

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده فیزیک

پایان نامه دکتری

موضوع

محاسبه ویژگیهای استاتیکی باریون ها با استفاده از معادله دیراک

استاد راهنما

پروفسور علی اکبر رجبی

نگارش

حسن حسن آبادی

آبان ۱۳۸۶

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به خانواده عزیزم

فهرست

چکیده	یک
تشکر و قدردانی	دو
فهرست شکل ها	سه
فهرست جداول	چهار
فهرست ضمیمه ها	پنج

فصل اول

مقدمه	۱
-------	---

فصل دوم : مدل کوارکی

۱-۲- مقدمه	۳
۲-۲- ذرات میدانی	۴
۳-۲- لپتونها	۵
۴-۲- مدل کوارکی	۶
۵-۲- مزون ها	۷
۶-۲- باریون ها	۱۲
۷-۲- ایزواسپین	۲۱
۸-۲- پتانسیل میان کوارک ها در باریون	۲۶
۹-۲- حالت اسپین و ایزواسپین	۲۷

فصل سوم : فضای فوق کروی

- ۳-۱- مقدمه..... ۳۰
- ۳-۲- هماهنگ فوق کروی ۳۱
- ۳-۳- پایه پتانسیل ۳۶
- ۳-۴- چند قطبی های پتانسیلی ۳۷
- ۳-۵- معادلات جفت شده ۴۰
- ۳-۶- لاپلاسی سه جسمی در فضای فوق کروی ۴۳

فصل چهارم : باریون ها در ساختارهای غیرنسبیتی

- ۴-۱- تعیین گشتاور مغناطیسی باریون ها ۴۹
- ۴-۲- روش های محاسبه جرم باریون ها ۵۸

فصل پنجم : بررسی باریون ها با معادله شرودینگر

- ۵-۱- مقدمه ۶۶
- ۵-۲- پتانسیل برهم کنش ۶۷
- ۵-۳- حل دقیق معادله شرودینگر شعاعی برای پتانسیل نگهدارنده ۷۰
- ۵-۴- محاسبه جرم باریون ها ۷۷

فصل ششم : بررسی باریون ها با معادله دیراک

۶-۱- مقدمه ۸۲

۶-۲- حل دقیق معادله دیراک برای باریون ۸۴

۶-۳- محاسبه g_A/g_V با استفاده از تابع موج نسبیتی بدست آمده ۹۶

۶-۴- نتایج ۹۷

مراجع ۹۹

ضمیمه ها

ضمیمه (الف) ۱۰۲

ضمیمه (ب) ۱۲۱

ضمیمه (ج) ۱۲۳

چکیده:

اخیراً مدل کوارکی سازنده (CQM) بطور گسترده ای برای توصیف ساختار داخلی باریون ها مورد استفاده قرار گرفته است. علی رغم اینکه مدل‌های مختلف، کاملاً متفاوت هستند، طیف باریونی اغلب به طرز مناسبی توصیف می شود.

با این وجود مطالعه طیفی باریون برای تمایز گونه های مختلف دینامیک کوارکی کفایت نمی کند. در نظر گرفتن اثر برهم کنش دیگری از میان بر هم کنش های کوارک ها که دارای بستگی اسپینی یا ایزواسپینی (یا طعم) می باشد، به نتایج جالبی منتهی می گردد. در این کار برهم کنش فوق ریز و پتانسیل کوارکی وابسته به ایزو اسپین را معرفی نموده ایم سپس ویژه تابع و ویژه مقادیر را ابتدا در حالت غیر نسبیتی با استفاده از معادله شرودینگر بدست آورده ایم و با توجه به اینکه معادله شرودینگر بوزون بودن یا فرمیون بودن ذرات را مشخص نمی کند با استفاده از معادله دیراک ویژه توابع و ویژه مقادیر را در حالت نسبیتی نیز تعیین و آنها را با هم مقایسه نموده ایم. نتیجه بدست آمده برای توصیف طیف باریون رضایت بخش بوده و با نتایج تجربی سازگار است.

کلمات کلیدی: معادله شرودینگر- معادله دیراک- باریون- اسپین- ایزواسپین

تشکر و قدردانی

بعد از سپاس و ستایش از خداوند بخشنده و مهربان به خاطر لطف بی کرانش،
برخود لازم می دانم از جناب آقای پروفیسور علی اکبر رجبی، استاد دانشگاه صنعتی شاهرود که با
راهنمایی های ارزشمند و زحمات بی دریغ، همواره و در کلیه مراحل انجام این پروژه مرا یاری
نمودند تشکر و قدر دانی فراوان نمایم.

از جناب آقای پروفیسور پر- اسلند (**per osland**) استاد دانشگاه برگن نروژ به خاطر لطف و محبت
فراوانشان، تشکر می کنم.

از جناب آقای دکتر قاضی مدیریت محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه و جناب آقای دکتر ایزدی
فرد ریاست محترم دانشکده فیزیک و سایر اعضای دانشکده فیزیک به خاطر همکاری های بی
دریغشان تشکر می نمایم.

از داوران محترم جناب آقای دکتر محمد فرهاد رحیمی از دانشگاه فردوسی مشهد، جناب آقای
دکتر صمد سبحانیان از دانشگاه تبریز، جناب آقای دکتر کاووس میرعباس زاده از دانشگاه صنعتی
امیرکبیر و جناب آقای دکتر حسین موحدیان از دانشگاه صنعتی شاهرود، به خاطر مطالعه و نقد
این پروژه تقدیر و تشکر می نمایم.

از دوست و همکار عزیزم آقای دکتر محمد رضا شجاعی، سپاسگزارم.

از دوستان عزیزم آقایان صابر زرین کمر، محمد مهدی سربازی، سید رضا ثامنی و حسین مشتاق به
خاطر کمک هایشان تشکر می نمایم .

از تمامی معلمان دوران مختلف تحصیلم، صمیمانه سپاسگزارم و همواره خود را مدیون آنها می دانم.
از خانواده عزیزم که همواره با تشویق ها و تلاش های بی شائبه خود، نقشی اساسی در پیشرفت
علمی من ایفا کرده اند، سپاسگزارم .

فهرست شکلها

- شکل ۱-۲- نمودارهای وزنی مزونها..... ۱۱
- شکل ۱-۴- حالت پارितه منفی $N = 1$ نوکلئون ۶۴
- شکل ۲-۴- حالت پارितه مثبت $N = 2$ نوکلئون..... ۶۴

فهرست جداول

جدول ۱-۲	نیروهای موجود در طبیعت و مشخصات آنها	۳
جدول ۲-۲	ذرات میدانی و مشخصات آنها	۴
جدول ۳-۲	لیتونها و مشخصات آنها	۵
جدول ۴-۲	مشخصات کوارک ها	۷
جدول ۵-۲	مزون ها با اسپین صفر	۸ و ۹
جدول ۶-۲	مزون ها با اسپین یک	۹
جدول ۷-۲	باریون ها با اسپین $\frac{1}{2}$	۱۵
جدول ۸-۲	باریون ها با اسپین $\frac{3}{2}$	۱۵
جدول ۱-۴	گشتاور مغناطیسی باریون ها	۵۴
جدول ۱-۵	توابع $g(x)$ به ازای پتانسیلهای متفاوت	۷۲
جدول ۲-۵	ویژه توابع و ویژه مقادیر معادله شرودینگر برای سیستم سه ذره ای	۷۶ و ۷۵
جدول ۳-۵	ویژه توابع و ویژه مقادیر معادله شرودینگر برای سیستم چهار ذره ای	۷۷ و ۷۶
جدول ۴-۵	جرم های تجربی و تئوری برای خانواده N	۷۹ و ۷۸
جدول ۵-۵	جرم های تجربی و تئوری برای خانواده Δ	۷۹
جدول ۶-۵	جرم های تجربی و تئوری برای خانواده Σ	۸۰ و ۷۹
جدول ۷-۵	جرم های تجربی و تئوری برای خانواده Λ	۸۰
جدول ۸-۵	جرم های تجربی و تئوری برای خانواده Ξ	۸۰
جدول ۹-۵	جرم های تجربی و تئوری برای خانواده Ω	۸۱
جدول ۱-۶	ویژه توابع و ویژه مقادیر معادله شرودینگر و دیراک	۹۲ و ۹۱ و ۹۰
جدول ۲-۶	تعیین ضرایب پتانسیل پروتون	۹۴
جدول ۳-۶	ضرایب پتانسیل برای بار یون ها با اسپین $\frac{1}{2}$	۹۵ و ۹۴
جدول ۴-۶	اثرات پتانسیل بر هم کنش اسپینی و ایزو اسپین در بار یون ها	۹۶ و ۹۵

فهرست ضمیمه ها

- ضمیمه الف - رسم مولفه بالایی و پایینی تابع موج نسبیتی ۱۰۲
- ضمیمه ب - چگالی لا گرانژ ۱۲۱
- ضمیمه ج - پراکندگی کاملاً ناکشسان ۱۲۳

فصل اول

مقدمه

یکی از اهداف انجام این پروژه ارائه مدلی است که بتواند طیف باریون ها را در حالت های اسپینی و ایزواسپینی مختلف ارائه نماید. زیرا مطالعه اسپکتروسکوپی باریون ها به تنهایی نمی تواند تفاوت بین رفتار دینامیکی مختلف کوارک های تشکیل دهنده آنها را مشخص کند. نتایج خیلی مهمی که گروه های تجربی *Fermilab, Slac* و دیگران ارائه کرده اند به گونه ای است که ایده های جدیدتری در زمینه های نظری می طلبد، هرچند مدل های نظری متفاوت و گاهاً یکسانی توسط گروه های نظری *MRST, GRV, CTEQ* ارائه شده است و حتی به صورت پراکنده توسط افراد یا گروه های مختلف علمی در دانشگاه ها و مراکز تحقیقاتی مدل های مختلفی ارائه شده است، اما در این پروژه سعی شده است تا این بررسی در دو حالت غیر نسبیتی و نسبیتی و به صورت تحلیلی ارائه گردد.

در فصل دوم با معرفی لپتونها¹ و هادرون ها بعضی از خواص آنها از جمله گشتاور دو قطبی مغناطیسی و اسپین و ایزواسپین آنها معرفی خواهند شد.

¹Lepton

در فصل سوم به بررسی مختصات ژاکوبی^۲ و فضای فوق کروی خواهیم پرداخت. همچنین در این فصل، پتانسیل های فوق کروی معرفی خواهند شد و بسط هر تابع دو جسمی و به طور خاص پتانسیل دوجسمی و فرمول های بازگشتی مفیدی را ارائه خواهیم نمود.

در فصل چهارم مدل کوارک های سازنده برای باریونها معرفی شده و کمیت های فیزیکی بدست آمده برای باریونها از این روش نیز توضیح داده خواهد شد، که از جمله آنها، محاسبه جرم باریونها است.

در فصل پنجم باریون ها به عنوان یک مجموعه سه جسمی در نظر گرفته شده اند که با استفاده از معادله شرودینگر در حضور پتانسیل های نگهدارنده به حل آن می پردازیم و سپس ویژه توابع و ویژه مقادیر مربوط به باریون ها را در حالت پایه و برانگیخته محاسبه می نماییم و اثرات پتانسیل های غیر نگهدارنده را نیز به عنوان اختلال حساب می کنیم.

در فصل ششم با استفاده از معادله دیراک، ویژه مقادیر و ویژه توابع باریون ها با اسپین $\frac{1}{2}$ را محاسبه می نماییم. همچنین ضرایب پتانسیل را برای مجموعه ای از باریون ها بدست می آوریم. به کمک تابع موج بدست آمده گشتاور مغناطیسی و شعاع کره ای که کوارک های تشکیل دهنده باریون ها در آن محصور می باشند را بدست می آوریم و در تمامی موارد پس از انجام محاسبات، نتایج بدست آمده را با نتایج تجربی و مدل های نظری دیگر مقایسه نموده ایم.

²-Jacobian coordinat

فصل دوم

مدل کوارکی

۲-۱- مقدمه

صرفنظر از نیروی گرانشی که هیچ اثر قابل اندازه گیری در برهم کنش های ذرات ندارد سه نوع نیروی بنیادی وجود دارد که بین ذرات عمل می کند ، که شامل ضعیف ، الکترومغناطیس و قوی می باشد .

به هریک از این نیروها می توان یک پارامتر قدرت نسبی ، منسوب کرد به گونه ای که هریک در فاصله مکانی یا مقیاس زمانی خاص عمل خواهند کرد، مشخصات آنها در جدول زیر آمده است

جدول ۲-۱ نیروهای موجود در طبیعت و مشخصات آنها

نیرو	برد	قدرت	عمل می کنند بر روی
گرانشی	∞	$G_{Newton} \approx 6 \times 10^{39}$	همه ذرات
هسته ای ضعیف	$< 10^{-18} (m)$	$G_{fermi} = 1 \times 10^{-5}$	لپتونها و هادرون ها
الکترومغناطیسی	∞	$\alpha = \frac{1}{137}$	همه ذرات باردار
هسته ای قوی	$\approx 10^{-15} (m)$	$g^2 = 1$	هادرون ها

سه نوع برهم کنش اساسی داریم:

۱- برهم کنش الکترومغناطیسی که در رابطه با تبادل فوتون هاست.

۲- برهم کنش ضعیف که با تبادل w^\pm و z^0 مشخص می شود.

۳- برهم کنش قوی که مثلاً با تبادل مزون های π بین نوکلئون ها سزوکار دارد.

دو مورد اول، یعنی برهم کنش های ضعیف و الکترومغناطیسی ، فرآیندهای بنیادی هستند در حالی که برهم کنشهای قوی به دلیل اینکه نوکلئون ها و مزونها ذرات مرکب هستند ، چنین نیستند. برهم کنش قوی بر حسب مدل کواریک که در آن برهم کنش قوی میان کواریک به واسطه تبادل ذرات میدانی به نام گلوئون صورت می گیرد بر پایه ای اساسی تر بنا می شود. بنابراین ذرات را به صورت زیر تقسیم بندی می کنیم [1]

ذرات میدانی - لپتونها - مزون ها - باریونها

۲-۲- ذرات میدانی

مثل γ, w^\pm, z^0 و گلوئون ها و همینطور گراویتون ها را که به عنوان ذره حامل برهم کنش

گراوشی پیشنهاد شده است به صورت زیر طبقه بندی می کنیم :

جدول ۲-۲ ذرات میدانی و مشخصات آنها

ذره	جرم	بار	اسپین
γ	0	0	1
w^\pm	$81 \left(\frac{Gev}{c^2} \right)$	± 1	1
z^0	$93 \left(\frac{Gev}{c^2} \right)$	0	1
گلوئون	0	0	1
گراویتون	0	0	2

تا آنجا که تاکنون توانسته اند ، لپتون ها، ذرات نقطه ای بنیادی هستند و برهم کنش قوی هیچ تاثیری بر آنها ندارد، گرچه تولید لپتونهای سنگین تری با استفاده از شتاب دهنده های فعلی کاملاً امکان پذیر بوده ، اما هنوز هیچ نوع دیگری یافت نشده است. قبل از آنکه به بررسی مزونها پردازیم مدل کوارکی را معرفی می کنیم.

۲-۴- مدل کوارکی :

تا اوایل سال ۱۹۶۰ میلادی مشخص شده بود که چندین صد ذره موسوم بنیادی وجود دارد که هر یک اعداد کوانتومی کاملاً مشخص از قبیل اسپین ، ایزواسپین ، شگفتی و عدد باریونی را دارند. در سال ۱۹۶۴ مورای گلن و جورج تسوايگ [4] متذکر شدند که نمایش های $SU(3)$ که توسط ذرات اشغال می شوند از میان تمام صورت های ممکن از لحاظ ریاضی، و با فرض اینکه آنها فقط از دو ترکیب نمایش بنیادی تولید می شوند، قابل انتخاب است .

گلن این ماهیت ها، در نمایش اصلی را، کوارک نامید. سه نوع کوارک یا به بیان امروزی طعم داریم که از آن موقع به کوارک های بالا و پایین و شگفتی معروف شدند. برچسب های بالا و پایین به جهت گیری ایزواسپینی کوارک ها اشاره دارد. مدل کوارکی، ساختار هادرون ها، توسط گلن و تسوايگ، به طور مستقل از یکدیگر، پیشنهاد شد. تقارنهای موجود در ساختار هادرونها را می توان با تشکیل نمودارهایی از خانواده مختلف، که در آن مولفه ایزواسپین I_3 برحسب شگفتی، بیان می شود، مشاهده کرد. سه ذره s, d, u سه کوارک اصلی هستند که هادرون ها از آنها ساخته می شوند. s, d, u را به عنوان سه طعم مختلف کوارک ها می شناسند. این کوارک ها دو ویژگی غیر مرسوم دارند :

۱- بار کسری دارند.

۲- اگر سه کواریک یک باریون بسازند آنگاه هر کواریک عدد باریونی $\frac{1}{3}$ دارد. ضمن آنکه اسپین هر

کواریک نیز $\frac{1}{2}$ است. مشخصات کواریکها در جدول زیر آمده است.

جدول ۲-۴. مشخصات کواریکها

جرم (MeV)		بار (e)	کواریک (طعم)
مؤثر	لختی		
در مزون ها	در باریونها		
310	363	$-\frac{1}{3}$	<i>d</i>
310	363	$+\frac{2}{3}$	<i>u</i>
483	538	$-\frac{1}{3}$	<i>s</i>
1500	1100	$+\frac{2}{3}$	<i>c</i>
4700	4200	$-\frac{1}{3}$	<i>b</i>
> 23000		$+\frac{2}{3}$	<i>t</i>

تا کنون کواریکها مستقیماً به صورت مستقل مشاهده نشده اند، اولین گواه قانع کننده مبنی بر واقعیت فیزیکی وجود کواریک ها در سال ۱۹۶۸ میلادی، با آزمایش های ناکشسان ژرف (DIS)، در مرکز شتابدهنده خطی استانفورد کالیفرنیا ارائه شد.

۲-۵- مزون ها

مزون ها ذراتی با برهم کنش قوی و اسپین صحیح هستند و با نوکلئون ها از طریق نیروی قوی برهم کنش می کنند (البته علاوه بر نیروی ضعیف و الکترومغناطیسی). مزون ها را در

بنیادی ترین سطحشان متشکل از یک کوارک و یک پاد کوارک می دانند، از مهم ترین مزون ها می توان از مزون π (پیونها) یاد کرد، در مورد نقش مزون π میتوان به عنوان حامل برهم کنش قوی نوکلئون به نوکلئون دیگر و عامل پیوند هسته ای نام برد. در جداول زیر بعضی از خصوصیات مزون ها آمده است.

جدول ۲-۵ مزونهای با اسپین صفر

مزون	ساختار کوارکی	بار (e)	جرم (MeV)	نیمه عمر (s)	تابش های اساسی
π^\pm	$u\bar{d}, d\bar{u}$	+1,-1	139.569	2.6×10^{-8}	$\mu\nu_\mu$
π^0	$(u\bar{u} - d\bar{d}) / \sqrt{2}$	0	134.964	3.7×10^{-17}	$\gamma\gamma$
K^\pm	$u\bar{s}, s\bar{u}$	+1,-1	493.67	2.4×10^{-8}	$\mu, \pi^\pm \pi^0, \pi^\pm \pi^\pm \pi^\pm$
K^0, \bar{K}^0	$d\bar{s}, s\bar{d}$	0,0	497.72	$\kappa_s^0 0.892 \times 10^{-10}$ $\kappa_l^0 5.18 \times 10^{-8}$	$\pi^+ \pi^-, \pi^0 \pi^0$ $\pi e \nu_e, \pi \mu \nu_\mu, \pi \pi \pi$
η	$(\bar{u} + d\bar{d} + 2s\bar{s}) / \sqrt{6}$	0	548.8	7×10^{-19}	$\pi^0 \pi^0 \pi^0, \pi^+ \pi^- \pi^0$
η'	$(\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) / \sqrt{3}$	0	957.6	3×10^{-21}	$\eta \pi \pi, \rho^0 \gamma$
D^\pm	$c\bar{d}, d\bar{c}$	+1,-1	1869	9×10^{-13}	$K \pi \pi$
D^0, \bar{D}^0	$c\bar{u}, u\bar{c}$	0,0	1865	4×10^{-13}	$K \pi \pi$

ناپایدار	3×10^{-13}	1971	+1,-1	$c\bar{s}, s\bar{c}$	$F^\pm (\text{now } D_{s^\pm})$
$D+?$	14×10^{-13}	5271	+1,-1	$u\bar{b}, b\bar{u}$	B^\pm
$D+?$	14×10^{-13}	5275	0,0	$d\bar{b}, b\bar{d}$	B^0, \bar{B}^0
$KK\pi, \eta\pi\pi, \eta'\pi\pi$	6×10^{-23}	2981	0	$c\bar{c}$	η_c

جدول ۲-۶ مزونهای با اسپین یک

تابش های اساسی	نیمه عمر (s)	جرم (MeV)	بار (e)	ساختار کواریک	مزون
$\pi\pi$	4×10^{-23}	770	+1,-1,0	$u\bar{d}, d\bar{u}, (u\bar{u} - d\bar{d}) / \sqrt{2}$	ρ
$K\pi$	1×10^{-23}	892	+1,-1,0,0	$u\bar{s}, s\bar{u}, d\bar{s}, s\bar{d}$	K^*
$\pi^+\pi^-\pi^0, \pi^0\gamma$	7×10^{-23}	783	0	$(u\bar{u} + d\bar{d}) / \sqrt{2}$	ω
$K^+K^-, K^0\bar{K}^0$	20×10^{-23}	1020	0	$s\bar{s}$	ϕ
$e^+e^-, \mu^+\mu^-, 5\pi, 7\pi$	1×10^{-20}	3097	0	$c\bar{c}$	J/ψ
$D\pi, D\gamma$	$> 1 \times 10^{-22}$	2010	+1,-1,0,0	$c\bar{d}, d\bar{c}, c\bar{u}, u\bar{c}$	D^*
$\tau^+\tau^-, \mu^+\mu^-, e^+e^-$	2×10^{-20}	9460	0	$b\bar{b}$	Υ

در مدل کوارکی مزون ها می توانند به هر تعداد از جفت های کوارک-پادکووارک ساخته شوند. کووارک و پاد کووارک در مزون با رعایت اندازه حرکت مداری زاویه ای l با همدیگر حرکت می کنند. اندازه حرکت زاویه ای کل سیستم $J = l + s$ می باشد که $s = s_q + s_{\bar{q}}$ مجموع اسپین ذاتی کووارک و پادکووارک می باشد. از آنجایی که $s_q = s_{\bar{q}} = \frac{1}{2}$ مقادیر ممکن s برای سیستم $qq\bar{q}$ ، صفر (حالت یکتایی با اسپین های پادموازی برای کووارک ها) و یک (حالت سه تایی و اسپین های موازی برای کووارک ها) می تواند باشد. اسپین مزون J ، با شرط زیر محدود می شود

$$|l - s| < J < |l + s| \quad (2-2)$$

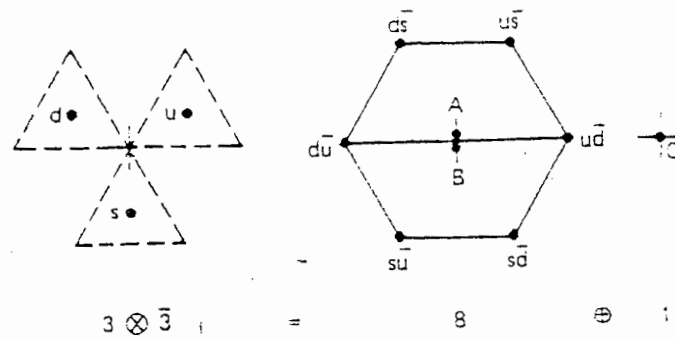
بنابراین تابع موج حالت مقید مربوط به $qq\bar{q}$ با جایگزینی $p \rightarrow u$ ، $n \rightarrow d$ به صورت زیر است

$$\begin{aligned} |I = 1, I_0 = 1 \rangle &= -u\bar{d} \\ |I = 1, I_0 = 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ |I = 0, I_0 = -1 \rangle &= d\bar{u} \end{aligned} \quad (3-2)$$

که نشانگر حالت سه تایی بوده و حالت زیر نیز نمایشی از حالت یکتایی است.

$$|I = 0, I_0 = 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \quad (4-2)$$

در مورد سه طعم $q = u, d, s$ تعداد نه ترکیب ممکنه $qq\bar{q}$ وجود دارد که ساختار حاصل در شکل زیر دیده می شود



$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

شکل (۱-۲) نمودارهای وزنی

پاریته مزون با عدد کوانتمی تکانه زاویه ای مداری l عبارت است از

$$p = -(-1)^l \quad (5-2)$$

علامت منفی به خاطر آن است که q, \bar{q} پاریته ذاتی مخالف دارند، $(-1)^l$ ناشی از جایگزینی معکوس فضایی است یعنی اگر در قسمت زاویه ای، $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ، تابع موج q, \bar{q} معکوس فضایی است یعنی اگر در قسمت زاویه ای، $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ تبدیل شود در پاریته تغییر می‌دهد به اندازه $(-1)^l$ خواهیم داشت. یک سیستم خنثی $q\bar{q}$ که به لحاظ اسپینی می‌تواند در حالت تکتایه $s=0$ یا سه تاییه $s=1$ قرار گیرد ویژه حالت اپراتور c است. همان اپراتور همغیوغ ذرات و پادذرات است که به آن $-c$ پاریتی هم گویند. مقدار c را می‌توان با تبدیل $q \rightarrow \bar{q}$ و برعکس $\bar{q} \rightarrow q$ و آنگاه جابجا کردن مکان‌ها و اسپین آن‌ها به دست آورد، این عمل ترکیبی نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$c = -(-1)^{s+l} (-1)^l = (-1)^{s+l} \quad (6-2)$$

علامت منفی به خاطر جابجا کردن فرمیون است. $(-1)^{s+l}$ به علت تقارن حالت‌های اسپین $q\bar{q}$ بوده و $(-1)^l$ مثل مورد پاریتی است [11]. در اینجا s اسپین ذاتی کل زوج $q\bar{q}$ می‌باشد که اگر $s=1$ باشد، در این صورت $(-1)^{s+l}$ معرف این نکته است که حالت عوض نمی‌شود. $-c$ پاریته تنها برای حالت های $q\bar{q}$ که از کوآرک و پاد کوآرک خودشان تشکیل شده است تعریف می‌شود. این عملگر بصورت $-G$ پاریته عمومیت می‌یابد که برای مزون های تشکیل شده از

کواریک و پادکواریک خودشان ($t_z = 0$) و حالت های باردار $d\bar{u}, u\bar{d}$ با $l = 1$ به کار می رود.

$$G = (-1)^{l+s+t} \quad (7-2)$$

مزون ها در چند تایه های J^{pc} طبقه بندی می شوند حالت های $l = 0$ به صورت $1^{--}, 0^{-+}$ به ترتیب معرف مزون های شبه اسکالر و برداری و نیز برای مزون های با حالت $l = 1$ ، 0^{++} معرف مزون های اسکالر و $1^{++}, 1^{+-}$ ، مزون های بردارمحوری و 2^{++} نشان دهنده مزون های تانسوری می باشد.

۲-۶- باریون ها

در ابتدا شواهد تجربی ¹DIS را ارائه میدهم: پراکندگی ها به طور عمده به دو دسته تقسیم می شوند. ۱- پراکندگی کشسان ۲- پراکندگی ناکشسان (غیر الاستیک) در پراکندگی کشسان وقتی ذره A به هدف B برخورد می کند پس از اتمام پراکندگی در هدف تغییری صورت نمی گیرد. به عبارتی اندازه حرکت و انرژی محفوظ می ماند. این نوع پراکندگی وقتی انجام می شود که انرژی ذره کاونده به حدی نباشد که بتواند هدف B را متاثر کند [5].

$$A + B \rightarrow A + B \quad (8-2)$$

اهمیت این نوع پراکندگی در فیزیک هسته ای زیاد است. چون توسط این پراکندگی کشسان، می توان حدود ابعاد هسته را اندازه گرفت. اما در پراکندگی ناکشسان انرژی ذره A آنقدر زیاد است که می تواند هدف B را متاثر کند. بنابر این در اینصورت داریم:

$$A + B \rightarrow A + X \quad (9-2)$$

¹-Deep inelastic scattering

برای انجام چنین پراکندگی هایی، پر انرژی بودن ذره A ضروری است. مثلاً هنگامیکه ذره به پرتون تابیده می شود و با توجه به اینکه قطر پرتون $10^{-15} m$ است لذا تفکیک هر ساختاری در درون آن مستلزم آن است که طول موج ذره کاونده، کوچکتر از این مقدار باشد. با توجه به رابطه $\left(\lambda = \frac{h}{p}\right)$ اندازه حرکت ذره کاونده باید حدود GeV باشد تا پس از برخورد به نوکلئون (هدف) آن را تجزیه کند. به بیان دیگر هرچه طول موج وابسته به ذره کوتاه تر باشد فاصله قابل تفکیک به وسیله میکروسکوپ های معمولی، به طول موج نور پراکنده شده بر روی شی مورد مشاهده بستگی دارد. به بیان صریح تر، هرچه طول موج کوتاه تر باشد، فاصله قابل تفکیک کمتر خواهد بود. اگر اندازه حرکت انتقال یافته به وسیله فوتون کم باشد، طول موج آن در مقایسه با ابعاد نوکلئون بسیار بزرگ خواهد بود، به این ترتیب دیگر فوتون قادر به تفکیک ساختار درونی نوکلئون نخواهد بود و نوکلئون ها را در عمل به صورت نقطه ای مشاهده خواهد کرد. و توابع ساختار^۲ بی معنی می شوند و مسئله پراکندگی به صورت پراکندگی توسط دو بار الکتریکی (رادرفورد) است. اما در اندازه حرکت های بالا طول موج فوتون با ابعاد نوکلئون قابل مقایسه است. در این حالت فوتون که دارای طول موج کوتاهی است، نوکلئون را به عنوان جسمی یکدست^۳ مشاهده نمی کند بلکه از ذرات نقطه گونه داخل نوکلئون (غیر همدوس) پراکنده می شود و به جای برهم کنش ((کاوه- نوکلئون)) برهم کنش کاوه را بر روی ذرات نقطه گونه داخل نوکلئون خواهیم داشت. آزمایش های ناکشسان ژرف با توجه به ماهیت کاوه به دو دسته تقسیم می شوند. دسته اول از آزمایشهای $(DIS)^*$ پراکندگی غیر الاستیک الکترون(موئون)- نوکلئون است که الکترونها یا موئون ها از یک هدف نوکلئونی پراکنده می شوند. نیروی حاکم همان نیروی الکترو مغناطیس است که با توجه به

^۲-structure functions

^۳-coherent

نظریه QED یا نظریه کوانتومی الکترودینامیک، که فوتونها را به عنوان کوانتم های این میدان در نظر می گیرد، قابل وصف می باشد.

دسته دوم از آزمایشهای (DIS) به پراکندگی غیر الاستیک نوترینو - نوکلئون معروف هستند. در این حالت فرآیندها با مبادله تک بوزون w^+ یا z^0 همراه می باشد و برهم کنش از نوع برهم کنش هسته ای ضعیف است. در این برهم کنش ها هر دو جریان باردار و خنثی می توانند شرکت داشته باشند. در آزمایشهای (DIS) از لپتونها برای کاوش نوکلئون ها استفاده می شود. علت استفاد از لپتون ها برای کاوش نوکلئون ها، این است که ما نمی خواهیم در ساختار داخلی هدف تغییری صورت گیرد. همچنین در (DIS) از کاونده های پراثری استفاده می کنیم تا طول موج دوبروی آنها، کوتاهتر از ابعاد نوکلئون شود، در این صورت کاونده قادر به تشخیص اجزای درون نوکلئون خواهد شد. از آزمایشهای اولیه ناکشسان ژرف نتایج مهم زیر مشاهده شد:

۱- یک نوکلئون دارای سه جزء اصلی نقطه مانند است .

۲- اجزای نقطه گونه دارای اسپین $\frac{1}{2}$ هستند.

۳- اجزای دارای بار الکتریکی کسری موافق با $\frac{2}{3}e$ ، $-\frac{1}{3}e$ هستند.

شواهد بدست آمده از آزمایشهای (DIS)، دلایل کافی مبتنی بر وجود کوآرکها در درون نوکلئون ها را ارائه می دهد. باریونها ذرات سنگین با برهمکنش قوی و اسپین نیمه صحیح ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$) هستند. سبکترین اعضای آنها پرتون و نوترون می باشند. چون درباره ساختار آنها اطلاعات کافی وجود دارد، لزومی ندارد آنها را ذرات بنیادی تلقی کنیم.

جدول ۲-۷ باریونهای با اسپین $\frac{1}{2}$

واپاشی های اساسی	نیمه عمر (s)	جرم (MeV)	بار (e)	ساختار کوآرک	باریون
$P\nu_e$	∞ 900	938.280 939.573	+1 0	uud udd	$\left. \begin{matrix} p \\ n \end{matrix} \right\} N$
$P\pi^-, n\pi^0$	2.63×10^{-10}	1115.6	0	uds	Λ
$P\pi^0, n\pi^+$	0.80×10^{-10}	1189.4	+1	uus	Σ^+
$\Lambda\gamma$	6×10^{-20}	1192.5	0	uds	Σ^0
$n\pi^-$	1.48×10^{-10}	1197.3	-1	dds	Σ^-
$\Lambda\pi^0$	2.90×10^{-10}	1314.9	0	uss	Ξ^0
$\Lambda\pi^-$	1.64×10^{-10}	1321.3	-1	dss	Ξ^-
ناپایدار	$2. \times 10^{-13}$	2281	+1	udc	Λ_c^+

جدول ۲-۸ باریونهای با اسپین $\frac{3}{2}$

تابش های اساسی	نیمه عمر (s)	جرم (MeV)	بار (e)	ساختار کوآرک	باریون
$N\pi$	0.6×10^{-23}	1232	+2,+1,0,-1	uuu, uud, udd, ddd	Δ
$\Lambda\pi, \Sigma\pi$	2×10^{-23}	1385	+1,0,-1	uus, uds, dds	Σ^*
$\Xi\pi$	7×10^{-23}	1533	0,-1	uss, dss	Ξ^*
$\Lambda K^-, \Xi^0\pi^-, \Xi^-\pi^0$	0.82×10^{-10}	1672	-1	sss	Ω^-

با سه طعم کوارکی می توان ۲۷ باریون ساخت که می توانند طبق گروه تقارن $SU(3)$ به چهار گروه طبقه بندی شوند که هریک دارای ۱۰ و ۸ و ۸ و ۱ عضو می باشند به عبارتی :

$$10 + 8 + 8 + 1 = 3 \otimes 3 \quad (10 - 2)$$

که گروه (۱۰) باریونی کاملاً متقارن و گروه تک باریونی کاملاً پادمقارن است (تحت انتقال در فضای طعم) دو گروه دیگر با اعضای ۸ باریونی، نه کاملاً متقارن و نه کاملاً پادمقارن هستند. در این جا از خواص گروه تقارنی $SU(3)$ برای ایجاد تابع موج باریون ها بهره می جویم. برای یافتن تابع موج باریون ها کوارک ها را به عنوان ذرات مشابه در نظر می گیریم که تنها بوسیله طعم و رنگشان از هم قابل تشخیص هستند. چون هادرون ها ذرات بی رنگ هستند تابع موج کوارک آنها باید بر حسب رنگ پادمقارن باشد. این بدین معنی است که بقیه تابع موج کوارک، که حاصل ضربی از طعم و اسپین و قسمت فضایی است، باید تحت تعویض دوتا از کوارک ها متقارن بماند. ابتدا ده گانه باریونی را در نظر می گیریم. باریون های این مجموعه دارای اسپین $\frac{3}{2}$ و پاریته مثبت می باشند. از آنجایی که ۱۰ ذره وجود دارد، این آرایه را ده تایی $\frac{3}{2}^+$ می نامند. ابتدا ۱۰ ذره Δ^{++} را در نظر می گیریم که دارای $I = \frac{3}{2}, S = \frac{3}{2}$ میباشد (ایزو اسپین^۴ است که در قسمت بعد معرفی شده است) به همین دلیل قسمت اسپینی و ایزواسپینی تابع موج متقارن می شد. علاوه بر این برای تقارن حاصل ضرب اسپین و ایزو اسپین و قسمت فضایی تابع موج، قسمت فضایی سه کوارک u نیز باید متقارن باشد. تابع موج کوارکی ذره Δ^{++} شناخته شده است. تابع موج سه عضو دیگر این چهار تایی، $\Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$ بوسیله اعمال عملگر پایین برنده I_- روی $|\Delta^{++}\rangle$ قابل حصول است. با اعمال عملگر I_- ، یکی از کوارک های u تبدیل به d می شود. این روش، ساختار درستی از چهار عضو مجموعه Δ بدست می دهد.

^۴-Isospin

تابع موج ذره Δ^{++} دارای سه طعم یکسان u است از این رو بنا به تقارن در فضای طعم خواهیم داشت:

$$|\Delta^{++}\rangle = |u(1)\rangle|u(2)\rangle|u(3)\rangle \quad (11-2)$$

حال با اعمال I_- روی $|\Delta^{++}\rangle$ برای تشکیل $|\Delta^+\rangle$ ، هر یک از کوارک های u به d تغییر می کند. در این جا هیچ تمایزی بین انتخاب های کوارکی وجود ندارد. تابع موج Δ^+ باید ترکیب خطی از هر کدام از تمام این احتمالات باشد. پس می توان نوشت

$$|\Delta^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|d(1)\rangle|u(2)\rangle|u(3)\rangle + |u(1)\rangle|d(2)\rangle|u(3)\rangle + |u(1)\rangle|u(2)\rangle|d(3)\rangle \right) \quad (12-2)$$

جهت ساده سازی رابطه فوق را می توان به صورت کوتاه تر زیر نوشت:

$$|\Delta^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|duu\rangle + |udu\rangle + |uud\rangle) \quad (13-2)$$

رابطه فوق براین نکته دلالت می کند که در هر جمله اولین نماد برای کوارک شماره ۱ و دومین نماد برای کوارک شماره ۲ و سومین نماد برای کوارک سوم می باشد بنا به روش فوق تابع موج ذرات Δ^0, Δ^- را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$|\Delta^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|ddu\rangle + |dud\rangle + |udd\rangle) \quad (14-2)$$

$$|\Delta^-\rangle = |ddd\rangle \quad (15-2)$$

که با یکبار اعمال I_- روی تابع موج Δ^+ می توان تابع موج Δ^0 و با اعمال دوباره I_- مقدار $|\Delta^-\rangle$ را به دست آورد. یا با توجه به این که برای Δ^- مقدار $I_3 = -\frac{3}{2}$ می باشد با روشی که برای Δ^{++} بحث شد می توان تنها احتمال ساختار کوارکی را برای Δ^- به دست آورد و بعد با اعمال I_+ روی آن به تابع موج Δ^0 رسید.

برای تعیین تابع موج باریون های شگفت با $s = -1$ از $|\Sigma^{++}\rangle$ شروع می کنیم. این ذره یکی از اعضای سه گانه ایزواسپینی با $I_3 = 1$ می باشد به عنوان نقطه شروع، یک کوارک S را

جایگزین یکی از کواریک های u در تابع موج Δ^{++} می کنیم. در این صورت شگفتی سیستم پایین می آید. این شبیه تابع موج Δ^+ از تابع موج Δ^{++} بوسیله جانشانی کواریک u با کواریک d می باشد. بعد از نرمالیزاسیون بنا به تقارن خواهیم داشت:

$$|\Sigma^{++}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|ddu\rangle + |dud\rangle + |udd\rangle) \quad (16-2)$$

بعد با اعمال عملگر I_- روی $|\Sigma^{++}\rangle$ و تعیین $|\Sigma^{*0}\rangle$ و سپس $|\Sigma^{*-}\rangle$ تابع موج دو عضو دیگر سه گانه ایزواسپینی بدست می آید. چون کواریک s یک ذره با ایزواسپین 0 است با اعمال I_{\pm} نابود می شود چرا که تنها اثر عملگر پایین آورنده تبدیل کواریک u به d می باشد. پس خواهیم داشت

$$|\Sigma^{*0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|dus\rangle + |uds\rangle + |dsu\rangle + |usd\rangle + |sdu\rangle + |sud\rangle) \quad (17-2)$$

$$|\Sigma^{*-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|dds\rangle + |dsd\rangle + |sdd\rangle) \quad (18-2)$$

برای یافتن تابع موج عضوهای مجموعه $S = -2$ با توجه به این که تنها یکی از سه کواریک ها حامل ایزواسپین غیر صفر هستند می توان نوشت:

$$|\Xi^{\prime-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|uss\rangle + |sus\rangle + |ssu\rangle) \quad (19-2)$$

$$|\Xi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|dss\rangle + |sds\rangle + |ssd\rangle) \quad (20-2)$$

برای $S = -3$ تنها یک احتمال وجود دارد:

$$|\Omega^{-}\rangle = |sss\rangle \quad (21-2)$$

هرچند این ذره یک ذره ایزواسکالر است یعنی $I_3 = 0$ دارد ولی یک ذره باردار است زیرا دارای $A=1, S=-3, Q=-1$ خواهد داشت که در توافق با این قضیه است که کواریک های s حامل بار $\frac{1}{3}e^-$ می باشند. یکنانه باریونی یک حالت کاملاً پادمتقارن در فضای طعم است. بنابراین محتوای کواریکی آن باید uds باشد یعنی از هر طعم باید یک مورد وجود داشته باشد. پس $6 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ انتخاب ممکن، وجود خواهد داشت، بویژه این که ترکیب خطی، تحت جابجایی

هر یک از دو کواریک، برای ارضای نیاز حالت یکتایی، باید پاد متقارن باشد، بعد از بهنجارش تابع موج خواهیم داشت

$$|\Lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|uds\rangle + |dsu\rangle + |sud\rangle - |dus\rangle - |usd\rangle - |sdu\rangle) \quad (22 - 2)$$

$|\Lambda_1\rangle$ خود نمایش یک گروه $SU(3)$ می باشد.

حال تقارن قسمت ایزواسپینی تابع موج را بررسی می کنیم. از آنجایی که کواریک s یک کمیت ایزواسکالر است ایزواسپین تابع موج بوسیله کواریک های u, d تعیین می شود. برای نشان دادن این موضوع تابع موج را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$|\Lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &(|u(1)\rangle|d(2)\rangle - |d(1)\rangle|u(2)\rangle)|s(3)\rangle \\ &+ (|u(2)\rangle|d(3)\rangle - |d(2)\rangle|u(3)\rangle)|s(1)\rangle \\ &+ (|u(3)\rangle|d(1)\rangle - |d(3)\rangle|u(1)\rangle)|s(2)\rangle \end{aligned} \right\} \quad (23 - 2)$$

این یک ترکیب خطی با $I = 0$ می باشد. از این رو، تابع موج قسمت ایزو اسپینی پاد متقارن است. بنابراین نمایش یکتایه $SU(3)$ می تواند یک ذره ایزواسکالر را تشریح کند. ایزواسپین بوسیله تقارن طعمی، تابع موج تعیین شده و درجه آزادی مستقل از تابع موج نیست یعنی تقارن $SU(3)$ یک تقارن واقعی نیست. شانزده عضو باقی مانده از ۲۷ امکان باریونی که می توانند بوسیله کواریک های u, d, s بنا شوند با تقارن طعمی مخلوط شده اند، می توان آنها را به دو دسته هشت تایی، که بوسیله تقارن شان، تحت تعویض طعم و اسپین قابل تشخیص هستند، طبقه بندی کرد. اغلب مورد هشت تایی با انرژی کمتر که شامل پروتون و نوترون می شود جالب هستند. تابع موج هر یک از اعضای این گروه تحت تعویض ترکیب طعم و اسپین ذاتی پاد متقارن است. به عنوان مثال تابع موج پروتون را بنا می کنیم: اسپین ذاتی و پاریته پروتون $\frac{1}{2}^+$ می باشد. با توجه به این که اسپین کواریک ها برابر $\frac{1}{2}$ می باشد چندین راه برای رسیدن به تابع موج پروتون وجود دارد: فرض می کنیم که دو کواریک اول اسپین صفر را تشکیل داده و با کواریک سوم با اسپین بالا جفت شوند

$$\left| \frac{1}{2}, + \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |q(1)\uparrow\rangle|q(2)\downarrow\rangle - |q(1)\downarrow\rangle|q(2)\uparrow\rangle \} |q(3)\uparrow\rangle \quad (24 - 2)$$

که علائم \uparrow, \downarrow به ترتیب معرف اسپین بالا و پایین بودن کوارک ها می باشد. وابستگی به طعم هر یک از کوارک ها بعداً می تواند ساخته شود. روش دیگر ساختن سیستمی با

جفت شدن دو کوارک اول با اسپین ۱ می باشد. این انتخاب به دلیل این که

سیستم نهایی مخلوطی از اسپین کلی $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ است پیچیده شده است. برای طراحی

قسمت $S = \frac{1}{2}$ باید ترکیب خطی شامل $\left\{ (q_1 q_2)_{1,0} (q_3)_{\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}} \right\}$ و $\left\{ (q_1 q_2)_{1,1} (q_3)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right\}$ باشد

اندیس های اول به S و اندیس های دوم به m_s دلالت می کنند. تقارن آمیخته قسمت اسپینی

و طعمی تابع موج ممکن است بعد از انتصاب طعم به هر یک از کوارک های درگیر تعیین شود. بنا

به شرایط، برای پروتون، هر جمله باید شامل دو کوارک u و یک کوارک d باشد. اگر دو کوارک

اول را با طعم های مختلف نشان دهیم رابطه $(24 - 2)$ بدین صورت خواهد بود

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |u(1)\uparrow\rangle |d(2)\downarrow\rangle - |u(1)\downarrow\rangle |d(2)\uparrow\rangle \right\} |u(3)\uparrow\rangle \quad (25 - 2)$$

ترکیب اسپینی و طعم در رابطه فوق در دو مرحله متقارن می شود: ابتدا فقط روی دو کوارک اول

فرآیندی انجام می دهیم و به دست می آوریم

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\{ |u(1)\uparrow\rangle |d(2)\downarrow\rangle - |u(1)\downarrow\rangle |d(2)\uparrow\rangle \right\} |u(3)\uparrow\rangle + \left\{ |d(1)\downarrow\rangle |u(2)\uparrow\rangle - |d(1)\uparrow\rangle |u(2)\downarrow\rangle \right\} |u(3)\uparrow\rangle \quad (26 - 2)$$

حال با اعمال عملگر جایگشت p_{32}, p_{31} روی عبارت فوق، دیگر جملات را ایجاد می کنیم. این

کار ایجاد ۱۲ جمله خواهد کرد که با دسته بندی جملات یکسان با همدیگر، به تابع موج پروتون با

جهت گیری های اسپینی همه کوارک ها دست خواهیم یافت.

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \left\{ 2 \left(|u\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle + |u\uparrow d\downarrow u\uparrow\rangle \right) - \left(|u\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle + |u\uparrow d\uparrow u\downarrow\rangle + |d\uparrow u\uparrow u\downarrow\rangle \right) \right. \\ \left. + \left(|d\downarrow u\uparrow u\uparrow\rangle \right) - \left(|u\downarrow u\uparrow d\uparrow\rangle + |u\downarrow d\uparrow u\uparrow\rangle + |d\uparrow u\downarrow u\uparrow\rangle \right) \right\} \quad (27 - 2)$$

وفاق برای ساده سازی نماد گذاری این است که برچسب شماره کوارک را کنار گذاشته و به مرتبه

هر کوارک که در جایگشت ظاهر می شود استناد می کنیم. این واقعیت که تابع موج تحت

جابجایی همزمان طعم واسپین بین دو کواریک پاد متقارن است، را می توان ثابت کرد. تابع موج نوترون، همانند پروتون نوشته می شود با این تفاوت که به جای کواریک u ، کواریک d را جایگزین می کنیم و برعکس. به همین ترتیب، تابع موج اعضای شگفت هشت تایی را می توانیم ، به همان روشی که برای اعضای ده تایی از $|\Delta^{++}\rangle$ شروع کردیم، از پروتون تعیین کنیم.

۲-۷- ایزو اسپین

هایزنبرگ اولین کسی بود که در ۱۹۳۲ میلادی اولین بار مفهوم ایزو اسپین را به زبان ریاضی بیان کرد [6]. هادرونها که شامل مزونها و باریونها هستند با خواص مشابه و جرم های تقریباً یکسان به چند تایی های ایزواسپینی به صورت زیر تقسیم بندی می شوند که این تقسیم بندی را می توان برای سایر باریونها نیز بیان کرد

$$(p, n), (\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-), (\pi^+, \pi^0, \pi^-), (\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-) \quad (28-2)$$

از ایزو اسپین به عنوان راهی برای برچسب زنی اعضای چند گانه استفاده می کنیم و کمیتی به نام I_3 را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$I_3 = \frac{Q}{e} - \frac{Q^-}{e} \quad (29-2)$$

که در آن Q معرف بار الکتریکی ذره و Q^- بار متوسط چند گانه است که از جمع بستن بارها و تقسیم بر تعداد آنها بدست می آید، توجه کنیم که بارهای بعضی از چند گانه ها $(+1, 0, -1)$ ، حول

صفر متقارن و بعضی هم نامتقارن است ، بنابراین برای Δ داریم : $\frac{Q}{e} = \frac{1}{2}$ و از آنجا داریم

$$I_3(\Delta^{++}) = +\frac{3}{2}, I_3(\Delta^+) = +\frac{1}{2}, I_3(\Delta^0) = -\frac{1}{2}, I_3(\Delta^-) = -\frac{3}{2} \quad (30-2)$$

و برای نوکلئون ها داریم

$$I_3(n) = -\frac{1}{2}, I_3(p) = +\frac{1}{2} \quad (31-2)$$

البته ارائه این کمیت به نام مولفه ی سوم ایزو اسپین از این جهت اهمیت دارد که پایستگی I_3 در فرآیندهای واپاشی همانند بوده و معادل پایستگی بار الکتریکی است.

برای هر چند تابه عدد کوانتومی ایزو اسپین، I را چنان معرفی می کنیم که یک بردار \vec{I} را در فضای ایزواسپین با مولفه های مناسب مشخص کند. سپس عدد کوانتومی $I=1$ را برای P و بیون های سه تابه، و $I=0$ را برای (w, n, Λ^0) و همچنین $I=\frac{3}{2}$ را برای Δ و غیره در نظر می گیریم. البته برای تعیین ایزواسپین یک پیوند چندگانه، فقط تعداد ذراتی را که شامل می شود می شماریم. چون دامنه I_3 از $-I$ تا $+I$ تغییر می کند، پیوند چندگانه $2I+1$ می باشد. به این طریق مقدار ایزواسپین مشخص می شود.

در تحلیل واپاشی ها و واکنش ها، باید عدد کوانتومی I را در فرآیندهای برهم کنش قوی پایسته نگه داشت. اما ممکن است پایستگی I در فرآیندهای ضعیف یا الکترومغناطیس نقض شود. اگر بار الکتریکی هادرون Q و عدد باریونی آن β و مولفه سوم ایزواسپین I_3 باشد، در این صورت

$$Q = e \left(I_3 + \frac{\beta}{2} \right) \quad (32-2)$$

البته اگر فرآیندهای واپاشی خاصی که انتظار میرود در مدت زمان مشخصه برهم کنش های قوی، یعنی حدوداً در 10^{-22} ثانیه رخ دهد، زمان برهم کنش های ضعیف حدود 10^{-10} ثانیه میباشد. با در نظر گرفتن عدد کوانتومی شگفتی S ، به مزون ها و باریون ها و خاصیت افسون C برای توجیه چندتایی اضافی که به وسیله عدد کوانتومی افسون پدید می آید باید رابطه گلמן - نشیجیا را به صورت زیر اصلاح کرد.

$$\frac{Q}{e} = I_3 + \frac{\beta + S + C}{2} \quad (33-2)$$

بنابراین پروتون و نوترون ممکن است به عنوان دو جنبه یک ذره مجرد در نظر گرفته شوند که همان نوکلئون می باشد. اسپین هر دوی آنها برابر $\frac{1}{2}$ بوده و جرم هایشان برابر $\frac{936.566 \text{ MeV}}{c^2}$

برای نوترون و $938.272 \text{ MeV}/c^2$ برای پروتون می باشد. که فقط در حدود 0.14 درصد اختلاف دارند. فرق مهم این دو ذره در خواص الکترومغناطیسی آنها از قبیل بار و ممان دو قطبی مغناطیسی می باشد. اگر تنها با واکنشهای قوی سروکار داشته باشیم تعدادی از تفاوت ها ظاهر نمی شوند. یعنی در غیاب واکنش الکترومغناطیسی پروتون و نوترون نمی توانند از هم تشخیص داده شوند. این امر مشابه حالاتی از ذرات است که در مقدار m_s اختلاف دارند. m_s تصویری از اسپین ذاتی s روی محور کوانتیش است. به دلیل تشابه با سیستم پروتون و نوترون، ذره ای با اسپین $\frac{1}{2}$ را در نظر می گیریم، در غیاب میدان مغناطیسی \vec{B} ، ذرات با دو مقدار ممکن برای m_s ، برابر $\pm \frac{1}{2}$ ، از لحاظ انرژی واکنی هستند، بنابراین از همدیگر تمیز ناپذیر هستند. از طرف دیگر اگر تنها یک میدان مغناطیسی محدود اعمال شود واکنی برطرف شده و ذرات در انرژی های متفاوت قابل مشاهده اند. اعم از اینکه اسپین ذاتی s موازی و یا پاد موازی میدان B باشد، تفاوت بین پروتون و نوترون مشابه تفاوت بین ذرات با $m_s = \pm \frac{1}{2}$ است. در صورتی که میدان کولمبی را با میدان مغناطیسی جانشین کنیم و پروتون ها و نوترون ها به عنوان ذرات مشابه در نظر گرفته شوند به برجسب جدیدی برای تمایز بین آنها نیاز داریم. برای این منظور، مفهوم ایزو اسپین معرفی می شود. از این رو تنها دو حالت نوترونی و پروتونی برای نوکلئون وجود دارد. می توان ایزو اسپین $I = \frac{1}{2}$ را به نوکلئون منتسب کرد. با استفاده از تشابه با سیستم اسپین $\frac{1}{2}$ می توانیم دو زیر حالت متفاوت داشته باشیم. دو نوکلئون بوسیله $I_3 = \pm \frac{1}{2}$ تمیز داده می شوند که مقدار مورد انتظار مولفه سوم عملگر ایزو اسپین τ می باشد. بنا به عرف حالت $\left| I = \frac{1}{2}, I_3 = \frac{1}{2} \right\rangle$ را حالت پروتون و حالت $\left| I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2} \right\rangle$ را حالت نوترون در نظر میگیریم و به صورت عمومی تر به فرم زیر نمایش می دهیم:

$$|p\rangle = \left| I = \frac{1}{2}, I_3 = +\frac{1}{2} \right\rangle \quad (34-2)$$

$$|n\rangle = \left| I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (35-2)$$

که $|n\rangle, |p\rangle$ نمایشگر تابع موج پروتون و نوترون می باشند. برای هسته هایی که از چندین نوکلئون تشکیل شده اند، ایزو اسپین کل به صورت مجموع برداری ایزو اسپین تک تک نوکلئون هاست.

$$I = \sum_{i=1}^A I(i) \quad (36-2)$$

که A معرف تعداد نوکلئون هاست. از نظر ریاضی اسپین و ایزو اسپین از نظر ساختاری شباهت زیادی به هم دارند. در واقع ساختار ریاضی که برای بحث تشابه پروتون و نوترون بکار می رود ایزو اسپین می باشد.

استقلال نیروهای هسته ای از بار بیان می کند که از نظر نیروهای هادرونی، مادامی که فقط برهم کنش هادرونی وجود دارد، پروتون و نوترون تفاوتی ندارند. بردار ایزواسپین \vec{I} ، می تواند در هر جهتی قرار گیرد، به عبارت دیگر در فضای ایزواسپین، ناوردایی دورانی وجود دارد و سیستم تحت دوران حول هر محوری ناوردا است. این واقعیت را می توان به صورت زیر نشان داد

$$[H_0, \vec{I}] = 0 \quad (37-2)$$

در صورتی که فقط H_0 وجود داشته باشد، تعداد $2I+1$ حالت با مقادیر مختلف I_3 واگن هستند و انرژی و جرم آنها یکسان است. به سادگی می توان گفت که، چنانچه فقط برهم کنش هادرونی وجود داشته باشد، پروتون و نوترون جرم یکسانی خواهند داشت. برهمکنش الکترومغناطیسی همسانگردی فضای ایزواسپین را از بین می برد، در این صورت اگر هامیلتونی سیستم را به دو جمله مجزا بشکافیم

$$H = H_0 + H_{em} \quad (38-2)$$

میتوان نتیجه گرفت :

$$[I, H_0] = 0 \quad , \quad [\bar{I}, H_{em}] \neq 0 \quad (39-2)$$

یعنی تقارن ایزواسپینی تنها تقارن برای واکنشهای قوی است. از آنجا که بار الکتریکی، همیشه

حتی در حضور H_{em} ، پایسته است

$$[H_0 + H_{em}, Q] = 0 \quad (40-2)$$

Q عملگر متناظر بار q الکتریکی می باشد. از طرفی بار ذره $|I, I_3\rangle$ به صورت زیر داده می شود:

$$q = e \left(I_3 + \frac{1}{2} \right) \quad (41-2)$$

عملگر Q به وسیله رابطه فوق به I_3 مربوط است پس داریم:

$$[H_0 + H_{em}, I_3] = 0 \quad (42-2)$$

حتی در حضور برهم کنش الکترومغناطیسی، مولفه سوم ایزواسپین پایسته است.

یکی از نتایج بررسی پرتون و نوترون به عنوان دو حالت ایزواسپینی مختلف نوکلئون این است

که می توانیم پروتون و نوترون را به همدیگر تبدیل کنیم. با اعمال عملگرهای بالا برنده و پایین

آورنده ایزواسپینی بر تابع موج مناسب داریم

$$I_+ |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |p\rangle \quad (43-2)$$

$$I_- |p\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |n\rangle \quad (44-2)$$

از طرفی بنا به برجسب کواریکی داریم:

$$|p\rangle = |uud\rangle \quad (45-2)$$

$$|n\rangle = |udd\rangle \quad (46-2)$$

از این رو روابط (۲-۴۵ و ۴۶) می رساند که :

$$I_+ |udd\rangle = |uud\rangle \quad (47-2)$$

$$I_- |udd\rangle = |uud\rangle \quad (48-2)$$

از این رو پروتون و نوترون ذرات مشابهی در نظر گرفته می شوند که در مولفه سوم ایزواسپین باهم تفاوت دارند. دیگر قسمت های معادله موج تحت عملگرهای بالابرنده و پایین آورنده ایزواسپینی تغییر نمی کنند. برحسب کواریک ها تنها اختلاف بین آنها جانشینی یکی از دو کواریک u بوسیله کواریک d می باشد. روابط بالا نشان می دهند که عملگر بالا برنده ایزواسپینی روی کواریک ها اثر کرده و کواریک های d را به کواریک های u تبدیل می کند. برای عملگر پایین آورنده هم حالت مشابهی داریم چون کواریک های دیگری وارد نمی شوند. کواریک های u و d را به صورت دوگانه ایزواسپینی در نظر می گیریم. گذشته از این مولفه سوم ایزواسپین کمیتی اسکالر است، مجموع I_0 دو کواریک u و یک کواریک d در پروتون باید مساوی $\frac{1}{2} +$ و یک کواریک u و دو کواریک d در نوترون باید مساوی $\frac{1}{2} -$ باشد. برای برآورده شدن نیازمان $I_0 = \frac{1}{2}$ را به کواریک u و $I_0 = -\frac{1}{2}$ را به کواریک d منتسب می کنیم. باید توجه کرد کواریک ها دارای عدد باریونی $A = \frac{1}{3}$ می باشند چرا که هر سه کواریک باید تشکیل یک باریون بدهند.

۲-۸- پتانسیل میان کواریک ها در باریون

بر عکس هیدروژن و پوزیترونیم که در آنها نیروهای مربوط به طور کامل الکترومغناطیسی و شناخته شده هستند، کواریکها بوسیله نیروهای قوی مقید شده اند. ما نمی دانیم چه پتانسیلی را باید برای بدست آوردن جفتیدگی اسپین به جای قانون کولن به کار بریم، در اصل از کرومودینامیک اشتقاق پذیر است. اما هیچ کس نمی داند چگونه بایستی آنها را محاسبه کرد. هنوز می توانیم برخی حدس های تجربی را انجام دهیم. بدلیل اینکه کرومودینامیک از لحاظ ساختار بسیار همانند الکترومغناطیس می باشد، تنها برای جمله های غیرخطی که به علت آزادی مجانبی، تاثیر عمده ای در فاصله های کم ندارند، می توان محاسبه ای را انجام داد. در زمان

کرومودینامیک (QCD) و رفتار فاصله کوتاه به نفع مبادله ی تک گلوئونی قرار دارد و به دلیل اینکه گلوئون و فوتون هر دو ذراتی با اسپین یک و بدون جرم هستند، برهم کنش ها صرفنظر از ثابت جفتیدگی کلی در این برآورد یکسان می باشند ($\alpha_s \approx \alpha$) و فاکتورهای رنگ متفاوت، که از شمارش اعداد و رنگ های گوناگون گلوئونی ناشی می شود، همگی در فرآیند شرکت دارند. در برد کوتاه ما یک پتانسیل کولنی را در نظر می گیریم، $V \approx \frac{1}{r}$ و یک فاصله بسیار بسیار ریز که از لحاظ کمی مشابه با ساختار هیدروژن و پوزیترونیم است. از سوی دیگر مجبوریم که در فاصله های زیاد محاسبه را برای محدودیت کوآرک انجام دهیم و پتانسیل بدون محدودیت افزایش می یابد شکل دقیق کاربردی $V(r^2)$ در فاصله زیاد، بیشتر حدی است. برخی به یک پتانسیل همانگ نوسانی $V \approx r^2$ و بقیه به یک وابستگی لگاریتمی $V \approx \ln r$ تمایل دارند. شاید ساده ترین مورد یک پتانسیل خطی باشد که به یک نیروی ثابت بستگی دارد $V \approx r$. واقعیت این است که هرکدام از اینها با برد محدود فواصل می توانند داده ها را الزاماً به گونه ای معقول در دسترس قرار دهند و به این خاطر که زیاد با برد محدودی که ما برای آنها دارای کاوشگر حساس باشیم، متفاوت نمی باشد [7]. پتانسیلی که ما در فصل های بعد انتخاب کرده ایم به صورت زیر است

$$V(r_1, r_2, r_3) = \frac{1}{2}K|r_i - r_j|^2 + K'|r_i - r_j| - \frac{K''}{|r_i - r_j|} \quad (49-2)$$

۲-۹- حالت اسپینی و ایزواسپینی باریون

به زبان نظریه گروه ضرب مستقیم سه نمایش (دو بعدی) از گروه $SU(2)$ به مجموع مستقیم یک نمایش چهار بعدی و دو نمایش دو بعدی تجزیه می شود.

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2 \quad (50-2)$$

چنانچه نمایش بوسیله اسپین مشخص شود به جای نمایش ابعادی بالا می توان معادله زیر را نوشت.

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} \quad (51-2)$$

در واقع با توجه به اینکه اسپین هر کواریک برابر $\frac{1}{2}$ است حالت های مختلف اسپین وایزواسپین به

صورت زیر نمایش داده می شود :

$$\chi_s = \left| \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \frac{1}{2} \right) \frac{3}{2} \right\rangle \quad (52-2)$$

$$\chi_{MS} = \left| \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} \right\rangle \quad (53-2)$$

$$\chi_{MA} = \left| \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), 0, \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} \right\rangle \quad (54-2)$$

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = (\uparrow\uparrow\uparrow)$$

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = (\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow) / \sqrt{3} \quad spin \frac{3}{2}(\Psi_s) \quad (55-2)$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = (\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow) / \sqrt{3}$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \downarrow\downarrow\downarrow$$

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_{12} = (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \uparrow / \sqrt{2}$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_{12} = (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \uparrow / \sqrt{2} \quad spin \frac{1}{2}(\Psi_{12}) \quad (56-2)$$

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_{23} = \uparrow (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) / \sqrt{2}$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_{23} = \downarrow (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) / \sqrt{2} \quad spin \frac{1}{2}(\Psi_{23}) \quad (57-2)$$

در ضمن میتوان نشان داد که

$$| \rangle_{13} = | \rangle_{12} + | \rangle_{23} \quad (58-2)$$

و همینطور حالت‌های ایزواسپین نیز به صورت زیر نمایش داده می شوند

$$\phi_s = \left| \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), 1, \frac{1}{2} \right) \frac{3}{2} \right\rangle \quad (59-2)$$

$$\phi_{MS} = \left| \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), 1, \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} \right\rangle \quad (60-2)$$

$$\phi_{M,1} = \left| \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), 0, \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} \right\rangle \quad (61-2)$$

و برای پایه های اسپین و ایزواسپین حالت‌های متقارن، مخلوط متقارن، مخلوط پاد متقارن و پاد

متقارن را به ترتیب به صورت های زیر نمایش می دهیم :

$$\Omega_S = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_{MA} \phi_{MA} + \chi_{MS} \phi_{MS}] \quad (62-2)$$

$$\Omega_{MS} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_{MA} \phi_{MA} - \chi_{MS} \phi_{MS}] \quad (63-2)$$

$$\Omega_{MA} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_{MA} \phi_{MS} + \chi_{MS} \phi_{MA}] \quad (64-2)$$

$$\Omega_A = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_{MA} \phi_{MS} - \chi_{MS} \phi_{MA}] \quad (65-2)$$

فصل سوم

فضای فوق کروی

۳-۱- مقدمه

در این فصل خواص مختلف پایه پتانسیل فوق کروی بررسی خواهد شد، به نظر می رسد از میان روش های مختلفی که برای حل معادله شرودینگر مورد استفاده قرار می گیرند ، روش بسط هماهنگ فوق کروی ($H.H.$) یکی از کار آمد ترین روش ها باشد [8].

اما هر روشی مشکلات و سختی های خود را داراست. در این جا واگنی بالا مانع از این می شود تا پایه کامل در مسائل بسط در نظر گرفته شود. بنابراین برای هر نوع مسئله می بایست پایه ای خاص را در نظر گرفت. این حقیقت پیامدی از این خاصیت است که برای یک برهم کنش دوجسمی پایه پتانسیل توصیف کاملی از هم بستگی های دو جسمی ارائه می دهد، بنابراین برای فراتر از محدوده می بایست هم بستگی های چند جسمی معرفی شوند. این هم بستگی ها، تنها سهم کمی خواهند داشت، چرا که احتمال برهم کنش همزمان سه ذره (یا بیشتر) حداقل در مسائل حالت های مقید هسته ای بسیار اندک است معمولاً بسط هر تابع دو جسمی ، و بطور خاص پتانسیل دو جسمی، ارائه می شود. عناصر ماتریسی با دو و سه هماهنگ پتانسیل ، که برای

ساختن ماتریس پتانسیل مورد نیاز می باشد، محاسبه خواهند شد. فرمول های باز گشتی مفیدی را بدست خواهیم آورد. مفهوم پایه پتانسیل برای سیستم هایی با تعداد دلخواهی از فرمیون ها تعمیم داده خواهد شد. در این فصل روشی برای ساختن پایه پتانسیل و محاسبه ماتریس پتانسیل مربوطه ارائه خواهد شد. زیر مجموعه ای، که به اصطلاح زیر مجموعه بهینه نامیده می شود، اغلب ابزاری است که تابع موج از آن ساخته می شود، شامل ترکیب های خطی از عناصر پایه پتانسیل برای زوج هایی از ذرات می باشد که با تقارن مورد نیاز سیستم تحت تبادل ذرات همخوانی دارد [9].

۳-۲- هماهنگ های فوق کروی

فرض کنید (ξ_1, \dots, ξ_N) مجموعه ای از مختصه های خطی باشد. یک چند جمله ای همگن $H_{(L)}(\xi_1, \dots, \xi_N)$ از مرتبه L ، وقتی هماهنگ است که در معادله لاپلاس صدق کند [10].

$$\sum_{i=1}^N \nabla_i^2 H_{(L)}(\xi_1, \dots, \xi_N) = 0 \quad (1-3)$$

با تعریف فوق شعاع

$$r^2 = \left[\sum_{i=1}^N \xi_i^2 \right] \quad (2-3)$$

تابع

$$Y_{(L)}(\Omega) = r^{-L} H_{(L)}(\xi) \quad (\xi_1, \dots, \xi_N) \quad (3-3)$$

بیانگر مقدار چند جمله ای هماهنگ $H_{(L)}(\xi)$ بر روی سطح فوق کره به شعاع واحد ($r = 1$) است.

این مورد را یک هماهنگ فوق کروی می نامند [11.12].

Ω مجموعه ای از $(3N - 1)$ مختصه زاویه ای است که مکان نقطه ای بر روی سطح کره واحد $r = 1$ را توصیف می کنند. $[L]$ مجموعه ای از $(3N - 1)$ عدد است که چند جمله ای را

مشخص می کند. برای مثال، این اعداد می توانند مربوط به درجه (n) مختصه های خطی باشند که در شرط $\sum_{i=1}^{3N} n_i = L$ صدق می کنند و در چند جمله ای ظاهر می شوند. پایه هماهنگ فوق کروی را می توان با روابط بازگشتی محاسبه نمود. برای این کار از این خاصیت استفاده می شود که هماهنگ های فوق کروی (برای توابعی که بر روی سطح فوق کره واحد تعریف می شوند) پایه کاملی را تشکیل می دهند. بنابراین اگر $H_{(L)}(\xi_1, \dots, \xi_q)$ تشکیل یک مجموعه کاملی از هماهنگ های فوق کروی متعامد را برای مختصه های (ξ_1, \dots, ξ_q) بدهد، توسط جواب معادلات زیر بیان می شود

$$\int H_{(L)}(\xi_1, \dots, \xi_q) P_n^{(L)}(\xi_{q+1}) P_{n'}^{(L')}(\xi_{q+1}) H_{(L')}(\xi_1, \dots, \xi_q) d\Omega_{q+1} = \delta_{|L|,|L'|} \delta_{n,n'} \quad (4-3)$$

که در این رابطه انتگرال گیری بر روی سطح فوق کره واحد در فضای $(q+1)$ بعدی محاسبه می شود و p چند جمله ای ها هستند.

وقتی مجموعه اعداد $[L], [L']$ یکسان باشند نماد کرونگر $\delta_{[L],[L']}$ یک و در غیر اینصورت برابر با صفر است. عنصر سطحی متناظر باید مختصه های فوق کروی باشند.

$$\begin{aligned} \xi_{q+1} &= r \cos \phi_{q+1} \\ \xi_i &= r \sin \phi_{q+1} \dots \sin \phi_{i+1} \cos \phi \\ \xi_1 &= r \sin \phi_{q+1} \dots \sin \phi_2 \quad (\phi_1 = 0) \end{aligned} \quad (5-3)$$

بر روی سطح فوق کره واحد داریم

$$d\Omega_{q+1} = (\sin \phi_{q+1})^{q-1} (\sin \phi_q)^{q-2} \dots \sin \phi_3 d\phi_{q+1} \dots d\phi_2 \quad (6-3)$$

شرط (4-3) تبدیل می شود به

$$\int_0^\pi (1-x^2)^{\frac{L+q}{2}-1} P_n^L(x) P_{n'}^{L'}(x) dx = \delta_{n,n'} \quad (7-3)$$

که $x = \cos \phi_{q+1}$ چند جمله ای های متناظر با تابع وزنی $(1-x^2)^{\frac{L+q-1}{2}}$ از چند جمله ای های $C_n^{L+\frac{(q-1)}{2}}(x)$ هستند. پایه ای که از فرمول بازگشتی بدست می آید، و شامل حاصل ضرب چند جمله ای ها می باشد، منطبق با مسائل فیزیکی سازگار نیست، زیرا در چرخش هر بردار ξ_i ، در فضای سه بعدی هموردا نمی باشد. به همین دلیل چند جمله ای های هماهنگ را برای هر مختصه ξ_i ، بطور غیر مستقل، تعریف می کنیم. فرض می کنیم $H_{(L)}(\xi_\alpha, \xi_\beta, \dots)$ و $h_{(l)}(\xi_i, \xi_j, \dots)$ به ترتیب دو چند جمله ای هماهنگ از درجه L با l مربوط به دو مجموعه از مختصات مجزای $(\xi_\alpha, \xi_\beta, \dots)$ و (ξ_i, ξ_j, \dots) باشند، حاصل ضرب $h_{(l)}(\xi_i, \xi_j, \dots)$ نیز یک چند جمله ای هماهنگ از مرتبه $L+l$ است. این نتیجه پیامد واضحی از ساختار عملگر لاپلاس است.

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^N \nabla_i^2 \quad (8-3)$$

فرض می کنیم $H_{(L, N-1)}(\xi_1, \dots, \xi_{N-1})$ مجموعه کامل از چند جمله ای های هماهنگ برای مختصه های $(\xi_1, \dots, \xi_{N-1})$ باشد، در این صورت $\xi_N^{l_N} Y_{l_N}^{m_N}(\omega_N)$ که در این رابطه ω_N ها مختصه های کروی ξ_N هستند و Y_i^m یک هماهنگ کروی است) نیز یک چند جمله ای هماهنگ است. با استفاده از نماد گذاری مرجع [12]

$$\left[\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} = r \sin \phi_N, \quad \xi_N = r \cos \phi_N, \quad 0 \leq \phi_N \leq \frac{\pi}{2} \quad (9-3)$$

معادله (4-3) به معادله زیرتبدیل می شود

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_n^{L, N-1, L, N}(\cos \phi_N) P_n^{L, N-1, L, N}(\cos \phi_N) (\sin \phi_N)^{2L, N-1+3N-4} (\cos \phi_N)^{2(L, N+1)} d\phi_N = \delta_{n, n'} \quad (10-3)$$

چند جمله ای های $p_n^{L_{N-1}, L_N}$ ، که توسط تابع وزنی $\left((1-x)^{L_{N-1} + \frac{(3N-5)}{2}} (1-x)^{L_N - 1 + \frac{1}{2}} \quad x = \cos 2\phi_N \right)$ تولید می شوند، در محدوده $-1 \leq x \leq +1$ همان چند جمله ای های ژاکوبی هستند.

در این رابطه $D = 3N$ و $\nu_{N-1} = L_{N-1} + \frac{(D-5)}{2}$ است. برای بدست آوردن پایه مورد نظرمان، با شروع از فضای سه بعدی که هماهنگ های کروی $Y_{l_1}^{m_1}(\omega_1)$ را در اختیار ما قرار می دهد، یک فرمول بازگشتی را اعمال می کنیم، مختصه های فوق کروی ای که استفاده می کنیم عبارتند از

$$\Omega(\omega_1, \omega_2, \phi_2, \dots, \omega_N, \phi_N) \quad (11-3)$$

در این رابطه ω_i ها مختصه های زاویه ای ξ_i, ϕ_i هستند که با رابطه

$$\tan \phi_i = \left(\sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xi_i^{-1} \quad (12-3)$$

یا به عبارت دیگر توسط

$$\begin{aligned} \xi_N &= r \cos \phi_N \\ \xi_i &= r \sin \phi_N \dots \sin \phi_{i+1} \cos \phi_i \\ \xi_1 &= r \sin \phi_N \dots r \sin \phi_2 \quad (\phi_1 = 0) \end{aligned} \quad (13-3)$$

بیان می شوند. با استفاده از روش بازگشتی داریم

$$Y_{(l,)}(\Omega) = Y_{l_1}^{m_1}(\omega_1) \prod_{j=1}^N Y_j^{m_j}(\omega_j)^j P_{L_j}^{l_j, L_{j-1}}(\phi_j) \quad (14-3)$$

در این رابطه

$${}^{(j)}P_{L_j}^{l_j, l_{j-1}}(\phi_j) = \left[\frac{2\nu_j \Gamma(\nu_j - n_j) n_j!}{\Gamma\left(\nu_j - n_j - l_j - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n_j + l_j + \frac{3}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (15-3)$$

$$\times (\cos \phi_j)^{l_j} (\sin \phi_j)^{l_{j-1}} P_{n_j}^{\nu_{j-1}, j + \frac{1}{2}}(\cos 2\phi_j)$$

که در آن $\nu_j = \nu_{j-1} + 2n_j + l_j + \frac{3}{2} = L_j + \frac{3}{2}j - 1 = L_{j-1} + 2n_j + l_j + \frac{3}{2}j - 1$

و $p_n^{a,b}$ یک چند جمله ای ژاکوبی است. مجموعه $[L]$ ، از $3N - 1$ عدد کوانتومی متناظر با $3N - 1$ درجه آزادی (Ω) از $2N$ عدد کوانتومی سمتی و مداری ($j = 1, \dots, N$) l_j, m_j و $N - 1$ عدد کوانتومی فوق کروی ($j = 2, \dots, N$) تشکیل شده است که شامل عدد کوانتومی مداری بزرگ $L = L_N$ نیز می باشد.

l_j با رابطه زیر به اعداد کوانتومی l_i, n_i مرتبط است.

$$L_j = \sum_{i=1}^j (2n_i + l_i) \quad (n_i = 0) \quad (16-3)$$

$H.H.$ (14-3) در روابط زیر صدق می کند

$$\int Y_{(L)}^*(\Omega) Y_{(L)}(\Omega) d\Omega = \delta_{(L),(L')} \quad (17-3)$$

عنصر سطحی فوق کره واحد عبارتست از

$$d\Omega = d\omega_1 \prod_{j=2}^N d\omega_j (\sin \phi_j)^{3j-4} \cos \phi_j d\phi_j \quad (18-3)$$

به طور خاصی داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} {}^{(i)}P_{L_i}^{l_i, l_{i-1}}(\phi_i) {}^{(j)}P_{L_j}^{l_j, l_{j-1}}(\phi_j) (\sin \phi_j)^{3j-4} \cos^2 \phi_j d\phi_j = \delta_{L_i L_j} \quad (19-3)$$

عملگر لاپلاسی از مختصات فوق کروی و در فضای D بعدی تبدیل می شود به

$$V^2 = \sum_{i=1}^N \nabla_i^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{L^2(\Omega)}{r^2} \quad (20-3)$$

که $L^2(\Omega)$ عملگر مداری بزرگ است. با توجه به این که $r^L Y_{(L)}(\Omega)$ یک چند جمله ای هماهنگ است، ویژه معادله ای که هماهنگ فوق کروی در آن صدق می کند مطابق زیر بدست می آید

$$\{L^2 + L(L+D-2)\} Y_{(L)}(\Omega) = 0 \quad (21-3)$$

که در آن L (درجه چند جمله ای) مرتبه یا عدد کوانتومی مداری بزرگ نامیده می شود.

۳-۳- پایه پتانسیل

فرض کنید می خواهیم تابعی مانند $V(r_{ij})$ که تابعی از فاصله بین ذرات $(r_{ij} = r_i - r_j)$ است را در هماهنگ فوق کروی بسط دهیم. مجموعه ای از مختصه های ژاکوبی را تعریف می کنیم که برای آنها [13,14]

$$r^2 = 2 \sum_{i=1}^A (x_i - X)^2 = \frac{2}{A} \sum_{k,l>k} r_{kl}^2, \quad X = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A x_i, \quad A = N + 1 \quad (22-3)$$

پایه هماهنگ فوق کروی که برای بسط $V(r_{ij})$ دارای تابعی از مختصه های ξ_j می باشد با $j < N$ برقرار است، بنابراین با رابطه زیر بیان می شود

$$\phi_{2K+1}^{l,m}(\Omega_{ij}) = Y_l^m(\omega_{ij})^{(N)} P_{2K+1}^{l,0}(\phi_N) Y_0(D-3) \quad (23-3)$$

که در آن $\cos \phi_N = r_{ij}/r$

$$Y_0(D-3) = \left(\frac{\Gamma(D-3)/2}{2\pi^{(D-3)/2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (24-3)$$

همانگ فوق کروی از مرتبه صفر در فضای $(D-3)$ بعدی است که با بردارهای $(\xi_1, \dots, \xi_{N-1}, \xi_N)$ مشخص می شود.

زیر مجموعه $p_{2K+1}^{l,m}(\Omega_{ij})$ ، که از همانگ فوق کروی مرتبه ساخته شده است (که در فضای سه بعدی تانسورهای l مرتبه هستند) پایه پتانسیل نامیده می شوند. این پایه ما را قادر می سازد تا هر تابعی از r_{ij} ، و بطور خاص هر نوع پتانسیل دو جسمی $V(r_{ij})$ ، در همانگ فوق کروی را بسط دهیم. این پایه تنها از سه عدد کوانتومی تشکیل شده است: اعداد کوانتومی مداری و سمتی m, l ، و عدد کوانتومی مداری بزرگ $2k+l$ ، همانگ های پتانسیل در رابطه زیر صدق می کنند

$$\int \psi_{2K+1}^{l,m}(\Omega_{ij}) \psi_{2K'+1}^{l',m'}(\Omega_{ij}) d\Omega = \delta_{k,k'} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad (25-3)$$

همانگ های پتانسیل را می توان برحسب چند جمله ای های فوق هندسی ${}_2F_1$ نیز نوشت

$$p_{2K+1}^{l,m}(\Omega_{ij}) = f_k^l Y_l^m(\omega_{ij}) \left(\frac{r_{ij}}{r}\right)^l {}_2F_1\left[-K, K+l+\frac{D}{2}-1; l+\frac{3}{2}; \frac{r_{ij}^2}{r^2}\right]$$

$$f_k^l = \frac{(-1)^k}{\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)} \left\{ \frac{\Gamma(D-3)/2}{2\pi^{(D-3)/2}} \times \frac{\left(2k+l+\frac{D}{2}-1\right) \Gamma\left(k+l+\frac{D}{2}-1\right)}{K! \Gamma\left(K+\frac{(D-3)}{2}\right)} \times \Gamma\left(K+l+\frac{3}{2}\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (26-3)$$

برای زوج مشخصی از ذرات (i, j) ، و به ازای (m, l) ثابت، تنها یک همانگ فوق کروی برای هر عدد کوانتومی مداری بزرگ $(2k+l)$ وجود دارد.

۳-۴- چند قطبی های پتانسیل

پتانسیل دو قطبی را مطابق زیر می نویسیم

$$V(r_{ij}) = \sum_{l,m} A_l^m(i, j) Y_l^m(\omega_{ij}) Y_l(r_{ij}) \quad (27-3)$$

که $A_l^m(i, j)$ عملگری مستقل از مختصه r_{ij} است. برای مثال این عملگر می تواند عملگر اسپین یا ایزواسپین در پتانسیل هسته ای باشد، بسط هماهنگ فوق کروی پتانسیل توسط رابطه زیر بیان می شود

$$V(r_{ij}) = \sum_{k,l,m} A_l^m(i, j) \phi_{2K+1}^{l,m}(\Omega_{ij}) Y_k^{(D+l)}(r) \quad (D=3N) \quad (28-3)$$

$$V_k^{(D+l)}(r) = \phi_{2K+1}^{l,m}(\Omega_{ij}) |V(r_{ij})\rangle = [Y_0(D-3)]^{-1}$$

$$\times \int_0^\pi {}^{(N)}P_{2K+l}^{l,0}(\phi) v_l(r \cos \phi) (\sin \phi)^{D-4} (\cos \phi) d\phi$$

که یک "چند قطبی پتانسیل" نامیده می شود. با استفاده از رابطه (2.4) چند قطبی های پتانسیل را می توان مطابق زیر نوشت

$$V_k^{(D+l)}(r) = \frac{(-1)^k}{\Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)}$$

$$\times \left[\pi^{(D-3)/2} \frac{\left(2k+l+\frac{D}{2}-1\right)\Gamma\left(k+l+\frac{D}{2}-1\right)\Gamma\left(K+l+\frac{3}{2}\right)}{K! \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right)\Gamma\left(K+\frac{(D-3)}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \int_0^1 V_l(ur) {}_2F_1\left(-K, K+l+\frac{D}{2}-1; l+\frac{3}{2}; u^2\right) (1-u^2)^{(d-5)/2} u^{l+2} du \quad (29-3)$$

فرمول های مختلفی برای محاسبه چند قطبی های پتانسیل در ضمیمه آورده شده است.

برای مثال، نشان داده شده است که این چند قطبی ها را می توان با شروع از چند قطبی های محاسبه شده برای فضای $D=5$ بعدی و یا $D=6$ بعدی، بسته به این که D فرد یا زوج باشد،

محاسبه نمود. متذکر می شویم که در چند قطبی های یک پتانسیل مرکزی $V(r_{ij})$ ، می بایست هماهنگ کروی Y_0^0 (که در تعریف (3.1) آمده است) در محاسبات در نظر گرفته شود.

به عنوان نمونه، بسط یک پتانسیل مرکزی $(r_{ij})^n$ را بیان می کنیم

$$(r_{ij})^n = r^n \sum_{k=0}^{\infty} \rho_{2k}^0(\Omega_{ij}) \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+2)}{2^n \Gamma(n/2+1-k) \Gamma(k+(D+n)/2)} \times \left\{ \frac{\pi^{(D-1)/2} 2k + D/2 - 1 (2K + D - 4)!}{2^{D-5} \Gamma((D-3)/2) (2K+1)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (30-3)$$

توجه داشته باشید که وقتی $(m=0, l=0)$ باشد از نمادگذاری، کمیت p_{2k}^{00} حذف می شود. هر

تابع تحلیلی از r_{ij} را می توان با استفاده از (30-3) بیان نمود. وقتی در رابطه بالا n یک عدد زوج

مثبت و صحیح باشد، عبارت تنها شامل $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ جمله است. برای مثال یک نوسانگر هماهنگ

$n=2$ دارای یک بسط دو جمله ای است $(k=0,1)$. حالت $n=-1$ مربوط به بسط پتانسیل

کولنی است. برای $n \leq -2$ مناسب تر است از رابطه زیر استفاده کنیم

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n/2+1-k)} = \frac{2\Gamma((n+3)/2)\Gamma(n/2+1)}{\Gamma(n/2+1-k)} \quad (31-3)$$

$$= (-1)^k 2\Gamma((n+3)/2) \frac{\Gamma(k-n/2)}{\Gamma(-n/2)}$$

اگر n یک عدد زوج صحیح نباشد، چند قطبی های پتانسیلی که برای بردهای کوتاه به صورت

$(r_{ij})^n$ رفتار می کند، با $(r)^n$ در نزدیکی مبدا هستند. پتانسیلی که تابعی تحلیلی از $(r_{ij})^2$ است

(برای مثال یک پتانسیل گاوسی) دارای چند قطبی هایی از مرتبه k است که وقتی $r \rightarrow 0$ ،

رفتاری مشابه با r^{2k} دارند و جملات $n < 2k$ (یک عدد صحیح زوج است) در بسط (30-3)

حذف می شوند.

معادله (30-3) ، با استفاده از رابطه $ur = x$ و در نظر گرفتن حالت حدی $r \rightarrow \infty$ ، بیانگر رفتار

مجانبی چند قطبی هاست:

$$I_k^{(l+1)}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} (-1)^k \frac{r^2}{\Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)}$$

$$\times \left\{ \pi^{(D-3)/2} \frac{\left(2K + l + \frac{D}{2} - 1\right) \Gamma\left(K + l + \frac{D}{2} - 1\right) \Gamma\left(K + l + \frac{3}{2}\right)}{K! \Gamma\left(\frac{D-3}{2}\right) \Gamma\left(K + \frac{(D-3)}{2}\right)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (32-3)$$

$$\times r^{(l+3)} \int_0^\infty V_l(x) x^{l+2} dx$$

این رابطه وقتی معتبر است که انتگرال $\int_0^r v_l(x) x^{2k} \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^{(D-5)/2} x^{l+2} dx$ متناهی باشد.

این نتیجه برای هر پتانسیلی که به ازای $x < x_0$ قابل نظر کردن باشد ، برقرار است (به

عبارت دیگر $v_l(x) = 0$ برای $x > x_0$)

۳-۵- معادلات جفت شده

هدف نهایی فرمول بندی فوق کروی فراهم آوردن روشی برای حل معادله شرودینگر است . برای

سادگی ، فرض کنید می خواهیم با یک سیستم متشکل از A ذره یکسان کار کنیم و قصد داریم

معادله شرودینگر متناظر

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^A \nabla_{x_i}^2 + \sum_{i,j} V(r_{ij}) - E \right\} \psi(x) = 0 \quad (33-3)$$

را حل کنیم که در آن (x) نشان دهنده مختصه های x_i ذرات و $V(r_{ij})$ یک برهم کنش

دوجسمی است . با استفاده از مختصات ژاکوبی :

$$\xi_i = \sqrt{\frac{2i}{i+1}} \left(x_{i+1} - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i x_j \right), \quad i = 1, \dots, N = A - 1 \quad (34-3)$$

می توان مرکز جرم سیستم را حذف کرد. با این کار به معادله شرودینگر زیر می رسیم:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 + V(\xi) - E \right\} \psi(\xi) = 0 \quad (35-3)$$

که مجموعه مختصات ژاکوبی $\{\xi\}$ با عملگر لاپلاسی (3-8) متناظر است. در فرمول بندی فوق کروی، تابع موج در پایه $H.H$ بسط داده می شود.

$$\psi(\xi) = r^{-(D-1)/2} \sum_{(L)} Y_{(L)}(\Omega) u_{(L)}(r) \quad (36-3)$$

با این کار معادله (35-3) به یک مجموعه نامتناهی از معادلات دیفرانسیل جفت شده مرتبه دوم تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} & - \left\{ \frac{\hbar^2}{m} \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] + E \right\} u_{(L)}(r) \\ & + \sum_{(L')=0}^{\infty} \langle Y_{(L)}(\Omega) | \psi(\xi) | Y_{(L')}(\Omega) \rangle u_{(L')}(r) = 0, \quad l = L + \frac{D-3}{2} \end{aligned} \quad (37-3)$$

که متعاقباً برای حل عددی مختصر خواهد شد. واگنی پایه هماهنگ فوق کروی آن قدر زیاد است که بدون راهنمایی برای انتخاب یک زیر مجموعه مناسب، حل معادله شرودینگر با دقت قابل قبول، ممکن نیست. این راهنمایی توسط فرآیندی (که به ساخت زیرمجموعه هایی که بهینه نامیده می شوند منجر می گردد) فراهم می شود. ایده ای که به مفهوم زیرمجموعه بهینه می انجامد از این فرض ناشی می شود که اولین جمله (مستقل از Ω) در بسط هماهنگ فوق کروی پتانسیل $V(\xi)$ به گونه ای غالب است که جفت شدگی بین مولفه های هماهنگ فوق کروی مختلف تابع موج را (که توسط هماهنگ های پتانسیل مبادله می شوند) می توان به عنوان اختلال در نظر گرفت.

درست بودن این فرض برای حالت پایه چند سیستم نوکلئونی (سه نوکلئونی و ${}^4\text{He}$) بررسی شده است، نتیجه این بود که برای پتانسیل های مختلف سهم اولین جمله فوق کروی ($k = 0$) در بسط پتانسیل در انرژی بستگی به ۸۰ درصد (و یا حتی بیشتر) سهم کل پتانسیل می رسد. نتیجه دیگر این بود که اولین جمله با پایین ترین مرتبه هماهنگ فوق کروی، ($L = 0$) به طور قابل ملاحظه ای غالب است. این نتیجه ما را به این نکته رهنمون ساخت که تابع موج تنها هماهنگ فوق کروی هایی را نگه می دارد که در پتانسیل به طور مستقیم به اولین جمله غالب مرتبط هستند.

هماهنگ فوق کروی انتخاب شده بر طبق این روند زیرمجموعه ای را می سازد که اصطلاحاً "مجموعه بهینه" نامیده می شود. بنابراین زیر مجموعه هماهنگ های فوق کروی زیرمجموعه ای از اعمال عملگر پتانسیل $V(\xi)$ به هماهنگ فوق کروی است که با کمترین مرتبه در بسط حالت مورد بررسی تولید شده است. اکنون مثالی را ذکر می کنیم. هماهنگ فوق کروی با پایین ترین مرتبه در بسط حالت پایه سیستم سه نوکلئونی یا ${}^4\text{He}$ ، به صورت $Y_0(D)$ باشد (تمامی نوکلئون ها در حالت $1s$ هستند). زیر مجموعه بهینه از $V(\xi)Y_0$ در صورتی حاصل می شود که از ترکیب های خطی پایه پتانسیل ساخته شود. می توان نشان داد که تابع وزنی مولد زیرمجموعه بهینه، از هماهنگ فوق کروی مرتبه مینیمم در بسط هریک از حالت های مورد نظر بدست می آید. برای حالت پایه از A بوزون یکسان که تمامی ذرات آن می توانند در حالت $1s$ باشند، مرتبه بهینه $L = 0$ و زیر مجموعه بهینه آن، یک ترکیب خطی متقارن به فرم زیر دارد..

$$\psi_{g.s.}(\xi) = r^{-(D-1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} C_k \left\{ \sum_{i,j>i} p_{2k}^0(\Omega_{ij}) \right\} u_k(r) \quad (38-3)$$

که در آن C_k ثابت بهنجارش است که در قسمت ۹ تعریف می شود. برای نوشتن معادلات دیفرانسیل جفت شده که موج های جزئی $U_k(r)$ در آن صدق می کنند، معادله شرودینگر در

پایه های متقارن $B_{2k}^{(s)}(\Omega) = C_k \sum_{i,j>i} p_{2k}^0(\Omega_{ij})$ تصویر می شود. با این کار به معادلات جفت

شده زیر می رسمیم:

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l_k(l_k+1)}{r^2} - E \right) u_k^s + \frac{m}{\hbar^2} \sum_{k'} U_k^{k'}(r) u_{k'}^s(r) = 0 \quad (39-3)$$

$$l_k = 2K + \frac{D-3}{2}, \quad D = 3(A-1)$$

که در ماتریس پتانسیل

$$U_k^{k'} = \langle B_k^{(s)} | V(\xi) | B_{k'}^{(s)} \rangle = \frac{A(A-1)}{2} \langle B_k^{(s)} | V(r_{ij}) | B_{k'}^{(s)} \rangle \quad (40-3)$$

عنصر ماتریسی را می توان تنها برای یک جفت $V(r_{ij})$ محاسبه کرد چرا که $B_k^{(s)}$ دارای تقارن فضایی است.

انتخاب پایه پتانسیل برای بسط تابع موج، جملاتی در معادله (37-3) را، که با جمله غالب در بسط فرمول (36-3) جفت نمی شوند حذف می کند. با در نظر گرفتن تنها همبستگی های دوجسمی حاصل از پتانسیل دوجسمی، تعداد معادلات جفت شده به طرز قابل ملاحظه ای کاهش می یابد. برای به حساب آوردن همبستگی های بیشتر از دوجسمی، باید پایه توسعه داده شده و عناصر بیشتری را از پایه ی پتانسیل دارا باشد.

برای محاسبه ماتریس پتانسیل باید از بسط پتانسیل (3.2) استفاده کرد. عناصر ماتریسی با دو و سه هماهنگ فوق کروی برای زوج های مختلف (i, j) از ذرات وجود دارند. محاسبه این عناصر ماتریسی را می توان هم با در نظر گرفتن رابطه بین هماهنگ فوق کروی و توابع نوسانی هماهنگ و هم از طریق استفاده از بردار دوران سینماتیکی به عنوان وسیله ای مرتبط با بسط هماهنگ فوق کروی موج تخت، انجام داد.

۳-۶- لاپلاسی سیستم سه جسمی در فضای فوق کروی

حال ما تمام موارد ذکر شده را برای مسئله سه ذره ای بکار می گیریم.

به فرض سه ذره یکسان به جرم m داریم که با آرایش زیر در فضا قرار گرفته اند و هیچ نیروی خارجی بر سیستم اثر نمی گذارد، بردار مرکز جرم سیستم

$$\dot{R} = \frac{1}{3}(\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2 + \dot{\vec{r}}_3) \quad (41-3)$$

و بردارهای مکان نسبی ذرات

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_{12} &= \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2 \\ \dot{\vec{r}}_{13} &= \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_3 \\ \dot{\vec{r}}_{23} &= \dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_3 \end{aligned} \quad (42-3)$$

با توجه به مواردی که گفته شده از مختصات ژاکوبی استفاده می کنیم

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \xi_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \end{aligned} \quad (43-3)$$

در این صورت

$$\xi_1 = [\xi_{1x}^2 + \xi_{1y}^2 + \xi_{1z}^2]^{\frac{1}{2}} \quad \xi_2 = [\xi_{2x}^2 + \xi_{2y}^2 + \xi_{2z}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (44-3)$$

و عملگر لاپلاسی به صورت زیر است

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right). \quad (45-3)$$

جملات لاپلاسی در اصل شامل شش جمله می باشند

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi_{1x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_{1y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_{1z}^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi_{2x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_{2y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_{2z}^2} \end{aligned} \quad (46-3)$$

حال تبدیل مختصات از دستگاه ژاکوبی به فوق کروی را انجام می دهیم و برای سادگی متغیرها را

به صورت زیر نماد گذاری می کنیم

$$\begin{aligned} \xi_{1x} &= x_1 & \xi_{1y} &= x_2 & \xi_{1z} &= x_3 \\ \xi_{2x} &= x_4 & \xi_{2y} &= x_5 & \xi_{2z} &= x_6 \end{aligned} \quad (47-3)$$

سپس نمایش زیر را انتخاب می کنیم

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \leftrightarrow (r, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) \quad (48-3)$$

و در این حالت

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{3N-4} \\ x_2 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{3N-4} \\ x_3 &= r \cos \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{3N-4} \\ x_4 &= r \cos \theta_3 \dots \sin \theta_{3N-4} \\ &\dots \\ &\dots \\ x_{3N-3} &= r \cos \theta_{3N-4} \end{aligned} \quad (49-3)$$

$$r = \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (50-3)$$

حال باید عملگر لاپلاسی را در دستگاه مختصات ابر کروی پیدا کنیم.

برای محاسبه این عبارات به $(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$ نیاز داریم که

برحسب $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ بیان شوند. این روابط عبارتند از

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 &= \frac{x_2}{x_1} \\ \tan \theta_2 &= \frac{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}{x_3} \\ \tan \theta_3 &= \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}}{x_4} \\ \tan \theta_4 &= \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{\frac{1}{2}}}{x_5} \\ \tan \theta_5 &= \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2)^{\frac{1}{2}}}{x_6} \end{aligned} \quad (51-3)$$

با استفاده از روابط (3-51) مشتقات موجود در روابط (3-46) را محاسبه می کنیم، سپس این جملات را در رابطه زیر قرار می دهیم و لاپلاسی در دستگاه مختصات ابر کروی به شکل زیر بدست آوریم.

$$\begin{aligned} \dot{V}^2 &= \sum_{i=1}^6 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{r^5} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^5 \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_4 \sin^2 \theta_5} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_4 \sin^2 \theta_5} \left(\frac{1}{\sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) + \\ &\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_4 \sin^2 \theta_5} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \sin^2 \theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_5} \left(\frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta_4} \sin^3 \theta_4 \frac{\partial}{\partial \theta_4} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^4 \theta_5} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_5} \sin^4 \theta_5 \frac{\partial}{\partial \theta_5} \right) \end{aligned} \quad (52-3)$$

هما نظور که مشخص است لاپلاسی از دو قسمت مجزا تشکیل شده است، یک قسمت شعاعی و قسمت دیگر زاویه ای که وابسته به پنج زاویه می باشد و در ادامه نشان می دهیم قسمت زاویه ای به عملگر تکانه زاویه ای در این فضا مربوط می شود. عملگر تکانه زاویه ای با ویژگی های زیر تعریف می شود

$$\begin{cases} L_{ij} = x_i p_j - x_j p_i & i = 1, 2, 3, \dots, j-1 \\ L_{ji} = x_j p_i - x_i p_j & j = 2, 3, \dots, 3N-3 \end{cases} \quad (53-3)$$

که در اینجا p عملگر مزدوج کانونیک x می باشد. که به صورت زیر تعریف می شود

$$P_k = -I \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (54-3)$$

برای عملگر L_{ij} ویژگی زیر برقرار است:

$$[L_{ij}, L_{k,l}] = i \delta_{jl} L_{ik} + i \delta_{ik} L_{jl} + i \delta_{jk} L_{il} + i \delta_{il} L_{jk} \quad (55-3)$$

و مؤلفه k ام مربع عملگر تکانه زاویه ای به صورت زیر تعریف می شود:

$$L_{ij}^l = \sum_{i,j} L_{ij} L_{ij} \quad \begin{matrix} l = 1, 2, 3, \dots, j-1 \\ j = 2, 3, \dots, k+1 \end{matrix} \quad (56-3)$$

با استفاده از فرمول های تبدیلی (53-3) و (54-3) و مشتقاتی که بدست آورده ایم به راحتی می توان نشان داد که روابط زیر برقرار هستند:

$$L_{11}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2}$$

$$L_{12}^2 = -\left(\frac{1}{\sin \theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) - \frac{L_1^2}{\sin^2 \theta_2} \right) \quad (57-3)$$

$$L_{1k}^2 = -\left(\frac{1}{\sin^{k-1} \theta_k} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_k} \sin^{k-1} \theta_k \frac{\partial}{\partial \theta_k} \right) - \frac{L_{k-1}^2}{\sin^2 \theta_k} \right)$$

با توجه به این رابطه در می یابیم که جملات شامل زاویه ها در عبارت مربوط به لاپلاسی بصورت زیر جایگزین می شود:

$$\bar{\nabla}^2 = \frac{1}{r^5} \frac{\partial}{\partial r} r^5 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L_5^2}{r^2} \quad (58-3)$$

اگر ویژه توابع همزمان آنها تابع زیرباشد

$$Y_{\lambda_{D-1}, \lambda_{D-2}, \dots, \lambda_2, \lambda_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1}) \quad (59-3)$$

آنگاه می توانیم رابطه عملگری زیر را برای آنها بنویسیم

$$L_k^2 Y_{\lambda_{D-1}, \lambda_{D-2}, \dots, \lambda_2, \lambda_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1}) = \lambda_k Y_{\lambda_{D-1}, \lambda_{D-2}, \dots, \lambda_2, \lambda_1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1}) \quad (60-3)$$

که در آن داریم

$$\lambda_k = l_k (l_k + k - 1). \quad (61-3)$$

با جمع بندی تمام موارد ذکر شده، معادله شرودینگر برای سه ذره یکسان با پتانسیل فرضی $V(r)$ ، به صورت زیر می شود

$$\frac{1}{2m} \left[\frac{1}{r^5} \frac{\partial}{\partial r} r^5 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\bar{L}_5^2}{r^2} \right] \Psi(\vec{r}) + V(r) \Psi(r) = E \Psi(r) \quad (62-3)$$

که در آن تابع موج به شکل زیر است

$$\Psi(\vec{r}) = R(r) Y_{\ell_5, \ell_4, \ell_3, \ell_2, \ell_1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) \quad (63-3)$$

براحتی ملاحظه می شود که قسمت شعاعی عملگر بالا فقط روی $R(r)$ و قسمت زاویه ای عملگر فقط روی $Y(\theta, \dots)$ اثر می گذارد، بنابراین بعد از اثر روی تابع موج داریم:

$$V^2 = -\frac{1}{2m} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{5}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\gamma(\gamma+4)}{r^2} \right] \quad (64-3)$$

که در آن از روابط زیر استفاده کرده ایم

$$\left\{ \begin{array}{l} L_5^2 Y_{\ell_5, \ell_4, \ell_3, \ell_2, \ell_1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = \lambda_5 Y_{\ell_5, \ell_4, \ell_3, \ell_2, \ell_1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) \\ \lambda_5 = \ell_5(\ell_5 + 5 - 1) \ell_5(\ell_5 + 4) \\ \lambda_5 \rightarrow \gamma \\ \lambda_5 = \gamma(\gamma + 4) \end{array} \right. \quad (65-3)$$

در نتیجه حالا فقط باید قسمت شعاعی معادله موج شرودینگر را حل کنیم که در فصل های بعد ارائه خواهند شد.

فصل چهارم

باریونها در ساختار های غیر نسبیتی

۴-۱- تعیین گشتاور مغناطیسی باریون ها

به طور تاریخی نخستین فهم بنیادین از ساختار نوکلئون ها ، بر مبنای مدل بسیار ساده از پتانسیل غیر نسبیتی بود، که از پیشگامان آن می توان به زویک و گلن (۱۹۶۴) اشاره کرد و متعاقباً بوسیله دالتیز ، گرین برگ و... ادامه یافت [15,16]. این مدل دارای این ویژگی است که علیرغم سادگی دارای تنوع و توفیق در تحلیل طیف باریون ها می باشد. اشکالی که به آن وارد است، این است که مدل کوارکی غیر نسبیتی فاقد یک حوزه تئوریکی قوی و اساسی است و بیشتر جنبه پدیدار شناختی دارد، هر چند هنوز تا حد گسترده ای قابل استفاده است. در این مدل اپراتور خلق $b_{u,d,s}^+$ برای هر کوارک معرفی می شود که در آن $\alpha = \{n, v, q\}$. n اعداد کوانتومی مداری و $v = \pm \frac{1}{2}$ معرف جهت گیری اسپینی و q هم طعم کوارک را نشان می دهد، که در این جا خود را به $SU(3)$ محدود می کنیم (u, d, s) که اندیس i به رنگ کوارک ها برمی گردد. حالت ذره ای تنها، از کوارک های سازنده با عمل کردن b^+ روی خلاء تعریف می شود. ضمناً اپراتور های کوارکی در روابط غیر جابجایی زیر صدق می کند.

$$\begin{aligned} \{b_{\alpha i}, b_{\alpha i}^\dagger\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \\ \{b_{\alpha i}^\dagger, b_{\beta j}^\dagger\} &= \{b_{\alpha i}, b_{\alpha i}\} = 0 \end{aligned} \quad (1-4)$$

اگر بررسی مربوط به حالت پایه باشد، در این صورت عدد کوانتومی مداری را صفر در می گیریم .
بنابر این می توانیم α را فقط برای طعم و اسپین در نظر بگیریم یعنی :

$$\{\alpha\} = \{u \uparrow, u \downarrow, d \uparrow, d \downarrow, s \uparrow, s \downarrow\} \quad (2-4)$$

اپراتور های خلق متناظر نیز به صورت قرار دادی با $s_{\nu i}^\dagger, d_{\nu i}^\dagger, u_{\nu i}^\dagger$ نمایش داده می شود که اندیس های اسپین $\nu = \uparrow, \downarrow$ و اندیس i برای رنگ است .

با توجه به اینکه در مدل کوارک غیر نسبیتی، کوارک ها در حالت رنگ یگانه بوده و با سه کوارک تشکیل دهنده باریون بدون رنگ را ساخته اند، حالت پایه باریون ها ، (موج s) به صورت زیر نوشته می شود.

$$|B\rangle = \sum_{\alpha\beta\gamma} \sum_{ijk} B_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{ijk} b_{\alpha i}^\dagger b_{\beta j}^\dagger b_{\gamma k}^\dagger |0\rangle \quad (3-4)$$

و $B_{\alpha\beta\gamma}$ یک تانسور متقارن کلی با ۵۶ مولفه مستقل است که این موارد حالت چند گانه را نمایش می دهند . یک حالت ده تایی و دو حالت هشت تایی و یک حالت یگانه .

ساده ترین ساختار باریون Δ^{++} با بار الکتریکی مثبت دو است. که اسپین آن $S = \frac{3}{2}$ است که آن را به صورت زیر نمایش می دهیم :

$$\left| \Delta_M^{++} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} u_{\uparrow i}^\dagger u_{\uparrow j}^\dagger u_{\uparrow k}^\dagger |0\rangle \quad (4-4)$$

و پروتون و نوترون نیز به صورت زیر نمایش داده می شود :

$$|p \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} [u_{\downarrow i}^\dagger d_{\uparrow j}^\dagger - u_{\uparrow i}^\dagger d_{\downarrow j}^\dagger] u_{\uparrow k}^\dagger |0\rangle \quad (5-4)$$

$$|u \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} [d_{\uparrow i}^{\dagger} u_{\downarrow j}^{\dagger} - d_{\downarrow i}^{\dagger} u_{\uparrow j}^{\dagger}] d_{\uparrow k}^{\dagger} |0\rangle \quad (6-4)$$

حالت دیگر اعضای باریون ها نیز به صورت زیر است :

$$\begin{aligned} |\Lambda \uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{12}} \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} [u_{\uparrow i}^{\dagger} d_{\downarrow j}^{\dagger} - u_{\downarrow i}^{\dagger} d_{\uparrow j}^{\dagger}] s_{\uparrow k}^{\dagger} |0\rangle \\ |\Sigma_{\uparrow}^0\rangle &= \frac{1}{6} \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} [s_{\uparrow i}^{\dagger} d_{\downarrow j}^{\dagger} u_{\uparrow k}^{\dagger} + s_{\uparrow i}^{\dagger} d_{\uparrow j}^{\dagger} u_{\downarrow i}^{\dagger} - 2s_{\downarrow i}^{\dagger} d_{\uparrow j}^{\dagger} u_{\uparrow i}^{\dagger}] |0\rangle \\ |\Sigma_{\uparrow}^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} [s_{\downarrow i}^{\dagger} u_{\uparrow j}^{\dagger} - s_{\uparrow i}^{\dagger} u_{\downarrow j}^{\dagger}] u_{\uparrow k}^{\dagger} |0\rangle \\ |\Sigma_{\uparrow}^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} [s_{\uparrow i}^{\dagger} d_{\downarrow j}^{\dagger} - s_{\downarrow i}^{\dagger} d_{\uparrow j}^{\dagger}] d_{\uparrow k}^{\dagger} |0\rangle \quad (7-4) \\ |\Xi_{\uparrow}^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} [s_{\downarrow i}^{\dagger} u_{\uparrow j}^{\dagger} - s_{\uparrow i}^{\dagger} u_{\downarrow j}^{\dagger}] s_{\uparrow k}^{\dagger} |0\rangle \\ |\Xi_{\uparrow}^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} [s_{\uparrow i}^{\dagger} d_{\downarrow j}^{\dagger} - s_{\downarrow i}^{\dagger} d_{\uparrow j}^{\dagger}] s_{\uparrow k}^{\dagger} |0\rangle \end{aligned}$$

با توجه به متعامد بودن حالت باریون ها ثابت بهنجارش از شرط زیر تعیین می شود.

$$\langle B_m | B_n \rangle = \delta_{\min} \quad (8-4)$$

گشتاور دوقطبی باریون ناشی از دو عامل گشتاور دو قطبی ذاتی کوارک های تشکیل دهنده و حرکت مداری کوارک ها است، اعضای هشت تایی باریونی را مورد بررسی قرار می دهیم که برای آنها، $J^{\pi} = \frac{1}{2}^{+}$ میباشد. در مدل ساده مورد قبول بحث ما قسمت فضایی تابع موج سه کوارک در حالت $\ell = 0$ ، نسبت به حرکت کوارک ها بین همدیگر متقارن است. یعنی حرکت مداری کوارک ها سهمی در گشتاور دو قطبی مغناطیسی نخواهد داشت. سهم گشتاور مغناطیسی هادرون ها ناشی از اسپین ذاتی کوارک ها از این واقعیت ناشی می شود که، وابسته به اسپین ذاتی هر ذره، دو قطبی مغناطیسی ذاتی وجود دارد که بوسیله رابطه زیر تعریف می شود:

$$\hat{\mu} = g\hat{s}\mu_D \quad (9-4)$$

که \hat{s} عملگر اسپین ذاتی است. گشتاور دوقطبی بر حسب واحدهای μ_D اندازه گیری می شود به طوری که اگر q بار کوارک و m_q جرم آن باشد در سیستم آحاد SI ، کمیت μ_D عبارت است از :

$$\mu_D = \frac{q\hbar}{2m_q} \quad (10-4)$$

g همان نسبت ژیرومغناطیسی می باشد که نسبت بین گشتاور دوقطبی مغناطیسی و اسپین ذرات است. برای ذرات دیراک (ذرات بدون ساختار داخلی) با اسپین ذاتی $\frac{1}{2}$ مقدار $g = 2$ می باشد. در عمل هیچ ذره دیراک خالصی مشاهده نشده است. مثلاً، حتی الکترون ها و میون ها می توانند فوتون های مجازی گسیل یا جذب کنند. این فرآیندهای مجازی باعث گشتاور دوقطبی مغناطیسی غیرعادی شده از جمله برای الکترون $g = 2 \times 1.001159652193$ و برای میون $g = 2 \times 1.00115965923$ به دست می آید. چون کوارک یک ذره بنیادی است می تواند به عنوان ذره دیراک در نظر گرفته شود. رابطه بین اسپین و گشتاور مغناطیسی ذاتی بوسیله رابطه (10-4) با $g = 2$ داده می شود چون جرم کوارک را نمی دانیم استنتاج مقدار μ از هر راه ساده ای امکان پذیر نیست. اگر فرض کنیم جرم کوارک های d, u مساوی باشند رابطه بین گشتاور دوقطبی مغناطیسی آنها از نسبت بار آنها حاصل خواهد شد که نتیجه زیر را خواهیم داشت :

$$\mu_u = -2\mu_d \quad (11-4)$$

بعداً خواهیم دید که رابطه فوق، برای رسیدن به نظریه ای که مقادیر گشتاور دوقطبی مغناطیسی ذاتی کوارک های d, u را بدست بدهد، مفید می باشد.

با توجه به اینکه در سیستم یونیک کار میکنیم، گشتاور مغناطیسی هر کوارک با رابطه استاندارد دیراک به صورت زیر خواهد شد

$$\mu_q = \frac{e_q}{2m_q} \quad (12-4)$$

که در آن $e_d = e_s = -\frac{e}{3}, e_u = \frac{2e}{3}$ و گشتاور مغناطیسی باریون ها نیز از رابطه زیر تعیین

می شود :

$$\mu_B = \langle B \uparrow | m_z | B \uparrow \rangle \quad (13-4)$$

اپراتور گشتاور مغناطیسی غیر نسبیتی به صورت زیر معرفی می شوند :

$$m_i = \sum_{q \dots} \mu_q \langle v' | \vec{\sigma} | v \rangle b_{qv',i}^\dagger b_{qv,i} \quad (14-4)$$

اندیس های q مربوط به طعم و v, v' مربوط به اسپین و i مربوط به رنگ است. بنابراین

نتیجه برای پروتون و نوترون به صورت زیر است :

$$\mu_p = \frac{4}{3} \mu_u - \frac{1}{3} \mu_d \quad (15-4)$$

$$\mu_n = \frac{4}{3} \mu_d - \frac{1}{3} \mu_u$$

در حالت تقارن ایزو اسپینی کامل با $m_u = m_d$ در می یابیم:

$$\frac{\mu_p}{\mu_n} = -\frac{3}{2} \quad (16-4)$$

که با نتایج تجربی مشاهده شده $\frac{\mu_p}{\mu_n} = 1.46$ نزدیک است.

اگر رابطه بالا را بر حسب گشتاور مغناطیسی کوارک ها بنویسیم در این صورت:

$$\mu_p = \frac{3}{2} \mu_u = \frac{e}{2m_u} = 2.79 \frac{e}{2M_p} \quad (17-4)$$

در این صورت

$$m_{u,d} = 0.34 \text{ GeV} \quad (18-4)$$

خواهد شد.

فهرست کاملی از گشتاورهای مغناطیسی باریون ها در جدول (1-4) داده شده است. همان

گونه که در جدول ملاحظه می شود گشتاور مغناطیسی باریون های مختلف در دو ستون A, B

داده شده است که ستون A مربوط به حالتی است که جرم کوارک های d, u یکسان در نظر گرفت. شده است. در حالیکه در ستون B گشتاور کوارک ها و نسبت آن ها مد نظر بوده است.

جدول ۴-۱- گشتاور مغناطیسی باریونها

گشتاور مغناطیسی	$[e\hbar/2M_p c]$	مدل کوارکی	A	B
μ_p	2.79284739(6)	$\frac{4\mu_u - \mu_d}{3}$	2.79	2.79
μ_n	-1.9130428(5)	$\frac{4\mu_d - \mu_u}{3}$	-1.86	-1.91
μ_Λ	-0.613(4)	μ_s	-0.93	-0.61
μ_{Σ^+}	2.46(1)	$\frac{4\mu_u - \mu_s}{3}$	2.79	2.67
$ \mu_{\Sigma^0 \Lambda} $	1.61(8)	$\frac{ \mu_u - \mu_d }{\sqrt{3}}$	1.61	1.63
μ_{Σ^-}	-1.16(2)	$\frac{4\mu_d - \mu_s}{3}$	-0.93	-1.09
μ_{Ξ^0}	-1.25(1)	$\frac{4\mu_s - \mu_u}{3}$	-1.86	-1.44
μ_{Ξ^-}	-0.651(3)	$\frac{4\mu_s - \mu_d}{3}$	-0.93	-0.49

البته باید توجه شود که کوارک s نسبت به d, u دارای جرم بیشتری است و به راحتی نمی توان از روشی که برای بدست آوردن رابطه بین μ_u, μ_d برای کوارک های d, u انجام گرفت، استفاده کرد. به عبارتی برای هر یک از اعضای هشت تایی، یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی شناخته شده است. در این مدل گشتاور دو قطبی همه آنها برحسب گشتاور دوقطبی مغناطیسی سه کوارک می باشد. روش حداقل مربعات برای استنتاج مقادیر سه کوارک، از اطلاعات هشت باریون شناخته شده، مورد استفاده قرار می گیرد. برای انجام این روش ابتدا باید گشتاور دو قطبی مغناطیسی باریون را برحسب جملاتی از سه کوارک، همانطور که برای نوکلئون ها انجام گرفت، نوشت. هرچند

تابع موج کوارکی کامل اعضاء هشت تایی با $s < 0$ ، که برای پروتون نوشته شده است، را نداریم با این وجود می توان با توجه به محتوای کوارکی باریون های موجود تعداد کوارک های هر طعم با اسپین بالا و پایین را برآورد کرد. به ویژه برای باریون های شگفتی که تنها حامل دو نوع طعم، مختلف مانند s, u یا s, d می باشند آسان تر است. مثلاً باریون Σ^+ از دو کوارک s, u ساختار شده است در مقایسه با پروتون، uud ، ملاحظه می شود که تفاوت محتویات کوارکی این دو باریون تنها در جاگذاری کوارک d در پروتون با کوارک s در Σ^+ می باشد. چون همه اعضاء هشت تایی، از نظر اسپینی و طعمی ترکیب تقارنی یکسانی دارند پروتون و Σ^+ غیر از جانشانی کوارک s به جای d ، باید تابع موج بسیار شبیه به هم داشته باشند. از این رو گشتاور دوقطبی مغناطیسی باریون Σ^+ بوسیله عبارت زیر بدست می آید:

$$\mu_{\Sigma^+} = \frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_s \quad (19-4)$$

به همین ترتیب، محتوای کوارکی Σ^- ، dds می باشد که در مقایسه با نوترون، ملاحظه می شود که با جانشانی کوارک u در نوترون با کوارک s ، ترکیبی از کوارک s را داریم که همان ذره Σ^{--} می باشد. در نتیجه داریم:

$$\mu_{\Sigma^-} = \frac{4}{3}\mu_d - \frac{1}{3}\mu_s \quad (20-4)$$

به روش مشابه گشتاور دوقطبی مغناطیسی برای دو عضو $\Xi^-(dss), \Xi^+(uss)$ از مجموعه هشت تایی باریونی با $s = -2$ می تواند محاسبه شود که خواهیم داشت:

$$\mu_{\Xi^+} = -\frac{1}{3}\mu_d + \frac{4}{3}\mu_s \quad (21-4)$$

$$\mu_{\Xi^-} = -\frac{1}{3}\mu_u + \frac{4}{3}\mu_s$$

برای دو عضو باقی مانده هشت تایی باریونی، Λ_8 و Σ^0 محتوای کوارکی uds می باشد. در این جا به دلیل آنکه سه طعم متفاوت کوارکی وجود دارد به یک رویکرد غیر متعارف به منظور بیان

گشتاور دو قطبی مغناطیسی این دو ذره بر حسب سه کوارک نیاز داریم. برای تعیین تابع موج آنها ، از اختلاف ایزواسپینی آنها استفاده می کنیم. برای این منظور ، چون کوارک s یک ذره شبه اسکالر است که در ملاحظات ایزواسپینی وارد نمی شود می توان از آن تا موقعیت مناسبی چشم پوشی کرد. ذره Λ_8 یک یکتایه ایزواسپینی است یعنی ذره Λ دیگری با حالت باری متفاوت که ایزواسپین $I = 0$ داشته باشد ، وجود ندارد. برای این منظور به تابع موجهای η_0, π^0 که از کوارک های d, u دارای $I_0 = 0$ بوده و مخلوطی از حالت های ایزواسپینی $0, 1$ می باشد، توجه می کنیم. برای نشان دادن قسمت $I = 0$ ، به یک ترکیب خطی پادمقارن از دو آرایش ممکن کوارک های d, u نیاز داریم :

$$|I = 0, I_0 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |u(1)d(2)\rangle - |d(1)u(2)\rangle \} \quad (22-4)$$

این دو کوارک نمی توانند اسپین های بالا داشته باشند زیرا در این صورت تحت مبادله همزمان اسپین و طعم یک آرایش پاد مقارن خواهیم داشت. پس تنها احتمال به صورت زیر خواهد بود :

$$|I = 0, I_0 = 0; s = 0, m_s = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} &|u(1)\uparrow d(2)\downarrow\rangle - |d(1)\uparrow u(2)\downarrow\rangle \\ &+ |d(1)\downarrow u(2)\uparrow\rangle - |u(1)\downarrow d(2)\uparrow\rangle \end{aligned} \right\} \quad (23-4)$$

باید دقت کرد که اسپین کلی دو کوارک ، بدلیل نتیجه ای از نیازهای تقارنی ، صفر می باشد. حال

می توانیم کوارک s را جفت کنیم و یک سیستم اسپینی $\frac{1}{2}$ تشکیل دهیم :

$$|I = 0, I_0 = 0; s = 0, m_s = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} &|u(1)\uparrow d(2)\downarrow\rangle - |d(1)\uparrow u(2)\downarrow\rangle \\ &+ |d(1)\downarrow u(2)\uparrow\rangle - |u(1)\downarrow d(2)\uparrow\rangle \end{aligned} \right\} |s(3)\uparrow\rangle \quad (24-4)$$

احتمالاً تابع موج با در نظر گرفتن سومین کوارک خاصیت پاد تقارنی را ارضا نخواهد کرد با این حال برای محاسبه گشتاور دو قطبی مغناطیسی ، پادمقارن بودن لازم نیست، بلکه تنها تعداد کوارک های هر طعم با در نظر گرفتن اسپین آنها (بالا یا پایین) لازم بوده و از پاد تقارن سازی بین

سه کوارک رابطه فوق ، مستقل است. از ساختار تابع موج آشکار است که سهم کوارک های d, u صفر هستند زیرا تعداد یکسانی از آنها با اسپین های بالا و پایین وجود دارد. پس می توان گفت گشتاور مغناطیسی باریون Λ برابر μ_s است زیرا جمع اسپینی d, u جفت شده در Λ مقدار صفر را می دهد، یعنی :

$$\mu_{\Lambda} = \mu_s = -\frac{e}{6m_s} = -0.61 \frac{e}{2M_p} \quad (25-4)$$

و در این صورت

$$m_s = 0.51 GeV \quad (26-4)$$

ایزواسپین Σ^0 ، برابر 1 می باشد چرا که عضوی از سه تایه ایزواسپینی $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$ می باشد. تعیین تابع موج Σ^0 مانند آنچه که برای Λ_8 انجام دادیم کار بسیار دشوار و پیچیده ای است. چرا که کوارک های d, u در این جا با اسپین کلی 1 جفت می شوند. ممان دو قطبی مغناطیسی برای این باریون شناخته شده نیست. مد واپاشی زیر را می توان در نظر گرفت :

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma \quad (27-4)$$

واپاشی Σ^0 در این واکنش شبیه گذار دو قطبی مغناطیسی است و احتمال گذار متناسب است با $|\mu_{\Sigma^0 \rightarrow \Lambda}|^2$ که مقدار عنصر ماتریسی عملگر گذار دو قطبی مغناطیسی ، $0(M)$ ، عبارت است از

$$\mu_{\Sigma^0 \rightarrow \Lambda} = \langle \Sigma^0 | 0(M) | \Lambda \rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} (\mu_u - \mu_d) \quad (28-4)$$

مقدار این عنصر ماتریسی به طور تجربی برابر ، $1.59 \pm 0.09 \mu_N$ مرجع تعیین شده است که μ_N مگنتون هسته ای است. در صورتی که گشتاور دو قطبی مغناطیسی این هشت عضو به صورت تجربی به دست آیند می توان گشتاور دو قطبی مغناطیسی سه کوارک را بدست آورد.

باید توجه شود که برای بررسی های فوق باید چند تصحیح را در نظر گرفت . یکی از فرض هایی را که برای تعیین تابع موج اعمال کرده ایم این است که همه مولفه ها را تنها در حالت $l=0$ در

نظر گرفته ایم. در صورتی که گشتاور زاویه ای مداری در اندرکنش های بین کوارک ها ، پایسته، بماند، این فرض درست است. ولی در واقع پیکربندی حالت پایه هشت تایی باریونی بصورت مخلوطی از حالت های با $l > 0$ نیز هست یعنی به صورت خالص $l = 0$ نیست و این مستلزم اعمال تصحیحاتی در مدل فوق است.

۴-۲- روش های محاسبه جرم باریون ها

اولین و ساده ترین مدلی که برای جرم باریون ها ارائه شده ، مدلی است که در آن باریون متشکل از سه ذره ساکن بوده و فقط برهم کنش اسپینی منظور می گردد [17]. چنانچه $SU(3)$ یک تقارن کامل باشد تمامی باریونهای هشت گانه دارای وزن یکسان خواهند بود . اما تقارن آنها کامل نیست . این را به این واقعیت نسبت می دهیم که کوارک s سنگین تر از d, u است . اما در باریونها نیز مشاهده می کنیم که Δ, Σ جرم مشابه دارند و Δ ها به پروتون نزدیکترند . برای این منظور یک سهم بسیار مهم اسپین - اسپین وجود دارد (ساختار بسیار ریز) و آن را متناسب با حاصلضرب عددی اسپین ها و متناسب با معکوس حاصلضرب جرم ها فرض می کنیم . تنها تفاوت این است که این بار باید سه جفت اسپین را در نظر بگیریم . یعنی جرم هر باریون به صورت زیر تعیین می شود

$$M(baryon) = m_1 + m_2 + m_3 + A' \left[\frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{m_1 m_2} + \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3}{m_1 m_3} + \frac{\vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3}{m_2 m_3} \right] \quad (29-4)$$

در اینجا A' یک مقدار ثابت است که با بدست آوردن یک پردازش بهینه از داده ها آن را تنظیم می کنیم. هنگامیکه جرم هر سه کوارک برابر باشد حاصلضرب اسپین بسیار ساده است یعنی

$$S^2 = (S_1 + S_2 + S_3)^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3) \quad (30-4)$$

در این حالت :

$$S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3 = \frac{\hbar^2}{4} \left[S(S+1) - \frac{9}{4} \right] = \begin{cases} \frac{3}{4} \hbar^2 & S = \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} \hbar^2 & S = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (31-4)$$

خواهد شد ، بنابراین جرم نوکلئونی نوترون و پرتون به شرح زیر است :

$$\begin{aligned} M_N &= 3m_u - \frac{3}{4} \frac{\hbar^2}{m_u^2} A' \\ M_\Lambda &= 3m_u + \frac{3}{4} \frac{\hbar^2}{m_u^2} A' \\ M_\Omega &= 3m_s + \frac{3}{4} \frac{\hbar^2}{m_s^2} A' \end{aligned} \quad (32-4)$$

در واقع در حالت دهگانه اسپین همگی موازی هستند :

$$(\bar{S}_1 + \bar{S}_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 S_2 = 2\hbar^2 \quad (33-4)$$

و برای حالت هشتگانه :

$$S_1 S_2 = S_1 S_3 = S_2 S_3 = \frac{\hbar^2}{4} \quad (34-4)$$

برای باریون Σ

$$M_\Sigma = 2m_u + m_s + \frac{\hbar^2}{4} A' \left[\frac{1}{m_u^2} + \frac{2}{m_u m_s} \right] \quad (35-4)$$

و برای باریون E

$$M_E = m_u + 2m_s + \frac{\hbar^2}{4} A' \left[\frac{1}{m_u m_s} + \frac{1}{m_s^2} \right] \quad (36-4)$$

و به همین طریق می توان جرم سایر باریونها را بدست آورد که با استفاده از یک پردازش مناسب

مقدار $A' = 50 \frac{Mev}{c^2}$ بدست آمده است .

مدل دیگری توسط دالیتز در سال ۱۹۶۷، و با اندکی تغییر و تکامل توسط فایمن، در سال ۱۹۶۸

ارائه شد که بر طبق این مدل سه ذره متحرک، با برهم کنش نوسانی در نظر گرفته میشوند و

همیلتونی سیستم به صورت زیر معرفی می گردد [18,19]

$$H = \sum_{i=1}^3 \left(m_i + \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(\vec{r}_{ij}) \quad (37-4)$$

که در آن $V(\vec{r}_{ij})$ به صورت زیر است

$$V(\vec{r}_{ij}) = \frac{k}{2} r_{ij}^2 \quad (38-4)$$

و $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ فاصله نسبی ذرات است. با معرفی سه مختصه زیر

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) \\ \vec{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \\ \vec{\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \end{aligned} \quad (39-4)$$

و در نظر نگرفتن جرم سکون ذرات، هامیلتونی به صورت زیر می شود

$$H_0^{int} = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{3k}{2} \rho^2 + \frac{p_\lambda^2}{2m} + \frac{3k}{2} \lambda^2. \quad (40-4)$$

که این هامیلتونی معرف دو نوسانگر جدا از هم می باشد که بسامد نوسان هر کدام از رابطه زیر بدست می آید

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad (41-4)$$

وانرژی کل سیستم نیز از رابطه زیر بدست می آید

$$E_N = E_0 + N \omega_0 \quad (42-4)$$

که E_0 انرژی حالت پایه بوده و $N = N_\rho + N_\lambda$ است که $N_{\rho,\lambda} = 0, 1, 2, \dots$ اندازه حرکت

زاویه ای کل $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ است که \vec{S} مجموع اسپین کوارک ها می باشد. یعنی $\vec{S} = \sum \vec{s}_i$

و $\vec{L} = \vec{L}_\rho + \vec{L}_\lambda$. اندازه حرکت های زاویه ای متناظر با $\vec{\rho}, \vec{\lambda}$ می باشند و در این حالت پاریتته

نیز از رابطه $P = (-1)^{l_\rho + l_\lambda}$ بدست می آید. فرکانس ω_0 از اختلاف جرم های تجربی N^* به

حالت پایین ترین پاریته منفی و مقایسه آن با جرم متوسط نوکلئون و $\Delta = (1232)$ به دست می آید.

پوسته P ، چندین حالت N^* را نشان می دهد که دارای اسپین های $\frac{5^-}{2}$ ، $\frac{3^-}{2}$ ، $\frac{1^-}{2}$ هستند و متوسط جرم این حالتها $\bar{M}^* = 1.6 GeV$ است. برای نوکلئون و Δ داریم

$$\bar{M} = \frac{1}{2}(M_N + M_\Delta) = 1.1 GeV \quad (43-4)$$

و با استفاده از فرض $(\hbar = 1)$

$$\omega_0 = \bar{M}^* - \bar{M} = 0.5 MeV \quad (44-4)$$

و تابع موج سیستم نیز به صورت زیر است

$$\Psi_0 = \left(\frac{m\omega_0}{\pi}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m\omega_0}{2}(\vec{\rho}^2 + \vec{\lambda}^2)\right] \quad (45-4)$$

شعاع باری از رابطه زیر بدست می آید

$$\langle r^2 \rangle = (m\omega_0)^{-1} \quad (46-4)$$

پس از آن مدلی توسط گروه RGG در سال ۱۹۷۵ ارائه شد [20] که بر فرضیات اساسی زیر بنا شده بود: اول آنکه بررسی در حالت غیر نسبیتی است و تقارن طعم - اسپینی $SU(6)$ وجود دارد، دوم اینکه همانند انشعاب طعم فقط از طریق جرم کوآرک ها اتفاق بیفتد. سوم وجود نیروهای نگهدارنده با برد زیاد مستقل از طعم و اسپین باشد. و چهارم آنکه برهم کنش های وایسته به طعم و اسپین با برد کم فقط از طریق مبادله یک گلوئون بین کوآرک ها بوجود می آید. برهم کنش فوق ریز بصورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$V_{ij} = -\frac{2\alpha_s}{3r} + \frac{\alpha_s}{3m_i m_j} \left[\frac{\vec{P}_i \cdot \vec{P}_j}{r} + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{P}_i)(\vec{r} \cdot \vec{P}_j)}{r^3} \right] + \frac{\pi\alpha_s}{3} \delta^3(\vec{r}) \left(\frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{m_j^2} \right) \\ + \frac{\alpha_s}{3m_i m_j} \left[\frac{8\pi}{3} \delta^3(\vec{r}) \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j + \frac{3(\vec{s}_i \cdot \hat{r})(\vec{s}_j \cdot \hat{r}) - \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j}{r^3} \right] \quad (47-4) \\ + \frac{\alpha_s}{r^3} \left[\frac{\vec{r} \times \vec{P}_i \cdot \vec{s}_i}{m_i^2} - \frac{\vec{r} \times \vec{P}_j \cdot \vec{s}_j}{m_j^2} + \frac{2}{m_i m_j} (\vec{r} \times \vec{P}_i \cdot \vec{s}_j - \vec{r} \times \vec{P}_j \cdot \vec{s}_i) \right]$$

در این صورت هامیلتونی سیستم سه جسمی به صورت زیر در می آید..

$$H = U_{conf} + \sum_{i=1}^3 \left(m_i + \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} \right) + \sum_{i<j} V_{ij} \quad (48-4)$$

یا

$$H = H^{(0)} + \Delta V \quad (49-4)$$

که در آن

$$H^{(0)} = U_{conf} + 3m + \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{p}_i^2}{2m} \quad (50-4)$$

و

$$H^{(0)} |\Psi_B\rangle = M_0 |\Psi_B\rangle \quad (51-4)$$

و جرم باریون می شود.

$$M_B = M_0 + \frac{16\pi}{9m^2} \alpha_s \langle \Psi_B | \sum_{i<j} \delta^3(\vec{r}_{ij}) \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j | \Psi_B \rangle \quad (52-4)$$

که در آن

$$\sum_{i<j} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j = \frac{\vec{S}^2}{2} - \frac{9}{8} \quad (53-4)$$

و در این حالت تفاضل دو جرم نوکلئون و ذره دلتا می شود

$$M_\Delta - M_N = \frac{4}{3} \alpha_s \omega_0 \left(\frac{\omega_0}{2\pi m} \right) 1/2 \quad (54-4)$$

حال مدل ارائه شده توسط اسکور- کارل را در نظر می گیریم [21] در این مدل هامیلنونی سیستم به صورت زیر معرفی می شود

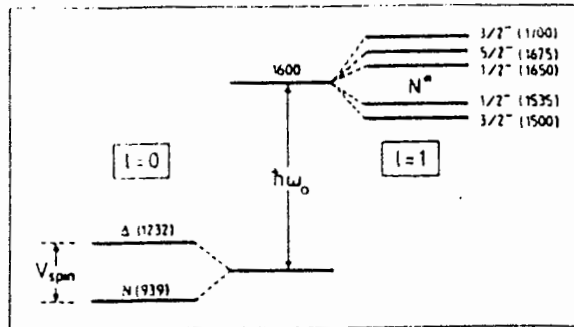
$$H = \sum_{i=1}^3 \left(m_i + \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} \right) + \frac{k}{2} \sum_{i < j} \vec{r}_{ij}^2 + \sum_{i < j} \left(U(\vec{r}_{ij}) + V_{ij}^{hyp} \right) \quad (55-4)$$

که در آن

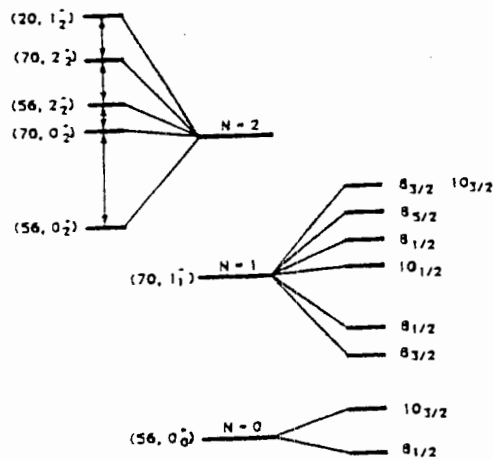
$$V_{ij}^{hyp} = \frac{2\alpha_s}{3m_i m_j} \left[\frac{8\pi}{3} \delta^3(\vec{r}) \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j + \frac{3(\vec{s}_i \cdot \hat{r})(\vec{s}_j \cdot \hat{r}) - \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j}{r^3} \right] \quad (56-4)$$

رمز موفقیت پدیدار شناسی مدل اسکور- کارل این است که برهم کنش اسپین - مدار حذف و تنها جملات اسپین - اسپین جمله. تانسوری برهم کنش باقی می ماند. هنگامی که اندازه حرکت زاویه ای صفر است تنها برهم کنش اسپین - اسپین در زوج کوآرک ها باقی می ماند و جمله تانسوری فقط موقعی عمل می کند که اندازه حرکت زاویه ای زوج کوآرک غیر صفر باشد. طبق شکل ۲-۸ ملاحظه می شود که در این حالت به ازای $N = 2$ و در ساختار $su(3)$ دارای واگنی پنج گانه می باشیم. حذف جمله برهم کنش اسپین - مدار، در واقع باعث می شود که طیف تشدید باریون ها تا حد معینی بهبود پیدا کند.

البته مدل اسکور- کارل به طور شایسته ای طیف باریون ها را به صورت نظام مند توصیف می کند ولی در آن استثنائات قابل توجه نیز وجود دارد. هر چند که قسمت پدیدار شناختی مربوط به مدل اسکور- کارل مربوط به باریون های بدون کوآرک s^3 می باشد و این نتایج از نتایج پراکندگی پیون نوکلئون به همراه ذرات تولید شده در این پراکندگی بدست می آید. در شکل ۴-۱ حالت پاریده منفی $N = 1$ و در شکل ۴-۲ حالت پاریده مثبت $N = 2$ نمایش داده شده اند. مدل اسکور- کارل حالت های بیشتری را نسبت به آن چه که واقعاً مشاهده می گردند پیش بینی می کند.



شکل ۱-۴ حالت پاریته منفی $N = 1$ نوکلئون



شکل ۲-۴ حالت پاریته مثبت $N = 2$ نوکلئون

بطور خلاصه می توان گفت در تحلیل اولیه اسکور-کارل موارد زیر به عنوان اساس در نظر گرفته شده است.

۱- فرکانس انتخاب شده برای اختلاف ترازها جرم مرتبه صفر $N = 1$ از حالات چندگانه $(70, 1_1^-)$ ، $1610 MeV$ انتخاب شده است که $\omega_0 = 0.52 GeV$ است.

۲- جرم کوارک های d, u به صورت زیر انتخاب شده است.

$$m = 0.4 GeV \quad (57-4)$$

همچنین نسبت جرم های d, u به کوارک های s نیز برابر مقدار زیر انتخاب شده است.

$$\frac{m}{m_s} = 0.6 \quad (58-4)$$

و این بزرگتر از مقداری است که گشتاور مغناطیسی را باز تولید می کند.

۳- در این مدل قدرت برهم کنش فوق ریز الزاماً بوسیله جرم $N = \Delta$ مشخص می گردد که در حدود $300 MeV$ است و این جرم مستلزم آن است که α_s کمی بزرگتر از 0.9 باشد.

۴- جمله اختلالی غیر هماهنگ فقط در حالت $N = 2$ عمل می کند و این امر باعث می شود که واگنی در این حالت از بین برود و در ضمن شکاف میان $N = 1$ و $N = 2$ نیز از $0.5 GeV$ کمتر شود. در حالیکه ما انتظار داریم این فاصله در $0.52 GeV$ باشد.

یک نتیجه جالب از برهم کنش فوق ریز ، تابع موجی است که به صورت ترکیبی از دو حالت $N = 2$, $N = 0$ نوشته می شود. با محاسبات تابع موج نوکلئون به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{aligned} |N\rangle = & 0.90 |N(56, 0_0^+)\rangle - 0.34 |N(56, 0_2^+)\rangle \\ & - 0.27 |N(70, 0_2^+)\rangle - 0.061 |N(70, 2_2^+)\rangle \end{aligned} \quad (59-4)$$

و این بدان معنی است که احتمال پیدا شدن نوکلئون در حالت پایه $N = 0$ برابر 80% است در حالی که احتمال پیدا شدن در حالت های برانگیخته 20% است.

فصل پنجم

بررسی باریونها با معادله شرودینگر

۵-۱- مقدمه

تمامی باریون های شناخته شده حالت های سه کوارکی (qqq) هستند و هریک از این حالت ها یک یگانه رنگ $SU(3)$ است که امکان دارد حالت کاملاً پادمتقارنی از سه رنگ داشته باشیم. از آنجا که کوارک ها فرمیون هستند ، تابع حالت برای هر باریون باید تحت جابجایی هر دو کوارک با جرم مساوی، در حد تقارن ایزو اسپینی کوارک های (u) و (d) ، پاد متقارن باشد. بدون شک درستی مدل کوارکی سازنده (CQM) در توصیف جرم های هادرون ها بحث برانگیز است. با این وجود در محدوده ای که این مدل معتبر است بررسی آن مفید می باشد. نتایج حاصل از این مدل با داده های تجربی همخوانی دارد و این امکان را فراهم می آورد تا این مدل برحسب مدل کاملتری قابل توجیه باشد. تلاش های نظری بسیاری برای محاسبه جرم باریون ها در حضور یک پتانسیل نگهدارنده صورت گرفته است. اغلب طیف باریونی توسط مدل های کوارکی سازنده مختلف (CQM)

توصیف می شود. ویژگی برجسته مدل این است که پتانسیل نگهدارنده، نه تنها در حضور یک قسمت نگهدارنده با برد بلند، بلکه در حضور پتانسیل کوتاه برد دیگری، که یک پتانسیل کولمبی است و به بارنگ بستگی دارد، مشخص می شود. پتانسیل های بین کواریکی به طعم بستگی دارد و شامل جملات وابسته به اسپین $H_s(x)$ ایزواسپین $H_I(x)$ و اسپین-ایزواسپین $H_{sl}(x)$ می باشند که حائز اهمیت هستند [22,23]. برهم کنش کاملی که مورد استفاده قرار می گیرد با رابطه زیر بیان می شود [24]:

$$H(x) = V(x) + H_s(x) + H_I(x) + H_{sl}(x). \quad (1-5)$$

در این رابطه $V(x)$ پتانسیل نگهدارنده است که در مقاله [25] حل شده است. اما در مدل ما پتانسیل نگهدارنده به واقعیت نزدیک تر است و در آن $H_s + H_I + H_{sl}$ یک برهم کنش غیر نگهدارنده است که در این کار در نظر گرفته شده است.

پتانسیل با بستگی طعمی دارای اهمیت بیشتری است. وجود انگیزه های متفاوتی برای معرفی جمله ای با بستگی طعمی در برهم کنش کواریکی وجود دارد. هر چند روش مشابهی برای طیف باریونی وجود دارد که با استفاده از یک تقریب فوق مرکزی دقیق، برای حل عددی معادله سه جسمی غیر نسبیاتی توصیف کننده باریون ها به کار می رود [26,27].

۵-۲- پتانسیل برهم کنش

پتانسیل های نگهدارنده می توانند به هر شکلی باشند. (برای مثال خطی، لگاریتمی، با توان پایین و غیره). در بسیاری از کاربردهای عملی، طیف حاصل از یک نوسانگر هماهنگ، چندان با طیف حاصل از پتانسیل هایی مانند کولنی بعلاوه پتانسیل های خطی که (CQM) آن را تأیید می کند تفاوتی ندارد [29,41]. از آنجایی که مدل های نوسانگر هماهنگ دارای خواص ریاضی جالب توجهی هستند، از این مدل ها اغلب به عنوان پتانسیل نگهدارنده استفاده می شود. کارل و ایسگور (*Karl, Isgur*) از چنین پتانسیل نگهدارنده ای استفاده نموده اند. از طرف دیگر جمله کولنی به

تنهایی کافی نیست چرا که در این حالت کوارک ها می توانند در سیستم یونیده شوند. در این فصل، پتانسیل به صورت ترکیبی از یک جمله کولنی مانند $\left(\frac{-c}{x}\right)$ ، یک جمله نگهدارنده خطی (bx) و جمله دیگری به فرم (αx^2) (پتانسیل H.0) در نظر گرفته شده است [29,30]. پتانسیل متشکل از دو جمله اول بیشتر مورد بررسی قرار گرفته اند. در این فصل طرحی را برای بررسی باریون ها ارائه داده ایم که در برگیرنده نیروهای سه جسمی بین سه کوارک است. مدل ما ترکیبی از محاسبات (QCM) شبکه و برهم کنش کارل و ایسگور است [40]. مدل کارل و ایسگور مثال مهمی از رهیافت پتانسیلی برای ساختار داخلی باریون است. یکی از ویژگی های این مدل قطری ساختن از یک پایه نوسانگر هماهنگ به صورت تحلیلی است. محاسبات زیاد وجود دارند که معادله شرودینگر سه کوارکی را بطور عددی حل می کنند. برای این منظور پتانسیل زوج کوارک- کوارک اغلب از پتانسیل کوارک (سنگین) - پادکوارک نتیجه می شود [31,42]. زیرا از وابستگی به رنگ نتیجه می شود

$$v_{qq} = \frac{1}{2} v_{q\bar{q}}$$

عبارتی که اغلب برای پتانسیل مورد استفاده قرار می گیرد، عبارت است از [32,33,34]:

$$V = \sum_{ij} \left(-\frac{1}{2} K r_{ij}^2 + \frac{\alpha_s}{r_{ij}} + b r_{ij} \right) + C$$

که $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ فاصله بین زوج کوارک- کوارک است.

در این رابطه هر دو جمله نگهدارنده خطی و کولنی وار حضور دارند که با تحلیل طیف باریونی همخوانی دارد. حذف قسمت نوسانی بیان می کند که تابع موج به عنوان یک پایه ریاضی مناسب مورد استفاده قرار می گیرد. در این جا تعیین ثابتها با احتساب ثابت ها به عنوان پارامترهای آزاد انجام می شود. با این وجود نتایج حاصل چندان با نتایج مدل کارل و ایسگور متفاوت نیستند.

در این فصل پتانسیل های برهم کنش فوق ریز را نیز اضافه کرده ایم. در این فصل پتانسیل های $H_S(x)$, $H_I(x)$ و $H_{SI}(x)$ این ترکیبات به طیفی می انجامد که در مقایسه با طیف های اراند شده در سایر مقالات به نتایج تجربی نزدیک تر است. بنابراین، پتانسیل برهم کنش نگهدارنده به صورت زیر خواهد بود

$$V(x) = ax^2 + bx - c/x. \quad (2-5)$$

که در آن ضرایب a و b و c ضرایب ثابت و نامشخص هستند از خصوصیات خوب این پتانسیل آن است که می توان معادله شرودینگر مربوط به آن را به صورت تحلیلی حل کرد که با نتایج تجربی در توافق خوبی می باشد. پتانسیل غیرنگهدارنده مربوط به برهم کنش اسپین - اسپین به فرم تابع گاوسی است که به صورت زیر داده شده است [24].

$$H_S = \sum_{i,j=1,i \neq j}^3 A_S \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_S} \right]^3 \exp(-x^2/\sigma_S^2)(S_i \cdot S_j), \quad (3-5)$$

که در آن S_i اپراتور اسپین مربوط به کوآرک i ام است و x همان فوق شعاع است [35,36,43,44,45]. بنابراین به هامیلتونی جمله دیگری که مربوط به اثرات فوق ریز باشد اضافه کرده ایم [35]. اولین جمله که وابستگی به ایزو اسپین دارد به فرم زیر است [24].

$$H_I = \sum_{i,j=1,i \neq j}^3 A_I \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_I} \right]^3 \exp(-x^2/\sigma_I^2)(I_i \cdot I_j), \quad (4-5)$$

که در آن I_i ایزواسپین کوآرک i ام است و جمله دیگر مربوط به برهم کنش های اسپین - ایزواسپین است که به صورت زیر معرفی می شود [24]

$$H_{SI} = \sum_{i,j=1,i \neq j}^3 A_{SI} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_{SI}} \right]^3 \exp(-x^2/\sigma_{SI}^2)(S_i \cdot S_j)(I_i \cdot I_j), \quad (5-5)$$

با استفاده از معادلات برهم کنش فوق زیر نیز (پتانسیل های غیر نگهدارنده) به صورت زیر خواهند بود:

$$H_{int}(x) = H_S(x) + H_I(x) + H_{SI}(x). \quad (6-5)$$

و ضرایب موجود در معادلات بالا، که با استفاده از روشهای پدیدارشناسی بدست آمده اند، با صورت زیر ارائه می گردند :

$$A_s = 67.4(fm)^2, \sigma_s = 2.87fm, A_t = 51.7(fm)^2 \quad (7-5)$$

$$\sigma_t = 3.45fm, A_{st} = -106.2(fm)^2, \sigma_{st} = 2.31fm.$$

بنابراین ما در ابتدا حل دقیق معادله شرودینگر را با پتانسیل های نگهدارنده انجام خواهیم داد و سپس برهم کنش های فوق ریز را به عنوان اختلال در نظر گرفته و نقش آنها را در جابجایی انرژی باریون ها تعیین می کنیم .

۵-۳- حل دقیق معادله شرودینگر شعاعی برای پتانسیل نگهدارنده

ما کوارک ها را توسط سه کوارک در نظر می گیریم .بعد از حذف مختصه مرکز جرم برای سه ذره ، دو بردار \vec{r} و $\vec{\lambda}$ را بعنوان مختصات ژاکوبی به صورت زیر معرفی می کنیم :

$$\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad \vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3). \quad (8-5)$$

به جای \vec{r} و $\vec{\lambda}$ ، مختصات فوق کروی را معرفی می کنیم که زوایای فضایی آن به صورت $\Omega_\rho = (\theta_\rho, \phi_\rho)$ و $\Omega_\lambda = (\theta_\lambda, \phi_\lambda)$ می باشند. همچنین فوق شعاع χ و فوق زاویه ξ نیز به صورت زیر معرفی می شوند [37,38,46]

$$x = \sqrt{\rho^2 + \lambda^2}, \quad \xi = \arctg\left(\frac{\rho}{\lambda}\right). \quad (9-5)$$

بنابراین هامیلتونی به صورت زیر خواهد شد

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\lambda^2}{2m} + v(x). \quad (10-5)$$

با استفاده از مختصات فوق کروی ، عملگر انرژی جنبشی برای یک مجموعه سه جسمی به صورت زیر نوشته می شود ($\hbar = c = 1$).

$$\frac{1}{2m}(\Delta_\rho + \Delta_\lambda) = -\frac{1}{2m} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{L^2(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi)}{x^2} \right). \quad (11-5)$$

ویژه توابع L^2 همان هماهنگ های فوق کروی هستند که به صورت زیر می باشند

$$L^2(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) Y_{[\gamma], l_\rho, l_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) = \gamma(\gamma + 4) Y_{[\gamma], l_\rho, l_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi). \quad (12-5)$$

و همچنین اندازه حرکت زاویه ای بزرگ γ به صورت $\gamma = 2n + l_\rho + l_\lambda$ و $n = 0, 1, \dots$ است.

ضمن آنکه l_ρ و l_λ اندازه حرکت متناظر با کمیت های \vec{p} و $\vec{\lambda}$ می باشند. هر حالت سه جسمی

می تواند برحسب هماهنگ های فوق کروی بسط داده شود که این بسط را به صورت زیر در نظر

می گیریم

$$\Psi(\vec{p}, \vec{\lambda}) = \sum_{\gamma, l_\rho, l_\lambda} N_\gamma \psi_{v, \gamma}(x) Y_{[\gamma], l_\rho, l_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi). \quad (13-5)$$

تابع موج فوق شعاعی $\psi_{v, \gamma}(x)$ جوابی از معادله زیر است

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\gamma(\gamma + 4)}{x^2} \right) \psi_{v, \gamma}(x) = -2m [E - v(x)] \psi_{v, \gamma}(x). \quad (14-5)$$

حال می خواهیم معادله شرودینگر فوق شعاعی را برای پتانسیل بر هم کنش سه جسمی حل

کنیم. برای این منظور تبدیل زیر را در نظر می گیریم:

$$\psi_{v, \gamma}(x) = x^{-\frac{5}{2}} \varphi_{v, \gamma}(x), \quad (15-5)$$

بعد از جایگزینی این تبدیل معادله 5-14 به معادله زیر تبدیل می شود.

$$\varphi_{v, \gamma}''(x) + \left[\varepsilon - a_1 x^2 - b_1 x + \frac{c_1}{x} - \frac{(2\gamma + 3)(2\gamma + 5)}{4x^2} \right] \varphi_{v, \gamma}(x) = 0. \quad (16-5)$$

که در آن $\varphi_{v, \gamma}(x)$ جوابی برای معادله شرودینگر فوق شعاعی می باشد. ضمن آنکه در معادله بالا

$$\varepsilon = 2mE, a_1 = 2ma, b_1 = 2mb, c_1 = 2mc. \quad (17-5)$$

$\varphi_{v, \gamma}(x)$ تابع موج در فضای شش بعدی است. در این حالت فرض می کنیم که تابع دارای

فرم زیر است

$$\varphi_{uv}(x) = f(x) \exp[g(x)], \quad (18-5)$$

جوابهای حدسی که برای $f(x)$ و $g(x)$ انتخاب می شوند بر اساس مقالات معرفی شده در

مراجع [39, 40] به صورت زیر می باشد

$$f(x) = \prod_{i=1}^v (x - \alpha_i^v) \quad v=1, 2, \dots$$

$$f(x) = 1 \quad v=0 \quad (19-5)$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}\alpha x^2 - \beta x + \delta \ln x$$

که در آن α و β مثبت هستند.

در جدول 5-1 به ازای فرم پتانسیل های مختلف جوابهای حدسی برای $g(x)$ نیز آمده

است [61, 62].

جدول 5-1: توابع $g(x)$ به ازای پتانسیل های متفاوت

$V(x)$	$g(x)$	$V(x)$	$g(x)$
$ax^{-2} + bx^2 + cx^3 + dx^6$	$\frac{1}{2}\alpha x^2 - \frac{1}{4}\beta x^4 + c \ln x$ $d > 0, a > -\frac{1}{4}$	$ax^{-6} + bx^{-4} + cx^{-2} + dx^2$	$\frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{2}\beta x^{-2} + \delta \ln x$ $d > 0, a > 0$
$ax^{-2} + bx^{-1} + cx + dx^2$	$\frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta \ln x$ $d > 0, a > -\frac{1}{4}$	$ax^{-4} + bx^{-3} + cx^{-2} + dx^{-1}$	$\alpha x^{-1} + \beta x^2 + \delta \ln x$ $E < 0, a > 0$
$ax^{-2} + bx^{-4/3} + cx^{-2/3} + dx^{2/3}$	$\alpha x^{1/3} + \frac{3}{2}\beta x^{3/2} + \delta \ln x$ $d > 0, a > -\frac{1}{4}$	$ax^2 + bx^{-4} + cx^{-6}$	$-\frac{1}{2}\alpha x^2 - \frac{1}{2}\beta x^{-2} + \delta \ln x$ $E > 0, a > 0$
$ax^{-2} + bx^{-3/2} + cx^{-1} + dx^{-1/2}$	$\beta x^{1/2} + \delta \ln x$ $E > 0, a > -\frac{1}{4}$	-----	-----

از معادله 5-18 داریم :

$$\varphi''(x) = (g''(x) + g'^2(x) + \frac{f''(x) + 2g'(x)f'(x)}{f(x)})\varphi(x). \quad (20-5)$$

از مقایسه معادلات 5-16 و 5-20 ملاحظه می شود که

$$\left[\varepsilon + a_1 x^2 + b_1 x + \frac{-c_1}{x} + \frac{(2\gamma+3)(2\gamma+5)}{4x^2} \right] = g''(x) + g'^2(x) + \frac{f''(x) + 2g'(x)f'(x)}{f(x)}. \quad (21-5)$$

با جانشانی معادله 5-19 در 5-21

$$\varepsilon + a_1 x^2 + b_1 x - \frac{c_1}{x} + \frac{(2\gamma+3)(2\gamma+5)}{4x^2} = \alpha^2 x^2 - 2\alpha\beta x - \alpha(1+2\delta) + \beta^2 - \frac{2\beta\delta}{x} + \frac{\delta(\delta-1)}{x^2} \quad (22-5)$$

با مساوی قرار دادن توانهای مختلف x از طرفین معادله 5-22 معادلات زیر بدست می آید

$$\alpha = \sqrt{a_1}, \quad (23a-5)$$

$$\beta = \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}}, \quad (23b-5)$$

$$c_1 = 2\beta\delta, \quad (23c-5)$$

$$\delta = \gamma + \frac{5}{2}, \quad \delta = -\gamma + \frac{3}{2}, \quad (23d-5)$$

$$\varepsilon = \alpha(1+2\delta) - \beta^2. \quad (23e-5)$$

بر طبق پتانسیل برهم کنش هماهنگ نوسانی $\omega^2 = \frac{3K}{m}$ را به صورت $\omega = \left(\frac{2a}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ انتخاب

می کنیم. سپس با استفاده از معادلات 5-17 و 5-23a داریم

$$\alpha = \sqrt{2ma} = m\omega, \quad (24a-5)$$

$$\beta = \frac{b}{\omega} = \frac{2mc}{(2\gamma+5)}. \quad (24b-5)$$

از معادله 5-23d دو فرم مختلف برای δ ارائه شده است، که برای رفتار مناسب و بهتر مقدار زیر

را انتخاب می کنیم

$$\delta = \gamma + \frac{5}{2} \quad (25-5)$$

همچنین با استفاده از معادلات 5-23c، 5-25 و 5-17 معادله بین ضرایب پتانسیل b و c به

صورت زیر می شود

$$c = \frac{b}{m\omega} \left(\gamma + \frac{5}{2} \right). \quad (26-5)$$

ویژه مقادیر انرژی برای حالت $v=0$ و اندازه حرکت زاویه ای بزرگ γ از معادلات 5-17،
 $23e-5$ ، $24a-5$ و $24b-5$ به صورت زیر است :

$$E_{0\gamma} = (2\gamma+6) \frac{\omega}{2} - \frac{2mc^2}{(2\gamma+5)^2}. \quad (27-5)$$

با استفاده از فرم α و β از معادلات $24a-5$ و $24b-5$ معادلات 5-18، 5-19 و 5-23 تابع موج
 به ازای $v=0$ به صورت زیر خواهد شد

$$\psi_{0\gamma} = N_{\gamma} x^{-\frac{5}{2}} \varphi_{0\gamma} = N_{\gamma} x^{\gamma} \exp\left(-\frac{m\omega}{2} x^2 - \frac{2mc}{(2\gamma+5)} x\right). \quad (28-5)$$

حال ، حالتی را در نظر می گیریم که در آن $(v=1)$ است . در این حالت $f(x) = (x - \alpha_1)$ است
 و $g(x)$ به صورت معادله 5-18 خواهد بود. پس از جایگذاری، روابط بین پارامترهای a ، b و c
 به صورت زیر خواهد شد

$$\alpha = \sqrt{a_1} = \sqrt{2ma} = m\omega, \quad (29a-5)$$

$$b_1 = 2\alpha\beta \Rightarrow \beta = \frac{b}{\omega}, \quad (29b-5)$$

$$\varepsilon = \alpha(2\delta+3) - \beta^2, \quad (29c-5)$$

$$\delta = \gamma + \frac{5}{2}, \quad (29d-5)$$

$$\alpha_1 = \frac{-2\beta(1+\delta) + c_1}{2\alpha} = \frac{-\frac{b}{\omega}(2\gamma+7) + c_1}{2m\omega}, \quad (29e-5)$$

$$\alpha_1 = \frac{2\delta}{c_1 - 2\beta\delta} = \frac{(2\gamma+5)}{c_1 - \frac{2b}{\omega}(2\gamma-5)}. \quad (29f-5)$$

با مساوی قرار دادن معادلات 5-29e و 5-29f رابطه بین ضرایب پتانسیل به صورت زیر است:

$$c = \frac{(2\gamma+6)}{2m\omega} + \left[\frac{b^2}{4m^2\omega^2} + \omega(2\gamma+5) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (30-5)$$

حال با حذف δ میان معادلات 29e-5 و 29f-5 رابطه بین α_1^1 و ضرایب پتانسیل به صورت زیر خواهد شد :

$$\alpha_1^1 = \frac{-\left(\sqrt{a_1} + \frac{b_1^2}{4a_1}\right) + \left[\left(\sqrt{a_1} - \frac{b_1^2}{4a_1}\right)^2 + b_1 c_1\right]^{\frac{1}{2}}}{b_1}. \quad (31-5)$$

با استفاده از معادلات 17-5، 29b-5، 29c-5 و 29d-5 ویژه مقادیر انرژی به ازای ($v=1$) به صورت زیر خواهد شد

$$E_{1\gamma} = (2\gamma + 8) \frac{\omega}{2} - \frac{b^2}{2m\omega}. \quad (32-5)$$

و ویژه توابع نیز به صورت زیر خواهد بود

$$\psi_{1\gamma}(x) = N_{\gamma} (x - \alpha_1^1) x^{\gamma} \times \exp\left[-\frac{m\omega}{2} x^2 - \frac{b}{\omega} x\right]. \quad (33-5)$$

و به همین روش می توانیم برای $v=2,3,\dots$ نیز ویژه مقادیر و ویژه توابع را محاسبه نما ییم. در جداول 2 و 3 ویژه مقادیر و ویژه توابع برای سیستمهای 3 و 4 ذره ای در حضور پتانسیلهای مختلف آمده است [63].

جدول-5-2: ویژه توابع و ویژه مقادیر معادله شرودینگر برای سیستم سه ذره ای

$V(x) = \alpha x^2 + bx - c/x.$	به ازای پتانسیل :
$\psi_{0\gamma}(\xi_1, \xi_2) = x^{\gamma} \exp\left[-\frac{m\omega x^2}{2} - \frac{mcx}{(\gamma + 5/2)}\right] Y_{[\gamma]}(\Omega_{\xi_1}, \Omega_{\xi_2}, t)$	
$E_{0\gamma} = \omega(\gamma + 3) - \frac{mc^2}{2(\gamma + 5/2)^2} \quad \gamma = 0, 1, 2, \dots$	
$\psi_{1\gamma}(\xi_1, \xi_2) = x^{\gamma} \exp\left[-\frac{m\omega x^2}{2} - \frac{mcx}{(\gamma + 5/2)}\right] Y_{[\gamma]}(\Omega_{\xi_1}, \Omega_{\xi_2}, t)$	
$E_{1\gamma} = \omega(\gamma + 4) - \frac{mc^2}{2(\gamma + 5/2)^2}$	
$V(x) = ax^2 \text{ که } a = \frac{1}{2} m\omega^2$	به ازای پتانسیل :

$$\psi_{0\gamma}(\xi_1, \xi_2) = x^\gamma \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2}\right) Y_{[\gamma]}(\Omega_{\xi_1}, \Omega_{\xi_2}, t)$$

$$E_{0\gamma} = \omega(\gamma + 3) \quad \gamma = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi_{1\gamma}(\xi_1, \xi_2) = x^\gamma (x - \alpha_1) \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2}\right) Y_{[\gamma]}(\Omega_{\xi_1}, \Omega_{\xi_2}, t)$$

$$E_{1\gamma} = \omega(\gamma + 4) \quad \gamma = 0, 1, 2, \dots$$

$$V(x) = -\frac{c}{x}$$

به ازای پتانسیل :

$$\psi_{0\gamma}(\xi_1, \xi_2) = x^\gamma \exp\left[-\frac{mcx}{(\gamma + 5/2)}\right] Y_{[\gamma]}(\Omega_{\xi_1}, \Omega_{\xi_2}, t)$$

$$E_{0\gamma} = -\frac{mc^2}{2(\gamma + 5/2)^2} \quad \gamma = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi_{1\gamma}(\xi_1, \xi_2) = x^\gamma (x - \alpha_1) \exp\left[\frac{-mcx}{(\gamma + 5/2)}\right] Y_{[\gamma]}(\Omega_{\xi_1}, \Omega_{\xi_2}, t)$$

$$E_{1\gamma} = -\frac{mc^2}{2(\gamma + 5/2)^2}$$

جدول- 5-3: ویژه توابع و ویژه مقادیر معادله شرودینگر برای سیستم چهار ذره ای

$$V(x) = ax^2 + bx - c/x.$$

به ازای پتانسیل :

$$\psi_{0\gamma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = x^\gamma \exp\left[-\frac{m\omega x^2}{2} - \frac{mcx}{(\gamma + 4)}\right] Y_{[\gamma]}(\Omega_{\xi_1}, \Omega_{\xi_2}, \Omega_{\xi_3}, t_1, t_2)$$

$$E_{0\gamma} = \omega\left(\gamma + \frac{9}{2}\right) - \frac{mc^2}{(\gamma + 4)^2}$$

$$\psi_{1\gamma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(x - \frac{(2\gamma + 8)\omega}{-2b(2\gamma + 8) + c_1}\right) x^\gamma \exp\left[-\frac{1}{2}m\omega x^2 - \frac{bx}{\omega}\right] Y_{[\gamma]}(\Omega_{\xi_1}, \Omega_{\xi_2}, \Omega_{\xi_3}, t_1, t_2)$$

$$E_{1\gamma} = \omega\left(\gamma + \frac{11}{2}\right) - \frac{mc^2}{(\gamma + 4)^2}$$

$V(x) = ax^2$ $\psi_{0\gamma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = x^\gamma \exp\left[-\frac{m\omega x^2}{2}\right] Y_{[\gamma]}(\Omega_{\xi_1}, \Omega_{\xi_2}, \Omega_{\xi_3}, t_1, t_2)$ $E_{0\gamma} = -\frac{mc^2}{(\gamma+4)^2}$ $\psi_{1\gamma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(x - \frac{(2\gamma+8)\omega m}{c}\right) x^\gamma \exp\left[-\frac{m\omega x^2}{2}\right] Y_{[\gamma]}(\Omega_{\xi_1}, \Omega_{\xi_2}, \Omega_{\xi_3}, t_1, t_2)$ $E_{1\gamma} = -\frac{mc^2}{(\gamma+4)^2}$	برای پتانسیل
$V(x) = -\frac{c}{x}$ $\psi_{0\gamma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = x^\gamma \exp\left[-\frac{mcx}{(\gamma+4)}\right] Y_{[\gamma]}(\Omega_{\xi_1}, \Omega_{\xi_2}, \Omega_{\xi_3}, t_1, t_2)$ $E_{0\gamma} = \omega\left(\gamma + \frac{9}{2}\right)$ $\psi_{1\gamma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(x - \frac{\omega}{2b}\right) x^\gamma \exp\left[-\frac{mcx}{(\gamma+4)}\right] Y_{[\gamma]}(\Omega_{\xi_1}, \Omega_{\xi_2}, \Omega_{\xi_3}, t_1, t_2)$ $E_{1\gamma} = \omega\left(\gamma + \frac{11}{2}\right)$	برای پتانسیل

۴-۵- محاسبه جرم باریون ها

ملاحظه شد که انرژی بدست آمده برای هر باریون متشکل از سه کوآرک توسط معادله شرودینگر $E_{u,\gamma}$ داده می شود که تابعی از a, b, m_q است و پتانسیل برهم کنش های فوق ریز $\langle H_m \rangle$ به عنوان اختلال در نظر گرفته می شوند. با استفاده از اختلال مستقل از زمان مرتبه اول برای پتانسیل های غیر نگهدارنده، $\langle H_m \rangle$ می تواند از معادلات 5-28، 5-33 بدست آید.

تابع موج مختل شده $\psi_\gamma(x)$ برای حالت پایه و اولین حالت برانگیخته و برای حالت های دیگر نیز می تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$\psi_{u,\gamma} = \psi'_{u,\gamma} + \sum_{\gamma' \neq \gamma} \frac{\langle \psi_{u,\gamma'}^0 | H_{in} | \psi_{u,\gamma}^0 \rangle \psi_{u,\gamma'}^0}{E_{u,\gamma}^0 - E_{u,\gamma'}^0} \quad (34-5)$$

و همینطور سهم پتانسیل برهم کنش های فوق ریز با استفاده از رابطه زیر

$$\text{بدست می آید } \langle H_{int} \rangle = \frac{\int \psi_{\nu,\gamma} H_{int} \psi_{\nu,\gamma} x^5 dx d\Omega_\rho d\Omega_\lambda}{\int \psi_{\nu,\gamma} \psi_{\nu,\gamma} x^5 dx d\Omega_\rho d\Omega_\lambda}$$

مراتب بالاتر نیز این سهم انرژی را محاسبه نمود. بنابراین برای هر باریون می توانیم جرم باریون را شامل جرم سه کوآرک و انرژی آنها و سهم اختلال پتانسیل برهم کنش های فوق ریز در نظر

بگیریم یعنی جرم باریون را به صورت زیر می نویسیم:

$$M_{baryon} = m_{q_1} + m_{q_2} + m_{q_3} + E_{\nu,\gamma} + \langle H_{int} \rangle \quad (35-5)$$

این وابستگی برای مدل کوآرک های تشکیل دهنده به جرم کوآرک m_q و ضرایب پتانسیل a و b وابسته است. γ اندازه حرکت زاویه ای و ν شماره گره های تابع موج شعاعی $\psi_{\nu,\gamma}(x)$ است.

جرم کوآرک هایی که استفاده شده است به صورت $m_u = 257(MeV), m_d = 360(MeV)$ و

$m_s = 501.5(MeV)$ می باشد. برای آنکه ضرایب پتانسیل را بدست آوریم، ما از باریونهای Λ و

Δ استفاده کرده ایم که هم بردهای کوتاه و هم بردهای بلند را شامل می شود. برای این منظور

$\Lambda(1232)$ و $\Delta(1672)$ به عنوان ورودی برای تعیین ضرایب پتانسیل a, b, c به کار برده

شده اند. در این حالت $\omega = 0.532, c = 2.46$ و $a = \frac{1}{2} m \omega^2 = 0.14m$ و $b = \frac{2mc\omega}{(2\gamma+5)} = \frac{2.62m}{(2\gamma+5)}$

میباشند. مقادیر تئوری و تجربی جرم باریونها در جداول زیر آمده است [64].

جدول 5-4 جرم های تجربی و تئوری برای خانواده N

Theory (MeV)	$\langle H_{int} \rangle$ (MeV)	$E_{\nu,\gamma}$ (MeV)	$\nu \quad \gamma$	$I(j^p)$	Baryon
935.79	-80.09	128.88	0 0	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^+$	$N(938)$
1436.67	79.67	374	0 1	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^+$	$N(1440_{-10}^{+30})$

1528.11	159.67	374	0 1	$\frac{1}{2}\left(\frac{3^-}{2}\right)$	$N(1520_{-5}^{+10})$
1528.11	171.11	374	0 1	$\frac{1}{2}\left(\frac{1^-}{2}\right)$	$N(1535_{-15}^{+20})$

جدول 5-5 جرم های تجربی و تئوری برای خانواده Δ

$Theory (MeV)$	$\langle H_{int} \rangle$ (MeV)	$E_{\nu\gamma} (MeV)$	$\nu \gamma$	$I(j^P)$	Baryon
1200.14	+133.29	295.85	0 0	$\frac{3}{2}\left(\frac{3^+}{2}\right)$	$\Delta(1232_{-2}^{+2})$
1507.31	198.39	325.92	0 0	$\frac{3}{2}\left(\frac{3^+}{2}\right)$	$\Delta(1600 \pm 50)$
1548.8	171.8	394	0 1	$\frac{3}{2}\left(\frac{1^-}{2}\right)$	$\Delta(1620_{-5}^{+55})$

جدول 5-6 جرم های تجربی و تئوری برای خانواده Σ

$Theory (MeV)$	$\langle H_{int} \rangle$ (MeV)	$E_{\nu\gamma} (MeV)$	$\nu \gamma$	$I(j^P)$	Baryon
1180.66	-21.14	186.80	0 0	$1\left(\frac{1^+}{2}\right)$	$\Sigma(1189)$
1190.91	-69.93	139.84	0 0	$1\left(\frac{1^+}{2}\right)$	$\Sigma(1192)$
1207	-92.00	122.88	0 0	$1\left(\frac{1^+}{2}\right)$	$\Sigma(1197)$
1380.86	30.98	122.88	0 0	$1\left(\frac{3^+}{2}\right)$	$\Sigma(1385)$

1651.81	71.81	353	0 1	$0\left(\frac{3^-}{2}\right)$	$\Sigma(1660)$
---------	-------	-----	-----	-------------------------------	----------------

جدول 5-7 جرم های تجربی و تئوری برای خانواده Λ

<i>Theory (MeV)</i>	$\langle H_{int} \rangle$ (MeV)	$E_{\nu\gamma}$ (MeV)	$\nu \quad \gamma$	$I(j^p)$	<i>Baryon</i>
1118.76	-132.05	129.81	0 0	$0\left(\frac{1^+}{2}\right)$	$\Lambda(1115.68)$
1402.49	-61.51	343	0 1	$0\left(\frac{1^-}{2}\right)$	$\Lambda(1405 \pm 5)$
1514.83	50.83	343	0 1	$0\left(\frac{3^-}{2}\right)$	$\Lambda(1520 \pm 1)$

جدول 5-8 جرم های تجربی و تئوری برای خانواده Ξ

<i>Theory (MeV)</i>	$\langle H_{int} \rangle$ (MeV)	$E_{\nu\gamma}$ (MeV)	$\nu \quad \gamma$	$I(j^p)$	<i>Baryon</i>
1316.47	-124.13	181.60	0 0	$\frac{1}{2}\left(\frac{1^+}{2}\right)$	$\Xi(1314)$
1335.01	-149.79	144.80	0 0	$\frac{1}{2}\left(\frac{1^+}{2}\right)$	$\Xi(1321)$
1535.15	+99.35	120.80	0 0	$\frac{1}{2}\left(\frac{3^+}{2}\right)$	$\Xi(1530)$

جدول 5-9 جرم های تجربی و تئوری برای خانواده Ω

$Theory (MeV)$	$\langle H_{int} \rangle$ (MeV)	$E_{\nu\gamma} (MeV)$	$\nu \quad \gamma$	$I(j^P)$	$Baryon$
1673.58	31.86	138.72	0 0	$0\left(\frac{3^+}{2}\right)$	$\Omega(1672)$

محاسبات انجام شده و نتایج بدست آمده تاکید بر انتخاب مناسب پتانسیل های نگهدارنده و غیر نگهدارنده دارند.

فصل ششم

بررسی باریونها با معادله دیراک

۶-۱- مقدمه

اگر ابعاد ذرات مورد بررسی کوچک و انرژی ذرات نسبت به انرژی سکون آنها زیاد نباشد ما مجاز به استفاده از معادله شرودینگر هستیم. برای سیستم های سه ذره ای حل معادله شرودینگر در حضور پتانسیل های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است [47-51]. اگر هم ابعاد ذرات کوچک باشد و هم انرژی ذرات نسبت به انرژی سکون آنها قابل ملاحظه باشد این ذرات در مبحث کوانتم نسبیت بررسی خواهند شد. اگر اسپین ذرات مورد بررسی صفر باشد این ذرات توسط معادله کلاین گوردن بررسی می شوند و اگر اسپین ذرات $\frac{1}{2}$ باشد با معادله دیراک به بررسی آنها پرداخته می

شود و اگر اسپین ذرات یک باشد با معادله پروکا بررسی می شوند. معادله دیراک برای یک ذره تنها در حضور پتانسیل های مختلف قبلاً مورد بررسی قرار گرفته است و ویژه مقادیر و ویژه توابع به ازای این پتانسیل ها بدست آمده است. همچنین معادله دیراک برای سیستم دو ذره ای که یکی از ذرات در پتانسیل دیگری قرار دارد (همانند اتم هیدروژن) نیز بررسی شده است. [52,53]

در سال ۱۹۵۴ یانگ و میلز با ارائه تئوری خود برای دو ذره که اسپین هر کدام $\frac{1}{2}$ است چگالی لاگرانژی را در غیاب برهم کنش نوشته و معادله دیراک را برای سیستم دو ذره ای به صورت تحلیلی بررسی نمودند. از طرفی با توجه به شواهد تجربی که در آزمایشهای پراکندگی بدست آمده بود، ملاحظه شد که باریون ها متشکل از سه جزء بوده، که هر یک از آنها را کوارک نامیدند و همچنین اسپین این ذرات نیز $\frac{1}{2}$ است. بنابراین بررسی باریون ها با معادله دیراک برای اولین بار توسط مدل کیسه ای MIT انجام شد. در این مدل باریون به عنوان یک ذره نسبتی درون یک کیسه در نظر گرفته می شود ولی هیچ نوع برهم کنشی ندارد، فقط قدرت خارج شدن از دیواره کیسه را ندارد و تابع موج آن در دیواره صفر می گردد [54]. با توجه به تابع موج بدست آمده از این مدل و محاسبه فرم فاکتورها و گشتاورهای الکتریکی و مغناطیسی، بر روی این مدل اصطلاحاتی نیز انجام شده است [55-58]. در این فصل برای سه جسم با ارائه یک مدل ساده نسبیتی، برای سه جسم با توابع موج $\psi_1(r_1), \psi_2(r_2), \psi_3(r_3)$ و در نظر گرفتن تابع موج کل سیستم به صورت حاصل ضرب تانسوری تابع موج ها، تابع موج کلی را به صورت

$$\psi_{\nu\nu}(x) = \begin{pmatrix} \phi_{\nu\nu} \\ \chi_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

نمایش می دهیم، پتانسیل برهمکنشی میان ذرات نیز همانند قبل شامل سه جمله نوسانی، خطی و کولنی می باشد. بنابراین پتانسیل در نظر گرفته شده در فضای فوق کروی به صورت زیر است :

$$2U_0(x) = 2V_0(x) = ax^2 + bx - \frac{c}{x}, \quad (1-6)$$

پتانسیل های $U_0(x)$ و $V_0(x)$ پتانسیل های برداری واسکالر نامیده می شوند. دلیل این انتخاب آن است که $U_0(x)$ با جرم و $V_0(x)$ با انرژی در معادله دیراک ظاهر می شوند.

۶-۲- حل دقیق معادله دیراک برای باریون

اگر ذره ای به جرم m_1 و انرژی ϵ_1 تحت پتانسیل $U_0(x)$ در نظر بگیریم و تابع موج این تک

ذره را با $\psi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix}$ نمایش دهیم معادله دیراک برای این ذره به صورت زیر نوشته می شود

$$\left[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta(m_1 + U_{01}(x)) \right] \psi_1(x) = (\epsilon_1 - V_{01}(x)) \psi_1(x) \quad (2-6)$$

با ضرب مستقیم طرفین $\psi_2(r_2) \otimes \psi_3(r_3)$

و با جایگزینی ماتریس های α, β در معادله بالا نتایج زیر به دست می آید :

$$\left(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p}_1 \right) \chi + (m_1 + U_{01}(x) + V_{01}(x)) \phi = \epsilon_1 \phi \quad (3a-6)$$

$$\left(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p}_1 \right) \phi - (m_1 - U_{01}(x) - V_{01}(x)) \chi = \epsilon_1 \chi \quad (3b-6)$$

حالتی را در نظر می گیریم که در آن $V_0(x) = U_0(x)$ باشد. زیرا پتانسیل در حالت کلی، فرم

$$U(r) = \frac{1}{2}(I + e\gamma_0)A(x) \text{ است که در آن } A(x) = ax^2 + bx - \frac{c}{x} \text{ و } \gamma_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0-1 \end{pmatrix}$$

است. برای e مقادیر صفر و یک در نظر می گیریم. مقدار یک مهم تر است زیرا منجر

به تقارن $SU(2)$ و همچنین زوجیت اندازه حرکت زاویه ای می شود که بوسیله بل و راگ مورد

مطالعه قرار گرفته است [53]. البته ذکر این نکته نیز لازم است که مقدار $e = 0$ فقط پتانسیل

اسکالر را می دهد. با استفاده از معادله $(3b-6)$ ، χ را حساب می کنیم

$$\chi = \frac{\left(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p}_1 \right) \phi}{\epsilon_1 + m_1} \quad (4-6)$$

در ضمن می دانیم

$$\left(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p}_1 \right) \left(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p}_1 \right) = \dot{p}_1^2 \quad (5-6)$$

با جانشانی معادله (4-6) در (3a-6) معادله زیر بدست می آید

$$p_1^2 \phi = (\varepsilon_1^2 - m_1^2) \phi - 2U_{01}(x) (\varepsilon_1 + m_1) \phi \quad (6-6)$$

با انجام عملیات مشابه برای سایر ذرات و جمع معادلات بدست آمده معادله زیر بدست می آید

$$(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \phi = \sum_{i=1}^3 (\varepsilon_i^2 - m_i^2) \phi - 2U_{01}(x) \sum_{i=1}^3 (\varepsilon_i + m_i) \phi \quad (7-6)$$

از آنجایی که تمام ذرات دارای جرم و انرژی یکسان هستند ، بنابراین

$$(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \phi = 3(\varepsilon_1^2 - m_1^2) \phi - \left(ax^2 + bx - \frac{c}{x} \right) 3(\varepsilon_1 + m_1) \phi \quad (8-6)$$

تبدیلات فولدی - فرتی سون در انرژی های کم و در حد کلاسیک معتبر است. از آنجایی که اندازه

ذرات مورد مطالعه در حد کلاسیک نیست و سیستم مورد نظر ما سیستمی متشکل از ذرات است

(و نه تک ذره) ما از مختصات ژاکوبی استفاده می کنیم که به صورت زیر معرفی می شوند

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\sqrt{2}} \\ \vec{\lambda} &= \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3}{\sqrt{6}} \end{aligned} \quad (9-6)$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3}$$

با معرفی کمیت فوق شعاع x به صورت

$$x = \sqrt{\rho^2 + \lambda^2} \quad (10-6)$$

و با استفاده از فرم عملگری اندازه حرکت $\vec{p} = \frac{-1}{i} \vec{\nabla}$ (در سیستم یونیک) عملگر لاپلاسی به

صورت زیر نوشته می شود

$$\nabla^2 = \nabla_{\rho}^2 + \nabla_{\lambda}^2 = - \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} + \frac{L^2(\Omega_{\rho}, \Omega_{\lambda}, \xi)}{x^2} \right], \quad (11-6)$$

با جایگزینی معادله (11-6) در معادله (8-6)

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} + \frac{L^2(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi)}{x^2} \right] \Phi_{v\gamma} = \frac{1}{3} (E_{v\gamma}^2 - 9m_1^2) \Phi_{v\gamma} - \left(ax^2 + bx - \frac{c}{x} \right) (E_{v\gamma} + 3m_1) \Phi_{v\gamma}. \quad (12-6)$$

ضمن آن که

$$\Phi_{v\gamma} = \phi_{v\gamma}(x) Y_{(\gamma)\ell_\rho \ell_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi), \quad (13-6)$$

با توجه به

$$L^2(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) Y_{[\gamma]\ell_\rho \ell_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) = \gamma(\gamma + 4) Y_{[\gamma]\ell_\rho \ell_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) \quad (14-6)$$

با جایگزینی معادله (13-6) و (14-6) در معادله (12-6) و حذف $Y_{(\gamma)\ell_\rho \ell_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi)$ از

دوطرف نتیجه زیر بدست می آید

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\gamma(\gamma + 4)}{x^2} \right] \phi_{v\gamma}(x) + \frac{1}{3} (E_{v\gamma}^2 - 9m_1^2) \phi_{v\gamma}(x) - \left(ax^2 + bx - \frac{c}{x} \right) (E_{v\gamma} + 3m_1) \phi_{v\gamma}(x) = 0 \quad (15-6)$$

با انتخاب

$$\frac{1}{3} (E_{v\gamma}^2 - 9m_1^2) = \varepsilon \quad (15a-6)$$

$$(E_{v\gamma} + 3m_1)c = c_1 \quad (15b-6)$$

$$(E_{v\gamma} + 3m_1)b = b_1 \quad (15c-6)$$

$$(E_{v\gamma} + 3m_1)a = a_1 \quad (15d-6)$$

و در نظر گرفتن تغییر متغیر زیر

$$\phi_{v\gamma}(x) = x^{-\frac{5}{2}} \varphi_{v\gamma}(x), \quad (16-6)$$

و جایگزینی معادله (16-6) در معادله (15-6)

$$\varphi_{\nu\gamma}''(x) + \left[\varepsilon - a_1 x^2 - b_1 x + \frac{c_1}{x} - \frac{(2\gamma+3)(2\gamma+5)}{4x^2} \right] \varphi_{\nu\gamma}(x) = 0 \quad (17-6)$$

برای حل معادله دیفرانسیل بالا، جواب حدسی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\varphi_{\nu\gamma}(x) = f_\nu(x) e^{g_\gamma(x)}, \quad (18-6)$$

که

$$f_\nu(x) = \begin{cases} 1 \rightarrow \nu = 0 \\ \prod_{i=1}^{\nu} (x - a_i^\nu) \rightarrow \nu > 0 \end{cases} \quad (19a-6)$$

و

$$g_\gamma(x) = -\frac{1}{2} \alpha x^2 - \beta b + \delta \ln x \quad (19b-6)$$

به حل معادله دیفرانسیل بالا می‌پردازیم. حل‌های مختلفی به ازای ν های مختلف وجود دارد که ν مشخص کننده تعداد گره‌های تابع موج است. با جایگزینی $f_\nu(x)$ و $g_\gamma(x)$ در معادله (18-6) و دو بار مشتق‌گیری از آن، معادله زیر بدست می‌آید

$$\varphi_{\nu\gamma}''(x) = \left[g'' + g'^2 + \frac{f'' + 2gf'}{f} \right] \varphi_{\nu\gamma}(x) \quad (20-6)$$

ابتدا حالت $\nu = 0$ را در نظر می‌گیریم که این، حالت صفرم گره معادله دیفرانسیل بالا نامیده می‌شود و به همین طریق $\nu = 1$ ، اولین گره والی آخر.

با مساوی قرار دادن معادلات (20-6) و (17-6) نتایج زیر بدست می‌آید.

$$\alpha = \sqrt{a_1} \quad (21a-6)$$

$$\beta = \frac{b_1}{2\sqrt{a_1}} \quad (21b-6)$$

$$\delta = \gamma + \frac{5}{2}, \delta = -\gamma + \frac{3}{2} \quad (21c-6)$$

$$c = \alpha(1+2\delta) - \beta^2 \quad (21d-6)$$

باید توجه کرد که در پتانسیل معرفی شده ضریب a را به صورت زیر انتخاب می کنیم

$$a = (E_T + Nm_1)\omega^2 \quad (22-6)$$

به صورت زیر خواهند شد (21b-6)

$$\beta = \frac{b}{2\omega}, \beta = \frac{(E_{\nu\gamma} + 3m_1)c}{(2\gamma + 5)} \quad (23-6)$$

با جانشانی معادلات (22-6) و (23-6) در معادله (21d-6) انرژی سیستم به صورت زیر می شود.

$$E_{0\gamma} = \frac{3(2\gamma + 5)^2 [m_1 + \omega(2\gamma + 6)] - 9m_1c^2}{(2\gamma + 5)^2 + 3c^2}. \quad (24-6)$$

مولفه بالایی تابع موج به صورت زیر خواهد شد

$$\Phi_{\nu\gamma} = \phi_{\nu\gamma}(x) Y_{(\gamma)\ell_p\ell_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) = N_{\nu\gamma} x^{-\frac{5}{2}} \varphi_{\nu\gamma}(x) Y_{(\gamma)\ell_p\ell_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) \quad (25-6)$$

با استفاده از معادله (4-6) و با استفاده از پایستگی اندازه حرکت و نوشتن اندازه حرکت برحسب

فوق شعاع x مولفه پایین تابع موج به صورت زیر خواهد شد

$$\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{x}}{(E_{\nu\gamma} + 3m_1)} \left[\left(\vec{\sigma} \cdot \hat{x} \right) \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}(x) \right) \right] \phi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{x}}{E_{\nu\gamma} + 3m_1} \left[-i \frac{d\phi}{dx} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \phi \right] \quad (26-6)$$

اگر به جای $\Phi_{\nu\gamma}$ نیز قرار دهیم در این صورت

$$\chi = \frac{-i \vec{\sigma} \cdot \hat{x}}{E_{v\gamma} + 3m_1} \left[\frac{d}{dx} - \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right] N_{0\gamma} x^\gamma \exp \left[-\frac{1}{2} (E_{v\gamma} + 3m_1) \alpha x^2 - \frac{b}{2\omega} x \right] Y_{(\gamma)\ell_p \ell_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) \quad (27-6)$$

بنابراین فرم کلی تابع موج برای حالت $v=0$ به صورت زیر است

$$\psi_{0\gamma} = \left(\begin{array}{c} \phi_\gamma(x) \\ \frac{-i \vec{\sigma} \cdot \hat{x}}{E_{v\gamma} + 3m_1} \left[\frac{d\phi_\gamma}{dx} - \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \phi_\gamma \right] \end{array} \right) Y_{(\gamma)\ell_p \ell_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) \quad (28-6)$$

با قرار دادن $\gamma=0$ ، تابع موج حالت پایه برای صفرمین گره به صورت زیر خواهد شد.

$$\psi_{(0)} = N_{00} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \frac{-i \vec{\sigma} \cdot \hat{x}}{E_{(0)} + 3m_1} \left((E_{(0)} + 3m_1)x + \frac{b}{2\omega} \right) \end{array} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} (E_{00} + 3m_1) \alpha x^2 - \frac{b}{2\omega} x \right] Y_{[0]0 0}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi). \quad (29-6)$$

حال فرض می کنیم که تمامی ذرات در داخل یک فوق کره به شعاع x محصور هستند و در دیواره کره پتانسیل بی نهایت است. تابع موج در خارج از کره به گونه ای انتخاب می شود که هنگامی که جرم قسمت خارجی به سمت بی نهایت میل می کند، چگالی جریان به صفر می رسد. با توجه به ملاحظات بالا، تابع موج در خارج فوق کره را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\psi(x > x_{bag}) = \frac{N e^{-mx}}{mx} \left(\begin{array}{c} 1 \\ i \vec{\sigma} \cdot \hat{x} \left(1 + \frac{1}{mx} \right) \end{array} \right) Y_{(\gamma)\ell_p \ell_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) \quad (30-6)$$

مقدار N را به صورت $N = N_0 m e^{mx_{bag}}$ گرفته و فرض می کنیم برای خارج کره $m \rightarrow \infty$.

بنابراین برای خارج کره تابع موج به صورت زیر است

$$\psi(x > x_{bag}) = \frac{N_0 e^{m(x_{bag} - x)}}{x} \left(\begin{array}{c} 1 \\ i \vec{\sigma} \cdot \hat{x} \left(1 + \frac{1}{mx} \right) \end{array} \right) Y_{(\gamma)\ell_p \ell_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) \quad (31-6)$$

با استفاده از شرایط مرزی $\psi(x > x_{bag}) = \psi(x < x_{bag})$ در $x = x_{bag}$ و مساوی قرار دادن

مولفه های بالایی و پایینی توابع موج با یکدیگر، معادلات زیر بدست می آید

$$\begin{cases} \frac{N_0}{x_{bag}} = N_{00} \phi_{00} \\ \frac{N_0}{x_{bag}} i \vec{\sigma} \cdot \hat{x} = i \vec{\sigma} \cdot \hat{x} N_{00} \frac{(\alpha x + \beta)}{(E_{00} + 3m_1)} \phi_{00} \end{cases} \quad (32-6)$$

با تقسیم معادلات بالا بر یکدیگر، شعاع فوق کره بصورت زیر حاصل می شود

$$x_{bag} = \frac{(E_{00} + 3m_1) - \beta}{\alpha} \quad (33-6)$$

با جانشانی α, β نتیجه به صورت زیر خواهد شد

$$x_{bag} = \frac{1}{\omega} - \frac{b}{2(E_{00} + 3m_1)\omega^2} \quad (34-6)$$

در جدول (1a-6) و (1b-6) و (1c-6) تابع موج شرودینگر و دیراک و همینطور ویژه مقادیر

انرژی مربوط به آنها به ترتیب برای پتانسیل های $V(x) = ax^2 + bx - \frac{c}{x}$ و $V(x) = ax^2$ و

$V(x) = -\frac{c}{x}$ منظور شده است [59, 63, 65].

جدول (1a-6)، ویژه مقایر و ویژه توابع شرودینگر و دیراک برای پتانسیل $V(x) = ax^2 + bx - \frac{c}{x}$

$\psi_{0,\gamma,SH} = N_{0\gamma} x^\gamma \exp\left[-\frac{m\omega}{2}x^2 - \frac{b}{\omega}x\right]$	تابع موج شرودینگر
$E_{0\gamma,SH} = (2\gamma+6)\frac{\omega}{2} - \frac{2mc^2}{(2\gamma+5)^2}$	انرژی شرودینگر
$\psi_{0\gamma,DI} = \begin{pmatrix} \phi_{0\gamma}(x) \\ \frac{-i\vec{\sigma}\cdot\hat{x}}{E_{0\gamma}+3m_1} \left[\frac{d\phi_{0\gamma}}{dx} - i\vec{\sigma}\cdot\hat{l}\phi_{0\gamma} \right] \end{pmatrix} Y_{(\gamma)\ell_p\ell_2}(\Omega_{\rho}, \Omega_{\lambda}, \xi)$	تابع موج دیراک
$\phi_{0\gamma}(x) = N_{0\gamma} x^\gamma \exp\left[-(E_{0\gamma} + 3m_1)\omega x^2 - \frac{b}{2\omega}x\right]$	

$E_{0\gamma,DI} = \frac{N(2\gamma+7)^2 [m_1 + \omega(2\gamma+6)] - 9m_1c^2}{(2\gamma+5)^2 + 3c^2}$	انرژی دیراک
--	-------------

جدول (6- 1b) ، ویژه مقایر و ویژه توابع شرودینگر و دیراک برای پتانسیل $V(x) = \alpha x^2$

$\psi_{0\gamma,SH} = N_{0\gamma} x^\gamma \exp\left[-\frac{1}{2} m \omega x^2\right]$	تابع موج شرودینگر
$E_{0\gamma,SH} = (2\gamma+6) \frac{\omega}{2}$	انرژی شرودینگر
$\psi_{0\gamma,DI} = \left(\begin{array}{c} \phi_{0\gamma}(x) \\ \frac{-i\sigma_x \hat{x}}{E_{0\gamma} + 3m_1} \left[\frac{d\phi_{0\gamma}}{dx} - i\vec{\sigma} \cdot \vec{L} \phi_{0\gamma}(x) \right] \end{array} \right) Y_{(\gamma)\ell_p \ell_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi)$	تابع موج دیراک
$\phi_{0\gamma}(x) = N_{0\gamma} x^\gamma \exp\left[-(E_{0\gamma} + 3m_1)\omega x^2\right]$	
$E_{0\gamma,DI} = 3m_1 + 3\omega(2\gamma+6)$	انرژی دیراک

جدول (6- 1c) ، ویژه مقایر و ویژه توابع شرودینگر و دیراک برای پتانسیل $V(x) = -\frac{c}{x}$

$\psi_{0\gamma,SH} = N_{0\gamma} x^\gamma \exp[-x]$	تابع موج شرودینگر
$E_{0\gamma,SH} = \frac{-2mc^2}{(2\gamma+5)^2}$	انرژی شرودینگر
$\psi_{0\gamma,DI} = \left(\begin{array}{c} \phi_{0\gamma}(x) \\ \frac{-i\sigma_x \hat{x}}{E_{0\gamma} + 3m_1} \left[\frac{d\phi_{0\gamma}}{dx} - i\vec{\sigma} \cdot \vec{L} \phi_{0\gamma}(x) \right] \end{array} \right) Y_{(\gamma)\ell_p \ell_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi)$	تابع موج دیراک
$\phi_{0\gamma}(x) = N_{0\gamma} x^\gamma \exp\left[-\frac{1}{2} x\right]$	
$E_{0\gamma,DI} = \frac{3m_1(2\gamma+5)^2}{(2\gamma+5)^2 + 3c^2} - \frac{9m_1c^2}{(2\gamma+5)^2 + 3c^2}$	انرژی دیراک

حالتی را در نظر می گیریم که فقط یک ذره وجود داشته باشد (تک ذره) و فرض می کنیم که جرم ذره صفر باشد. با انتخاب $a=0, b=0, c=0$ ، یعنی درغیاب پتانسیل معادله 6-17 نتیجه زیر را می دهد

$$\left(\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} + 2\rho \frac{d}{d\rho} - \gamma(\gamma+1) + \rho^2 \right) \phi_{0\gamma}(\rho) = 0 \quad (35-6)$$

که همان معادله دیفرانسیل بسل است که مولفه بالای آن

$$\phi_{00}(\rho) = N_{00} j_0(\rho) \quad (36-6)$$

و کل تابع موج به صورت زیر خواهد شد

$$\psi_{00} = \frac{N_{00}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j_0(\rho) \\ i \vec{\sigma} \cdot \hat{x} j_1(\rho) \end{pmatrix} \quad (37-6)$$

ρ معرف شعاع کره است که در این صورت برابر 2.04 خواهد شد که محل تلاقی مولفه بالای و پایینی تابع موج خواهد بود. و این همان نتیجه ای است که از مدل کیسه ای MIT نیز حاصل شده است. حال به سراغ سیستم باریونی می رویم و فرض می کنیم که کوارک هایی که باریون را شکل داده اند دارای جرم یکسان باشند. از معادلات 6-24 و 6-34 داریم

$$x_{\text{beg}} = \frac{1}{\omega} - \frac{b}{2M(1+f)\omega^2} \quad (38a-6)$$

$$M^2(1+f^2) = 18\omega M(1+f) - \frac{3b^2}{4\omega^2} \quad (38b-6)$$

که در آن $f = \frac{3m_1}{M}$ است و در آن M جرم باریون است. به عنوان یک مثال از خانواده باریون

ها پروتون را در نظر می گیریم. برای پروتون 938MeV است. فرض می کنیم که کوارک هایی

که پروتون را تشکیل داده اند دارای جرم سکون 5MeV هستند. پس در این حالت $f=0.016$

خواهد شد. برای پروتون $\langle x_{bag} \rangle \approx 1.5 fm$ در نظر می گیریم. با استفاده از معادلات (38a-6) و (38b-6) می توانیم ω و b و همچنین مقادیر a, b, c, α, β را حساب کنیم که این مقادیر را در جدول 2-6 ثبت کرده ایم. ضمن آن که می دانیم شعاع باری به صورت زیر تعریف می شود.

$$\langle x^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\int_0^{\infty} \left[1 + \frac{\left((E_{00} + 3m_1)x + \frac{b}{2\omega} \right)^2}{E_{00}^2 \left(1 + \left(\frac{m_1}{E_{00}} \right)^2 \right)^2} \right] x^7 dx}{\int_0^{\infty} \left[1 + \frac{\left((E_{00} + 3m_1)x + \frac{b}{2\omega} \right)^2}{E_{00}^2 \left(1 + \left(\frac{m_1}{E_{00}} \right)^2 \right)^2} \right] x^5 dx} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (39-6)$$

$$\frac{\left[-\frac{1}{2}(E_{00} + 3m_1)\omega x^2 - \frac{b}{2\omega}x \right] x^7 dx \int_{[\gamma]l\rho l\gamma} (\Omega_\rho \Omega_\lambda, \xi) Y_{[\gamma]l\rho l\gamma}^* (\Omega_\rho \Omega_\lambda, \xi) d\Omega_\rho d\Omega_\lambda}{\left[-\frac{1}{2}(E_{00} + 3m_1)\omega x^2 - \frac{b}{2\omega}x \right] x^5 dx \int_{[\gamma]l\rho l\gamma} (\Omega_\rho \Omega_\lambda, \xi) Y_{[\gamma]l\rho l\gamma}^* (\Omega_\rho \Omega_\lambda, \xi) d\Omega_\rho d\Omega_\lambda}$$

سپس نتایج بدست آمده را در جدول 2-6 قرار داده و شعاع باری متوسط را در هر حالت با استفاده از معادله 39-6 محاسبه نموده ایم. یک نگاه گذرا به جدول 2-6 نشان می دهد که نزدیک ترین نتیجه به نتایج تجربی حالتی است که در آن شعاع باری بدست آمده 0.8681 باشد. بنابراین مناسب ترین حالت $x_{bag} = 1.5(fm)$ است [60,63].

جدول 2-6 ، تعیین ضرایب پتانسیل پروتون

ω	a	b	C	α	β	x_{bag}	$\langle x^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$
0.4729	1.0567	2.3555	2.6353	2.234	2.49	1	0.7462
0.4526	0.9680	2.1474	2.5102	2.1386	2.3719	1.1	0.7710

0.4345	0.9184	1.9648	2.2969	2.043	2.1703	1.2	0.7978
0.4181	0.8262	1.8032	2.2817	1.9756	2.1560	1.3	0.8198
0.4033	0.7687	1.6590	2.1763	1.9057	2.0563	1.4	0.8440
0.3899	0.7182	1.5294	2.0757	1.8420	1.9813	1.5	0.8681
0.3775	0.6735	1.4123	1.9792	1.7838	1.8701	1.6	0.8922
0.3662	0.6338	1.3058	1.8865	1.7305	1.7525	1.7	0.9162
0.3558	0.5984	1.2085	1.7969	1.6814	1.6978	1.8	0.9404
0.3463	0.5665	1.1191	1.7100	1.6360	1.6158	1.9	0.9646
0.3374	0.5379	1.0366	1.6256	1.5941	1.5360	2	0.9890

با تکرار این عمل برای باریون های مختلف ضرایب پتانسیل را برای باریونهای مختلف بدست

آورده و در جدول 3-6 ثبت کرده ایم [64].

جدول 3-6 ضرایب پتانسیل برای باریونها با اسپین $\frac{1}{2}$

<i>Baryon</i>	$I(J^P)$	$a(fm^{-3})$	$b(fm^{-2})$	C
$N(938)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}^+\right)$	0.7182	1.5294	2.0757
$\Lambda(1115)$	$0\left(\frac{1}{2}^+\right)$	0.7024	1.5118	2.0831
$\Sigma(1189)$	$1\left(\frac{1}{2}^+\right)$	0.6935	1.4781	2.0894
$\Sigma(1192)$	$1\left(\frac{1}{2}^+\right)$	0.6927	1.4706	2.0907
$\Sigma(1197)$	$1\left(\frac{1}{2}^+\right)$	0.6919	1.4693	2.0913
$\Xi(1314)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}^+\right)$	0.5856	1.3852	2.1014

$\Xi(1321)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1^+}{2}\right)$	0.5819	1.3809	2.1032
$N(1440)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1^+}{2}\right)$	0.5226	1.3771	2.1085

با در نظر گرفتن پتانسیل های برهم کنش اسپینی و ایزواسپینی که در فصل قبل معرفی شده اند ، این اثرات را به عنوان اختلال در نظر گرفته و با استفاده از تابع موج 6-29 و استفاده از نتایج جدول 6-3 نتایج در جدول 6-4 وارد شده اند.

جدول 6-4 اثرات پتانسیل های برهم کنش اسپینی و ایزواسپینی در باریونها

<i>Baryon</i>	$I(J^P)$	$\Delta_s^{(1)} (MeV)$	$\Delta_I^{(1)} (MeV)$	$\Delta_{SI}^{(1)} (MeV)$
$N(938)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1^+}{2}\right)$	-30.15	-20.73	-12.07
$\Lambda(1115)$	$0\left(\frac{1^+}{2}\right)$	-23.17	-18.59	-11.83
$\Sigma(1189)$	$1\left(\frac{1^+}{2}\right)$	-22.85	-18.06	+11.13
$\Sigma(1192)$	$1\left(\frac{1^+}{2}\right)$	-21.13	-17.76	+11.03
$\Sigma(1197)$	$1\left(\frac{1^+}{2}\right)$	-20.72	-17.64	+10.85
$\Xi(1314)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1^+}{2}\right)$	-17.38	-13.29	-9.31
$\Xi(1321)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1^+}{2}\right)$	-17.19	-12.47	-8.65

$N (1440)$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1^+}{2} \right)$	-15.42	-19.04	-11.36
------------	--	--------	--------	--------

۳-۶- محاسبه $\frac{g_A}{g_V}$ با استفاده از تابع موج نسبیتی بدست آمده

معمولاً در برهم کنش های ضعیف که پاریته نقض می شود، جریان ضعیف به صورت ترکیبی از جریان برداری و شبه برداری می باشد. در وا پاشی بتا نیز ساختار نوکلئون ها در ثابت های جفت شدگی برداری و شبه برداری g_A و g_V ظاهر می شود. در مدل های غیر نسبیتی

نسبت $\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3}$ است ولی از لحاظ تجربی مقدار این نسبت 1.259 ± 0.017 است [54,55,66] با

توجه به رابطه مربوط به $\frac{g_A}{g_V}$

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} \langle L_Z \rangle \quad (40-6)$$

و با توجه به مقدار $\langle L_Z \rangle = 1 - 2\delta$ داریم

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} (1 - 2\delta) \quad (41-6)$$

که در آن

$$\delta = \frac{\frac{2}{3} \int_0^\infty |\chi_{\omega\gamma}(x)|^2 x^5 dx}{\int_0^\infty [|\phi_{\omega\gamma}(x)|^2 + |\chi_{\omega\gamma}(x)|^2] x^5 dx} \quad (42-6)$$

برای حالت پایه و به ازاء $\omega = \gamma = 0$ مقدار $\delta = 0.1176$ بدست می آید.

با جایگزینی δ در معادله (41-6) حاصل $\frac{g_A}{g_V}$ برابر 1.27 می شود که با نتایج تجربی سازگاری خیلی

خوبی دارد.

۴-۶- نتایج

- * - با توجه به نتایج بدست آمده مشخص میشود که نوع برهم کنش در نظر گرفته شده میان کوارک های درون باریون، تقریباً واقع بینانه بوده و مجموع سه پتانسیل نوسانی و خطی و کولنی تامین کننده اثرات QCD و نگهدارندگی را شامل شده است. زیرا در فواصل کوتاه، برهم کنش به صورت جاذبه کولنی و متناسب با $\frac{1}{r}$ است و در فواصل دور پتانسیل برهم کنش متناسب با r^2, r در نظر گرفته شده است.
- * - پتانسیل های برهم کنش اسپین - اسپین و ایزواسپین - ایزواسپین و اسپین - ایزواسپین را که بعنوان پتانسیل غیر نگهدارنده می شناسیم منظور کرده ایم.
- * - تابع موج حالت پایه و حالت برانگیخته باریون ها را در حالت غیر نسبیتی با استفاده از معادله شرودینگر حساب کرده ایم.
- * - انرژی حالت پایه برانگیخته باریون ها را در حالت غیر نسبیتی با استفاده از معادله شرودینگر بدست آورده ایم.
- * - اثرات پتانسیل غیر نگهدارنده را در جرم باریون ها با استفاده از تابع موج بدست آمده حساب کرده و نشان داده ایم که اثرات پتانسیل برهم کنش اسپین - اسپین از سایر برهم کنش ها بیشتر است.
- * - برای حل تحلیلی معادله شرودینگر به ازای پتانسیل های مختلف توابع حدسی را تعیین و در جدولی ارائه نموده ایم.
- * - ویژه مقادیر و ویژه توابع را در حالت نسبیتی برای باریون ها تعیین نموده ایم.

- * -در حالت نسبیتی توانستیم شعاع کره ای که کوارک های تشکیل دهنده ی باریون ها در آن محصور هستند را، حساب کنیم.
- * - در حالت نسبیتی ، اثرات برهم کنش فوق ریز را تعیین نموده ایم.
- * -از مقایسه ویژه مقادیر حالت نسبیتی و غیر نسبیتی ملاحظه می کنیم که در حالت نسبیتی اختلاف انرژی ترازها در حد KeV, MeV است در حالی که اختلاف انرژی ترازهای انرژی بدست آمده از معادله شرودینگر در حد eV است.
- * - در نظر گرفتن دما برای و محاسبه تابع پارش و سپس تعیین خواص ترمودینامیکی از موضوعات خوبی است که می تواند این مسیر را کامل تر کند.
- * - تعمیم این روش برای ذرت با اسپین یک و استفاده از معادله پروکا نیز از موضوعات جالب برای برای بررسی بوزونها می تواند باشد.

- [1]- F. E. Close, An Introduction to Quarks and protons,
Academic press, London (1979)
- [2]- M. Creutz, Quarks, Gluons and Lattices, Cambridge univ. press,
Cambridge (1983)
- [3]- T. Muta, Foundations of Quantum chromodynamics, 2nd
edition, World Scientific, Singapore(1998)
- [4]- H. J. pirner et al., Nucl. phys. B 294(1987) 905.
- [5]- R. G. Roberts, the structure of the proton, Cambridge university. press,
Cambridge (1990)
- [6]- C. Herberg et al. Eur. phys. J. A 5 (1999)131
- [7]- Particle Data Group, Review of particle physics, Eur. Phys. J. C 3
(1998), C 15 (2000)
- [8] - A. J. Dragt, J. Math. phys. 6(1965), 533.
- [9]- M. Fabre de La Ripelle, C. R. Acad. Sci.paris 274(1972),104
- [10]- T. K. Das; H. T. Coelho and M. Fabre de La Ripelle, phys.
Rev. C 126 (1982),2281
- [11]- J. L. Ballot, J. S. Levinger, and M. Fabre De La Ripelle, phys.
Rev. C 126 (1982),2301
- [12]- T. K. Schnider, phy. Lett. B 40(1972),439
- [13]- A. B. Volkov, NUCL. phys. 74(1965), 33.
- [14]- D. Gogny, p. pires, and R. De Turreil, phys. Lett. B 32 (1970), 591.
- [15]- M. Gell-Mann, phys. Lett. 8(1964) 214
- [16]- A. W. Thomas, W. Weise, the structure of the Nucleon, WILEY-VCH
- [17]- Proc. Int.conf.on the structure of Baryons, BARYONS'92,
Yale univ., 1992, M. Gai, ed., world scientific, Singapore (1993)
- [18]- R. P. Feynman, phys. Rev. Lett. 23(1969) 1415
- [19]- R. P. Feynman, photon-Hadron Interactions, Benjamin, Reading (1972)
- [20]- A. deRujula, H. Georgi and S. L. Glashow, phys. Rev. D 12(1975)147
- [21]- N. Isgur and G. Karl, phys. Rev. D 18 (1978) 4187
- [22]- Golzman, L.Ya and Riska, D.O., Phys. Rep. C268, 263(1996).

- [23]- Golzman, L.Ya, Z.Papp, W.Plessas, K.Varga, R.F.Wagenbrunn, Phys. Rev. C57, 3406(1998).
- [24]- Giannini, M.M., E. Santopinto and Vassalo A., Progress in particle and Nuclear physics 50,263-270 (2003).
- [25]- Fabre, M., Fabre De la Ripelle Nuclear physics A 497 (1989) 595c-602c.
- [26]- Giannini, M.M., E. Santopinto and Vassalo A., Nuclear physics A699, 308-311 (2002).
- [27]- Giannini, M.M., E. Santopinto and Vassalo A., Eur. Phys. J. A12, 447-482 (2001).
- [28]- Gunnar, S. Bali et al., Phys. ReV D 62, 054503 (2000).
- [29]- Gunnar, S.Bali, Phys. Rep 343, 1 (2001).
- [30]- Eichten E et al 1979 Phys. Rev. D 17, 3090-117.
- [31]- Bohm M 1980 Z. Phys. C 3, 321-8
- [32]- Barbour I M and Ponting D K 1980 Z Phys. C 4, 119-29.
- [33]- Badalayan A M 1987 Phys. Lett. (1988) 267- 70.
- [34]- Iachello, F., Proceedinge of the 1st international Conference on Perspectives in hadronic Physics, ICTP Trieste 12-16 May 1997, edited by S. Boffi, C. Ciofi degle Atti, M.M. Giannini (World Scientific, Singapore, 1998) p. 363.
- [35]- Geiger, P., N. Isgur, Phys. Rev. D.41, 1595 (1990).
- [36]- M. Fabre De la Ripelle, Ann. Phys (N.Y).147, 281-320 (1983).
- [37]- G. Morpurgo, Nuovo Cimento 9, 461 (1952).
- [38]- A.A. Rajabi, Indian Journal of pure and applied physics vol41, pp. 89-94 February (2003).
- [39]- M. Znojil, J.Math Phys .31, (1990).
- [40]- Isgur, N., and Karl, Phys. REV. D19 (1978) 2653.
- [41]- Eichten E et al 1980 Phys. Rev. D 21 203-32.
- [42]- Geiger, P., N. Isgur, Phys. Rev. D. 44, 799 (1991).
- [43]- Geiger, P., N. Isgur, Phys. Rev.Lett. 67, 1066 (1991).
- [44]- Geiger, P., N. Isgur, Phys. Rev. D. 55, 299 (1997).
- [45]- J.L. Ballot and M. Fabre de la Ripelle, Ann. Phys. (N.Y.) 127 (1980) 62.
- [46]- Halzen. F & Martin D, Quarks and leptons, John Willy (1984) 168-169.
- [47]- Gunnar S. Bali et al., Phys. Rev D 62, 054503 (2000); Gunnar S. Bali, Phys. Rep 343, 1 (2001).

- [48]- M. Znojil, *J. Math Phys.* 31, (1990).
- [49]- M. Ferraris, M.M. Giannini, M. Pizzo, E. Santopinto, L. Tiator, *Phys. Lett. B* 364, 231 (1995).
- [50]- M. Campostrini, K. Moriarty, C. Rebbi, *Phys. Rev. D* 36, 3450 (1987);
L.Heller, in *quarks and Nuclear Forces*, edited by D.C. Vries, B. Zeitnitz, Springer
Tracts Mod. phys. Vol. 100 (Springer, Berlin, p. 145 1982).
- [51]- K. Gottfried, , *Hadronic Spectroscopy*, in: *Proc Int Euro: phys conf on High
energy Physics*, Brighton, (1983).
- [52]- L.J. Reinders, H.R Rubinstein & S. Yazaki, *Nucl Phys B*, 186 (1981) 109.
- [53]- M. Fabre De la Ripelle, “ *Proceeding of the International School on Nuclear
Theoretical Physics (Predeal 1969)*” (A. Corciovei, Ed), *Inst. Atom. Phys.*, Bucarest,
1969; *Rev. Roum. Phys.* 14 (1969) 1215.
- [54]- V.Aquilanti, S. Tonzanu, *J.chem. Phys* 126,4066(2004).
- [55]- O. I. Tolstikhin and H. Nakamura, *J. Chem. Phys.* 108, 8899 (1998).
- [56]- O. I. Tolstikhin, V. N. Ostrovsky, and H. Nakamura, *Phys. Rev. Lett.* 80, 41
(1998).
- [57]- Rajabi, A. A. *Few-Body systems* 37, 197-213(2005).
- [58]- R. Bijker, F. Ichello and A. Leviatan, *Ann. Phys (N.Y.)* 236, 69 (1994).
- [59]-H. Hassanabadi, A. A. Rajabi, *proceeding of the 13th International Conference,
foundations and Advances in nonlinear Science*, Minsk, September 25-28,2006.
- [60]-H. Hassanabadi, M. R. Shojaei and A. A. Rajabi, *proceeding of the 11th
International Conference, of Meson- Nucleon*, September 10-14, 2007, Julich,
Germany.
- [61]- M. R. Shojaei, A. A. Rajabi and H. Hassanabadi, *accepted for publication in
International Journal of Modern Physics Letter A*.
- [62]- H. Hassanabadi, A. A. Rajabi and M. R. Shojaei, *accepted for publication in
International Journal of Applied Mathematical*.
- [63]- H. Hassanabadi, A. A. Rajabi, *Few Body Systems*, Vo. 41, No. 1 (2007).
- [64]- H. Hassanabadi, A. A. Rajabi, *accepted for publication in Modern Physics
Letter A*.
- [65]- A.A. Rajabi, *Commun. Theor. Phys.*, 48: 151-158 (2007).
- [66]- A.A.Rajabi, *Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran* 16(1): 73-79 (2005).

ضمیمه الف

رسم مولفه بالایی و پایینی تابع موج نسبی و پتانسیل به ازای ضرایب مختلف

```
restart;  
m:=4.65;n:=3;d:=6;  
eq1:=i=(1/w)-b/(2*m*(1+z)*w^2);  
eq2:=m^2*(1-z^2)=m*(1+z)*n*w*d-(n*b^2)/(4*w^2);  
z:=0.016;
```

$$m=4.65 \quad n=3 \quad d=6 \quad eq1 := i = \frac{1}{w} - \frac{0.1075268817 b}{(1+z) w^2}$$

$$eq2 := 21.6225 - 21.6225 z^2 = 83.70 (1+z) w - \frac{3 b^2}{4 w^2}$$

z:=0.016

```
for i from 1 by 0.1 to 2 do  
print(i),  
solve({eq1,eq2},{b,w})  
end do;
```

1

{ w = 0.4729365097, b = 2.355279392 }, { w = 2.797066030, b = -47.49450987 }

1.1

{ b = 2.147418149, w = 0.4526741490 }, { b = -37.80336291, w = 2.415096545 }

1.2

{ w = 0.4345316308, b = 1.964881220 }, { b = -30.70034330, w = 2.114081244 }

1.3

{ b = 1.803233598, w = 0.4181860693 }, { w = 1.871756262, b = -25.34883145 }

1.4

{ w = 0.4033796998, b = 1.659005608 }, { w = 1.673152208, b = -21.22258523 }

1.5

{ w = 0.3899040461, b = 1.529442280 }, { b = -17.97780687, w = 1.507874861 }

1.6

{ b = 1.412326933, w = 0.3775885648 }, { b = -15.38253750, w = 1.368506177 }

1.7

{ w = 0.3662923454, b = 1.305854448 }, { b = -13.27587653, w = 1.249625488 }

1.8

{ b = 1.208538564, w = 0.3558979429 }, { b = -11.54349029, w = 1.147189261 }

1.9

{ w = 0.3463067273, b = 1.119142929 }, { w = 1.058126109, b = -10.10239741 }

2.0

{ w = 0.3374353328, b = 1.036629031 }, { b = -8.891232841, w = 0.9800653022 }

0.4729365097; b := 2.355279392;

i*(1+z)*w^2;

a:=m*(1+z)*w;

=b/(2*w);

beta/(m*(1+z));

=Int(exp(-alpha*x^2-

ta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^7,x=0..infinity

=Int(exp(-alpha*x^2-

ta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^5,x=0..infinity

valf(eq3)/evalf(eq4));

t);

w := 0.4729365097

b := 2.355279392

a := 1.056701551

alpha := 2.234341246

beta := 2.490058754

c := 2.635317452

$$eq3 := \int_0^{\infty} \left(e^{(-2.234341246 x^2 - 4.980117508 x)} \right) \left(1 + 0.04480295699 (2.234341246 x + 2.490058754)^2 \right) x^7 dx$$

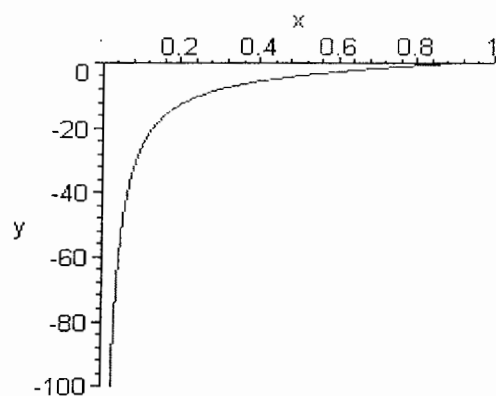
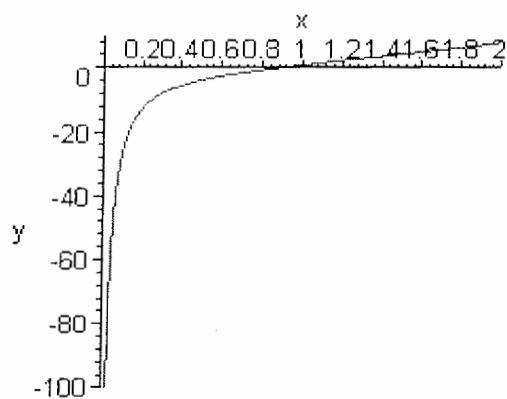
$$eqd := \int_0^{\infty} \left(e^{(-2.234341246 x^2 - 4.980117508 x)} (1 + 0.04480295699 (2.234341246 x + 2.490058754)^2) x^5 dx \right)$$

t := 0.5568178773

0.7462023032

```
eq5:=a*x^2+b*x-c/x;
plot(eq5,x=0..2,y=-100..10);
plot(eq5,x=0..1,y=-100..0);
```

$$eq5 := 1.056701551 x^2 + 2.355279392 x - \frac{2.635317452}{x}$$



```
eq6:=exp(-alpha*x^2/2-beta*x);
eq7:=(alpha*x+beta)/(m*(1+z))*eq6;
```

$$eq6 := e^{(-1.117170623 x^2 - 2.490058754 x)}$$

$$eq7 := 0.2116670900 (2.234341246 x + 2.490058754) e^{(-1.117170623 x^2 - 2.490058754 x)}$$

```
with(plots):
```

```
plot(eq6,x=0..2);
```

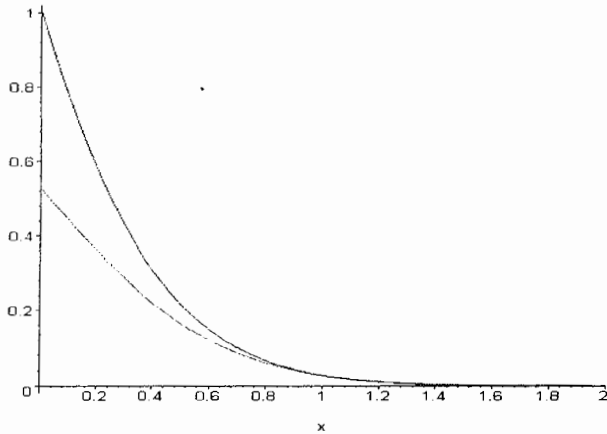
```
plot(eq7,x=0..2);
```

Warning, the name changecoords has been redefined

```
p1:=plot(eq6,x=0..2,color=blue);
```

```
p2:=plot(eq7,x=0..2);
```

```
display(p1,p2);
```



```

solve(eq6=eq7,x);
1.000000000
w := 0.4526741490; b := 2.147418149;
a:=m*(1+z)*w^2;
alpha:=m*(1+z)*w;
beta:=b/(2*w);
c:=5*beta/(m*(1+z));
eq3:=Int(exp(-alpha*x^2-
2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^7,x=0..infinity);
eq4:=Int(exp(-alpha*x^2-
2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^5,x=0..infinity);
t:=(evalf(eq3)/evalf(eq4));
sqrt(t);
a := 0.9680951592  alpha := 2.138613750  beta := 2.371924876  c := 2.510292181

```

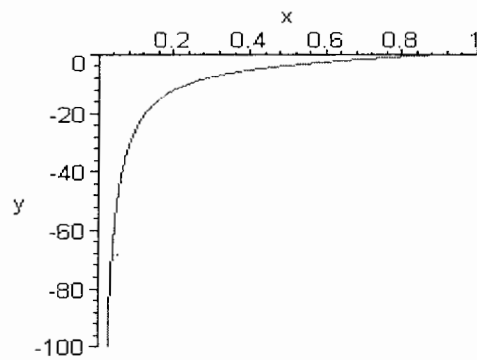
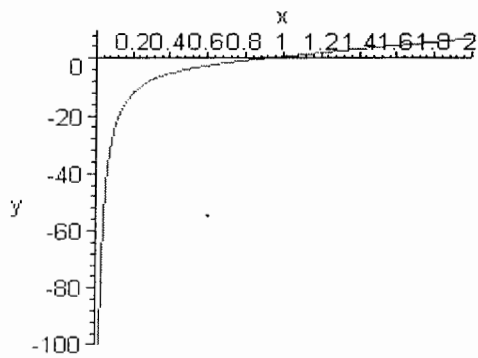
$$eq3 = \int_0^{\infty} \left(e^{(-2.138613750 x^2 - 4.743849752 x)} \right) (1 + 0.04480295699 (2.138613750 x + 2.371924876)^2) x^7 dx$$

$$eq4 = \int_0^{\infty} \left(e^{(-2.138613750 x^2 - 4.743849752 x)} \right) (1 + 0.04480295699 (2.138613750 x + 2.371924876)^2) x^5 dx$$

```

t := 0.5944444367  0.7710022287
eq5:=a*x^2+b*x-c/x;
plot(eq5,x=0..2,y=-100..10);
plot(eq5,x=0..1,y=-100..0);
eq5 := 0.9680951592 x^2 + 2.147418149 x - \frac{2.510292181}{x}

```

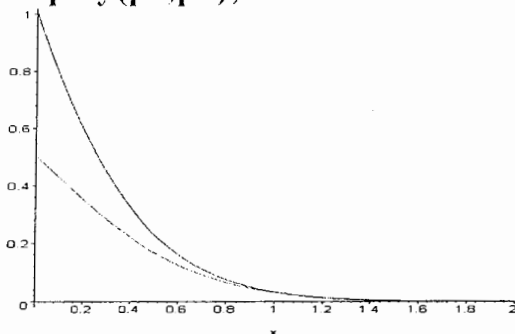


```
eq6:=exp(-alpha*x^2/2-beta*x);
eq7:=(alpha*x+beta)/(m*(1+z))*eq6;
```

```
eq6:= e(-1.069306875 x2 - 2.371924876 x)
```

```
eq7:= 0.2116670900 (2.138613750 x + 2.371924876) e(-1.069306875 x2 - 2.371924876 x)
```

```
p1:=plot(eq6,x=0..2,color=blue);
p2:=plot(eq7,x=0..2);
display(p1,p2);
```



```
with(plots):
plot(eq6,x=0..2);
plot(eq7,x=0..2);
solve(eq6=eq7,x);
1.100000000
b := 1.964881220; w =0.4345316308;
```

```

a:=m*(1+z)*w^2;
alpha:=m*(1+z)*w;
beta:=b/(2*w);
c:=5*beta/(m*(1+z));
eq3:=Int(exp(-alpha*x^2-
2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^7,x=0..infinity);
eq4:=Int(exp(-alpha*x^2-
2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^5,x=0..infinity);
t:=(evalf(eq3)/evalf(eq4));
sqrt(t);
a = 0.9680951592    alpha := 2.138613750    beta := 2.170304207
c := 2.296909880

```

$$eq3 = \int_0^{\infty} \left(e^{(-2.138613750 x^2 - 4.340608414 x)} \right)_{(1 + 0.04480295699 (2.138613750 x + 2.170304207)^2)} x^7 dx$$

$$eq4 = \int_0^{\infty} \left(e^{(-2.138613750 x^2 - 4.340608414 x)} \right)_{(1 + 0.04480295699 (2.138613750 x + 2.170304207)^2)} x^5 dx$$

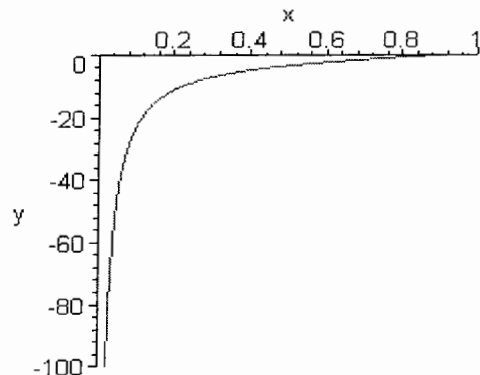
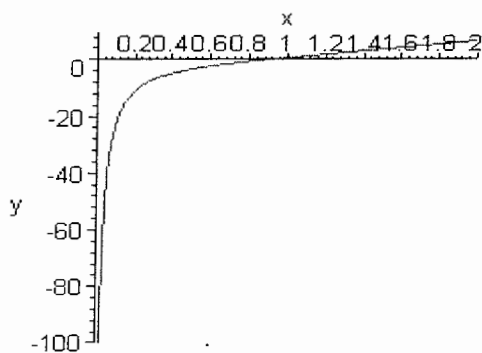
```
t = 0.6365947108    0.7978688556
```

```

eq5:=a*x^2+b*x-c/x;
plot(eq5,x=0..2,y=-100..10);
plot(eq5,x=0..1,y=-100..0);

```

$$eq5 = 0.9680951592 x^2 + 1.964881220 x - \frac{2.296909880}{x}$$



```

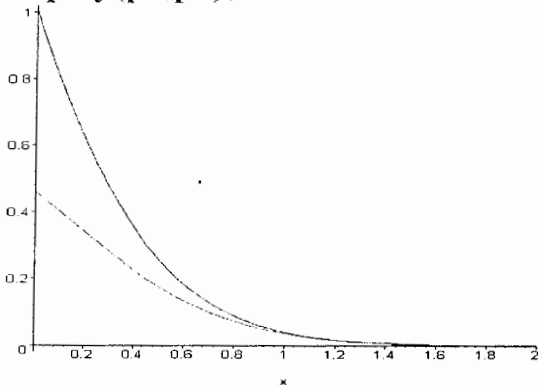
eq6:=exp(-alpha*x^2/2-beta*x);
eq7:=(alpha*x+beta)/(m*(1+z))*eq6;

```

$$eq6 = e^{(-1.069306875 x^2 - 2.170304207 x)}$$

$$eq7 := 0.2116670900 (2.138613750 x + 2.170304207) e^{(-1.069306875 x^2 - 2.170304207)}$$

```
with(plots):
plot(eq6,x=0..2);
plot(eq7,x=0..2);
p1:=plot(eq6,x=0..2,color=blue);
p2:=plot(eq7,x=0..2);
display(p1,p2);
```



```
solve(eq6=eq7,x);
```

1.194276336

```
b := 1.803233598; w := 0.4181860693;
```

```
a:=m*(1+z)*w^2;
```

```
alpha:=m*(1+z)*w;
```

```
beta:=b/(2*w);
```

```
c:=5*beta/(m*(1+z));
```

```
eq3:=Int(exp(-alpha*x^2-2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^7,x=0..infinity);
```

```
eq4:=Int(exp(-alpha*x^2-2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^5,x=0..infinity);
```

```
t:=(evalf(eq3)/evalf(eq4));
```

```
sqrt(t);
```

$\alpha := 0.8262011284$ $\alpha := 1.975678266$ $\beta := 2.156018254$ $c := 2.281790549$

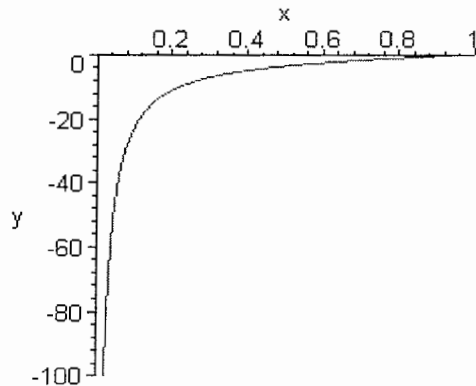
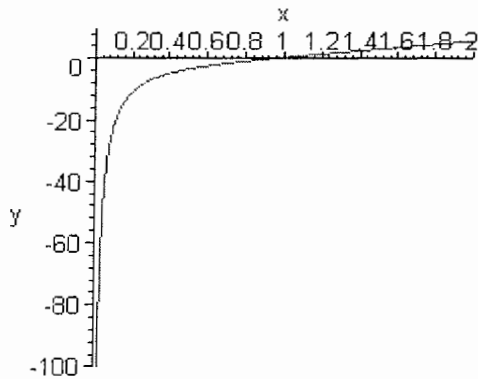
$$eq3 = \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.975678266 x^2 - 4.312036508 x)} \right) (1 + 0.04480295699 (1.975678266 x + 2.156018254)^2) x^7 dx$$

$$eq4 = \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.975678266 x^2 - 4.312036508 x)} \right) (1 + 0.04480295699 (1.975678266 x + 2.156018254)^2) x^5 dx$$

```
t:=0.6721667727      0.8198577759
```

```
eq5:=a*x^2+b*x-c/x;
plot(eq5,x=0..2,y=-100..10);
plot(eq5,x=0..1,y=-100..0);
```

$$eq5 := 0.8262011284 x^2 + 1.803233598 x - \frac{2.281790549}{x}$$



```
eq6:=exp(-alpha*x^2/2-beta*x);
eq7:=(alpha*x+beta)/(m*(1+z))*eq6;
```

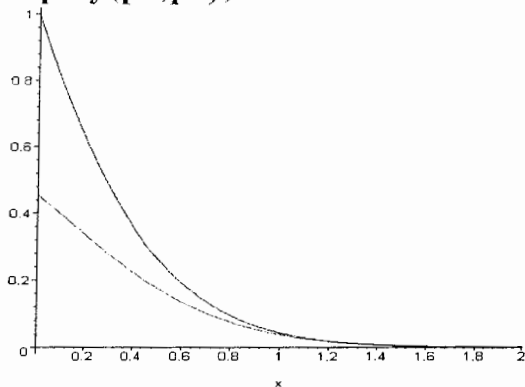
$$eq6 := e^{(-0.9878391330 x^2 - 2.156018254 x)}$$

$$eq7 = 0.2116670900 (1.975678266 x + 2.156018254) e^{(-0.9878391330 x^2 - 2.156018254 x)}$$

```
with(plots):
```

```
plot(eq6,x=0..2);
plot(eq7,x=0..2);
```

```
p1:=plot(eq6,x=0..2,color=blue);
p2:=plot(eq7,x=0..2);
display(p1,p2);
```



```
solve(eq6=eq7,x);
```

```
1.3000000000
```

```
b := 1.659005608; w :=0.4033796998;
```

```

a:=m*(1+z)*w^2;
alpha:=m*(1+z)*w;
beta:=b/(2*w);
c:=5*beta/(m*(1+z));
eq3:=Int(exp(-alpha*x^2-
2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^7,x=0..infinity);
eq4:=Int(exp(-alpha*x^2-
2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^5,x=0..infinity);
t:=(evalf(eq3)/evalf(eq4));
sqrt(t);

```

a := 0.7687316068 α := 1.905727054 β := 2.056382124 c := 2.176342100

$$eq3 := \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.905727054 x^2 - 4.112764248 x)} \right)_{(1 + 0.04480295699 (1.905727054 x + 2.056382124)^2)} x^7 dx$$

$$eq4 := \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.905727054 x^2 - 4.112764248 x)} \right)_{(1 + 0.04480295699 (1.905727054 x + 2.056382124)^2)} x^5 dx$$

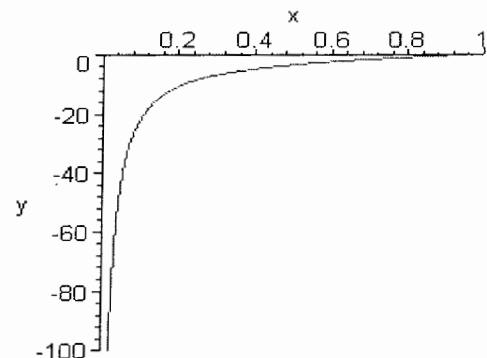
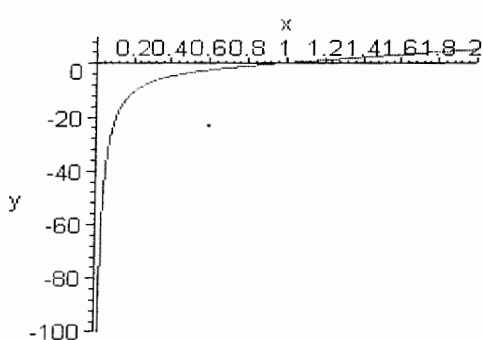
t := 0.7124100364 0.8440438593

```

eq5:=a*x^2+b*x-c/x;
plot(eq5,x=0..2,y=-100..10);
plot(eq5,x=0..1,y=-100..0);

```

$$eq5 := 0.7687316068 x^2 + 1.659005608 x - \frac{2.176342100}{x}$$



```

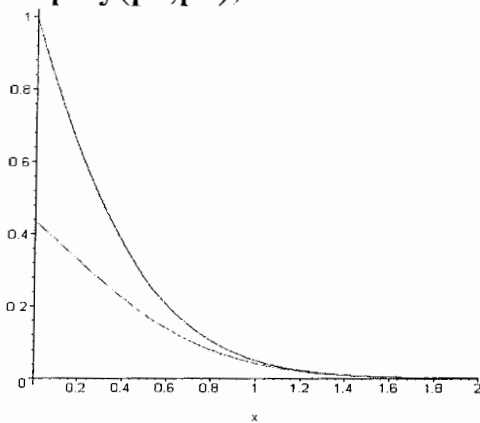
eq6:=exp(-alpha*x^2/2-beta*x);
eq7:=(alpha*x+beta)/(m*(1+z))*eq6;

```


$$eq6 := e^{(-0.9528635270 x^2 - 2.056382124 x)}$$

$$eq7 := 0.2116670900 (1.905727054 x + 2.056382124) e^{(-0.9528635270 x^2 - 2.056382124 x)}$$

```
with(plots):
plot(eq6,x=0..2);
plot(eq7,x=0..2);
p1:=plot(eq6,x=0..2,color=blue);
p2:=plot(eq7,x=0..2);
display(p1,p2);
```



```
solve(eq6=eq7,x);
```

```
1.400000000 .
```

```
b := 1.529442280; w := 0.3899040461
```

```
a := m*(1+z)*w^2;
```

```
alpha := m*(1+z)*w;
```

```
beta := b/(2*w);
```

```
c := 5*beta/(m*(1+z));
```

```
eq3 := Int(exp(-alpha*x^2 - 2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^7, x=0..infinity);
```

```
eq4 := Int(exp(-alpha*x^2 - 2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^5, x=0..infinity);
```

```
t := (evalf(eq3)/evalf(eq4));
```

```
sqrt(t);
```

```
a := 0.7182276905 alpha := 1.842062675 beta := 1.961305987 c := 2.075719654
```

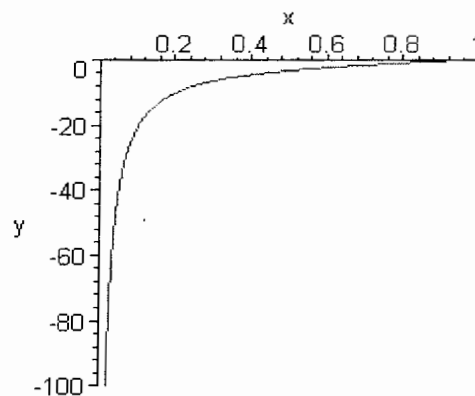
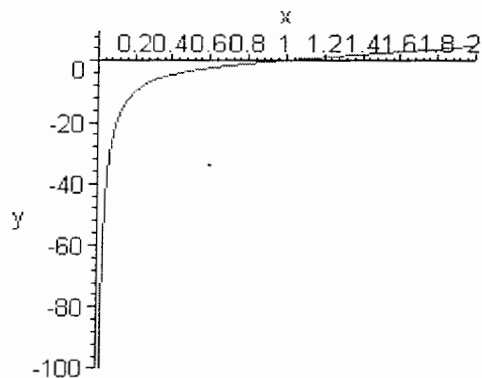
$$eq3 := \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.842062675 x^2 - 3.922611974 x)} \right)_{(1 + 0.04480295699 (1.842062675 x + 1.961305987)^2)} x^7 dx$$

$$eq4 := \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.842062675 x^2 - 3.922611974 x)} \right)_{(1 + 0.04480295699 (1.842062675 x + 1.961305987)^2)} x^5 dx$$

```
t:=0.7536744632 0.8681442640
```

```
eq5:=a*x^2+b*x-c/x;  
plot(eq5,x=0..2,y=-100..10);  
plot(eq5,x=0..1,y=-100..0);
```

$$eq5 = 0.7182276905 x^2 + 1.529442280 x - \frac{2.075719654}{x}$$



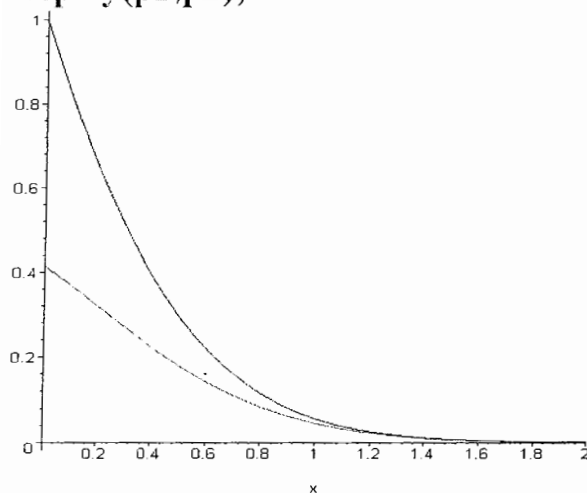
```
eq6:=exp(-alpha*x^2/2-beta*x);  
eq7:=(alpha*x+beta)/(m*(1+z))*eq6;
```

$$eq6 = e^{(-0.9210313375 x^2 - 1.961305987 x)}$$

$$eq7 = 0.2116670900 (1.842062675 x + 1.961305987) e^{(-0.9210313375 x^2 - 1.961305987)}$$

```
with(plots):  
plot(eq6,x=0..2);  
plot(eq7,x=0..2);
```

```
p1:=plot(eq6,x=0..2,color=blue);  
p2:=plot(eq7,x=0..2);  
display(p1,p2);
```



```

solve(eq6=eq7,x);
1.500000000
w :=0.3775885648; b := 1.412326933;
a:=m*(1+z)*w^2;
alpha:=m*(1+z)*w;
beta:=b/(2*w);
c:=5*beta/(m*(1+z));
eq3:=Int(exp(-alpha*x^2-
2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^7,x=0..infinity);
eq4:=Int(exp(-alpha*x^2-
2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^5,x=0..infinity);
t:=(evalf(eq3)/evalf(eq4));
sqrt(t);

```

a := 0.6735724684 α := 1.783879416 β := 1.870192936 c := 1.979291482

$$eq3 = \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.783879416 x^2 - 3.740385872 x)} \right) (1 + 0.04480295699 (1.783879416 x + 1.870192936)^2)^7 x^7 dx$$

$$eq4 = \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.783879416 x^2 - 3.740385872 x)} \right) (1 + 0.04480295699 (1.783879416 x + 1.870192936)^2)^2 x^5 dx$$

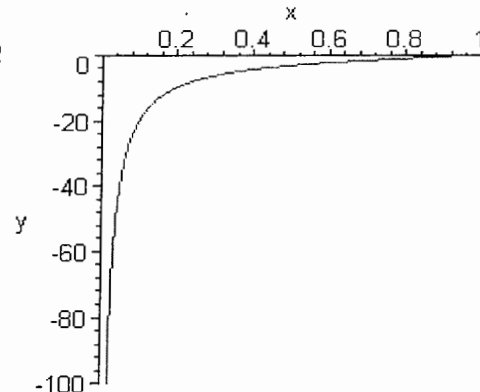
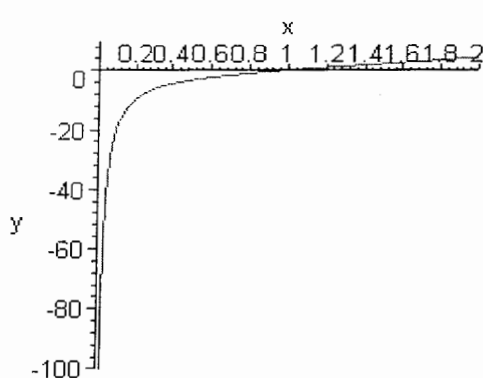
t := 0.7960376632 0.8922094279

```

eq5:=a*x^2+b*x-c/x;
plot(eq5,x=0..2,y=-100..10);
plot(eq5,x=0..1,y=-100..0);

```

$$eq5 = 0.6735724684 x^2 + 1.412326933 x - \frac{1.979291482}{x}$$



```

eq6:=exp(-alpha*x^2/2-beta*x);

```

```
eq7:=(alpha*x+beta)/(m*(1+z))*eq6;
```

$$eq6 := e^{(-0.8919397080 x^2 - 1.870192936 x)}$$

$$eq7 := 0.2116670900 (1.783879416 x + 1.870192936) e^{(-0.8919397080 x^2 - 1.870192936 x)}$$

```
with(plots):
```

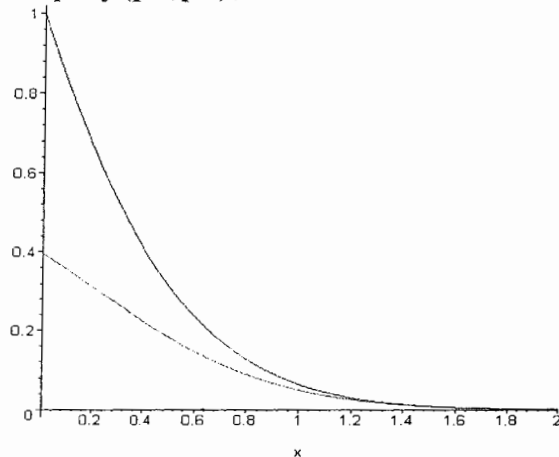
```
plot(eq6,x=0..2);
```

```
plot(eq7,x=0..2);
```

```
p1:=plot(eq6,x=0..2,color=blue);
```

```
p2:=plot(eq7,x=0..2);
```

```
display(p1,p2);
```



```
solve(eq6=eq7,x);
```

```
1.5999999999
```

```
b := 1.305854448; w := .3662923454;
```

```
a:=m*(1+z)*w^2;
```

```
alpha:=m*(1+z)*w;
```

```
beta:=b/(2*w);
```

```
c:=5*beta/(m*(1+z));
```

```
eq3:=Int(exp(-alpha*x^2-2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^7,x=0..infinity);
```

```
eq4:=Int(exp(-alpha*x^2-2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^5,x=0..infinity);
```

```
t:=(evalf(eq3)/evalf(eq4));
```

```
sqrt(t);
```

```
a := 0.6338731368 alpha := 1.730511557 beta := 1.782530354 c := 1.886515064
```

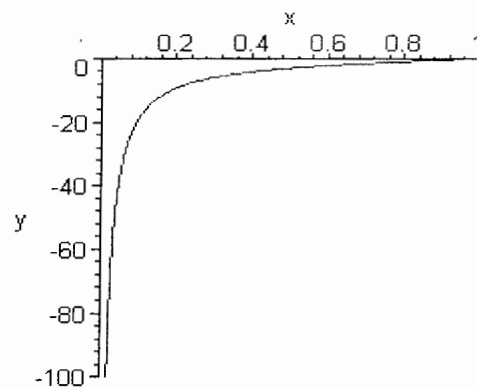
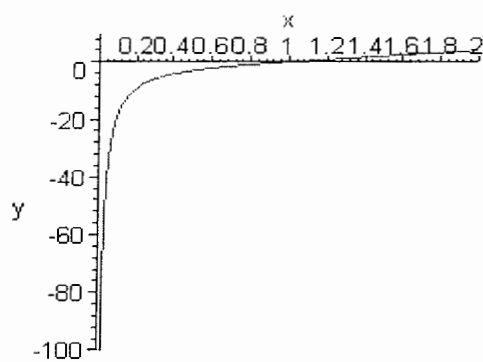
$$eq3 = \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.730511557 x^2 - 3.565060708 x)} \right)_{(1 + 0.04480295699 (1.730511557 x + 1.782530354)^2) x^7} dx$$

$$eq4 = \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.730511557 x^2 - 3.565060708 x)} \right) (1 + 0.04480295699 (1.730511557 x + 1.782530354)^2) x^5 dx$$

t:= 0.8395807327 0.9162863814

```
eq5:=a*x^2+b*x-c/x;
plot(eq5,x=0..2,y=-100..10);
plot(eq5,x=0..1,y=-100..0);
```

$$eq5 := 0.6338731368 x^2 + 1.305854448 x - \frac{1.886515064}{x}$$

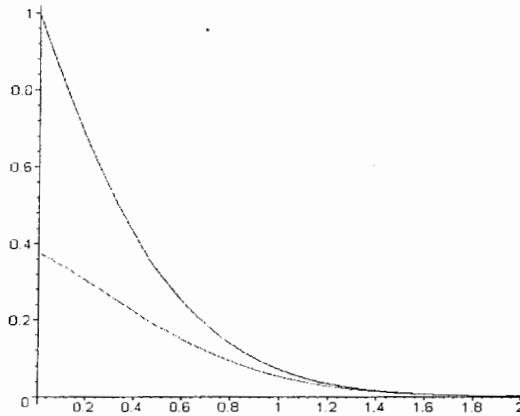


```
eq6:=exp(-alpha*x^2/2-beta*x);
eq7:=(alpha*x+beta)/(m*(1+z))*eq6;
```

$$eq6 = e^{(-0.8652557785 x^2 - 1.782530354 x)}$$

$$eq7 = 0.2116670900 (1.730511557 x + 1.782530354) e^{(-0.8652557785 x^2 - 1.782530354 x)}$$

```
with(plots):
plot(eq6,x=0..2);
plot(eq7,x=0..2);
p1:=plot(eq6,x=0..2,color=blue):
p2:=plot(eq7,x=0..2):
display(p1,p2);
```



```

solve(eq6=eq7,x);
1.6999999999
w :=0.3558979429; b := 1.208538564;
a:=m*(1+z)*w^2;
alpha:=m*(1+z)*w;
beta:=b/(2*w);
c:=5*beta/(m*(1+z));
eq3:=Int(exp(-alpha*x^2-
2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^7,x=0..infinity);
eq4:=Int(exp(-alpha*x^2-
2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^5,x=0..infinity);
t:=(evalf(eq3)/evalf(eq4));
sqrt(t);
a:= 0.5984083109  alpha := 1.681404241  beta := 1.697872365  c:= 1.796918514

```

$$eq3 = \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.681404241 x^2 - 3.395744730 x)} \right) (1 + 0.04480295699 (1.681404241 x + 1.697872365)^2)^{-2} x^7 dx$$

$$eq4 = \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.681404241 x^2 - 3.395744730 x)} \right) (1 + 0.04480295699 (1.681404241 x + 1.697872365)^2)^{-2} x^5 dx$$

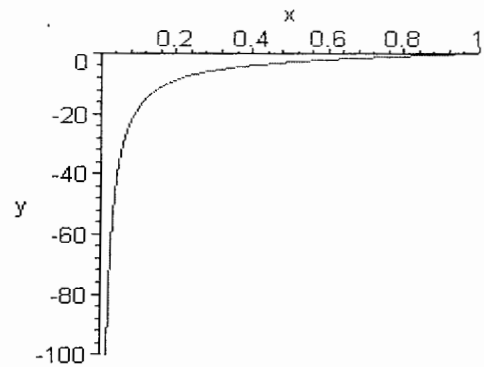
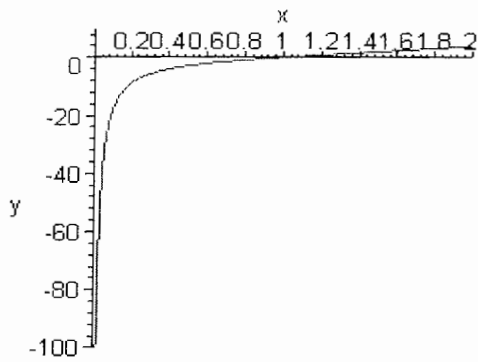
$$t = 0.8843892797 \quad 0.9404197359$$

```

eq5:=a*x^2+b*x-c/x;
plot(eq5,x=0..2,y=-100..10);
plot(eq5,x=0..1,y=-100..0);

```

$$eq5 = 0.5984083109 x^2 + 1.208538564 x - \frac{1.796918514}{x}$$



```
eq6:=exp(-alpha*x^2/2-beta*x);
eq7:=(alpha*x+beta)/(m*(1+z))*eq6;
```

```
eq6:= e(-0.8407021205 x2 - 1.697872365 x)
```

```
eq7:= 0.2116670900 (1.681404241 x + 1.697872365) e(-0.8407021205 x2 - 1.697872365 x)
```

```
with(plots):
```

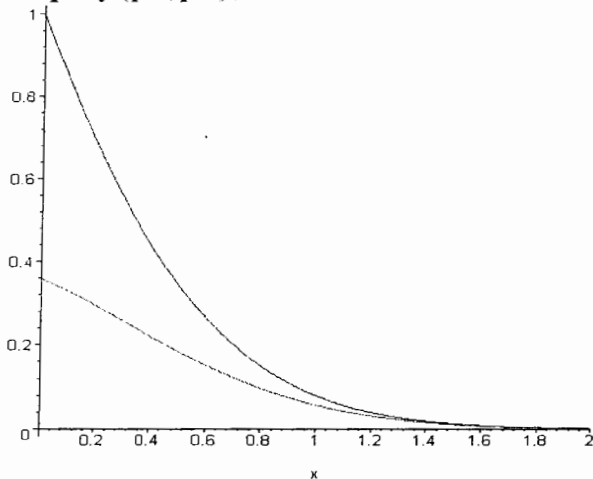
```
plot(eq6,x=0..2);
```

```
plot(eq7,x=0..2);
```

```
p1:=plot(eq6,x=0..2,color=blue);
```

```
p2:=plot(eq7,x=0..2);
```

```
display(p1,p2);
```



```
solve(eq6=eq7,x);
```

```
1.800000001
```

```
b := 1.119142929; w :=0.3463067273;
```

```

a:=m*(1+z)*w^2;
alpha:=m*(1+z)*w;
beta:=b/(2*w);
c:=5*beta/(m*(1+z));
eq3:=Int(exp(-alpha*x^2-
2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^7,x=0..infinity);
eq4:=Int(exp(-alpha*x^2-
2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^5,x=0..infinity);
t:=(evalf(eq3)/evalf(eq4));
sqrt(t);

```

```

a := 0.5665894939   alpha := 1.636091502   beta := 1.615826146
c := 1.710086092

```

$$eq3 := \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.636091502 x^2 - 3.231652292 x)} \right) (1 + 0.04480295699 (1.636091502 x + 1.615826146)^2)^{-2} x^7 dx$$

$$eq4 := \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.636091502 x^2 - 3.231652292 x)} \right) (1 + 0.04480295699 (1.636091502 x + 1.615826146)^2)^{-2} x^5 dx$$

```

t := 0.9305545017   0.9646525290

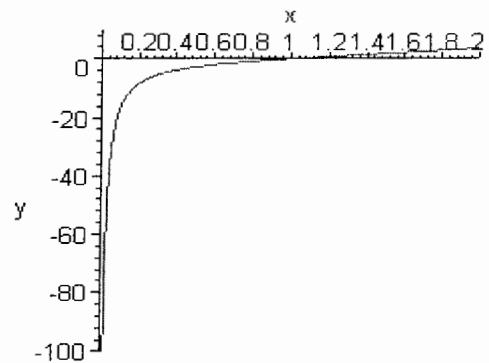
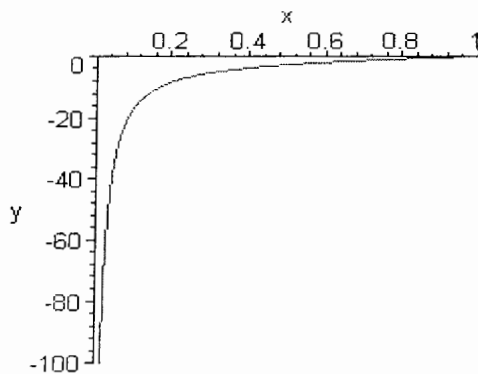
```

```

eq5:=a*x^2+b*x-c/x;
plot(eq5,x=0..2,y=-100..10);
plot(eq5,x=0..1,y=-100..0);

```

$$eq5 := 0.5665894939 x^2 + 1.119142929 x - \frac{1.710086092}{x}$$



```

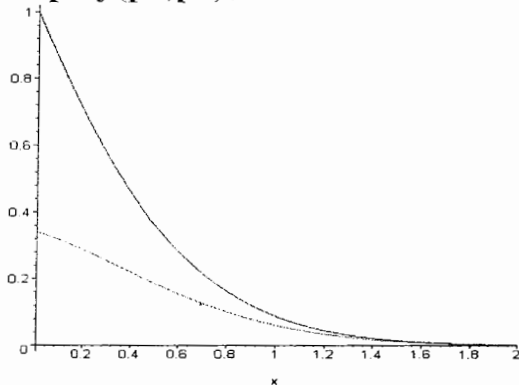
eq6:=exp(-alpha*x^2/2-beta*x);
eq7:=(alpha*x+beta)/(m*(1+z))*eq6;

```

$$eq6 := e^{(-0.8180457510 x^2 - 1.615826146 x)}$$

$$eq7 = 0.2116670900 (1.636091502 x + 1.615826146) e^{(-0.8180457510 x^2 - 1.615826146 x)}$$

```
with(plots):
plot(eq6,x=0..2);
plot(eq7,x=0..2);
p1:=plot(eq6,x=0..2,color=blue);
p2:=plot(eq7,x=0..2);
display(p1,p2);
```



```
solve(eq6=eq7,x);
```

1.9000000000

```
b := 1.036629031; w := 0.3374353328;
```

```
a:=m*(1+z)*w^2;
```

```
alpha:=m*(1+z)*w;
```

```
beta:=b/(2*w);
```

```
c:=5*beta/(m*(1+z));
```

```
eq3:=Int(exp(-alpha*x^2-
2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^7,x=0..infinity);
```

```
eq4:=Int(exp(-alpha*x^2-
2*beta*x)(1+(alpha*x+beta)^2/(m^2*(1+z)^2))*x^5,x=0..infinity);
```

```
t:=(evalf(eq3)/evalf(eq4));
```

```
sqrt(t);
```

$\alpha := 0.5379324854$ $\alpha := 1.594179486$ $\beta := 1.536041028$ $c := 1.625646672$

$$eq3 = \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.594179486 x^2 - 3.072082056 x)} \right) (1 + 0.04480295699 (1.594179486 x + 1.536041028)^2)^{-2} x^7 dx$$

$t = 0.9781743526$ 0.9890269726

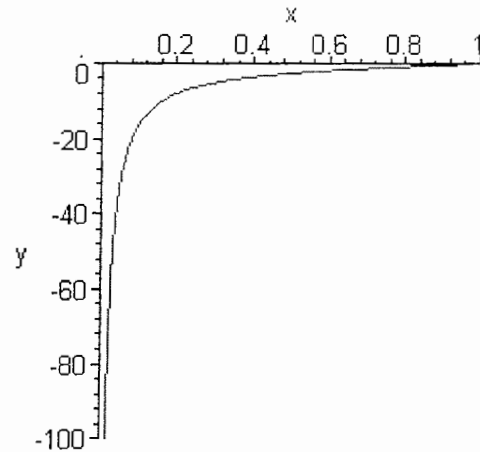
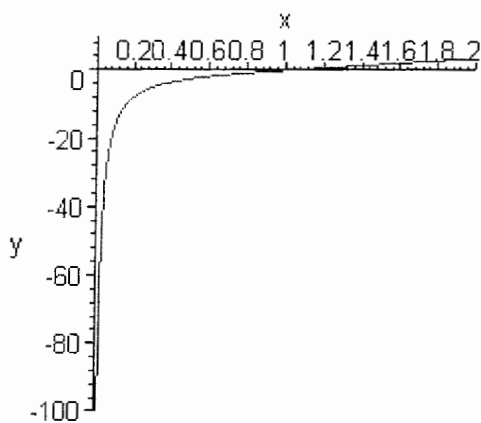
```
eq5:=a*x^2+b*x-c/x;
```

```
plot(eq5,x=0..2,y=-100..10);
```

```
plot(eq5,x=0..1,y=-100..0);
```

$$eq5 := 0.5379324854 x^2 + 1.036629031 x - \frac{1.625646672}{x}$$

$$eq4 := \int_0^{\infty} \left(e^{(-1.594179486 x^2 - 3.072082056 x)} \right) (1 + 0.04480295699 (1.594179486 x + 1.536041028)^2)^5 x^5 dx$$



```
eq6:=exp(-alpha*x^2/2-beta*x);
```

```
eq7:=(alpha*x+beta)/(m*(1+z))*eq6;
```

$$eq6 := e^{(-0.7970897430 x^2 - 1.536041028 x)}$$

$$eq7 := 0.2116670900 (1.594179486 x + 1.536041028) e^{(-0.7970897430 x^2 - 1.536041028 x)}$$

```
with(plots):
```

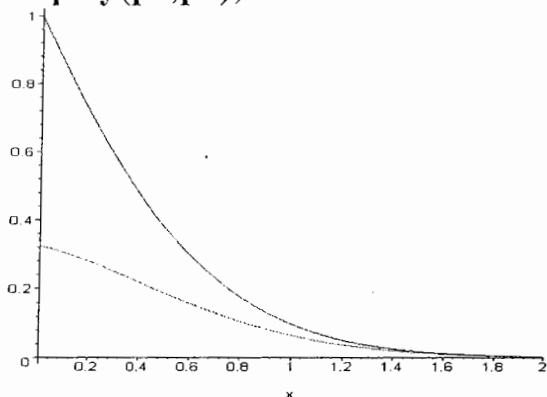
```
plot(eq6,x=0..2);
```

```
plot(eq7,x=0..2);
```

```
p1:=plot(eq6,x=0..2,color=blue);
```

```
p2:=plot(eq7,x=0..2);
```

```
display(p1,p2);
```



```
solve(eq6=eq7,x);
```

```
2.000000000
```

ضمیمه ب

چگالی لاگرانژ

اصل انتگرال کمترین کنش در فضای چاربرداری به صورت زیر است :

$$\delta I = \delta \int d^4x L(\phi, \partial_\mu \phi) = 0 \quad (1)$$

که در آن $L(\phi, \partial_\mu \phi)$ را چگالی لاگرانژ می نامیم. با اعمال کنش معادله اویلر- لاگرانژ به صورت زیر خواهد شد.

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (2)$$

ساده ترین چگالی لاگرانژی که می توان نوشت به صورت زیر است .

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^2) \quad (3)$$

که با جایگزینی در معادله (2) معادله زیر بدست می آید:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \mu^2) \phi(x) = 0 \quad (4)$$

که معادله (4) همان معادله کلاین - گوردن برای ذره آزاد است. برای چنین چگالی لاگرانژی، اندازه حرکت کانونی به صورت زیر است.

$$\Pi(X) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{C^2} \dot{\phi}(x) \quad (5)$$

و هامیلتونین سیستم نیز به صورت زیر بدست می آید :

$$H = \Pi \dot{\phi} - L = \frac{1}{2} C^2 \Pi^2 + \overline{\nabla \phi} \cdot \overline{\nabla \phi} + \mu^2 \phi^2 \quad (6)$$

و تانسور انرژی - اندازه حرکت نیز به صورت زیر تعیین می شود :

$$\tau^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} L = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} L \quad (7)$$

ضمن آنکه :

$$P^\nu = T^{0\nu} = \frac{1}{c} \phi \partial^\nu \phi - g^{0\nu} L, H = \dot{T} = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 - L \quad (8)$$

چگالی لاگرانژ برای معادله دیراک نیز به صورت زیر معرفی می شود:

$$L_D = C \bar{\psi}(X) \left[\partial^2 (i \hbar \partial_2 - mc) \right] \psi(x) \quad (9)$$

با قرار دادن در معادله اویلر-لاگرانژ:

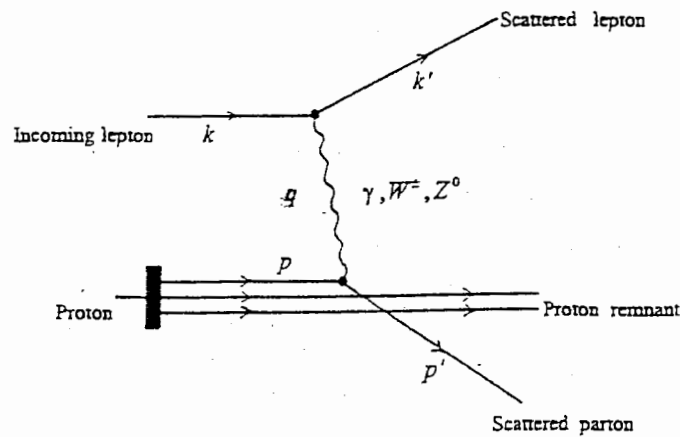
$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] - \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} = 0 \rightarrow \partial_\mu \left[-i \hbar c \frac{\gamma^\mu}{2} \psi \right] - \left[i \hbar c \partial_\mu \frac{\gamma^\mu}{2} \psi - mc^2 \psi \right] = 0 \\ \Rightarrow \left[i \hbar \gamma^2 \partial_\mu - mc \right] \psi(x) = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

با تکرار همین عمل می توان معادله مشابهی برای $\bar{\psi}(x)$ بدست آورد.

ضمیمه ج

پراکندگی کاملاً ناکشسان

توابع ساختار نوکلئون ها از طریق پراکندگی کاملاً غیرالاستیک لپتون ها با نوکلئون ها اندازه گیری می شود. در شکل یک فرآیند *DIS* لپتون-پروتون با تبادل تک بوزون نمایش داده شده است. کمیت های قابل اندازه گیری انرژی ابتدایی و نهایی لپتون و زاویه پراکندگی می باشند.



شکل یک فرآیند *DIS* لپتون-پروتون با تبادل تک بوزون سینماتیک چنین فرآیندی را می توان چنین بیان کرد.

$$l + N \rightarrow l' \rightarrow all \quad (1)$$

اگر k چار-تکانه لپتون اولیه و k' چار-تکانه لپتون پراکنده شده باشد، چار-تکانه بوزون مبادله شده عبارت است از

$$q = k - k' \quad (2)$$

کمیت های مهم و اساسی در پراکندگی کاملاً غیر کشسان عبارتند از:

$$Q^2 = -q^2 = -(k - k')^2$$

$$x = \frac{Q^2}{2pq} = \frac{Q^2}{2M_N v} \quad (3)$$

$$v = \frac{pq}{M_N}$$

q^2 مجذور تکانه انتقال یافته ، M_N جرم نوکلئون و P تکانه پروتون و v تفاضل انرژی نهایی و اولیه لپتون است.

برای درک ساختار داخلی نوکلئون ها ، در نظر گرفتن پراکندگی ذرات بدون ساختار مانند الکترون ها ، میون ها و نوترینوهای پر انرژی از نوکلئون ها ضروری است . از آنجایی که لپتون های پر انرژی ، طول موج های خیلی کوچکی دارند ، $\lambda \approx \frac{1}{E} < 0.2fm$ لذا کاوش ساختار داخلی ذرات امکان پذیر خواهد شد . در پراکندگی ناکشسان الکترون ، سطح مقطع دیفرانسیلی را برای الکترون هایی اندازه می گیریم که مقدار معینی انرژی به پروتون داده اند.

برای محاسبه سطح مقطع دیفرانسیلی در پراکندگی ناکشسان ، تانسور لپتونی $L_{\mu\nu}$ و $W_{\mu\nu}$ هادرونی به صورت زیر تعریف می شوند.

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} Tr \{ (p + m) \gamma (p + m') \gamma \} = 2 [p_\mu p'_\nu + \beta p'_\mu - g_{\mu\nu} p \cdot p' + g_{\mu\nu} m^2]$$

$$W_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{g_\mu g_\nu}{q^2} \right) W_1(Q^2, \nu) + (P_\mu + q_\mu) \frac{(Q^2, \nu)}{M_N^2} \quad (4)$$

سطح مقطع دیفرانسیلی ناقطبیده الکترون-نوکلئون د چارچوب آزمایشگاهی عبارت است از

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{E'}{E} \frac{\alpha^2}{Q^4} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad (5)$$

که در اینجا E', E توسط روابط زیر تعریف می شوند

$$P_\mu = (E, \vec{P})$$

$$P'_\mu = (E', \vec{P}') \quad (6)$$

از طرفی

$$P_\mu = (M_N, \vec{0}) \quad , \nu = \frac{p \cdot q}{M_N} = \frac{P_0(P - P')}{M_N} = \frac{M_N(E - E')}{M_N} = E - E' \quad (7)$$

با معرفی زاویه پراکندگی الکترون ، θ ، در سیستم آزمایشگاه ، که نوکلئون قبل از برخورد در حالت سکون قرار داشته است ، می توانیم سطح مقطع دیفرانسیلی را برحسب زاویه θ بنویسیم زیرا

$$\begin{aligned} \vec{P} \cdot \vec{P}' &= PP' \cos \theta = EE' \cos \theta \\ Q^2 &= 2P \cdot P' = 2(EE' - \vec{P} \cdot \vec{P}') = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

لذا خواهیم داشت :

$$\left. \frac{d^2 \sigma}{dE' d\Omega} \right|_{IN} = 4E' \frac{\alpha^2}{Q^2} \left[2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) W_1(Q^2, \nu) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) W_2(Q^2, \nu) \right] \quad (9)$$

که توابع $W_1(Q^2, \nu)$ و $W_2(Q^2, \nu)$ توابع ساختار غیر انحصاری می باشند.

Abstract

The constituent quark model (CQM) has recently been widely used for the description of the internal structure of baryons. The baryon spectrum is usually described well, although various models are quite different. However, the study of baryon spectroscopy is not sufficient to distinguish among the various forms of quark dynamics. It would be interesting to consider the effect of an extra residual interaction among the quarks, which contains a dependence on isospin (or flavour). In this work we have introduced an improved form of the hyperfine interaction and isospin dependent quark potential. What we have done then, is to calculate the eigenfunctions and the corresponding eigenvalues of the Schrödinger equation for the considered potential in the non relativistic limit. But, there is no spin term in Schrödinger equation and as a result there is no distinction between fermions and bosons.

With this motivation in mind, we have calculated the eigenfunctions and the corresponding eigenvalues of the Dirac equation. Finally we have compared the obtained results. Our study reveals that the results obtained by our model are very successful in describing the baryon spectrum and very close to experimental values.

Keyword: Schrödinger equation- Dirac equation- Baryon- Spin- Isospin