بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

عنوان :

گراف های γ− بحرانی

نگارش :

فاطمه احمدزاده

اساتید راهنما :

دکتر صادق رحیمی شعرباف

دکتر نادر جعفری راد

پایان نامه کارشناسی ارشد

تیر ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد **فاطمه احمدزاده** رشته **ریاضی کاربردی** گرایش **گراف** تحت عنوان **گراف‌های ۷- بحرانی** که در تاریخ **۱۳۹۱.۴.۲۴** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : خوب امتیاز ۱۷/۱) ☒ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ اساتید راهنما	دکتر صادق رحیمی شعرباف دکتر نادر جعفری‌راد	استادیار دانشیار	
۲ـ استاد مشاور	ــــــــــــ		
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر علیرضا ناظمی	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر بهزاد صالحیان	استادیار	
۵ ـ استاد ممتحن	دکتر میثم علیشاهی	استادیار	

رئیس دانشکده : دکتر احمد زیره

دانشکده ریاضی
دانشگاه صنعتی شاهرود

قدردانی

سپاس و ثنا خاص درگاه احدیت است. خدای را شکر می کنم که به من توانایی عطا فرمود تا این مرحله از تحصیلاتم را با موفقیت به پایان برسانم.

این مجال نیزگذشت و تجلی‌گاهش این چند سطریست که شاید بماند که تنها نوشتار است که وقتی حک می‌شود ابدی است.

ندای وجدان براین است تا در مقام یک شاگرد، قدردانی نمایم از تمام کسانی که از ابتدای خلقتم رسالت آموزگاری مرا به عهده داشته‌اند. از مادر عزیزم که اولین معلم زندگی‌ام می‌باشد و همه معلمانم که تا به امروز اندیشه‌هایشان، درخت اندوخته‌هایم را بارور کرده است. در این مورد خاص جا دارد از جناب آقای دکتر نادر جعفری راد به پاس کوشش‌هایی که در فرهیختگی‌ام نمودند، مراتب سپاس خود را از ایشان داشته باشم. همچنین از زحمات و کمک‌های جناب آقای دکترصادق رحیمی شعرباف تشکر وقدرانی نمایم. از اساتید محترم جناب آقای دکتر میثم علیشاهی و جناب آقای دکتر بهزاد صالحیان که زحمت مطالعه و داوری پایان‌نامه را متقبل شده اند، کمال تشکر را دارم. همچنین از نماینده تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی صمیمانه تشکر می‌کنم.

از پدر و مادر عزیزم و همسر مهربانم که در طول تحصیل پشتیبان من بوده اند، سپاسگزارم.

فاطمه احمدزاده

۲۴ تیرماه۱۳۹۱

تعهد نامه

اینجانب**فاطمه احمدزاده**به شماره دانشجویی **۸۹۰۰۰۷۴** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد **رشته ریاضی کاربردی**

دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **گراف های γ— بحرانی** تحت راهنمائی

دکتر صادق رحیمی شعرباف و دکترنادر جعفری راد متعهد می شوم :

- تحقیقات در این پایان نامهتوسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج ازپایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۹۱/٤/۳۱

امضای دانشجو

۹۱/٤/ ۳۱

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامهبدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی با n رأس و m یال باشد. زیرمجموعه‌ی S از رئوس گراف G را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G می‌نامیم هرگاه هر رأس از $V-S$ با رأسی از S مجاور باشد. اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر در گراف G را عدد احاطه‌گری نامیده و آن را با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم و یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $\gamma(G)$ را یک $\gamma(G)$- مجموعه می‌نامیم. گراف G را گرافی احاطه-بحرانی یا γ -بحرانی می نامیم هرگاه برای هر رأس v از V داشته باشیم $\gamma(G-v)<\gamma(G)$.

در فصل اول این پایان نامه مفاهیم و مقدمات نظریه گراف که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیازمندیم را یادآوری می‌کنیم.

در فصل دوم مفاهیم احاطه-بحرانی و گراف‌های$(\gamma,۲)$-بحرانی را به‌طور کامل بررسی خواهیم کرد.

در فصل سوم گراف‌های $(\gamma,۳)$-بحرانی را بیان و بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: احاطه‌گر، احاطه-بحرانی، گراف‌های$(\gamma,۲)$-بحرانی، گراف‌های$(\gamma,۳)$-بحرانی.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱
مقدمه

از گراف‌ها برای حل مسائل زیادی در ریاضیات و علوم کامپیوتر استفاده می‌شود. ساختارهای زیادی را می‌توان به کمک گراف‌ها به نمایش در آورد. برای مثال برای نمایش چگونگی رابطه وب سایت‌ها به یکدیگر می‌توان از گراف‌های جهت‌دار استفاده کرد. در این فصل به تعاریف و مفاهیم اولیه نظریه گراف که در فصل‌های آتی به آن‌ها نیاز داریم می‌پردازیم.

۱.۱ تعریف‌ها و نمادهای مقدماتی

گراف G یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ متشکل از مجموعه ناتهی $V(G)$ موسوم به مجموعه رأس‌ها، مجموعه $E(G)$ موسوم به مجموعه یال‌ها و تابع وقوع ψ_G است که با هر یال G یک جفت نامرتب (نه لزوما مجزا) از رأس‌های G را همراه می‌کند. اگر e یک یال و u و v رأس‌هایی در $V(G)$ باشند به قسمی که $\psi_G(e) = uv$، آن‌گاه می‌گویند یال e، رأس u را به v وصل می‌کند، رأس‌های u و v را دو انتهای یال e می‌نامند. از این پس در سراسر این پایان‌نامه، تابع ψ_G را به طور ضمنی می‌پذیریم و گراف G رابه صورت دوتایی مرتب $(V(G), E(G))$ معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. یک گشت به طول k در گراف G یک دنباله‌ی متناوب $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$ از

رأس‌ها ویال‌ها است، به طوری که به ازای هر i، $e_i = v_{i-1}v_i$ یک یال باشد. یک گذر گشتی است که هیچ یال تکراری نداشته باشد.

تعریف ۲.۱.۱. یک **مسیر** [1] گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به صورت فهرست مرتبی از رأس‌های متمایز $v_1, \dots, v_n$ در نظر می‌گیریم به طوری که به ازای هر$2 \leq i \leq n$، $v_{i-1}v_i$ یک یال است.

تعریف ۳.۱.۱. اگر G یک گراف و k یک عدد طبیعی باشد، منظور از گراف kG، گرافی است حاصل از k نسخه مستقل از G.

تعریف ۴.۱.۱. گرافG **همبند** [2] نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر دو رأس متمایز u و v، مسیری از u به v موجود باشد (یا یک (u,v)- مسیر موجود باشد).

تعریف ۵.۱.۱. یک **دور** [3] گذر بسته‌ای به طول حداقل یک است که در آن رأس ابتدایی ورأس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ رأس تکراری نداریم. یک دور را به صورت فهرست مرتبی از $v_1, \dots, v_n, v_1$ در نظر می‌گیریم، به طوری که به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $v_{i-1}v_i$ یک یال باشد وv_nv_1 نیز یک یال باشد. (یک طوقه دوری به طول یک است).
یک گراف، ساده است اگر هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن بیش از یک یال موجود نباشد.

تعریف ۶.۱.۱. **فاصله** [4] بین دو رأسu وv در گراف G که با $d_G(u,v)$ نمایش داده می شود عبارت است از طول کوتاهترین مسیر بین u وv در گراف G. **قطر** [5] گرافG عبارت است از

[1] path
[2] connected
[3] cycle
[4] distance
[5] Diameter

$$diam(G) = \max\{d(u,v); u, v \in V(G)\}.$$

تعریف ۷.۱.۱. **درجه** [۶] رأس v در گراف G تعداد یال‌های گراف G است که v بر آن‌ها واقع است و آن را با $\deg(v)$ نمایش می‌دهیم. بزرگترین درجه در بین درجه رأس‌های گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچکترین درجه را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

برای عدد طبیعی k، گراف G، k–**منتظم** [۷] نامیده می‌شود هرگاه درجه هر رأس آن، k باشد.

تعریف ۸.۱.۱. مجموعه رأس‌هایی از G که با رأس v از گراف G مجاور باشند را **همسایگی باز** [۸] رأس v نامیده و آن را با $N(v)$ نمایش می‌دهیم. همسایگی باز زیر مجموعه S از رئوس گراف G را به صورت $\cup_{v\in S}N(v)$ تعریف می‌کنیم و آن را با $N(S)$ نمایش می‌دهیم. $N(v)\cup\{v\}$ را **همسایگی بسته** [۹] رأس v نامیده و آن را با $N[v]$ نمایش می‌دهیم. همچنین همسایگی بسته زیرمجموعه S از رئوس گراف G را به صورت $\cup_{v\in S}N[v]$ تعریف می‌کنیم، و آن را با $N[S]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱. یک **تطابق** [۱۰] در گراف G زیرمجموعه‌ای از یال‌هاست که هیچ دو یالی رأس مشترکی نداشته باشند. اگر M یک تطابق در G باشد و x رأسی روی یکی از یا ل‌های M باشد گوییم M، x را اشباع می‌کند. اگر هر رأس از گراف G توسط تطابق M اشباع شود آن‌گاه M را یک **تطابق کامل** [۱۱] می‌نامند.

تعریف ۱۰.۱.۱. گراف همبندی که فاقد دور باشد **درخت** [۱۲] نام دارد.

---

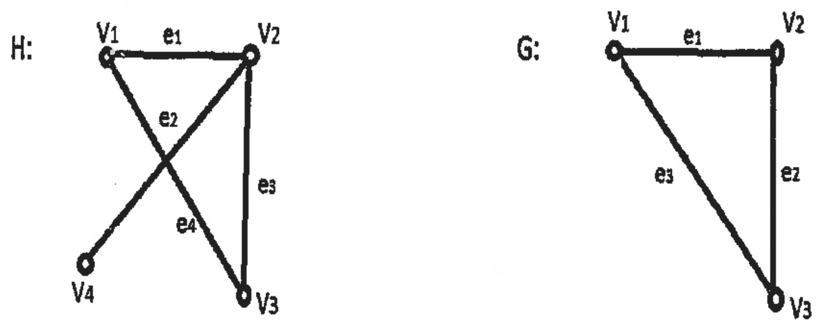
[۶] degree
[۷] k-Regular graph
[۸] open neighborhood
[۹] close neighborhood
[۱۰] Matching
[۱۱] perfect matching
[۱۲] Tree

یک برگ (**رأس آویزان** [۱۳]) رأسی از درجه یک است.

تعریف ۱۱.۱.۱. رأسی که در همسایگی یک رأس آویزان باشد **رأس پشتیبان** [۱۴] نام دارد. مجموعه رئوس پشتیبان گراف G را با $S(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. یک زیرگراف از گراف H، گرافی مانند G است که $E(G) \subseteq E(H)$ و $V(G) \subseteq V(H)$.

تعریف ۱۳.۱.۱. زیرگراف G از گراف H را یک **زیرگراف القایی** [۱۵] می‌نامیم هرگاه برای هر دو رأس v_1, v_2 از G، اگر $v_1v_2 \in E(H)$ آن‌گاه $v_1v_2 \in E(G)$. برای مثال، در شکل ۱.۱ گراف G زیرگراف القایی از گراف H است.



شکل ۱.۱: گراف H و زیر گراف القایی G

تعریف ۱۴.۱.۱. زیرمجموعه S از رأس‌های گراف G یک مجموعه **برش- رأسی** [۱۶] نامیده می‌شود هرگاه $G - S$ ناهمبند شود. برای عدد k، یک گراف G، k-همبند است، اگر هر برش

[۱۳] Pendant vertex
[۱۴] Support vertex
[۱۵] Induced subgraph
[۱۶] Vertex-cut

رأسی آن حدأقل دارای k رأس باشد. همبندی گراف G را که با $k(G)$ نمایش می‌دهیم کمترین تعداد رأس‌هایی است که با حذف آن‌ها گراف ناهمبند یا تک نقطه می‌شود.

تعریف ۱۵.۱.۱. یک **بلوک** [۱۷] از گراف G، یک زیر گراف همبند ماکزیمال از گراف G می‌باشد که رأس برشی ندارد.

لم ۱۶.۱.۱. [۱] دو بلوک در یک گراف حداکثر در یک رأس مشترک هستند.

تعریف ۱۷.۱.۱. یک **برش- یالی** [۱۸] در گراف G زیر مجموعه‌ای از یال‌های G به صورت $[S, S']$ می‌باشد که یک سر آن‌ها در S و سر دیگر آن‌ها در S' است. برای عدد k، گراف G، گرافی k -همبند یالی است اگر هر برش یالی آن حدأقل دارای k یال باشد. عدد همبندی یالی گراف G را که با $\lambda(G)$ نمایش می‌دهیم کوچکترین اندازه یک برش یالی آن است.

تعریف ۱۸.۱.۱. **گراف ابر مکعبی** [۱۹] (k ابرمکعبی) گرافی است که رئوس آن k تایی‌های مرتب از صفر ویک هستند و دو رأس آن به یکدیگر متصل است اگر و فقط اگر دقیقا در یک مولفه با یکدیگر فرق داشته باشند.

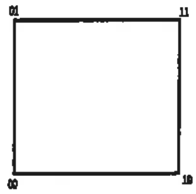
شکل ۲.۱ گراف ۲ ابر مکعبی را نشان می‌دهد.

تعریف ۱۹.۱.۱. گرافی که در آن هر دو رأس متمایز توسط یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، **گراف کامل** [۲۰] نامیده می‌شود. یک گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم.

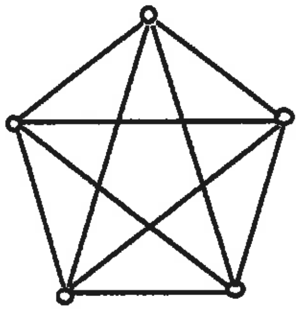
شکل ۳.۱ گراف کامل $K_۵$ را نشان می‌دهد.

تعریف ۲۰.۱.۱. گراف‌های G و H را در نظر بگیرید. **حاصل‌ضرب دکارتی** [۲۱] آن‌ها را که به

---
[۱۷] Block
[۱۸] Edge-cut
[۱۹] Hyper cube
[۲۰] Complete graph
[۲۱] Cartesian product



شکل ۲.۱: گراف ۲ ابر مکعبی



شکل ۳.۱: گراف کامل K_5

صورت $G\square H$ نشان می‌دهیم گرافی با مجموعه رأس‌های $V(G) \times V(H)$ است که در آن رأس (u,v) مجاور با رأس (u',v') است اگر و تنها اگر یکی از دو حالت زیر برقرار باشد:

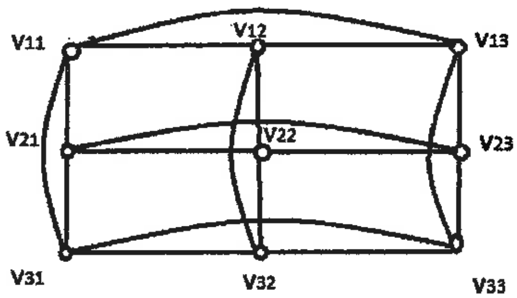
۱. $vv' \in E(H)$ و $u = u'$.

۲. $uu' \in E(G)$ و $v = v'$.

شکل ۴.۱ گراف حاصل‌ضرب دکارتی $K_2\square K_2$ را نشان می‌دهد.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید G گرافی n رأسی باشد. **گراف گردشی** [22] G را با $C_{n+1}(1,m)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

[22] Circulant graph

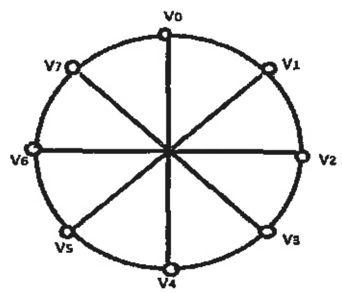


شکل ۴.۱: گراف $K_۳\square K_۳$

$V(G) = \{v_۰, ..., v_n\}$

$E(G) = \{v_i v_{i+j(mod(n+۱))} \mid i \in \{۰, ۱, ..., n\}, j \in \{۱, m\}\}$

شکل ۵.۱ گراف گردشی $C_۸(۱, ۴)$ را نشان می‌دهد.



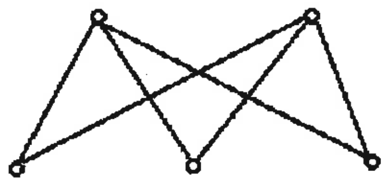
شکل ۵.۱: گراف گردشی $C_۸(۱, ۴)$

تعریف ۲۲.۱.۱. گراف دوبخشی [۲۳] گرافی است که مجموعه رأس‌های آن به دو زیرمجموعه X و Y چنان افراز شود که یک سر تمام یال‌های گراف در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد. یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y که در آن هر رأس X، به هر رأس Y وصل شده باشد گراف **گراف دوبخشی کامل** [۲۴] نامیده می‌شود. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$ آن‌گاه گراف دوبخشی

[۲۳] Biparite graph
[۲۴] Complete bipartite graph

کامل با بخش‌های X و Y را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم. گراف k -بخشی، گرافی است که می توان مجموعه رأس‌های آن را به k زیرمجموعه طوری افراز کرد که دو سر هیچ یالی در یک زیرمجموعه نباشد گراف k-بخشی کامل ، یک گراف k-بخشی است که در آن، هر رأس یک بخش به تمام رأس‌هایی که در بخش‌های دیگر قرار دارند، وصل شده است.

شکل ۶.۱ گراف دوبخشی کامل $K_{2,3}$ را نشان می‌دهد.



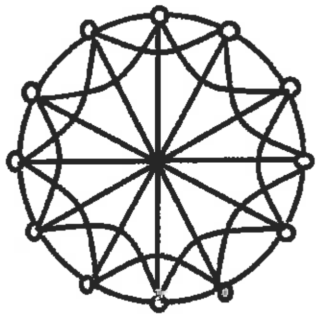
شکل ۶.۱: گراف دوبخشی کامل K_{23}

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید n،k دو عدد طبیعی باشند که $k < n$. **گراف هرری** [25] $H_{k,n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود. ابتدا رأس‌های $v_1, \ldots, v_n$ را به صورت مستدیر و مرتب در نظر می‌گیریم. اگر k زوج باشد هر رأس را به اولین رأس بعدی و دومین رأس بعدی، ...$\frac{k}{2}$ امین رأس بعدی وصل می‌کنیم. اگر k فرد و n زوج باشد آن‌گاه گراف $H_{k-1,n}$ را رسم می‌کنیم و سپس رأس‌های قطری را نیز به هم وصل می‌کنیم.

اگر k, n هر دو فرد باشد آن‌گاه $H_{k-1,n}$ را رسم می‌کنیم و سپس هر رأس v_i را به $v_{i+\frac{n-1}{2}}$ برای $0 < i < \frac{n-1}{2}$ وصل می‌کنیم.

شکل ۷.۱ گراف هرری $H_{5,12}$را نشان می‌هد.

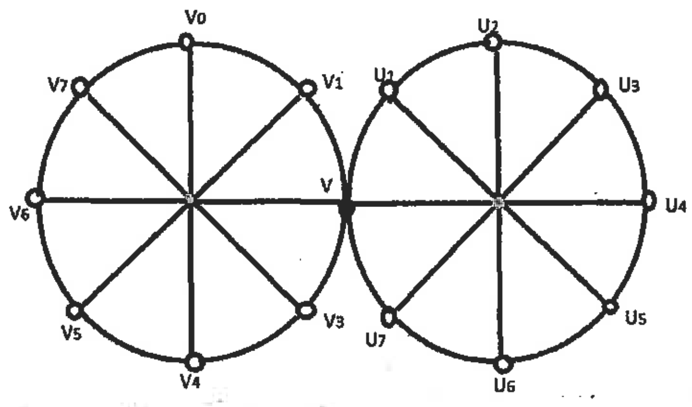
[25] Harary graph



شکل ۷.۱: گراف هرری $H_{۵,۱۲}$

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنید F و H گراف‌های ناتهی باشند. اگر u و w به ترتیب رأس‌هایی در گراف های فوق باشند آن‌گاه **گراف حاصل از بهم آمیختگی دو گراف** [۲۶] F و H توسط رأس‌های u و w که با $(F.H)(u, w : v)$ نشان داده می‌شود گرافی است که از یکی کردن رأس های u،w در یک رأس به نام v حاصل می‌شود.

شکل ۸.۱ گراف $(C_۸(۱,۴).C_۸(۱,۴))(u_۰, v_۰ : v)$ نشان می‌دهد.



شکل ۸.۱: گراف $C_۸(۱,۴).C_۸(۱,۴)(u_۰, v_۰ : v)$

[۲۶] Coalescence of two graphs

تعریف ۲۵.۱.۱. دو گراف G و H را **یکریخت** [۲۷] گوییم اگر تابع دو سویی

$$f : V(G) \longrightarrow V(H)$$

موجود باشد به طوری که برای هر دو رأس u و v از G رابطه زیر برقرار باشد:

$$uv \in E(G) \Longrightarrow f(u)f(v) \in E(H).$$

هر یکریختی از گراف G به خود G، یک خودریختی نامیده می‌شود.

تعریف ۲۶.۱.۱. گراف G **رأس-انتقالی** [۲۸] نامیده می‌شود اگر برای هر جفت رأس $u, v \in V(G)$ یک خودریختی ψ موجود باشد که $\psi(u) = v$.

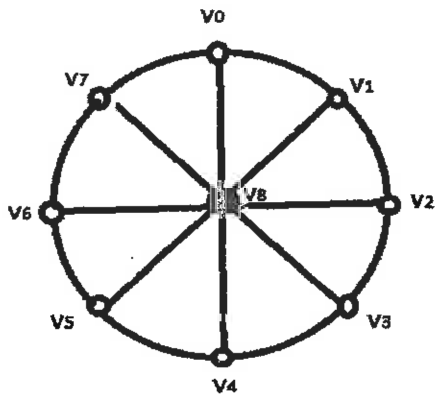
تعریف ۲۷.۱.۱. زیر مجموعه S از رئوس گراف G را یک مجموعه **احاطه‌گر** [۲۹] برای G می‌نامیم هرگاه $N[S] = V(G)$. اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر در گراف، G را **عدد احاطه‌گر** [۳۰] گراف G نامیده و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم. منظور از یک $\gamma(G)$ **-مجموعه** [۳۱]، مجموعه‌ای احاطه‌گر با اندازه $\gamma(G)$ است.

در شکل ۹.۱، $S = \{v_8\}$ کوچکترین مجموعه احاطه‌گر در گراف مورد نظر است.

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنید $G - v$ گراف بدست آمده از G با حذف رأس v باشد می‌توان رأس‌های G را به صورت زیر افراز کرد.

$$V(G) = V^0 \cup V^+ \cup V^-$$

[۲۷] isomorphism
[۲۸] Transitive
[۲۹] Domination
[۳۰] Domination number
[۳۱] $\gamma(G)$-set



شکل ۹.۱: گراف G

که در آن

$$V^{\circ} = \{v \in V(G) : \gamma(G-v) = \gamma(G)\}$$

$$V^{-} = \{v \in V(G) : \gamma(G-v) < \gamma(G)\}$$

$$V^{+} = \{v \in V(G) : \gamma(G-v) > \gamma(G)\}$$

تعریف ۲۹.۱.۱. گراف G را **احاطه-بحرانی** [۳۲] می‌نامیم هرگاه $V^{-} = V(G)$. همچنین هر رأس در V^{-} را یک رأس احاطه - بحرانی می‌نامیم. لذا گراف G، گرافی احاطه - بحرانی است، هر گاه هر رأس آن احاطه - بحرانی باشد.

تعریف ۳۰.۱.۱. زیرتقسیم [۳۳] یال uv گراف G عبارت است از عمل حذف uv و افزودن یک مسیر $u\ w\ v$ از میان یک رأس جدید w.

شکل ۱۰.۱ یک زیر تقسیم یال uv را نشان می‌دهد.

[۳۲] Domination-critical
[۳۳] Sub divide

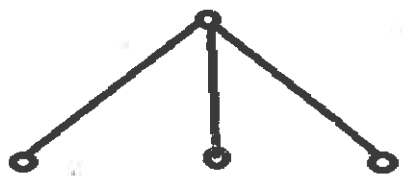
شکل ۱۰.۱: زیر تقسیم یال uv

یک زیر تقسیم گراف G گرافی است که می‌توان ازگراف G با دنباله‌ای از زیر تقسیم‌های یالی بدست آورد.

مثال: فرض کنید $k \geq 3$ و uw یالی از $K_{1,4}$ باشد، T درخت بدست آمده از طریق یک‌بار تقسیم یال uw در **گراف ستاره** [۳۴] $K_{1,4}$ با مرکز u است. داریم: $V^{+} = \{u\}$ ، $V^{\circ} = V(T) - \{u, w\}$ و $V^{-} = \{w\}$.

تعریف ۳۱.۱.۱. گراف $K_{1,3}$ را پنچه می‌نامیم. یک **گراف پنچه آزاد** [۳۵] گرافی است که هیچ زیرگراف القایی یکریخت با $K_{1,3}$ نداشته باشد.

شکل ۱۱.۱ یک پنچه را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱.۱: پنچه

[۳۴] Star graphs
[۳۵] Claw free graph

فصل ۲
گراف های $(\gamma, ۲)$-بحرانی

۱.۲ مقدمه

گراف‌های احاطه-بحرانی در سال ۱۹۸۸ توسط **بریقام** [۱]، **چین** [۲] و **داتون** [۳] در مقاله‌ای تحت عنوان گراف‌های احاطه-بحرانی رأسی [۲] مطرح شدند. به این صورت که در مساله احاطه-بحرانی هدف این است که باحذف هر رأس از گراف عدد احاطه‌گر کاهش پیدا می‌کند. در این فصل ابتدا مجموعه گراف‌های احاطه-بحرانی را تعریف می‌کنیم و گراف‌های $(\gamma, ۲)$-بحرانی و ویژگی‌های آن را بررسی خواهیم کرد.

در کلیه قضایای این فصل که بدون ذکر مرجع نوشته شده‌اند از مراجع [۲]، [۴] و [۷] استفاده شده‌اند.

۲.۲ گراف های احاطه-بحرانی

تعریف ۱.۲.۲. یک گراف G، احاطه-بحرانی رأسی یا γ-بحرانی رأسی نامیده می‌شود اگر برای هر رأس v از گراف G داشته باشیم $\gamma(G-v) < \gamma(G)$.

گرافهای γ-بحرانی و $\gamma = n$ ، را گرافهای n-بحرانی می‌نامیم.

[۱] Brigham
[۲] Chinn
[۳] Dutton

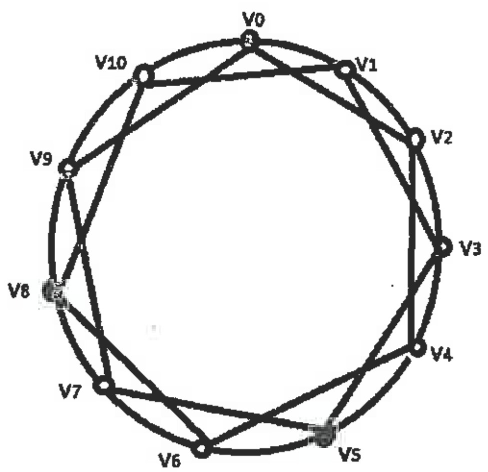
یک خانواده از گراف‌های n-بحرانی، گراف‌های $G_{m,n}$ برای $m, n \geq 2$ هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$V(G_{m,n}) = \{v_0, v_1, ..., v_{(n-1)(m+1)}\}$$

$$E(G_{m,n}) = \{v_i v_j | 1 \leq (i - j) \leq \frac{m}{2}\}.$$

که تفریق به پیمانه $[(n-1)(m+1)+1]$ محاسبه می‌شود.

مثال: شکل ۱.۲ گراف $G_{4,3}$ را نشان می‌دهد که گرافی ۳-بحرانی است.



شکل ۱.۲: گراف $G_{4,3}$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم عدد احاطه‌گری گراف $G_{4,3}$ برابر با ۳ است یعنی $\gamma(G_{4,3}) = 3$. به راحتی می‌توان دید که $\{v_0, v_5, v_8\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف $G_{4,3}$ است. لذا $\gamma(G_{4,3}) \leq 3$. ثابت می‌کنیم $\gamma(G_{4,3}) \geq 3$. برهان خلف: فرض کنید $\gamma(G_{4,3}) < 3$. لذا حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول : $\gamma(G_{4,3}) = 2$. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای $G_{4,3}$ باشد. اگر $S = \{v_0, v_2\}$ باشد آن‌گاه رأس‌های v_6, v_5, v_7 و v_8 احاطه نمی‌شوند. اگر $S = \{v_0, v_3\}$ باشد آن‌گاه رأس‌های v_6, v_7 و v_8 احاطه نمی‌شوند. اگر $S = \{v_0, v_4\}$ باشد آن‌گاه رأس‌های v_7 و v_8 احاطه نمی‌شوند. اگر $S = \{v_0, v_5\}$ باشد آن‌گاه رأس v_8 احاطه نمی‌شود. اگر $S = \{v_0, v_6\}$ باشد آن‌گاه رأس v_3 احاطه نمی‌شود. اگر $S = \{v_0, v_7\}$ باشد آن‌گاه رأس‌های v_3 و v_4 احاطه نمی‌شوند. اگر $S = \{v_0, v_8\}$ باشد آن‌گاه رأس‌های v_3, v_4 و v_5 احاطه نمی‌شوند و اگر $S = \{v_0, v_9\}$ باشد آن‌گاه رأس‌های v_3, v_4, v_5 و v_6 احاطه نمی‌شوند. به صورت مشابه اگر S هر کدام از زیرمجموعه های دو عضوی دیگر نیز باشد آن‌گاه S، $V(G_{4,3})$ را احاطه نمی‌کند. که یک تناقض است.

حالت دوم : $\gamma(G_{4,3}) = 1$. فرض کنید $S = \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم باشد. چون $\deg(x) = 4$، لذا x پنج رأس را احاطه می‌کند. اما $G_{4,3}$ گرافی ۱۱ رأسی است و در نتیجه تمام رأس‌های $G_{4,3}$ توسط S احاطه نمی‌شوند، که یک تناقض است. لذا $\gamma(G_{4,3}) \geq 3$ و در نتیجه $\gamma(G_{4,3}) = 3$.

برای نشان دادن این که $G_{4,3}$، گرافی γ- بحرانی است با توجه به این که $G_{4,3}$ گرافی رأس-انتقالی است کافی است ثابت کنیم

$$\gamma(G_{4,3} - v_0) < \gamma(G_{4,3}).$$

به وضوح می‌توان دید که $S = \{v_3, v_8\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - v_0$ است. لذا $G_{4,3}$، گرافی γ-بحرانی است.

□

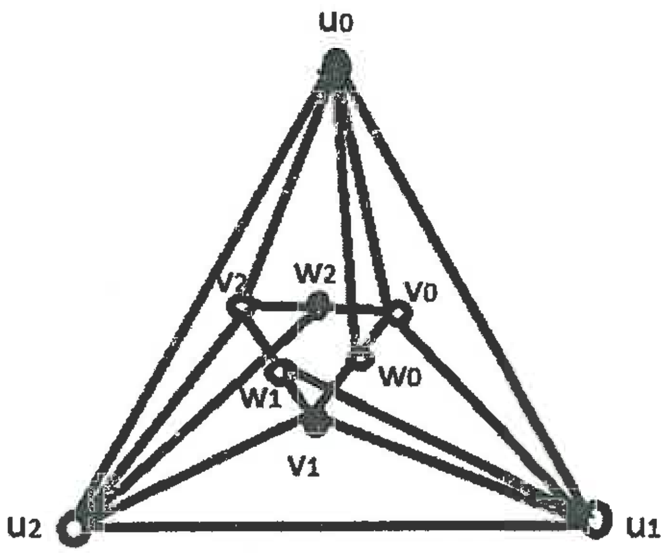
مثال دیگری که به گراف‌های یال بحرانی معروفند توسط سامنر [۴] و بلیچ [۵][۱۳] بررسی شده است و ترکیبی از گراف‌های n -بحرانی Q_n روی $3n$ رأس برای $n \geq 3$ است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$V(Q_n) = \{u_0, u_1, ..., u_{n-1}, v_0, v_1, ..., v_{n-1}, w_0, w_1, ..., w_{n-1}\}$$

$$E(G) = \{u_i u_{i-1}, u_i u_{i+1}, u_i v_{i-1}, u_i v_i, u_i w_i, v_i w_{i-1}, v_i w_i | i = 1, 2, ..., n\}$$

که جمع و تفریق در اندیس‌ها به پیمانه n محاسبه می‌شود.

مثال: شکل ۲.۲ گراف Q_3 را نشان می‌دهد که گرافی ۳-بحرانی است.



شکل ۲.۲: گراف Q_3

[۴] Sumner
[۵] Blich

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم عدد احاطه‌گری گراف Q_3 برابر با ۳ است یعنی $\gamma(Q_3) = 3$.

به راحتی می‌توان دید که $\{u_0, w_2, v_1\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف Q_3 است. لذا $\gamma(Q_3) \leq 3$. ثابت می‌کنیم $\gamma(Q_3) \geq 3$. برهان خلف: فرض کنید $\gamma(Q_3) < 3$. لذا حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول : $\gamma(Q_3) = 2$. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر برای Q_3 باشد اگر $S = \{v_0, v_1\}$ باشد آن گاه رأس v_2 احاطه نمی‌شود. اگر $S = \{v_0, v_2\}$ باشد آن‌گاه رأس v_1 احاطه نمی‌شود. اگر $S = \{v_1, v_2\}$ باشد آن‌گاه رأس‌های v_7 و v_8 احاطه نمی‌شوند. اگر $S = \{v_0, v_5\}$ باشد آن‌گاه رأس v_0 احاطه نمی‌شود. اگر $S = \{w_0, w_1\}$ باشد آن‌گاه رأس‌های w_2 و u_2 احاطه نمی‌شوند. اگر $S = \{w_0, w_2\}$ باشد آن‌گاه رأس‌های u_1 و w_1 احاطه نمی‌شوند. اگر $S = \{w_1, w_2\}$ باشد آن‌گاه رأس‌های u_0 و w_0 احاطه نمی‌شوند. اگر $S = \{v_0, w_1\}$ باشد آن‌گاه رأس u_2 احاطه نمی‌شود. اگر $S = \{v_0, u_2\}$ باشد آن‌گاه رأس‌های v_1 و w_1 احاطه نمی‌شوند. اگر $S = \{v_1, w_2\}$ باشد آن‌گاه رأس u_0 احاطه نمی‌شود. اگر $S = \{v_1, u_0\}$ باشد آن‌گاه رأس w_2 احاطه نمی‌شود. اگر $S = \{v_2, w_0\}$ باشد آن‌گاه رأس u_1 احاطه نمی‌شود. اگر $S = \{v_2, u_1\}$ باشد آن‌گاه رأس w_0 احاطه نمی‌شود.

به صورت مشابه اگر S هر کدام از زیرمجموعه‌های ۲-عضوی دیگر نیز باشد آن‌گاه S، $V(Q_3)$ را احاطه نمی‌کند. که یک تناقض است.

حالت دوم: $\gamma(Q_3) = 1$. فرض کنید $S = \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم باشد. چون $\deg(x) = 5$، لذا x شش رأس را احاطه می‌کند. اما Q_3 گرافی ۹ رأسی است و در نتیجه تمام رأس‌های Q_3 توسط S احاطه نمی‌شوند.

برای نشان دادن این که Q_3، گرافی γ- بحرانی است، موارد زیر را بررسی می کنیم:

با حذف رأس v_0، $S = \{v_1, v_2\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $Q_3 - v_0$ است. با حذف رأس v_1،

$S = \{v_۰, v_۲\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $Q_۳ - v_۱$ است. با حذف رأس $v_۲$، $S = \{v_۰, v_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $Q_۳ - v_۲$ است. با حذف رأس $u_۰$، $S = \{v_۱, w_۲\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $Q_۳ - u_۰$ است. با حذف رأس $u_۱$، $S = \{v_۲, w_۰\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $Q_۳ - u_۱$ است. با حذف رأس $u_۲$، $\{v_۰, w_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $Q_۳ - u_۲$ است. با حذف رأس $w_۲$، $S = \{v_۱, u_۰\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $Q_۳ - w_۲$ است. با حذف رأس $w_۱$، $S = \{v_۰, u_۲\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $Q_۳ - w_۱$ است و با حذف رأس $w_۰$، $S = \{v_۲, u_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $Q_۳ - w_۰$ است، در نتیجه $Q_۳$ گرافی γ-بحرانی است. □

قضیه ۲.۲.۲. [۲] برای هر گراف G که $\gamma(G) \geq ۳$ باشد، یک گراف γ-بحرانی، H وجود دارد که G زیر گراف القایی H است.

اثبات. فرض کنید $v_۱, v_۲, ..., v_p$ رأس‌های G باشند. مجموعه رأس‌های H را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(H) = \{v_۱, ..., v_p, w_۱, ..., w_p, x_۱, ..., x_p\}$$

و مجموعه یال‌های H را به صورت:

$$E(H) = E(G) \cup \{w_i x_j, w_i v_j, x_i v_j | ۱ \leq i, j \leq p, j \neq i\}$$

تعریف می‌کنیم. چون $\{w_i, x_i, v_i\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای H است، لذا $\gamma(H) \leq ۳$. ثابت می‌کنیم $\gamma(H) \geq ۳$. برهان خلف: فرض کنید $\gamma(H) < ۳$. لذا حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول : $\gamma(H) = ۲$. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر می‌نیمم برای H باشد. اگر $S = \{w_i, v_i\}$ باشد آن‌گاه رأس x_i احاطه نمی‌شود. به صورت مشابه هر زیر مجموعه دو عضوی

از S، H را احاطه نمی‌کند که یک تناقض است.

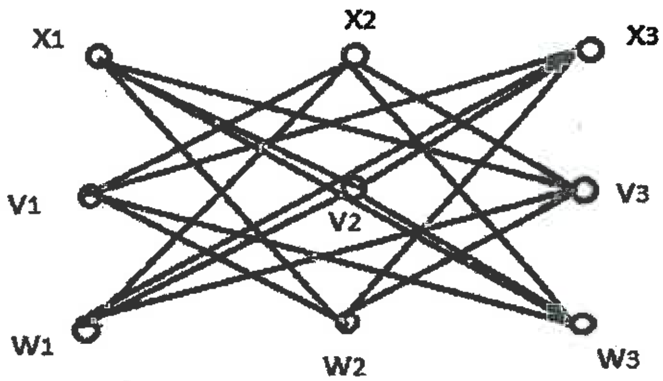
حالت دوم : $\gamma(H) = ۱$. فرض کنید $S = \{x_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم باشد. در نتیجه تمام رأس‌های H توسط S احاطه نمی‌شوند. چون $\gamma(H) = ۱$ است لذا H باید گراف کامل یا گراف ستاره باشد که این با γ-بحرانی بودن H در تناقض است.

برای نشان دادن این که H، γ- بحرانی است، موارد زیر را بررسی می‌کنیم:

با حذف رأس v_i، $S = \{w_i, x_i\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف $H - v_i$ است، با حذف رأس w_i، $S = \{v_i, x_i\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف $H - w_i$ می‌باشد و با حذف رأس x_i، $S = \{w_i, v_i\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف $H - x_i$ می‌باشد. لذا H، گرافی γ -بحرانی است.

مثال: فرض کنید G یک گرافی فاقد یال باشد و مجموعه رئوس گراف G را به صورت $v_۱, v_۲, v_۳$ در نظر می‌گیریم. لذا مجموعه رئوس گراف H، به صورت $\{v_۱, v_۲, v_۳, w_۱, w_۲, w_۳, x_۱, x_۲, x_۳\}$ و مجموعه یال‌های گراف H، به صورت $\{w_ix_j, w_iv_j, x_iv_j | ۱ \leq i, j \leq ۳, j \neq i\}$ می‌باشند.

شکل ۳.۲ گراف H را نشان می‌دهد.



شکل ۳.۲: گراف H

$\square$

قضیه ۳.۲.۲. [۲] اگر G گرافی حاصل از به هم‌آمیختگی دو گراف F و H باشد. آن‌گاه G، γ - بحرانی است اگر فقط اگر گراف‌های F و H، γ - بحرانی باشند. علاوه بر این اگر G، گرافی γ-بحرانی باشد آن‌گاه $\gamma(G)=\gamma(F)+\gamma(H)-1$.

اثبات. $(\Leftarrow)$ فرض کنید Gگرافی γ -بحرانی و $x\in V(G)$ باشد دراین‌صورت $\gamma(G-x)=\gamma(G)-1$. بدون این که از کلیت مساله کاسته شود، فرض کنید $x\in V(F)$ باشد. دراین‌صورت نشان می‌دهیم گراف F، γ- بحرانی است.

$$\gamma(G-x)=\gamma(F-x)+\gamma(H)$$

$$\gamma(G)-1=\gamma(F-x)+\gamma(H)$$

$$\gamma(F)+\gamma(H)-1=\gamma(F-x)+\gamma(H)$$

$$\gamma(F)-1=\gamma(F-x)$$

لذا F، γ-بحرانی است و به طور مشابه H نیز γ -بحرانی است.

$(\Rightarrow)$ فرض کنید گراف‌های F و H، γ-بحرانی باشد. نشان می‌دهیم G، γ -بحرانی است. فرض کنید x یک رأسی از گراف G باشد چون گراف‌های F و H، γ- بحرانی است داریم:

$$\gamma(F-x)=\gamma(F)-1$$

$$\gamma(H-x)=\gamma(H)-1$$

بدون این که از کلیت مساله کاسته شود، فرض کنید $x\in F$ باشد، دراین‌صورت:

$$\gamma(G-x)=\gamma(F-x)+\gamma(H)=\gamma(F)-1+\gamma(H)=\gamma(G)-1$$

لذا G، γ -بحرانی می‌باشد. □

قضیه ۴.۲.۲. [۲] گراف G، γ-بحرانی است اگر و فقط اگر هر بلوک گراف G، γ-بحرانی باشد علاوه‌براین اگر گراف G، γ-بحرانی با بلوک‌های $G_1, G_2, ..., G_n$ باشد آن‌گاه

$$\gamma(G) = \sum_{i=1}^{n} \gamma(G_i) - (n-1)$$

لم ۵.۲.۲. [۷] اگر دو رأس u و v وجود داشته باشد به طوری که $N[u] \subseteq N[v]$، آن‌گاه G بحرانی نیست.

قضیه ۶.۲.۲. [۲] گراف G، ۲- بحرانی است اگر و فقط اگر برای $t \geq 1$، $G = K_{2t} - M$ و M یک تطابق کامل باشد.

اثبات. ($\Rightarrow$) فرض کنید $G = K_{2t} - M$ که M یک تطابق کامل از K_{2t} است و x و y رأس‌هایی از گراف G باشند، در این صورت y و x تمام رأس‌های گراف G را احاطه می‌کنند لذا $\gamma(G) = 2$. هر رأس گراف G به $2n - 2$ رأس دیگر متصل می‌باشد. لذا با حذف یک رأس از گراف G، یک رأس از درجه $2n - 2$ وجود دارد که تمام رأس‌های گراف G را احاطه می‌کند بنابراین $\gamma(G - x) = 1$. لذا G گرافی $(2, 1)$-بحرانی است.

($\Leftarrow$) فرض کنید $x \in V(G)$ در این صورت $\gamma(G - x) = 1$ حال فرض کنید $\{y\}$ یک $\gamma(G - x)$ -مجموعه باشد در این صورت y به تمام رأس‌های G به غیر از x وصل است. چون x رأسی دلخواه است، در نتیجه هر رأس از گراف، فقط به یک رأس دیگر متصل نیست و رأس x فقط به یکی از رأس‌های گراف وصل نیست، لذا حکم برقرار می‌باشد. □

لم ۷.۲.۲. [۲] اگر G یک رأس غیر تنها مانند v داشته باشد که زیر گراف القایی $N(v)$ کامل باشد، آن‌گاه G، γ- بحرانی نیست.

اثبات. فرض کنید $u \in N(v)$. هر مجموعه احاطه‌گر می‌نیمم از گراف $G_u = G - u$ شامل یک رأس از $N[v]$ است. بنابراین یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف G می‌باشد لذا گراف G، γ-بحرانی نیست. □

قضیه ۸.۲.۲. [۲] اگر G گراف γ بحرانی از مرتبه n باشد آن‌گاه

$$n \leqslant (\Delta(G) + ۱)(\gamma(G) - ۱) + ۱.$$

اثبات. فرض کنید $a \in V(G)$ باشد. چون G یک گراف γ- بحرانی است لذا $G - \{a\} = \gamma(G) - ۱$. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای $G - \{a\}$ باشد. لذا $|S| = \gamma(G) - ۱$. در نتیجه S حداکثر $\Delta(G) + ۱$ رأس از گراف G را احاطه می‌کند. در این‌صورت:

$$n - ۱ \leq |S|(\Delta(G) + ۱) = (\gamma(G) - ۱)(\Delta(G) + ۱)$$

و در نتیجه حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۹.۲.۲. [۷] اگر G یک گراف γ- بحرانی از مرتبه $n = (\Delta(G) + ۱)(\gamma(G) - ۱) + ۱$ باشد، آن‌گاه G منتظم است.

اثبات. فرض کنید u یک رأس گراف G و D_u مجموعه‌ای احاطه‌گر مینیمم برای $G - u = G_u$ باشد. چون G گرافی، $(\gamma, ۱)$-بحرانی است لذا داریم $|D_u| = \gamma - ۱$، در این‌صورت $(\Delta + ۱)(\gamma - ۱)$ رأس از G_u توسط D_u احاطه می‌شود. در نتیجه هر عضو D_u باید دقیقا $\Delta + ۱$ رأس از G_u را احاطه کند. بنابراین درجه هر رأس G_u، برابر Δ است. هم چنین به وضوح هیچ دو رأسی در D_u یک همسایه مشترکی ندارند. برای اثبات این که G، منتظم است، کافی است نشان دهیم که هر رأس دلخواه مانند x متعلق به یک D_u به ازای یک u از G می‌باشد. فرض کنید

$v \in D_x$. نشان می‌دهیم $x \in D_v$. چون G، $(\gamma, ۱)$-بحرانی است لذا $D_v \cap N[v] = \emptyset$. هر رأس $D_x - \{v\}$ تنها یک رأس از D_v را احاطه می‌کند. ولی رأسی که در D_v باقی می‌ماند، اگر رأس x نباشد، باید توسط D_x و v، احاطه شود، اما این غیر ممکن است لذا $x \in D_v$ است. □

تذکر: توجه کنید که عکس قضیه ۹.۲.۲ درست نیست، چون گراف $C_۸\langle ۱, ۴\rangle$ گرافی ۳-منتظم است ولی داریم $۸ \leqslant (۳+۱)(۳-۱)+۱ = ۹$.

۳.۲ گراف های $(\gamma, ۲)$-بحرانی

تعریف ۱.۳.۲. گراف G،گرافی (γ, k) **- بحرانی** [۶] نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرمجموعه k رأسی از $S \subseteq V(G)$ داشته باشیم $\gamma(G-S) < \gamma(G)$. گراف‌های $(\gamma, ۱)$ **- بحرانی** [۷] حالت خاصی از گراف‌های (γ, k)- بحرانی هستند.

بریقام [۸]، **هنینگ** [۹]، **هاینس** [۱۰] و **رال** [۱۱]در سال ۲۰۰۵ روشی را ارائه کردند [۴] که در یک گراف با حذف هر جفت رأس از گراف، عدد احاطه‌گر کاهش می‌یابد.

تعریف ۲.۳.۲. گراف G،گرافی $(\gamma, ۲)$ **- بحرانی** [۱۲]نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرمجموعه دو رأسی S از $V(G)$ داشته باشیم $\gamma(G-S) < \gamma(G)$.

گزاره ۳.۳.۲. [۴] گراف $C_۸\langle ۱, ۴\rangle$ ، $(۳, ۱)$- بحرانی و $(۳, ۲)$- بحرانی است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم عدد احاطه‌گری گراف $G = C_۸\langle ۱, ۴\rangle$ برابر با ۳ است یعنی $\gamma(G) = ۳$. به راحتی در شکل ۴.۲ می‌توان دید که $\{v_۰, v_۳, v_۵\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است.

[۶] (γ, k)-critical
[۷] γ-critical
[۸] Brigham
[۹] Henning
[۱۰] Haynes
[۱۱] Rall
[۱۲] γ- bicritical

لذا $\gamma(G)\le 3$. ثابت می‌کنیم $\gamma(G)\ge 3$. برهان خلف: فرض کنید $\gamma(G)<3$. لذا حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول : $\gamma(G)=2$. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای G باشد. اگر $S=\{v_0,v_3\}$ آن‌گاه رأس‌های v_6 و v_5 احاطه نمی‌شوند. اگر $S=\{v_0,v_5\}$ آن‌گاه رأس‌های v_2 و v_3 احاطه نمی‌شوند. اگر $S=\{v_0,v_6\}$ آن‌گاه رأس v_4 احاطه نمی‌شود. اگر $S=\{v_0,v_7\}$ آن‌گاه رأس‌های v_2 و v_5 احاطه نمی‌شوند. اگر $S=\{v_0,v_2\}$ آن‌گاه رأس v_5 احاطه نمی‌شود. اگر $S=\{v_0,v_4\}$ آن‌گاه رأس‌های v_6 و v_2 احاطه نمی‌شوند. اگر $S=\{v_1,v_2\}$ آن‌گاه رأس‌های v_4 و v_7 احاطه نمی‌شوند.

به صورت مشابه اگر S هر کدام از زیرمجموعه‌های ۲- عضوی دیگر نیز باشد آن‌گاه مجموعه‌ی S، $V(G)$ را احاطه نمی‌کند. که یک تناقض است.

حالت دوم : $\gamma(G)=1$. فرض کنید $S=\{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم باشد. چون $\deg(x)=3$، لذا x چهار رأس را احاطه می‌کند. اما G گرافی ۸ رأسی است و در نتیجه تمام رأس‌های G توسط S احاطه نمی‌شوند.

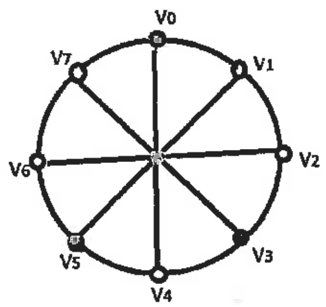
برای نشان دادن این که G، گرافی γ- بحرانی است با توجه به این که G گرافی رأس- انتقالی است کافی است ثابت کنیم:

$$\gamma(G-v_0)<\gamma(G).$$

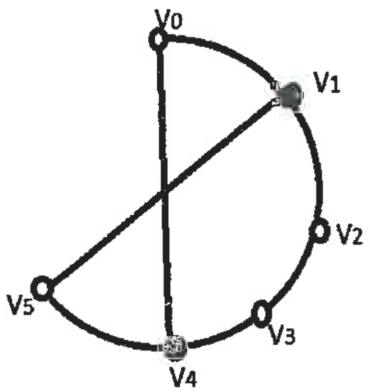
به وضوح می‌توان دید که $S=\{v_3,v_5\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G-v_0$ است. لذا G، گرافی $(\gamma,1)$ -بحرانی است.

به صورت مشابه می‌توان دید که $\{v_3,v_5\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G-\{v_0,v_1\}$، $G-\{v_0,v_2\}$ و $G-\{v_0,v_4\}$ و $\{v_6,v_5\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G-\{v_0,v_3\}$ می‌باشند.

لذا با توجه به رأس انتقالی بودن G نتیجه می‌گیریم G، گرافی $(\gamma, ۲)$ -بحرانی است.



شکل ۴.۲: گراف گردشی $C_۸(۱, ۴)$



شکل ۵.۲: گراف گردشی $C_۸(۱, ۴) - \{v_۶, v_۷\}$

□

گزاره ۴.۳.۲. [۴] برای $t \geqslant ۳$ گراف $G_t = K_t \square K_t$، گرافی $(t, ۱)$ -بحرانی و $(t, ۲)$- بحرانی است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $\gamma(G_t) = t$. فرض کنید $v_{۱۱}, v_{۱۲}, \dots, v_{۱t}, v_{۲۱}, \dots, v_{۲t}, v_{t۱}, \dots, v_{tt}$

رأس‌های گراف G_t باشند. به وضوح مجموعه $\{v_{۱۱}, v_{۲۱}, ..., v_{t۱}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G_t است لذا $\gamma(G_t) \leqslant t$. به برهان خلف ثابت می‌کنیم $\gamma(G_t) \geq t$. فرض کنید $\gamma(G_t) < t$ باشد و S یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای G_t باشد. هر رأس در مجموعه S فقط یک سطر G_t را احاطه می‌کند در نتیجه حداکثر $t - ۱$ سطر از G_t احاطه می‌شود و حداقل یک رأس از G_t توسط S احاطه نمی‌شود که تناقض است. لذا $\gamma(G_t) \geq t$. در نتیجه $\gamma(G_t) = t$.

برای نشان دادن این که G، گرافی $(t, ۱)$-بحرانی است، بدون اینکه ازکلیت مساله کاسته شود، گراف $G_t - \{v_{۱۱}\}$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت مجموعه $\{v_{ss} | ۲ \leqslant s \leqslant t\}$ یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $t - ۱$ برای $G - v_{۱۱}$ است. چون G رأس-انتقالی است لذا G، $(\gamma, ۱)$ -بحرانی است.

فرض کنید v_{ij}, v_{sr} دو رأس گراف G_t باشند. نشان می‌دهیم گراف حاصل از حذف این رأس‌ها دارای عدد احاطه‌گری کمتر از t است. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول : $s = i$ یا $(r = j)$. بدون این که از کلیت مساله کاسته شود، فرض کنید رأس‌های $v_{۱۱}$،$v_{۱۲}$ را حذف کرده باشیم. در این‌صورت مجموعه $\{v_{ss} | ۲ \leqslant s \leqslant t\}$ یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $t - ۱$ برای $G_t - \{v_{۱۲}, v_{۱۱}\}$ است. چون G_t رأس-انتقالی است لذا G_t، $(\gamma, ۲)$- بحرانی است.

حالت دوم : $s \neq i$ و $r \neq j$. بدون این که از کلیت مساله کاسته شود، فرض کنید رأس‌های $v_{۱۱}, v_{۲۲}$ را حذف کرده باشیم. در این‌صورت $\{v_{۲۳}, v_{۳۲}\} \cup \{v_{ss} | ۴ \leqslant s \leqslant t\}$ یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $t - ۱$ برای G_t است. چون G_t رأس-انتقالی است لذا G_t، $(\gamma, ۲)$ -بحرانی است.

بنابراین، برای هر دو رأس u و v از G_t داریم $\gamma(G_t - \{u, v\}) \leqslant t - ۱$. لذا گراف G_t، $(\gamma, ۲)$- بحرانی است. □

گزاره ۵.۳.۲. [۴] اگر H گرافی باشد که از گراف دوبخشی کامل $K_{۲t,۲t}$ که در آن $t \geqslant ۳$ با

حذف t تا ۴ -دور مجزا بدست آمده باشد، آن‌گاه H گرافی $(۴, ۱)$- بحرانی و $(۴, ۲)$- بحرانی است.

اثبات. فرض کنید مجموعه رأس‌های $K_{۲t,۲t}$ به دو زیرمجموعه R, Q افراز شده باشند و فرض کنید H گراف تشکیل شده از $K_{۲t,۲t}$ با حذف t، ۴ - دور مجزا باشد. فرض کنید $Q \supseteq \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ و $R \supseteq \{a, b, c, d, e, f\}$. در این‌صورت مجموعه $\{۱, ۲, a, b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای H است در این‌صورت $\gamma(H) \leq ۴$، به راحتی می‌توان دید که $\gamma(G) = ۴$. بدون این که از کلیت مساله کاسته شود، فرض کنید رأس a را حذف کرده باشیم. در این‌صورت مجموعه $\{۱, ۲, b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۳ برای $H - \{a\}$ است. لذا چون گراف H رأس- انتقالی پس $(\gamma, ۱)$- بحرانی است . فرض کنید که یال های ۴ -دور مجزا به صورت $\{۱, ۲, a, b\}$،$\{۳, ۴, c, d\}$ و $\{۵, ۶, e, f\}$ باشند که برای ساختن H حذف شده اند. با توجه به تقارن، تمام حالت‌های ممکن به صورت زیر هستند و همان‌طور که خواهیم دید گراف H گرافی $(\gamma, ۲)$ -بحرانی خواهد بود.

(۱)-گراف $H - \{۱, a\}$ توسط $\{۲, b\}$ احاطه می‌شود.

(۲)-گراف $H - \{۱, c\}$ توسط $\{۲, ۳, a\}$احاطه می‌شود.

(۳)- گراف $H - \{۱, ۲\}$ توسط $\{۳, ۵, a\}$احاطه می‌شود.

(۴)-گراف $H - \{۱, ۳\}$ توسط $\{۲, a, b\}$احاطه می‌شود. در این صورت H گرافی، $(۴, ۲)$ -بحرانی است.

در شکل۷.۲ گراف H از گراف شکل ۶.۲ با حذف سه ۴-دور مجزای $\{۱, ۲, a, b\}$، $\{۳, ۴, c, d\}$ و $\{۵, ۶, e, f\}$ حاصل شده است.

□

$$\gamma(G - \{x, y\}) < \gamma(G)$$

و نامساوی سمت راست اثبات می‌شود.

حال نامساوی سمت چپ را اثبات می‌کنیم. برهان خلف، فرض کنید

$\gamma(G) - ۲ > \gamma(G - \{x, y\})$ لذا $\gamma(G) - ۳ \geq \gamma(G - \{x, y\})$ و در نتیجه داریم:

$$\gamma(G) - ۳ + ۲ = \gamma(G - \{x, y\}) + ۲$$

$$\gamma(G) - ۱ \geq \gamma(G)$$

که تناقض است. لذا $\gamma(G) - ۲ \leq \gamma(G - \{x, y\})$. □

گزاره ۲.۴.۲. [۴] اگر G گرافی دلخواه و $x, y \in V(G)$ باشند به طوری که $\gamma(G - \{x, y\}) = \gamma(G) - ۲$ آن‌گاه $d_G(x, y) \geq ۳$.

اثبات. فرض کنید x و y رأس‌هایی از گراف G باشند. بدون این که از کلیت مساله کاسته شود، فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای $G - \{x, y\}$ باشد و

$$|S| = \gamma(G - \{x, y\} = \gamma(G) - ۲.$$

برهان خلف: فرض کنید $d_G(x, y) \leqslant ۲$. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنید $d_G(x, y) = ۲$ و فرض کنید $z \in N(x) \cap N(y)$ باشد حال قرار می‌دهیم $S' = S \cup \{z\}$ در این صورت S' یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف G است بنابراین

$$|S'| = |S \cup \{z\}| = \gamma(G) - ۲ + ۱ = \gamma(G) - ۱$$

لذا S' یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $\gamma(G) - ۱$ است که یک تناقض است.

حالت دوم: فرض کنید $d_G(x, y) = ۱$ و $xy \in E(G)$ باشد. در این‌صورت $S' \cup \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G می‌باشد و داریم:

$$|S'| = |S \cup \{x\}| = \gamma(G) - ۲ + ۱ = \gamma(G) - ۱$$

لذا S' یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $\gamma(G) - ۱$ است که تناقض است. □

نتیجه ۳.۴.۲. [۴] اگر برای هر جفت رأس‌های متمایز u و v در گراف G، $\gamma(G - \{u, v\}) = \gamma(G) - ۲$ باشد آن‌گاه گراف G فاقد یال است.

اثبات. برهان خلف: فرض کنید گراف G، یک یال مانند uv داشته باشد. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف $G - \{u, v\}$ باشد. طبق فرض داریم $|S| < \gamma(G)$. حال اگر $S' = S \cup \{v\}$ یا $S' = S \cup \{u\}$ باشد، آن‌گاه S' یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G می‌باشد. فرض کنید $S' = S \cup \{v\}$. در این‌صورت داریم:

$$|S'| = \gamma(G - \{u, v\}) + ۱ = \gamma(G) - ۲ + ۱ = \gamma(G) - ۱.$$

لذا S' یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه کمتر از $\gamma(G)$ است که تناقض است. به طور مشابه اگر $S' = S \cup \{u\}$ باشد، آن‌گاه S' یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه کمتر از $\gamma(G)$ است که یک تناقض است. □

نتیجه ۴.۴.۲. [۴] اگر G یک گراف همبند $(\gamma, ۲)$-بحرانی و با $diam(G) = ۲$ باشد، آن‌گاه برای هر جفت از رأس‌های مجزای u و v در گراف G داریم:

$$\gamma(G - \{u, v\}) = \gamma(G) - ۱.$$

اثبات. چون $diam(G) = ۲$ است لذا بیشترین فاصله بین رأس‌ها در گراف G، ۲ است. فرض کنید u و v رأس‌هایی از گراف G باشند. ابتدا طبق قضیه ۱.۴.۲ داریم $\gamma(G - \{u, v\}) \leq \gamma(G) - ۱$. اگر $\gamma(G - \{u, v\}) < \gamma(G) - ۱$ باشد آن‌گاه طبق قضیه ۱.۴.۲ داریم $\gamma(G - \{u, v\}) = \gamma(G) - ۲$، و طبق گزاره ۲.۴.۲، $d_G(u, v) \geq ۳$ که یک تناقض است. لذا

$\gamma(G - \{u, v\}) = \gamma(G) - ۱.$

□

گزاره ۵.۴.۲. [۴] اگر G یک گراف $(\gamma, ۲)$- بحرانی باشد، آن‌گاه هر رأس G متعلق به یک $\gamma(G)$- مجموعه است.

اثبات. فرض کنید x و y دو رأس مجاور از گراف G باشند و این دو رأس را از گراف G، حذف می‌کنیم چون G، $(\gamma, ۲)$-بحرانی است طبق گزاره ۱.۴.۲ داریم:

$$\gamma(G) - ۲ \leq \gamma(G - \{x, y\}) \leq \gamma(G) - ۱$$

دو حالت را در نظر می گیریم:

حالت اول: اگر $\gamma(G - \{x, y\}) = \gamma(G) - ۱$ باشد، آن‌گاه فرض کنید S یک $\gamma(G - \{x, y\})$- مجموعه باشد. دراین‌صورت $S \cup \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G است و

$$|S \cup \{x\}| = \gamma(G) - ۱ + ۱ = \gamma(G).$$

لذا $S \cup \{x\}$ یک $\gamma(G)$-مجموعه است.

حالت دوم: اگر $\gamma(G - \{x, y\}) = \gamma(G) - ۲$ باشد، آن‌گاه فرض کنید S یک $\gamma(G - \{x, y\})$- مجموعه باشد. دراین‌صورت $S \cup \{x, y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G است و

$$|S \cup \{x, y\}| = \gamma(G) - ۲ + ۲ = \gamma(G).$$

لذا $S \cup \{x, y\}$ یک $\gamma(G)$-مجموعه است.

□

گزاره ۶.۴.۲. [۴] اگر G یک گراف $(\gamma, ۲)$ -بحرانی و x و y رأس‌های گراف G باشند به طوری که $\gamma(G - \{x, y\}) = \gamma(G) - ۲$ آن‌گاه G یک $\gamma(G)$- مجموعه دارد که شامل x, y است.

اثبات. فرض کنید x و y رأس‌هایی از گراف G باشند. چون G گرافی $(\gamma, 2)$- بحرانی است داریم:

$$\gamma(G) - 2 \leq \gamma(G - \{x, y\}) \leq \gamma(G) - 1.$$

طبق فرض مساله $\gamma(G - \{x, y\}) = \gamma(G) - 2$ می‌باشد. فرض کنید S یک $\gamma(G - \{x, y\})$- مجموعه باشد. دراین‌صورت $S \cup \{x, y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G است و

$$|S \cup \{x, y\}| = \gamma(G) - 2 + 2 = \gamma(G).$$

لذا $S \cup \{x, y\}$ یک $\gamma(G)$-مجموعه است. □

گزاره ۲.۴.۷. [۴] اگر G یک گراف $(\gamma, 2)$ -بحرانی باشد، آن‌گاه $V = V^- \cup V^0$، یعنی $V^+ = \varnothing$. (علاوه بر این یا G، $(\gamma, 1)$-بحرانی است یا برای هر $v \in V^0$، $G - v$ گرافی $(\gamma, 1)$-بحرانی است.)

اثبات. برهان خلف: فرض کنید $V^+ \neq \varnothing$ و $a \in V^+(G)$. در این‌صورت $\gamma(G - \{a\}) \geq \gamma(G) + 1$. چون G گرافی $(\gamma, 2)$ -بحرانی است برای هردو رأس $a, b \in V(G)$ داریم:

$$\gamma(G - \{a, b\}) \leq \gamma(G) - 1.$$

فرض کنید S یک $\gamma(G - \{a, b\})$- مجموعه باشد. در این‌صورت $S \cup \{b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{a\}$ با اندازه حداکثر $\gamma(G)$ است که تناقض است. لذا $V^+ = \varnothing$.

حال فرض کنید $v \in V^+(G)$ و $w \in (G - \{v\})$. چون $\gamma(G - \{v, w\}) < \gamma(G)$ لذا

$$\gamma((G - \{v\}) - w) < \gamma(G - \{v\})$$

یعنی $G - v$ گرافی $(\gamma, 1)$ -بحرانی است. □

قضیه ۸.۴.۲. [۴] اگر G یک گراف $(\gamma,۲)$- بحرانی از مرتبه n باشد، آن‌گاه

$$n \leqslant (\Delta(G)+۱)(\gamma(G)-۱)+۲.$$

اثبات. چون G گرافی $(\gamma,۲)$- بحرانی است لذا داریم

$$\gamma(G)-۲ \leq \gamma(G-\{a,b\}) \leq \gamma(G)-۱. :$$

فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر برای $G-\{a,b\}$ باشد و $|S|=\gamma(G)-۱$. در نتیجه S حداکثر $\Delta(G)+۱$ رأس از گراف G را احاطه می‌کند و داریم:

$$n-۲ \leq (\Delta(G)+۱)(|S|) = (\Delta(G)+۱)(\gamma(G)-۱)$$

و در نتیجه حکم اثبات می‌شود. □

قضیه ۹.۴.۲. [۴] اگر G یک گراف منتظم و $(\gamma,۲)$ -بحرانی از مرتبه n باشد، آن‌گاه:

$$n \leqslant (\Delta(G)+۱)(\gamma(G)-۱)+۱.$$

اثبات. اگر G یک گراف $(\gamma,۱)$ -بحرانی باشد، آن‌گاه حکم طبق قضیه ۸.۲.۲ بدست می‌آید. لذا فرض کنید G، $(\gamma,۱)$-بحرانی نیست. لذا طبق گزاره ۷.۴.۲، برای هر $v \in V^{\circ}(G)$، $G-v$، $(\gamma,۱)$-بحرانی است. چون G گرافی $(\gamma,۲)$-بحرانی است لذا $\gamma(G) \geq ۲$ و از طرفی چون $\gamma(G) \geq ۲$ با یک رأس v از گراف G، نمی‌توانیم G را احاطه کنیم. چون G گرافی منتظم است، لذا $G-v$ نامنتظم است و $\Delta(G-v)=\Delta(G)$. بنابراین با توجه به قضیه‌های ۹.۲.۲و۸.۴.۲ داریم:

$$n-۱ = |V(G-v)| \leq (\Delta(G-v)+۱)(\gamma(G-v)-۱) = (\Delta(G)+۱)(\gamma(G)-۱)$$

و در نتیجه حکم اثبات می‌شود. □

قضیه ۱۰.۴.۲. [۴] اگر G یک گراف $(\gamma,2)$ -بحرانی باشد، آن‌گاه $\gamma(G) \geq 3$ است.

اثبات. برهان خلف: فرض کنید $\gamma(G) = 2$. با توجه به گزاره ۷.۴.۲ یا G، $(\gamma,1)$ -بحرانی است و یا $G-v$، برای هر رأس $v \in V^\circ(G)$، $(\gamma,1)$ -بحرانی است.

حالت اول: فرض کنید G، $(\gamma,1)$ -بحرانی باشد. با توجه به قضیه ۶.۲.۲، $G = K_{2t} - M$ که M یک تطابق کامل است. فرض کنید $xy \in M$ (توجه کنید $t \geq 2$ و G همبند است.) لذا رأس‌های x و y گراف G را احاطه می‌کنند و $\gamma(G) = 2$. و در نتیجه $G' = G - \{x,y\} = K_{2t-2} - M'$ که M' یک تطابق کامل از K_{2t-2} است از طرفی رأس های x' و y' گراف G' را احاطه می‌کنند و $\gamma(G') = 2$، بنابراین $\gamma(G) = 2 = \gamma(G')$. که با $(\gamma,2)$ -بحرانی بودن G در تناقض است.

حالت دوم : یک رأسی مانند v در گراف G وجود دارد به طوری که $\gamma(G-v) = \gamma(G)$ و $G-v$، گرافی $(\gamma,1)$ -بحرانی است. با توجه به قضیه ۶.۲.۲، داریم $G - v = K_{2t} - M$ که M یک تطابق کامل است.(توجه کنید $t \geq 2$ و G همبند است.) فرض کنید یال‌هایی که در M وجود دارند به صورت u_iv_i برای $1 \leq i \leq t$ هستند. طبق فرض داریم $\gamma(G) = 2$، پس رأسی مانند u_1 وجود دارد که همسایه v نباشد. لذا با حذف u_2 و v_2 در گراف G، تغییری در عدد احاطه‌گر حاصل نمی‌شود و داریم$\gamma(G) = 2 = \gamma(G - \{u_2, v_2\})$ که با $(\gamma,2)$ - بحرانی بودن گراف G در تناقض است. لذا $\gamma(G) \geq 3$. □

قضیه ۱۱.۴.۲. [۴] اگر G یک گراف همبند $(\gamma,2)$ -بحرانی باشد، آن‌گاه $\delta(G) \geq 3$.

اثبات. برهان خلف: فرض کنید $\delta(G) \leq 2$. چون $\gamma(G) \geq 2$ لذا G از مرتبه حداقل ۴ است. فرض کنید v یک رأس گراف G با مینیمم درجه باشد. دو حالت داریم:

حالت اول: $\deg(v) = 1$. فرض کنید u همسایه v در G و w همسایه‌ای از u در گراف G

باشد به‌طوری‌که $v \neq w$. فرض کنید $G' = G - \{u, w\}$ و S' یک $\gamma(G')$-مجموعه باشد. چون G، $(\gamma, ۲)$-بحرانی است لذا $\gamma(G') < \gamma(G)$. حال v یک رأس تنها در گراف G' است بنابراین $v \in S'$. قرار می‌دهیم:

$$S = (S' - \{v\}) \cup \{u\}$$

در این صورت داریم:

$$|S| = |S' - \{v\} \cup \{u\}| < \gamma(G)$$

که تناقض است.

حالت دوم: $\deg v = ۲$. فرض کنید u و w دو همسایه v با حذف u و w هیچ تغییری در عدد احاطه‌گر به وجود نمی‌آید. فرض کنید $G' = G - \{u, w\}$ و S' یک $\gamma(G')$-مجموعه باشد لذا $|S'| = \gamma(G) - ۲$. چون G، $(\gamma, ۲)$-بحرانی است لذا $\gamma(G') < \gamma(G)$. قرار می‌دهیم $S = S'$. در نتیجه S مجموعه‌ای احاطه‌گر با اندازه کمتر از $\gamma(G)$ است. که تناقض است.

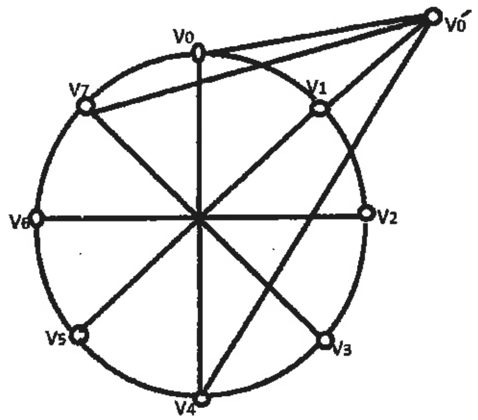
در هر دو حالت S یک مجموعه احاطه‌گر از گراف G با اندازه کمتر از $\gamma(G)$ می‌باشد، که تناقض است. $\square$

۵.۲ گسترش گراف

در این قسمت ساختاری ارائه می‌دهیم که به کمک آن از یک گراف بحرانی، گراف‌های بحرانی بزرگتر حاصل می‌شود.

تعریف ۱.۵.۲. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف و $v. \in V$. گسترش گراف G با رأس $v.$ که آن را با $G_{[v.]}$ نمایش می‌دهیم، گرافی است که در آن مجموعه رئوس به صورت $V \cup \{v'.\}$ و مجموعه یال‌ها به صورت $E \cup \{v'.x | x \in N_G[v.]\}$ می‌باشند.

شکل ۸.۲ گراف $C_۸(۱,۴)_{[v_۰]}$ را نمایش می‌دهد.



شکل ۸.۲: گراف $C_۸(۱,۴)_{[v_۰]}$

قضیه ۲.۵.۲. [۴] اگر v یک رأس از گراف G باشد که $(\gamma, ۱)$ -بحرانی و $(\gamma, ۲)$- بحرانی باشد آن‌گاه گراف $G_{[v]}$، $(\gamma, ۲)$ -بحرانی است.

اثبات. فرض کنید D' یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف G باشد. چون D' رأس v را در گراف G احاطه می‌کند و همچنین رأس v' را در $G_{[v]}$ نیز احاطه می‌کند لذا یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف $G_{[v]}$ نیز هست که داریم $\gamma(G_{[v]}) = \gamma(G)$. فرض کنید $x, y \in V(G_{[v]})$ باشد. سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم که در آن‌ها $|\{x,y\} \cap \{v,v'\}|$ برابر با ۰، ۱ یا ۲ می‌باشد.

حالت اول: فرض کنید $|\{x,y\} \cap \{v,v'\}| = ۰$. فرض کنید D یک $\gamma(G - \{x,y\})$ -مجموعه باشد. چون G، $(\gamma, ۲)$ -بحرانی است لذا داریم $|D| < \gamma(G)$. چون D رأس v را در گراف $G - \{x,y\}$ احاطه می‌کند و همچنین رأس v' را در گراف $G_{[v]} - \{x,y\}$ نیز احاطه می‌کند لذا داریم $\gamma(G_{[v]} - \{x,y\}) \leq |D| < \gamma(G) = \gamma(G_{[v]})$.

حالت دوم : فرض کنید ۱ $= |\{x,y\} \cap \{v,v'\}|$. طبق ترسیم گراف $G_{[v]}$ که قبلا نشان داده‌ایم، داریم $N_{G_{[v]}}[v] = N_{G_v}[v']$.

بدون اینکه از کلیت مساله کاسته شود، فرض کنید که $x = v$ و $y \in V(G) - \{v\}$ باشد. در این صورت:

$$G_{[v]} - \{x,y\} = G_{[v]} - \{v,y\} \cong G_{[v]} - \{v',y\} = G - y.$$

چون گراف G یک گراف $(\gamma, ۱)$- بحرانی است داریم:

$$\gamma(G_{[v]} - \{x,y\}) = \gamma(G - y) = \gamma(G) - ۱ < \gamma(G) = \gamma(G_{[v]}).$$

حالت سوم: فرض کنید که ۲ $= |\{x,y\} \cap \{v,v'\}|$. یعنی $\{x,y\} = \{v,v'\}$. دراین‌صورت داریم:

$$(G_{[v]} - \{x,y\}) = G_{[v]} - \{v,v'\} = G - v$$

و چون G، گرافی $(\gamma, ۱)$- بحرانی است داریم:

$$\gamma(G_{[v]} - \{x,y\}) = \gamma(G - v) = \gamma(G) - ۱ < \gamma(G) = \gamma(G_{[v]}).$$

بنابراین در تمام سه حالت فوق داریم $\gamma(G_{[v]} - \{x,y\}) < \gamma(G_{[v]})$ و در نتیجه، $G_{[v]}$ یک گراف $(\gamma, ۲)$ بحرانی است. □

تذکر: گراف $G_{[v]}$، $(\gamma, ۱)$ - بحرانی نیست زیرا رأس v و v' در $V^{۰}$ هستند.

لم ۳.۵.۲. [۴] فرض کنید u و w به ترتیب رأس‌های مجزا از گراف های ناتهی F و H باشند. اگر $G = (F \cdot H)(u, w : v)$ گراف حاصل از به هم آمیختگی F و H باشد آن‌گاه $\gamma(F) + \gamma(H) - ۱ \leqslant \gamma(G) \leqslant \gamma(F) + \gamma(H)$.

اثبات. فرض کنید D_F و D_H به ترتیب یک $\gamma(F)$ -مجموعه و یک $\gamma(H)$ -مجموعه باشد. اگر $u \notin D_F$ و $w \notin D_H$، آن‌گاه $D_F \cup D_H$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G می‌باشد. در غیر این صورت $(D_F - \{u\}) \cup (D_H - \{w\}) \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر، برای گراف G می‌باشد. در هر دو صورت نامساوی سمت راست اثبات می‌شود.

حال نا مساوی سمت چپ را ثابت می‌کنیم. فرض کنید D یک $\gamma(G)$ - مجموعه باشد دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $v \in D$ باشد آنگاه

$$D_F = V(F) \cap (D - \{v\}) \cup \{u\}$$

$$D_H = V(H) \cap (D - \{v\}) \cup \{w\}$$

به ترتیب مجموعه‌های احاطه‌گر برای گراف‌های F و H می‌باشند. بنابراین داریم:

$$\gamma(F) + \gamma(H) \leq |D_F| + |D_H| \leq |D| + ۱$$

و نا مساوی سمت چپ اثبات می‌شود.

حالت دوم: اگر $v \notin D$ آن‌گاه v مجاور با رأسی مانند $x \in D$ است. فرض کنید x رأسی در گراف F باشد. در این‌صورت $D_F = D \cap V(F)$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف F می‌باشد. همچنین $D_H = (D \cap V(H)) \cup \{w\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف H می‌باشد. بنابراین

$$\gamma(F) + \gamma(H) \leq |D_F| + |D_H| \leq |D| + ۱$$

و این نیز نامساوی سمت چپ را نتیجه می‌دهد. □

قضیه ۴.۵.۲. [۴] اگر G گراف حاصل از به هم آمیختگی دو گراف F و H باشد، آن‌گاه G، $(\gamma, ۱)$ -بحرانی، $(\gamma, ۲)$ -بحرانی است اگر فقط اگر F و H هم $(\gamma, ۱)$ -بحرانی و هم $(\gamma, ۲)$

-بحرانی باشند.

اثبات. ($\Leftarrow$)فرض کنید $G=(F.H)(u,w:v)$ و $\gamma(F)=r$ و $\gamma(H)=s$. فرض کنید G، $(\gamma,1)$-بحرانی و $(\gamma,2)$ - بحرانی باشد با توجه به قضیه ۳.۲.۲، داریم

$$\gamma(G)=r+s-1$$

و F و H هر دو $(\gamma,1)$- بحرانی هستند. نشان می‌دهیم F، $(\gamma,2)$-بحرانی است. فرض کنید $x,y\in V(G)$. بدون از دست دادن کلیت مساله فرض کنید $x,y\in V(F)$. چون G، $(\gamma,2)$-بحرانی است، داریم:

$$\gamma(G-\{x,y\})\leq\gamma(G)-1=r+s-1-1=r+s-2.$$

اگر $u\in\{x,y\}$، (مثلا $u=x$)، آن‌گاه چون H گرافی $(\gamma,1)$- بحرانی است داریم:

$$r+s-2\geq\gamma(G-\{x,y\})=\gamma(F-\{x,y\})+s-1$$

بنابراین :

$$\gamma(F-\{x,y\})\leq r-1.$$

به عبارت دیگر فرض کنید $\{x,y\}\subset V(F)-\{u\}$ باشد. اگر u یک رأس تنها در گراف $F-\{x,y\}$ نباشد آن‌گاه با توجه به لم ۳.۵.۲ داریم:

$$r+s-2\geq\gamma(G-\{x,y\})=\gamma(F-\{x,y\}).H)(u,w:v)\geq\gamma(F-\{x,y\})+\gamma(H)-1=$$
$$\gamma(F-\{x,y\})+s-1$$

و در نتیجه داریم $\gamma(F-\{x,y\})\leq r-1$. فرض کنید u یک رأس تنها در گراف $F-\{x,y\}$ و $F-\{x,y\}=K\cup\{u\}$ باشد. در این صورت $G-\{x,y\}=K\cup H$ و $\gamma(F-\{x,y\})=\gamma(K)+1$.

پس

$$r + s - ۲ \geq \gamma(G - \{x, y\}) = \gamma(K) + \gamma(H) = \gamma(F - \{x, y\}) - ۱ + s$$

و در نتیجه داریم $\gamma(F - \{x, y\}) \leq r - ۱$. بنابراین F، $(\gamma, ۲)$ -بحرانی است. به طور مشابه H نیز $(\gamma, ۲)$- بحرانی است.

$(\Rightarrow)$ فرض کنید F و H، $(\gamma, ۱)$ -بحرانی و $(\gamma, ۲)$ -بحرانی باشد. با توجه به قضیه ۳.۲.۲، داریم $\gamma(G) = r + s - ۱$ و G، $(\gamma, ۱)$ -بحرانی می‌باشد. نشان می‌دهیم که G، $(\gamma, ۲)$ -بحرانی است. فرض کنید x و y رأس‌های مجزا در گراف G باشد. فرض کنید که $x \in V(F) - \{u\}$ و $y \in V(F)$ (ممکن است که $u = y$). چون F، $(\gamma, ۲)$ -بحرانی است مجموعه‌ای احاطه‌گر D_F از گراف $F - \{x, y\}$ وجود دارد، به طوری که $|D_F| \leq r - ۱$، چون H، $(\gamma, ۱)$-بحرانی است یک مجموعه احاطه‌گر D_H از گراف $H - w$ وجود دارد به طوری که $|D_H| = s - ۱$. مجموعه $D_F \cup D_H$، گراف $G - \{x, y\}$ را احاطه می‌کند بنابراین

$$\gamma(G - \{x, y\}) \leq |D_F| + |D_H| \leq r + s - ۲ < r + s - ۱ = \gamma(G).$$

و به طور مشابه اگر $x \in V(H) - \{w\}$ و $y \in V(H)$ باشد آن‌گاه $\gamma(G - \{x, y\}) \leq \gamma(G)$.

بنابراین فرض می‌کنیم که $x \in V(F) - \{u\}$ و $y \in V(H) - \{w\}$. چون F، $(\gamma, ۱)$ - بحرانی است، مجموعه‌ای احاطه‌گر مثل D_F برای گراف $F - x$ وجود دارد، به طوری که $|D_F| = r - ۱$. چون H، $(\gamma, ۲)$ -بحرانی است، مجموعه احاطه‌گر D_H برای گراف $H - \{w, y\}$ وجود دارد به طوری که $|D_H| \leq S - ۱$. مجموعه $D_F \cup D_H$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف $G - \{x, y\}$ است بنابراین

$$\gamma(G - \{x, y\}) \leq |D_F| + |D_H| \leq r + s - ۲ < r + s - ۱ = \gamma(G).$$

بنابراین G، $(\gamma, ۲)$ -بحرانی است. □

نتیجه ۵.۵.۲. [۴] گراف همبند G، $(\gamma, ۱)$ - بحرانی و $(\gamma, ۲)$ -بحرانی است اگر فقط اگر هر بلوک از G، $(\gamma, ۱)$ -بحرانی و $(\gamma, ۲)$ -بحرانی باشد به علاوه اگر G، $(\gamma, ۱)$ -بحرانی و $(\gamma, ۲)$ -بحرانی و با بلوک‌های $G_۱, ..., G_k$ باشد آن‌گاه

$$\gamma(G) = (\sum_{i=۱}^{k} \gamma(G_i)) - k + C(G)$$

که $C(G)$، تعداد مولفه‌های گراف G است.

اثبات. فرض کنید $G_۱, ..., G_n, G_{n+۱}$ بلوک های G باشد. طبق ۱۶.۱.۱ فرض کنید $G_{n+۱}$ شامل تنها یک رأس برشی از G می باشد. لذا $G = H.G_{n+۱}$ که H یک ترکیبی از زیر گراف، بلوک های $G_۱, ..., G_n$ است. با توجه به قضیه ۴.۵.۲،گراف همبند G، $(\gamma, ۱)$ - بحرانی و $(\gamma, ۲)$ - بحرانی است اگر فقط اگر هر بلوک از G، $(\gamma, ۱)$ -بحرانی و $(\gamma, ۲)$ -بحرانی باشد. اگر G گرافی $(\gamma, ۱)$-بحرانی و $(\gamma, ۲)$-بحرانی باشد، آن‌گاه طبق قضیه ۳.۲.۲ داریم:

$$\gamma(G) = (\sum_{i=۱}^{k} \gamma(G_i)) - k + C(G).$$

در نتیجه حکم اثبات می‌شود. □

نتیجه ۶.۵.۲. [۴] برای هر عدد صحیح $\gamma \geqslant ۳$ ، یک گراف همبند G_γ وجود دارد که $(\gamma, ۱)$ -بحرانی و $(\gamma, ۲)$ -بحرانی است و در شرط‌های $\gamma(G_\gamma) = \gamma$ و $diam(G_\gamma) = \gamma - ۱$ صدق می‌کند.

اثبات. اگر F گراف گردشی $C_۸\langle ۱, ۴\rangle$ باشد آن‌گاه $diam(F) = ۲$. با توجه به قضیه ۳.۳.۲، F، $(۳, ۱)$ -بحرانی و $(۳, ۲)$ - بحرانی است. فرض کنید گراف H تشکیل شده از گراف دوبخشی کامل $K_{۶,۶}$ با حذف یال‌های سه‌تا ۴- دور مجزا باشد. لذا $diam(H) = ۳$. با توجه به گزاره ۵.۳.۲، H، $(۴, ۱)$ بحرانی و $(۴, ۲)$ - بحرانی است. اگر $\gamma = ۳$ یا $\gamma = ۴$ باشد، آن‌گاه می‌توان به

ترتیب $G_\gamma = F$ یا $G_\gamma = H$ را در نظر گرفت. بنابراین فرض کنید که $\gamma \geqslant 5$. دو حالت داریم که γ فرد یا زوج است.

حالت اول: فرض کنید $\gamma = 2k+1$، که $k \geqslant 2$. فرض کنید u و w دو رأس غیر مجاور گراف F باشد. فرض کنید $B_1, ..., B_k$، k کپی مجزا از F باشند فرض کنید u_i و w_i رأس‌هایی از B_i برای $i = 1, 2, ..., k$ هستند. که به ترتیب، متناظر به رأس‌های u و w، در گراف F هستند. فرض کنید G_γ، با یکی کردن رأس‌های w_i و u_{i+1} برای $i = 1, ..., k-1$ به دست می‌آید. لذا $B_1, ..., B_k$ بلوک‌های G_γ هستند. چون هر B_i، $(\gamma, 1)$ -بحرانی و $(\gamma, 2)$ -بحرانی می‌باشد و $\gamma(B_i) = 3$. طبق نتیجه ۵.۵.۲، G_γ $(\gamma, 1)$ -بحرانی و $(\gamma, 2)$ - بحرانی است و $\gamma(G_\gamma) = 2k+1 = \gamma$ است داریم $diam(G_\gamma) = 2k = \gamma - 1$.

حالت دوم: فرض کنید $\gamma = 2k$، که $k \geqslant 3$. G_γ را مانند بالا بدست می‌آوریم. B_{k-1} و B_k را با یک کپی L از H جایگزین می‌کنیم. لذا $B_1, ..., B_{k-2}, L$ بلوک‌هایی از G_γ هستند. با توجه به نتیجه ۵.۵.۲، G_γ $(\gamma, 1)$ -بحرانی و $(\gamma, 2)$ - بحرانی می‌باشد و $\gamma(G_\gamma) = 2k = \gamma$ است لذا داریم: $diam(G_\gamma) = 2k - 1 = \gamma - 1$. □

۶.۲ همبندی یالی

در قسمت‌های قبلی گراف‌های همبند $(\gamma, 2)$ -بحرانی را که شامل رأس -برشی بودند را بررسی کردیم در این قسمت همبندی یالی یک گراف $(\gamma, 2)$ -بحرانی را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که $\lambda(G) \geqslant 2$.

نتیجه ۱.۶.۲. [۴] اگر G، یک گراف همبند $(\gamma, 2)$ -بحرانی باشد، آن‌گاه $\lambda(G) \geqslant 2$.

اثبات. برهان خلف: $\lambda(G) < 2$ ، یعنی $\lambda(G) = 1$. فرض کنید uv یک پل از گراف G باشد. فرض کنید G_u یک مولفه از $G - uv$ که شامل رأس u است و G_v یک مولفه از $G - uv$ باشد که

شامل رأس v است. با توجه به قضیه ۱۱.۴.۲، $\delta(G) \geqslant ۳$، بنابراین G_u و G_v حداقل از مرتبه ۳ هستند. واضح است که $\gamma(G) \leqslant \gamma(G_u) + \gamma(G_v)$. فرض کنید $x \in V(G_u) \cap N(u)$ با توجه به (گزاره ۲.۴.۲) با حذف دو رأس مجاور، عدد احاطه‌گر حداکثر، یک واحد کاهش می‌یابد. لذا چون گراف G، $(\gamma, ۲)$ -بحرانی است خواهیم داشت:

$$\gamma(G) - ۱ = \gamma(G - \{u, x\}) = \gamma(G_u - \{u, x\}) + \gamma(G_v) \geq \gamma(G_u) - ۱ + \gamma(G_v)$$

در نتیجه $\gamma(G) = \gamma(G_u) + \gamma(G_v)$.

اگر $u \in V^\circ(G_u)$ و $v \in V^\circ(G_v)$ باشد، آن‌گاه

$$\gamma(G) - ۱ = \gamma(G - \{u, v\}) = \gamma(G_u - u) + \gamma(G_v - v) = \gamma(G_u) + \gamma(G_v) = \gamma(G)$$

که تناقض است. بنابراین $u \in V^-(G_u)$ یا $v \in V^-(G_v)$. بدون این که از کلیت مساله کاسته شود، فرض کنید $u \in V^-(G_u)$. فرض کنید S_u یک $\gamma(G_u - u)$ - مجموعه باشد. دراین‌صورت $|S_u| = \gamma(G_u) - ۱$. فرض کنید $y \in V(G_v) \cap N(v)$ و گراف $G - \{v, y\}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\gamma(G) - ۱ = \gamma(G - \{v, y\}) = \gamma(G_u) + \gamma(G_v) - ۱.$$

نتیجه می‌گیریم زیر مجموعه S' از $\gamma(G_v) - ۱$ رأس، که این رأس‌ها در گراف G_v هستند، گراف $G_v - \{v, y\}$ را احاطه می‌کند. بنابراین، $S_v = S' \cup \{v\}$ یک $\gamma(G_v)$– مجموعه است و $S_u \cup S_v$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G با اندازه

$$\gamma(G_u) - ۱ + \gamma(G_v) < \gamma(G)$$

که تناقض است. لذا $\gamma(G) \geq ۲$. □

لم ۲.۶.۲. [۴] فرض کنید G یک گراف همبند $(\gamma,2)$- بحرانی با $\lambda(G) = 2$ بوده و یک برش یالی $\{ab,cd\}$ داشته باشیم. اگر G_1 و G_2 دو مولفه از $G-ab-cd$ باشد به طوری که $a,c \in V(G_1)$ و $b,d \in V(G_2)$ و $a \neq c$ آن‌گاه عبارت‌های زیر درست هستند.

۱. $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$.

۲. $a,c \notin V^+(G_1), b,d \notin V^+(G_2)$.

۳. $b \neq d$.

۴. بدون این که از کلیت مساله کاسته شود، $a,c \in V^-(G_1)$ و $b,d \in V^0(G_2)$.

۵. d و b دریک $\gamma(G_2)$- مجموعه قرار ندارند.

۶. فرض کنید $\gamma(G_2-\{b,d\}) = \gamma(G_2) - 1$ و یک $\gamma(G_2-\{b,d\})$- مجموعه ای وجود دارد که b و d را احاطه نمی‌کند.

۷. یک $\gamma(G_2-d)$ -مجموعه شامل b و یک $\gamma(G_2-b)$-مجموعه شامل d وجود دارند.

۸. $\gamma(G_1)$ مجموعه‌ای که شامل هر دوی a و c باشد، وجود ندارد.

۹. $\gamma(G_1-a)$-مجموعه ای که شامل c و $\gamma(G_2-c)$- مجموعه‌ای که شامل a باشد، وجود ندارد.

۱۰. $\gamma(G) \geq 3$.

اثبات. واضح است$\gamma(G) \leq \gamma(G_1)+\gamma(G_2)$. نشان می‌دهیم که $\gamma(G) \geq \gamma(G_1)+\gamma(G_2)$.

حالت اول : $b = d$. فرض کنید $x \in V(G_2) \cap N(b)$ با توجه به گزاره ۲.۴.۲ چون G، $(\gamma,2)$-بحرانی است، داریم:

$$\gamma - 1 = \gamma(G - \{b,x\}) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2 - \{b,x\}) \geq \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1$$

و بنابراین داریم $\gamma(G) \geq \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$.

حالت دوم : $b \neq d$. فرض کنید $\gamma(G_2 - \{b,d\}) = \gamma(G_2) - 2$ و همچنین $\gamma(G_2)$-مجموعه‌ای که شامل b و d است وجود دارد. حال، $\gamma(G - \{a,c\}) \leq \gamma(G) - 1$. اگر D یک $\gamma(G\{a,c\})$-مجموعه باشد آن‌گاه $|D| \leq \gamma(G) - 1$ و $D = D_1 \cup D_2$ که در آن D_1 یک $\gamma(G_1 - \{a,c\})$-مجموعه و D_2 یک $\gamma(G_2)$-مجموعه می‌باشد. فرض کنید D_2 شامل b و d باشد. لذا D یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G می‌باشد داریم:

$$\gamma(G) \leq |D_1 \cup D_2| = |D| \leq \gamma(G) - 1$$

که تناقض است.

بنابراین $\gamma(G_2 - \{b,d\}) \geq \gamma(G_2) - 1$. حال داریم:

$$\gamma(G) - 1 \geq \gamma(G - \{b,d\}) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2 - \{b,d\}) \geq \gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1$$

و بنابراین داریم:

$$\gamma(G) \geq \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$$

لذا نتیجه می گیریم:

$$\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2).$$

اثبات (۲) : اگر $a \in V^+(G_1)$ آن‌گاه

$$\gamma(G) - 1 \geq \gamma(G - \{a,d\}) = \gamma(G_1 - a) + \gamma(G_2 - d) \geq (\gamma(G_1) + 1) + (\gamma(G_2) - 1) =$$
$$\gamma(G_1) + \gamma(G_2) = \gamma(G)$$

که یک تناقض است. اثبات رأس‌های b، c و d به صورت مشابه می‌باشد.

اثبات (۳) : فرض کنید $b = d$. با توجه به قسمت ۲، $b \notin V^{+}(G_2)$. نشان می‌دهیم که یک $\gamma(G_2)$- مجموعه وجود دارد که شامل b است. اگر $b \in V^{-}(G_2)$، آن‌گاه D_2 یک $\gamma(G_2)$- مجموعه‌ای می‌باشد، که شامل b است. فرض کنید $b \in V^{0}(G_2)$ و $x \in N(b) \cap V(G)$. در این صورت

$$\gamma(G) - 1 = \gamma(G - \{b, x\}) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2 - \{b, x\})$$

که نتیجه می‌گیریم

$$\gamma(G_2 - \{b, x\}) = \gamma(G_2) - 1$$

اگر D'_2 یک $\gamma(G_2 - \{b, x\})$- مجموعه باشد، آن‌گاه $D_2 = D'_2 \cup \{b\}$ یک $\gamma(G_2)$ -مجموعه‌ای است که شامل bاست. حال داریم:

$$\gamma(G) - 1 \geq \gamma(G - \{a, c\}) = \gamma(G_1 - \{a, c\}) + \gamma(G_2)$$

و بنابراین داریم

$$\gamma(G_1 - \{a, c\}) \leq \gamma(G_1) - 1.$$

اگر D_1 یک $\gamma(G_1 - \{a, c\})$- مجموعه باشد آن‌گاه $D_1 \cup D_2$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G با اندازه $|D_1 \cup D_2| \leq \gamma(G) - 1$ است. که تناقض است.

اثبات (۴) : با توجه به قسمت ۲ هیچ یک از a, b, c و d برای یک i خاص در $V^{+}(G_i)$ نیستند. فرض کنید $a \in V^{-}(G_1)$ و $b \in V^{-}(G_2)$. در این صورت

$$\gamma(G - \{a, b\}) \leq \gamma(G_1 - a) + \gamma(G_2 - b) = (\gamma(G_1) - 1) + (\gamma(G_2) - 1) = \gamma(G) - 2$$

اگر a و b مجاور باشند آن‌گاه با حذف a و b عدد احاطه‌گر ۲ واحد کاهش نمی‌یابد لذا a و b مجاور نیستند که این تناقض با این که ab یک یال است. بنابراین حداقل یکی از $a \in V^{\circ}(G_1)$ یا $b \in V^{\circ}(G_2)$ درست می‌باشد (همین طور یا $c \in V^{\circ}(G_1)$ یا $d \in V^{\circ}(G_2)$). فرض بعدی این است که $a \in V^{\circ}(G_1)$ و $d \in V^{\circ}(G_2)$. بنابراین

$$\gamma(G) - 1 \geq \gamma(G - \{a, d\}) = \gamma(G_1 - a) + \gamma(G_2 - d) = \gamma(G_1) + \gamma(G_1) = \gamma(G).$$

این یک تناقض است. بنابراین حداقل یکی از $a \in V^{-}(G_1)$ یا $d \in V^{-}(G_2)$ درست است (همین طور $c \in V^{-}(G_1)$ یا $b \in V^{-}(G_2)$). در این صورت نتیجه می‌گیریم که دقیقا دو رأس از c, b, a و d برای i مشخصی در $V^{-}(G_i)$ می باشند. بدون از دست دادن کلیت مساله، (فرض کنید $a \in V^{-}(G_1)$، لذا از توضیحات بالا نتیجه می‌گیریم $b \in V^{\circ}(G_2)$ ، $c \in V^{-}(G_1)$ و $d \in V^{\circ}(G_2)$.

اثبات (۵) : فرض کنید که D_2 یک $\gamma(G_2)$- مجموعه و b در D_2 قرار دارد و فرض کنید D_1 یک $\gamma(G_1 - a)$- مجموعه باشد که $a \in V^{-}(G_1)$ باشد. داریم $|D_1| = \gamma(G_1) - 1$.

حال $D = D_1 \cup D_2$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G می‌باشد و

$$|D| = (\gamma(G_1) - 1) + \gamma(G_2) = \gamma(G) - 1$$

لذا D یک $\gamma(G)$- مجموعه با اندازه کمتر از $\gamma(G)$ است که یک تناقض است.

بنابراین b نمی‌تواند در هر $\gamma(G_2)$ -مجموعه قرار بگیرد و نتیجه برای d به صورت مشابه می‌باشد.

اثبات (۶) : چون G، $(\gamma, 2)$ -بحرانی است، لذا

$$\gamma(G) - 1 \geq \gamma(G - \{b, d\}) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2 - \{b, d\})$$

بنابراین:

$$\gamma(G_2 - \{b, d\}) \leq \gamma(G_2) - 1$$

فرض کنید $D_۲$ یک $\gamma(G_۲ - \{b,d\})$ -مجموعه باشد. اگر

$$|D_۲| = \gamma(G_۲) - ۲$$

آن‌گاه $D_۲ \cup \{b,d\}$ یک $\gamma(G_۲)$ -مجموعه می‌باشد که چون شامل b و d می‌باشد با قسمت ۵ در تناقض می‌باشد. بنابراین $|D_۲| = \gamma(G_۲) - ۱$. اگر $D_۲$ رأس b را احاطه کند، آن‌گاه $D_۲ \cup \{d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف $G_۲$ می‌باشد، که با قسمت ۵ در تناقض می‌باشد. بنابراین $D_۲$ نمی تواند b را احاطه کند. و به طور مشابه $D_۲$ نمی‌تواند، d را نیز احاطه کند.

اثبات (۷) : با توجه به قسمت ۴ چون $d \in V^۰(G_۲)$ است داریم:

$$\gamma(G_۲ - d) = \gamma(G_۲).$$

فرض کنید $D_۲$ یک $\gamma(G_۲ - \{b,d\})$- مجموعه باشد. با توجه به قسمت ۶ داریم:

$$|D_۲| = \gamma(G_۲) - ۱.$$

بنابراین $D_۲ \cup \{b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف $G_۲ - \{d\}$ با اندازه $\gamma(G_۲)$ می‌باشد و همچنین $D_۲ \cup \{b\}$ یک $\gamma(G_۲ - d)$-مجموعه می‌باشد و به طور مشابه $D_۲ \cup \{d\}$ یک $\gamma(G_۲ - b)$- مجموعه می‌باشد.

اثبات (۸) : فرض کنید که $D_۱$ یک $\gamma(G_۱)$- مجموعه شامل a و c باشد و $D_۲$ یک $\gamma(G_۲ - \{b,d\})$ -مجموعه باشد با توجه قسمت ۶، $|D| = \gamma_۲(G) - ۱$، بنابراین $D_۱ \cup D_۲$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G با اندازه $\gamma(G_۱) + \gamma(G_۲) - ۱ = \gamma(G) - ۱$ می‌باشد که تناقض می‌باشد.

اثبات (۹) : فرض کنید که $D_۱$ یک $\gamma(G_۱ - a)$-مجموعه شامل c باشد. در این صورت $D_۱ \cup \{a\}$ یک $\gamma(G_۱)$- مجموعه شامل a و c می‌باشد، که با قسمت ۸ در تناقض می‌باشد. به طور مشابه $\gamma(G_۱ - c)$ - مجموعه ای که شامل a باشد وجود ندارد.

اثبات (۱۰) : با توجه به قسمت ۴، $a,c \in V^{-}(G_۱)$ و از طرفی داریم $\gamma(G_۱ - \{a\}) = \gamma(G_۱) - ۱$ و $\gamma(G_۱ - \{c\}) = \gamma(G_۱) - ۱$ بنابراین $\gamma(G_۱) \geq ۲$. فرض کنید $\gamma(G_۱) = ۲$. لذا

$$\gamma(G) = \gamma(G_۱) + \gamma(G_۲) = ۲ + \gamma_۲(G)$$

لذا با توجه به قسمت ۴ داریم $\gamma(G_۱ - \{a\}) = ۱$ و $\gamma(G_۱ - \{c\}) = ۱$. بنابراین رأس های x و y در $G_۱$ وجود دارند که به ترتیب $G_۱ - a$ و $G_۱ - c$ را احاطه می کنند. با توجه به قسمت ۹، $x \neq c$ و $y \neq a$ می باشد. چون $\gamma(G_۱) = ۲$، a همسایه x نیست، و c همسایه y نمی‌باشد. لذا گراف $G - \{x,y\}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید D یک $\gamma(G - \{x,y\})$- مجموعه باشد. چون G، $(\gamma,۲)$-بحرانی است داریم:

$$|D| \leq \gamma(G) - ۱.$$

اگر D شامل یک رأس z از $G_۱$ باشد که با a,c متفاوت باشد، آنگاه z، x,y را احاطه می کند بنابراین D گراف G را احاطه می کند و

$$|D| = \gamma(G - \{x,y\}) = \gamma(G) - ۲$$

که D یک $\gamma(G)$- مجموعه با اندازه کمتر از $\gamma(G)$ است. که تناقض است.

بنابراین

$$D \cap V_۱ \subseteq \{a,c\}.$$

با توجه به قسمت ۸، $\{a,c\}$ نمی تواند $G_۱$ را احاطه کند بنابراین رأسی در $G_۱$ وجود دارد که همسایه a و c نیست. یک رأسی وجود دارد که توسط D احاطه نمی شود که یک تناقض است. بنابراین:

$$\gamma(G_۱) \geq ۳.$$

□

قضیه ۳.۶.۲. [۴] اگر G یک گراف همبند $(\gamma, ۲)$- بحرانی مکعبی یا پنچه آزاد باشد آن‌گاه $\lambda(G) \geq ۳$.

اثبات. با توجه به قضیه ۱.۶.۲، $\lambda(G) \geq ۲$. فرض کنید $\lambda(G) = ۲$. فرض کنید $a_۱$ و $a_۲$ دو همسایه رأس a در $G_۱$ باشند، حال چون گراف G، $(\gamma, ۲)$ -بحرانی لذا $d(a_۱, a_۲) \leq ۲$ و$\gamma(G - \{a_۱, a_۲\}) = \gamma(G) - ۱$. فرض کنید D یک $\gamma(G - \{a_۱, a_۲\})$- مجموعه باشد و فرض کنید برای $i = ۱, ۲$، $D_i = D \cap V_i$. لذا $|D| = \gamma(G) - ۱$.

اگر G یک گراف مکعبی باشد، آن‌گاه a تنها با b در گراف $(G - \{a_۱, a_۲\})$ مجاور است. از طرف دیگر اگر G یک گراف پنچه آزاد باشد، آن‌گاه $N(a) - \{b\}$ یک پنچه ایجاد می‌کند، لذا هر رأس در گراف $G - \{a_۱, a_۲\}$ با رأس b که، a، $a_۱$ و $a_۲$ را احاطه می‌کند متفاوت است. در هر دو مورد نتیجه می‌گیریم که D نمی تواند یک مجموعه احاطه‌گر برای G باشدلذا $N_G[a] \cap D = \{b\}$.

اگر $|D_۲| \geq \gamma(G_۲) + ۱$، آن‌گاه

$$-|D| \leq -\gamma(G_۲) - ۱$$

$$|D| = |D_۱| + |D_۲| \longrightarrow |D_۱| = |D| - |D_۲| \leq \gamma(G) - ۱ - \gamma(G_۲) - ۱ = \gamma(G) - \gamma(G_۲) - ۲ = \gamma(G_۱) - ۲$$

لذا $D_۱ \cup \{a, c\}$ یک $\gamma(G_۱)$- مجموعه می‌باشد که با لم ۲.۶.۲ قسمت ۸ در تناقض است. بنابراین $|D_۲| \leq \gamma(G_۲)$. لذا چون $b \in D_۲$ با توجه به لم ۲.۶.۲ قسمت ۵ داریم $|D_۲| = \gamma(G_۲)$. $D_۲$ یک مجموعه احاطه گر برای گراف $G_۲ - d$ می باشد و $D_۲$ رأس d را احاطه نمی‌کند. بنابراین رأس $c \in D_۱$ وجود دارد که رأس d را احاطه می کند و $|D_۱| = \gamma(G_۱) - ۱$. اما $D_۱ \cup \{a\}$ یک $\gamma(G_۱)$- مجموعه می باشد که با توجه لم۲.۶.۲ قسمت ۸ در تناقض می باشد. □

فصل ۳

گراف های $(\gamma, ۳)$- بحرانی

۱.۳ مقدمه

در این فصل ابتدا گراف‌های $(\gamma, ۳)$ - بحرانی را تعریف می‌کنیم و ویژگی‌های گراف‌های $(\gamma, ۳)$ -بحرانی را بررسی می‌کنیم.

در کلیه قضایای این فصل که بدون ذکر مرجع نوشته شده‌اند، از مقاله [۱۰] استفاده شده است.

۲.۳ تعاریف و قضیه‌های مقدماتی

تعریف ۱.۲.۳. گراف G، گرافی $(\gamma, ۳)$ -بحرانی نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرمجموعه سه رأسی S از $V(G)$ داشته باشیم $\gamma(G - S) < \gamma(G)$.

مثال: برای گراف $G = P_۴$ همان‌طوری که در شکل‌های ۱.۳ و ۲.۳ به راحتی می‌توان دید $\{x, z\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G می‌باشد لذا $\gamma(G) \leq ۲$. ثابت می‌کنیم $\gamma(G) \geq ۲$. برهان خلف: فرض کنید $\gamma(G) < ۲$. لذا $\gamma(G) = ۱$ می‌باشد. فرض کنید $S = \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم باشد. چون $\deg x \leq ۲$، لذا x ۳ رأس از گراف G را احاطه می‌کند اما G گرافی ۴ رأسی است و در نتیجه تمام رأس‌های G توسط S احاطه نمی‌شوند که تناقض

می‌باشد. لذا $\gamma(G) \geq ۲$ و در نتیجه $\gamma(G) = ۲$. و از طرفی با حذف ۳ رأس y, x و t از گراف G فقط رأس z باقی می‌ماند که $\gamma(G - \{x, y, t\}) = ۱$ می‌باشد. لذا

$\gamma(G - \{x, y, t\}) < \gamma(G).$

شکل ۳.۱: گراف $P_۴$

شکل ۳.۲: گراف $P_۴ - \{x, y, t\}$

گزاره ۳.۲.۲. [۱۰] گراف گردشی $G = C_{۱۲}(۱, ۴)$، گرافی $(۴, ۱)$ -بحرانی، $(۴, ۲)$- بحرانی و $(۴, ۳)$ - بحرانی می‌باشد.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم عدد احاطه‌گری گراف $G = C_{۱۲}(۱, ۴)$ برابر با ۴ می‌باشد یعنی $\gamma(G) = ۴$. به راحتی می‌توان دید که $\{v_۰, v_۳, v_۶, v_۹\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G می‌باشد لذا $\gamma(G) \leq ۴$. ثابت می‌کنیم $\gamma(G) \geq ۴$. با برهان خلف: فرض کنید $\gamma(G) < ۴$. لذا حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم :

حالت اول : $\gamma(G) = ۳$. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف G باشد. اگر $S = \{v_۰, v_۳, v_۶\}$ آن‌گاه رأس $\{v_۹\}$ احاطه نمی‌شود. به صورت مشابه اگر S هر کدام از زیر مجموعه‌های ۳ -عضوی دیگر نیز باشد آن‌گاه S، $V(G)$ را احاطه نمی‌کند که یک تناقض

است.

حالت دوم : $\gamma(G) = ۲$. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف G باشد اگر $S = \{v_۰, v_۳\}$ آن‌گاه رأس‌های $v_۵, v_۶, v_۹$ و $v_{۱۰}$ احاطه نمی‌شوند. به صورت مشابه اگر S هر کدام از زیر مجموعه‌های ۲-عضوی دیگر نیز باشد آن‌گاه S، $V(G)$ را احاطه نمی‌کند که یک تناقض می‌باشد.

حالت سوم : $\gamma(G) = ۱$. فرض کنید $S = \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف G باشد. چون $\deg(x) = ۴$ لذا x، ۵ رأس را احاطه می‌کند اما G گرافی ۱۲ رأسی است و در نتیجه تمام رأس‌های G توسط S احاطه نمی‌شوند. که تناقض می‌باشد. لذا $\gamma(G) \geq ۴$ و در نتیجه $\gamma(G) = ۴$.

برای نشان دادن این که G، $(\gamma, ۱)$ -بحرانی است با توجه به این که G گرافی رأس-انتقالی است کافی است ثابت کنیم $\gamma(G - \{v_۰\}) < \gamma(G)$. به وضوح می‌توان دید که $S = \{v_۳, v_۶, v_۹\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - v_۰$ است. لذا G، گرافی $(\gamma, ۱)$-بحرانی است.

به صورت مشابه می‌توان دید که

$\{v_۳, v_۶, v_۹\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_۰, v_۱\}$ و $G - \{v_۰, v_۵\}$،

$\{v_۳, v_۶, v_۹\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_۰, v_۲\}$، $\{v_۵, v_۷, v_{۱۰}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_۰, v_۳\}$، $\{v_۲, v_۷, v_۹\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_۰, v_۴\}$ و $\{v_۳, v_۹\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_۰, v_۶\}$ هستند. لذا با توجه به رأس-انتقالی بودن G نتیجه می‌گیریم G،گرافی $(\gamma, ۲)$ -بحرانی است.

هم چنین می‌توان دید که

$\{v_۵, v_۷, v_{۱۰}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_۰, v_۱, v_۲\}$،

$\{v_۶, v_۸, v_{۱۱}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_۰, v_۱, v_۳\}$،

$\{v_6, v_7, v_9\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_0, v_1, v_4\}$،

$\{v_3, v_8, v_{10}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_0, v_1, v_5\}$،

$\{v_3, v_9\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_0, v_1, v_6\}$،

$\{v_9, v_7, v_{10}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_0, v_4, v_2\}$،

$\{v_4, v_7, v_9\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_0, v_5, v_2\}$،

$\{v_3, v_9\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_0, v_6, v_2\}$،

$\{v_5, v_4, v_{10}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_0, v_7, v_2\}$،

$\{v_8, v_9, v_{10}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_0, v_3, v_6\}$،

$\{v_5, v_8, v_{10}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_0, v_3, v_7\}$،

$\{v_2, v_7, v_9\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_0, v_4, v_6\}$،

$\{v_2, v_6, v_{10}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_0, v_4, v_8\}$ و $\{v_3, v_9\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $G - \{v_0, v_5, v_6\}$ می‌باشند. لذا با توجه به رأس -انتقالی بودن G نتیجه می‌گیریم G، گرافی $(\gamma,3)$-بحرانی است. □

گزاره ۳.۲.۳. [۱۰] گراف $G_t = K_t \square K_t$ برای $t \geq 3$ ، $(t,3)$ -بحرانی می‌باشد.

اثبات. فرض کنید v_{sr} ، v_{ij}, v_{kl} سه رأس از گراف G_t باشند. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:
حالت اول : $i = s = k$. بدون این که از کلیت مساله کاسته شود، فرض کنید ۳ رأس v_{11}، v_{12} و v_{13} را حذف کرده باشیم در این صورت مجموعه $(v_{ss}|2 \leq s \leq t)$ یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $t-1$ برای $G - \{v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$ است. چون G رأس-انتقالی است لذا $(\gamma,3)$- بحرانی است.

حالت دوم : $s = i$ و $i \neq k$. بدون این که از کلیت مساله کاسته شود، فرض کنید ۳ رأس v_{11}،

$v_{۱۲}$ و $v_{۳۳}$ را حذف کرده باشیم. در این صورت مجموعه $(v_{ss}|۲ \leq s \leq t)$ یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $t - ۱$ برای $G - \{v_{۱۱}, v_{۱۲}, v_{۳۳}\}$ است. چون G رأس-انتقالی است لذا $(\gamma, ۳)$ -بحرانی است.

حالت سوم : i, s, k مجزا باشند. بدون این که از کلیت مساله کاسته شود، فرض کنید ۳ رأس $v_{۱۱}$، $v_{۲۲}$ و $v_{۳۳}$ را حذف کرده باشیم. در این صورت مجموعه $(\{v_{۲۳}, v_{۳۲}\} \cup \{v_{ss}|۲ \leq s \leq t\})$ یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $t - ۱$ برای $G - \{v_{۱۱}, v_{۲۲}, v_{۳۳}\}$ است. چون G رأس-انتقالی است لذا $(\gamma, ۳)$- بحرانی است.

بنابراین برای هر سه رأس u، v و w از G_t داریم ، $\gamma(G_t - \{u, v, w\}) \leq t - ۱$. در نتیجه گراف G_t، $(t, ۳)$ -بحرانی است. $\square$

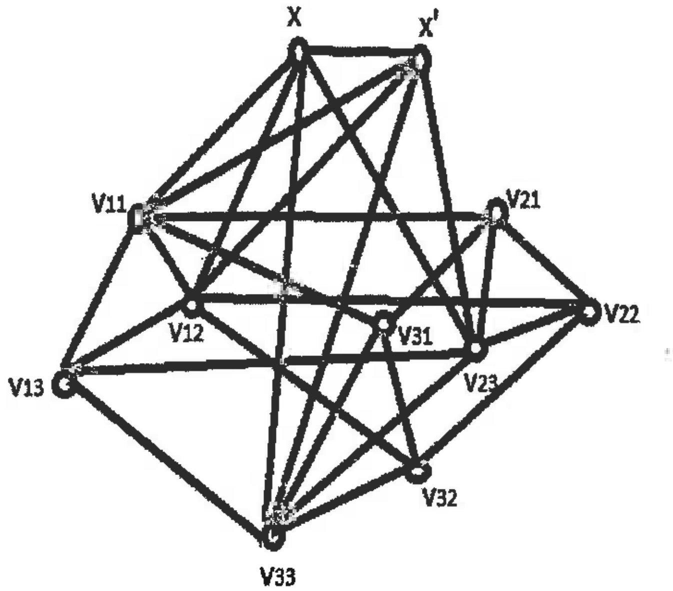
نتیجه ۴.۲.۳. [۱۰] اگر گراف G، (γ, k)-بحرانی باشد آن‌گاه برای k' که $۱ \leq k' \leq ۳$، $k' \neq k$،گراف G لزوما (γ, k') -بحرانی نیست.

مثال: دور $C_{۲n+۱}$، $(n+۱, ۱)$-بحرانی است ولی $(n+۱, ۲)$-بحرانی نیست. مشاهده می‌شود این دور برای $n = ۱$، $(n+۱, ۳)$-بحرانی است ولی برای $n \geq ۲$، $(n+۱, ۳)$-بحرانی نیست.

مثال: اگر G گراف گردشی $C_{۸}(۱, ۴)$ با مجموعه رأس‌های $\{v_{۰}, ..., v_{۷}\}$ باشد آن‌گاه $G_{[v_{۰}]}$، $(۳, ۲)$ -بحرانی است اما برای $k \in \{۱, ۳\}$، $(۳, k)$-بحرانی نیست.

مثال: فرض کنید H گراف حاصل از حاصل‌ضرب دکارتی $K_{۳}\square K_{۳}$ با اضافه کردن رأس جدید x و متصل کردن آن به رأس‌های $v_{۱۱}$ ، $v_{۱۲}$ ، $v_{۲۳}$ و $v_{۳۳}$ باشد. $H_{[x]}$ را در نظر بگیرید. همان‌طور که شکل ۳.۳ گراف $H_{[x]}$ را نشان می‌دهد. می‌بنیم که $H_{[x]}$، $(۳, ۳)$-بحرانی است اما برای $k \in \{۱, ۲\}$، $(۳, k)$-بحرانی نیست. با حذف کردن رأس x' از گراف $H_{[x]}$، برای $k \in \{۲, ۳\}$ ، $(۳, k)$-بحرانی است ولی $(۳, ۱)$-بحرانی نیست زیرا $\gamma(H - \{x\}) = ۳$.

مثال: گراف گردشی $C_۸\langle ۱,۴\rangle$، برای $k \in \{۱,۲\}$ ، $(۳,k)$-بحرانی است ولی $(۳,۳)$-بحرانی



شکل ۳.۳: گراف $H_{[x]}$

نیست.

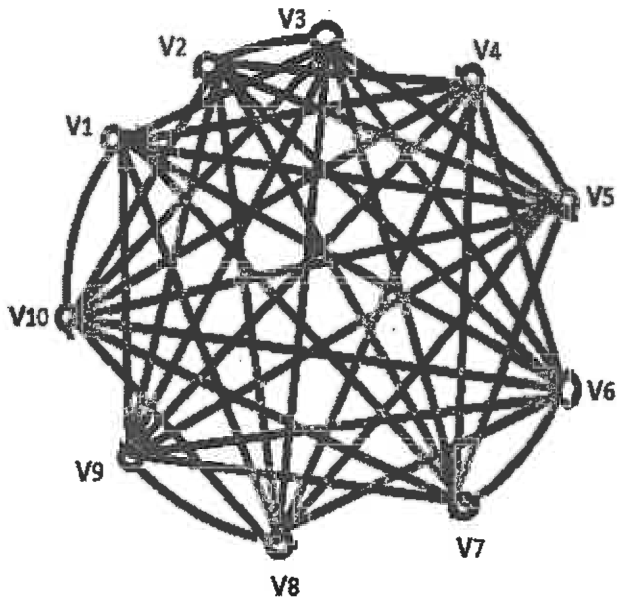
مثال: فرض کنید $G = K_{۲n} - M$ که M یک تطابق کامل از $K_{۲n}$ است. برای $k \in \{۱,۳\}$ گراف G، $(۲,k)$ -بحرانی است در حالی که $(۲,۲)$ -بحرانی نیست.

مثال: شکل ۴.۳، گراف $G = K_{۱۰} - M$ که در آن $M = \{v_۱v_۲, v_۳v_۴, v_۵v_۶, v_۷v_۸, v_۹v_{۱۰}\}$ یک تطابق کامل از $K_{۱۰}$ است را نشان می‌دهد. این گراف $(۲,۲)$-بحرانی نیست زیرا

$\gamma(G - \{v_۱, v_۲\}) = ۲.$

مثال: برای $k \in \{۱,۲,۳\}$ گراف هرری $H_{۲m,n(۲m+۱)+۲m}$ $(m \geq ۲)$، (γ,k) -بحرانی نیست.

مثال: برای $k \in \{۱,۲,۳\}$، گراف گردشی $C_{۱۲}\langle ۱,۴\rangle$ و گراف $G_t = K_t \square K_t$، (γ,k) -بحرانی است.



شکل ۴.۳: گراف $G = K_{۱۰} - M$

۳.۳ ویژگی گراف های $(\gamma,۳)$- بحرانی

گزاره ۱.۳.۳. [۱۰] برای یک گراف $(\gamma,۳)$ -بحرانی G و $x,y,z \in V(G)$ ،

$$\gamma(G) - ۳ \leq \gamma(G - \{x,y,z\}) \leq \gamma(G) - ۱.$$

اثبات. فرض کنید $\{x,y,z\}$ رأس‌هایی از گراف G باشند.

طبق فرض چون G گرافی $(\gamma,۳)$-بحرانی است لذا

$$\gamma(G - \{x,y,z\}) < \gamma(G)$$

و نامساوی سمت راست اثبات می‌شود.

حال نامساوی سمت چپ را اثبات می‌کنیم. برهان خلف، فرض کنید

$\gamma(G - \{x,y,z\}) < \gamma(G) - ۳$ لذا $\gamma(G - \{x,y,z\}) \leq \gamma(G) - ۴$ و در نتیجه داریم:

$$\gamma(G) - 4 + 3 = \gamma(G - \{x,y,z\}) + 3$$

$$\gamma(G) - 1 \geq \gamma(G)$$

که تناقض است. لذا $\gamma(G) - 3 \leq \gamma(G - \{x,y,z\})$. □

گزاره ۲.۳.۳. [۱۰] اگر G گرافی دلخواه و $x_1, x_2, x_3 \in V(G)$ باشند. اگر $\gamma(G - \{x_1,x_2,x_3\}) = \gamma(G) - 3$ باشد، آن‌گاه برای $i \neq j$، $d_G(x_i, x_j) \geqslant 3$.

اثبات. فرض کنید x_1، x_2 و x_3 رأس‌هایی از گراف G باشند بدون این که از کلیت مساله کاسته شود، فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف $G - \{x_1,x_2,x_3\}$ باشد و $|D| = \gamma(G - \{x_1,x_2,x_3\})$ و $|D| = \gamma(G) - 3$. برهان خلف، فرض کنید $d_G(x_1,x_2) \leq 2$. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول : اگر $d_G(x_1,x_2) = 2$ باشد، آن‌گاه فرض کنید $y \in N(x_1) \cap N(x_2)$ که $D' = D \cup \{y, x_3\}$ در این‌صورت D' یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف G می‌باشد و داریم:

$$|D'| = |D \cup \{y, x_3\}| = \gamma(G) - 3 + 2 = \gamma(G) - 1$$

لذا D'، یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $\gamma(G) - 1$ است، که تناقض است.

حالت دوم : اگر $d_G(x_1,x_2) = 1$ باشد، آن‌گاه $x_1x_2 \in E(G)$ در این‌صورت:

$$D' = D \cup \{x_1, x_3\}$$

که D'، یک مجموعه احاطه‌گر برای G است و داریم:

$$|D'| = |D \cup \{x_1, x_3\}| = \gamma(G) - 3 + 2 = \gamma(G) - 1$$

لذا D' یک مجموعه احاطه‌گر و با اندازه $\gamma(G) - 1$ است که تناقض است. لذا

$d_G(x_۱, x_۲) \geq ۳.$

□

گزاره ۳.۳.۳. [۱۰] اگر G یک گراف همبند $(\gamma,۳)$- بحرانی و $diam(G) = ۲$، باشد آن‌گاه برای هر سه رأس متمایز x، y و z در گراف G داریم:

$$\gamma(G - \{x, y, z,\}) \geq \gamma(G) - ۲.$$

اثبات. چون $diam(G) = ۲$ لذا بیشترین فاصله بین رأس‌ها در گراف G، ۲ است. فرض کنید x، y و z رأس‌هایی از گراف G باشند. برهان خلف: فرض کنید $\gamma(G - \{x, y, z,\}) < \gamma(G) - ۲$، در نتیجه $\gamma(G - \{x, y, z\}) = \gamma(G) - ۳$. فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف $G - \{x, y, z,\}$ و $|D| = \gamma(G) - ۳$ باشد. $x_۱ \in V(G)$ و D' یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G باشد در این‌صورت داریم:

$x_۱ \in N(x) \cap N(y)$

$|D'| = |D \cup \{z, x_۱\}| = \gamma(G) - ۳ + ۲ = \gamma(G) - ۱$

D' یک مجموعه‌احاطه گر با اندازه کمتر از $\gamma(G) - ۱$ است که تناقض است. □

نتیجه ۴.۳.۳. [۱۰] اگر G گرافی، $(\gamma,۳)$- بحرانی باشد و برای هر سه رأس متمایز x، y و z در گراف G، $\gamma(G - \{x, y, z\}) = \gamma(G) - ۳$ باشد آن‌گاه گراف G فاقد یال است.

اثبات. برهان خلف: فرض کنید گراف G، یک یال مانند xy داشته باشد. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف $G - \{x, y, z\}$ باشد. طبق فرض $|S| < \gamma(G)$. حال اگر $S' = S \cup \{x, z\}$ یا $S' = S \cup \{y, z\}$، آن‌گاه S' یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G می‌باشد. فرض کنید $S' = S \cup \{x, z\}$. در این‌صورت داریم:

$$|S'| = \gamma(G - \{x, y, z\}) + ۲ = \gamma(G) - ۳ + ۲ = \gamma(G) - ۱$$

لذا S' یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه کمتر از $\gamma(G)$ می‌باشد که تناقض است. به طور مشابه اگر $S' = S \cup \{y, z\}$ باشد، آن‌گاه S' یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه کمتر از $\gamma(G)$ می‌باشد، که تناقض است. □

گزاره ۳.۳.۵. [۱۱] اگر G گرافی $(\gamma, ۳)$-بحرانی باشد آن‌گاه G رأسی از درجه ۳ ندارد.

اثبات. برهان خلف: فرض کنید G یک گراف $(\gamma, ۳)$- بحرانی باشد و x رأسی از درجه ۳ در G باشد. فرض کنید $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ همسایه‌های x باشند. به وضوح با حذف رأس‌های $x_۱$ ، $x_۲$ و $x_۳$ رأس x تنها خواهد شد. فرض کنید S مجموعه احاطه‌گر با اندازه $|S| = \gamma(G - \{x_۱, x_۲, x_۳\})$ باشد. در این‌صورت به وضوح $x \in S$ چون G گرافی $(\gamma, ۳)$- بحرانی است لذا $|S| \leq \gamma(G) - ۱$. در حالی که رأس x، هر سه رأس $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ را احاطه می کند. بنابراین مجموعه S، گراف G را احاطه می کند و یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $\gamma(G) - ۱$ می‌باشد که تناقض است. □

گزاره ۳.۳.۶. [۱۰] اگر $G \neq P_۴$ یک گراف همبند $(\gamma, ۳)$- بحرانی باشد، آن‌گاه $V = V^- \cup V^۰$، یعنی $V^+ = \emptyset$. ((۱) علاوه بر این، یا G، گرافی $(\gamma, ۱)$ -بحرانی است و یا برای هر رأس $v \in V^۰$، $G - v$، گرافی $(\gamma, ۲)$- بحرانی است. (۲) یا G، گرافی $(\gamma, ۲)$-بحرانی است یا برای هر دو رأس v, w به طوری که $\gamma(G - \{v, w\}) = \gamma(G)$، $G - \{v, w\}$، گرافی $(\gamma, ۱)$-بحرانی است.

اثبات. برهان خلف: فرض کنید $V^+(G) \neq \emptyset$ و $a \in V^+(G)$ در این صورت $\gamma(G - \{a\}) \geq \gamma(G) + ۱$ چون G گرافی $(\gamma, ۳)$ بحرانی است برای هر سه رأس $a, b, c \in V(G)$ داریم:

$$\gamma(G - \{a, b, c\}) \leq \gamma(G) - ۱$$

علاوه بر این $\gamma(G - \{a\}) = \gamma(G) + ۱$، زیرا اگر $\gamma(G - \{a\}) > \gamma(G) + ۱$ باشد آن‌گاه با حذف ۲ رأس در $V(G) - a$ عدد احاطه‌گر کمتر ۳ از نمی‌شود، بنابراین $\gamma(G - \{a\}) = \gamma(G) + ۱$ لذا

$\gamma(G-\{a\}-\{b,c\}) = \gamma(G)+۱-۲ = \gamma(G)-۱$

بنابراین طبق ۲.۳.۳ داریم $d_{G-\{a\}}(b,c) \geq ۳$. در نتیجه $G-\{a\}$ فاقد یال می‌باشد در حالی که گراف G یک ستاره است. چون $G \neq P_۳$ و $(\gamma,۳)$-بحرانی است و $a \in V^+(G)$ می‌باشد بنابراین G یک ستاره از مرکز a با درجه حداقل ۲ نیست. فرض کنید ax یک یال باشد و $G=ax$ بنابراین $\gamma(G-\{a\})=\gamma(G)$، لذا $a \in V^{\circ}(G)$. که این تناقض است با این که $a \in V^+(G)$ در نتیجه $a \notin V^+(G)$.

اثبات (۱) : فرض کنید $v \in V^+(G)$ و $u,w \in (G-\{v\})$. چون $\gamma(G-\{u,w,v\}) < \gamma(G)$، لذا $\gamma(G-\{v\})-\{u,w\} < \gamma(G-\{v\})$ یعنی $G-v$ گرافی $(\gamma,۲)$- بحرانی است.

اثبات (۲) : فرض کنید $v,w \in V^+(G)$ و $u \in (G-\{v,w\})$. چون $\gamma(G-\{u,w,v\}) < \gamma(G)$، لذا $\gamma(G-\{v,w\})-\{u\} < \gamma(G-\{v,w\})$ یعنی $G-\{w,v\}$ گرافی $(\gamma,۱)$-بحرانی است. □

۴.۳ ویژگی‌های گراف‌های (۲,۳) -بحرانی

گزاره ۱.۴.۳. [۱۰] گرافی (۲,۳)-بحرانی از مرتبه ۵ وجود ندارد.

اثبات. برهان خلف: فرض کنید G، گرافی (۲,۳) از مرتبه ۵ باشد و x، y و z رأس‌هایی از گراف G باشند. چون G گرافی (۲,۳)-بحرانی است لذا با حذف سه رأس x، y و z، از گراف G داریم $G-\{x,y,z\}=k_۲$ که این نشان می‌دهد $G=K_۵$ است و $\gamma(K_۵)=۱$. که این با $\gamma(G)=۲$ متناقض است. □

گزاره ۲.۴.۳. [۱۰] گراف G، (۲,۳)-بحرانی است اگر و تنها اگر $G=P_۴, ۲P_۲, P_۳\cup P_۱$ یا $G=K_{۲n}-M$ باشد که در آن $n \geq ۲$ و M یک تطابق کامل است.

اثبات. فرض کنید $G=P_۴, ۲P_۲, P_۳\cup P_۱$. واضح است که G، (۲,۳)-بحرانی است. فرض کنید

$G = K_{۲n} - M$ که در آن $n \geq ۲$ و M یک تطابق کامل است. هر رأس از گراف G، به $۲n - ۲$ رأس دیگر مجاور است. لذا با حذف سه رأس از گراف G، یک رأس با درجه $۲n - ۴$ در گراف G وجود دارد به طوری که تمام رأس‌های گراف را احاطه می‌کند. بنابراین :

$$\gamma(G - \{x, y, z\}) = ۱$$

لذا، G گرافی $(۲,۳)$-بحرانی می‌باشد.

فرض کنید G گرافی $(۲,۳)$-بحرانی باشد، گراف‌های $(۲,۳)$-بحرانی با ۴ رأس برابراست با $G = P_۴, ۲P_۲, P_۳ \cup P_۱$ یا $C_۴ = K_۴ - M$. از گزاره ۱.۴.۳ نتیجه می‌گیریم که گرافی $(۲,۳)$-بحرانی از مرتبه ۵ وجود ندارد. لذا فرض می‌کنیم $|V(G)| \geq ۶$. نشان می‌دهیم که G، گرافی $(\gamma,۱)$-بحرانی است. برهان خلف: اگر G، $(\gamma,۱)$-بحرانی نباشد آن‌گاه رأس v وجود دارد، به طوری که عضوی $V^{\circ}(G)$ باشد، دز نتیجه $G - v$ گرافی ، $(۲,۲)$-بحرانی است. اگر $G - v$ همبند باشد آن‌گاه با توجه گزاره ۱۱.۴.۲، $\gamma(G - v) \geq ۳$)، که تناقض است چون $\gamma(G - v) = ۲$ است. اگر $G - v$ ناهمبند باشد آن‌گاه ۲ رأس x و y در $G - v$ وجود دارد به طوری که $G - \{v, x, y\}$ دو مولفه ناتهی دارد. بنابراین $\gamma(G - \{v, x, y\}) \geq ۲$ که یک تناقض است. لذا G، گرافی $(۲,۱)$-بحرانی است و در نتیجه با توجه به قضیه ۶.۲.۲، داریم:

$$G = K_{۲n} - M.$$

□

نتیجه ۳.۴.۳. [۱۰] اگر G گراف همبند $(\gamma,۳)$- بحرانی که $|V(G)| \geq ۶$ و $G \neq K_{۲n} - M$ که در آن M یک تطابق کامل است، باشد آن‌گاه $\gamma(G) \geq ۳$.

اثبات. برهان خلف: فرض کنید $\gamma(G) \leq ۲$ باشد.

حالت اول : اگر $\gamma(G) = ۱$ آن‌گاه گراف G باید گراف کامل یا گراف ستاره باشد. گراف کامل

یا گراف ستاره با حداقل ۶ رأس، $(\gamma, ۳)$- بحرانی نیست. که این یک تناقض است.

حالت دوم : اگر $\gamma(G) = ۲$ آن‌گاه گراف G باید ۴ رأس داشته باشد چون G گرافی (۲,۳)- بحرانی است طبق گزاره ۱.۴.۳، گرافی از مرتبه ۵ وجود ندارد. اگر گراف‌های (۲,۳) -بحرانی با ۴ رأس طبق قضیه ۲.۴.۳، برابر با $G = P_۲ \cup P_۱, P_۴, ۲P_۲, P_۳ \cup P_۱$ باشند آن‌گاه با فرض مساله، $|V(G)| \geq ۶$ در تناقض است و اگر گراف $G = K_{۲n} - M$، آن‌گاه G گرافی (۲,۳) -بحرانی است که متناقض، با قسمت دوم فرض مساله $G \neq K_{۲n} - M$ است. □

نتیجه ۴.۴.۳. [۱۰] اگر G یک گراف $(\gamma, ۳)$ -بحرانی و دارای یک رأس آویزان x و رأس تکیه گاه y باشد، آن‌گاه $\deg(y) = ۲$.

اثبات. فرض کنید u و w به ترتیب رأس آویزان و رأس تکیه‌گاه گراف G باشند.

برهان خلف: فرض کنید $\deg(w) \geq ۳$. به جز رأس u، رأس‌های x و y نیز دو همسایه از رأس w هستند. چون G گرافی $(\gamma, ۳)$- بحرانی است لذا $\gamma(G - \{w, x, y\}) = \gamma(G) - ۱$. چون u یک رأس تنها در گراف $G - \{w, x, y\}$ است و D یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $|D| = \gamma(G - \{w, x, y\})$ باشد در این‌صورت به وضوح $u \in D$ است. لذا داریم:

$$|D'| = |(D - \{u\}) \cup \{w\}| = \gamma(G) - ۱ - ۱ + ۱ = \gamma(G) - ۱$$

در نتیجه D'یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $\gamma(G) - ۱$ است، که یک تناقض است. □

نتیجه ۵.۴.۳. [۱۰] اگر G، گرافی با یک رأس آویزان x و W رأس پشتیبان آن باشد، آن‌گاه G، $(\gamma, ۱)$ -بحرانی و $(\gamma, ۲)$-بحرانی نیست.

اثبات. طبق فرض W رأس پشتیبان و عضوی از مجموعه‌ی V° است و $\gamma(G - \{w, v\}) = \gamma(G)$ که v رأس مجاور به رأس w است به‌طوری‌که $x \notin v$. □

نتیجه ۶.۴.۳. [۱۰] اگر $G \neq P_۴, C_۴$ باشد و G، گرافی $(\gamma,۳)$-بحرانی باشد و $(\gamma,۱)$-بحرانی نباشد آن‌گاه G حداکثر یک رأس از درجه ۲ دارد.

اثبات. فرض کنید u,v,t,z,y,x و w رأس‌هایی از G باشند. فرض کنید $v \in V^۰$ باشد.
برهان خلف: فرض کنید G حداقل ۲ رأس از درجه ۲ داشته باشد، به‌طوری‌که u و w به ترتیب همسایه‌های $\{x,y\}$ و $\{z,t\}$ باشند و $v \notin \{x,y\}$. بنابراین چون G، گرافی $(\gamma,۳)$- بحرانی است، لذا $\gamma(G-\{x,y,v\}) = \gamma(G) - ۱$. پس u یک رأس تنها در گراف $G-\{x,y,v\}$ و $u \in D$ خواهد بود، و D یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $|D| = \gamma(G-\{x,y,v\})$ است. بنابراین، D، $\gamma(G) - ۱$ رأس از گراف $G-v$ را احاطه می‌کند. لذا $v \in V^-$ که با $v \in V^۰$ در تناقض است. □

نتیجه ۷.۴.۳. [۱۰] اگر G گرافی $(\gamma,۳)$- بحرانی باشد که $G \neq P_۳, P_۴$ آن‌گاه حداکثر یک رأس آویزان دارد.

اثبات. برهان خلف: فرض کنید گراف G بیشتر از یک رأس آویزان داشته باشد، آن‌گاه حداقل ۲ رأس تکیه گاه از درجه ۲ در گراف G وجود دارد. که با نتیجه ۶.۴.۳، در تناقض است. □

قضیه ۸.۴.۳. [۱۰] فرض کنید G یک گراف همبند $(\gamma,۳)$-بحرانی باشد. اگر G یک گراف غیر از $P_۳$ ، $C_۳$، $P_۴$ و $C_۴$ باشد آن‌گاه G حداکثر یک رأس از درجه ۱ و یک رأس از درجه ۲ دارد و بقیه رأس‌های آن از درجه حداقل ۴ هستند.

اثبات. چون G، گرافی $(\gamma,۳)$ -بحرانی است، طبق گزاره ۵.۳.۳ رأسی از درجه ۳ ندارد. وهمچنین طبق نتیجه ۷.۴.۳ حداکثر یک رأس از درجه ۱ (رأس آویزان) دارد. در نهایت طبق نتیجه ۶.۴.۳ حداکثر یک رأس از درجه ۲ دارد و بقیه رأس ها حداقل از درجه ۴ هستند. □

نتیجه ۹.۴.۳. با توجه به ۷.۴.۳، ۶.۴.۳ و قضیه ۸.۴.۳ می‌توان نتیجه گرفت که تقریبا همه گراف‌های $(\gamma,۳)$ -بحرانی از درجه حداقل ۴ هستند.

مشابه اثبات نتیجه ۵.۵.۲ خواهیم داشت:

نتیجه ۱۰.۴.۳. [۱۰] گراف G، $(\gamma,۱)$-بحرانی، $(\gamma,۲)$-بحرانی و $(\gamma,۳)$-بحرانی است اگر و فقط اگر هر بلوک از G، $(\gamma,۱)$-بحرانی، $(\gamma,۲)$-بحرانی و $(\gamma,۳)$-بحرانی باشد. بنابراین اگر G، $(\gamma,۱)$-بحرانی، $(\gamma,۲)$-بحرانی و $(\gamma,۳)$-بحرانی با بلوک‌های $G_۱,\dots,G_k$ باشد، آن‌گاه

$$\gamma(G)=\sum_{i=۱}^{k}-k+C(G)$$

$C(G)$ تعداد مولفه‌های G است.

گزاره ۱۱.۴.۳. [۱۰] برای هر عدد صحیح $\gamma \geq ۳$، یک گراف همبند G_γ وجود دارد که $(\gamma,۱)$ -بحرانی، $(\gamma,۲)$- بحرانی و $(\gamma,۳)$ -بحرانی است و در شرط‌های $\gamma(G_\gamma)=\gamma$ و $diam(G_\gamma)=\gamma-۱$ صدق می‌کند.

اثبات. اگر H حاصل‌ضرب دکارتی $K_۳\Box K_۳$ باشد آن‌گاه $diam(H)=۲$ زیرا اگر $diam(H)=۱$ باشد آن‌گاه با یک رأس می‌توان کل گراف را احاطه کرد که با فرض مساله، $\gamma \geqslant ۳$ در تنا قض است. با توجه به گزاره‌های ۴.۳.۲ و۳.۲.۳ ، H، $(۳,۱)$-بحرانی، $(۳,۲)$ -بحرانی و $(۳,۳)$-بحرانی است. اگر F گراف گردشی $C_{۱۲}(۱,۴)$ باشد آن‌گاه $diam(F)=۳$ و با توجه به گزاره ۲.۲.۳، $(۴,۱)$ -بحرانی، $(۴,۲)$-بحرانی و $(۴,۳)$-بحرانی است. اگر $\gamma=۳$ یا $\gamma=۴$ باشد آن‌گاه می‌توان به ترتیب $G_\gamma=H$ یا $G_\gamma=F$ را در نظر گرفت. بنابراین اگر $\gamma \geq ۵$ باشد آن‌گاه دو حالت داریم که، γ فرد یا زوج باشد.

حالت اول : فرض کنید $\gamma=۲k+۱$، که $k \geq ۲$. فرض کنید u و w دو رأس غیر مجاور از H

باشند و B_k ,...,$B_۱$، kکپی مجزا از H باشند. برای $i = ۱,۲,...,k$ فرض کنید u_i و w_i رأس‌هایی از B_i باشد که به ترتیب متناظر با رأس‌های u و w، در H هستند و G_γ با یکی کردن رأس‌های w_i و $u_{i+۱}$ برای $i = ۱,۲,...,k$ به دست می‌آید. لذا $B_۱,...,B_k$ بلوک‌های G_γ هستند. چون هر B_i، $(\gamma,۱)$ -بحرانی، $(\gamma,۲)$-بحرانی و $(\gamma,۳)$ -بحرانی است و $\gamma(B_i) = ۳$، لذا طبق قضیه ۱۰.۴.۳، G_γ، $(\gamma,۱)$-بحرانی، $(\gamma,۲)$-بحرانی و $(\gamma,۳)$-بحرانی است و $\gamma(G_\gamma) = ۲k + ۱$. بنابراین $diam(G_\gamma) = ۲k = \gamma - ۱$.

حالت دوم : فرض کنید $\gamma = ۲k$، که $k \geq ۳$. G_γ را مانند بالا به دست می‌آوریم. B_k و $B_{k-۱}$ را با یک کپی L از F جایگزین می‌کنیم. پس $L, B_۱,...,B_{k-۲}$ بلوک‌هایی از G_γ هستند. با توجه به قضیه ۱۰.۴.۳، G_γ، $(\gamma,۱)$-بحرانی، $(\gamma,۲)$-بحرانی و $(\gamma,۳)$- بحرانی است و $\gamma(G_\gamma) = ۲k = \gamma$، لذا داریم $diam(G_\gamma) = ۲k - ۱ = \gamma - ۱$. □

۵.۳ همبندی یالی

در قسمت‌های قبلی به گراف‌های همبند $(\gamma,۳)$ -بحرانی را که شامل رأس برشی بودند پرداختیم در این قسمت همبندی یالی یک گراف $(\gamma,۳)$ -بحرانی را بررسی می‌کنیم.

تذکر: اگر گراف G، یک رأس از درجه یک داشته باشد آن‌گاه $\lambda \leq ۱$ و اگر یک رأس از درجه ۲ داشته باشد آن‌گاه داریم $\lambda \leq ۲$. بنابراین با توجه به گزاره۵.۳.۳، گزاره زیر را داریم:

گزاره ۱.۵.۳. [۱۰] اگر G یک گراف $(\gamma,۳)$ -بحرانی که $\lambda(G) \geq ۳$ آن‌گاه $\delta(G) \geq ۴$.

اثبات. برهان خلف: فرض کنید $\delta(G) < ۴$ باشد لذا سه حالت زیر را در نظر بگیرید:

حالت اول: اگر $\delta(G) = ۱$ باشد آن‌گاه طبق تذکر بالا، $\lambda \leq ۱$ که متناقض با فرض مساله است.

حالت دوم : اگر $\delta(G) = ۲$ باشد آن‌گاه طبق تذکر بالا، $\lambda \leq ۲$ که متناقض با فرض مساله است.

حالت سوم : اگر $\delta(G) = ۳$ باشد آن‌گاه طبق گزاره ۵.۳.۳ چون G گرافی $(\gamma,۳)$ -بحرانی است

لذا نمی‌تواند رأسی از درجه ۳ داشته باشد که با $\delta(G) = 3$ در تناقض است. لذا $\delta(G) \geq 4$. □

قضیه ۲.۵.۳. [۱۰] فرض کنید G یک گراف همبند $(\gamma, 3)$-بحرانی با $\lambda(G) = 3$ باشد و یک برش یالی $\{ab, cd, ef\}$ داشته باشیم. اگر G_1 و G_2 دو مولفه از $G-ab-cd-ef$ باشند به طوری که $a, c, e \in V(G_1)$ و $b, d, f \in V(G_2)$ و رأس‌های a, c, e متمایز باشند آن‌گاه عبارات‌های زیر درست هستند.

۱. امکان این که $b = d = f$ باشد وجود ندارد. بنابراین b, d, f مجزا هستند یا $(b = d) \neq f$.

۲. اگر $(b = d) \neq f$ آن‌گاه $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$.

۳. اگر $(b = d) \neq f$ آن‌گاه $a, c, e \notin V^+(G)$.

۴. اگر $\{a, c, e\} \subseteq V^-(G)$، آن‌گاه b, d, f در $\gamma(G_2)$-مجموعه قرار ندارد.

۵. اگر b، d و c سه رأس متمایز باشند، آن‌گاه $\gamma(G_2 - \{b, d, f\}) = \gamma_2 - 1$ و یک $\gamma(G_2 - \{b, d, f\})$-مجموعه وجود دارد که به طور همزمان دو رأس از b، d و f را احاطه نمی‌کند.

۶. اگر b، d و f سه رأس متمایز باشند و متعلق به $V^0(G_2)$ باشند آن‌گاه یک $\gamma(G_2 - \{b, d\})$-مجموعه شامل f و یا یک $\gamma(G_2 - \{b\})$-مجموعه شامل d، یا یک $\gamma(G_2 - \{d\})$-مجموعه شامل b وجود دارد.

۷. اگر b، d و f سه رأس متمایز باشند، آن‌گاه $\gamma(G_1)$-مجموعه‌ای که شامل $\{a, c, e\}$ باشد، وجود ندارد.

۸. فرض کنید b، d و f سه رأس متمایز باشند و $\{a, c, e\} \subseteq V^-(G_1)$. $\gamma(G_1 - \{x\})$-مجموعه‌ای شامل $\{y, z\}$ به طوری که $\{a, c, e\} = \{x, y, z\}$ باشد وجود ندارد.

اثبات. فرض کنید $\gamma = \gamma(G)$ و برای $i = ۱, ۲$، $V_i = V(G_i)$ و $\gamma_i = \gamma(G_i)$.

اثبات (۱) : برهان خلف: اگر $b = d = f$. نشان می‌دهیم یک $\gamma(G_۲)$-مجموعه شامل b وجودارد. چون $\lambda(G) = ۳$ نتیجه می‌گیریم، که $\deg(b) \geq ۶$ به عبارت دیگر $\deg_{G_۲}(b) \geq ۳$ بنابراین حداقل ۲ رأس x, y در $V(G_۲)$ وجود دارد به طوری که $b \in N(x) \cap N(y)$ و چون G، گرافی $(\gamma, ۳)$-بحرانی است لذا $\gamma(G_۲ - \{x, y, b\}) = \gamma_۲ - ۱$. فرض کنید $D_۲$ یک $\gamma(G_۲)$-مجموعه شامل b باشد. لذا داریم:

$$\gamma - ۱ \geq \gamma(G - \{a, c, e\}) = \gamma(G_۱ - \{a, c, e\}) + \gamma_۲$$

و بنابراین $\gamma(G_۱ - \{a, c, e\}) \geq \gamma_۱ - ۱$. فرض کنید $D_۱$ یک $\gamma(G_۱ - \{a, c, e\})$ -مجموعه باشد. پس $D = D_۱ \cup D_۲$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G با اندازه $|D| = |D_۱ \cup D_۲| \leq \gamma(G) - ۱$ است که با D یک $\gamma(G)$-مجموعه است در تناقض است. بنابراین $b \neq (f = d)$، $f \neq (b = d)$، $d \neq (b = f)$ یا b، f و d مجزایند.

اثبات (۲) : واضح است که $\gamma \leq \gamma_۱ + \gamma_۲$. نشان می‌دهیم که $\gamma \geq \gamma_۱ + \gamma_۲$. چون $f \neq (b = d)$ و $\delta(G) \geq ۴$، یک رأس $x \neq f$ وجود دارد به طوری که $x \in V(G_۲) \cap N(b)$. واضح است که

$$\gamma_۲ - ۳ \leq \gamma_۲(G_۲ - \{b, x, f\}) \leq \gamma_۲ - ۲.$$

فرض کنید $\gamma_۲(G_۲ - \{b, x, f\}) = \gamma_۲ - ۲$، لذا یک $\gamma_۲$ -مجموعه برای $G_۲$ داریم که شامل رأس‌های b, f باشد. لذا داریم:

$$\gamma(G) - ۱ \geq \gamma(G - \{a, c, e\}) = \gamma(G_۱ - \{a, c, e\}) + \gamma_۲.$$

فرض کنید $D_۱$ یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $|D_۱| = \gamma(G_۱ - \{a, c, e\})$ باشد چون G، گرافی $(\gamma, ۳)$ -بحرانی است لذا داریم:

$$|D_1| \le \gamma_1 - 1$$

و پس $D = D_1 \cup D_2$ که یک $\gamma(G)$ -مجموعه با اندازه کمترمساوی $\gamma(G) - 1$ است. که یک تناقض است. بنابراین $\gamma_2(G_2 - \{b, x, f\}) = \gamma_2 - 1$ و چون G گرافی $(\gamma, 3)$ -بحرانی است لذا

$$\gamma(G) - 1 \ge \gamma(G - \{b, x, f, \}) = \gamma(G_1) + \gamma_2(G_2 - \{b, x, f\}) = \gamma_1 + \gamma_2 - 1$$

در نتیجه داریم:

$$\gamma(G) = \gamma_1 + \gamma_2.$$

اثبات (۳) : فرض کنیدb و d مساوی باشند و هر دو مخالف f باشند.

برهان خلف: فرض کنید $a \in V^+(G_1)$ یعنی $\gamma(G - a) > \gamma(G)$. واضح است که

$$\gamma_2 - 2 \le \gamma(G_2 - \{b, f\} \le \gamma_2$$

حالت اول : فرض کنید که $\gamma(G_2 - \{b, f\}) = \gamma_2 - 2$. بنابراین D_2 یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف G_2 با اندازه γ_2 و شامل b و f است. لذا داریم:

$$\gamma(G) - 1 \ge \gamma(G - \{a, c, e, \}) = \gamma(G_1 - \{a, c, e, \}) + \gamma_2$$

فرض کنید D_1 یک مجموعه احاطه‌گرمینیمم برای گراف $(G_1 - \{a, c, e\})$ باشد. بنابراین $|D_1| \le \gamma_1 - 1$ لذا $D = D_1 \cup D_2$ یک $\gamma(G)$ -مجموعه با اندازه کمترمساوی $\gamma(G) - 1$ و کمتر از $\gamma(G)$ است در نتیجه تناقض حاصل می‌شود.

حالت دوم :فرض کنید $\gamma_2 - 1 \leqslant \gamma(G_2 - \{b, f\}) \leqslant \gamma_2$. لذا $\gamma(G_2 - \{b, f\}) \geqslant \gamma_2 - 1$ چون G گرافی $(\gamma, 3)$ بحرانی است لذا داریم:

$$\gamma - 1 \geqslant \gamma(G - \{a, b, f\}) = \gamma(G_1 - \{a\}) + \gamma(G_2 - \{b, f\}) \geqslant \gamma_1 + 1 + \gamma_2 - 1 = \gamma$$

که یک تناقض است. برای رأس‌های c و e، نیز اثبات به صورت مشابه است.

اثبات (۴) : برهان خلف: فرض کنید D_2 یک $\gamma(G_2)$ -مجموعه که شامل رأس b است. فرض کنید D_1 یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف $G_1 - \{a\}$ با اندازه $\gamma(G_1 - \{a\})$ باشد. چون $a \in V^-(G_1)$، $\gamma(G-a) < \gamma(G)$ و $|D_1| = \gamma(G) - 1$ لذا $D = D_1 \cup D_2$، یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است و D یک $\gamma(G)$ -مجموعه با اندازه $\gamma_1 - 1 + \gamma_2 = \gamma(G) - 1$ می‌باشد که تناقض است. بنابراین b نمی‌تواند به هر $\gamma(G_2)$-مجموعه متعلق باشد. به طور مشابه، $\gamma(G_2)$-مجموعه‌ای شامل دو رأس f و d وجود ندارد.

اثبات (۵) : چون G، گرافی $(\gamma,3)$-بحرانی است لذا داریم:

$$\gamma(G) - 1 \geq \gamma(G - b, d, f) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2 - b, d, f)$$

و $\gamma(G_2 - \{b,d,f\}) \leq \gamma_2 - 1$. فرض کنید D_2 یک مجموعه احاطه‌گرمینیمم برای گراف $(G_2 - \{b,d,f\})$ با اندازه $\gamma(G_2 - \{b,d,f\})$ باشد. اگر $|D_2| = \gamma_2 - 3$، آن‌گاه $D_2 \cup \{b,d,f\}$، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف G_2 است که با قسمت (۴) در تناقض است. اگر $|D_2| = \gamma_2 - 2$، آن‌گاه ۲ رأس x و y در گراف G وجود دارند به طوری که b، d و f را احاطه می‌کنند. اگر x، b را احاطه کند، آن‌گاه $D_2 \cup \{b,y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G_2 می‌باشد که با قسمت ۴ در تناقض است. بنابراین $|D_2| = \gamma_2 - 1$. لذا D_2، رأس‌های b و d را احاطه می‌کند پس $D_2 \cup \{f\}$ یک مجموعه احاطه‌گرمینیمم برای گراف G_2 می‌باشد که با قسمت (۴) در تناقض است.

اثبات (۶) : چون سه رأس b، d و f متمایز هستند، لذا از قسمت (۵) نتیجه می‌گیریم که $\gamma(G_2 - \{b,d,f\}) = \gamma_2 - 1$ و طبق فرض داریم $\{b,d,f\} \subseteq V^0(G_2)$ در نتیجه داریم:

$$\gamma(G_2 - \{b\}) = \gamma G_2 - \{d\} = \gamma(G_2 - \{f\}).$$

لذا دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول : اگر $\gamma(G_2 - \{b,d\}) = \gamma_2(G)$، آن‌گاه $\gamma(G_2 - \{b,d,f\}) = \gamma_2(G) - 1$. فرض کنید D_2 یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف $G_2 - \{b,d,f\}$ باشد بنابراین $D_2 \cup \{f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف $G_2 - \{b,d\}$ است.

حالت دوم : فرض کنید $\gamma(G_2 - \{b,d\}) = \gamma_2 - 1$ و D یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف $G_2 - \{b,d\}$ باشد. لذا $D \cup \{d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف $G_2 - \{b\}$ است و $D \cup \{b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف $G_2 - \{d\}$ است.

اثبات (۷) : برهان خلف: فرض کنید D_1 یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف G_1 با اندازه $D_1 = \gamma(G_1)$ باشد که شامل سه رأس a، c و e است. فرض کنید D_2 یک $\gamma(G_2 - \{b,d,f\}$ - مجموعه باشد. با توجه به قسمت (۶) داریم $\gamma(G_2 - \{b,d,f\} = D_2 \leq \gamma_2 - 1$، بنابراین $D_1 \cup D_2$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G با اندازه $\gamma_1(G) + \gamma_2(G) - 1 = \gamma(G) - 1$ است. که یک تناقض است.

اثبات (۸) : فرض کنید که D_1 یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف $G_1 - \{a\}$ باشد که شامل دو رأس e, c است در این‌صورت $D_1 \cup \{a\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف G_1 است و بنابراین یک $\gamma(G_1)$- مجموعه شامل سه رأس a، c و e وجود دارد که با قسمت (۷) در تناقض است. به طور مشابه نشان می‌دهیم که $\gamma(G_1 - \{c\})$ -مجموعه‌ای که شامل دو رأس e و a باشد، وجود ندارد لذا $\gamma(G_1 - \{e\})$-مجموعه که شامل a و c باشد وجود ندارد. □

قضیه ۳.۵.۳. [۱۰] فرض کنید G یک گراف همبند باشد. اگر G، گرافی $(3,3)$- بحرانی یا $(4,3)$ -بحرانی باشد که $\gamma_1(G) \neq \gamma_2(G)$ و $\lambda(G) \neq 1, 2$ آن‌گاه $\lambda(G) \geq 4$.

اثبات. چون G گرافی، $(\gamma, 3)$-بحرانی و $\lambda(G) \neq 1, 2$، در نتیجه رأسی از درجه ۱، ۲ و ۳ نداریم

لذا $\delta(G) \geq 4$. برهان خلف: فرض کنید $\lambda(G) = 3$ و $\{ab, cd, ef\}$ یک برش یالی باشد و G_1 و G_2 دو مولفه از $G - ab - cd - ef$ باشند که $a, c, e \in V(G_1)$ و $b, d, f \in V(G_2)$. با توجه به قضیه ۲.۵.۳، قسمت (۲) داریم $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$.

حالت اول : فرض کنید $\gamma(G) = 3$. بدون این‌که از کلیت مساله کاسته شود فرض می‌کنیم $3 \geq \gamma(G_1) \geq 2$ و $1 \geq \gamma(G_2) \geq 0$ و $2 \leq \gamma(G_1)$ و $\gamma(G_2) = 1$. حداقل ۵ رأس در گراف G_2 وجود دارد زیرا $\delta(G) \geq 4$. فرض کنید $\{x, y, z\} \subseteq V(G_2)$ و $V(G)$ شامل b، d و f باشد. لذا چون G گرافی $(3,3)$- بحرانی است لذا داریم:

$$\gamma(G_2 - \{x, y, z\}) = \gamma(G_2) - 1 = 1 - 1 = 0$$

چون حداقل ۵ رأس در گراف G_2 داریم لذا با حذف ۳ رأس از آن، ۲رأس باقی می‌ماند پس $\gamma(G_2)$ حداقل ۱ است، لذا تناقض است. فرض کنید $\gamma(G_1) = 3$ و $\gamma(G_2) = 0$، بنابراین b، d و f اعضای $V(G_2)$ هستند که توسط رأس‌های a، c و e احاطه می‌شوند. چون حداقل یک رأس از رأس‌های b،d و f در گراف G از درجه ۲ یا ۳ هستند لذا یک رأس در گراف G_2 می‌ماند که احاطه نمی‌شود که یک تناقض است. بنابراین $\lambda(G) \geq 4$ است.

حالت دوم : فرض کنید $\gamma(G) = 4$. بدون این که از کلیت مساله کاسته شود فرض می‌کنیم $4 \geq \gamma(G_1) \geq 3$ و $1 \geq \gamma(G_2) \geq 0$ بنابراین اثبات آن شبیه به حالت $\gamma(G) = 3$ است که در آن $3 \geq \gamma(G_1) \geq 2$ و $1 \geq \gamma(G_2) \geq 0$.

□

مراجع

[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, (2008)," **Graph theory"**, Springer, New York. 5

[2] R. C. Brigham, P. Z. Chinn, R. D. Dutton, (1988), " Vertex Domination-critical Graphs", **John Wiley and Sons, Inc**, 18: 173–179.

[3] R. C. Brigham, R. D. Dutton, (1994), " **Diameter in Vertex Domination-critical Graphs"**, Manuscrieter University of Central Florida.

[4] R. C. Brigham, T. W. Haynes, M. A. Henning, D. F. Rall, (2005), " Bicritical Domination", **Discrete Math**, 305: 18–32. 13, 18, 20, 21, 22

[5] J. Carrington, F. Harary, T. W. Haynes, (1991), "Changing and unchanging the Domination number of a Graph", **J. Combin. Math. Combin. Comp**, 9: 57–63.

[6] O. Favaron, D. Sumner, and E. Wojcicka, (1994), "The Diameter of Domination critical graphs", **J. Graph Theory**, 18: 723–734. 13, 23, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 41, 42, 44, 50

[7] J. Fulman, D. Hanson, G. MacGillivray, (1995), " Vertex Domination-Critical Graphs", **John Wiley and Sons, Inc**, 25: 41–43.

[8] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, (1998)," **Domination in Graphs"**, Advanced Topics, Marcel Dekker, New York.

[9] T. W. Haynes, J. B. Phillips, P. J. Slater, (2000), "A generalization of Domination Critical Graphs", **Utilitas Math**, 58: 129–144. 13, 21, 22

[10] D. A. Mojdeh, P. Firoozi, (2010), " Characteristics of tricritical Graph", **Discrete Math**, 4: 197–206.

[11] D. A. Mojdeh, P. Firoozi, R. Hasni, (2010), " On Connected (γ, k)-Critical Graphs", **Australasian Journal of Combinatorics**, 46: 25–35.

[12] D. A. Mojdeh, R. Hasni, On questions on (total) Domination vertex critical Graphs, To appear ars Combinatoria. 51, 52, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 71

[13] D. Sumner, P. Blitch, (1983), "Domination Critical Graph", **J. Combinatorial Theory, Ser. B**, 34: 65–76. 60

[14] D. P. Sumner, (1990), "Critical concepts in Domination", **Discrete Math**, 86: 33–46.

[15] D. P. Sumner, E. Wogcicka, (1998) "Graphs Critical with respect to the Domination number, in: T.W, Haynes, S.T. Hedetniemi, P. J. Slater (Eds.), Domination in Graphs:Advanced Topics", **Marcel Dekker, New York**, Chapter (16). 16

[16] D. B. West, (2001)," **Introduction to Graph theory**", Prentice Hall, USA.

[17] E. Wojcicka, (1990) "Hamiltonian properties of Domination Critical Graphs", **J. Graph Theory**, 14: 205–215.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

احاطه-بحرانی	Domination-critical
احاطه گری	Domination
بحرانی	Critical
برش رأسی	Vertex-cut
برش یالی	Edge-cut
برگ	Leaf
بلوک	Block
تطابق	Matching
تطابق کامل	Perfect matching
حاصل‌ضرب دکارتی	Cartesian product
درجه	Degree
درخت	Tree
دور	Cycle
رأس آویزان	Pendant Vertex
رأس-انتقالی	Vertex-transitive
رأس پشتیبان	Support vertex
رأس غیر آویزان	Non-pendant Vertex
زیر تقسیم	Subdivide
زیرگراف القایی	Induced subgraph
عدد احاطه گری	Domination number
فاصله	Distance
قطر	Diameter
گراف پنچه- آزاد	Claw -free graph
گراف حاصل از بهم آمیختگی دو گراف	Coalescnce of two graph
گراف دو بخشی کامل	Complete bipartite graph
گراف ستاره	Star graph
گراف کامل	Complete graph
گراف گردشی	Circulant graph
گراف ابر مکعبی	Hyper cube
گراف منتظم	Regular graph
گراف k - منتظم	K-Regular graph

گراف هرری	Harary graph
مجموعه احاطه گر	Dominating set
$\gamma(G)$– مجموعه	$\gamma(G)$- Set
مسیر	Path
همبند	Connected
همسایگی باز	Open neighborhood
همسایگی بسته	Close neighborhood
همریختی	Automorphism
یکریختی	Isomorphism

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Automorphism	همریختی
Block	بلوک
Cartesian product	حاصل‌ضرب دکارتی
Circulant graph	گراف گردشی
Claw- free graph	گراف پنجه -آزاد
Close neighborhood	همسایگی بسته
Coalescnce of two graph	گراف حاصل از بهم آمیختگی دو گراف
Complete bipartite graph	گراف دو بخشی کامل
Complete graph	گراف کامل
Connected	همبند
Critical	بحرانی
Hyper cube	گراف ابر مکعبی
Cycle	دور
Degree	درجه
Diameter	قطر
Distance	فاصله
Dominating set	مجموعه احاطه گر
Domination	احاطه گری
Domination-critical	احاطه-بحرانی
Domination number	عدد احاطه گری
Edge-cut	برش یالی
Harary graph	گراف هرری
Induced subgraph	زیرگراف القایی
Isomorphism	یکریختی
K-Regular graph	گراف k - منتظم
Leaf	برگ
Matching	تطابق
Non-pendant Vertex	رأس غیر آویزان
Open neighborhood	همسایگی باز
Path	مسیر
Pendant Vertex	رأس آویزان

تطابق کامل	Perfect matching
گراف منتظم	Regular graph
گراف ستاره	Star graph
زیر تقسیم	Subdivide
رأس پشتیبان	Support vertex
$\gamma(G)$-مجموعه	$\gamma(G)$-set
درخت	Tree
برش رأسی	Vertex-cut
رأس-انتقالی	Vertex-transitive

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a graph of order n. A set $S \subseteq V(G)$ is a dominating set if every vertex in V is either in S or is adjacent to a vertex in S, that is, $V(G) = N[S]$. The domination number $\gamma(G)$ is the minimum cardinality of a dominating set of G, and a dominating set of minimum cardinality is called a $\gamma(G)$-set A graph is vertex domination-critical if the removal of any vertex decreases its domination number, that is $\gamma(G - v) < \gamma(G)$.
In chapter 1, we state some basic and elementary concepts which we use for the next chapters.
In chapter 2, we study domination-critical and bicritical graphs.
In chapter 3, we study tricritical graphs.

Keywords: *Domination, Critical, Domination-critical, Bicritical Graphs, Tricritical Graphs.*

Shahrood University
Facualty of Methematical Sciences
Department of Mathematics

M.s Thesis

γ-critical graphs

By:
Fatemeh Ahmadzadeh

Supervisor:
Dr. Sadegh Rahimi Sharebaf
Dr. Nader jafari rad

July 2012