

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی مازندران

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

رشته آمار

مباحثی در توزیع های نرمال چوله

آمیخته مقیاسی

دانشجو: واحدہ السادات موسوی

استاد راهنما:

دکتر محمد آرشی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

شهریور ۱۳۹۱

یارب زره راست نشانی خواهم

ازباده آب و خاک جانی خواهم

از نعمت خود چو بهره مندم کردی

در سکر کز ایت زبانی خواهم

و با احترام و تواضع تقدیم به

پدرم، اسطوره صبر و تلاش

,

مادرم، کنجینه عشق و ایثار

قدردانی

پس پروردگاری بشار که به من عنایت نمود تا بتوانم در حد توان خویش، در کسره علم و دانش و پیشبرد اهداف خود گام بردارم. اکنون که به یاری پروردگار میتا، این دوره از تحصیل را به پایان رسانده‌ام، می‌خواهم به رسم ادب و احترام بوسه بردستان بزرگوارانی زخم که در تمام دوران تحصیل و نقطه نقطه‌های زندگی‌ام از دریای لطف و محبتشان سیراب گشتم، از این رو بر خود واجب می‌دانم از زحمات پدر و مادر عزیزم که وجودشان، تسلی بخش و راحتهای مشکلاتم بوده‌اند، شکرو قدردانی نمایم. همچنین لازم می‌دانم که از زحمات بی‌شائبه و

بی‌دیغ استاد کرامت‌مقدم، جناب آقای دکتر محمد آرشی که بارها بنهایی باو نظرات ارزنده و مدبرانه خود، نقش بزرگی در به ثمر رساندن این کار داشته‌اند، نهایت تشکر و پاسکداری را داشته‌باشم. همچنین از اساتید محترم دانشگاه صنعتی شاهرود آقایان، دکتر احمد نژادکنتی و دکتر اودشاهی که در طول این دو سال همراه من بوده‌اند، پاسکداری نمایم. برخود واجب می‌دانم که از مسئولین آموزش و دفتر دانشکده دانشگاه صنعتی شاهرود که با همکاری بای خود مرا مورد لطف قرار داده‌اند، تشکر نمایم و در پایان لازم می‌دانم از کتبه دوستان عزیزم که در طی این دو سال، باعث آرایش و دلگرمی من بوده‌اند، نهایت پاسکداری را داشته‌باشم.

واحدہ السادات موسوی

شهریور ۹۱

چکیده

بسیاری از خصوصیت های موجود در یک جامعه آماری دارای مجموعه مقادیر اعداد حقیقی هستند. به طور معمول یک آماردان توزیع مربوط به اندازه این خصوصیت ها را نرمال فرض می کند. اما سوالی که مطرح می شود این است که آیا واقعا همیشه می توان چنین فرضی را در نظر گرفت؟ در صورتیکه داده های مربوط به اندازه یک خصوصیت دارای چولگی به راست یا به چپ باشند، آیا بازهم استفاده از برازش نرمال، استنباط دقیقی در مورد اندازه این خصوصیت به ما می دهد؟ در جواب به این سوال می توان گفت، در مواردی که مجموعه مقادیر خصوصیت مورد بررسی، اعداد حقیقی مثبت بوده و داده ها دارای چولگی به راست باشند، می توان از توزیع هایی مانند گاما^۱، خی دو^۲ و وایبول^۳ استفاده کرد. اما در حالت کلی این توزیع ها پاسخگوی همه نیاز ما نخواهند بود. از این رو آماردانان برآن شدند تا توزیع نرمال را تعمیم داده، توزیعی را معرفی کنند که خصوصیتی مشابه توزیع نرمال داشته باشد و در عین حال استنباط دقیقی را در مورد پارامترهای مدل، برای داده های نامتقارن ارائه دهد. یکی از توزیع هایی که اخیرا مورد توجه بسیاری از آماردانان قرار گرفته است، **توزیع نرمال چوله**^۴ است. این توزیع اولین بار به طور رسمی توسط آزالینی^۵ (۱۹۸۵) معرفی شد. در این پایان نامه دو مدل از توزیع های نرمال چوله با یک و دو پارامتر چولگی معرفی می شوند و خصوصیات آماری مهمی از این دو مدل مورد بررسی قرار می گیرند. همچنین خانواده ایی از **توزیع های نرمال آمیخته مقیاسی**^۶ و **نرمال چوله آمیخته مقیاسی**^۷ به همراه مثال ها و کاربردهایی از این دو خانواده معرفی می شوند. و در پایان با معرفی **الگوریتم EM**، به عنوان یک روش تقریبی، پارامترهای دو عضو از خانواده توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی، تحت عنوان توزیع **t-استیودنت چوله** با یک و دو پارامتر چولگی برآورد می شوند. برای سهولت مراجعه به قسمت های مختلف پایان نامه، جدول ۱ را پیش رو داریم.

1. Gamma

2. Chi

3. Weibull

4. Skew normal distribution

5. Azzalini

6. Scale mixture of normal distributions

7. Scale mixture of skew normal distributions

فصل اول	بیان مفاهیم اساسی و کلیدی، ضرورت و اهداف پایان نامه به همراه کاربردهایی از توزیع های معرفی شده در این پایان نامه و معرفی مدل های چوله ایی که تاکنون بیان شده است.
فصل دوم	تعریف مدل آمیخته مقیاسی : $\int_u g(x \theta, u^{-1}\beta) dH(u, \alpha)$ تعریف مدل نرمال آمیخته مقیاسی: $\int_u \varphi_p(x \mu, u^{-1}\Sigma) dH(u, \alpha)$
فصل سوم	مدل نرمال چوله با یک پارامتر چولگی : $2 \varphi_p(x \mu, \Sigma) \Phi_1\left(\lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu)\right), x \in \mathbb{R}^p$ مدل نرمال چوله با دو پارامتر چولگی : $\frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{1+\lambda_1^T \lambda_1}}\right)} \varphi_p(x \mu, \Sigma) \Phi_1\left(\lambda_0 + \lambda_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu)\right), x \in \mathbb{R}^p$
فصل چهارم	معرفی خانواده توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی با یک پارامتر چولگی : $2 \int_u \varphi_p(x \mu, u^{-1}\Sigma) \Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu)\right) dH(u, \alpha), x \in \mathbb{R}^p$ معرفی خانواده توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی با دو پارامتر چولگی : $\int_u \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{1+\lambda_1^T \lambda_1}}\right)} \varphi_p(x \mu, u^{-1}\Sigma) \Phi_1\left(\lambda_0 + \lambda_1^T u^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu)\right) dH(u, \alpha), x \in \mathbb{R}^p$
فصل پنجم	معرفی مدل های جدیدی از توزیع های نرمال آمیخته مقیاسی و نرمال چوله آمیخته مقیاسی، که می توانند در آینده تحقیق مورد بررسی قرار گیرند.

واژه های کلیدی : توزیع های نرمال آمیخته مقیاسی، توزیع نرمال چوله، پارامتر چولگی، توزیع

های نرمال چوله آمیخته مقیاسی، الگوریتم EM

در اینجا لازم می‌دانم این مطلب را خاطر نشان کنم که لم‌ها، نتایج و قضایایی که با (*) مشخص شده اند، صورت قضیه یا لم در منابع بوده ولی اثبات آنها توسط نویسندگان این پایان نامه انجام شده است. و لم‌ها، نتایج و قضایایی که با (**) مشخص شده اند، کاملاً جدید هستند. همچنین لازم به ذکر است که تمامی بردارها در این پایان نامه با قلم مشکی نمایش داده شده است.

فهرست مقالات مستخرج از متن پایان نامه

1. V. Moosavi and M. Arashi, (2012). Some Properties Of an Scale Mixture Of Extended Skew-Normal Distributions, Proceeding of the 11th Iran. Statist. Conf, 390-397
2. V. Moosavi and M. Arashi, (2012). A Varsity of skew models, ICCS-12, Qatar
3. V. Moosavi and M. Arashi, (2012). A note on scale mixture of skew normal distributions, under review in *Theory and Methods* .
4. V. Moosavi and M. Arashi, (2012). A Class Of univariate Skew-Normal Models And Its Scale Mixture And Some Main Properties, ICMSCE, India, Accepted

علائم اختصاری

ind : مستقل بودن.

A^T : ترانپاده ماتریس A .

A^{-1} : معکوس ماتریس A .

$A^{\frac{1}{2}}$: ریشه دوم ماتریس A .

$det(A)$: دترمینان ماتریس A .

$E(X^m)$: گشتاور مرکزی مرتبه m -ام.

$\mathbb{R}^p$: فضای اقلیدسی p بعدی حقیقی.

iid : هم توزیعی و مستقل بودن.

$B(.,.)$: تابع بتای یک متغیره.

χ_p^2 : توزیع کی دو با p درجه آزادی.

$\Gamma(r, \lambda)$: توزیع گاما با پارامترهای λ, r .

$N_p(\mu, \Sigma)$: توزیع نرمال p -متغیره با میانگین μ و مقیاس Σ .

$EC_p(\mu, \Sigma, g)$: توزیع بیضیگون p -متغیره.

$TN(\mu, \sigma^2)I\{\alpha < x < \beta\}$: توزیع نرمال بریده شده در فاصله α و β .

$NI_p(\mu, \Sigma, H)$: توزیع نرمال آمیخته مقیاسی p -متغیره با میانگین μ ، مقیاس Σ و تابع توزیع H .

$T_p(\mu, \Sigma, \nu)$: توزیع t -استیودنت p -متغیره با میانگین μ ، مقیاس Σ و ν درجه آزادی.

$T_{k,b^2}(.)$: تابع توزیع t -استیودنت غیر مرکزی با پارامتر غیر مرکزی b^2 و درجه آزادی k .

$SL_p(\mu, \Sigma, \nu)$: توزیع اسلش p -متغیره با میانگین μ ، مقیاس Σ و پارامتر شکل ν .

$CN_p(\mu, \Sigma, \nu, \gamma)$: توزیع نرمال آلایشی p -متغیره با میانگین μ ، مقیاس Σ ، ν پارامتری برای درصد

داده های دور افتاده و γ می تواند تفسیری از فاکتور مقیاس باشد.

$SN_1(\lambda)$: توزیع نرمال چوله استاندارد یک متغیره با یک پارامتر چولگی λ .

$SN_1(\mu, \sigma^2, \lambda)$: توزیع نرمال چوله یک متغیره با میانگین μ ، واریانس σ^2 و پارامتر چولگی λ .

$SN_p(\mu, \Sigma, \lambda)$: توزیع نرمال چوله p -متغیره با میانگین μ ، مقیاس Σ و پارامتر چولگی λ .

$SNI_p(\mu, \Sigma, \lambda, H)$: توزیع نرمال چوله آمیخته مقیاسی p -متغیره با میانگین μ ، مقیاس Σ ، پارامتر

چولگی λ و تابع توزیع H .

$ST_p(\mu, \Sigma, \lambda, \nu)$: توزیع t -استیودنت چوله p -متغیره با میانگین μ ، مقیاس Σ ، پارامتر چولگی λ

و درجه آزادی ν .

$SSL_p(\mu, \Sigma, \lambda, \nu)$: توزیع اسلش چوله p -متغیره با میانگین μ ، مقیاس Σ ، پارامتر چولگی λ و پارامتر

شکل ν .

$SCN_p(\mu, \Sigma, \lambda, \nu, \gamma)$: توزیع نرمال چوله آلایشی p -متغیره با میانگین μ ، مقیاس Σ ، پارامتر

چولگی λ و پارامترهای ν و γ .

$SN_1(\lambda_0, \lambda_1)$: توزیع نرمال چوله استاندارد یک متغیره با دو پارامتر چولگی λ_0, λ_1 .

$SN_1(\mu, \sigma^2, \lambda_0, \lambda_1)$: توزیع نرمال چوله یک متغیره با میانگین μ ، واریانس σ^2 و پارامترهای چولگی

λ_0, λ_1 .

$SN_p(\mu, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1)$: توزیع نرمال چوله p -متغیره با میانگین μ ، مقیاس Σ و پارامترهای چولگی

λ_0, λ_1 .

$SNI_p(\mu, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1, H)$: توزیع نرمال چوله آمیخته مقیاسی p -متغیره با میانگین μ ، مقیاس Σ ،

پارامترهای چولگی λ_0, λ_1 و تابع توزیع H .

$ST_p(\mu, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1, \nu)$: توزیع t -استیودنت چوله p -متغیره با میانگین μ ، مقیاس Σ ، پارامترهای

چولگی λ_0, λ_1 و درجه آزادی ν .

$SSL_p(\mu, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1, \nu)$: توزیع اسلش چوله p -متغیره با میانگین μ ، مقیاس Σ ، پارامترهای

چولگی λ_0, λ_1 و پارامتر شکل ν .

$SCN_p(\mu, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1, \nu, \gamma)$: توزیع نرمال چوله آلایشی p -متغیره با میانگین μ ، مقیاس Σ ،

پارامترهای چولگی λ_0, λ_1 و پارامترهای ν و γ .

حروف اختصاری

cdf : تابع توزیع تجمعی (Cumulative function distribution)

mgf : تابع مولد گشتاور (Generate moment function)

d : فاصله ماهالانوبیس (Mahalanobis distance)

F' : مشتق تابع توزیع (Derived function distribution)

$|J|$: دترمینان تبدیل (Jacobian determinant)

$\perp$: نمادی برای استقلال (Symbol for independence)

$=^d$: هم توزیعی (Distributed as)

pdf : تابع چگالی احتمال (Probability density function)

ldf : تابع توزیع خطی (Linier distribution function)

sdf : تابع توزیع چوله (Skew distribution function)

kss : آماره کلموگروف-اسمیرنوف (Statistic kolmogorov smirnov)

mcmc : زنجیر مونت کارلوی مارکوفی (Markov chain monte carlo)

فهرست مطالب

فصل اول ۱

۱.۱ مقدمه ۲

۱.۲ ضرورت و اهداف پایان نامه ۳

۱.۳ معرفی ساختار کاملی از مدل های چوله ۱۹

۱.۴ تعاریف و لم های مورد نیاز ۲۷

فصل دوم..... ۳۸

۱.۲ مقدمه ۳۹

۲.۲ توزیع آمیخته مقیاسی ۳۹

۲.۳ مدل نرمال آمیخته مقیاسی ۴۰

۲.۴ مثالهایی از توزیع نرمال آمیخته مقیاسی ۴۲

۱,۴,۲ توزیع t - استیودنت ۴۳

۲,۴,۲ توزیع اسلش ۴۷

۳,۴,۲ توزیع نرمال آلایشی ۴۸

فصل سوم ۵۰

۱.۳ مقدمه ۵۱

۲.۳ مدل نرمال چوله استاندارد یک متغیره با یک پارامتر چولگی ۵۲

۱,۲,۳ مدل نرمال چوله یک متغیره با یک پارامتر چولگی و میانگین و واریانس ۵۹

۳,۳ مدل نرمال چوله چند متغیره با یک پارامتر چولگی ۶۶

۴,۳ مدل نرمال چوله استاندارد یک متغیره با دو پارامتر چولگی ۶۹

۱,۴,۳ مدل نرمال چوله با دو پارامتر چولگی با میانگین و واریانس ۷۴

۵,۳ مدل نرمال چوله چند متغیره با دو پارامتر چولگی ۷۶

فصل چهارم ۸۳

۱.۴ مقدمه ۸۴

۲.۴ توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی چند متغیره با یک پارامتر

چولگی ۸۴

۳.۴ مثالهایی از توزیع نرمال چوله آمیخته مقیاسی با یک پارامتر چولگی .. ۹۴

۱,۳,۴ توزیع t - استیودنت چوله با یک پارامتر چولگی ۹۴

۱,۱,۳,۴ برآورد پارامترهای توزیع t - استیودنت چوله با یک پارامتر چولگی ۹۸

۱,۱,۱,۳,۴ مثال کاربردی ۱۰۷

۲,۳,۴ توزیع اسلش چوله بایک پارامتر چولگی ۱۰۹

۳,۳,۴ توزیع نرمال چوله آلایشی با یک پارامتر چولگی ۱۱۰

۴.۴ توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی چند متغیره با دو پارامتر چولگی

۱۱۲.....

۴.۵ مثالهایی از توزیع نرمال چوله آمیخته مقیاسی با دو پارامتر چولگی ... ۱۱۶

۱,۵,۴ توزیع t- استیودنت چوله با دو پارامتر چولگی..... ۱۱۶

۱,۱,۵,۴ برآورد پارامترهای توزیع t- استیودنت چوله با دو پارامتر چولگی..... ۱۲۰

۲,۵,۴ توزیع اسلش چوله با دو پارامتر چولگی..... ۱۲۹

۳,۵,۴ توزیع نرمال چوله آلایشی با دو پارامتر چولگی..... ۱۳۰

فصل پنجم..... ۱۳۲

۱.۵ پیشنهادات ۱۳۳

۲,۵ نتیجه گیری ۱۳۷

مراجع ۱۴۸

فهرست اشکال

- شکل (۱-۱) - تصاویری که با استفاده از LDF دسته بندی شده است..... ۵
- شکل (۲-۱) - تصاویری که با استفاده از SDF دسته بندی شده است..... ۵
- شکل (۳-۱) - تعیین نقطه تغییر..... ۹
- شکل (۴-۱) - مقایسه توزیع نرمال و نرمال چوله در برازش به داده های واقعی مربوط به AIS..... ۱۲
- شکل (۵-۱) - نمودار کانتور برای چهار خصوصیت از داده های واقعی..... ۱۳
- شکل (۶-۱) - هیستوگرام داده های تالاب شادگان به همراه برازش توزیع نرمال چوله و t - استیودنت چوله..... ۱۴
- شکل (۷-۱) - هیستوگرام داده های مربوط به fiber-grass و برازش چهار مدل SN,ST,SSL,SNC..... ۱۶
- شکل (۸-۱) - تعیین پارامتر γ, ν برای توزیع t - استیودنت چوله و نرمال چوله آلایشی..... ۱۷
- شکل (۹-۱) - نمودار تابع چگالی و کانتور برای مدل VII..... ۲۳
- شکل (۱۰-۱) - نموداری از جوامع دو بعدی..... ۲۴
- شکل (۱۱-۱) - نمودار نرمال چوله دو تکه برای پارامترهای متفاوت..... ۲۵
- شکل (۱۲-۱) - نمودار تابع چگالی توزیع نرمال بریده شده برای پارامترهای متفاوت..... ۲۹
- شکل (۱۳-۱) - نمودار تابع چگالی توزیع t - استیودنت غیر مرکزی به ازای پارامترهای مختلف..... ۳۱
- شکل (۱۴-۱) - فلوچارت الگوریتم EM..... ۳۵
- شکل (۱-۲) - نمودار تابع چگالی t - استیودنت دو متغیره برای $\nu = 1$ ۴۶
- شکل (۲-۲) - نمودار تابع چگالی t - استیودنت دو متغیره برای $\nu = 10$ ۴۶
- شکل (۳-۲) - نمودار تابع چگالی اسلش استاندارد برای ν های مختلف..... ۴۷
- شکل (۱-۳) - نمودار تابع چگالی نرمال چوله استاندارد با پارامترهای چولگی مثبت..... ۵۳
- شکل (۲-۳) - نمودار تابع چگالی نرمال چوله استاندارد با پارامترهای چولگی منفی..... ۵۳
- شکل (۳-۳) - نمودار تابع چگالی نرمال چوله یک متغیره با پارامتر مکان و مقیاس و پارامترهای چولگی مثبت..... ۶۰
- شکل (۴-۳) - نمودار تابع چگالی نرمال چوله یک متغیره با پارامتر مکان و مقیاس و پارامترهای چولگی منفی..... ۶۱
- شکل (۵-۳) - نمودار کانتور برای توزیع نرمال چوله دو متغیره..... ۶۷
- شکل (۶-۳) - نمودار تابع چگالی برای توزیع نرمال چوله دو متغیره..... ۶۷
- شکل (۷-۳) - نموداری از تابع چگالی نرمال چوله استاندارد با دو پارامتر چولگی..... ۷۱
- شکل (۸-۳) - نمودار تابع چگالی توزیع نرمال چوله با دو پارامتر چولگی برای پارامترهای مکان و مقیاس متفاوت..... ۷۵
- شکل (۹-۳) - نمودار کانتور از توزیع نرمال چوله دو متغیره با دو پارامتر چولگی..... ۷۸

- شکل (۳-۱۰) - نمودار تابع چگالی از توزیع نرمال چوله دو متغیره با دو پارامتر چولگی..... ۷۸
- شکل (۴-۱) - نمودار کانتور از توزیع t -استیودنت چوله دو متغیره با یک پارامتر چولگی..... ۹۶
- شکل (۴-۲) - نمودار تابع چگالی از توزیع t -استیودنت چوله دو متغیره با یک پارامتر چولگی..... ۹۶
- شکل (۴-۳) - نمودار کانتور از توزیع t -استیودنت چوله با دو پارامتر چولگی..... ۱۱۸
- شکل (۴-۴) - نمودار تابع چگالی از توزیع t -استیودنت چوله با دو پارامتر چولگی..... ۱۱۹

فهرست جداول

- جدول (۱-۱) - مقایسه SDF و LDF در تصاویر ماهواره ایی ۴
- جدول (۱-۲) - مقایسه سه مدل معرفی شده در مدل رگرسیون خطی با اثرات آمیخته با معیارهای AIC و DIC..... ۸
- جدول (۱-۳) - برآورد پارامترهای داده های آلودگی شادگان برای دو مدل SN و ST..... ۱۵
- جدول (۱-۴) - برآورد پارامترهای داده های مربوط به fiber-grass برای چهار مدل SN,ST,SSL,SNC..... ۱۷
- جدول (۱-۵) - نمای کلی از توزیع های چوله معرفی شده..... ۲۰
- جدول (۴-۱) - برآورد پارامترهای داده های واقعی برای دو مدل N_2 و ST_2 به روش الگوریتم EM..... ۱۰۸

فصل اول

مقدمه و دورنما

۱.۱ مقدمه

هنگامی که از توزیع نرمال^۱ صحبت می‌کنیم در واقع منحنی زنگی شکلی را تصور می‌کنیم که حول عددی، که به آن میانگین توزیع گفته می‌شود، دارای تقارن باشد. رده ایی از توزیع هایی که در این پایان نامه مورد بررسی قرار می‌گیرند، دارای خواصی مشابه توزیع نرمال هستند. که نسبت به توزیع نرمال یا چولگی پیدا کرده یا دارای دنباله های پهن تری است و یا هر دو خصوصیت را با هم دارند، یعنی هم دارای چولگی هستند و هم دارای دنباله های پهن تری نسبت به توزیع نرمال می-باشند. نکته حائز اهمیت در مورد تمام توزیع های معرفی شده در این پایان نامه این است که توزیع نرمال به عنوان یک مولفه اصلی در تمام توابع چگالی این توزیع ها وجود دارد. این مدل از توزیع ها در سالهای اخیر مورد توجه بسیاری قرار گرفته است. توزیع نرمال چوله استاندارد یک متغیره که اولین بار توسط آزالینی (۱۹۸۵) معرفی شد، در سالهای بعد توسط افرادی مانند آزالینی (۱۹۸۶)، هنز^۲ (۱۹۸۶)، آزالینی و دالا واله^۳ (۱۹۹۶)، آزالینی و کاپیتانو^۴ (۱۹۹۹)، برانکو و دی^۵ (۲۰۰۱)، گنتون و همکاران^۶ (۲۰۰۱)، آرنولد و بیور^۷ (۲۰۰۲)، وانگ و همکاران^۸ (۲۰۰۴)، گامز^۹ و همکاران (۲۰۰۷)، لاین^{۱۰} و همکاران (۲۰۰۹) و غیره، بسط داده شد. در این فصل قصد داریم کاربردهایی از این توزیع ها را که ضرورت پایان نامه را بیش از پیش بیان می‌دارند، بیان کنیم. همچنین مدل‌های مختلفی از توزیع های چوله که تاکنون توسط آماردانان بیان شده است، را معرفی کرده و لم ها و تعاریف مورد نیازی که در فصل های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند، را بیان می‌کنیم.

1. Normal distribution
 2. Henze
 3. Azzalini and Dalla-Valle
 4. Azzalini and Capitanio
 5. Branco and Dey
 6. Genton
 7. Arnold and Beaver
 8. Wang
 9. Gomes
 10. Lin

۲.۱ ضرورت و اهداف پایان نامه

در بسیاری از مدل های آماری، پذیرش فرض نرمال بودن داده ها، یک فرض معمول است. این فرض ممکن است دقت استنباط را در صورت نامتقارن بودن توزیع مشاهدات، کاهش دهد. لذا در سالهای اخیر تحقیقات زیادی برای جایگزین کردن رده جدیدی از توزیع ها، از جمله توزیع هایی که در این پایان نامه معرفی و مورد بررسی قرار گرفته اند، به جای توزیع نرمال انجام شده است. این جایگزینی در بسیاری از موارد، نتایج رضایت بخشی به همراه داشته است. به گونه ایی که درجه دقت استنباط ها و تحلیل های آماری را افزایش داده است. کاربردهای بیان شده در این بخش موید این مطلب خواهند بود.

❖ کاربرد توزیع نرمال چوله در دسته بندی تصاویر ماهواره ایی^۱

در رده بندی تصاویر ماهواره ای که به منظور تصمیمات مهمی در سازمان های نقشه برداری، وزارت جهاد کشاورزی، سازمان محیط زیست، سازمان هواشناسی و وزارت نیرو و غیره، انجام می شود، هرکلاس که نشان دهنده یک منطقه جغرافیایی است با یک رنگ نمایش داده می شود. زمانی که تعداد این کلاس ها افزایش می یابند، مثلاً بیشتر از سه کلاس، پدیده ایی تحت عنوان فرا پوشش^۲ رخ می دهد به گونه ایی که مرز بین کلاس ها نا مشخص می شود، برای جلوگیری از این پدیده، از تحلیل ممیزی^۳ استفاده می کنیم. به طوریکه تابع چگالی مربوط به هرکلاس، نرمال در نظر گرفته می شود. در مقالات جدیدی که اخیراً چاپ شده است از توزیع نرمال چوله به جای توزیع نرمال به منظور دسته بندی استفاده شده است. نگاه اجمالی به جدول زیر نشان دهنده کاهش احتمال خطای دسته بندی^۴ در کلاس بندی تصاویر ماهواره ایی، برای حالتی که از توزیع نرمال چوله (SDF) به جای توزیع نرمال (LDF) استفاده می کنیم، است.

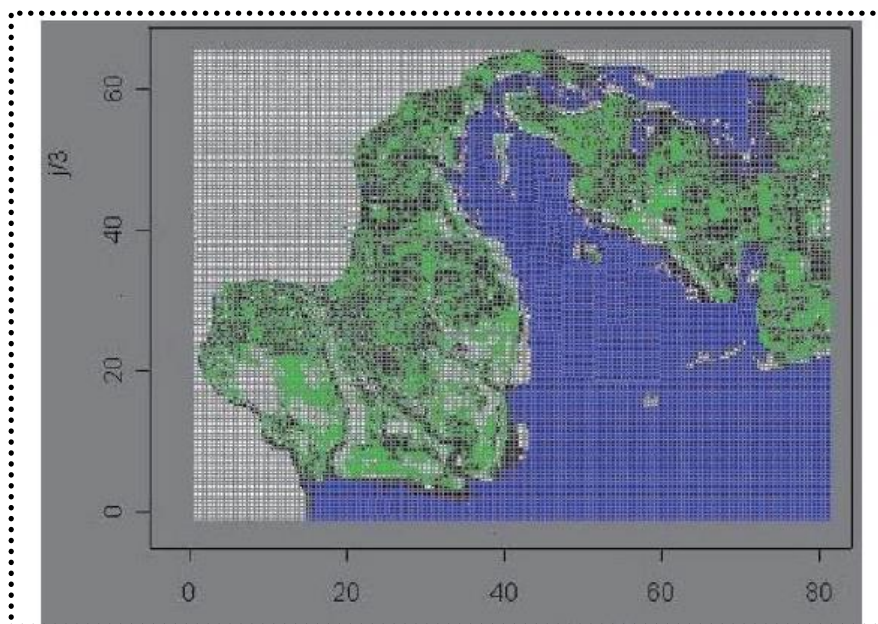
1. Satellite images
2. Masking
3. Discriminant analysis
4. Misclassification probability

جدول (۱-۱) - مقایسه LDF و SDF در تصاویر ماهواره ایی

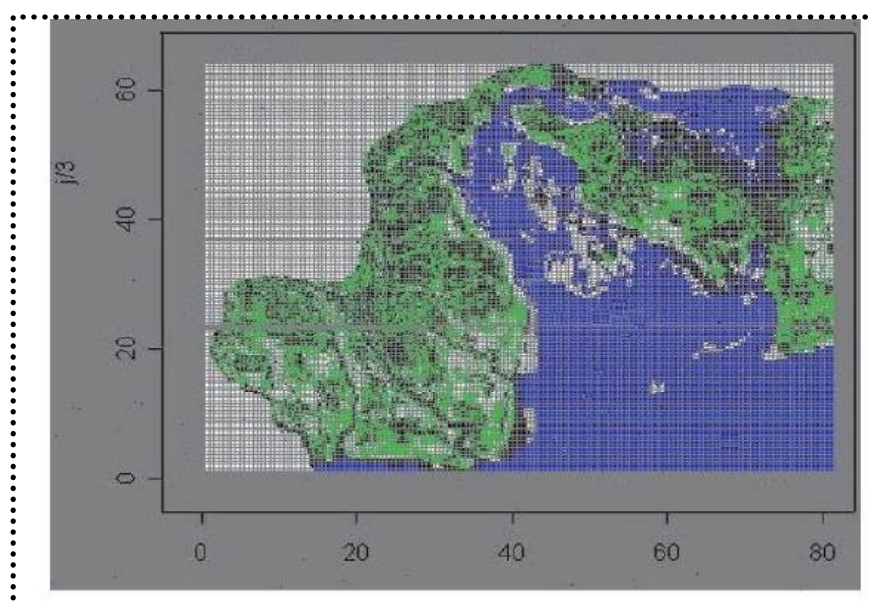
پارامترها مجهول				پارامترها معلوم				
$\Sigma_1 = \Sigma_2$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$		$\Sigma_1 = \Sigma_2$ $\lambda_1 = \lambda_2$		$\Sigma_1 = \Sigma_2$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$		$\Sigma_1 = \Sigma_2$ $\lambda_1 = \lambda_2$		بعد
e_2	e_1	e_2	e_1	e_2	e_1	e_2	e_1	K
۰,۰۸۹	۰,۱۲۲	۰,۰۸۳	۰,۱۱۷	۰,۰۹۸	۰,۱۲۶	۰,۱۰۶	۰,۱۳۲	۲
۰,۱۱۵	۰,۱۵۴	۰,۱۰۱	۰,۱۳۷	۰,۱۲۷	۰,۱۵۴	۰,۱۱۱	۰,۱۴۰	۳
۰,۱۵۳	۰,۲۳۹	۰,۱۴۰	۰,۱۴۵	۰,۱۴۸	۰,۲۱۸	۰,۱۴۰	۰,۱۷۱	۴
۰,۲۲۹	۰,۲۴۸	۰,۱۷۱	۰,۱۸۴	۰,۱۹۱	۰,۲۵۳	۰,۱۹۲	۰,۲۲۸	۵

در مشروح جدول بالا ذکر چند نکته ضروری است.

۱. Σ : ماتریس واریانس-کواریانس، λ : پارامتر چولگی است و k : بعد ماتریس است.
 ۲. e_2 و e_1 میانگین خطای دسته بندی به ترتیب برای LDF و SDF
 ۳. میانگین خطای دسته بندی در هر چهار حالت، برای SDF کمتر از LDF است.
 ۴. با افزایش بعد، میانگین خطای دسته بندی برای SDF و LDF افزایش می یابد.
 ۵. میانگین خطای دسته بندی برای حالتی که پارامترها مجهولند و با روش های برآورد معین می شوند، کمتر از حالتی است که پارامترها معلوم هستند.
- در پایان با اعمال این دو مدل از توزیع ها یعنی LDF و SDF بر روی داده های واقعی، دسته بندی تصاویر ماهواره ایی را به صورت زیر مشاهده خواهیم کرد.



شکل (۱-۱) - تصاویری که با استفاده از LDF دسته بندی شده است



شکل (۲-۱) - تصاویری که با استفاده از SDF دسته بندی شده است

مقایسه شکل های (۱-۱) و (۲-۱) حاکی از انعطاف پذیری، دقت بالا و کاهش خطای دسته بندی توزیع نرمال چوله نسبت به توزیع نرمال، در دسته بندی تصاویر ماهواره ایی است.

برای جزئیات بیشتر زادکرمی و روحانی (۲۰۱۰) را ببینید.

❖ کاربرد توزیع نرمال چوله در مدل رگرسیونی خطی

مدل رگرسیونی خطی (بدون اثرات آمیخته و مشاهدات گمشده) در استنباط های آماری نقش مهمی دارد. رایج ترین مدل رگرسیونی خطی به همراه فرض معمول آن به صورت زیر نشان داده می شود.

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i \quad , \quad \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (1-1)$$

در یک نظریه جدید فرض زیر را در مورد مولفه خطا خواهیم داشت

$$\epsilon_i \sim SN(0, \sigma^2, \lambda) \quad (2-1)$$

کاربرد مهم این فرض در محاسبه $E(Y_i | X_i = x_i)$ خواهد بود که به صورت زیر بیان می شود.

$$E(Y_i | X_i = x_i) = \alpha + \beta X_i + E(\epsilon_i) \quad (3-1)$$

بنابراین با تغییر پارامتر مکان در توزیع های روابط (1-1) و (2-1) می توان تفاوت مقدار تعیین شده برای رابطه (3-1) را مشاهده نمود و با استفاده از توزیع رابطه (2-1) دقت استنباط را افزایش داد. برای جزئیات بیشتر به ساهو¹ و همکاران (2003) مراجعه کنید.

❖ کاربرد توزیع نرمال چوله در مدل های رگرسیون خطی با اثرات آمیخته

مدل رگرسیونی با اثر آمیخته، کاربرد فراوانی در تحلیل داده ها و در علوم مختلف مانند اقتصاد، کشاورزی و زیست شناسی دارد. همچنین توانایی این مدل ها برای تحلیل داده های متعادل و غیر متعادل باعث محبوبیت آنها شده است. فرضهای معمول برای استنباط در مورد ضرایب رگرسیونی مدل های خطی با اثرات آمیخته، نرمال بودن اثر واحدها و باقی مانده ها است. این فرض ها ممکن است استنباط را در صورت نامتقارن بودن داده ها دچار آسیب کند و دقت استنباط را کاهش دهد. لذا استفاده از توزیع نرمال چوله به عنوان یک نظریه جدید مطرح می شود. در برازش مدل های غیر نرمال به داده های واقعی، روشهای بیزی و الگوریتم های مبتنی بر رهیافت زنجیر مونت کارلوی مارکوفی

1. Sahu

(MCMC) موثر بوده است. در این بخش قصد داریم استنباط بیزی در مورد پارامترهای مدل های خطی با اثرات آمیخته با فرض نرمال و نرمال چوله بودن اثر واحدها و باقی مانده ها که توسط الگوریتم گیبس^۱ انجام می شود را مقایسه، و در نهایت با استفاده از معیار اطلاع انحراف^۲ (DIC) و معیار اطلاع آکائیک^۳ (AIC)، بهترین مدل برازش یافته را انتخاب کنیم.

لازم به توضیح است که الگوریتم گیبس یک روش نمونه گیری از زنجیره مونت کارلوی مارکوفی است. ایده اولیه این الگوریتم توسط مترو پلیس و تالر^۴ (۱۹۵۳) ارائه و سپس با مقاله ایی که گیمن^۵ (۱۹۸۴) در مورد مدل های پردازش تصویر ارائه داد، وارد مرحله جدیدی شد. بیشترین کاربرد نمونه گیری گیبس در به دست آوردن توزیع پسین در مدل های بیزی است.

رایج ترین مدل های خطی با اثرات آمیخته حالتی است که اثرهای تصادفی و مولفه خطا هر دو نرمال هستند، و به صورت زیر نشان داده می شود.

$$Y_j = X_j\beta + Z_jb_j + \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (4-1)$$

در معادله (۴-۱)، Y_j به عنوان متغیر پاسخ، X_j ها متغیرهای مشاهده شده مستقل متناظر با اثرهای ثابت β و Z_j ها نیز ماتریس متناظر با اثرهای تصادفی b_j هستند. همچنین ϵ_j را خطای تصادفی می نامند. فرض می شود که اثرهای تصادفی b_j و مولفه های خطای ϵ_j مستقل هستند و دارای توزیع نرمال با پارامترهای زیر

$$b_j \sim N(0, D) \quad , \quad \epsilon_j \sim N(0, k)$$

که در آن D, k معمولاً مربوط به واریانس بین و درون واحدها می شوند.

علیرغم قابلیت انعطاف وسیع این الگوها برای مدل سازی مجموعه داده های تکراری، در صورت نا درست بودن توزیع های فرضی، نتایج ناصحیحی ارائه می کنند. پس به کارگیری این الگوها بر مجموعه

1. Gibbs algorithm
2. Deviance information criterion
3. Akaike information criterion
4. Metropolis and teller
5. Giman

داده های تکراری و طبقه بندی شده دقت کافی ندارند. بنابراین فرض غیر نرمال بودن اثرهای تصادفی و مولفه خطا در حالت پیوسته، یک نظریه جدید در مدلسازی داده های تکراری است. ازاین رو در مدل معرفی شده در رابطه (۴-۱) فرض می کنیم

$$b_j \sim SN(0, D, \Delta) \quad , \quad \epsilon_j \sim SN(0, k, \Gamma)$$

به منظور بررسی تاثیر استفاده از توزیع نرمال چوله در اثر واحد ها و باقی مانده ها سه مدل زیر را در نظر می گیریم.

مدل (۱): اثر تصادفی و مولفه خطا هر دو دارای توزیع نرمال چوله هستند.

مدل (۲): مولفه خطا دارای توزیع نرمال و اثر تصادفی دارای توزیع نرمال چوله است.

مدل (۳): اثر تصادفی و مولفه خطا هر دو دارای توزیع نرمال هستند.

لازم به ذکر است که در استنباط بیزی برای هر سه مدل، توزیع های پیشین یکسان در نظر گرفته شده است.

با برآزش این سه مدل به داده های واقعی مربوط به میزان کلسترول هر فرد بر اساس یک پایه سنی، و استفاده از معیار اطلاع انحراف و معیار آکائیک به منظور مقایسه این سه مدل، نتایج به صورت زیر مشاهده شده است.

جدول (۲-۱) - مقایسه سه مدل معرفی شده در مدل رگرسیون خطی با اثرات آمیخته با معیارهای AIC و DIC

مدل ها	AIC	DIC
مدل (۱)	۰,۱۴۳۴	-۲۲۶,۷
مدل (۲)	۰,۱۴۴۸	-۶۵,۴۶
مدل (۳)	۰,۱۸۳۹	-۲۵,۸۱

بر اساس جدول (۲-۱)، مدل اول در مقایسه با دو مدل دیگر دارای مقادیر کوچکتری از هر دو معیار است. بنابراین مدل اول بهترین مدلی است که می توان به داده های مربوط به کلسترول برآزش

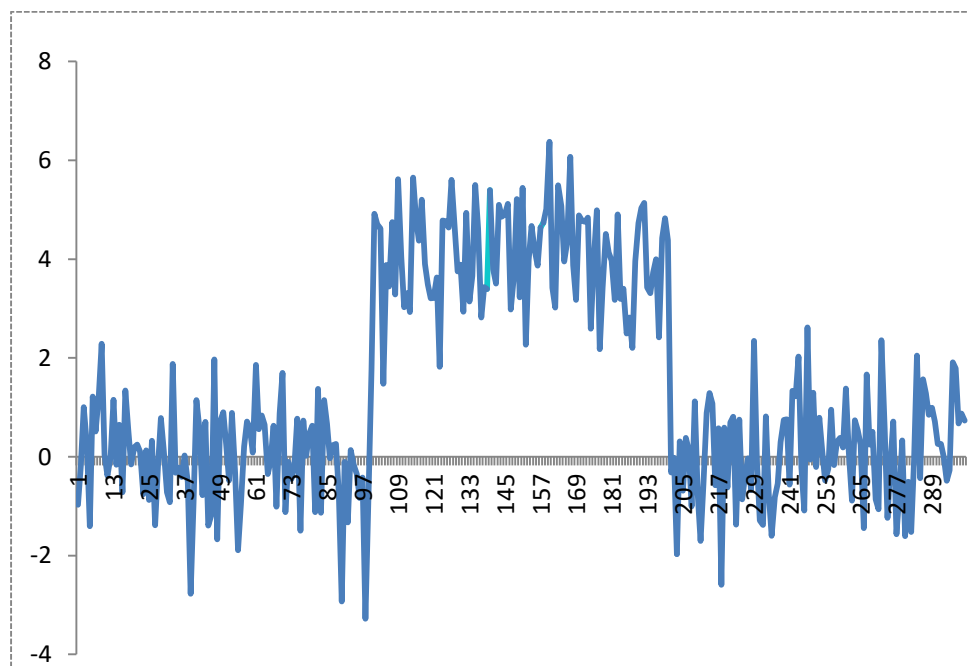
داد. پس نتیجه این که، در صورت نا متقارن بودن توزیع مشاهدات، جایگزین کردن توزیع نرمال چوله به جای توزیع نرمال در اثر واحد ها و باقی مانده ها در مدل رگرسیون خطی با اثرات آمیخته، مناسب تر است.

برای اطلاعات دقیق تر، نجف آبادی و کاظمی (۱۳۸۹) را ببینید.

❖ کاربرد توزیع نرمال چوله در تعیین نقطه تغییر^۱

نقطه تغییر همان گونه که از اسم آن پیداست، نقطه ایی است که در آن روند داده ها تغییر می کند.

شکل (۱-۳)، وجود دو نقطه تغییر در نقاط ۱۰۰ و ۱۹۹ را نشان می دهد.



شکل (۱-۳) - تعیین نقطه تغییر

تعیین نقطه تغییر، در تحلیل های آماری از اهمیت ویژه ایی برخوردار است. به طوری که در علوم پزشکی نقش حیاتی دارد. از این رو مشخص نمودن این نقطه بسیار حائز اهمیت است. برای تعیین این

1. Change point

نقطه، از استنباط بیزی استفاده می‌کنند. فرض بر این است که داده‌ها دارای توزیع نرمال هستند. حال در یک نظریه، فرض زیر را خواهیم داشت.

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim SN_1(\mu, \sigma^2, \lambda)$$

تابع درست‌نمایی که در استنباط بیزی کاربرد دارد به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$L(x|\mu, \sigma^2, \lambda) = \left(\frac{2}{\sigma}\right)^n \varphi_n\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Phi_n\left(\lambda\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

در این نظریه جدید، احتمال تعیین نقطه تغییر به شرط پارامتر چولگی در توزیع پسین، افزایش می‌یابد. این موضوع استفاده از توزیع نرمال چوله را توجیه می‌کند. برای اطلاعات بیشتر می‌توان به کاسترو^۱ و همکاران (۲۰۰۸) مراجعه نمود.

❖ کاربرد توزیع نرمال چوله در قابلیت اعتماد^۲

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع پیوسته F و تابع چگالی f باشد، در این صورت سه مولفه در مبحث قابلیت اعتماد به صورت زیر معرفی می‌شوند.

(۱) تابع بقای X

$$\bar{F}(t) = P(X > t) = 1 - F(t)$$

(۲) نرخ شکست X

$$r_F(t) = \frac{f(t)}{F(t)}$$

(۳) میانگین تابع حیات باقی مانده یا امید به زندگی

$$\mu_F(t) = E(X - t | X > t)$$

1. Castro
2. Reliability

واضح است که این سه مولفه هم ارز بوده و با داشتن یکی از این سه مولفه، می توان دو مولفه دیگر را به راحتی به دست آورد. ملاک های دیگری از این سه مولفه مطرح می شوند که خواننده را برای جزئیات بیشتر به براون^۱ (۲۰۰۱) ارجا می دهیم.

در این بخش قصد داریم مولفه های قابلیت اعتماد را در توزیع نرمال و نرمال چوله با یکدیگر مقایسه کنیم. برای این منظور فرض می کنیم، X یک متغیر تصادفی، دارای توزیع نرمال چوله با تابع توزیع F و تابع چگالی f و Y یک متغیر تصادفی، دارای توزیع نرمال با تابع توزیع G و تابع چگالی g باشند. در این صورت می گوئیم X از نظر نسبت درستنمایی از Y بزرگتر است اگر $\frac{f(x)}{g(x)}$ یک تابع نانزولی در x باشد. بنابراین با توجه به توابع چگالی X, Y داریم

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2\varphi_1(x)\Phi_1(\lambda x)}{\varphi_1(x)} = 2\Phi_1(\lambda x)$$

اگر $\lambda > 0$ آنگاه

۱. X از نظر نسبت درستنمایی از Y بزرگتر است.

$$r_F(x) < r_G(x) \quad \text{۲. برای هر } x$$

$$\bar{F}(x) > \bar{G}(x) \quad \text{۳. برای هر } x$$

$$\mu_F(x) > \mu_G(x) \quad \text{۴. برای هر } x$$

اگر $\lambda < 0$ آنگاه

۱. X از نظر نسبت درستنمایی از Y کوچکتر است.

$$r_F(x) > r_G(x) \quad \text{۲. برای هر } x$$

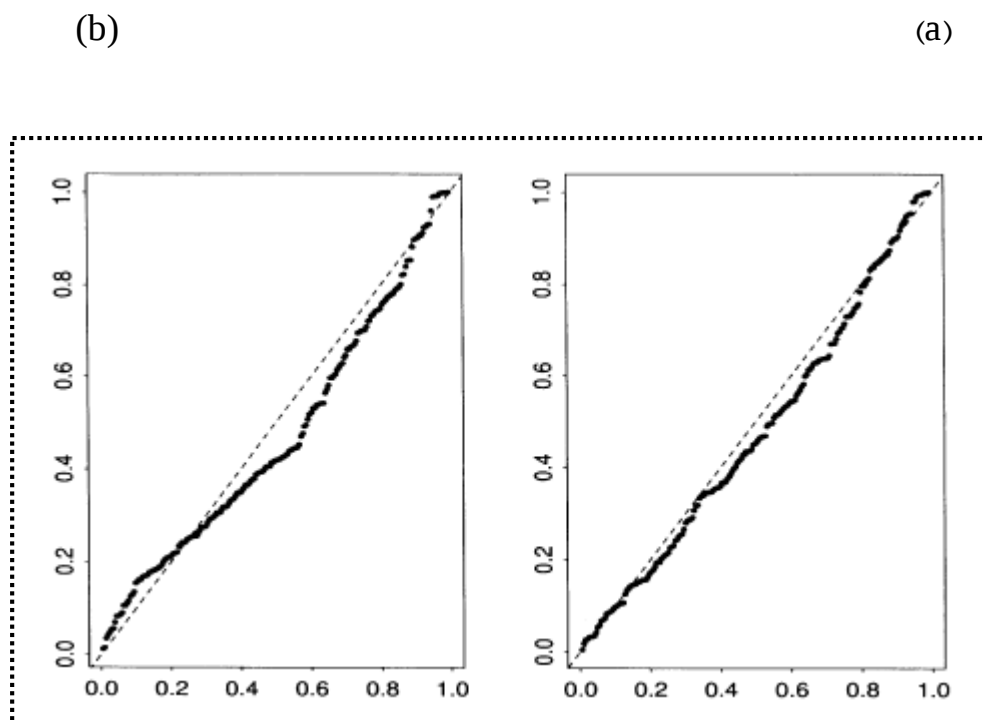
$$\bar{F}(x) < \bar{G}(x) \quad \text{۳. برای هر } x$$

$$\mu_F(x) < \mu_G(x) \quad \text{۴. برای هر } x$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود برتری توزیع نرمال چوله نسبت به توزیع نرمال، در حالتی که پارامتر چولگی مثبت است، کاملاً مشهود است.

❖ کاربرد توزیع نرمال چوله در برازش به داده‌های واقعی مربوط به AIS

در این بخش داده‌های واقعی مربوط به چهارخصوصیت از ۲۰۲ ورزشکار استرالیایی، برگرفته از Cook and Weisberg (1994)، در نظر گرفته شده است. توزیع نرمال و نرمال چوله به این داده‌ها برازش یافته، که نتایج به صورت زیر گزارش شده است.

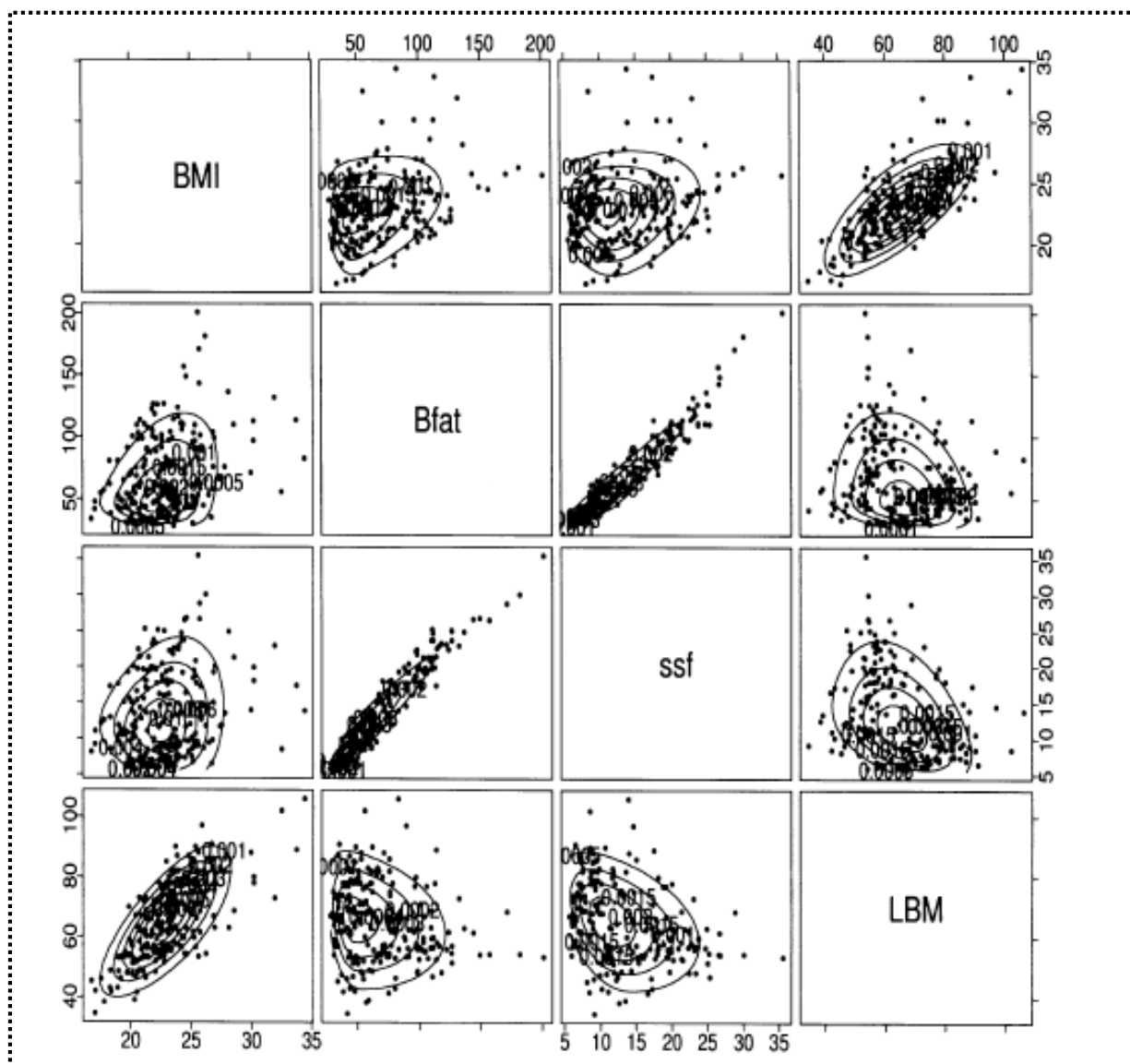


شکل (۴-۱) - مقایسه توزیع نرمال و نرمال چوله در برازش به داده‌های واقعی مربوط به AIS

در شکل (۴-۱)، نمودار (b) برازش توزیع نرمال و نمودار (a) برازش توزیع نرمال چوله به داده‌های واقعی را نشان می‌دهد. و ملاحظه می‌شود، برازش توزیع نرمال چوله دقت بیشتری نسبت به توزیع نرمال دارد.

شکل (۵-۱) نمودار کانتور^۱ (نمودار منحنی تراز) را برای چهار خصوصیت از داده‌های مربوط به AIS، به صورت دو دویی نشان می‌دهد.

1. Contour plot



شکل (۱-۵)- نمودار کانتور برای چهار خصوصیت از داده های واقعی

و همان طور که مشاهده می شود، نمودارهای میانی نشان دهنده برازش مناسب توزیع نرمال چوله به این داده ها هستند.

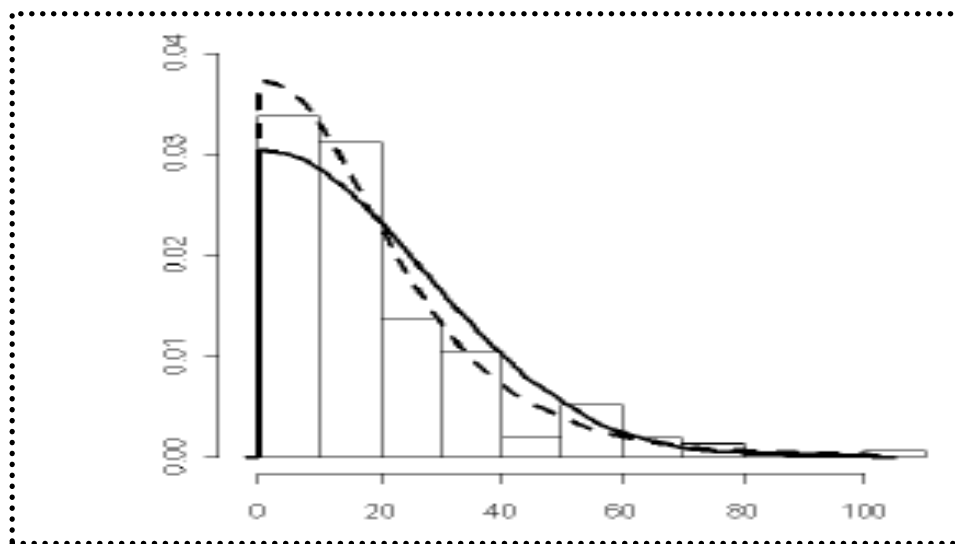
برای جزئیات بیشتر به آزالینی و کاپیتانیو (۱۹۹۹) مراجعه نمایید.

❖ کاربرد توزیع t -استیودنت چوله در مدل بندی داده های مربوط به آلودگی تالاب

شادگان

توزیع t -استیودنت چوله که توسط گامز و همکاران (۲۰۰۷) معرفی شده است، دارای دنباله های ضخیم تر و ضرایب چولگی و کشیدگی با برد وسیع تر نسبت به توزیع نرمال چوله آزالینی (۱۹۸۵) است. برخی از ویژگی های این توزیع توسط لاین و همکاران (۲۰۰۹) مطرح گردیده است. در این بخش داده های میزان آلودگی تالاب شادگان به فلز وانادیوم در نظر گرفته شده است.

هیستوگرام داده های آلودگی فلز وانادیوم، به همراه برازش توزیع نرمال چوله و t -استیودنت چوله در شکل (۶-۱) مشاهده می شود.



شکل (۶-۱) - هیستوگرام داده های تالاب شادگان به همراه برازش توزیع نرمال چوله و t -استیودنت چوله

که در آن خط ممتد بیانگر برازش توزیع نرمال چوله و خط چین نشان دهنده برازش توزیع t -استیودنت چوله است. کاملاً واضح است که توزیع t -استیودنت چوله برازش محتمل تری نسبت به توزیع نرمال چوله دارد.

برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها و مقادیر آماره کلموگروف-اسمیرنوف و لگاریتم تابع درستنمایی داده های فلز وانادیوم، برای توزیع نرمال چوله (SN) و t -استیودنت چوله (ST) در جدول (۳-۱) نشان داده شده است. که در آن μ پارامتر مکان و σ^2 پارامتر مقیاس است.

لازم به یادآوری است که زمانیکه آزمون χ^2 نتایج خوبی را بیان نمی‌کند، از آزمون کلموگروف-اسمیرنوف استفاده می‌شود. که اساس این آزمون، مقایسه فراوانی تجمعی مشاهده شده با فراوانی تجمعی مورد انتظار است.

جدول (۳-۱) - برآورد پارامترهای داده های آلودگی شادگان برای دو مدل SN و ST

مدل SN	مدل ST	برآورد پارامترها
-	۴,۶۴۰	$\hat{\nu}$
۱,۲۷۰۷۳۰	۱,۸۵۳۱۹۶	$\hat{\lambda}$
۹,۹۹۹۱۲۰	۹,۹۹۹۴۹۰	$\hat{\mu}$
۲,۶۳۰۲۶۹	۲,۰۳۳۹۶۳	$\hat{\sigma}^2$
۰,۱۱۹۴	۰,۰۴۵۳	KSS
-۶۱۵,۳۲۹	-۶۱۰,۴۴۲	Loglikelihood

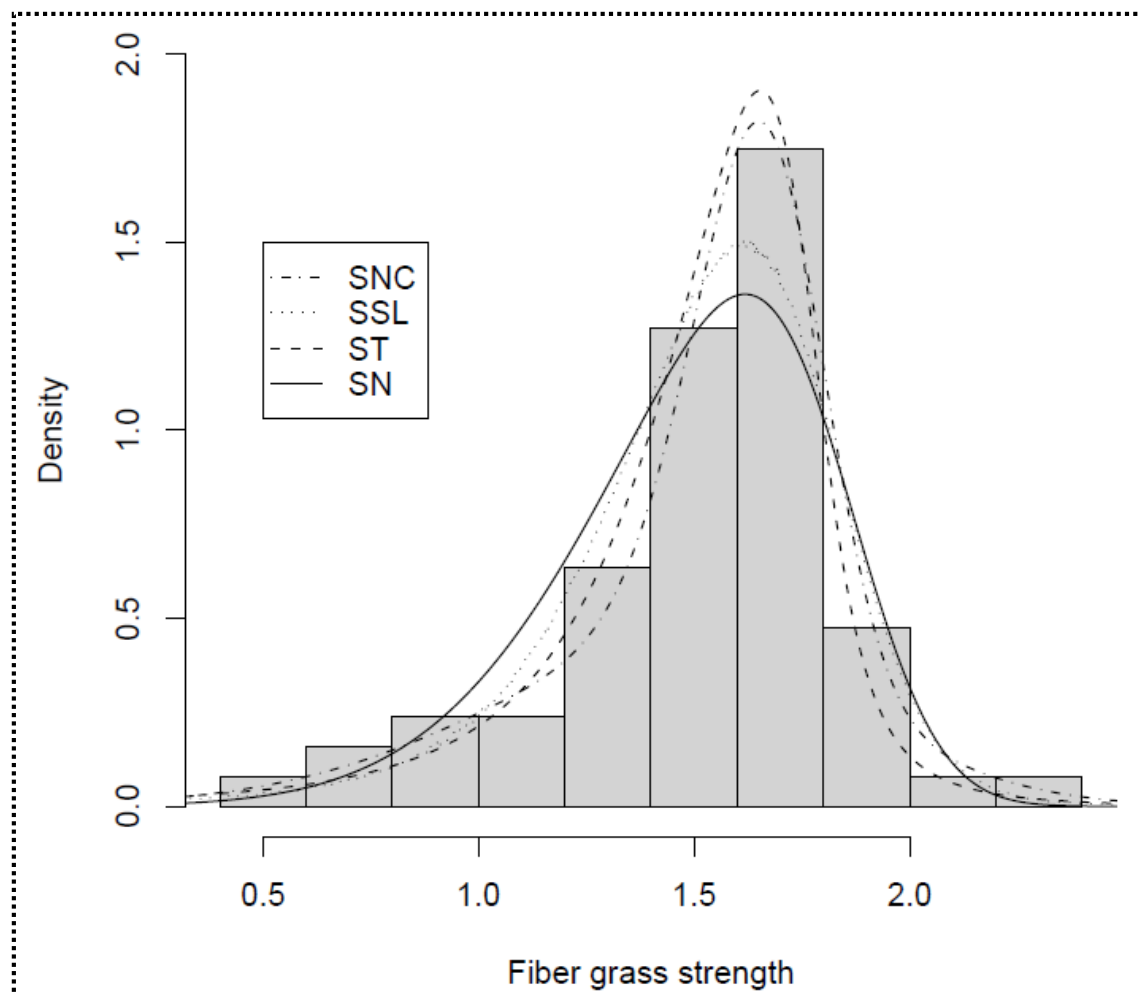
همان‌طور که در جدول (۳-۱) مشخص است، آزمون نیکویی برازش کلموگروف - اسمیرنوف، برای هر دو توزیع نرمال چوله و t -استیودنت چوله، در سطح $\alpha = 0.01$ معنی دار است. اما لگاریتم تابع درستنمایی مقدار بزرگتری را برای توزیع t -استیودنت چوله نسبت به توزیع نرمال چوله اختیار نموده است. این نتایج بیانگر این مطلب هستند که هر دو توزیع به داده ها قابل برازش هستند، اما توزیع t -استیودنت چوله برازش محتمل تری نسبت به توزیع نرمال چوله به داده های میزان فلز وانادیوم دارد. البته این نتیجه با توجه به شکل (۶-۱) نیز، قابل استنباط است.

برای اطلاعات بیشتر خردمندی و سنجری فارسی پور (۱۳۸۸) را ببینید.

❖ کاربرد توزیع نرمال چوله آلایشی در مدل بندی داده های مربوط به fiber grass

در این بخش داده های مربوط به ۶۳ مشاهده از میزان قدرت کششی از یک نوع الیاف خاص در نظر گرفته شده است. هیستوگرام این داده ها به همراه نمودار برازش چهار مدل از توزیع ها شامل، توزیع

نرمال چوله (SN)، t -استیودنت چوله (ST)، اسلش چوله (SSL) و نرمال چوله آلاشی (SNC) در شکل (۷-۱) نشان داده شده است.



شکل (۷-۱) - هیستوگرام داده های مربوط به **fiber-grass** و برازش چهار مدل SN,ST,SSL,SNC

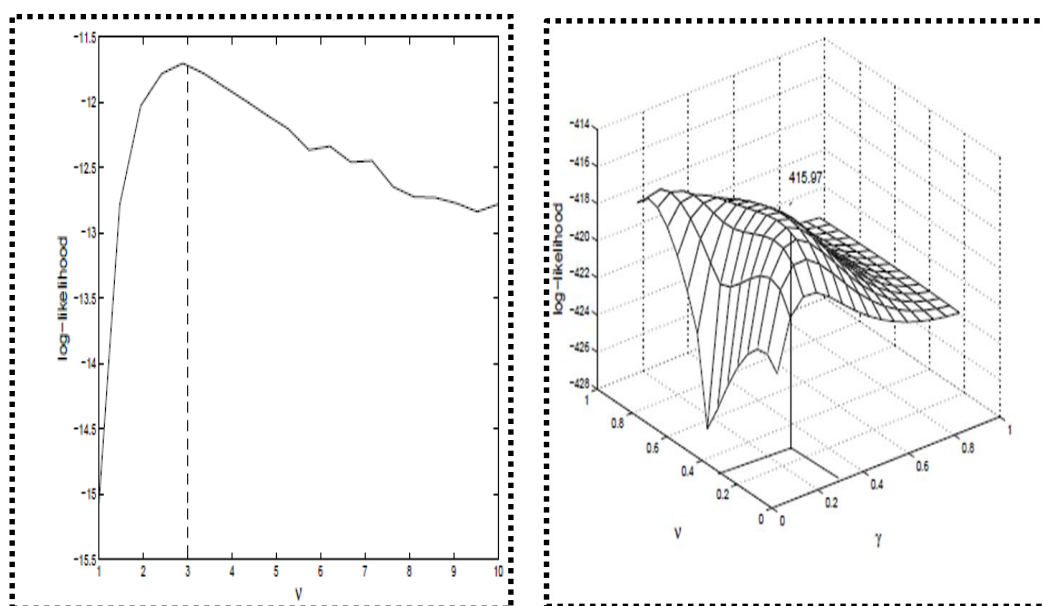
همچنین برآورد پارامترها به همراه میزان لگاریتم تابع درستنمایی محاسبه شده برای چهار مدل برازش یافته، در جدول (۴-۱) مشاهده می شود.

جدول (۴-۱) - برآورد پارامتر داده های مربوط به fiber-grass برای چهار مدل SN,ST,SSL,SNC

distribution	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$	ν	γ	Log-likelihood
SN	1.8503 (0.0468)	0.4705 (0.0464)	-2.6789 (0.7513)	-	-	-13.9571
ST	1.7549 (0.045)	0.2725 (0.0353)	-1.6196 (0.6523)	3	-	-11.7546
SCN	1.7241 (0.0393)	0.1615 (0.0187)	-1.2940 (0.5080)	0.5	0.10	-9.1928
SSL	1.805591 (0.0461)	0.2989667 (0.0366)	-1.870298 (0.6320)	1.7	-	-12.9367

با توجه به میزان لگاریتم تابع درستنمایی برای توزیع نرمال چوله آلایشی در جدول (۴-۱) و برازش محتمل تر این توزیع به داده ها نسبت به سه مدل دیگر در شکل (۷-۱)، استفاده از این توزیع در برازش به داده ها در الویت قرار دارد.

همچنین لازم به ذکر است که برآورد پارامترهای μ, σ^2, λ برای چهار مدل ذکر شده، توسط الگوریتم EM انجام شده است. برآورد ν در توزیع t-استیودنت چوله و برآورد ν, γ در توزیع نرمال چوله آلایشی با توجه به شکل (۸-۱) و با در نظر گرفتن بیشترین میزان لگاریتم تابع درستنمایی، مشخص شده اند.



شکل (۸-۱) - تعیین پارامتر ν, γ برای توزیع t-استیودنت چوله و نرمال چوله آلایشی

برای جزئیات بیشتر لاکاس^۱ و همکاران (۲۰۱۱) را ببینید.

❖ کاربرد توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی در مدل خطای اندازه گیری چند

متغیره

فرض کنید n اندازه نمونه باشد، X_i مقدار مشاهده شده در واحد i ، y_{ij} ، j -امین پاسخ مشاهده

شده در واحد i و x_i مقدار غیر مشاهده شده برای واحد i -ام باشد. مدل موردنظر به صورت زیر

تعریف می شود

$$X_i = x_i + u_i$$

9

$$Z_i = \alpha + \beta x_i + e_i$$

که در آن Z_i بردار پاسخ برای i -امین واحد آزمایشی، e_i بردار تصادفی از خطاهای اندازه گیری شده و

α, β بردار پارامترها هستند. فرض کنید $\epsilon_i = (u_i, e_i^T)^T$ و $Y_i = (X_i, Z_i^T)^T$ در این صورت معادلات

بالا به صورت مدل زیر معرفی می شوند.

$$Y_i = a + bx_i + \epsilon_i$$

که در آن

$$b = (1, \beta^T)^T, \quad a = (0, \alpha^T)^T$$

در یک نظریه جدید فرض های زیر را معرفی می کنیم.

$$\begin{pmatrix} x_i \\ \epsilon_i \end{pmatrix} \sim SNI \left(\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}, D, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, H \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ \epsilon_i \end{pmatrix} | U_i = u_i \sim SN \left(\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}, U^{-1}D, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

فرض های جدید، دقت استنباط در مدل خطای اندازه گیری را افزایش می دهند.

1. Lachos

برای اطلاعات بیشتر لاکاس و همکاران (۲۰۱۱) را ببینید

کاربردهای دیگری از توزیع های معرفی شده در این پایان نامه، از جمله، کاربرد توزیع اسلش چوله در سری های زمانی، کاربرد توزیع نرمال چوله در عملکرد شنوایی، کاربرد توزیع t -استیودنت چوله در دسته بندی داده های فعال شده با مواد فلورسن، و غیره وجود دارند که مورد توجه قرار نگرفتند. برای جزئیات بیشتر به آرنولد و بیور (۲۰۰۲) مراجعه کنید.

در تمامی موارد ذکر شده، نتایج به دست آمده گویای این مطلب است که، کاربرد این مدل از توزیع ها به جای توزیع نرمال، استنباط دقیق تری را در تحلیل های آماری فراهم می کند. در نتیجه ضرورت معرفی و شناخت چنین توزیع هایی بیش از پیش احساس می شود. بنابراین در راستای این پایان نامه قصد داریم مدل های مختلفی از توزیع های نرمال چوله و خانواده ایی از توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی را معرفی کرده، خصوصیات مهمی از این توزیع ها را بر شمریم.

۳.۱ معرفی ساختار کاملی از مدل های چوله

مدل نرمال چوله تک متغیره آزالینی (۱۹۸۵)، توسط دالا-واله^۱ و آزالینی (۱۹۹۶) در حالت p -متغیره بسط داده شد. در سالهای بعد افراد زیادی از جمله آرلانو-واله^۲ و همکاران (۲۰۰۵) این نوع از توزیع ها را تعمیم دادند و خصوصیات بسیاری از این مدل ها را بیان کردند. در این بخش سعی کرده ایم مدل های چوله ایی که تاکنون توسط آماردانان معرفی و بیان شده را جمع آوری کرده و برای سهولت دسترسی در جدول (۵-۱) نمایش دهیم. همچنین لازم است عنوان کنیم که، مدل هایی که در جدول (۵-۱) با علامت (**) نشان داده شده است، تحت عنوان توزیع نرمال چوله چند متغیره با یک و دو پارامتر چولگی در این پایان نامه به طور گسترده مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. و خانواده ایی از توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی برای این دو مدل نرمال چوله، معرفی شده است. و مدل هایی که با علامت (*) نشان داده شده اند. نسبت به مدل های دیگر، بیشتر مورد توجه نویسندگان این

1. Dalla-Valle
2. Arellano-Valle

پایان نامه می‌باشند. و سعی شده است جزئیات بیشتری از این مدل ها بیان شود. همچنین این مدل

ها می‌توانند پیشنهادات مناسبی برای علاقه مندان در این زمینه باشند.

جدول (۱-۵) - نمای کلی از توزیع های چوله معرفی شده

شماره مدل	علامت اختصاری	ارائه دهنده	تابع چگالی	نمایش
I	USS	Azzalini (1985)	$2f(x)\pi(x)$	$SS_1(f, \pi)$
II**	MSN	Azzalini and Dalla-Valle (1996)	$2\varphi_p(x, \mu, \Sigma)\Phi_1(\alpha_1)$	$SN_p(\mu, \Sigma, \lambda)$
III	MSE	Azzalini and Capitanio (1999)	$\frac{2}{\sqrt{ \Omega }} g(\alpha_2)H(\alpha_3)$	$SE_p(\mu, \Omega, g, H)$
IV**	MSN	Arnold and Beaver (2002)	$\frac{\varphi_p(x, \mu, \Sigma)\Phi_1(\alpha_4)}{\Phi_1(\beta_1)}$	$SN_p(\mu, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1)$
V*	UGSN	Arellano-Valle and Gomes and Quintana(2003)	$2\varphi_1(x, \mu, \sigma^2)\Phi_1(\alpha_5)$	$GSN_1(\mu, \sigma^2, \lambda_1, \lambda_2)$
VI	MSN	Gupta and Chen (2004)	$2^p \varphi_p(x) \prod_{j=1}^p \Phi_1(\alpha_6)$	$SN_p(p, \Omega, d^*)$
VII*	MFSS	Ma and Genton (2004)	$2g(x)H(P_k(x))$	$FSS_1(g, H)$
VIII	GSE	Genton and Loperfido(2005)	$\frac{2}{\sqrt{ \Omega }} g(\alpha_7)\pi(\alpha_8)$	$GSE_p(\mu, \Omega, g, \pi)$
IX*	UTPSN	Kim (2005)	$\frac{2\pi}{\beta_2} \varphi_1(x)\Phi_1(\alpha_9)$	$TPSN(\lambda)$
X	UGSN	Jamalizadeh and Behboodan and Balackrishnan (2008)	$\frac{2\pi\varphi_1(x)\Phi_1(\alpha_{10})\Phi_1(\alpha_{11})}{\cos^{-1}(\beta_3)}$	$GSN_1(\lambda_1, \lambda_2)$
XI	UGSN	Jamalizadeh and Balackrishnan (2008)	$\frac{2\pi\varphi_1(x)\Phi_2(\alpha_{12}, \alpha_{13}, \gamma)}{\cos^{-1}(\beta_4)}$	$GSN_1(\theta_1, \theta_2, \gamma)$

$TBSN_{n,m}(\lambda_1, \lambda_2)$	$\frac{\varphi_1(x)(\Phi_1(\alpha_{14}))^n(\Phi_1(\alpha_{15}))^m}{c_{n,m}(\lambda_1, \lambda_2)}$	Bahrami and Agahi and Rangin(2010)	USN	XII
$GSTPSN(\lambda_1, \lambda_2, \rho)$	$c^*(\lambda_1, \lambda_2, \rho)\varphi_1(x)\Phi_2(\alpha_{16}, \alpha_{17}, \rho)$	Jamalizadeh and Balackrishnan and Arabpour (2011)	UGTPSN	XIII
$GSN_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	$\frac{4\pi\varphi_1(x)\Phi_1(\alpha_{18})\Phi_1(\alpha_{19})\Phi_1(\alpha_{20})}{\beta_5}$	Hutton and Ogundimu (2012)	UGSN	XIV

در زیر جدول (۵-۱) به صورت مشروح بحث شده است.

مدل I: توزیع چوله-مقارن یک متغیره

$f(x)$: تابع چگالی مقارن حول صفر

$\pi(x)$: تابع چولگی، که خواص زیر برای این دسته از توابع همواره برقرار است.

$$\pi(x): \mathbb{R}^p \rightarrow [0,1] , \quad 0 \leq \pi(x) \leq 1 , \quad \pi(-x) = 1 - \pi(x)$$

مدل II:** توزیع نرمال چوله چند متغیره با یک پارامتر چولگی

$\varphi_p(x, \mu, \Sigma)$: تابع چگالی نرمال p -متغیره با میانگین μ و مقیاس Σ

$\Phi_1(x)$: تابع توزیع نرمال استاندارد

$$\alpha_1 = \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu) , \quad \mu, \lambda, x \in \mathbb{R}^p$$

مدل III: توزیع چوله-بیضی گون چند متغیره

g : تابع چگالی از یک توزیع کروی با میانگین μ و مقیاس Ω

H : تابع توزیعی از یک توزیع مقارن حول صفر

$$\alpha_2 = \Omega^{-\frac{1}{2}}(x - \mu) , \quad \alpha_3 = \lambda^T(x - \mu) , \quad x \in \mathbb{R}^p$$

مدل IV^{**} : توزیع نرمال چوله چند متغیره با دو پارامتر چولگی

$$\alpha_4 = \lambda_0 + \lambda_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (x - \mu), \beta_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + \lambda_1^T \lambda_1}}, \lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, x \in \mathbb{R}^p, \beta_1 \in \mathbb{R}$$

مدل V^* : توزیع نرمال چوله تعمیم یافته یک متغیره با دو پارامتر چولگی

$\varphi_1(x, \mu, \sigma^2)$: تابع چگالی نرمال یک متغیره با میانگین μ و واریانس σ^2

$$\alpha_5 = \frac{\lambda_1(x - \mu)}{\sqrt{\sigma^2 + \lambda_2(x - \mu)^2}}, \lambda_1, \lambda_2, x \in \mathbb{R}$$

مدل VI : مدل دیگری از توزیع نرمال چوله چند متغیره

$$\alpha_6 = \lambda_j^T x, d^* = (\delta_1, \dots, \delta_p)^T, (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_p)^T, x \in \mathbb{R}$$

مدل VII^* : توزیع چوله - متقارن انعطاف پذیر چند متغیره

$H: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$: تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته متقارن حول صفر

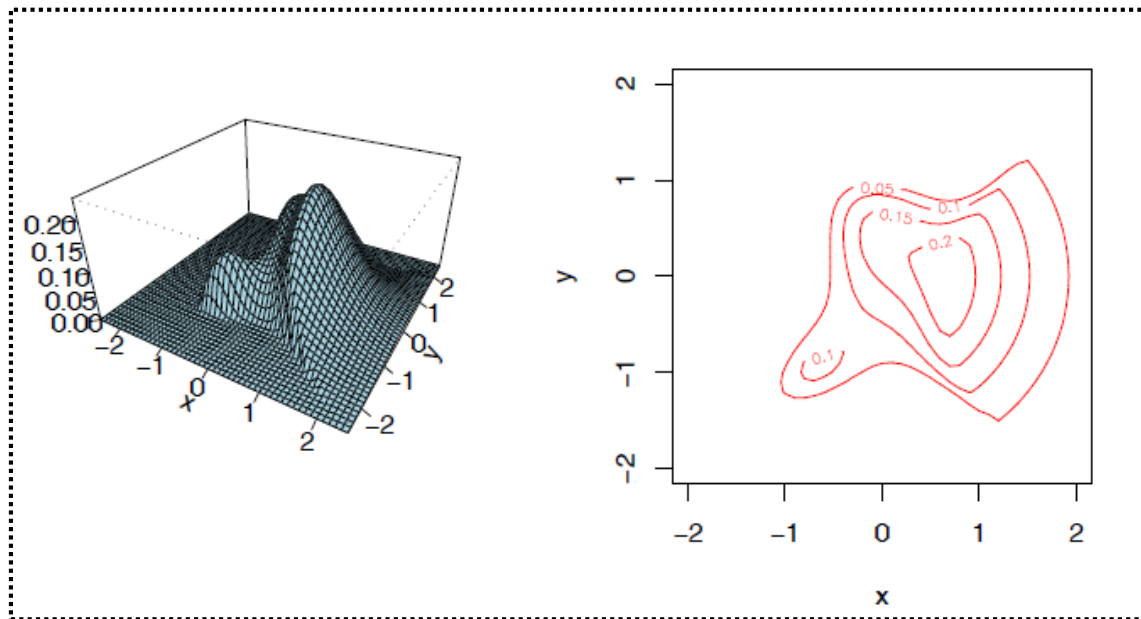
$$P_k(x) = \lambda_1 x + \lambda_3 x^3 + \dots + \lambda_k x^k, \quad x \in \mathbb{R}^p$$

که در واقع $P_k(x)$ یک چند جمله ایی فرد از مرتبه k است.

مدل VII حالت خاصی از مدل I است که با فرض $k=1, H = \Phi_1(x), P_k(x) = \lambda^T x$ بدست می-

آید. برای حالت دو متغیره، نمودار تابع چگالی و کانتور برای مدل VII در شکل (۹-۱) نمایش داده

شده است.



شکل (۹-۱) - نمودار تابع چگالی و کانتور برای مدل VII

همان طور که شکل (۹-۱) مشخص است، چند نمایی بودن، چوله بودن و دارای دنباله های نازک از خصوصیات مدل VII می باشد.

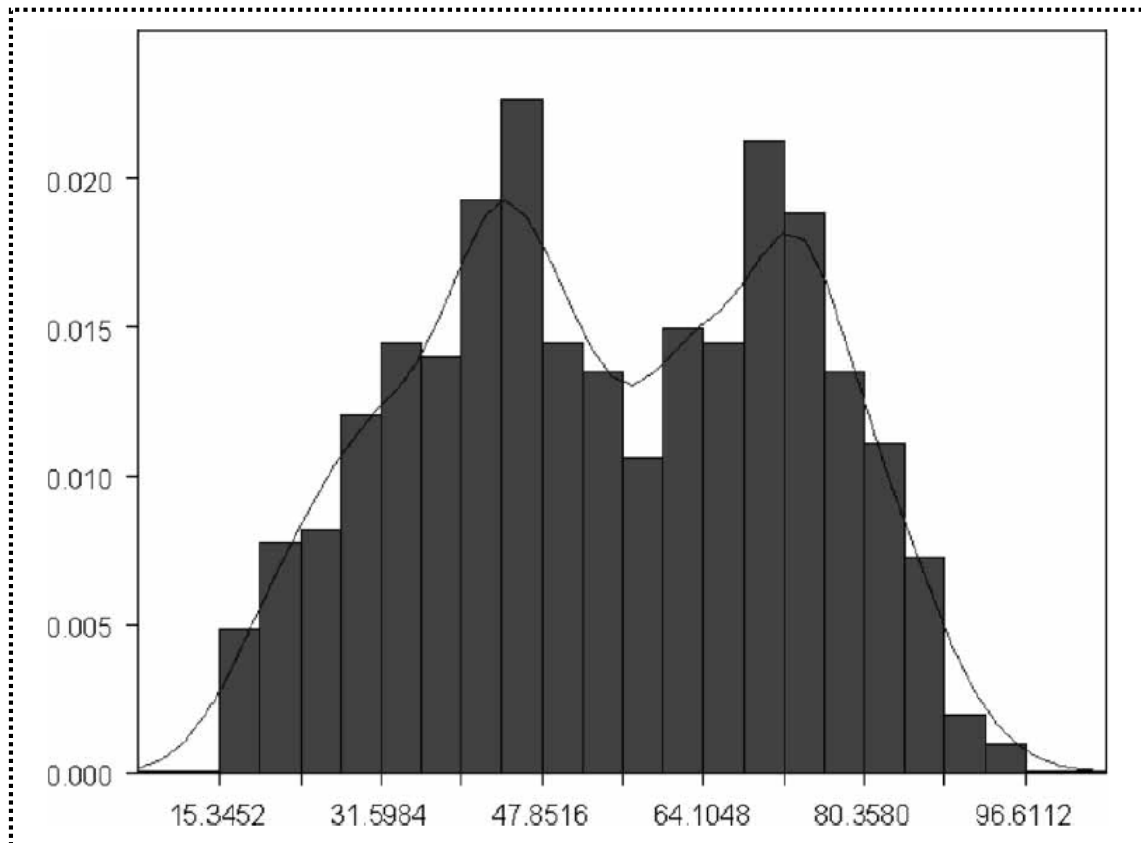
مدل VIII: توزیع چوله-بیضی گون تعمیم یافته چند متغیره

$g(x)$: تابع چگالی از یک توزیع کروی

$\pi(x)$: تابع چولگی

$$\alpha_7 = \alpha_8 = \Omega^{-\frac{1}{2}}(x - \mu), \quad x \in \mathbb{R}^p$$

در بسیاری از تحلیل های آماری با داده هایی روبرو می شویم که نمودار هیستوگرام آنها مانند شکل (۱۰-۱) است. از آنجایی که تعداد توزیعهایی که برای تشریح جوامع دو نمایی وجود دارند، نادر هستند، توزیع معرفی شده در مدل IX^* می تواند در این زمینه راهگشا باشد.



شکل (۱۰-۱) - نموداری از جوامع دو بعدی

مدل IX^* : توزیع نرمال چوله دو تکه یک متغیره

$$\beta_2 = \pi + 2 \tan^{-1}(\lambda), \alpha_9 = \lambda|x|, x, \lambda \in \mathbb{R}$$

تابع چگالی توزیع نرمال چوله دو تکه^۱ که اولین بار توسط کیم^۲ (۲۰۰۵) معرفی شد، ترکیبی از دو تابع چگالی نرمال بریده شده به صورت زیر است.

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \varphi^+(x, \lambda) + \frac{1}{2} \varphi^-(x, -\lambda), \quad x \in \mathbb{R}$$

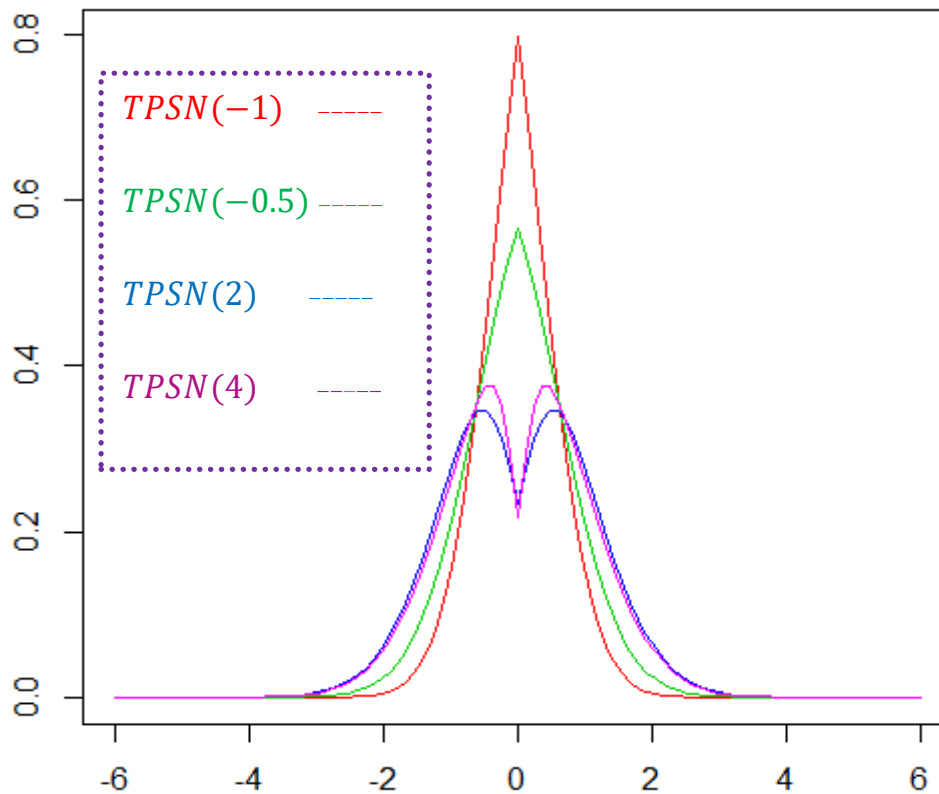
که در آن

$$\varphi^+(x, \lambda): \text{تابع چگالی نرمال چوله با شرایط } x > 0$$

$$\varphi^-(x, -\lambda): \text{تابع چگالی نرمال چوله با شرایط } x < 0$$

1. Two-Piece Skew-Norma
2. Kim

این توزیع بسته به مثبت یا منفی بودن پارامتر λ می‌تواند، یک نمایی یا دو نمایی باشد. و همان طور که در شکل (۱۱-۱) دیده می‌شود، برای $\lambda > 0$ نمودار دو نمایی و برای $\lambda < 0$ تک نمایی است.



شکل (۱۱-۱) نمودار نرمال چوله دو تکه برای پارامترهای متفاوت

برای اطلاعات و جزئیات بیشتر می‌توانید به پایان نامه ارشد کریمی (۱۳۷۸) مراجعه کنید.

مدل X: توزیع نرمال چوله تعمیم یافته یک متغیره با دو پارامتر چولگی

$$\alpha_{10} = \lambda_1 x, \alpha_{11} = \lambda_2 x, \beta_3 = \left(-\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\sqrt{1 + \lambda_1^2} \sqrt{1 + \lambda_2^2}} \right), \lambda_1, \lambda_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$$

مدل XI: توزیع نرمال چوله تعمیم یافته یک متغیره با سه پارامتر

$$N_2(0,0,1,1, \gamma) : \text{تابع توزیع توأمی از } \Phi_2(\dots, \gamma)$$

$$\alpha_{12} = \theta_1 x, \alpha_{13} = \theta_2 x, \beta_4 = -\frac{\gamma + \theta_1 \theta_2}{\sqrt{1 + \theta_1^2} \sqrt{1 + \theta_2^2}}, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, |\gamma| < 1$$

که در آن γ ضریب همبستگی است

مدل XII : توزیع نرمال چوله تعمیم یافته یک متغیره بالا کریشان^۱

$$c_{n,m}(\lambda_1, \lambda_2) = E\left((\Phi_1(\lambda_1 Z))^n (\Phi_1(\lambda_2 Z))^m\right), \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\alpha_{14} = \lambda_1 x, \quad \alpha_{15} = \lambda_2 x \quad x, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

که در آن n, m اعداد صحیح نامنفی هستند.

لازم به ذکر است که، مدل XII معرفی شده، تعمیمی از دو مدل بالا کریشان است، که به صورت زیر معرفی شده است.

می‌گوییم $X \sim BSN_n(\lambda)$ اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f_n(x, \lambda) = \frac{1}{c_n(\lambda)} \varphi_1(x) [\Phi_1(\lambda x)]^n, \quad \lambda, x \in \mathbb{R}$$

که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است، و اگر $V, U_1, \dots, U_n \sim N(0,1)$ باشند. آنگاه می‌توان $c_n(\lambda)$ را به صورت زیر محاسبه نمود.

$$c_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x) [\Phi_1(\lambda x)]^n dx = E(\Phi_1^n(\lambda V))$$

$$= P(U_1 \leq \lambda V, \dots, U_n \leq \lambda V)$$

و همچنین می‌گوییم $X \sim GBSN_{n,m}(\lambda)$ اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f_{n,m}(x, \lambda) = \frac{1}{c_{n,m}(\lambda)} [\Phi_1(\lambda x)]^n [1 - \Phi_1(\lambda x)]^m \varphi_1(x), \quad \lambda, x \in \mathbb{R}$$

که در آن n, m اعداد صحیح نامنفی است و $c_{n,m}(\lambda)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$c_{n,m}(\lambda) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi_1(\lambda x)]^{n+i} \varphi_1(x) dx$$

مدل $XIII$: توزیع نرمال چوله دو تکه با سه پارامتر

$$c^*(\lambda_1, \lambda_2, \rho) = \frac{4\pi}{\cos^{-1}\left(-\frac{(\rho+\lambda_1\lambda_2)}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right) + \cos^{-1}\left(-\frac{(\rho-\lambda_1\lambda_2)}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}}\right) + 2\tan^{-1}(\lambda_2)}$$

$$\alpha_{16} = \lambda_1 x, \alpha_{17} = \lambda_2 |x| \quad , x, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, |\rho| < 1$$

که در آن ρ ضریب همبستگی است.

مدل XIV : توزیع نرمال چوله تعمیم یافته با سه پارامتر چولگی

$$\alpha_{18} = \lambda_1 x, \alpha_{19} = \lambda_2 x, \alpha_{20} = \lambda_3 x \quad , \quad x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

$$\beta_5 = 2\pi - \cos^{-1}(\rho_{12}) - \cos^{-1}(\rho_{13}) - \cos^{-1}(\rho_{23})$$

که در آن

$$\rho_{ij} = \frac{\lambda_i \lambda_j}{\sqrt{1 + \lambda_i^2} \sqrt{1 + \lambda_j^2}} \quad , i \neq j, i, j = 1, 2, 3$$

علاوه بر توزیع های معرفی شده در بخش ۳، ۱، توزیع های دیگری از جمله توزیع نرمال چوله-لاپلاس^۱، نرمال چوله-بتا^۲، نرمال چوله-اپسیلون^۳، لگ چوله-بیضی گون^۴ و غیره وجود دارند که فرصت بررسی آنها در این پایان نامه فراهم نشده است.

۴.۱ تعاریف و لم های مورد نیاز

در این بخش تعاریف و لم هایی را که در فصل های آتی مورد استفاده قرار می گیرند، بیان می کنیم.

تعریف ۱، ۱ متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال بریده شده^۵ با پارامترهای μ و σ^2 روی بازه (a, b)

است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر تعریف شود.

1. Laplas-skew normal
2. Beta-skew-normal
3. Epsilon-skew-normal
4. Log-skew-elliptical
1. Truncate normal distribution

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{\left\{ \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right\}^{-1}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2 \right\} I\{a < x < b\}$$

و از نماد زیر برای نمایش این مدل استفاده می‌کنیم

$$X \sim TN(\mu, \sigma^2) I\{a < x < b\}$$

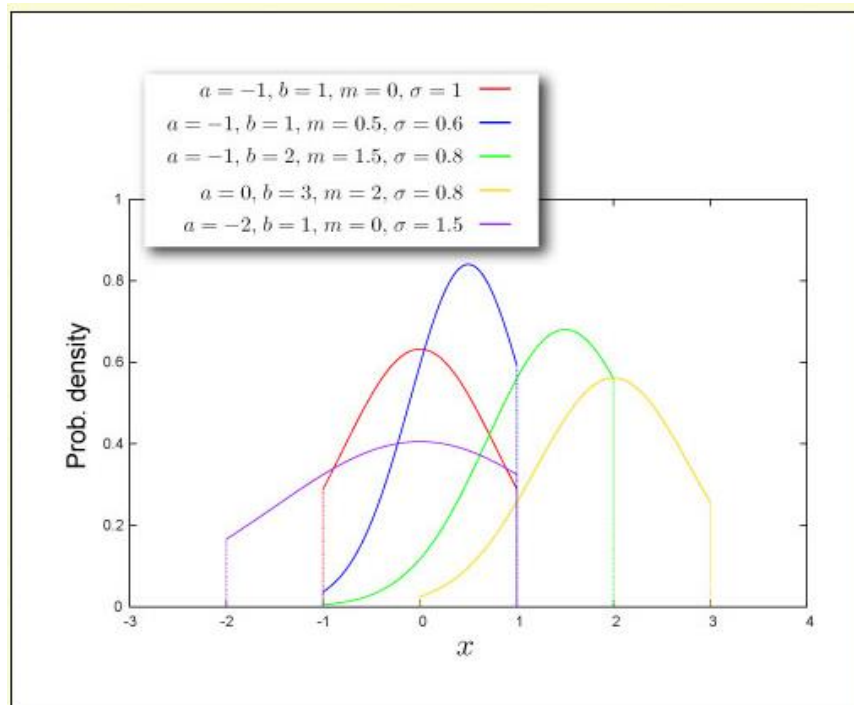
همچنین امیدریاضی و واریانس این خانواده به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(X|a < x < b) = \mu + \sigma \frac{\varphi_1\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \varphi_1\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi_1\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi_1\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}$$

$$Var(X|a < x < b)$$

$$= \sigma^2 \left[1 + \frac{\frac{a-\mu}{\sigma} \varphi_1\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \frac{b-\mu}{\sigma} \varphi_1\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi_1\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi_1\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)} - \left(\frac{\varphi_1\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \varphi_1\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi_1\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi_1\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)} \right)^2 \right]$$

به منظور افزایش دید شهودی از این توزیع شکل (۱۲-۱) را خواهیم داشت.



شکل (۱۲-۱) - نمودار تابع چگالی توزیع نرمال بریده شده برای پارامترهای متفاوت

تعریف ۲,۱ متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال p -متغیره است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر تعریف شود.

$$X \sim N_p(\mu, \Sigma) \Rightarrow f_X(x) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{d}{2}\right\}$$

که در آن $d = (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)$ فاصله ماکسیمیسی نامیده می‌شود.

تعریف ۳,۱ متغیر تصادفی X دارای توزیع فیشر است، به گونه ایی که تابع چگالی آن به صورت زیر معرفی می‌شود.

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{x^{\frac{m-2}{2}}}{\left[1 + \left(\frac{m}{n}\right)x\right]^{\frac{m+n}{2}}}, \quad 0 < x < \infty$$

در این صورت گفته می‌شود متغیر تصادفی X دارای توزیع فیشر با m, n درجه آزادی است.

تعریف ۴,۱ متغیر تصادفی X دارای توزیع کی-دو است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$X \sim \chi^2_{\alpha} \Rightarrow f_X(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} x^{\frac{\alpha}{2}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}x\right\}, \quad x, \alpha > 0$$

تعریف ۵,۱ تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

تعریف ۶,۱ متغیر تصادفی X دارای توزیع بتا است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1$$

تعریف ۷,۱ متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر تعریف شود.

$$X \sim \Gamma(\alpha, \beta) \Rightarrow f_X(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\{-\beta x\}, \quad \alpha, \beta, x > 0$$

تعریف ۸,۱ (فنگ^۱ و همکاران، ۱۹۹۰) بردار p -بعدی X دارای توزیع بیضیگون^۲ با پارامترهای

μ, Σ و g است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر تعریف شود

$$f_X(x) = c_p |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} g \left[\frac{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)}{2} \right]$$

که در آن $g(\cdot)$ تابع مولد چگالی^۳ است و دارای شرط زیر است.

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} g(x) dx < \infty$$

و از نماد زیر برای نمایش این توزیع استفاده می‌شود

$$X \sim EC_p(\mu, \Sigma, g)$$

تعریف ۹,۱ می‌گوییم X دارای توزیع t -استیودنت غیر مرکزی با درجه آزادی $\nu > 0$ و پارامتر غیر

مرکزی $\mu \in \mathbb{R}$ است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = \frac{v^{\frac{\nu}{2}} \exp \left\{ -\frac{\nu \mu^2}{2(x^2 + \nu)} \right\}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) 2^{\frac{\nu-1}{2}} (x^2 + \nu)^{\frac{\nu+1}{2}}} \int_0^{\infty} y^{\nu} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(y - \frac{\mu x}{\sqrt{x^2 + \nu}} \right)^2 \right\} dy$$

امید ریاضی و واریانس این توزیع به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E(X) = \mu \sqrt{\frac{\nu}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \quad \nu > 1$$

$$Var(X) = \frac{\nu(1 + \mu^2)}{\nu - 2} - \frac{\mu^2 \nu}{2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right)^2, \quad \nu > 2$$

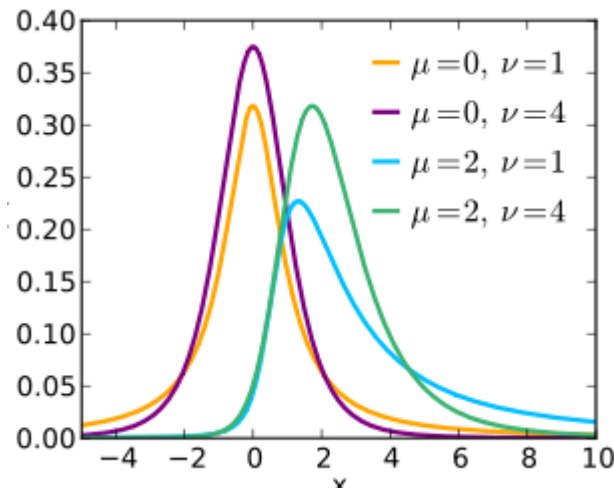
نموداری از تابع چگالی توزیع t -استیودنت غیر مرکزی برای پارامتر غیر مرکزی μ و درجه آزادی ν به

ازای مقادیر مختلف در شکل (۱۳-۱) نمایش داده شده است.

1. Fang

2. Elliptically contoured distribution

3. Density generator



شکل (۱-۱۳) - نمودار تابع چگالی توزیع t -استیودنت غیر مرکزی به ازای پارامترهای مختلف

لم ۱,۱ (فنگ و همکاران، ۱۹۹۰) اگر $X \stackrel{d}{=} Y$ باشد، در صورتی که g یک تابع اندازه پذیر بول^۱ باشد. آنگاه

$$g_X(x) \stackrel{d}{=} g_Y(y)$$

تعریف ۱۰,۱ تابع توزیع $F(x)$ قویا تک نمایی است اگر پیچش آن با هر تابع توزیع تک نمایی دیگر تابعی تک نمایی باشد.

تعریف ۱۱,۱ (کارلین ۱۹۶۸^۲) نشان داد تابع توزیع $F(x)$ قویا تک نمایی است اگر و تنها اگر لگاریتم تابع چگالی متناظر آن در هر فاصله (a, b) به طوریکه $\int_a^b f(x)dx = 1$ ، تابعی مقعر باشد. یا به عبارت دیگر مشتق دوم لگاریتم تابع چگالی آن به ازای تمام مقادیر دامنه اش منفی باشد.

لم ۲,۱ (آزالینی، ۱۹۸۵) اگر $U \sim N(0,1)$ آنگاه برای هر عدد حقیقی h, k

$$E(\Phi(hU + k)) = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{1+h^2}}\right)$$

نتیجه ۱,۱ (آزالینی و دالا-واله، ۱۹۹۶) فرض کنید $U \sim N_p(\mathbf{0}, \Omega)$ در این صورت برای هر عدد

حقیقی k و بردار $h \in \mathbb{R}^p$

2. Borel
1. Carlin

$$E\left(\Phi(\mathbf{h}^T \mathbf{U} + k)\right) = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{1 + \mathbf{h}^T \Omega \mathbf{h}}}\right)$$

(*) لم ۳،۱ (آزالینی، ۱۹۸۵) فرض کنید g یک تابع چگالی متقارن حول صفر باشد. و G یک تابع

توزیع پیوسته با شرط متقارن بودن G' حول صفر، در این صورت

$$2g_X(x)G(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}$$

یک تابع چگالی برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ خواهد بود.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2g_X(x)G(\lambda x) dx = 1 \quad \text{برهان: برای اثبات کافی است نشان دهیم}$$

بنابراین فرض می‌کنیم X, Y دو متغیر تصادفی مستقل، به گونه ایی که X دارای تابع توزیع G و Y

دارای تابع چگالی g باشد. از آنجاییکه X, Y هردو حول صفر متقارن هستند، بنابراین $X - \lambda Y$ نیز

حول صفر متقارن خواهد بود. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= P(X - \lambda Y < 0) = E_Y(P(X < \lambda Y) | Y = y) \\ &= E(G(\lambda y) | Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda y) g_X(y) dy \end{aligned}$$

و برهان کامل است. $\square$

تعریف ۱۲،۱ (آزالینی و کاپیتانیو، ۲۰۰۳) اگر f تابع چگالی متقارن حول صفر، $G: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ تابع

توزیعی از یک متغیر تصادفی حول صفر و $w: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع فرد باشد. آنگاه توزیع چوله-

متقارن به صورت زیر معرفی می‌شود.

$$2f(x)G(w(x)), \quad x \in \mathbb{R}^p$$

لم ۴،۱ (گوپتا، ۲۰۰۳) فرض کنید $X \sim \chi_k^2$ باشد در این صورت

$$E\left(\Phi(a\sqrt{X} + b)\right) = T_{k,b^2}(a\sqrt{k})$$

برهان: فرض کنید $Z \sim N(0,1)$ ، بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
 E\left(\Phi(a\sqrt{u} + b)\right) &= E_U\left(P(Z < a\sqrt{u} + b | U = u)\right) \\
 &= E_U P\left(\frac{Z-b}{\sqrt{u}} < a\sqrt{k} \mid U = u\right) = P(T_k < a\sqrt{k}) = F_{T_k, b^2}(a\sqrt{k})
 \end{aligned}$$

وبرهان کامل است. $\square$

لم ۵,۱ (وانگ و همکاران، ۲۰۰۴) فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر باشد

$$g(x) = 2 f(x)\pi(x)$$

که در آن $f(x)$ تابع چگالی احتمال از یک بردار تصادفی بیضی گون و $\pi(x): \mathbb{R}^p \rightarrow [0,1]$ یک تابع چولگی است، در این صورت توزیع هر تابع زوجی از $\tau(x)$ به $\pi(x)$ بستگی نخواهد داشت

برهان: از آنجاییکه تابع مشخصه توزیع را به صورت یکتا مشخص می کند، فرض می کنیم

$$\begin{aligned}
 h(t) &= E(e^{i\tau(x)t}) = \int_{\mathbb{R}^p} 2e^{i\tau(x)t} f(x)\pi(x)dx \\
 &= \int_{A^+} 2e^{i\tau(x)t} f(x)\pi(x)dx + \int_{A^-} 2e^{i\tau(x)t} f(x)\pi(x)dx \\
 &= 2 \int_{A^+} e^{i\tau(x)t} f(x)[\pi(x) + 1 - \pi(x)]dx = \int_{\mathbb{R}^p} e^{i\tau(x)t} f(x)dx
 \end{aligned}$$

که در آن

$$A^+ = \{(x_1, \dots, x_p), x_1 \geq 0\}, \quad A^- = \{(x_1, \dots, x_p), x_1 < 0\}$$

بنابراین اثری از تابع چولگی وجود ندارد و برهان کامل است. $\square$

تعریف ۱۳,۱: الگوریتم EM :

الگوریتم EM یک روش عددی تقریبی است که اولین بار توسط دمپستر^۱ و همکاران (۱۹۷۸) معرفی شد. این روش یک الگوریتم تکراری است که معمولاً برای توزیع‌های آمیخته و در حالتی که مدل دارای داده‌های گمشده باشد، استفاده می‌شود. این روش شامل دو گام به صورت زیر است

- گام اول: محاسبه امید ریاضی از لگاریتم تابع درستنمایی داده‌های کامل (مجموع داده‌های

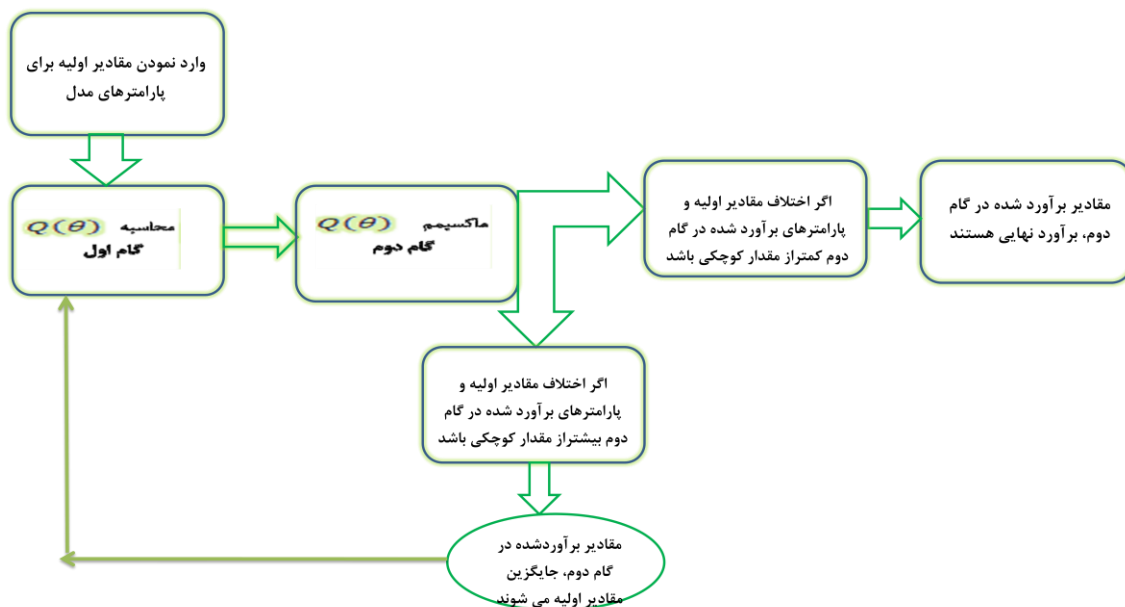
مشاهده شده و داده‌های گمشده) به شرط داده‌های مشاهده شده $Q(\theta) =$

$$E(\ell_c(\theta|X_c)|X)$$

- گام دوم: پیدا کردن بهترین برآوردگر برای پارامتر θ ، که از طریق ماکسیمم سازی تابع به-

دست آمده در مرحله قبل به صورت $Q(\theta^{(r+1)}|\theta^r) = \max_{\theta \in \Theta} Q(\theta|\theta^r)$ مشخص می‌شود

صورت نموداری از الگوریتم EM به صورت زیر است.



شکل (۱-۱۴) - فلوچارت الگوریتم EM

با توجه به اینکه الگوریتم EM یک روش تقریبی برای برآورد پارامتر مدلی با داده‌های گمشده است بنابراین فرض می‌کنیم که داشته باشیم

$$X = (X_1^T, \dots, X_n^T)^T, \quad U = (u_1, \dots, u_n)^T, \quad T = (t_1, \dots, t_n)^T$$

1. Dempster

که در آن متغیرهای U, T نشان دهنده داده های گمشده و X نشان دهنده داده های مشاهده شده است لذا مجموعه داده های کامل به صورت زیر است

$$X_c = (X^T, U^T, T^T)^T$$

لم ۶,۱ : (کابرال^۱ و همکاران، ۲۰۱۲) اگر X, U, T سه متغیر تصادفی مستقل باشند، آنگاه در صورتی که $g(\cdot)$ یک تابع اندازه پذیر باشد. داریم

$$E\{g(T)U|Y\} = E\{UE\{g(T)|Y, U\}|Y\}$$

تعریف ۱۴,۱: تابع نشانگر مجموعه A به صورت زیر تعریف می شود.

$$I(A) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

تعریف ۱۵,۱: می گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع نیم نرمال^۲ با پارامترهای μ, σ^2 است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right\}, x > 0$$

و از نماد زیر برای این توزیع استفاده می شود

$$X \sim HN(\mu, \sigma^2)$$

همچنین امید ریاضی و واریانس این توزیع به صورت زیر تعریف می شود.

$$E(X) = \mu + \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}, Var(X) = \sigma^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

تعریف ۱۶,۱: (فنگ و همکاران، ۱۹۹۰) بردار تصادفی p -بعدی X دارای توزیع کروی $S_p(\varphi)$ است اگر تابع مشخصه $\psi_X(t)$ آن به صورت زیر تعریف شود

$$\psi_X(t) = \varphi(t^T t) \quad \text{برای تابع عددی } \varphi(\cdot)$$

1. Cabral
1. Half normal distribution

که به آن تابع مولد مشخصه گفته می‌شود. و از نماد زیر برای نمایش این توزیع استفاده می‌شود

$$X \sim S_p(\varphi)$$

این توزیع دارای خواص زیادی از جمله سه خصوصیت زیر است.

(۱) توزیع های حاشیه ایی از بردار تصادفی کروی بازهم کروی هستند.

(۲) همه توابع مشخصه حاشیه ایی دارای یک مولد هستند.

(۳) فرض کنید $X \sim S_p(\varphi)$ ، آنگاه X دارای همان توزیع $ru^{(p)}$ است به طوریکه $u^{(p)}$ بردار

تصادفی توزیع شده به صورت یکنواخت روی سطح حوزه $\mathbb{R}^p$ و $r \geq 0$ یک متغیر تصادفی

مستقل از $u^{(p)}$ است. بنابراین اگر $E(r^2) < \infty$ باشد آنگاه داریم

$$E(X) = 0, \quad Cov(X) = \frac{E(r^2)}{p} I_p$$

تعریف ۱۷،۱ اگر A یک ماتریس مربع از مرتبه p باشد، آنگاه

(۱) A نامنفرد^۱ است اگر $det(A) \neq 0$.

(۲) A یک ماتریس متقارن است اگر $A = A^T$.

(۳) A یک ماتریس معین مثبت^۲ است اگر A متقارن، و برای هر بردار غیر صفر x ، داشته باشیم

$$x^T A x > 0$$

تعریف ۱۸،۱ اگر A یک ماتریس باشد آنگاه

$$\frac{\partial det(A)}{\partial A} = det(A) A^{-1T}$$

1. Nonsingular

تعریف ۱۹,۱ خانواده مکانی - مقیاسی، یک خانواده از توزیع های احتمال یک متغیره است که با پارامتر مکان و پارامتر غیر منفی مقیاس اندیس گذاری شده است. به طوری که اگر توزیع احتمال X متعلق به این خانواده باشد آنگاه برای متغیر تصادفی Y خواهیم داشت

$$Y =^d a + bX$$

فصل دوم

مدل نرمال آمیخته مقیاسی

۱.۲ مقدمه

در این فصل رده ایی از توزیع های آمیخته مقیاسی را تعریف می کنیم و در ادامه توزیع نرمال آمیخته مقیاسی را به عنوان یک حالت خاص، از این خانواده معرفی می کنیم. خانواده توزیع های نرمال آمیخته مقیاسی که اولین بار توسط اندرز^۱ و مالو^۲ (۱۹۷۴) معرفی شد، دارای توزیع های متنوعی است. در این فصل سه عضو مهم این خانواده که در استنباط های آماری نقش اساسی دارند را معرفی و خصوصیات آماری مناسبی از این سه عضو بیان می شوند.

۲.۲ توزیع آمیخته مقیاسی

فرض کنید U یک متغیر تصادفی مثبت تک نمایی با تابع توزیع $H(u, \alpha)$ (α می تواند یک عدد یا یک بردار باشد) و $g(x|\theta, \beta)$ یک تابع چگالی از خانواده مکانی-مقیاسی یا مقیاسی، با پارامتر مکان θ و پارامتر مقیاس β باشد که θ, β می توانند یک عدد یا یک بردار باشند. همچنین لازم به ذکر است که متغیر تصادفی U می تواند پیوسته، آمیخته و یا گسسته باشد. بنابراین یک مدل آمیخته مقیاسی به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۱،۲ (اندرز و مالو، ۱۹۷۴) یک مدل آمیخته مقیاسی به صورت زیر تعریف می شود.

اگر U یک متغیر تصادفی پیوسته باشد.

$$\int_u g(x|\theta, u^{-1}\beta) dH(u, \alpha) \quad (۱-۲)$$

اگر U یک متغیر تصادفی گسسته باشد.

$$\sum_{\{u: \Sigma H(u, \alpha)=1\}} g(x|\theta, u^{-1}\beta) \quad (۲-۲)$$

که در آن $H(u, \alpha)$ تابع توزیع متغیر تصادفی مثبت U با پارامتر α است.

1. Andrews
2. Mallows

در ادامه به عنوان عضوی معروف از خانواده معرفی شده، مدل نرمال آمیخته مقیاسی را به همراه خصوصیات مهمی از این خانواده معرفی خواهیم نمود.

۳.۲ مدل نرمال آمیخته مقیاسی

خانواده توزیع های نرمال آمیخته مقیاسی در سالهای اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این خانواده شامل توزیع های مهمی از جمله، توزیع t -استیودنت^۱، اسلش^۲، توانی^۳ و نرمال آلایشی^۴ است. لانگ و سینشمر^۵ (۱۹۹۳) توزیع های نرمال آمیخته مقیاسی را، که شامل گروهی از توزیع های دنباله-ضخیم^۶ است و اغلب برای مدل بندی های دقیق در مورد داده های متقارن استفاده می شود، گسترش دادند. بنابراین، متقارن بودن و داشتن دنباله های ضخیم از خصوصیات اصلی این خانواده است. به گونه ایی که این خانواده نسبت به توزیع نرمال، به عنوان یک توزیع متقارن، دارای دنباله های پهن تری است. از این رو در عمل ممکن است با داده هایی سروکار داشته باشیم که انباشتگی در دنباله های نمودار هیستوگرام این داده ها نسبت به سایر نقاط بیشتر باشد. (داده های مربوط به درآمد خانوار از این دسته هستند) در این صورت توزیع های خانواده نرمال آمیخته مقیاسی نسبت به توزیع نرمال، می توانند مدل مناسب تری برای برازش به این نوع از داده ها باشند. بنابراین معرفی و شناخت این خانواده از توزیع ها، در راستای کار این پایان نامه قرار داده شده است.

تمامی توزیع های این بخش در حالت p - متغیره بیان می شوند که با قرار دادن $p = 1$ حالت یک متغیره به راحتی بدست می آید.

تعریف ۲،۲ اگر تابع چگالی g معرفی شده در تعریف ۱،۲ با تابع چگالی نرمال p -متغیره جایگزین شود. آنگاه مدل نرمال آمیخته مقیاسی به صورت زیر بیان می شود.

-
1. Student -t distribution
 2. Slash distribution
 3. Power-exponential distribution
 4. Contaminated normal distribution
 5. Sinsheimer
 6. Thick-tailed

اگر متغیر تصادفی U پیوسته باشد.

$$\int_u \phi_p(x|\mu, u^{-1}\Sigma) dH(u, \alpha) \quad (3-2)$$

اگر متغیر تصادفی U گسسته باشد.

$$\sum_{\{u: \Sigma H(u, \alpha)=1\}} \phi_p(x|\mu, u^{-1}\Sigma) dH(u, \alpha) \quad (4-2)$$

و از نماد زیر برای نمایش خانواده توزیع های نرمال آمیخته مقیاسی استفاده می کنیم

$$X \sim NI_p(\mu, \Sigma, H) \quad (5-2)$$

(*) نتیجه ۱,۲ فرض کنید $X \sim NI_p(\mu, \Sigma, H)$ در این صورت داریم

$$X|U \sim N_p(\mu, u^{-1}\Sigma) \quad (6-2)$$

برهان: با توجه به تعریف تابع چگالی شرطی داریم

$$f_X(x) = \int_u f_{X,U}(x, u) du = \int_u f_{X|U}(x|u) h(u) du = \int_u f_{X|U}(x|u) dH(u, \alpha)$$

وبا مقایسه رابطه (۳-۲)، برهان کامل است. $\square$

نمایش تصادفی، روشی سریع، برای به دست آوردن خصوصیات مهمی از توزیع از جمله، امید ریاضی،

واریانس و غیره است. بنابراین در قضیه زیر نمایش تصادفی برای این خانواده را معرفی می کنیم.

قضیه ۱,۲ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) اگر $X \sim NI_p(\mu, \Sigma, H)$ و U, Z مستقل باشند، آنگاه نمایش

تصادفی این خانواده به صورت زیر تعریف می شود.

$$X = {}^d \mu + U^{-\frac{1}{2}} Z \quad (7-2)$$

که در آن U یک متغیر تصادفی مثبت با تابع توزیع $H(u, \alpha)$ و $Z \sim N_p(0, \Sigma)$ است.

برهان: با توجه به نتیجه ۱,۲ و مشخص بودن توزیع متغیر تصادفی U برهان کامل است. $\square$

(**) قضیه ۲,۲ فرض کنید $X \sim NI_p(\mu, \Sigma, H)$ در این صورت

$$E(X) = \mu, \quad Var(X) = \Sigma E(U^{-1})$$

برهان : با توجه به نمایش تصادفی رابطه (۷-۲) داریم

$$E(X) = E\left(\mu + U^{-\frac{1}{2}} Z\right) = \mu + E\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) E(Z) = \mu + 0 = \mu$$

و برای محاسبه واریانس، با توجه به لم ۱,۱ داریم

$$X = \mu + U^{-\frac{1}{2}} Z \Rightarrow X^2 = \left(\mu + U^{-\frac{1}{2}} Z\right)^2 = \mu^2 + U^{-1} Z^2 + 2\mu U^{-\frac{1}{2}} Z$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$E(X^2) = \mu^2 + E(U^{-1}) \Sigma + 0 = \mu^2 + E(U^{-1}) \Sigma$$

و نتیجه مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \Sigma E(U^{-1})$$

و برهان کامل است. $\square$

مقادیر به دست آمده برای امید ریاضی و واریانس موید این مطلب هستند که این خانواده، متقارن و دارای دنباله های پهن تری نسبت به توزیع نرمال است.

۴.۲ مثالهایی از توزیع نرمال آمیخته مقیاسی

در این بخش سه توزیع مهم از خانواده توزیع های نرمال آمیخته مقیاسی، که دارای خواص ویژه ای هستند و در تحلیل های آماری نقش مهمی را ایفا می کنند، معرفی می شوند. و مهمترین خصوصیات آماری از این سه توزیع بیان می شود.

۱,۴,۲ توزیع t-استیودنت :

یکی از توزیع های متقارن متعلق به خانواده توزیع های نرمال آمیخته مقیاسی، توزیع t-استیودنت است. استفاده از این توزیع در بسیاری از موارد به جای توزیع نرمال پیشنهاد شده است. برای اطلاعات بیشتر لیتل^۱ (۱۹۸۸) را ببینید. همچنین لانگ^۲ و همکاران (۱۹۸۹) برای مدل بندی های قوی، توزیع t-استیودنت را به عنوان یک پیشنهاد مناسب به کار برده اند.

روش ساخت :

فرض کنید متغیر تصادفی U معرفی شده در تعریف ۲,۲ دارای توزیع $\Gamma(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2})$ باشد. آنگاه تابع چگالی توزیع t-استیودنت p -متغیره به صورت زیر تعریف می شود.

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{p+\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\pi^{\frac{p}{2}}} \nu^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{d}{\nu}\right)^{-\left(\frac{p+\nu}{2}\right)} \quad (۸-۲)$$

که در آن $\mu \in \mathbb{R}^p$ ، $\Sigma > 0$ و ν پارامتر درجه آزادی است.

نماد زیر برای نمایش این خانواده استفاده می شود.

$$X \sim T_p(\mu, \Sigma, \nu) \quad \nu > 0$$

برای اینکه نشان دهیم توزیع t-استیودنت متعلق به خانواده نرمال آمیخته مقیاسی است، با استفاده

از رابطه (۳-۲) و با فرض $U \sim \Gamma(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2})$ با تابع چگالی $h(u, \nu) = \frac{(\frac{\nu}{2})^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} u^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\nu}{2}u}$ ، $u > 0$ داریم

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} (2\pi)^{-\frac{p}{2}} u^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{ud}{2}} \frac{(\frac{\nu}{2})^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} u^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\nu}{2}u} du$$

1. Little
2. Lange

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty u^{\frac{\nu+p}{2}-1} e^{-u\left(\frac{d+\nu}{2}\right)} du \\
&= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty u^{\frac{\nu+p}{2}-1} e^{-u\left(\frac{d+\nu}{2}\right)} \frac{\left(\frac{d+\nu}{2}\right)^{\left(\frac{\nu+p}{2}\right)}}{\left(\frac{d+\nu}{2}\right)^{\left(\frac{\nu+p}{2}\right)}} du
\end{aligned}$$

در نهایت با توجه به رابطه $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود و برهان کامل

است. $\square$

(*) قضیه ۳,۲ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) اگر $U \sim \Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$ ، آنگاه گشتاورهای معکوس متناهی

برای این توزیع به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$E(U^{-m}) = \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^m \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - m\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \quad m < \frac{\nu}{2} \quad (۹-۲)$$

برهان: با استفاده از تابع چگالی U و تعریف امید ریاضی، می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned}
E(U^{-m}) &= \int_0^\infty u^{-m} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} u^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{\nu}{2}u} du = \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty u^{\frac{\nu}{2}-m-1} e^{-\frac{\nu}{2}u} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-m}}{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-m}} du \\
&= \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} - m\right)}{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-m}} = \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^m \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - m\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}
\end{aligned}$$

نتیجه مورد نظر حاصل و برهان کامل است. $\square$

(*) قضیه ۴,۲ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $\mathbf{X} \sim T_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \nu)$ ، آنگاه فاصله مایلانویس

دارای توزیع فیشر به صورت زیر خواهد بود.

$$d = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \sim p F(p, \nu)$$

برهان : با استفاده از قضیه ۱,۲ داریم

$$X =^d \mu + U^{-\frac{1}{2}} Z, \quad U \sim \Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right), \quad Z \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$$

$$X - \mu =^d U^{-\frac{1}{2}} Z \Rightarrow (X - \mu)^T =^d Z^T U^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow (X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu) =^d \left(Z^T U^{-\frac{1}{2}} \right) \Sigma^{-1} (U^{-\frac{1}{2}} Z)$$

$$\Rightarrow d =^d Z^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} Z U^{-1}$$

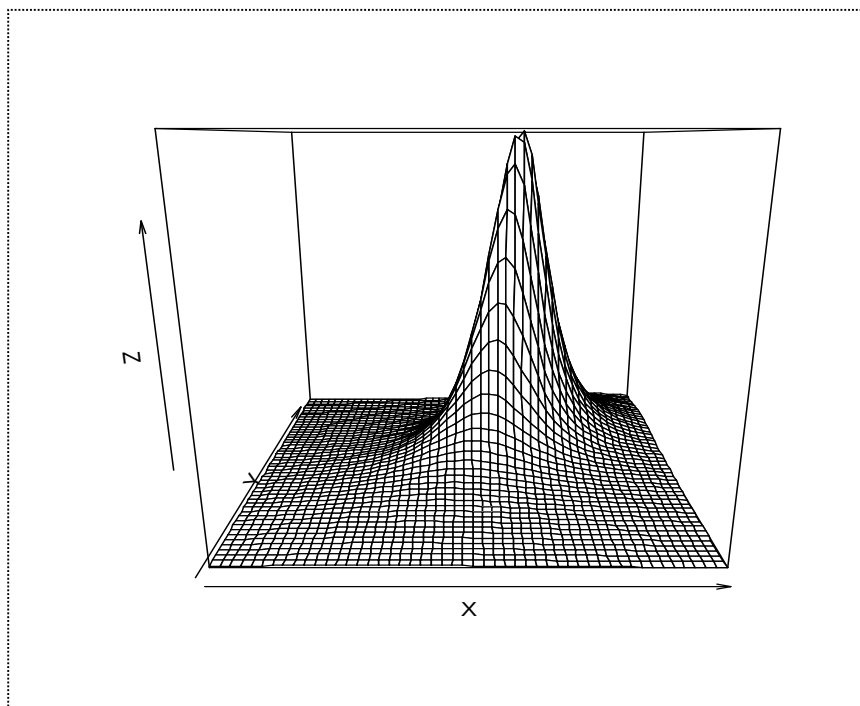
باتوجه به اینکه $\nu U \sim \chi^2_\nu$ و $Z^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} Z \sim \chi^2_p$ می‌توان نوشت

$$d =^d \frac{p \frac{(Z^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} Z)}{p}}{\frac{\nu U}{\nu}} \sim p F(p, \nu)$$

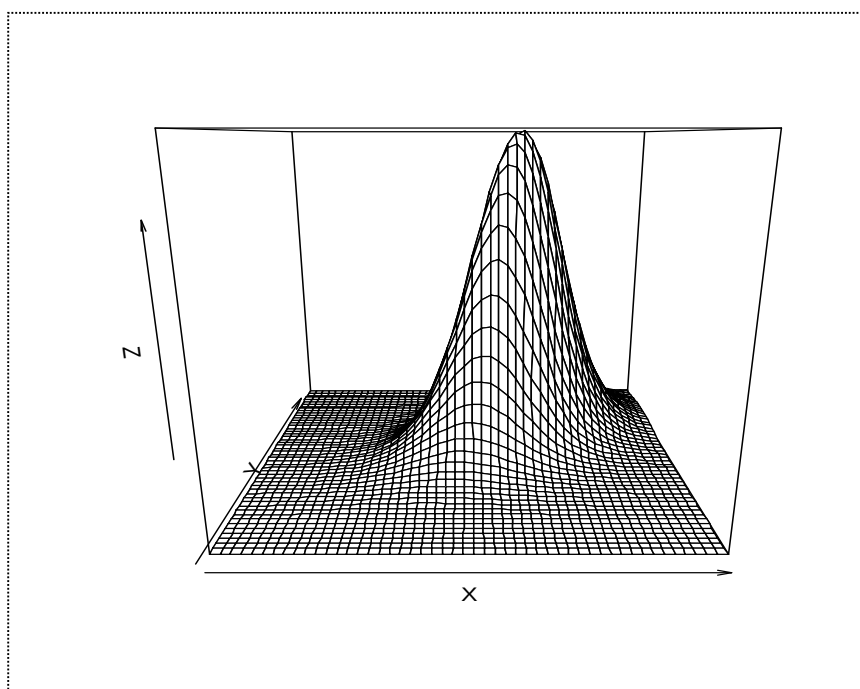
و برهان کامل است. $\square$

پارامتر ν در توزیع t -استیودنت نقش مهمی را ایفا می‌کند، برای این منظور شکل های (۱-۲) و

(۲-۲) را در حالت دو متغیره ببینید.



شکل (۱-۲) - نمودار تابع چگالی t -استیودنت دو متغیره برای $\nu = 1$



شکل (۲-۲) - نمودار تابع چگالی t -استیودنت دو متغیره برای $\nu = 10$

بنابراین همانطور که ملاحظه می‌کنید با افزایش درجه آزادی، توزیع t -استیودنت به توزیع نرمال نزدیک می‌شود.

۲,۴,۲ توزیع اسلش :

یکی دیگر از توزیع های نرمال آمیخته مقیاسی، توزیع اسلش با پارامتر شکل ν است. این توزیع نیز نسبت به توزیع نرمال دارای دنباله های ضخیم تری است، و زمانی که $\nu \uparrow \infty$ ، توزیع اسلش به عنوان توزیع حدی توزیع نرمال در نظر گرفته می شود.

روش ساخت :

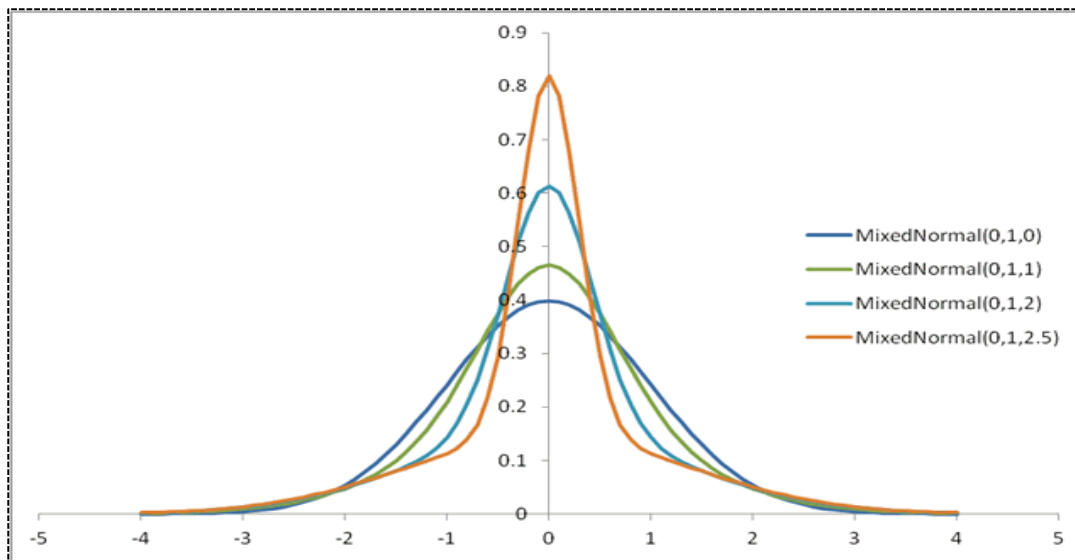
فرض کنید متغیر تصادفی U معرفی شده در تعریف ۲,۲، دارای توزیع $Beta(\nu, 1)$ باشد آنگاه تابع چگالی توزیع اسلش p -متغیره به صورت زیر معرفی می شود.

$$f_X(x) = \nu \int_0^1 u^{\nu-1} \varphi_p(x|\mu, u^{-1}\Sigma) du \quad (۱۰-۲)$$

و از نماد زیر برای نمایش این توزیع استفاده می کنیم.

$$X \sim SL_p(\mu, \Sigma, \nu)$$

که در آن ν پارامتر شکل است. بنابراین با تغییر پارامتر ν شکل تابع چگالی عوض می شود. برای این منظور شکل (۳-۲) را برای ν های مختلف ببینید.



شکل (۳-۲) - نمودار تابع چگالی اسلش استاندارد برای ν های مختلف

و همان طور که ملاحظه می کنید با وارد کردن پارامتر ν دنباله نمودار پهن تر می شود.

بدست آوردن رابطه (۲-۱۰) با استفاده از رابطه (۲-۳) و با فرض $U \sim \text{Beta}(\nu, 1)$ با تابع چگالی

$$h(u, \nu) = \nu u^{\nu-1} \quad 0 < u < 1$$

به سهولت امکان پذیر است.

قضیه ۵,۲ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $U \sim \text{Beta}(\nu, 1)$ ، در این صورت گشتاورهای

معکوس متناهی برای این توزیع به صورت تعریف می شود.

$$E(U^{-m}) = \frac{\nu}{\nu-m} \quad m < \nu \quad (۱۱-۲)$$

برهان: اثبات رابطه (۱۱-۲) با یک انتگرال گیری ساده به راحتی حاصل می شود.

۳,۴,۲ توزیع نرمال آلایشی

آخرین توزیع از خانواده توزیع های نرمال آمیخته مقیاسی که در این پایان نامه مورد بررسی قرار می -

گیرد، توزیع نرمال آلایشی است. معمولاً از این توزیع برای مدل بندی داده های متقارن با مشاهدات

پرت نیز استفاده می شود (لیتل، ۱۹۸۸) را ببینید.

روش ساخت :

فرض کنید متغیر تصادفی U معرفی شده در تعریف ۲,۲ دارای تابع چگالی زیر باشد.

$$h(u, \boldsymbol{\nu}) = \nu I_{(u=\gamma)} + (1-\nu)I_{(u=1)} \quad , \quad \boldsymbol{\nu} = (\nu, \gamma)^T \quad (۱۲-۲)$$

آنگاه با استفاده از رابطه (۲-۳) تابع چگالی نرمال آمیخته p -متغیره به صورت زیر تعریف می شود.

$$f_X(x) = \nu \varphi_p\left(x \middle| \boldsymbol{\mu}, \frac{\Sigma}{\gamma}\right) + (1-\nu) \varphi_p(x | \boldsymbol{\mu}, \Sigma) \quad (۱۳-۲)$$

و از نماد زیر برای نمایش این توزیع استفاده می کنیم.

$$\boldsymbol{X} \sim \text{CN}_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \nu, \gamma) \quad 0 \leq \nu \leq 1, \quad 0 < \gamma \leq 1$$

که در آن γ پارامتر نشان دهنده درصد مشاهدات دور افتاده و γ پارامتر مقیاس است.

بدست آوردن رابطه (۲-۱۳) با توجه به رابطه (۲-۳) و تابع چگالی معرفی شده در رابطه (۲-۱۲) به راحتی نتیجه می شود.

(*) قضیه ۶,۲ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید U دارای تابع چگالی رابطه (۲-۱۲) باشد. آنگاه گشتاورهای معکوس برای این توزیع به صورت زیر معرفی می شود.

$$E(U^{-m}) = \frac{\gamma}{\gamma^m} + (1 - \gamma) \quad (2-14)$$

برهان : با توجه به اینکه U یک متغیر تصادفی آمیخته است گشتاور معکوس به صورت زیر نوشته می شود.

$$E(U^{-m}) = (1 - \gamma) + \int_0^1 \gamma^{-m} \gamma \, du = (1 - \gamma) + \gamma^{-m} \gamma$$

و برهان کامل است. $\square$

توزیع توانی یکی دیگر از اعضای خانواده نرمال آمیخته مقیاسی می باشد. که برای ساخت آن متغیر تصادفی U دارای توزیع پایا^۱ است، که در این پایان نامه مورد توجه قرار نگرفته است.

فصل سوم

مدل نرمال چوله

۱.۳ مقدمه

توزیع نرمال یکی از محدود توزیع های پیوسته است که در آمار از اهمیت زیادی برخوردار است. این توزیع، خاصیت هایی دارد که باعث افزایش کاربرد آن در عمل شده است. معمولاً در تحلیل های آماری فرض نرمال بودن داده ها پذیرفته می شود و سپس به استنباط آماری می پردازند. در بسیاری از موارد (در عمل) توزیع داده های واقعی مقداری چولگی دارد در این صورت دیگر نمی توان از توزیع نرمال برای تحلیل دقیق داده ها استفاده کرد. در این موارد اغلب سعی می شود با استفاده از تبدیلی مناسب، توزیع داده ها را به توزیع نرمال نزدیک کرده و سپس تحلیل روی داده های تبدیل یافته را انجام داد. این کار در عمل زیاد مناسب نیست زیرا دقت تحلیل را کاهش می دهد و از طرفی پیدا کردن چنین تبدیلی بعضاً کاری دشوار بوده و در عمل ممکن است چنین تبدیلی یافت نشود. بنابراین اگر توزیع نامتقارنی وجود داشته باشد که خواصی مشابه توزیع نرمال داشته باشد، می تواند نقش اساسی در تحلیل داده های نامتقارن ایفا کند. یکی از این توزیع ها که اخیراً معرفی شده و مورد توجه بسیاری قرار گرفته است و خواصی مشابه توزیع نرمال دارد، به توزیع نرمال چوله معروف شده است. این توزیع نامتقارن دارای پارامتری برای تنظیم چولگی^۱ است. به گونه ای که اگر مقدار این پارامتر صفر باشد توزیع نرمال چوله به توزیع نرمال تبدیل می شود. بنابراین برای تحلیل داده هایی که نمودار هیستوگرام آن بیانگر میزان چولگی در داده ها است، توزیع نرمال چوله می تواند برازش محتمل تری نسبت به توزیع نرمال به این داده ها باشد. در این فصل دو مدل از توزیع های نرمال چوله با یک و دو پارامتر چولگی معرفی می شوند. و در ادامه خواص آماری مهمی از این دو مدل بیان می شوند. همچنین با معرفی الگوریتم EM، برآورد پارامترها را برای مدل نرمال چوله با یک پارامتر چولگی به دست خواهیم آورد.

1. Skewness

۲.۳ مدل نرمال چوله استاندارد یک متغیره با یک پارامتر چولگی

خانواده ایی از توزیع های پارامتری که در اینجا معرفی می کنیم دارای خواص زیر می باشند.

(۱) شامل تابع چگالی نرمال است.

(۲) دارای روابط ریاضی ساده می باشد.

(۳) دارای بازه وسیعی از مقادیر چولگی و کشیدگی است.

تعریف ۱،۳ اگر در تعریف ۱،۲، قرار دهیم $f(x) = \varphi_1(x)$ ، $G(.) = \Phi_1(.)$ و $w(x) = \lambda x$ آنگاه

تابع چگالی نرمال چوله استاندارد یک متغیره با یک پارامتر چولگی به صورت زیر بیان می شود

$$f_X(x) = 2 \varphi_1(x) \Phi_1(\lambda x) \quad , \quad x, \lambda \in \mathbb{R} \quad (1-3)$$

که در آن $\varphi_1(.)$ و $\Phi_1(.)$ به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع نرمال استاندارد هستند.

این توزیع اولین بار به طور رسمی توسط آزالینی (۱۹۸۵) معرفی شد. تابع چگالی رابطه (۱-۳) به

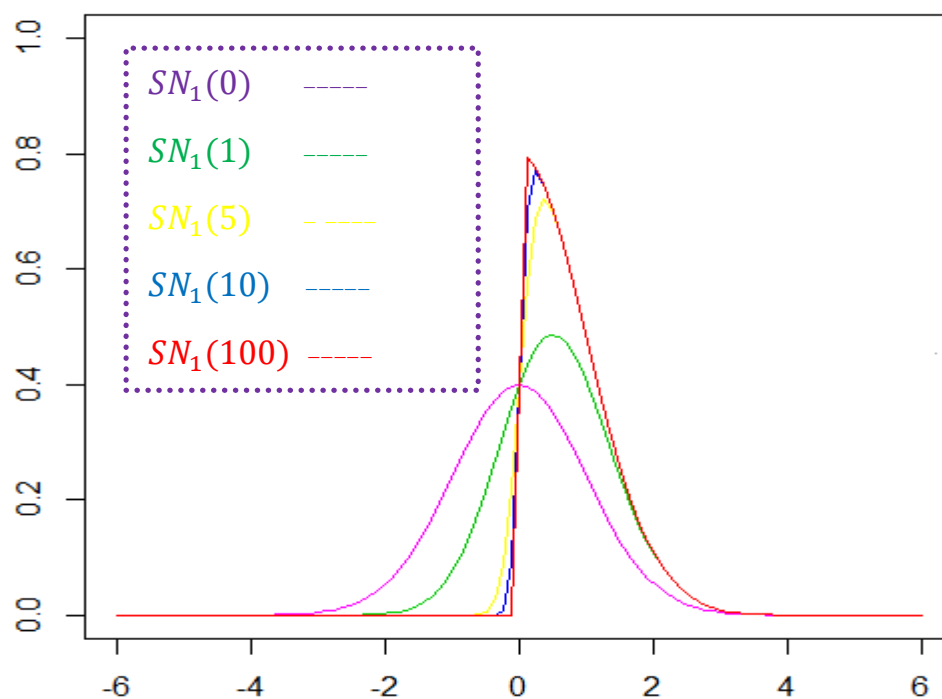
ازای $\lambda > 0$ چوله به راست، به ازای $\lambda < 0$ چوله به چپ، برای $\lambda = 0$ توزیع نرمال استاندارد و

زمانیکه $\lambda \rightarrow \infty$ تابع چگالی رابطه (۱-۳) به سمت تابع چگالی نیم نرمال میل می کند.

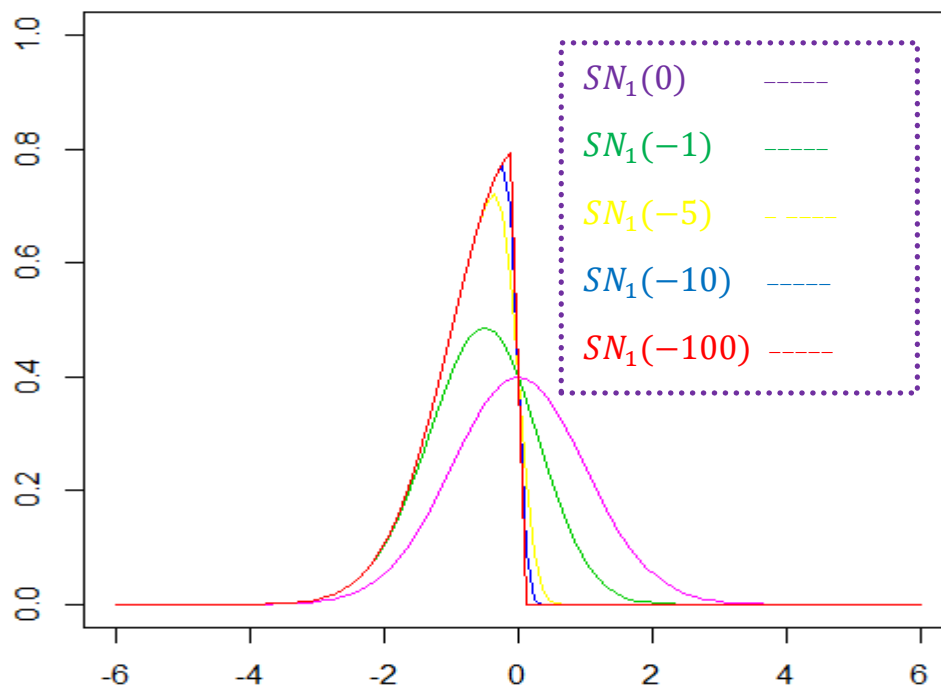
نماد زیر برای نمایش این خانواده استفاده می شود.

$$X \sim SN_1(\lambda)$$

برای اینکه دید شهودی نسبت به این توزیع داشته باشیم شکل های (۱-۳) و (۲-۳) را ببینید



شکل (۳-۱) - نمودار تابع چگالی نرمال چوله استاندارد با پارامترهای چولگی مثبت



شکل (۳-۲) - نمودار تابع چگالی نرمال چوله استاندارد با پارامترهای چولگی منفی

با توجه به شکل (۱-۳) کاملاً مشخص است که با افزایش پارامتر چولگی توزیع نرمال چوله به توزیع نیم نرمال میل می‌کند.

تعریف ۲,۳ تابع توزیع نرمال چوله یک متغیره استاندارد با یک پارامتر چولگی به صورت زیر است.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x 2 \varphi_1(t) \Phi_1(\lambda t) dt = 2 \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\lambda t} \varphi_1(t) \varphi_1(u) du dt$$

در زیر خصوصیات پایه ای از توزیع نرمال چوله استاندارد یک متغیره بیان می‌شود.

قضیه ۱,۳ (آزالینی، ۱۹۸۵) فرض کنید $X \sim SN_1(\lambda)$ در این صورت

$$SN_1(0) = N(0,1) \quad (۱)$$

$$-X \sim SN_1(-\lambda) \quad (۲)$$

$$|X| \stackrel{d}{=} |Z|, \quad Z \sim N(0,1) \quad (۳)$$

$$X^2 \sim \chi^2_{(1)} \quad (۴)$$

$$X \stackrel{d}{=} |Z| \quad \text{اگر } \lambda \rightarrow +\infty \quad (۵)$$

$$X \stackrel{d}{=} -|Z| \quad \text{اگر } \lambda \rightarrow -\infty \quad (۶)$$

$$(۷) \quad \text{تابع چگالی نرمال چوله استاندارد قویا تک مدی است}$$

برهان :

$$(۱) \quad (*) \quad \text{با توجه به توزیع معرفی شده در رابطه (۱-۳)، اگر } \lambda = 0, \text{ آنگاه داریم}$$

$$f_X(x) = 2 \varphi_1(x) \Phi_1(0) = 2\varphi_1(x) \frac{1}{2} = \varphi_1(x)$$

$$(۲) \quad (*) \quad \text{برای اثبات رابطه ۲ می‌توان نوشت}$$

$$f_{-X}(x) = f_X(-x) = 2 \varphi_1(-x) \Phi_1(\lambda(-x))$$

$$= 2 \varphi_1(x) \Phi_1(-\lambda x) \sim \text{SN}(-\lambda)$$

(۳) با توجه به روش مشابهی از آرنولد و بیور (۲۰۰۲) داریم

$$\begin{aligned} P(|X| < x) &= P(-x < X < x) = \int_{-x}^x 2 \varphi(u) \Phi(\lambda u) du \\ &= \int_0^x 2 \varphi(u) \Phi(\lambda u) du + \int_{-x}^0 2 \varphi(u) \Phi(\lambda u) du \\ &= \int_0^x 2 \varphi(u) \Phi(\lambda u) du - \int_x^0 2 \varphi(-u) \Phi(-\lambda u) du \\ &= \int_0^x 2 \varphi(u) [\Phi(\lambda u) + \Phi(-\lambda u)] du = \int_0^x 2 \varphi(u) du = P(|Z| < x) \end{aligned}$$

(۴) (*) با توجه به خاصیت معرفی شده در قسمت سوم داریم

$$|X| \stackrel{d}{=} |Z| \Rightarrow X^2 \stackrel{d}{=} Z^2 \sim \chi^2_{(1)}$$

(۵) (*) برای اثبات این قسمت داریم

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_X(x) = 2 \varphi(x) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi(\lambda x) = \begin{cases} 2 \varphi(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

واضح است که تابع چگالی بالا در حقیقت تابع چگالی $|Z|$ است

(۶) مشابه حالت ۵ اثبات می‌شود

(۷) برای اثبات پایان نامه ارشد کریمی (۱۳۷۸) را ببینید. □

قضیه ۲,۳ (آزالینی و دالا-واله، ۱۹۹۶) فرض کنید $X \sim \text{SN}_1(\lambda)$ ، در این صورت نمایش تصادفی

برای این خانواده به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$X \stackrel{d}{=} \delta |Z_1| + \sqrt{1 - \delta^2} Z_2 \quad (۲-۳)$$

که در آن Z_1, Z_2 متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیع نرمال استاندارد، $|Z_1|$ دارای توزیع نیم

نرمال و $\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$.

برهان : مشابه روش پور احمدی (۲۰۰۷)، فرض می‌کنیم $X =^d a|Z_1| + bZ_2$ ، که در آن داشته

باشیم

$$a = \delta, b = \sqrt{1 - \delta^2}, a^2 + b^2 = 1, \frac{a}{b} = \lambda$$

بدون اینکه از کمیت مسأله کم شود فرض می‌کنیم $\delta > 0$

ابتدا با استفاده از فرمول پیچش داریم

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a|Z_1|}(x-y) f_{bZ_2}(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{2}{\sqrt{2\pi}a} \exp\left\{-\frac{1}{2a^2}(x-y)^2\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} \exp\left\{-\frac{y^2}{2b^2}\right\} dy \\ &= \frac{2}{2\pi ab} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-y)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right]\right\} dy \end{aligned}$$

با توجه به اینکه

$$\frac{(x-y)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = x^2 + \frac{1}{a^2 b^2} (y - xb)^2$$

$$f_X(x) = 2\varphi_1(x) \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}ab} \exp\left\{-\frac{1}{2a^2 b^2} (y - xb)^2\right\} dy$$

بنابراین برای هر a, b داده شده نتیجه مطلوب به صورت زیر به دست می‌آید.

$$f_X(x) = 2\varphi_1(x) \Phi_1\left(\frac{a}{b}x\right) = 2\varphi_1(x) \Phi_1(\lambda x)$$

و برهان کامل است. $\square$

برای $\delta < 0$ نیز مشابه بالا اثبات می‌شود.

قضیه ۳,۳ (آزالینی، ۱۹۸۵) اگر $X \sim SN_1(\lambda)$ ، آنگاه تابع مولد گشتاور این خانواده به صورت زیر است.

$$m_X(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}} \Phi(\delta t) \quad , \quad \delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \quad (3-3)$$

برهان : مشابه روش پور احمدی (۲۰۰۷)، ابتدا تابع مولد گشتاور $|Z|$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} m_{|Z|}(t) &= E(e^{t|Z|}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t|z|} \varphi(z) dz = 2 \int_0^{\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2e^{\frac{t^2}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} dz \end{aligned}$$

حال با تغییر متغیر $z - t = u$ داریم

$$m_{|Z|}(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2e^{\frac{t^2}{2}} \Phi(t)$$

همچنین از گذشته می‌دانیم که $m_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ بنابراین با توجه به استقلال Z_1, Z_2 و قضیه ۲,۳ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E(e^{tX}) = E\left(e^{\delta t|Z_1| + \sqrt{1-\delta^2}Z_2}\right) = m_{|Z_1|}(\delta t) m_{Z_2}\left(\sqrt{1-\delta^2}t\right) \\ &= 2e^{\frac{\delta^2 t^2}{2}} \Phi(\delta t) e^{\frac{(1-\delta^2)t^2}{2}} = 2e^{\frac{t^2}{2}} \Phi(\delta t) \end{aligned}$$

و برهان کامل است. $\square$

در این قسمت با توجه به تابع مولد گشتاور بیان شده در رابطه (۳-۳) گشتاورهای مهم این خانواده، مانند امید و واریانس را بدست خواهیم آورد.

(*) قضیه ۴,۳ (آزالینی، ۱۹۸۵) فرض کنید $X \sim SN_1(\lambda)$ ، در این صورت امید و واریانس X به صورت زیر بیان می‌شود.

$$E(X) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta, \quad Var(X) = 1 - \frac{2}{\pi} \delta^2$$

برهان: با توجه به تابع مولد گشتاور بیان شده در قضیه ۳,۳ داریم

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{d}{dt} m_X(t) \big|_{t=0} = 2 \left(t e^{\frac{t^2}{2}} \Phi(\delta t) + \delta \varphi(\delta t) e^{\frac{t^2}{2}} \right) \big|_{t=0} \\ &= 2 \left(0 + \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \end{aligned}$$

برای بدست آوردن گشتاور مرتبه دوم، از خاصیت ۴ معرفی شده در قضیه ۱,۳ به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$X^2 \sim \chi^2_{(1)} \Rightarrow E(X^2) = 1 \Rightarrow Var(X) = 1 - \frac{2}{\pi} \delta^2$$

و برهان کامل است. $\square$

(*) قضیه ۵,۳ (آزالینی، ۱۹۸۵) اگر $Y \sim N(0,1)$ و X که دارای توزیع معرفی شده در رابطه (۱-۳) است، مستقل از هم باشند آنگاه

$$\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \sim SN_1\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2+2\lambda^2}}\right)$$

برهان: فرض کنید $U = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ آنگاه با توجه به استقلال X و Y داریم

$$\begin{aligned} m_U(t) &= E(e^{tU}) = E\left(e^{t\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)}\right) = m_X\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) m_Y\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{t^2}{4}} \Phi\left(\delta \frac{t}{\sqrt{2}}\right) e^{\frac{t^2}{4}} \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \Phi\left(\delta \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{t^2}{2}} \Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2+2\lambda^2}} t\right) \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به تابع مولد گشتاور رابطه (۳-۳) برهان کامل است. □

(*) قضیه ۶,۳ (آزالینی و دالا-واله، ۱۹۹۶) فرض کنید X, Y متغیرهای تصادفی مستقل، از توزیع

نرمال استاندارد باشند. در این صورت نمایش تصادفی دیگری برای این خانواده به صورت زیر است

$$Z = \{X|Y < \lambda X\} \sim SN(\lambda)$$

برهان : با توجه به تعریف تابع چگالی شرطی داریم

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P(X \leq z | \lambda X > Y) = \frac{P(X \leq z, \lambda X > Y)}{P(\lambda X > Y)} = \frac{\int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\lambda x} \varphi(x) \varphi(y) dx dy}{P(\lambda X > Y)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^z \varphi(x) \Phi(\lambda x) dx}{P(\lambda X > Y)} \end{aligned}$$

از آنجاییکه $\lambda X - Y$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر است، می توان نوشت

$$P(\lambda X > Y) = P(\lambda X - Y > 0) = \frac{1}{2}$$

و برهان کامل است. □

توضیح : از قضیه ۶,۳ برای شبیه سازی توزیع نرمال چوله استاندارد استفاده می کنند. برای جزئیات

بیشتر خردمندی و سنجری فارسی پور (۱۳۸۸) را ببینید.

۱,۲,۳ مدل نرمال چوله یک متغیره با یک پارامتر چولگی با میانگین و

واریانس

با اضافه کردن پارامترهای مکان و مقیاس به توزیع نرمال چوله استاندارد معرفی شده در بخش ۲,۳

انعطاف پذیری مدل را افزایش می دهیم و با تغییر پارامترهای توزیع می توان کنترل بیشتری روی

مدل داشت.

تعریف ۳,۳ با در نظر داشتن تبدیل $X = \mu + \sigma Z$ به گونه ایی که $\mu \in \mathbb{R}$ ، $\sigma > 0$ و Z دارای توزیع معرفی شده در رابطه (۱-۳) باشد، آنگاه متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر خواهد بود.

$$f_X(x) = \frac{2}{\sigma} \varphi_1\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Phi_1\left(\lambda\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) \quad (۴-۳)$$

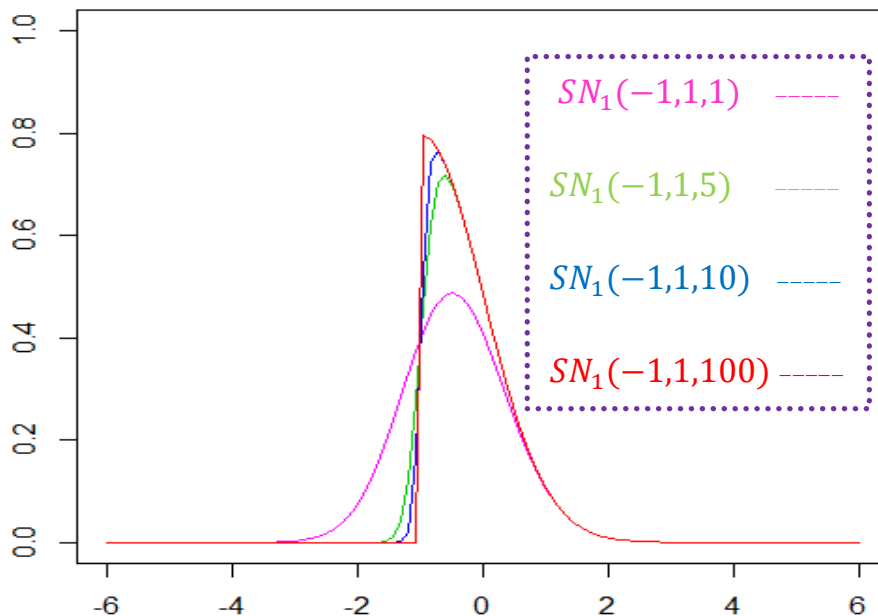
و از نماد زیر برای نمایش این خانواده استفاده می کنیم

$$X \sim SN_1(\mu, \sigma^2, \lambda)$$

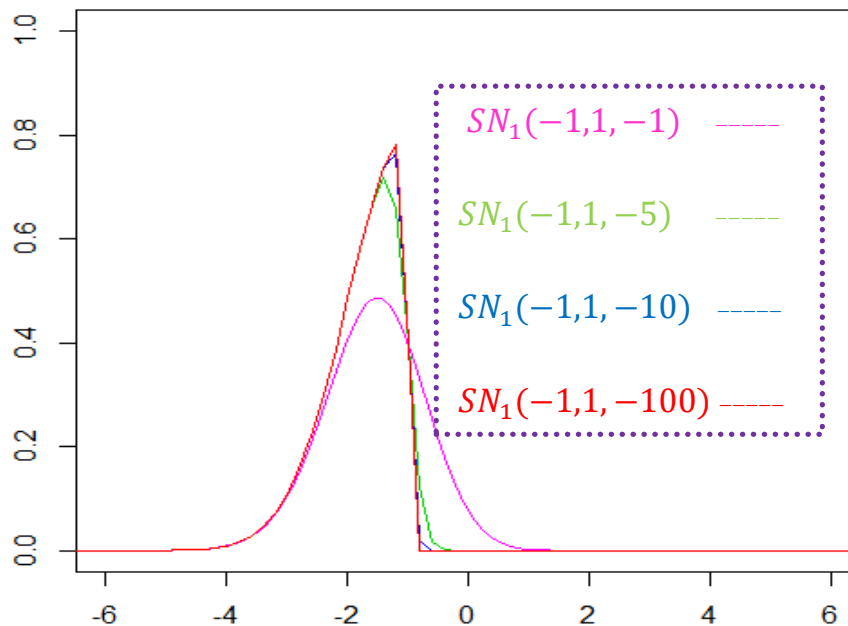
نمایش دیگری برای تابع چگالی رابطه (۴-۳) به صورت زیر تعریف می شود.

$$f_X(x) = 2 \varphi(x|\mu, \sigma^2) \Phi(\lambda(x - \mu)\sigma^{-1}) \quad (۵-۳)$$

برای اینکه تاثیر پارامترهای مکان و مقیاس را به طور شهودی در مدل معرفی شده بخش ۲,۳ ببینیم، شکل های (۳-۳) و (۴-۳) می توانند مفید باشند.



شکل (۳-۳) - نمودار تابع چگالی نرمال چوله یک متغیره با پارامتر مکان و مقیاس و پارامترهای چولگی مثبت



شکل (۴-۳) نمودار تابع چگالی نرمال چوله یک متغیره با پارامتر مکان و مقیاس و پارامترهای چولگی منفی

مقایسه اشکال (۱-۳)، (۲-۳)، (۳-۳) و (۴-۳) تاثیر پارامترهای مکان و مقیاس را در توزیع نرمال چوله استاندارد به خوبی نشان می‌دهد.

قضیه ۷،۳ (الینگ^۱، ۲۰۱۱) فرض کنید $X \sim SN_1(\mu, \sigma^2, \lambda)$ در این صورت نمایش تصادفی برای این خانواده به صورت زیر خواهد بود.

$$X =^d \mu + \sigma(\delta |Z_1| + \sqrt{1 - \delta^2} Z_2) \quad (۴-۶)$$

که در آن Z_1, Z_2 متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نرمال استاندارد و $|Z_1|$ دارای توزیع نیم نرمال است.

برهان: با توجه به نمایش تصادفی بیان شده در رابطه (۲-۳)، نمایش رابطه (۴-۶) با یک تبدیل به راحتی قابل اثبات است. $\square$

(*) قضیه ۸,۳ (الینگ، ۲۰۱۱) اگر $X \sim SN_1(\mu, \sigma^2, \lambda)$ ، آنگاه تابع مولد گشتاور این خانواده به صورت زیر خواهد بود.

$$m_X(t) = 2 e^{\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}} \Phi(\delta \sigma t)$$

برهان: فرض کنید $X = \mu + \sigma Z$ ، بطوریکه Z دارای تابع چگالی معرفی شده در رابطه (۳-۱) باشد. در این صورت، با توجه به تابع مولد گشتاور رابطه (۳-۳) خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E(e^{tX}) = E(e^{t(\mu + \sigma Z)}) = e^{\mu t} m_Z(t\sigma) = e^{\mu t} 2 e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} \Phi(\delta \sigma t) \\ &= 2 e^{\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}} \Phi(\delta \sigma t) \end{aligned}$$

□ و برهان کامل است.

(*) قضیه ۹,۳ (الینگ، ۲۰۱۱) فرض کنید $X \sim SN_1(\mu, \sigma^2, \lambda)$ ، در این صورت امید و واریانس این خانواده به صورت زیر خواهد بود.

$$E(X) = \mu + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \delta, \quad Var(X) = \sigma^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \delta^2\right)$$

برهان: فرض کنید $X = \mu + \sigma Z$ ، بطوریکه Z دارای تابع چگالی معرفی شده در رابطه (۳-۱) باشد. آنگاه با توجه به قضیه ۴,۳ نتیجه مطلوب به صورت زیر به دست می‌آید

$$E(X) = E(\mu + \sigma Z) = \mu + \sigma E(Z) = \mu + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \delta$$

$$Var(X) = Var(\mu + \sigma Z) = \sigma^2 Var(Z) = \sigma^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \delta^2\right)$$

□ و برهان کامل است.

از مسائل مورد بحث در خانواده های پارامتری، برآورد پارامترهای مدل است. یکی از روش های معمول برآورد، روش درستنمایی ماکسیمم می باشد. در اینجا باید دقت داشته باشیم که برآورد ماکسیمم درستنمایی برای پارامترها در توزیع نرمال چوله به صورت دقیق میسر نیست بنابراین استفاده از روش های عددی می تواند یک پیشنهاد مناسب باشد. یکی از معروفترین روش های عددی، الگوریتم EM است که اولین بار توسط دمپستر (۱۹۷۸) معرفی گردید. لازم است عنوان کنیم که با توجه به مشکلات مبتلا به روش درستنمایی، روش دیگری نیز برای برآورد پارامترهای توزیع نرمال چوله در استنباط بیزی به کار برده شده است. برای این منظور، با فرض اینکه توزیع پیشین پارامتر شکل (پارامترچولگی)، t -استیودنت غیر مرکزی است، از الگوریتم مونت کارلوی زنجیر مارکوفی (MCMC) برای نمونه گیری از توزیع پسین و تعیین برآورد بیزی پارامتر شکل استفاده می کنیم. برای جزئیات بیشتر فراهانی و خالدي (۱۳۸۹) را ببینید. البته در این پایان نامه برای برآورد پارامترهای توزیع نرمال چوله و توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی از روش عددی الگوریتم EM استفاده می کنیم.

قبل از برآورد پارامترهای مدل بیان شده در رابطه (۳-۵) با استفاده از الگوریتم EM، دو قضیه زیر را عنوان می کنیم.

قضیه ۱۰،۳ (بهرامی، ۱۳۸۹) فرض کنید $X \sim SN_1(\mu, \sigma^2, \lambda)$ ، در این صورت نمایش تصادفی دیگری از این خانواده به صورت زیر خواهد بود.

$$X = {}^d \mu + \delta T + \sqrt{1 - \delta^2} U \quad (۷-۳)$$

که در آن متغیرهای تصادفی U, T مستقل و دارای توزیع زیر هستند.

$$T \sim TN(0, \sigma^2) I\{t > 0\} = {}^d HN(0, \sigma^2) \quad , \quad U \sim N(0, \sigma^2)$$

قضیه ۱۱,۳ (بهرامی، ۱۳۸۹) با توجه به قضیه ۱۰,۳، تابع چگالی متغیر تصادفی T به شرط X به صورت زیر معرفی می‌شود.

$$\begin{aligned} f_{T|X=x}(t|x) &= \left[\Phi_1 \left(\frac{\lambda(x-\mu)}{\sigma} \right) \right]^{-1} \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-\delta^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(1-\delta^2)} (t - \delta(x-\mu))^2 \right\} \\ &= \left[1 - \Phi_1 \left(-\frac{\lambda(x-\mu)}{\sigma} \right) \right]^{-1} \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-\delta^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(1-\delta^2)} (t - \delta(x-\mu))^2 \right\} \end{aligned}$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$T|X=x \sim TN(\delta(x-\mu), \sigma^2(1-\delta^2)) I\{t > 0\}$$

از آنجا که به دست آوردن برآورد ماکسیمم درستنمایی برای پارامترهای توزیع نرمال چوله به دلیل وجود انتگرال در تابع چگالی آن، به صورت معمول امکان پذیر نمی‌باشد. الگوریتم EM به عنوان یک راهکار به کار برده می‌شود. بنابراین با استفاده از تابع درستنمایی توام X, T که در واقع بردار T نقش متغیرهای پنهان (گمشده) را دارد، مرحله اول الگوریتم به صورت زیر خواهد بود.

$$Q(\theta) = E(\ell_c(\theta|X_c)|X=x) = E(\log f(\theta|x,t)|X=x) \quad , \quad \theta = (\mu, \sigma^2, \lambda)^T$$

حال با به کارگیری نمونه های تصادفی $T = (T_1, \dots, T_n)$ و $X = (X_1, \dots, X_n)$ داریم

$$\begin{aligned} L_c(\theta|x, t) &= \prod_{i=1}^n f(T_i|X_i = x_i) f(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\pi\sigma^2\sqrt{1-\delta^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(1-\delta^2)} ((x_i - \mu)^2 + t_i^2 - 2\delta t_i(x_i - \mu)) \right\} \end{aligned}$$

$$\ell_c(\theta|X_c) = \log(L_c(\theta|x, t))$$

$$= n \log \frac{1}{\pi \sigma^2 \sqrt{1-\delta^2}} - \frac{1}{2\sigma^2(1-\delta^2)} \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 + t_i^2 - 2\delta t_i(x_i - \mu) \right\}$$

حال با توجه به قضیه ۱۱,۳ و تعریف ۱,۱ داریم

$$E(T|X=x) = \delta(x-\mu) + \sigma \sqrt{1-\delta^2} \frac{\varphi_1\left(\frac{\delta(x-\mu)}{\sigma\sqrt{1-\delta^2}}\right)}{\Phi_1\left(\frac{\delta(x-\mu)}{\sigma\sqrt{1-\delta^2}}\right)}$$

$$E(T^2|X=x) = \delta^2(x-\mu)^2 + \sigma^2(1-\delta^2) + \frac{\varphi_1\left(\frac{\delta(x-\mu)}{\sigma\sqrt{1-\delta^2}}\right)}{\Phi_1\left(\frac{\delta(x-\mu)}{\sigma\sqrt{1-\delta^2}}\right)} (\delta(x-\mu)\sigma^2(1-\delta^2))$$

اجرای مرحله اول الگوریتم :

$$Q(\theta) = E(\ell_c(\theta|X_c)|X=x)$$

$$= n \log \frac{1}{\pi \sigma^2 \sqrt{1-\delta^2}} - \frac{1}{2\sigma^2(1-\delta^2)} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - \frac{1}{2\sigma^2(1-\delta^2)} \sum_{i=1}^n E(T_i^2|X_i = x_i) \\ + \frac{\delta}{\sigma^2(1-\delta^2)} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) E(T_i|X_i = x_i)$$

حال فرض کنید

$$E(T_i|X_i = x_i) = t_i, \quad E(T_i^2|X_i = x_i) = t_i^2$$

اجرای مرحله دوم الگوریتم : ماکسیم سازی $Q(\theta)$ به ازای هر کدام از پارامترها

$$\frac{\partial Q(\theta)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2(1-\delta^2)} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) - \frac{\delta}{\sigma^2(1-\delta^2)} \sum_{i=1}^n t_i = 0$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i - \delta \sum_{i=1}^n t_i \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\theta)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4(1-\delta^2)} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \\ &+ \frac{1}{2\sigma^4(1-\delta^2)} \sum_{i=1}^n t_i^2 - \frac{\delta}{\sigma^4(1-\delta^2)} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)t_i = 0 \end{aligned}$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{2n(1-\delta^2)} \sum_{i=1}^n ((x_i - \mu)^2 + t_i^2 - 2\delta(x_i - \mu)t_i)$$

و در نهایت برای بدست آوردن برآورد پارامتر λ باید معادله زیر را محاسبه کنیم

$$n\sigma^2\delta(1-\delta^2) + ((1+\delta^2)) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)t_i - \delta \sum_{i=1}^n t_i^2 - \delta \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0$$

بنابراین با دادن مقادیر اولیه برای μ, σ^2, δ می توان برآورد ماکسیمم درستنمایی را براساس الگوریتم

EM، طبق مراحل بالا به دست آورد.

۳,۳ مدل نرمال چوله چند متغیره با یک پارامتر چولگی

در این قسمت حالت p -متغیره مدل معرفی شده در بخش ۱,۲,۳، که توسط لاکاس و همکاران

(۲۰۱۲) تعمیم داده شده، را بیان می کنیم و برخی خصوصیات مهم از این خانواده را عنوان می کنیم

(تاکید بیشتر ما روی حالت دو متغیره می باشد)

تعریف ۴,۳ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۲) می گوئیم متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال چوله p -

متغیره با پارامتر مکان $\mu \in \mathbb{R}^p$ ، ماتریس واریانس کواریانس Σ (این ماتریس $p \times p$ نیمه معین مثبت

و متقارن است) و پارامتر چولگی $\lambda \in \mathbb{R}^p$ است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = 2 \varphi_p(x|\mu, \Sigma) \Phi_1 \left(\lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu) \right), x \in \mathbb{R}^p \quad (۸-۳)$$

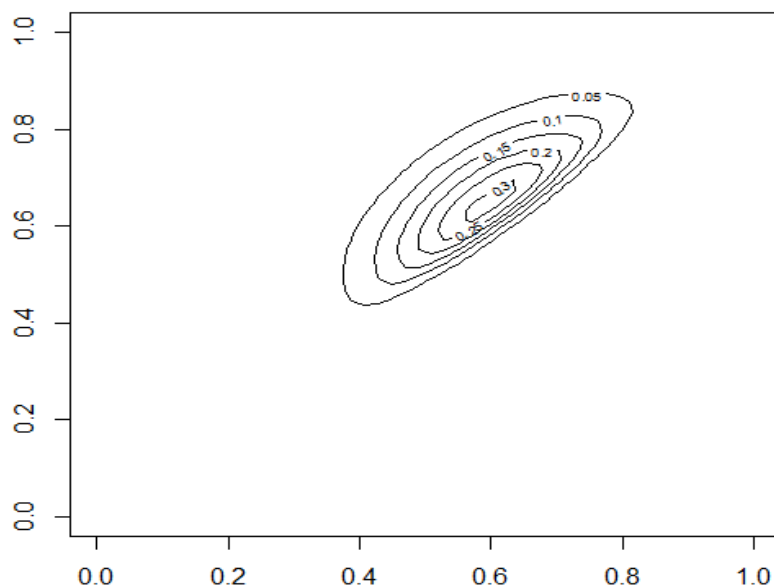
و از نماد زیر برای نمایش این خانواده استفاده می کنیم.

$$X \sim SN_p(\mu, \Sigma, \lambda)$$

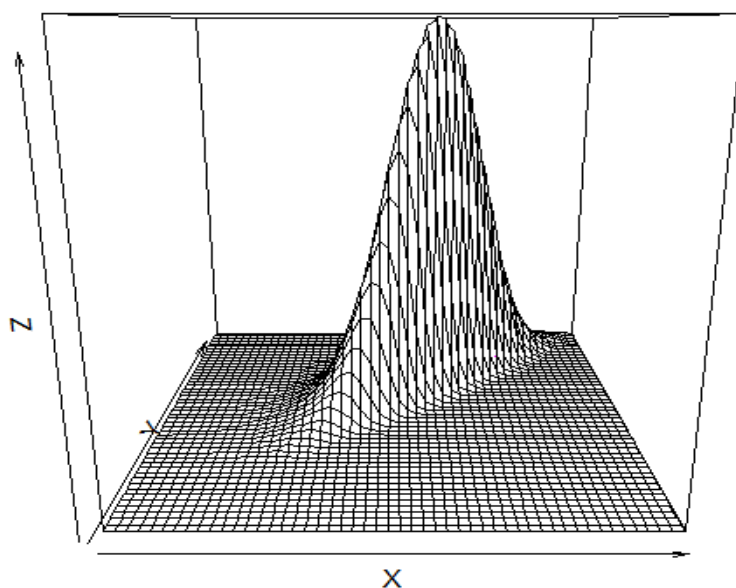
که در آن $\varphi_p(x|\mu, \Sigma)$ تابع چگالی نرمال p -متغیره با پارامتر مکان μ و مقیاس Σ است.

برای اینکه دید شهودی خواننده را نسبت به این توزیع کامل کنیم، نمودار تابع چگالی و کانتور، از

توزیع نرمال چوله دو متغیره معرفی شده در رابطه (۸-۳) را در شکل های (۳-۵) و (۳-۶) می بینیم



شکل (۳-۵) - نمودار کانتور برای توزیع نرمال چوله دو متغیره



شکل (۳-۶) - نمودار تابع چگالی از توزیع نرمال چوله دو متغیره

قضیه ۱۲,۳ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) اگر $X \sim SN_p(\mu, \Sigma, \lambda)$ ، آنگاه نمایش تصادفی برای این خانواده به صورت زیر خواهد بود.

$$X =^d \mu + \Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\delta |Z_1| + (I_p - \delta \delta^T)^{\frac{1}{2}} Z_2 \right) \quad (9-3)$$

که در آن $\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^T \lambda}}$ ، $|Z_1|$ نشان دهنده توزیع نیم نرمال است و

$$Z_1 \sim N(0,1) \quad , \quad Z_2 \sim N_p(0, I_p)$$

برهان: برهان این قضیه با بسط دادن قضیه ۷,۳ به راحتی قابل محاسبه است. $\square$

قضیه ۱۳,۳ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) اگر $X \sim SN_p(\mu, \Sigma, \lambda)$ ، آنگاه تابع مولد گشتاور این خانواده به صورت زیر بیان می باشد.

$$m_X(t) = 2 e^{t^T \mu + \frac{1}{2} t^T \Sigma t} \Phi_1 \left(\delta^T \Sigma^{\frac{1}{2}} t \right)$$

برهان: اثبات قضیه ۱۳,۳، با توجه به قضیه ۸,۳ به راحتی امکان پذیر است. $\square$

(*) قضیه ۱۴,۳ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $X \sim SN_p(\mu, \Sigma, \lambda)$ در این صورت گشتاورهایی از این خانواده به صورت زیر تعریف می شود.

$$E(X) = \mu + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta \quad , \quad Var(X) = \Sigma - \frac{2}{\pi} \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta \delta^T \Sigma^{\frac{1}{2}}$$

برهان: با توجه به نمایش تصادفی بیان شده در رابطه (۹-۳) داریم

$$E(X) = E \left(\mu + \Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\delta |Z_1| + (I_p - \delta \delta^T)^{\frac{1}{2}} Z_2 \right) \right)$$

و با توجه به تعریف ۱۵,۱ نتیجه مورد نظربه صورت زیر حاصل می شود

$$= \mu + \Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\delta E(|Z_1|) + (I_p - \delta\delta^T)^{\frac{1}{2}} E(Z_2) \right) = \mu + \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta E(|Z_1|) + 0 = \mu + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta$$

$$Var(X) = Var \left(\mu + \Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\delta |Z_1| + (I_p - \delta\delta^T)^{\frac{1}{2}} Z_2 \right) \right)$$

$$= Var \left(\Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\delta |Z_1| + (I_p - \delta\delta^T)^{\frac{1}{2}} Z_2 \right) \right) = \Sigma Var \left(\delta |Z_1| + (I_p - \delta\delta^T)^{\frac{1}{2}} Z_2 \right)$$

با توجه به استقلال Z_1, Z_2 داریم

$$= \Sigma [\delta\delta^T Var(|Z_1|) + (I_p - \delta\delta^T) Var(Z_2)]$$

$$= \Sigma [\delta\delta^T \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + (I_p - \delta\delta^T) I_p] = \Sigma \left[\delta\delta^T - \frac{2}{\pi} \delta\delta^T + I_p - \delta\delta^T \right]$$

$$= \Sigma - \frac{2}{\pi} \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta\delta^T \Sigma^{\frac{1}{2}}$$

و برهان کامل است. $\square$

۴,۳ مدل نرمال چوله استاندارد یک متغیره با دو پارامتر چولگی

در این بخش نوع دیگری از توزیع نرمال چوله که دارای دو پارامتر چولگی است را مورد بحث و بررسی قرار می دهیم.

تعریف ۵,۳ (آرنولد و بیور، ۲۰۰۲) می گوییم X دارای توزیع نرمال چوله استاندارد یک متغیره با دو پارامتر چولگی است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر تعریف شود.

$$f_X(x, \lambda_0, \lambda_1) = \frac{1}{\Phi_1\left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{1+\lambda_1^2}}\right)} \varphi_1(x) \Phi_1(\lambda_0 + \lambda_1 x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad (۱۰-۳)$$

که در آن $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ هر دو پارامتر چولگی هستند.

نماد زیر برای نمایش این خانواده استفاده می شود.

$$X \sim SN_1(\lambda_0, \lambda_1)$$

نتیجه ۱,۳ در مدل (۱۰-۳)، در صورتیکه $\lambda_0 = 0$ باشد آنگاه مدل نرمال چوله بیان شده در رابطه (۱-۳) بدست خواهد آمد.

برهان: با قرار دادن $\lambda_0 = 0$ در مدل (۱۰-۳)، نتیجه مطلوب به صورت زیر به دست می‌آید.

$$f_X(x, 0, \lambda_1) = \frac{1}{\Phi_1(0)} \varphi_1(x) \Phi_1(\lambda_1 x) = 2 \varphi_1(x) \Phi_1(\lambda_1 x)$$

حال تغییر پارامتر به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\delta_0 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1+\lambda_1^2}}, \quad \delta_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \quad (۱۱-۳)$$

که متناظر با آن خواهیم داشت.

$$\lambda_0 = \frac{\delta_0}{\sqrt{1-\delta_1^2}}, \quad \lambda_1 = \frac{\delta_1}{\sqrt{1-\delta_1^2}} \quad (۱۲-۳)$$

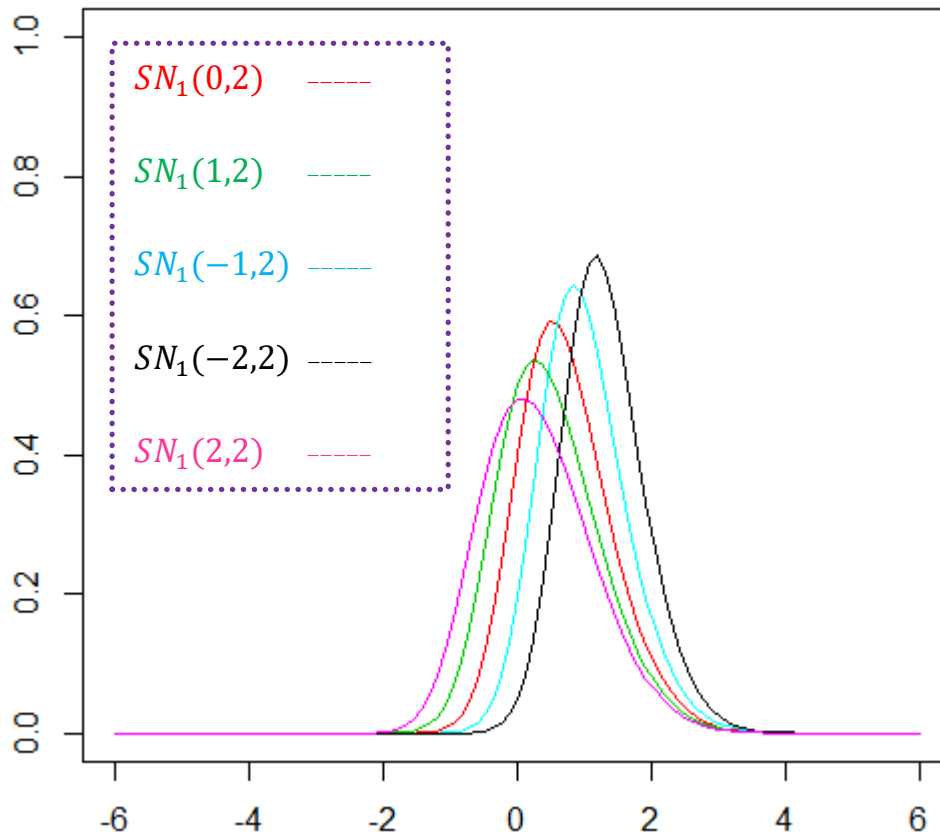
بنابراین با توجه به رابطه (۱۱-۳) می‌توان از نماد زیر برای نمایش این خانواده استفاده کرد

$$X \sim SN_1(\delta_0, \delta_1)$$

و در این صورت تابع چگالی رابطه (۱۰-۳) با تغییر پارامتر رابطه (۱۱-۳) به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$f_X(x, \delta_0, \delta_1) = \frac{1}{\Phi_1(\delta_0)} \varphi_1(x) \Phi_1\left(\frac{\delta_0 + \delta_1 x}{\sqrt{1-\delta_1^2}}\right) \quad (۱۳-۳)$$

نموداری از تابع چگالی معرفی شده در رابطه (۱۰-۳) برای پارامترهای چولگی متفاوت در شکل (۳-۷) نشان داده شده است.



شکل (۷-۳) - نموداری از تابع چگالی نرمال چوله استاندارد با دو پارامتر چولگی

شکل (۷-۳)، تاثیر پارامتر چولگی اول (λ_0) را در توزیع معرفی شده در رابطه (۱۰-۳) نشان می‌دهد.

(*) قضیه ۱۵،۳ (پوراحمدی، ۲۰۰۷) اگر $X \sim SN_1(\delta_0, \delta_1)$ ، آنگاه نمایش تصادفی برای این خانواده

به صورت زیر تعریف می‌شود

$$X \stackrel{d}{=} \delta_1 Z_1(-\delta_0) + \sqrt{1 - \delta_1^2} Z_2 \quad (۱۴-۳)$$

که در آن

$$Z_1(-\delta_0) = \begin{cases} Z_1, & Z_1 > -\delta_0 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

که در آن $Z_1, Z_2 \sim N_1(0,1)$ ، و از هم مستقل هستند. و Z_1 در نقطه $-\delta_0$ بریده شده است.

(*) قضیه ۱۶,۳ (آرنولد و بیور، ۲۰۰۲) فرض کنید $X \sim SN_1(\lambda_0, \lambda_1)$ ، در این صورت تابع مولد گشتاور برای این خانواده به صورت زیر است.

$$m_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \frac{\Phi\left(\frac{\lambda_0 + \lambda_1 t}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}\right)}{\Phi\left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}\right)} \quad (۱۵-۳)$$

(**) قضیه ۱۷,۳ فرض کنید $X \sim SN_1(\delta_0, \delta_1)$ ، در این صورت امید ریاضی و واریانس این خانواده به صورت زیر است.

$$E(X) = \delta_1 \frac{\varphi(\delta_0)}{\Phi(\delta_0)} \quad , \quad Var(X) = \delta_1^2 \frac{\varphi(\delta_0)}{\Phi(\delta_0)} \left(1 - \delta_1 \frac{\varphi(\delta_0)}{\Phi(\delta_0)}\right)$$

برهان : با توجه به تابع مولد گشتاور معرفی شده در رابطه (۱۵-۳) داریم

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{d}{dt}(m_X(t))|_{t=0} \Rightarrow E(X) = t e^{\frac{t^2}{2}} \frac{\Phi(\delta_0 + \delta_1 t)}{\Phi(\delta_0)} + e^{\frac{t^2}{2}} \delta_1 \frac{\varphi(\delta_0 + \delta_1 t)}{\Phi(\delta_0)}|_{t=0} \\ &= \delta_1 \frac{\varphi(\delta_0)}{\Phi(\delta_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{d^2}{dt^2}(m_X(t))|_{t=0} \Rightarrow E(X^2) \\ &= \left(e^{\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{\frac{t^2}{2}}\right) \left(\frac{\Phi(\delta_0 + \delta_1 t)}{\Phi(\delta_0)}\right) + t e^{\frac{t^2}{2}} \left(\frac{1}{\Phi(\delta_0)} \delta_1 \varphi(\delta_0 + \delta_1 t)\right) \\ &\quad + t e^{\frac{t^2}{2}} \delta_1 \frac{\varphi(\delta_0 + \delta_1 t)}{\Phi(\delta_0)} + e^{\frac{t^2}{2}} \delta_1^2 \varphi(\delta_0 + \delta_1 t)|_{t=0} = \frac{\delta_1^2 \varphi(\delta_0)}{\Phi(\delta_0)} \end{aligned}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \delta_1^2 \frac{\varphi(\delta_0)}{\Phi(\delta_0)} \left(1 - \delta_1 \frac{\varphi(\delta_0)}{\Phi(\delta_0)}\right)$$

و برهان کامل است. $\square$

در قضیه زیر نمایش دیگری از توزیع نرمال چوله با دو پارامتر چولگی بیان می شود.

(**) قضیه ۱۸,۳ فرض کنید X, Y متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع نرمال استاندارد باشند در این صورت متغیر تصادفی زیر دارای توزیع بیان شده در رابطه (۳-۱۰) است.

$$Z = \{X | \lambda_0 + \lambda_1 X > Y\}$$

$$Z \sim SN_1(\lambda_0, \lambda_1) \text{ یعنی}$$

برهان: با توجه به تعریف تابع چگالی شرطی داریم

$$P(Z \leq z) = P(X \leq z | \lambda_0 + \lambda_1 X > Y) = \frac{P(X \leq z, \lambda_0 + \lambda_1 X > Y)}{P(\lambda_0 + \lambda_1 X > Y)}$$

واز استقلال X, Y داریم

$$= \frac{P(X \leq z, Y < \lambda_0 + \lambda_1 X)}{P(\lambda_0 + \lambda_1 X > Y)} = \frac{\int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\lambda_0 + \lambda_1 x} \varphi(x) \varphi(y) dx dy}{P(\lambda_0 + \lambda_1 X > Y)}$$

با توجه به اینکه $Y - \lambda_1 X \sim N_1(0, 1 + \lambda_1^2)$ است، می توان نوشت

$$P(\lambda_0 + \lambda_1 X > Y) = P(Y - \lambda_1 X < \lambda_0) = \int_{-\infty}^{\lambda_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 + \lambda_1^2)}} e^{-\frac{t^2}{2(1 + \lambda_1^2)}} dt$$

با تغییر متغیر $\frac{t}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}} = u$ داریم

$$P(\lambda_0 + \lambda_1 X > Y)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}} \int_{-\infty}^{\frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{1 + \lambda_1^2} du \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi_1\left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}\right) = \Phi_1(\delta_0) \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه مطلوب به صورت زیر به دست خواهد آمد

$$P(Z \leq z) = \frac{\int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\lambda_0 + \lambda_1 x} \varphi(x) \varphi(y) dx dy}{\Phi_1(\delta_0)}$$

و برهان کامل است. $\square$

۱,۴,۳ مدل نرمال چوله یک متغیره با دو پارامتر چولگی با میانگین و

واریانس

در این بخش با اضافه کردن پارامتر مکان و مقیاس به تابع چگالی معرفی شده در رابطه (۳-۱۰)، مدل را گسترش می دهیم.

تعریف ۶,۳ (آرنولد و بیور، ۲۰۰۲) می گوئیم X دارای توزیع نرمال چوله یک متغیره با دو پارامتر چولگی با $\mu \in \mathbb{R}$ و $\sigma > 0$ است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \Phi\left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{1+\lambda_1^2}}\right)} \varphi_1\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Phi_1\left(\lambda_0 + \lambda_1 \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) \quad (۱۶-۳)$$

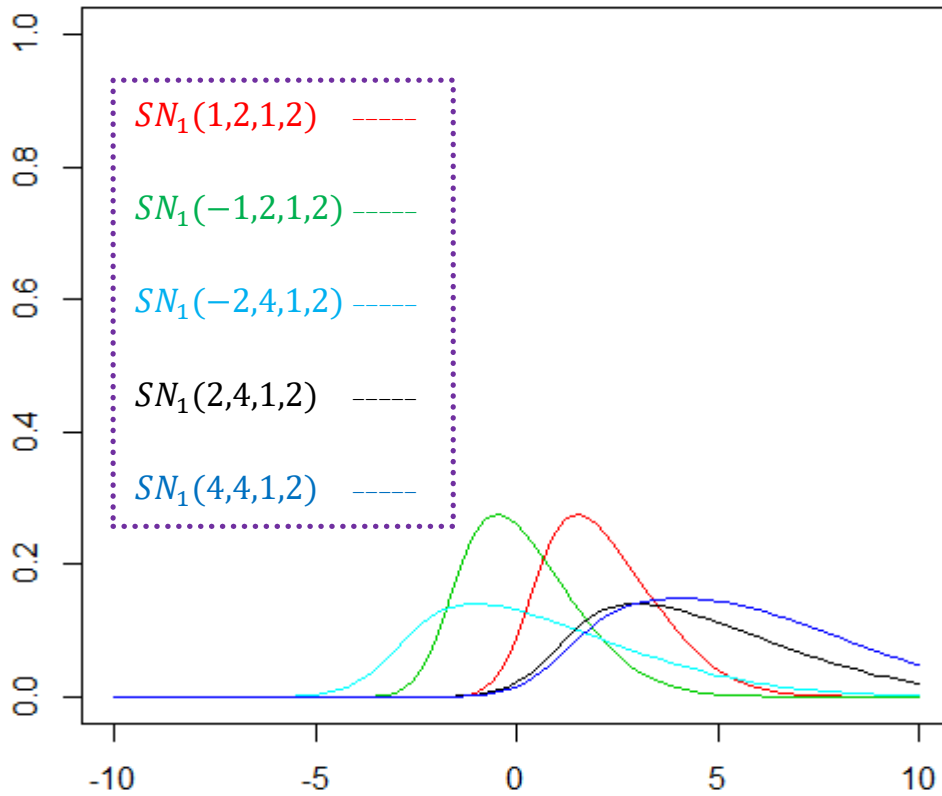
واژ نماد زیر برای نمایش این خانواده استفاده می کنیم

$$X \sim SN_1(\mu, \sigma^2, \lambda_0, \lambda_1)$$

نمایش دیگری برای توزیع معرفی شده در رابطه (۳-۱۶) به صورت زیر بیان می شود.

$$f_X(x) = \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{1+\lambda_1^2}}\right)} \varphi_1(x|\mu, \sigma^2) \Phi_1\left(\lambda_0 + \lambda_1 \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) \quad (۱۷-۳)$$

برای اینکه تاثیر پارامترهای مکان و مقیاس را در مدل (۳-۱۰) ببینیم، شکل (۳-۸) را ببینید.



شکل (۳-۸) - نمودار تابع چگالی توزیع نرمال چوله با دو پارامتر چولگی برای پارامترهای مکان و مقیاس متفاوت

نتیجه ۲,۳ (پوراحمدی، ۲۰۰۷) اگر $X \sim SN_1(\mu, \sigma^2, \lambda_0, \lambda_1)$ ، آنگاه نمایش تصادفی برای این خانواده به صورت زیر بیان می شود.

$$X =^d \mu + \sigma \left(\delta_1 Z_1(-\delta_0) + \sqrt{1 - \delta_1^2} Z_2 \right)$$

که در آن Z_1, Z_2 متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد هستند.

برهان: با اضافه کردن پارامترهای مکان و مقیاس به رابطه (۳-۱۴)، نتیجه ۲,۳ به راحتی اثبات می شود.

(**) نتیجه ۳,۳ فرض کنید $X \sim SN_1(\mu, \sigma^2, \lambda_0, \lambda_1)$ ، در این صورت تابع مولد گشتاور این

خانواده به صورت زیر معرفی می شود.

$$m_X(t) = e^{\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}} \frac{\Phi(\delta_0 + \delta_1 \sigma t)}{\Phi(\delta_0)}$$

برهان : تبدیل $X = \mu + \sigma Z$ را در نظر می گیریم به طوری که Z دارای توزیع رابطه (۳-۱۰) باشد
آنگاه داریم

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E(e^{tX}) = E(e^{t(\mu + \sigma Z)}) = e^{\mu t} m_Z(t\sigma) = e^{\mu t} e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}} \frac{\Phi(\delta_0 + \delta_1 \sigma t)}{\Phi(\delta_0)} \\ &= e^{\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}} \frac{\Phi(\delta_0 + \delta_1 \sigma t)}{\Phi(\delta_0)} \end{aligned}$$

و برهان کامل است. $\square$

(**) نتیجه ۴,۳ اگر $X \sim SN_1(\mu, \sigma^2, \lambda_0, \lambda_1)$, آنگاه امید ریاضی و واریانس برای این خانواده به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu + \sigma \left(\delta_1 \frac{\varphi(\delta_0)}{\Phi(\delta_0)} \right) \\ Var(X) &= \sigma^2 \left(\delta_1^2 \frac{\varphi(\delta_0)}{\Phi(\delta_0)} \left(1 - \delta_1 \frac{\varphi(\delta_0)}{\Phi(\delta_0)} \right) \right) \end{aligned}$$

برهان : با توجه به تبدیل $X = \mu + \sigma Z$, به طوریکه Z دارای توزیع معرفی شده در رابطه (۳-۱۰) باشد و با توجه به قضیه ۱۵,۳ و ۱۷,۳، روابط نتیجه ۴,۳ به سادگی قابل محاسبه هستند.

۵,۳ مدل نرمال چوله چند متغیره با دو پارامتر چولگی

در این بخش، مدل چند متغیره رابطه (۳-۱۷) را به همراه خصوصیات از این توزیع بیان می کنیم

تعریف ۷,۳ (ورنیک، ۲۰۰۵) می گوئیم X دارای توزیع نرمال چوله چند متغیره با دو پارامتر چولگی است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{1+\lambda_1^T \lambda_1}}\right)} \varphi_p(x|\mu, \Sigma) \Phi_1\left(\lambda_0 + \lambda_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu)\right), x \in \mathbb{R}^p \quad (۱۸-۳)$$

که در آن $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}^p$ و $\mu \in \mathbb{R}^p$ و Σ یک ماتریس نیمه معین مثبت $p \times p$ است به گونه ای که $\Sigma = \Sigma_2^{\frac{1}{2}} \Sigma_1^{\frac{1}{2}}$

و از نماد زیر برای نمایش این خانواده استفاده می کنیم

$$X \sim SN_p(\mu, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1) \quad (۱۹-۳)$$

تغییر پارامترهای زیر را در نظر بگیرید.

$$\delta_0 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + \lambda_1^T \lambda_1}}, \quad \delta_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + \lambda_1^T \lambda_1}}$$

$$\lambda_0 = \frac{\delta_0}{\sqrt{1 - \delta_1^T \delta_1}}, \quad \lambda_1 = \frac{\delta_1}{\sqrt{1 - \delta_1^T \delta_1}}, \quad \gamma = \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta_1$$

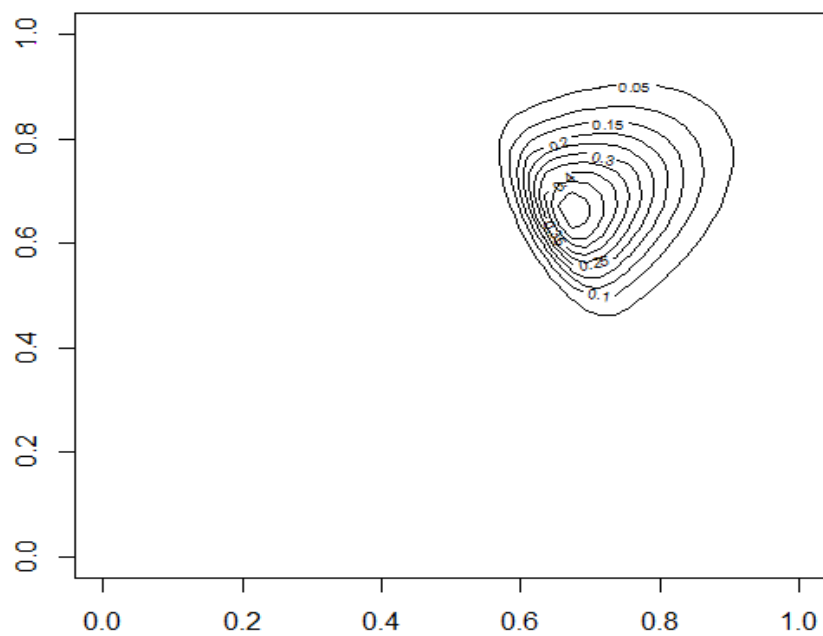
با توجه به پارامترهای معرفی شده بالا می توان تابع چگالی رابطه (۱۸-۳) را به دو صورت زیر نوشت.

$$X \sim SN_p(\mu, \Sigma, \delta_0, \delta_1) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\Phi(\delta_0)} \varphi_p(x|\mu, \Sigma) \Phi_1\left(\frac{\delta_0 + \delta_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu)}{\sqrt{1 - \delta_1^T \delta_1}}\right)$$

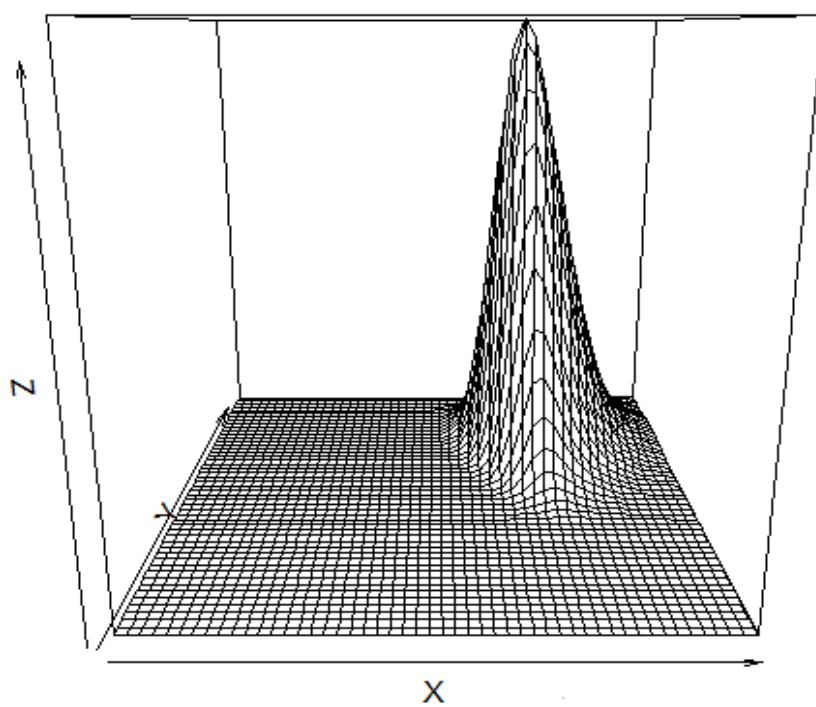
$$X \sim SN_p(\mu, \Sigma, \delta_0, \gamma) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\Phi(\delta_0)} \varphi_p(x|\mu, \Sigma) \Phi_1\left(\frac{\delta_0 + \gamma^T \Sigma^{-1}(x - \mu)}{\sqrt{1 - \gamma^T \Sigma^{-1} \gamma}}\right)$$

نمودار تابع چگالی و کانتور، از توزیع معرفی شده در رابطه (۱۸-۳) را در شکل های (۹-۳) و (۱۰-۳)

ببینید.



شکل (۳-۹) - نمودار کانتور از توزیع نرمال چوله دو متغیره با دو پارامتر چولگی



شکل (۳-۱۰) - نمودار تابع چگالی از توزیع نرمال چوله دو متغیره با دو پارامتر چولگی

(**) قضیه ۱۹,۳ فرض کنید $X \sim SN_p(\mu, \Sigma, \delta_0, \delta_1)$ در این صورت نمایش تصادفی برای این خانواده به صورت زیر خواهد بود.

$$X =^d \mu + \Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\delta_1 Z_1 (-\delta_0) + (I_p - \delta_1 \delta_1^T)^{\frac{1}{2}} Z_2 \right) \quad (۲۰-۳)$$

که در آن $Z_1 \sim N_1(0,1)$ و $Z_2 \sim N_p(0, I_p)$ می باشد.

برهان : با توجه به نتیجه ۲,۳ ، اثبات به راحتی امکان پذیر است.

(**) قضیه ۲۰,۳ فرض کنید $X \sim SN_p(\mu, \Sigma, \delta_0, \delta_1)$ در این صورت امید و واریانس این مدل به صورت زیر است

$$E(X) = \mu + \Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\delta_1 \frac{\varphi(\delta_0)}{\Phi(\delta_0)} \right)$$

$$Var(X) = \Sigma \left[\delta_1 \delta_1^T \left(1 - \frac{\varphi_1^2(\delta_0) + \delta_0 \Phi_1(\delta_0) \varphi_1(\delta_0)}{\Phi^2(\delta_0)} \right) + (I_p - \delta_1 \delta_1^T) \right]$$

برهان : روابط بالا با استفاده از قضیه ۱۹,۳ و تعریف ۱,۱ به راحتی قابل محاسبه است.

(*) قضیه ۲۱,۳ (ورنیک، ۲۰۰۵) اگر $X \sim SN_p(\mu, \Sigma, \delta_0, \delta_1)$ آنگاه تابع مولد گشتاور این خانواده به صورت زیر خواهد بود.

$$m_X(t) = \exp \left\{ t^T \mu + \frac{t^T \Sigma t}{2} \right\} \frac{\Phi \left(\delta_0 + \delta_1^T \Sigma^{\frac{1}{2}} t \right)}{\Phi(\delta_0)} \quad (۲۱-۳)$$

برهان : با توجه به رابطه (۲۰-۳) داریم

$$m_X(t) = E(e^{t^T X}) = E \left(e^{t^T \left(\mu + \Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\delta_1 Z_1 (-\delta_0) + (I_p - \delta_1 \delta_1^T)^{\frac{1}{2}} Z_2 \right) \right)} \right)$$

حال از آن جایی که Z_1, Z_2 مستقل هستند می توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned}
m_X(t) &= e^{t^T \mu} E \left(e^{t^T \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta_1 Z_1 (-\delta_0)} \right) E \left(e^{t^T \Sigma^{\frac{1}{2}} (I_p - \delta_1 \delta_1^T)^{\frac{1}{2}} Z_2} \right) \\
&= e^{t^T \mu} m_{Z_1(-\delta_0)} \left(t^T \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta_1 \right) m_{Z_2} \left(t^T \Sigma^{\frac{1}{2}} (I_p - \delta_1 \delta_1^T)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= \exp \left\{ t^T \mu + \frac{t^T \Sigma t}{2} \right\} \frac{\Phi \left(\delta_0 + \delta_1^T \Sigma^{\frac{1}{2}} t \right)}{\Phi(\delta_0)}
\end{aligned}$$

و برهان کامل است. $\square$

قضیه ۲۲،۳ (ورنیک، ۲۰۰۵) فرض کنید $X \sim SN_p(\mu, \Sigma, \delta_0, \gamma)$ بردار X را به دو زیر بردار به صورت $X^T = (X_1^T, X_2^T)^T$ با بعدهای p_1, p_2 بطوریکه $p_1 + p_2 = p$ افراز می‌کنیم. و به طور مشابه داریم

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad \mu = [\mu_1^T \quad \mu_2^T]^T, \gamma = [\gamma_1^T \quad \gamma_2^T], \quad t = [t_1^T \quad t_2^T]$$

در این صورت

$$X_1^T \sim SN_{p_1}(\mu_1^T, \Sigma_{11}, \delta_0, \gamma_1^T)$$

9

$$X_1^T | X_2^T \sim SN_{p_1}(\mu_{11}, \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}, l_0, l_1)$$

که در آن

$$\mu_{11} = \mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - \mu_2), \quad l_0 = \frac{\gamma_2^T \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - \mu_2)}{\sqrt{1 - \gamma^T \Sigma^{-1} \gamma}}$$

$$l_1 = \frac{(\Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21})^{-\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \gamma_2)}{\sqrt{1 - \gamma^T \Sigma^{-1} \gamma}}$$

برهان : با استفاده از تابع مولد گشتاور رابطه (۳-۲۱) و با قرار دادن $t_2 = 0$ داریم

$$m_X\left(\begin{matrix} t_1 \\ 0 \end{matrix}\right) = \exp\left\{t_1^T \mu_1 + \frac{t_1^T \Sigma_{11} t_1}{2}\right\} \frac{\Phi(\delta_0 + \gamma_1^T t_1)}{\Phi(\delta_0)}$$

واز آنجاییکه تابع مولد گشتاور توزیع را به صورت یکتا مشخص می کند می توان نوشت

$$X_1^T \sim SN_{p_1}(\mu_1^T, \Sigma_{11}, \delta_0, \gamma_1^T)$$

و برهان کامل است. $\square$

قضیه ۲۳,۳ (ورنیک، ۲۰۰۵) فرض کنید $X \sim SN_p(\mu, \Sigma, \delta_0, \gamma)$ و b یک بردار حقیقی $m \times 1$ و C

یک ماتریس $m \times p$ با رتبه m باشد بطوریکه $p > m$ اگر داشته باشیم $Y = b + CX$ در این

صورت

$$Y \sim SN_m(b + C\mu, C\Sigma C^T, \delta_0, C\gamma)$$

برهان : با استفاده از تابع مولد گشتاور رابطه (۳-۲۱) داریم

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E(e^{t^T Y}) = E(e^{t^T (b + CX)}) = e^{t^T b} m_X(t^T C) \\ &= \frac{e^{t^T b} \exp\left\{t^T C\mu + \frac{Ct^T \Sigma C^T t}{2}\right\} \Phi(\delta_0 + \gamma^T C^T t)}{\Phi(\delta_0)} \\ &= \exp\left\{t^T (b + C\mu) + \frac{t^T C \Sigma C^T t}{2}\right\} \frac{\Phi(\delta_0 + \gamma^T C^T t)}{\Phi(\delta_0)} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $C\Sigma C^T$ یک ماتریس معین مثبت است نتیجه مطلوب به صورت زیر به دست می آید.

$$Y \sim SN_m(b + C\mu, C\Sigma C^T, \delta_0, C\gamma)$$

فصل چهارم

مدل نرمال چوله آمیخته مقیاسی

۱.۴ مقدمه

در این فصل دو مدل از خانواده توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی را معرفی می کنیم. این فصل در حقیقت ترکیبی از فصل های دوم و سوم است. بنابراین اگر با داده هایی سر و کار داشته باشیم که نمودار هیستوگرام این داده ها هم دارای چولگی و هم دارای دنباله های ضخیم باشند، خانواده توزیع های معرفی شده در این فصل می توانند یک پیشنهاد مناسب برای برازش به این نوع از داده ها باشند. با توجه به معرفی دو مدل از توزیع های نرمال چوله در فصل سوم، در این فصل دو دسته از خانواده توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی را با یک و دو پارامتر چولگی معرفی می کنیم و خصوصیات آماری مناسبی از این دو خانواده را بیان می کنیم

۲.۴ توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی چند متغیره با یک پارامتر

چولگی

در این بخش توزیع آمیخته را روی مدل نرمال چوله با یک پارامتر چولگی که در بخش ۳.۳ معرفی شد، بیان می کنیم. ابتدا تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱.۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) اگر U یک متغیر تصادفی مثبت تک نمایی با تابع توزیع $H(u, \alpha)$ باشد آنگاه می گوئیم X عضو خانواده توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر تعریف شود.

$$f_X(x) = 2 \int_u \varphi_p(x|\mu, u^{-1}\Sigma) \Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}}\lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu)\right) dH(u, \alpha), x \in \mathbb{R}^p \quad (۱-۴)$$

واژ نماد زیر برای نمایش این خانواده استفاده می کنیم

$$X \sim SNI_p(\mu, \Sigma, \lambda, H)$$

(*) نتیجه ۱,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) با توجه به تابع چگالی رابطه (۱-۴) نتیجه زیر را داریم .

$$X|U = u \sim SN_p(\mu, u^{-1}\Sigma, \lambda) \quad (2-4)$$

برهان : با توجه به تعریف تابع چگالی حاشیه ای و تابع چگالی شرطی داریم

$$f_X(x) = \int_u f_{X,U}(x, u) du = \int_u f_{X|U}(x|u) h(u) du = \int_u f_{X|U}(x|u) dH(u, \alpha)$$

که با توجه به رابطه (۱-۴) و تابع چگالی نرمال چوله معرفی شده در بخش ۳,۳، برهان کامل است. □

نتیجه ۲,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) در تابع چگالی رابطه (۱-۴)، اگر $\lambda = 0$ ، آنگاه خانواده توزیع های نرمال آمیخته مقیاسی به دست می آید.

برهان : با قرار دهیم $\lambda = 0$ در رابطه (۱-۴) داریم

$$f_X(x) = \int_u 2\varphi_p(x|\mu, u^{-1}\Sigma) \frac{1}{2} dH(u, \alpha) = \int_u \varphi_p(x|\mu, u^{-1}\Sigma) dH(u, \alpha)$$

و برهان کامل است. □

قضیه ۱,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $X \sim SNI_p(\mu, \Sigma, \lambda, H)$ ، در این صورت نمایش تصادفی برای این خانواده به صورت زیر معرفی می شود.

$$X \stackrel{d}{=} \mu + U^{-\frac{1}{2}} Z \quad (3-4)$$

که در آن

$$Z \sim SN_p(0, \Sigma, \lambda)$$

برهان : رابطه بالا از این حقیقت ناشی می شود که

$$X|U = u \sim SN_p(\mu, u^{-1}\Sigma, \lambda)$$

و با مشخص بودن توزیع U برهان کامل است. □

(*) قضیه ۲,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) اگر $X \sim SNI_p(\mu, \Sigma, \lambda, H)$ ، آنگاه تابع مولد گشتاور این خانواده به صورت زیر بیان می‌شود.

$$m_X(t) = \int_u 2e^{t^T \mu + \frac{1}{2} u^{-1} t^T \Sigma t} \Phi_1\left(u^{-\frac{1}{2}} \delta^T \Sigma^{\frac{1}{2}} t\right) dH(u, \alpha)$$

برهان: با توجه به خواص امید ریاضی شرطی داریم

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = E_u E(e^{tX}|U) = E_u \left(m_{X|U=u}(t) \right)$$

و در ادامه

$$X \sim SN_p(\mu, \Sigma, \lambda) \Rightarrow m_X(t) = 2 e^{t^T \mu + \frac{1}{2} t^T \Sigma t} \Phi_1\left(\delta^T \Sigma^{\frac{1}{2}} t\right)$$

$$m_X(t) = E_u \left(m_{X|U=u}(t) \right) = \int_u 2e^{t^T \mu + \frac{1}{2} u^{-1} t^T \Sigma t} \Phi_1\left(u^{-\frac{1}{2}} \delta^T \Sigma^{\frac{1}{2}} t\right) dH(u, \alpha)$$

و برهان کامل است. $\square$

(*) قضیه ۳,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $X \sim SNI_p(\mu, \Sigma, \lambda, H)$ در این صورت برای

هر بردار ثابت $b \in \mathbb{R}^m$ و ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ با رتبه کامل^۱، می‌توان نوشت

$$Y = b + AX \sim SNI_m(b + A\mu, A\Sigma A^T, \lambda^*, H)$$

$$\lambda^* = \frac{\delta^*}{\sqrt{1 - \delta^{*T} \delta^*}}, \quad \delta^* = (A\Sigma A^T)^{-\frac{1}{2}} A \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta$$

برهان: با توجه به تابع مولد گشتاور تعریف شده در قضیه ۲,۴، می‌توان نوشت

1. Full rank

$$\begin{aligned}
m_Y(t) &= E(e^{tY}) = E(e^{t^T(b+AX)}) = e^{t^T b} m_X(t^T A) \\
&= e^{t^T b} \int_u 2e^{t^T A\mu + \frac{1}{2}u^{-1}t^T A\Sigma A^T t} \Phi_1\left(u^{-\frac{1}{2}} \delta^T \Sigma^{\frac{1}{2}} A^T t\right) dH(u) \\
&= \int_u 2e^{t^T(b+A\mu) + \frac{1}{2}u^{-1}t^T A\Sigma A^T t} \Phi\left(u^{-\frac{1}{2}} \delta^{*T} \psi^{\frac{1}{2}} t\right) dH(u)
\end{aligned}$$

که در آن $\psi = A\Sigma A^T$ و $\delta^* = \psi^{-\frac{1}{2}} A\Sigma^{\frac{1}{2}} \delta$ ، بنابراین نتیجه مطلوب به صورت زیر به دست می‌آید.

$$Y \sim SNI_m(b + A\mu, A\Sigma A^T, \lambda^*, H), \quad \lambda^* = \frac{\delta^*}{\sqrt{1 - \delta^{*T} \delta^*}}, \quad \delta^* = \psi^{-\frac{1}{2}} A\Sigma^{\frac{1}{2}} \delta$$

و برهان کامل است. $\square$

(*) نتیجه ۳,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) اگر $X \sim SNI_p(\mu, \Sigma, \lambda, H)$ و $a \in \mathbb{R}^p$ آنگاه

$$a^T X \sim SNI_p(a^T \mu, a^T \Sigma a, \lambda^*, H)$$

برهان: مانند برهان قضیه ۳,۴ و با استفاده از تابع مولد گشتاور معرفی شده در قضیه ۲,۴ داریم

$$\begin{aligned}
Y = a^T X &\Rightarrow m_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(a^T X)}) = m_X(a^T t) \\
&= \int_u 2e^{t^T a\mu + \frac{1}{2}u^{-1}t^T a\Sigma a^T t} \Phi\left(u^{-\frac{1}{2}} \delta^T \Sigma^{\frac{1}{2}} a^T t\right) dH(u) \\
&= \int_u 2e^{t^T a\mu + \frac{1}{2}u^{-1}t^T a\Sigma a^T t} \Phi\left(u^{-\frac{1}{2}} \delta^{*T} \psi^{\frac{1}{2}} t\right) dH(u)
\end{aligned}$$

که در آن $\psi = a\Sigma a^T$ و $\delta^* = \psi^{-\frac{1}{2}} a\Sigma^{\frac{1}{2}} \delta$ ، بنابراین با توجه به اینکه تابع مولد گشتاور توزیع را به

صورت یکتا مشخص می‌کند، نتیجه به صورت زیر به دست می‌آید.

$$Y = a^T X \sim SNI_p(a\mu, a\Sigma a^T, \lambda^*, H), \quad \lambda^* = \frac{\delta^*}{\sqrt{1 - \delta^{*T} \delta^*}}$$

و برهان کامل است. $\square$

قضیه ۴,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $X \sim SNI_p(\mu, \Sigma, \lambda, H)$ بردار X را به دو زیر بردار به صورت $X^T = (X_1^T, X_2^T)$ با بعدهای p_1, p_2 بطوریکه $p_1 + p_2 = p$ افراز کنیم و به طور مشابه داریم

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}, \mu = [\mu_1^T \quad \mu_2^T]^T$$

در این صورت داریم

$$X_1 \sim SNI_{p_1}(\mu_1, \Sigma_{11}, \Sigma_{11}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\nu}, H)$$

که در آن

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu_1 + \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \nu_2}{\sqrt{1 + \nu_2^T \Sigma_{22.1} \nu_2}}, \Sigma_{22.1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}, \nu = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \lambda = (\nu_1^T, \nu_2^T)$$

قضیه ۵,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) تحت فرضیات قضیه ۴,۴ اگر $X \sim SNI_p(\mu, \Sigma, \lambda, H)$ ، آنگاه

$$f_{X_2|X_1, U}(x_2|x_1, u) = \varphi_{p_2}(x_2|\mu_{2.1}, u^{-1}\Sigma_{22.1}) \frac{\Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}} \tilde{\nu}^T(x - \mu)\right)}{\Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}} \tilde{\nu}^T(x_1 - \mu_1)\right)}$$

که در آن

$$\mu_{2.1} = \mu_2 + \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (x_1 - \mu_1)$$

برهان : باتوجه به نتیجه ۱,۴ و قضیه ۴,۴ داریم

$$X|U = u \sim SN_p(\mu, u^{-1}\Sigma, \lambda), X_1|U = u \sim SN_{p_1}(\mu_1, u^{-1}\Sigma_{11}, \Sigma_{11}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\nu})$$

و با استفاده از تعریف تابع چگالی شرطی می توان نوشت

$$f_{X_2|X_1,U}(x_2|x_1, u) = \frac{f(x_2, x_1, u)}{f(x_1, u)} = \frac{f(x_2, x_1|u)f(u)}{f(x_1|u)f(u)} = \frac{f(x_2, x_1|u)}{f(x_1|u)} = \frac{f(x|u)}{f(x_1|u)}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} f_{X_2|X_1,U}(x_2|x_1, u) &= \frac{2\varphi_p(x|\mu, u^{-1}\Sigma)\Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}}\lambda^T\Sigma^{-\frac{1}{2}}(x-\mu)\right)}{2\varphi_{p_1}(x_1|\mu_1, u^{-1}\Sigma_{11})\Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}}\Sigma_{11}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\nu}^T\Sigma_{11}^{\frac{1}{2}}(x_1-\mu_1)\right)} \\ &= \frac{\varphi_p(x|\mu, u^{-1}\Sigma)\Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}}\tilde{\nu}^T(x-\mu)\right)}{\varphi_{p_1}(x_1|\mu_1, u^{-1}\Sigma_{11})\Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}}\tilde{\nu}^T(x_1-\mu_1)\right)} \\ &= \varphi_{p_2}(x_2|\mu_{2.1}, u^{-1}\Sigma_{22.1}) \frac{\Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}}\tilde{\nu}^T(x-\mu)\right)}{\Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}}\tilde{\nu}^T(x_1-\mu_1)\right)} \end{aligned}$$

و برهان کامل است. $\square$

نتیجه ۴,۴ (لاکس و همکاران، ۲۰۱۱) اگر $X \sim SNI_p(\mu, \Sigma, \lambda, H)$ آنگاه داریم

$$E(X_2|X_1, U) = \mu_{2.1} + u^{-\frac{1}{2}} \frac{\varphi_1\left(u^{\frac{1}{2}}\tilde{\nu}^T(x_1-\mu_1)\right)}{\Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}}\tilde{\nu}^T(x_1-\mu_1)\right)} \frac{\Sigma_{22.1}\nu_2}{\sqrt{1 + \nu_2^T\Sigma_{22.1}\nu_2}}$$

برهان: با توجه به تابع چگالی معرفی شده در قضیه ۵,۴ به راحتی قابل اثبات است.

(*)قضیه ۶,۴ (لاکس و همکاران، ۲۰۱۱) با توجه به فرضیات قضیه ۴,۴، اگر $X \sim$

$SNI_p(\mu, \Sigma, \lambda, H)$ ، آنگاه گشتاور مرتبه اول X_2 به شرط $X_1 = x_1$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E(X_2|X_1 = x_1) = \mu_{2.1} + \frac{\Sigma_{22.1} \mathbf{v}_2}{\sqrt{1 + \mathbf{v}_2^T \Sigma_{22.1} \mathbf{v}_2}} E \left(U^{-\frac{1}{2}} \frac{\varphi_1 \left(u^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}^T (x_1 - \mu_1) \right)}{\Phi_1 \left(u^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}^T (x_1 - \mu_1) \right)} \middle| x_1 \right)$$

برهان: با استفاده از خاصیت امید ریاضی شرطی زیر

$$E(X_2|X_1) = E_U(E(X_2|X_1, U|X_1))$$

و با توجه به نتیجه ۴,۴، برهان کامل است. □

قضیه ۷,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $Y \sim X \sim SNI_m(\mu_1, \Sigma_1, \lambda, H)$

$NI_p(\mu_2, \Sigma_2, H)$ در این صورت برای هر ماتریس A از مرتبه $p \times m$ داریم

$$AX + Y \sim SNI_p(A\mu_1 + \mu_2, A\Sigma_1 A^T + \Sigma_2, \lambda_*, H)$$

که در آن

$$\lambda_* = \frac{\delta_*}{\sqrt{1 - \delta_*^T \delta_*}}, \quad \delta_* = (A\Sigma_1 A^T + \Sigma_2)^{-\frac{1}{2}} A \Sigma_1^{\frac{1}{2}} \delta$$

برهان: با توجه به قضایای ۱,۲ و ۱,۴ روابط زیر را داریم

$$X =^d \mu_1 + U^{-\frac{1}{2}} Z, \quad Z \sim SN_m(\mathbf{0}, \Sigma_1, \lambda)$$

$$Y =^d \mu_2 + U^{-\frac{1}{2}} W, \quad W \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma_2)$$

همچنین با توجه به نتایج ۱,۲ و ۱,۴ می توان نوشت

$$X|U = u \sim SN_m(\mu_1, U^{-1}\Sigma_1, \lambda)$$

$$Y|U = u \sim N_p(\mu_2, U^{-1}\Sigma_2)$$

حال فرض کنید $V = AX + Y$ ، با توجه به استقلال X, Y, U داریم

$$\begin{aligned}
m_V(t) &= E(e^{tV}) = E(e^{t(AX+Y)}) = E(e^{tAX+tY}) = E_U(E(e^{tAX}|U)E(e^{tY}|U)) \\
&= \int_u m_{AX|U}(t)m_{Y|U}(t)dH(u) \\
&= \int_u 2 e^{t^T A\mu_1 + \frac{1}{2}u^{-1}t^T A\Sigma_1 A^T t} \Phi_1\left(\delta^T u^{-\frac{1}{2}} \Sigma_1^{\frac{1}{2}} A^T t\right) e^{t^T \mu_2 + \frac{1}{2}u^{-1}t^T \Sigma_2 t} dH(u) \\
&= \int_u 2 e^{t^T (A\mu_1 + \mu_2) + \frac{1}{2}u^{-1}t^T (A\Sigma_1 A^T + \Sigma_2)t} \Phi_1\left(\delta_*^T u^{-\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} t\right) dH(u)
\end{aligned}$$

که در آن $\psi = A\Sigma_1 A^T + \Sigma_2$ و $\delta_* = \psi^{-\frac{1}{2}} A \Sigma_1^{\frac{1}{2}} \delta$ ، بنابراین با توجه به قضیه ۲،۴ کاملاً واضح است که

$$V \sim SNI_p(A\mu_1 + \mu_2, A\Sigma_1 A^T + \Sigma_2, \lambda_*, H)$$

(*) قضیه ۸،۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $X \sim SNI_p(\mu, \Sigma, \lambda, H)$ در این صورت امید ریاضی و واریانس این خانواده به صورت زیر است.

$$E(X) = \mu + \sqrt{\frac{2}{\pi}} E\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta, \quad E\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) < \infty$$

$$Var(X) = E(U^{-1})\Sigma - \frac{2}{\pi} E^2\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta \delta^T \Sigma^{\frac{1}{2}}, \quad E(U^{-1}) < \infty$$

برهان: با توجه به قضایای ۱،۴ و ۱۲،۳ و با در نظر داشتن اینکه متغیرهای تصادفی U, Z مستقل از

یکدیگر هستند، می توان نوشت

$$E(X) = E\left(\mu + U^{-\frac{1}{2}} Z\right) = \mu + E\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) E(Z) = \mu + E\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta$$

همچنین با توجه به معادله

$$Var(XY) = E^2(X)Var(Y) + E^2(Y)Var(X) + Var(X)Var(Y), \quad X \perp Y$$

نتیجه به صورت زیر حاصل می شود.

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\mathbf{X}) &= \text{Var}\left(\boldsymbol{\mu} + U^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Z}\right) = \text{Var}\left(U^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Z}\right) \\
&= E^2\left(U^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\Sigma - \frac{2}{\pi} \Sigma^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}^T \Sigma^{\frac{1}{2}}\right) + E^2(Z) \text{Var}\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) + \text{Var}\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) \text{Var}(Z) \\
&= \Sigma E^2\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{2}{\pi} \Sigma^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}^T \Sigma^{\frac{1}{2}} E^2\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) + \frac{2}{\pi} \Sigma \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}^T \left(E(U^{-1}) - E^2\left(U^{-\frac{1}{2}}\right)\right) \\
&\quad + \left(E(U^{-1}) - E^2\left(U^{-\frac{1}{2}}\right)\right)\left(\Sigma - \frac{2}{\pi} \Sigma^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}^T \Sigma^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= E(U^{-1})\Sigma - \frac{2}{\pi} E^2\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) \Sigma^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}^T \Sigma^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

وبرهان کامل است. $\square$

(*) قضیه ۹,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) اگر $\mathbf{X} \sim \text{SNI}_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\lambda}, H)$ آنگاه برای هر تابع زوج g ، توزیع $g(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ وابسته به پارامتر چولگی نیست و دارای همان توزیعی است که $g(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$ داراست به طوریکه $\mathbf{Y} \sim \text{NI}_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, H)$ است.

برهان: با استفاده از لم ۵,۱ و قضیه ۲,۴ به راحتی قابل اثبات است.

نتیجه ۵,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $\mathbf{X} \sim \text{SNI}_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\lambda}, H)$ ، $\mathbf{Y} \sim \text{NI}_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, H)$ و A یک ماتریس متقارن $p \times p$ باشد در این صورت

$$(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^T A (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}) \stackrel{d}{=} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T A (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$$

برهان: برهان این قضیه به عنوان نتیجه ای از قضیه ۹,۴ به راحتی قابل اثبات است.

نتیجه ۶,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) با توجه به اهمیت فاصله ماهالانوبیس در توزیع های معرفی شده به عنوان یک نتیجه دیگر از قضیه ۹,۴ داریم

$$d_{\lambda} = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) , \quad d = (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}) \Rightarrow d_{\lambda} \stackrel{d}{=} d$$

(*) نتیجه ۷,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $\mathbf{X} \sim \text{SNI}_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\lambda}, H)$ در این صورت

$$E(d_\lambda^m) = \frac{2^m \Gamma\left(m + \frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} E(U^{-m})$$

برهان: نتیجه ۶,۴ این امکان را فراهم می‌کند تا بتوان m -امین گشتاور d_λ را به صورت زیر محاسبه

نمود

$$d = (Y - \mu)^T \Sigma^{-1} (Y - \mu) = {}^d (Z^T U^{-\frac{1}{2}}) \Sigma^{-1} (U^{-\frac{1}{2}} Z) = (Z^T \Sigma^{-1} Z) U^{-1} = {}^d \chi_p^2 U^{-1}$$

$$d^m = (\chi_p^2)^m u^{-m} \Rightarrow E(d^m) = E\left((\chi_p^2)^m\right) E(U^{-m}) = E(d_\lambda^m)$$

از طرفی اگر $X \sim \chi_p^2$ باشد آنگاه داریم

$$\begin{aligned} E(X^m) &= \int_0^\infty x^m \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} x^{\frac{p}{2}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}x\right\} dx \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\frac{p}{2}+m-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}x\right\} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}+m}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}+m}} dx \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2} + m\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}+m}} = \frac{2^m \Gamma\left(\frac{p}{2} + m\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \end{aligned}$$

و در نهایت نتیجه مطلوب به صورت زیر به دست می‌آید.

$$E(d_\lambda^m) = \frac{2^m \Gamma\left(m + \frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} E(U^{-m})$$

وبرهان کامل است. $\square$

۳.۴ مثالهایی از توزیع نرمال چوله آمیخته مقیاسی با یک پارامتر چولگی

در این بخش سه توزیع از خانواده معرفی شده بخش ۲،۴، شامل توزیع t -استیودنت چوله^۱ با یک پارامتر چولگی، اسلش چوله^۲ با یک پارامتر چولگی و نرمال چوله آلایشی^۳ با یک پارامتر چولگی را معرفی می‌کنیم. این توزیع‌ها نسبت به توزیع نرمال چوله با یک پارامتر چولگی، دارای دنباله‌های پهن تری هستند. بنابراین از دقت بالاتری نسبت به توزیع نرمال چوله با یک پارامتر چولگی برای برازش به داده‌های واقعی برخوردارند.

۱،۳،۴ توزیع t -استیودنت چوله با یک پارامتر چولگی

یکی از مهمترین توزیع‌های نرمال چوله آمیخته مقیاسی، توزیع t -استیودنت چوله است، که با در نظر گرفتن $U \sim \Gamma(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2})$ ، طبق تعریف زیر به دست می‌آید.

تعریف ۲،۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) می‌گوییم $X \sim ST_p(\mu, \Sigma, \lambda, \nu)$ است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر تعریف شود

$$f_X(x) = 2 t_p(x|\mu, \Sigma, \nu) T_1\left(\frac{\sqrt{\nu+p} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x-\mu)}{\sqrt{\nu+p}} \middle| 0, 1, \nu+p\right), x \in \mathbb{R}^p \quad (۴-۴)$$

که در آن $t_p(\cdot|\mu, \Sigma, \nu)$ تابع چگالی p -متغیره توزیع t -استیودنت و $T_1(\cdot|\mu, \Sigma, \nu)$ تابع توزیع t -استیودنت استاندارد است.

برای اینکه نشان دهیم تابع چگالی معرفی شده در رابطه (۴-۴) عضوی از خانواده معرفی شده در رابطه (۱-۴) است، داریم

$$f_X(x) = 2 \int_u \varphi_p(x|\mu, u^{-1}\Sigma) \Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x-\mu)\right) h(u, \nu) du$$

1. Skew t -distribution
2. Skew-slash distribution
3. Contaminated skew-normal distribution

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{\infty} (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{p}{2}} e^{-\frac{ud}{2}} \Phi_1 \left(\sqrt{u} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (x - \mu) \right) \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} u^{\frac{v}{2}} e^{-\frac{v}{2}u} du \\
&= \frac{2 \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) (2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} u^{\frac{p+v}{2}-1} e^{-\frac{u(d+v)}{2}} \Phi_1 \left(\sqrt{u} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (x - \mu) \right) du
\end{aligned}$$

برای ادامه، روابط زیر را در نظر می‌گیریم

$$U \sim \Gamma\left(\frac{p+v}{2}, \frac{d+v}{2}\right) \Rightarrow (d+v)U \sim \Gamma\left(\frac{p+v}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow w = (d+v)U \sim \chi_{p+v}^2$$

می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned}
&f_X(x) \\
&= \frac{2 \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{p+v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) (2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d+v}{2}\right)^{\frac{p+v}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{d+v}{2}\right)^{\frac{p+v}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p+v}{2}\right)} u^{\frac{p+v}{2}-1} e^{-\frac{u(d+v)}{2}} \Phi_1 \left(\frac{\lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (x - \mu)}{\sqrt{d+v}} \sqrt{w} \right) du
\end{aligned}$$

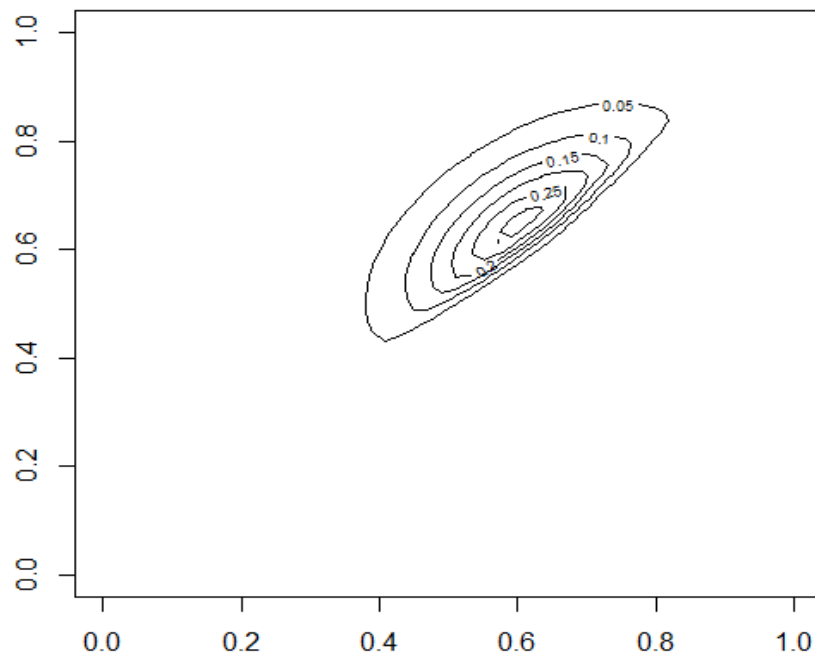
بنابراین با استفاده از لم ۴،۱ و تابع چگالی توزیع t-استیودنت معرفی شده در رابطه (۲-۸) داریم

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{2 \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{p+v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) (2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d+v}{2}\right)^{\frac{p+v}{2}}} E_u \left(\Phi_1 \left(\frac{\lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (x - \mu)}{\sqrt{d+v}} \sqrt{w} \right) \right) \\
&= 2 t_p(x|\mu, \Sigma, v) T_1 \left(\frac{\sqrt{v+p} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (x - \mu)}{\sqrt{d+v}} \middle| 0, 1, v+p \right)
\end{aligned}$$

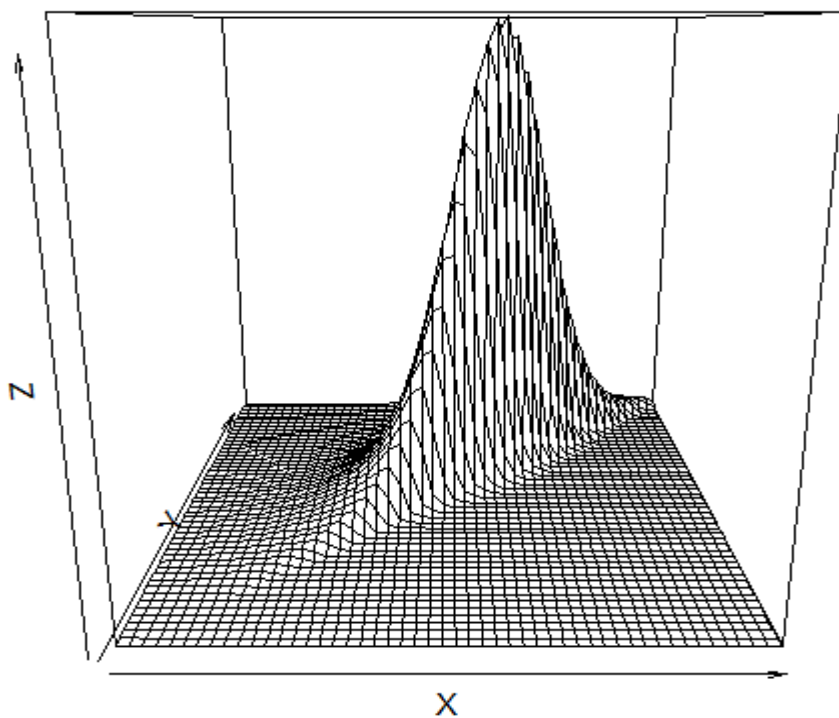
و نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

نمودار تابع چگالی و کانتور، از توزیع معرفی شده در رابطه (۴-۴)، در حالت دو متغیره، در شکل های

(۱-۴) و (۲-۴) نشان داده شده است.



شکل (۴-۱) - نمودار کانتور از توزیع t -استیودنت چوله دو متغیره با یک پارامتر چولگی



شکل (۴-۲) - نمودار تابع چگالی از توزیع t -استیودنت چوله دو متغیره با یک پارامتر چولگی

نتیجه ۸,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) در تابع چگالی رابطه (۴-۴) اگر $\nu = 1$ ، آنگاه تابع چگالی تحت عنوان کوشی چوله به صورت زیر به دست می‌آید.

$$f_X(x) = 2 t_p(x|\mu, \Sigma, 1) T_1 \left(\frac{\sqrt{p+1} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (x-\mu)}{\sqrt{d+1}} \middle| 0, 1, p+1 \right) \quad x \in \mathbb{R}^p$$

نتیجه ۹,۴ (گوپتا، ۲۰۰۳) در تابع چگالی رابطه (۴-۴) اگر داشته باشیم $\nu \uparrow \infty$ ، آنگاه توزیع نرمال چوله با یک پارامتر چولگی، به عنوان توزیع حدی مشخص می‌شود.

(*) قضیه ۱۰,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) اگر $X \sim ST_p(\mu, \Sigma, \lambda, \nu)$ آنگاه امید ریاضی و واریانس به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$E(X) = \mu + \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta, \quad \nu > 1$$

$$Var(X) = \frac{\nu}{\nu-2} \Sigma - \frac{\nu}{\pi} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right)^2 \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta \delta^T \Sigma^{\frac{1}{2}}, \quad \nu > 2$$

برهان: با توجه به اینکه $U \sim \Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$ و با در نظر داشتن قضیه ۳,۲ داریم

$$E\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad E(U^{-1}) = \frac{\nu}{\nu-2}$$

و در نهایت نتیجه مورد نظر با استفاده از قضیه ۱۰,۴ به صورت زیر بدست می‌آید

$$E(X) = \mu + \sqrt{\frac{2}{\pi}} E\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta \Rightarrow E(X) = \mu + \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta$$

$$Var(X) = E(U^{-1}) \Sigma - \frac{2}{\pi} E^2\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta \delta^T \Sigma^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$Var(X) = \frac{v}{v-2} \Sigma - \frac{v}{\pi} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{v-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \right)^2 \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta \delta^T \Sigma^{\frac{1}{2}}$$

برهان کامل است. $\square$

نتیجه ۱۰,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $X \sim ST_p(\mu, \Sigma, \lambda, v)$ بردار X را به دو زیر بردار به صورت $X^T = (X_1^T, X_2^T)$ با ابعاد p_1, p_2 به طوریکه $p_1 + p_2 = p$ افراز می‌کنیم در این صورت

$$X_1 \sim ST_p\left(\mu_1, \Sigma_{11}, \Sigma_{11}^{\frac{1}{2}} \tilde{v}, v\right)$$

برهان : با توجه به قضیه ۴,۴ رابطه بالا به سهولت قابل اثبات است.

نتیجه ۱۱,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) تحت فرضیات قضیه ۴,۴، اگر $X \sim ST_p(\mu, \Sigma, \lambda, v)$ آنگاه داریم

$$E(X_2|X_1) = \mu_{2.1} + \frac{\Sigma_{22.1} v_2}{\sqrt{1 + v_2^T \Sigma_{22.1} v_2}} \frac{1}{f_{X_1}(x_1)} v^{\frac{v}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+p_1-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) (\sqrt{\pi})^{p_1+1} |\Sigma_{11}|^{\frac{1}{2}}} \\ \times \left(v + d_{x_1} + \left(\tilde{v}^T (x_1 - \mu_1) \right)^2 \right)^{-\frac{v+p_1-1}{2}}$$

که در آن $d_{x_1} = (x_1 - \mu_1)^T \Sigma_{11}^{-1} (x_1 - \mu_1)$

برهان : با توجه به قضیه ۶,۴ اثبات کامل است. $\square$

۱,۱,۳,۴ برآورد پارامترهای توزیع t-استیودنت چوله با یک پارامتر چولگی

هدف از این قسمت، برآورد پارامترهای توزیع t-استیودنت چوله p -متغیره با یک پارامتر چولگی با استفاده از الگوریتم EM است.

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از $ST_p(\mu, \Sigma, \lambda, \nu)$ باشد.

$$\theta = (\mu^T, \gamma^T, \lambda^T)^T \text{ را در نظر می‌گیریم که در آن}$$

μ^T : پارامتر بردار میانگین

γ^T : ماتریس بالا مثلثی از ماتریس متقارن Σ

λ^T : پارامتر بردار چولگی

علاوه بر این، فرض می‌کنیم پارامتر ν برای نمونه n تایی معلوم باشد.

در فصل سوم عنوان کردیم، اگر $X \sim SN_p(\mu, \Sigma, \lambda)$ باشد آنگاه نمایش تصادفی از این خانواده به صورت زیر است

$$X = {}^d \mu + \Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\delta |Z_1| + (I_p - \delta \delta^T)^{\frac{1}{2}} Z_2 \right) \quad (5-4)$$

که در آن

$$\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^T \lambda}}, Z_1 \sim N(0, 1), \quad Z_2 \sim N_p(0, I_p)$$

برای اجرای الگوریتم EM، با توجه به تعریف ۱۳،۱، نمایش سلسله مراتبی زیر را با در نظر داشتن

نمایش تصادفی رابطه (۵-۴) خواهیم داشت

$$X_i | T_i = t_i, U_i = u_i \sim {}^{ind} N_p \left(\mu + t_i \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta, u_i^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} (I_p - \delta \delta^T) \Sigma^{\frac{1}{2}} \right), i = 1, \dots, n \quad (6-4)$$

$$T_i | U_i = u_i \sim {}^{iid} HN(0, u_i^{-1}) \quad i = 1, \dots, n \quad (7-4)$$

$$U_i \sim {}^{ind} h(u_i, \nu), i = 1, \dots, n \quad (8-4)$$

اجرای الگوریتم :

به منظور سادگی محاسبات، پارامتر گذاری زیر را در نظر می‌گیریم

$$\Delta_1 = \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta, \Gamma_1 = \Sigma - \Delta_1 \Delta_1^T = \Sigma^{\frac{1}{2}} (I_p - \delta \delta^T) \Sigma^{\frac{1}{2}}$$

قبل از اجرای گام اول الگوریتم، لازم است که لگاریتم تابع درستنمایی داده های کامل را به دست آوریم. بنابراین با توجه به تعریف ۱۳،۱ داریم

$$\ell_c(\theta|X_c) = \log \left(\prod_{i=1}^n f_{X,U,T}(x, u, t) \right) = \log \left(\prod_{i=1}^n f(x_i|u_i, t_i) f(t_i|u_i) f(u_i) \right)$$

بنابراین با توجه به توزیع رابطه (۴-۶) و در نظر گرفتن این مسأله که توزیع روابط (۴-۷) و (۴-۸) پارامترهای مجهول را در برنمی گیرند و همچنین با فرض اینکه

$$d_1^* = (x_i - \mu - t_i \Delta_1)^T (u_i \Gamma)^{-1} (x_i - \mu - t_i \Delta_1)$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \ell_c(\theta|X_c) &= \log \left(\prod_{i=1}^n (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |u_i^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} (I_p - \delta \delta^T) \Sigma^{\frac{1}{2}}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{d_1^*}{2}} \right) + c \\ &= \log \left((2\pi)^{-\frac{np}{2}} |u_i^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} (I_p - \delta \delta^T) \Sigma^{\frac{1}{2}}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_1^*} \right) + c \\ &= c - \frac{n}{2} \log \left(|u_i^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} (I_p - \delta \delta^T) \Sigma^{\frac{1}{2}}| \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_1^* \end{aligned}$$

و در نهایت با جایگذاری d_1^* و $\Delta_1 = \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta, \Gamma_1 = \Sigma - \Delta_1 \Delta_1^T = \Sigma^{\frac{1}{2}} (I_p - \delta \delta^T) \Sigma^{\frac{1}{2}}$ داریم

$$\ell_c(\theta|X_c) = c - \frac{n}{2} \log |\Gamma_1| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i (x_i - \mu - \Delta_1 t_i)^T \Gamma^{-1} (x_i - \mu - \Delta_1 t_i)$$

که در آن c یک مقدار ثابت و مستقل از بردار θ است. برای ادامه کار فرضیات زیر را در نظر می گیریم

$$u_{i_1}^* = E(U_i|X_i)$$

$$ut_{i_1}^* = E(U_i T_i|X_i)$$

$$ut_{i_1}^{2*} = E(U_i T_i^2|X_i)$$

$$\tau_{i_1} = E \left(U^{\frac{1}{2}} W_{\Phi} \left(U^{\frac{1}{2}} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} (x - \mu) \right) \middle| X = x \right)$$

با توجه به اینکه $X_i \sim ST_p(\mu, \Sigma, \lambda, \nu)$ لازم است ابتدا روابط بالا محاسبه شوند. بنابراین قضایای (۱۱-۴) تا (۱۴-۴) بیان می‌شوند.

(*) قضیه ۱۱،۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) اگر $X \sim ST_p(\mu, \Sigma, \lambda, \nu)$ آنگاه

$$E(U^r | X) = \frac{2^{r+1} \nu^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{p+\nu+2r}{2}\right) (d+\nu)^{-\frac{p+\nu+2r}{2}}}{f_X(x) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi^p |\Sigma|^{\frac{1}{2}}}} \times$$

$$T_1 \left(\sqrt{\frac{p+\nu+2r}{d+\nu}} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (x - \mu) \middle| 0, 1, p + \nu + 2r \right)$$

برهان: با توجه به تعریف امید ریاضی شرطی و توزیع متغیر تصادفی U داریم

$$E(U^r | X = x) = \int_0^{\infty} u^r f_{U|X}(u|x) du = \int_0^{\infty} u^r \frac{f_{X,U}(x, u)}{f_X(x)} du$$

$$= \frac{1}{f_X(x)} \int_0^{\infty} u^r f_{X|U}(x|u) h(u) du$$

و از آن جایی که $X|U \sim SN_p(\mu, u^{-1} \Sigma, \lambda)$ و $U \sim \Gamma(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2})$ می‌توان نتیجه گرفت

$$E(U^r | X = x) = \frac{1}{f_X(x)} \int_0^{\infty} u^r 2 \varphi_p(x | \mu, u^{-1} \Sigma) \Phi_1(\lambda^T u^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (x - \mu)) \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} u^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\nu}{2}u} du$$

$$= \frac{2 \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{f_X(x) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\infty} u^{\frac{\nu}{2}+r-1} (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{p}{2}} e^{-\frac{u d}{2}} \Phi_1(\lambda^T u^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (x - \mu)) e^{-\frac{\nu}{2}u} du$$

$$= \frac{2 \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{f_X(x) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} u^{\frac{p+\nu+2r}{2}-1} e^{-u \left(\frac{d+\nu}{2}\right)} \Phi_1(\lambda^T u^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (x - \mu)) du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{p+\nu+2r}{2}\right)}{f_X(\mathbf{x}) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d+\nu}{2}\right)^{\frac{p+\nu+2r}{2}}} \\
&\times \int_0^\infty \frac{\left(\frac{d+\nu}{2}\right)^{\frac{p+\nu+2r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p+\nu+2r}{2}\right)} u^{\frac{p+\nu+2r}{2}-1} e^{-u\left(\frac{d+\nu}{2}\right)} \Phi_1(\lambda^T u^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})) du \\
&= \frac{2 \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{p+\nu+2r}{2}\right)}{f_X(\mathbf{x}) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d+\nu}{2}\right)^{\frac{p+\nu+2r}{2}}} \\
&\times \int_0^\infty \frac{\left(\frac{d+\nu}{2}\right)^{\frac{p+\nu+2r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p+\nu+2r}{2}\right)} u^{\frac{p+\nu+2r}{2}-1} e^{-u\left(\frac{d+\nu}{2}\right)} \Phi_1\left(\sqrt{\frac{u(d+\nu)}{d+\nu}} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right) du \\
&= \frac{2^{r+1} (\nu)^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{p+\nu+2r}{2}\right) (d+\nu)^{-\frac{p+\nu+2r}{2}}}{f_X(\mathbf{x}) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d+\nu}{2}\right)^{\frac{p+\nu+2r}{2}}} E_U \left(\Phi_1 \left(\sqrt{\frac{u(d+\nu)}{d+\nu}} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right) \right)
\end{aligned}$$

و در نهایت با توجه به لم ۴,۱ نتیجه به صورت زیر به دست می‌آید.

$$= \frac{2^{r+1} (\nu)^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{p+\nu+2r}{2}\right) (d+\nu)^{-\frac{p+\nu+2r}{2}}}{f_X(\mathbf{x}) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} T_1 \left(\frac{\lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{\sqrt{d+\nu}} \sqrt{p+\nu+2r} \middle| 0, 1, p+\nu+2r \right)$$

و برهان کامل است. $\square$

(**) نتیجه ۱۲,۴ با استفاده از قضیه ۱۱,۴، با قرار دادن $r = 1$ داریم

$$u_{i_1}^* = \frac{4 (\nu)^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{p+\nu+2}{2}\right) (d+\nu)^{-\frac{p+\nu+2}{2}}}{f_X(\mathbf{x}) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} T_1 \left(\frac{\lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{\sqrt{d+\nu}} \sqrt{p+\nu+2} \middle| 0, 1, p+\nu+2 \right)$$

(*) قضیه ۱۲,۴ (کابرال و همکاران، ۲۰۱۲) اگر $\mathbf{X} \sim ST_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\lambda}, \nu)$ آنگاه داریم

$$ut_{i_1}^* = M^2(\theta) \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) u_{i_1}^* + M(\theta) \tau_{i_1}$$

که در آن

$$M^2(\theta) = (1 + \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} \Delta_1)^{-1}$$

$$\tau_{i_1} = E \left(U^{\frac{1}{2}} W_{\Phi} \left(U^{\frac{1}{2}} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} (x - \mu) \right) \middle| X = x \right), \quad W_{\Phi}(\cdot) = \frac{\varphi(\cdot)}{\Phi(\cdot)}$$

برهان: با توجه به روابط (۴-۶) تا (۴-۸) می توان گفت

$$T|X, U \sim TN \left(M^2(\theta) \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} (x - \mu), U^{-1} M^2(\theta) \right) I(t > 0) \quad (۴-۹)$$

بنابراین با توجه به تعریف ۱،۱ داریم

$$E(T|X, U) = M^2(\theta) \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} (x - \mu) + U^{-\frac{1}{2}} M(\theta) W_{\Phi} \left(M(\theta) U^{\frac{1}{2}} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} (x - \mu) \right)$$

و در آخر با در نظر داشتن لم ۱،۶ داریم

$$E(UT|X = x)$$

$$= E \left(U \left(M^2(\theta) \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} (x - \mu) + U^{-\frac{1}{2}} M(\theta) W_{\Phi} \left(M(\theta) U^{\frac{1}{2}} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} (x - \mu) \right) \right) \middle| X = x \right)$$

$$= E \left(\left(U M^2(\theta) \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} (x - \mu) + U^{\frac{1}{2}} M(\theta) W_{\Phi} \left(M(\theta) U^{\frac{1}{2}} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} (x - \mu) \right) \right) \middle| X = x \right)$$

و با توجه به اینکه $E(X + Y|U) = E(X|U) + E(Y|U)$ نتیجه به صورت زیر به دست خواهد آمد.

$$ut_{i_1}^* = E(UT|X = x)$$

$$= M^2(\theta) \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} (x - \mu) E(U|X = x) + M(\theta) E \left(U^{\frac{1}{2}} W_{\Phi} \left(M(\theta) U^{\frac{1}{2}} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} (x - \mu) \right) \right)$$

$$= M^2(\theta) \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} (x - \mu) u_{i_1}^* + M(\theta) \tau_{i_1}$$

و برهان کامل است. □

(*) قضیه ۴،۱۳ (کابرال و همکاران، ۲۰۱۲) فرض کنید $X \sim ST_p(\mu, \Sigma, \lambda, \nu)$ در این صورت داریم

$$ut_{i_1}^{2*} = \left(M^2(\theta) \Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right)^2 u_{i_1}^* + M^2(\theta) + M^3(\theta) \Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \tau_{i_1}$$

برهان : با توجه به توزیع معرفی شده در رابطه (۹-۴) داریم

$$E(T^2|X, U) = M^4(\theta) \left(\Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right)^2 + U^{-1} M^2(\theta)$$

$$+ M^3(\theta) U^{-\frac{1}{2}} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) W_\Phi \left(M(\theta) U^{\frac{1}{2}} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right)$$

و با در نظر داشتن لم ۶,۱ می توان نوشت

$$E(UT^2|X = \mathbf{x}) = E \left(U \left(\begin{array}{c} M^4(\theta) \left(\Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right)^2 + U^{-1} M^2(\theta) + \\ M^3(\theta) U^{-\frac{1}{2}} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) W_\Phi \left(M(\theta) U^{\frac{1}{2}} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right) \end{array} \right) \middle| X = \mathbf{x} \right)$$

$$= E \left(\left(\begin{array}{c} U M^4(\theta) \left(\Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right)^2 + M^2(\theta) + \\ M^3(\theta) U^{\frac{1}{2}} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) W_\Phi \left(M(\theta) U^{\frac{1}{2}} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right) \end{array} \right) \middle| X = \mathbf{x} \right)$$

$$= M^4(\theta) \left(\Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right)^2 E(U|X = \mathbf{x}) + M^2(\theta)$$

$$+ M^3(\theta) \Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) E \left(U^{\frac{1}{2}} W_\Phi \left(M(\theta) U^{\frac{1}{2}} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right) \middle| X = \mathbf{x} \right)$$

و در نهایت نتیجه مطلوب به صورت زیر به دست می آید.

$$ut_{i_1}^{2*} = E(T^2|X, U) = M^4(\theta) \left(\Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right)^2 u_{i_1}^* + M^2(\theta) + M^3(\theta) \Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \tau_{i_1}$$

و برهان کامل است. □

(*) قضیه ۱۴,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $X \sim ST_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\lambda}, \nu)$ در این صورت داریم

$$E \left(U^r W_\Phi \left(U^{\frac{1}{2}} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right) \middle| X = \mathbf{x} \right) = \frac{2^{r+\frac{1}{2}} \nu^{\frac{\nu}{2}} \Gamma \left(\frac{p+\nu+2r}{2} \right) (d + \nu + A^2)^{-\frac{p+\nu+2r}{2}}}{f(\mathbf{x}) \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \sqrt{\pi^{p+1} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}}}$$

که در آن

$$A = \Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$$

برهان :

$$\begin{aligned} E \left(U^r W_{\Phi} \left(U^{\frac{1}{2}} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right) \middle| \mathbf{X} = \mathbf{x} \right) &= \int_0^{\infty} U^r \frac{\varphi_1 \left(U^{\frac{1}{2}} A \right)}{\Phi_1 \left(U^{\frac{1}{2}} A \right)} f(u|\mathbf{x}) du \\ &= \int_0^{\infty} U^r \frac{\varphi_1 \left(U^{\frac{1}{2}} A \right)}{\Phi_1 \left(U^{\frac{1}{2}} A \right)} \frac{f(\mathbf{x}|u)f(u)}{f(\mathbf{x})} du \\ &= \frac{2}{f(\mathbf{x})} \int_0^{\infty} U^r \frac{\varphi_1 \left(U^{\frac{1}{2}} A \right)}{\Phi_1 \left(U^{\frac{1}{2}} A \right)} \varphi_p(\mathbf{x}|\mu, U^{-1}\Sigma) \Phi_1 \left(U^{\frac{1}{2}} A \right) f(u) du \\ &= \frac{2}{f(\mathbf{x})} \int_0^{\infty} U^r (2\pi)^{-\frac{p}{2}} u^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u d}{2}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} u A^2} \frac{\left(\frac{v}{2} \right)^{\frac{v}{2}}}{\Gamma \left(\frac{v}{2} \right)} u^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{v}{2} u} du \\ &= \frac{2 \left(\frac{v}{2} \right)^{\frac{v}{2}}}{f(\mathbf{x}) (2\pi)^{\frac{p+1}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \Gamma \left(\frac{v}{2} \right)} \int_0^{\infty} U^{\frac{p+v+2r}{2}} e^{-U \left(\frac{d+v+A^2}{2} \right)} \frac{\left(\frac{d+v+A^2}{2} \right)^{\frac{p+v+2r}{2}}}{\left(\frac{d+v+A^2}{2} \right)^{\frac{p+v+2r}{2}}} du \\ &= \frac{2 v^{\frac{v}{2}} \Gamma \left(\frac{p+v+2r}{2} \right)}{2^{\frac{v}{2}} f(\mathbf{x}) 2^{\frac{p+1}{2}} \sqrt{\pi^{p+1}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \Gamma \left(\frac{v}{2} \right) \left(\frac{d+v+A^2}{2} \right)^{\frac{p+v+2r}{2}}} \\ &= \frac{2^{r+\frac{1}{2}} v^{\frac{v}{2}} \Gamma \left(\frac{p+v+2r}{2} \right) (d+v+A^2)^{-\frac{p+v+2r}{2}}}{f(\mathbf{x}) \sqrt{\pi^{p+1}} \Gamma \left(\frac{v}{2} \right) |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

و برهان کامل است. $\square$

نتیجه ۱۳،۴ با توجه به قضیه ۱۴،۴، با قرار دادن $r = \frac{1}{2}$ داریم

$$\tau_{i_1} = \frac{2 v^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{p+v+1}{2}\right) (d+v+A^2)^{-\frac{p+v+1}{2}}}{f(x) \sqrt{\pi^{p+1}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) |\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$$

گام اول الگوریتم EM

در گام اول، امید ریاضی $\ell_c(\theta|X_c)$ را به شرط داده های مشاهده شده بدست می آوریم

$$\begin{aligned} Q(\theta) &= E(\ell_c(\theta|X_c)|X=x) \\ &= E\left(c - \frac{n}{2} \log |\Gamma_1| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i (x_i - \mu - \Delta_1 t_i)^T \Gamma^{-1} (x_i - \mu - \Delta_1 t_i) \mid X=x\right) \\ &= c - \frac{n}{2} \log |\Gamma_1| \\ &\quad - \frac{1}{2} E\left(\sum_{i=1}^n (u_i | X=x) (x_i - \mu)^T \Gamma_1^{-1} (x_i - \mu) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{i=1}^n (u_i t_i | X=x) (x_i - \mu)^T \Gamma_1^{-1} \Delta_1 + \sum_{i=1}^n (u_i t_i^2 | X=x) \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} \Delta_1 \right) \end{aligned}$$

و نتیجه به صورت زیر حاصل می شود

$$\begin{aligned} Q(\theta) &= c - \frac{n}{2} \log |\Gamma_1| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_{i_1}^* (x_i - \mu)^T \Gamma_1^{-1} (x_i - \mu) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n u_{i_1}^* (x_i - \mu)^T \Gamma_1^{-1} \Delta_1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_{i_1}^{2*} \Delta_1^T \Gamma_1^{-1} \Delta_1 \end{aligned}$$

بنابراین با جایگذاری $u_{i_1}^*, u_{i_1}^*, u_{i_1}^{2*}, \tau_{i_1}$ از قضایای ۱۱،۴ تا ۱۴،۴، گام اول الگوریتم کامل می -

شود.

گام دوم الگوریتم EM

در گام دوم تابع $Q(\theta)$ را روی θ ماکزیمم می کنیم

ابتدا برای برآورد پارامتر بردار μ لازم است که از $Q(\theta)$ نسبت به μ مشتق گرفته و برابر صفر قرار

دهیم

$$\frac{\partial Q(\theta)}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n u_{i1}^* (x_i - \hat{\mu}) \hat{\Gamma}^{-1} - \sum_{i=1}^n u_{i1}^* \hat{\Gamma}^{-1} \hat{\Delta}_1$$

$$\frac{\partial Q(\theta)}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_{i1}^* x_i - u_{i1}^* \hat{\Delta}_1)}{\sum_{i=1}^n u_{i1}^*}$$

برآورد پارامتر ماتریس Γ_1

$$\frac{\partial Q(\theta)}{\partial \Gamma_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\hat{\Gamma}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [u_{i1}^* (x_i - \hat{\mu})(x_i - \hat{\mu})^T - 2u_{i1}^* \hat{\Delta}_1 (x_i - \hat{\mu})^T + u_{i1}^{2*} \hat{\Delta}_1 \hat{\Delta}_1^T]$$

برآورد پارامتر بردار Δ_1

$$\frac{\partial Q(\theta)}{\partial \Delta_1} = \sum_{i=1}^n u_{i1}^* (x_i - \hat{\mu})^T \hat{\Gamma}^{-1} - \sum_{i=1}^n u_{i1}^{2*} \hat{\Gamma}^{-1} \hat{\Delta}_1$$

$$\frac{\partial Q(\theta)}{\partial \Delta_1} = 0 \Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n u_{i1}^* (x_i - \hat{\mu})}{\sum_{i=1}^n u_{i1}^{2*}}$$

با استفاده از برآوردهای Δ_1 و Γ_1 می توان پارامترهای بردار λ و ماتریس Σ را به صورت زیر محاسبه کرد

$$\hat{\Sigma} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 \hat{\Delta}_1^T, \quad \hat{\lambda} = \frac{\hat{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \hat{\Delta}_1}{\sqrt{1 - \hat{\Delta}_1^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\Delta}_1}}$$

۱,۱,۱,۳,۴ مثال کاربردی

در این بخش، قصد داریم مدل معرفی شده در بخش ۳,۳ و ۱,۳,۴، تحت عنوان توزیع نرمال چوله دو

متغیره با یک پارامتر چولگی و t -استیودنت چوله دو متغیره با یک پارامتر چولگی را به داده های

واقعی برازش داده، و با استفاده از الگوریتم EM، پارامترهای این دو مدل را برآورد کنیم. و در نهایت با استفاده از یک معیار مناسب، محتمل ترین توزیع را برای برازش به داده ها انتخاب کنیم.

برای این منظور از داده های مربوط به قد و وزن ۲۰۲ ورزشکار استرالیایی استفاده نموده ایم.

نتایج برای دو مدل عنوان شده، به صورت زیر مشاهده شده است.

جدول (۴-۱) - برآورد پارامترهای داده های واقعی برای دو مدل SN_2 و ST_2 به روش الگوریتم EM

برآورد پارامترها	مدل SN_2	مدل ST_2	مدل N_2
$\hat{\mu}$	180.16 66.73	180.61 68.38	180.10 75.00
$\hat{\Sigma}$	8.69 4.33 4.33 15.52	8.02 4.08 4.08 13.9	8.36 4.93 4.93 12.98
$\hat{\lambda}$	-0.933 1.91	-0.807 1.36	0 0
$\hat{\nu}$	-	11.28	-
AIC	2927.62	2925.13	2953.78
loglikelihood	-1455.81	-1454.56	-1468.89
n	202	202	202

با انتخاب دو معیار اطلاع آکائیک (AIC) و loglikelihood بهترین مدل برای برازش به این داده ها، توزیع t -استیودنت چوله خواهد بود. همان طور که ملاحظه می کنید، هردو توزیع، نرمال چوله و t -استیودنت چوله نسبت به توزیع نرمال ارجعیت دارند.

۲,۳,۴ توزیع اسلش بایک پارامتر چولگی

یکی دیگر از توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی، توزیع اسلش چوله می باشد. با در نظر داشتن $U \sim Beta(\nu, 1)$ تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف ۳,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) می گوئیم $X \sim SSL_p(\mu, \Sigma, \lambda, \nu)$ است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = 2\nu \int_0^1 u^{\nu-1} \varphi_p\left(x \middle| \mu, \frac{\Sigma}{u}\right) \Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu)\right), \quad x \in \mathbb{R}^p \quad (۱۰-۴)$$

به منظور اینکه نشان دهیم تابع چگالی رابطه (۱۰-۴) عضو دیگری از خانواده معرفی شده در رابطه

(۱-۴) است، با در نظر داشتن اینکه $U \sim Beta(\nu, 1)$ داریم

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 2 \int_u \varphi_p(x | \mu, u^{-1}\Sigma) \Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu)\right) h(u, \nu) du \\ &= 2 \int_0^1 \varphi_p(x | \mu, u^{-1}\Sigma) \Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu)\right) \nu u^{\nu-1} du \\ &= 2\nu \int_0^1 u^{\nu-1} \varphi_p\left(x \middle| \mu, \frac{\Sigma}{u}\right) \Phi_1\left(u^{\frac{1}{2}} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu)\right) du \end{aligned}$$

و نتیجه مطلوب حاصل می شود.

(*) قضیه ۱۵,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $X \sim SSL_p(\mu, \Sigma, \lambda, \nu)$ در این صورت

امید ریاضی و واریانس این خانواده به صورت زیر می باشد

$$E(X) = \mu + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\nu}{2\nu - 1} \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta, \quad \nu > \frac{1}{2}$$

$$Var(\mathbf{X}) = \frac{\nu}{\nu-1} \Sigma - \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\nu}{2\nu-1} \right)^2 \Sigma^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}^T \Sigma^{\frac{1}{2}}, \nu > 1$$

برهان : بنا به قضیه ۵,۲ داریم

$$E\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\nu}{\nu - \frac{1}{2}} = \frac{2\nu}{2\nu - 1}, \quad E(U^{-1}) = \frac{\nu}{\nu - 1}$$

در نهایت نتیجه مورد نظر با استفاده از قضیه ۱,۴ به صورت زیر بدست می‌آید

$$E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} E\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) \Sigma^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\nu}{2\nu - 1} \Sigma^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\delta}, \nu > \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} Var(\mathbf{X}) &= \Sigma E(U^{-1}) - \frac{2}{\pi} E^2\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) \Sigma^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}^T \Sigma^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\nu}{\nu-1} \Sigma - \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\nu}{2\nu-1} \right)^2 \Sigma^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}^T \Sigma^{\frac{1}{2}}, \nu > 1 \end{aligned}$$

وبرهان کامل است. □

۳,۳,۴ توزیع نرمال چوله آلایشی با یک پارامتر چولگی

سومین توزیع از خانواده توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی، که در این فصل معرفی می‌کنیم،

توزیع نرمال چوله آلایشی است. دلیل این نامگذاری به علت آمیخته بودن توزیع متغیر تصادفی U

است که تابع چگالی آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$h(u, \boldsymbol{\nu}) = \begin{cases} \nu & u = \gamma \\ 1 - \nu & u = 1 \end{cases} \quad 0 \leq \nu \leq 1, \quad 0 < \gamma < 1, \quad \boldsymbol{\nu} = (\nu, \gamma)^T \quad (۱۱-۴)$$

آنگاه تعریف زیر را برای توزیع نرمال چوله آلایشی خواهیم داشت.

تعریف ۴,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) می‌گوییم $\mathbf{X}$ دارای توزیع $(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\lambda}, \nu, \gamma)$ SCN_p است

اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = 2 \left\{ v \varphi_p \left(x \middle| \mu, \frac{\Sigma}{\gamma} \right) \Phi_1 \left(\gamma^{\frac{1}{2}} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (x - \mu) \right) \right\} \\ + 2 \left\{ (1-v) \varphi_p \left(x \middle| \mu, \frac{\Sigma}{\gamma} \right) \Phi_1 \left(\gamma^{\frac{1}{2}} \lambda^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (x - \mu) \right) \right\}, x \in \mathbb{R}^p \quad (۱۲-۴)$$

نشان دادن اینکه رابطه (۱۲-۴) عضوی از خانواده (۱-۴) است به سهولت امکان پذیر است.

(*) قضیه ۱۶,۴ (لاکاس و همکاران، ۲۰۱۱) اگر $X \sim SCN_p(\mu, \Sigma, \lambda, v, \gamma)$ ، آنگاه امید ریاضی و

واریانس این توزیع به صورت زیر بیان می شود.

$$E(X) = \mu + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{v}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + (1-v) \right) \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta \\ Var(X) = \left(\frac{v}{\gamma} + (1-v) \right) \Sigma - \frac{2}{\pi} \left(\frac{v}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + (1-v) \right)^2 \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta \delta^T \Sigma^{\frac{1}{2}}$$

برهان: با توجه به قضیه ۷,۲ داریم

$$E\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{v}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + (1-v), E(U^{-1}) = \frac{v}{\gamma} + (1-v)$$

و در نهایت با در نظر گرفتن قضیه ۱,۴ می توان نوشت

$$E(X) = \mu + \sqrt{\frac{2}{\pi}} E\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta = \mu + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{v}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + (1-v) \right) \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta \\ Var(X) = \Sigma E(U^{-1}) - \frac{2}{\pi} E^2\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta \delta^T \Sigma^{\frac{1}{2}} \\ = \left(\frac{v}{\gamma} + (1-v) \right) \Sigma - \frac{2}{\pi} \left(\frac{v}{\gamma^{\frac{1}{2}}} + (1-v) \right)^2 \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta \delta^T \Sigma^{\frac{1}{2}}$$

و برهان کامل است. $\square$

۴.۴ توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی چند متغیره با دو پارامتر چولگی

در این بخش خانواده توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی را بر اساس توزیع نرمال چوله با دو پارامتر چولگی که در بخش ۵,۳ معرفی شد، تعریف می کنیم و مثال ها و خصوصیات آماری مهم این خانواده را مورد بررسی قرار می دهیم. با توجه به اینکه این توزیع آمیخته براساس مدل نرمال چوله ایی که در بخش ۵,۳ معرفی شد، ساخته می شود، تمام نمادهایی که در بخش ۵,۳ استفاده شد، در این بخش نیز قابل استفاده هستند.

تعریف ۵,۴ (ورنیک، ۲۰۰۵) اگر U یک متغیر تصادفی مثبت تک نمایی با تابع توزیع $H(u, \alpha)$ می تواند یک عدد یا یک بردار باشد، آنگاه می گوییم X عضو خانواده توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی با دو پارامتر چولگی است، اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = \int_u \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{1+\lambda_1^T \lambda_1}}\right)} \varphi_p(x|\mu, u^{-1}\Sigma) \Phi_1\left(\lambda_0 + \lambda_1^T u^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu)\right) dH(u, \alpha) \quad (۱۳-۴)$$

در این حالت از نماد زیر برای نمایش این خانواده استفاده می کنیم

$$X \sim SNI_p(\mu, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1, H) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^p \quad (۱۴-۴)$$

(*) نتیجه ۱۴,۴ (ورنیک، ۲۰۰۵) اگر $X \sim SNI_p(\mu, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1, H)$ ، آنگاه

$$X|U \sim SN_p(\mu, u^{-1}\Sigma, \lambda_0, \lambda_1)$$

برهان : با توجه به تعریف تابع چگالی حاشیه ایی به صورت زیر

$$f_X(x) = \int_u f(x, u) du = \int_u f(x|u) h(u) du$$

و با در نظر گرفتن رابطه (۱۳-۴) و تابع چگالی معرفی شده در رابطه (۱۸-۳) نتیجه مطلوب حاصل

می شود و برهان کامل است. $\square$

نتیجه ۱۵,۴ اگر در مدل معرفی شده در رابطه (۱۳-۴)، $\lambda_0 = 0$ باشد آنگاه مدل معرفی شده در رابطه (۱-۴) به دست می‌آید.

(**) قضیه ۱۷,۴ فرض کنید $\mathbf{X} \sim SNI_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1, H)$ در این صورت نمایش تصادفی برای این خانواده به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{X} =^d \boldsymbol{\mu} + U^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Z} \quad (۱۵-۴)$$

که در آن $\mathbf{Z} \sim SN_p(0, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1)$ است.

برهان: با در نظر گرفتن نتیجه ۱۴,۴ و توزیع متغیر تصادفی U برهان رابطه (۱۵-۴) کامل است. $\square$

(**) قضیه ۱۸,۴ اگر $\mathbf{X} \sim SNI_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \delta_0, \delta_1, H)$ آنگاه امید ریاضی و واریانس برای این خانواده به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}) &= \boldsymbol{\mu} + E\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) \Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\boldsymbol{\delta}_1 \frac{\varphi_1(\delta_0)}{\Phi_1(\delta_0)} \right) \\ \text{Var}(\mathbf{X}) &= E^2\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) \Sigma \left[\boldsymbol{\delta}_1 \boldsymbol{\delta}_1^T \left(1 - \frac{\varphi_1^2(\delta_0) + \delta_0 \Phi_1(\delta_0) \varphi_1(\delta_0)}{\Phi^2(\delta_0)} \right) + (I_p - \boldsymbol{\delta}_1 \boldsymbol{\delta}_1^T) \right] \\ &\quad + \text{Var}(U^{-\frac{1}{2}}) \Sigma \left[\boldsymbol{\delta}_1 \boldsymbol{\delta}_1^T \left(1 - \frac{\varphi_1^2(\delta_0) + \delta_0 \Phi_1(\delta_0) \varphi_1(\delta_0)}{\Phi^2(\delta_0)} \right) + (I_p - \boldsymbol{\delta}_1 \boldsymbol{\delta}_1^T) \right] \end{aligned}$$

برهان: با در نظر داشتن نمایش تصادفی معرفی شده در رابطه (۱۵-۴) و استقلال $U, \mathbf{Z}$ داریم

$$E(\mathbf{X}) = E\left(\boldsymbol{\mu} + U^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Z}\right) = \boldsymbol{\mu} + E\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) E(\mathbf{Z})$$

و با توجه به قضیه ۲۰,۳، نتیجه به صورت زیر حاصل می‌شود

$$E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} + E\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) \Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\boldsymbol{\delta}_1 \frac{\varphi_1(\delta_0)}{\Phi_1(\delta_0)} \right)$$

با استفاده از معادله زیر، محاسبه واریانس به راحتی امکان پذیر است

$$\text{Var}(XY) = E^2(X)\text{Var}(Y) + E^2(Y)\text{Var}(X) + \text{Var}(X)\text{Var}(Y), \quad X \perp Y$$

و برهان کامل است. $\square$

قضیه ۱۹,۴ (ورنیک، ۲۰۰۵) اگر $X \sim SNI_p(\mu, \Sigma, \delta_0, \delta_1, H)$ آنگاه تابع مولد گشتاور برای این خانواده به صورت زیر است

$$m_X(t) = \frac{1}{\Phi_1(\delta_0)} \int_u e^{t^T \mu + \frac{1}{2} u^{-1} t^T \Sigma t} \Phi_1 \left(\lambda_0 + \lambda_1^T u^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{\frac{1}{2}} (x - \mu) \right) dH(u, \alpha) \quad (۱۶-۴)$$

برهان : با توجه به تعریف تابع مولد گشتاور و نتیجه ۱۴,۴ داریم

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E(e^{t^T X}) = E_U \left(E(e^{t^T X} | U) \right) = E_U \left(m_{X|U}(t) \right) = \int_u m_{X|U}(t) dH(u, \alpha) \\ &= \frac{1}{\Phi_1(\delta_0)} \int_u e^{t^T \mu + \frac{1}{2} u^{-1} t^T \Sigma t} \Phi_1 \left(\lambda_0 + \lambda_1^T u^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{\frac{1}{2}} t \right) dH(u, \alpha) \end{aligned}$$

و برهان کامل است. $\square$

نمایش دیگری از تابع مولد گشتاور رابطه (۱۶-۴) که در برخی موارد استفاده می‌شود (ازجمله قضیه ۲۰,۴) به صورت زیر است

$$m_X(t) = \frac{e^{t^T \mu}}{\Phi_1(\delta_0)} E \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} u^{-1} t^T \Sigma t \right\} \Phi_1 \left(\delta_0 + u^{-\frac{1}{2}} \gamma^T t \right) \right] \quad (۱۷-۴)$$

(*) قضیه ۲۰,۴ (ورنیک، ۲۰۰۵) فرض کنید $X \sim SNI_p(\mu, \Sigma, \delta_0, \gamma, H)$ بردار X را به دو زیر

بردار به صورت $X = (X_1^T, X_2^T)^T$ با بعدهای p_1, p_2 به طوریکه $p_1 + p_2 = p$ ، افزایش می‌کنیم و به طور

مشابه فرض می‌کنیم

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}, \mu = [\mu_1^T \quad \mu_2^T]^T, \gamma = [\gamma_1^T \quad \gamma_2^T]^T, t = [t_1^T \quad t_2^T]^T$$

در این صورت

$$X_1 \sim SNI_{p_1}(\mu_1, \Sigma_{11}, \delta_0, \gamma_1, H) \quad , X_2 \sim SNI_{p_2}(\mu_2, \Sigma_{22}, \delta_0, \gamma_2, H)$$

برهان: با توجه به تابع مولد گشتاور معرفی شده در رابطه (۴-۱۷) و تعریف معادله زیر

$$m_X(t) = m_{X_1, X_2}(t_1, t_2)$$

با قرار دادن $t_2 = 0$ داریم

$$m_{X_1}(t_1) = m_X(t_1, 0) = \frac{e^{t_1^T \mu_1}}{\Phi_1(\delta_0)} E \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} u^{-1} t_1^T \Sigma_{11} t_1 \right\} \Phi_1 \left(\delta_0 + u^{-\frac{1}{2}} \gamma_1^T t_1 \right) \right]$$

و نتیجه به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$X_1 \sim SNI_{p_1}(\mu_1, \Sigma_{11}, \delta_0, \gamma_1, H)$$

برای افراز X_2 با قرار دادن $t_1 = 0$ داریم

$$m_{X_2}(t_2) = m_X(0, t_2) = \frac{e^{t_2^T \mu_2}}{\Phi_1(\delta_0)} E \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} u^{-1} t_2^T \Sigma_{22} t_2 \right\} \Phi_1 \left(\delta_0 + u^{-\frac{1}{2}} \gamma_2^T t_2 \right) \right]$$

و نتیجه به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$X_2 \sim SNI_{p_2}(\mu_2, \Sigma_{22}, \delta_0, \gamma_2, H)$$

و برهان کامل است. $\square$

قضیه ۲۱،۴ (ورنیک، ۲۰۰۵) فرض کنید $X \sim SNI_p(\mu, \Sigma, \delta_0, \gamma, H)$ در این صورت برای $b \in \mathbb{R}^p$

اگر C یک ماتریس نامنفرد $p \times p$ باشد، داریم

$$Y = b + CX \sim SNI_p(b + C\mu, C\Sigma C^T, \delta_0, C\gamma, H)$$

برهان: با توجه به تابع مولد گشتاور معرفی شده در (۴-۱۶) و ترکیب خطی بیان شده اثبات به

راحتی قابل محاسبه است.

قضیه ۲۲,۴ (ورنیک، ۲۰۰۵) فرض کنید $X \sim SNI_p(\mu, \Sigma, \delta_0, \gamma, H)$ در این صورت تحت

فرضیات قضیه ۲۰,۴ داریم

$$X_1 | X_2, U \sim SN_p(\mu_{11}, u^{-1}(\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}), l_0, l_1)$$

که در آن

$$\mu_{11} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2), \quad l_0 = \lambda_0 + \frac{\gamma_2^T \Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2)}{\sqrt{u^{-1}(1 - \gamma^T \Sigma^{-1} \gamma)}}$$

$$l_1 = \frac{(\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})^{-\frac{1}{2}}(\gamma_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\gamma_2)}{\sqrt{1 - \gamma^T \Sigma^{-1} \gamma}}$$

۴.۵ مثالهایی از توزیع نرمال چوله آمیخته مقیاسی با دو پارامتر چولگی

در این بخش سه توزیع از خانواده معرفی شده در بخش ۴,۴ که شامل توزیع t -استیودنت چوله با دو پارامتر چولگی، اسلش چوله با دو پارامتر چولگی، نرمال چوله آلایشی با دو پارامتر چولگی است، تعریف می‌شود. و برخی خصوصیات آماری از این سه توزیع معرفی می‌شوند.

۴,۵,۱ توزیع t -استیودنت چوله با دو پارامتر چولگی

توزیع t -استیودنت چوله ایی که در این بخش معرفی می‌شود دارای دو پارامتر چولگی است، که دارای خصوصیات آماری مناسبی است. در این بخش برآورد پارامترهای توزیع t -استیودنت چوله با دو پارامتر چولگی را با استفاده از الگوریتم EM به دست خواهیم آورد.

(**) تعریف ۴,۶ می‌گوییم $X \sim ST_p(\mu, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1, \nu)$ است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر

باشد.

$$f_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Phi_1(\delta_0)} t_p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \nu) T_{\nu+p, \lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \sqrt{\nu+p}}{\sqrt{\nu+d}} \right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p \quad (18-4)$$

که در آن $T_{\nu+p, \lambda_0^2}(\cdot)$ تابع توزیع t -استیودنت غیر مرکزی با درجه آزادی $\nu + p$ و پارامتر غیر مرکزی λ_0^2 است. برای اینکه نشان دهیم تابع چگالی معرفی شده در رابطه (۱۸-۴) عضوی از خانواده معرفی شده در رابطه (۱۳-۴) است با در نظر گرفتن اینکه متغیر تصادفی U دارای توزیع $\Gamma(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2})$ باشد، داریم

$$f_X(\mathbf{x}) = \int \frac{1}{\Phi \left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{1+\lambda_1^T \lambda_1}} \right)} \varphi_p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, u^{-1}\Sigma) \Phi_1 \left(\lambda_0 + \lambda_1^T u^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right) dH(u, \nu)$$

با جایگذاری تابع چگالی U و استفاده از نماد $\delta_0 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1+\lambda_1^T \lambda_1}}$ در ادامه داریم

$$\begin{aligned} f_X(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\Phi_1(\delta_0)} \int_0^\infty (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{p}{2}} e^{-\frac{ud}{2}} \Phi_1 \left(\lambda_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \sqrt{u} + \lambda_0 \right) \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} u^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\nu}{2}u} du \\ &= \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Phi_1(\delta_0) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty u^{\frac{p+\nu}{2}-1} e^{-\frac{u(d+\nu)}{2}} \Phi_1 \left(\lambda_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \sqrt{u} + \lambda_0 \right) du \end{aligned}$$

با انتخاب $w = (\nu + d)u$ می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned} f_X(\mathbf{x}) &= \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{p+\nu}{2}\right)}{\Phi_1(\delta_0) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d+\nu}{2}\right)^{\frac{p+\nu}{2}}} \\ &\times \int_0^\infty \frac{\left(\frac{d+\nu}{2}\right)^{\frac{p+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p+\nu}{2}\right)} u^{\frac{p+\nu}{2}-1} e^{-\frac{u(d+\nu)}{2}} \Phi_1 \left(\frac{\lambda_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{\sqrt{\nu+d}} \sqrt{w} + \lambda_0 \right) du \end{aligned}$$

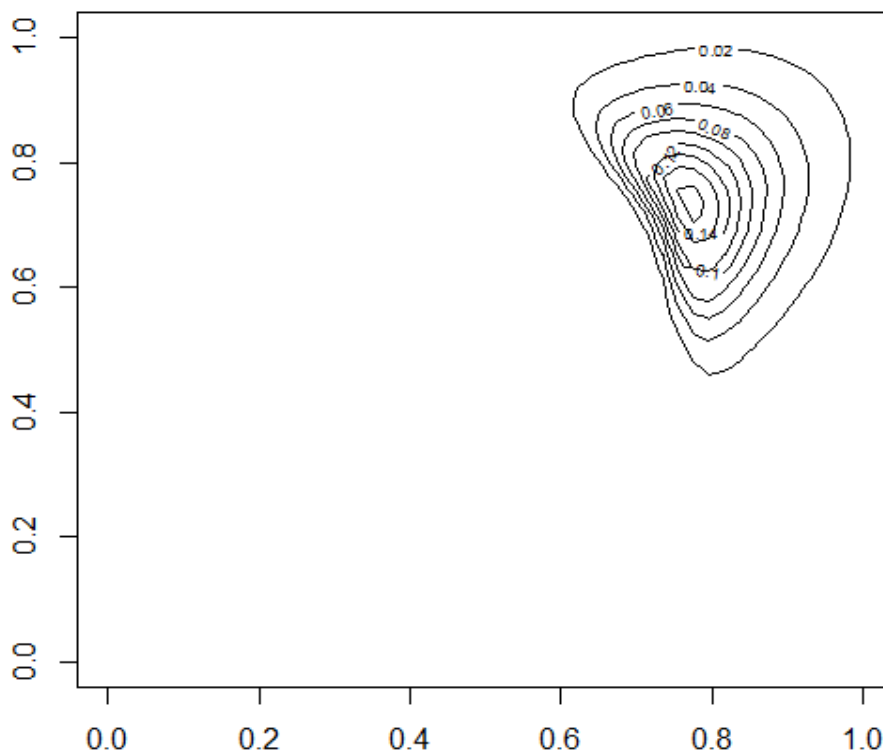
$$= \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{p+\nu}{2}\right)}{\Phi_1(\delta_0) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d+\nu}{2}\right)^{\frac{p+\nu}{2}}} E_u \left(\Phi_1 \left(\frac{\lambda_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (x - \mu)}{\sqrt{\nu + d}} \sqrt{w} + \lambda_0 \right) \right)$$

بنابراین با توجه به لم ۴،۱ و تابع چگالی توزیع t -استیودنت p -متغیره، نتیجه به صورت زیر حاصل می‌شود.

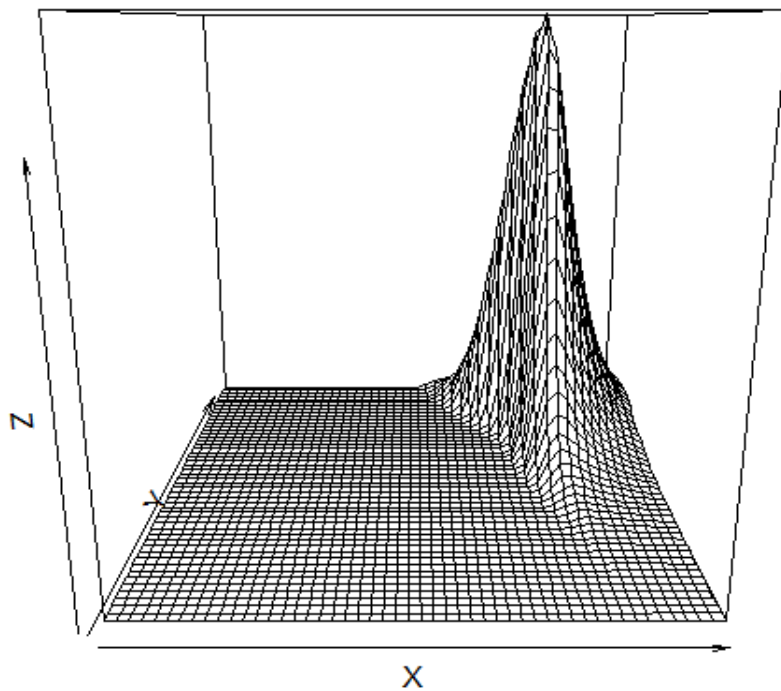
$$f_X(x) = \frac{1}{\Phi_1(\delta_0)} t_p(x|\mu, \Sigma, \nu) T_{\nu+p, \lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (x - \mu) \sqrt{\nu + p}}{\sqrt{\nu + d}} \right)$$

□ و برهان کامل است.

نمودار تابع چگالی و کانتور از توزیع معرفی شده در رابطه (۴-۱۸) در شکل های (۴-۳) و (۴-۴)، نشان داده شده است.



شکل (۴-۳) - نمودار کانتور از توزیع t -استیودنت چوله با دو پارامتر چولگی



شکل (۴-۴) - نمودار تابع چگالی از توزیع t -استیودنت چوله با دو پارامتر چولگی

(**) قضیه ۲۳،۴ فرض کنید $X \sim ST_p(\mu, \Sigma, \delta_0, \delta_1, \nu)$ ، در این صورت امید ریاضی و واریانس

این مدل به صورت زیر می باشد

$$E(X) = \mu + \sqrt{\frac{\nu}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\delta_1 \frac{\varphi_1(\delta_0)}{\Phi_1(\delta_0)} \right)$$

$$Var(X) = \frac{\nu}{2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right)^2 Var(Z) + \frac{\nu}{\nu-2} - \frac{\nu}{2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right)^2 E^2(Z) + \frac{\nu}{\nu-2}$$

$$- \frac{\nu}{2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right)^2 Var(Z)$$

که در آن

$$Z \sim SN_p(0, \Sigma, \delta_0, \delta_1)$$

$$Var(\mathbf{Z}) = \Sigma \left[\boldsymbol{\delta}_1 \boldsymbol{\delta}_1^T \left(1 - \frac{\varphi_1^2(\delta_0) + \delta_0 \Phi_1(\delta_0) \varphi_1(\delta_0)}{\Phi^2(\delta_0)} \right) + (I_p - \boldsymbol{\delta}_1 \boldsymbol{\delta}_1^T) \right]$$

$$E^2(\mathbf{Z}) = \left(\Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\boldsymbol{\delta}_1 \frac{\varphi(\delta_0)}{\Phi(\delta_0)} \right) \right)^2$$

برهان : با توجه به قضیه ۳,۲ می توان نوشت

$$Var\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\nu}{\nu-2} - \frac{\nu}{2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right)^2$$

حال با در نظر گرفتن قضیه ۱۸,۴ اثبات به راحتی امکان پذیر است و برهان کامل است. □

۱,۱,۵,۴ برآورد پارامترهای توزیع t - استیودنت چوله با دو پارامتر چولگی

در این بخش می خواهیم پارامترهای توزیع t - استیودنت چوله p - متغیره با دو پارامتر چولگی را با استفاده از الگوریتم EM برآورد کنیم.

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از $ST_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1, \nu)$ باشد همچنین

$$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}^T, \gamma^T, \lambda_1^T, \lambda_0)^T \text{ را در نظر می گیریم که در آن}$$

$\boldsymbol{\mu}^T$: پارامتر بردار میانگین

γ^T : ماتریس بالا مثلثی از ماتریس متقارن Σ

λ_0 : پارامتر چولگی اول

λ_1^T : پارامتر بردار چولگی دوم

علاوه بر این فرض می کنیم پارامتر ν برای نمونه n تایی معلوم باشد.

همان طور که در فصل سوم بیان کردیم، اگر $X \sim SN_p(\mu, \Sigma, \delta_1, \delta_0)$ باشد آنگاه نمایش تصادفی از این خانواده به صورت زیر تعریف می شود.

$$X = \mu + \Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\delta_1 Z_1 (-\delta_0) + (I_p - \delta_1 \delta_1^T)^{\frac{1}{2}} Z_2 \right) \quad (۱۹-۴)$$

که در آن

$$Z_1 \sim N_1(0,1) \quad , \quad Z_2 \sim N_p(0, I_p)$$

برای اجرای الگوریتم EM با توجه به رابطه (۱۹-۴) نمایش سلسله مراتبی زیر را خواهیم داشت

$$X_i | T_i = t_i, U_i = u_i \sim^{ind} N_p \left(\mu + t_i \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta_1, u_i^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} (I_p - \delta_1 \delta_1^T) \Sigma^{\frac{1}{2}} \right), i = 1, \dots, n \quad (۲۰-۴)$$

$$T_i | U_i = u_i \sim^{iid} TN_1(0, u_i^{-1}) I(t > -\delta_0) \quad i = 1, \dots, n \quad (۲۱-۴)$$

$$U_i \sim^{ind} h(u_i, \nu), i = 1, \dots, n \quad (۲۲-۴)$$

به طوریکه همگی مستقل می باشند

اجرای الگوریتم :

برای ادامه کار فرضیات زیر را در نظر می گیریم

$$\Delta_2 = \Sigma^{\frac{1}{2}} \delta_1 \quad , \quad \Gamma_2 = \Sigma - \Delta_2 \Delta_2^T = \Sigma^{\frac{1}{2}} (I_p - \delta_1 \delta_1^T) \Sigma^{\frac{1}{2}}$$

در ابتدا لگاریتم تابع درستنمایی داده های کامل را به دست آوریم

$$\ell_c(\theta | X_c) = \log \left(\prod_{i=1}^n f_{X,U,T}(x, u, t) \right) = \log \left(\prod_{i=1}^n f(x_i | u_i, t_i) f(t_i | u_i) f(u_i) \right)$$

با توجه به اینکه رابطه (۲۲-۴) بردار پارامتر مجهول را در بر نمی گیرد، و با توجه به تعریف ۱،۱ و

فرض اینکه $d_2^* = (x_i - \mu - t_i \Delta_2)^T (u_i \Gamma_2)^{-1} (x_i - \mu - t_i \Delta_2)$ می توان نوشت

$$\ell_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}_c) = \log \left(\prod_{i=1}^n (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \left| u_i^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} (I_p - \boldsymbol{\delta}_1 \boldsymbol{\delta}_1^T) \Sigma^{\frac{1}{2}} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{d_2^*}{2}} \frac{u_i^{\frac{1}{2}}}{1 - \Phi_1\left(-\frac{\delta_0}{u_i^{\frac{1}{2}}}\right)} \varphi_1\left(\frac{t}{u_i^{\frac{1}{2}}}\right) \right) + c$$

در ادامه، با توجه به این نکته $1 - \Phi_1(-x) = \Phi_1(x)$ داریم

$$\ell_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}_c) = \log \left((2\pi)^{-\frac{np}{2}} \left| u_i^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} (I_p - \boldsymbol{\delta}_1 \boldsymbol{\delta}_1^T) \Sigma^{\frac{1}{2}} \right|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_2^*} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Phi_1\left(\delta_0 u_i^{\frac{1}{2}}\right)} \right) + c$$

و با جایگذاری $\mathbf{d}_2^*$ و $\Sigma^{\frac{1}{2}} (I_p - \boldsymbol{\delta}_1 \boldsymbol{\delta}_1^T) \Sigma^{\frac{1}{2}} = \Gamma_2$ ، $\mathbf{\Delta}_2 = \Sigma^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\delta}_1$ داریم

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}_c) &= c - \frac{n}{2} \log |\Gamma_2| \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu} - \mathbf{\Delta}_2 t_i)^T \Gamma_2^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu} - \mathbf{\Delta}_2 t_i) + \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{1}{\Phi_1\left(\delta_0 u_i^{\frac{1}{2}}\right)} \right) \\ &= c - \frac{n}{2} \log |\Gamma_2| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu} - \mathbf{\Delta}_2 t_i)^T \Gamma_2^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu} - \mathbf{\Delta}_2 t_i) - \sum_{i=1}^n \log \Phi_1(\delta_0 u_i^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

که در آن c مقداری ثابت و مستقل از بردار پارامترها است. در ادامه کار و قبل از اجرای اولین مرحله

الگوریتم، مفروضات زیر را در نظر می‌گیریم

$$u_{i2}^* = E(U_i | \mathbf{X}_i)$$

$$ut_{i2}^* = E(U_i T_i | \mathbf{X}_i)$$

$$ut_{i2}^{2*} = E(U_i T_i^2 | \mathbf{X}_i)$$

$$\tau_{i2} = E \left(U^{\frac{1}{2}} W_{\Phi} \left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{\Delta}_2^T \Gamma_2^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{M(\boldsymbol{\theta})} \right) \middle| \mathbf{X} = \mathbf{x} \right)$$

با توجه به اینکه $\mathbf{X}_i \sim ST_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\lambda}_1, \lambda_0, \nu)$ ، قضایای (۴-۲۴) تا (۴-۲۷) را برای محاسبه روابط بالا

معرفی می‌کنیم.

(**) قضیه ۲۴،۴ اگر $\mathbf{X} \sim ST_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\lambda}_1, \lambda_0, \nu)$ باشد آنگاه داریم

$$E(U^r | \mathbf{X}) = \frac{2^r \nu^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{p+\nu+2r}{2}\right) (d+\nu)^{-\frac{p+\nu+2r}{2}}}{\Phi_1(\delta_0) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi^p} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}}} T_{p+\nu+2r, \lambda_0^2} \left(\sqrt{\frac{p+\nu+2r}{d+\nu}} \boldsymbol{\lambda}_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right)$$

برهان: با توجه به تعریف امید ریاضی شرطی و توزیع متغیر تصادفی U داریم

$$\begin{aligned} E(U^r | \mathbf{X} = \mathbf{x}) &= \int_0^\infty u^r f_{U|\mathbf{X}}(u|\mathbf{x}) du = \int_0^\infty u^r \frac{f_{\mathbf{X},U}(\mathbf{x}, u)}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} du \\ &= \frac{1}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} \int_0^\infty u^r f_{\mathbf{X}|U}(\mathbf{x}|u) h(u) du \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\mathbf{X}|U \sim SN_p(\boldsymbol{\mu}, u^{-1} \Sigma, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_1)$ و $U \sim \Gamma(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2})$ است می توان نوشت

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \Phi_1(\delta_0)} \int_0^\infty u^r \varphi_p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}, u^{-1} \Sigma) \Phi_1(\lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_1^T u^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})) \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} u^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\nu}{2}u} du \\ &= \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Phi_1(\delta_0)} \int_0^\infty u^{\frac{\nu}{2}+r-1} (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{p}{2}} e^{-\frac{ud}{2}} \Phi_1(\lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_1^T u^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})) e^{-\frac{\nu}{2}u} du \\ &= \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Phi_1(\delta_0) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty u^{\frac{p+\nu+2r}{2}-1} e^{-u\left(\frac{d+\nu}{2}\right)} \Phi_1(\lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_1^T u^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})) du \\ &= \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{p+\nu+2r}{2}\right)}{\Phi_1(\delta_0) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d+\nu}{2}\right)^{\frac{p+\nu+2r}{2}}} \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{\left(\frac{d+\nu}{2}\right)^{\frac{p+\nu+2r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p+\nu+2r}{2}\right)} u^{\frac{p+\nu+2r}{2}-1} e^{-u\left(\frac{d+\nu}{2}\right)} \Phi_1(\lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_1^T u^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{p+\nu+2r}{2}\right)}{\Phi_1(\delta_0) f_X(x) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d+\nu}{2}\right)^{\frac{p+\nu+2r}{2}}} \\
&\quad \times \int_0^\infty \frac{\left(\frac{d+\nu}{2}\right)^{\frac{p+\nu+2r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p+\nu+2r}{2}\right)} u^{\frac{p+\nu+2r}{2}-1} e^{-u\left(\frac{d+\nu}{2}\right)} \Phi_1\left(\sqrt{\frac{u(d+\nu)}{d+\nu}} \lambda_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x-\mu) + \lambda_0\right) du \\
&= \frac{2^r (\nu)^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{p+\nu+2r}{2}\right) (d+\nu)^{-\frac{p+\nu+2r}{2}}}{\Phi_1(\delta_0) f_X(x) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d+\nu}{2}\right)^{\frac{p+\nu+2r}{2}}} E_U\left(\Phi_1\left(\sqrt{\frac{u(d+\nu)}{d+\nu}} \lambda_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x-\mu) + \lambda_0\right)\right)
\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به لم ۴,۱ داریم

$$= \frac{2^r (\nu)^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{p+\nu+2r}{2}\right) (d+\nu)^{-\frac{p+\nu+2r}{2}}}{\Phi_1(\delta_0) f_X(x) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} T_{p+\nu+2r, \lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x-\mu) \sqrt{p+\nu+2r}}{\sqrt{d+\nu}} \right)$$

و برهان کامل است. $\square$

(**) نتیجه ۱۶,۴ با توجه به قضیه ۲۴,۴، با قرار دادن $r = 1$ داریم

$$u_{i_2}^* = \frac{2 (\nu)^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{p+\nu+2}{2}\right) (d+\nu)^{-\frac{p+\nu+2}{2}}}{\Phi_1(\delta_0) f_X(x) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} T_{p+\nu+2, \lambda_0^2} \left(\frac{\lambda_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x-\mu) \sqrt{p+\nu+2}}{\sqrt{d+\nu}} \right)$$

(**) قضیه ۲۵,۴ اگر $X \sim ST_p(\mu, \Sigma, \lambda_1, \lambda_0, \nu)$ آنگاه داریم

$$ut_{i_2}^* = M^2(\theta) \Delta_2^T \Gamma_2^{-1} (x - \mu) u_{i_2}^* + M(\theta) \tau_{i_2}$$

که در آن

$$M^2(\theta) = (1 + \Delta_2^T \Gamma_2^{-1} \Delta_2)^{-1}$$

$$\tau_{i_2} = E \left(U^{\frac{1}{2}} W_\Phi \left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\theta) \Delta_2^T \Gamma_2^{-1} (x - \mu)}{M(\theta)} \right) \middle| X = x \right)$$

برهان : با توجه به روابط (۲۰-۴) تا (۲۲-۴) می توان نوشت

$$T|X, U \sim TN\left(M^2(\theta)\Delta_2^T\Gamma_2^{-1}(x - \mu), U^{-1}M^2(\theta)\right) I(t > -\delta_0) \quad (۲۳-۴)$$

بنابراین با توجه به تعریف ۱,۱ داریم

$$E(T|X, U) = M^2(\theta)\Delta_2^T\Gamma_2^{-1}(x - \mu) + U^{-\frac{1}{2}} M(\theta) W_\Phi\left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\theta)\Delta_2^T\Gamma_2^{-1}(x - \mu)}{M(\theta)}\right)$$

و در نهایت با توجه به لم ۶,۱ داریم

$$\begin{aligned} ut_{i_2}^* &= E(UT|X = x) \\ &= E\left(U\left(M^2(\theta)\Delta_2^T\Gamma_2^{-1}(x - \mu) + U^{-\frac{1}{2}} M(\theta) W_\Phi\left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\theta)\Delta_2^T\Gamma_2^{-1}(x - \mu)}{M(\theta)}\right)\right)\right|X = x) \\ &= M^2(\theta)\Delta_2^T\Gamma_2^{-1}(x - \mu)E(U|X = x) + M(\theta)E\left(U^{\frac{1}{2}} W_\Phi\left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\theta)\Delta_2^T\Gamma_2^{-1}(x - \mu)}{M(\theta)}\right)\right|X = x) \\ &= M^2(\theta)\Delta_2^T\Gamma_2^{-1}(x - \mu)u_{i_2}^* + M(\theta) \tau_{i_2} \end{aligned}$$

و برهان کامل است. $\square$

(**) قضیه ۲۶,۴ فرض کنید $X \sim ST_p(\mu, \Sigma, \lambda_1, \lambda_0, \nu)$ در این صورت داریم

$$ut_{i_2}^{2*} = M^4(\theta)(\Delta_2^T\Gamma_2^{-1}(x - \mu))^2 u_{i_2}^* + M^2(\theta) + M^3(\theta)\Delta_2^T\Gamma_2^{-1}(x - \mu)\tau_{i_2} - \delta_0 M(\theta)\tau_{i_2}$$

برهان : با توجه به توزیع معرفی شده در رابطه (۲۳-۴) و استفاده از تعریف ۱,۱ داریم

$$\begin{aligned} E(T^2|X, U) &= M^4(\theta)(\Delta_2^T\Gamma_2^{-1}(x - \mu))^2 + U^{-1}M^2(\theta) \\ &\quad + M^3(\theta)\Delta_2^T\Gamma_2^{-1}(x - \mu)U^{-\frac{1}{2}} W_\Phi\left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\theta)\Delta_2^T\Gamma_2^{-1}(x - \mu)}{M(\theta)}\right) \\ &\quad - \delta_0 U^{-\frac{1}{2}} M(\theta)W_\Phi\left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\theta)\Delta_2^T\Gamma_2^{-1}(x - \mu)}{M(\theta)}\right) \end{aligned}$$

و در ادامه با توجه به لم ۶,۱ داریم

$$ut_{i_2}^{2*} = E(UT^2|X = x)$$

$$\begin{aligned}
&= E \left(U \left(\begin{array}{c} M^4(\theta)(\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}))^2 + U^{-1}M^2(\theta) \\ + M^3(\theta)\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})U^{-\frac{1}{2}} W_{\Phi} \left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\theta)\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{M(\theta)} \right) \\ - \delta_0 U^{-\frac{1}{2}} M(\theta) W_{\Phi} \left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\theta)\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{M(\theta)} \right) \end{array} \right) \middle| \mathbf{X} = \mathbf{x} \right) \\
&= M^4(\theta)(\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}))^2 E(U | \mathbf{X} = \mathbf{x}) + M^2(\theta) \\
&+ M^3(\theta)\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) E \left(U^{\frac{1}{2}} W_{\Phi} \left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\theta)\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{M(\theta)} \right) \middle| \mathbf{X} = \mathbf{x} \right) \\
&- \delta_0 M(\theta) E \left(U^{\frac{1}{2}} W_{\Phi} \left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\theta)\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{M(\theta)} \right) \middle| \mathbf{X} = \mathbf{x} \right) \\
&= M^4(\theta)(\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}))^2 u_{i_2}^* + M^2(\theta) + M^3(\theta)\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\tau_{i_2} - \delta_0 M(\theta)\tau_{i_2}
\end{aligned}$$

و برهان کامل است. $\square$

(**) قضیه ۲۷،۴ اگر $\mathbf{X} \sim ST_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\lambda}_1, \lambda_0, \nu)$ آنگاه داریم

$$\begin{aligned}
&\tau_{i_2} \\
&= \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Phi_1(\delta_0)f(\mathbf{x})\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\infty} u^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u(A^2+\nu)} \frac{\Phi_1\left(\lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_1^T U^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)}{\Phi_1\left(U^{\frac{1}{2}}A\right)} \varphi_p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, U^{-1}\Sigma) du
\end{aligned}$$

که در آن

$$A = \frac{\delta_0 + M^2(\theta)\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{M(\theta)}$$

برهان :

$$\begin{aligned}
\tau_{i_2} &= E \left(U^{\frac{1}{2}} W_{\Phi} \left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\theta)\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{M(\theta)} \right) \middle| \mathbf{X} = \mathbf{x} \right) \\
\tau_{i_2} &= \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2}} \frac{\Phi_1 \left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\theta)\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{M(\theta)} \right)}{\Phi_1 \left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\theta)\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{M(\theta)} \right)} f(u|\mathbf{x}) du \\
&= \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2}} \frac{\Phi_1 \left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\theta)\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{M(\theta)} \right)}{\Phi_1 \left(U^{\frac{1}{2}} \frac{\delta_0 + M^2(\theta)\Delta_2^T \Gamma_2^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{M(\theta)} \right)} \frac{f(\mathbf{x}|u)f(u)}{f(\mathbf{x})} du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Phi_1(\delta_0)f(x)} \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi_1\left(U^{\frac{1}{2}}A\right)}{\Phi_1\left(U^{\frac{1}{2}}A\right)} \varphi_p(x|\mu, u^{-1}\Sigma) \Phi_1\left(\lambda_0 + \lambda_1^T U^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu)\right) f(u) du \\
&= \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Phi_1(\delta_0)f(x)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty u^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u(A^2+\nu)} \frac{\Phi_1\left(\lambda_0 + \lambda_1^T U^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}}(x - \mu)\right)}{\Phi_1\left(U^{\frac{1}{2}}A\right)} \varphi_p(x|\mu, U^{-1}\Sigma) du
\end{aligned}$$

و برهان کامل است. $\square$

گام اول الگوریتم :

در گام اول الگوریتم، امید ریاضی $\ell_c(\theta|X_c)$ به شرط داده های مشاهده شده را محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned}
Q(\theta) &= E(\ell_c(\theta|X_c)|X=x) \\
&= E\left(c - \frac{n}{2}\log|\Gamma_2| - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n u_i(x_i - \mu - \Delta_2 t_i)^T \Gamma_2^{-1}(x_i - \mu - \Delta_2 t_i) - \sum_{i=1}^n \log \Phi_1(\delta_0 u_i^{\frac{1}{2}}) \middle| X=x\right)
\end{aligned}$$

که در نهایت با توجه فرضیات بیان شده، می توان نوشت

$$\begin{aligned}
Q(\theta) &= c - \frac{n}{2}\log|\Gamma_2| - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n u_{i_2}^* (x_i - \mu)^T \Gamma_2^{-1}(x_i - \mu) \\
&+ \sum_{i=1}^n u_{i_2}^* (x_i - \mu)^T \Gamma_2^{-1} \Delta_2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n u_{i_2}^{2*} \Delta_2^T \Gamma_2^{-1} \Delta_2 - \sum_{i=1}^n E\left(\log\left(\Phi_1\left(\delta_0 u_i^{\frac{1}{2}}\right)\right) \middle| X=x\right)
\end{aligned}$$

گام دوم الگوریتم :

مرحله دوم الگوریتم، شامل ماکزیمم کردن $Q(\theta)$ و برآورد پارامترهای مورد نظر است. برای این

منظور کافی است، از تابع $Q(\theta)$ نسبت به پارامترهای مشخص شده، مشتق بگیریم.

برآورد پارامتر بردار :

$$\frac{\partial Q(\theta)}{\partial \mu} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n -2 u_{i_2}^* (x_i - \hat{\mu}) \Gamma_2^{-1} + \sum_{i=1}^n -u_{i_2}^* \widehat{\Gamma_2^{-1}} \widehat{\Delta_2} = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma_2^{-1} \sum_{i=1}^n u_{i2}^* (x_i - \hat{\mu}) = \widehat{\Gamma_2^{-1}} \sum_{i=1}^n -ut_{i2}^* \widehat{\Delta_2} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_{i2}^* x_i - ut_{i2}^* \widehat{\Delta_2})}{\sum_{i=1}^n u_{i2}^*}$$

برآورد پارامتر ماتریس Γ_2 :

$$\frac{\partial Q(\theta)}{\partial \Gamma_2} = 0$$

$$\Rightarrow \widehat{\Gamma_2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[u_{i2}^* (x_i - \hat{\mu})(x_i - \hat{\mu})^T - 2ut_{i2}^* \widehat{\Delta_2} (x_i - \hat{\mu})^T + ut_{i2}^{2*} \widehat{\Delta_2} \widehat{\Delta_2}^T \right]$$

برآورد پارامتر بردار Δ_2 :

$$\frac{\partial Q(\theta)}{\partial \Delta_2} = \sum_{i=1}^n ut_{i2}^* (x_i - \hat{\mu})^T \widehat{\Gamma_2^{-1}} - \sum_{i=1}^n ut_{i2}^{2*} \widehat{\Delta_2} \widehat{\Gamma_2^{-1}} = 0$$

$$\Rightarrow \widehat{\Gamma_2^{-1}} \sum_{i=1}^n ut_{i2}^* (x_i - \hat{\mu})^T = \widehat{\Gamma_2^{-1}} \sum_{i=1}^n ut_{i2}^{2*} \widehat{\Delta_2}$$

$$\Rightarrow \widehat{\Delta_2} = \frac{\sum_{i=1}^n ut_{i2}^* (x_i - \hat{\mu})}{\sum_{i=1}^n ut_{i2}^{2*}}$$

$$\frac{\partial Q(\theta)}{\partial \delta_0} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n E \left(\log \left(\Phi_1 \left(\delta_0 u_i^{\frac{1}{2}} \right) \right) \middle| X = x \right) \right)}{\partial \delta_0}$$

برای به دست آوردن برآورد پارامتر δ_0 ، لازم است از روش های عددی، مانند نیوتن - رافسون و غیره نمود.

در پایان می توان پارامتر بردار λ_1 و ماتریس Σ را به دست آورد

$$\widehat{\Sigma} = \widehat{\Gamma_2} + \widehat{\Delta_2} \widehat{\Delta_2}^T, \quad \widehat{\lambda_1} = \frac{\widehat{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\Delta_2}}{\sqrt{1 - \widehat{\Delta_2}^T \widehat{\Sigma}^{-1} \widehat{\Delta_2}}}$$

۲,۵,۴ توزیع اسلش چوله با دو پارامتر چولگی

یکی دیگر از توزیع های خانواده معرفی شده در بخش ۴,۴، توزیع اسلش چوله با دو پارامتر چولگی

است. با در نظر داشتن اینکه متغیر تصادفی U دارای توزیع $Beta(v, 1)$ است. تعریف زیر را داریم.

(**) تعریف ۷,۴ می گوییم $X \sim SSL_p(\mu, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1, v)$ است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر

تعریف شود.

$$f_X(x) = \frac{v}{\Phi_1(\delta_0)} \int_0^1 u^{v-1} \varphi_p(x|\mu, u^{-1}\Sigma) \Phi_1\left(\lambda_0 + \lambda_1^T u^{\frac{1}{2}\Sigma^{-\frac{1}{2}}(x-\mu)}\right) du \quad (۲۴-۴)$$

نشان دادن اینکه تابع چگالی بیان شده در رابطه (۴-۲۴)، عضوی از خانواده معرفی شده در رابطه (۴-۱۳)

است، امری بسیار آسان است.

(**) قضیه ۲۸,۴ اگر $X \sim SSL_p(\mu, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1, v)$ ، آنگاه امید ریاضی و واریانس برای این خانواده

به صورت زیر است

$$E(X) = \mu + \frac{2v}{2v-1} \Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\delta_1 \frac{\varphi_1(\delta_0)}{\Phi_1(\delta_0)} \right)$$

$$Var(X) = \left(\frac{2v}{2v-1} \right)^2 Var(Z) + E^2(Z) \frac{v}{v-1} - \left(\frac{2v}{2v-1} \right)^2 + \frac{v}{v-1}$$

$$- \left(\frac{2v}{2v-1} \right)^2 Var(Z)$$

که در آن

$$Z \sim SN_p(0, \Sigma, \delta_0, \delta_1)$$

$$Var(Z) = \Sigma \left[\delta_1 \delta_1^T \left(1 - \frac{\varphi_1^2(\delta_0) + \delta_0 \Phi_1(\delta_0) \varphi_1(\delta_0)}{\Phi^2(\delta_0)} \right) + (I_p - \delta_1 \delta_1^T) \right]$$

$$E^2(Z) = \left(\Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\delta_1 \frac{\varphi(\delta_0)}{\Phi(\delta_0)} \right) \right)^2$$

برهان : با استفاده از قضیه ۵,۲ می توان نوشت

$$Var\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{v}{v-1} - \left(\frac{2v}{2v-1}\right)^2$$

بنابراین با در نظر گرفتن قضیه ۱۸,۴ برهان کامل است. $\square$

۳,۵,۴ توزیع نرمال چوله آلایشی با دو پارامتر چولگی

سومین توزیع از خانواده معرفی شده در بخش ۴,۴، توزیع نرمال چوله آلایشی با دو پارامتر چولگی

است. فرض کنید متغیر تصادفی U دارای تابع چگالی زیر باشد

$$h(u, \boldsymbol{v}) = \begin{cases} v & u = \gamma \\ 1-v & u = 1 \end{cases} \quad 0 \leq v \leq 1, \quad 0 < \gamma < 1 \quad \boldsymbol{v} = (v, \gamma)^T$$

در این صورت تعریف زیر را خواهیم داشت.

(**) تعریف ۸,۴ می گوئیم $\boldsymbol{X} \sim SCN_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1, v, \gamma)$ است، اگر تابع چگالی آن به صورت

تعریف شود.

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\Phi_1(\delta_0)} \left\{ v \varphi_p\left(\boldsymbol{x} \middle| \boldsymbol{\mu}, \frac{\Sigma}{\gamma}\right) \Phi_1\left(\lambda_0 + \gamma^{\frac{1}{2}} \lambda_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \right\} \\ + \frac{1}{\Phi_1(\delta_0)} \left\{ (1-v) \varphi_p(\boldsymbol{x} | \boldsymbol{\mu}, \Sigma) \Phi_1\left(\lambda_0 + \gamma^{\frac{1}{2}} \lambda_1^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \right\}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p \quad (۲۵-۴)$$

نشان دادن اینکه تابع چگالی معرفی شده در رابطه (۲۵-۴)، عضوی از خانواده معرفی شده در رابطه

(۱۳-۴) است، به سهولت امکان پذیر است.

(**) قضیه ۲۹,۴ فرض کنید $\boldsymbol{X} \sim SCN_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1, v, \gamma)$ ، آنگاه امید و واریانس این مدل به

صورت زیر است

$$E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} + \left(\frac{\nu}{\gamma^2} + (1 - \nu) \right) \left(\Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\boldsymbol{\delta}_1 \frac{\varphi(\delta_0)}{\Phi(\delta_0)} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} Var(\mathbf{X}) = & \left(\frac{\nu}{\gamma^2} + (1 - \nu) \right)^2 Var(\mathbf{Z}) + E^2(\mathbf{Z}) \left[\left(\frac{\nu}{\gamma} + (1 - \nu) \right) - \left(\frac{\nu}{\gamma^2} + (1 - \nu) \right)^2 \right] \\ & + \left[\left(\frac{\nu}{\gamma} + (1 - \nu) \right) - \left(\frac{\nu}{\gamma^2} + (1 - \nu) \right)^2 \right] Var(\mathbf{Z}) \end{aligned}$$

که در آن

$$\mathbf{Z} \sim SN_p(0, \Sigma, \delta_0, \boldsymbol{\delta}_1)$$

$$Var(\mathbf{Z}) = \Sigma \left[\boldsymbol{\delta}_1 \boldsymbol{\delta}_1^T \left(1 - \frac{\varphi_1^2(\delta_0) + \delta_0 \Phi_1(\delta_0) \varphi_1(\delta_0)}{\Phi^2(\delta_0)} \right) + (I_p - \boldsymbol{\delta}_1 \boldsymbol{\delta}_1^T) \right]$$

$$E^2(\mathbf{Z}) = \left(\Sigma^{\frac{1}{2}} \left(\boldsymbol{\delta}_1 \frac{\varphi(\delta_0)}{\Phi(\delta_0)} \right) \right)^2$$

برهان: با توجه به قضیه ۷,۲ می‌توان نوشت

$$Var\left(U^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{\nu}{\gamma} + (1 - \nu) \right) - \left(\frac{\nu}{\gamma^2} + (1 - \nu) \right)^2$$

و با توجه به قضیه ۱۸,۴ برهان کامل است. $\square$

فصل پنجم

پیشنهادات و نتیجه گیری

۵.۱ پیشنهادات

در آخرین فصل این پایان نامه قصد داریم مدل‌هایی را معرفی کنیم که فرصت بررسی آنها در این پایان نامه فراهم نشده است. همچنین این مدل‌ها می‌توانند برای علاقه‌مندان در این زمینه پیشنهادات مناسبی را فراهم کنند. لازم به ذکر است که همه این مدل‌ها فقط معرفی شده‌اند و نویسندگان این پایان نامه خواننده را برای جزئیات بیشتر به مقالاتی که پایان هر مدل آمده است، ارجاع می‌دهد.

✓ توزیع t -اسلش

تعریف ۱,۵ فرض کنید متغیر تصادفی U_1 دارای توزیع $Beta(v, 1)$ و متغیر تصادفی U_2 دارای توزیع $\Gamma(\frac{v}{2}, \frac{v}{2})$ باشد. در این صورت متغیر تصادفی X را دارای توزیع t -اسلش گویند اگر دارای نمایش تصادفی زیر باشد.

$$X = {}^d \mu + U_1^{-\frac{1}{2}} U_2^{-\frac{1}{2}} Z, \quad Z \sim N_p(0, \Sigma)$$

✓ توزیع t -اسلش چوله

تعریف ۲,۵ اگر متغیر تصادفی U_1 دارای توزیع $Beta(v, 1)$ و متغیر تصادفی U_2 دارای توزیع $\Gamma(\frac{v}{2}, \frac{v}{2})$ باشد. آنگاه متغیر تصادفی X دارای توزیع t -اسلش چوله است اگر نمایش تصادفی آن به صورت زیر تعریف شود. گویند

$$X = {}^d \mu + U_1^{-\frac{1}{2}} U_2^{-\frac{1}{2}} Z, \quad Z \sim SN_p(0, \Sigma)$$

برای جزئیات بیشتری از تعریف ۱,۵ و ۲,۵ می‌توان به تان و پنگ^۱ (۲۰۰۶) مراجعه کرد

1. Tan and Peng

در فصل‌های دوم و چهارم توزیع‌های نرمال آمیخته مقیاسی و نرمال چوله آمیخته مقیاسی را با معرفی متغیر تصادفی U بیان کردیم. در این نوع از توزیع‌ها، پارامتر مقیاس را با معکوس متغیر تصادفی U ترکیب نمودیم و این مدل از توزیع‌ها را ساختیم. در این فصل توابع دیگری از متغیر تصادفی U را در نظر می‌گیریم و مدل‌های جدیدی از توزیع‌های آمیخته را معرفی می‌کنیم.

تابعی از متغیر تصادفی U را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$k(U) : k : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

یادآوری می‌کنیم که در فصل‌های گذشته $k(U) = U^{-1}$ قرار داده شد.

در این قسمت مدل‌های جدیدی از خانواده توزیع‌های نرمال چوله آمیخته مقیاسی با دو پارامتر چولگی را معرفی می‌کنیم.

✓ توزیع‌های نرمال چوله آمیخته مقیاسی متناهی با دو پارامتر چولگی

تعریف ۳,۵ اگر U یک متغیر تصادفی گسسته متناهی باشد، آنگاه می‌گوییم X عضو خانواده توزیع‌های نرمال چوله آمیخته مقیاسی متناهی با دو پارامتر چولگی است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر تعریف شود.

$$f_X(x) = \frac{1}{\Phi_1(\delta_0)} \sum_u \varphi_p(x|\mu, k(U)\Sigma) \Phi_1\left(\lambda_0 + (k(U)\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \lambda_1^T(x - \mu)\right) \quad (۱-۵)$$

✓ توزیع لوجستیک چوله

تعریف ۴,۵ توزیع لوجستیک یک مورد ویژه از توزیع‌های نرمال آمیخته مقیاسی است. بنابراین اگر در خانواده توزیع‌های نرمال چوله آمیخته مقیاسی با دو پارامتر چولگی داشته باشیم

$$k(U) = 4U^2 \quad , \quad h_U(u) = 8 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 u e^{-2k^2 u^2}$$

توزیع لوجستیک چوله به دست می‌آید.

برای اطلاعات بیشتر می توان به چوی^۱ (۱۹۹۵) مراجعه نمود.

لازم است عنوان کنیم که بدست آوردن تابع چگالی توزیع لجستیک چوله ، محاسبات پیچیده ای دارد، اما چن^۲ و دی (۱۹۹۸) این محاسبات را با استفاده از تقریب t - استیودنت با توزیع لجستیک تا حدودی ساده نموده اند.

✓ توزیع پایای چوله

تعریف ۵,۵ اگر در خانواده توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی با دو پارامتر چولگی داشته باشیم

$$k(U) = 2U, \quad h_U(u|\alpha, 1) = \frac{\alpha}{1-\alpha} u^{-\frac{1}{1-\alpha}} \int_0^1 s(t) \exp\left\{-s(t) u^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} du, \quad 0 < \alpha < 1$$

که در آن

$$s(t) = \left[\frac{\sin(\alpha\pi t)}{\sin(\pi t)} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left[\frac{\sin((1-\alpha)\pi t)}{\sin(\pi t)} \right]$$

آنگاه توزیع پایای چوله محاسبه می شود.

نتیجه ۱,۵ در توزیع پایای چوله، در صورتیکه $\alpha \rightarrow 1$ میل کند آنگاه مدل نرمال چوله با دو پارامتر چولگی به دست خواهد آمد.

✓ توزیع توانی چوله

تعریف ۶,۵ یک مورد ویژه دیگر از توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی با دو پارامتر چولگی، توزیع توانی چوله است. بنابراین اگر داشته باشیم

$$k(U) = \frac{1}{2c_0 U}, \quad c_0 = \frac{\Gamma\left[\frac{3}{2\alpha}\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2\alpha}\right]}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

1. Choi
2. Chen

به طوری که تابع چگالی U به صورت زیر باشد

$$h_U(u) = \frac{1}{u^{\frac{n+1}{2}}} h_U(u|\alpha, 1)$$

که در آن α ضریب کشیدگی است، آنگاه توزیع توانی چوله به دست خواهد آمد. برای جزئیات بیشتر از مدل معرفی شده، می‌توان به وست^۱ (۱۹۸۷) و چوی (۱۹۹۵) مراجعه نمود.

✓ توزیع t -چوله تعمیم یافته با دو پارامتر چولگی

تعریف ۷،۵ اگر متغیر تصادفی U دارای توزیع زیر باشد

$$U \sim \Gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\tau}{2}\right), \quad \nu, \tau > 0$$

به طوریکه تابع چگالی آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f_U(u) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} u^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}u\right\}$$

آنگاه می‌گوییم X دارای توزیع t -چوله تعمیم یافته است اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = 2 t_p(x|\mu, \Sigma, \nu, \tau) F_1(\lambda_0 + \lambda_1^T(x - \mu) | \nu^*, \tau^*)$$

که در آن $t_p(x|\mu, \Sigma, \nu, \tau)$ تابع چگالی t -استیودنت p -متغیره تعمیم یافته و

$$\tau^* = \tau + d \text{ و } \nu^* = \nu + p \text{ با } F_1(\lambda_0 + \lambda_1^T(x - \mu) | \nu^*, \tau^*)$$

و از نماد زیر برای نمایش این توزیع استفاده می‌شود.

$$X \sim ST_p(\mu, \Sigma, \lambda_0, \lambda_1, \nu, \tau)$$

برای جزئیات بیشتر می‌توان به برانکو و دی (۲۰۰۱) و آرنولد و بیور (۲۰۰۲) مراجعه نمود.

در پایان لازم است خاطر نشان کنیم که، با تعریف توزیع های جدیدی برای متغیر تصادفی U و بیان توابع متفاوتی از این متغیر تصادفی، می‌توان مدل های جدید و متنوعی ساخت که فرصت معرفی و بررسی آنها در این پایان نامه وجود ندارد اما این ایده می‌تواند برای علاقه مندان در این زمینه، بسیار مفید واقع شود.

۲,۵ نتیجه گیری

همانطور که قبلاً ذکر کردیم در بسیاری از استنباط های آماری از توزیع نرمال برای برازش به داده های واقعی و تحلیل های آماری، استفاده می‌شود. کاربرد توزیع نرمال در بسیاری از موارد، از دقت مورد نیاز برخوردار نخواهد بود از این رو با معرفی توزیع های جدیدی در این پایان نامه، سعی بر آن داشته ایم تا دقت تحلیل های آماری را افزایش دهیم. این توزیع ها که می‌توانند جایگزین مناسبی برای توزیع نرمال در برازش به داده های واقعی باشند، در شرایط متفاوت انتخاب می‌شوند. به این صورت که اگر هیستوگرام داده های متقارن دارای دنباله های ضخیم باشد یعنی انباشتگی در دنباله داده ها بیشتر از سایر نقاط باشد، پیشنهاد ما توزیع های نرمال آمیخته مقیاسی از جمله توزیع t -استیودنت خواهد بود. اگر هیستوگرام داده ها دارای چولگی باشد، استفاده از توزیع های نرمال چوله یک راهکار مناسب خواهد بود. و در آخر، اگر هیستوگرام داده ها هم دارای چولگی و هم دنباله های ضخیم باشد، توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی یک جایگزین مناسب نسبت به توزیع های دیگر خواهد بود. لازم است عنوان کنیم که انتخاب بهترین توزیع در خانواده توزیع های نرمال چوله آمیخته مقیاسی کار نهایی این پایان نامه است و در دست انجام است.

برنامه‌های کامپیوتری

با استفاده از نرم افزار R

شکل (۱-۱)

```
require(graphics)

curve((((2*pi)/(pi+2*atan(-1))))*dnorm(x)*pnorm(-1*abs(x)),-6,6,col="2")

curve((((2*pi)/(pi+2*atan(-0.5))))*dnorm(x)*pnorm(-0.5*abs(x)),-6,6,col="3",add=TRUE)

curve((((2*pi)/(pi+2*atan(2))))*dnorm(x)*pnorm(2*abs(x)),-6,6,col="4",add=TRUE)

curve((((2*pi)/(pi+2*atan(4))))*dnorm(x)*pnorm(4*abs(x)),-6,6,col="5",add=TRUE)

*****
```

شکل (۱-۲) و (۲-۲)

```
require(strucchange)

require(fMultivar )

dmvt=function(X,mu,Omega,nu){

mu=matrix(rep(mu,nrow(X)),byrow=T,ncol=ncol(X))

y=dmt(X,mu,Omega,df=nu)

return(y)

}

n = 50

x = seq(-4,4, length = n)

xoy = cbind(rep(x, n), as.vector(matrix(x, n, n, byrow = TRUE)))

X = matrix(xoy, n * n, 2, byrow = FALSE)

mu = c(1, 1)

nu=1

Omega = matrix(c(1, 0.5, 0.5, 1), 2)

Z= matrix(dmvt(X,mu,Omega,nu),length(x),length(x))

persp(x, x, Z,xlab="X",ylab="Y",zlab="Z")
```

شکل (۱-۳)

```
require(graphics)

curve(dsn(x,0,1,0),-6,6,ylim=c(0,1),col=6)

curve(dsn(x,0,1,1),-6,6,ylim=c(0,1),col=3,add=TRUE)

curve(dsn(x,0,1,5),-6,6,ylim=c(0,1),col=7,add=TRUE)

curve(dsn(x,0,1,10),-6,6,ylim=c(0,1),col=4,add=TRUE)

curve(dsn(x,0,1,100),-6,6,ylim=c(0,1),col=2,add=TRUE)
```

شکل (۲-۳)

```
curve(dsn(x,0,1,0),-6,6,ylim=c(0,1),col=6)

curve(dsn(x,0,1,-1),-6,6,ylim=c(0,1),col=3,add=TRUE)

curve(dsn(x,0,1,-5),-6,6,ylim=c(0,1),col=7,add=TRUE)

curve(dsn(x,0,1,-10),-6,6,ylim=c(0,1),col=4,add=TRUE)

curve(dsn(x,0,1,-100),-6,6,ylim=c(0,1),col=2,add=TRUE)
```

شکل (۳-۳)

```
require(graphics)

curve(dsn(x,-1,1,1),-6,6,ylim=c(0,1),col=6)

curve(dsn(x,-1,1,5),-6,6,ylim=c(0,1),col=3,add=TRUE)

curve(dsn(x,-1,1,10),-6,6,ylim=c(0,1),col=4,add=TRUE)

curve(dsn(x,-1,1,100),-6,6,ylim=c(0,1),col=2,add=TRUE)
```

شکل (۴-۳)

```
require(graphics)

curve(dsn(x,-1,1,-1),-6,6,ylim=c(0,1),col=6)

curve(dsn(x,-1,1,-5),-10,10,ylim=c(0,1),col=3,add=TRUE)

curve(dsn(x,-1,1,-10),-10,10,ylim=c(0,1),col=4,add=TRUE)

curve(dsn(x,-1,1,-100),-10,10,ylim=c(0,1),col=2,add=TRUE)

*****
```

شکل (۷-۳)

```
require(graphics)

curve(1/pnorm(0)*dnorm(x)*pnorm(2*(x)),from = -6,to = 6,col="2",ylim=c(0,1))

curve(1/pnorm(1/sqrt(5))*dnorm(x)*pnorm(1+2*(x)),from = -6,to =
6,col="3",ylim=c(0,1),add=TRUE)

curve(1/pnorm(-1/sqrt(5))*dnorm(x)*pnorm(-1+2*(x)),from = -6,to =
6,col="5",ylim=c(0,1),add=TRUE)

curve(1/pnorm(-2/sqrt(5))*dnorm(x)*pnorm(-2+2*(x)),from = -6,to =
6,col="9",ylim=c(0,1),add=TRUE)

curve(1/pnorm(2/sqrt(5))*dnorm(x)*pnorm(2+2*(x)),from = -6,to =
6,col="6",ylim=c(0,1),add=TRUE)

*****
```

شکل (۸-۳)

```
require(graphics)

curve(1/pnorm(1/sqrt(5))*dnorm(x,1,2)*pnorm(1+2*((x-1)/sqrt(2))),-
10,10,col="2",ylim=c(0,1))

curve(1/pnorm(1/sqrt(5))*dnorm(x,-1,2)*pnorm(1+2*((x+1)/sqrt(2))),-
10,10,col="3",ylim=c(0,1),add=TRUE)
```

```
curve(1/pnorm(1/sqrt(5))*dnorm(x,-2,4)*pnorm(1+2*((x+2)/2)),
10,10,col="5",ylim=c(0,1),add=TRUE)

curve(1/pnorm(1/sqrt(5))*dnorm(x,2,4)*pnorm(1+2*((x-2)/2)),
10,10,col="9",ylim=c(0,1),add=TRUE)

curve(1/pnorm(1/sqrt(5))*dnorm(x,4,4)*pnorm(1+2*((x-2)/2)),
10,10,col="4",ylim=c(0,1),add=TRUE)
```

جدول (۱-۴)

```
require(mixsmsn)

mu=c(5,5)

sigma=matrix(c(2,1,1,2),ncol=2,nrow=2)

shape=c(2,2)

nu=5

data(ais, package="sn")

attach(ais)

y=matrix(cbind(Ht,Wt),ncol=2)

smsn.mmix(y, nu=3, g=1, get.init = TRUE, criteria = TRUE,
          group = TRUE, family = "Normal")

smsn.mmix(y, nu=3, g=1, get.init = TRUE, criteria = TRUE,
          group = TRUE, family = "Skew.normal")

smsn.mmix(y, nu=3, g=1, get.init = TRUE, criteria = TRUE,
          group = TRUE, family = "Skew.t")
```

اشکال (۵-۳)، (۶-۳)، (۱-۴)، (۲-۴)

```

require(strucchange)

require(fMultivar)

# This is the square root of a positive definite matrix
matrix.sqrt <- function(A) {

  sva <- svd(A)

  if (min(sva$d)>=0)

    Asqrt <- t(sva$v %*% (t(sva$u) * sqrt(sva$d)))

  else

    stop("Matrix square root is not defined")

  return(Asqrt)

}

#function for skew t distribution with one paramter skew
dmvt=function(X,mu,Omega,landa2,nu){

mu=matrix(rep(mu,nrow(X)),byrow=T,ncol=ncol(X))

landa1=matrix(c(landa2),ncol=1)

part1=dmnorm(X,mu,Omega)

f=2*part1*pnorm(t(landa2)%*%solve(matrix.sqrt(Omega))%*%t(X-mu))

#calculate the skew t

part2=dmv(X,mu,Omega,df=nu)

nustar=nu+ncol(X)

d=mahalanobis(X,mu,Omega)

f1=2*part2*pt(t(landa2)%*%solve(matrix.sqrt(Omega))%*%t(X-
mu)*sqrt(nustar/nu+d),df=nustar)

return(list(f,f1))

}

```

```
n = 50

x = seq(-4,4, length = n)

xoy = cbind(rep(x, n), as.vector(matrix(x, n, n, byrow = TRUE)))

X = matrix(xoy, n * n, 2, byrow = FALSE)

#mu is mean parametr

mu = c(1, 1)

nu=5

#t=4

#omega is sigma matrix with dimension p.p

Omega = matrix(c(1, 0.5, 0.5, 1), 2)

#landa2 is paramter skew

landa2=c(-3,3)

#new(X,mu,Omega,landa3,landa2,nu)[[1]]

Z= matrix(dmvtn(X,mu,Omega,landa2,nu)[[1]],length(x),length(x))

#contor plot skew normal with one shape parametrs

contour(Z)

persp(x, x, Z,xlab="X",ylab="Y",zlab="Z")

Z1= matrix(dmvtn(X,mu,Omega,landa2,nu)[[2]],length(x),length(x))

#contor plot skew t with tow shape parametrs

contour(Z1)

persp(x, x, Z1,xlab="X",ylab="Y",zlab="Z")
```

اشکال (۹-۳)، (۱۰-۳)، (۳-۴)، (۴-۴)

```

require(strucchange)

require(fMultivar)

# This is the square root of a positive definite matrix
matrix.sqrt <- function(A) {
  sva <- svd(A)
  if (min(sva$d)>=0)
    Asqrt <- t(sva$v %*% (t(sva$u) * sqrt(sva$d)))
  else
    stop("Matrix square root is not defined")
  return(Asqrt)
}

#function for skew t distribution with two paramter skew
dmvt=function(X,mu,Omega,landa3,landa2,nu){
  mu=matrix(rep(mu,nrow(X)),byrow=T,ncol=ncol(X))
  landa1=matrix(c(landa2),ncol=1)
  landa0=landa3
  sigma0=landa0/(sqrt(1+t(landa2)%*%landa2))
  sigma1=matrix(as.vector(landa2)/(sqrt(1+t(landa2)%*%landa2)),ncol=1)
  part1=t(sigma1)%*%solve(matrix.sqrt(Omega))%*%t(X-mu)
  part2=sqrt(1-t(sigma1)%*%(sigma1))
  part3=rep(sigma0,nrow(X))+part1/rep(part2,nrow(X))
  part4=dmnorm(X,mu,Omega)
  f=1/pnorm(sigma0)*part4*pnorm(part3)
  #calculate the skew t
  part5=dmvt(X,mu,Omega,df=nu)

```

```
nustar=nu+ncol(X)
d=mahalanobis(X,mu,Omega)
f1=(1/pnorm(sigma0))*part5*pt(t(landa1)%*%solve(matrix.sqrt(Omega))%*%t(X-
mu)*sqrt(nustar/nu+d),df=nustar,ncp=landa0^2)
return( list(f,f1))}
```

```
n = 50

x = seq(-4,4, length = n)

xoy = cbind(rep(x, n), as.vector(matrix(x, n, n, byrow = TRUE)))

X = matrix(xoy, n * n, 2, byrow = FALSE)

#mu is mean parametr
mu = c(1, 1)

nu=5

t=4

#omega is sigma matrix with dimension p.p
Omega = matrix(c(1, 0.5, 0.5, 1), 2)

#landa3 is landa0 of frist skew parameter
landa3=-3

#landa2 is second paramter skew
landa2=c(5,3)

Z= matrix(dmvt(X,mu,Omega,landa3,landa2,nu)[[1]],length(x),length(x))

#contor plot skew normal with tow shape parametrs
contour(Z)

persp(x, x, Z,xlab="X",ylab="Y",zlab="Z")

Z1= matrix(dmvt(X,mu,Omega,landa3,landa2,nu)[[2]],length(x),length(x))
```

```
#contor plot skew t with tow shape parametrs  
contour(Z1)  
persp(x, x, Z1,xlab="X",ylab="Y",zlab="Z")
```

مراجع

۱. فیض آبادی فراهانی، آ- جعفری خالدی، م، (۱۳۸۹)، "استنباط بیزی توزیع چوله نرمال براساس پیشین تی نامرکزی برای پارامتر چولگی"، دهمین کنفرانس آمار ایران، صفحه ۳۳۷-۳۴۷، تبریز
۲. بهرامی، م، (۱۳۸۹)، "توزیع نرمال چوله و برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای آن"، دهمین کنفرانس آمار ایران، صفحه ۹۰-۱۰۲، تبریز
۳. مهدیه نجف آبادی، ف- کاظمی، ا، (۱۳۸۹)، "استنباط بیزی مدل‌های خطی با اثر آمیخته بر اساس توزیع نرمال-چوله"، دهمین کنفرانس آمار ایران، صفحه ۴۹۴-۵۰۵، تبریز
۴. خردمندی، آ- سنجر فارسی پور، ن، (۱۳۸۸)، "ویزگی های توزیع چوله t -نرمال و مدل بندی داده های آلودگی تالاب شادگان"، مجله علوم آماری، جلد سوم، شماره اول، صفحه ۴۷-۵۸
۵. کریمی، ف، (۱۳۸۷)، پایان نامه ارشد: "توزیع نرمال چوله دو تکه"، دانشکده ریاضی، دانشگاه باهنر کرمان

6. Andrews, D.F., Mallows, C.L. (1974). Scale mixtures of normal distributions. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **36**, 99-102.
7. Arellano-Valle, R.B., Gomez, H.W. and Quintana, F.A. (2004). A new class of skew-normal distribution. *Communication in Statistics – Theory and Methods*. **33**, 1465-1480.
8. Arellano-Valle, R. B. and Genton, M. G. (2005). On fundamental skew distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **96**, 93-116.
9. Arellano-Valle, R. B. and Azzalini, A. (2006) On the unification of families of skewnormal distributions, *Scandinavian Journal of Statistics*, **33**, 561-574.
10. Arnold, B. C. and Beaver, R. J. (2002). Skew multivariate models related to hidden truncation and/or selective reporting (with Discussion). *Test*, **11**, 7_54.
11. Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, **12**, 171-178.

12. Azzalini, A. (1986). Further results on a class of distributions which includes the normal ones. *Statistica*, **46**, 199–208.
13. Azzalini, A. (2005). The skew-normal distribution and related multivariate families, *Scandinavian Journal of Statistics*, **32**, 159-188.
14. Azzalini, A. and Dalla-Valle, A. (1996). The multivariate skew-normal distribution. *Biometrika* , **83**, 715–726.
15. Azzalini, A. and Capitanio, A. (1999). Statistical applications of the multivariate skew normal distribution, *Journal of the Royal Statistical Society E*, **61**, 579-602.
16. Azzalini, A. and Capitanio, A. (2003). Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t distribution. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **65**, 367-389.
17. Bahrami, W. Agahi, H. and Rangin, H. (2009). A two-parameter Balakrishnan skew-normal distribution. *Journal of Iranian statistical Research*, **6**, 231-242
18. Branco, M. and Dey, D. (2001). A general class of multivariate elliptical distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **79**, 99-113.
19. Brown, N.D. (2001). Reliability studies of the skew normal distribution. *An Abstract of the Thesis Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Arts*.
20. Cabral, C.R.B, Lachos, V.H and Prates, M.O. (2012). Multivariate mixture modeling using skew-normal independent distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **56**, 126-142
21. Capitanio, A. C., Azzalini, A. and Stanghellini, E. (2003). Graphical models for skew-normal variates. *Scandinavian Journal of Statistics*, **30**, 129–144.
22. Castro, L. M, Loschi, R. H, and Arellano-valle, R. B. (2008). Bayesian inference for the skew-normal shape parameter: An application to change point problems. Available at "google"
23. Chen, M. H. and Dey, D. K. (1998). Bayesian modeling of correlated binary responses via scale mixture of multivariate normal link functions. *Sankhya*, **60**, 322–343.

24. Choi, S.T.B. (1995). Robust Bayesian analysis using scale mixture of normal distributions. *Ph.D. dissertation, Department of Mathematics, Imperial College, London.*
25. Dempster, A. P, Laird, N. M. and Rubin, D. (1974). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society : series B*, **39**, 1-38.
26. Fang, K. T, Kotz, S. and Ng, W. (1990). *Symmetric multivariate and related distributions*, Chapman and Hall, London.
27. Genton, M. G, He, L. and Liu, X. (2001). Moments of skew-normal random vectors and their quadratic forms. *Statistics and Probability Letters*, **51**, 319-325.
28. Genton, M. G. and Loperfido, N. (2002). Generalized skew-elliptical distributions and their quadratic forms. Institute of Statistics Mimeo Series #2539, to appear in *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*.
29. Genton, M. G. (ed.) (2004). *Skew-elliptical distributions and their applications: a journey beyond normality*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
30. Gomez, H.W, Venegas, O. and Bolfarine, H. (2007). Skew symmetric Distributions Generated by the Distribution Function of the Normal Distribution. *Environmetrics*.**18**, 395-407.
31. Gupta, A. K. (2003). Multivariate skew t -distribution. *Statistics*, **37**, 359–363.
32. Gupta, A. K and Chen, T. (2004). A class of multivariate skew-normal models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **2**, 305-315.
33. Henze, N. A. (1986). A probabilistic representation of the skew-normal distribution. *Scandinavian Journal of Statistics*. **13**, 271–275.
34. Hutton, L and Ogundimu, E. (2012). A note on two-parameter generalized skew-normal distribution. *Preprint submitted to Statistics and Probability Letters*.
35. Jamalizadeh, A, Behboodian, J. and Balakrishnan, N. (2008). A two-parameter generalized skew-normal distribution. *Statistical and Probability Letters*, **78**, 1722-1728.

36. Jamalizadeh, A, Balakrishnan, N. (2008). Order statistics from trivariate normal and t_- -distributions in terms of generalized skew-normal and skew- t_- distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference (in press)*.
37. Jamalizadeh, A, Behboodian, J. and Balakrishnan, N. (2008). A two-parameter generalized skew-normal distribution. *Statistical and Probability Letters*, **78**, 1722-1728
38. Jamalizadeh, A, Arabpour, A. R. and Balakrishnan, N. (2011). A generalized skew two-piece skew normal distribution, *statistical Papers*, **52**, 431-446
39. Karlin, S, (1968). Total positively, *Stanford*. *Stanford University Press*.
40. Kim, H. J, (2005). On a class of two-piece skew-normal distributions, *Statistics*, **39**, 537-553.
41. Lachos, V. H, Labra, F. V. and Ghosh, P. (2011). Multivariate skew normal / independent distributions: properties and inference. Available at : [http:// google](http://google).
42. Lange, K. and Sinsheimer, (1993). Normal/independent distributions and their applications in robust regression . *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **2**, 175-198.
43. Lange, K. L, Little, J. A. and Taylor, M. G. J. (1989). Robust statistical modeling using the t distribution . *Journal of the American Statistical Association*, **84**, 881-896.
44. Lin, J. G, Xie, F. C and Wei, B. C. (2009). Statistical diagnostics for skew t -normal Nonlinear Models. *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, **38**, 2096-2110
45. Little, R. J. A. (1988). Robust Estimation of the mean and covariance matrix from data with missing values . *Applied Statistics*, **37**, 23-38.
46. Loperfido, N.M.R. (2001). Quadratic forms of skew-normal random vectors. *Statistics and Probability Letters*, **54**, 381–387.
47. Ma, Y. and Genton, M. G. (2004). A flexible class of skew-symmetric distributions. *Scandinavian Journal of Statistics*, **31**, 459–468.
48. Pourahmadi, M. (2007). Construction of skew-normal random variables: Are they linear combination of normal and half-normal?, *Journal of Statistical Theory Application*, **3**, 314-328.

-
49. Sahu, S. K, Dey, D. K. and Branco, M. D. (2003). A new class of multivariate skew distributions with applications to Bayesian regression models. *Canadian Journal of Statistics*, **31**, 129–150.
 50. Sharafi, M. and Behboodian, J. (2008). The Balakrishnan skew-normal density. *Statistical Papers*, **49**, 769-778.
 51. Tan, F. and Peng, H. (2006). The slash and the skew-slash Student t distributions. *Submitted*
 52. Vernic, R. (2005). On the multivariate skew-normal distribution and its scale mixtures, *Ovidius University Constanta Romania*, **13**, 83-96.
 53. Yadegari, I, Gerami, A. and Khaledi, M. J. (2008). A generalization of the Balakrishnan skew-normal distribution. *Statistical and Probability Letters*, **78**, 1156-1167.
 54. Wang, J, Boyer, J. and Genton, M. G. (2004b). A note on an equivalence between chi-square and generalized skew-normal distributions, *Statistical and Probability Letters*, **66**, 395–398.
 55. Wang, J, Boyer, J. and Genton, M. G, (2004). A skew – symmetric representation of multivariate distributions, *Statistica Sinica*, **14**, 1259-1270.
 56. West, M. (1987) . On scale mixtures of normal distributions, *Biometrika*, **74**, 646-648.
 57. Zadkarami, M. R and Rowhani, M. (2010). Application of Skew-normal in Classification of Satellite Image, *Journal of Data Science*, **8**, 597-606
 58. Sahu, S. K, Dey, D. K and Branco, M. D. (2003). A new class of multivariate skew distributions with applications to Bayesian regression models. *Canadian Journal of Statistics*. **31**, 129–150.

Abstract:

There are many practical situations for which a symmetric model does not fit well to the given data set, and the plot of data is skewed. Thus a skewed model can be fitted better. Further if there exist extreme values and outliers in the data heavier tail alternatives to the skewed normal models, such as Student's-t skewed distribution or more generally scale mixture of skewed normal distributions perform better for model fitting purpose.

In this thesis multivariate skewed normal distributions with one and two skewness parameters are studied in details and as an extension to the letter, a new multivariate scale mixture of skewed normal distributions model is defined, and its statistical properties are obtained.

Key words:

Scale mixture of normal distributions, skewness parameter, Skewed normal distribution, Scale mixture of skewed normal distributions, EM Algorithm



Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematic

M.S Thesis

Topics in scale mixture of skew normal distributions

By:

Vahedeh sadat Moosavi

Supervisor:

Dr. Mohammad Arashi

Date:

september 2012