

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک هسته‌ای

محاسبه انرژی بستگی هسته با استفاده از برهم کنش های مشابه پتانسیل مولکولی

مدرس بعلاوه یک پتانسیل مناسب دیگر

دانشجو: محمد نوروزی

اساتید راهنما:

پروفسور علی اکبر رجبی

دکتر محمد رضا شجاعی

پایان نامه تحصیلی جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۹۱

تصویب نامه

شکر خدایی را که بی دریغ می‌بخشد،

مادری را که مهر،

خواهری را که آرامش،

برادری را که اطمینان،

پدری را که همه‌جان.

مهربان عزیزتر از جان اگر چه بی‌ارزش است نتیجه‌ی تلاش من،

اما

شما به شوق من برای تقدیم بنگرید نه بدانچه که تقدیم می‌شود،

اگر چه تنها دارایی من است.

تعهد نامه

چکیده

با پیشرفت هر رشته‌ی علمی، مسائل مطرح شده در آن نیز پیچیده‌تر می‌شوند. یکی از پیچیدگی‌های پیش‌روی فیزیک حل مسائل چند جسمی بوده است. به مرور زمان روش‌های متنوع برای بررسی سیستم‌های چند جسمی توسط افراد مختلف ابداع شدند. در مکانیک کوانتومی مسئله‌ی بررسی سیستم‌های بس ذره‌ای در انرژی‌های پایین، معادل با حل معادله‌ی شرودینگر برای آن سیستم است. در این کار با انتخاب روش بسط هماهنگ‌های فوق‌کروی سیستمی از سه ذره را بررسی نموده‌ایم. ابتدا پتانسیل مولکولی مورس را که برای توصیف یک مولکول دو اتمی به‌کار می‌رود را به‌گونه‌ای تعریف می‌کنیم، که بتوان از آن برای یک سیستم سه ذره‌ای استفاده نمود. سپس با افزودن جمله‌ای به آن، این پتانسیل را به‌گونه‌ای تغییر می‌دهیم که برای یک سیستم هسته‌ای قابل استفاده باشد. این پتانسیل را به عنوان یک پتانسیل سه جسمی در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که کل سیستم تحت تأثیر این پتانسیل می‌باشد. آنگاه با استفاده از مختصات ژاکوبی، معادله‌ی شرودینگر را در فضای شش بعدی (با حذف مختصات مرکز جرم) حل کرده و ویژه تابع حالت پایه و انرژی بستگی برای هسته‌ی هلیوم ^3He را بدست می‌آوریم. جذر میانگین مربعی شعاع نیز بدست آمده است. ویژه تابع حالت پایه‌ی دوترون و انرژی بستگی آن با استفاده از پتانسیل مای و یوکاوا محاسبه شده است.

کلمات کلیدی: روش بسط هماهنگ‌های فوق‌کروی، سیستم سه جسمی، پتانسیل مورس، پتانسیل مای، پتانسیل یوکاوا، مختصات ژاکوبی، انرژی بستگی، جذر میانگین مربعی شعاع، روش NU.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

بررسی سیستم‌های سه ذره‌ای با استفاده از پتانسیل برهم‌کنشی مورس.

(نوزدهمین کنفرانس بهاره‌ی فیزیک، پژوهشکده‌ی فیزیک IPM، ۲۷ و ۲۸ اردیبهشت ۱۳۹۱)

فهرست مطالب

۱	فصل اول
۱-۱	مقدمه
۲-۱	خواص هسته
۲-۱-۱	اندازه هسته
۲-۲-۱	جرم هسته
۳-۲-۱	انرژی بستگی هسته
۴-۲-۱	تکانه‌ی زاویه‌ای هسته
۵-۲-۱	گشتاور الکترومغناطیسی هسته
۶-۲-۱	خواص دینامیکی هسته
۳-۱	نیروهای هسته‌ای
۴-۱	کوانتوم میدان نیروی هسته‌ای
۵-۱	مدلهای هسته‌ای
۱-۵-۱	مدل پتانسیل میانگین
۲-۵-۱	مدل قطره مایع
۳-۵-۱	مدل پوسته‌ای
۲۸	فصل دوم
۱-۲	سیستم‌های چند جسمی
۲-۲	معادله‌ی شرودینگر در ابعاد بالاتر
۳-۲	حالت‌های مقید سیستم‌های سه ذره‌ای
۳۷	فصل سوم
۱-۳	مقدمه
۲-۳	نیروی تبادل و برهم‌کنش نوکلئونی
۳-۳	مفهوم نیروی سه جسمی
۴-۳	سیستم‌های سه جسمی در فیزیک هسته‌ای

۴۹	فصل چهارم.....
۵۰	۱-۴ پتانسیل مورس در فیزیک اتمی.....
۵۱	۲-۴ پتانسیل مورس برای یک سیستم سه جسمی در فیزیک هسته‌ای.....
۵۴	۳-۴ محاسبه تابع موج و انرژی حالت پایه یک سیستم سه نوکلئونی با استفاده از پتانسیل مورس.....
۶۳	۴-۴ دوترون.....
۶۶	۱-۴-۴ محاسبه‌ی انرژی بستگی دوترون با پتانسیل مای.....
۷۳	۲-۴-۴ محاسبه‌ی انرژی بستگی دوترون با استفاده از پتانسیل یوکاوا.....
۷۸	نتیجه‌گیری.....
۷۹	مراجع.....

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱ توزیع چگالی ماده‌ی هسته‌ای..... ۵
- شکل ۲-۱ انرژی بستگی متوسط بر نوکلئون بر حسب عدد جرمی..... ۷
- شکل ۳-۱ گشتاور چارقطبی هسته (الف) $Q > 0$ (ب) $Q < 0$ ۱۰
- شکل ۴-۱ مبادله‌ی یک پیون مجازی در پراکندگی پروتون-نوترون..... ۱۲
- شکل ۵-۱ سهم هریک از جملات موجود در فرمول نیمه‌تجربی جرم در بازسازی انرژی بستگی متوسط نوکلئونها. ۲۰
- شکل ۶-۱ انرژی جدایی نوترون، نقاط پر مقادیر اندازه‌گیری شده را نشان می‌دهند و نقاط خالی مقادیر پیش‌بینی شده توسط معادله (۲۸-۱) می‌باشند. ۲۲
- شکل ۷-۱ انرژی ذرات آلفای گسیل شده از ایزوتوپهای Rn ۲۳
- شکل ۸-۱ سطح مقطعهای گیراندازی نوترونهای با انرژی 1MeV ۲۴
- شکل ۹-۱ سه پتانسیل چاه پتانسیل، نوسانگر هماهنگ و پتانسیل وودز-ساکسون..... ۲۵
- شکل ۱۰-۱ ساختار لایه‌ای در نوسانگر هماهنگ (سمت چپ)، وودز-ساکسون (وسط) و چاه پتانسیل مربعی (سمت راست)..... ۲۶
- شکل ۱۱-۱ شکافتگی ترازهای پتانسیل نوسانگر هماهنگ به علت افزودن جمله‌ی اسپین-مدار..... ۲۷
- شکل ۱-۳ سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون-پروتون..... ۴۰
- شکل ۱-۴ پتانسیل مورس برای یک مولکول دو اتمی، به متناهی بودن پتانسیل برای r های کوچک توجه شود..... ۵۰
- شکل ۲-۴ پتانسیل $V(x)$ در رابطه‌ی (۴-۵)، x فوق شعاع می‌باشد..... ۵۲
- شکل ۳-۴ پتانسیل اصلاح شده‌ی مورس برای یک سیستم سه نوکلئونی با $k_0 > 0$ ۵۳
- شکل ۴-۴ $\frac{1}{x^2}$ و تقریب آن در معادله‌ی (۴-۱۰)..... ۵۵
- شکل ۵-۴ تابع موج برای حالت پایه با پتانسیل مورس..... ۶۰
- شکل ۶-۴ چگالی احتمال برای حالت پایه..... ۶۱
- شکل ۷-۴ تابع موج حالت پایه‌ی دوترون با پتانسیل مای..... ۷۲

شکل ۸-۴ جمله‌ی $\frac{1}{r^2}$ و تقریب آن..... ۷۴

شکل ۹-۴ تابع موج حالت پایه‌ی دوترون با استفاده از پتانسیل یوکاوا..... ۷۷

فهرست جداول

جدول ۴-۱ انرژی بستگی و جذر میانگین مربعی شعاع برای هسته‌ی هلیوم.....۶۲

جدول ۴-۲ انرژی بستگی و جذر میانگین مربعی شعاع دوترون و پارامترهای پتانسیل مای۷۱

جدول ۴-۳ انرژی بستگی و جذر میانگین مربعی شعاع دوترون و پارامترهای پتانسیل یوکاوا.....۷۷

۱ فصل اول

مروری بر فیزیک هسته‌ای

۱-۱ مقدمه

کشف اتفاقی پدیده پرتوزایی توسط بکرل در سال ۱۸۹۶ با تیره شدن یک صفحه‌ی حساس عکاسی در مجاورت نوعی سنگ معدن را می‌توان آغازی برای یک رشته از فیزیک که امروزه فیزیک هسته‌ای نامیده می‌شود دانست. پس از آن تلاش‌های بسیاری برای درک پرتوزایی توسط رادرفورد، گایگر و مارسدن انجام شد. رادرفورد نشان داد (۱۹۱۱) که توجیه آزمایش‌های پراکندگی با فرض یک هسته‌ی سنگین با بار مثبت و قطری بسیار کوچکتر از قطر اتم میسر است. بوه‌ر در سال ۱۹۱۳ اولین مدل سازگار با حرکت الکترون‌ها را ارائه کرد. چیزی که جزئیات تشکیل دهنده‌ی هسته را روشن‌تر کرد کشف نوترون توسط چادویک (۱۹۳۲) بود. آزمایش‌هایی که در این سال انجام شد دو ویژگی اساسی نیروهای هسته‌ای را آشکار کرد، یکی اینکه نیروی هسته‌ای خیلی قوی‌تر از نیروهای شناخته شده‌ای مانند نیروی گرانشی و الکتریکی است، دوم اینکه برد آن بسیار کوتاه است. در سال ۱۹۳۵ یوکاوا با در نظر گرفتن پیشنهاد هایزنبرگ مبنی بر اینکه نیروی هسته‌ای نشأت گرفته از تبادل ذرات بین اجزاء هسته است، نشان داد اگر ذرات تبدالی به اندازه کافی سنگین باشند ویژگی‌های اصلی نیروی هسته‌ای قابل توضیح است. این ذرات تبدالی امروزه مزون نامیده می‌شوند.

امروزه ویژگی‌های نیروی هسته‌ای شناخته شده هستند. چیزی که نمی‌توان از آن صرف‌نظر کرد پیچیدگی این نیرو می‌باشد. پیش از پرداختن به نیروی هسته‌ای ویژگی‌های اساسی یک هسته را بررسی می‌کنیم.

۲-۱ خواص هسته

دسته‌ای از خواص هسته‌ها که وابستگی به زمان ندارند را خواص استاتیکی می‌نامند مانند بار الکتریکی، شعاع، جرم، انرژی بستگی، تکانه‌ی زاویه‌ای، پاریته، گشتاور دوقطبی مغناطیسی، گشتاور چهارقطبی الکتریکی و انرژی حالت‌های برانگیخته. دسته‌ای دیگر از خواص هسته‌ها که وابسته به زمان می‌باشند مانند واپاشی پرتوزا و احتمال واکنش هسته‌ها را خواص دینامیکی می‌نامند. هر یک از این

ویژگی‌ها را به صورت خلاصه توضیح می‌دهیم.

۱-۲-۱ اندازه هسته

پس از اینکه تامسون الکترونها را کشف کرد، اولین مدل مفصل اتمی را پیشنهاد نمود (۱۹۰۰). در مدل تامسون فرض می‌شد که الکترونها در میان بارهای مثبت سنگینی با ابعاد اتمی حدود 10^{-8} cm شناورند. برطبق این مدل هر ذره با سرعت زیاد می‌توانست فقط توسط پدیده‌ی پخش در ماده‌ی جامد نفوذ کند. ولی آزمایشهای پراکندگی ذرات آلفا توسط برگ‌های طلا نشان داد که "پراکندگی به عقب" خیلی بیشتر از آن است که فرایند پخش مجاز می‌دانست. رادرفورد متذکر شد که این امر ناشی از وجود یک هسته‌ی اتمی بسیار کوچک است که به سادگی یک نیروی الکتریکی بر ذره‌ی آلفا وارد می‌کند. آزمایشهای بعدی نشان داد که قوانین پراکندگی بدست آمده در موارد زیر صادق نیستند:

(۱) انرژی جنبشی ذره آلفا بسیار زیاد باشد.

(۲) عدد اتمی ماده پراکننده بسیار کم باشد.

از روی انرژی‌های بحرانی T_α و عدد اتمی Z متناظر، که در آن قانون پراکندگی اعتبار خود را از دست می‌دهد، می‌توان شعاع هسته‌ی پراکننده را تخمین زد. فرض می‌کنیم که اگر فاصله جدایی بین ذره آلفا و مراکز پراکننده کمتر از این شعاع بشود، نیروهای هسته‌ای که بسیار قویتر از نیروی کولنی هسته، که برای بدست آوردن قانون پراکندگی به کار می‌رود، وارد عمل می‌شوند. هنگامی که یک ذره‌ی آلفا در فاصله‌ی بسیار دوری از یک هسته معین است، فقط دارای انرژی جنبشی T_α است. نزدیک‌ترین فاصله‌ی ذره‌ی آلفا با هسته‌ی هدف در یک برخورد شاخ به شاخ است. در این حال، اگر از پس زنی هسته‌ی هدف صرف‌نظر کنیم، ذره‌ی آلفا فقط دارای انرژی پتانسیل خواهد بود. بنابراین با استفاده از پایستگی انرژی خواهیم داشت

$$T_{\alpha} = \frac{2e Ze}{D} \quad (1-1)$$

$2e$: بار ذره آلفا

Ze : بار هسته پراکنده

D : نزدیکترین فاصله

بنابراین از (1-1) داریم

$$D = \frac{2Ze^2}{T_{\alpha}} \quad (2-1)$$

به عنوان نمونه ذرات آلفا با انرژی بیش از 25 MeV به هنگام پراکنده شدن از اورانیوم انحراف‌هایی را از پراکندگی خالص کولنی نشان می‌دهند که در این مورد می‌توان برای D مقدار 10 fm را به دست آورد.

آزمایش‌های دقیقتر با استفاده از پراکندگی ذرات هسته‌ای و الکترون‌ها، نشان داده است که چگالی بار هسته‌ای در مرکز تمام هسته‌ها تقریباً مقداری ثابت است. نوکلئون‌ها ظاهراً در مرکز هسته متراکم نمی‌شوند، بلکه توزیع آنها در تمام هسته نسبتاً ثابت می‌ماند. بنابراین نییجه می‌گیریم که تعداد نوکلئون‌های موجود در واحد حجم هسته تقریباً ثابت است.

$$\frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} \sim C \quad (3-1)$$

از این رو داریم

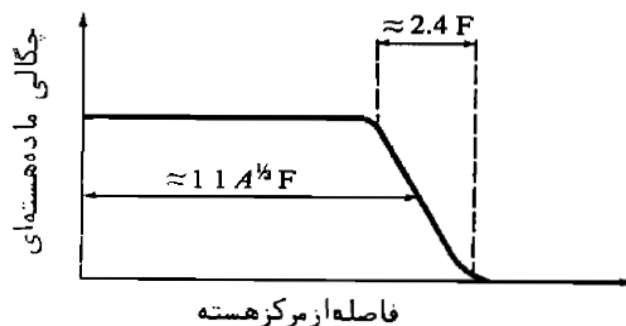
$$R = R_0 A^{1/3} \quad (4-1)$$

که در آن R_0 موسوم به "ثابت شعاع" است و دارای مقادیر $R_0 = \begin{cases} 1.4 \text{ fm} \\ 1.2 \text{ fm} \end{cases}$ است که مقدار

1.4 برای پراکندگی ذرات هسته‌ای از هسته‌ها و مقدار 1.2 برای پراکندگی الکترون از هسته‌ها می‌باشد.

در پراکندگی الکترون، موضع بارهای مثبت (نقطه‌ای) مربوط به پروتون‌های هسته را تعیین می‌کنیم، در حالی که در پراکندگی ذرات هسته‌ای، اندازه‌ی مربوط به ناحیه‌ی ایجاد کننده‌ی نیروی هسته‌ای را که بر ذره اثر می‌گذارد را تعیین می‌کنیم. یعنی نیروی هسته‌ای از ناحیه‌ای که مربوط به بار (یا جرم) است فراتر می‌رود و هسته را بزرگتر از آنچه که هست جلوه می‌دهد.

آزمایش‌های دقیق پراکندگی الکترون (هوفشتاتر ۱۹۵۳) نشان می‌دهند که توزیع چگالی هسته‌ای دارای یک لبه تیز در شعاع نیست بلکه تقریباً دارای شکل (۱-۱) است.



شکل ۱-۱ توزیع چگالی ماده‌ی هسته‌ای [۱].

چگالی تا نقطه‌ی معینی تقریباً ثابت می‌ماند و آنگاه به کندی به صفر میل می‌کند. فاصله‌ای که در طی آن چگالی بار به صفر می‌رسد تقریباً مستقل از اندازه‌ی هسته است و معمولاً مقداری ثابت در نظر گرفته می‌شود.

۲-۲-۱ جرم هسته

پروت (۱۸۱۵) با مقایسه‌ی جرمی فرمول تقریبی زیر را ارائه کرد

$$M \approx \text{عدد صحیح} \times M_H \quad (۵-۱)$$

که در آن

M : جرم یک اتم معین

M_H : جرم یک اتم هیدروژن می باشند.

امروزه عدد صحیح را "عدد جرمی" می‌نامند و آنرا با حرف A نشان می‌دهند.

اولین فرضیه در مورد ساختار هسته به این ترتیب بود که هسته‌ها از A پروتون و $A-Z$ الکترون مقید درست شده‌اند. اما کشف نوترون هایزنبرگ را بر آن داشت که پیشنهاد کند پروتون و نوترون اجزاء متشکله‌ی اساسی تمام هسته‌ها می‌باشند. یک شاخه‌ی تخصصی از فیزیک هسته‌ای (که استون پیشگام آن بود) به نام طیف‌سنجی جرمی با اندازه‌گیری‌های دقیق جرم در کسب اطلاعات بسیار درباره‌ی نیروهای هسته‌ای و ساختار هسته بسیار موثر بوده است. طبق فرضیه‌ی پروتون-نوترون انتظار می‌رود که جرم یک اتم برابر باشد با

$$M \approx ZM_H + NM_n \quad (۶-۱)$$

که در آن

Z : تعداد پروتون‌ها در هسته

N : تعداد نوترون‌ها در هسته

M_n : جرم نوترون است.

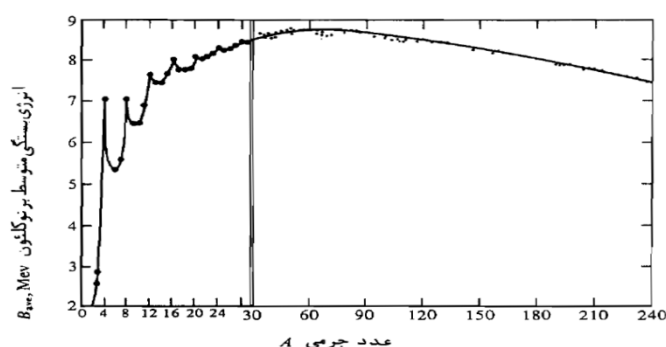
اختلافی بین طرف چپ و راست معادله (۶-۱) وجود دارد که معرف انرژی بستگی هسته‌ای است. همچنین با استفاده از طیف‌سنجی جرمی می‌توان فراوانی نسبی ایزوتوپ‌های مختلف یک عنصر را اندازه‌گیری نمود. از دیگر استفاده‌های طیف‌سنجی جرمی جداسازی ایزوتوپ‌ها می‌باشد.

۱-۲-۳ انرژی بستگی هسته

اختلاف بین جرم واقعی هسته و مجموع جرم تک‌تک نوکلئون‌های آنرا به واحد انرژی، انرژی بستگی $B_{\text{tot}}(A, Z)$ می‌نامند. این انرژی معرف کاری است که باید انجام داد تا هسته را به نوکلئون‌های جدا از هم تجزیه کرد، یا بالعکس، انرژی است که در هنگام تجمع نوکلئون‌های جدا از هم برای تشکیل یک هسته، آزاد می‌شود. می‌توان نوشت

$$B_{\text{tot}}(A, Z) = [Z M_{\text{H}} + N M_{\text{n}} - M(A, Z)] c^2 \quad (7-1)$$

با بررسی نظم و ترتیب انرژی بستگی هسته‌ها می‌توان مدارک ارزنده‌ای از ساختار هسته‌ای بدست آورد. چون انرژی بستگی کم‌وبیش به طور خطی بر حسب A افزایش می‌یابد عموماً در عمل انرژی بستگی متوسط، یعنی $B_{\text{ave}} = B/A$ را به صورت تابعی از A نشان می‌دهند.



شکل ۱-۲ انرژی بستگی متوسط بر نوکلئون بر حسب عدد جرمی [۱].

منحنی جز در ناحیه‌ی هسته‌های بسیار سبک مقدار نسبتاً ثابتی را نشان می‌دهد. انرژی بستگی متوسط بسیاری از هسته‌ها، در حدود 8 MeV برای هر نوکلئون است. ثابت بودن تقریبی

B_{ave} می‌رساند که هر نوکلئون بطور مساوی به نوکلئونهای دیگر پیوند ندارد، یعنی نیروهای هسته‌ای بین نوکلئون‌ها، فراتر از چند نوکلئون نمی‌روند. لذا یا نیروی هسته‌ای باید دارای برد بسیار کوتاهی از مرتبه‌ی "قطر" یک نوکلئون باشد، یا اینکه مثل پیوندهای شیمیایی، اشباع شود.

۱-۲-۴ تکانه‌ی زاویه‌ای هسته

تکانه‌ی زاویه‌ای کل هسته‌ای که شامل A نوکلئون باشد از جمع برداری تکانه‌های زاویه‌ای همه‌ی نوکلئون‌های آن بدست می‌آید. این تکانه‌ی زاویه‌ای کل را معمولاً اسپین هسته می‌نامند و با نماد I نشان می‌دهند.

$$I^2 = \hbar^2 I(I+1) \quad I_z = m\hbar \quad m = -I, \dots, +I \quad (۸-۱)$$

اگر تعداد نوکلئون‌های موجود در هسته زوج باشد، تعداد زوجی از مولفه‌های نیم‌درست در هسته خواهیم داشت و در نتیجه مولفه Z تکانه‌ی کل I فقط مقادیر درست خواهد داشت. اگر تعداد نوکلئون‌ها فرد باشد، مولفه‌ی Z تکانه‌ی کل و بنابراین مقدار I هر دو باید نیم‌درست باشند.

$$I = \text{نیم‌درست} \quad \text{در هسته‌های } A \text{ فرد} \quad (۹-۱)$$

$$I = \text{درست} \quad \text{در هسته‌های } A \text{ زوج}$$

تبدیلات هسته‌ای تحت تأثیر تکانه‌های زاویه‌ای اولیه و نهایی سیستم‌ها قرار می‌گیرند. زیرا این تبدیلات باید قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای را حفظ کنند.

۱-۲-۵ گشتاور الکترومغناطیسی هسته

نظم موجود در حرکت و توزیع نوکلئون‌های درون هسته از برهم‌کنش قوی هسته‌ای حاصل

می‌شود، اما وسیله‌ی کاوش در این توزیع برهم‌کنش الکترومغناطیسی است. با استفاده از برهم‌کنش الکترومغناطیسی می‌توان اطلاعات بسیاری از ساختار هسته بدست آورد. در حقیقت گشتاورهای دوقطبی مغناطیسی و چهارقطبی الکتریکی هسته، نقش مهمی در تعبیر ساختار هسته‌ای دارند. گشتاورهای چهارقطبی بزرگ نشانگر ویژگی‌های تازه‌ای در ساختمان هسته‌ها یعنی تغییر شکل پایدار آنهاست. بطور کلاسیک گشتاور دو قطبی مغناطیسی از حرکت ذرات باردار حاصل می‌شود و می‌توانیم آن را به‌عنوان وسیله‌ی تشخیص توزیع جریان‌هایی در نظر بگیریم که در اطرافشان اثرات مغناطیسی بوجود می‌آورند. در هسته‌های واقعی با در نظر گرفتن اثرات هم‌هی نوکلئون‌ها گشتاور دو قطبی مغناطیسی بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\vec{\mu} = \sum_{i=1}^A \left[g_{l,i} \vec{L}_i + g_{s,i} \vec{S}_i \right] \frac{\mu_N}{\hbar} \quad (10-1)$$

در معادله‌ی بالا μ_N مگنتون هسته‌ای می‌باشد

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3.15215 \times 10^{-8} \text{ ev/T} \quad (11-1)$$

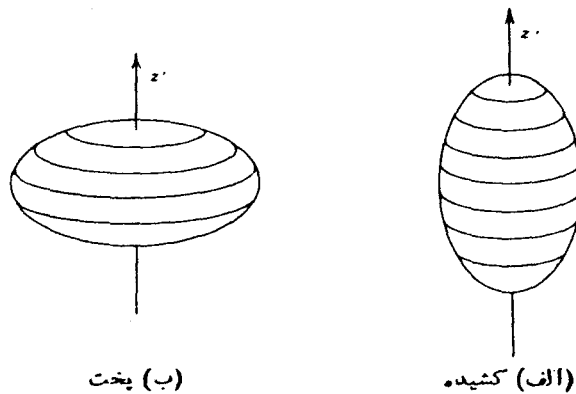
\vec{L} تکانه‌ی زاویه‌ای و \vec{S} تکانه‌ی زاویه‌ای ذاتی می‌باشند. g_l را ضریب g و g_s را ضریب اسپینی g می‌گویند.

گشتاور چارقطبی هسته را چنین تعریف می‌کنند.

$$eQ = \int \rho(\vec{r}') r'^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) dv' \quad (12-1)$$

که برای محاسبه از محور مرجع به‌خصوصی استفاده می‌کنیم، یعنی θ' را نسبت به محوری که تصویر اسپین هسته روی آن بیشینه است اندازه‌گیری می‌کنیم. گشتاور چهارقطبی هسته مشخص می‌کند که هسته کروی است (که برای آن $Q = 0$) یا غیر کروی. اگر $Q > 0$ شود، هسته‌ها را غیر

کروی کشیده می‌نامند، یعنی در رابطه‌ی بالا $r^{12} (3 \cos^2 \theta' - 1) = 3Z^{12} - r^{12}$ بطور متوسط مثبت است. به عبارت دیگر، مقدار بیشتری از چگالی بار هسته در امتداد محور Z' قرار گرفته است تا در امتداد شعاع متوسط (شکل ۳-۱ الف). اگر $r^{12} - 3Z^{12}$ منفی شود محور Z' چگالی بار کمتری از هسته را خواهد داشت و هسته پهن می‌شود در این مورد $Q < 0$ است و تغییر شکل پخت است (شکل ۳-۱ ب).



شکل ۳-۱ گشتاور چهارقطبی هسته (الف) $Q > 0$ (ب) $Q < 0$ [۲].

۶-۲-۱ خواص دینامیکی هسته

هسته‌ها نیز مانند اتم‌ها می‌توانند در حالت‌های برانگیخته با انرژی‌های معین قرار بگیرند. گذارهای بین حالت‌های برانگیخته با گسیل تابش الکترومغناطیسی (پرتوهای گاما) صورت می‌گیرد که شبیه گسیل نور از اتم‌ها است. اختلاف در فاصله‌ی حالت‌ها می‌باشد. حالت‌های انرژی اتمی حدود چند الکترون ولت از هم فاصله دارند، در صورتی که فاصله‌ی بین حالت‌های هسته‌ای حدود 10^4 تا 10^6 الکترون ولت است. مطالعه‌ی طیف‌های پرتو گاما منجر به مطالعه‌ی حالت‌های انرژی هسته‌ای و پیشنهاد مدل‌های هسته‌ای می‌شود. همچنین هسته‌ها یا با گسیل خودبه‌خود الکترون‌های مثبت یا منفی یا با گسیل ذرات آلفا یا توسط بمباران‌های هسته‌ای می‌توانند به یکدیگر تبدیل شوند.

۳-۱ نیروهای هسته‌ای

با استفاده از خواص هسته‌ها که در انرژی‌های پایین و بالا بدست می‌آیند خصوصیات نیروی هسته‌ای بدست می‌آید. برخی از این ویژگیهای مهم عبارتند از:

۱- برهم‌کنش نوکلئون- نوکلئون در پایین‌ترین مرتبه، از یک پتانسیل مرکزی جاذب ناشی می‌شود. برای این پتانسیل مرکزی صورت‌های گوناگونی در نظر گرفته می‌شود، چیزی که در همه‌ی این پتانسیل‌ها مهم است، وابستگی آنها به فاصله‌ی بین نوکلئون‌ها می‌باشد. همچنین وجود هسته‌های گوناگون پایدار نشان می‌دهد که قدرت جاذبه‌ی این پتانسیل در مقایسه با دافعه‌ی کولنی بسیار بیشتر است.

۲- برهم‌کنش نوکلئون- نوکلئون به اسپین وابسته است. از اختلاف سطح مقطع‌های حالت‌های تک و سه تاییه این نتیجه‌گیری بدست می‌آید. شکلی که برای این پتانسیل در نظر گرفته می‌شود باید به‌گونه‌ای باشد که دارای تقارنهایی از جمله انعکاس پاریته و برگشت زمان باشد.

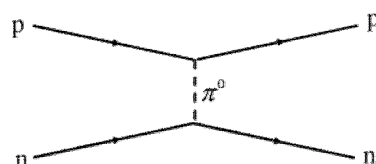
۳- نیروی نوکلئون- نوکلئون مستقل از بار الکتریکی است. یعنی پس از تصحیح نیروی کولنی pp ، نیروهای هسته‌ای nn ، pn و pp با هم مساوی هستند.

۴- برهم‌کنش نوکلئون- نوکلئون در فواصل خیلی کوتاه دافعه می‌شود، به عبارت دیگر هسته دارای یک مغز دافع است. این نتیجه از آنجا ناشی می‌شود که چگالی مرکزی هسته تقریباً ثابت است. بنابراین باید عاملی وجود داشته باشد که از نزدیک شدن بیش از حد نوکلئون‌ها جلوگیری می‌کند. اندازه‌گیری‌هایی که انجام شده شعاع مغز دافع را در حدود $R_0 \simeq 0.5 \text{ fm}$ برآورد می‌کنند.

از دیگر ویژگی‌های نیروی هسته‌ای می‌توان به اشباع‌پذیری، کوتاه برد بودن و وابستگی آن به سرعت نسبی نوکلئون‌ها اشاره کرد.

۴-۱ کوانتوم میدان نیروی هسته‌ای

می‌دانیم که امواج الکترومغناطیسی کوانتیده‌اند و فوتون ذره‌ی مجسم این کوانتش است. در حدود سال ۱۹۳۰ این نظریه تدوین یافت که نیروی الکترومغناطیسی از تبادل فوتون بین دو ذره‌ی باردار ناشی می‌شود. موفقیت این ایده، یوکاوا را برآن داشت تا همان طرح را برای نیروی هسته‌ای بیازماید. تا سال ۱۹۳۴ معلوم شده بود که نیروی هادرونی بسیار قوی است و برد آن از مرتبه‌ی فرمی است. اما هیچ‌گونه اطلاعی درباره‌ی اینکه چه عاملی آن را به وجود می‌آورد در دست نبود. یوکاوا نظریه‌پرداز ژاپنی در آن سال طی یک مقاله‌ی برجسته پیشنهاد کرد که نوع جدیدی از کوانتوم می‌تواند عامل این پدیده باشد. در روش یوکاوا همان طوری که در شکل زیر می‌بینیم نیروی بین دو هادرون، مثلاً یک نوترون و پروتون، به واسطه‌ی یک پيون، برقرار می‌شود. مینیمم انرژی پيون مجازی با $E = mc^2$ و ماکزیمم سرعت آن با c داده می‌شود.



شکل ۴-۱ مبادله‌ی یک پيون مجازی در پراکندگی پروتون-نوترون.

با بازگشت به فوتون و برهم‌کنش مجازی فرایند مبادله را به بهترین وجهی در مرکز جرم دو الکترون برخورد کننده می‌توان بررسی کرد. از آنجا که برخورد کشسان است انرژی الکترون‌ها تغییر نمی‌کند به طوری که $E_1' = E_1$ و $E_2' = E_2$. انرژی کل قبل از گسیل فوتون برابر است با $E = E_1 + E_2$. پس از گسیل کوانتوم و قبل از جذب آن انرژی کل به صورت $E = E_1 + E_2 + E_\gamma$ داده می‌شود و انرژی پایسته نیست. پایستگی انرژی در واقع می‌تواند براساس رابطه‌ی عدم قطعیت هایزنبرگ برای مدت زمان Δt نقض شود.

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar \quad (13-1)$$

مدت زمان لازم Δt برای مشاهده‌ی یک انرژی در محدوده‌ی عدم قطعیت ΔE باید از $\frac{\hbar}{\Delta E}$ بزرگتر باشد. بنابراین، عدم پایستگی انرژی به مقدار ΔE در صورتی که در محدوده‌ی زمانی $\frac{\hbar}{\Delta E} \leq \Delta t$ رخ دهد قابل مشاهده نخواهد بود. در نتیجه فوتونی با انرژی $\Delta E = \hbar \omega$ را در صورتی که برای مدتی کمتر از زمان $t = \frac{\hbar}{\hbar \omega} = \frac{1}{\omega}$ وجود داشته باشد، نمی‌توان مشاهده کرد. از آنجا که فوتون مبادله شده مشاهده نمی‌شود آن را فوتون مجازی می‌نامند.

برخلاف کوانتوم‌های میدان در نیروهای الکترومغناطیسی و گرانشی، کوانتوم میدان در نیروی هسته‌ای دارای جرم محدودی است. پیدایش مزونی که از یک نوکلئون به نوکلئون دیگر برای انتقال نیروی هسته‌ای فرستاده می‌شود، اصل پایستگی انرژی را به میزان ΔE که در حدود جرم مزون در حال سکون، m_π ، است نقض می‌کند.

$$\Delta E \approx m_\pi c^2 \quad (14-1)$$

نقض پایستگی انرژی نمی‌تواند بیش از زمان Δt دوام بیاورد، چون از اصل عدم قطعیت داریم

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{m_\pi c^2} \quad (15-1)$$

حتی اگر فرض کنیم که مزون با سرعتی نزدیک به c حرکت کند بیشترین فاصله‌ای را که می‌تواند در این مدت طی کند برابر خواهد بود با

$$r = c \Delta t = \frac{\hbar}{m_\pi c} = \frac{1}{\mu} \quad (16-1)$$

این برد نیروی هسته‌ای است که به طور عددی برابر 1.4 fm می‌شود.

برای میدان مزونی، معادله‌ی انرژی به صورت زیر است

$$-p^2 c^2 - m_\pi^2 c^4 + E^2 = 0 \quad (17-1)$$

اگر از شکل عملگری E و p در مکانیک کوانتومی استفاده کنیم

$$\begin{aligned} E &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} &= -i\hbar \vec{\nabla} \end{aligned} \quad (18-1)$$

خواهیم داشت

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \mu^2 \phi = 0 \quad (19-1)$$

که μ از رابطه‌ی (۱۶-۱) بدست می‌آید.

اگر برای $\phi(r, t)$ داشته باشیم

$$\phi(r, t) = \phi(r) e^{-i\omega t} \quad (20-1)$$

با جایگذاری (۲۰-۱) در رابطه‌ی (۱۹-۱) خواهیم داشت

$$\nabla^2 \phi - \mu^2 \phi = 0 \quad (21-1)$$

که حل آن چنین است

$$\phi = \gamma \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (22-1)$$

ثابت γ در نظریه‌ی مزونی شبیه ثابت e در نظریه‌ی الکترومغناطیسی است. معادله‌ی (۲۲-۱)

همان پتانسیل یوکاوا است که توصیف کننده‌ی برهم‌کنش قوی می‌باشد.

یوکاوا جرم کوانتوم هادرونی فرض شده را در حدود $100 \text{ MeV}/c^2$ تخمین زد. پیدا شدن ذره‌ای به جرم حدوداً $100 \text{ MeV}/c^2$ در سال ۱۳۱۷/۱۹۳۸ باعث خوش‌حالی فیزیکدان‌ها شد. اما زمانی که پی برده شد ذره‌ی تازه وارد، میون، با ماده به طور قوی برهم‌کنش نمی‌کند و در نتیجه نمی‌تواند مسئول نیروی هادرونی باشد این خوشحالی تبدیل به یأس شد. این معما در سال ۱۹۴۷ هنگامی که پاول و همکارانش در بریستون ثابت کردند که در واقع دو نوع ذره‌ی میان وزن در پرتوهای کیهانی وجود دارد که به آنها پیون π و میون μ گفتند، حل شد.

مزون یوکاوا همان π است که در جو زمین به مقدار زیاد تولید می‌شود، ولی به طور معمول پیش از رسیدن به زمین تجزیه می‌شود. در زمان کشف مزون پی، سنکروسیکلوترون بزرگ و جدید دانشگاه کالیفرنیا ذرات آلفایی با انرژی 380 MeV تولید می‌کرد. گاردنر و لاتس (۱۹۴۸) برای تعیین اینکه آیا می‌توان با بمباران هسته‌ها با ذرات آلفا مزون پی تولید کرد، آزمایش‌هایی انجام دادند که در آنها ذرات آلفا با انرژی بالا هدف نازکی از ماده‌ای مانند کربن، بریلیوم و اورانیوم را بمباران می‌کردند. مجموعه‌ای از صفحات عکاسی در موقعیت مناسبی قرار داده می‌شد تا مزونهای π^- حاصل از این بمباران، پس از انحراف در میدان مغناطیسی سیکلوترون بتواند به این صفحات برسند. بررسی این ردها در امولوسیون آنها را از همان نوع ردهایی نشان می‌داد که از مزون پرتو کیهانی بدست می‌آیند. در آزمایشهای بعدی تولید مصنوعی مزونهای π ، از پروتونهای پرانرژی به عنوان ذرات بمباران کننده و از مواد متعدد به عنوان هدف استفاده می‌شد. بدین ترتیب هر جا که شتاب دهنده‌ی ذرات انرژی بالا وجود داشت، منبع سرشاری از پیون‌ها به راحتی در دسترس قرار می‌گرفت.

تعریف نوین مزون به صورت زیر است

۱- ذره‌ای است بنیادی، یعنی غیرمرکب.

۲- ذره‌ای که می‌تواند در برهم‌کنش‌های قوی شرکت کند.

۳- ذره‌ای که یک بوزون است.

توجه کنید که این تعریف درباره‌ی این مطلب که جرم مزون می‌باید برابر با مقدار میانه‌ای بین جرم الکترون و پروتون باشد، چیزی بیان نمی‌کند. مزون‌های متعددی تعیین هویت شده‌اند که پاره‌ای از آنها از پروتون‌ها هم سنگین‌ترند.

پیونها از تمام ویژگی‌هایی که می‌توان از پیش‌بینی اولیه‌ی یوکاوا انتظار داشت برخوردارند. سه نوع مزون پی با نمادهای π^+ ، π^0 و π^- وجود دارد. پیون‌های باردار شباهت زیادی با هم دارند و تا اندازه‌ای با π^0 اختلاف دارند. جرم هر پیون باردار برابر با 139 MeV و جرم پیون خنثی برابر با 135 MeV است. اسپین تمام پیونها صفر است و در برهم‌کنش‌های قوی شرکت می‌کنند. در حقیقت اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی درست، مشخصه‌ی ذرات میدانی است و هر کدام از این ذرات دارای خواص زیرند

۱- در هر واکنش، اعم از واکنش واپاشی یا برخورد، ذرات میدانی می‌توانند بدون محدودیت آفریده یا نابود شوند. (هیچ قانون بقایی تعداد آنها را محدود نمی‌کند).

۲- هر تعدادی از ذرات میدانی می‌توانند حالت کوانتومی یکسانی را اشغال کنند، اصل طرد پاولی در اینجا به کار نمی‌رود. روش تولید پیون‌ها برای تمام انواع آن یکسان است.

نمونه‌ای از واکنش‌ها به قرار زیر است



بیشترین اختلاف میان انواع باردار و خنثای پیون‌ها در خواص واپاشی آنهاست. پیون‌های باردار در نتیجه‌ی واپاشی تبدیل به میون می‌شوند.



این فرایند فرایند ضعیفی است، عمر متوسط آن برابر با 2.6×10^{-8} s است. پیون خنثی به طریق کاملاً متفاوتی واپاشیده می‌شود، این فرایند به صورت زیر است



مدهای واپاشی کمیابی نیز به صورت زیر وجود دارند



عمر متوسط π^0 برابر 0.89×10^{-16} s است.

پیونهای منفی می‌توانند در عبور از ماده کند و آنگاه متوقف شوند و در مدارهای پیرامون هسته‌ها گیراندازی شوند. از آنجا که جرم این ذرات چند صد برابر جرم یک الکترون است شعاع مدار بور (که با جرم نسبت معکوس دارد) کاملاً کوچک خواهد بود. انرژی مدار بور با جرم ذره ی دوار نسبت مستقیم دارد. بنابراین، انرژی‌های نسبتاً بزرگی را به خصوص برای عناصری که در آنها مقدار Z بزرگ باشد می‌توان بدست آورد. بار هسته در مقابل این ذره ی منفی کاملاً استتار نمی‌شود، زیرا مدار الکترون از مدار مربوط به پیون خیلی بزرگتر است. پیون همچنین می‌تواند به حالت IS برود. پیون‌ها از اصل طرد پاولی تبعیت نمی‌کنند و آنها در پایین‌ترین حالت قرار می‌گیرند. مشاهدات نشان می‌دهند که آهنگ گذار آنقدر سریع است که غالباً زمان کافی برای π^- وجود دارد تا پیش از واپاشی به حالت IS برود. همین که این ذره در آن حالت قرار گرفت ممکن است که واپاشیده شود و یا ممکن است که توسط هسته گیراندازی شود.

۵-۱ مدل‌های هسته‌ای

فیزیک هسته‌ای از صورت بندی نظری منسجمی برخوردار نیست که با استفاده از آن بتوانیم تمام پدیده‌ها را به روشی بنیادی تحلیل و تعبیر کنیم. بدین ترتیب، در مطالعه‌ی فیزیک هسته‌ای می‌باید شیوه‌ای پدیده‌شناختی در پیش بگیریم و برای توصیف پدیده‌های متنوع از صورت‌بندی‌های متفاوتی استفاده کنیم. در مطالعه‌ی فیزیک هسته‌ای سعی می‌شود که خصوصیات نیرویی که اجزای یک هسته را متصل به هم نگه می‌دارد بررسی شود. که در این کار ما با سیستمی از ذرات بسیار سروکار داریم. از لحاظ ریاضی در حل مسئله‌ی چند جسمی دشواری‌هایی وجود دارد. همچنین نیروی هسته‌ای دارای پیچیدگی‌های خاص خود می‌باشد. به عنوان نمونه برهم‌کنش نوکلئون‌ها نه تنها از طریق نیروهای متقابل دوجسمی، بلکه از طریق نیروهای سه جسمی نیز صورت می‌گیرد. به خاطر پیچیدگی‌های اشاره شده ما نیازمند به ساختن مدل‌هایی هستیم تا با استفاده از آن بتوانیم تعدادی از خواص هسته را به صورت موفق توصیف کنیم. در اینجا تعدادی از مدل‌های هسته‌ای موفق را به صورت خلاصه توضیح می‌دهیم.

۱-۵-۱ مدل پتانسیل میانگین^۱

مدل پتانسیل میانگین براین اساس استوار است که رفتار نوکلئون‌های منفرد درون هسته مانند رفتار ذرات مستقل درون یک پتانسیل میانگین یا یک میدان میانگین، ناشی از نوکلئون‌های دیگر می‌باشد. برای بدست آوردن یک توصیف کیفی از این پتانسیل میانگین $V(\vec{r})$ ، می‌توان آنرا به شکل مجموع پتانسیل‌های $v(\vec{r} - \vec{r}')$ مابین یک نوکلئون در \vec{r} و یک نوکلئون در \vec{r}' نوشت

$$V(\vec{r}) = \int v(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (27-1)$$

در رابطه‌ی (۱-۲۷) چگالی هسته‌ای $\rho(\vec{r}')$ متناسب با احتمال بر واحد حجم برای یافتن هسته در مجاورت \vec{r}' می‌باشد.

شکل‌های متفاوتی برای پتانسیل $V(\vec{r})$ در نظر گرفته شده است. می‌توان از پتانسیل‌هایی که به شکل تابع دلتا می‌باشند یا پتانسیل‌های نوسانگر هماهنگ یا پتانسیل وودز-ساکسون^۱ نام برد.

در این مدل نوترون‌ها و پروتون‌ها به صورت جداگانه اصل پاولی را برآورده می‌کنند و ترازهای پروتون و نوترون، ترازهای فرمیونی مستقلی هستند.

۱-۵-۲ مدل قطره مایع^۲

برپایه‌ی شباهت قطره‌ی مایع با ماده‌ی هسته‌ای، که توسط بوهر (۱۹۳۵) پیشنهاد شده بود "فون وایس زکر" مدلی را ارائه نمود. فرض‌هایی که برپایه‌ی آن این مدل ارائه می‌شود عبارتند از

۱- هسته متشکل از ماده‌ی غیر قابل تراکم است به طوری که $R \sim A^{1/3}$.

۲- نیروی هسته‌ای برای هر نوکلئون یکسان است و به خصوص به نوع نوکلئون (پروتون یا نوترون بودن) بستگی ندارد.

۳- نیروی هسته‌ای یک نیروی اشباع‌پذیر است.

در یک هسته‌ی نامتناهی که A نوکلئون دارد، انرژی بستگی متناسب با A است. اما هسته‌های واقعی متناهی هستند و نوکلئون‌های سطحی تحت جاذبه‌ی یکسان از اطرف خود قرار نمی‌گیرند به همین خاطر باید جمله‌ای متناسب با تعداد نوکلئون‌های سطحی یا متناسب با مساحت سطح را از تخمین مبتنی بر هسته‌ی نامتناهی، کم کرد. دافعه‌ی کولنی بین همه‌ی جفت پروتون‌ها

1-Woods- Saxon
2-The liquid-drop model

انرژی بستگی را کاهش می‌دهد. هسته‌هایی که $N = Z$ است دارای بیشترین بستگی هستند به همین دلیل جمله‌ای تصحیحی برای این ویژگی نیز باید در نظر گرفته شود. می‌توان تمام توضیحات بالا را در فرمول جرم بس- وایس زکر^۱ مشاهده کرد

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm a_p A^{-3/4} \quad (28-1)$$

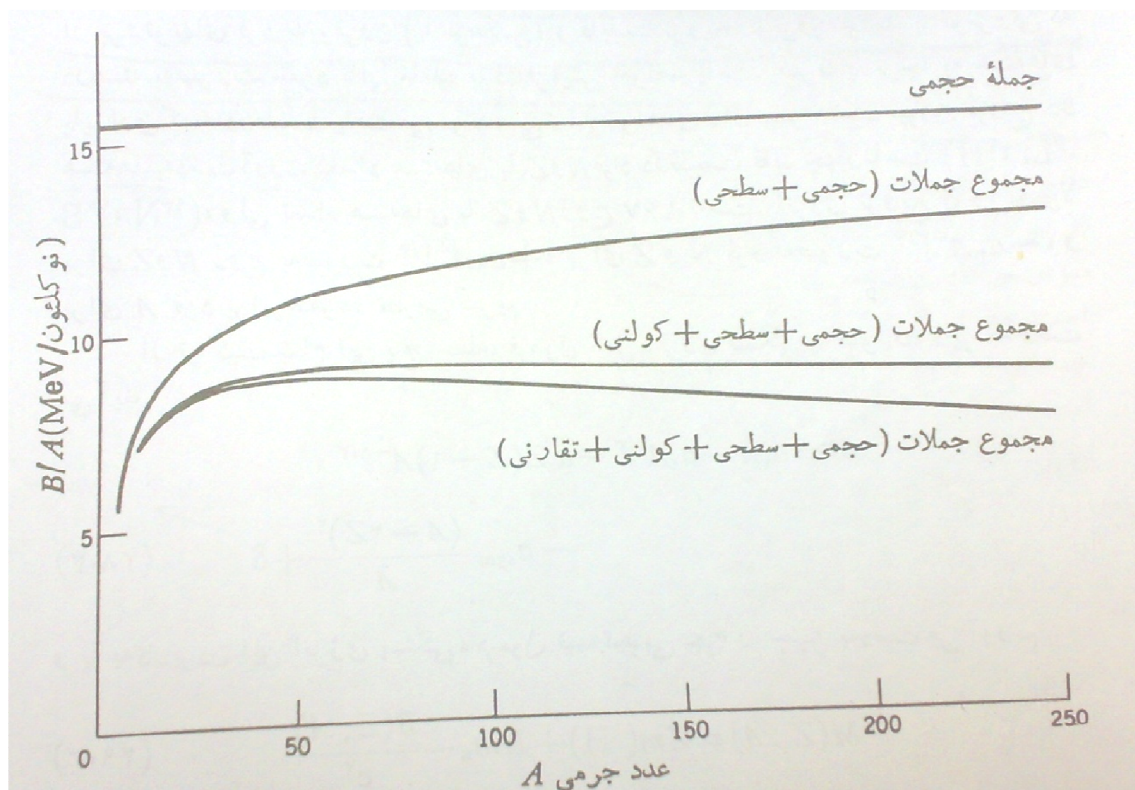
ضرایب ثابت را باید چنان انتخاب کرد که حداکثر سازگاری بین این فرمول و منحنی تجربی

شکل (۲-۱) حاصل شود. این مقادیر را به صورت $a_s = 16.8 \text{ MeV}$ ، $a_v = 15.5 \text{ MeV}$

$a_c = 0.72 \text{ MeV}$ ، $a_{\text{sym}} = 23 \text{ MeV}$ انتخاب می‌کنیم. منحنی نمایش هریک از جملات و همچنین

نتیجه‌ی جمعی آنها را در شکل (۵-۱) می‌بینیم. همان‌طوری که دیده می‌شود معادله‌ی (۲۸-۱)

چگونگی تغییرات B را به خوبی پیش‌بینی می‌کند.



شکل ۵-۱ سهم هریک از جملات موجود در فرمول نیمه‌تجربی جرم در بازسازی انرژی بستگی متوسط نوکلئون‌ها [۲].

¹ Bethe-Weizsäcker

اهمیت این مدل در این حقیقت نهفته است که جنبه‌های عملی داده‌های جرم هسته‌ای را به خوبی تبیین می‌کند.

۱-۵-۳ مدل پوسته‌ای^۱

فیزیک اتمی با استفاده از مدل پوسته‌ای جزئیات پیچیده‌ی ساختار اتم‌ها را توضیح می‌دهد. توانایی مدل پوسته‌ای در فیزیک اتمی متخصصان فیزیک هسته‌ای را برآن داشت تا برای بررسی ساختار هسته‌ای از نظریه‌ای مشابه استفاده کنند. استفاده از این مدل در فیزیک هسته‌ای با چند مشکل روبرو بود. یکی اینکه در مورد فیزیک اتمی، پتانسیل حاکم را میدان کولنی هسته تأمین می‌کند، یعنی یک عامل خارجی ترازها را سازمان می‌دهد. اما در مورد هسته هیچ عامل خارجی وجود ندارد و نوکلئون‌ها در پتانسیلی که خود به وجود می‌آورند حرکت می‌کنند.

مشکل دیگر از اینجا ناشی می‌شود که الکترون‌ها در مدارهای فضایی به صورت آزادانه بدون برخورد با الکترون‌های دیگر در حرکت می‌باشند. قطر نوکلئون‌ها در مقایسه با اندازه‌ی هسته نسبتاً بزرگ است بنابراین هر نوکلئون در طول حرکت خود در هر مدار می‌تواند برخوردهای متعددی با نوکلئون‌های دیگر داشته باشد.

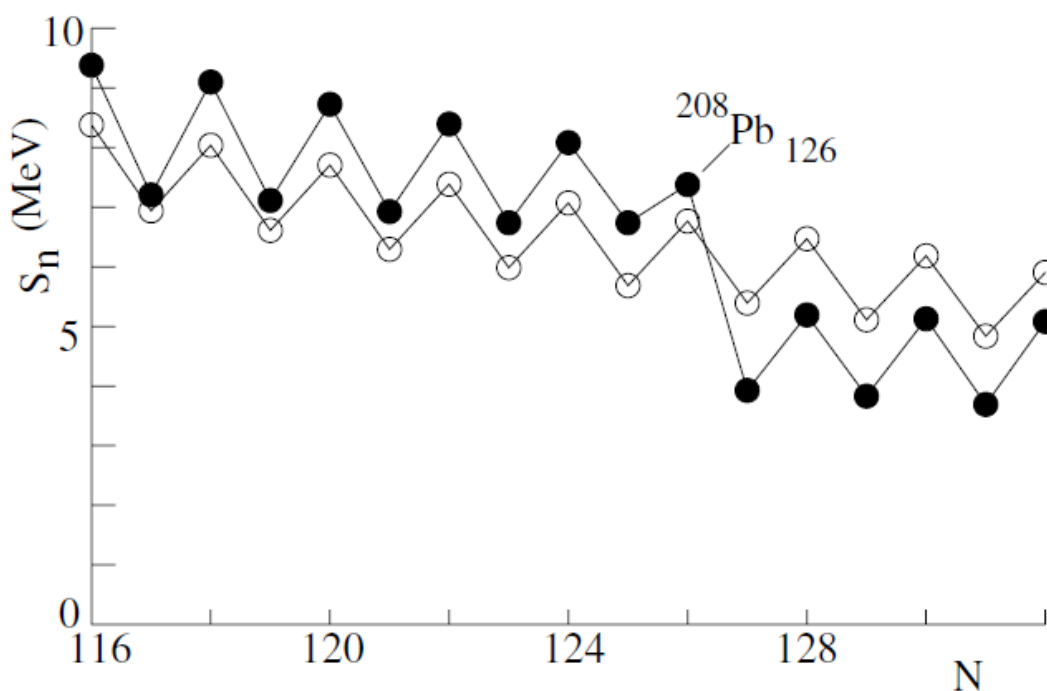
مشکل پتانسیل هسته‌ای با این فرض حل می‌شود که، حرکت هر نوکلئون منفرد را تحت تأثیر پتانسیل واحدی که نوکلئون‌های دیگر همه در تولید آن شرکت دارند، در نظر بگیریم.

وایسکوف در سال ۱۹۵۱ خاطرنشان ساخت که اصل طرد پاولی به شدت امکان برخوردهای بین نوکلئون‌ها را محدود می‌سازد. او این‌گونه توضیح داد که اگر دو ذره ابتدا در ترازهای انرژی پر، قرار داشته باشند نمی‌توانند با یکدیگر برخورد کنند زیرا حالت‌های انرژی که این ذرات مجبورند به

1 The shell model

آنها بروند قبلاً اشغال بوده و در دسترس نیستند. تنها برخوردهای ممکن آنهایی هستند که ذرات در آنها جای خود را عوض می‌کنند، یا برخوردهایی که در آنها ذرات برانگیخته شرکت داشته باشند، این گونه برخوردها به ندرت اتفاق می‌افتند. بنابراین برهم‌کنش قوی بین نوکلئون‌ها، وجود آثار مدل لایه‌ای را نقض نمی‌کند [۱].

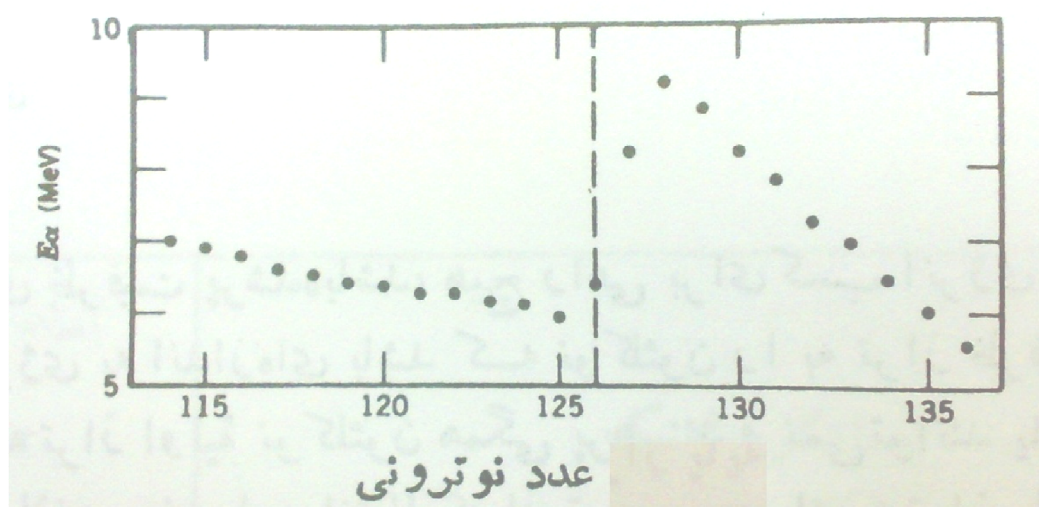
شواهدی تجربی نیز که مبین پوسته‌های هسته‌ای است نیز مشاهده شده‌اند. این نتایج به بسته بودن لایه‌ها در اعداد جادویی ۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲ و ۱۲۶ دلالت دارند. مقادیر اندازه‌گیری شده‌ی انرژی جدایی پروتون و نوترون با مقادیر پیش‌بینی شده توسط فرمول نیمه‌تجربی جرم تفاوت چشم‌گیر دارند. انرژی جدایی زیاد نوترون، مربوط به هسته‌هایی است که برای آنها N مساوی یک عدد جادویی باشد. همچنین برای هسته‌هایی با $+1$ عدد جادویی $N =$ انرژی جدایی نوترون خیلی پایین است. توجه به این نکته ما را به این حدس می‌رساند که شاید ناپیوستگی‌های تیز انرژی جدایی با پر شدن پوسته‌های اصلی ارتباط داشته باشد.



شکل ۱-۶ انرژی جدایی نوترون، نقاط پر مقادیر اندازه‌گیری شده را نشان می‌دهند و نقاط خالی مقادیر پیش‌بینی شده توسط معادله (۱-۲۸) می‌باشند [۳].

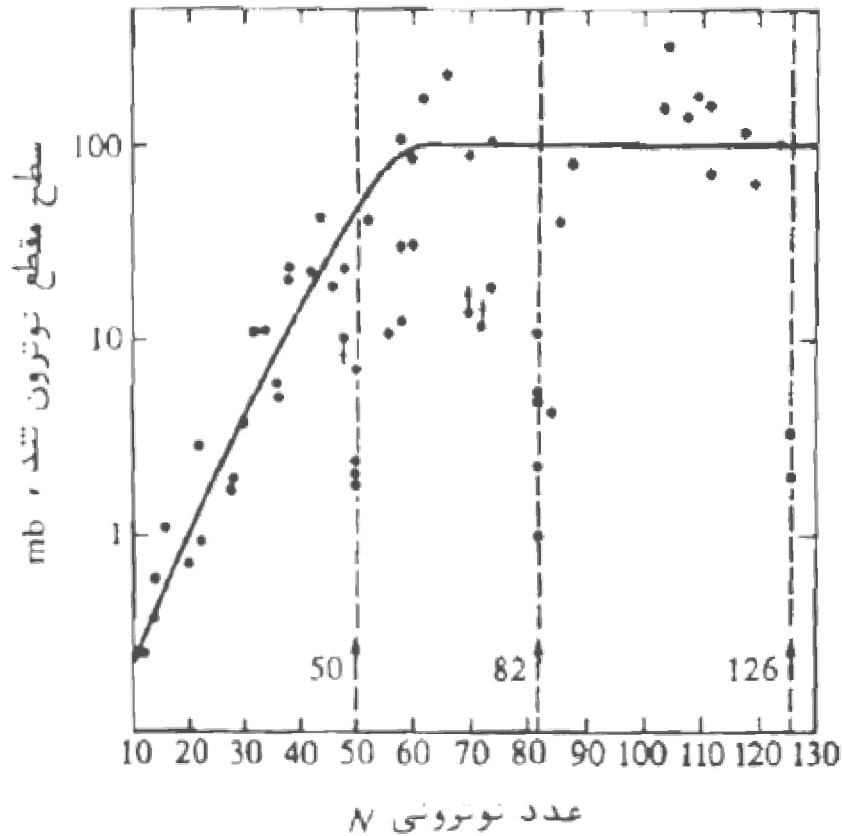
همچنین ناپیوستگی‌هایی در انرژیهای واپاشی آلفا و بتا مشاهده می‌شود. هسته‌هایی که دارای لایه‌های پر هستند مقیدتر می‌باشند پس به انرژی بیشتری برای تحریک شدن احتیاج دارند تا هسته‌های دیگر.

همان‌طوری که در شکل (۷-۱) مشاهده می‌شود یک افزایش ناگهانی در انرژی ذره‌ی آلفا برای $N = 128$ برای هسته‌ی مادر اتفاق می‌افتد.



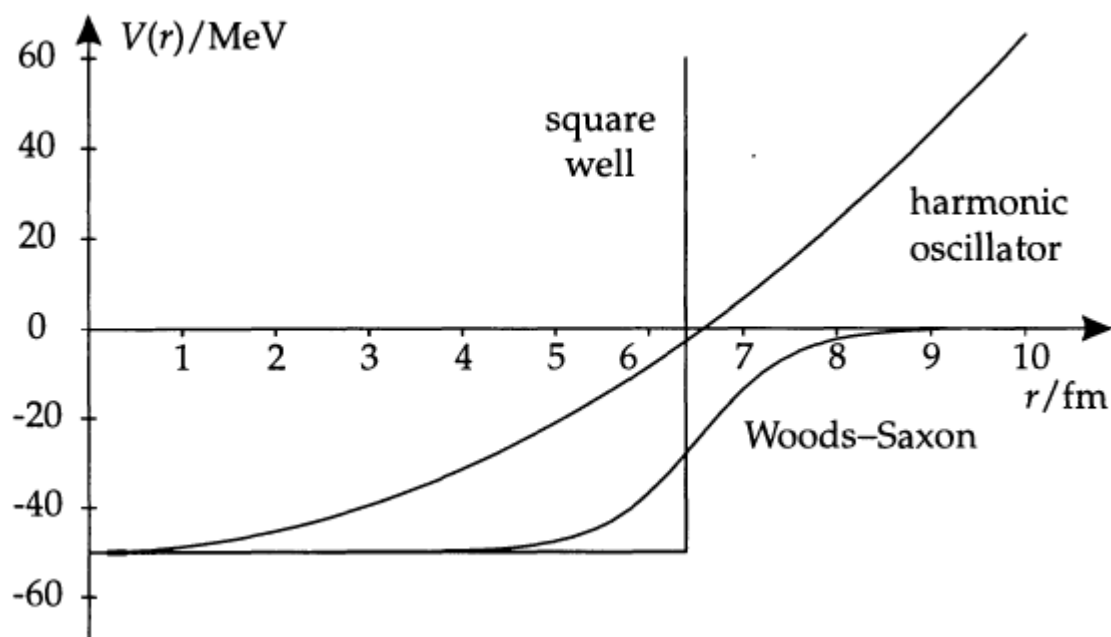
شکل ۷-۱ انرژی ذرات آلفای گسیل شده از ایزوتوپهای Rn [۲].

از دیگر شواهد تجربی می‌توان به کاهش سطح مقطع‌های گیراندازی نوترون‌ها اشاره کرد. سطح مقطع کمی متناسب با احتمال انجام یک واکنش هسته‌ای است. برای اینکه گیراندازی یک نوترون امکان‌پذیر باشد، نوترون با انرژی جنبشی مفروض باید یک تراز هسته‌ای خالی در انرژی مناسب پیدا کند. بنابراین هرچه فاصله‌ی بین ترازها بیشتر باشد، احتمال گیراندازی کمتر است.



شکل ۸-۱ سطح مقطع‌های گیراندازی نوترون‌های با انرژی 1 MeV [۱]

با استفاده از این شواهد تجربی می‌توان مدل پوسته‌ای را در فیزیک هسته‌ای نیز به کار برد. با استفاده از پتانسیل‌های چاه مربعی و نوسانگر هماهنگ اعداد جادویی ۲، ۸ و ۲۰ ظاهر می‌شوند. ولی در ترازهای انرژی بالاتر اعداد جادویی که به صورت تجربی بدست آمده بودند، دیده نمی‌شوند.



شکل ۱-۹ سه پتانسیل چاه پتانسیل، نوسانگر هماهنگ و پتانسیل وودز-ساکسون [۴].

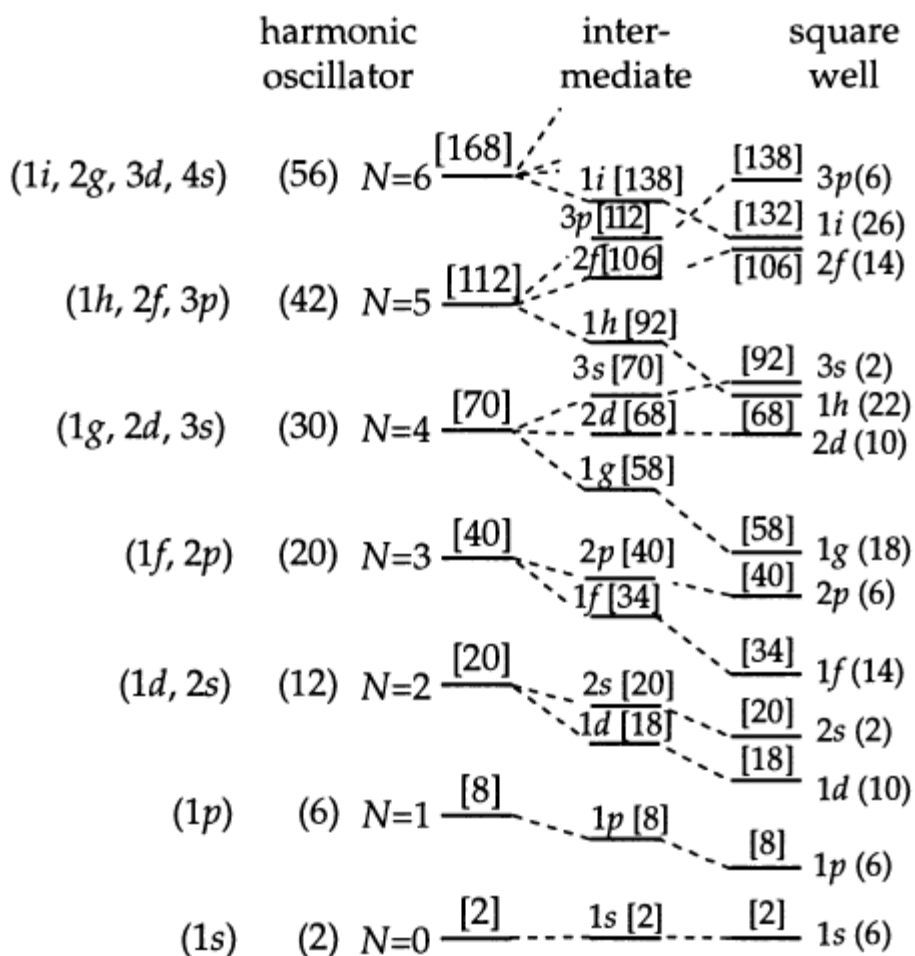
پتانسیل واقع بینانه‌تر پتانسیل وودز-ساکسون می‌باشد که بعد از شعاع میانگین R به آهستگی به سمت صفر میل می‌کند. باز هم اعداد جادویی ۲، ۸ و ۲۰ بدست می‌آیند ولی اعداد جادویی بالاتر را نمی‌توان با این پتانسیل پیدا کرد.

ترازهای انرژی برای هریک از این سه پتانسیل در شکل (۱-۱۰) رسم شده‌اند.

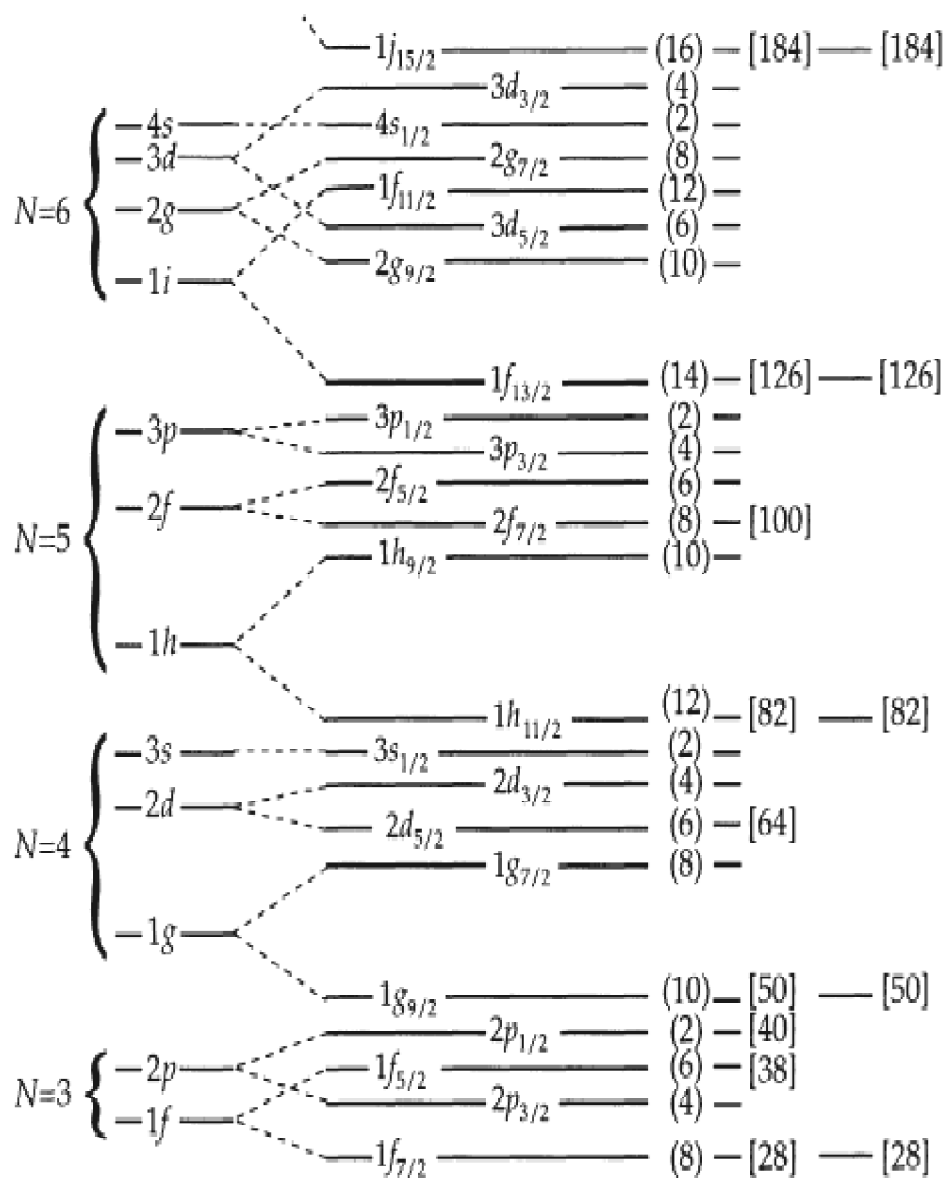
گام بعد اصلاح مدل به‌گونه‌ای است که در ترازهای بالاتر نیز اعداد جادویی تولید شوند. تلاش‌های بسیاری برای این کار صورت گرفت تا اینکه مایر، هاکسل، سوئس و جنسن در سال ۱۹۴۹ با افزودن پتانسیل اسپین-مدار فاصله‌های مناسب بین زیرپوسته‌ها را بدست آوردند.

در شکل (۱-۱۱) شکافتگی ترازهای پتانسیل هارمونیک به علت اثر اسپین-مدار نشان داده

شده است.



شکل ۱-۱ ساختار لایه‌ای در نوسانگر هماهنگ (سمت چپ)، وودز- ساکسون (وسط) و چاه پتانسیل مربعی (سمت راست) [۴].



شکل ۱۱-۱ شکافتگی ترازهای پتانسیل نوسانگر هماهنگ به علت افزودن جمله‌ی اسپین-مدار [۴]

۲ فصل دوم

معادله‌ی شرودینگر در

فضای D بعدی

۱-۲ سیستم‌های چند جسمی

از دیرباز حل مسائل چند جسمی از نظر ریاضی دارای پیچیدگی‌های بسیار بوده‌اند. اما تلاش افراد مختلف در زمان‌های متفاوت منجر به خلق روش‌های متنوع برای حل این مسائل پیچیده شده است. به عنوان نمونه می‌توان به روش‌هایی مانند حل معادلات فادیو^۱ برای یک مسئله‌ی سه جسمی، استفاده از روش دینامیک مولکولی پادمتقارن^۲ برای یک سیستم چند جسمی و استفاده از روش بسط هماهنگ‌های فوق کروی^۳ اشاره نمود. در روش فادیو سیستم سه جسمی به صورت سه زیر سیستم دو جسمی متفاوت در نظر گرفته می‌شود، آنگاه معادله‌ی شرودینگر به صورت یک معادله‌ی انتگرالی نوشته می‌شود و با استفاده از تحلیل پاره موجی به سه معادله‌ی انتگرالی جفت شده خواهیم رسید که با حل عددی آن به روش تکرار تابع موج سیستم مورد نظر بدست می‌آید. در حالت کلی معادلات فادیو نیازمند پتانسیلی هستند که برهم‌کنش مابین دو جسم را توصیف کند، همچنین گاهی ممکن است یک جمله مربوط به نیروهای سه جسمی به حساب آورده شود [۶و۵].

در روش دینامیک مولکولی پاد متقارن برای هر ذره‌ی تشکیل دهنده‌ی سیستم تابع موج فضایی یکسانی فرض می‌شود و آنگاه تابع موج کلی سیستم با استفاده از دترمینان اسلیتر^۴ بدست می‌آید [۷].

روش بسط هماهنگ‌های فوق کروی در شاخه‌های مختلف فیزیک مورد استفاده قرار گرفته است. این روش در سال ۱۹۳۵ توسط زرنیک و برینکمن^۵ معرفی شد [۸]. در این روش اساساً به جای اینکه یک سیستم تشکیل شده از A ذره را در فضای سه بعدی بررسی کنند، یک نقطه را در یک فضای 3A بعدی مورد بررسی قرار می‌دهند [۹]. همچنین می‌توان هنگامی که حرکت مرکز جرم سیستم کنار گذاشته می‌شود مسئله را در یک فضای 3A-3 بعدی حل کرد. می‌توان هر تابع را

1 FADDEEV equation

2 Antisymmetrized Molecular DYNAMICS

3 Hyperspherical harmonics (H.H.) expansion method

4 Slater determinant

5 Zernike and Brinkman

برحسب هماهنگ‌های فوق‌کروی، که یک پایه‌ی کامل از توابع نرمال روی یک فوق‌کره‌ی واحد تشکیل می‌دهند، بسط داد.

۲-۲ معادله‌ی شرودینگر در ابعاد بالاتر

اگر x_i ($i=1, \dots, D$) مختصه‌های کارتیزین باشند رابطه‌ی زیر را با مختصه‌های قطبی در یک

فضای D بعدی خواهند داشت [۱۱۰]

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{D-1} \\
 x_2 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{D-1} \\
 x_3 &= r \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \dots \sin \theta_{D-1} \\
 x_4 &= r \cos \theta_3 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \dots \sin \theta_{D-1} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 x_j &= r \cos \theta_{j-1} \sin \theta_j \sin \theta_{j+1} \dots \sin \theta_{D-1} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 x_{D-1} &= r \cos \theta_{D-1} \sin \theta_{D-1} \\
 x_D &= r \cos \theta_{D-1}
 \end{aligned} \tag{۱-۲}$$

$$\begin{aligned}
 D &= 3, 4, 5, \dots \\
 0 &< r < \infty \\
 0 &\leq \theta_1 < 2\pi \\
 0 &\leq \theta_j \leq 2\pi \quad j = 2, 3, \dots, D-1
 \end{aligned} \tag{۲-۲}$$

آنگاه اگر لاپلاسیان در فضای D بعدی باشد برای آن خواهیم داشت.

$$\nabla_D^2 = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{D-1} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\frac{h}{h_i^2} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right) \tag{۳-۲}$$

$$\theta_0 = r, \quad h = \prod_{i=0}^{D-1} h_i \quad (4-2)$$

و ضرایب مقیاس^۱ به صورت زیر بدست می‌آیند

$$h_i^2 = \sum_{k=1}^D \left(\frac{\partial x_k}{\partial \theta_i} \right)^2 \quad i = 0, 1, 2, \dots, D-1 \quad (5-2)$$

با توجه به روابط (۱-۲) و (۵-۲) داریم

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_1 &= r \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{D-1} \\ h_2 &= r \sin \theta_3 \sin \theta_4 \dots \sin \theta_{D-1} \\ h_3 &= r \sin \theta_4 \sin \theta_5 \dots \sin \theta_{D-1} \\ &\vdots \\ h_j &= r \sin \theta_{j+1} \sin \theta_{j+2} \dots \sin \theta_{D-1} \\ &\vdots \\ h_{D-2} &= r \sin \theta_{D-1} \\ h_{D-1} &= r \\ h &= r^{D-1} \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 \sin^3 \theta_4 \dots \sin^{j-1} \theta_j \dots \sin^{D-2} \theta_{D-1} \end{aligned} \quad (6-2)$$

آنگاه با جایگزینی این روابط در رابطه‌ی (۳-۲) برای لاپلاسیان در مختصات قطبی خواهیم

داشت

$$\begin{aligned} \nabla_D^2 = & \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ & + \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^{D-2} \frac{1}{\sin \theta_{j+1} \sin \theta_{j+2} \dots \sin \theta_{D-1}} \\ & \times \left\{ \frac{1}{\sin^{j-1} \theta_j} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} \sin^{j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin^{D-1} \theta_{D-1}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}} \sin^{D-2} \theta_{D-1} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (7-2)$$

عنصر حجم فضایی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\prod_{i=1}^D dx_i = r^{D-1} dr d\Omega \quad , \quad d\Omega = \prod_{i=1}^{D-1} (\sin \theta_i)^{i-1} d\theta_i \quad (8-2)$$

حال اگر عملگرهای تکانه‌ی زاویه‌ای مداری را به صورت زیر داشته باشیم

$$L_{ij} = -i x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (9-2)$$

آنگاه با استفاده از عملگرهای تکانه‌ی زاویه‌ای و روابط جابجایی بین آنها می‌توان بدست

آورد [۱۲ و ۱۳]

$$\begin{aligned}
 L_1^2 &= L_{12}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} & (10-2) \\
 L_2^2 &= -\left(\frac{1}{\sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) - \frac{L_1^2}{\sin^2 \theta_2} \right) \\
 &\vdots \\
 L_j^2 &= -\left(\frac{1}{\sin^{j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) - \frac{L_{j-1}^2}{\sin^2 \theta_j} \right) \\
 &\vdots \\
 L_{D-1}^2 &= -\left(\frac{1}{\sin^{D-2} \theta_{D-1}} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}} \left(\sin^{D-2} \theta_{D-1} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}} \right) - \frac{L_{D-2}^2}{\sin^2 \theta_{D-1}} \right)
 \end{aligned}$$

بنابراین برای لاپلاسیان خواهیم داشت

$$\nabla_D^2 = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L_{D-1}^2}{r^2} \quad (11-2)$$

چون در رابطه‌ی (۱۰-۲) θ_j ها از یکدیگر مستقل می‌باشند بنابراین عملگرهای L_j^2 دوبه‌دو با

هم جابه‌جا می‌شوند. بنابراین آنها یک ویژه تابع مشترک دارند. ویژه تابع‌های عملگرهای L_j^2

هماهنگ‌های فوق کروی می‌باشند. نشان داده شده است که بین عملگر L^2 و هماهنگ‌های فوق

کروی $Y_L(\Omega)$ رابطه‌ی زیر برقرار است [۱۱ و ۱۲].

$$\{L_{D-1}^2(\Omega) - L(L+D-2)\} Y_L(\Omega) = 0 \quad (12-2)$$

برای یک سیستم N ذره‌ای ما 2N عدد کوانتومی اوربیتالی و مغناطیسی l_i و m_i داریم.

همچنین $N-1$ عدد کوانتومی فوق کروی n_j ($j=2, \dots, N$) خواهیم داشت.

۳-۲ حالت‌های مقید سیستم‌های سه ذره‌ای

برای توصیف مکان سه ذره‌ی یکسان برحسب مرکز جرم، از مختصات ژاکوبی $\vec{\rho}$ و $\vec{\lambda}$ که

برحسب مختصات \vec{r}_i ($i=1,2,3$) ذرات نوشته می‌شوند، استفاده می‌کنیم

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (13-2)$$

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3)$$

$$\vec{R} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$$

مختصه‌های فوق کروی (x, Ω) ی بردار شش بعدی \vec{x} را معرفی می‌کنیم

$$\vec{x}^2 = \vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2 \quad 0 < x < \infty \quad (14-2)$$

Ω مجموعه‌ای از پنج مختصه‌ی زاویه‌ای است، که یکی زاویه‌ی فوق کروی ϕ $\left(\tan \phi = \frac{\rho}{\lambda}\right)$ و

چهارتای دیگر مختصه‌های زاویه‌ای بردارهای $\vec{\rho}$ و $\vec{\lambda}$ در فضای سه بعدی می‌باشند، x را فوق شعاع

می‌نامند. با این انتخاب و استفاده از نتایج بدست آمده در بخش قبل معادله‌ی شرودینگر در مختصات

فوق کروی به شکل زیر نوشته می‌شود

$$(H - E)\Psi(x, \Omega) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{L^2(\Omega)}{x^2} \right] + V(x, \Omega) - E \right\} \Psi(x, \Omega) = 0 \quad (15-2)$$

که $V(x, \Omega)$ پتانسیل برهم کنش می‌باشد.

با بسط $\Psi(x, \Omega)$ برحسب هماهنگ‌های فوق کروی داریم

$$\Psi(\mathbf{x}, \Omega) = \sum_L \mathbf{x}^{-\frac{5}{2}} u_L(\mathbf{x}) Y_L(\Omega) \quad (16-2)$$

با جایگزینی رابطه‌ی (۱۶-۲) در رابطه‌ی (۱۵-۲) و با انتگرال‌گیری روی مجموعه‌ی زوایای Ω ،

معادله‌ی شرودینگر به یک مجموعه از معادلات دیفرانسیلی مرتبه‌ی دوم جفت شده تبدیل می‌شود

$$\left\{ \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{(L+2)^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right] - E \right\} u_n(x) + \sum_{L'} \langle Y_{L'}(\Omega) | V(x, \Omega) | Y_L(\Omega) \rangle u_{L'}(x) = 0 \quad (17-2)$$

که در رابطه‌ی (۱۷-۲) از

$$\int Y_{L'}^*(\Omega) Y_L(\Omega) d\Omega = \delta_{L,L'} \quad (18-2)$$

استفاده شده است.

تابع موج شعاعی به صورت زیر بهنجار می‌شود

$$\sum_L \int_0^\infty dx |u_L(x)|^2 = 1 \quad (19-2)$$

در صورتی که برهم‌کنش ذرات وابستگی زاویه‌ای نداشته باشد، یعنی بتوان آنرا برحسب فوق

شعاع نوشت معادله‌ی (۱۹-۲) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\left\{ \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{(L+2)^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right] - V(x) \right\} u_L(x) = E u_L(x) \quad (20-2)$$

که در این صورت برای شرط بهنجارش خواهیم داشت

$$\int_0^{\infty} |u_L(x)|^2 dx = 1 \quad (2-21)$$

۳ فصل سوم

برهم کنش های هسته ای

۱-۳ مقدمه

کمیت‌های موجود در سیستم دو نوکلئونی که نیرو به آنها وابسته است عبارتند از:

\bar{T}_2 که مکان ذره ۱ را به ذره ۲ ارتباط می‌دهد.

\bar{p}_{12} یعنی تکانه‌ی نسبی آنها.

\bar{S} اسپین کل.

\bar{T} ایزوسپین.

پتانسیلی که نیروی هسته‌ای را نمایش می‌دهد باید دارای ویژگی‌هایی باشد، مثلاً باید یک کمیت نرده‌ای باشد، چون انرژی است.

چون دو نوترون یا دو پروتون غیرقابل تشخیص هستند، هرگاه جای ذره ۱ را با ذره ۲ عوض کنیم پتانسیل نباید تغییر کند. مبادله‌ی ذرات، علامت \bar{T}_2 و \bar{p}_{12} را معکوس می‌کند ولی علامت \bar{L} و \bar{S} را تغییر نمی‌دهد.

اگر جهت حرکت زمان معکوس شود پتانسیل نباید تغییر کند.

هر سیستم نوکلئونی با یک تابع موج توصیف می‌شود، نیروی نوکلئون-نوکلئون به پاریته‌ی تابع موج وابسته است. از آنجا که پاریته به زوج و فرد بودن L بستگی دارد، نیرو برای L زوج و L فرد متفاوت است. اکنون به طور مفصل درباره‌ی ویژگی‌ی ناوردایی پتانسیل تحت تعویض مکان دو ذره صحبت خواهیم کرد.

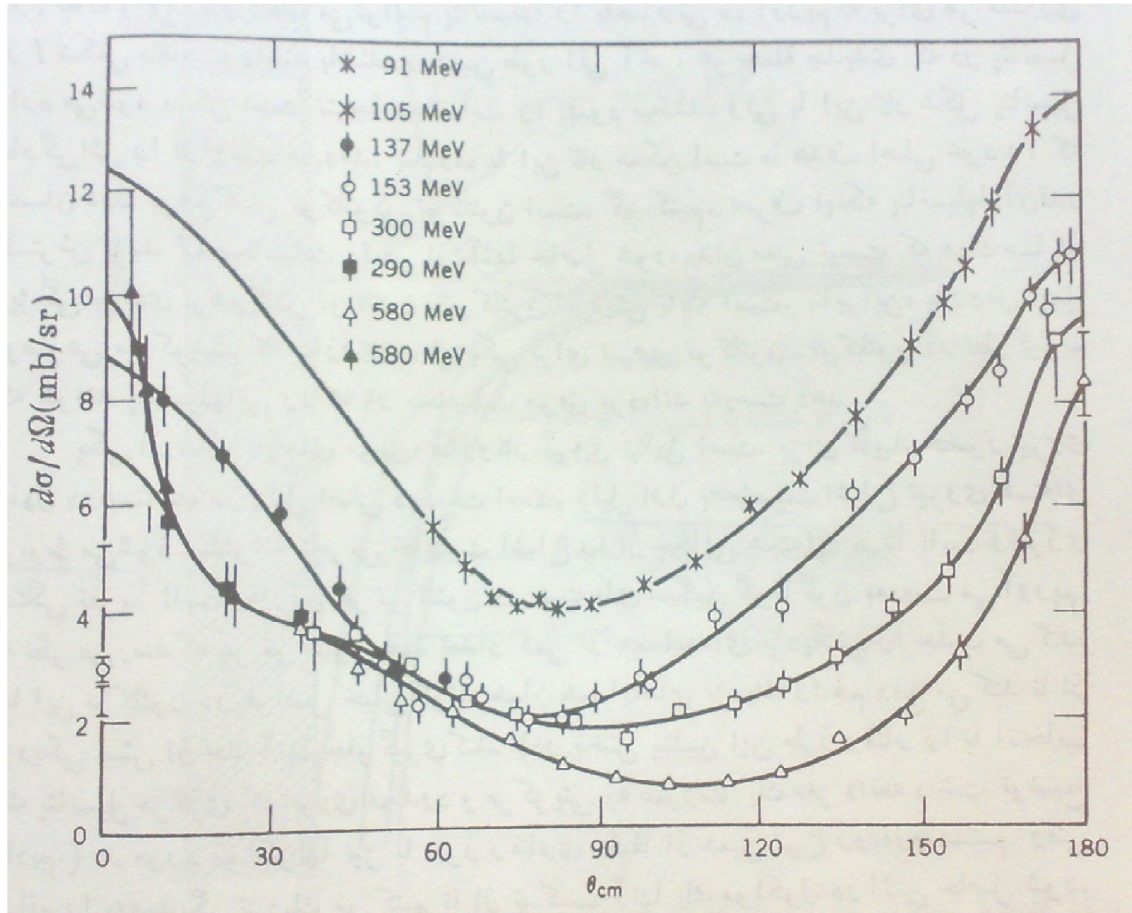
۲-۳ نیروی تبادل و برهم‌کنش نوکلئونی

پتانسیل برهم‌کنش هسته‌ای مابین دو نوکلئون را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$V = V_1(r) + V_2(r)\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_3(r)S_{12} \quad (۱-۳)$$

که $V_1(r)$ ، $V_2(r)$ و $V_3(r)$ توابع خاص وابسته به فاصله می‌باشند. در رابطه‌ی بالا جمله‌ی اول نیروی مرکزی را، که به اسپین بستگی ندارد توصیف می‌کند، جمله‌ی دوم جمله‌ی مرکزی وابسته به اسپین و جمله‌ی سوم نیروی تانسوری را توصیف می‌کند. البته رابطه‌ی بالا یک عبارت کلی است، وقتی که ویژگی تبادل‌ی نیروهای هسته‌ای در نظر گرفته نشود.

با فرض اینکه نیروهای هسته‌ای با یک پتانسیل وابسته به فاصله‌ی نسبی مابین ذرات و اسپین ذرات توصیف شود، می‌توانیم ویژگی‌های اساسی پراکندگی نوترون‌ها بوسیله‌ی پروتون‌ها را در ناحیه‌ی انرژی پایین توصیف کنیم. مشخص شده است که اگر طول موج ذرات از مرتبه‌ی نیروهای هسته‌ای باشد، پراکندگی به وابستگی برهم‌کنش به فاصله کاملاً حساس است. ممکن است که انتظار داشته باشیم با افزایش انرژی ذرات برهم‌کنش کننده، بتوانیم اطلاعات جزئی بیشتری درباره‌ی وابستگی شعاعی پتانسیل هسته‌ای بدست آوریم. اما درحقیقت با به‌کار بردن پتانسیلی به صورت (۱-۳) توصیف وابستگی زاویه‌ای پراکندگی نوترون‌ها بوسیله‌ی پروتون‌ها در انرژی‌های بالا کاملاً غیرممکن است. در حقیقت اگر نیروهای عمل‌کننده مابین یک نوترون و یک پروتون تنها با پتانسیل (۱-۳) توصیف شود، آنگاه در انرژی‌های به اندازه کافی بالا، در چارچوب مرکز جرم، تعداد زیادی از نوترون‌ها باید در زوایای کوچک پراکنده شوند، و پروتون‌ها در جهت مخالف پراکنده شوند. اما آزمایش‌های روی پراکندگی نوترون‌ها بوسیله‌ی پروتون‌ها در انرژی‌های بالاتر از چند ده مگا الکترون ولت نشان می‌دهد که سطح مقطع دیفرانسیلی برای پراکندگی نوترون‌ها بوسیله‌ی پروتون‌ها، در چارچوب مرکز جرم یک ماکزیمم در ناحیه‌ی زوایای کوچک پراکندگی و یک ماکزیمم در ناحیه‌ی زوایای نزدیک به ۱۸۰° درجه دارد.



شکل ۱-۳ سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی نوترون-پروتون [۲]

سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی np در شکل (۱-۳) نشان داده شده است. سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی در زوایای نزدیک به صفر در جهات رو به جلو دارای مقادیر بزرگ قله‌ای است، و این یعنی اینکه انتقال تکانه در برخورد بین ذرات فرودی و هدف کوچک است. مرتبه‌ی بزرگی این قله‌ی رو به جلو را می‌توان با بررسی بیشینه‌ی انتقال تکانه، بررسی کرد [۲].

برای انحراف در زوایای کوچک داریم $\sin \theta \approx \theta = \frac{\Delta p}{p}$ که در آن p تکانه‌ی ذره‌ی فرودی و

Δp تکانه‌ی عرضی حاصل از برخورد است. اگر متوسط نیروی وارد در طی برخورد Δt را F بگیریم،

داریم $\Delta p = F \Delta t$. نیروی F برابر $-\frac{dV}{dr}$ است، و از این رو نیروی متوسط از مرتبه‌ی $\frac{V_0}{R}$ می‌شود که

در آن V_0 عمق چاه پتانسیل مربعی نوکلئون- نوکلئون و R برد آن است. زمان برخورد باید از مرتبه‌ی $\frac{R}{v}$ باشد، که v سرعت ذره‌ی فرودی است. بنابراین داریم

$$\theta = \frac{\Delta p}{p} = \frac{F\Delta t}{p} = \frac{1}{p} \frac{V_0 R}{R v} = \frac{V_0}{pv} = \frac{V_0}{2T} \quad (2-3)$$

که در آن T انرژی ذره‌ی فرودی است. برای انرژی‌های در شکل (۱-۳) مقادیر در حدود 10° یا کمتر از 10° درجه است. و انتظار مشاهده‌ی قله در زاویه‌ی پراکندگی 180° درجه را نداریم. برای توصیف این ویژگی پراکندگی، لازم است فرض شود که همراه با نیروهای توصیف شده در پتانسیل (۱-۳) نیروهای اضافی مربوط به تبادل ذرات مابین نوترون‌ها و پروتون‌ها نیز وارد می‌شوند. این نیروها را نیروهای تبدالی می‌نامند. اگر فرض کنیم که پراکندگی تحت تأثیر نیروهای تبادل انجام می‌شود، و در مورد نیروی تبادل نیز ذره‌ی برخورد کننده در فرآیند پراکندگی تحت یک زاویه‌ی کوچک منحرف می‌شود، اما ماهیت ذرات برخورد کننده تغییر می‌کند، این نتایج به آسانی قابل فهم خواهد شد. به عبارت دیگر نوترون به پروتون و پروتون به نوترون تبدیل می‌شود. در نتیجه توزیع نوترون‌ها در پراکندگی تبدالی با توزیع پروتون‌های برخورد کننده در پراکندگی معمولی (پراکندگی ای که نیروهای تبدالی در نظر گرفته نمی‌شوند)، یکسان است، و بالعکس.

سه نیروی تبدالی وجود دارد. تبادل فضایی یا نیروی مایورانا، تبادل اسپینی یا نیروی بارتلت، و تبادل فضایی- اسپینی یا نیروی هایزنبرگ [۱۴ و ۱۵].

پتانسیل مایورانا، V_m ، را که بر تابع موج عمل می‌کند، می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$V_m \psi = v_m(r) P_r \psi \quad (3-3)$$

که $v_m(r)$ تابع معمولی از r و P_r عملگری است که مکان دو ذره را در تابع موجی که بر آن عمل می‌کند، عوض می‌کند. در سیستم دو نوکلئونی، تبادل دو ذره مترادف با انعکاس حول مبدأ است

و چنین انعکاسی علامت ψ را اگر پاریته فرد باشد عوض می‌کند و اگر پاریته زوج باشد عوض نمی‌کند. از آنجا که زوج یا فرد بودن پاریته فقط بستگی به زوج یا فرد بودن l دارد، داریم

$$V_m \psi = \begin{cases} v_m(r) & \text{زوج } l \\ -v_m(r) & \text{افرد} \end{cases} \quad (4-3)$$

به عبارت دیگر مشاهده می‌کنیم که نیروی مایورانا بیان این واقعیت است که پتانسیل هسته‌ای بستگی به زوج یا فرد بودن l دارد

$$P_r = (-1)^l \quad (5-3)$$

پتانسیل بارتلت، V_B ، را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$V_B \psi = v_B(r) p_\sigma \psi \quad (6-3)$$

که $v_B(r)$ تابع معمولی از r و p_σ عملگری است که اسپین دو ذره را در تابع موجی که بر آن عمل می‌کند، عوض می‌کند. اگر $s=1$ باشد مبادله‌ی اسپین اثری بر تابع موج ندارد، و اگر $s=0$ باشد مبادله‌ی اسپین صرفاً علامت تابع موج را تغییر می‌دهد. بنابراین داریم

$$V_B \psi = \begin{cases} +v_B(r) \psi & s=1 \\ -v_B(r) \psi & s=0 \end{cases} \quad (7-3)$$

عملگر $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ به ترتیب دارای ویژه مقدار $+1$ و -3 برای حالت سه‌تایه ($S=1$) و تک‌تایه ($S=0$) است. بنابراین عملگر P_σ ، تبدیل مختصات اسپینی دو نوکلئون، می‌تواند به شکل زیر نمایش داده شود

$$P_\sigma = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \quad (8-3)$$

در حقیقت P_σ دارای ویژه مقدار $+1$ و -1 برای حالت سه‌تایه و تک‌تایه است. اگر $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ تابع موج حالت اسپینی باشد

$$P_{\sigma}\chi(\sigma_1, \sigma_2) = \chi(\sigma_2, \sigma_1) \quad (9-3)$$

آنگاه می‌توان رابطه‌ی (۷-۳) را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$V_B\psi = \frac{1}{2}(1 + \bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2)v_B(r)\psi \quad (10-3)$$

می‌توانیم p_{σ} را به شکل زیر نیز در نظر بگیریم

$$p_{\sigma} = (-1)^{S+1} \quad (11-3)$$

پتانسیل هایزنبرگ V_H را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$V_H\psi = v_H(r)P_r P_{\sigma}\psi \quad (12-3)$$

$$P_{r\sigma} = (-1)^{1+S+1}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$V_H\psi = \begin{cases} +v_H(r)\psi & \left. \begin{array}{l} S=1, \text{زوج} \\ S=0, \text{افرد} \end{array} \right\} \\ -v_H(r)\psi & \left. \begin{array}{l} S=0, \text{زوج} \\ S=1, \text{افرد} \end{array} \right\} \end{cases} \quad (13-3)$$

که $v_H(r)$ یک تابع معمولی از r می‌باشد.

برهم‌کنش هسته‌ای علاوه بر فاصله‌ی نسبی و اسپین به ایزوسپین ذرات نیز بستگی دارد.

فرمالیسم ایزوسپین برای توصیف استقلال بار برهم‌کنش‌های هسته‌ای، که گاهی ناوردایی ایزوتوپی نامیده می‌شود بسیار مفید می‌باشد. مقدار ایزوسپین نوکلئون برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد. حالت با سمتگیری ایزوسپینی $+\frac{1}{2}$ متناظر با پروتون و حالت با جهت‌گیری ایزوسپینی $-\frac{1}{2}$ متناظر با نوترون می‌باشد. تبدیل شکل یک پروتون به یک نوترون، متناظر با تغییر جهت ایزوسپین از $+\frac{1}{2}$ به $-\frac{1}{2}$ است. بنابراین در مانستگی با چرخش در فضای معمولی، این چنین تبدیلی، مانند یک چرخش در فضای ایزوتوپی به اندازه‌ی یک زاویه‌ی π می‌باشد. بنابراین معنی ناوردایی ایزوتوپی این است که برهم‌کنش هسته‌ای وابسته به سمتگیری بردار اسپین ایزوتوپی سیستم نباشد [۱۴].

در مانستگی با P_σ می‌توانیم عملگر P_τ ، عملگر تبادل مختصات ایزوسپینی دو نوکلئون را به صورت زیر تعریف کنیم

$$P_\tau = \frac{1}{2}(1 + \bar{\tau}_1 \cdot \bar{\tau}_2) \quad (۱۴-۳)$$

عملگر P_τ روی تابع ایزوسپینی نوکلئون‌ها عمل می‌کند

$$P_\tau Z(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) = Z(\bar{\tau}_2, \bar{\tau}_1) \quad (۱۵-۳)$$

به سادگی مشخص می‌شود که می‌توانیم عملگر تبدیلی هایزنبرگ را به شکل زیر نیز بنویسیم

$$P_{\tau\sigma} = -\frac{1}{2}(1 + \bar{\tau}_1 \cdot \bar{\tau}_2) \quad (۱۶-۳)$$

می‌توانیم عملگر تبدیل نیروی مایورانا را نیز به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$P_r = -\frac{1}{4}(1 + \bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2)(1 + \bar{\tau}_1 \cdot \bar{\tau}_2) \quad (۱۷-۳)$$

همچنین یک نیروی معمولی دیگری به نام نیروی ویگنر یا نیروی بدون تبادل وجود دارد

$$V_w \psi = v_w(\vec{r}) \psi \quad (18-3)$$

بنابراین پتانسیل برهم‌کنش هسته‌ای مابین دو نوکلئون به شکل زیر می‌باشد

$$V = V_c(\vec{r}) + V_\sigma(\vec{r})(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + V_\tau(\vec{r})(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + V_{\sigma\tau}(\vec{r})(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + V_T(\vec{r})S_{12} + V_{T\tau}(\vec{r})S_{12}(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \quad (19-3)$$

که $V_c(\vec{r})$ ، $V_\sigma(\vec{r})$ ، $V_\tau(\vec{r})$ ، $V_{\sigma\tau}(\vec{r})$ ، $V_T(\vec{r})$ و $V_{T\tau}(\vec{r})$ دارای ویژگیهای تبادلی مناسب می‌باشند.

۳-۳ مفهوم نیروی سه جسمی

نیرو به عنوان عاملی برای حرکت یکی از قدیمی‌ترین مفاهیم فیزیک می‌باشد. درباره‌ی برهم‌کنش دو نوکلئونی در بخش قبل صحبت شد. در این بخش به صورت مختصر درباره‌ی نیروهای دو جسمی صحبت می‌کنیم.

هر کجا که یک سیستم مقید از ذرات وجود داشته باشد، برهم‌کنش‌های بسیاری مابین ذرات بررسی می‌شود. درباره‌ی برهم‌کنش دو ذره‌ی A و B بسیار شنیده‌ایم، خواه عامل این برهم‌کنش نیروی پتانسیل گرانشی باشد، خواه نیروی الکتروستاتیکی. حال اگر یک سیستم متشکل از سه ذره‌ی A، B و C را در نظر بگیریم، آیا علاوه بر سه برهم‌کنش دو جسمی AB، AC و BC برهم‌کنش دیگری وجود دارد؟ برای پاسخ گفتن به این پرسش باید پرسید سیستم چگونه سیستمی است؟ ذرات

چگونه ذراتی؟ اگر پاسخ به دو سوال اخیر به این صورت باشد که سیستم عبارتست از یک سیستم هسته‌ای و ذرات برهم‌کنش کننده، نوکلئون هستند پاسخ به سوال اول، مثبت خواهد بود. ثابت شده است که در فیزیک هسته‌ای اگر سیستمی متشکل از سه ذره‌ی A، B و C وجود داشته باشد علاوه بر برهم‌کنش‌های دو جسمی، یک برهم‌کنش سه جسمی نیز وجود دارد.

می‌توان این نیرو به این صورت درک کرد که اگر نیروی وارد بر نوکلئون A را بررسی کنیم، علاوه بر نیروهایی که از طرف نوکلئونهای B و C (که در مواضع خود قرار گرفته‌اند) بر نوکلئون A وارد می‌شود، یک نیروی اضافی دیگر که از همبستگی مواضع نوکلئونهای B و C ناشی می‌شود نیز بر نوکلئون A وارد خواهد شد. به عبارت دیگر نیروی سه جسمی‌ای که مابین سه نوکلئون قرار دارد، به طور همزمان به مواضع سه ذره وابسته می‌باشد.

در فیزیک ذرات بنیادی، برهم‌کنش ما بین سه کوارک، که هادرون‌ها را تشکیل می‌دهند، می‌توانند با مدل کوارکی، که هم‌ارز نظریه‌ی نیروی سه جسمی می‌باشد توصیف شوند. مهمترین جمله در پتانسیل سه نوکلئونی که بزرگترین برد احتمالی را دارد به فرایند شناخته شده‌ای مانند (TPE-3NP)¹ مربوط است. یک پیون که بوسیله‌ی یکی از نوکلئون‌ها تابش شده است، قبل از جذب شدن بوسیله‌ی سومین نوکلئون، توسط نوکلئون دوم پراکنده می‌شود [۱۶].

از دیدی که از نیروهای حاصل از تبادل مزونی داریم چنین به نظر می‌رسد که تبادل‌های مزونی فقط میان جفت‌ها عمل می‌کنند. ولی فوراً می‌بینیم که تبادل‌های دیگری نیز حضور دارند. بعنوان مثال هنگامی که دو نوکلئون حضور دارند و یکی از نوکلئون‌ها دو مزون گسیل می‌کنند، هر دو مزون باید جذب نوکلئون دیگر شوند، ولی هرگاه دو نوکلئون دیگر علاوه بر نوکلئون اول حضور داشته باشند دو مزون گسیل شده می‌توانند جداگانه جذب هر یک از دو نوکلئون شوند. این امر منجر به نیروی سه جسمی می‌شود. به سادگی می‌بینیم که طرح تبادل مزونی، نیروهای چهار جسمی و پنج

¹ Tow-Pion exchange three-Nucleon potential

جسمی و غیره را پیش‌بینی می‌کند که به طور کلی نیروی چند جسمی نامیده می‌شود.

چون باید مزون‌های زیادی به‌طور همزمان در این فرایندها ایجاد شوند، برد نیروها با افزایش

تعداد جسمها کاهش می‌یابد. اگر به‌طور تقریبی برد نیروی n جسمی را $\frac{1}{n-1}$ برابر برد نیروی دو

جسمی در نظر بگیریم، این مقدار برای نیروهای ۲، ۳، ۴ و ۵ جسمی به‌ترتیب حدود ۱.۴، ۰.۷، ۰.۴۷، ۰.۳۵ فرمی است.

تلاش زیادی صرف محاسبه‌ی انرژی بستگی ${}^3\text{H}$ شده است که به‌طور تجربی برابر 8.48 MeV

بدست آمده است. نتایج نشان می‌دهند که انرژی بستگی ناشی از نیروی دو جسم فقط برابر 7 MeV

است، و در نتیجه حدود 1.5 MeV از انرژی بستگی، از نیروی سه جسم ناشی می‌شود. از اینجا

استنباط می‌کنیم که اهمیت نیروهای سه جسم در هسته حدود ۲۰ درصد اهمیت نیروهای دو جسم

است [۱۵].

۳-۴ سیستم‌های سه جسمی در فیزیک هسته‌ای

از جمله سیستم‌های سه جسمی که در فیزیک هسته‌ای مورد بررسی قرار گرفته‌اند می‌توان به

${}^3\text{H}$ و ${}^3\text{He}$ اشاره کرد. ${}^3\text{He}$ یک هسته‌ی پایدار و هسته‌ی آینه‌ای آن ${}^3\text{H}$ ناپایدار می‌باشد. و با

دوره‌ی زمانی 12.3 سال واپاشی می‌کند.



بنابراین یک نوترون در هسته‌ی ${}^3\text{H}$ به یک پروتون، الکترون و پاد نوترینوی الکترون تبدیل

می‌شود. واپاشی ${}^3\text{H}$ ، واپاشی β ، یک برهم‌کنش ضعیف است و نسبتاً کند می‌باشد. انرژی بستگی

هسته‌های ${}^3\text{H}$ و ${}^3\text{He}$ به ترتیب برابر 8.432 MeV و 7.718 MeV هستند. تفاوت انرژی

$$\Delta E = 0.764 \text{ MeV} \quad (21-3)$$

می‌تواند با دافعه‌ی کولنی مابین پروتونها در هسته‌ی ${}^3\text{He}$ توصیف شود.

انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون برابر 2.8 MeV در هسته‌ی ${}^3\text{H}$ و 2.6 MeV در هسته‌ی ${}^3\text{He}$ می‌باشد. هر دو در مقایسه با انرژی بستگی دوترون بزرگتر می‌باشند. بنابراین ابعاد دوترون و هسته‌های سه نوکلئونی کمی متفاوت است. ظاهراً یک دوترون حتی کمی بزرگتر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که هر دو هسته‌ی ${}^3\text{H}$ و ${}^3\text{He}$ فشرده‌تر از دوترون می‌باشند. بنابراین سه نوکلئون در هسته‌های سه نوکلئونی به طور میانگین به نسبت دو نوکلئون در یک دوترون به هم نزدیک‌تر می‌باشند.

همان‌طوری که اشاره شد در یک سیستم چند نوکلئونی، بین هر جفت نوکلئون برهم‌کنش‌های متفاوتی وجود دارد. یعنی در یک سیستم چند نوکلئونی برهم‌کنش اساسی برهم‌کنش دو نوکلئونی می‌باشد. این برهم‌کنش می‌تواند به فاصله‌ی نسبی، اسپین و ایزوسپین ذرات بستگی داشته باشد. بنابراین کاملترین پتانسیلی که بتوان با آن یک سیستم چند نوکلئونی را توصیف کرد، باید در آن تمام این برهم‌کنش‌ها لحاظ شود. با علم به این موضوع ما در این کار تنها برهم‌کنش سه جسمی بین ذرات را در نظر می‌گیریم و سیستم سه ذره‌ای را تنها تحت تأثیر این برهم‌کنش بررسی می‌کنیم. که در فصل بعد به طور مفصل درباره‌ی آن صحبت خواهیم کرد.

۴ فصل چهارم

محاسبه‌ی انرژی بستگی هسته

۱-۴ پتانسیل مورس در فیزیک اتمی

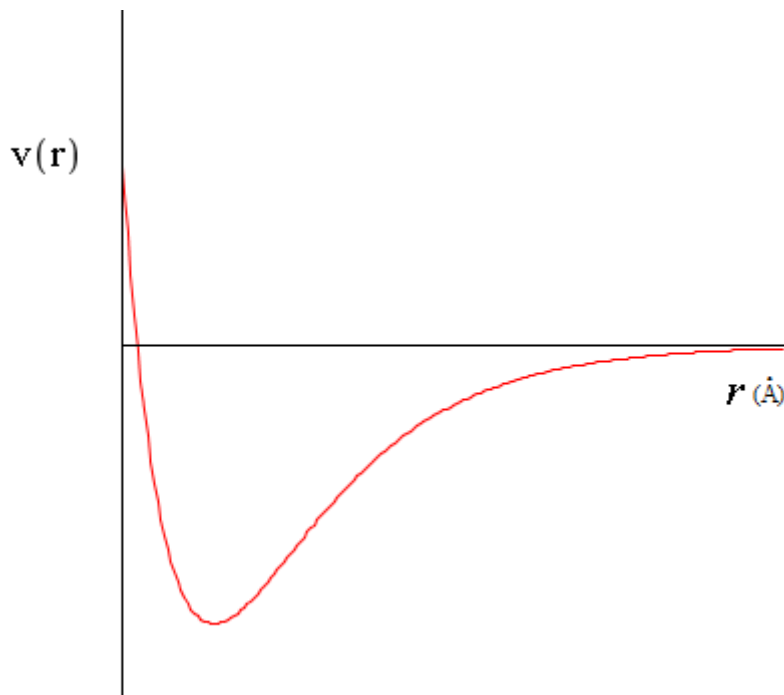
فیلیپ مورس^۱ برای توصیف حرکت هسته‌ها در یک مولکول دو اتمی از پتانسیلی به صورت زیر

استفاده کرد [۱۷]

$$V(r) = D_0 \left(e^{-2\alpha(r-r_0)} - 2e^{-\alpha(r-r_0)} \right) \quad (1-4)$$

در این رابطه r فاصله‌ی نسبی بین دو هسته می‌باشد. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود

$V(r)$ یک مینیمم $-D_0$ در $r = r_0$ دارد. D_0 و α ضرایب ثابتی می‌باشند.



شکل ۱-۴ پتانسیل مورس برای یک مولکول دو اتمی، به متناهی بودن پتانسیل برای r های کوچک توجه شود.

انرژی‌های بدست آمده از حل معادله‌ی شرودینگر با این پتانسیل توافق خوبی با مقادیر تجربی

دارند. همان‌طوری که در شکل می‌بینیم پتانسیل برای $r \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل می‌کند و در

$r = 0$ دارای یک مقدار متناهی می‌باشد. از ویژگی‌های پتانسیل هسته‌ای این است که در r های

¹ Philip M. Morse

بزرگ صفر و برای r های کوچک بینهایت باشد. در این کار به دنبال ایجاد پتانسیلی مناسب می‌باشیم.

۲-۴ پتانسیل مورس برای یک سیستم سه جسمی در فیزیک هسته‌ای

اگر \vec{r}_i ($i=1,2,3$) مختصات سه نوکلئون باشند، مختصات ژاکوبی به صورت زیر خواهد بود

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \text{الف (۲-۴)}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \quad \text{ب (۲-۴)}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) \quad \text{ج (۳-۴)}$$

آنگاه با استفاده از رابطه‌ی (۲-۴) خواهیم داشت

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{\lambda} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\rho} \quad \text{(۳-۴)}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{\lambda} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\rho}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{R} - \frac{\sqrt{6}}{3}\vec{\lambda}$$

و با استفاده از رابطه‌ی (۳-۴) داریم

$$(\vec{r}_1 - \vec{R})^2 + (\vec{r}_2 - \vec{R})^2 + (\vec{r}_3 - \vec{R})^2 = \rho^2 + \lambda^2 = x^2 \quad \text{(۴-۴)}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{(\vec{r}_1 - \vec{R})^2 + (\vec{r}_2 - \vec{R})^2 + (\vec{r}_3 - \vec{R})^2}$$

در رابطه‌ی (۴-۴)، x فوق شعاع می‌باشد. آنگاه تابع $V(x)$ را به شکل زیر تعریف

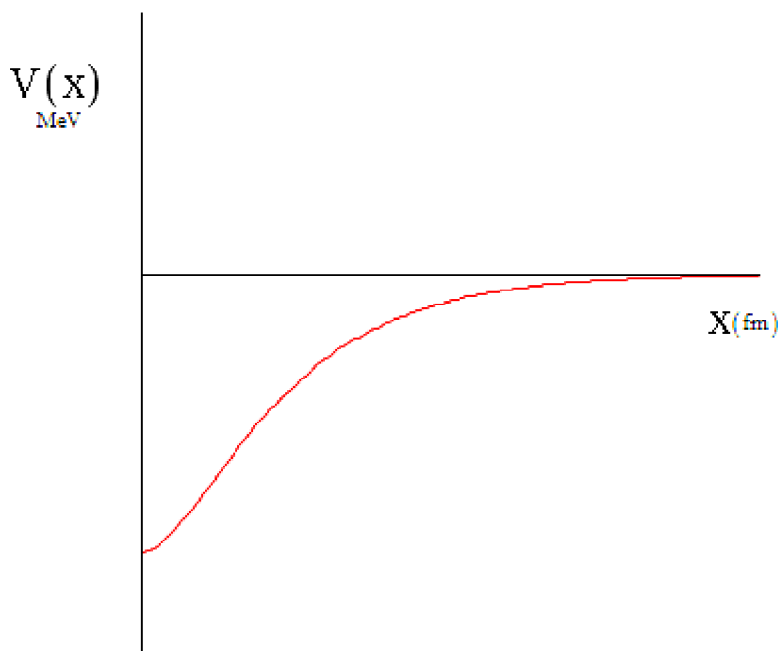
می‌کنیم [۱۸]

$$V(x) = D_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}) \quad \text{(۵-۴)}$$

که D_0 و α پارامترهای پتانسیل می‌باشند. همان طوری که دیده می‌شود پتانسیل (۵-۴)

تحت جابجایی ذرات ناوردا باقی می‌ماند. با توجه به شکل (۴-۲) برای $x \rightarrow \infty$ پتانسیل از نظر هسته‌ای رفتاری مناسب دارد. اما برای $x \rightarrow 0$ ، یعنی حالتی که سه ذره بسیار به هم نزدیک می‌شوند، دارای رفتار مناسبی نیست. می‌توان با افزودن جمله‌ای به این تابع، رفتار آن را به گونه‌ای تصحیح کرد که در x های کوچک پتانسیل به سمت بینهایت میل کند. ما این جمله‌ی تصحیحی را به صورت $\frac{1}{x^2}$ انتخاب می‌کنیم.

دلیل این انتخاب یکی این است که جمله‌ی $\frac{1}{x^2}$ با سرعت مناسبی برای x های کوچک به سمت بینهایت میل می‌کند. دلیل دیگر به روش حل معادله‌ی شرودینگر مربوط می‌شود. ما معادله‌ی شرودینگر را به روش حدسی حل کرده‌ایم، برای حل آسانتر این معادله به این روش جمله‌ی $\frac{1}{x^2}$ تصحیح مناسبی می‌باشد.

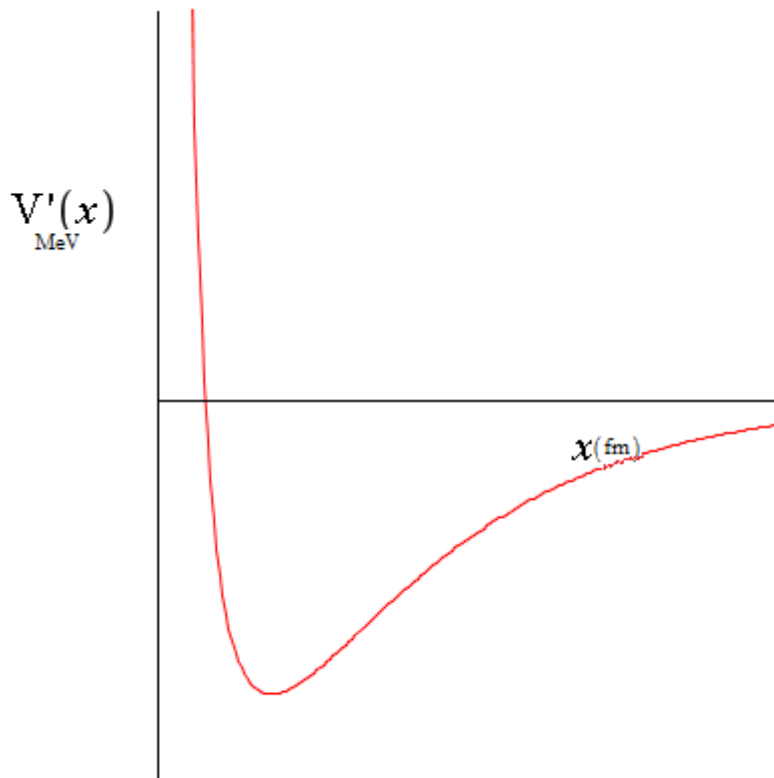


شکل ۴-۲ پتانسیل $V(x)$ در رابطه‌ی (۴-۵)، x فوق شعاع می‌باشد.

بنابراین پتانسیلی که ما با آن کار خواهیم کرد به شکل زیر است

$$V'(x) = D_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}) + \frac{k_0}{x^2} \quad (۶-۴)$$

که k_0 یک مقدار ثابت می‌باشد. همانطوری که در شکل (۳-۴) دیده می‌شود، پتانسیل (۶-۴) اکنون یک پتانسیل مناسب است، که برهم‌کنش سه جسمی یک سیستم سه نوکلئونی را می‌تواند توصیف کند. از این پس هرگاه صحبت از پتانسیل مورس می‌شود، منظور این پتانسیل اصلاح شده است.



شکل ۳-۴ پتانسیل اصلاح شده‌ی مورس برای یک سیستم سه نوکلئونی با $k_0 > 0$.

۳-۴ محاسبه تابع موج و انرژی حالت پایه یک سیستم سه نوکلئونی با استفاده از پتانسیل

مورس

همان طوری که در فصل دوم بیان شد، معادله‌ی شرودینگر برای یک سیستم سه ذره‌ای به صورت معادله‌ی (۲-۱۷) می‌باشد. اگر برهم‌کنش، به گونه‌ای باشد که فقط تابعی از مختصه‌ی فوق شعاع باشد آنگاه معادله‌ی شرودینگر برای سه ذره را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{L(L+4)}{x^2} \right) \psi_{n,L}(x) = (E - v(x)) \psi_{n,L}(x) \quad (۷-۴)$$

که در این رابطه $v(x)$ به صورت معادله‌ی (۴-۶) می‌باشد. و L عدد کوانتومی تکانه‌ی زاویه‌ای بزرگ می‌باشد.

در رابطه‌ی (۷-۴) برای از بین بردن مشتق مرتبه‌ی اول از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم

$$\psi_{n,L}(x) = x^{-\frac{5}{2}} u_{n,L}(x) \quad (۸-۴)$$

با استفاده از معادلات (۷-۴) و (۸-۴) خواهیم داشت

$$\frac{d^2 u_{n,L}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - D_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}) - \frac{\hbar^2 \left[L(L+4) + \frac{15}{4} \right] + k_0}{x^2} \right] u_{n,L}(x) = 0 \quad (۹-۴)$$

در معادله‌ی (۹-۴) به علت وجود همزمان جمله‌ی $\frac{1}{x^2}$ و جملات نمایی این معادله قابل حل

نمی‌باشد. برای حل این معادله‌ی دیفرانسیل از یک تقریب مناسب استفاده می‌کنیم. تقریب زیر را در نظر می‌گیریم [۱۹].

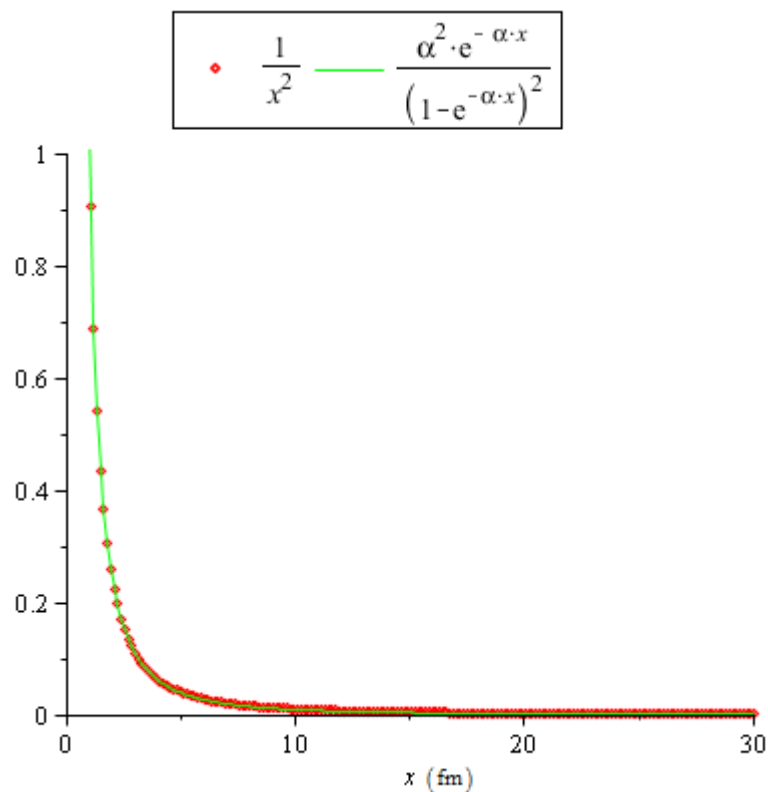
$$\frac{1}{x^2} \approx \frac{\alpha^2 e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})^2} \quad (10-4)$$

α در این تقریب، ضربی است که به علت ایجاد بعد مناسب در نظر گرفته می‌شود.

در شکل (4-4) جمله‌ی $\frac{1}{x^2}$ و تقریب آن را رسم کرده‌ایم. همانطوری که مشاهده می‌شود به

ازای α های بسیار کوچک دو نمودار تطابق بسیار خوبی با هم دارند، بنابراین معادله‌ی (10-4) یک

تقریب مناسب می‌باشد.



شکل 4-4 $\frac{1}{x^2}$ و تقریب آن در معادله‌ی (10-4).

همچنین می‌توان جمله‌ی $D_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$ را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} D_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}) &= D_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x} + 1 - 1) \\ &= D_0(1 - e^{-\alpha x})^2 - D_0 \end{aligned} \quad (11-4)$$

در این صورت می‌توان رابطه‌ی (۹-۴) را به صورت زیر نوشت

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + D_0 - D_0(1 - e^{-\alpha x})^2 - \frac{\alpha^2 \left(\frac{\hbar^2}{2m} \left[L(L+4) + \frac{15}{4} \right] + k_0 \right) e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})^2} \right) \right\} u_{n,L}(x) = 0 \quad (12-4)$$

از یک تغییر متغیر به صورت زیر استفاده می‌کنیم

$$y = 1 - e^{-\alpha x} \quad (13-4)$$

در این صورت

$$\begin{aligned} y' &= \alpha e^{-\alpha x} \\ &= \alpha(1 - y) \end{aligned} \quad \text{الف (14-4)}$$

$$u'_{n,\gamma}(x) = \alpha(1 - y) u'_{n,\gamma}(y) \quad \text{ب (14-4)}$$

$$u''_{n,\gamma}(x) = \alpha^2(1 - y)^2 u''_{n,\gamma}(y) - \alpha^2(1 - y) u'_{n,\gamma}(y) \quad \text{ج (14-4)}$$

حال با استفاده از معادلات (۱۳-۴) و (۱۴-۴) می‌توان معادله‌ی (۱۲-۴) را به صورت زیر

بازنویسی کرد

$$\left\{ \frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{1-y} \frac{d}{dy} + \frac{2m}{\hbar^2 \alpha^2} \left[\frac{(D_0 + E)}{(1-y)^2} - \frac{D_0 y^2}{(1-y)^2} - \frac{\alpha^2 \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left[L(L+4) + \frac{15}{4} \right] + k_0 \right\}}{y^2(1-y)} \right] \right\} u_{n,L}(y) = 0 \quad (15-4)$$

حال برای از بین بردن مشتق مرتبه‌ی اول در معادله‌ی (۴-۱۵) از تبدیل مناسب زیر استفاده

می‌کنیم

$$u_{n,L}(y) = \frac{\varphi_{n,L}(y)}{\sqrt{1-y}} \quad \text{الف (۴-۱۶)}$$

$$u'_{n,L}(y) = \frac{\varphi'_{n,L}(y)}{\sqrt{1-y}} + \frac{\varphi_{n,L}(y)}{2(1-y)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{ب (۴-۱۶)}$$

$$u''_{n,L}(y) = \frac{\varphi''_{n,L}(y)}{\sqrt{1-y}} + \frac{\varphi'_{n,L}(y)}{(1-y)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\varphi_{n,L}(y)}{4(1-y)^{\frac{5}{2}}} \quad \text{ج (۴-۱۶)}$$

با استفاده از معادلات (۴-۱۵) و (۴-۱۶) خواهیم داشت

$$\frac{d^2\varphi_{n,L}}{d^2y} + \left[\frac{A}{(1-y)^2} - \frac{By^2}{(1-y)^2} - \frac{c}{(1-y)y^2} + \frac{1}{4(1-y)^2} \right] \varphi_{n,L} = 0 \quad (۴-۱۷)$$

$$A = (D_0 + E) \frac{2m}{\hbar^2 \alpha^2} \quad (۴-۱۸)$$

$$B = \frac{2mD_0}{\hbar^2 \alpha^2}$$

$$c = \left[L(L+4) + \frac{15}{4} \right] + \frac{2mk_0}{\hbar^2}$$

از طرفی می‌توانیم روابط زیر را بدست آوریم

$$\frac{y^2}{(1-y)^2} = 1 - \frac{2}{(1-y)} + \frac{1}{(1-y)^2} \quad (۴-۱۹)$$

$$\frac{1}{y^2(1-y)^2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(1-y)}$$

با استفاده از معادلات (۴-۱۸) و (۴-۱۹) می‌توان معادله‌ی (۴-۱۷) را به صورت زیر بازنویسی

کرد

$$\frac{d^2\varphi_{n,L}(y)}{d^2y} + \left[\frac{A-B+\frac{1}{4}}{(1-y)^2} + \frac{(2B-c)}{(1-y)} - \frac{c}{y^2} - \frac{c}{y} - B \right] \varphi_{n,L}(y) = 0 \quad (۴-۲۰)$$

برای حل این معادله‌ی دیفرانسیل از روش حدسی استفاده می‌کنیم بنابراین تابع موج را به

صورت زیر در نظر می‌گیریم [۲۰]

$$\varphi_{n,L}(y) = f_n(y) e^{g_L(y)} \quad (۴-۲۱)$$

$$f_n(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } n=0 \\ \prod_{i=1}^n (y-c_i^n) & \text{if } n \geq 1 \end{cases} \quad (۴-۲۲)$$

با استفاده از معادله‌ی (۴-۲۱) داریم

$$\varphi_{n,L}''(y) = \left[g_L'^2(y) + g_L''(y) + \frac{f_n''(y) + 2g_L'(y)f_n'(y)}{f_n(y)} \right] \varphi_{n,L}(y) \quad (۴-۲۳)$$

برای حالت پایه $f_n(y) = 1$ و $g_L(y)$ را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$g_L(y) = \delta y + \eta \text{Ln} y + \beta \text{Ln}(1-y) \quad (۴-۲۴)$$

$$g_L'(y) = \delta + \frac{\eta}{y} - \frac{\beta}{(1-y)}$$

$$g_L''(y) = -\frac{\eta}{y^2} - \frac{\beta}{(1-y)^2}$$

آنگاه با استفاده از روابط (۲۳-۴) و (۲۴-۴) داریم

$$\frac{d^2\varphi_{n,L}(y)}{dy^2} = \left(\frac{\beta^2 - \beta}{(1-y)^2} - \frac{(2\delta\beta + 2\eta\beta)}{(1-y)} + \frac{\eta^2 - \eta}{y^2} + \frac{2\delta\eta - 2\eta\beta}{y} + \delta^2 \right) \varphi_{n,L}(y) \quad (25-4)$$

اکنون با مقایسه‌ی معادلات (۲۰-۴) و (۲۵-۴) روابط مربوط به پارامترهای پتانسیل و انرژی را

خواهیم داشت

$$\beta^2 - \beta = -A + B - \frac{1}{4} \quad (26-4)$$

$$2\eta\beta + 2\delta\beta = 2B - c$$

$$\eta^2 - \eta = c$$

$$2\delta\eta - 2\eta\beta = c$$

$$\delta^2 = B$$

از (۲۶-۴) خواهیم داشت

$$\delta = \pm\sqrt{B} \quad (27-4)$$

$$\eta = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$$

$$\beta = \delta - \eta$$

معادلات (۲۷-۴) مستقیماً از (۲۶-۴) بدست می‌آیند. برای اینکه جوابهای بدست آمده فیزیکی

باشند برای δ و η مقادیر مثبت در نظر گرفته می‌شوند.

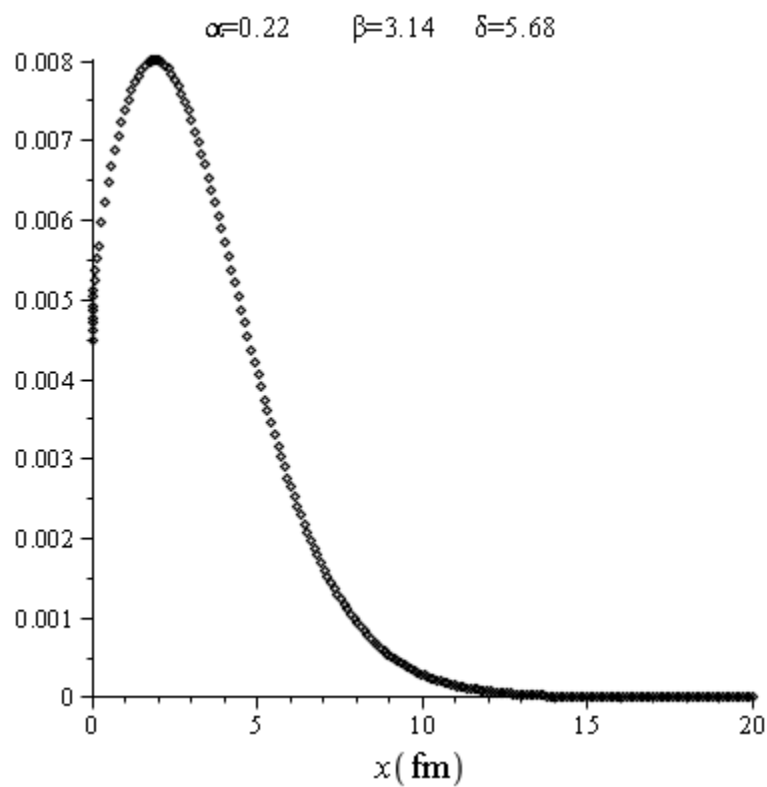
و برای انرژی خواهیم داشت

$$E_{0,0} = \frac{\alpha^2 \hbar^2}{2m} \left(\beta - \beta^2 - \frac{1}{4} \right) \quad (29-4)$$

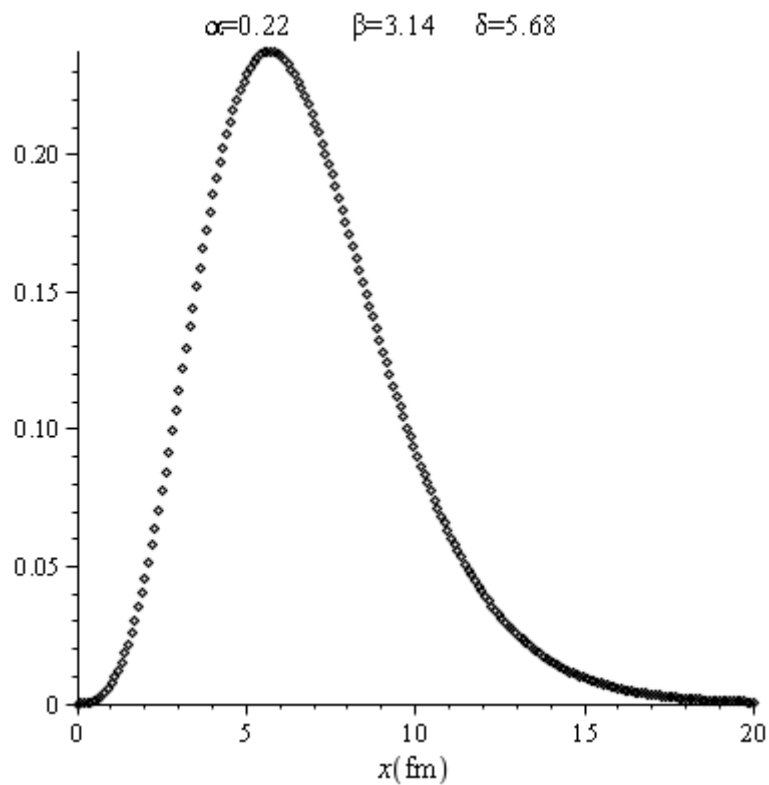
همچنین برای تابع موج خواهیم داشت

$$u_{0,0}(x) = x^{-\frac{5}{2}}(1 - e^{-\alpha x})^\eta e^{\alpha(\frac{1}{2}-\beta)x} e^{\delta(1-e^{-\alpha x})} \quad (30-4)$$

در شکل (۴-۵) تابع موج را رسم کرده‌ایم، همان طوری که مشاهده می‌شود، تابع موج به خوبی شرایط مرزی را برآورده می‌کند.



شکل ۴-۵ تابع موج برای حالت پایه با پتانسیل مورس.



شکل ۴-۶ چگالی احتمال برای حالت پایه.

همچنین می‌توان میانگین مربعی شعاع را به صورت مقدار چشمداشتی عبارت زیر بدست

آورد [۲۱]

$$\frac{1}{A} \sum_{i=1}^A (r_i - R)^2 = \frac{1}{A} x^2 \quad (۴-۳۱)$$

نتایج زیر برای هسته‌ای خاص مانند هلیوم ^3He بدست می‌آید.

جدول ۱-۴ انرژی بستگی و جذر میانگین مربعی شعاع برای هسته‌ی هلیوم.

D_0 (MeV)	K_0 (MeV fm ²)	α (1/fm)	E_b (MeV)	$\langle x^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ (fm)	η	β	δ
۴۶.۷	۳	۰.۳	۷.۱۳۳	۳.۲۳۸	۲.۵۴	۲.۲۵	۴.۹۹
۳۹.۵	۳	۰.۲۶	۷.۱۶۲	۳.۴۵۸	۲.۵۴	۲.۷۶	۵.۳
۳۲.۵	۳	۰.۲۲	۷.۰۰۳	۳.۷۶۳	۲.۵۴	۳.۱۴	۵.۶۸

مقدار انرژی بستگی هلیوم 7.718 MeV و جذر میانگین مربعی شعاع آن 1.88 fm می‌باشد [۱۴].

مقداری اختلاف بین مقدار تجربی جذر میانگین مربعی شعاع با مقدار محاسبه شده وجود دارد، باید در نظر داشت که ما برهم‌کنش‌های اسپینی، ایزوسپینی و اسپین-ایزوسپینی را در نظر نگرفته‌ایم، می‌توان برای تصحیح نتایج این برهم‌کنش‌های مهم را نیز در نظر گرفت.

۴-۴ دوترون

دوترون هسته‌ی اتم خنثی ^2H می‌باشد. که از یک پروتون و یک نوترون تشکیل شده است. از آنجایی که هسته‌ی دوترون ساده‌ترین حالت مقید نوکلئون‌ها می‌باشد یک سیستم ایده‌آل برای مطالعه‌ی برهم‌کنش نوکلئون-نوکلئون است. دوترون هیچ حالت برانگیخته‌ی مقیدی ندارد. انرژی بستگی دوترون 2.22 MeV است که از اندازه‌گیری انرژی پرتوهای گامای گسیل شده از گیراندازی نوترون حرارتی توسط پروتون تعیین شده است.



همچنین می‌توان از واکنش معکوس که تجزیه‌ی فوتونی نامیده می‌شود نیز برای اندازه‌گیری انرژی بستگی استفاده کرد.



پرتو گاما دوترون را به دو پاره تقسیم می‌کند. کمینه انرژی پرتو گامایی که بتواند چنین فرایندی را انجام دهد، برابر انرژی بستگی است. همچنین می‌توان از روش طیف‌نمایی جرمی برای اندازه‌گیری انرژی بستگی دوترون استفاده کرد. در این روش با استفاده از طیف‌نمایی جرم دوترون اندازه‌گیری می‌شود. آنگاه با استفاده از رابطه‌ی انرژی بستگی می‌توان، انرژی بستگی دوترون را با دقت بسیار اندازه‌گیری کرد.

$$B = [Z m({}^1\text{H}) + N m_n - m({}^A\text{X})] c^2 \quad (34-4)$$

انرژی بستگی دوترون در مقایسه با هسته‌های دیگر (8 MeV) بسیار کم است و بنابراین پروتون و نوترون قید ضعیفی نسبت به هم دارند. و اگر این قید اندکی ضعیف‌تر بود حالت مقید دوترون نمی‌توانست وجود داشته باشد. اسپین کل اندازه‌گیری شده‌ی دوترون برابر یک است. اسپین

کل دوترون برابر برآیند اسپین‌های ذاتی پروتون و نوترون و تکانه‌ی زاویه‌ای \bar{L} نوکلئون‌ها حول مرکز جرم مشترک آنها می‌باشد.

$$\bar{I} = \bar{S}_n + \bar{S}_p + \bar{L} \quad (۳۵-۴)$$

از آنجایی که اسپین پروتون و نوترون یا با هم موازی (اسپین یک) و یا پادموازی (اسپین صفر) هستند، بردارهای \bar{S}_n ، \bar{S}_p و \bar{L} به چهار صورت می‌توانند با هم جمع شوند. به گونه‌ای که اسپین کل برابر با یک شود.

$$\bar{S}_n \text{ و } \bar{S}_p \text{ موازی و } l=0$$

$$\bar{S}_n \text{ و } \bar{S}_p \text{ پادموازی و } l=1$$

$$\bar{S}_n \text{ و } \bar{S}_p \text{ موازی و } l=1$$

$$\bar{S}_n \text{ و } \bar{S}_p \text{ موازی و } l=2$$

اما از آنجایی که دوترون دارای پاریتته‌ی زوج است و چون پاریتته‌ی مربوط به حرکت مداری به صورت $(-1)^l$ می‌باشد، برای $l=0$ و $l=2$ پاریتته زوج و برای $l=1$ پاریتته فرد است. بنابراین مقادیر قابل قبول برای تکانه‌ی زاویه‌ای مداری $l=0$ و $l=2$ می‌باشند.

اگر فرض کنیم $l=0$ آنگاه حرکت مداری هیچ سهمی در گشتاور مغناطیسی ندارد و گشتاور مغناطیسی کل حاصل ترکیب گشتاورهای مغناطیسی نوترون و پروتون است.

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_n + \mu_p \\ &= (g_{sn}S_n + g_{sp}S_p) \frac{\mu_N}{\hbar} \end{aligned} \quad (۳۶-۴)$$

که $g_{sn} = -3.826084$ و $g_{sp} = 5.585691$ است. در نتیجه خواهیم داشت.

$$\mu = 0.879804 \mu_N \quad (37-4)$$

مقدار مشاهده شده برای μ عبارت است $0.8574376 \mu_N$. اختلاف اندکی که بین مقدار مشاهده شده و مقدار محاسبه شده وجود دارد را می‌توان این گونه تفسیر کرد که تابع موج دوترون مخلوطی از حالت‌های s و d است.

$$\psi = a_s \psi(1=0) + a_d \psi(1=2) \quad (38-4)$$

دوترون از ترکیب ۹۶ درصد حالت $1=0$ و فقط ۴ درصد حالت $1=2$ می‌باشد.

گشتاور چهارقطبی الکتریکی دوترون $Q = 0.00288b$ است. چون نوترون و پروتون به طور جداگانه هیچ گونه گشتاور چهارقطبی الکتریکی ندارند، هر مقدار غیرصفر که از اندازه‌گیری گشتاور چهارقطبی بدست می‌آید، باید ناشی از حرکت مداری تلقی شود.

۴-۴-۱ محاسبه‌ی انرژی بستگی دوترون با پتانسیل مای

پتانسیل مای^۱ به شکل زیر تعریف می‌شود [۲۲]

$$V(r) = D \left(\frac{a}{b-a} \left(\frac{r_e}{r} \right)^b - \frac{b}{b-a} \left(\frac{r_e}{r} \right)^a \right) \quad (۳۹-۴)$$

در این کار D را به صورت انرژی برهم‌کنش دو نوکلئون در حالتی که در فاصله‌ی r_e نسبت به هم هستند تعریف می‌کنیم. همچنین ما حالت ($a=2$ و $b=1$) را در نظر می‌گیریم در این صورت خواهیم داشت

$$V(r) = D \left(\frac{r_e^2}{r^2} - \frac{2r_e}{r} \right) \quad (۴۰-۴)$$

برای بررسی دوترون با این پتانسیل از معادله‌ی شعاعی شرودینگر شروع می‌کنیم.

معادله‌ی شعاعی شرودینگر برای یک سیستم دو ذره‌ای عبارت است از

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) R_{n,\ell}(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{n,\ell} - V(r)) R_{n,\ell}(r) = 0 \quad (۴۱-۴)$$

با استفاده از روابط (۴۰-۴) و (۴۱-۴) خواهیم داشت

$$\frac{d^2 R_{n,\ell}(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{n,\ell}(r)}{dr} + \frac{(-\varepsilon_{n,\ell}^2 r^2 + D_1 r + D_2)}{r^2} R_{n,\ell}(r) = 0 \quad (۴۲-۴)$$

$$\varepsilon_{n,\ell}^2 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2} \quad (43-4)$$

$$D_1 = \frac{4\mu D r_e}{\hbar^2}$$

$$D_2 = -\frac{2\mu D r_e^2}{\hbar^2} - \ell(\ell+1)$$

در این قسمت هدف ما حل معادله‌ی (۴۲-۴) می‌باشد. ما این معادله را به روش NU حل می‌کنیم. روش NU بر پایه‌ی حل معادلات درجه دوم با کاهش آن به شکل عمومی معادله فوق هندسی می‌باشد. در این روش بعد از یک تبدیل مختصات مناسب $s = s(r)$ معادله‌ی شرودینگر می‌تواند به شکل زیر نوشته شود [۲۳ و ۲۴]

$$\psi_n''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \psi_n'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \psi_n(s) = 0 \quad (44-4)$$

که $\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(s)$ چند جمله‌ای‌هایی حداکثر از درجه‌ی دو می‌باشند و $\tilde{\tau}(s)$ یک چند جمله‌ای مرتبه یک می‌باشد. تابع موج زیر را به‌کار می‌بریم

$$\psi_n(s) = \varphi_n(s) y_n(s) \quad (45-4)$$

که با استفاده از (۴۵-۴) معادله‌ی (۴۴-۴) به توابع نوع فوق هندسی کاهش می‌یابد

$$\sigma(s) y_n''(s) + \tau(s) y_n'(s) + \lambda y_n(s) = 0 \quad (46-4)$$

که

$$\sigma(s) = \pi(s) \frac{\varphi(s)}{\varphi'(s)} \quad (47-4)$$

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad , \quad \tau'(s) < 0$$

و معادله‌ی ویژه مقدری برای معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دو به شکل زیر است [۲۶ و ۲۵].

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (48-4)$$

همچنین داریم

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} (\sigma^n(s) \rho(s)) \quad (49-4)$$

که B_n ضریب بهنجارش می‌باشد. تابع وزن $\rho(s)$ باید شرط زیر را برآورده کند.

$$\frac{d}{ds} w(s) = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} w(s), \quad w(s) = \sigma(s) \rho(s) \quad (50-4)$$

همچنین تابع π و پارامتر λ به شکل زیر تعریف می‌شوند

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)} \quad (51-4)$$

$$\lambda = k + \pi'(s)$$

حال با توضیحات داده شده به معادله‌ی (۴۲-۴) باز می‌گردیم، با مقایسه‌ی معادلات

(۴۲-۴) و (۴۴-۴) داریم

$$\begin{aligned} \sigma &= r \\ \tilde{\tau} &= 2 \\ \tilde{\sigma} &= -\varepsilon_{n,\ell}^2 r^2 + D_1 r + D_2 \end{aligned} \quad (52-4)$$

با استفاده از (۵۱-۴) و (۵۲-۴) داریم

$$\pi = -\frac{1}{2} \pm \left(\varepsilon_{n,\ell} r + \frac{(k - D_1)}{2\varepsilon_{n,\ell}} \right) \quad (53-4)$$

$$k_{\pm} = D_1 \pm 2\varepsilon_{n,\ell} \sqrt{\frac{1}{4} - D_2}$$

که جواب فیزیکی به ازای k_- می‌باشد. در این صورت خواهیم داشت

$$\pi = -\frac{1}{2} \pm \left(\varepsilon_{n,\ell} r - \sqrt{\frac{1}{4} - D_2} \right) \quad (54-4)$$

از آنجایی که باید $\tau'(s) < 0$ ، جواب منفی برای π قابل قبول است و خواهیم داشت

$$\pi = -\varepsilon_{n,\ell} r + \sqrt{\frac{1}{4} - D_2} - \frac{1}{2} \quad (55-4)$$

با استفاده از معادله‌ی (47-4)، (52-4) و (55-4) داریم

$$\tau = -2\varepsilon_{n,\ell} r + \sqrt{1 - 4D_2} + 1 \quad (55-4)$$

آنگاه با استفاده از (50-4) و (55-4) خواهیم داشت

$$\frac{d}{dr}(r\rho(r)) = \rho(r) \left(-2\varepsilon_{n,\ell} r + \left(1 + 2\sqrt{1 - 4D_2} \right) \right) \quad (56-4)$$

که پس از مقداری محاسبه برای $\rho(r)$ خواهیم داشت

$$\rho(r) = r^{\sqrt{1-4D_2}} e^{-2\varepsilon_{n,\ell} r} \quad (57-4)$$

با استفاده از (47-4) و (55-4) برای φ داریم

$$\varphi(r) = r^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - D_2}} e^{-2\varepsilon_{n,\ell} r} \quad (58-4)$$

با استفاده از (۴-۴۹) و (۴-۵۷) داریم

$$y_n = B_n e^{2\varepsilon_{n,\ell} r} r^{-\sqrt{1-4D_2}} \frac{d^n}{dr^n} \left(e^{-2\varepsilon_{n,\ell} r} r^{n+\sqrt{1-4D_2}} \right) \quad (۴-۵۹)$$

یکی از نمایش‌های ردیگز چند جمله‌ای‌های وابسته‌ی لاگر عبارت است از [۲۷]

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^{n+k} \right) \quad (۴-۶۰)$$

که n و k اعداد صحیح می‌باشند. از آنجای که $\sqrt{1-4D_2}$ عدد صحیح نمی‌باشد از توابع فوق هندسی همشار استفاده می‌کنیم که دیگر نیازی به صحیح بودن k نیست. بین چند جمله‌ای‌های وابسته‌ی لاگر و توابع فوق هندسی همشار رابطه‌ی زیر وجود دارد [۲۷]

$$L_n^m(x) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{n! \Gamma(m+1)} {}_1F_1(-n, m+1; x) \quad (۴-۶۱)$$

با استفاده از روابط (۴-۵۹)، (۴-۶۰) و (۴-۶۱) خواهیم داشت

$$y_n = B_n \frac{\Gamma(n+\sqrt{1-4D_2}+1)}{\Gamma(\sqrt{1-4D_2}+1)} {}_1F_1\left(-n, \sqrt{1-4D_2}+1; 2\varepsilon_{n,\ell} r\right) \quad (۴-۶۲)$$

بنابراین تابع موج عبارت است از

$$R_{n,\ell}(r) = B_n \frac{\Gamma(n+\sqrt{1-4D_2}+1)}{\Gamma(\sqrt{1-4D_2}+1)} r^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-D_2}} e^{-2\varepsilon_{n,\ell} r} {}_1F_1\left(-n, \sqrt{1-4D_2}+1; 2\varepsilon_{n,\ell} r\right) \quad (۴-۶۳)$$

با استفاده از معادلات (۴-۴۸)، (۴-۵۲) و (۴-۵۵) ویژه مقادیر انرژی به صورت زیر

بدست می‌آیند

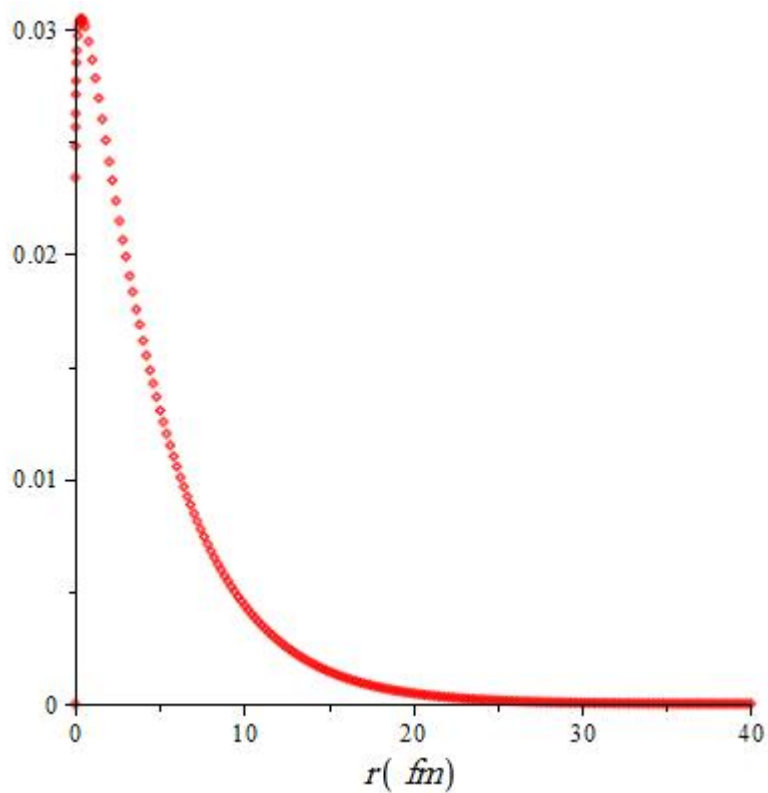
$$E_{n,\ell} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{D_1}{(2n+1) + \sqrt{1-4D_2}} \right)^2 \quad (۶۴-۴)$$

جدول ۲-۴ انرژی بستگی، جذر میانگین مربعی شعاع دوترون و پارامترهای پتانسیل می.

D (MeV)	r_e (fm)	E_b (MeV)	r_{rms} (fm)
۳۳	۰.۳	۲.۰۷	۲.۰۵
۳۰	۰.۳۳	۲.۰۵	۲.۰۵
۲۸	۰.۳۶	۲.۰۹	۲.۰۶
۲۶.۵	۰.۳۹	۲.۱۷	۱.۹۸
۲۵	۰.۴۲	۲.۲۱	۱.۹۹

مقدار تجربی انرژی بستگی دوترون 2.22 MeV و جذر میانگین مربعی شعاع

2.1fm می‌باشد [۲].



شکل ۴-۷ تابع موج حالت پایه‌ی دوترون با پتانسیل مای.

۴-۴-۲ محاسبه‌ی انرژی بستگی دوترون با استفاده از پتانسیل یوکاوا

برای دوترون پتانسیل یوکاوا را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$V(r) = -V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad (۴-۶۵)$$

معادله‌ی شعاعی شرودینگر عبارت است از

$$\frac{d^2 u_{n,\ell}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{n,\ell} - V(r) - \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} \right) u_{n,\ell}(r) = 0 \quad (۴-۶۶)$$

$$u_{n,\ell}(r) = r R_{n,\ell}(r)$$

در نتیجه داریم

$$\frac{d^2 u_{n,\ell}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{n,\ell} + V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} - \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} \right) u_{n,\ell}(r) = 0 \quad (۴-۶۷)$$

به خاطر وجود جملات $\frac{1}{r}$ و $\frac{1}{r^2}$ نمی‌توانیم معادله‌ی بالا را به روشهای معمول حل کنیم.

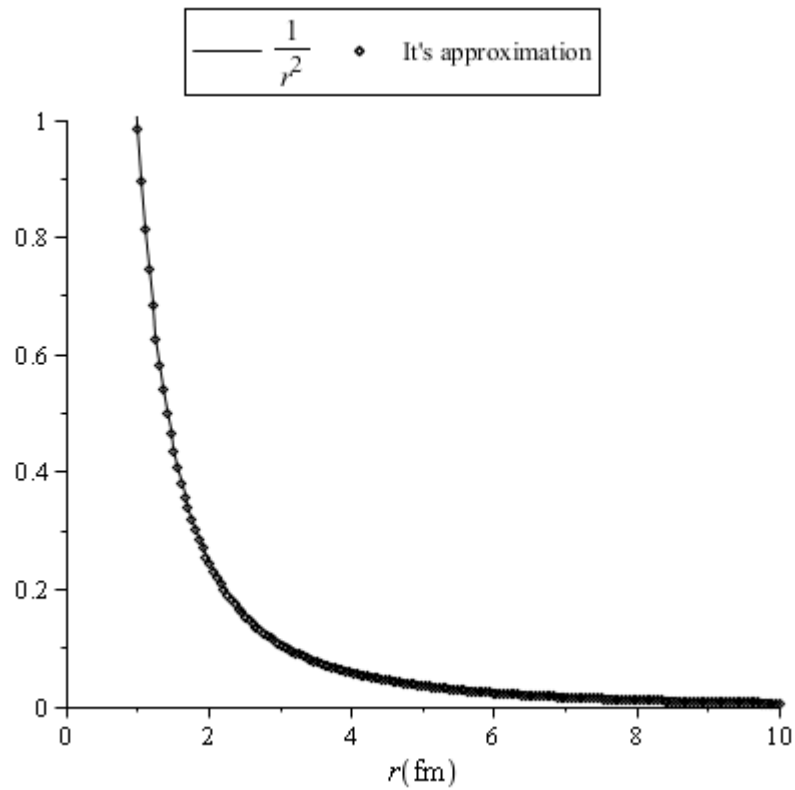
می‌توانیم از یک تقریب مناسب برای حل معادله‌ی بالا استفاده کنیم [۲۸ و ۲۹]

$$\frac{1}{r} = \frac{2\alpha e^{-\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})} \quad (۴-۶۸)$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{4\alpha^2 e^{-2\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})^2}$$

آنگاه با استفاده از تقریب‌های بالا خواهیم داشت

$$\frac{d^2 u_{n,\ell}(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{n,\ell} + 2\alpha V_0 \frac{e^{-2\alpha r}}{(1-e^{-2\alpha r})} - \frac{4\alpha^2 \hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu} \frac{e^{-2\alpha r}}{(1-e^{-2\alpha r})^2} \right) u_{n,\ell}(r) = 0 \quad (69-4)$$



شکل ۸-۴ جمله‌ی $\frac{1}{r^2}$ و تقریب آن.

می‌توانیم از تغییر متغیر زیر استفاده کنیم

$$y = e^{-2\alpha r} \quad (70-4)$$

با استفاده از این تغییر متغیر خواهیم داشت

$$u''_{n,\ell}(y) + \frac{1}{y} u'_{n,\ell}(y) + \frac{\mu}{2\alpha^2 \hbar^2} \left(\frac{E_{n,\ell}}{y^2} + \frac{2V_0\alpha}{y(1-y)} - \frac{2\alpha^2 \hbar^2 \ell(\ell+1)}{\mu} \frac{1}{y(1-y)^2} \right) u_{n,\ell}(r) = 0 \quad (71-4)$$

یک تبدیل مناسب دیگر به صورت زیر می‌باشد

$$u_{n,\ell}(y) = \frac{\varphi_{n,\ell}(y)}{\sqrt{y}} \quad (72-4)$$

با استفاده از تبدیل بالا داریم

$$\varphi''_{n,\ell}(y) + \left(\frac{A + 1/4}{y^2} + \frac{B - \ell(\ell+1)}{y} + \frac{B - \ell(\ell+1)}{(1-y)} - \frac{\ell(\ell+1)}{(1-y)^2} \right) \varphi_{n,\ell}(y) = 0 \quad (73-4)$$

که

$$A = \frac{\mu E_{n,\ell}}{2\alpha^2 \hbar^2} \quad (74-4)$$

$$B = \frac{\mu V_0}{\alpha \hbar^2}$$

اکنون معادله‌ی بالا به شکلی تبدیل شده است که می‌توانیم آن را با روش حدسی

حل کنیم. یک جواب پیشنهادی به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\varphi_{n,\ell}(y) = f_n(y) e^{g_\ell(y)} \quad (75-4)$$

که برای حالت پایه $f_n(y) = 1$ و $g_\ell(y)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$g_\ell(y) = \delta \ln(1-y) + \beta \ln y \quad (76-4)$$

با استفاده از تبدیل بالا خواهیم داشت

$$\varphi''_{0,\ell}(y) = \left(\frac{\beta^2 - \beta}{y^2} - \frac{2\beta\delta}{y} - \frac{2\beta\delta}{(1-y)} + \frac{\delta^2 - \delta}{(1-y)^2} \right) \varphi_{0,\ell}(y) \quad (77-4)$$

با مقایسه‌ی روابط (73-4) و (77-4) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \delta^2 - \delta &= \ell(\ell+1) \\ \beta^2 - \beta &= -A - \frac{1}{4} \\ 2\beta\delta &= B - \ell(\ell+1) \end{aligned} \quad (78-4)$$

با استفاده از روابط بالا داریم

$$\begin{aligned} \delta &= \begin{cases} \ell+1 \\ -\ell \end{cases} \\ \beta &= \frac{B - \ell(\ell+1)}{2(\ell+1)} \\ E_{0,\ell} &= \frac{2\alpha^2 \hbar^2}{\mu} (\beta - \beta^2 - \frac{1}{4}) \end{aligned} \quad (79-4)$$

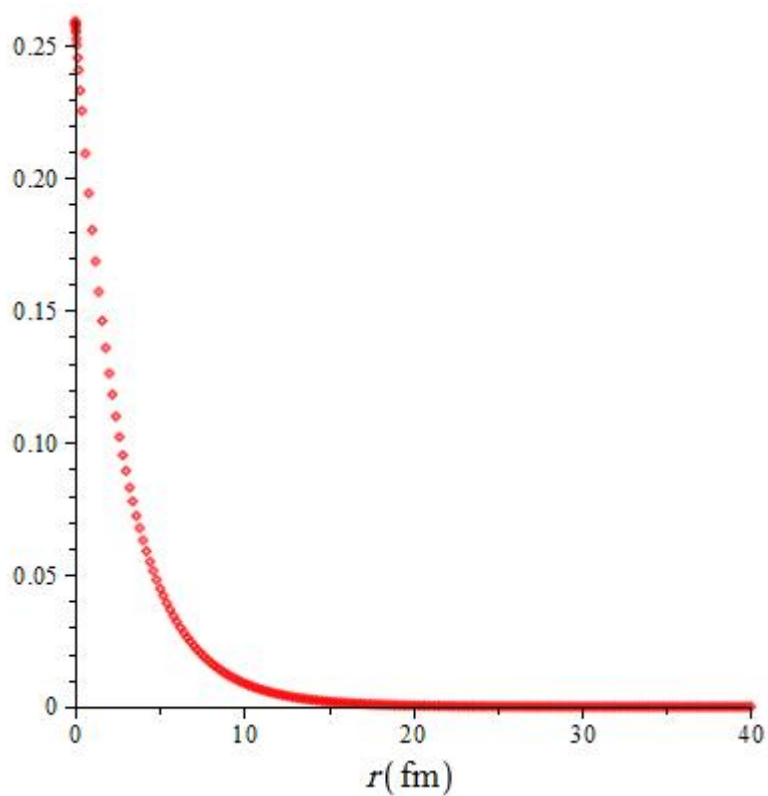
جواب فیزیکی به ازای $\delta = \ell + 1$ می‌باشد. بنابراین تابع موج حالت پایه برای دوترون

به صورت زیر می‌باشد

$$R_{0,\ell}(r) = \frac{e^{-\alpha(2\beta-1)r}}{r} (1 - e^{-2\alpha r})^\delta \quad (80-4)$$

جدول ۳-۴ انرژی بستگی، جذر میانگین مربعی شعاع دوترون و پارامترهای پتانسیل یوکاوا.

V_0 (MeV fm)	α (fm) ⁻¹	E_b (MeV)	r_{rms} (fm)
۳۵.۶	۰.۲	۲.۱۸	۲.۳۶
۳۴	۰.۱۸	۲.۱۹	۲.۴۹
۳۰	۰.۱۴	۲.۰۴	۲.۶۹
۲۹	۰.۱۲	۲.۱۹	۲.۶



شکل ۹-۴ تابع موج حالت پایه‌ی دوترون با استفاده از پتانسیل یوکاوا.

نتیجه‌گیری:

در این کار با در نظر گرفتن پتانسیل موریس و اصلاح آن با افزودن جمله‌ای مناسب پتانسیل جدیدی را معرفی کردیم. که برای فیزیک هسته‌ای نیز قابل استفاده است. با حل معادله‌ی شرودینگر برای سه ذره ویژه تابع و ویژه مقدار حالت پایه بدست آمده، همچنین جذر میانگین مربعی شعاع برای هسته‌ی هلیوم محاسبه شد، که نتایج بدست آمده به مقادیر تجربی نزدیک می‌باشند. می‌توان تأثیر سایر برهم‌کنش‌ها مانند برهم‌کنش‌های دوجسمی، اثرات اسپینی، ایزوسپینی اسپینی- ایزوسپینی و همچنین جملاتی مربوط به مبادله‌ی پیون مابین نوکلئون‌ها در نظر گرفت. که نیازمند محاسبات بسیار پیچیده است. اما ما در این کار با استفاده از این پتانسیل اصلاح شده نتایجی را بدست آوردیم که به آسانی قادر به توصیف سیستم سه نوکلئونی بود. از آنجایی که این پتانسیل قادر به توصیف سیستم مورد نظر ما می‌باشد حتی اگر برای محاسبه‌ی کمیتی نیازمند به در نظر گرفتن برهم‌کنش‌های دوجسمی باشیم، می‌توان امیدوار بود که بخش "پتانسیل برهم‌کنشی سه جسمی" به خوبی با پتانسیل اصلاح شده در این کار توصیف شود.

در ادامه هسته‌ی دوترون را با استفاده از پتانسیل‌های مای و یوکاوا با روش‌های NU و روش حدسی مورد بررسی قرار داده‌ایم. توابع موج و انرژی بستگی برای دوترون بدست آمده است. انرژی‌های بستگی بدست آمده توافق خوبی با مقادیر تجربی داشتند.

مراجع

[۱] والتر ارنست مایرهف، (۱۳۷۹)، "مبانی فیزیک هسته‌ای"، دانشگاه فردوسی مشهد، موسسه‌ی

چاپ و انتشارات

[۲] کنت کرین، (۱۳۷۱)، "آشنایی با فیزیک هسته‌ای"، جلد ۱ و ۲، چاپ اول، مرکز نشر

دانشگاهی.

- [3] Jean-Louis Basdevant, James Rich, Michel Spiro, (2005) "**Fundamentals in Nuclear Physics from Nuclear Structure to Cosmology**", springer, printed in USA.
- [4] Walter Greiner, Joachim A. Maruhn, (1995), "**Nuclear Models**", Springer.
- [5] R.A. Malfliet, J.A. Tjon, (1969), "solution of the Faddeev equations for the triton problem using local two-particle interactions", **Nuclear Physics A127, 161-168.**
- [6] I.J. Thompson, F.M. Nunes, B.V. Danilin, (2004), "FaCE: a tool for three body Faddeev calculations with core excitation", **Computer Physics Communications 161, 87-107.**
- [7] Rampho G J, (2010), PhD. Thesis, "Electromagnetic processes in Few-Body system", phys. department. University of South Africa.
- [8] R. Krivec, (1998), "Hyperspherical-Harmonics Methods for Few-Body Problems", **Few-Body Systems 25, 199-238.**
- [9] K. V. Shiticova, (1979), "Method of the Hyperspherical function and the properties of light nuclei", **Nuclear Physics A331, 365-388.**
- [10] Bijan Kumar Bagchi, (2001), "**Supersymmetry in Quantum and classical Mechanics**", chapman & Hall/CRC.
- [11] Sameer.M.Ikhdaier, Ramazan Sever, (2008), "Exact solutions of the D -dimensional Schrödinger equation for a ring-shaped pseudoharmonic potential", **Cent. Eur. J. Phys, 685-696.**
- [12] J. L. Ballot and M. Fabre de la Ripelle, (1979), "Application of the the Hyperspherical Formalism to the Trinucleon Bound State Problems", **ANNALS OF PHYSICS 127, 62-125.**
- [13] Shi-Hai Dong, (2011), "**Wave Equation in Higher Dimentions**", springer.
- [14] A.Sitenkov, V.Tartakovskii, (1997), "**Theory of Nucleus Nuclear structure and**

nuclear interaction", Kluwer Academic Publisher.

[۱۵] برنارد ال. کوهن، (۱۳۷۰)، **مفاهیم فیزیک هسته‌ای**، مجید مدرس، رقیه معصومی، چاپ اول،

مرکز نشر دانشگاهی، تهران.

- [16] M. R. Robilotta, (2007), "Two and three nucleon forces", **Nuclear Physics A 790, 3c–9c**.
- [17] P.M. Morse, (1929), "Diatomic molecules according to the wave mechanics. II. Vibrational ", **Physical Review 34, 57-64**.
- [18] A.A.Rajabi, (2006), "Bound States for Hypercentral Singular and Exponential Potentials", **Commun. Theor. Phys. (Beijing, China) 45, 669–674**.
- [19] Wen-Chao Qiang, Shi-Hai Dong, (2007), "Analytical approximations to the solutions of the Manning–Rosen potential with centrifugal term", **Physics Letters A 368, 13–17**.
- [20] A. A. Rajabi, (2005), "Exact Analytical Solution of the Schrödinger Equation for an N-Identical Body-Force System", **Few-Body Systems 37, 197–213**.
- [21] M. Fabre de la Ripelle, (1979), "The First Order of the Hyperspherical Harmonic Expansion Method", **Annals of Physics 123, 185-232**.
- [22] S, Erkoc, R.Sever, (1984), "Path-integral solution for a Mie-type potential. **Phys. Rev. D, 30, 2117**.
- [23] A.F. Nikiforov, V.B, Uvarov, (1988), "**Special Functions of Mathematical Physics**", Birkhausr, Berlin.
- [24] M.R. Shojaei, A.A. Rajabi, (2011), "Determination of energy levels of the Klein–Gordon equation, with pseudo harmonic potential plus the ring shaped potential", **International Journal of the Physical Sciences Vol. 6(33), pp. 7441 – 7446**.
- [25] M.R. Shojaei, A.A. Rajabi, M. Azimzadeh, (2011) "Exact Solution of the Schrödinger Equation for a System of A Identical Particles with Non-central Interaction by NU Method", **International congress on advances in applied physics and materials science**.
- [26] S.M. Ikhdair1, R. Sever, (2008), "Exact solutions of the *D*-dimensional Schrödinger equation for a ring–shaped pseudoharmonic potential", **Cent. Eur. J. Phys, 6(3)685-696**.

[۲۷] جورج آرفکن، (۱۳۸۴)، "روش‌های ریاضی در فیزیک"، اعظم پورقاضی، مرکز نشر دانشگاهی،

تهران.

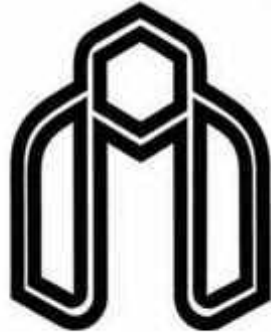
[28] A.N. Ikhot, L.E. Akpabio ,E.J. Uwah, (2011), " Bound State Solutions of the Klein Gordon Equation with the Hulthen Potential", **EJTP 8, No. 25, 225–232.**

[29] C.S. Jia, T.chen, L.G. Cui, (2009), "Approximate analytical solution of the Dirac equation with the generalized Poschl-Teller potential including the pseudo-central term", **Phys lett A.373, 1621.**

Abstract

Whenever each scientific disciplines are making progress, issues raised are getting complicated. Over time, various methods for studying few-body system were developed by different people. In the case of quantum mechanics, a problem scrutiny few-body system in low energy is equal to solving the Schrödinger equation for that system. In this project, I chose Hyperspherical Harmonic expansion method to investigate three particles systems. First, we rewrite the Morse potential of molecular (is used to describe the diatomic molecule) in the way that we can use it in the three particles systems. Then, by adding a sentence to potential, we change it in the way that it can be used for a nuclear system. We consider this potential as a three particles potential and assume that the whole system is influenced by this potential. Next, using Jacobi coordinates, is solved the Schrödinger equation in the six-dimensional space (by eliminating the center of mass coordinates) with apply Ansatz method; we obtained eigenfunction of ground state and Binding energy for nucleus of Helium ^3He . The mean square radius is also obtained. Using Mie and Yukawa potential calculated eigenstate of deuteron ground state and Binding energy.

Keywords: Hyperspherical Harmonic expansion method, Three-body system, Morse potential, Binding energy, Mie potential, Yukawa potential, Jacobi coordinate, Binding energy, root mean square radius, NU method.



Shahrood University of technology

Faculty of Physics

Determine Nucleus Binding Energy with similar
interaction molecule with Morse potential and another
suitable potential

Mohammad nourozi

Supervisors

Prof. A.A rajabi

Dr. M.R Shojaei

Feb 2013