محدودیت روی قدرمطلق صفرهای چندجمله ای با قرار دادن شرایط روی ضرایب آن

علی مجیدی

۱۷ تیر ۱۳۹۱

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق ...

در این چند سطر بر خود واجب می دانم، از تلاشها و کمک های بی دریغ استاد راهنمای این پژوهش، جناب آقای دکتر احمد زیره، نهایت تشکر و امتنان را داشته باشم و هرگز حق بزرگ ایشان بر خویشرا فراموش نمی نمایم، که به من راه زندگی ودرس اخلاق نیز آموختند. همچنین از استاد مشاور پژوهش جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی، برای مشاوره های دقیق و کاربردی ایشان، سپاسگذارم.

در ادامه از تمام اساتید گرانقدرم، از ابتدا تاکنون، و بالأ خص اساتید دوره ی کارشناسی ارشد سپاس گذارم، که از ایشان بسیار آموختم، اساتیدی همچون جناب آقای دکتر احمد زیره، جناب آقای دکتر کامران شریفی، جناب آقای دکتر جعفری وکیلی و جناب آقای دکتر حجازی. بالأخص شاگرد خوبی نخواهم بود اگر سعه ی صدر و زحمات جناب آقای دکترشریفی را از یاد برده باشم، استادی که به من اعتماد به نفس آموخت.

از خداوند منان آرزوی سلامتی و توفیق روز افزون برای این اساتید خواهانم.

چکیده

در این رساله سعی بر آن است تا با تعیین شرایط جدید روی ضرایب چندجمله ای ها و توابع تحلیلی دقت کران قدرمطلق صفرهای آنها را به نحو مطلوبی بالا ببریم.
در فصل اول قضیه کشی و قضیه پلت برای چندجمله ایها را بیان می کنیم و به تعمیم آنها می پردازیم.
در بخش اول از فصل دوم کرانی برای صفرهای چندجمله ای بر پایه ضرایب آن بدست می آوریم و در بخش بعدی این کران را بهبود داده تا کرانی که چندجمله ای مورد نظر در آن هیچ صفری ندارد را بیابیم.
همچنین در فصل سوم به بررسی و تعیین کران برای صفرهای توابع تحلیلی پرداخته ایم. و در فصل چهارم کرانی برای صفرهای چندجمله ای ماتریسی بدست می آوریم و نشان می دهیم که هر جواب عمومی معادله دیفرانسیل را می توان به دو قسمت نرم کاهنده و متناوب تجزیه کرد.

واژه‌های کلیدی: چند جمله ایها ، توابع تحلیلی ، صفرها چندجمله ای و توابع تحلیلی ، ماتریس هرمیتی ، دستگاه معادلات دیفرانسیل ، مکان صفرهای چندجمله ای

پیشگفتار

با توجه به اهمیت چندجمله ای ها و توابع تحلیلی در آنالیز مختلط یافتن ریشه های چندجمله ای ها و توابع تحلیلی، ویا حداقل مکان آنها بسیار مهم نماید. گر چه قضیه اساسی جبر تعداد ریشه ها را مشخص می سازد اما قادر به پیدا کردن مکان ریشه ها نمی باشد. تحقیقات نشان داده است در صورتی که ($n \geq ۵$) روش مشخصی برای یافتن مکان دقیق ریشه ها وجود ندارد.
این مطلب موجب گشته است تا در سالهای اخیر مقالات زیادی بچاپ برسد ودر این مقالات با قرار دادن شرایط روی ضرایب آنها، مکان ریشه ها را مورد مطالعه قرار می دهد.
در قرن بیستم مسأله بررسی ریشه های یک چندجمله ای، یک قسمتی از نظریه کاربردی توابع را تشکیل داد. که این زمینه ی خاص در نظریه کابردی توابع، نظریه آنالیز چندجمله ای ها یا هندسه چندجمله ای ها نامیده می شود و یک مسأله بسیار مهم در آنالیز چندجمله ای ها، محاسبه و تخمین کرانهای بالایی و پایینی برای قدر مطلق ریشه های یک چندجمله ای مختلط است.
در این رساله سعی بر آن است تا با تعیین شرایط جدید روی ضرایب چندجمله ای ها و توابع تحلیلی دقت این کران صفرها را به نحو مطلوبی بالا ببریم.
در این روش ابتدا کرانهایی برای صفرهای چندجمله ای ها بر پایه ضرایب تعیین می شود و در گام بعدی این کرانها را بهبود داده تا کرانهایی که چندجمله ای مورد نظر در آن هیچ صفری ندارد را بیابیم.
وهمچنین به بررسی وتعیین کرانها برای توابع تحلیلی و چند جمله ای ماتریسی پرداخته ایم.

فهرست مطالب

را

فصل ۱
پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ کران کشی و کران پلت

در این بخش کران کشی[۱] و کرانهای پلت[۲] را تعریف می کنیم سپس قضیه کشی و قضیه پلت را بیان و اثبات می کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. زیر مجموعه D را دامنه گوئیم اگر D باز و همبند باشد و دامنه D را به همراه بعضی یا تمام نقاط مرزی آن ناحیه می نامیم.

قضیه ۲.۱.۱. قانون تغییر علامت دکارت: تعداد ریشه های مثبت یک چندجمله ای برابر با تعداد دفعات تغییر علامت ضرایب این چندجمله ای می باشد.

تعریف ۳.۱.۱. چندجمله ایهای زیر را در نظر می گیریم:

$$p(z) = a_n z^n - a_{n-۱} z^{n-۱} - \ldots - a_۱ z - a_۰$$

$$g(z) = |a_n| z^n - |a_{n-۱}| z^{n-۱} - \ldots - |a_۱| z - |a_۰|$$

تنها ریشه مثبت معادله $g(z) = ۰$ (با استفاده از قانون تغییر علامت دکارت) راکران کشی چندجمله ای $p(z)$ می نامیم.

[۱] Cauchys baund
[۲] Pellet baunds

تعریف ۴.۱.۱. چندجمله ای های زیر را در نظر می گیریم:

$$f(z) = a_n z^n + ... + a_{p+1} z^{p+1} - a_p z^p + ... + a_0, \quad (a_p \neq 0 \ , \ 0 < p < n)$$

$$h(z) = |a_n| z^n + ... + |a_{p+1}| z^{p+1} - |a_p| z^p + ... + |a_0|$$

دو ریشه مثبت معادله $h(z) = 0$ (با استفاده از قانون تغییر علامت دکارت) را کرانهای پلت چند جمله ای $f(z)$ می نامیم.

حال برای اثبات قضایای این فصل به چند لم نیاز داریم که در پایین به آنها اشاره خواهیم کرد.

قضیه ۵.۱.۱. (قضیه اساسی جبر) فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ و $a_n \neq 0$ یک چندجمله ای از درجه n باشد، آنگاه $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ وجود دارند به طوریکه

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$$

و لزوماً متمایز نیستند.

لم ۶.۱.۱. [۴۲] فرض می کنیم برای $m \geq 1$، $0 \leq k \leq m$، $a_k > 0$ و t_k اعداد مختلط باشند بطوریکه $t_k = e^{i\theta_k}$ آنگاه

$$|\sum_{k=0}^{m} a_k t_k| \leq \sum_{k=0}^{m} a_k, \tag{1.1}$$

و حالت تساوی (۱.۱) برقرار است اگروتنهااگربرای همه $0 \leq k \leq m$، $\arg(t_k) = \theta_k = c$ بطوریکه c ثابت است .

اثبات. فرض می کنیم که $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$ و $q = (q_1, q_2, ..., q_m)$ دنباله های مختلط باشند باتوجه به نامساوی کوشی داریم:

$$|\sum_{j=۰}^{m} p_j q_j| \leq \left(\sum_{j=۰}^{m} |p_j|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} \left(\sum_{j=۰}^{m} |q_j|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

و تساوی زمانی رخ می دهد که p و $\overline{q}$ متناسب باشند(یعنی $p = \lambda \overline{q}$ که λ ثابت است)

حال با قرار دادن $p_j = t_j \sqrt{a_j}$ و $q_j = \sqrt{a_j}$ داریم:

$$\begin{aligned} |\sum_{j=۰}^{m} t_j a_j| = |\sum_{j=۰}^{m} p_j q_j| &\leq \left(\sum_{j=۰}^{m} |p_j|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} \left(\sum_{j=۰}^{m} |q_j|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} \\ &= \left(\sum_{j=۰}^{m} |t_j \sqrt{a_j}|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} \left(\sum_{j=۰}^{m} |\sqrt{a_j}|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} \\ &= \sum_{j=۰}^{m} a_j \ . \end{aligned}$$

□

لم ۷.۱.۱. [۲۹] فرض می کنیم برای $(۰ \leq j \leq m, ۰ \leq k_۰ < k_۱ < ... < k_m)$ ، $a_{k_j} \neq ۰$ و $z = re^{i\theta}$ ، آنگاه

$$|\sum_{k=۰}^{m} a_{k_j} z^{k_j}| \leq \sum_{k=۰}^{m} |a_{k_j}| r^{k_j} \quad , \tag{۲.۱}$$

و حالت تساوی در (۲.۱)در نقطه $(z = \alpha_s \ \ , o \leq s \leq d - ۱)$ رخ می دهد اگروتنهااگر

$\theta_{k_j} + (k_j - k_۰)\overline{\varphi} \equiv \theta_{k_۰} \ \ (mod ۲\pi, \ \ ۰ \leq j \leq m)$ باشد

بطوریکه:

$$\alpha_s = re^{i\varphi_s} \ \ , \ \ \varphi_s = \overline{\varphi} + (۲\pi s)/d \ \ , \ \ d = \gcd\{k_j | ۰ \leq j \leq m\} \ \ ,$$

$$\overline{\varphi}=\begin{cases}\dfrac{\theta_{k_0}-\theta_{k_1}}{k_1-k_0} & \theta_{k_1}\leq\theta_{k_0}\\[2ex] \dfrac{\theta_{k_0}-\theta_{k_1}+2\pi}{k_1-k_0} & \theta_{k_1}>\theta_{k_0}\end{cases} \tag{3.1}$$

لم ۸.۱.۱. [31] فرض می کنیم c_1، c_2، ... ، c_{n-1} اعداد حقیقی و نامنفی باشند آنگاه چندجمله ای $h(x)=x^n-\sum_{j=0}^{n-1}c_jx^j$ دقیقا یک صفر مثبت دارد.

لم ۹.۱.۱. [21] فرض می کنیم ϕ و ψ دو تابع مرومورفیک در ناحیه G باشند و γ خم ژوردن بسته باشد بطوریکه D در γ محصور شده باشد و $D\subseteq G$. وهیچ یک از قطب های ϕ و ψ درون γ وجود ندارد بطوریکه

$$|\phi-\psi|<|\phi|+|\psi|$$

آنگاه

$$N(\phi,\gamma)-p(\phi,\gamma)=N(\psi,\gamma)-p(\psi,\gamma)$$

که $N(\phi,\gamma)$ صفرهای ϕ و $p(\phi,\gamma)$ قطبهای ϕ در ناحیه D می باشند.

تعریف ۱۰.۱.۱. تابع $f(z)$ را در نقطه z_0 تحلیلی می گوییم هرگاه در یک همسایگی z_0 مشتق پذیر باشد.

قضیه ۱۱.۱.۱. (روشه [3]) فرض می کنیم $f(z)$ و $g(z)$ درون و روی خم ساده و بسته C تحلیلی باشد و بر C ، $|g(z)|<|f(z)|$ در این صورت $f(z)$ و $f(z)+g(z)$ درون C تعداد صفرهای برابر دارند.

لم ۱۲.۱.۱. (لم شوارتس[4]) فرض می کنیم $f(z)$ برای $|z|<R$ تحلیلی است و $f(0)=0$ اگر در $|z|<R\ ,\ |f(z)|\leq M$ ، آنگاه $|f(z)|\leq(\dfrac{r}{R})M\ \ (|z|=r<R)$ و تساوی تنها هنگامی برقرار است که $f(z)=(\frac{M}{R})e^{i\alpha}z$ با α حقیقی.

[3] Rouche
[4] Schwaz Lemma

قضیه ۱.۱.۱۳. [۳۱] (کشی) فرض می کنیم $p(z) = a_n z^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$ چندجمله ای از درجه n باشد، و $z_1, ..., z_{n-1}, z_n$ صفرهای $p(z)$ باشند، اگر r کران کشی معادله $g(z) = |a_n||z^n| - \sum_{j=0}^{n-1} |a_j||z^j| = 0$ باشد آنگاه $|z_j| \leq r$.

اثبات. فرض می کنیم ξ یک صفر چندجمله ای $p(z)$ باشد داریم:

$$\begin{aligned} a_n\xi^n - ... - a_1\xi - a_0 = 0 \Rightarrow a_n\xi^n &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j\xi^j \\ \Rightarrow |a_n||\xi^n| = |\sum_{j=0}^{n-1} a_j\xi^j| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j||\xi^j| \\ \Rightarrow |\xi|^n &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |\frac{a_j}{a_n}||\xi|^j \end{aligned}$$

حال با توجه به نامساوی بالا و با در نظر گرفتن چندجمله ای $h(x) = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} |\frac{a_j}{a_n}|x^n$ داریم $h(x)$ در $|\xi|$ نامثبت است حال باتوجه به لم ۱.۱.۸ داریم $|\xi|$ کوچکتر مساوی صفرهای $h(z)$ است پس $|\xi| \leq r$ (r تنها ریشه مثبت $h(z) = 0$ است). □

پلت ایده کشی را برای چندجمله ایهای بصورت $f(z) = a_n z^n + ... + a_{p+1}z^{p+1} - a_p z^p + ... + a_0$ ، $0 \leq p \leq n-1$ گسترش داد و با به کار بردن قضیه روشه قضیه زیر را بدست آورد.

قضیه ۱.۱.۱۴. [۳۱] (پلت) فرض می کنیم $f(z) = a_n z^n + ... + a_{p+1}z^{p+1} - a_p z^p + ... + a_0$ یک چند جمله ای از درجه n باشدبطوریکه برای $0 < p < n$ ، $a_p \neq 0$ و $a_n a_0 \neq 0$ باشد و $w_1, ..., w_n$ صفرهای $f(z)$ باشند بطوریکه $|w_n| \geq |w_{n-1}| \geq ... \geq |w_1|$ اگر r_1 و r_2 کرانهای پلت $f(z)$ باشند $(r_1 < r_2)$ آنگاه

۱) $|w_c| \leq r_1$ ، $0 \leq c \leq p$ و $p+1 \leq i \leq n$ $|w_i| \geq r_2$.

۲) $f(z)$ در $r_1 < |z| < r_2$ هیچ صفری ندارد.

۲.۱ تعمیمی از قضیه کشی وقضیه پلت

اندرسن [۵]، صف [۶] و ورج [۷] با تعمیم قضیه کشی و قضیه پلت به سوالات زیر جواب دادند.

۱) چندجمله ای $p(z)$ دارای چه شرایطی باشد تا نامعادله $|z| \leq r$ تبدیل به $|z| < r$ شود؟

۲)$p(z)$دارای چه مشخصاتی باشد اگر $|z_m| = r$,$1 \leq m \leq n$ باشد؟

۳)چه شرایطی روی $f(z)$ باشد تا $|w_p| \leq r_1$ و $|w_{p+1}| \geq r_2$ به $|w_p| < r_1$ و $|w_{p+1}| > r_2$ تبدیل شود ؟

۴)چه شرایطی روی $f(z)$ موجود باشداگر $|w_s| = r_1$ برای $1 \leq s \leq p$ و $|w_t| = r_2$ برای $p+1 \leq t \leq n$ برقرار باشد؟

قضیه ۱.۲.۱. [۱]،[۴۲] فرض می کنیم $a_{k_j} \neq 0$,$(0 \leq k_0 < k_1 < ... < k_m = n, \quad 0 \leq j \leq m)$ و r کران کشی معادله $g(z) = 0$ باشد، آنگاه:

۱) اگر $p(\alpha_s) \neq 0$,$(0 \leq s \leq d-1)$ آنگاه $|z_n| < r$ ،

۲) برای $(0 \leq s \leq d-1)$ ، $z_{n-d+1+s} = \alpha_s$اگروتنهااگر برای

$$\theta_{k_j} + (k_j - k_0)\overline{\varphi} \equiv \theta_{k_0} \text{،} (0 \leq j \leq m)$$

جاهایی که

$$\theta_{k_j} = \arg(a_{k_j}), \ \ \alpha_s = re^{i\varphi s}, \ \ \varphi_s = \overline{\varphi} + \frac{(2\pi s)}{d}, \ \ d = \gcd\left(k_j \mid 0 \leq j \leq m\right),$$

و $\overline{\varphi}$ تعریف شده(۳.۱)باشد.

[۵] Anderson
[۶] Saff
[۷] Varge

اثبات. باتوجه به لم ۷.۱.۱ برای $|z| = r$ ، $z = re^{i\varphi_s}$ ، $\theta = \arg z$ و $z \neq \alpha_s$ داریم:

$$|\sum_{k=\cdot}^{m} a_{k_j} z^{k_j}| \leq \sum_{k=\cdot}^{m-۱} |a_{k_j}||z|^{k_j},$$

$$|p(z)| \geq |a_n||z|^n - |\sum_{k=\cdot}^{m-۱} a_{k_j} z^{k_j}| > |a_n| r^n - \sum_{k=\cdot}^{m-۱} |a_{k_j}| r^{k_j} = g(r) = \cdot$$

لذا برای $|z| = r$ ، $p(z) \neq \cdot$ در نتیجه $p(\alpha_s) \neq \cdot$.

توجه کنیم که $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$ و r تنها ریشه مثبت $g(z) = \cdot$ است حال برای $|z| > r$ نتیجه می شود $g(|z|) > \cdot$ و چون $|p(z)| \geq g(|z|) > \cdot$ می باشد بنابراین برای $|z| > r$ ، $p(z) \neq \cdot$.

لذا همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه $|z| < r$ قرار دارند واین بدین معنی است $|z_n| < r$.

(۲) شرط لازم: فرض می کنیم برای $s = \cdot, ۱, ..., d - ۱$ ، $z_{n-d+۱+s} = \alpha_s$ باشد و این بدین معنی است که $p(\alpha_s) = \cdot$ پس داریم:

$$a_n \alpha_s^n = \sum_{j=\cdot}^{m-۱} a_{k_j} \alpha_s^{k_j}, \quad |a_n| r^n = |\sum_{j=\cdot}^{m-۱} a_{k_j} \alpha_s^{k_j}|.$$

چون $g(r) = \cdot$ است پس داریم $|a_n| r^n = \sum_{j=\cdot}^{m-۱} |a_{k_j}||\alpha_s|^{k_j}$ لذا با تو جه به لم ۷.۱.۱ داریم:

$$\theta_{k_j} + (k_j - k_\cdot)\overline{\varphi} \equiv \theta_{k_\cdot}, \quad (\mod ۲\pi, \quad \cdot \leq j \leq m - ۱)$$

$$\arg\left(\sum_{j=\cdot}^{m-۱} a_{k_j} \alpha_s^{k_j}\right) = \theta_{k_\cdot} + k_\cdot \overline{\varphi}, \quad \arg(a_n \alpha_s^n) = \theta_n + n\overline{\varphi} + ۲\pi l, \quad (l \in I)$$

بنابراین $\theta_n + (n - k_\cdot)\overline{\varphi} \equiv \theta_{k_\cdot}, \ (\mod ۲\pi)$

یعنی $\theta_{k_j} + (k_j - k_{\cdot})\overline{\varphi} \equiv \theta_{k_{\cdot}}, \;(\mod ۲\pi, \;\; ۰ \leq j \leq m)$ برقرار است.

(۲) شرط کافی: فرض می کنیم $\theta_{k_j} + (k_j - k_{\cdot})\overline{\varphi} \equiv \theta_{k_{\cdot}} \;,(\mod ۲\pi, \;\; ۰ \leq j \leq m \;; \;\; ۰ \leq j \leq m)$ برقرار باشد و داشته باشیم $\alpha_s = re^{i\varphi_s}$ لذا با توجه به لم ۷.۱.۱ داریم:

$$|\sum_{k=۰}^{m} a_{k_j}\alpha_s^{k_j}| = \sum_{k=۰}^{m} |a_{k_j}||\alpha_s|^{k_j} \;,$$

چون $g(r) = ۰$ پس داریم :

$$\sum_{k=۰}^{m} |a_{k_j}||\alpha_s|^{k_j} = |a_n||\alpha_s| \;\;, \quad \arg\left(\sum_{k=۰}^{m} a_{k_j} z^{k_j}\right) = \theta_{k_{\cdot}} + k_{\cdot}\overline{\varphi} = \arg\left(a_n\alpha_s\right).$$

در نتیجه $a_n\alpha_s = \sum_{k=۰}^{m} a_{k_j}\alpha_s^{k_j}$ برقرار است یعنی $p(\alpha_s) = ۰$ است. چون $|\alpha_s| = r$ و r تنها ریشه مثبت معادله $g(z) = ۰$ می باشد

لذا با توجه به قضیه ۱۳.۱.۱ داریم $|z_n| \leq r$ و $z_{n-d+۱+s} = \alpha_s \;\; ; s = ۰, ۱, ..., d-۱$ برقرار است.

$\square$

مثال ۲.۲.۱. [۲] چندجمله ای $p_۱(z) = z^۸ - \frac{۱}{۳}z^۶ - \frac{۱}{۳}z^۴ - \frac{۱}{۳}z^۲$ را در نظر می گیریم داریم:

$$g_۱(z) = z^۸ - \tfrac{۱}{۳}z^۶ - \tfrac{۱}{۳}z^۴ - \tfrac{۱}{۳}z^۲$$

و $r = ۱$ تنها ریشه مثبت معادله $g_۱(z) = ۰$ است وهمچنین داریم:

$$\overline{\varphi} = ۰ \;\;, d = \gcd\{۸, ۶, ۴, ۲\} = ۲, \;\; \alpha_{\cdot} = ۱, \;\; \alpha_۱ = -۱, \;\; p_۱(\alpha_{\cdot}) = ۰, \;\; p_۱(\alpha_۱) = ۰$$

و با توجه به قضیه بالا $z_۷ = ۱, z_۸ = -۱$ و برای $j = ۱, ۲, ..., ۶$ ، $|z_j| < ۱$می باشد.

قضیه ۳.۲.۱. [۴۲] فرض می کنیم $a_{k_j} \neq ۰$ که $(۰ \leq k_۰ < k_۱ < ... < k_m = n\ ,\ ۰ \leq j \leq m)$ و $r_۱$ و $r_۲$ کرانهای پلت معادله $h(z) = ۰$ باشند$(r_۱ < r_۲)$، و اگر $\alpha_s = r_۱ e^{i\varphi_s}$ ، $\beta_s = r_۲ e^{i\varphi_s}$ آنگاه:

۱) اگر برای $(۰ \leq s \leq d - ۱)$ ، $p(\beta_s) \neq ۰$ یا $p(\alpha_s) \neq ۰$ باشد. آنگاه $|w_p| < r_۱$ و $|w_{p+۱}| > r_۲$ وهیچ یک از صفرهای$f(z)$ در $r_۱ \leq |z| \leq r_۲$ وجود ندارند ،

۲) $w_{p-d+۱+s} = \alpha_s$ و$w_{p+۱+s} = \beta_s$ اگروتنهااگر $(mod ۲\pi,\ \ ۰ \leq j \leq m), \theta_{k_j} + (k_j - k_۰)\overline{\varphi} \equiv \theta_{k_۰}$

قبل از اثبات قضیه بالا حکم زیر را بیان واثبات می کنیم.

نتیجه ٤.۲.۱. [۴۲] اگر مفروضات قضیه بالا برقرار باشد برای $s = ۰, ۱, ..., d - ۱$ ، $p(\alpha_s) \neq ۰$ است اگروتنهااگر $p(\beta_s) \neq ۰$.

اثبات. فرض می کنیم $f(\alpha_s) \neq ۰$ ولی $f(\beta_s) = ۰$ آنگاه داریم:

$$a_p \beta_s^p = \sum_{k_j \neq p} a_{k_j} \beta_s^{k_j}\ ; \qquad |a_p||\beta_s|^p = |\sum_{k_j \neq p} a_{k_j} \beta_s^{k_j}|.$$

چون $|\beta_s| = r_۲$ یک ریشه مثبت $h(z) = ۰$ می باشد لذا داریم:

$$|a_p||\beta_s|^p = |\sum_{k_j \neq p} a_{k_j} \beta_s^{k_j}| = \sum_{k_j \neq p} |a_{k_j}||\beta_s|^{k_j}.$$

لذا با توجه به لم ۷.۱.۱ داریم

$$\theta_{k_j} + (k_j - k_۰)\overline{\varphi} \equiv \theta_{k_۰},\ (\mod ۲\pi;\ ۰ \leq j \leq m;\ k_j \neq p$$

$$\arg\left(\sum_{k_j \neq p} a_{k_j} \beta_s^{k_j}\right) = \theta_{k_۰} + k_۰\overline{\varphi}\ ,\ \arg(a_p \beta_s^p) = \theta_p + p\overline{\varphi} + ۲\pi l\ ,\ (l \in I)\ ;$$

$$\theta_p + p\overline{\varphi} \equiv \theta_{k_۰} + k_۰\overline{\varphi}\ ,\ (\mod ۲\pi)$$

بنا براین $\theta_{k_j} + (k_j - k_۰)\overline{\varphi} \equiv \theta_{k_۰}\ ,\ (\mod ۲\pi\ ;\ ۰ \leq j \leq m)$ و $f(\alpha_s) = h(r_۱)e^{i\theta_{k_۰}} = ۰$.

پس $f(\beta_s) \neq ۰$ می باشد.

مشابها اگر $f(\beta_s) \neq ۰$ آنگاه $f(\alpha_s) \neq ۰$.

□

حال قضیه بالا را اثبات می کنیم:

اثبات. برای $|z| = r_۱$ ، $|z| \neq \alpha_s$ وبا بکار بردن لم ۷.۱.۱ داریم

$$|\sum_{k_j \neq p} a_{k_j} z^{k_j}| < \sum_{k_j \neq p} |a_{k_j}||z|^{k_j}$$

و همچنین داریم:

$$|f(z)| \geq |a_p||z|^p - |\sum_{k_j \neq p} a_{k_j} z^{k_j}| > |a_p||z|^p - \sum_{k_j \neq p} |a_{k_j}||z|^{k_j} = g(|z|) = ۰$$

چون برای $|z| = r_۱$ ، $f(\alpha_s) \neq ۰$. پس داریم $f(z) \neq ۰$ بطوریکه

$$|f(z) + a_p z^p| = |\sum_{k_j \neq p} a_{k_j} z^{k_j}| \leq \sum_{k_j \neq p} |a_{k_j}|z|^{k_j} = |a_p||z|^p < |f(z)| + |a_p||z|^p.$$

لذا با توجه به لم ۹.۱.۱ p تا از صفرهای $f(z)$ در ناحیه $|z| < r_۱$ قرار دارند.

گر $|z| = r_۲$ و $z \neq \beta_s$ باتوجه به لم ۷.۱.۱ داریم:

$$|f(z)| \geq |a_p||z|^p - |\sum_{k_j \neq p} a_{k_j} z^{k_j}| > |a_p||z|^p - \sum_{k_j \neq p} |a_{k_j}||z|^{k_j} = -h(|z|) = ۰$$

چون برای $|z| = r_۲$ ، $f(\beta_s) \neq ۰$ لذا داریم $f(z) \neq ۰$.

اگر $r_۱ < |z| < r_۲$ باشد چون $r_۱$ و $r_۲$ دو ریشه مثبت معادله $h(z) = ۰$ می باشد

و $h(r) = (r - r_۱)(r - r_۲)h_۱(r)$ داریم که $h_۱$ ریشه مثبت ندارد.

چون برای $r_۱ < |z| < r_۲$ ، $\lim_{r \to \infty} h(r) = +\infty$ و $h_۱(r) > ۰$ می باشد پس برای $r_۱ < |z| < r_۲$

داریم:

$$|f(z)| \geq |a_p||z|^p - \sum_{k_j \neq p} |a_{k_j}||z|^{k_j} = -h(|z|) = ۰$$

بنابراین $f(z)$ در ناحیه $r_۱ \leq |z| \leq r_۲$ هیچ صفری ندارد و از آنجایی که $f(z)$ ، n صفر دارد لذا $f(z)$ ، $n - p$ صفر در ناحیه $|z| > r_۲$ قرار دارد.

(۲) شرط لازم: فرض می کنیم $w_{p-d+۱+s} = \alpha_s$ و $w_{p+۱+s} = \beta_s$ برقرار باشد پس $f(\alpha_s) = ۰$ و $f(\beta_s) = ۰$ و داریم:

$$a_p \alpha^p = \sum_{k_j \neq p} a_{k_j} \alpha_s^{k_j} \quad , i.e., \qquad |a_p||\alpha^p| = |\sum_{k_j \neq p} a_{k_j} \alpha_s^{k_j}|$$

چون $h(|\alpha_s|) = ۰$ پس داریم:

$$\sum_{k_j \neq p} |a_{k_j}||\alpha_s|^{k_j} = |a_p||\alpha_s|^p = |\sum_{k_j \neq p} a_{k_j} \alpha_s^{k_j}|.$$

لذا با توجه به لم ۷.۱.۱ داریم:

$$\theta_{k_j} + (k_j - k_۰)\overline{\varphi} \equiv \theta_{k_۰} \quad , \quad (\mod ۲\pi \ , ۰ \leq j \leq m) \ , \quad k_j \neq p$$

$$\arg\left(\sum_{k_j \neq p} a_{k_j} \alpha_s^{k_j}\right) \ = \ \theta_{k_۰} + k_۰\overline{\varphi} \ .$$

چون $f(\alpha_s) = ۰$ پس داریم:

$$\theta_p + (p - k_۰)\overline{\varphi} \equiv \theta_{k_۰} \ , \quad (\mod ۲\pi)$$

بنابراین داریم:

$$\theta_{k_j} + (k_j - k_\cdot)\overline{\varphi} \equiv \theta_{k_\cdot} \ , \quad (\mod ۲\pi \ , \cdot \leq j \leq m).$$

(۲)شرط کافی: فرض می کنیم $\theta_{k_j} + (k_j - k_\cdot)\overline{\varphi} \equiv \theta_{k_\cdot} \ , \ (\mod ۲\pi, \ \cdot \leq j \leq m)$ و $\alpha_s = r_۱ e^{i\varphi_s}$ باشد با توجه به لم ۷.۱.۱ داریم:

$$|\sum_{k_j \neq p} a_{k_j} z^{k_j}| = \sum_{k_j \neq p} |a_{k_j}||z|^{k_j}$$

چون $h(r_۱) = \cdot$ است لذا داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{k_j \neq p} |a_{k_j}||z|^{k_j} &= |a_p||\alpha_s|^p \\ \arg\left(\sum_{k_j \neq p} a_{k_j} z^{k_j}\right) = \theta_{k_\cdot} &+ k_\cdot\overline{\varphi} = \arg\left(a_p \alpha_s^p\right). \end{aligned}$$

بنابراین $\sum_{k_j \neq p} a_{k_j} z^{k_j} = a_p \alpha_s^p$ برقرار است یعنی $f(\alpha_s) = \cdot$ وچون $|\alpha_s| = r_۱$ و $r_۱$ ریشه کوچکتر از دو ریشه مثبت $h(z) = \cdot$ است $(r_۱ < r_۲)$

لذا با توجه به قضیه ۱۴.۱.۱ داریم $|w_p| \leq r_۱$ و برای $s = \cdot, ۱, ..., d - ۱$ ، $w_{p-d+۱+s} = \alpha_s$ برقرار است.
وبرای $s = \cdot, ۱, ..., d - ۱$ تساوی $w_{p+۱+s} = \beta_s$ بطور مشابه اثبات می شود.

$\square$

مثال ۵.۲.۱. چندجمله ای $f_۱(z) = z^۸ - \frac{۳}{۲}z^۲ + \frac{۱}{۲}$ را در نظر می گیریم:

$$h_۱(z) = z^۸ - \frac{۳}{۲}z^۲ + \frac{۱}{۲}$$

و $r_۱ = \dfrac{\sqrt{w - w^{-۱} - ۲}}{\sqrt{۶}}$ که $w = \sqrt[۳]{۸۲ + ۶\sqrt{۲۰۱}}$ و $r_۲ = ۱$ دو ریشه مثبت معادله $h(z) = \cdot$ می باشند وهمچنین

$$p = ۲, \overline{\varphi} = \cdot, d = \gcd\{۸, ۲, \cdot\} = ۲, \quad \alpha_\cdot = r_۱, \quad \alpha_۱ = -r_۱,$$

$$\beta_0 = 1\ , \beta_1 = -1,\ \ f_1(\alpha_0) = 0,\ \ f_1(\alpha_1) = 0,\ \ f_1(\beta_0) = 0,\ \ f_1(\beta_1) = 0,$$

و با توجه به قضیه بالا $w_1 = r_1$ ، $w_2 = -r_1$ ، $w_3 = 1$ و $w_4 = -1$ می باشند و برای $(5 \leq i \leq 8)$ ، $|w_i| > 1$ است.

فصل ۲

کرانهایی برای قدرمطلق صفرهای چندجمله ای

۱.۲ تعمیم های ازقضیه انسترم -کاکیا

در این بخش ابتدا قضیه انستروم -کاکیا را بیان می کنیم و برخی نتایج بدست آمده د ر فصل اول را به رده ای از چندجمله ای ها با اعمال شرایط خاص روی ضرایب آنها تعمیم می دهیم و کرانهایی برای قدرمطلق صفرهای آنها بدست می آوریم و با تعمیم آنها نتایج کلی بیشتری بدست خواهد آمد که در ادامه به آنها نیز اشاره خواهیم کرد.

قضیه مشهور زیر که معروف به توزیع صفرهای چندجمله ای معروف است منسوب به انستروم-کاکیا است.

قضیه ۱.۱.۲. [۳۱] (انستروم- کاکیا [۱]) اگر $p(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ چندجمله ای از درجه n به طوریکه:

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \ldots \geq a_1 \geq a_0 > 0$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه $|z| \leq 1$ قرار دارند.

قضیه ۲.۱.۲. [۸] فرض می کنیم $p(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n، با ضرایب مختلط باشد بطوریکه برای $k \geq 1$ داشته باشیم:

[۱] Enestron-Kakeya Theorem

$$ka_n \geq a_{n-1} \geq a_{n-2} \geq ... \geq a_1 \geq a_0 > 0,$$

آنگاه همه صفرهای $P(z)$ در $|z+k-1| \leq k$ قرار دارند.

قضیه ۳.۱.۲. [۸] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ چندجمله ای از درجه n با ضرایب حقیقی مثبت باشد. قرار می دهیم

$$\alpha = \min\left(\frac{a_j}{a_{j+1}}\right), \quad \beta = \max\left(\frac{a_j}{a_{j+1}}\right), \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$\alpha \leq |z| \leq \beta$$

*) قضیه ۱.۱.۲ را برای حالتی که ضرایب چندجمله ای صعودی باشد را بررسی می کنیم.

قضیه ٤.۱.۲. [۲۶] اگر $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ چندجمله ای از درجه n به طوریکه:

$$a_n \geq a_{n-1} \geq ... \geq a_1 \geq a_0$$

آنگاه همه ی صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z| \leq \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

نتیجه ٥.۱.۲. [۴] اگر $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ چندجمله ای از درجه n به طوریکه:

$$a_n \leq a_{n-1} \leq ... \leq a_1 \leq a_0$$

آنگاه همه ی صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z| \leq \frac{|a_0| + a_0 - a_n}{|a_n|}.$$

قضیه ۶.۱.۲. [۲۵] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب حقیقی باشد بطوریکه:

$$\begin{aligned} 0 &< a_0 = a_1 = ... = a_{r_1-1} \\ &< a_{r_1} = a_{r_1+1} = ... = a_{r_2-1} < ... \\ &< a_{r_s} = a_{r_s+1} = ... = a_m \end{aligned}$$

قرار می دهیم $k = \gcd\{n+1, r_1, ..., r_s\}$ آنگاه $|z_n| = 1$ اگروتنهااگر $k > 1$.

*) برای اثبات قضایای این فصل وفصول بعدی به لم زیر نیاز داریم که توسط عزیز[۲] و محمد[۳] بدست آمده است.

لم ۷.۱.۲. [۳] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ چندجمله ای از درجه n باشد بطوریکه برای عدد حقیقی β و $t > 0$ داشته باشیم:

$$|\arg a_j - \beta| \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad t|a_j| \geq |a_{j-1}|, \quad j = 0, 1, 2, ..., n,$$

آنگاه:

$$|ta_j - a_{j-1}| \leq ||ta_j| - |a_{j-1}|| \cos\alpha + (t|a_j| + |a_{j-1}|) \sin\alpha.$$

قضیه ۸.۱.۲. [۲۴] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، بطوریکه برای یک عدد حقیقی β ،

[۲] A. Aziz
[۳] Q. G.Mohammad

$$|\arg a_j - \beta| \leq \alpha \leq \frac{\pi}{۲}, \qquad j = ۰, ۱, ۲, ..., n$$

$$|a_n| \geq |a_{n-۱}| \geq |a_{n-۲}| \geq ... \geq |a_۱| \geq |a_۰|,$$

آنگاه همه صفرهای $P(z)$ در دیسک زیر قرار دارند.

$$|z| \leq (\sin\alpha + \cos\alpha) + \frac{۲\sin\alpha}{|a_n|}\sum_{j=۰}^{n-۱}|a_j|.$$

قضیه ۹.۱.۲. [۳۶] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=۰}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، بطوریکه برای یک عدد حقیقی β ،

$$| \arg a_j - \beta | \leq \alpha \leq \frac{\pi}{۲}, \qquad j = ۰, ۱, ۲, ..., n$$

و برای $k \geq ۱$

$$k \mid a_n| \geq| a_{n-۱} |\geq ... \geq| a_۱ |\geq| a_۰ |,$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه ی زیر قرار دارند.

$$| z + k - ۱ |\leq \frac{۱}{|a_n|}\left\{(k|a_n| - |a_۰|)(\sin\alpha + \cos\alpha) + |a_۰| + ۲\sin\alpha\sum_{j=۰}^{n-۱}|a_j|\right\}.$$

اثبات. چندجمله ای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} F(z) &= (۱-z)p(z) \\ &= -a_n z^{n+۱} + (a_n - a_{n-۱})z^n + ... + (a_۱ - a_۰)z + a_۰ \\ &= -a_n(z+k-۱)z^n + (ka_n - a_{n-۱})z^n + (a_{n-۱} - a_{n-۲})z^{n-۱} \\ &\quad +... + (a_۱ - a_۰)z + a_۰ \ . \end{aligned}$$

حال فرض می کنیم $|z|>1$ باشد لذا برای $0\leq j\leq n$ ، $\frac{1}{|z|^{n-j}}<1$ وداریم.

$$\begin{aligned}|F(z)| &\geq |z|^n\Big[|a_n||z+k-1| \\ &\quad -\left\{|ka_n-a_{n-1}|+\frac{|a_{n-1}-a_{n-2}|}{|z|}+\dots+\frac{|a_1-a_0|}{|z|^{n-1}}+\frac{|a_0|}{|z|^n}\right\}\Big] \\ &\geq |z|^n\left[|a_n||z+k-1|-\{|ka_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\dots\right. \\ &\quad \left.+|a_1-a_0|+|a_0|\}\right].\end{aligned}$$

حال با استفاده از لم ۷.۱.۲ داریم:

$$|F(z)|\geq|z|^n|a_n||z+k-1|-\left[\{k|a_n|-|a_0|\}(\cos\alpha+\sin\alpha)+|a_0|+2\sin\alpha\sum_{j=0}^{n-1}|a_j|\right]$$

لذا $|F(z)|>0$ اگر:

$$|z+k-1|>\frac{\{k|a_n|-|a_0|\}(\cos\alpha+\sin\alpha)+|a_0|+2\sin\alpha\sum_{j=0}^{n-1}|a_j|}{|a_n|}$$

بنابراین برای $|z|>1$ همه صفرهای $F(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z+k-1|\leq\frac{1}{|a_n|}\left\{(k|a_n|-|a_0|)(\cos\alpha+\sin\alpha)+|a_0|+2\sin\alpha\sum_{j=0}^{n-1}|a_j|\right\}$$

و برای $|z|\leq 1$ همه صفرهای $F(z)$ درناحیه بالا قرار دارند وچون همه صفرهای $p(z)$ نیز صفرهای $F(z)$ هستند لذا همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z+k-1|\leq\frac{1}{|a_n|}\left\{(k|a_n|-|a_0|)(\cos\alpha+\sin\alpha)+|a_0|+2\sin\alpha\sum_{j=0}^{n-1}|a_j|\right\}.$$

□

*) با بکار بردن قضیه بالا برای چندجمله ای $P(tz)$ نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۱۰.۱.۲. [۳۶] فرض می کنیم $p(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، بطوریکه برای یک عدد حقیقی β،

$$|\arg a_j-\beta|\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2},\qquad j=0,1,2,...,n$$

و برای $k\geq 1$ و $t>0$،

$$kt^n\mid a_n|\geq t^{n-1}\mid a_{n-1}\mid\geq ...\geq t\mid a_1\mid\geq\mid a_0\mid,$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه ی زیر قرار دارند.

$$|\, z+kt-t\,|\leq\frac{t}{|a_n|}\left\{\left(k|a_n|-\frac{|a_0|}{t^n}\right)(\sin\alpha+\cos\alpha)+\frac{|a_0|}{t^n}+2\sin\alpha\sum_{j=0}^{n-1}|a_j|t^{j-n}\right\}.$$

*) حال با قرار دادن $k=|\frac{a_n}{a_{n-1}}|\geq 1$ در قضیه بالا نتیجه زیر را بدست می آوریم.

نتیجه ۱۱.۱.۲. [۳۶] فرض می کنیم $p(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، بطوریکه برای یک عدد حقیقی β،

$$|\arg a_j-\beta|\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2},\qquad j=0,1,2,...,n$$

$$\begin{aligned}|\,a_n| &\leq |\,a_{n-1}\,|\\ |\,a_{n-1}\,| &\geq ...\geq|\,a_1\,|\geq|\,a_0\,|,\end{aligned}$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه ی زیر قرار دارند.

$$|\, z+|\frac{a_n}{a_{n-1}}|-1\,|\leq\frac{1}{|a_n|}\left\{(|a_{n-1}|-|a_0|)(\sin\alpha+\cos\alpha)+|a_0|+2\sin\alpha\sum_{j=0}^{n-1}|a_j|\right\}.$$

قضیه ۱۲.۱.۲. [۳۵] فرض می کنیم $p(z)=\sum_{j=\cdot}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، بطوریکه برای یک عدد حقیقی β،

$$|\arg a_j-\beta|\leq \alpha \leq \frac{\pi}{۲}, \qquad j=\cdot,۱,۲,...,n$$

و برای یک λ که $\cdot \leq \lambda \leq n$، $t>\cdot$

$$\begin{aligned} t^n|a_n| &\leq t^{n-۱}|a_{n-۱}|\leq ... \leq t^{\lambda}|a_{\lambda}|, \\ t^{\lambda}\mid a_{\lambda}\mid &\geq t^{\lambda-۱}|a_{\lambda-۱}|\geq ... \geq t|a_۱\mid\geq\mid a_\cdot \mid \end{aligned}$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه ی زیر قرار دارند.

$$|z|\leq t\left\{\left(\frac{۲t^{\lambda}|a_{\lambda}|}{t^n|a_n|}-۱\right)\cos\alpha+\sin\alpha\right\}+۲\sin\alpha\sum_{j=\cdot}^{n-۱}\frac{|a_j|}{|a_n|t^{n-j-۱}}. \qquad (۱.۲)$$

اثبات. چندجمله ای زیر را در نظر می گیریم:

$$F(z)=(t-z)p(z)=-a_nz^{n+۱}+(ta_n-a_{n-۱})z^n+...+(ta_۱-a_\cdot)z+ta_\cdot$$

فرض می کنیم $|z|>t$، بنابراین $\frac{۱}{|z|^{n-j}}<t$ با توجه به لم ۷.۱.۲ داریم:

$$\begin{aligned} F(z) &= (t-z)p(z) \\ &= (t-z)(a_nz^n+a_{n-۱}z^{n-۱}+...+a_{\lambda+۱}z^{\lambda+۱}+a_{\lambda}z^{\lambda}+a_{\lambda-۱}z^{k\lambda-۱}+...+a_۱z+a_\cdot) \\ &= -a_nz^{n+۱}+(ta_n-a_{n-۱})z^n+...+(ta_{\lambda+۱}-a_{\lambda})z^{\lambda+۱}+(ta_{\lambda}-a_{\lambda-۱})z^{\lambda} \\ &\quad +(ta_{\lambda-۱}-a_{\lambda-۲})z^{\lambda-۱}+...+(ta_۲-a_۱)z^۲+(ta_۱-a_\cdot)z+ta_\cdot \\ &= -a_nz^{n+۱}+\sum_{j=\cdot}^{n}(ta_j-a_{j-۱})z^j, \qquad (a_{-۱}=\cdot) \end{aligned}$$

لذا برای $|z| > t$ داریم:

$$\begin{aligned}|F(z)| &\geq |a_n||z|^n\left(|z| - \frac{۱}{|a_n|}\sum_{j=۰}^{n}|ta_j - a_{j-۱}|\frac{۱}{|z|^{n-j}}\right)\\ &> |a_n||z|^n\left(|z| - \frac{۱}{|a_n|}\sum_{j=۰}^{n}|ta_j - a_{j-۱}|\frac{۱}{t^{n-j}}\right)\\ &= |a_n||z|^n\left(|z| - \frac{۱}{|a_n|t^n}\sum_{j=۰}^{n}|ta_j - a_{j-۱}|t^j\right)\end{aligned}$$

حال داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{j=۰}^{n}|ta_j - a_{j-۱}|t^j &\leq \sum_{j=۰}^{n}\big|t|a_j| - |a_{j-۱}|\big|t^j\cos\alpha + \sum_{j=۰}^{n}(t|a_j| - |a_{j-۱}|)t^j\sin\alpha\\ &= \sum_{j=۰}^{\lambda}\big|t|a_j| - |a_{j-۱}|\big|t^j\cos\alpha + \sum_{j=\lambda+۱}^{n}\big|t|a_j| - |a_{j-۱}|\big|t^j\cos\alpha\\ &\quad + \sum_{j=۰}^{n}(t|a_j| - |a_{j-۱}|)t^j\sin\alpha, \quad (۰ \leq \lambda \leq n)\\ &= ۲|a_\lambda|t^{\lambda+۱}\cos\alpha - t^n|a_n|\cos\alpha + t^n|a_n|\sin\alpha + ۲t\sin\alpha\sum_{j=۰}^{n-۱}|a_j|t^j\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{|a_n|t^n}\sum_{j=۰}^{n}|ta_j - a_{j-۱}|t^j \leq \frac{t}{|a_n|}\left\{\frac{۲|a_\lambda|\cos\alpha}{t^{n-\lambda}} - \frac{|a_n|}{t}\cos\alpha + \frac{|a_n|}{t}\sin\alpha\right\} + ۲\sin\alpha\sum_{j=۰}^{n-۱}\frac{|a_j|}{|a_n|t^{n-j-۱}}.$$

اکنون داریم:

$$|F(z)| \geq |a_n||z|^n\,[\,|z|$$

$$-\frac{t}{|a_n|}\left\{\frac{۲|a_\lambda|\cos\alpha}{t^{n-\lambda}} - \frac{|a_n|}{t}\cos\alpha + \frac{|a_n|}{t}\sin\alpha\right\} + ۲\sin\alpha\sum_{j=۰}^{n-۱}\frac{|a_j|}{|a_n|t^{n-j-۱}}\,] > ۰,$$

لذا $|F(z)| > ۰$ است اگر داشته باشیم

$$|z| > \frac{t}{|a_n|}\left\{\frac{۲|a_\lambda|\cos\alpha}{t^{n-\lambda}} - \frac{|a_n|}{t}\cos\alpha + \frac{|a_n|}{t}\sin\alpha\right\} + ۲\sin\alpha\sum_{j=۰}^{n-۱}\frac{|a_j|}{|a_n|t^{n-j-۱}}.$$

بنابراین برای $|z| > t$ همه صفرهای $F(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z| \leq t\left\{\left(\frac{۲t^\lambda|a_\lambda|}{t^n|a_n|} - ۱\right)\cos\alpha + \sin\alpha\right\} + ۲\sin\alpha\sum_{j=۰}^{n-۱}\frac{|a_j|}{|a_n|t^{n-j-۱}}.$$

چون همه صفرهای $p(z)$ نیز صفرهای $F(z)$ هستند لذا برای $|z| > t$ همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه بالا قرار دارند.

وبرای $|z| \leq t$ همه صفرهای $F(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z| \leq t\left\{\left(\frac{۲t^\lambda|a_\lambda|}{t^n|a_n|} - ۱\right)\cos\alpha + \sin\alpha\right\} + ۲\sin\alpha\sum_{j=۰}^{n-۱}\frac{|a_j|}{|a_n|t^{n-j-۱}}.$$

وچون همه صفرهای $p(z)$ نیز صفرهای $F(z)$ هستند لذا اثبات تمام است. $\square$

قضیه ۲.۱.۱۳. [۳۶] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=۰}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، بطوریکه برای یک عدد حقیقی β،

$$|\arg a_j - \beta| \leq \alpha \leq \tfrac{\pi}{۲}, \qquad j = ۰, ۱, ۲, ..., n$$

و برای یک λ که $۰ \leq \lambda \leq n - ۱$،

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq |a_{n-۱}| \leq ... \leq |a_\lambda|, \\ |a_\lambda| &\geq |a_{\lambda-۱}| \geq ... \geq |a_۱| \geq |a_۰| \end{aligned}$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه ی زیر قرار دارند.

$$\begin{aligned} \left|z + \frac{a_{n-۱}}{a_n} - ۱\right| \leq\ & \frac{۱}{|a_n|}\{۲|a_\lambda|\cos\alpha - |a_{n-۱}|(\cos\alpha + \sin\alpha) + ۲\sin\alpha \\ & \times\sum_{j=۰}^{n-۱}|a_j| - |a_۰|(\cos\alpha + \sin\alpha - ۱)\}. \end{aligned}$$

اثبات. چندجمله ای زیر را در نظر می گیریم

$$F(z) = (۱ - z)p(z) = -a_n z^{n+۱} + (a_n - a_{n-۱})z^n + ... + (a_۱ - a_.)z + a.$$

فرض می کنیم $|z| > ۱$ ، بنابراین $\frac{۱}{|z|^{n-j}} < ۱$ با توجه به لم ۷.۱.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
|F(z)| &\geq | a_n z^{n_۱} + (a_n - a_{n-۱})z^n | + | (a_{n-۱} - a_{n-۱})z^{n-۱} + \cdots + (a_۱ - a_.)z + a_. | \\
&\geq | z |^n | a_n z + (a_n - a_{n-۱}) | + | a_{n-۱} - a_{n-۲} || z |^{n-۱} + \cdots + | a_۱ - a_. || z | + | a_. | \\
&\geq | z |^n \Bigg[| a_n z + a_{n-۱} - a_n | - \Bigg\{ | a_{n-۱} - a_{n-۲} || z | + \cdots + \frac{| a_{\lambda+۱} - a_\lambda |}{| z |^n} \\
&\quad + \frac{| a_\lambda - a_{\lambda-۱} |}{| z |^{n-\lambda-۱}} + \frac{| a_\lambda - a_{\lambda-۱} |}{| z |^{n-\lambda}} + \cdots + \frac{| a_۱ - a_. |}{| z |^{n-۱}} + \frac{a_.}{| z |^n} \}] \\
&\geq | z |^n \{ | a_n z + a_{n-۱} - a_n | - ۲ | a_\lambda | \cos\alpha + | a_{n-۱} | (\cos\alpha + \sin\alpha) \\
&\quad - ۲ \sin\alpha \sum_{j=.}^{n-۱} | a_j | + | a_. | (\cos\alpha + \sin\alpha - ۱) \}
\end{aligned}$$

بنابراین $| F(z) |$ بزرگتر از صفر است اگر داشته باشیم :

$$\begin{aligned}
|z + \frac{a_{n-۱}}{a_n} - ۱| &> \frac{۱}{|a_n|} \{ ۲ | a_\lambda | \cos\alpha - | a_{n-۱} | (\cos\alpha + \sin\alpha) \\
&\quad + ۲ \sin\alpha \sum_{j=.}^{n-۱} | a_j | - | a_. | (\cos\alpha + \sin\alpha - ۱)] \}
\end{aligned}$$

و این نشان می دهد که همه ی صفرهای $F(z)$ در قدر مطلق بزرگتر از ۱ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$\begin{aligned}
| z + \frac{a_{n-۱}}{a_n} - ۱ | &\leq \frac{۱}{| a_n |} \{ ۲ | a_\lambda | \cos\alpha - | a_{n-۱} | (\cos\alpha + \sin\alpha) \\
&\quad + ۲ \sin\alpha \sum_{j=.}^{n-۱} | a_j | - | a_. | (\cos\alpha + \sin\alpha - ۱) \}.
\end{aligned}$$

و همچنین همه ی صفرهای $F(z)$ در $|z| \leq ۱$ در ناحیه بالا صدق می کند.

لذا همه ی صفرهای $F(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$\begin{aligned} \mid z+\frac{a_{n-۱}}{a_n}-۱\mid \ \leq\ & \frac{۱}{\mid a_n\mid}\{\,۲\mid a_\lambda\mid\cos\alpha-\mid a_{n-۱}\mid(\cos\alpha+\sin\alpha) \\ & +۲\sin\alpha\sum_{j=۰}^{n-۱}\mid a_j\mid-\mid a_۰\mid(\cos\alpha+\sin\alpha-۱)\,\}\,. \end{aligned}$$

چون همه صفرهای $p(z)$ صفرهای $F(z)$ هستند در نتیجه اثبات تمام است. $\square$

قضیه ۱۴.۱.۲. [۷] فرض می کنیم $p(z)=\sum_{j=۰}^{n}a_jz^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، بطوریکه برای یک عدد حقیقی β،

$$\mid\arg a_j-\beta\mid\leq\alpha\leq\tfrac{\pi}{۲},\qquad j=۰,۱,۲,...,n$$

و برای یک λ که $۰\leq\lambda\leq n-۲$، $t>۰$

$$\begin{aligned} t^n\mid a_n\mid\ &\leq\ t^{n-۱}|a_{n-۱}|\leq...\leq t^\lambda|a_\lambda|, \\ t^\lambda|a_\lambda|\ &\geq\ t^{\lambda-۱}|a_{\lambda-۱}|\geq...\geq t|a_۱|\geq|a_۰| \end{aligned}$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه ی زیر قرار دارند.

$$|z+\frac{a_{n-۱}}{a_n}-t|\leq\frac{t}{|a_n|}\left\{\frac{۲|a_\lambda|\cos\alpha}{t^{n-\lambda}}-\frac{|a_{n-۱}|}{t}(\cos\alpha+\sin\alpha)\right\}+۲\sin\alpha\sum_{j=۰}^{n-۱}\frac{|a_j|}{|a_n|t^{n-j-۱}}. \quad (۲.۲)$$

تذکر ۱۵.۱.۲. [۷] قضیه ۱۴.۱.۲ تعمیمی از قضیه ۱۲.۱.۲ برای حالتی از $۰\leq\lambda\leq n-۲$ است و ما نشان می دهیم که دایره (۲.۲) درون دایره (۱.۲) قرار دارد.

فرض می کنیم که $z=w$ یک صفری از دایره (۲.۲) باشد آنگاه داریم:

$$|w+\frac{a_{n-۱}}{a_n}-t|\leq\frac{t}{|a_n|}\left\{\frac{۲|a_\lambda|\cos\alpha}{t^{n-\lambda}}-\frac{|a_{n-۱}|}{t}(\cos\alpha+\sin\alpha)\right\}+۲\sin\alpha\sum_{j=۰}^{n-۱}\frac{|a_j|}{|a_n|t^{n-j-۱}}.$$

و همچنین داریم:

$$\begin{aligned}|w| &= |w+\frac{a_{n-1}}{a_n}-t+t-\frac{a_{n-1}}{a_n}| \leq |w+\frac{a_{n-1}}{a_n}-t|+|t-\frac{a_{n-1}}{a_n}| \\ &\leq \frac{|ta_n-a_{n-1}|}{|a_n|}+\frac{t}{|a_n|}\left\{\frac{2|a_\lambda|\cos\alpha}{t^{n-\lambda}}-\frac{|a_{n-1}|}{t}(\cos\alpha+\sin\alpha)\right\}+2\sin\alpha\sum_{j=0}^{n-1}\frac{|a_j|}{|a_n|t^{n-j-1}},\end{aligned}$$

چون برای n ,... ,۲ ,۱ ,۰ $= j$، $|\arg a_j-\beta| \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ می باشد و با استفاده از لم ۷.۱.۲ داریم:

$$\begin{aligned}|w| &\leq \left[\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}-t\right]\cos\alpha+\left[t+\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}\right]\sin\alpha+t\left[\frac{2t^\lambda|a_\lambda|}{t^n|a_n|}\right]\cos\alpha \\ &\quad -\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}(\cos\alpha+\sin\alpha)+2\sin\alpha\sum_{j=0}^{n-1}\frac{|a_j|}{|a_n|t^{n-j-1}} \\ &= t\left\{\left[\frac{2t^\lambda|a_\lambda|}{t^n|a_n|}-1\right]\cos\alpha+\sin\alpha\right\}+2\sin\alpha\sum_{j=0}^{n-1}\frac{|a_j|}{|a_n|t^{n-j-1}}.\end{aligned}$$

$*$) حال به اثبات قضیه ۱۴.۱.۲ می پردازیم.

اثبات. چندجمله ای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}F(z) &= (t-z)p(z) \\ &= (t-z)(a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_{\lambda+1}z^{\lambda+1}+a_\lambda z^\lambda+a_{\lambda-1}z^{k\lambda-1}+\ldots+a_1z+a_0) \\ &= -a_nz^{n+1}+(ta_n-a_{n-1})z^n+\ldots+(ta_{\lambda+1}-a_\lambda)z^{\lambda+1}+(ta_\lambda-a_{\lambda-1})z^\lambda \\ &\quad +(ta_{\lambda-1}-a_{\lambda-2})z^{\lambda-1}+\ldots+(ta_2-a_1)z^2+(ta_1-a_0)z+ta_0 \\ &= -a_nz^{n+1}+(ta_n-a_{n-1})z^n+\sum_{j=0}^{n-1}(ta_j-a_{j-1})z^j \quad , \quad (a_{-1}=0)\end{aligned}$$

فرض می کنیم $|z|>t$ باشد آنگاه:

$$\begin{aligned}
|F(z)| &\geq |a_n||z|^n \left(|z + \frac{a_{n-1}}{a_n} - t| - \frac{1}{|a_n|} \sum_{j=0}^{n-1} |ta_j - a_{j-1}| \frac{1}{|z|^{n-j}} \right) \\
&> |a_n||z|^n \left(|z + \frac{a_{n-1}}{a_n} - t| - \frac{1}{|a_n|} \sum_{j=0}^{n-1} |ta_j - a_{j-1}| \frac{1}{t^{n-j}} \right) \\
&= |a_n||z|^n \left(|z + \frac{a_{n-1}}{a_n} - t| - \frac{1}{|a_n|t^n} \sum_{j=0}^{n-1} |ta_j - a_{j-1}| z^j \right)
\end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} |ta_j - a_{j-1}| t^j &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |t|a_j| - |a_{j-1}|| t^j \cos\alpha + \sum_{j=0}^{n-1} (t|a_j| - |a_{j-1}|) t^j \sin\alpha \\
&= \sum_{j=0}^{\lambda} |t|a_j| - |a_{j-1}|| t^j \cos\alpha + \sum_{j=\lambda+1}^{n-1} |t|a_j| - |a_{j-1}|| t^j \cos\alpha \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} (t|a_j| + |a_{j-1}|) t^j \sin\alpha \ , \ \ (0 \leq \lambda \leq n-2) \\
&= 2|a_\lambda| t^{\lambda+1} \cos\alpha - t^n |a_{n-1}| \cos\alpha - t^n |a_{n-1}| \sin\alpha + 2t \sin\alpha \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| t^j \\
&= 2|a_\lambda| t^{\lambda+1} \cos\alpha - t^n |a_{n-1}| (\cos\alpha + \sin\alpha) + 2t \sin\alpha \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| t^j .
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{1}{|a_n|t^n} \sum_{j=0}^{n-1} |ta_j - a_{j-1}| t^j \leq \frac{t}{|a_n|} \left\{ \frac{2|a_\lambda| \cos\alpha}{t^{n-\lambda}} - \frac{|a_{n-1}|}{t} (\cos\alpha + \sin\alpha) \right\} + 2 \sin\alpha \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n| t^{n-j-1}} .$$

اکنون داریم:

$$\begin{aligned}
|F(z)| \geq \ & |a_n||z|^n \, [\, |z + \frac{a_{n-1}}{a_n} - t| \\
& - \frac{t}{|a_n|} \left\{ \frac{2|a_\lambda| \cos\alpha}{t^{n-\lambda}} - \frac{|a_{n-1}|}{t} (\cos\alpha + \sin\alpha) \right\} + 2 \sin\alpha \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n| t^{n-j-1}} \,] > 0 \ ,
\end{aligned}$$

لذا $|F(z)| > 0$ است اگر داشته باشیم

$$|z + \frac{a_{n-1}}{a_n} - t| > \frac{t}{|a_n|} \left\{ \frac{2|a_\lambda| \cos\alpha}{t^{n-\lambda}} - \frac{|a_{n-1}|}{t} (\cos\alpha + \sin\alpha) \right\} + 2 \sin\alpha \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n| t^{n-j-1}} .$$

بنابراین برای $|z| > t$ همه صفرهای $F(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z+\frac{a_{n-1}}{a_n}-t| \leq \frac{t}{|a_n|}\left\{\frac{2|a_\lambda|\cos\alpha}{t^{n-\lambda}}-\frac{|a_{n-1}|}{t}(\cos\alpha+\sin\alpha)\right\}+2\sin\alpha\sum_{j=0}^{n-1}\frac{|a_j|}{|a_n|t^{n-j-1}}.$$

چون همه صفرهای $p(z)$ نیز صفرهای $F(z)$ هستند لذا برای $|z| > t$ همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه بالا قرار دارند.

اکنون فرض می کنیم $|z| \leq t$ و $0 \leq \lambda \leq n-2$ باشد وبا بکار بردن لم ۷.۱.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
|z+\frac{a_{n-1}}{a_n}-t| &\leq t+\frac{|ta_n-a_{n-1}|}{|a_n|}\\
&\leq t+\left(|\frac{a_{n-1}}{a_n}|-t\right)\cos\alpha+\left(|\frac{a_{n-1}}{a_n}|+t\right)\sin\alpha\\
&\leq \frac{t}{|a_n|}\left\{\frac{2|a_\lambda|\cos\alpha}{t^{n-\lambda}}-\frac{|a_{n-1}|}{t}(\cos\alpha+\sin\alpha)\right\}+2\sin\alpha\sum_{j=0}^{n-1}\frac{|a_j|}{|a_n|t^{n-j-1}}
\end{aligned}$$

نامساوی بالا برقرار است اگر داشته باشیم:

$$t(1-\cos\alpha)+t\sin\alpha+2|\frac{a_{n-1}}{a_n}|\cos\alpha \leq 2|\frac{a_\lambda}{a_n}|\frac{1}{t^{n-\lambda-1}}\cos\alpha+2\sin\alpha\sum_{j=0}^{n-2}|\frac{a_j}{a_n}|\frac{t^{j+1}}{t^n}. \tag{۳.۲}$$

چون با توجه به فرض داریم:

$$t^n|a_{n-1}| \leq |a_\lambda|t^{\lambda+1}$$

در نتیجه (۳.۲) برقرار است اگر:

$$t(1-\cos\alpha)+t\sin\alpha \leq 2\sin\alpha\sum_{j=0}^{n-2}|\frac{a_j}{a_n}|\frac{t^{j+1}}{t^n}. \tag{۴.۲}$$

وبا توجه به اینکه $0 \leq \lambda \leq n-2$ است لذا داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-2}|\frac{a_j}{a_n}|\frac{t^{j+1}}{t^n} &= \sum_{j=0}^{\lambda-1}|\frac{a_j}{a_n}|\frac{t^{j+1}}{t^n}+\sum_{j=\lambda}^{n-2}|\frac{a_j}{a_n}|\frac{t^{j+1}}{t^n} \geq \sum_{j=\lambda}^{n-2}|\frac{a_j}{a_n}|\frac{t^{j+1}}{t^n}\\
&= t\sum_{j=\lambda}^{n-2}|\frac{a_j}{a_n}|\frac{t^j}{t^n} \geq t\sum_{j=\lambda}^{n-2}1 = t(n-\lambda-1) \geq t.
\end{aligned}$$

بنابراین (۴.۲)زمانی برقرار است که داشته باشیم:

$$t(1-\cos\alpha)+t\sin\alpha \leq 2t\sin\alpha, 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

یا برای $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ داشته باشیم:

$$\cos\alpha+\sin\alpha \geq 1 \tag{5.2}$$

توجه کنیم که وقتی $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ باشد $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}) \geq \sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}=1$ است و (۵.۲) برقرار است لذا برای $|z| \leq t$ و $0 \leq \lambda \leq n-2$ داریم:

$$|z+\frac{a_{n-1}}{a_n}-t| \leq \frac{t}{|a_n|}\left\{\frac{2|a_\lambda|\cos\alpha}{t^{n-\lambda}}-\frac{|a_{n-1}|}{t}(\cos\alpha+\sin\alpha)\right\}+2\sin\alpha\sum_{j=0}^{n-1}\frac{|a_j|}{|a_n|t^{n-j-1}}.$$

وچون همه صفرهای $p(z)$ نیز صفرهای $F(z)$ هستند پس همه صفرهای $p(z)$ درناحیه بالا قرار دارند.

□

*) با قرار دادن شرایط قبلی روی قسمت های حقیقی و موهومی ضرایب، قضایای زیر را بدست آورده و آنها را اثبات می کنیم.

قضیه ۲.۱.۱۶. [۲۶] فرض می کنیم $p(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، اگر برای $j=0,1,2,...,n,$ ، $\Re a_j=\alpha_j$، $\Im a_j=\beta_j$ داشته باشیم:

$$\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq ... \geq \alpha_n$$

$$\beta_0 \geq \beta_1 \geq ... \geq \beta_n$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z| \leq \frac{|a_0|+(\alpha_0+\beta_0)-(\alpha_n+\beta_n)}{|a_n|}$$

نتیجه ۱۷.۱.۲. [۲۶] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، اگر برای $j = 0, 1, 2, ..., n,$ ، $\Re a_j = \alpha_j$ ، $\Im a_j = \beta_j$ داشته باشیم:

$$\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq ... \geq \alpha_n$$

$$\beta_0 \leq \beta_1 \leq ... \leq \beta_n$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z| \leq \frac{|a_0| + \alpha_0 - \beta_0 - \alpha_n + \beta_n}{|a_n|}$$

نتیجه ۱۸.۱.۲. [۲۶] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، اگر برای $j = 0, 1, 2, ..., n,$ ، $\Re a_j = \alpha_j$ ، $\Im a_j = \beta_j$ داشته باشیم:

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq ... \leq \alpha_n$$

$$\beta_0 \geq \beta_1 \geq ... \geq \beta_n$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z| \leq \frac{|a_0| - \alpha_0 + \beta_0 + \alpha_n - \beta_n}{|a_n|}$$

قضیه ۱۹.۱.۲. [۳۵] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، اگر برای $j = 0, 1, 2, ..., n,$ ، $\Re a_j = \alpha_j$ ، $\Im a_j = \beta_j$ و برای یک $k \geq 1$ داشته باشیم:

$$k\alpha_n \geq \alpha_{n-1} \geq ... \geq \alpha_1 \geq \alpha_0,$$

$$\beta_n \geq \beta_{n-1} \geq ... \geq \beta_1 \geq \beta_0 > 0,$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه ی زیر قرار دارند.

$$|z+\frac{\alpha_n}{a_n}(k-1)| \leq \frac{1}{|a_n|}\{k\alpha_n - \alpha_0 + |\alpha_0| + \beta_n\}.$$

و این معادل با ناحیه زیر است.

$$|z+\frac{\alpha_n}{a_n}(k-1)| \leq \sqrt{1+k^2} + \frac{1}{|a_n|}(|\alpha_0| - \alpha_0).$$

اثبات. چندجمله ای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}
F(z) &= (1-z)p(z) \\
&= -a_n z^{n+1} + (a_n - a_{n-1})z^n + ... + (a_1 - a_0)z + a_0 \\
&= \left\{-\alpha_n z^{n+1} + (\alpha_n - \alpha_{n-1})z^n + ... + (\alpha_1 - \alpha_0)z + \alpha_0\right\} \\
&\quad +i\left\{-\beta_n z^{n+1} + (\beta_n - \beta_{n-1})z^n + ... + (\beta_1 - \beta_0)z + \beta_0\right\} \\
&= -\alpha_n z^n(z+k-1) + (k\alpha_n - \alpha_{n-1})z^n + (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2})z^{n-1} \\
&\quad +... + (\alpha_1 - \alpha_0)z + \alpha_0 + i\left\{-\beta_n z^{n+1} + (\beta_n - \beta_{n-1})z^n\right. \\
&\quad \left. +... + (\beta_1 - \beta_0)z + \beta_0\right\} \\
&= -z^n\{(\alpha_n + i\beta_n)z + \alpha_n(k-1)\} + (k\alpha_n - \alpha_{n-1})z^n) \\
&\quad +(\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2})z^{n-1} + ... + (\alpha_1 - \alpha_0)z + \alpha_0 \\
&\quad +i\{(\beta_n - \beta_{n-1})z^n + ... + (\beta_1 - \beta_0)z + \beta_0\}.
\end{aligned}$$

حال فرض می کنیم $|z| > ۱$ پس برای $j = ۰, ۱, ..., n - ۱$، $\frac{۱}{|z|^{n-j}} < ۱$ می باشد وداریم:

$$\begin{aligned} |F(z)| &\geq |z|^n \,[\, |a_n z + \alpha_n(k-۱)| \\ &\quad - \left\{ |k\alpha_n - \alpha_{n-۱}| + \frac{|\alpha_{n-۱} - \alpha_{n-۲}|}{|z|} + ... + \frac{|\alpha_۱ - \alpha_۰|}{|z|^{n-۱}} + \frac{|\alpha_۰|}{|z|^n} \right\} \\ &\quad - \left\{ |\beta_n - \beta_{n-۱}| + \frac{|\beta_{n-۱} - \beta_{n-۲}|}{|z|} + ... + \frac{|\beta_۱ - \beta_۰|}{|z|^{n-۱}} + \frac{|\beta_۰|}{|z|^n} \right\}] \\ &= |z|^n \left[|a_n||z + \frac{\alpha_n}{a_n}(k-۱)| - k\alpha_n - \alpha_۰ + |\alpha_۰| + \beta_n \right]. \end{aligned}$$

پس $|F(z)| > ۰$ است اگر:

$$|z + \frac{\alpha_n}{a_n}(k-۱)| > \frac{k\alpha_n - \alpha_۰ + |\alpha_۰| + \beta_n}{|a_n|}.$$

در نتیجه برای $|z| > ۱$ همه صفرهای $F(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z + \frac{\alpha_n}{a_n}(k-۱)| \leq \frac{k\alpha_n - \alpha_۰ + |\alpha_۰| + \beta_n}{|a_n|}.$$

و چون برای $|z| \leq ۱$ صفرهای $F(z)$ درون ناحیه بالا می باشد و چون همه صفرهای $p(z)$ نیز صفرهای $F(z)$ هستند لذا همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z + \frac{\alpha_n}{a_n}(k-۱)| \leq \frac{k\alpha_n - \alpha_۰ + |\alpha_۰| + \beta_n}{|a_n|}.$$

□

قضیه ۲.۱.۲۰. [۲۴] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=۰}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، اگر برای $j = ۰, ۱, ۲, ..., n$، $\Re a_j = \alpha_j$، $\Im a_j = \beta_j$ و برای یک عدد حقیقی β و $t > ۰$ داشته باشیم:

$$| \arg a_j - \beta | \leq \alpha \leq \tfrac{\pi}{2}, \quad j = 0, 1, 2, ..., n$$

$$0 < t^n \alpha_n \;\; \leq \;\; t^{n-1}\alpha_{n-1} \leq ... \leq t^{\lambda}\alpha_{\lambda}\,, \quad 0 \leq \lambda \leq n$$

$$t^{\lambda}\alpha_{\lambda} \;\; \geq \;\; t^{\lambda-1}\alpha_{\lambda-1} \geq ... \geq t\alpha_1 \geq a_0 > 0$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه ی زیر قرار دارند.

$$|z| \leq \left(\frac{2t^{\lambda}\alpha_{\lambda}}{t^n\alpha_n} - 1\right) + \frac{2}{\alpha_n}\sum_{j=0}^{n}\frac{|\beta_j|}{t^{n-j-1}}. \tag{۶.۲}$$

*) قضیه بالا را برای حالتی $0 \leq \lambda \leq n-1$ بررسی می کنیم و نشان می دهیم دایره تعریف شده در قضیه زیر درون دایره تعریف شده در قضیه قبل است.

قضیه ۲۱.۱.۲. [۷] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، اگر برای $j = 0, 1, 2, ..., n$، $\Re a_j = \alpha_j$، $\Im a_j = \beta_j$ و برای یک عدد حقیقی β و $t > 0$ داشته باشیم:

$$| \arg a_j - \beta | \leq \alpha \leq \tfrac{\pi}{2}, \quad j = 0, 1, 2, ..., n$$

$$0 < t^n \alpha_n \;\; \leq \;\; t^{n-1}\alpha_{n-1} \leq ... \leq t^{\lambda}\alpha_{\lambda}\,, \quad 0 \leq \lambda \leq n-1,$$

$$t^{\lambda}\alpha_{\lambda} \;\; \geq \;\; t^{\lambda-1}\alpha_{\lambda-1} \geq ... \geq t\alpha_1 \geq a_0 > 0$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه ی زیر قرار دارند.

$$|z + \frac{\alpha_{n-1} - t\alpha_n}{a_n}| \leq \frac{1}{|a_n|}\left\{\left(\frac{2\alpha_{\lambda}t^{\lambda+1}}{t^n} - \alpha_{n-1}\right) + t|\beta_n| + \frac{2}{t^{n-1}}\sum_{j=0}^{n-1}|\beta_j|t^j\right\}. \tag{۷.۲}$$

تذکر ۲۲.۱.۲. [۷] قضیه ۲۱.۱.۲ تعمیمی از قضیه ۲۰.۱.۲ است و نشان می دهیم ناحیه تعریف شده در (۷.۲) درون دایره تعریف شده در (۶.۲) است.

فرض می کنیم $w=z$ یک نقطه درون دایره (۷.۲) باشدآنگاه داریم:

$$|w+\frac{\alpha_{n-1}-t\alpha_n}{a_n}|\leq\frac{1}{|a_n|}\left\{\left(\frac{2\alpha_\lambda}{t^{n-\lambda-1}}-\alpha_{n-1}\right)+t|\beta_n|+\frac{2}{t^{n-1}}\sum_{j=0}^{n-1}|\beta_j|t^j\right\}.$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}
|w| &\leq \frac{1}{|a_n|}\left\{|\alpha_{n-1}-t\alpha_n|+\frac{2\alpha_\lambda}{t^{n-\lambda-1}}-\alpha_{n-1}+t|\beta_n|+2\sum_{j=0}^{n-1}\frac{|\beta_j|}{t^{n-j-1}}\right\}\\
&\leq \frac{1}{|\alpha_n|}\left\{|\alpha_{n-1}-t\alpha_n|+\frac{2\alpha_\lambda}{t^{n-\lambda-1}}-\alpha_{n-1}+t|\beta_n|+2\sum_{j=0}^{n-1}\frac{|\beta_j|}{t^{n-j-1}}\right\}\\
&= \frac{1}{|\alpha_n|}\left\{\alpha_{n-1}-t\alpha_n+\frac{2\alpha_\lambda}{t^{n-\lambda-1}}-\alpha_{n-1}+t|\beta_n|+2\sum_{j=0}^{n-1}\frac{|\beta_j|}{t^{n-j-1}}\right\}\\
&\leq t\left(\frac{2\alpha_n}{\alpha_n t^{n-\lambda}}-1\right)+\frac{1}{\alpha_\lambda}\left[t|\beta_n|+2\sum_{j=0}^{n-1}\frac{|\beta_j|}{t^{n-j-1}}\right]\\
&\leq t\left(\frac{2t^\lambda\alpha_\lambda}{\alpha_n t^n}-1\right)+\frac{2}{\alpha_n}\sum_{j=0}^{n}\frac{|\beta_j|}{t^{n-j-1}}.
\end{aligned}$$

پس نقطه $w=z$ درون دایره (۶.۲) قرار دارد.

حال به اثبات قضیه ۲۱.۱.۲ می پردازیم.

اثبات. چندجمله ای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}
F(z) &= (t-z)p(z)\\
&= (t-z)(a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_{\lambda+1}z^{\lambda+1}+a_\lambda z^\lambda+a_{\lambda-1}z^{k\lambda-1}+\ldots+a_1z+a_0)\\
&= -a_nz^{n+1}+(ta_n-a_{n-1})z^n+\ldots+(ta_{\lambda+1}-a_\lambda)z^{\lambda+1}+(ta_\lambda-a_{\lambda-1})z^\lambda\\
&\quad +(ta_{\lambda-1}-a_{\lambda-2})z^{\lambda-1}+\ldots+(ta_2-a_1)z^2+(ta_1-a_0)z+ta_0\\
&= -a_nz^{n+1}+(ta_n-a_{n-1})z^n+\sum_{j=0}^{n-1}(ta_j-a_{j-1})z^j,\quad (a_{-1}=0)
\end{aligned}$$

فرض می کنیم $|z| > t$ پس داریم:

$$\begin{aligned}|F(z)| &\geq |z|^n \left\{|a_n z + a_{n-1} - ta_n| - \sum_{j=0}^{n-1} |ta_j - a_{j-1}| \frac{1}{|z|^{n-j}}\right\} \\ &\geq |z|^n \left\{|a_n z + \alpha_{n-1} - t\alpha_n| - |\beta_{n-1}| - t|\beta_n| - \sum_{j=0}^{n-1} |ta_j - a_{j-1}| \frac{1}{|z|^{n-j}}\right\}.\end{aligned}$$

حال با توجه به فرض داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} |ta_j - a_{j-1}| t^j &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |t\alpha_j - \alpha_{j-1}| t^j + \sum_{j=0}^{n-1} (t|\beta_j| + |a_{j-1}|) t^j \\ &= \sum_{j=0}^{\lambda} |t\alpha_j - \alpha_{j-1}| t^j + \sum_{j=\lambda+1}^{n-1} |t\alpha_j - \alpha_{j-1}| t^j + \sum_{j=0}^{n-1} (t|\beta_j| + |a_{j-1}|) t^j \\ &\leq t\alpha_0 + (t\alpha_1 - \alpha_0)t + \ldots + (t\alpha_{\lambda-1} - \alpha_{\lambda-2}) t^{\lambda-1} \\ &\quad + (t\alpha_\lambda - \alpha_{\lambda-1}) t^\lambda + (\alpha_\lambda - t\alpha_{\lambda+1}) t^{\lambda+1} \\ &\quad + \ldots + (\alpha_{n-2} - t\alpha_{n-1}) t^{n-1} + t|\beta_0| + (|\beta_0| + t|\beta_1|)t + (|\beta_1| + t|\beta_2|)t^2 \\ &\quad + \ldots + (|\beta_{n-3}| + t|\beta_{n-2}|) t^{n-2} + (|\beta_{n-2}| + t|\beta_{n-1}|) t^{n-1} \\ &= 2\alpha_\lambda t^{\lambda+1} - \alpha_{n-1} t^n + 2t \sum_{j=0}^{n-1} |\beta_j| t^j - |\beta_{n-1}| t^n.\end{aligned}$$

لذا برای $|z| > t$ داریم

$$|F(z)| \geq |z|^n \left\{|a_n z + \alpha_{n-1} - t\alpha_n| - \frac{2\alpha_\lambda t^{\lambda+1}}{t^n} + \alpha_{n-1} - \frac{2t}{t^n} \sum_{j=0}^{n-1} |\beta_j| t^j - |\beta_n| t\right\} > 0$$

بنابراین $|F(z)| > 0$ است اگر داشته باشیم:

$$|a_n z + \alpha_{n-1} - t\alpha_n| > \frac{2\alpha_\lambda t^{\lambda+1}}{t^n} + (|\beta_n| t - \alpha_{n-1}) + \frac{2t}{t^n} \sum_{j=0}^{n-1} |\beta_j| t^j.$$

پس همه صفرهای $F(z)$ برای $|z| > t$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z + \frac{\alpha_{n-1} - t\alpha_n}{a_n}| \leq \frac{1}{|a_n|} \left\{\left(\frac{2\alpha_\lambda t^{\lambda+1}}{t^n} - \alpha_{n-1}\right) + t|\beta_n| + \frac{2}{t^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} |\beta_j| t^j\right\}.$$

حال اگر $|z| \leq t$ باشد آنگاه:

$$\begin{aligned} |a_n z + \alpha_{n-1} - t\alpha_n| &\leq |a_n|t + |\alpha_{n-1} - t\alpha_n| \\ &\leq t\alpha_n + t|\beta_n| + \alpha_{n-1} - t\alpha_n \\ &= t|\beta_n| + \alpha_{n-1} = t|\beta_n| + 2\alpha_{n-1} - \alpha_{n-1} \\ &\leq t|\beta_n| + \frac{2t^{\lambda+1}}{t^n}\alpha_\lambda - \alpha_{n-1} \\ &\leq \frac{2\alpha_\lambda t^{\lambda+1}}{t^n} - \alpha_{n-1} + t|\beta_n| + \frac{2}{t^{n-1}}\sum_{j=0}^{n-1}|\beta_j|t^j. \end{aligned}$$

در نتیجه برای $|z| \leq t$ همه صفرهای $F(z)$ در ناحیه قرار دارند.

$$|z + \frac{\alpha_{n-1} - t\alpha_n}{a_n}| \leq \frac{1}{|a_n|}\left\{\left(\frac{2\alpha_\lambda t^{\lambda+1}}{t^n} - \alpha_{n-1}\right) + t|\beta_n| + \frac{2}{t^{n-1}}\sum_{j=0}^{n-1}|\beta_j|t^j\right\}.$$

لذا همه صفرهای $F(z)$ در ناحیه بالا قرار دارند و چون همه صفرهای $p(z)$ نیز صفرهای $F(z)$ هستند لذا همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه بالا قرار دارند. $\square$

قضیه ۲.۱.۲۳. [۳۵] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، اگر برای $j = 0, 1, 2, ..., n$ ، $\Re a_j = \alpha_j$ ، $\Im a_j = \beta_j$ و برای یک $k \geq 1$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned} k\alpha_n &\leq \alpha_{n-1} \leq ... \leq \alpha_\lambda \\ \alpha_\lambda &\geq \alpha_{\lambda-1} \geq ... \geq \alpha_1 \geq \alpha_0, \quad 0 \leq \lambda \leq n-1 \\ \beta_n &\geq \beta_{n-1} \geq ... \geq \beta_1 \geq \beta_0 > 0, \end{aligned}$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه ی زیر قرار دارند.

$$|z + \frac{\alpha_n}{a_n}(k-1)| \leq \frac{1}{|a_n|}\left\{2\alpha_\lambda - k\alpha_n - \alpha_0 + |\alpha_0| + \beta_n\right\}.$$

اثبات. چندجمله ای زیر را در نظر می گیریم:

$$
\begin{aligned}
F(z) &= (1-z)p(z) \\
&= -a_n z^{n+1} + (a_n - a_{n-1})z^n + ... + (a_1 - a_0)z + a_0 \\
&= \left\{-\alpha_n z^{n+1} + (\alpha_n - \alpha_{n-1})z^n + ... + (\alpha_1 - \alpha_0)z + \alpha_0 \right\} \\
&\quad +i\left\{-\beta_n z^{n+1} + (\beta_n - \beta_{n-1})z^n + ... + (\beta_1 - \beta_0)z + \beta_0 \right\} \\
&= -\alpha_n z^n(z+k-1) + (k\alpha_n - \alpha_{n-1})z^n + (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2})z^{n-1} \\
&\quad +... + (\alpha_1 - \alpha_0)z + \alpha_0 + i\left\{-\beta_n z^{n+1} + (\beta_n - \beta_{n-1})z^n \right. \\
&\quad \left. +... + (\beta_1 - \beta_0)z + \beta_0 \right\} \\
&= -z^n\left\{(\alpha_n + i\beta_n)z + \alpha_n(k-1)\right\} + (k\alpha_n - \alpha_{n-1})z^n) \\
&\quad +(\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2})z^{n-1} + ... + (\alpha_1 - \alpha_0)z + \alpha_0 \\
&\quad +i\left\{(\beta_n - \beta_{n-1})z^n + ... + (\beta_1 - \beta_0)z + \beta_0 \right\}.
\end{aligned}
$$

حال فرض می کنیم $|z| > 1$ پس برای $j = 0, 1, ..., n-1$ ، $\frac{1}{|z|^{n-j}} < 1$ می باشد وداریم:

$$
\begin{aligned}
|F(z)| \geq\ & |z|^n \Big[|a_n z + \alpha_n(k-1)| - \Big\{|k\alpha_n - \alpha_{n-1}| + \frac{|\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}|}{|z|} + ... + \frac{|\alpha_{\lambda+1} - \alpha_\lambda|}{|z|^{n-\lambda-1}} \\
& + \frac{|\alpha_\lambda - \alpha_{\lambda-1}|}{|z|^{n-\lambda}} + \frac{|\alpha_{\lambda-1} - \alpha_{\lambda-2}|}{|z|^{n-\lambda+1}} + ... + \frac{|\alpha_1 - \alpha_0|}{|z|^{n-1}} + \frac{|\alpha_0|}{|z|^n} \Big\} \\
& - \Big\{|\beta_n - \beta_{n-1}| + \frac{|\beta_{n-1} - \beta_{n-2}|}{|z|} + ... + \frac{|\beta_1 - \beta_0|}{|z|^{n-1}} + \frac{|\beta_0|}{|z|^n}\Big\} \Big] \\
=\ & |z|^n \left[|a_n||z + \frac{\alpha_n}{a_n}(k-1)| - 2\alpha_\lambda - k\alpha_n - \alpha_0 + |\alpha_0| + \beta_n\right].
\end{aligned}
$$

پس $|F(z)| > 0$ است اگر:

$$|z+\frac{\alpha_n}{a_n}(k-۱)| > \frac{۲\alpha_\lambda - k\alpha_n - \alpha_. + |\alpha_.| + \beta_n}{|a_n|}.$$

در نتیجه برای $|z| > ۱$ همه صفرهای $F(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z+\frac{\alpha_n}{a_n}(k-۱)| \leq \frac{۲\alpha_\lambda - k\alpha_n - \alpha_. + |\alpha_.| + \beta_n}{|a_n|}.$$

و چون برای $|z| \leq ۱$ صفرهای $F(z)$ در ناحیه بالا صدق می کند چون همه صفرهای $p(z)$ نیز صفرهای $F(z)$ هستند لذا همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z+\frac{\alpha_n}{a_n}(k-۱)| \leq \frac{۲\alpha_\lambda - k\alpha_n - \alpha_. + |\alpha_.| + \beta_n}{|a_n|}.$$

□

*) با بکار بردن قضیه بالا برای چندجمله ای $P(tz)$ نتیجه زیر را خواهیم داشت:

نتیجه ۲.۱.۲۴. فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=.}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، اگر $\Re a_j = \alpha_j$ ، $\Im a_j = \beta_j$, $j = ۰, ۱, ۲, ..., n$ و برای یک $k \geq ۱$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned} kt^n\alpha_n &\leq t^{n-۱}\alpha_{n-۱} \leq ... \leq t^\lambda\alpha_\lambda\ , \\ t^\lambda\alpha_\lambda &\geq t^{\lambda-۱}\alpha_{\lambda-۱} \geq ... \geq t\alpha_۱ \geq \alpha_., \quad ۰ \leq \lambda \leq n-۱ \\ t^n\beta_n &\geq t^{n-۱}\beta_{n-۱} \geq ... \geq t\beta_۱ \geq \beta_. > ۰\ , \end{aligned}$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه ی زیر قرار دارند.

$$|z+\frac{t\alpha_n}{a_n}(k-۱)| \leq \frac{t}{|a_n|}\left\{۲\frac{\alpha_\lambda}{t^{n-\lambda}} - k\alpha_n + \frac{۱}{t^n}(|\alpha_.| - \alpha_.) + \beta_n\right\}.$$

قضیه ۲.۱.۲۵. [۲۲] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=.}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، اگر $\Re a_j = \alpha_j$ ، $\Im a_j = \beta_j$, $j = ۰, ۱, ۲, ..., n$ و همچنین اگر داشته باشیم:

$$\begin{aligned} t^n\alpha_n &\leq t^{n-1}\alpha_{n-1} \leq ... \leq t^{\lambda}\alpha_{\lambda}\ , \\ t^{\lambda}\alpha_{\lambda} &\geq t^{\lambda-1}\alpha_{\lambda-1} \geq ... \geq t\alpha_1 \geq \alpha_0\ , \quad 0 \leq \lambda \leq n-1 \\ t^n\beta_n &\leq t^{n-1}\beta_{n-1} \leq ... \leq t^r\beta_r \\ t^r\beta_r &\geq t^{r-1}\beta_{r-1} \geq ... \geq t\beta_1 \geq \beta_0\ , \quad 0 \leq r \leq n-1, \end{aligned}$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه ی زیر قرار دارند.

$$|z| \leq \max\left\{\frac{M}{|a_n|}, \frac{1}{t}\right\}$$

$$\begin{aligned} M &= |a_0|t^{n+1} - t^{n-1}(\alpha_0 + \beta_0) - t(\alpha_n + \beta_n) \\ &+(t^2+1)(t^{n-\lambda-1}\alpha_{\lambda} + t^{n-r-1}\beta r) \\ &+(t^2-1)\left(\sum_{j=0}^{\lambda-1} t^{n-j-1}\alpha_j + \sum_{j=0}^{r-1} t^{n-j-1}\beta_j\right) \\ &+(1-t^2)\left(\sum_{j=\lambda+1}^{n-1} t^{n-j-1}\alpha_j + \sum_{j=0}^{r-1} t^{n-j-1}\beta_j\right) \end{aligned}$$

*)برای اثبات قضایای بعدی به لم زیر نیاز داریم.

لم ۲.۱.۲۶. [۳]، [۳۱] فرض کنیم $P(z) = a_nz^n + a_kz^k + ... + a_1z + a_0$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد بطوریکه $0 \leq k \leq n-1$ باشد. آنگاه برای هر عدد حقیقی r همه صفرهای $P(z)$ در دایره زیر قرار دارند.

$$|\ z| \leq Max\left\{r\ ,\ \sum_{j=0}^{k} |\ \frac{a_j}{a_n}|\frac{1}{r^{n-j-1}}\right\}$$

قضیه ۲.۱.۲۷. [۴] فرض کنیم $p(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب حقیقی باشد. بطوریکه

$$t_1 t_2 a_r + (t_1 - t_2) a_{r-1} - a_{r-2} \geq 0 \ , \quad r = 1, 2, ..., n+1,$$

آنگاه همه صفرهای $P(z)$ در ناحیه $|z| \leq t_1$ قرار دارند.

اثبات. چند جمله ای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} F(z) &= (t_2+z)(t_1-z)P(z) = (t_2+z)(t_1-z)(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z^1 + a_0) \\ &= -a_n z^{n+2} + ((t_1-t_2)a_n - a_{n-1}) z^{n+1} + (t_1 t_2 a_n + (t_1-t_2)a_{n-1} - a_{n-2}) z^n \\ &\quad +... + (t_1 t_2 a_2 + (t_1-t_2)a_1 - a_0) z^2 + (t_1 t_2 a_1 + (t_1-t_2)a_0) z + a_0 t_1 t_2 \\ &= -a_n z^{n+2} + \sum_{j=0}^{n+1} (t_1 t_2 a_j + (t_1-t_2) a_{j-1} - a_{j-2}) z^j \qquad (a_{-1} = a_{-2} = a_{n+1} = 0). \end{aligned}$$

با بکار بردن لم ۲.۱.۲۶ برای چندجمله ای $F(z)$ از درجه $n+2$ و با قرار دادن $r=t_1$ و $k=n+1$ داریم که همه صفرهای $F(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$| z | \leq Max \left\{ t_1, \sum_{j=0}^{n+1} \frac{| t_1 t_2 a_j + (t_1 - t_2) a_{j-1} - a_{j-2} |}{t_1^{n-j+1} | a_n |} \right\}$$

حال داریم که:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \frac{| t_1 t_2 a_j + (t_1 - t_2) a_{j-1} - a_{j-2} |}{t_1^{n-j+1} |a_n|} = \frac{1}{|a_n|} \left(\frac{t_1 t_2 a_0}{t_1^{n+1}} + \frac{t_1 t_2 a_1 + (t_1 - t_2) a_0}{t_1^n} \right.$$

$$+ \frac{t_1 t_2 a_2 + (t_1 - t_2) a_1 - a_0}{t_1^{n-1}} + \frac{t_1 t_2 a_3 + (t_1 - t_2) a_2 - a_1}{t_1^{n-2}}$$

$$\left. +... + \frac{t_1 t_2 a_n + (t_1 - t_2) a_{n-1} - a_{n-2}}{t_1^1} + \frac{t_1 t_2 a_{n+1} + (t_1 - t_2) a_n - a_{n-1}}{t_1^0} \right)$$

$$= t_1$$

چون همه صفرهای $P(z)$ صفرهای $F(z)$ هستند بنابرین همه صفرهای $P(z)$ در ناحیه $|z| \leq t_1$ قرار دارند.

□

قضیه ۲.۱.۲۸. فرض کنیم $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد. اگر برای $t_1 > t_2 \geq 0$ داشته باشیم:

$$t_1 t_2 |a_r| + (t_1 - t_2)|a_{r-1}| - |a_{r-2}| \geq 0 \,, \quad r = 1, 2, ..., k+1,$$

$$t_1 t_2 |a_r| + (t_1 - t_2)|a_{r-1}| - |a_{r-2}| \leq 0 \,, \quad r = k+2, .., n+1,$$

و $0 \leq k \leq n$ ، $a_{-1} = a_{n+1} = 0$ آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$| z | \leq t_1 \left\{ \frac{2|a_k| + 2t_2|a_{k+1}|}{t_1^{n-k}|a_n|} - 1 \right\} + t_1 \frac{|a_n - |a_n||}{|a_n|}.$$

اثبات. چند جمله ای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} F(z) &= (t_2 + z)(t_1 - z)P(z) = (t_2 + z)(t_1 - z)(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z^1 + a_0) \\ &= -a_n z^{n+2} + \sum_{j=0}^{n+1} (t_1 t_2 a_j + (t_1 - t_2) a_{j-1} - a_{j-2}) z^j, \qquad (a_{-1} = a_{-2} = a_{n+1} = 0). \end{aligned}$$

با بکار بردن لم ۲.۱.۲۶ برای چندجمله ای $F(z)$ از در جه $n+2$ و با قرار دادن $r = t_1$ و $k = n+1$ داریم همه صفرهای $F(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$\begin{aligned} | z | \leq Max(t_1, \sum_{j=0}^{n+1} \frac{| t_1 t_2 a_j + (t_1 - t_2) a_{j-1} - a_{j-2} |}{t_1^{n-j+1} | a_n |}) \\ = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{| t_1 t_2 a_j + (t_1 - t_2) a_{j-1} - a_{j-2} |}{t_1^{n-j+1} |a_n|}. \end{aligned}$$

چون t_1 برابر است با :

$$t_1 = \left|\sum_{j=0}^{n+1} \frac{t_1 t_2 a_j + (t_1 - t_2) a_{j-1} - a_{j-2}}{t_1^{n-j+1}\, a_n}\right|$$
$$\leq \sum_{j=0}^{n+1} \frac{|\, t_1 t_2 a_j + (t_1 - t_2) a_{j-1} - a_{j-2}\, |}{t_1^{n-j+1} |a_n|}$$

حال داریم:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \frac{|\, t_1 t_2 a_j + (t_1 - t_2) a_{j-1} - a_{j-2}\, |}{t_1^{n-j+1} |a_n|}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n+1} \frac{|\, t_1 t_2 |a_j\,| + (t_1 - t_2)|a_{j-1}| - |a_{j-2}|\,|}{t_1^{n-j+1} |a_n|}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n+1} \frac{t_1 t_2 \mid a_j - |a_j\,|\,| + (t_1 - t_2) \mid a_{j-1} - |a_{j-1}\,|\,| - \mid a_{j-2} - \mid a_{j-2}|\,|}{t_1^{n-j+1} |a_n|}$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(t_1 t_2 |a_j\,| + (t_1 - t_2)|a_{j-1}| - |a_{j-2}|)}{t_1^{n-j+1} |a_n|}$$

$$+ \sum_{k+2}^{n+1} \frac{(|a_{j-2}| - (t_1 - t_2)|a_{j-1}| - t_1 t_2 |a_j\,|)}{t_1^{n-j+1} |a_n|}$$
$$+ t_1 \frac{|a_n - |a_n||}{|a_n|}$$

$$= \left(\frac{2|a_k\,|}{t_1^{n-k+1}|a_n|} + \frac{2t_2|a_{k+1}\,|}{t_1^{n-k+1}|a_n|} - t_1\right) + \sum_{j=0}^{n+1} \frac{t_1 \mid a_{j-1} - |a_{j-1}\,|\,| - |a_{j-1}\,|\,| - \mid a_{j-2} - \mid a_{j-2}|\,|}{t_1^{n-j+1} |a_n|}$$

$$\leq t_1 \left\{ \frac{2|a_k\,| + 2t_2|a_{k+1}\,|}{t_1^{n-k}|a_n|} - 1 \right\} + t_1 \frac{|a_n - |a_n||}{|a_n|}.$$

بنابراین همه صفرهای $f(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$| z |\leq t_۱ \left\{ \frac{۲|a_k| + ۲t_۲|a_{k+۱}|}{t_۱^{n-k}|a_n|} - ۱ \right\} + t_۱ \frac{|a_n - |a_n||}{|a_n|}.$$

چون همه صفرهای $P(z)$ صفرهای $F(z)$ هستند لذا اثبات تمام است. □

اگر در قضیه بالا $k = n$ باشد نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۲.۱.۲۹. فرض کنیم $p(z) = \sum_{j=۰}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد. اگر $t_۱ > t_۲ \geq ۰$ به طوریکه

$$t_۱t_۲|a_r| + (t_۱ - t_۲)|a_{r-۱}| - |a_{r-۲}| \geq ۰\ , \quad r = ۱, ۲, ..., n + ۱,$$

و $a_{-۱} = a_{n+۱} = ۰$، آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$| z| \leq t_۱(۱ + \frac{|a_n - |a_n||}{|a_n|}).$$

قضیه ۲.۱.۳۰. [۳۲] فرض کنیم $p(z) = \sum_{j=۰}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط بطوریکه $\Re a_j = \alpha_j$ و $\Im a_j = \beta_j$، $j = ۰, ۱, ..., n$ باشد. واگر برای $t_۱ > t_۲ \geq ۰$ داشته باشیم که

$$t_۱t_۲|\alpha_r| + (t_۱ - t_۲)|\alpha_{r-۱}| - |\alpha_{r-۲}| \geq ۰, \quad r = ۱, ۲, ..., k + ۱,$$

$$t_۱t_۲|\alpha_r| + (t_۱ - t_۲)|\alpha_{r-۱}| - |\alpha_{r-۲}| \leq ۰, \quad r = k + ۲, .., n + ۱,$$

و $a_{-۱} = a_{n+۱} = ۰$,$۰ \leq k \leq n$، آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$| z |\leq t_۱ \left\{ \frac{۲\alpha_k + ۲t_۲\alpha_{k+۱}}{t_۱^{n-k}\alpha_n} - ۱ \right\} + \frac{۲}{\alpha_n} \sum_{j=۰}^{n} \frac{|\beta_j|}{t_۱^{n-j-۱}}.$$

اثبات. مشابه قضیه قبل ثابت می شود. □

برای اثبات دو قضیه بعد به لم زیر نیاز داریم که آن را بیان و اثبات می کنیم.

لم ۳۱.۱.۲. [۳۲] اگر برای عدد حقیقی β و $j = 0, 1, 2, ..., n$ داشته باشیم $|\arg a_j - \beta| \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ آنگاه برای $t_1 > t_2 \geq 0$:

$$|t_1 t_2 a_j + (t_1 - t_2) a_{j-1} - a_{j-2}| \leq |t_1 t_2 |a_j| + (t_1 - t_2)|a_{j-1}|$$
$$- |a_{j-2}|| \cos\alpha + (t_1 t_2 |a_j| + (t_1 - t_2)|a_{j-1}| + |a_{j-2}|) \sin\alpha.$$

اثبات. فرض می کنیم $\arg a_j = \alpha_j$ ، $\arg a_{j-1} = \alpha_{j-1}$ و $\arg a_{j-2} = \alpha_{j-2}$ باشند آنگاه:

$$|t_1 t_2 a_j + (t_1 - t_2) a_{j-1} - a_{j-2}|^2$$
$$= |t_1 t_2 |a_j| e^{i\alpha_j} + (t_1 - t_2)|a_{j-1}| e^{i\alpha_{j-1}} - |a_{j-2}| e^{i\alpha_{j-2}}|^2$$
$$= t_1^2 t_2^2 |a_j|^2 + (t_1 - t_2)^2 |a_{j-1}|^2 + |a_{j-2}|^2 + 2 t_1 t_2 (t_1 - t_2)|a_j||a_{j-1}| \cos(\alpha_j - \alpha_{j-1})$$
$$- 2(t_1 - t_2)|a_{j-1}||a_{j-2}| \cos(\alpha_{j-1} - \alpha_{j-2}) - 2 t_1 t_2 |a_j||a_{j-2}| \cos(\alpha_{j-2} - \alpha_j)$$

حال با توجه به فرض داریم $|\alpha_j - \beta| \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$، $|\alpha_{j-1} - \beta| \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ و $|\alpha_{j-2} - \beta| \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ بنابرین

$$|\alpha_{j-1} - \alpha_{j-2}| = |\alpha_{j-1} - \beta + \beta - \alpha_{j-2}|$$
$$\leq \quad |\alpha_{j-1} - \beta| + |\alpha_{j-2} - \beta| \leq 2\alpha \leq \pi.$$

لذا داریم:

$$\cos(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \geq \cos 2\alpha,$$
$$\cos(\alpha_{j-1} - \alpha_{j-2}) \geq \cos 2\alpha,$$
$$\cos(\alpha_{j-2} - \alpha_j) \geq \cos 2\alpha.$$

$$|t_1t_2a_j+(t_1-t_2)a_{j-1}-a_{j-2}|^2\le t_1^2t_2^2|a_j|^2+(t_1-t_2)^2|a_{j-1}|^2+|a_{j-2}|^2$$

$$+2t_1t_2(t_1-t_2)|a_j||a_{j-1}|\cos 2\alpha-2(t_1-t_2)|a_{j-1}||a_{j-2}|\cos 2\alpha-2t_1t_2|a_{j-2}||a_j\cos 2\alpha$$

$$=|t_1t_2|a_j|+(t_1-t_2)|a_{j-1}|-|a_{j-2}||^2\cos^2\alpha$$

$$+(t_1t_2|a_j|+(t_1-t_2)|a_{j-1}|+|a_{j-2}|)^2\sin^2\alpha$$

$$\le\{|t_1t_2|a_j|+(t_1-t_2)|a_{j-1}|-|a_{j-2}||\cos\alpha$$

$$+(t_1t_2|a_j|+(t_1-t_2)|a_{j-1}|+|a_{j-2}|)\sin\alpha\}^2$$

چون برای $0\le 2\alpha\le\pi$ ، $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha\ge 0$. در نتیجه:

$$|t_1t_2a_j+(t_1-t_2)a_{j-1}-a_{j-2}|\le|t_1t_2|a_j|+(t_1-t_2)|a_{j-1}|$$

$$-|a_{j-2}||\cos\alpha+(t_1t_2a_j+(t_1-t_2)|a_{j-1}|+|a_{j-2}|)\sin\alpha.$$

□

قضیه ۳۲.۱.۲. [۳۲] فرض کنیم $p(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد بطوریکه برای عدد حقیقی β داشته باشیم:

$$|\arg a_j-\beta|\le\alpha\le\frac{\pi}{2},\quad j=0,1,2,...,n$$

و اگر برای $t_1>t_2\ge 0$ داشته باشیم،

$$t_1t_2|a_r|+(t_1-t_2)|a_{r-1}|-|a_{r-2}|\ge 0,\quad r=1,2,...,k+1,$$

$$t_1t_2|a_r|+(t_1-t_2)|a_{r-1}|-|a_{r-2}|\le 0,\quad r=k+2,..,n+1,$$

و اگر $a_{-1} = a_{n+1} = 0 \quad , \quad 0 \leq k \leq n$، آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$| z |\leq t_1 \left\{ \left(\frac{2|a_k| + 2t_2|a_{k+1}|}{t_1^{n-k}|a_n|} - 1 \right) \cos\alpha + \sin\alpha \right\} + \frac{2\sin\alpha}{|a_n|} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{t_1^{n-j-1}}.$$

اثبات. چند جمله ای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} F(z) &= (t_2 + z)(t_1 - z)P(z) = (t_2 + z)(t_1 - z)(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0) \\ &= -a_n z^{n+2} + ((t_1 - t_2)a_n - a_{n-1})z^{n+1} + (t_1 t_2 a_n + (t_1 - t_2)a_{n-1} - a_{n-2})z^n \\ &\quad + \dots + (t_1 t_2 a_2 + (t_1 - t_2)a_1 - a_0)z^2 + (t_1 t_2 a_1 + (t_1 - t_2)a_0)z + a_0 t_1 t_2 \\ &= -a_n z^{n+2} + \sum_{j=0}^{n+1} (t_1 t_2 a_j + (t_1 - t_2)a_{j-1} - a_{j-2})z^j, \quad (a_{-1} = a_{-2} = a_{n+1} = 0). \end{aligned}$$

با بکار بردن لم ۲۶.۱.۲ برای چندجمله ای $F(z)$ از در جه $n + 2$ و با قرار دادن $r = t_1$ و $k = n + 1$ داریم که همه صفرهای $F(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$\begin{aligned} | z |\leq Max \left\{ t_1, \sum_{j=0}^{n+1} \frac{| t_1 t_2 a_j + (t_1 - t_2)a_{j-1} - a_{j-2} |}{t_1^{n-j+1} | a_n |} \right\} \\ = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{| t_1 t_2 a_j + (t_1 - t_2)a_{j-1} - a_{j-2} |}{t_1^{n-j+1}|a_n|}. \end{aligned}$$

حال با بکاربردن لم ۳۱.۱.۲ داریم:

$$\begin{aligned} |z| \leq \sum_{j=0}^{n+1} \frac{|t_1 t_2 |a_j| + (t_1 - t_2)|a_{j-1}| - |a_{j-2}|| \cos\alpha}{t_1^{n-j+1}|a_n|} \\ + \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(t_1 t_2 |a_j| + (t_1 - t_2)|a_{j-1}| + |a_{j-2}|) \sin\alpha}{t_1^{n-j+1}|a_n|} \end{aligned}$$

اکنون داریم:

$$\sum_{j=0}^{n+1}\frac{|t_1t_2|a_j|+(t_1-t_2)|a_{j-1}|-|a_{j-2}||\cos\alpha}{t_1^{n-j+1}|a_n|}$$
$$=\sum_{j=0}^{k+1}\frac{(t_1t_2|a_j|+(t_1-t_2)|a_{j-1}|-|a_{j-2}|)\cos\alpha}{t_1^{n-j+1}|a_n|}$$
$$-\sum_{j=k+2}^{n+1}\frac{(t_1t_2|a_j|+(t_1-t_2)|a_{j-1}|-|a_{j-2}|)\cos\alpha}{t_1^{n-j+1}|a_n|}$$

$$=t_1\left(\frac{|a_k|+t_2|a_{k+1}|}{t_1^{n-k}|a_n|}\right)\cos\alpha-t_1\left(\frac{-|a_k|-t_2|a_{k+1}|}{t_1^{n-k}|a_n|}+1\right)\cos\alpha$$

$$=t_1\left(\frac{2|a_k|+2t_2|a_{k+1}|}{t_1^{n-k}|a_n|}\right)\cos\alpha-t_1\cos\alpha.$$

همچنین داریم:

$$\sum_{j=0}^{n+1}\frac{(t_1t_2|a_j|+(t_1-t_2)|a_{j-1}|+|a_{j-2}|)}{t_1^{n-j+1}|a_n|}\sin\alpha=\sum_{j=0}^{n+1}\frac{t_1|a_{j-1}|+|a_{j-2}|}{t_1^{n-j+1}}\sin\alpha$$
$$=2\sum_{j=0}^{n-1}\frac{|a_j|}{|a_n|t_1^{n-j+1}}\sin\alpha+t_1\sin\alpha.$$

لذا همه صفرهای $F(z)$ درناحیه زیر قرار دارند.

$$|\, z \,|\leq t_1\left\{\left(\frac{2|a_k|+2t_2|a_{k+1}|}{t_1^{n-k}|a_n|}-1\right)\cos\alpha+\sin\alpha\right\}+\frac{2\sin\alpha}{|a_n|}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{|a_j|}{t_1^{n-j-1}}.$$

چون همه صفرهای $p(z)$ نیز صفرهای $F(z)$ هستند لذا اثبات تمام است. □

نتیجه ۳۳.۱.۲. [۳۲] فرض کنیم $p(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد بطوریکه برای عدد حقیقی β داشته باشیم:

$$|\arg a_j-\beta|\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2},\quad j=0,1,2,...,n$$

و اگر برای $t_۱ > t_۲ \geq ۰$ داشته باشیم و برای $k = n$

$$t_۱t_۲|a_r| + (t_۱ - t_۲)|a_{r-۱}| - |a_{r-۲}| \geq ۰, \quad r = ۱, ۲, ۳, ...n + ۱,$$

و $a_{-۱} = a_{n+۱} = ۰$ ،آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$| z |\leq t_۱ (\cos\alpha + \sin\alpha) + \frac{۲\sin\alpha}{|a_n|}\sum_{j=۰}^{n-۱}\frac{|a_j|}{t_۱^{n-j-۱}}.$$

قضیه ۳٤.۱.۲. [۳۲] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=۰}^{n} a_jz^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد بطوریکه $\Re a_j = \alpha_j$ و $\Im a_j = \beta_j$ ، $j = ۰, ۱, ..., n$ ، اگر برای $t_۱ > t_۲ \geq ۰$ داشته باشیم:

$$t_۱t_۲\alpha_r + (t_۱ - t_۲)\alpha_{r-۱} - \alpha_{r-۲} \geq ۰\ , \quad r = ۱, ۲, ..., k + ۱,$$

$$t_۱t_۲\alpha_r + (t_۱ - t_۲)\alpha_{r-۱} - \alpha_{r-۲} \leq ۰\ , \quad r = k + ۲, .., n + ۱, \quad ۰ \leq k \leq n$$

$$t_۱t_۲\beta_r + (t_۱ - t_۲)\beta_{r-۱} - \beta_{r-۲} \geq ۰\ , \quad r = ۱, ۲, ..., m + ۱,$$

$$t_۱t_۲\beta_r + (t_۱ - t_۲)\beta_{r-۱} - \beta_{r-۲} \leq ۰\ , \quad r = m + ۲, .., n + ۱, \quad ۰ \leq m \leq n$$

و اگر $\alpha_{-۱} = \alpha_{n+۱} = \beta_{-۱} = \beta_{n+۱} = ۰$ ، $\alpha_n, \beta_n \geq ۰$ ، آنگاه همه صفرهای $P(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$|z| \leq \frac{t_۱}{|a_n|}\left\{۲t_۱^{k-n}(\alpha_k + \alpha_{k+۱}) + ۲t_۱^{m-n}(\beta_m + t_۲\beta_{m+۱}) - (\alpha_n + \beta_n)\right\}.$$

نتیجه ۳۵.۱.۲. [۳۲] اگر در قضیه بالا $k = n = m$ باشد آنگاه همه صفرهای $p(z)$ درناحیه زیر قرار دارند.

$$|z| \leq t_۱\left\{\frac{\alpha_n + \beta_n}{|a_n|}\right\} \leq \sqrt{۲}t_۱$$

$*$) حال قضیه بالا را برای حالتی که $۱ \leq k \leq n - ۱$ باشد تعمیم می دهیم.

قضیه ۳۶.۱.۲. [۳۸] فرض می کنیم $p(z)$ یک چندجمله ای از درجه n باشد بطوریکه برای $j = ۰, ۱, ۲, ..., n$ ، $a_j = \alpha_j + i\beta_j$ و اگر $t_۱ > t_۲ \geq ۰$ و برای k ، $۱ \leq k \leq n - ۱$ است داشته باشیم:

$$t_۱ t_۲ \alpha_r + (t_۱ - t_۲)\alpha_{r-۱} - \alpha_{r-۲} \geq ۰\,, \quad r = ۲, ۳, ..., k+۱,$$

$$t_۱ t_۲ \alpha_r + (t_۱ - t_۲)\alpha_{r-۱} - \alpha_{r-۲} \leq ۰\,, \quad r = k+۲, .., n+۱,$$

$$t_۱ t_۲ \beta_r + (t_۱ - t_۲)\beta_{r-۱} - \beta_{r-۲} \geq ۰\,, \quad r = ۲, ۳, ..., k+۱,$$

$$t_۱ t_۲ \beta_r + (t_۱ - t_۲)\beta_{r-۱} - \beta_{r-۲} \leq ۰\,, \quad r = k+۲, .., n+۱,$$

آنگاه همه صفرهای $p(z)$ درناحیه زیر قرار دارند.

$$|z + \frac{a_{n-۱}}{a_n} - (t_۱ - t_۲)| \leq R$$

بطوریکه:

$$\begin{aligned} R \;=\; & \frac{t_۱}{|a_n|}\left\{\left(\frac{۲\alpha_k}{t_۱^{n-k}} - \frac{\alpha_{n-۱}}{t_۱}\right) + \frac{۱}{t_۱^n}(|\alpha_۰| - \alpha_۰)\right\} \\ & + \frac{t_۲}{|a_n|}\left\{\left(\frac{۲\alpha_{k+۱}}{t_۱^{n-k-۱}} - \alpha_n\right) + \frac{۱}{t_۱^n}(|\alpha_۰| - \alpha_۰)\right\} \\ & + \frac{t_۱}{|a_n|}\left\{\left(\frac{۲\beta_k}{t_۱^{n-k}} - \frac{\beta_{n-۱}}{t_۱}\right) + \frac{۱}{t_۱^n}(|\beta_۰| - \beta_۰)\right\} \\ & + \frac{t_۲}{|a_n|}\left\{\left(\frac{۲\beta_{k+۱}}{t_۱^{n-k-۱}} - \beta_n\right) + \frac{۱}{t_۱^n}(|\beta_۰| - \beta_۰)\right\} \end{aligned}$$

اثبات. برای اثبات قضیه به [۳۸] مراجعه نمایید. □

۲.۲ مکانی که چندجمله ای $p(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ در آن هیچ صفری ندارد

در این بخش مکانهایی که چندجمله ای $p(z)$ در آن هیچ صفری ندارد را بدست می آوریم و کرانهایی را که برای صفرهای قدرمطلق آن در بخش قبل بدست آوردیم، بهبود می دهیم.

قضیه ۴.۱.۲ را تعمیم می دهیم.

قضیه ۱.۲.۲. [۳] فرض می کنیم $p(z)$ یک چندجمله ای ازدرجه n باشد که در مفروضات قضیه ۴.۱.۲ صدق کند آنگاه همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$\frac{|a_0|}{|a_n|-a_0+a_n} \leq |z| \leq \frac{|a_0|-a_0+a_n}{|a_n|}$$

مثال ۲.۲.۲. چندجمله ای زیر را در نظر می گیریم

$$p(z)=n!z^n+(n-1)!z^{n-1}+...+z+1$$

همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه $\frac{1}{2n!-1} \leq |z| \leq 1$ قرار دارند.

نتیجه ۳.۲.۲. [۳] اگر $p(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n باشد بطوریکه،

$$a_n \leq a_{n-1} \leq ... \leq a_1 \leq a_0$$

آنگاه همه ی صفرهای $p(z)$ در ناحیه زیر قرار دارند.

$$\frac{|a_0|}{|a_n|+a_0-a_n} \leq |z| \leq \frac{|a_0|+a_0-a_n}{|a_n|}$$

قضیه ۴.۲.۲. [۱۲] فرض کنیم $p(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد بطوریکه اگر n زوج باشد داشته باشیم:

$$a_n \geq a_{n-2} \geq a_{n-4} \geq \ldots \geq a_2 \geq a_0 \ ,$$

$$a_{n-1} \geq a_{n-3} \geq a_{n-5} \geq \ldots \geq a_3 \geq a_1 \ ,$$

اگر n فرد باشد،

$$a_n \geq a_{n-2} \geq a_{n-4} \geq \ldots \geq a_3 \geq a_1 \ ,$$

$$a_{n-1} \geq a_{n-3} \geq a_{n-5} \geq \ldots \geq a_2 \geq a_0 \ ,$$

آنگاه $p(z)$ در ناحیه زیر هیچ صفری ندارد.

$$|z| < \frac{|a_0|}{|a_n| + a_n + |a_{n-1}| + a_{n-1} + |a_1| - a_1 - a_0}.$$

اثبات. چندجمله ای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= (1 - z^2)p(z) \\ &= -a_n z^{n+2} - a_{n-1} z^{n+1} + (a_n - a_{n-2})z^n + (a_{n-1} - a_{n-3})z^{n-1} + \ldots \\ &\quad + (a_3 - a_1)z^3 + (a_2 - a_0)z^2 + a_1 z + a_0 \\ &= a_0 + \phi(z) \end{aligned}$$

بطوریکه،

$$\begin{aligned} \phi(z) &= -a_n z^{n+2} - a_{n-1} z^{n+1} + (a_n - a_{n-2})z^n + (a_{n-1} - a_{n-3})z^{n-1} + \ldots \\ &\quad + (a_3 - a_1)z^3 + (a_2 - a_0)z^2 + a_1 z \end{aligned}$$

حال برای $|z| < 1$ داریم،

$$\begin{aligned} |\phi(z)| &\leq |a_n| + |a_{n-1}| + (a_n - a_{n-2}) + (a_{n-1} - a_{n-3}) + \dots \\ &+(a_3 - a_1) + (a_2 - a_0) + |a_1| \\ &\leq |a_n| + |a_{n-1}| + a_n + a_{n-1} - a_1 - a_0 + |a_1| \end{aligned}$$

چون $\phi(0) = 0$ است لذا با توجه به لم ۱۲.۱.۱ برای $|z| < 1$ نتیجه می شود،

$$|\phi(z)| \leq M|z|$$

بطوریکه،

$$M = |a_n| + |a_{n-1}| + a_n + a_{n-1} - a_1 - a_0 + |a_1|$$

لذا برا ی $|z| < 1$ داریم:

$$\begin{aligned} |\Phi(z)| &\geq |a_0| - |\phi(z)| \\ &\geq |a_0| - M|z| \\ &> 0 \end{aligned}$$

بنابراین $\Phi(z)$ برای $|z| < 1$ مثبت است اگر $|z| < \dfrac{|a_0|}{M}$ برقرار باشد.

چون همه صفرهای $p(z)$ نیز صفرهای $\Phi(z)$ هستند لذا $p(z)$ در ناحیه زیر هیچ صفری ندارد.

$$|z| < \frac{|a_0|}{|a_n| + a_n + |a_{n-1}| + a_{n-1} + |a_1| - a_1 - a_0}.$$

□

قضیه ۵.۲.۲. [۱۲] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=.}^{n} a_j z^n$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد بطوریکه برای $j = ۰, ۱, ۲, ..., n$ داشته باشیم $\Re a_j = \alpha_j$، $\Im a_j = \beta_j$ و اگر برای یک $\lambda \geq ۱$ داشته باشیم:

$$\lambda\alpha_n \geq \alpha_{n-۱} \geq ... \geq \alpha_۱ \geq \alpha. \ ,$$

$$\beta_n \geq \beta_{n-۱} \geq ... \geq \beta_۱ \geq \beta. \ ,$$

آنگاه $p(z)$ در ناحیه زیر هیچ صفری ندارد.

$$|z| < \frac{|a.|}{|a_n| + (\lambda - ۱)|\alpha_n| + \lambda\alpha_n - \alpha. + \beta_n - \beta.}.$$

اثبات. چندجمله ای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= (۱ - z)p(z) \\
&= -a_n z^{n+۱} + (a_n - a_{n-۱})z^n + ... + (a_۱ - a.)z + a. \\
&= a. + \phi(z)
\end{aligned}$$

بطوریکه،

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= -a_n z^{n+۱} + (a_n - a_{n-۱})z^n + (a_{n-۱} - a_{n-۲})z^{n-۱} + ... + (a_۱ - a.)z \\
&= -a_n z^{n+۱} + (\alpha_n - \alpha_{n-۱})z^n + (\alpha_{n-۱} - \alpha_{n-۲})z^{n-۱} + ... + (\alpha_۱ - \alpha.)z \\
&\quad +i\left\{(\beta_n - \beta_{n-۱})z^n + (\beta_{n-۱} - \beta_{n-۲})z^{n-۱} + ... + (\beta_۱ - \beta.)z\right\} \\
&= -a_n z^{n+۱} - (\lambda - ۱)\alpha_n z^n \\
&\quad +(\lambda\alpha_n - \alpha_{n-۱})z^n + (\alpha_{n-۱} - \alpha_{n-۲})z^{n-۱} + ... + (\alpha_۱ - \alpha.)z \\
&\quad +i\left\{(\beta_n - \beta_{n-۱})z^n + (\beta_{n-۱} - \beta_{n-۲})z^{n-۱} + ... + (\beta_۱ - \beta.)z\right\}
\end{aligned}$$

حال برای $|z| < ۱$ داریم،

$$|\phi(z)| \leq |a_n| + (\lambda - ۱)|\alpha_n| + \lambda\alpha_n - \alpha_. + \beta_n - \beta_..$$

چون $\phi(۰) = ۰$ است لذا با بکار بردن لم ۱۲.۱.۱ داریم،

$$|\phi(z)| \leq M|z|$$

بطوریکه $M = |a_n| + (\lambda - ۱)|\alpha_n| + \lambda\alpha_n - \alpha_. + \beta_n - \beta_.$ باشد.

بنابراین برای $|z| < ۱$ داریم:

$$\begin{aligned} |\Phi(z)| &\geq |a_.| - |\phi(z)| \\ &\geq |a_.| - M|z| \\ &> ۰ \end{aligned}$$

در نتیجه $\Phi(z)$ برای $|z| < ۱$ مثبت است اگر $|z| < \frac{|a_.|}{M}$ برقرار باشد.

چون همه صفرهای $p(z)$ نیز صفرهای $\Phi(z)$ هستند لذا $p(z)$ در ناحیه زیر هیچ صفری ندارد.

$$|z| < \frac{|a_.|}{|a_n| + (\lambda - ۱)|\alpha_n| + \lambda\alpha_n - \alpha_. + \beta_n - \beta_.}.$$

□

قضیه ۶.۲.۲. [۱۲] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=.}^{n} a_j z^n$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد بطوریکه برای βی حقیقی داشته باشیم:

$$|\arg a_j - \beta| \leq \alpha \leq \tfrac{\pi}{۲}, \quad j = ۰, ۱, ۲, ..., n$$

و برای یک $\lambda \geq ۱$،

$$\lambda|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq ... \geq |a_1| \geq |a_0|.$$

آنگاه $p(z)$ در ناحیه زیر هیچ صفری ندارد.

$$|z| < \frac{|a_0|}{\lambda|a_n| + (\lambda|a_n| - |a_0|)\cos\alpha + (\lambda|a_n| + |a_0|)\sin\alpha + 2\sin\alpha\sum_{j=1}^{n-1}|a_j|}.$$

اثبات. چندجمله ای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= (1-z)p(z) \\
&= -a_n z^{n+1} + (a_n - a_{n-1})z^n + ... + (a_1 - a_0)z + a_0 \\
&= -a_n z^{n+1} - (\lambda - 1)a_n z^n + (\lambda a_n - a_{n-1})z^n + ... + (a_1 - a_0)z + a_0 \\
&= a_0 + \phi(z)
\end{aligned}$$

بطوریکه ،

$$\phi(z) = -a_n z^{n+1} + (\lambda - 1)a_n z^n + (\lambda a_n - a_{n-1})z^n + ... + (a_1 - a_0)z$$

حال با بکار بردن لم ۷.۱.۲ و برای $|z| < 1$ داریم:

$$\begin{aligned}
|\phi| &\leq |a_n| + (\lambda - 1)|a_n| + |\lambda a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + ... + |a_1 - a_0| \\
&\leq \lambda|a_n| + (\lambda|a_n| - |a_0|)\cos\alpha + (\lambda|a_n| + |a_0|)\sin\alpha + 2\sin\alpha\sum_{j=1}^{n-1}|a_j|.
\end{aligned}$$

چون $\phi(0) = 0$ است لذا با توجه به لم ۱۲.۱.۱ برای $|z| < 1$ داریم:

$$|\phi(z)| \leq M|z|$$

بطوریکه ،

$$M = \lambda|a_n| + (\lambda|a_n| - |a_0|)\cos\alpha + (\lambda|a_n| + |a_0|)\sin\alpha + 2\sin\alpha\sum_{j=1}^{n-1}|a_j|.$$

بنابراین برای $|z| < ۱$ داریم:

$$\begin{aligned} |\Phi(z)| &\geq |a_۰| - |\phi(z)| \\ &\geq |a_۰| - M|z| \\ &> ۰, \end{aligned}$$

اگر داشته باشیم:

$$|z| < \frac{|a_۰|}{M}.$$

□

قضیه ۷.۲.۲. [۲۲] فرض می کنیم $p(z) = \sum_{j=۰}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب مختلط باشد، اگر $\Re a_j = \alpha_j$ ، $\Im a_j = \beta_j$ ، $j = ۰, ۱, ۲, ..., n,$ و همچنین اگر داشته باشیم:

$$\begin{aligned} t^n \alpha_n &\leq t^{n-۱} \alpha_{n-۱} \leq ... \leq t^{\lambda} \alpha_{\lambda}, \\ t^{\lambda} \alpha_{\lambda} &\geq t^{\lambda-۱} \alpha_{\lambda-۱} \geq ... \geq t\alpha_۱ \geq \alpha_۰, \quad ۰ \leq \lambda \leq n-۱ \\ t^n \beta_n &\geq t^{n-۱} \beta_{n-۱} \geq ... \geq t^r \beta_r \\ t^r \beta_r &\geq t^{r-۱} \beta_{r-۱} \geq ... \geq t\beta_۱ \geq \beta_۰, \quad ۰ \leq r \leq n-۱, \end{aligned}$$

آنگاه هیچ یک از صفرهای $p(z)$ در ناحیه ی زیر قرار ندارند.

$$|z| < \min\left\{ \frac{t|a_۰|}{۲\left(t^{\lambda}\alpha_{\lambda} + t^r \beta_r\right) - (\alpha_۰ + \beta_۰) - t^n\left(\alpha_n + \beta_n - |a_n|\right)}, t \right\}$$

*) با توجه به قضیه ۲۵.۱.۲ و قضیه قبل نتیجه می شود همه صفرهای $p(z)$ در ناحیه $R_۱ \leq |z| \leq R_۲$ قرار دارد.

$$R_{1} = \min\left\{\frac{t|a_{0}|}{2\left(t^{\lambda}\alpha_{\lambda} + t^{r}\beta_{r}\right) - (\alpha_{0} + \beta_{0}) - t^{n}\left(\alpha_{n} + \beta_{n} - |a_{n}|\right)}, t\right\}$$

$$R_{2} = \max\left\{\frac{M}{|a_{n}|}, \frac{1}{t}\right\}$$

$$\begin{aligned} M &= |a_{0}|t^{n+1} - t^{n-1}(\alpha_{0} + \beta_{0}) - t(\alpha_{n} + \beta_{n}) \\ &+ (t^{2} + 1)(t^{n-\lambda-1}\alpha_{\lambda} + t^{n-r-1}\beta r) \\ &+ (t^{2} - 1)\left(\sum_{j=0}^{\lambda-1} t^{n-j-1}\alpha_{j} + \sum_{j=0}^{r-1} t^{n-j-1}\beta_{j}\right) \\ &+ (1 - t^{2})\left(\sum_{j=\lambda+1}^{n-1} t^{n-j-1}\alpha_{j} + \sum_{j=0}^{r-1} t^{n-j-1}\beta_{j}\right). \end{aligned}$$

مثال ۸.۲.۲. چندجمله ای زیر را در نظر می گیریم

$$p(z) = (1+i) + (0/2 + 002i)z + (0/03 + 0/03i)z^{2} + (0/0031 + 0/0031i)z^{3} + (0/0003 + 0/0003i)z^{4}$$

باتوجه به قضیه قبل همه صفرهای $p(z)$ در $|z| \geq 1/3598$ قرار دارند.

فصل ۳

کرانهایی برای قدر مطلق صفرهای توابع تحلیلی

۱.۳ صفرهای توابع تحلیلی

با تعمیم قضیه انسترم کاکیا کرانهایی برای قدر مطلق صفرهای توابع تحلیلی

بصورت $f(z)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ با اعمال شرایط خاص روی ضرایب آنها بدست می آوریم.

عزیز و محمد با تعمیم قضیه انستروم - کاکیا مکانی که توابع تحلیلی در آن هیچ صفری ندارند را

بدست آوردند و نتیجه زیر را اثبات کردند.

قضیه ۱.۱.۳. [۴] فرض کنیم $f(z)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \not\equiv 0$ در $|z|\leq t$ تحلیلی باشد.اگر $a_j>0$

و $a_{j-1}-ta_j\geq 0 \quad , j=0,1,2,...$ ، آنگاه $f(z)$ در ناحیه $|z|<t$ هیچ صفری ندارد.

قضیه ۲.۱.۳. [۳۶] فرض می کنیم $f(z)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \not\equiv 0$ در $|z|\leq 1$ تحلیلی باشد، بطوریکه برای

یک عدد $k\geq 1$ ،

$$|\arg a_j|\leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad j=0,1,2,...,$$

$$k|a_0|\geq t|a_1|\geq t^2|a_2|\geq ...,$$

آنگاه $f(z)$ در ناحیه زیر هیچ صفری ندارد.

$$|z-\frac{(k-1)t}{M^2-(k-1)^2}|<\frac{Mt}{M^2-(k-1)^2}$$

بطوریکه $M=k(\sin\alpha+\cos\alpha)+\frac{2\sin\alpha}{|a_0|}\sum_{j=0}^{\infty}t^j|a_j|$ می باشد.

اثبات. بوضوح داریم $\lim_{j\to\infty}a_jt^j=0$ ، حال تابع تحلیلی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}
F(z) &= (z-t)f(z)\\
&= -ta_0+(a_0-ta_1)z+z\sum_{j=2}^{\infty}(a_{j-1}-ta_j)z^{j-1}\\
&= -ta_0+(a_0-ka_0)z+(ka_0-ta_1)z+z\sum_{j=2}^{\infty}(a_{j-1}-ta_j)z^{j-1}\\
&= -ta_0+(a_0-ka_0)z+G(z)
\end{aligned}$$

چون برای $j=0,1,2,\ldots$ داریم $|\arg a_j|\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ لذا باتوجه به لم ۷.۱.۲ به آسانی می توان نشان داد

$$|ta_j-a_{j-1}|\leq|t|a_j|-|a_{j-1}||\cos\alpha+(t|a_j|+|a_{j-1}|)\sin\alpha$$

وهمچنین داریم:

$$|ta_1-ka_0|\leq||a_1|-k|a_0||\cos\alpha+(t|a_1|+k|a_0|)\sin\alpha$$

بنابراین برای $|z|=t$ داریم،

$$\begin{aligned}
|G(z)| &\leq |ka_0-ta_1|t+t\sum_{j=2}^{\infty}|a_{j-1}-ta_j|t^{j-1}\\
&\leq |k|a_0|-t|a_1||t\cos\alpha+(k|a_0|+t|a_1|)t\sin\alpha\\
&\quad +t\left[\sum_{j=2}^{\infty}(|a_{j-1}|-t|a_j|)t^{j-1}\cos\alpha+\sum_{j=2}^{\infty}(|a_{j-1}|+t|a_j|)t^{j-1}\sin\alpha\right]\\
&= t|a_0|\left[k(\cos\alpha+\sin\alpha)+\frac{2\sin\alpha}{|a_0|}\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|t^j\right]\\
&= t|a_0|M\,;
\end{aligned}$$

چون $G(z)$ در $|z| \leq t$ تحلیلی است و $G(\circ) = \circ$ می باشد لذا بنابر لم ۱۲.۱.۱ برای $|z| \leq t$ داریم:

$$|G(z)| \leq |a_\circ|M|z|$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned} |F(z)| &\geq |ta_\circ + (k-1)a_\circ z| - |G(z)| \\ &\geq |ta_\circ + (k-1)a_\circ z| - |a_\circ|M|z| \end{aligned}$$

بنابراین برای $|z| \leq t$ ، $F(z)$ مثبت است اگر داشته باشیم:

$$|a_\circ|M|z| < |ta_\circ + (k-1)a_\circ z|$$

وبا توجه به رابطه بالا به راحتی می توان نشان داد که :

$$|z - \frac{(k-1)t}{M^2 - (k-1)^2}| < \frac{Mt}{M^2 - (k-1)^2}$$

چون همه صفرهای $f(z)$ نیز صفرهای $F(z)$ هستند لذا $f(z)$ در ناحیه زیر هیچ صفری ندارد .

$$|z - \frac{(k-1)t}{M^2 - (k-1)^2}| < \frac{Mt}{M^2 - (k-1)^2}$$

□

قضیه ۳.۱.۳. [۳۵] فرض می کنیم $f(z) = \sum_{j=\circ}^{\infty} a_j z^j \not\equiv \circ$ در $|z| \leq t$ تحلیلی باشد. اگر برای یک $k > 1$ و $\lambda > \circ$ ی داشته باشیم

$$\begin{aligned} k|a_\circ| &\leq t|a_1| \leq \ldots \leq t^\lambda|a_\lambda| \\ t^\lambda|a_\lambda| &\geq t^{\lambda+1}|a_{\lambda-1}| \geq \ldots \end{aligned}$$

و همچنین برای β داشته باشیم:

$$|\arg a_j - \beta| \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

آنگاه $f(z)$ هیچ صفری در ناحیه زیر ندارد.

$$|z - \left(\frac{(k-1)t}{B^{*2} - (k-1)^2}\right)| \leq \frac{B^* t}{B^{*2} - (k-1)^2}$$

$$B^* = \left\{ \left(\frac{2|a_\lambda|}{|a_0|} t^\lambda - k\right) \cos\alpha + k \sin\alpha + 2\frac{\sin\alpha}{|a_0|} \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| t^j \right\}.$$

اثبات. تابع تحلیلی زیر را در نظر می گیریم،

$$\begin{aligned}
F(z) &= (z-t)f(z) \\
&= -ta_0 + (a_0 - ta_1)z + (a_1 - ta_2)z^2 + \ldots + (a_{n-1} - ta_n)z^n + \ldots \\
&= -a_0 \{(k-1)z + t\} + (ka_0 - ta_1)z + (a_1 - ta_2)z^2 + \ldots \\
&\quad + (a_\lambda - ta_{\lambda+1})z^{\lambda+1} + \ldots + (a_{n-1} - ta_n)z^n + \ldots \\
&= -a_0 \{(k-1)z + t\} + G(z).
\end{aligned}$$

چون برای $j = 0, 1, 2, \ldots$ داریم که $|\arg a_j - \beta| \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ، حال با توجه به فرضیات قضیه و لم ۷.۱.۲ برای $|z| = t$ داریم:

$$
\begin{aligned}
|G(z)| &= |(ka_{۰} - ta_{۱})z + (a_{۱} - ta_{۲})z^{۲} + ... + (a_{\lambda} - ta_{\lambda+۱})z^{\lambda+۱} \\
&\quad +... + (a_{n-۱} - ta_{n})z^{n} + ...| \\
&\leq t\,[\,(|ta_{۱}| - ka_{۰})\cos\alpha + (|ta_{۱}| + ka_{۰})\sin\alpha \\
&\quad +(|t^{۲}a_{۲}| - |ta_{۱}|)\cos\alpha + (|t^{۲}a_{۲}| + |ta_{۱}|)\sin\alpha + ... \\
&\quad +(|t^{\lambda}a_{\lambda}| - |t^{\lambda-۱}a_{\lambda-۱}|)\cos\alpha + (|t^{\lambda}a_{\lambda}| + |t^{\lambda-۱}a_{\lambda-۱}|)\sin\alpha \\
&\quad +(|t^{\lambda}a_{\lambda}| - |t^{\lambda+۱}a_{\lambda+۱}|)\cos\alpha + (|t^{\lambda}a_{\lambda}| + |t^{\lambda+۱}a_{\lambda+۱}|)\sin\alpha \\
&\quad +... + (|t^{n-۱}a_{n-۱}| - |t^{n}a_{n}|)\cos\alpha \\
&\quad +(|t^{n-۱}a_{n-۱}| + |t^{n}a_{n}|)\sin\alpha + ...\,] \\
&= t|a_{۰}|\left[\left(۲|\frac{a_{\lambda}}{a_{۰}}|t^{\lambda}\cos\alpha\right) - k\cos\alpha + k\sin\alpha + \frac{۲\sin\alpha}{|a_{۰}|}\sum_{j=۱}^{\infty}|a_{j}|t^{j}\right] \\
&= t|a_{۰}|B^{*},
\end{aligned}
$$

بطوریکه،

$$
B^{*} = \left(۲|\frac{a_{\lambda}}{a_{۰}}|t^{\lambda}\cos\alpha\right) - k\cos\alpha + k\sin\alpha + \frac{۲\sin\alpha}{|a_{۰}|}\sum_{j=۱}^{\infty}|a_{j}|t^{j}.
$$

چون $G(۰) = ۰$ می باشد لذا با استفاده از لم ۱۲.۱.۱ برای $|z| < ۱$ داریم،

$$
|G(z)| \leq t|a_{۰}|B^{*}
$$

$$\begin{aligned} |F(z)| &\geq |a_{\circ}\{(k-1)z+t\}|-|G(z)| \\ &\geq |a_{\circ}|\{|(k-1)z+t|-|z|B^*\} \\ &> \circ , \end{aligned}$$

لذا $|F(z)| > \circ$ است اگر داشته باشیم:

$$|z|B^* < |(k-1)z+t|.$$

از نامساوی بالا نتیجه می شود:

$$|z-\left(\frac{(k-1)t}{B^{*2}-(k-1)^2}\right)| \leq \frac{B^*t}{B^{*2}-(k-1)^2}$$

و از آنجایی که همه صفرهای $f(z)$ صفرهای $F(z)$ می باشند لذا اثبات تمام است. □

قضیه ۴.۱.۳. [۳۵] فرض کنیم $f(z)=\sum_{j=\circ}^{\infty} a_j z^j \not\equiv \circ$ در $|z|<t$ تحلیلی باشد. اگر $a_j=\alpha_j+i\beta_j$ بطوریکه $j=\circ,1,2,3,...$ و برای یک $k\geq 1$ داشته باشیم:

$$k|\alpha_{\circ}| \geq t\alpha_1 \geq t^2\alpha_2 \geq ...,$$

آنگاه $f(z)$ در ناحیه زیر هیچ صفری ندارد.

$$|z-\frac{(k-1)ta_{\circ}}{\alpha_{\circ}[M_1^2-(k-1)^2]}| < \frac{M_1M_2t}{M_1^2-(k-1)^2}$$

بطوریکه، $M_1=\left\{k+\frac{|\beta_{\circ}|}{\alpha_{\circ}}+\frac{2}{\alpha_{\circ}}\sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j|t^j\right\}$ و $M_2=\frac{|a_{\circ}|}{\alpha_{\circ}}$ می باشند .

اثبات. بوضوح داریم که $\lim_{j\to\infty} t^j\alpha_j = ۰$. حال تابع زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}
F(z) &= (z-t)f(z)\\
&= -ta_۰ + (a_۰ - ta_۱)z + z\sum_{j=۲}^{\infty}(a_{j-۱} - ta_j)z^{j-۱}\\
&= -ta_۰ + [(\alpha_۰ - t\alpha_۱) + i(\beta_۰ - t\beta_۱)]z\\
&\quad + z\sum_{j=۲}^{\infty}[(\alpha_{j-۱} - t\alpha_j) + i(\beta_{j-۱} - t\beta_j)]z^{j-۱}\\
&= -ta_۰ + (\alpha_۰ - k\alpha_۰)z + (k\alpha_۰ - t\alpha_۱)z + i(\beta_۰ - t\beta_۱)z\\
&\quad + z\sum_{j=۲}^{\infty}[(\alpha_{j-۱} - t\alpha_j) + i(\beta_{j-۱} - t\beta_j)]z^{j-۱}\\
&= -ta_۰ + (\alpha_۰ - k\alpha_۰)z + G(z)
\end{aligned}$$

وبرای $|z| = t$ داریم:

$$\begin{aligned}
|G(z)| &\leq t[|k\alpha_۰ - t\alpha_۱| + (|\beta_۰| + t|\beta_۱|)\\
&\quad + \sum_{j=۲}^{\infty}[|\alpha_{j-۱} - t\alpha_j| + (|\beta_{j-۱}| + t|\beta_j|)]t^{j-۱}]\\
&= t(k\alpha_۰ + |\beta_۰| + ۲\sum_{j=۱}^{\infty}|\beta_j|t^j)\\
&= \alpha_۰ t\left[k + \frac{|\beta_۰|}{\alpha_۰} + \frac{۲}{\alpha_۰}\sum_{j=۱}^{\infty}|\beta_j|t^j)\right]\\
&= \alpha_۰ t M_۱
\end{aligned}$$

چون $G(z)$ در $|z| \leq t$ تحلیلی و $G(۰) = ۰$ است، باتوجه به لم ۱۲.۱.۱ برای $|z| \leq t$ داریم که :

$$|G(z)| \leq \alpha_۰ M_۱ |z|$$

لذا برای $|z| \leq t$ داریم:

$$\begin{aligned} |F(z)| &\geq |t\alpha_۰ + (k-۱)\alpha_۰ z| - |G(z)| \\ &\geq |t\alpha_۰ + (k-۱)\alpha_۰ z| - \alpha_۰ M_۱ |z| \\ &> ۰, \end{aligned}$$

اگر داشته باشیم:

$$\alpha_۰ M_۱ |z| < |t\alpha_۰ + (k-۱)\alpha_۰ z|.$$

وبا توجه به رابطه بالا به راحتی می توان نشان داد:

$$|z - \frac{(k-۱)t\alpha_۰}{\alpha_۰[M_۱^۲ - (k-۱)^۲]}| < \frac{M_۱ M_۲ t}{M_۱^۲ - (k-۱)^۲},$$

$$M_۲ = \frac{|a_۰|}{\alpha_۰},$$

چون همه صفرهای $f(z)$ صفرهای $F(z)$ می باشند بنابرین $f(z)$ در ناحیه بالا هیچ ندارد. □

مثال ۵.۱.۳. فرض می کنیم:

$$f(z) = (\frac{۱}{۶} + i) + (\frac{۱}{۲}.\frac{۱}{۲} + \frac{i}{۲ \times ۲})z + (\frac{۱}{۲^۳}.\frac{۱}{۲} + \frac{i}{۲^۳ \times ۲})z^۲ + (\frac{۱}{۲^۵}.\frac{۱}{۲} + \frac{i}{۲^۵ \times ۲})z^۳ + \ldots$$

آنگاه برای $k = ۳$ و $t = ۲$ تابع تحلیلی $f(z)$ در ناحیه $|\ z - (۰/۰۲۴۲۴ + ۰/۱۴۵۴۵i)\ | < ۰/۹۵۸۵۰۱۸$ هیچ صفری ندارد.

مثال ۶.۱.۳. فرض می کنیم:

$$f(z) = (1+i) + \left(\frac{1}{2\times 2} + \frac{i}{2\times 2}z\right) + \left(\frac{1}{2^3\times 2} + \frac{i}{2^3\times 2}\right)z^2 + \ldots$$

برای $k=1, t=2$ نتیجه قبل نشان می دهد که $f(z)$ در $|z| < 0/4$ صفری ندارد، وقضیه بالا نشان می دهد که $f(z)$ در $|z| < 0/706$ هیچ صفری ندارد.

نتیجه ۷.۱.۳. [۶] فرض کنیم $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j \not\equiv 0$ در $|\, z \,| \leq t$ تحلیلی باشد. وبرای یک $k \geq 1$ داشته باشیم:

$$k\alpha_0 \geq t\alpha_1 \geq t^2\alpha_2 \geq \ldots$$

آنگاه $f(z)$ در ناحیه زیر هیچ صفری ندارد.

$$|z - \frac{(k-1)t}{2k-1}| < \frac{kt}{2k-1}.$$

قضیه ۸.۱.۳. [۱۷] فرض کنیم $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \not\equiv 0$ در $|\, z \,| < t$ تحلیلی باشد. اگر $a_j = \alpha_j + i\beta_j$ بطوریکه $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ وبرای یک $k \geq 1$ داشته باشیم:

$$k\beta_0 \geq t\beta_1 \geq t^2\beta_2 \geq \ldots,$$

آنگاه $f(z)$ در ناحیه زیر هیچ صفری ندارد.

$$|z - \frac{(k-1)ta_0}{\beta_0\,[A_1^2 - (k-1)^2]}| < \frac{A_1 A_2 t}{A_1^2 - (k-1)^2}$$

جاهایی که $A_1 = \left[k + \frac{|a_0|}{\beta_0} + \frac{2}{\beta_0}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j| t^j\right]$ و $A_2 = \frac{|a_0|}{\beta_0}$ می باشند.

*) حال با ترکیب دو قضیه قبل قضیه زیر را بدست می آوریم.

قضیه ۹.۱.۳. [۱۷] فرض کنیم $f(z)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \not\equiv 0$ در $|z|\leq t$ تحلیلی باشد. اگر $a_j=\alpha_j+\beta_j$ ، $j=0,1,2,3,...$ وبرای $k\geq 1$ و $m\geq 1$ داشته باشم:

$$k\alpha_0 \geq t\alpha_1 \geq t^2\alpha_2 \geq ...$$

$$m\beta_0 \geq t\beta_1 \geq t^2\beta_2 \geq ...$$

آنگاه $f(z)$ در ناحیه زیرهیچ صفری ندارد.

$$|z-\frac{ta_0\overline{C_1}}{C_2^2-|C_1|^2}|<\frac{|a_0|C_2t}{C_2^2-|C_1|^2}$$

بطوریکه $C_1=(k-1)\alpha_0+i(m-1)\beta_0$ و $(k\alpha_0+m\beta_0)$ باشد.

اثبات. بوضوح داریم که $\lim_{t\to\infty}\beta_j t^j=0$ ، $\lim_{t\to\infty}\alpha_j t^j=0$. حال تابع زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}
F(z) &= (z-t)p(z)\\
&= -ta_0+(a_0-ta_1)z+z\sum_{j=2}^{\infty}(a_{j-1}-ta_j)z^{j-1}\\
&= -ta_0+[(1-k)\alpha_0+i(1-m)\beta_0]z+[(k\alpha_0-t\alpha_1)+i(m\beta_0-t\beta_1)]z\\
&\quad +z\sum_{j=2}^{\infty}[(\alpha_{j-1}-t\alpha_j)+i(\beta_{j-1}-t\beta_j)]z^{j-1}\\
&= -ta_0+[(1-k)\alpha_0+i(1-m)\beta_0]z+G(z).
\end{aligned}$$

حال برای $|z|=t$ داریم :

$$\begin{aligned}
|G(z)| &\leq t[|k\alpha_0-t\alpha_1|+|m\beta_0-t\beta_1|+\sum_{j=2}^{\infty}(|\alpha_{j-1}-t\alpha_j|+|\beta_{j-1}-t\beta_j|)t^{j-1}\\
&= t(k\alpha_0+m\beta_0)\\
&= tC_2.
\end{aligned}$$

چون $G(z)$ در $|z|\leq t$ تحلیلی، $G(0)=0$ است. لذا با توجه به لم ۱۲.۱.۱ داریم برای $|z|\leq t$

$$|G(z)| \leq C_۲|z|$$

$$\begin{aligned} |F(z)| &\geq |ta_۰ + [(k-۱)\alpha_۰ + i(m-۱)\beta_۰]z| - |G(z)| \\ &\geq |ta_۰ + [(k-۱)\alpha_۰ + i(m-۱)\beta_۰]z| - C_۲|z|. \end{aligned}$$

بنا براین برای $|z| \leq t$ ، $|F(z)| > ۰$ اگر :

$$C_۲|z| < |ta_۰ + [(k-۱)\alpha_۰ + i(m-۱)\beta_۰]z|$$

حال با توجه به رابطه بالا بوضوح می توان نشان داد که:

$$|z - \frac{ta_۰\overline{C_۱}}{C_۲^۲ - |C_۱|^۲}| < \frac{|a_۰|C_۲ t}{C_۲^۲ - |C_۱|^۲}$$

جایی که $C_۱ = (k-۱)\alpha_۰ + i(m-۱)\beta_۰$ باشد.

چون همه صفرهای $f(z)$ صفرهای $F(z)$ می باشند بنابرین $f(z)$ در ناحیه بالا هیچ صفری ندارد. $\square$

فصل ٤

چندجمله ایهای ماتریسی

۱.۴ یافتن کران برای صفرهای چندجمله ای با ضرایب ماتریسی

تعریف ۱.۱.۴. ترانهاده: ماتریس B را ترانهاده ماتریس $A = (a_{ij})_{m.n}$ می گوییم هرگاه سطرهای B از ستونهای A ساخته شده باشد.

$$A = B^t = (b_{ij})_{n.m} \Longleftrightarrow \forall i, j \; b_{ij} = a_{ji}$$

تعریف ۲.۱.۴. وارون ماتریس: وارون ماتریس مربعی $A_{n.n}$ ماتریس $n * n$ است که اگر در A ضرب شود I_n حاصل می شود، وارون ماتریس A را با A^{-1} نمایش می دهیم.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

تعریف ۳.۱.۴. اگر A ماتریس دلخواه باشد ماتریس B که در شرط $ABA = A$ صدق می کند معکوس تعمیم یافته می گوییم که در برخی موارد به معکوس معمولی شبیه است.

پنروس درسال ۱۹۵۵ نشان داد که برای هر ماتریس متناهی A با درایه های مختلط یک ماتریس B موجود است که در چهار شرط زیر صدق می کند.

$$۱)\; ABA = A \qquad ۲)\; BAB = B \qquad ۳)\; (AB)^* = AB \qquad ۴)\; (BA)^* = BA$$

چنین ماتریسی، معکوس تعمیم یافته مور -پنروز[۱] A نامیده می شود و با $A^\sharp$ نمایش می دهیم.

تعریف ٤.١.٤. پوچی ماتریس: پوچی ماتریس A برابر تعداد بردارهای مستقل خطی غیر صفر z است که $Az = ۰$ باشد.

*) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

ماتریس مربعی A را در نظر می گیریم بردار غیر صفر X را بردار ویژه A و اسکالر λ را مقدار ویژه نظیر آن بردار می گوییم چنانچه معادله ماتریسی زیر برقرار باشد.

$$AX = \lambda X \Longrightarrow (A - \lambda I)X = ۰$$

برای اینکه $(A - \lambda I)X = ۰$ جواب X غیر صفر داشته باشد باید $\det(A - \lambda I)X = ۰$ باشد.

تعریف ٥.١.٤. مقادیر ویژه($Eigenvaluos$) : به λ های حاصل از حل $\det(A - \lambda I)X = ۰$ مقادیر ویژه ماتریس A می نامیم.

مثال ٦.١.٤. فرض می کنیم:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - \lambda I) = (۱ - \lambda)^۲ - ۴$$

$$\det(A - \lambda I) = ۰ \Longrightarrow \lambda = ۳, -۱$$

تعریف ٧.١.٤. ماتریس هرمیتی ($Hermition$) : ماتریسی است مربعی که ترانهاده مزدوج مختلط آن با خودش برابر است.

$$A^* = \overline{A}^t, \quad A = A^* = \overline{A}^t$$

*) خواص ماتریس هرمیتی:

۱) مقادیر ویژه یک ماتریس هرمیتی حقیقی اند.

[۱] Moore - Penrose

۲)بردارهای ویژه مربوط به مقادیر ویژه متمایز بر هم عموداند. واگر همه مقادیر ویژه ساده باشند آنگاه بردارهای ویژه متمایز تشکیل یک مجموعه بردارهای متعامد را می دهند.
۳) برای هر مقدار ویژه با مرتبه تکرار m، می توان m بردار ویژه دوبه دو متمایز انتخاب کرد.بدین سان مجموعه کامل n بردار ویژه را همواره می توان طوری انتخاب کرد که هم متعامد و هم مستقل خطی باشند.

تعریف ۸.۱.٤. ماتریس مثبت معین: ماتریس A_n، $n*n$ مثبت معین است اگر به ازای هر بردار حقیقی غیر صفر $X_{n\cdot ۱}$ داشته باشیم

$$X^tAX > ۰$$

تعریف ۹.۱.٤. ماتریس A_n، $n.n$ مثبت معین است اگر به ازای هر بردار مختلط غیرصفر $Z_{n\cdot ۱}$ داشته باشیم $Re(Z^*AZ) > ۰$ که در آن Z^* ترانهاده مزدوج مختلط Z است.

*)اگر A یک ماتریس مختلط هرمیتی باشد Z^*AZ همیشه حقیقی است.

*)ماتریس هرمیتی A مثبت نیمه معین است یا نامنفی معین است اگر $X^*AX \geq ۰$.

*)اگر ماتریس A_n مثبت معین باشد

$$rakA = n$$

*)ماتریس A مثبت معین است اگروتنهااگر تمامی مقادیر ویژه آن حقیقی و مثبت باشند.

تعریف ۱۰.۱.٤. اگر $A_j \in \mathbb{C}^{n\cdot n}$ و $H(z) = \sum_{j=۰}^{n} A_j z^j$ یک چندجمله ای ماتریسی باشد، اسپکتروم $(Spectrum)$ و شعاع اسپکترال (طیفی) $(SpectralRadius)$، $H(z)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$\sigma(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \det H(\lambda) = ۰\}$$

$$\rho(H) = \max\{|\lambda| \ : \ \lambda \in \sigma(H)\}$$

تذکر ۱۱.۱.۴. اگر $A, \widehat{A} \in \mathbb{C}^{n\cdot n}$ هرمیتی باشند $A \geq ۰$ و $\widehat{A} > ۰$ ، آنگاه $\widehat{A} \geq A$ است اگر داشته باشیم $A - \widehat{A} \geq ۰$.

*) اگر همه مقادیر ویژه ماتریس A حقیقی باشند $\lambda_{\max}$ و $\lambda_{\min}$ بترتیب بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه A است.

* چندجمله ای های با ضرایب ماتریس های هرمیتی $(Hermition\ Polynomals\ Matrics)$:

فرض می کنیم $H(z) = A_n z^n + ... + A_۱ z + A_۰$ یک چندجمله ای ماتریسی با ضرایب هرمیتی $A_j \in \mathbb{C}^{n\cdot n}$ باشد بطوریکه

$$A_n \geq A_{n-۱} \geq ... \geq A_۰ \geq ۰ , \quad A_n > ۰ \tag{۱.۴}$$

و فرض می کنیم $u \in \mathbb{C}^n$ ، $u \neq ۰$ چندجمله ای

$$p_u(z) = u^* H(z) u = \sum_{j=۰}^{n} a_j z^j$$

$$a_j = u^* A_j u, \quad j = ۰, ۱, ۲, ..., n$$

با توجه به رابطه (۱.۴) می بینیم ضرایب $p_u(z)$ در شرط $a_n \geq a_{n-۱} \geq ... \geq a_۰$ و $a_n \geq ۰$ صدق می کند. لذا قضیه انشتروم -کاکیا را برای چندجمله ایهای ماتریسی تعمیم می دهیم.

*) اگر $H(\lambda) u = ۰$ و $u \neq ۰$ آنگاه $p_u(z) = ۰$

قضیه ۱۲.۱.۴. [۳۱] اگر $H(z) = A_n z^n + ... + A_۱ z + A_۰$ یک چندجمله ای ماتریسی با ضرایب هرمیتی $A_j \in \mathbb{C}^{n\cdot n}$ باشد بطوریکه در رابطه(۱.۴) صدق کند آنگاه $\rho(H) \leq ۱$.

قضیه ۶.۱.۲ را برای چندجمله ای ماتریسی تعمیم می دهیم.

قضیه ۱۳.۱.٤. فرض می کنیم $H(z)=\sum_{j=0}^{n}A_j z^j$ یک چندجمله ای از درجه n با ضرایب ماتریسهای هرمیتی باشد بطوریکه

$$0<A_0 \leq A_1 \leq ... \leq A_{r_1-1}<A_{r_1}\leq A_{r_1+1}$$
$$\leq ... \leq A_{r_2-1}<...<A_{r_s}\leq A_{r_s+1}\leq ... \leq A_n$$

۱)اگر $\gcd\{n+1, r_1, ..., r_s\}=1$ آنگاه $\rho(H)<1$.

۲)اگر $0<A_1<A_1<...<A_n$ داریم $\rho(H)<1$.

اثبات. فرض می کنیم $p_u z=\sum_{j=0}^{n}a_j z^j$ و Dدایره واحد باشد. لذا باتوجه به فرضیات قضیه داریم $a_{r_j-1}<a_{r_j}\;\;,\;\; j=0,1,2,...,s$ و قضیه ۶.۱.۲ نشان می دهد $\rho(p)<1$ بنابراین برای $\lambda\in\partial D$ داریم $u^*H(z)u\neq 0$ پس $\rho(H)<1$. □

تذکر ۱٤.۱.٤. فرض می کنیم A ، $\widehat{A}$ ماترسهای $n\times n$ نیمه معین مثبت باشند و $A^\sharp$ واررن ماتریس تعمیم یافته مور - پنروس ماتریس A باشد بوضوح عدد حقیقی b موجود است که $bA\geq\widehat{A}$ اگروتنها اگر

$$\ker A\subseteq\ker\widehat{A}$$

و قرار می دهیم:

$$\min\left\{b\in R\,;\;bA\geq\widehat{A}\right\}=\lambda_{\max}(\widehat{A}A^\sharp).$$

و همچنین داریم اگر $\widehat{A}>0$ آنگاه $A>0$. وقرار می دهیم:

$$\max\left\{a\in R\,;\;aA\leq\widehat{A}\right\}=\lambda_{\min}(\widehat{A}A^{-1}).$$

* قضیه ۳.۱.۲ را برای چندجمله ای ماتریسی تعمیم می دهیم.

قضیه ۱۵.۱.٤. فرض می کنیم $H(z) = A_n z^n + ... + A_۱ z + A.$ یک چندجمله ای ماتریسی با ضرایب هرمیتی $A_j \in \mathbb{C}^{n\cdot n}$ باشد بطوریکه $A_j \geq ۰, \quad j = ۰, ۱, ۲, ..., n-۱$ و $A_n > ۰$ وهمچنین فرض می کنیم:

$$\ker A_{n-۱} \subseteq ... \subseteq \ker A. \tag{۲.۴}$$

و α و β را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\beta = \max\left\{\lambda_{\max}(A_j A_{i+۱}^{\sharp})\ ; \quad j = ۰, ۱, ۲, ..., n-۱\right\}$$

اگر $\det A. = ۰$ ، $\alpha = ۰$ و اگر $A. > ۰$ باشد

$$\alpha = \min\left\{\lambda_{\min}(A_j A_{j+۱}^{-۱})\ ; \quad j = ۰, ۱, ..., n-۱\right\}$$

آنگاه برای $\lambda \in \sigma(H)$ ، $\alpha \leq |\lambda| \leq \beta$ می باشد.

اثبات. فرض می کنیم $A_{n-۱} \neq ۰$. لذا $\beta > ۰$ وجود دارد که برای $j = ۰, ۱, ..., n-۱$ ، $\beta A_{j+۱} \geq A_j$ بنابراین $A_{j+۱}\beta^{j+۱} \geq A_j \beta^j$ و $A_n \beta^n > ۰$ پس با بکار بردن قضیه ۱۲.۱.۴ برای چندجمله ای ماتریسی

$$H(\beta z) = A. + A_۱ \beta z + ... + A_n \beta^n z^n$$

و برای همه $\lambda \in \sigma(H)$ داریم $|\lambda| \leq \beta$. و اگر $A_{n-۱} = ۰$ باشد با توجه (۲.۴) داریم $H(z) = A_n z^n$ بنابراین $\sigma(H) = ۰$ و $\beta = ۰$.

حال فرض می کنیم $A. > ۰$ آنگاه از (۲.۴) نتیجه می گیریم $A_j > ۰$. لذا α خوشتعریف است. و با در نظر گرفتن چندجمله ای $z^n H(\frac{\alpha}{z})$ کران پایین را بدست می آوریم. و اگر $A. = ۰$ باشد آنگاه $۰ \in \sigma(H)$ لذا $\alpha = ۰$ است. □

۲.٤ معادلات دیفرانسیل

در این بخش دو قضیه قبل را برای معادلات دیفرانسیل خطی بفرم

$$A_{۰}x(t) + ... + A_{n-۱}x(t+n-۱) + A_n x(t+n) = ۰$$

$$x(۰) = x_{۰}, x(۱) = x_{۱}, ..., x(n-۱) = x_{n-۱}$$

بکار می بریم و فرض می کنیم

$$۰ \leq A_{۰} \leq A_{۱} \leq ... \leq A_{n-۱} \leq A_n \ \ , \quad A_n > ۰$$

و نشان می دهیم هر جواب عمومی $x(t)$ معادله دیفرانسیل را می توان به دو قسمت نرم کاهنده $y(t)$ و قسمت متناوب $w(t)$ تجزیه کرد.

قضیه ۱.۲.٤. [۱۹] فرض می کنیم $x(t)$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل بالا باشد. و این معادله در شرط

$$۰ \leq A_{۰} \leq A_{۱} \leq ... \leq A_{n-۱} \leq A_n, \quad A_n > ۰$$

صدق کند آنگاه

$$x(t) = y(t) + w(t), \quad t \geq ۰$$

بطوریکه $\lim_{t \to \infty} y(t) = ۰$ و $w(t)$ متناوب است (یعنی برای $p \geq ۲$ و برای همه $t \geq ۰$ ،
$w(t+p) = w(t)$)

*) اگر $A_{۰} > ۰$ باشد دوره تناوب $w(t)$ ، $p = n + ۱$ است.

مراجع

[1] N. Anderson, E. B. Saff, R. S. Varga, An extension of the Enestrom-Kakeya Theorem and its sharpness. SIAM J. Math. Anal., 12(1981), 10-22. *6*

[2] N. Anderson, E. B. Saff, R. S, Varga, On the Enestrom-Kakeya Theorem and its sharpness LinearAlgebra and its Applications, 28(1979), 5-16. *8*

[3] A. Aziz, Q. G. Mohammad, Canad. Math. Bull. Zero-free regions for polynomials and some genralzation Of Enestrom- Kakeya Theorem, 27(1984), 265-272. *16, 38, 49*

[4] A. Aziz and Q. G. mohammad , on the Zeros of Certain Clas of Polynomials and Related Analytic Functional, J. Math. Anal. Appl., 75(1980), 495-502., *15, 39, 57*

[5] A . Aziz and W. M. Shah, on the Zeros of Polynomials and Related Analytic Functional , Glasnik Math. 33 (1998). 173-184.

[6] A. Aziz and W. M. Shah , On the Location of Zeros of polynomials and related analytic functions, J. Math. Anal. Appl. 75 (1980) 495-502. *65*

[7] A. Aziz and B. A. Zargar, Some Refinnements of Enestrom-Kakeya theorem, Analysis in Theory and Applications, Volume 23, Number2 (2007) 129-137. *24, 32*

[8] A. Aziz and B. A. Zargar, Some extensions of Enestrom-Kakeya theorem, Glasnik Matematicki 31 (1996) 239-244. *14, 15*

[9] H. Baumgartel , Analytic Perturbation Teory for Matrices and Operator, Operator Theory : Advances and Applications. On the univalence of an integral operator. Basel: Birkhauser-Verlage, 1985, vol. 15.

[10] J. Cao, R. Gardner. Restrictions on the zeros of a polynomial as a consequence of conditions on the coefficients of even powers and odd powers of the variable, Journal of computational and Applied Mathematics 155 (2003) 153-1162.

[11] C. J. Cargo, O. Sisha, Zero of polynomials and frantional order difference of their coefficients. J. Math. Anal. Appl. 7(1963) 176-182.

[12] Y. Choo and G. K. Choi, On the Zero-free regions of polynomials. Int. the Journal of Math. Analysis, Vol. 5, 2011, no. 20, 975-981. *49, 52, 53*

[13] K. K. Dewan, Family of analytic functions of complex order. Internat . J. Math. Math. Sci. 13 (1990), 67-72.

[14] K. K. Dewan and M. Bidkham , On the Enestrom-Kakeya theorem, J. Math. Anal. Appl. 180 (1993) 29-36.

[15] K. K. Dewan and N. K. Govil, On the Enestrom-Kakeya theorem, International J., 11, No. 3 (2002), 245-292.

[16] K. K. Dewan and G. N. McTume, On the Enestrom-Kakeya theorem, J. Approx. Theory 42 (1984) 239-244.

[17] K. K. Dewan, and C. M. Upaddhye, on the location of the zeros of analytic functions, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 1, (2007), no 19, 919- 926. *65, 66*

[18] K. Dilcher, A Generalization of the Enestrom-Kakeya theorem, Journal of Math. Analysis and Applications , Vol. 116, 1986, pp. 473-488.

[19] G. Dirr and H. K. Wimmer, An Enestrom-Kakeya Theorem for Hermition Polynomial Matrices. IEEE Transaction Automtic Control, VOL. 52 , NO. 11,November 2007. *74*

[20] D. Gereshgorian, Uber Die Abgrenzung De Eigenwerte Einer Matrix, Izv. Akad. Nauk. SSSR, 7(1931), 749-754.

[21] I. Glicksberg A remark on Rouche theorem, Amer. Math. Monthly 83(1976) 186-187. *4*

[22] R. B. Gardner and N. K. Govil. On the Location of the Zeros of a Polynomial, Journal of Approximation Theory, Vol. 22, 1978, pp. 1-10. *37, 55*

[23] N. K. Govil and V. K. Jain. On the Enestrom-Kakeya theorem, Journal of Approximation Theory, Vol. 76, 1994, pp. 286-292.

[24] N. K. Govil and Q. I. Rahman, On the Enestrom-Kakeya theorem II, Tohoku Math. J. 20 (1968) 126-136. *16, 31*

[25] A. Hurwitz, Uber einin Satz des Herrn Kakeya, Tohoku Math. J. ,vol. 4, pp. 89-93, 1913. *16*

[26] A. Joyal, G. Labelle and Q. I. Rahman, On the Location of Zeros of polynomials, Canad. Math. Bull. 10 (1967) 53-63 *15, 28, 29*

[27] P. V. Krishnaih, On Enestrom-Kakeya theorem. J. London Math. Soc., 30 (1955) 314-319.

[28] M. Marden, Geometry of polynomials, Math. Surveys, No. 3; Amer. Math. Soc. (R. I: Providence)(1966).

[29] G. V. Milovanovic, D. S. Mitrinovic and Th. M. Rassias , Topics in polynomials, extrimal probelem, inequalities, zero (singapore: Word Scientific)(1994). *3*

[30] T. Ooba On companion systems with state saturation nonlinearity, IEEE Trans . Autom. Control, vol. 50, pp. 1580-1584, 2003.

[31] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, Analytic Theory of Polynomials, Oxford Oxford University press; New York(2002). *4, 5, 14, 38, 71*

[32] N. A. Rather, Shakeel A. Simnani, M. L. Mir, On the Enestrom-Kakeya Theorem, Volume 41 No, 6 (2007), 807-815. *42, 43, 44, 46, 47*

[33] R. A . Horn, C. R. Johnson, Matrix analysis, New York New Rochelle Melbourne Sydney, (1988).

[34] T. Sheil-small, Complex Polynomials, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[35] W. M. Shah and A. Liman. On Enestrom-Kakeya theorem and related analytic functions. Pro. India. Acal. Sci. (Math. Sci.) Vol. 117, No. 3, August 2007, pp. 359-370. *20, 29, 35, 59, 62*

[36] W. M. Shah and A. Liman, On the Zeros of Certain Class 0f Polynomials and Related Analytic Functions. Mathematicka Balkanicka, New Series, Vol. 19, No. 3-4, 2005, pp. 245-253. *17, 19, 22, 57*

[37] W. M. Shah, A. Liman and S. Ahmad Bhat, On the Enestrom-Kakeya theorem. International Journal of Mathematical Science, Vol. 7, No. 1-2, 2008, pp. 111-120.

[38] G. Singh , W. M. Shah, On the Location of Zeros Polynomials. American Journal of Computational Mathematics , 2011,1, pp. 1-10. *48*

[39] E. C. Titchmarsh, The Theory of Function, 2nd edition, Oxford University Press, London, 1939.

[40] H. K. Wimmer, Block Companion Matrices , Discrete-Time Block Diagonal Stability and Polynomial Matrices. Operators and Matrices Vol. 3, Num. 1 (2009), 111-124.

[41] H. K. Wimmer, Polynomial Matrices whit Hermition Conefficients and Generaization of the Enestrom-Kakeya Theorem, Operators and Matrices Vol. 2, Num. 3(2008), 443-454.

[42] Z. Zhang, D. Xu, J. Niu. On the refinement of Cauchy's theorem and pellet's theorem . J.Math. Anal. Appl. 291(2004) 262-269. *2, 6, 9*

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اعداد مختلط . . . . *Complex Numbers*
اسپکتروم . . . . *Specrtum*
تعمیم . . . . *Generalize*
تابع تحلیلی . . . . *Analytic Functions*
تابع مرومورفیک . . . . *Meromorphic Function*
چندجمله ای . . . . *Polynomial*
چندجمله ای ماتریسی . . . . *Polynomial Matrix*
خم ژوردن . . . . *Jordan Curve*
دایره . . . . *Circle*
درجه . . . . *Degree*
ریشه مثبت . . . . *Positive Root*
زوج . . . . *Even*
سیستم خطی . . . . *System Linear*
شعاع اسپکترال . . . . *Spectral Radius*
صفر . . . . *Zero*
ضرایب حقیقی . . . . *Real Coefficients*
ضرایب مثبت . . . . *Positive Coefficients*
ضرایب مختلط . . . . *Complex Coefficients*
فرد . . . . *Odd*
فرضیات . . . . *Hypothesis*
قدرمطلق . . . . *Mouduli*
قضیه انشتروم کاکیا . . . . *Enestrom-Kakeya Theorem*
کاهنده نرم . . . . *Norm-Dicreasing*
کران پلت . . . . *Pollet Bound*
کران کشی . . . . *Cauchy dound*
لم شوارتس . . . . *Schwarz Lemma*
ماتریس های نیمه معین مثبت . . . . *Positive Semidefine Hermitien Matrix*
متناوب . . . . *Periodic*
محدودیت . . . . *Restriction*
معادلات دیفرانسیل . . . . *Difference Equations*
مقادیر ویژه . . . . *Eigenvaluos*

ناحیه .... *Location*
نامعادله .... *Inequality*
نامنفی .... *Negative*
نواحی بدون صفر .... *Zero-Free Regions*
یکنوایی .... *Monotonic*

Abstract

In this thesis,we present certain interesting refinements of a well-known Enestrom-Kakeya theorem in the theory of distribution of zeros of polynomials which among other things also improve upon some results of Asis and Mohammad, Govil and Rehman and others.
We obtain the region containing all the zeross of aclass of analytic functions whose coefficients are subject to certain conditions.
We extend the Enestrom-Kakeya theorem and its refinement by Hurwitz to polynomial matrices H(z) with positive semidefinitc coefficients. We determine an annular region containing the zeros of det H(z).A stability result for systems of linear difference equation is given as an application.

.

Keywords: *polynomial, modulius of zeros, Enestrom-Kakeya theorem, analytic functions, ploynomial matrices, system of difference equations.*

Shahrood University of Technology

Department of Mathematics

MSc Thesis

Restrictions On The Zeros Of Polynomials Whit Put Of Conditions On The Their Coefficients

By:

Ali Majidi

Supervisor:
Ahmad Zireh

Advisor:
Ebrahim Hashemi