عبارت است از:

$$E_{p,\gamma} = -\left(\frac{ma^2}{\hbar^2}\right) \left[2p + 1 + \left(\frac{4mb}{\hbar^2} + (2\gamma + D - 2)^2\right)^{1/2} \right]^{-2} \quad (۵۳-۴)$$

$$R_{p,\gamma}(r) = (c_0 + c_1 r + \dots + c_p r^p) r^{-\frac{D-2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4mb}{\hbar^2} + (2\gamma + D - 2)^2}} \exp\left(-\sqrt{\frac{-mE_{p,\gamma}}{\hbar^2}} r\right) \quad (۵۴-۴)$$

۳-۴ تعیین جرم تریتون

برای تعیین جرم تریتون، از رابطه (۳-۱) به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$m(^3H) = Zm(^1H) + Nm_n - B/c^2 \quad (۵۵-۴)$$

که در آن، باید مقادیر $Z=1$ و $N=2$ را در نظر بگیریم. همچنین داریم [۵۴]:

$$m(^1H) = 1.0078 u ; m_n = 1.0087 u$$

که در آن، u یکای جرم اتمی و برابر است با $931.50 \text{ MeV}/c^2$. مقدار B نیز، انرژی بستگی سیستم

سه نوکلئونی است که از رابطه (۴-۳۴) و به ازای $(\text{MeV}\cdot\text{s}) \hbar = 6.58 \times 10^{-22}$ ، $D=6$ و $\gamma=0$

محاسبه می شود. نتیجه در جدول (۴-۱) آمده است.

۳-۴ تعیین شعاع باری تریتون

در این قسمت می خواهیم برآوردی از شعاع باری تریتون انجام دهیم. برای این کار، جذر میانگین

مربعی فاصله مرکز جرم آن را از یکی از ذرات سازنده اش؛ یعنی $\langle (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})^2 \rangle^{1/2}$ را به عنوان شعاع

تریتون در نظر می گیریم. همچنین فرض می کنیم:

$$\langle (\mathbf{r}_1 - \mathbf{R})^2 \rangle = \langle (\mathbf{r}_2 - \mathbf{R})^2 \rangle = \langle (\mathbf{r}_3 - \mathbf{R})^2 \rangle \quad (۵۶-۴)$$

با این فرض، رابطه (۳-۷) به ازای $A=3$ به صورت

$$\langle r^2 \rangle = 6 \langle (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})^2 \rangle \quad (57-4)$$

در می آید. بنابراین:

$$\langle (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\langle r^2 \rangle / 6} \quad (58-4)$$

که در آن $\langle r^2 \rangle$ ، مقدار چشمداشتی مربع فوق شعاع و عبارت است از:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int \psi_0^*(\mathbf{r}) r^2 \psi_0(\mathbf{r}) dV}{\int \psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}) dV} = \frac{\int_0^\infty |rR_0(r)|^2 r^5 dr \int Y^*(\Omega) Y(\Omega) d\Omega}{\int_0^\infty |R_0(r)|^2 r^5 dr \int Y^*(\Omega) Y(\Omega) d\Omega} = \frac{\int_0^\infty |rR_0(r)|^2 r^5 dr}{\int_0^\infty |R_0(r)|^2 r^5 dr} \quad (59-4)$$

که در آن $Y(\Omega)$ و $R_0(r)$ به ترتیب در روابط (۳-۴۳) و (۴-۳۷) آمده‌اند. نتیجه در جدول (۴-۱) درج شده است.

۴-۴) نتایج محاسبات مربوط به خواص استاتیکی تریتون

تریتون (3H)، هسته اتم تریتم و یکی از سه ایزوتوپ هیدروژن است. تریتون از دو نوترون و یک پروتون تشکیل شده است و به همراه 3He تنهای سیستمهای سه نوکلئونی هستند.

برای محاسبه انرژی بستگی، جرم و شعاع باری تریتون به ترتیب از روابط (۴-۳۴)، (۴-۵۵) و (۴-۵۸) استفاده و جوابها را به همراه پارامترهای مربوط به تابع موج فوق شعاعی حالت پایه در جدول (۴-۱) درج کرده‌ایم. برای ضرایب پتانسیل، براساس دانشی که در فصل دو از پتانسیل هسته‌ای ارائه شد، مبنای فیزیکی در نظر گرفته‌ایم؛ در آنجا دیدیم که مغز دافع پتانسیل هسته‌ای در نزدیکی‌های ۰/۵ فرمی است (شکل ۲-۴)؛ بنابراین در محاسبات، r_e ی رابطه (۴-۷) را از ۰/۳۵ تا ۰/۷۰ فرمی گرفته‌ایم. همچنین با علم به اینکه عمق پتانسیل‌های هسته‌ای، نوعاً از مرتبه 10 MeV است و با توجه به نمودار پتانسیلهایی که در فصل دو بررسی شد (که پتانسیل ما نیز از آنها الهام گرفته شده است)، V_e را در محدوده 80 MeV تا 160 MeV گرفته‌ایم.

در جدول (۴-۱) ما عمداً در پی آن بوده‌ایم که «یک» مجموعه از ضرایب پتانسیل را برای تعیین هر سه کمیت انتخاب کنیم تا پتانسیل ما محک واقعی‌تری بخورد. با در نظر گرفتن آثار ناشی از تانسوری،

فصل چهارم؛ محاسبه خواص استاتیکی سیستم سه نوکلئونی در حضور پتانسیل *Mie-type*

اسپینی، سه جسمی بودن و ... نیروی هسته‌ای، می‌توان نتیجه مربوط به شعاع بار را بهبود بخشید؛ همچنین می‌توان مقادیری به جز $p=2$ و $q=1$ را در (۲-۴۵) به کار گرفت تا رفتار آن به رفتار پتانسیل واقعی هسته‌ای نزدیکتر شود.

می‌توان مجموعه دیگری از ضرایب پتانسیل را انتخاب کرد که فقط برای شعاع باری و یا برای انرژی بستگی و جرم نتایج بهتری به دست دهد که ما آنها را به ترتیب در جداول (۲-۴) و (۳-۴) آورده‌ایم. در شکل (۱-۴) به عنوان یک نمونه تابع موج فوق شعاعی حالت پایه تریتون با استفاده از روابط (۳۷-۴)، (۳۳-۴) و (۳۴-۴) و به ازای $\delta = 2.164$ ، $k_0 = -0.511$ رسم شده است.

جدول (۱-۴) مقادیر محاسبه شده برای پارامترهای تابع موج حالت پایه و برخی خواص استاتیکی تریتون

بر حسب مقادیری از پارامترهای پتانسیل *Mie-type*

مقدار تجربی [۱۶،۱۷]	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.70	$r_e(fm)$
	159	140	125	113	104	96	83	$V_e(MeV)$
8.482	10.922	10.921	10.882	10.844	10.968	10.981	10.903	انرژی بستگی (MeV)
—	0.513	0.513	0.512	0.511	0.514	0.514	0.513	$-k_0$
—	2.114	2.131	2.147	2.164	2.181	2.198	2.232	δ
3.0160	3.0135	3.0135	3.0135	3.0136	3.0134	3.0134	3.0135	جرم (u)
1.76	2.67	2.68	2.70	2.72	2.72	2.73	2.76	شعاع (fm)

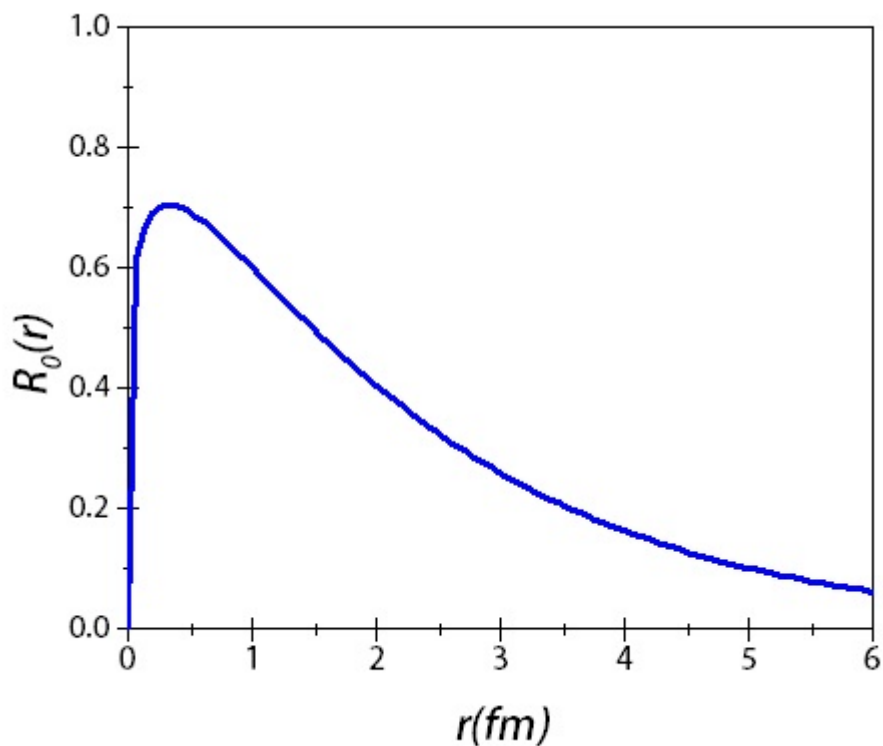
جدول (۲-۴) مقادیر محاسبه شده برای پارامترهای تابع موج حالت پایه و شعاع تریتون

بر حسب مقادیری از پارامترهای پتانسیل *Mie-type*

مقدار تجربی [۱۶،۱۷]	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.70	$r_e(fm)$
	220	200	185	175	165	155	140	$V_e(MeV)$
—	0.699	0.718	0.739	0.767	0.786	0.797	0.821	$-k_0$
—	2.156	2.184	2.214	2.248	2.281	2.312	2.378	δ
1.76	1.98	1.95	1.91	1.86	1.83	1.82	1.80	شعاع (fm)

جدول (۳-۴) مقادیر محاسبه شده برای انرژی بستگی و جرم تریتون
بر حسب مقادیری از پارامترهای پتانسیل *Mie-type*

مقدار تجربی [۱۶،۱۷]	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.70	$r_e(fm)$
	140	125	110	100	90	85	75	$V_e(MeV)$
8.482	8.555	8.797	8.537	8.610	8.360	8.750	9.042	انرژی بستگی (MeV)
3.0160	3.0160	3.0158	3.0160	3.0160	3.0162	3.0158	3.0155	جرم (u)



شکل (۱-۴) تابع موج فوق شعاعی تریتون در حالت پایه. محور عمودی تابع موج فوق شعاعی و محور افقی، فوق شعاع است.

جمع بندی

در این تحقیق برای اولین بار پتانسیلی موسوم به *Mie-type* را برای توصیف برهم‌کنش بین دو نوکلئون در یک هسته به کار گرفتیم. ما این پتانسیل را با الهام از رفتار کلی و شرایط مرزی دو پتانسیل معرف یوکاوا و هامادا - جانسون انتخاب کردیم و پشتوانه تجربی‌اش نیز همان خاصیت اشباع‌پذیری نیروی هسته‌ای است. سپس در مواجهه با مساله چندجسمی، متغیرهای فوق‌کروی را به کار گرفتیم و با استفاده از آنها معادله فوق‌شعاعی شرودینگر را برای یک سیستم A ذره‌ای در D بعد حل کردیم. در ادامه با در نظر گرفتن جواب معادله به صورت یک سری توانی، طیف کامل انرژی و کلیه ویژه توابع آن را به دست آوردیم. در پایان نیز انرژی بستگی و جرم تریتون را محاسبه و شعاع باری آن را نیز برآورد کردیم که نتایج با مقادیر تجربی سازگاری خوبی داشت. خوشبختانه چون پتانسیل انتخاب شده - که با رابطه (۲-۴۵) تعریف می‌شود - نسبت به دو پارامتر p و q انعطاف دارد، می‌توان با انتخاب مقادیر دیگری از آنها، نتایج را هنوز هم به مقادیر تجربی نزدیک کرد؛ در این راستا به طور ویژه مورد $p=4$ و $q=3$ می‌تواند مورد توجه قرار گیرد.

مراجع

- [1] H.S.Hans (2001), **Nuclear Physics-Experimental and Theoretical**, New Age International(P) Limited Publishers, New Dehli
- [2] M. Planck (1901), **Ann. Phys.** 4, 553
- [3] L. De Broglie and L. Brillouin (1929), **Selected Papers on Wave-Mechanics**, London, Blackie
- [4] E. Schrodinger (1926), **Ann. d. Phys.** 81, 109
- [5] W. Heisenberg (1929), **Physical Principles of Quantum Theory**, Univ of Chicago Press, Dover Publications, New York
- [6] P.A.M. Dirac (1926), **Proc. Royal Society**, A, 112,661
- [7] والتر میرهوف (۱۳۸۵)، **مبانی فیزیک هسته‌ای**، محمد فرهاد رحیمی، چاپ ششم، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد
- [8] کنت اس. کرین (۱۳۷۳)، **آشنایی با فیزیک هسته‌ای**، جلد اول، ناصر میرفرخایی و مجید مدرس، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی، تهران
- [9] برنارد ال. کوهن (۱۳۷۰)، **مفاهیم فیزیک هسته‌ای**، مجید مدرس و رقیه معصومی، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی، تهران
- [10] D. Griffiths (2004), **Introduction to Elementary Particles**, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim
- [11] M.R. Shojaei, A.A. Rajabi (2011), **Int. J. Phys. Sci.** , 6(33), pp. 7441-7446
- [12] H. Hassanabadi, H. Rahimov, and S. Zarrinkamar (2011), **Advances in High Energy Physics**, 2011, pp. 1-6
- [13] کاتینگهام، گرینوود (۱۳۸۶)، **مبانی فیزیک هسته‌ای**، محمد فرهاد رحیمی، حمیدرضا رضازاده، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد
- [14] A. Kievsky (2011), **Few-Body Systems**, 49, pp. 19-25
- [15] A. Kievsky, A. Viviani, L. Girlanda, L.E. Maecucci, S. Rosatti (2009), **Few-Body Systems**, 45, pp. 115-118
- [16] <http://cdfe.sinp.msu.ru>, (Centre for Photonuclear Experiments Data)

- [17] S. B. Doma (2002), **High Energy Physics and Nuclear Physics**, 26, 9, pp. 941-948
- [18] G. Mie (1903), **Ann. Phys.** (Leipzig), 11, 657
- [19] D. Agboola (2011), **Acta Physica Polonica A**, 120, 3, pp. 371-376
- [20] R. J. Le Roy and W. Lam (1970), **Chem. Phys. Lett.** 71, p. 544
- [21] J. Plieva (1997), **J. Mol. Spectros.**, 193, 7
- [22] Y. K. Toubin et al. (2003), **J. of Engineering Phys. And Thermophysics**, 76, p. 619
- [23] M. Fabre de la Ripelle, S.A. Sofianos, R.M. adam (2005), **Ann. of Phys.** , 316, pp. 107-159
- [24] A. Kievsky, L. E. Marcucci, S. Rosati, and M. Viviani (1997), **Few-Body Systems**, 22, pp. 1-10
- [25] R. Krivec (1998), **Few-Body Systems**, 25, pp. 199-238
- [26] A. Kievsky, M. Viviani, L. E. Marcucci and S. Rosati (2006), **Few-Body Systems**, 38, pp. 63-66
- [27] H. Hassanabadi, A. A. Rajabi (2007), **Few-Body Systems**, 41, pp. 201-210
- [28] M. Fabre de la Ripelle, H. Friedeldey, and S. A. Sofianos (1988), **Physical Review C**, 38, 1, pp. 449-466
- [29] M. Fabre de la Ripelle (1986), **Models and Methods in Few-Body Physics**, 8th Autumn School
- [30] S.H. Dong (2002), **Foundations of Physics Letters**, 15, 4, pp. 385-390
- [31] A.A. Rajabi (2007), **Commun. Theor. Phys.**, 48, pp. 151-158
- [32] T. K. Das and B. Chakrabarti (2004), **arXiv:quant-ph/0408061v1**, pp. 1-13
- [۳۳] حسن‌آبادی، حسن (۱۳۸۶)، رساله دکتری، محاسبه ویژگی‌های استاتیکی باریونها با استفاده از معادله دیراک، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود
- [34] K.J. Oyewumi (2008), **Theoretical Physics Section, Department of Physics, University of Ilorin**, pp.193-205
- [35] A. A. Rajabi (2005), **Few-Body Systems**, 37, pp. 197-213
- [36] A. A. Rajabi (2005), **Iranian Journal of Physics Research**, 5, 2, pp. 37-41
- [37] M. Fabre de la Ripelle, (1986), **Institue de Physique Nucleaire, Division de Physique Theorique**, 91, Orsay, France

- [38] M. Viviani, L. E. Marcucci, S. Rosati, A. Kievsky, and L. Girlanda (2006), **Few-Body Systems**, 39, pp. 159-176
- [39] M. Viviani, A. Kievsky, and S. Rosati (2006), **Few-Body Systems**, 30, pp. 39-63
- [40] S.M. Ikhdair and Ramazan Sever (2007), **Central European Journal of Physics**, 5(4), pp. 516-527
- [41] A.F. Nikoforov and V. B. Uvarov (1988), "**Special Functions of Mathematical Physics**", Birkhauser, Basel
- [42] R. Sever (2007), **arXiv:quant-ph/0701227v1**, pp. 1-10
- [43] M.R. Pahlavani, S.A. Alavi (2012), **Commun. Theor. Phys.** 58, pp. 739-743
- [44] A.A. Rajabi (2006), **Few-Body Systems**, 40, pp. 21-33
- [45] S.H. Dong (2001), **Institute of High Energy Phys.** Beijing, pp.1-11
- [46] H. Feizi, A.A. Rajabi, M.R.Shojaei (2011), **Acta Physica Polonica B**, 42, 10, pp. 2143-2152
- [47] B. Gonul, O. Ozer, M. Kocak, D. Tutco, and Y. Cancelik (2001), **J. Phys. A: Math. Gen.**, 34, pp. 8271-8279
- [48] S.H. Dong, D. Morales, and J. GarciaRavelo (2007), **Int. J. Phys. E**, 16, pp. 189-198
- [49] O. Bayrak, I. Boztosun, and H. Ciftci (2007), **Int. J. Quant. Chem**, 107, pp. 540-544
- [50] O. Bayrak, G. Kocak, and I. Boztosun (2006), **arXiv:math-ph/0609010v1**, pp. 1-14
- [51] S. M. Ikhdair and R. Sever (2006), **Int. J. Mod. Phys. A**, 21, pp. 6465-6476
- [52] M.S. Child, S.H. Dong, and X.G. Wang (2000), **J. Phys. A: Math. Gen.**, 33, pp. 5653-5661
- [53] C. Tezcan and Ramazan Sever (2009), **Int. J. Theor. Phys.**, 48, pp. 337,350
- [54] G. Woan (2000), "**The Cambridge Handbook of Physics Formulas**", Cambridge University Press

Abstract

The nuclei, in some way, are the most complex quantum systems; because on one hand, the nuclear force itself has a complex nature; on the other hand, in a nucleus containing some particles, there is not a common center of force similar to that of atoms. As a result, investigation of a many-nucleon nucleus is such a difficult task!

In this research, after introducing the characteristics of the nuclear force, it is discussed about the properties of an appropriate nuclear potential. Then by investigating Yukawa and Hamada-Johnson's two popular potentials and the inspiration of their boundary behavior, it is introduced for the first time, a potential called as Mie-type to describe interaction between nucleons. Followed, it is introduced Hyperspherical variables and Hyperspherical Harmonics and it is explained how they are used in Schrodinger equation for the investigation of few-nucleon systems. Then by solving Schrodinger equation with power-series method, it is determined all of the energy's eigen values as well as eigen functions for the arbitrary γ value of an arbitrary A -nucleon System. At last it is calculated specially the Binding energy, Mass and Charge radius of the Triton and it is compared with their experimental values.

Keywords:

Three-Nucleon System, Triton, Binding Energy, Charge Radius, Mie-type Hypercentral Potential, Schrodinger Equation



Shahrood University of Technology

Faculty of Physics

**Calculation of Binding Energy and some Properties of
Three-Nucleon System
using an Appropriate Hypercentral Potential**

Abolghasem Safdari

Supervisors:

Prof. Ali Akbar Rajabi

Dr. Mohammad Reza Shojaei

2013 February