دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان

kـاحاطه‌گری رومی در گراف‌ها

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری‌راد

دانشجو

پریناز فرهادی

تیر ۱۳۹۱

خدایا

با نام و یادت قدم در این ره گذاشته

و هر دم از تو مدد خواستم، همراهی‌ام کردی

تا بدین‌جا که فصلی دیگر از زندگیم رقم خورد.

به مدد تو و کسانی که در راهم قرادادی تا آیینۀ تو باشند،

آخرین صفحات این دوره نیز رقم خورد.

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم، آنانکه سپید مویشان نشان از بالندگی من است.

به پدر بزرگوارم که به من آموخت تا انتخاب کنم که در زمره‌ی کدامین باشم، همان که هرچه هستم و هر چه دارم از اوست.

و به مادر مهربان و دلسوزم که دریایی از محبت، ایثار و صبر است و دعای خالصانه‌اش بدرقه‌ی لحظه لحظه راهم بوده و هست.

به تنها خواهر عزیزم که وجودش شادی بخش و صفایش مایه آرامش من است.

و به همسر عزیزم که سایه مهربانیش سایه‌سار زندگیم می‌باشد، او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

تقدیر و تشکر:

از استاد راهنمای عزیز و بزرگوارم، جناب آقای دکتر نادر جعفری‌راد که در طول انجام پایان نامه همواره مرا هدایت نمودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر علیشاهی و جناب آقای دکتر ناظمی که در طول تحصیل از محضرشان کسب فیض نمودم، قدردانی می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر صالحیان و جناب آقای دکتر علیشاهی که داوری این پایان نامه را قبول کردند کمال تشکر را دارم و همچنین از نماینده تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر ناظمی صمیمانه تشکر می‌کنم.

بر خود لازم می‌دانم از کلیه‌ی عزیزانی که بنده‌ی حقیر را در انجام پایان‌نامه و در طول تحصیل مورد حمایت قرار داده‌اند، تشکر و قدردانی کنم.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

چکیده

فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی با رأس‌های V و یال‌های E باشد. یک تابع احاطه‌گری رومی روی گراف G تابعی به صورت $f:V(G)\longrightarrow\{0,1,2\}$ است به طوری که برای هر رأس u با $f(u)=0$، حداقل یک رأس مانند $v\in N(u)$ وجود داشته باشد که $f(v)=2$. وزن یک تابع احاطه‌گر رومی f برابر با $f(V)=\sum_{u\in V}f(u)$ است. عدد احاطه‌گر رومی گراف G که با $\gamma_R(G)$ نشان داده می‌شود عبارتست از مینیمم وزن در میان وزن‌های توابع رومی ممکن روی گراف G .

فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت و G یک گراف ساده باشد. تابع kـاحاطه‌گر رومی روی گراف $G=(V,E)$ تابعی به صورت $f:V(G)\longrightarrow\{0,1,2\}$ است به طوری که برای هر رأس u با $f(u)=0$، حداقل k رأس مانند $v_1,\ldots,v_k$ در $N(u)$ وجود داشته باشند که برای هر $i=1,2,\ldots,k$ داشته باشیم $f(v_i)=2$. وزن یک تابع kـاحاطه‌گر رومی برابر با $f(V)=\sum_{u\in V}f(u)$ است. عدد kـاحاطه‌گر رومی روی گراف G که با $\gamma_{kR}(G)$ نشان داده می‌شود عبارتست از مینیمم وزن در میان وزن‌های توابع kـاحاطه‌گر رومی ممکن روی گراف G.

در فصل اوّل این پایان نامه، تاریخچه و مفاهیم مقدماتی نظریه گراف را که در فصل‌های بعدی به آنها نیازمندیم یادآوری می‌کنیم. در فصل دوم مفاهیم تابع احاطه‌گر رومی و ویژگی‌های آن را بیان و به صورت کامل بررسی می‌کنیم. و در فصل سوم تابع kـاحاطه رومی را بیان می‌کنیم و به صورت کامل مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: نظریه گراف، احاطه‌گری، احاطه‌گر رومی، kـاحاطه‌گر رومی.

فصل اول

تاریخچه و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مفاهیم

گراف: گراف G یک سه‌تایی $(V(G), E(G), \Psi_G)$ متشکل از مجموعه ناتهی $V(G)$ موسوم به مجموعه رأس‌ها، مجموعه‌ی $E(G)$ موسوم به مجموعه یال‌ها و تابع وقوع Ψ_G است که با هر یال G یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از رأس‌های G را همراه می‌کند.

اگر e یک یال و u و v رأس‌هایی باشند به قسمی که $\Psi_G(e) = uv$، آن گاه می‌گویند e، u را به v وصل می‌کند و رأس‌های u و v را دو انتهای e می‌نامند. از این پس در سراسر این پایان‌نامه، گراف G را به صورت یک دوتایی مرتب $(V(G), E(G))$ معرفی می‌کنیم و تابع Ψ_G را به طور ضمنی می‌پذیریم.

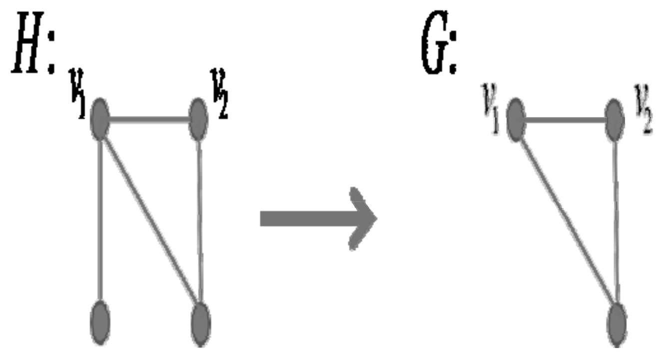
زیرگراف: یک زیرگراف از گراف G، گرافی مانند H است که:

$$E(H) \subseteq E(G)$$

و

$$V(H) \subseteq V(G).$$

زیرگراف القایی: زیرگراف G از گراف H را یک زیرگراف القایی می‌نامیم هرگاه برای هر دو رأس v_2 و v_1 از G، اگر $v_1v_2 \in E(H)$ آن گاه $v_1v_2 \in E(G)$:



شکل ۱.۱ G زیرگراف القایی H

گشت: یک گشت به طول k در گراف G یک دنباله‌ی متناوب $v_۰, e_۱, v_۱, e_۲, \ldots, e_k, v_k$ از رأس‌ها و یال‌ها است به طوری که به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, k$، $e_i = v_{i-۱}v_i$ یک یال باشد.

گذر: گشتی است که هیچ یال تکراری نداشته باشد.

دور: یک دور، گذر بسته‌ای به طول حداقل یک است که در آن رأس ابتدایی و رأس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ رأس تکراری نداریم.

مسیر: یک مسیر در گراف G دنباله‌ای متوالی از رأس‌ها و یال‌هاست که از رأسی مانند a شروع و به رأسی مانند b ختم می‌شود.

طول مسیر: تعداد یال‌های به کار رفته در مسیر را طول مسیر گویند.

کوتاهترین مسیر: مسیری است که طول آن کمترین مقدار ممکن باشد.

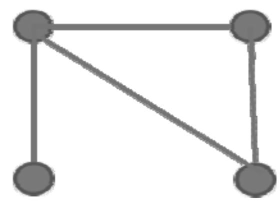
فاصله دو رأس: فاصله بین دو رأس uو v در گراف G که با $d_G(u,v)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از طول کوتاهترین مسیر بین u و v در گراف G.

گراف همبند: گرافی است که بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد.

گراف غیر بدیهی: گراف همبندی را که حداقل دو رأس داشته باشد گراف غیربدیهی گویند.

درجه رأس: تعداد یال‌هایی که از یک رأس v خارج می‌شود را درجه‌ی رأس v می‌نامند و با $deg(v)$ نمایش می‌دهند. بزرگترین درجه در میان رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچکترین درجه را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهند.

۱.۱.۱ مثال. در گراف G داریم:



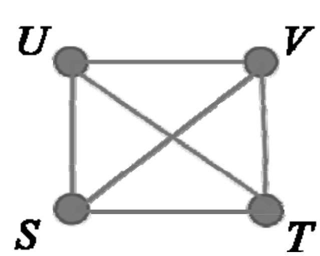
$$\Delta(G) = ۳.$$
$$\delta(G) = ۱.$$

گراف ساده: یک گراف ساده است اگر هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن بیش از یک یال موجود نباشد.

درخت: گراف همبندی که فاقد دور باشد درخت نام دارد.

خروج از مرکز رأس: دورترین فاصله از یک رأس را خروج از مرکز آن رأس می‌گویند. به کوچکترین خروج از مرکز در میان رأس‌های گراف شعاع G می‌گویند و با $rad(G)$ نشان می‌دهند. همچنین به بزرگترین خروج از مرکز در میان رأس‌های گراف G قطر G می‌گویند و با $diam(G)$ نشان می‌دهند.

۲.۱.۱ مثال. در گراف زیر داریم:



$$\left.\begin{array}{l} ecc(u) = ۱ \\ ecc(v) = ۱ \\ ecc(s) = ۱ \\ ecc(t) = ۱ \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} diam(G) = ۱ \\ rad(G) = ۱. \end{array}$$

(فاصله‌ی تمام رئوس از یکدیگر برابر ۱ است.)

همسایگی باز: مجموعه رأس‌هایی از G که با رأس v از گراف G مجاور باشند را همسایگی باز رأس v نامند و آن را با $N(v)$ نمایش می‌دهیم.

همسایگی باز زیرمجموعه S از رئوس گراف G را به صورت $\cup_{v\in S}N(v)$ تعریف می‌کنیم و آن را با $N(S)$ نمایش می‌دهیم.

همسایگی بسته: $N(v)\cup\{v\}$ را همسایگی بسته رأس v نامیده و آن را با $N[v]$ نمایش می‌دهیم.

همچنین همسایگی بسته زیرمجموعه S از رئوس گراف G را به صورت $\cup_{v\in S}N[v]$ تعریف می‌کنیم و آن را با $N[S]$ نمایش می‌دهیم.

همسایگی خصوصی: برای رأس v از گراف G و مجموعه‌ی S، همسایگی خصوصی v در S به صورت زیر تعریف می‌شود:

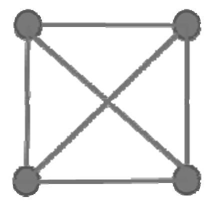
$$v \in S \subseteq V \qquad Pn(v,S) = N[v] - N[S - \{v\}].$$

تطابق: یک تطابق در گراف G زیرمجموعه‌ای از یال‌هاست که هیچ دو یالی رأس مشترک نداشته باشند.

اگر M یک تطابق در G باشد و x رأسی روی یکی از یال‌های M باشد آن گاه گوئیم M ، x را اشباع می‌کند.

تطابق کامل: اگر هر رأس از گراف G توسط تطابق M اشباع شود آن گاه M را یک تطابق کامل می‌نامیم.

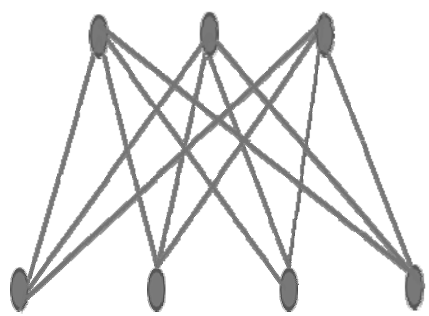
گراف کامل: گرافی که در آن هر دو رأس متمایز توسط یک یال به یکدیگر متصل شده باشند گراف کامل نامیده می‌شود. یک گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم.



شکل ۲.۱ گراف کامل $K_۴$

۳.۱.۱ تعریف. اگر G یک گراف و k یک عدد طبیعی باشد، منظور از گراف kG گرافی است حاصل از k نسخه‌ی مستقل از G.

گراف دو بخشی: گرافی است که مجموعه رأس‌های آن به دو زیرمجموعه‌ی X و Y چنان افراز شود که یک سر تمام یال‌های گراف در X و سر دیگر آنها در Y باشد. یک گراف دو بخشی با بخش‌های X و Y که در آن هر رأس X، به هر رأس Y وصل شده باشد گراف دو بخشی کامل نامیده می‌شود. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$ آن گاه گراف دو بخشی کامل با بخش‌های X و Y را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.



شکل ۳.۱ گراف دو بخشی کامل $K_{۳,۴}$

گراف kـبخشی: گرافی است که می‌توان مجموعه رأس‌های آن را به k زیرمجموعه طوری افراز کرد که دو سر هیچ یالی در یک زیرمجموعه واقع نباشد. گراف kـبخشی کامل، یک گراف kـبخشی است که در آن هر رأس یک بخش به تمام رأس‌هایی که در بخش‌های دیگر قرار دارند، وصل شده است.

زیرتقسیم: زیرتقسیم یک یال uv از یک گراف G عبارتست از عمل حذف uv و افزودن یک مسیر u، w و v از میان یک رأس جدید w.

شکل ۴.۱ زیرتقسیم یال uv

یک زیر تقسیم گراف G گرافی است که می‌توان از گراف G با دنباله‌ای از زیرتقسیم‌های یالی به دست آورد.

دو بسته‌بندی: مجموعه‌ای از رأس ها مانند S را یک دو بسته‌بندی گویند هرگاه:

$$\forall\, u, v \in S \qquad N[u] \cap N[v] = \phi.$$

شکل ۵.۱ دو بسته‌بندی

قرارداد: عدد دو بسته‌بندی را در گراف G با $\rho_2(G)$ نشان می‌دهیم که ماکزیمم اندازه‌ی یک دو بسته‌بندی در میان تمام دو بسته‌بندی‌های ممکن درگراف G است.

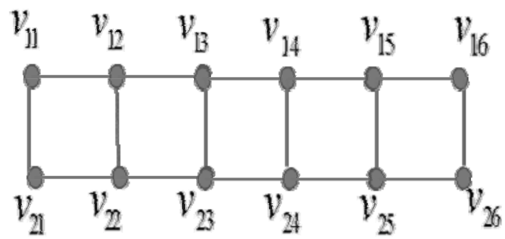
پوشش رأسی: مجموعه‌ای از رأس‌های گراف را یک پوشش رأسی گویند هرگاه هر یال ازگراف دارای حداقل یک سر در آن مجموعه باشد.

ضرب دکارتی در گراف‌ها: برای دوگراف دلخواه G و H حاصل ضرب دکارتی $G\Box H$ گرافی است با مجموعه رأس‌های $\{(u, v)|u \in V(G), v \in V(H)\}$ که در آن دو رأس (u_1, v_1) و (u_2, v_2) مجاورند اگر و فقط اگر یکی از دو حالت زیر برقرار باشد:

(i) $u_1 = u_2$ و v_1 با v_2 مجاور باشد.

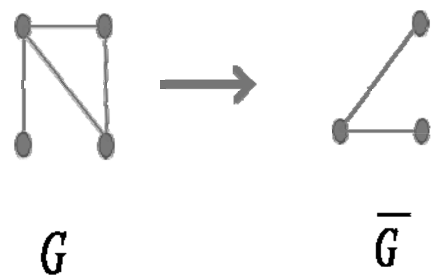
(ii) $v_1 = v_2$ و u_1 با u_2 مجاور باشد.

ضرب دکارتی $P_2 \times P_n$ را با $G_{2,n}$ نشان می‌دهیم.



شکل ۶.۱ گراف $G_{۲,۶}$

مکمل گراف: فرض کنید G گرافی n رأسی باشد، مکمل گراف G را با $\bar{G}$ نشان داده و به این صورت تعریف می‌کنیم: $V(\bar{G}) = V(G)$ و دو رأس مانند u و v در $\bar{G}$ مجاور هستند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند.

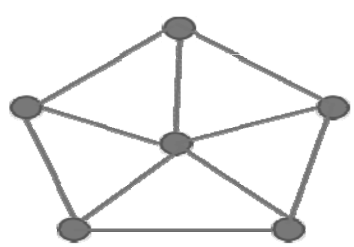


شکل ۷.۱ مکمل گراف

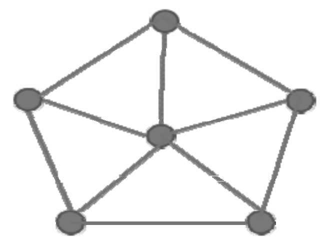
مجموعه مستقل: مجموعه‌ای از رأس‌ها که هیچ دو تای آنها مجاور نباشند را مجموعه مستقل نامیم.

مجموعه مستقل ماکزیمال: مجموعه مستقل S را ماکزیمال می‌نامیم هرگاه نتوان هیچ رأس جدیدی مانند v را به S اضافه کرد به طوری که $S \cup \{v\}$ نیز مستقل باشد.

اندازه‌ی بزرگترین مجموعه مستقل ماکزیمال درگراف G را با $\beta(G)$ نمایش می‌دهیم. در شکل زیر داریم $\beta(G) = ۲$.



اندازه‌ی کوچکترین مجموعه مستقل ماکزیمال از رئوس گراف G را با $i(G)$ نمایش می‌دهیم. در شکل زیر داریم $i(G) = ۱$.



مجموعه‌ی غیر زاید: زیرمجموعه‌ی S از رئوس گراف G را یک مجموعه غیر زائد گوییم هرگاه برای هر $x \in S$، رأسی مانند $y \in N[x]$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$|N(y) \cap (S - \{x\})| = 0\ , \qquad y \notin S - \{x\}.$$

اندازه‌ی بزرگترین مجموعه‌ی غیر زائد ماکزیمال در گراف G را با $IR(G)$ نمایش می‌دهیم. اندازه‌ی کوچکترین مجموعه غیر زائد ماکزیمال از رئوس گراف G را با $ir(G)$ نمایش می‌دهیم.

۲.۱ احاطه‌گری

۱.۲.۱ تاریخچه. در سال‌های اخیر مفهوم احاطه‌گری در گراف‌ها به دلیل کاربردهای زیاد آن در زمینه‌های مختلف همچون علوم کامپیوتر و شبکه‌های الکترونیکی مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته و رشد چشمگیری داشته است. این مفهوم برای نخستین بار در سال ۱۸۶۲ توسط دوجکنیش[1] روی صفحه‌ی شطرنج مورد استفاده قرار گرفت. امّا بعدها به عنوان یک بحث نظری در نظریه گراف‌ها بررسی و مطالعه گردید و تاکنون مقالات متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است.

در سال ۱۸۶۲ بال[2] [۱] مسأله‌ی کمترین تعداد مهره‌های وزیر مورد نیاز جهت قرارگرفتن روی صفحه‌ی شطرنج به قسمی که هر خانه‌ای مورد حمله‌ی یک وزیر قرارگرفته و هیچ وزیری مورد حمله‌ی وزیر دیگری نباشد را مطرح کرد. این مسأله به مسأله‌ی ۵ـوزیر مشهور شد.

از جمله کاربردهای دیگر آن می‌توان در مخابرات برای نصب دکل‌های آنتن در مناطقی از شهر یا انتخاب بهترین

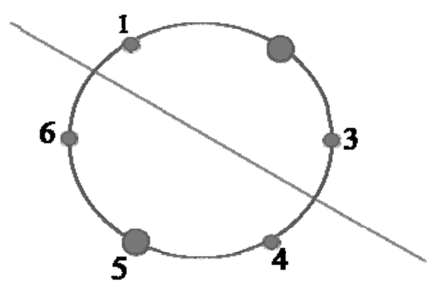
1) De Jacnish 2) W. W Rouse Ball

مکان‌ها برای احداث بیمارستان یا مراکز آتش‌نشانی و ...اشاره نمود. به عنوان مثال، فرض کنید قرار است در مناطقی از شهر دکل‌های مخابرات نصب شود به طوری که به تمامی نقاط شهر آنتن دهی مناسب انجام شده و همچنین از نظر اقتصادی نیز مقرون به صرفه باشد. یعنی با انتخاب کمترین نقاط برای نصب دکل به هدف مورد نظر دست یابیم. برای این منظور مناطق مختلف شهر را به عنوان رئوس گراف در نظر می‌گیریم و با توجه به برد آنتن دهی، در صورت نصب دکل در هر منطقه، آن مناطقی که آنتن دهی می‌شوند را با خطوطی به آن متصل می‌کنیم و به این ترتیب یال‌های گراف مورد نظر را رسم کرده و گرافی طراحی می‌کنیم.

مجموعه احاطه‌گر: مجموعه‌ی S از رأس‌های G را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر نامیم هرگاه $N[S] = V(G)$. عدد احاطه‌گری گراف G که با $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود مینیمم اندازه‌ی یک مجموعه‌ی احاطه‌گر است.

مجموعه‌ی احاطه‌گر مستقل: مجموعه‌ی احاطه‌گر S را مجموعه‌ی احاطه‌گر مستقل گوییم هرگاه هیچ دو رأس از S مجاور نباشند. عدد احاطه‌گری مستقل G کوچکترین اندازه‌ی مجموعه‌ی احاطه‌گر مستقل است و با $i(G)$ نشان داده می‌شود.

مثال:



$$S = \{۲, ۵\}$$

$$i(G) = ۲$$

$$\gamma(G) = ۲.$$

همان طور که در تعریف گفتیم هر مجموعه‌ی احاطه‌گر مستقل یک مجموعه‌ی احاطه‌گر است.

نکته: در هر گراف مانند G داریم: $\gamma(G) \le i(G)$.

۲.۲.۱ گزاره([9]). در گراف G با n رأس داریم $\gamma(G) \leq \frac{n}{۲}$.

۳.۲.۱ گزاره([2]). هر مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال یک مجموعه‌ی غیر زائد ماکسیمال است.

۴.۲.۱ گزاره([2]) . هر مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است.

فصل دوم

احاطه‌گری رومی در گراف‌ها

۱.۲ مقدمه

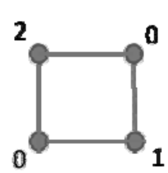
تابع احاطه‌گر رومی روی گراف $G = (V, E)$ تابعی به صورت $f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ است به طوری که برای هر رأس u با $f(u) = 0$، حداقل یک رأس مانند $v \in N(u)$ وجود داشته باشد که $f(v) = 2$.

وزن یک تابع احاطه‌گر رومی عبارتست از:

$$f(V) = \sum_{u \in V} f(u).$$

عدد احاطه‌گر رومی گراف G که با $\gamma_R(G)$ نشان داده می‌شود عبارتست از مینیمم وزن در میان وزن‌های توابع رومی ممکن روی گراف G.

۱.۱.۲ مثال. درگراف زیر تابع مشخص شده با مقادیر آن روی رأس‌های گراف، یک تابع احاطه‌گری رومی است و به راحتی می‌توان دید که وزن آن مینیمم است. لذا $\gamma_R(G) = 3$.



ایده‌ی اولیه‌ی احاطه‌گری رومی به قرن چهارم قبل از میلاد و در زمان پادشاهی امپراطور کنستانتین در روم باستان بر می‌گردد که در خصوص آرایش نیروهای نظامی در حیطه‌ی فرمانروایی خود مدل‌هایی ارائه داده بود. در این خصوص ناحیه‌هایی که رنگ ۲ می‌گیرند ناحیه‌هایی هستند که در آنها دو نیروی نظامی قرار دارد. به همین ترتیب ناحیه‌های با رنگ ۱ یا صفر ناحیه‌هایی هستند که به ترتیب با ۱ یا صفر نیروی نظامی واقع شده است. به ناحیه‌های با صفر نیروی نظامی، ناحیه ناامن می‌گویند. اگر ناحیه‌ای ناامن باشد لازم است در مواقع خطر نیرویی از یکی از ناحیه‌های امن به آنجا فرستاده شود، به طوری که ناحیه‌ی قبلی نیروی فوق هنوز امن باقی بماند. این بدان معناست که هر ناحیه با رنگ صفر مجاور با ناحیه‌ای با رنگ ۲ باشد.

۲.۲ ویژگی‌های تابع احاطه‌گر رومی

برای گراف $G = (V, E)$ و تابع $f : V(G) \longrightarrow \{۰, ۱, ۲\}$ فرض کنید به ازای $i = ۰, ۱, ۲$، $V_i = \{v \in V | f(v) = i\}$ و $|V_i| = n_i$. دراین صورت می‌توان دید که تناظری یک به یک بین توابع $f : V(G) \longrightarrow \{۰, ۱, ۲\}$ و افراز مرتب، $(V_۰, V_۱, V_۲)$ از V وجود دارد.

اگر $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع احاطه‌گر رومی باشد آن گاه به وضوح داریم:

$$f(V) = \sum_{v \in V} f(V) = ۲n_۲ + n_۱.$$

همچنین منظور از یک γ_Rـتابع، تابعی احاطه‌گر رومی با مینیمم وزن است.

۱.۲.۲ گزاره([4]). برای هر گراف G داریم:

$$\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq ۲\gamma(G).$$

اثبات. فرض کنید $f=(V_0,V_1,V_2)$ یک تابع-γ_R برای G باشد در این صورت به وضوح $V_1\cup V_2$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G است. لذا:

$$\gamma(G)\le|V_1\cup V_2|\le|V_1|+|V_2|\le|V_1|+2|V_2|=\gamma_R(G)$$
$$\Longrightarrow\gamma(G)\le\gamma_R(G) \qquad (1)$$

از طرفی دیگر فرض کنید S یک γـمجموعه برای G باشد. در این صورت (ϕ,ϕ,S) یک تابع احاطه‌گر رومی برای G است. لذا:

$$\gamma_R(G)\le 2|S|=2\gamma(G) \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$\gamma(G)\le\gamma_R(G)\le 2\gamma(G).$$

□

۲.۲.۲ گزاره([4]). برای هر گراف G از مرتبه‌ی n، $\gamma(G)=\gamma_R(G)$ اگر و فقط اگر $G=\bar{K}_n$.

اثبات. $(\Longleftarrow)$ اگر $G=\bar{K}_n$ باشد آن گاه $\gamma(G)=\gamma_R(G)$.

فرض می‌کنیم $f=(V_0,V_1,V_2)$ یک تابع احاطه‌گر رومی روی $\bar{K}_n$ باشد. اگر $V_0\neq\phi$ حتماً گراف یال خواهد داشت، لذا نتیجه می‌گیریم $V_0=\phi$. در نتیجه:

$$\text{وزن } f=W(f)=|V_1|+|V_2|.$$

چون برای به دست آوردن عدد احاطه‌گر رومی گراف $\bar{K}_n$ تابع f با مینیمم وزن را جستجو می‌کنیم لذا تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=1$ را در نظر می‌گیریم که یک تابع احاطه‌گر رومی است و در میان توابع احاطه‌گر رومی ممکن، دارای مینیمم وزن است. در نتیجه، $\gamma_R(\bar{K}_n)=n$. فرض می‌کنیم S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم برای $\bar{K}_n$

باشد، اگر $S \subset V(G)$ باشد آن گاه گراف دارای یال خواهد بود که تناقض است. لذا $S = V(G)$. درنتیجه $\gamma(\bar{K}_n) = n$.

($\Longleftarrow$) فرض می‌کنیم $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک تابع‌ـγ_R برای G است و $\gamma(G) = \gamma_R(G)$. به وضوح $V_1 \cup V_2$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G است. لذا:

$$\gamma(G) \leq |V_1 \cup V_2| \leq |V_1| + |V_2| \leq |V_1| + 2|V_2| = \gamma_R(G).$$

امّا چون $\gamma(G) = \gamma_R(G)$، لذا تمام قسمت‌های رابطه فوق به تساوی تبدیل می‌شود. در نتیحه:

$$|V_1| + |V_2| = |V_1| + 2|V_2|.$$

لذا $|V_2| = 0$. در نتیجه $\gamma_R(G) = |V_1|$ و می‌توان دید که $|V_1| = |V| = n$. لذا $\gamma_R(G) = n$. حال $\gamma(G) = \gamma_R(G) = n$ و به وضوح G فاقد یال است. بنابراین $G = \overline{K}_n$. □

۳.۲.۲ گزاره([4]). فرض کنید $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک تابع‌ـγ_R باشد. در این صورت:

الف) $G[V_1]$ زیرگراف القا شده V_1، دارای ماکزیمم درجه‌ی حداکثر ۱ است.

ب) درگراف G هیچ یالی بین V_1 و V_2 وجود ندارد.

ج) هر رأس V_0 حداکثر با دو رأس V_1 مجاور است.

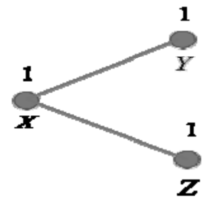
د) V_2 یک γـمجموعه برای $G[V_0 \cup V_2]$ است.

هـ) فرض می‌کنیم $H = G[V_0 \cup V_2]$ باشد. در این صورت به ازای هر $v \in V_2$ حداقل دو $H - Pn$ (همسایگی خصوصی) موجود است.

و) اگر v یک رأس تنها در $G[V_2]$ باشد و دقیقاً یک همسایگی خارجی $H - pn$ مانند w که $w \in V_0$ داشته باشد آن گاه:

$$N(w) \cap V_1 = \phi.$$

اثبات. الف. (برهان خلف) فرض کنید x رأسی باشد که $deg(x) \geq ۲$. لذا x حداقل دو همسایه y و z دارد.



حال تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

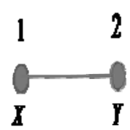
$$g : V(G) \longrightarrow \{۰, ۱, ۲\}$$

$$g(y) = g(z) = ۰ \quad \text{و} \quad g(u) = f(u) \quad u \notin \{x, y, z\}$$

$$\Longrightarrow w(g) = w(f) - ۱ = \gamma_R(G) - ۱$$

در این صورت g یک تابع احاطه‌گر رومی است که وزن آن کمتر از $\gamma_R(G)$ است. در اینجا به تناقض می‌رسیم. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

ب) (برهان خلف) فرض کنید یالی بین $V_۱$ و $V_۲$ داشته باشیم یعنی رأس‌های $x \in V_۱$ و $y \in V_۲$ مجاور باشند.



تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

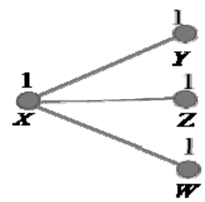
$$g : V(G) \longrightarrow \{۰, ۱, ۲\}$$

$$g(x) = ۰$$

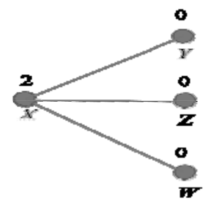
$$g(\text{بقیه}) = f(\text{بقیه})$$

در این صورت g یک تابع احاطه‌گر رومی است که وزن آن کمتر از $\gamma_R(G)$ است که تناقض می‌باشد.

ج) (برهان خلف) فرض کنید $x \in V_۰$ با حداقل سه رأس $y, z, w \in V_۱$ مجاور باشند.

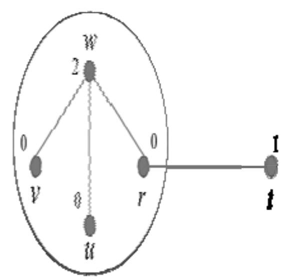


تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



در این صورت g یک تابع احاطه‌گر رومی است که وزن آن کمتر از $\gamma_R(G)$ است که تناقض است.

د) فرض می‌کنیم x رأسی در $V_۰ \cup V_۲$ باشد که در $V_۲$ نیست لذا x در $V_۰$ قرار دارد. بنابه تعریف تابع احاطه‌گر رومی x با رأسی از $V_۲$ مجاور است.

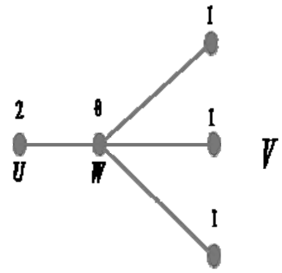


هـ) (برهان خلف) فرض می‌کنیم که رأس $v \in V_۲$ دارای یک $H - pn$ (همسایگی خصوصی)، u باشد در این صورت $u = v$. حال تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq u \\ ۱ & x = u. \end{cases}$$

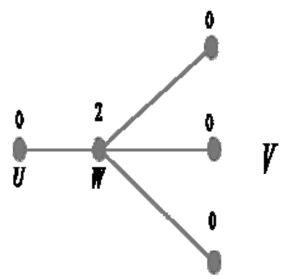
در این صورت g یک تابع احاطه‌گر رومی است که وزن آن برابر است با $\gamma_R(G) - ۱$ است که تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

و) (برهان خلف) فرض می‌کنیم $v \in N(w) \cap V_۱$.



حال تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x)=\begin{cases} ۲ & x=w \\ ۰ & x\in N(w) \\ f(x) & x\notin N[w]. \end{cases}$$



در این صورت g یک تابع احاطه‌گر رومی با وزن کمتر از $\gamma_R(G)$ است که تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است. □

۴.۲.۲ گزاره([4]). فرض می‌کنیم $f=(V_0,V_1,V_2)$ یک تابع-γ_R درگراف فاقد رأس تنهای G باشد که در آن n_1 مینیمم است. در این صورت:

الف) V_1 مستقل و $V_0\cup V_2$ یک پوشش رأسی است.

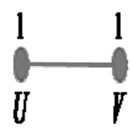
ب) $V_1 \succ V_0$. (V_0، V_1 را احاطه می‌کند)

ج) هر رأس V_0 حداکثر با یک رأس از V_1 مجاور است. به عبارت دیگر V_1 یک دو بسته‌بندی است.

د) فرض می‌کنیم $v \in G[V_2]$ دقیقاً دو $H - pn$(همسایگی خارجی) خارجی مانند w_1 و w_2 در V_0 داشته باشد. در این صورت رأس‌هایی مانند $y_1, y_2 \in V_1$ وجود ندارند که (y_1, w_1, V, w_2, y_2) دنباله‌ای از رئوس در یک مسیر P_5 باشند.

هـ) $n_0 \geq \frac{3n}{7}$ و این نامساوی برای درخت‌ها قابل دسترس است.

اثبات. الف) (برهان خلف) فرض می‌کنیم V_1 مستقل نباشد. حداقل دو رأس مجاور مانند $u, v \in V_1$ وجود دارند.



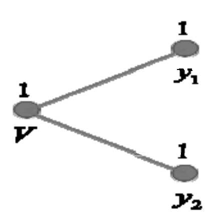
تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & x = u \\ 0 & x = v \\ f(x) & x \notin \{u, v\}. \end{cases}$$

در این صورت g یک تابع احاطه‌گر رومی با وزن مینیمم است، یعنی یک تابع-γ_R است. امّا تعداد یک‌های تابع g کمتر است لذا به تناقض می‌رسیم.

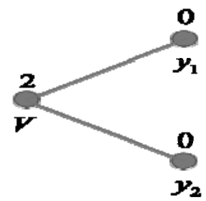
ب) فرض می‌کنیم $u \in V_1$ رأسی دلخواه باشد. بنابه قسمت اوّل قضیه، u با رأسی از V_1 مجاور نیست. بنابه قضیه‌ی ۳.۲.۲ قسمت (ب)، u با رأسی از V_2 مجاور نیست. چون گراف فاقد رأس تنهاست لذا u با رأسی از V_0 مجاور است یعنی V_0، V_1 را احاطه می‌کند. ($V_0 \succ V_1$).

ج) (برهان خلف) فرض کنید v رأسی از V_0 باشد که با حداقل دو رأس y_1 و y_2 از V_1 مجاور است.



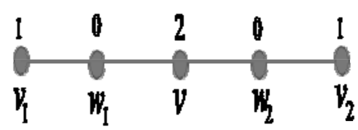
تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} ۲ & x = v \\ ۰ & x \in \{y_۱, y_۲\} \\ f(x) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

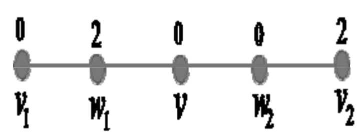


در این صورت تابع g یک تابع احاطه‌گر رومی است که وزن آن با وزن تابع f برابر است امّا تعداد یک‌های آن کمتر است در نتیجه به تناقض می‌رسیم. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

د) (برهان خلف) تابع f را به صورت زیر داریم، در یک مسیر $P_۵$، $(v_۱, w_۱, v, w_۲, v_۲)$



حال تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



در این صورت تابع g یک تابع احاطه‌گر رومی است. وزن تابع g با وزن تابع f برابر است. امّا تعداد یک‌های تابع g از تعداد یک‌های تابع f کمتر است که تناقض است. لذا فرض خلف باطل بوده و حکم برقرار است.

هـ) فرض کنید $C = \{v \in V_۰ : |N(v) \cap V_۲| \geq ۲\}$ و $c = |C|$. برای $i = ۱, ۲, \ldots, \Delta(G)$، فرض می‌کنیم a_i تعداد رأس‌های $V_۲$ باشد که دقیقاً i مورد $H - pn$ در $V_۰$ دارند. با توجه به قضیه ۳.۲.۲ قسمت‌های

(هـ) و (و) و همین قضیه قسمت‌های (ج) و (د) داریم:

$$n_1 \leq (a_2 + 3a_3 + \sum_{j=4}^{\Delta} j a_j) + c \qquad (1)$$

$$n_0 = (a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \sum_{j=4}^{\Delta} j a_j) + c \qquad (2)$$

$$n_2 = a_1 + a_2 + a_3 + \sum_{j=4}^{\Delta} a_j \qquad (3)$$

داریم:

$$n = n_0 + n_1 + n_2.$$

آن گاه:

با توجه به (۲) و(۳)

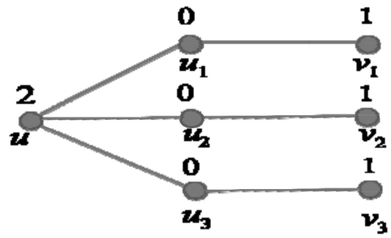
$$\begin{aligned} n &\leq n_0 + (a_2 + 3a_3 + \sum_{j=4}^{\Delta} j a_j) + c + (a_1 + a_2 + a_3 + \sum_{j=4}^{\Delta} a_j) \\ &= (n_0 + a_1 + 2a_2 + 4a_3 + \sum_{j=4}^{\Delta} (j+1) a_j) + c \\ &\leq (n_0 + a_1 + 2a_2 + \sum_{j=4}^{\Delta} (j+1) a_j) + c + \frac{4}{3}(n_0 - a_1 - 2a_2 - \sum_{j=4}^{\Delta} j a_j - c) \\ &= \frac{7n_0}{3} - \frac{a_1 + 2a_2}{3} - \sum_{j=4}^{\Delta} a_j (\frac{j}{3} - 1) - \frac{c}{3} \\ &\leq \frac{7n_0}{3}. \end{aligned}$$

درخت T را با ۷ رأس $V = \{u, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ که u با u_1، u_2 و u_3 مجاور است و برای هر $i = 1, 2, 3$، u_iها با v_iها مجاورند. تشکیل می‌دهیم که دارای وزن $\gamma_R(T) = 5$ است.

این درخت یک تابع-γ_R به شکل زیر دارد:

$$f(V_0, V_1, V_2) = \{\{u_1, u_2, u_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4\}\}.$$

و در نهایت $n_\circ = \frac{۳n}{۷} = ۳$ است.



□

۵.۲.۲ نتیجه([4]). برای هر گراف غیربدیهی G داریم:

$$\gamma_R(G) = \min\{۲\gamma(G-S)+|S| : \quad S \text{ یک دوبسته‌بندی است} \}.$$

اثبات. فرض می‌کنیم $f = (V_\circ, V_۱, V_۲)$ یک تابع‌ـγ_R برای گراف G باشد که $|V_۱|$ مینیمم است. بنابر قسمت‌های (الف) و (ج) از قضیهٔ ۴.۲.۲، $V_۱$ یک دوبسته‌بندی است. فرض کنید $S = V_۱$. از قسمت (ج) قضیه‌ی ۳.۲.۲، نتیجه می‌گیریم که $V_۲$ یک γـمجموعه برای گراف $G-S$ است که از گراف G با حذف همه‌ی رئوس $V_۱$ به دست آمده است. بنابراین داریم:

$$\gamma_R(G) = ۲|V_۲| + |V_۱| = ۲|V_۲| + |S| \geq ۲\gamma(G-S) + |S|.$$

$$\Longrightarrow \gamma_R(G) \geq \min\{۲\gamma(G-S)+|S| : \quad S \text{ یک دو بسته‌بندی است.}\} \qquad (۱)$$

حال فرض کنید $V_۱$ یک دوبسته‌بندی باشد که $۲\gamma(G-S)+|S|$ مینیمم است و $V_۲$ یک γـمجموعه در $G-V_۱$ باشد. بنابراین $(V-V_۱-V_۲, V_۱, V_۲)$ یک تابع احاطه‌گر رومی برای G است و داریم:

$$\gamma_R(G) \leq ۲|V_۲| + |V_۱| = \min\{۲\gamma(G-S)+|S| : \; S \text{ یک دو بسته‌بندی است.}\} \qquad (۲)$$

لذا از (۱) و (۲) داریم:

$$\gamma_R(G) = \min\{۲\gamma(G-S)+|S| : \quad S \text{ یک دو بسته‌بندی است.}\}$$

□

۶.۲.۲ گزاره([4]). برای هر گراف G از مرتبه n و ماکزیمم درجه‌ی Δ داریم:

$$\frac{۲n}{\Delta + ۱} \leq \gamma_R(G).$$

اثبات. فرض کنید $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع-γ_R باشد. هر رأس از $V_۲$ حداکثر $۱+\Delta(G)$ رأس ازگراف را احاطه می‌کند. امّا بیشترین تعداد رأس توسط $V_۱ \cup V_۲$ زمانی احاطه می‌شود که $V_۱ = \phi$. در نتیجه $\gamma_R(G) = ۲|V_۲|$، حال

$$n = |N[V_۲]| \leq |V_۲|(۱ + \Delta(G)) = \frac{\gamma_R(G)}{۲}(۱ + \Delta(G))$$
$$\Longrightarrow \frac{۲n}{\Delta + ۱} \leq \gamma_R(G).$$

□

۷.۲.۲ گزاره([4]). برای گراف G با n رأس داریم:

$$\gamma_R(G) \leq n\frac{۲ + Ln(۱ + \delta(G)/۲)}{۱ + \delta(G)}.$$

اثبات. گراف G را طوری در نظر می‌گیریم که در آن مجموعه رأس‌های A مستقل و احتمال و اندازه‌ی آن به ترتیب برابر p و np است. فرض کنید رأس‌های $B = V - N[A]$ رأسهای مجموعه‌ی A را احاطه نمی‌کند. به وضوح $f = (V - (A \cup B), B, A)$ یک تابع احاطه‌گر رومی برای G است. حال اندازه‌ی مجموعه‌ی B را محاسبه می‌کنیم. احتمال اینکه v در B باشد برابر با احتمال این است که v در A نباشد و هیچ رأسی در A با v همسایه نباشد. این احتمال برابر است با $(۱ - p)^{۱+deg(v)}$. از طرفی دیگر برای هر $x \geq ۰$ داریم:

$$e^{-x} \geq ۱ - x.$$

و داریم:

$$deg(v) \geq \delta(G).$$

در نتیجه:

$$pr(v \in B) \leq e^{-p(1+\delta(G))}.$$

بنابراین اندازه‌ی B حداکثر برابر است با: $ne^{-p(1+\delta(G))}$. حال اندازه‌ی تابع f حداکثر برابر است با:

$$|E[f(v)]| = 2np + ne^{-p(1+\delta(G))} \tag{1}$$

کران بالای $E[f(V)]$ مینیمم است وقتی که:

$$p = Ln((1+\delta(G)/2)/(1+\delta(G)) \tag{2}$$

با جایگزین کردن رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی (۱) داریم:

$$|E[f(V)]| \leq n\frac{2+Ln(1+\delta(G)/2)}{(1+\delta(G))}.$$

□

۳.۲ اعداد احاطه‌گر رومی درگراف‌های خاص

در این بخش عدد احاطه‌گر رومی برای دسته‌های متعددی ازگراف‌ها را به دست می‌آوریم.

۱.۳.۲ گزاره([4]). برای مسیرهای P_n و دورهای C_n داریم:

$$\gamma_R(C_n) = \gamma_R(P_n) = \lceil\frac{2n}{3}\rceil.$$

اثبات. برای مسیر C_n داریم:

$$\gamma_R(C_n) \geq \frac{2n}{1+\Delta} \overset{\Delta=2}{=} \frac{2n}{1+2} = \frac{2n}{3}$$
$$\Longrightarrow \gamma_R(C_n) \geq \frac{2n}{3} \tag{1}$$

فرض کنید C_n دارای رأس‌های $V_1, V_2, \ldots, V_n$ باشد. اگر $n \overset{3}{\equiv} 0$ باشد آن گاه تابع f یک تابع احاطه‌گر رومی است. تابع f را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \overset{3}{\equiv} 2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت f یک تابع احاطه‌گر رومی است.

اگر $n \overset{3}{\equiv} 1$ باشد آن گاه تابع f را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \overset{3}{\equiv} 2 \\ 1 & x = v_n \\ 0 & \text{در غیر این صورت}, \end{cases}$$

در این صورت f یک تابع احاطه‌گر رومی است.

اگر $n \overset{3}{\equiv} 2$ باشد آن گاه تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \overset{3}{\equiv} 2 \\ 1 & x \in \{v_n, v_{n+1}\} \\ 0 & \text{در غیر این صورت}, \end{cases}$$

در این صورت f یک تابع احاطه‌گر رومی است.

در تمام حالت‌های فوق f یک تابع احاطه‌گر رومی با وزن $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ است. لذا:

$$\gamma_R(C_n) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil \tag{2}$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\gamma_R(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil.$$

و اثبات $\gamma_R(P_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ مشابه اثبات بالاست.

□

برای گراف‌های چند بخشی کامل $K_{m_1, m_2, \ldots, m_n}$ داریم:

۲.۳.۲ گزاره([4]). فرض کنید $G = K_{m_1, \ldots, m_n}$ یک گراف کامل n بخشی با شرط $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n$ باشد.

الف) اگر $m_1 \geq 3$ آن گاه $\gamma_R(G) = 4$.

ب) اگر $m_1 = 2$ آن گاه $\gamma_R(G) = 3$.

ج) اگر $m_1 = 1$ آن گاه $\gamma_R(G) = 2$.

اثبات. الف) فرض کنید a رأسی از بخش اوّل و b رأسی از بخش دوم باشد. در این صورت $f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x = a \text{ یا } b \\ \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

یک تابع احاطه‌گر رومی است. لذا $\gamma_R(G) \leq 4$. از طرفی به راحتی می‌توان دید که $\gamma_R(G) \geq 4$. لذا $\gamma_R(G) = 4$.

ب) فرض می‌کنیم در بخش اوّل، دو رأس داریم و در بقیه $n - 1$ بخش دیگر حداقل دو رأس وجود دارد. لذا کافی است یک رأس از بخش اوّل را مقدار (وزن) ۲ بدهیم و رأس دیگر را مقدار ۱. چون G گراف n بخشی کامل است لذا رأس بخش اوّل که مقدارش برابر ۲ است تمام رئوس بخش‌های دیگر را احاطه می‌کند، در این صورت تابع فوق یک تابع احاطه‌گر رومی است و در نتیجه $\gamma_R(G) \leq 3$. از طرفی به راحتی می‌توان دید $\gamma_R(G) \geq 3$. لذا:

$$.\gamma_R(G) = 3.$$

ج) فرض می‌کنیم در بخش اوّل فقط یک رأس قرار دارد. چون G یک گراف کامل n بخشی است لذا رأسی که در بخش اوّل قرار دارد تمام رئوس در بخش‌های دیگر را احاطه می‌کند و کافی است رأس بخش اول را ۲ و بقیه‌ی رئوس در بخش‌های دیگر را مقدار صفر دهیم. لذا وزن تابع برابر ۲ می‌شود. در نتیجه $\gamma_R(G) \leq ۲$. از طرف دیگر به راحتی می‌توان دید $\gamma_R(G) \geq ۲$. در نتیجه

$$\gamma_R(G) = ۲.$$

□

۳.۳.۲ گزاره([4]). اگر G یک گراف از مرتبه‌ی $n > ۱$ و شامل رأسی از درجه‌ی $n - ۱$ باشد آن گاه $\gamma(G) = ۱$ و $\gamma_R(G) = ۲$ است.

اثبات. فرض کنید x رأسی از درجه‌ی $n - ۱$ باشد در این صورت هر رأس دیگر گراف با x مجاور است لذا $\{x\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G است. در نتیجه $\gamma(G) = ۱$. حال تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(u) = \begin{cases} ۲ & u = x \\ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت g یک تابع احاطه‌گری با وزن ۲ است. چون $n > ۱$، لذا

$$\gamma_R(G) = ۲.$$

□

۴.۳.۲ گزاره([4]). برای گراف شبکه‌ای $۲ \times n$، $G_{۲,n}$ داریم:

$$\gamma_R(G_{۲,n}) = n + ۱.$$

اثبات. رأس‌های $G_{2,n}$ را در گراف شبکه‌ای به صورت $v_{1,1},\ldots,v_{1,n},\ldots,v_{2,1},\ldots,v_{2,n}$ نمایش می‌دهیم و تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

i) برای هر i که $2+4i\leq n$ قرار می‌دهیم $g(v_{2,2+4i})=2$.

ii) برای هر j که $4j\leq n$ قرار می‌دهیم $g(v_{1,4j})=2$.

iii) قرار می‌دهیم $g(v_{1,1})=1$ و برای $n\equiv 1(mod 4)$ قرار می‌دهیم $g(v_{2,n})=1$ و برای $n\equiv 3(mod 4)$ قرار می‌دهیم $g(v_{1,n})=1$. برای تمام رأس‌های باقیمانده‌ی u قرار می‌دهیم $g(u)=0$. به وضوح g یک تابع احاطه‌گر رومی است.

$$g(v)=\gamma_R(G_{2,n})\leq n+1.$$

حال نشان می‌دهیم $\gamma_R(G_{2,n})\geq n+1$. فرض کنید $\gamma_R(G_{2,n})\leq n$ و $f=(V_0,V_1,V_2)$ یک γ_Rـتابع برای $G_{2,n}$ است. به وضوح $V_2\neq\phi$. در نتیجه حداقل یک ستون i وجود دارد که مقادیر f روی آن ستون صفر است. چون f یک γ_Rـتابع است لذا مقادیر f ستونهای مجاور آن حداقل ۴ می‌باشد. لذا با توجه به γ_Rـتابع بودن f داریم $w(f)\geq n+1$ که تناقض است. لذا، $\gamma_R(G_{2,n})\geq n+1$ و در نتیجه حکم ثابت می‌شود. □

۵.۳.۲ گزاره([4]). اگر G یک گراف بدون رأس تنها از مرتبه‌ی n باشد آن گاه $\gamma_R(G)=n$ اگر و تنها اگر n زوج و $G=(\frac{n}{2})K_2$ باشد.

اثبات $(\Longleftarrow)$ اگر $G=(\frac{n}{2})K_2$ باشد آن گاه هر یال حداقل دو وزن برای γ_R ایجاد می‌کند لذا،

$$\gamma_R(G)\geq n \tag{1}$$

از طرفی می‌دانیم که $\gamma_R(G)\leq n$. زیرا اگر به هر رأس از گراف G، عدد ۱ را نسبت دهیم آن گاه

$$\gamma_R(G)\leq n \tag{2}$$

از روابط (۱) و (۲) داریم: $\gamma_R(G) = n$.

($\Leftarrow$) فرض می‌کنیم $\gamma_R(G) = n$.

برهان خلف) اگر G شامل دو یال هم‌جوار uv و vw باشد، آن گاه $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ که در آن

$$V_۰ = \{u, w\}, \qquad V_۱ = V - \{u, v, w\}, \qquad V_۲ = \{v\}.$$

یک تابع احاطه‌گر رومی است. لذا:

$$\gamma_R(G) \leq |V_۱| + ۲|V_۲| = n - ۳ + ۲ = n - ۱.$$

که تناقض است. بنابراین هیچ دو یالی از G مجاور نیستند و $\Delta(G) \leq ۱$. امّا G رأس تنها ندارد و لذا $\Delta(G) = ۱$.

در نتیجه هر مؤلفه در G یک $K_۲$ است و حکم برقرار است.

□

۴.۲ گراف‌های G با $\gamma_R(G) = \gamma(G) + ۲$

از قضیه‌ی ۱.۲.۲ می‌دانیم که $\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq ۲\gamma(G)$ و با توجه به قضیه‌ی ۲.۲.۲ می‌دانیم زمانی تساوی در کران پایین اتفاق می‌افتد که $G = \bar{K}_n$ باشد، بنابراین اگر G گرافی بدون رأس تنها باشد آن گاه $\gamma_R(G) \geq \gamma(G) + ۱$. گراف‌های همبند G با توابع‌-γ_R با وزن $\gamma(G) + ۱$ و $\gamma(G) + ۲$ دارای ساختار ویژه هستند که در قضایای زیر نشان داده می‌شوند.

۱.۴.۲ گزاره([4]). اگر G گرافی همبند از مرتبه‌ی n باشد $\gamma_R(G) = \gamma(G) + ۱$ اگر و تنها اگر G رأسی مانند $v \in V$ از درجه‌ی $n - \gamma(G)$ داشته باشد.

اثبات (⇐) فرض کنید G دارای رأس v با درجه‌ی $n-\gamma(G)$ باشد. در این صورت:

$$V_\circ = V - V_۱ - V_۲, \qquad V_۱ = V - N[v], \qquad V_۲ = \{v\}.$$

آن گاه $V_۱ \cup V_۲$ یک مجموعه احاطه‌گر در گراف G است زیرا:

$$|V_۱ \cup V_۲| = |S|$$

$$|S| = ۱ + [n - (n - \gamma + ۱)] = ۱ + \gamma - ۱ = \gamma.$$

چون اندازه‌ی S برابر γ است لذا S یک γـمجموعه است. تابع $f = (V_\circ, V_۱, V_۲)$ یک تابع احاطه‌گر رومی با وزن $f(V) = \gamma(G) + ۱$ است. زیرا:

$$f(V) = ۲|V_۲| + |V_۱| = ۲ + (n - (n - \gamma(G) + ۱)) = \gamma(G) + ۱.$$

لذا برای گراف‌های همبند G،

$$\gamma_R(G) \leq \gamma(G) + ۱ \qquad (۱)$$

امّا چون G فاقد رأس تنهاست و بنابر قضیه‌ی ۲.۲.۱، $\gamma(G) \leq \frac{n}{۲}$ است، لذا با توجه به قضیه‌ی ۲.۲.۲ خواهیم داشت:

$$\gamma_R(G) = \gamma(G) \iff G = \bar{K}_n.$$

و از طرفی طبق قضیه‌ی ۱.۲.۲ داشتیم: $\gamma_R(G) \geq \gamma(G)$ امّا چون G فاقد رأس تنهاست، لذا: $\gamma_R(G) > \gamma(G)$.

در نتیجه داریم:

$$\gamma_R(G) \geq \gamma(G) + ۱ \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\gamma_R(G) = \gamma(G) + ۱.$$

($\Longrightarrow$) برای آن که تابع احاطه‌گر رومی $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ دارای وزن $\gamma(G) + ۱$ باشد، باید یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $|V_۲| = ۰$ و $|V_۱| = \gamma(G) + ۱$

۲) $|V_۲| = ۱$ و $|V_۱| = \gamma(G) - ۱$

توجه کنید که مقادیر دیگری به جز مقادیر بالا نمی‌توان به $V_۱$ و $V_۲$ نسبت داد چون به تناقض می‌رسیم. مثلاً اگر

$$|V_۲| = ۲.$$

آن گاه:

$$\gamma_R(G) = ۲|V_۲| + |V_۱|.$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned}
&\gamma_R(G) = \gamma(G) + ۱ \\
&\Longrightarrow ۲|V_۲| + |V_۱| = \gamma(G) + ۱ \\
&\Longrightarrow ۴ + |V_۱| = \gamma(G) + ۱ \Longrightarrow |V_۱| = \gamma(G) - ۳.
\end{aligned}$$

لذا:

$$\gamma(G) \leq |V_۱ \cup V_۲| \leq |V_۱| + |V_۲| = \gamma(G) - ۳ + ۲ = \gamma(G) - ۱.$$

که تناقض است. در نتیجه $|V_۲| \geq ۲$ یعنی ۱ یا $|V_۲| = ۰$. حال در اینجا دو حالت بالا را بررسی می‌کنیم.

حالت (۱)، از آنجایی که $|V_۲| = ۰$، داریم $|V_۱| = V$. چون $V_۲$، $V_۰$ را احاطه می‌کند لذا $|V_۰| = ۰$. امّا طبق قضیه‌ی ۲.۲.۱ داریم $\gamma(G) \leq \frac{n}{۲}$، لذا چون $V_۱ = V$، داریم:

$$n = \gamma(G) + ۱ \leq \frac{n}{۲} + ۱ \Longrightarrow n \leq ۲.$$

به آسانی می‌توان در $P_۲$ نشان داد که:

$$\gamma_R(P_۲) = ۲ = \gamma(P_۲) + ۱.$$

و $P_۲$ دارای یک رأس از درجه‌ی ۱ است.

در حالت (۲)، فرض می‌کنیم $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک γ_Rـتابع برای گراف G و با وزن $\gamma(G) + ۱$ باشد که در آن:

$$|V_۱| = \gamma(G) - ۱ \quad \text{و} \quad |V_۲| = ۱.$$

فرض کنید $V_۲ = \{v\}$. در این صورت هیچ یالی در G، $V_۱$ را به $\{v\}$ وصل نمی‌کند و $\{v\}$، $V_۰$ رااحاطه می‌کند، لذا:

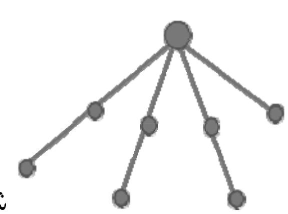
$$deg(v) = |V_۰| = n - |V_۱| - |V_۲| = n - \gamma(G).$$

□

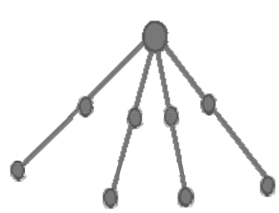
در قسمت بعدی درخت‌های T راکه در آنها $\gamma_R(T) = \gamma(T) + ۱$ هستند را بررسی می‌کنیم.

۲.۴.۲ تعریف([4]). برای عدد صحیح مثبت t، ستاره‌ی $K_{۱,t}$ با حداکثر $t - ۱$ یال که زیر تقسیم شده‌اند را عنکبوت زخمی می‌نامند.

۳.۴.۲ تعریف([4]). برای عدد صحیح $t \geq ۲$، ستاره‌ی $K_{۱,t}$ راکه تمام یال‌های آن زیر تقسیم شده‌اند را عنکبوت سالم می‌نامند.



شکل ۱.۲ عنکبوت زخمی



شکل ۲.۲ عنکبوت سالم

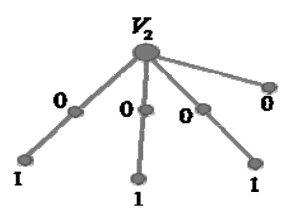
در عنکبوت زخمی رأس با درجه‌ی t را سر_رأس گویند و رأس‌هایی که فاصله‌ی آنها از سر_رأس به فاصله‌ی ۲ باشد را پا_رأس گویند.

توجه کنید که سر_رأس و پا_رأس برای حالتی که عنکبوت زخمی در یک مسیر روی دو یا چهار رأس باشد تعریف نمی‌شود.

برای $P_۲$، هر دو رأس را سر_رأس در نظر می‌گیریم و برای $P_۴$، دو رأس بیرونی سر_رأس و دو رأس داخلی پا_رأس می‌باشند.

۴.۴.۲ گزاره([4]). اگر T درختی با دو یا چند رأس باشد، آن گاه T یک عنکبوت زخمی است اگر و تنها اگر $\gamma_R(T) = \gamma(T) + ۱$.

اثبات ($\Leftarrow$) فرض می‌کنیم T یک عنکبوت زخمی است. v را سر_رأس و $S = \{w : d(v, w) = ۲\}$ را مجموعه پا_رأس‌ها در نظر می‌گیریم.



فرض می‌کنیم $D = \{v\} \cup S$. ثابت می‌کنیم D یک γ_مجموعه برای T است.

فرض کنید $x \in V - D$ باشد. در این صورت چون این رأس به v وصل است توسط v احاطه می‌شود در نتیجه D یک مجموعه‌ی احاطه‌گر است. اگر $\gamma(G) < |D|$ و $D_۱$ یک γ_مجموعه باشد آن گاه برگی از T توسط $D_۱$ احاطه نمی‌شود که تناقض است. لذا $\gamma(G) = |D|$.

حال قرار می‌دهیم:

$$V_0 = V - S - \{v\}$$

$$V_1 = S$$

$$V_2 = \{v\}.$$

دراین صورت $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک تابع احاطه‌گر رومی است و لذا $\gamma_R(T) \leq \gamma(T) + 1$. از طرف دیگر به راحتی می‌توان دید که $\gamma_R(T) \geq \gamma(T) + 1$. در نتیجه $\gamma_R(T) = \gamma(T) + 1$.

($\Longrightarrow$) فرض می‌کنیم $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک تابع‌ـγ_R برای T با وزن $\gamma(T) + 1$ باشد. با توجه به اثبات قضیه‌ی قبل یا $T = P_2$ یا $|V_1| = \gamma(G) - 1$ و $|V_2| = 1$ است. فرض کنید $V_2 = \{v\}$. در این صورت داریم:

$$|N(V)| = |V_0| = n - (\gamma(T) - 1) - 1 = n - \gamma(T) + 1 - 1 = n - \gamma(T).$$

نشان می‌دهیم $|V_1|$ می‌نیمم است. برای این منظور داریم:

$$|V_1| + |V_2| = \gamma(G)$$

$$|V_1| + 2|V_2| = \gamma_R(G)$$

از طرفی طبق فرض داریم:

$$\gamma_R(G) = \gamma(G) + 1.$$

فرض می‌کنیم $|V_1| = x$ و $|V_2| = y$، در این صورت داریم:

$$x + 2y = x + y + 1 \qquad (1)$$

فرض کنید $|V_1|$ می‌نیمم نباشد. در این صورت از اندازه‌ی V_1 یکی کم می‌کنیم و به اندازه‌ی V_2 یکی اضافه می‌کنیم در این صورت:

از $\gamma_R(T)$ داریم:

$$(x-۱)+۲(y+۱)=x+۲y+۱.$$

از $\gamma(T)$ داریم:

$$(x-۱)+(y+۱)=x+y.$$

لذا از آنجایی که $\gamma_R(T)=\gamma(T)+۱$، داریم:

$$x+۲y+۱=x+y+۱ \tag{۲}$$

از عبارات (۱) و (۲) چون طرف راست تساوی‌ها در (۱) و (۲) با هم برابرند لذا طرف چپ آنها باید با هم برابر باشند. لذا:

$$x+۲y=x+۲y+۱$$
$$۰=۱.$$

که یک تناقض است. لذا اندازه‌ی $V_۱$ مینیمم است. با توجه به قضیه‌ی ۳.۲.۲ قسمت (ج)، هر رأس در $V_۰$ حداکثر با یک رأس از $V_۱$ مجاور است.

برعکس. چون اگر T همبند باشد آن گاه $V_۱$ مستقل است و بین $V_۱$ و $V_۲$ هیچ یالی وجود ندارد. لذا هر رأس $V_۱$ باید به رأسی از $V_۰$ متصل باشد. به علاوه هر رأس در $V_۰$ نمی‌تواند با تمام رأس‌های $V_۱$ مجاور باشد. نشان می‌دهیم T نمی‌تواند عنکبوت سالم باشد. اگر این طور نباشد آن گاه $V_۰$ یک γـ مجموعه از T است و

$$\begin{aligned}deg(v)=|V_۰|<|V_۰|+۱=|V_۱|+|V_۲|&=|V_۰|+|V_۱|+|V_۲|-|V_۰|\\&=n-\gamma(T).\end{aligned}$$

که تناقض است. لذا T عنکبوت زخمی است. $\square$

۵.۴.۲ گزاره([4]). اگر T یک گراف همبند از مرتبه‌ی n باشد، آن گاه $\gamma_R(G) = \gamma(G) + ۲$ اگر و تنها اگر

الف) G رأسی از درجه‌ی $n - \gamma(G)$ نداشته باشد.

ب) یا G رأسی از درجه‌ی $n - \gamma(G) - ۱$ دارد یا G دارای دو رأس v و w است به طوری که:

$$|N[v] - N[w]| = n - \gamma(G) + ۲.$$

اثبات ($\Longleftarrow$) با توجه به قسمت (الف) و همان طورکه در قضیه‌ی ۱.۴.۲ داشتیم، می‌دانیم $\gamma_R(G) > \gamma(G) + ۱$.
در اینجا رأس با درجه‌ی $n - \gamma(G)$ نداریم، لذا فقط دو حالت وجود دارد:

۱) $\gamma_R(G) = \gamma(G)$

۲) $\gamma_R(G) \geq \gamma(G) + ۲$

حالت اوّل امکان ندارد. چون طبق قضیه‌ی ۲.۲.۲، زمانی تساوی رخ می‌دهد که $G = \bar{K}_n$ باشد. لذا

$$\gamma_R(G) \geq \gamma(G) + ۲ \Longrightarrow \gamma_R(G) > \gamma(G) + ۱.$$

اگر G دارای رأسی مانند v از درجه‌ی $n - \gamma(G) - ۱$ باشد آن گاه تعریف می‌کنیم:

$$V_۰ = N[v]$$

$$V_۱ = V - N[v]$$

$$V_۲ = \{v\}.$$

در این صورت $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع احاطه‌گر رومی با وزن زیر است، لذا یک تابع-γ_R است.

$$\gamma_R(G) = ۲|V_۲| + |V_۱| = ۲ + |V_۱| = ۲ + (n - deg(v_۲) - ۱) = ۲ + n - deg(v_۲) - ۱$$

$$= ۲ + n - (n - \gamma(G) - ۱) - ۱ = ۲ + n - n + \gamma(G) + ۱ - ۱ = \gamma(G) + ۲$$

$$\Longrightarrow f(V) = \gamma(G) + ۲.$$

در قسمت (ب) داشتیم که اگر دو رأس مانند v وw وجود داشته باشد به طوری که:

$$|N[v] \cup N[w]| = n - \gamma(G) + ۲.$$

آن گاه تعریف می‌کنیم:

$$V_۰ = N[v] \cup N[w] - \{v, w\}$$

$$V_۱ = V - (N[v] \cup N[w])$$

$$V_۲ = \{v, w\}.$$

در این صورت $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع احاطه‌گر رومی است، با وزن زیر است.

$$f(V) = ۲n_۲ + n_۱ = ۴ + n - (n - \gamma(G) + ۲) = ۴ + n - n + \gamma(G) - ۲ = \gamma(G) + ۲$$

$$\Longrightarrow f(V) = \gamma(G) + ۲.$$

($\Leftarrow$) فرض کنید تابع $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ با وزن $\gamma(G) + ۲$ یک تابع احاطه‌گر رومی باشد. هر یک از حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

۱) $|V_۲| = ۰$ و $|V_۱| = \gamma(G) + ۲$

۲) $|V_۲| = ۱$ و $|V_۱| = \gamma(G)$

۳) $|V_۲| = ۲$ و $|V_۱| = \gamma(G) - ۲$.

حالت‌های دیگری وجود ندارد زیرا در هرکدام از حالت‌های دیگر به تناقض می‌رسیم.

فرض می‌کنیم: $|V_۲| = ۳$. در این صورت

$$\gamma_R(G) = ۲|V_۲| + |V_۱| = ۶ + |V_۱| \qquad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$\gamma_R(G) = \gamma(G) + ۲ \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\Longrightarrow \gamma(G) + ۲ = ۶ + |V_۱|$$

$$\Longrightarrow |V_۱| = \gamma(G) - ۴.$$

لذا:

$$\gamma(G) \leq |V_۱ \cup V_۲| \leq |V_۱| + |V_۲| = \gamma(G) - ۴ + ۳ = \gamma(G) - ۱.$$

در نتیجه به تناقض می‌رسیم. بنابراین f یک تابع احاطه‌گر رومی است و تابع احاطه‌گری با وزن $\gamma(G) + ۱$ وجود ندارد و در نتیجه G رأسی با درجه‌ی $n - \gamma(G)$ ندارد.

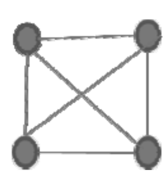
در حالت (۱)، اگر $|V_۲| = ۰$ آن گاه $V_۱ = V$. لذا $|V_۰| = ۰$.

بار دیگر از قضیه‌ی ۲.۲.۱ استفاده می‌کنیم در این صورت داریم:

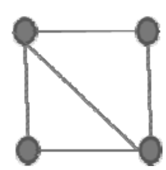
$$n = \gamma(G) + ۲ \leq \frac{n}{۲} + ۲ \Longrightarrow n \leq ۴.$$

حال با بررسی تمام گراف‌های همبند از مرتبه‌ی $n \leq ۴$، به سادگی دیده می‌شود که $\gamma_R(G) = \gamma(G) + ۱$.

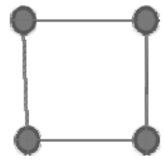
اگر $n = ۴$ آن گاه:



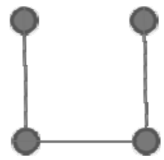
۲=۱+۱



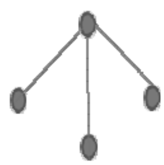
۲=۱+۱



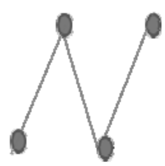
۳=۲+۱



۳=۲+۱

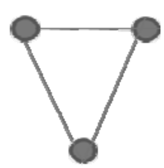


۲=۱+۱

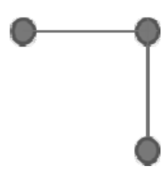


۳=۲+۱

اگر $n = ۳$ آن گاه



۲=۱+۱



۲=۱+۱

و اگر $n = ۲$ آن گاه

۲=۱+۱

در حالت (۲)، فرض کنید $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع-γ_R برای گراف G با وزن $\gamma(G) + ۲$ باشد که $|V_۲| = ۱$ و $|V_۱| = \gamma(G)$. فرض می‌کنیم $V_۲ = \{v\}$. از آنجایی که هیچ یالی $V_۱$ را به v وصل نمی‌کند و v مجموعه‌ی $V_۰$ را احاطه می‌کند، نتیجه می‌گیریم:

$$deg(v) = |V_۰| = n - |V_۱| = |V_۲| = n - \gamma(G) - ۱.$$

در حالت (۳)، فرض کنید $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع-γ_R برای گراف G با وزن $\gamma(G) + ۲$ با $|V_۲| = ۲$ و $|V_۱| = \gamma(G) - ۲$ باشد. فرض کنید $V_۲ = \{v, w\}$. از آنجایی که هیچ یالی $V_۱$ را به v وw وصل نمی‌کند، لذا $\{v, w\}$ مجموعه‌ی $V_۰$ را احاطه می‌کند، در نتیجه:

$$|N[v] \cup N[w]| = n - |V_۱| = n - (\gamma(G) - ۲) = n - \gamma(G) + ۲.$$

$\square$

از قضیه‌ی بالا، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

۶.۴.۲ نتیجه([4]). اگر G یک گراف همبند و $\gamma_R(G) = \gamma(G) + ۲$ آن گاه $۲ \leq rad(G) \leq ۴$ و $۳ \leq diam(G) \leq ۸$.

۷.۴.۲ گزاره([4]). اگر T یک درخت با مرتبه‌ی $n \geq ۲$ باشد آن گاه $\gamma_R(T) = \gamma(T) + ۲$ اگر و فقط اگر T

(i) یک عنکبوت زخمی باشد یا

(ii) T دارای یک جفت عنکبوت زخمی $T_۱$ و $T_۲$ با یالی که رأس $v \in V(T_۱)$ را به رأس $w \in V(T_۲)$ وصل می‌کند، با شرایط زیر باشد:

۱) اگر هر درخت یک $P_۲$ باشد، آنگاه هیچ یک از رئوس $P_۲$ به سرـرأس درخت‌های دیگر متصل نباشد.

۲) اگر v یک پاـرأس و w یک رأس میانی باشند، w نمی‌تواند به یک پاـرأس در $T_۲$ وصل شود.

۳) v و w دو پاـرأس نمی‌باشد.

اثبات. $(\Leftarrow)$ اگر T درختی از نوع (i) و (ii) باشد که در قضیهٔ ذکر شده است آن گاه T عنکبوت زخمی نیست و در نتیجه، با توجه به قضیه‌ی ۴.۴.۲ داریم:

$$\gamma_R(T) = \gamma(T) + ۱.$$

توجه کنید که اگر $P_۲$ به سرـرأس درخت‌های دیگر متصل باشد آن گاه درخت حاصل عنکبوت زخمی است. اگر T عنکبوت سالم باشد آن گاه فرض کنید $V_۲$ سرـرأس و $V_۱$ پاـرأس و بقیه‌ی رئوس $V_۰$ هستند.
در این حالت، $V_۰$ یک γـمجموعه برای T و $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع احاطه‌گر رومی با وزن $f(V) = \gamma(T) + ۲$ و f یک تابع‌ـγ_R است.

حال فرض کنید $T_۱$ و $T_۲$ دو عنکبوت زخمی باشند و با توجه به اینکه سرـرأس و پاـرأس برای هر درخت تشکیل یک γـمجموعه را می‌دهند، فرض کنید γ ـمجموعه‌های $T_۱$ و $T_۲$ برابر $D_۱$ و $D_۲$ هستند. اگر هر درخت، $P_۴$ باشد آن گاه هرکدام از جفت پاـرأس‌ها و سرـرأس های غیر مجاور تشکیل یک γـمجموعه برای $P_۴$ را می‌دهند. به طور مشابه $T_۱$ دارای یک تابع‌ـγ_R، $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ با وزن $\gamma(T_۱) + ۱$ و $T_۲$ دارای یک تابع‌ـγ_R، $g = (W_۰, W_۱, W_۲)$ با وزن $\gamma(T_۲) + ۱$ با $V_۱$ و $W_۱$ به ترتیب شامل پارأس‌ها در $T_۱$ و $T_۲$، $V_۲$ و $W_۲$ به ترتیب شامل سر رأس‌ها در $T_۱$ و $T_۲$ می‌باشند. حال راههایی که دو عنکبوت زخمی می‌توانند توسط یال vw که $v \in V(T_۱)$ و $w \in V(T_۲)$ است به یکدیگر متصل می‌شوند را در نظر می‌گیریم که تشکیل T را با شرایط گفته شده در صورت قضیه می‌دهند.

اگر v و w هر دو سر-رأس یا هر دو رأس میانی و یا یکی سر-رأس و دیگری رأس میانی و یا یکی پا-رأس و دیگری رأس میانی که به هیچ پا-رأس دیگری وصل نیست، باشد آن گاه $D_۱ \cup D_۲$ یک γ- مجموعه برای T با وزن $\gamma(T_۱) + \gamma(T_۲)$ است و $h = (V_۰ \cup W_۰, V_۱ \cup W_۱, V_۲ \cup W_۲)$ یک تابع احاطه‌گر رومی برای T با وزن زیر است:

$$((\gamma(T_۱) + ۱) + (\gamma(T_۲) + ۱) = \gamma(T_۱) + \gamma(T_۲) + ۲ = \gamma(T) + ۲.$$

اگر v، سر-رأس در $T_۱$ و w، پا-رأس از $T_۲$ باشد آن گاه $D_۱ \cup D_۲ - \{w\}$ یک γ-مجموعه برای T با وزن $\gamma(T_۱) + \gamma(T_۲) - ۱$ است و $h = (V_۰ \cup W_۰, V_۱ \cup W_۱ - \{w\}, V_۲ \cup W_۲)$ یک تابع احاطه‌گر رومی برای T با وزن زیر است:

$$((\gamma(T_۱) + ۱) + (\gamma(T_۲) + ۱) - ۱ = \gamma(T_۱) + \gamma(T_۲) + ۱ = \gamma(T) + ۲.$$

$(\Longleftarrow)$ اگر $\gamma_R(T) = \gamma(T) + ۲$ آن گاه با توجه به قضیه‌ی ۴.۴.۲، T عنکبوت زخمی نیست و اگر $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع-γ_R برای T باشد آن گاه دو حالت زیر را داریم:

۱) $|V_۲| = ۱$ و $|V_۱| = \gamma(T)$

۲) $|V_۲| = ۲$ و $|V_۱| = \gamma(T) - ۲$

با توجه به اینکه هیچ تابع احاطه‌گر رومی با وزن $\gamma(T) + ۲$ دارای $|V_۲| \geq ۳$ نمی‌باشد.

در حالت اول: فرض کنید v رأس در $V_۲$ باشد، در این صورت $V_۲$، $V_۰ = N(v)$ ،$V_۰ = V - V_۱$ را احاطه می‌کند. فرض کنید که $|V_۱|$ مینیمم باشد. از قضیه‌ی ۳.۲.۲ برمی‌آید که $V_۱$ مستقل باشد و بیش از یک رأس در $V_۱$ نمی‌تواند به تک رأس در $V_۰$ متصل شود. بنابراین $\gamma(T)$، رأس‌های $V_۰$ که توسط یالی به رأسهای مجزای $V_۱$ متصل شده‌اند. به علاوه، اگر رأس در $V_۰$ به رأس در $V_۱$ متصل نباشد آن گاه T یک عنکبوت زخمی است که به تناقض می‌رسیم. لذا در این حالت اگر $|V_۱|$ مینیمم باشد آن گاه T یک عنکبوت سالم است.

با توجه به اینکه $V_\circ$ تشکیل یک γـمجموعه برای T می‌دهد که $|V_1| = \gamma(T)$ اگر $|V_1|$ مینیمم نباشد آن گاه دو رأس $x, y \in V_1$ تشکیل یک مسیر با رأس $w \in V_\circ$ را می‌دهند. اگر w بین xو y باشد آن گاه:

$$f' = (V_\circ - \{w\} \cup \{x, y\}, V_1 - \{x, y\}, V_2 \cup \{w\}).$$

یک تابع احاطه‌گر رومی برای T که وزن آن برابر وزن f است. بنابراین یک تابع‌ـγ_R برای T با حذف کردن vw، دو عنکبوت زخمی باقی می‌ماند. اگر w و x و y تشکیل یک مسیر بدهند، آن گاه تابع زیر یک تابع‌ـγ_R برای T است.

$$f'' = (V_\circ \cup \{y\}, V_1 - \{x, y\}, V_2 \cup \{x\}).$$

با حذف یال vw، دو عنکبوت زخمی باقی می‌ماند.

اگر دو یا بیش از دو یال را حذف کنیم آن گاه یک تابع‌ـγ_R با وزن $\gamma(T) + 2$ با $|V_2| \geq 3$ به دست می‌آید که همان طورکه می‌دانیم در این حالت نمی‌تواند باشد. توجه کنید که یال حذف شده با سرـرأس حداقل یک زیردرخت درگیر است. اگر درخت بعد از حذف w و x و y از p_2 باقی ماند آن گاه درخت اصلی یا عنکبوت زخمی با سرـرأس w و یا P_5 است که سرـرأس در P_2 به w وصل است به طوری که سر رأس عنکبوت زخمی روی w، x وy نیست.

در حالت دوم: فرض کنید $|V_1| = \gamma(T) - 2$ و $V_2 = \{v, w\}$. در این حالت $|V_1|$ مینیمم است، لذا $|V_1|$ مستقل است و هیچ رأسی از $V_\circ$ بیشتر از یک همسایه در V_1 ندارد. به علاوه $V' = N(v) \cap V_\circ$ و $W' = \{x, d(w, x) = 2\} - N\{v\}$.

توجه کنید که $V' \cup W' = V_\circ$ و $V'' \cup W'' = V_1$. اگر تمام رأس‌ها در V' به رأسی در V'' وصل شود آن گاه $|V'| - |V''|$ و $D' = V' \cup W'' \cup \{w\}$ تشکیل یک مجموعه‌ی احاطه‌گر را می‌دهد.

اگر $V'' \cup W'' = \phi$ باشد آن گاه داریم:

$$|D'| = |V'| + |W''| + 1 = |V''| + |W''| + 1 = |V_1| + 1 = \gamma(T) - 1.$$

که به تناقض می‌رسیم.

اگر $V'' \cap W'' = \{x\}$ باشد آن گاه فرض می‌کنیم y همسایه‌ی x در V' است. در این صورت

$D'' = ((V' - \{y\}) \cup W'' \cup \{w\})$، درخت T را در حالت $V' - \{y\} \neq \phi$، احاطه می‌کند.

اگر $V' = \{y\}$ آن گاه $\{v\} \cup V' \cup V''$ مسیر $P_۳$ را تشکیل می‌دهد.

اگر $W_۲ = \{y, w\}$ و $W_۱ = V_۱ - \{x\}$ و $W_۰ = V - W_۱ - W_۲$ آن گاه $f' = (W_۰, W_۱, W_۲)$ یک تابع احاطه‌گر رومی است که وزن آن از تابع f کمتر است لذا به تناقض می‌رسیم.

اگر $N(v) \cap N(w) = \{x\}$ و x تنها رأسی در $V_۰$ باشد که به رأس $V_۱$ وصل نباشد آن گاه $V_۰$ مجموعه‌ی احاطه‌گر با وزن زیر است:

$$|V_۰| = |V'| + |W'| - ۱ = (|V''| + ۱) + (|W''| + ۱) - ۱$$
$$= |V''| + |W''| + ۱ = |V_۱| + ۱ = \gamma(T) - ۱.$$

که به تناقض می‌رسیم.

توجه کنید که V' و W' داری رأس مجزا هستند که به رأسی در $V_۰$ وصل نیست. $\{v\} \cup V' \cup V''$ و $\{w\} \cup W' \cup W''$ تشکیل عنکبوت‌های زخمی با v و w که سر-رأس و V'' و W'' که پا-رأس را می‌دهند.

برای کامل کردن اثبات، مسیرهای ممکن بین دو رأس v وw و حذف یال که منجر به دو عنکبوت زخمی در تمام حالات می‌شود، مخصوصاً حالت ذکر شده در قضیه را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: یالی بین v و w وجود دارد.

اگر $\{v\} \cup V' \cup V''$ یا $\{w\} \cup W' \cup W''$، $P_۲$ باشند آن گاه، T یک عنکبوت زخمی است وقتی که با یک یال به $P_۲$ به سر-رأس عنکبوت زخمی وصل شود که تشکیل یک عنکبوت زخمی دیگر را می‌دهد. اگر $P_۲$ نباشد آن گاه با حذف یال vw، دو عنکبوت زخمی باقی می‌ماند.

حالت دوم: مسیری بین دو رأس v و w با طول ۲ وجود دارد که شامل $V' \cap W'$ می‌شود. فرض کنید $V' \cap W' = \{x\}$. اگر x یک رأس منحصر به فرد در V' (مانند W') به رأسی در $V_۱$ وصل نباشد آن گاه با حذف یال wx (مانند vx)، دو عنکبوت زخمی باقی می‌ماند.

اگر این حالت نباشد آن گاه با حذف wx یا vx، دو عنکبوت زخمی باقی می‌ماند.

حالت سوم: مسیری بین v, x, y, w وجود دارد به طوری که $x \in V'$ و $y \in W'$.

در این حالت، با حذف یال xy، دو عنکبوت زخمی باقی می‌ماند.

حالت چهارم: مسیری بین w و z و y و x و v وجود دارد به طوری که $x \in V'$ و $y \in V'' \cap W''$ و $z \in W'$.

در این حالت با حذف یال xy یا yz، دو عنکبوت زخمی باقی می‌ماند. توجه کنید که $V_۱$ مستقل است و مسیری بین رأس‌های v, r, s, t, u, w به طوری که $r \in V'$ و $s \in V''$ و $t \in W''$ و $u \in W'$ باشد، وجود ندارد. همچنین هیچ رأسی از $V_۰$ نمی‌تواند به بیشتر از یک رأس $V_۱$ وصل باشد، یالی که دو عنکبوت زخمی را به هم وصل می‌کند، بین پا_رأس از یک درخت و رأس بدنه از درخت دیگر که به یک پا_رأس قبلاً وصل بوده، نمی‌تواند باشد.

□

۵.۲ گراف‌های G با $\gamma_R(G) = ۲\gamma(G)$

در این بخش در پی این هستیم که ویژگی گراف‌های رومی را تعیین کنیم.

با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۲، می‌دانیم که در هر گراف G، $\gamma_R(G) \leq ۲\gamma(G)$ است. گراف G را رومی نامیم هرگاه $\gamma_R(G) = ۲\gamma(G)$.

قضیه‌ی ۳.۳.۲ اولین دسته (گروه) از گراف‌های رومی را به ما نشان می‌دهد. به عبارت دیگر گراف‌هایی به صورت $G = K_۱ + H$ که $\gamma(G) = ۱$ و $\gamma_R(G) = ۲$. به طور معادل هر گراف G از مرتبه‌ی n دارای رأسی با درجه‌ی $n - ۱$ باشد، گراف رومی است. قضیه‌ی ۱.۳.۲ همه‌ی مسیرها و دورهای رومی را مشخص می‌کند، در این خصوص $P_{۳k}$ و $C_{۳k}$ و $P_{۳k+۲}$ و $C_{۳k+۲}$ رومی هستند. قضیه‌ی ۲.۳.۲ مشخص می‌کند که کدام گراف دو بخشی کامل گراف‌های رومی هستند. و در این خصوص $K_{m,n}$ که در آن $\min\{m, n\} \neq ۲$، رومی است.

دو ویژگی ساده گراف‌های رومی را در زیر بیان می‌کنیم:

۱.۵.۲ گزاره([4]). گراف G رومی است اگر و فقط اگر دارای تابع-γ_R، $f=(V_۰,V_۱,V_۲)$ با $n_۱=|V_۱|=۰$ باشد.

اثبات. ($\Leftarrow$) فرض می‌کنیم G یک گراف رومی است و $f=(V_۰,V_۱,V_۲)$ یک تابع-γ_R از گراف G باشد. از قسمت (د) از قضیه‌ی ۳.۲.۲، می‌دانیم که مجموعه $V_۲$ مجموعه‌ی $V_۰$ را احاطه می‌کند و مجموعه‌ی $V_۱ \cup V_۲$، مجموعه‌ی V را احاطه می‌کند، بنابراین:

$$\gamma(G) \leq |V_۱ \cup V_۲| = |V_۱| + |V_۲| \leq |V_۱| + ۲|V_۲| = \gamma_R(G).$$

از طرفی G گراف رومی است یعنی $\gamma_R(G) = ۲\gamma(G)$. و می‌دانیم که:

$$۲\gamma(G) = ۲|V_۱| + ۲|V_۲| = \gamma_R(G) = |V_۱| + ۲|V_۲|$$

$$\Longrightarrow n_۱ = |V_۱| = ۰.$$

($\Longrightarrow$) فرض می‌کنیم $f=(V_۰,V_۱,V_۲)$ یک تابع-γ_R از G با $n_۱=|V_۱|=۰$ باشد. بنابراین،

$$\gamma_R(G) = ۲|V_۲|.$$

چون مجموعه‌ی $V_۲$ مجموعه‌ی $V_۰$ را احاطه می‌کند و $|V_۱|=۰$، لذا $V_۱ \cup V_۲ = V_۲$ مجموعه‌ی V را احاطه می‌کند. در نتیجه $V_۲$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G است. امّا با توجه به قسمت (د) از قضیه‌ی ۳.۲.۲ می‌دانیم که $V_۲$ یک γ-مجموعه برای $G[V_۰ \cup V_۲]$ است. به عبارت دیگر $|V_۲| = \gamma(G)$ و

$$\gamma_R(G) = ۲|V_۲| + |V_۱| = ۲|V_۲| = ۲\gamma(G).$$

لذا:

$$\gamma_R(G) = ۲\gamma(G).$$

در نتیجه G گرافی رومی است. $\square$

۲.۵.۲ گزاره([4]). گراف G رومی است اگر و تنها اگر:

برای هر دو بسته‌بندی $S \subseteq V$، $\gamma(G) \leq \gamma(G-S) + |S|/۲$.

اثبات ($\Leftarrow$) باتوجه به نتیجه‌ی ۵.۲.۲ می‌دانیم که $\gamma_R(G)$، برابر با مینیمم مقدار $۲\gamma(G-S) + |S|$ روی تمام دو بسته‌بندی‌های $S \subset V$ است. بنابراین اگر $\gamma_R(G) = ۲\gamma(G)$ آن گاه:

$$۲\gamma(G-S) + |S| \geq \gamma(G).$$

لذا برای تمام دو بسته‌بندی S، داریم $\gamma(G) \leq ۲\gamma(G-S) + |S|$.

($\Longrightarrow$) با توجه به همین قضیه باید $\{S$ یک دو بسته‌بندی است: $|S|, ۲\gamma(G-S) + \}$ مینیمم شود.

بنابه نتیجه‌ی ۵.۲.۲:

$$\gamma_R(G) = \min\{۲\gamma(G-S) + |S|\}.$$

امّا طبق فرض داریم:

$$\gamma(G) \leq \gamma(G-S) + |S|/۲$$
$$\Longrightarrow ۲\gamma(G) \leq ۲\gamma(G-S) + |S|.$$

چون برای تمام Sها قابل قبول است، ما Sای را در نظر می‌گیریم که مینیمم باشد. لذا

$$۲\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \qquad (۱)$$

امّا بنابه قضیه‌ی ۱.۲.۲ می‌دانیم که:

$$\gamma_R(G) \leq ۲\gamma(G) \qquad (۲)$$

در نتیجه از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\gamma_R(G) = ۲\gamma(G).$$

در نتیجه گراف G رومی است. □

فصل سوم

kـاحاطه‌گری رومی در گراف‌ها

۱.۳ مقدمه

فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت و G یک گراف ساده با مجموعه رأس‌های $V(G)$ باشد. تابع k ـاحاطه‌گری رومی روی گراف $G=(V,E)$ تابعی به صورت $f:V(G)\longrightarrow\{۰,۱,۲\}$ است به طوری که برای هر رأس u با $f(u)=۰$، حداقل k رأس مانند $v_۱,v_۲,\ldots,v_k\in N(u)$ وجود داشته باشند که برای $i=۱,۲,\ldots,k$ داشته باشیم $f(v_i)=۲$.

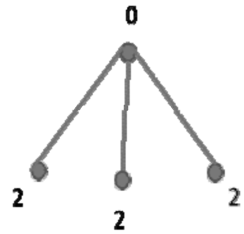
وزن یک تابع kـاحاطه‌گر رومی عبارتست از:

$$f(V)=\sum_{u\in V}f(u).$$

عدد kـاحاطه‌گر رومی گراف G که با $\gamma_{kR}(G)$ نشان داده می‌شود؛ عبارتست از مینیمم وزن در میان وزن‌های توابع رومی ممکن روی گراف G.

قرارداد: $\gamma_{۱R}(G)=\gamma_R(G)$.

۱.۱.۳ مثال. در گراف زیر تابع مشخص شده با مقادیر آن روی رأسها یک تابع ۳ـاحاطه‌گر رومی با وزن ۶ است. امّا در این گراف $\gamma_{۳R}(G)=۴$.



۲.۳ ویژگی‌های تابع kـاحاطه‌گر رومی

۱.۲.۳ گزاره([13]). برای هر گراف G داریم:

$$\gamma_k(G) \leq \gamma_{kR}(G) \leq ۲\gamma_k(G).$$

اثبات. اگر $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع‌ـγ_{kR} باشد، آن گاه $V_۱ \cup V_۲$ یک γ_k ـمجموعه از G است. بنابراین داریم:

$$\gamma_k(G) \leq |V_۱| + |V_۲| \leq |V_۱| + ۲|V_۲| = \gamma_{kR}(G)$$

$$\Longrightarrow \gamma_k(G) \leq \gamma_{kR}(G) \qquad (۱)$$

فرض می‌کنیم D یک γ_kـمجموعه از G باشد، آن گاه $f = (V(G) - D, \phi, D)$ یک مجموعه kـاحاطه‌گر رومی است. همچنین چون $\gamma_{kR}(G)$، مینیمم وزن یک تابع احاطه‌گر رومی است لذا:

$$\gamma_{kR}(G) \leq ۲|D| = ۲\gamma_k(G)$$

$$\Longrightarrow \gamma_{kR}(G) \leq ۲\gamma_k(G) \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\gamma_k(G) \leq \gamma_{kR}(G) \leq ۲\gamma_k(G).$$

□

۳.۳ گراف‌های G با $\gamma_{kR}(G) = ۲\gamma_k(G)$

۱.۳.۳ تعریف([13]). گراف kـرومی: گراف G را kـرومی می‌گویند هرگاه $\gamma_{kR}(G) = ۲\gamma_k(G)$ باشد.

۲.۳.۳ گزاره[13]. گراف G یک گراف kـرومی است اگر و تنها اگر دارای یک تابع γ_{kR}، $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ با $V_۱ = \phi$ باشد.

اثبات. $(\Leftarrow)$ فرض می‌کنیم G یک گراف kـرومی است و فرض می‌کنیم D یک γ_kـمجموعه از G است. در این صورت $f = (V(G) - D, \phi, D)$ یک تابع kـاحاطه‌گر رومی از G است. زیرا:

$$f(V(G)) = ۲|V_۲| + |V_۱| = ۲|D| = ۲\gamma_k(G) = \gamma_{kR}(G).$$

بنابراین f یک تابع‌ـγ_{kR} با $V_۱ = \phi$ است.

$(\Longrightarrow)$ فرض می‌کنیم $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع‌ـγ_{kR} با $V_۱ = \phi$ است و در این صورت:

$$\gamma_{kR}(G) = ۲|V_۲| + |V_۱| = ۲|V_۲|.$$

لذا $V_۲$ یک مجموعه kـاحاطه‌گر رومی G است واز این جا برمی‌آید که:

$$۲\gamma_k(G) \leq ۲|V_۲| = \gamma_{kR}(G) \Longrightarrow ۲\gamma_k(G) \leq \gamma_{kR}(G) \qquad (۱)$$

همچنین چون $\gamma_{kR}(G)$، مینیمم وزن یک تابع kـاحاطه‌گر رومی است لذا:

$$۲\gamma_{kR}(G) \leq ۲|D| = ۲\gamma_k(G) \Longrightarrow \gamma_{kR}(G) \leq ۲\gamma_k(G) \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\gamma_{kR}(G) = ۲\gamma_k(G).$$

لذا G یک گراف kـرومی است. □

۳.۳.۳ نتیجه([13]). گراف G یک، ۱ـ رومی گراف است اگر و تنها اگر دارای تابع‌ـγ_R، $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ با $V_۱ = \phi$ باشد.

اثبات. اثبات این نتیجه مشابه اثبات قضیه‌ی ۲.۲.۲ است. □

۴.۳ kـاحاطه‌گر رومی در گراف‌های خاص

۱.۴.۳ گزاره([13]). اگر G یک گراف از مرتبه‌ی n باشد آن گاه عبارات زیر با هم معادلند:

(i) $\gamma_k(G) = \gamma_{kR}(G)$

(ii) $\gamma_k(G) = n$

(iii) $\Delta(G) \leq k - ۱$

اثبات. $(ii \Longrightarrow i)$ فرض کنید $\gamma_k(G) = \gamma_{kR}(G)$. اگر $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع‌ـγ_{kR} برای گراف G باشد، آن گاه داریم:

$$\gamma_k(G) \leq |V_۱| + |V_۲| \leq |V_۱| + ۲|V_۲| = \gamma_{kR}(G).$$

امّا بنابه فرض داشتیم $\gamma_k(G) = \gamma_{kR}(G)$. لذا نامساوی‌های بالا تبدیل به تساوی می‌شوند. یعنی داریم:

$$|V_۱| + |V_۲| = |V_۱| + ۲|V_۲|$$

$$\Longrightarrow |V_۲| = ۰.$$

امّا چون مجموعه‌ی $V_۲$، مجموعه‌ی $V_۰$ را احاطه می‌کند، لذا $|V_۰| = ۰$. در نتیجه:

$$\gamma_k(G) = \gamma_{kR}(G) = |V_۱| + ۲|V_۲| = |V_۱| = |V(G)| = n$$

$$\Longrightarrow \gamma_k(G) = n.$$

$(ii \Longrightarrow iii)$ فرض می‌کنیم $\gamma_k(G) = n$.

برهان خلف. فرض می‌کنیم $\Delta \geq k$ و x رأسی با ماکزیمم درجه باشد. در این صورت $V(G) - \{x\}$ یک مجموعه‌ی kـاحاطه‌گر است لذا:

$$\gamma_k(G) \leq n - ۱.$$

که تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

$(iii \Longrightarrow ii)$ فرض کنید S یک زیرمجموعه از مجموعه‌ی kـاحاطه‌گر باشد و $S \subsetneqq V(G)$ باشد. در این صورت برای هر رأس $x \in V(G) - S$، x توسط حداقل k رأس از S احاطه می‌شود. لذا:

$$deg(x) \geq k.$$

در حالی که $\Delta \leq k - ۱$.

لذا به تناقض می‌رسیم. در نتیجه $S = V(G)$. یعنی $\gamma_k(G) = n$. به طور مشابه، $\gamma_{kR}(G) = n$. در نتیجه:

$$\gamma_{kR}(G) = \gamma_k(G).$$

□

۲.۴.۳ نتیجه([13]). فرض کنید G یک گراف از مرتبه‌ی n باشد. در این صورت $\gamma_k(G) = \gamma_{kR}(G)$ اگر و تنها اگر $G = \overline{k}_n$.

اثبات. اثبات این نتیجه مشابه اثبات قضیه‌ی ۱.۵.۲ می‌باشد. □

۳.۴.۳ گزاره([13]). اگر G یک گراف از مرتبه‌ی n باشد آن گاه:

$$\gamma_{kR}(G) \geq \min\{n, \gamma_k(G) + k\}.$$

اثبات. اگر $\gamma_{kR}(G) = n$ باشد آن گاه حکم تمام است زیرا مینیمم هر دو عدد کوچکتر یا مساوی آن دو عدد است یعنی:

$$\min\{n, \gamma_k(G) + k\} \leq n = \gamma_{kR}(G).$$

فرض می‌کنیم $\gamma_{kR}(G) < n$، می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\gamma_{kR}(G) \geq \gamma_k(G) + k.$$

حال با برهان خلف داریم:

$$\gamma_{kR}(G) < \gamma_k(G) + k - ۱.$$

اگر $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع‌ـγ_{kR} برای G باشد آن گاه $V_۱ \cup V_۲$ یک مجموعه‌ی k ـاحاطه‌گر از G است و لذا:

$$\gamma_k(G) \leq |V_۱| + |V_۲| \leq |V_۱| + ۲|V_۲| = \gamma_{kR}(G) \leq \gamma_k(G) + k - ۱$$

$$\leq |V_۱| + |V_۲| + k - ۱$$

$$\Longrightarrow \gamma_k(G) \leq |V_۱| + |V_۲| + k - ۱$$

$$|V_۱| + ۲|V_۲| \leq |V_۱| + |V_۲| + k_۱$$

$$\Longrightarrow |V_۲| \leq k - ۱ \Longrightarrow |V_۰| = ۰.$$

از این نتیجه می‌گیریم $|V_۲| = ۰$. لذا

$$\gamma_{kR}(G) = |V_۱| = n.$$

که تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم برقرار است. □

۴.۴.۳ گزاره([13]). فرض کنید G گرافی از مرتبه‌ی n باشد،

(i) اگر $n \leq ۲k$ آن گاه $\gamma_{kR}(G) = n$.

(ii) اگر $n \geq ۲k + ۱$ آن گاه $\gamma_{kR}(G) \geq ۲k$.

(iii) اگر $n \geq ۲k + ۱$ و $\gamma_k(G) = k$، آن گاه

$$\gamma_{kR}(G) = \gamma_k(G) + k = ۲k.$$

اثبات. i) فرض کنید $n \leq ۲k$ و با برهان خلف داریم: $\gamma_{kR}(G) < n$. ($\gamma_{kR}(G) > n$ هیچ گاه امکان‌پذیر نیست) نتیجه می‌گیریم $|V_۰| \geq ۱$.

بنابراین برای تمام توابع‌ـγ_R، $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ داریم: $|V_۲| \geq k$. لذا:

$$\gamma_{kR}(G) = |V_۱| + ۲|V_۲| \geq ۲|V_۲| \geq ۲k \geq n.$$

که منجر به تناقض می‌شود. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

ii) فرض کنید $n \geq ۲k + ۱$. اگر $\gamma_{kR}(G) = n$ باشد حکم تمام است. اگر $\gamma_{kR}(G) < n$ آن گاه $|V_۰| \geq ۱$. بنابراین برای تمام توابع‌ـγ_R، $f(V_۰, V_۱, V_۲)$، $|V_۲| \geq k$. لذا:

$$\gamma_{kR}(G) = |V_۱| + ۲|V_۲| \geq ۲|V_۲| \geq ۲k.$$

iii) فرض کنید $n \geq ۲k + ۱$ و $\gamma_k(G) = k$ باشد. اگر D یک γ_kـمجموعه از G باشد آن گاه $(V(G) - D, \phi, D)$ یک مجموعه‌ی kـاحاطه‌گر رومی از G است. بنابراین چون $\gamma_{kR}(G)$ مینیمم مقدار تابع kـاحاطه‌گر رومی است داریم:

$$\gamma_{kR}(G) \leq ۲|D| = ۲k \Longrightarrow \gamma_{kR}(G) \leq ۲k \qquad (۱)$$

امّا با توجه به قسمت (ii) داشتیم:

$$n \geq ۲k + ۱ \Longrightarrow \gamma_{kR}(G) \geq ۲k \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\gamma_{kR}(G) = ۲k = \gamma_k(G) + k.$$

□

۵.۴.۳ گزاره([13]). اگر G گرافی از مرتبه‌ی n باشد آن گاه:

$$\gamma_{kR}(G) + \gamma_{kR}(\bar{G}) \geq \min\{۲n, ۴k + ۱\} \qquad (۱)$$

به علاوه تساوی در (۱) صدق می‌کند اگر و تنها اگر

(i) $n \leq ۲k$ یا

(ii) $k \geq ۲$ و $n = ۲k + ۱$ یا

(iii) $k = ۱$ و G یا $\bar{G}$ دارای رأسی از درجه‌ی $n - ۱$ و مکمل آن دارای رأسی از درجه‌ی $n - ۲$ است.

اثبات. اگر $n \leq ۲k$ آن گاه، طبق قضیه‌ی قبل داریم:

$$\gamma_{kR}(G) + \gamma_{kR}(\bar{G}) = ۲n = \min\{۲n, ۴k + ۱\}.$$

حال فرض می‌کنیم $n \geq ۲k + ۱$. به علاوه فرض می‌کنیم بدون از دست دادن کلیت مساله $\gamma_{kR}(\bar{G}) \geq \gamma_{kR}(G)$.
اگر $\gamma_{kR}(G) \geq ۲k + ۱$ باشد آن گاه داریم:

$$\gamma_{kR}(G) + \gamma_{kR}(\bar{G}) \geq ۴k + ۲.$$

بنابراین نامساوی (۱) اثبات می‌شود و توجه کنید که تساوی در نامساوی (۱) با فرضیاتی که در بالا گفته شد غیرممکن است.

با توجه به قضیه‌ی قبل تنها مورد باقی مانده، $\gamma_{kR}(G) = ۲k < n$ است. از این نتیجه می‌گیریم که $|V_۰| \geq ۱$.
بنابراین $|V_۲| = k$ وبرای هر تابع γ_{kR}ـ، $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ داریم: $|V_۱| = ۰$.

زمانی که $|V_۲| = k$ باشد، تمام رأسهای $V_۰$ مجاور با تمام رأس‌های $V_۲$ در گراف G است. در نتیجه، در گراف $\bar{G}$، هیچ یالی بین $V_۰$ و $V_۲$ وجود ندارد. با استفاده دوباره از قضیه‌ی قبلی داریم:

$$\gamma_{kR}(\bar{G} = \gamma_{kR}(\bar{G}[V_۲]) + \gamma_{kR}(\bar{G}[V_۰])$$
$$\geq k + \min\{n-k, ۲k\}$$
$$= \min\{n, ۳k\} \qquad (۲)$$

با ترکیب کردن عبارت بالا با $\gamma_{kR}(G) = ۲k$، نامساوی (۱) نتیجه می‌شود.

به وضوح اگر $k = ۱$ و G یا $\bar{G}$ دارای رأس با درجه‌ی $n-۱$ و مکمل آن دارای رأس با درجه‌ی $n-۲$ باشد آن گاه $\gamma_{kR}(G) + \gamma_{kR}(\bar{G}) = ۴k + ۱ = ۵$.

اگر $k \geq ۲$ و $n = ۲k+۱$ باشد آن‌گاه $\gamma_{kR}(G) = ۲k$. حال با توجه به (۲) داریم: $\gamma_{kR}(G)+\gamma_{kR}(\bar{G}) = ۴k+۱$.

برعکس فرض می‌کنیم که $\gamma_{kR}(G) + \gamma_{kR}(\bar{G}) = ۴k + ۱$. با در نظر گرفتن این عبارت و رابطهٔ (۲) داریم:

$$۲k + ۱ = \gamma_{kR}(\bar{G}) = k + \gamma_{kR}(\bar{G}[V_۰]) = \min\{n, ۳k\}.$$

برای $k \geq ۲$، نتیجه می‌گیریم که $n = ۲k + ۱$. اگر $k = ۱$ باشد آن گاه $|V_۲| = ۱$ و $|V_۰| = n - ۱$ و هیچ یالی در گراف $\bar{G}$ بین $V_۰$ و $V_۲$ وجود ندارد. بنابراین G دارای رأسی از درجه‌ی $n-۱$ است و چون $\gamma_{kR}(\bar{G}[V_۰]) = ۲$، $\bar{G}$ دارای رأسی از درجه‌ی $n-۲$ است.

از قضیه‌ی فوق نتیجه‌ی زیر را به دست می‌آید. □

۶.۴.۳ نتیجه([13]). اگر G یک گراف از مرتبه‌ی $n \geq ۳$ باشد آن گاه تساوی در $\gamma_R(G) + \gamma_R(\bar{G}) \geq ۵$ رخ می‌دهد اگر و تنها اگر G یا $\bar{G}$ دارای رأسی از درجه‌ی $n-۱$ باشد و مکمل آن رأسی از درجه‌ی $n-۲$ باشد.

۷.۴.۳ گزاره([13]). فرض کنید $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع‌ـγ_R برای گراف G باشد. در این صورت:

الف) گراف کامل دو بخشی $K_{k,k+۱}$ زیرگرافی از $G[V_۱]$ نیست.

ب) اگر $w \in V_1$ آن گاه $|N_G(w) \cap V_2| \leq k - 1$.

ج) اگر $A = \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \subseteq V_0$ آن گاه

$$|V_1 \cap V_G(u_1) \cap N_G(u_2) \cap \dots \cap N_G(u_k)| \leq 2k.$$

د) V_2 یک γ_kـمجموعه از زیرگراف القایی $G[V_0 \cup V_2]$ است.

هـ) فرض می‌کنیم $H = G[V_0 \cup V_2]$ و $v \in V_2$. در این صورت رأسی مانند $u_1 \in N_H(v) \cap V_0$ وجود دارد به طوری که u_1 دقیقاً دارای $k - 1$ همسایه در $V_2 - \{v\}$ باشد یا v دارای حداکثر $k - 1$ همسایه در $V_2 - \{v\}$ است.

و) فرض کنید $v \in V_2$ به طوری که $d_{G[V_2]}(v) = k - 1$ و V دقیقاً دارای یک همسایه در V_0 مانند w باشد با این خاصیت که w دقیقاً $k - 1$ همسایه در $V_2 - \{v\}$ داشته باشد. اگر مجموعه‌ی $S_1 \subseteq V_1$ طوری باشد که هر رأس از S_1 دقیقاً $k - 1$ همسایه در $V_2 - \{v\}$ داشته باشد آن گاه $N_G(w) \cap S_1 = \phi$.

ز) فرض کنید $S_2 \subseteq V_2$ مجموعه‌ای از رأس‌ها با حداقل درجه‌ی k در $G[V_2]$ باشد. فرض کنید $C = \{c \in V_0 | |N_G(w) \cap V_2| \geq k + 1\}$. در این صورت:

$$|V_0| \geq \max\{|V_2| + \frac{|V_2| + |S_2|}{k} + |C|\}.$$

اثبات. **الف) برهان خلف.** فرض کنید $K_{k,k+1}$ یک زیرگراف از $G[V_2]$ باشد و $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ و $B = \{y_1, y_2, \dots, y_{k+1}\}$ بخش‌های $k_{k,k+1}$ باشند.

تابع $f' = (V_0 \cup B, V_1 - (A \cup B), V_2 \cup A)$ یک تابع kـاحاطه‌گر رومی از G است. وزن این تابع به صورت

زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} f'(V(G)) &= |V_۱| + ۲|V_۲| \\ &= |V_۱ - (A \cup B) + ۲|V_۲ \cup A| \\ &= |V_۱| + ۲|V_۲| - |A| - |B| + ۲|A| \\ &= |V_۱| + ۲|V_۲| + |A| - |B| \\ &= |V_۱| + ۲|V_۲| - ۱ \\ &= f(V(G)) - ۱. \end{aligned}$$

چون تابع تعریف شده یک تابع kـاحاطه‌گر رومی از G است لذا باید وزن آن یعنی $f'(V(G))$ با $\gamma_{kR}(G) = f(V(G))$ برابر باشد. امّا این طور نیست لذا به تناقض می‌رسیم. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

ب) برهان خلف. فرض کنید $|N_G(w) \cap V_۲| \geq k$. تابع $f' = (V_۰ \cup \{w\}, V_۱ - \{w\}, V_۲)$ یک تابع kـاحاطه‌گر رومی روی G است. وزن این تابع برابر است با:

$$\begin{aligned} f'(V(G)) &= |V_۱| + ۲|V_۲| \\ &= |V_۱ - \{w\}| + ۲|V_۲| \\ &= |V_۱| + ۲|V_۲| - ۱ = f(V(G)) - ۱. \end{aligned}$$

چون f' یک تابع kـاحاطه‌گر رومی است باید وزن آن برابر $\gamma_{kR}(G) = f(V(G))$ باشد، در حالی که چنین نیست. بنابراین به تناقض می‌رسیم. لذا فرض خلف باطل وحکم برقرار است.

ج) برهان خلف. فرض کنید:

$$|V_۱ \cap N_G(u_۱) \cap N_G(u_۲) \cap \ldots \cap N_G(u_k)| \geq ۲k + ۱.$$

حال فرض کنید:

$$B = \{u_1, u_2, \ldots, u_{2k+1}\} \subseteq V_1 \cap N_G(u_1) \cap N_G(u_2) \cap \ldots \cap N_G(u_k).$$

از طرفی تابع $f' = ((V_0 - A) \cup B, V_1 - B, V_2 \cup A)$ که یک تابع kـاحاطه‌گر رومی است در نظر می‌گیریم. در این صورت وزن این تابع برابر است با:

$$\begin{aligned} f'(V(G)) &= |V_1| + 2|V_2| \\ &= |V_1 - B| + 2|V_2 \cup A| \\ &= |V_1| + 2|V_2| - |B| + 2|A| \\ &= |V_1| + 2|V_2| - (2k+1) + 2k = |V_1| + 2|V_2| - 1 \\ &= f(V(G)) - 1. \end{aligned}$$

چون این تابع، تابعی kـاحاطه‌گر رومی است، لذا باید وزن آن برابر $\gamma_{kR}(G) = f(V(G))$ شود در حالی که کمتر شده است، در نتیجه به تناقض می‌رسیم. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

د) فرض کنید x رأسی در $V_0 \cup V_2$ باشد که در مجموعه‌ی V_2 نیست. در این صورت x در مجموعه‌ی V_0 قرار دارد. بنابه تعریف تابع k ـاحاطه‌گر رومی، x با رأسی از V_2 مجاور است.

در نتیجه V_2 یک زیرگراف القایی از $G[V_0 \cup V_2]$ است.

هـ) ابتدا v را همسایه‌ی V_0 در نظر می‌گیریم. تابع $f' = (V_0, V_1 \cup \{v\}, V_2 - \{v\})$ یک تابع kـاحاطه‌گر رومی

روی G است. وزن این تابع برابر است با:

$$\begin{aligned} f'(V(G)) &= |V_۱| + ۲|V_۲| \\ &= |V_۱ - \{v\}| + ۲|V_۲| - \{v\}| \\ &= |V_۱| + ۲|V_۲| + ۱ - ۲ = |V_۱| + ۲|V_۲| - ۱ \\ &= f(V(G)) - ۱. \end{aligned}$$

چون این تابع یک تابع احاطه‌گر رومی است، لذا باید وزن آن برابر $\gamma_{kR}(G) = f(V(G))$ باشد در حالی که کمتر است. در نتیجه به تناقض می‌رسیم. لذا فرض خلف باطل وحکم برقرار است.

فرض کنید $N_H(v) \cap V_۰ = \{u_۱, u_۲, \ldots, u_s\}$. اگر u_i دارای حداقل k همسایه در $V_۲ - \{v\}$ برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, s$ باشد، آن گاه تابع $f' = (V_۰, V_۱ \cup \{v\}, V_۲ - \{v\})$ یک تابع kـاحاطه‌گر رومی برای G است. که وزن این تابع همان طورکه در بالا محاسبه شده است برابر است با:

$$f'(V(G)) = f(V(G)) - ۱.$$

لذا به تناقض می‌رسیم.

در نتیجه حداقل یک رأس مانند $u_۱$ در $N_H(v) \cap V_۰$ وجود دارد، به طوری که $u_۱$ دقیقاً $k - ۱$ همسایه در $V_۲ - \{v\}$ داشته باشد. اگر رأس دیگری مانند $w \in N_H(v) \cap V_۰$ وجود داشته باشد به طوری که w دقیقاً $k - ۱$ همسایه در $V_۲ - \{v\}$ داشته باشد. حکم ثابت می‌شود. حال فرض می‌کنیم این طور نباشد. به عکس فرض می‌کنیم که v حداقل k همسایه در $V_۲ - \{v\}$ داشته باشد. در نتیجه هر رأس در $\{u_۲, u_۳, \ldots, u_s, v\}$ حداقل k همسایه در $V_۲ - \{v\}$ دارد. نتیجه می‌گیریم تابع $f' = (V_۰ - \{u_۱\} \cup \{v\}, V_۱ \cup \{u_۱\}, V_۲ - \{v\})$ یک

تابع k ـاحاطه‌گر رومی برای G است. وزن این تابع برابر است با:

$$
\begin{aligned}
f'(V(G)) &= |V_1| + 2|V_2| \\
&= |V_1 \cup \{u_1\}| + 2|V_2 - \{v\}| \\
&= |V_1| + 2|V_2| + 1 - 2 \\
&= |V_1| + 2|V_2| - 1 \\
&= f(V(G)) - 1.
\end{aligned}
$$

چون این تابع یک تابع kـاحاطه‌گر است لذا باید وزن آن برابر $\gamma_{kR}(G) = f(V(G))$ باشد، در حالی که کمتر شده، در نتیجه به تناقض می‌رسیم. لذا فرض خلف باطل وحکم برقرار است.

و) برهان خلف. فرض کنید $N_G(w) \cap S_1 \neq \phi$. لذا فرض می‌کنیم $u \in N_G(w) \cap S_1$.

تابع $f' = ((V_0 - \{w\}) \cup \{u, v\}, V_1 - \{u_1\}, (V_2 - \{v\}) \cup \{w\})$ یک تابع kـاحاطه‌گر رومی برای G است. وزن این تابع برابر است با:

$$
\begin{aligned}
f'(V(G)) &= |V_1| + 2|V_2| \\
&= |V_1 - \{u\}| + 2|(V_2 - \{v\}) \cup \{w\}| \\
&= |V_1| + 2|V_2| - 1 - 2 + 2 \\
&= |V_1| + 2|V_2| - 1 \\
&= f(V(G)) - 1.
\end{aligned}
$$

چون این تابع یک تابع kـاحاطه‌گر است، لذا باید وزن آن برابر $\gamma_{kR}(G) = f(V(G))$ باشد، در حالی که کمتر شده، لذا فرض خلف باطل وحکم برقرار است.

ز) اگر فرض کنیم $|V_۲| > |V_۰|$ آن گاه به تناقض زیر می‌رسیم:

$$\gamma_{kR}(G) = |V_۱| + ۲|V_۲| = |V_۱| + |V_۲| + |V_۲| > |V_۰| + |V_۱| + |V_۲| = n$$

$$\Longrightarrow \gamma_{kR}(G) > n.$$

لذا فرض خلف باطل وحکم برقرار است. در نتیجه:

$$|V_۰| \geq |V_۲|.$$

با توجه به قسمت (هـ)، هر رأس $v \in V_۲$ یک همسایه مانند $u \in V_۰$ دارد که u دارای دقیقاً $k - ۱$ همسایه در $V_۲ - \{v\}$ است و هر رأس $v \in S_۲ \subseteq V_۲$ حداقل دو همسایه در $V_۰$ با این ویژگی دارد.

اگر $V'_۰ \subseteq V_۰$ شامل تمام این همسایه‌ها باشد آن گاه نتیجه می‌گیریم:

$$k|V'_۰| \geq ۲|S_۲| + (|V_۲| - |S_۲|) = |V_۲| + |S_۲|.$$

لذا تمام رأس‌های $V'_۰$ دقیقاً k همسایه در $V_۰$ دارند که مغایر با $C \subseteq V_۰$ است و بنابراین نتیجه می‌گیریم که:

$$|V_۰| \geq (|V_۲| + |S_۲|)/k + |C| \tag{۱}$$

از طرفی دیگر داشتیم:

$$|V_۰| \geq |V_۲| \tag{۲}$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$|V_۰| \geq \max\{|V_۲| + \frac{|V_۲| + |S_۲|}{k} + |C|\}.$$

□

۸.۴.۳ نتیجه([13]). فرض کنید $f=(V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع‌ـγ_R برای گراف G باشد، آن گاه،

الف) $G[V_۱]$ زیرگراف القا شده توسط $V_۱$، دارای ماکزیمم درجه‌ی حداکثر ۱ است.

ب) درگراف G هیچ یالی بین $V_۱$ و$V_۲$ وجود ندارد.

ج) هر رأس $V_۰$ حداکثر با دو رأس $V_۱$ مجاور است.

د) $V_۲$ یک γـمجموعه برای $G[V_۰ \cup V_۲]$ است.

هـ) فرض می‌کنیم $H=G[V_۰ \cup V_۲]$ باشد. در این صورت به ازای هر $v \in V_۲$ حداقل دو $H-Pn$ (همسایگی خارجی) درگراف H دارد.

و) اگر v یک رأس تنها در $G[V_۲]$ باشد و دقیقاً یک همسایگی خارجی $H-Pn$ مانند w که $w \in V_۰$ داشته باشد و با این ویژگی که w هیچ همسایه در $V_۰-\{v\}$ نداشته باشد، آن گاه

$$N_G(w)\cap V_۱=\phi.$$

اثبات. اثبات این نتیجه مانند اثبات قضیه‌ی ۳.۲.۲ در فصل ۲ می‌باشد.

۹.۴.۳ گزاره([13]). اگر G یک گراف از مرتبه n با ماکزیمم درجه‌ی $\Delta \geq k$ باشد آن گاه:

$$\gamma_{kR}(G) \geq \frac{۲n}{\frac{\Delta}{k}+۱}.$$

اثبات. فرض کنید $f=(V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع‌ـγ_{kR} برای G باشد. در نتیجه هر رأس مانند $v \in V_۰$ مجاور با حداقل k رأس از $V_۲$ است. این نتیجه می‌دهد که:

$$k|V_۰| \leq \Delta|V_۲|.$$

با توجه به نامساوی بالا و فرض $k \geq \Delta$ داریم:

$$\begin{aligned}(\frac{\Delta}{k}+1)\gamma_{kR}(G) &= (\frac{\Delta}{k}+1)(|V_1|+2|V_2|)\\ &= (\frac{\Delta}{k}+1)|V_1| + 2(\frac{\Delta}{k}+1)|V_2|\\ &\geq (\frac{\Delta}{k}+1)|V_1| + 2|V_2| + 2|V_0|\\ &\geq 2|V_1| + 2|V_2| + 2|V_0|\\ &= 2n.\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow (\frac{\Delta}{k}+1)\gamma_{kR}(G) \geq 2n$$
$$\Longrightarrow \gamma_{kR}(G) \geq \frac{2n}{\frac{\Delta}{k}+1}.$$

□

۱۰.۴.۳ نتیجه([13]). اگر G یک گراف از مرتبه‌ی n و ماکزیمم درجه‌ی $\Delta = k$ باشد آن‌گاه $\gamma_{kR}(G) = n$
.

اثبات. طبق قضیه‌ی قبل داشتیم:

$$\gamma_{kR}(G) \geq \frac{2n}{\frac{\Delta}{k}+1}.$$

حال با توجه به اینکه $\Delta = k$ داریم:

$$\gamma_{kR}(G) \geq \frac{2n}{\frac{k}{k}+1} = \frac{2n}{2} = n$$
$$\Longrightarrow \gamma_{kR}(G) \geq n \qquad (1)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\gamma_{kR}(G) \leq n \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\gamma_{kR}(G) = n.$$

$\square$

۱۱.۴.۳ گزاره([13]). فرض کنید G یک گراف از مرتبه‌ی n باشد. اگر $\gamma_{kR}(G) < n$ باشد آن گاه $\Delta(G) \geq k+2$ یا حداقل k رأس $u_1, u_2, \ldots, u_k$ وجود دارد به طوری که برای هر $i = 1, 2, \ldots, k$ داریم: $d_G(u_i) = k+1$.

اثبات. فرض کنید $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک تابع-γ_{kR} برای G باشد. با توجه به فرض،

$$|V_0| + |V_1| + |V_2| > \gamma_{kR}(G) = |V_1| + 2|V_2|$$

$$\Longrightarrow |V_0| + |V_1| + |V_2| > |V_1| + 2|V_2|$$

$$\Longrightarrow |V_0| > |V_2| \Longrightarrow |V_0| \geq |V_2| + 1.$$

با توجه به اینکه هر رأس $w \in V_0$ با حداقل k رأس از V_2 مجاور است، نتیجه می‌گیریم:

$$\sum_{u \in v_2} d_G(u) \geq k|V_0| \geq k(|V_2| + 1) \qquad (1)$$

اثبات به برهان خلف. فرض کنید $\Delta(G) \leq k+1$ و حداکثر $k-1$ رأس از درجه‌ی حداکثر $k+1$ وجود داشته باشد. در این صورت:

$$\sum_{u \in V_2} d_G(u) \leq (k-1)(k+1) + [|V_2| - (k-1)]k = (k-1)(k+1) +$$

$$|V_2|k - k(k-1) = (k-1)(k+1-k) + |V_2|k = |V_2|k + k - 1$$

$$\Longrightarrow k|V_2| + k - 1 \geq \sum_{u \in V_2} d_G(u) \qquad (2)$$

حال با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\Longrightarrow k|V_۲| + k - ۱ \geq \sum_{u\in v_۲} d_G(u) \geq k(|V_۲| + ۱) = k|V_۲| + k$$
$$\Longrightarrow k|V_۲| + k - ۱ \geq k|V_۲| + k.$$

لذا به تناقض رسیدیم. در نتیجه، فرض خلف باطل و حکم برقرار است. $\square$

۱۲.۴.۳ گزاره([13]). فرض کنید G یک گراف از مرتبه n باشد در این صورت $\gamma_{kR}(G) < n$ اگر و فقط اگر G دارای زیرگراف القایی دوبخشی H با بخش‌های X و Y باشد به طوری که $|X| > |Y| \geq k$ و برای هر $v \in X$، $d_H(v) \geq k$.

اثبات. ($\Longrightarrow$) در ابتدا فرض کنید G شامل زیرگراف دو بخشی H با بخش‌های X و Y باشد به طوری که $|X| > |Y| \geq k$ و برای هر $v \in X$، $d_H(v) \geq k$. در این صورت تابع $f = (X, V(G) - (X \cup Y), Y)$ یک تابع kـاحاطه‌گر رومی برای G است. وزن این تابع برابر است با:

$$\begin{aligned} f(V(G)) &= |V_۱| + ۲|V_۲| \\ &= |V(G) - (X \cup Y)| + ۲|Y| \\ &= n - |X| - |Y| + ۲|Y| = n - |X| + |Y| < n \\ &\Longrightarrow \gamma_{kR}(G) = f(v(G)) < n. \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) فرض می‌کنیم $\gamma_{kR}(G) < n$ باشد و فرض کنید $(V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع-γ_{kR} باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$|V_۰| + |V_۱| + |V_۲| > \gamma_{kR}(G) = |V_۰| + ۲|V_۱|$$

$$\Longrightarrow |V_۰| + |V_۱| + |V_۲| > |V_۱| + ۲|V_۲|$$

$$\Longrightarrow |V_۰| > |V_۱| \Longrightarrow |V_۰| \geq |V_۲| + ۱.$$

چون $|V_۰| > ۰$، نتیجه می‌گیریم $|V_۲| \geq k$.

حال گراف دو بخشی H با بخش‌های $V_۰$ و $V_۲$ را تعریف می‌کنیم، که تمام یال‌های آن از وصل کردن رأس‌های $V_۰$ به رأس‌های $V_۲$ تشکیل شده‌اند. چون برای هر رأس $v \in V_۰$، $d_H(v) \geq k$، در این صورت اثبات کامل می‌شود.

□

تعریف. اگر $w(G)$ تعداد مؤلفه (عناصر) و $m(G)$ تعداد یال‌ها و $n(G)$ تعداد رأس‌ها در گراف G باشد آن گاه $c(G) = m(G) - n(G) + w(G)$ را عدد سیکلوماتیک گویند.

گراف G را **جنگل** نامیم اگر و فقط عدد سیکلوماتیک آن برابر صفر باشد. یعنی:

$$c(G) = ۰.$$

گراف G را گرافی **تک دور** نامیم اگر و فقط اگر عدد سیکلوماتیک آن برابر یک باشد. یعنی:

$$c(G) = ۱.$$

۱۳.۴.۳ گزاره([13]). فرض کنید G یک گراف از مرتبه‌ی n باشد. اگر $k \geq ۲$ باشد آن گاه:

$$\gamma_{kR}(G) \geq \min\{n, n + ۱ - c(G)\}.$$

اثبات. کافی است نامساوی بالا را برای $k = ۲$ اثبات کنیم. برای $k = ۲$ با استقراء روی $c(G)$ پیش می‌رویم. در ابتدا فرض کنید $c(G) \leq ۱$. با برهان خلف فرض می‌کنیم $\gamma_{۲R}(G) < n$. طبق قضیه‌ی قبل، گراف G شامل زیرگراف دو بخشی H با دو بخش X و Y است به طوری که $۲ \leq |Y| < |X|$ و برای هر $v \in X$، $d_H(v) \geq ۲$. از این نتیجه می‌گیریم:

$$c(H) = m(H) - n(H) + w(H) \geq ۲|X| - |X| - |Y| + ۱ \geq ۲.$$

در نتیجه H و بنابراین G شامل حداقل دو دور است.

حال، با توجه به اینکه در ابتدا فرض کردیم $c(G) \leq ۱$، به تناقض می‌رسیم.

حال فرض کنید $c(G) \geq ۲$. فرض کنید $e = uv$ یک یال از دور C باشد و زیرگراف H را به این صورت تعریف می‌کنیم $H = G - e$. حال،

$$c(H) = c(G) - ۱ \geq ۱.$$

از فرض استقراء نتیجه می‌شود که:

$$\gamma_{۲R}(G) \geq n + ۱ - c(H).$$

حال فرض کنید $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع‌ـγ_{kR} برای گراف G باشد. اگر $f(u) = ۰$ و $f(v) = ۲$ باشد آن گاه:

$$f' = (V_۰ - \{u\}, V_۱ \cup \{u\}, V_۲).$$

یک تابع ۲ـاحاطه‌گر رومی برای H است. وزن این تابع برابر است با:

$$\begin{aligned} f'(V(G)) = \gamma_{۲R}(G) &= |V_۱| + ۲|V_۲| \\ &= |V_۱ \cup \{u\}| + ۲|V_۲| - ۱ \\ &\geq \gamma_{۲R}(H) - ۱ \geq n - c(H) = n + ۱ - c(G). \end{aligned}$$

تمام حالت‌های ممکن برای $c(G)$ همین‌طور بررسی می‌شوند. □

۱۴.۴.۳ نتیجه([13]). اگر G یک گراف از مرتبه‌ی n باحداکثر یک دور باشد آن گاه برای $k \geq ۲$ داریم $\gamma_{kR}(G) = n$.

اثبات. طبق قضیه‌ی قبل داریم:

$$\gamma_{kR}(G) \geq \min\{n, n + ۱ - c(G)\}.$$

کافی است برای $k = ۲$ ثابت کنیم.

$$\gamma_{۲R}(G) \geq \min\{n, n + ۱ - C(G)\}.$$

در صورت نتیجه بیان شده است، گراف دارای یک دور است یعنی $C(G) = ۱$ لذا داریم:

$$\gamma_{۲R}(G) \geq \min\{n, n\} = n \Longrightarrow \gamma_{۲R}(G) \geq n \tag{۱}$$

از طرفی داریم:

$$\gamma_{۲R}(G) \leq n \tag{۲}$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\gamma_{۲R}(G) = n.$$

□

گراف G از مرتبه‌ی ۷، شامل دو دور $x_۱x_۲x_۳x_۴x_۱$ و $y_۱y_۲y_۳y_۴y_۱$ با $x_۱ = y_۱$ می‌باشد و تابع ۲ـاحاطه‌گر رومی آن به این صورت تعریف می‌شود که $f(x_۱) = f(x_۳) = f(y_۳) = ۲$ و $f(x_۲) = f(x_۴) = f(y_۲) = f(y_۴) = ۰$ نشان می‌دهد که نتیجه‌ی قبل برای گراف‌های با بیشتر از یک دور صادق نیست.

با توجه به مثال بالا، به راحتی می‌توان دید عدد ۲ـاحاطه‌گر رومی برای هر $i \times j$ گراف شبکه‌ای $G_{i,j}$ وقتی $i, j \geq ۳$ $\gamma_{۲R}(G_{i,j}) < ij$. به علاوه برای عدد ۳ـاحاطه‌گر رومی برای گراف‌های شبکه‌ای $i \geq ۵$ و $j \geq ۹$،

$\gamma_{3R}(G_{i,j}) < ij$ و از قضیه‌ی ۱۷.۲.۳ نتیجه می‌گیریم وقتی $k \geq 4$ شود داریم:

$$\gamma_{kR}(G_{i,j}) = ij.$$

۱۵.۴.۳ تعریف[13]. گرافی که در آن تمام دورها از یال مجزا باشند و یا به عبارت دیگر هیچ دو دور متمایزی در گراف یال مشترک نداشته باشد را گراف کاکتوس می‌نامند.

۱۶.۴.۳ لم([18]). اگر G یک گراف کاکتوس باشد آن گاه:

$$2m(G) \leq 3n(G) - 3.$$

۱۷.۴.۳ گزاره([13]). اگر G یک گراف کاکتوس از مرتبه‌ی n باشد و $G \neq P_2$، آن گاه برای $k \geq 3$، $\gamma_{kR}(G) = n$.

اثبات. کافی است ثابت کنیم $\gamma_{3R}(G) = n$ است. با برهان خلف فرض می‌کنیم $\gamma_{3R}(G) < n$ با توجه به قضیه‌ی ۱۶.۲.۳، G شامل زیرگراف دو بخشی H با دو بخش X و Y است به طوری که $|X| > |Y| \geq 3$ و برای هر $v \in X$، $d_H(v) \geq 3$. این نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} 2m(H) &\geq 6|X| + 3|Y| = 3(|X| + |Y|) \\ &= (V(H)) > 3(V(H) - 1) = 3(n(H) - 1) = 3n(H) - 3 \\ &\Longrightarrow 2m(H) > 3n(H) - 3. \end{aligned}$$

با توجه به لم قبلی به تناقض می‌رسیم لذا G گراف کاکتوس نیست. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است یعنی G گراف کاکتوس است. □

۱۸.۴.۳ گزاره([13]). فرض کنید W_n یک چرخ از مرتبه‌ی n است. برای $k \geq ۳$ داریم: $\gamma_{kR}(W_n) = n$ و $\gamma_R(W_n) = ۲$ و وقتی که $n \geq ۴$ باشد، در این صورت:

$$\gamma_{۲R}(W_n) = [\frac{۲(n-۱)}{۳}] + ۲.$$

اثبات. فرض کنید O مرکز و $v_۱, \ldots, v_{n-۱}$ رأس‌های محیطی W_n باشند. فرض کنید $k \geq ۳$. حال فرض کنید f یک $\gamma_{kR}(W_n)$ـ تابع باشد. اگر به ازای یک i ، $f(v_i) = ۰$ باشد آن گاه $f(O) = f(v_{i-۱}) = f(v_{i+۱}) = ۲$.
لذا

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} f(v_i) + f(O) \geq n.$$

از طرفی $(\phi, V(W_n), \phi)$ یک تابع kـاحاطه‌گر رومی است. لذا

$$\gamma_{kR}(G) = n.$$

در W_n کافی است رأس مرکز را برابر ۲ قرار دهیم، یعنی $f(O) = ۲$. حال، چون O با تمام رأس‌های محیطی مجاور است لذا طبق تعریف تابع احاطه‌گر رومی تمام رأس‌های محیطی برابر صفر می‌شوند. در نتیجه $\gamma_R(W_n) = ۲$.

حال فرض کنید $k = ۲$. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای دور محیطی است. در این صورت $f = (V(W_n) - (S \cup \{O\}), \phi, S \cup \{O\})$ یک تابع ۲ـاحاطه‌گر رومی است و به راحتی می‌توان دید که f یک تابع ۲ـاحاطه‌گر رومی مینیمم است. لذا $\gamma_{۲R}(W_n) = \lceil \frac{۲(n-۱)}{۳} \rceil + ۲$. □

مراجع

[1] W. W. R. Ball, Mathematical recreation and problems of past and present times, Mack Millan, London, (1982).

[2] J. A. Bondy and U. S. R Murty. Graph theory, Volume 244 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2008.

[3] E. W. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince, and D. B. West, Extremal problems for Roman dimination, SIAMJ. Discrete Math. 23 (2009), 1575-1586.

[4] E. J. Cockayne, P. A. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi, and S. T. Hedetniemi, Roman domination in graphs, Discrete Math. 278(2004), no. 1-3, 11-22.

[5] P. A. Cockayne, P. A. Dreyer, Jr., S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, A. A. McRae, The algorithmic complexity of Roman dmination, Manuscript (2003).

[6] E. J. Cockayne, P. J. P. Grobler, W. Gründlingh, J. Munganga, J. H. van Vuuren, Protection of a graph, Utilitas Math., to appear.

[7] P. A. Dreyer, Jr., Applications and variations of domination in graphs, Ph.D. Thesis, Rutgers University, October 2000.

[8] M. Farber, Independent domiation in chordal graphs, Oper. Res. Lett. 1(1982) 134-138.

[9] J. F. Fink and M. S. Jacobson, On n-domiation in graphs, n-depencdence and forbidden subgraphs, Graph theory with applications to algorithms and computer

science, John Wiley and Sons, New York (1985), 301-311.

[10] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, Fundamentals of Domination in Graph, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 208, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.

[11] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, Peters. Slater Domination in Graphs: Advanced Topics, Monographs and Textbooks in Pure, and Applied Mathematics, 209. Mercel Dekker, Inc., New York, 1998.

[12] M. A. Henning, A characterization of Roman trees, Discuss. Math. Graph Theory 22 (2) (2002) 325-334.

[13] K. Kammerling, L. Volkmann, Roman K-Domiantion in graphs, 46 (2009) No. 6, 1309-1318.

[14] T. Kikuno, N. Uoshida and Y. Kakuda, A linear algorithm for the dimination number of series-parallel graph, in: Graph theory with Applications to Algorithms and Computer Science, Kalamozoo, M1, 1984(wiley, New York, 1985) 501-506.

[15] A. A. Mcrae, Private, Communicaion, March 2000.

[16] C. S. Revelle and K. E. Rosing, Defendens imperium romanum: a classical problem in military startegy, Amer. Math. Monthly 107(7)(2000), 585-594.

[17] L. Steward, Defend the Roman Empirel, Sci, Amer. 281(6)(1991) 136-139.

[18] L. Volkmann, Graphen and allen Ecken und kanten, RWTH Aacea 2006. XVI, 377 PP. http://WWW. mathe 2. rwth-aachen-de/∼ uebung / GT/ grphhen. html.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

احاطه‌گر	domination
پا_رأس	foot vertex
پوشش رأسی	vertex cover
تابع_ $\gamma_R(G)$	$\gamma_R(G)$-function
خروج از مرکز	eccentricity
دوبسته‌بندی	2-packing
رأس	vertex
زیرتقسیم‌شده	subdivided
زیرگراف	subgraph
سر_رأس	head vertex
شعاع	radious
ضرب دکارتی	cartesian product
عدد سیکلوماتیک	cyclomatic number
عنکبوت زخمی	wounded spider
عنکبوت سالم	healthy spider
غیر زاید	irredudant
قطر	diameter
گراف دوبخشی	bipartite graph
گراف nبخشی	n-partite graph
گراف رومی	Roman graph

گراف kـرومی . . . k-Roman graph

گراف شبکه‌ای . . . grid graph

گراف کاکتوس . . . cactus graph

گراف کامل . . . complete graph

گراف همبند . . . connected graph

گشت . . . walk

مجاور . . . adjacent

مجموعه احاطه‌گر . . . dominating set

مجموعه kـاحاطه‌گر . . . k-dominating set

$\gamma(G)$ـمجموعه . . . $\gamma(G)$-set

مستقل . . . independent

مسیر . . . path

مکمل . . . complement

مؤلفه . . . component

وزن . . . weight

همسایگی باز . . . open neighbourhood

همسایگی بسته . . . close neighbourhood

همسایگی خصوصی . . . private neighbourhood

یال . . . edge

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

adjacent .... مجاور

bipartite graph .... گراف دوبخشی

cactus graph .... گراف کاکتوس

cartesian product .... ضرب دکارتی

close neighbourhood .... همسایگی بسته

complement .... مکمل

complete graph .... گراف کامل

component .... مؤلفه

connected graph .... گراف همبند

cyclomatic number .... عدد سیکلوماتیک

diameter .... قطر

dominating set .... مجموعه احاطه‌گر

domination .... احاطه‌گر

eccentricity .... خروج از مرکز

edge .... یال

foot vertex .... پا-رأس

$\gamma_R(G)$-function .... تابع $\gamma_R(G)$

grid graph .... گراف شبکه‌ای

head vertex .... سر-رأس

healthy spider .... عنکبوت سالم

مستقل	independent
غیر زاید	irredunedent
مجموعه kـاحاطه‌گر	k-dominating set
گراف kـرومی	k-Roman graph
گرافnـبخشی	n-partite graph
همسایگی باز	open neighbourhood
دوبسته‌بندی	2-packing
مسیر	path
همسایگی خصوصی	private neighbourhood
شعاع	radious
گراف رومی	Roman graph
$\gamma(G)$ـمجموعه	$\gamma(G)$-set
زیرتقسیم شده	subdivided
زیرگراف	subgraph
گشت	walk
رأس	vertex
رأس پوششی	vertex cover
وزن	weight
عنکبوت زخمی	wounded spider

Abstract

A Roman dominating function on a graph $G = (V, E)$ is a function $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ satisfying the condition that every vertex u for which $f(u) = 0$ is adjacent to at least one vertex v for which $f(v) = 2$. The weight of a Roman dominating function is the value $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. The menimum weight of a Roman dominating function on a graph G is called the Roman domination number of G, and denoted by $\gamma_R(G)$.

Let k be a positive integer, and let G be a simple graph with vertex set $V(G)$. A Roman k-dominating function on G is a function $f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ such that every vertex u for which $f(u) = 0$ is adjacent to at least k vertices $v_1, \ldots, v_k$ with $f(v_i) = 2$ for $i = 1, 2, \ldots, k$. The weight of a Roman k-dominating function is the value $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. The minimum weight of a Roman k-dominating function on a graph G is called the Roman k-domination number $\gamma_{kR}(G)$ of G.

Key Words: Graph Theory, Domination, Roman Domination, k-roman domination.

In the Name of God

Sharood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

Department of Mathematics

M. S Thesis

Title

k-Roman Domination in graphs

Supervisor:

Dr. Nader Jafari Rad

By:

Parinaz Farhadi

July 2012