دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

برآوردهای میانگین انتگرالی برای چندجمله‌ای ها

نگارش

مرتضی مسلمی

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

استاد مشاور

دکتر ابراهیم هاشمی

تیر ۱۳۹۱

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت

قبل از هرچیزخداوند را شاکرم که این موهبت را نصیب من نمود تا در وادی علم و معرفت ، قدمی هرچند ناچیز بردارم. از استاد عزیز و گرانقدرم آقای دکتر زیره به خاطر کمک های بی‌دریغشان صمیمانه تشکر می کنم که بی شک نگارش این مهم جز با راهنمایی های ایشان میسر نبود. همچنین مراتب تشکر و قدردانی خود را از استاد مشاورم آقای دکتر ابراهیم هاشمی ابراز می‌دارم. از خداوند منان آرزوی سلامتی و توفیق روز افزون برای این اساتید خواهانم.

چکیده

در این پایان نامه ما به بیان نامساوی هایی برای برآورد میانگین انتگرا لی چندجمله‌ای هایی که صفرهای آن ها در یک دایره اند، می‌پردازیم. نتایج ما نامساوی های مشهوری از عزیز و شاه ونتایج معروف دیگری در این راستا را تعمیم می‌دهد و دقیق‌تر خواهدنمود.

واژه‌های کلیدی: چند جمله ای، ماکزیمم قدر مطلق ، مشتق یک چندجمله‌ای ، برآوردهای میانگین انتگرالی

پیشگفتار

در آنالیز مختلط به عنوان شاخه ای از ریاضیات، چندجمله‌ای های مختلط نقشی اساسی دارند. از موارد قابل بحث در باب چندجمله‌ای ها می‌توان به یافتن محل صفرها، برآوردهای مشتق معمولی و قطبی ، رشد ماکزیمم قدرمطلق و برآوردهای میانگین انتگرالی آن ها و ... اشاره کرد. در تمامی این زمینه ها اصل ماکزیمم قدرمطلق نیز نقشی کلیدی ایفا می‌کند. در این راستا مطالعات و بررسی های فراوانی توسط بزرگان و اندیشمندانی چون عبدالعزیز، محمدشاه، دوان، توران، رحمان، اسمیچر، گوویل و ... انجام شده است. ما نیز با ارائه این پایان نامه و با بیان نامساوی های میانگین انتگرالی چندجمله‌ای ها گامی هرچند کوچک در جهت بهبود این نامساوی ها برخواهیم داشت. از این رو در فصل اوّل تحت عنوان مقدمه به بیان قضایایی می‌پردازیم که در فصول بعدی مورد استفاده خواهند بود. درفصل دوّم با بیان نامساوی هایی در مورد برآورد میانگین انتگرالی چندجمله‌ای ها با توجه به قرار دادن محدودیت روی صفرهایشان به تعمیم روابط مطرح شده تاکنون و اشاره شده در فصل اوّل خواهیم پرداخت. درفصل سوّم با بررسی نامساوی های شامل میانگین انتگرالی و مشتق قطبی چندجمله‌ای ها، سعی در اثبات روابطی از این دست خواهیم داشت.

لازم به ذکر است قضیه مشخص شده با علامت (*) و اثبات آن به همراه نتایج حاصل، در فصل سوم متعلق به شخص نویسنده این پایان نامه می باشد.

فهرست مطالب

فصل ۱
مقدمه

در این فصل تحت عنوان مقدمه، ابتدا چند قضیه مقدماتی از مباحث آنالیز مختلط را مطرح می‌کنیم . در ادامه قضایایی در باب برآوردهای مشتق یک چندجمله‌ای مختلط بیان می‌کنیم و همچنین درخاتمه فصل چند قضیه مقدماتی دیگر در مورد برآوردهای میانگین انتگرالی چندجمله‌ای ها ذکر می‌کنیم.

۱.۱ قضایای مقدماتی

در این بخش چند قضیه مشهور را که همگی در فصول آتی مورد استفاده خواهندبود، مطرح می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۱. (قضیه اساسی جبر) اگر $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، آنگاه اعداد مختلط $z_1, z_2, \ldots, z_n$ موجودند بطوریکه:

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$$

و z_j ها لزوماً متمایز نیستند.

قضیه ۲.۱.۱. (اصل ماکزیمم قدر مطلق) اگر تابع $f(z)$ در میدان کراندار D تحلیلی و بربستار آن $\overline{D}$ پیوسته باشد، آن گاه $|f(z)|$ ماکزیممی بر مرز D دارد. بعلاوه درنقاط درونی ماکزیمم ندارد، مگر این که تابع ثابت باشد.

و قضیه روشه [۱] به شرح زیر است.

قضیه ۳.۱.۱. فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر روی خم ساده بسته C تحلیلی باشند و بر C ، $\mid g(z) \mid < \mid f(z) \mid$. در این صورت $f(z)+g(z)$ و $f(z)$ درون C تعداد صفر های برابر دارند.

درآنالیز مختلط قضیه گاوس – لوکاس[۲] ، رابطه ای هندسی بین ریشه های یک چندجمله‌ای و ریشه های مشتق آن ارائه می‌دهد .

قضیه ۴.۱.۱. اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای مختلط غیر ثابت باشد، در این صورت همه صفر های مشتق آن $p'(z)$ ، در پوسته محدب مجموعه صفرهای $p(z)$ واقع اند.

اثبات. فرض کنیم $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ چندجمله‌ای از درجه n باشد. طبق قضیه اساسی جبر اعداد مختلط $z_1, z_2, ..., z_n$ موجودند که

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$$

و z_j ها بعنوان صفرهای چندجمله‌ای $p(z)$ لزوماً متمایز نیستند. فرض کنیم z عددی مختلط و بعلاوه $p(z) \neq 0$. در این صورت برای مشتق لگاریتمی داریم:

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - z_j}.$$

در حالت خاص، اگر z صفری از چندجمله‌ای p' باشد و $p(z) \neq 0$ ، دراین صورت

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - z_j} = 0 .$$

یا

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{z} - \overline{z_j}}{\mid z - z_j \mid^2} = 0 .$$

[۱] Rouche

[۲] Gauss-Lucas

همچنین رابطه اخیر را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\mid z-z_j\mid^2})\overline{z}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\mid z-z_j\mid^2}\overline{z_j}\,.$$

با مزدوج گیری ازطرفین، ملاحظه می‌شود z بصورت یک مجموع وزن دار با ضرایب مثبت با مجموع برابر یک است. در این حالت این گونه قضیه به اثبات می‌رسد.

در حالت دیگر، اگر $p(z)=p'(z)=0$ ، در این صورت:

$$z=1.z+0.z_j.$$

و کماکان می‌توان z را به عنوان ترکیبی خطی از صفرهای چندجمله‌ای p در نظر گرفت.

$\square$

۲.۱ برآوردهای مشتق روی دایره یکه

فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای درجه n و $p'(z)$ مشتق آن باشد. در این بخش مسأله برآوردکردن ماکزیمم $\mid p'(z)\mid$ روی دایره یکه $\mid z\mid=1$ ، را با در نظر گرفتن برخی مفروضات روی صفرهای چندجمله ای $p(z)$ در نظر می گیریم و نتایج دقیقی در این باره بیان خواهیم کرد و تمامی نتایج این بخش شامل برآوردهای مشتق روی دایره یکه است. در این جا مطلب را با بیان یک نامساوی مشهور و منسوب به برنشتاین[۳] شروع می‌کنیم. اثبات این نامساوی برای چندجمله‌ای های مثلثاتی از درجه $2n$ انجام شده است [۱۶][۴].

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و روی دایره $\mid z\mid\leq 1$ ،

$$\max_{|z|=1}\mid p(z)\mid\leq 1\,.$$

[۳] bernstein

[۴] اعداد داخل کروشه اشاره به مراجع دارند.

در این صورت:

$$\max_{|z|=۱} | p'(z) | \leq n \; . \qquad (۱.۱)$$

تذکر ۲.۲.۱. تساوی در رابطه (۱.۱) برقرار است اگر و تنها اگر $p(z)$ تمامی صفر های خود را در مبدأ داشته باشد.

به عنوان نتیجه ای از نامساوی برنشتاین می‌توان ثابت کرد:

نتیجه ۳.۲.۱. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n باشد، در این صورت:

$$\max_{|z|=۱} | p'(z) | \leq n \max_{|z|=۱} | p(z) | \; . \qquad (۲.۱)$$

بر اساس حدس اردوش[۵] و اثباتی که توسط لاکس[۶] ارائه شد [۱۲]، اگر $p(z)$ صفری در $| z | < ۱$ نداشته باشد، در این صورت:

$$\max_{|z|=۱} | p'(z) | \leq \frac{n}{۲} \max_{|z|=۱} | p(z) | \; .$$

از طرف دیگر توران[۷] [۱۸] نشان داد :

قضیه ٤.۲.۱. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد. اگر $p(z)$ تمامی صفرهای خود را در دایره $| z | \leq ۱$ داشته باشد، در این صورت :

$$\frac{n}{۲} \max_{|z|=۱} | p(z) | \leq \max_{|z|=۱} | p'(z) | \; . \qquad (۳.۱)$$

[۵] Erdös
[۶] Lax
[۷] Turan

تذکر ۵.۲.۱. در رابطه (۳.۱) برای چندجمله‌ای های به صورت $p(z) = az^n + b$ که درآن $\mid a \mid = \mid b \mid$ ، تساوی برقرار است.

به عنوان تعمیمی از نامساوی(۳.۱) داریم: [۱]

$$\frac{n}{۲}\ [\max_{|z|=۱} \mid p(z) \mid + \min_{|z|=۱} \mid p(z) \mid] \leq \max_{|z|=۱} \mid p'(z) \mid . \tag{۴.۱}$$

تساوی در نامساوی فوق برای چندجمله‌ای های به فرم $p(z) = az^n + b$ که درآن $\mid a \mid \geq \mid b \mid$ ، برقرار است. قضیه زیراز مالک [۸] [۱۴] نیز تعمیم دیگری از نامساوی(۳.۱) است .

قضیه ۶.۲.۱. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و تمامی صفرهای خود را در دایره $\mid z \mid \leq k$ ؛ $k \leq ۱$ ، داشته باشد. در این صورت :

$$\frac{n}{۱+k}\ \max_{|z|=۱} \mid p(z) \mid \leq\ \max_{|z|=۱} \mid p'(z) \mid . \tag{۵.۱}$$

همچنین گوویل [۹] [۹] به عنوان تعمیمی از نامساوی (۵.۱) تحت همان شرایط نامساوی زیر را به اثبات رسانده است.

$$\frac{n}{۱+k}\ [\max_{|z|=۱} \mid p(z) \mid + \frac{۱}{k^{n-۱}} \min_{|z|=k} \mid p(z) \mid] \leq \max_{|z|=۱} \mid p'(z) \mid . \tag{۶.۱}$$

تذکر ۷.۲.۱. نامساوی های (۵.۱) و(۶.۱) برای چندجمله‌ای $p(z) = (z+k)^n$ در حالت تساوی برقرار است، زیرا :

[۸] Malik
[۹] Govil

$$\max_{|z|=1} | p(z) |= \max_{|z|=1} | (z+k)^n |= (1+k)^n$$

و

$$\min_{|z|=k} | p(z) |= \min_{|z|=k} | (z+k)^n |= 0$$

و

$$\max_{|z|=1} | p'(z) |= \max_{|z|=1} | n(z+k)^{n-1} |= n(1+k)^{n-1}$$

ولذا (۶.۱)در حالت تساوی برقرار است.

در ادامه رده ی دیگری از چندجمله‌ای ها را که صفرهای آن همگی در ناحیه $| z |\leq k$ ؛ $k \geq 1$ ، واقع باشند، در نظرمی گیریم.

فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای درجه n و صفرهای آن همگی در ناحیه $| z |\leq k$ ؛ $k \geq 1$ ، واقع باشند، گوویل [۱۰] نشان داد :

$$n \max_{|z|=1} | p(z) |\leq (1+k^n) \max_{|z|=1} | p'(z) | . \tag{۷.۱}$$

تساوی برای چندجمله‌ای های به فرم $p(z) = az^n + bk^n$ که در آن $| a |=| b |$ و $k \geq 1$ ، برقرار است.

۳.۱ میانگین های انتگرالی روی دایره یکه

فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n و $p'(z)$ مشتق آن باشد. در این صورت برای $r \geq 1$ ،

$$[\int_0^{2\pi} | p'(e^{i\theta}) |^r \, d\theta\,]^{\frac{1}{r}} \leq \; n\,[\int_0^{2\pi} | p(e^{i\theta}) |^r \, d\theta\,]^{\frac{1}{r}}. \tag{۸.۱}$$

نامساوی فوق منسوب به زیگماند[۱۰] است که آن را برای چندجمله‌ای های مثلثاتی و نه تنها برای چند جمله ای های به فرم $p(e^{i\theta})$ به اثبات رسانیده است .

به موجب نتیجه ای کلاسیک از هاردی[۱۱] [۱۱] برای هر تابع تام $f(z)$ و $t > ۰$،

$$[\int_{۰}^{۲\pi} | f(te^{i\theta}) |^r \, d\theta \,]^{\frac{۱}{r}} \qquad (۰ < r < \infty)$$

نسبت به r یک تابع نانزولی است و افزون بر این:

$$\lim_{r\to\infty}[\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} | f(te^{i\theta}) |^r \, d\theta \,]^{\frac{۱}{r}} = \max_{۰\leq\theta<۲\pi} | f(te^{i\theta}) |= \max_{|z|=t} | f(z) | .$$

بنابراین، از آن جا که یک چندجمله‌ای مانند $p(z)$ تابعی تام است ، روی دایره یکه داریم:

$$\lim_{r\to\infty}[\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} | p(e^{i\theta}) |^r \, d\theta \,]^{\frac{۱}{r}} = \max_{|z|=۱} | p(z) | .$$

تذکر ۱.۳.۱. با فرض $r \longrightarrow \infty$ نامساوی (۸.۱) ، نامساوی برنشتاین را نتیجه می‌دهد.

برای رده چندجمله‌ای هایی که تمامی صفرهای خود را درناحیه $| z |\leq ۱$ داشته باشند، مالک [۱۳] تعمیمی از (۳.۱) بدست آورد که در آن سمت راست این رابطه را با ضریبی از میانگین انتگرالی $| p(z) |$ روی دایره یکه جایگزین کرد. در حقیقت وی قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه ۲.۳.۱. اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای درجه n و تمامی صفر های خود را در دایره $| z |\leq ۱$ ، داشته باشد، در این صورت برای هر $r > ۰$:

$$n \;\; [\int_{۰}^{۲\pi} | p(e^{i\theta}) |^r \, d\theta \,]^{\frac{۱}{r}} \leq [\int_{۰}^{۲\pi} | ۱ + e^{i\theta} |^r \, d\theta \,]^{\frac{۱}{r}} \; \max_{|z|=۱} | p'(z) | . \qquad (۹.۱)$$

---
[۱۰] Zygmund
[۱۱] Hardy

تذکر ۳.۳.۱. برای چندجمله‌ای $p(z) = (z+۱)^n$ در رابطه(۹.۱) تساوی برقرار است و با فرض $r \longrightarrow \infty$ در این رابطه، نامساوی (۳.۱) را خواهیم داشت.

عزیز [۱۲] [۳] به عنوان تعمیمی از (۷.۱)، نامساوی دیگری ثابت کرد که در آن سمت راست (۷.۱) با ضریبی از میانگین انتگرالی $|\ p(z)\ |$ روی $|\ z\ |= ۱$، جایگزین شده است . در حقیقت وی نشان داد:

قضیه ۴.۳.۱. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n وتمامی صفر های خود را در $|\ z\ | \leq k$؛ $k \geq ۱$، داشته باشد. در این صورت :

$$n\ [\int_{۰}^{۲\pi} |\ p(e^{i\theta})\ |^r\ d\theta\,]^{\frac{۱}{r}} \leq [\int_{۰}^{۲\pi} |\ ۱+k^n e^{i\theta}\ |^r\ d\theta\,]^{\frac{۱}{r}}\ \max_{|z|=۱} |\ p'(z)\ |\ . \qquad (۱۰.۱)$$

و تساوی برای چندجمله‌ای های به فرم $p(z) = \alpha z^n + \beta k^n$ که در آن $|\ \beta\ |=|\ \alpha\ |$، برقرار است.

تذکر ۵.۳.۱. با فرض $r \longrightarrow \infty$ در نامساوی (۱۰.۱) به نامساوی (۷.۱) خواهیم رسید.

عزیز [۱] همچنین ثابت کرد:

قضیه ۶.۳.۱. اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای درجه n و تمامی صفر های خود را در دایره $|\ z\ | \leq k \leq ۱$، داشته باشد، در این صورت برای هر $r > ۰$

$$n\ [\int_{۰}^{۲\pi} |\ p(e^{i\theta})\ |^r\ d\theta\,]^{\frac{۱}{r}} \leq [\int_{۰}^{۲\pi} |\ ۱+k e^{i\theta}\ |^r\ d\theta\,]^{\frac{۱}{r}}\ \max_{|z|=۱} |\ p'(z)\ |\ . \qquad (۱۱.۱)$$

تذکر ۷.۳.۱. با فرض $r \longrightarrow \infty$ در نامساوی (۱۱.۱) نامساوی (۵.۱) نتیجه خواهد شد.

عزیز و احمد [۱۳] نامساوی (۱۱.۱) را تعمیم دادند [۴]،بطوریکه در سمت راست این نامساوی، ضریبی از میانگین انتگرالی $|\ p(z)\ |$ روی دایره یکه جایگزین شده است. قضیه زیر بیانگر همین مطلب است.

[۱۲] Aziz
[۱۳] Ahemad

قضیه ۸.۳.۱. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n وتمامی صفر های خود را در $|z| \leq k$ ؛ $k \leq ۱$ ، داشته باشد، در این صورت برای هر $r > ۰$ ، $p > ۱$ و $q > ۱$ با $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$

$$n \ [\int_{۰}^{۲\pi} |\ p(e^{i\theta})\ |^{r}\ d\theta\ ]^{\frac{۱}{r}} \leq [\int_{۰}^{۲\pi} |\ ۱ + ke^{i\theta}\ |^{qr}\ d\theta\ ]^{\frac{۱}{qr}}\ \ [\int_{۰}^{۲\pi} |\ p'(e^{i\theta})\ |^{pr}\ d\theta\ ]^{\frac{۱}{pr}}. \qquad (۱۲.۱)$$

تذکر ۹.۳.۱. اگر در (۱۲.۱) فرض کنیم $r \longrightarrow \infty$ و $p \longrightarrow \infty$ ، رابطه(۵.۱) نتیجه می‌شود.

فصل ۲

برآوردهای میانگین انتگرالی برای چندجمله‌ای هایی که صفرهایشان درون یک دایره اند

در این فصل با در نظر گرفتن رده هایی خاص از چندجمله‌ای ها، تعمیم های جالبی از قضایای مطرح شده در فصل نخست، ارائه خواهیم داد و سپس نتایج دیگری از آن ها خواهیم گرفت. ازاین رو بخش اول شامل برآوردهای میانگین انتگرالی برای رده چندجمله‌ای هایی است که صفرهایشان درون دایره با شعاع کمتر یا مساوی یک واقع اند. دربخش دیگر تمامی نتایج در ارتباط با رده دیگری از چندجمله‌ای ها، یعنی چندجمله‌ای های با صفرهای درون دایره با شعاع بزرگتر یا مساوی یک است.

۱.۲ برآوردهای میانگین انتگرالی برای چندجمله‌ای هایی که صفرهایشان درون دایره با شعاع کمتر یا مساوی یک اند

در این بخش ابتدا برخی نتایج بدست آمده در فصل ۱ را به رده ای از چندجمله‌ای ها به فرم

$$p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j} \qquad (۱ \leq \mu \leq n)$$

که صفر های آن در ناحیه $|z| \leq k \leq ۱$ باشند، تعمیم می‌دهیم و با اثبات آن ها نتایج کلی بیشتری بدست خواهد آمد که در ادامه بحث به آن ها نیز اشاره خواهیم کرد. همچنین در انتها نتایجی مشابه برای

رده ای از چندجمله‌ای ها با قرار دادن نوع دیگری از محدودیت روی تمامی صفرها، خواهیم گرفت.

برای اثبات این قضایا به چند لم نیاز است که مطلب را با بیان آن ها آغاز می کنیم.

لم ۲.۱.۱. [۶] اگر $p(z) = a_{\cdot} + \sum_{j=\mu}^{n} a_j z^j$ ؛ $1 \leq \mu \leq n$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $|z| \geq k \geq 1$ داشته باشد، در این صورت:

$$k^{\mu} \mid p'(z) \mid \leq \mid q'(z) \mid \qquad (\mid z \mid = 1).$$

در این جا و موارد دیگر $q(z)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}.$$

به کمک لم ۲.۱.۱ به آسانی لم زیر نتیجه می‌شود.

لم ۲.۱.۲. اگر $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$ ؛ $1 \leq \mu \leq n$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n و صفرهای خود را در $|z| \leq k \leq 1$ داشته باشد، در این صورت:

$$\mid q'(z) \mid \leq k^{\mu} \mid p'(z) \mid \qquad (\mid z \mid = 1).$$

اثبات. از آن جا که همه صفرهای $p(z)$ در $|z| \leq k \leq 1$ واقع اند، بنابراین همه صفرهای $q(z)$ در $|z| \geq \frac{1}{k} \geq 1$ قرار دارند. پس با بکاربردن لم ۲.۱.۱ در مورد چندجمله‌ای $q(z) = \overline{a_n} + \sum_{j=\mu}^{n} \overline{a}_{n-j} z^{n-j}$ داریم:

$$\frac{1}{k^{\mu}} \mid q'(z) \mid \leq \mid p'(z) \mid \qquad (\mid z \mid = 1).$$

یا

$$\mid q'(z) \mid \leq k^{\mu} \mid p'(z) \mid \qquad (\mid z \mid = 1).$$

و بدین ترتیب لم ۲.۱.۲ ثابت می شود. □

قضیه ۳.۱.۲. اگر $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$ ؛ $1 \leq \mu \leq n$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفرهای خود را در $|z| \leq k \leq 1$ داشته باشد، در این صورت برای هر $r > 0$ ، $p > 1$ و $q > 1$ با $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$n \ [\int_{0}^{2\pi} |\ p(e^{i\theta})\ |^{r}\ d\theta\ ]^{\frac{1}{r}} \leq [\int_{0}^{2\pi} |\ 1 + k^{\mu} e^{i\theta}\ |^{pr}\ d\theta\ ]^{\frac{1}{pr}}\ [\int_{0}^{2\pi} |\ p'(e^{i\theta})\ |^{qr}\ d\theta\ ]^{\frac{1}{qr}}. \qquad (1.2)$$

اثبات. از آن جا که $q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$ ، بنابراین $p(z) = z^n \overline{q(\frac{1}{\bar{z}})}$. در این صورت رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$p'(z) = nz^{n-1} \overline{q(\frac{1}{\bar{z}})} - z^{n-2} \overline{q'(\frac{1}{\bar{z}})}. \qquad (2.2)$$

به طور معادل:

$$zp'(z) = nz^{n} \overline{q(\frac{1}{\bar{z}})} - z^{n-1} \overline{q'(\frac{1}{\bar{z}})}. \qquad (3.2)$$

و بنابراین برای $z = e^{i\theta}$ ؛ $0 \leq \theta < 2\pi$ ، داریم:

$$|\ p'(e^{i\theta})\ | = |\ e^{i\theta} p'(e^{i\theta})\ | = |\ ne^{in\theta} \overline{q(e^{i\theta})} - e^{i(n-1)\theta} \overline{q'(e^{i\theta})}\ | = |\ nq(e^{i\theta}) - e^{i\theta} q'(e^{i\theta})\ |.$$

لذا

$$|\ p'(z)\ | = |\ nq(z) - zq'(z)\ | \qquad (|\ z\ | = 1). \qquad (4.2)$$

حال طبق فرض $p(z)$ تمامی صفرهای خود را در ناحیه $|z| \leq k \leq 1$ دارد. بنابراین، با استفاده از لم ۲.۱.۲ داریم:

$$|\ q'(z)\ | \leq k^{\mu}\ |\ p'(z)\ | \qquad (|\ z\ | = 1). \qquad (5.2)$$

با استفاده از (۴.۲) در (۵.۲) به رابطه زیر می رسیم:

$$| q'(z) | \leq k^{\mu} | nq(z) - zq'(z) | \qquad (| z |= ۱). \tag{۶.۲}$$

حال تابع

$$w(z) = \frac{zq'(z)}{k^{\mu}(nq(z) - zq'(z))} \tag{۷.۲}$$

در ناحیه $| z |\leq ۱$ تحلیلی است .

زیرا $p(z)$ تمامی صفرهای خود را در ناحیه $۱ \leq k \leq | z |$ دارد و بنابر قضیه گاوس- لوکاس، همه صفر های $p'(z)$ نیز در ناحیه $۱ \leq | z |$ واقع می شود. بنابراین، در ناحیه $| z |< ۱$

$$z^{n-۱}\overline{p'(\frac{۱}{\bar{z}})} = nq(z) - zq'(z) \neq ۰. \tag{۸.۲}$$

پس $w(z)$ در $| z |< ۱$ تحلیلی است. علاوه بر این اگر α با $| \alpha |= ۱$ ، صفری از مرتبه $k(< n)$ برای $nq(z) - zq'(z)$ باشد، در این صورت با توجه به (۴.۲) ، همچنین صفری از مرتبه k از $p'(z)$ است. از آن جا که دایره واحد شامل تمامی صفرهای $p(z)$ است، از قضیه گاوس- لوکاس ، α صفری از مرتبه $k+۱$ از $p(z)$ و در نتیجه $q(z)$ است. بنابراین ، α صفری از مرتبه k از $q'(z)$ است. از این ها نتیجه می گیریم $w(z)$ در $| z |\leq ۱$ تحلیلی است. افزون بر این بنابر (۶.۲) ، برای $| z |= ۱$ ، $| w(z) |\leq ۱$. همچنین بوضوح، $w(۰) = ۰$. بنابراین، برای $| z |\leq ۱$ تابع

$$۱ + k^{\mu}w(z)$$

وابسته به تابع

$$1+k^{\mu}z$$

است. بنابراین با استفاده از خاصیت مشهور سابوردینیشن [1] [۵]، داریم برای هر $r>0$ و $0\leq\theta<2\pi$،

$$\int_0^{2\pi} \mid 1+k^{\mu}w(e^{i\theta}) \mid^r d\theta \ \leq \int_0^{2\pi} \mid 1+k^{\mu}e^{i\theta} \mid^r d\theta. \tag{۹.۲}$$

همچنین از (۷.۲) داریم:

$$1+k^{\mu}w(z)=\frac{nq(z)}{nq(z)-zq'(z)}.$$

بنابراین

$$n\mid q(z)\mid=\mid 1+k^{\mu}w(z)\mid\mid nq(z)-zq'(z)\mid. \tag{۱۰.۲}$$

حال برای $\mid z\mid=1$، $\mid p(z)\mid=\mid q(z)\mid$. لذا از رابطه (۱۰.۲) برای $\mid z\mid=1$ خواهیم داشت:

$$n\mid p(z)\mid=\mid 1+k^{\mu}w(z)\mid\mid p'(z)\mid \qquad (\mid z\mid=1). \tag{۱۱.۲}$$

از (۹.۲) و (۱۱.۲) داریم:

$$n^r\int_0^{2\pi}\mid p(e^{i\theta})\mid^r d\theta \mid\leq \int_0^{2\pi}\mid 1+k^{\mu}e^{i\theta}\mid^r \mid \ p'(e^{i\theta})\mid^r d\theta \qquad r>0. \tag{۱۲.۲}$$

حال با بکار بردن نامساوی هولدر برای $p>1$ و $q>1$ با $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ دررابطه (۱۲.۲) خواهیم داشت:

$$n[\int_0^{2\pi}\mid p(e^{i\theta})\mid^r d\theta]^{\frac{1}{r}} \mid\leq [\int_0^{2\pi}\mid 1+k^{\mu}e^{i\theta}\mid^{pr} d\theta]^{\frac{1}{pr}} \ [\int_0^{2\pi}\mid p'(e^{i\theta})\mid^{qr} d\theta]^{\frac{1}{qr}} \qquad r>0. \tag{۱۳.۲}$$

[1] Subordination

که این همان نامساوی مطلوب است. □

اگر فرض کنیم ۱ $\longrightarrow p$ ($q \longrightarrow \infty$) ، از قضیه ۳.۱.۲ به آسانی نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۴.۱.۲. فرض کنیم $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$ ؛ $1 \leq \mu \leq n$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n وتمامی صفر های خود را در $|\, z \,| \leq k \leq 1$ ، داشته باشد. در این صورت برای هر $r > 0$ ،

$$n \ [\int_{0}^{2\pi} |\, p(e^{i\theta}) \,|^{r} \, d\theta \,]^{\frac{1}{r}} \leq [\int_{0}^{2\pi} |\, 1 + k^{\mu} e^{i\theta} \,|^{r} \, d\theta \,]^{\frac{1}{r}} \ \max_{|z|=1} |\, p'(z) \,| \,. \tag{۱۴.۲}$$

تذکر ۵.۱.۲. با فرض $\mu = 1$ در نامساوی (۱۴.۲) می توان به نامساوی زیر رسیدکه در فصل اول بدان اشاره کردیم.

$$n \ [\int_{0}^{2\pi} |\, p(e^{i\theta}) \,|^{r} \, d\theta \,]^{\frac{1}{r}} \leq [\int_{0}^{2\pi} |\, 1 + k e^{i\theta} \,|^{r} \, d\theta \,]^{\frac{1}{r}} \ \max_{|z|=1} |\, p'(z) \,| \,. \tag{۱۵.۲}$$

همچنین با فرض $r \longrightarrow \infty$ در نامساوی (۱۴.۲) نتیجه زیرراخواهیم داشت که تعمیمی از نامساوی (۵.۱) از فصل ۱ است و برآورد جالبی برای مشتق خواهد بود.

نتیجه ۶.۱.۲. فرض کنیم $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$ ؛ $1 \leq \mu \leq n$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفرهای خود را در $|\, z \,| \leq k \leq 1$ ، داشته باشد. در این صورت:

$$n \ \max_{|z|=1} |\, p(z) \,| \leq (1 + k^{\mu}) \max_{|z|=1} |\, p'(z) \,| \,. \tag{۱۶.۲}$$

لم ۷.۱.۲. فرض کنیم $p(z)=a_nz^n+\sum_{j=\mu}^{n}a_{n-j}z^{n-j}$ ؛ $1\leq\mu\leq n$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $\mid z\mid\leq k\leq 1$ ، داشته باشد. بعلاوه $m=\min\limits_{|z|=k}\mid p(z)\mid$. در این صورت:

$$\frac{mn}{k^{n-\mu}}+\mid q'(z)\mid\leq k^{\mu}\mid p'(z)\mid\qquad(\mid z\mid=1).\tag{۱۷.۲}$$

اثبات. طبق فرض $p(z)=a_nz^n+\sum_{j=\mu}^{n}a_{n-j}z^{n-j}$ تمامی صفرهای خود را در ناحیه $\mid z\mid\leq k\leq 1$ ، دارد. اگر $p(z)$ صفری روی دایره $\mid z\mid=k$ داشته باشد، در این صورت $m=\min\limits_{|z|=k}\mid p(z)\mid=0$. نتیجه در این حالت از لم ۱.۱.۲ بدست خواهد آمد. بنابراین، فرض کنیم $p(z)$ تمامی صفرهای خود را در ناحیه $\mid z\mid<k$ داشته باشد. بنابراین، $m>0$. حال برای $\mid z\mid=k$ ، $m\leq\mid p(z)\mid$. بنابراین اگر α عددی حقیقی یا مختلط با $\mid\alpha\mid<1$ باشد، دراین صورت:

$$\mid\frac{m\,\alpha\,z^n}{k^n}\mid<\mid p(z)\mid\qquad(\mid z\mid=k).$$

چون همه صفرهای $p(z)$ در $\mid z\mid<k$ واقعند ، لذا طبق قضیه روشه همه صفرهای

$$F(z)=p(z)-\frac{m\,\alpha\,z^n}{k^n}$$

نیز در ناحیه $\mid z\mid<k$ قرار می گیرد. حال طبق قضیه گاوس- لوکاس چندجمله‌ای

$$F'(z)=p'(z)-\frac{mn\,\alpha\,z^{n-1}}{k^n}\tag{۱۸.۲}$$

همه صفرهای خود را در ناحیه $\mid z\mid<k$ دارد. مطلب فوق نتیجه می‌دهد :

$$\mid p'(z)\mid\geq\mid\frac{mn\,z^{n-1}}{k^n}\mid\qquad(\mid z\mid\geq k).\tag{۱۹.۲}$$

زیرا به برهان خلف اگر (۱۹.۲) برقرار نباشد، نقطه ای مانند z_0 با $\mid z_0\mid\geq k$ ، موجود است به طوری که

$$\mid p'(z_0)\mid<\mid\frac{mn\,z_0^{n-1}}{k^n}\mid.$$

با انتخاب $\alpha = \dfrac{k^n p'(z_\cdot)}{mn\ z_\cdot^{n-1}}$ و بنابر اینکه $|\ \alpha\ |< 1$ ، از (۱۸.۲) داریم $F'(z_\cdot) = 0$ برای $|\ z_\cdot\ |\geq k$. این در تناقض با این مطلب است که همه صفرهای $F'(z)$ در ناحیه $|\ z\ |< k$ قرار دارند. بنابراین، (۱۹.۲) برقرار است.

حال چندجمله‌ای

$$F(z) = p(z) - \frac{m\ \alpha\ z^n}{k^n} = [a_n - \frac{m\alpha}{k^n}]z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$$

همه صفرهای خود را درناحیه $|\ z\ |< k \leq 1$ دارد. بنابراین، اگر

$$G(z) = z^n \overline{F(\frac{1}{\overline{z}})} = z^n \overline{p(\frac{1}{\overline{z}})} - \frac{m\overline{\alpha}}{k^n} = q(z) - \frac{m\overline{\alpha}}{k^n},$$

در این صورت از لم ۲.۱.۲ نتیجه می‌شود :

$$|\ G'(z)\ |\leq k^\mu\ |\ F'(z)\ | \qquad (|\ z\ |= 1).$$

یا

$$|\ q'(z)\ |\leq k^\mu\ |\ p'(z) - \frac{mn\ \alpha\ z^{n-1}}{k^n}\ | \qquad (|\ z\ |= 1). \tag{۲۰.۲}$$

حال با انتخاب α یی که داشته باشیم:

$$|\ p'(z) - \frac{mn\ \alpha\ z^{n-1}}{k^n}\ |=|\ p'(z)\ | - \frac{mn}{k^n}\ |\ \alpha\ | \qquad (|\ z\ |= 1), \tag{۲۱.۲}$$

و با فرض $|\ \alpha\ |\to 1$ ، از رابطه (۲۰.۲) در می‌یابیم :

$$|\ q'(z)\ |\leq k^\mu\ [\ |\ p'(z)\ | - \frac{mn}{k^n}\ ] \qquad (|\ z\ |= 1). \tag{۲۲.۲}$$

و یا به طور معادل:

$$\frac{mn}{k^{n-\mu}} +|\ q'(z)\ |\leq k^\mu\ |\ p'(z)\ | \qquad (|\ z\ |= 1). \tag{۲۳.۲}$$

بدین ترتیب لم مورد نظر ثابت می‌شود. □

قضیه ۸.۱.۲. اگر $p(z)=a_nz^n+\sum_{j=\mu}^{n}a_{n-j}z^{n-j}$ ؛ $1\leq\mu\leq n$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفرهای خود را در $|z|\leq k\leq 1$ داشته باشد، در این صورت

$$n\ [\max_{|z|=1}|p(z)|+\frac{1}{k^{n-\mu}}\min_{|z|=1}|p(z)|\,]\leq(1+k^{\mu})\max_{|z|=1}|p'(z)|\,. \tag{۲۴.۲}$$

اثبات. طبق لم ۷.۱.۲ برای $|z|=1$ و $m=\min\limits_{|z|=k}|p(z)|$ داریم:

$$|q'(z)|\leq k^{\mu}|p'(z)|-\frac{mn}{k^{n-\mu}}\qquad(|z|=1). \tag{۲۵.۲}$$

این نتیجه می‌دهد :

$$|p'(z)|+|q'(z)|\leq(1+k^{\mu})\ |p'(z)|-\frac{mn}{k^{n-\mu}}\qquad(|z|=1). \tag{۲۶.۲}$$

همچنین برای $|z|=1$ می‌توان گفت:

$$\begin{aligned}n|p(z)|&=|np(z)-zp'(z)+zp'(z)|\\&\leq|np(z)-zp'(z)|+|p'(z)|\\&=|q'(z)|+|p'(z)|\\&\leq(1+k^{\mu})\ |p'(z)|-\frac{mn}{k^{n-\mu}}.\end{aligned}$$

و این نتیجه می‌دهد :

$$n\ \max_{|z|=1}|p(z)|\leq(1+k^{\mu})\max_{|z|=1}|p'(z)|-\frac{mn}{k^{n-\mu}}.$$

و این معادل است با :

$$n\ [\max_{|z|=1} |\ p(z)\ | + \frac{m}{k^{n-\mu}}] \leq (1 + k^{\mu}) \max_{|z|=1} |\ p'(z)\ | .$$

و بدین ترتیب قضیه ثابت می‌شود. □

با فرض $\mu = 1$ در نامساوی (۲۴.۲) نامساوی (۶.۱) از فصل اول را خواهیم داشت.

قضیه ۹.۱.۲. اگر $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$ ؛ $1 \leq \mu \leq n$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفرهای خود را در $|\ z\ | \leq k$ ؛ $k \leq 1$ ، داشته باشد و $m = \min_{|z|=k} |\ p(z)\ |$ ، در این صورت ، برای عدد حقیقی یا مختلط α با $|\ \alpha\ | = 1$ ، $r > 0$ ، $p > 1$ و $q > 1$ با $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$n\ [\int_0^{2\pi} |\ p(e^{i\theta}) + \frac{\alpha m e^{i(n-1)\theta}}{k^{n-\mu}}\ |^r\ d\theta\ ]^{\frac{1}{r}} \leq [\int_0^{2\pi} |\ 1 + k^{\mu} e^{i\theta}\ |^{pr}\ d\theta\ ]^{\frac{1}{pr}}\ [\int_0^{2\pi} |\ p'(e^{i\theta})\ |^{qr}\ d\theta\ ]^{\frac{1}{qr}}. \quad (۲۷.۲)$$

اثبات. از آن جا که $p(z)$ تمامی صفرهای خود را در ناحیه $|\ z\ | \leq k \leq 1$ دارد، بنابراین با توجه به لم ۷.۱.۲ می‌توان نتیجه گرفت :

$$\frac{mn}{k^{n-\mu}} + |\ q'(z)\ | \leq k^{\mu}\ \ |\ p'(z)\ | \qquad (|\ z\ | = 1). \quad (۲۸.۲)$$

همچنین :

$$|\ p'(z)\ | = |\ nq(z) - zq'(z)\ | \qquad (|\ z\ | = 1). \quad (۲۹.۲)$$

حال با استفاده از (۲۸.۲) برای هر عدد مختلط β با $|\ \beta\ | \leq 1$ ، داریم:

$$|\ q'(z) + \overline{\beta} \frac{mn}{k^{n-\mu}}\ | \leq |\ q'(z)\ | + \frac{mn}{k^{n-\mu}} \leq k^{\mu}\ |\ p'(z)\ |$$

$$= k^{\mu} \mid nq(z) - zq'(z) \mid \qquad (\mid z \mid = ۱). \qquad (۳۰.۲)$$

چون $p(z)$ همه صفر های خود را در ناحیه $۱ \leq k \leq \mid z \mid$ دارد بنابراین، طبق قضیه گاوس- لوکاس همه صفرهای $p'(z)$ نیز در ناحیه $۱ \leq \mid z \mid$ قرار دارد و با ادامه اثبات مشابه آن چه در اثبات قضیه ۳.۱.۲ انجام شد به سهولت به نتیجه مطلوب خواهیم رسید. لذا ادامه اثبات را حذف می‌کنیم. □

با فرض $\alpha = ۰$ در قضیه ۹.۱.۲ همان قضیه ۳.۱.۲ را خواهیم داشت.

تذکر ۱۰.۱.۲. با فرض $r \longrightarrow \infty$ و $q \longrightarrow \infty$ $(p \longrightarrow ۱)$ در نامساوی (۲۷.۲) و انتخاب α مناسب با $\mid \alpha \mid = ۱$ نامساوی (۲۴.۲) نتیجه می‌شود.

لم ۱۱.۱.۲. [۱۵] اگر $p(z) = a_۰ + \sum_{j=\mu}^{n} a_j z^j$ ؛ $۱ \leq \mu \leq n$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $\mid z \mid \geq k$ ؛ $k \geq ۱$ ، داشته باشد، در این صورت:

$$\frac{n \mid a_۰ \mid k^{\mu+۱} + \mu \mid a_{\mu} \mid k^{۲\mu}}{n \mid a_۰ \mid + \mu \mid a_{\mu} \mid k^{\mu+۱}} \mid p'(z) \mid \leq \mid q'(z) \mid \qquad (\mid z \mid = ۱ \; ; \; ۱ \leq \mu \leq n)$$

و

$$\frac{\mu}{n} \mid \frac{a_{\mu}}{a_۰} \mid k^{\mu} \leq ۱.$$

لم ۱۲.۱.۲. اگر $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$ ؛ $۱ \leq \mu \leq n$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $\mid z \mid \leq k$ ؛ $k \leq ۱$ ، داشته باشد، در این صورت:

$$\mid q'(z) \mid \leq S_{\mu} \mid p'(z) \mid \qquad (\mid z \mid = ۱)$$

و

$$\frac{\mu}{n} \mid \frac{a_{n-\mu}}{a_n} \mid \leq k^{\mu}$$

در این جا و موارد دیگر S_μ به شکل زیر تعریف می شود:

$$S_\mu = \frac{n \mid a_n \mid k^{2\mu} + \mu \mid a_{n-\mu} \mid k^{\mu-1}}{n \mid a_n \mid k^{\mu-1} + \mu \mid a_{n-\mu} \mid}.$$

اثبات. همه صفر های $p(z)$ در $1 \leq k \leq \mid z \mid$، واقعند. بنابراین، همه صفر های $q(z)$ در $\mid z \mid \geq \frac{1}{k} \geq 1$ قرار دارند. پس با بکاربردن لم ۱۱.۱.۲ در مورد چندجمله‌ای $q(z) = \overline{a_n} + \sum_{j=\mu}^{n} \overline{a}_{n-j} z^{n-j}$ داریم:

$$\frac{n \mid a_n \mid \frac{1}{k^{\mu+1}} + \mu \mid a_{n-\mu} \mid \frac{1}{k^{2\mu}}}{n \mid a_n \mid + \mu \mid a_{n-\mu} \mid \frac{1}{k^{\mu+1}}} \mid q'(z) \mid \leq \mid p'(z) \mid \qquad (\mid z \mid = 1).$$

یا

$$\mid q'(z) \mid \leq S_\mu \mid p'(z) \mid \qquad (\mid z \mid = 1).$$

و بدین ترتیب لم ۱۲.۱.۲ ثابت می شود. □

حال با بکار بردن ضرایب چندجمله‌ای $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$ ؛ $1 \leq \mu \leq n$ ، قصد داریم نامساوی های اخیر را دقیق تر کنیم. در این راستا قضایا و نتایجی دیگر به اثبات خواهیم رساند .

قضیه ۱۳.۱.۲. فرض کنیم $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$ ؛ $1 \leq \mu \leq n$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $1 \leq k \leq \mid z \mid$ ، داشته باشد. در این صورت برای هر $r > 0$ ، $p > 1$ و $q > 1$ با $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$n \, [\int_0^{2\pi} \mid p(e^{i\theta}) \mid^r d\theta \,]^{\frac{1}{r}} \leq [\int_0^{2\pi} \mid 1 + S_\mu e^{i\theta} \mid^{pr} d\theta]^{\frac{1}{pr}} \, [\int_0^{2\pi} \mid p'(e^{i\theta}) \mid^{qr} d\theta \,]^{\frac{1}{qr}}. \qquad (۳۱.۲)$$

اثبات. اثبات قضیه همانند اثبات قضیه ۳.۱.۲ خواهد بود. کافیست از لم ۱۲.۱.۲ در عوض لم ۱.۱.۲ بهره بگیریم. از این رو روند اثبات را حذف خواهیم کرد. □

در ادامه با اثبات لمی دیگر نشان خواهیم داد ، قضیه اخیر و نتایج پیش رو همگی نسبت به قضیه و نتایج مشابه قبل دقیق تر است. زیرا به کمک آن می‌توان گفت، کران بدست آمده در سمت راست نامساوی ها بهبود یافته است.

لم ۱۴.۱.۲. فرض کنیم $p(z)=a_nz^n+\sum_{j=\mu}^{n}a_{n-j}z^{n-j}$ ؛ $1\leq\mu\leq n$ ، یک چندجمله‌ای درجه n باشد و تمامی صفر های خود را در $\mid z\mid\leq k\leq 1$ ، داشته باشد. در این صورت:

$$S_\mu\leq k^\mu. \tag{۳۲.۲}$$

اثبات. طبق لم ۱۲.۱.۲ داریم:

$$\frac{\mu}{n}\mid\frac{a_{n-\mu}}{a_n}\mid\leq k^\mu. \tag{۳۳.۲}$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد:

$$\mu\mid a_{n-\mu}\mid\leq n\mid a_n\mid k^\mu.$$

و این نتیجه می‌دهد:

$$\mu\mid a_{n-\mu}\mid-n\mid a_n\mid k^\mu\leq 0.$$

و یا به طور معادل:

$$(k^{\mu-1}-k^\mu)(\mu\mid a_{n-\mu}\mid-n\mid a_n\mid k^\mu)\leq 0.$$

یعنی:

$$\mu\mid a_{n-\mu}\mid k^{\mu-1}-n\mid a_n\mid k^\mu k^{\mu-1}-\mu\mid a_{n-\mu}\mid k^\mu+n\mid a_n\mid k^{2\mu}\leq 0.$$

و یا به طور معادل:

$$\mu \mid a_{n-\mu} \mid k^{\mu-1} + n \mid a_n \mid k^{2\mu} \leq (n \mid a_n \mid k^{\mu-1} + \mu \mid a_{n-\mu} \mid)k^{\mu}.$$

و این نتیجه می‌دهد:

$$S_\mu = \frac{n \mid a_n \mid k^{2\mu} + \mu \mid a_{n-\mu} \mid k^{\mu-1}}{n \mid a_n \mid k^{\mu-1} + \mu \mid a_{n-\mu} \mid} \leq k^{\mu}.$$

□

تذکر ۱۵.۱.۲. بنابر (۳۲.۲) نامساوی (۳۱.۲) نسبت به نامساوی (۱.۲) دقیق تر است.

با فرض $q \longrightarrow \infty$ $(p \longrightarrow 1)$ در نامساوی (۳۱.۲) به نتیجه زیر خواهیم رسید.

نتیجه ۱۶.۱.۲. فرض کنیم $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$ ؛ $1 \leq \mu \leq n$ ، یک چندجمله‌ای درجه n باشد و تمامی صفر های خود را در $|z| \leq k \leq 1$ ، داشته باشد. در این صورت برای هر $r > 0$

$$n \left[\int_0^{2\pi} \mid p(e^{i\theta}) \mid^r d\theta\right]^{\frac{1}{r}} \leq \left[\int_0^{2\pi} \mid 1 + S_\mu e^{i\theta} \mid^r d\theta\right]^{\frac{1}{r}} \max_{|z|=1} \mid p'(z) \mid . \qquad (۳۴.۲)$$

تذکر ۱۷.۱.۲. بنا بر (۳۲.۲) نامساوی (۳۴.۲) نسبت به نامساوی (۱۴.۲) دقیق تر است.

نتیجه ۱۸.۱.۲. فرض کنیم $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$ ؛ $1 \leq \mu \leq n$ ، یک چندجمله‌ای درجه n باشد و تمامی صفر های خود را در $|z| \leq k \leq 1$ ، داشته باشد. دراین صورت:

$$n \max_{|z|=1} \mid p(z) \mid \leq (1 + S_\mu) \max_{|z|=1} \mid p'(z) \mid \qquad (۳۵.۲)$$

تذکر ۱۹.۱.۲. نامساوی فوق با فرض $r \longrightarrow \infty$ در نامساوی (۳۴.۲) بدست آمده است و بنا بر (۳۲.۲) نسبت به نامساوی (۱۶.۲) دقیق تر است.

همانطور که پیش از این ملاحظه کردیم، محل صفرها تاثیر بسزایی در بهبود بخشیدن به کران های نامساوی ها دارد.حال از آن جا که کران در قضایای مطرح شده تا کنون تنها به صفر با بزرگترین قدر مطلق بستگی دارد و به قدرمطلق صفرهای دیگر ارتباطی ندارد، بنابراین بدست آوردن کرانی وابسته به موقعیت تمامی صفرها امر جالبی خواهد بود . از این حیث در ادامه قصد داریم با دخالت دادن موقعیت تمامی صفرها تظریفی از نامساوی (۱۱.۱) ارائه دهیم. همچنین عبارت $\max\limits_{|z|=1} | p'(z) |$ با ضریبی از میانگین انتگرالی $| p'(z) |$ روی دایره یکه جایگزین خواهد شد که این خود نوعی تعمیم از (۱۱.۱) است. برای اثبات قضیه ای در این رابطه، به بیان لم های زیر نیازمندیم.

لم ۲۰.۱.۲. فرض کنیم $p(z) = a_n \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$ با $a_n \neq 0$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و علاوه بر این $1 \leq j \leq n$ ؛ $| z_j |\geq k_j \geq 1$. دراین صورت :

$$| \frac{q'(z)}{p'(z)} |\geq 1 + \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j - 1}} \qquad (| z |= 1). \tag{۳۶.۲}$$

اثبات. برای $| z |= 1$ داریم:

$$\begin{aligned} | \frac{q'(z)}{p'(z)} | &\geq \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{| z_j |}{| z_j | -1}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{| z_j | -1}} \\ &= 1 + \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{| z_j | -1}}. \end{aligned}$$

از آن جا که عبارت سمت راست نامساوی بوضوح تابعی نانزولی نسبت به هر یک از متغیرهای $| z_1 |$ و $| z_2 |$ و...و $| z_n |$ است، بنابراین

$$| \frac{q'(z)}{p'(z)} | \geq ۱ + \frac{n}{\sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{k_j - ۱}}.$$

□

لم ۲۱.۱.۲. اگر $p(z) = a_n \prod_{j=۱}^{n}(z - z_j)$ با $a_n \neq ۰$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و علاوه بر این $۱ \leq k_j \leq| z_j |$ به طوری که $۱ \leq j \leq n$ ، در این صورت :

$$| \frac{q'(z)}{p'(z)} | \leq t. \qquad (| z |= ۱). \tag{۳۷.۲}$$

در اینجا و موارد دیگر $t.$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$t. = ۱ - \frac{n}{\sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{۱ - k_j}}.$$

اثبات. داریم $q(z) = z^n \overline{p(\frac{۱}{\bar{z}})}$. در این صورت :

$$| p(z) |=| q(z) | \qquad (| z |= ۱).$$

حال از آن جا که $۱ \leq k_j \leq| z_j |$ ، بنابراین برای $۱ \leq j \leq n$ ،

$$\frac{۱}{| z_j |} \geq \frac{۱}{k_j} \geq ۱.$$

که در این صورت طبق لم ۲۰.۱.۲ برای $| z |= ۱$ داریم:

$$| \frac{p'(z)}{q'(z)} | \geq ۱ + \frac{n}{\sum_{j=۱}^{n} \frac{k_j}{۱ - k_j}}$$

$$= \frac{\sum_{j=۱}^{n}(\frac{k_j}{۱ - k_j} + ۱)}{\sum_{j=۱}^{n} \frac{k_j}{۱ - k_j}}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1-k_j}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{1-k_j}}.$$

و بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت برای $|z| = 1$ ،

$$\left| \frac{q'(z)}{p'(z)} \right| \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{1-k_j}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1-k_j}}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{1-k_j} - 1)}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1-k_j}}$$

$$= 1 - \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{1-k_j})}.$$

و بدین شکل مطلب مورد نظر به طور کامل ثابت می‌شود. □

حال با بکار بردن لم ۲۱.۱.۲ می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه ۲۲.۱.۲. اگر $p(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$ با $a_n \neq 0$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و علاوه بر این $|z_j| \leq k_j \leq 1$ ، به طوری که $1 \leq j \leq n$ ، در این صورت برای $r > 0$ ، $p > 1$ و $q > 1$ با $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$n \left[\int_0^{2\pi} | p(e^{i\theta}) |^r \, d\theta \right]^{\frac{1}{r}} \leq \left[\int_0^{2\pi} | 1 + t.e^{i\theta} |^{pr} \, d\theta \right]^{\frac{1}{pr}} \left[\int_0^{2\pi} | p'(e^{i\theta}) |^{qr} \, d\theta \right]^{\frac{1}{qr}}. \tag{۳۸.۲}$$

اثبات. فرض کنیم $q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$ ، بنابراین $p(z) = z^n \overline{q(\frac{1}{\bar{z}})}$. در این صورت :

$$zp'(z) = nz^n \overline{q(\frac{1}{\bar{z}})} - z^{n-1} \overline{q'(\frac{1}{\bar{z}})}. \tag{۳۹.۲}$$

لذا برای $|z|=1$ ، نتیجه می‌شود:

$$|p'(z)|=|nq(z)-zq'(z)|. \tag{۴۰.۲}$$

حال طبق فرض $p(z)=a_n\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)$ یک چندجمله‌ای از درجه n است و با $1\leq k_j \leq |z_j|$ ، به طوری که $1\leq j\leq n$. بنابراین ،با استفاده از لم ۲۱.۱.۲ می‌توان نتیجه گرفت برای $|z|=1$ ،

$$|q'(z)|\leq t.|p'(z)| \tag{۴۱.۲}$$

با ترکیب رابطه (۴۰.۲) در (۴۱.۲) به رابطه زیر می‌رسیم.

$$|q'(z)|\leq t.|nq(z)-zq'(z)| \qquad (|z|=1). \tag{۴۲.۲}$$

بنابر قضیه گاوس- لوکاس همه صفر های $p'(z)$ نیز در ناحیه $|z|\leq 1$ واقع می‌شود و بنابراین چندجمله‌ای $nq(z)-zq'(z)=z^{n-1}\overline{p'(\frac{1}{\bar z})}$ همه صفر های خود را در ناحیه $|z|\geq \frac{1}{k}\geq 1$ دارد. پس تابع

$$w(z)=\frac{zq'(z)}{t.(nq(z)-zq'(z))} \tag{۴۳.۲}$$

در ناحیه $|z|\leq 1$ تحلیلی است و $w(0)=0$. همچنین بنا بر (۴۲.۲) برای $|z|\leq 1$ ، $|w(z)|\leq 1$. بنابراین برای $|z|\leq 1$ تابع

$$1+t.w(z)$$

وابسته به تابع

$$۱ + t.z$$

است. بنابراین با استفاده از خاصیت مشهور سابوردینیشن ، برای هر $r > ۰$ و $۰ \leq \theta < ۲\pi$،

$$\int_۰^{۲\pi} \mid ۱ + t.w(e^{i\theta}) \mid^r d\theta \ \leq \int_۰^{۲\pi} \mid ۱ + t.e^{i\theta} \mid^r d\theta. \tag{۴۴.۲}$$

همچنین از (۴۳.۲) داریم :

$$۱ + t.w(z) = \frac{nq(z)}{nq(z) - zq'(z)}.$$

بنابراین،

$$n \mid q(z) \mid = \mid ۱ + t.w(z) \mid \mid nq(z) - zq'(z) \mid . \tag{۴۵.۲}$$

برای $\mid z \mid = ۱$ داریم $\mid p(z) \mid = \mid q(z) \mid$. در این صورت:

$$n \mid p(z) \mid = \mid ۱ + t.w(z) \mid \mid p'(z) \mid \qquad (\mid z \mid = ۱). \tag{۴۶.۲}$$

از (۴۴.۲) و (۴۶.۲) داریم:

$$n^r \int_۰^{۲\pi} \mid p(e^{i\theta}) \mid^r d\theta \mid \leq \int_۰^{۲\pi} \mid ۱ + t.e^{i\theta} \mid^r \mid \ p'(e^{i\theta}) \mid^r d\theta \qquad (r > ۰). \tag{۴۷.۲}$$

حال با بکار بردن نامساوی هولدر برای $p > ۱$ و $q > ۱$ با $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ از رابطه (۴۷.۲) خواهیم داشت

$$n[\int_۰^{۲\pi} \mid p(e^{i\theta}) \mid^r d\theta]^{\frac{۱}{r}} \mid \leq [\int_۰^{۲\pi} \mid ۱ + t.e^{i\theta} \mid^{pr} d\theta]^{\frac{۱}{pr}} \ [\int_۰^{۲\pi} \mid p'(e^{i\theta}) \mid^{qr} d\theta]^{\frac{۱}{qr}} \qquad (r > ۰). \tag{۴۸.۲}$$

و بدین ترتیب قضیه ثابت می شود. □

اگر در (۳۸.۲) فرض کنیم $r \longrightarrow \infty$ و $q \longrightarrow \infty$ ($p \longrightarrow 1$) به نتیجه زیر می رسیم.

نتیجه ۲۳.۱.۲. اگر $p(z) = a_n \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$ با $a_n \neq 0$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و علاوه بر این $1 \leq k_j \leq | z_j |$ به طوری که $1 \leq j \leq n$ ، دراین صورت:

$$\max_{|z|=1} | p'(z) | \geq \frac{n}{2}[1 + \frac{1}{[1 + \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{1-k_j}]}]\max_{|z|=1} | p(z) | . \tag{۴۹.۲}$$

۲.۲ برآوردهای میانگین انتگرالی برای چندجمله‌ای هایی که صفرهایشان درون دایره با شعاع بزرگ تر یا مساوی یک اند

فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $| z | \leq k$ ؛ $k \geq 1$ ، داشته باشد. در این صورت برای هر $r \geq 1$

$$n \ [\int_0^{2\pi} | p(e^{i\theta}) |^r \ d\theta \,]^{\frac{1}{r}} \leq [\int_0^{2\pi} | 1 + k^n e^{i\theta} |^r \ d\theta \,]^{\frac{1}{r}} \ \max_{|z|=1} | p'(z) | . \tag{۵۰.۲}$$

عزیز نامساوی اخیر را بعنوان تعمیمی از نامساوی (۹.۱) ثابت کرد و تساوی برای چندجمله ای های به فرم $p(z) = az^n + bk^n$ که در آن $| a |=| b |$ برقرار است. در این قسمت تعمیمی ازاین نامساوی در حالت $r > 0$ و $n \geq 3$ ارائه می دهیم. در این جا نیز برای اثبات مطلب نیاز به چند لم خواهیم داشت که در ابتدا به آن ها اشاره می کنیم .

لم ۱.۲.۲. [۷] فرض کنیم $p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ یک چندجمله‌ای از درجه $n \geq 2$ باشد. در این صورت برای $R \geq 1$ و $n > 2$:

$$\max_{|z|=R} | p(z) |\leq R^n \max_{|z|=۱} | p(z) | -\frac{۲(R^n-۱)}{n+۲} | a_۰ | - | a_۱ |$$

$$\times[\frac{R^n-۱}{n}-\frac{R^{n-۲}-۱}{n-۲}]. \quad (۵۱.۲)$$

و اگر $n = ۲$:

$$\max_{|z|=R} | p(z) |\leq R^۲ \max_{|z|=۱} | p(z) | -\frac{(R-۱)}{۲} \times [(R+۱) | a_۰ | +(R-۱) | a_۱ |]. \quad (۵۲.۲)$$

لم ۱.۲.۲ در حقیقت بیانگر رشد قدر مطلق یک چندجمله‌ای با شرایط مطرح شده می‌باشد. همچنین لم ۲.۲.۲ در مورد رشد میانگین انتگرالی چندجمله‌ای هایی است که صفری در دایره یکه ندارند. اثبات این مطلب در کتاب نظریه تحلیلی چندجمله‌ای ها که در کتاب نامه بدان اشاره شده است ، نیز آمده است.

لم ۲.۲.۲. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n و در دایره $| z |< ۱$ صفری نداشته باشد. در این صورت برای هر $R \geq ۱$ و $r > ۰$ داریم:

$$[\int_۰^{۲\pi} | p(Re^{i\theta}) |^r d\theta]^{\frac{۱}{r}} \leq E_r[\int_۰^{۲\pi} | p(e^{i\theta}) |^r d\theta]^{\frac{۱}{r}}. \quad (۵۳.۲)$$

که در این جا:

$$E_r = \frac{[\int_۰^{۲\pi} | ۱+R^n e^{i\alpha} |^r d\alpha]^{\frac{۱}{r}}}{[\int_۰^{۲\pi} | ۱+e^{i\alpha} |^r d\alpha]^{\frac{۱}{r}}}.$$

حال به کمک دو لم قبل می‌توان قضایای زیر را ثابت کرد.

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنیم $p(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ یک چندجمله‌ای از درجه $n\geq 3$ و تمامی صفرهای خود را در $|z|\leq k$؛ $k\geq 1$، داشته باشد. در این صورت برای هر $r>0$،

برای $n>3$:

$$n\left[\int_0^{2\pi} |p(e^{i\theta})|^r d\theta\right]^{\frac{1}{r}} \leq \left[\int_0^{2\pi} |1+k^n e^{i\theta}|^r d\theta\right]^{\frac{1}{r}} \left[\max_{|z|=1}|p'(z)| - \frac{2|a_1|}{n+1}\left(1-\frac{1}{k^{n-1}}\right) - \frac{2|a_2|}{k^{n-1}}\right.$$

$$\left.\left(\frac{k^{n-1}-1}{n-1}-\frac{k^{n-3}-1}{n-3}\right)\right]. \qquad (54.2)$$

و برای $n=3$:

$$3\left[\int_0^{2\pi} |p(e^{i\theta})|^r d\theta\right]^{\frac{1}{r}} \leq \left[\int_0^{2\pi} |1+k^3 e^{i\theta}|^r d\theta\right]^{\frac{1}{r}} \times \left[\max_{|z|=1}|p'(z)| - \frac{k-1}{2k^2}\left[(k+1)|a_1|+(k-1)2|a_2|\right]\right]. \qquad (55.2)$$

و تساوی برای چندجمله‌ای های به فرم $p(z)=\alpha z^n+\beta k^n$ که در آن $|\alpha|=|\beta|$، برقرار است.

اثبات. فرض کنیم $n>3$ باشد. از طرفی $p(z)$ تمامی صفرهای خود را در ناحیه $|z|\leq k$؛ $k\geq 1$، دارد. بنابراین، چندجمله‌ای $G(z)=p(kz)$ همه صفرهای خود را در ناحیه $|z|\leq 1$ خواهد داشت. لذا همه صفر های چندجمله ای $H(z)=z^n\overline{G(\frac{1}{\bar z})}$ در ناحیه $|z|\geq 1$ واقع اند.

فرض کنیم برای $\nu=1,2,3,...,n$، z_ν ها صفرهای $H(z)$ باشند. در این صورت به وضوح $|z_\nu|\geq 1$؛ $1\leq \nu\leq n$ و

$$\frac{zH'(z)}{H(z)}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{z}{z-z_\nu}$$

بنابراین برای نقاط $e^{i\theta}$؛ $0\leq\theta<2\pi$، که صفر های $H(z)$ نباشند، داریم:

$$Re(\frac{e^{i\theta}H'(e^{i\theta})}{H(e^{i\theta})}) = \sum_{\nu=1}^{n} Re(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z_\nu}) \leq \frac{n}{2}.$$

که نتیجه می‌دهد:

$$| \frac{e^{i\theta}H'(e^{i\theta})}{nH(e^{i\theta})} |\leq| 1 - \frac{e^{i\theta}H'(e^{i\theta})}{nH(e^{i\theta})} | . \qquad (۵۶.۲)$$

نامساوی (۵۶.۲) معادل است با:

$$| H'(e^{i\theta}) |\leq| nH(e^{i\theta}) - e^{i\theta}H'(e^{i\theta}) | . \qquad (۵۷.۲)$$

برای نقاط $e^{i\theta}$ ؛ $0 \leq \theta < 2\pi$ ، که صفر های $H(z)$ نباشند. از آن جا که نامساوی (۵۷.۲) برای نقاط $e^{i\theta}$ ؛ $0 \leq \theta < 2\pi$ ، که صفر های $H(z)$ باشند، نیز صحیح است، بنابراین :

$$| H'(z) |\leq| nH(z) - zH'(z) | . \qquad (| z |= 1). \qquad (۵۸.۲)$$

حال از آن جا که $G(z)$ همه صفرهای خود را در ناحیه $| z |\leq 1$ دارد. لذا طبق قضیه گاوس- لوکاس همه صفر های چندجمله‌ای $G'(z)$ همچنین در ناحیه $| z |\geq 1$ واقعند. پس، چندجمله‌ای

$$z^{n-1}\overline{G(\frac{1}{\overline{z}})} = nH(z) - zH'(z) \qquad (۵۹.۲)$$

همه صفر های خود را در $| z |\geq 1$ دارد و یعنی در $| z |< 1$ صفری ندارد. بنابراین، به موجب (۵۹.۲) تابع

$$w(z) = \frac{zH'(z)}{nH(z) - zH'(z)} \qquad (۶۰.۲)$$

در ناحیه $| z |\leq 1$ تحلیلی است و $w(0) = 0$ و بنابر (۵۸.۲) برای $| z |= 1$ ، $| w(z) |\leq 1$. بنابراین برای $| z |\leq 1$ تابع

$$۱ + w(z)$$

وابسته به تابع

$$۱ + z$$

است. بنابراین ، با استفاده از خاصیت مشهور سابوردینیشن ، برای هر $r > ۰$ و $۰ \leq \theta < ۲\pi$ ،

$$\int_۰^{۲\pi} |\, ۱ + w(e^{i\theta}) \,|^r \, d\theta \;\leq \int_۰^{۲\pi} |\, ۱ + e^{i\theta} \,|^r \, d\theta. \qquad (۶۱.۲)$$

همچنین از (۶۰.۲) داریم:

$$۱ + w(z) = \frac{nH(z)}{nH(z) - zH'(z)}.$$

همچنین برای $|\, z \,| = ۱$

$$|\, G'(z) \,| = |\, z^{n-۱}\overline{G(\frac{۱}{\bar{z}})} \,| = |\, nH(z) - zH'(z) \,| \,. \qquad (۶۲.۲)$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$n \,|\, H(z) \,| = |\, ۱ + w(z) \,|\,|\, nH(z) - zH'(z) \,| = |\, ۱ + w(z) \,|\,|\, G'(z) \,| \qquad (|\, z \,| = ۱). \qquad (۶۳.۲)$$

از (۶۱.۲) و (۶۳.۲) داریم:

$$n^r \int_۰^{۲\pi} |\, H(e^{i\theta}) \,|^r \, d\theta \leq \int_۰^{۲\pi} |\, ۱ + e^{i\theta} \,|^r \, d\theta \;\; [\max_{|z|=۱} |\, G'(z) \,|]^r \qquad (r > ۰). \qquad (۶۴.۲)$$

از آن جا که $H(z)$ صفری در $|z|<1$ ندارد، بنابراین با به کار بردن لم ۲.۲.۲ برای $H(z)$ با $R=k\geq 1$ ، برای هر $r>0$ به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\int_0^{2\pi} | H(ke^{i\theta}) |^r \, d\theta \leq (B_r)^r \int_0^{2\pi} | H(e^{i\theta}) |^r \, d\theta. \tag{۶۵.۲}$$

که در این رابطه B_r به صورت زیر است:

$$B_r = \frac{[\int_0^{2\pi} | 1+k^n e^{i\theta} |^r \, d\theta]^{\frac{1}{r}}}{[\int_0^{2\pi} | 1+e^{i\theta} |^r \, d\theta]^{\frac{1}{r}}}.$$

بنابر اینکه $H(z)=z^n\overline{G(\frac{1}{\bar{z}})}=z^n\overline{p(\frac{k}{\bar{z}})}$ ، در نتیجه برای $0\leq\theta<2\pi$ ، داریم :

$$| H(ke^{i\theta}) |=| k^n e^{in\theta}\overline{p(e^{i\theta})} |= k^n | p(e^{i\theta}) | . \tag{۶۶.۲}$$

حال از روابط (۶۴.۲) ، (۶۵.۲) و (۶۶.۲) برای هر $r>0$ ،

$$n^r k^{nr} \int_0^{2\pi} | p(e^{i\theta}) |^r \, d\theta \leq n^r (B_r)^r \int_0^{2\pi} | H(e^{i\theta}) |^r \, d\theta$$

$$\leq \int_0^{2\pi} | 1+k^n e^{i\theta} |^r \, d\theta \ \ [\max_{|z|=1} | G'(z) |]^r. \tag{۶۷.۲}$$

از آن جا که چندجمله‌ای $G'(z)=kp'(kz)$ ازدرجه بزرگ تر یا مساوی سه است، لذا با استفاده از نامساوی اول از لم ۱.۲.۲ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\max_{|z|=1} | G'(z) |= k\max_{|z|=1} | p'(kz) |= k\max_{|z|=k} | p'(z) |$$

$$\leq k[k^{n-1}\max_{|z|=1} | p'(z) | -\frac{2(k^{n-1}-1)}{n+1} | a_1 | -2 | a_2 | (\frac{k^{n-1}-1}{n-1}-\frac{k^{n-3}-1}{n-3})]$$

$$\leq k^n[\max_{|z|=1} | p'(z) | -\frac{2(1-\frac{1}{k^{n-1}})}{n+1} | a_1 | -2 | a_2 | (\frac{1-\frac{1}{k^{n-1}}}{n-1} - \frac{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^{n-1}}}{n-3})].$$

که با ترکیب آن با رابطه (۶۷.۲) داریم:

$$n^r\int_0^{2\pi} | p(e^{i\theta}) |^r \, d\theta \leq \int_0^{2\pi} | 1+k^ne^{i\theta} |^r \, d\theta$$

$$[\max_{|z|=1} | p'(z) | -\frac{2 | a_1 |}{n+1}(1-\frac{1}{k^{n-1}})-\frac{2 | a_2 |}{k^{n-1}}(\frac{(k^{n-1}-1)}{n-1}-\frac{(k^{n-3}-1)}{n-3})].$$

که معادل است با :

$$n[\int_0^{2\pi} | p(e^{i\theta}) |^r \, d\theta]^{\frac{1}{r}} \leq [\int_0^{2\pi} | 1+k^ne^{i\theta} |^r \, d\theta]^{\frac{1}{r}}$$

$$[\max_{|z|=1} | p'(z) | -\frac{2 | a_1 |}{n+1}(1-\frac{1}{k^{n-1}})-\frac{2 | a_2 |}{k^{n-1}}(\frac{(k^{n-1}-1)}{n-1}-\frac{(k^{n-3}-1)}{n-3})].$$

نامساوی فوق همان نامساوی (۵۴.۲) است.

اثبات قسمت دوم این قضیه نیز مشابه اثبات قسمت نخست است. تنها با این تفاوت که بجای استفاده از قسمت اول لم ۱.۲.۲ از قسمت دوم آن کمک می‌گیریم و نامساوی (۵۵.۲) این گونه به اثبات خواهد رسید. □

تذکر ۴.۲.۲. برای $k=1$ قضیه فوق همان نامساوی (۹.۱) در حالت $n \geq 3$ خواهد بود.

تذکر ۵.۲.۲. برای $k=1$ قضیه فوق تظریفی از نامساوی (۵۰.۲) در حالت $n>3$ خواهد بود. زیرا در این حالت برای $k>1$، $\frac{k^x-1}{x}$ با $x>1$ یک تابع صعودی نسبت به x است. بنابراین عبارت

$$\frac{k^{n-1}-1}{n-1} - \frac{k^{n-3}-1}{n-3}$$

همواره نامنفی خواهدبود. همچنین برای $n=3$ واضح است که نامساوی (۵۵.۲) نسبت به نامساوی (۵۰.۲) بهبود یافته است. در حقیقت جز در مواردی که $k=1$ و $| a_1 |=0$ و $| a_2 |=0$ باشد، کران سمت راست نامساوی (۵۵.۲) نسبت به کران سمت راست نامساوی (۵۰.۲) همواره دقیق تر است.

با فرض $r \longrightarrow \infty$ در نامساوی های (۵۴.۲) و (۵۵.۲) نتیجه زیر را داریم که بهبودی از نامساوی (۷.۱) ، البته برای چندجمله‌ای های با درجه $n \geq ۳$ می‌باشد.

نتیجه ۶.۲.۲. فرض کنیم $p(z) = \sum_{\nu=۰}^{n} a_\nu z^\nu$ یک چندجمله‌ای از درجه $n \geq ۳$ و تمامی صفر های خود را در $|z| \leq k$؛ $k \geq ۱$ ، داشته باشد. در این صورت:

برای $n > ۳$:

$$n\ [\max_{|z|=۱} | p(z) | \leq (۱ + k^n)\ [\max_{|z|=۱} | p'(z) | - \frac{۲ | a_۱ |}{n+۱}(۱ - \frac{۱}{k^{n-۱}}) - \frac{۲ | a_۲ |}{k^{n-۱}}$$

$$(\frac{k^{n-۱} - ۱}{n-۱} - \frac{k^{n-۳} - ۱}{n-۳})]. \tag{۶۸.۲}$$

و برای $n = ۳$:

$$۳\ [\max_{|z|=۱} | p(z) | \leq (۱ + k^۳)\quad [\max_{|z|=۱} | p'(z) | - \frac{k-۱}{۲k^۲}[(k+۱) | a_۱ | + (k-۱)۲ | a_۲ |]. \tag{۶۹.۲}$$

و تساوی برای چندجمله‌ای های به فرم $p(z) = az^n + bk^n$ که در آن $| a | = | b |$ و $k \geq ۱$، برقرار است.

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنیم $p(z) = \sum_{\nu=۰}^{n} a_\nu z^\nu$ یک چند جمله ای از درجه $n \geq ۳$ و تمامی صفرهای خود را در $|z| \leq k$؛ $k \geq ۱$ ، داشته باشد و $m = \min_{|z|=k} | p(z) |$. در این صورت برای هر عدد حقیقی یا مختلط α با $| \alpha | \leq ۱$ و $r > ۰$ حقیقی،

برای $n > ۳$:

$$n[\int_۰^{۲\pi} | p(e^{i\theta}) + \alpha m |^r\, d\theta]^{\frac{۱}{r}} \leq [\int_۰^{۲\pi} | ۱ + k^n e^{i\theta} |^r\, d\theta]^{\frac{۱}{r}}[\max_{|z|=۱} | p'(z) | - \frac{۲ | a_۱ |}{n+۱}(۱ - \frac{۱}{k^{n-۱}}) - \frac{۲ | a_۲ |}{k^{n-۱}}$$

$$(\frac{k^{n-۱} - ۱}{n-۱} - \frac{k^{n-۳} - ۱}{n-۳})]. \tag{۷۰.۲}$$

و برای $n=۳$:

$$۳\ [\int_{۰}^{۲\pi} \mid p(e^{i\theta})+\alpha m \mid^{r} d\theta\,]^{\frac{۱}{r}} \leq [\int_{۰}^{۲\pi} \mid ۱+k^{۳}e^{i\theta} \mid^{r} d\theta\,]^{\frac{۱}{r}}\ \ [\max_{|z|=۱} \mid p'(z) \mid - \frac{k-۱}{۲k^{۲}}$$

$$\times[(k+۱) \mid a_{۱} \mid +(k-۱)۲ \mid a_{۲} \mid]. \tag{۷۱.۲}$$

اثبات. طبق فرض تمامی صفرهای $p(z)$ در ناحیه $\mid z \mid\leq k$ ؛ $k\geq ۱$ ، قرار دارند و $m=\min\limits_{|z|=k} \mid p(z) \mid$. اگر $p(z)$ صفری روی دایره $\mid z \mid=k$ داشته باشد، در این صورت $m=۰$ و نتیجه از قضیه ۳.۲.۲ بدست خواهدآمد. بنابراین، فرض کنیم $p(z)$ تمامی صفرهای خود را در ناحیه $\mid z \mid< k$ داشته باشد. بنابراین، $m>۰$. فرض کنیم $H(z)=p(kz)$ و $G(z)=z^{n}\overline{H(\frac{۱}{\bar z})}=z^{n}\overline{p(\frac{k}{\bar z})}$. در این صورت تمامی صفرهای $G(z)$ در ناحیه $\mid z \mid>۱$ واقعند و برای $\mid z \mid=۱$ ، $\mid G(z) \mid=\mid H(z) \mid$. همچنین برای $\mid z \mid=۱$ ، $\mid G(z) \mid=\mid z^{n}\overline{p(\frac{k}{\bar z})} \mid=\mid p(kz) \mid\geq m$. بنابراین با توجه به اصل ماکزیمم قدرمطلق داریم:

$$\mid z^{n}\overline{p(\frac{k}{\bar z})} \mid\geq m \qquad\qquad (\mid z \mid\leq ۱).$$

با تعویض z با $\frac{۱}{z}$ نتیجه می گیریم :

$$\mid p(kz) \mid\geq m \mid z \mid^{n} \qquad\qquad (\mid z \mid\geq ۱).$$

یا

$$\mid p(z) \mid\geq m \mid \frac{z}{k} \mid^{n} \qquad\qquad (\mid z \mid\geq k). \tag{۷۲.۲}$$

حال با در نظر گرفتن چندجمله‌ای $F(z)=p(z)+\alpha m$ که در آن α عددی حقیقی یا مختلط است، با $\mid \alpha \mid\leq ۱$ ، همه صفرهای $F(z)$ در ناحیه $\mid z \mid\leq k$ واقعند. زیرا اگر برای $z=z_{۰}$ با $\mid z_{۰} \mid>k$ ، داشته

باشیم $F(z_.) = p(z_.) + \alpha m = ۰$ ، در این صورت :

$$| p(z_.) |=| \alpha m |\leq m < m | \frac{z_.}{k} |^n .$$

که در تناقض با (۷۲.۲) است . بنابراین برای هر عدد حقیقی یا مختلط α با $| \alpha |\leq ۱$ ، همه صفرهای $F(z)$ در ناحیه $| z |\leq k$ قرار دارند. حال با بکار بردن قضیه ۳.۲.۲ برای $F(z)$ و با در نظر گرفتن این مطلب که $F'(z) = p'(z)$ قضیه ثابت می‌شود. □

در این جا با فرض $r \longrightarrow \infty$ و $| \alpha |\longrightarrow ۱$ در (۷۰.۲) و (۷۱.۲) و انتخاب α مناسبی که داشته باشیم :

$$| p(e^{i\theta}) + \alpha m |=| p(e^{i\theta}) | + | \alpha m |$$

ما نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۸.۲.۲. فرض کنیم $p(z) = \sum_{\nu=.}^{n} a_\nu z^\nu$ یک چند جمله ای از درجه $n \geq ۳$ و تمامی صفر های خود را در $| z |\leq k$؛ $k \geq ۱$ ، داشته باشد، در این صورت،

برای $n > ۳$:

$$n\,[\max_{|z|=۱} | p(z) | + \min_{|z|=k} | p(z) |] \leq [۱ + k^n]\ [\max_{|z|=۱} | p'(z) | - \frac{۲ | a_۱ |}{n+۱}(۱ - \frac{۱}{k^{n-۱}}) - \frac{۲ | a_۲ |}{k^{n-۱}}$$

$$(\frac{k^{n-۱} - ۱}{n-۱} - \frac{k^{n-۳} - ۱}{n-۳})]. \tag{۷۳.۲}$$

و برای $n = ۳$:

$$۳\,[\max_{|z|=۱} | p(z) | + \min_{|z|=k} | p(z) |] \leq [۱ + k^۳]\ [\max_{|z|=۱} | p'(z) | - \frac{k-۱}{۲k^۲}$$

$$\times[(k+۱) \mid a_۱ \mid +(k-۱)۲ \mid a_۲ \mid]. \tag{۷۴.۲}$$

نامساوی های (۷۳.۲) و (۷۴.۲) برای چندجمله ای های به فرم $p(z) = z^n + k^n$ در حالت تساوی برقرار می‌شود.

قضیه ۹.۲.۲. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $\mid z \mid \leq k$؛ $k \geq ۱$ ، داشته باشد. در این صورت برای $r > ۰$ ، $p > ۱$ و $q > ۱$ با $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$

$$n \ [\int_۰^{۲\pi} \mid p(e^{i\theta}) \mid^r \, d\theta \,]^{\frac{۱}{r}} \leq B_r [\int_۰^{۲\pi} \mid ۱ + e^{i\theta} \mid^{pr} \, d\theta \,]^{\frac{۱}{pr}} \ [\int_۰^{۲\pi} \mid p'(e^{i\theta}) \mid^{qr} \, d\theta \,]^{\frac{۱}{qr}} \tag{۷۵.۲}$$

که در آن :

$$B_r = \frac{[\int_۰^{۲\pi} \mid ۱ + k^n e^{i\theta} \mid^r \, d\theta \,]^{\frac{۱}{r}}}{[\int_۰^{۲\pi} \mid ۱ + e^{i\theta} \mid^r \, d\theta \,]^{\frac{۱}{r}}}.$$

اثبات. چندجمله‌ای $p(z)$ تمامی صفرهای خود را در ناحیه $\mid z \mid \leq k$ ؛ $k \geq ۱$ ، دارد. بنابراین مطلب، چندجمله‌ای $G(z) = p(kz)$ صفرهای خود را در ناحیه $\mid z \mid \leq ۱$ دارد. لذا همه صفرهای چندجمله‌ای $H(z) = z^n \overline{G(\frac{۱}{\bar{z}})}$ در ناحیه $\mid z \mid \geq ۱$ واقعند.

فرض کنیم برای $\nu = ۱, ۲, ۳, ..., n$ ، z_ν ها صفرهای $H(z)$ باشند. در این صورت به وضوح $\mid z_\nu \mid \geq ۱$ ؛ $۱ \leq \nu \leq n$ و همچنین

$$\frac{zH'(z)}{H(z)} = \sum_{\nu=۱}^{n} \frac{z}{z - z_\nu}$$

بنابراین برای نقاط $e^{i\theta}$ ؛ $۰ \leq \theta < ۲\pi$ ، که صفر های $H(z)$ نباشند،

$$Re(\frac{e^{i\theta}H'(e^{i\theta})}{H(e^{i\theta})}) = \sum_{\nu=1}^{n} Re(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z_\nu}) \leq \frac{n}{2}.$$

که نتیجه می‌دهد:

$$| \frac{e^{i\theta}H'(e^{i\theta})}{nH(e^{i\theta})} | \leq | 1 - \frac{e^{i\theta}H'(e^{i\theta})}{nH(e^{i\theta})} | . \qquad (۷۶.۲)$$

نامساوی (۷۶.۲) معادل است با:

$$| H'(e^{i\theta}) | \leq | nH(e^{i\theta}) - e^{i\theta}H'(e^{i\theta}) | . \qquad (۷۷.۲)$$

برای نقاط $e^{i\theta}$، $0 \leq \theta < 2\pi$ که صفر های $H(z)$ نباشند. بنابراین،

$$| H'(z) | \leq | nH(z) - zH'(z) | \qquad (| z |= 1). \qquad (۷۸.۲)$$

حال از آن جا که $G(z)$ همه صفرهای خود را در ناحیه $| z | \leq 1$ دارد، لذا طبق قضیه گاوس- لوکاس همه صفر های چندجمله‌ای $G'(z)$ همچنین در ناحیه $| z | \geq 1$ واقعند و این نتیجه می‌دهد چندجمله‌ای

$$z^{n-1}\overline{G(\frac{1}{\overline{z}})} = nH(z) - zH'(z) \qquad (۷۹.۲)$$

همه صفر های خود را در $| z | \geq 1$ ، دارد. یعنی در $| z | < 1$ صفری ندارد . بنابراین به موجب (۷۹.۲) تابع

$$w(z) = \frac{zH'(z)}{nH(z) - zH'(z)} \qquad (۸۰.۲)$$

در ناحیه $| z | \leq 1$ تحلیلی است و $w(0) = 0$ و بنابر (۷۸.۲) برای $| z |= 1$ ، $| w(z) | \leq 1$. بنابراین برای $| z | \leq 1$، تابع

$$1 + w(z)$$

وابسته به تابع

$$۱ + z$$

است. بنابراین، با استفاده از خاصیت مشهور سابوردینیشن، برای هر $r > ۰$ و $۰ \leq \theta < ۲\pi$،

$$\int_{۰}^{۲\pi} |\ ۱ + w(e^{i\theta})\ |^r\ d\theta\ \leq \int_{۰}^{۲\pi} |\ ۱ + e^{i\theta}\ |^r\ d\theta. \tag{۸۱.۲}$$

همچنین از (۸۰.۲) داریم:

$$۱ + w(z) = \frac{nH(z)}{nH(z) - zH'(z)}.$$

همچنین برای $|\ z\ |= ۱$

$$|\ G'(z)\ |=|\ z^{n-۱}\overline{G(\frac{۱}{\overline{z}})}\ |=|\ nH(z) - zH'(z)\ |\ . \tag{۸۲.۲}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$n\ |\ H(z)\ |=|\ ۱ + w(z)\ |\ |\ nH(z) - zH'(z)\ |=|\ ۱ + w(z)\ |\ |\ G'(z)\ |\quad (|\ z\ |= ۱). \tag{۸۳.۲}$$

از (۸۳.۲) داریم:

$$n^r \int_{۰}^{۲\pi} |\ H(e^{i\theta})\ |^r\ d\theta\ |\leq \int_{۰}^{۲\pi} |\ ۱ + w(e^{i\theta})\ |^r|\ G'(e^{i\theta})\ |^r\ d\theta$$

$$= k^r \int_{۰}^{۲\pi} |\ ۱ + w(e^{i\theta})\ |^r|\ p'(ke^{i\theta})\ |^r\ d\theta \qquad (r > ۰). \tag{۸۴.۲}$$

از آن جا که $H(z)$ صفری در $\mid z \mid \geq ۱$ ندارد، بنابراین با به کار بردن لم ۲.۲.۲ برای $H(z)$ با $R = k \geq ۱$ ، برای هر $r > ۰$ به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\int_{۰}^{۲\pi} \mid H(ke^{i\theta})^{r} d\theta \mid \leq (B_r)^r \int_{۰}^{۲\pi} \mid H(e^{i\theta}) \mid^r d\theta. \quad (۸۵.۲)$$

در این رابطه B_r به صورت زیر است :

$$B_r = \frac{[\int_{۰}^{۲\pi} \mid ۱ + k^n e^{i\theta} \mid^r d\theta]^{\frac{۱}{r}}}{[\int_{۰}^{۲\pi} \mid ۱ + e^{i\theta} \mid^r d\theta]^{\frac{۱}{r}}}$$

از آن جا که $H(z) = z^n \overline{G(\frac{۱}{\bar{z}})} = z^n \overline{p(\frac{k}{\bar{z}})}$ ، در نتیجه برای $۰ \leq \theta < ۲\pi$ ،

$$\mid H(ke^{i\theta}) \mid = \mid k^n e^{in\theta} \overline{p(e^{i\theta})} \mid = k^n \mid p(e^{i\theta}) \mid . \quad (۸۶.۲)$$

حال از روابط (۸۴.۲) ، (۸۵.۲) و (۸۶.۲) برای هر $r > ۰$:

$$n^r k^{nr} \int_{۰}^{۲\pi} \mid p(e^{i\theta}) \mid^r d\theta \leq n^r (B_r)^r \left[\int_{۰}^{۲\pi} \mid H(e^{i\theta}) \mid^r d\theta\right]$$

$$= k^r (B_r)^r \int_{۰}^{۲\pi} \mid ۱ + w(e^{i\theta}) \mid^r \mid p'(ke^{i\theta}) \mid^r d\theta. \quad (۸۷.۲)$$

با استفاده از نامساوی هولدر برای $r > ۰$ ، $p > ۱$ و $q > ۱$ با $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$

$$n^r k^{nr} \int_{۰}^{۲\pi} \mid p(e^{i\theta}) \mid^r d\theta \leq k^r (B_r)^r \left[\int_{۰}^{۲\pi} \mid ۱+w(e^{i\theta}) \mid^{pr} d\theta\right]^{\frac{۱}{p}} \left[\int_{۰}^{۲\pi} \mid p'(ke^{i\theta}) \mid^{qr} d\theta\right]^{\frac{۱}{q}}.$$

(۸۸.۲)

به طور معادل:

$$nk^n \left[\int_{۰}^{۲\pi} \mid p(e^{i\theta}) \mid^r d\theta\right]^{\frac{۱}{r}} \leq kB_r \left[\int_{۰}^{۲\pi} \mid ۱ + w(e^{i\theta}) \mid^{pr} d\theta\right]^{\frac{۱}{pr}} \left[\int_{۰}^{۲\pi} \mid p'(ke^{i\theta}) \mid^{qr} d\theta\right]^{\frac{۱}{qr}}. \quad (۸۹.۲)$$

از آن جا که چندجمله‌ای $p'(z)$ از درجه $n-۱$ است، لذا برای هر $t>۰$ و $R\geq ۱$ داریم:

$$[\int_۰^{۲\pi} \mid p'(Re^{i\theta}) \mid^t d\theta]^{\frac{۱}{t}} \leq R^{n-۱}[\int_۰^{۲\pi} \mid p'(e^{i\theta}) \mid^t d\theta]^{\frac{۱}{t}}.$$

با بکار بردن نامساوی اخیر در رابطه (۸۹.۲) و استفاده از (۸۱.۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$n\ [\int_۰^{۲\pi} \mid p(e^{i\theta}) \mid^r d\theta\,]^{\frac{۱}{r}} \leq B_r[\int_۰^{۲\pi} \mid ۱+e^{i\theta} \mid^{pr} d\theta\,]^{\frac{۱}{pr}}\ [\int_۰^{۲\pi} \mid p'(e^{i\theta}) \mid^{qr} d\theta\,]^{\frac{۱}{qr}}. \qquad (۹۰.۲)$$

و این چنین قضیه ثابت می شود.

□

نتیجه زیر با فرض $q\longrightarrow\infty$ $(p\longrightarrow ۱)$ در (۷۵.۲) بدست آمده است که همان قضیه ۴.۳.۱ است.

نتیجه ۱۰.۲.۲. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $\mid z\mid\leq k$؛ $k\geq ۱$، داشته باشد. در این صورت برای هر $r>۰$،

$$n\ [\int_۰^{۲\pi} \mid p(e^{i\theta}) \mid^r d\theta\,]^{\frac{۱}{r}} \leq [\int_۰^{۲\pi} \mid ۱+k^n e^{i\theta} \mid^r d\theta\,]^{\frac{۱}{r}}\ \max_{|z|=۱} \mid p'(z) \mid. \qquad (۹۱.۲)$$

نامساوی اخیر با فرض $r\longrightarrow\infty$ نامساوی (۷.۱) را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۱۱.۲.۲. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $\mid z\mid\leq k$؛ $k\geq ۱$، داشته باشد. علاوه براین $m=\min_{|z|=k}\mid p(z)\mid$. در این صورت برای عددحقیقی یا مختلط α با $\mid\alpha\mid<۱$، $r>۰$، $p>۱$ و $q>۱$ با $\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=۱$

$$n\ [\int_۰^{۲\pi} \mid p(e^{i\theta})+\alpha m \mid^r d\theta\,]^{\frac{۱}{r}} \leq B_r[\int_۰^{۲\pi} \mid ۱+e^{i\theta} \mid^{pr} d\theta\,]^{\frac{۱}{pr}}\ [\int_۰^{۲\pi} \mid p'(e^{i\theta}) \mid^{qr} d\theta\,]^{\frac{۱}{qr}}. \qquad (۹۲.۲)$$

که در آن B_r همانند قضیه ۹.۲.۲ است.

اثبات. با توجه به قضیه روشه چندجمله‌ای $F(z) = p(z) + \alpha m$ صفر های خود را در ناحیه $|\, z \,| \leq k$ ، $k \geq ۱$ ، دارد. بنابراین با بکار بردن قضیه ۹.۲.۲ برای $F(z)$ و با در نظر گرفتن این که $F'(z) = p'(z)$ قضیه به سادگی ثابت می‌شود. □

با فرض $\infty \longrightarrow q$ ($p \longrightarrow ۱$) در (۹۲.۲) به نتیجه بعد خواهیم رسید.

نتیجه ۱۲.۲.۲. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $|\, z \,| \leq k$؛ $k \geq ۱$ ، داشته باشد. همچنین $m = \min_{|z|=k} |\, p(z) \,|$. در این صورت برای عددحقیقی یا مختلط α با $|\, \alpha \,| < ۱$ ، و هر $r > ۰$

$$n \left[\int_{۰}^{۲\pi} |\, p(e^{i\theta}) + \alpha m \,|^r \, d\theta \,\right]^{\frac{1}{r}} \leq \left[\int_{۰}^{۲\pi} |\, ۱ + k^n e^{i\theta} \,|^r \, d\theta \,\right]^{\frac{1}{r}} \max_{|z|=۱} |\, p'(z) \,| \,. \qquad (۹۳.۲)$$

نامساوی (۹۳.۲) به وضوح تعمیمی از نامساوی (۹۱.۲) است.

تذکر ۱۳.۲.۲. با فرض $\infty \longrightarrow r$ و $\infty \longrightarrow q$ در نامساوی (۹۲.۲) و انتخاب α مناسب داریم:

$$n[\max_{|z|=۱} |\, p(z) + \min_{|z|=k} |\, p(z) \,|] \leq \; (۱ + k^n) \max_{|z|=۱} |\, p'(z) \,| \;\; . \qquad (۹۴.۲)$$

نامساوی (۹۴.۲) پیش از این نیز توسط گوویل به اثبات رسیده است.

فصل ۳

برآوردهای میانگین انتگرالی و مشتق قطبی چندجمله ای ها

۱.۳ مقدمه

فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n و α عددی حقیقی یا مختلط باشد. دراین صورت مشتق قطبی $p(z)$ نسبت به α که با نماد $D_\alpha p(z)$ نشان داده می شود، به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_\alpha p(z) = np(z) + (\alpha - z)p'(z)$$

چندجمله‌ای $D_\alpha p(z)$ از درجه حداکثر $n - ۱$ است که تعمیمی از مشتق معمولی $p(z)$ یا همان $p'(z)$ است و رابطه زیر در مورد آن ها برقرار است.

$$\lim_{\alpha \longrightarrow \infty} \frac{D_\alpha p(z)}{\alpha} = p'(z).$$

۲.۳ برآوردهای میانگین انتگرالی و مشتق قطبی

عزیز نتایج دقیقی در مورد ماکزیمم قدر مطلق مشتق قطبی $p(z)$ با صفرهای محدود ثابت کرده است و شاه [۱۷] نامساوی (۳.۱) را به مشتق قطبی تعمیم داد. درحقیقت وی نشان داد، اگر $p(z)$ تمامی صفرهایش را در $|z| \leq ۱$ داشته باشد، در این صورت برای هر عدد حقیقی یا مختلط α با $|\alpha| \geq ۱$ ،

$$\max_{|z|=۱} \mid D_\alpha p(z) \mid \geq \frac{n}{۲}(\mid \alpha \mid -۱) \max_{|z|=۱} \mid p(z) \mid .$$

همچنین عزیز و احمد به عنوان تعمیمی از آن نشان دادند، [۴] اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $\mid z \mid \leq k \leq ۱$ داشته باشد، در این صورت برای هر عدد حقیقی یا مختلط α با $\mid \alpha \mid \geq k$ ،

$$\max_{|z|=۱} \mid D_\alpha p(z) \mid \geq n\frac{(\mid \alpha \mid -k)}{۱+k} \max_{|z|=۱} \mid p(z) \mid$$

در ادامه ما نیز به عنوان تعمیمی از نامساوی های فوق و تعدادی نامساوی های میانگین انتگرالی فصول قبل قادر به اثبات قضایای زیر خواهیم بود.

قضیه ۱.۲.۳. (*) فرض کنیم $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$ ؛ $۱ \leq \mu \leq n$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $\mid z \mid \leq k \leq ۱$ ، داشته باشد. در این صورت برای هر عدد حقیقی یا مختلط α با $\mid \alpha \mid \geq k$ ، و هر $r > ۰$ ، $p > ۱$ و $q > ۱$ با $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$

$$n(\mid \alpha \mid -S_\mu) \, [\int_۰^{۲\pi} \mid p(e^{i\theta}) \mid^r d\theta \,]^{\frac{۱}{r}} \leq [\int_۰^{۲\pi} \mid ۱+S_\mu e^{i\theta} \mid^{pr} d\theta \,]^{\frac{۱}{pr}} \, [\int_۰^{۲\pi} \mid D_\alpha p(e^{i\theta}) \mid^{qr} d\theta \,]^{\frac{۱}{qr}}. \quad (۱.۳)$$

اثبات. چون $q(z) = z^n \overline{p(\frac{۱}{\bar z})}$ ، بنابراین $p(z) = z^n \overline{q(\frac{۱}{\bar z})}$. در این صورت:

$$p'(z) = nz^{n-۱}\overline{q(\frac{۱}{\bar z})} - z^{n-۲}\overline{q'(\frac{۱}{\bar z})}. \quad (۲.۳)$$

به طور معادل:

$$zp'(z) = nz^n\overline{q(\frac{۱}{\bar z})} - z^{n-۱}\overline{q'(\frac{۱}{\bar z})}, \quad (۳.۳)$$

که نتیجه می‌دهد :

$$| p'(z) |=| nq(z) - zq'(z) | . \tag{۴.۳}$$

حال طبق فرض، $P(z)$ تمامی صفر های خود را در ناحیه $| z |\leq k \leq ۱$ دارد. بنابراین به کمک لم ۱۲.۱.۲ ، برای $| z |= ۱$ و $۱ \leq \mu \leq n$ ، داریم :

$$| q'(z) |\leq S_\mu | p'(z) | . \tag{۵.۳}$$

حال با استفاده از (۴.۳) در (۵.۳) برای $| z |= ۱$ و $۱ \leq \mu \leq n$ ، داریم :

$$| q'(z) |\leq S_\mu | nq(z) - zq'(z) | \tag{۶.۳}$$

از طرفی برای هر عدد حقیقی یا مختلط α با $| \alpha |\geq S_\mu$ ، داریم:

$$| D_\alpha p(z) |=| np(z) + (\alpha - z)p'(z) | \geq | \alpha || p'(z) | - | np(z) - zp'(z) | .$$

با تغییر نقش $p(z)$ و $Q(z)$ در (۴.۳) برای $| z |= ۱$ می‌توان نتیجه گرفت :

$$| D_\alpha p(z) | \geq | \alpha || p'(z) | - | q'(z) |\geq (| \alpha | - S_\mu) | p'(z) | . \tag{۷.۳}$$

از آن جا $p(z)$ تمامی صفرهای خود را درناحیه $| z |\leq k \leq ۱$ دارد، به کمک قضیه گاوس - لوکاس، همه صفر های $p'(z)$ همچنین در ناحیه $| z |\leq ۱$ واقعند. این مطلب نتیجه می‌دهد، چندجمله‌ای

$$z^{n-1}\overline{p'(\frac{1}{\bar{z}})} = nq(z) - zq'(z) \tag{۸.۳}$$

تمامی صفرهای خود را در ناحیه $1 \le \frac{1}{k} \le |z|$ دارد. بنابراین ،

$$w(z) = \frac{zq'(z)}{S_\mu(nq(z) - zq'(z))} \tag{9.3}$$

برای $|z| \le 1$ تحلیلی است و $w(0) = 0$. با توجه به (۶.۳) برای $|z| = 1$ ، $|w(z)| \le 1$. بنابراین تابع

$$1 + S_\mu w(z)$$

برای $|z| \le 1$ ، وابسته به تابع

$$1 + S_\mu z$$

است. بنابراین، با توجه به خاصیت مشهور سابوردینیشن، برای هر $r > 0$ و $0 \le \theta < 2\pi$ داریم :

$$\int_0^{2\pi} |1 + S_\mu w(e^{i\theta})|^r \, d\theta \ \le \int_0^{2\pi} |1 + S_\mu e^{i\theta}|^r \, d\theta. \tag{10.3}$$

و از (۹.۳) داریم:

$$1 + S_\mu w(z) = \frac{nq(z)}{nq(z) - zq'(z)}.$$

بنابراین،

$$n \,|\, q(z) \,|=|\, 1 + S_\mu w(z) \,|\,|\, nq(z) - zq'(z) \,| \,. \tag{11.3}$$

برای $|z| = 1$ ، $|q(z)| = |p(z)|$. لذا، از (۱۱.۳) داریم:

$$n \,|\, p(z) \,|=|\, 1 + S_\mu w(z) \,|\,|\, p'(z) \,| \qquad (|z| = 1). \tag{12.3}$$

از (۷.۳) ، (۱۰.۳) و (۱۲.۳) می‌توان گفت:

$$n^r(|\,\alpha\,| - S_\mu)^r \int_0^{2\pi} |\, p(e^{i\theta}) \,|^r \, d\theta \le \int_0^{2\pi} |\, 1 + S_\mu e^{i\theta} \,|^r \,|\, D_\alpha p(e^{i\theta}) \,|^r \, d\theta \qquad (r > 0). \tag{13.3}$$

حال با بکار بردن نامساوی هولدر برای $p > ۱$ و $q > ۱$ با $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$، از رابطه (۱۳.۳) داریم:

$$n(|\alpha| - S_\mu)[\int_۰^{۲\pi} |p(e^{i\theta})|^r d\theta]^{\frac{۱}{r}} \leq [\int_۰^{۲\pi} |۱+S_\mu e^{i\theta}|^{pr} d\theta]^{\frac{۱}{pr}} \ [\int_۰^{۲\pi} |D_\alpha p(e^{i\theta})|^{qr} d\theta]^{\frac{۱}{qr}} \qquad (r > ۰). \tag{۱۴.۳}$$

که این همان نامساوی مطلوب ماست. $\square$

تذکر ۲.۲.۳. با تقسیم طرفین نامساوی (۱.۳) بر $|\alpha|$ و با فرض $\infty \longrightarrow |\alpha|$ به نامساوی زیر خواهیم رسید که پیش از این تحت عنوان نامساوی (۳۱.۲) به آن اشاره کردیم.

$$n \ [\int_۰^{۲\pi} |p(e^{i\theta})|^r d\theta]^{\frac{۱}{r}} \leq [\int_۰^{۲\pi} |۱ + S_\mu e^{i\theta}|^{qr} d\theta]^{\frac{۱}{qr}} \ [\int_۰^{۲\pi} |p'(e^{i\theta})|^{pr} d\theta]^{\frac{۱}{pr}} \qquad (r > ۰). \tag{۱۵.۳}$$

با فرض $\infty \longrightarrow q$ در قضیه ۱.۲.۳ به آسانی نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۳.۲.۳. فرض کنیم $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$ ؛ $۱ \leq \mu \leq n$، یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $|z| \leq k \leq ۱$، داشته باشد. در این صورت برای هر عدد حقیقی یا مختلط α با $|\alpha| \geq k$ و هر $r > ۰$

$$n(|\alpha| - S_\mu) \, [\int_۰^{۲\pi} |p(e^{i\theta})|^r d\theta]^{\frac{۱}{r}} \leq [\int_۰^{۲\pi} |۱ + S_\mu e^{i\theta}|^r d\theta]^{\frac{۱}{r}} \max_{|z|=۱} |D_\alpha p(e^{i\theta})| . \tag{۱۶.۳}$$

همچنین با فرض $\infty \longrightarrow r$ در نتیجه فوق برآوردی دقیق تر نسبت به برآوردهای دیگر، برای مشتق قطبی بدست خواهدآمد.

نتیجه ۴.۲.۳. فرض کنیم $p(z)=a_nz^n+\sum_{j=\mu}^{n}a_{n-j}z^{n-j}$ ؛ $1\leq\mu\leq n$ ، یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $|z|\leq k\leq 1$ ، داشته باشد. در این صورت برای هر عدد حقیقی یا مختلط α با $|\alpha|\geq k$

$$n(\frac{|\alpha|-S_\mu}{1+S_\mu})\max_{|z|=1}|p(z)|\leq\max_{|z|=1}|D_\alpha p(z)|. \tag{۱۷.۳}$$

تذکر ۵.۲.۳. با تقسیم طرفین نامساوی (۱۷.۳) بر $|\alpha|$ و با فرض $\infty\longrightarrow|\alpha|$ ، به نامساوی زیر خواهیم رسید که برآوردی برای مشتق محسوب می‌شود و پیش از این تحت عنوان نامساوی (۳۵.۲) ، به آن اشاره کردیم.

$$n\max_{|z|=1}|p(z)|\leq(1+S_\mu)\max_{|z|=1}|p'(z)|. \tag{۱۸.۳}$$

این فصل را با بیان و اثبات چند نامساوی در مورد برآورد میانگین انتگرالی و مشتق قطبی رده ای از چندجمله‌ای ها که صفری از مرتبه ای خاص در مبدأ دارند، به پایان می‌بریم.

قضیه ۶.۲.۳. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $|z|\leq k$ ؛ $k\leq 1$ ، داشته باشد. علاوه بر این $p(z)$ با صفری از مرتبه s در مبدأ باشد. در این صورت برای هر عدد حقیقی یا مختلط α با $|\alpha|\geq k$ ، و هر $r>0$

$$\frac{(n+ks)(|\alpha|-k)}{1+k}\left[\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^r\,d\theta\right]^{\frac{1}{r}}\leq\left[\int_0^{2\pi}|D_\alpha p(z)|^r\,d\theta\right]^{\frac{1}{r}}. \tag{۱۹.۳}$$

وان

اثبات. از آن جا که $p(z)$ تمامی صفرهای خود را در ناحیه $1 \leq k \leq |z|$ و صفری در مبدأ از مرتبه چندگانگی s دارد ، بنابراین می‌توان نوشت:

$$p(z) = z^s g(z)$$

که در آن $g(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n-s$ با صفرهای واقع در $1 \leq k \leq |z|$ است. به سهولت می توانیم بنویسیم، اگر $q(z) = z^n\overline{p(\frac{1}{\bar{z}})} = z^{n-s}\overline{g(\frac{1}{\bar{z}})}$ دراین صورت:

$$|p'(z)| = |nq(z) - zq'(z)| \qquad (|z| = 1). \tag{۲۰.۳}$$

حال طبق فرض، $P(z)$ تمامی صفر های خود را در ناحیه $1 \leq k \leq |z|$ دارد. بنابراین، با استفاده از لم ۲.۱.۲ در حالت $\mu = 1$، برای $|z| = 1$، داریم :

$$|q'(z)| \leq k\, |p'(z)|\ . \tag{۲۱.۳}$$

حال با استفاده از (۲۰.۳) در (۲۱.۳) برای $|z| = 1$، داریم :

$$|q'(z)| \leq k\, |nq(z) - zq'(z)|\ . \tag{۲۲.۳}$$

از طرفی برای هر عدد حقیقی یا مختلط α با $|\alpha| \geq k$، داریم:

$$|D_\alpha p(z)| = |np(z) + (\alpha - z)p'(z)| \geq |\alpha|\, |p'(z)| - |np(z) - zp'(z)|,$$

که با تغییر نقش $p(z)$ و $Q(z)$ در (۲۰.۳) برای $|z| = 1$ می‌توان نتیجه گرفت :

$$|D_\alpha p(z)| \geq |\alpha|\, |p'(z)| - |q'(z)| \geq (|\alpha| - k)\, |p'(z)|\ . \tag{۲۳.۳}$$

حال $p'(z) = sz^{s-1}g(z) + z^s g'(z)$ ، که نتیجه می دهد:

$$\frac{zp'(z)}{p(z)} = s + \frac{zg'(z)}{g(z)}.$$

اگر $z_1, z_2, z_3, ..., z_{n-s}$ صفرهای $g(z)$ باشند، در این صورت $1 \le k \le| z_j |$ ؛ $1 \le j \le n-s$. برای هر $0 \le \theta < 2\pi$ و نقاط $e^{i\theta}$ ، که صفرهای $p(z)$ نباشند، داریم:

$$\begin{aligned} Re(\frac{e^{i\theta}p'(e^{i\theta})}{p(e^{i\theta})}) &= s + Re(\frac{e^{i\theta}g'(e^{i\theta})}{g(e^{i\theta})}) \\ &= s + \sum_{j=1}^{n-s} Re(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z_j}) \\ &\ge s + \sum_{j=1}^{n-s} \frac{1}{1+ | z_j |} \\ &\ge s + \frac{n-s}{1+k} \\ &= \frac{n+sk}{1+k}. \end{aligned}$$

بنابراین، برای هر $0 \le \theta < 2\pi$ و نقاط $e^{i\theta}$ ، که صفرهای $p(z)$ نباشند، داریم:

$$| p'(e^{i\theta}) |\ge \frac{n+sk}{1+k} | p(e^{i\theta}) | . \qquad (۲۴.۳)$$

نامساوی (۲۴.۳) برای نقاط $e^{i\theta}$ ؛ $0 \le \theta < 2\pi$ ، که صفرهای $p(z)$ باشند، نیز صحیح است. بنابراین

$$| p'(e^{i\theta}) |\ge \frac{n+sk}{1+k} | p(e^{i\theta}) | \qquad (| z |= 1). \qquad (۲۵.۳)$$

نامساوی (۲۵.۳) و (۲۳.۳) نتیجه می دهد:

$$| D_\alpha p(z) |\ge| \frac{(| \alpha | -k)(n+sk)}{1+k} | p(z) | . \qquad (۲۶.۳)$$

واین نامساوی ما را به نتیجه مطلوب می رساند. $\square$

حال پس از اثبات این قضیه برای کامل شدن بحث به چند نتیجه جالب از آن اشاره داریم. نتیجه نخست در ارتباط با برآورد مشتق قطبی و نتیجه دیگر در باب برآورد میانگین انتگرالی چندجمله‌ای ها می‌باشد. همچنین نتیجه پسین برآوردی برای مشتق معمولی خواهدبود.

نتیجه ۷.۲.۳. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $|z| \leq k$ ؛ $k \leq ۱$ ، داشته باشد. همچنین با صفری از مرتبه s در مبدأ باشد، در این صورت برای هر $r > ۰$ و $|\alpha| \geq k$

$$\frac{(|\alpha| - k)(n + sk)}{۱ + k} \max_{|z|=۱} |p(z)| \leq \max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| \ . \tag{۲۷.۳}$$

نتیجه فوق با فرض $r \longrightarrow \infty$ ، در قضیه ۶.۲.۳ بدست آمده است. همچنین با تقسیم طرفین نامساوی (۱۹.۳) بر $|\alpha|$ و با فرض $|\alpha| \longrightarrow \infty$ ، به نتیجه زیرخواهیم رسید.

نتیجه ۸.۲.۳. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $|z| \leq k$؛ $k \leq ۱$ داشته باشد. علاوه بر این اگر با صفری از مرتبه s در مبدأ باشد، در این صورت برای هر $r > ۰$

$$\frac{n + ks}{۱ + k} \left[\int_۰^{۲\pi} |p(e^{i\theta})|^r \, d\theta\right]^{\frac{۱}{r}} \leq \left[\int_۰^{۲\pi} |p'(z)|^r \, d\theta\right]^{\frac{۱}{r}}. \tag{۲۸.۳}$$

با فرض $r \longrightarrow \infty$ در نامساوی (۲۸.۳) به نامساوی زیر دست خواهیم یافت .

نتیجه ۹.۲.۳. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n و تمامی صفر های خود را در $|z| \leq k$؛

$1 \leq k$ داشته باشد. همچنین با صفری از مرتبه s در مبدأ باشد. در این صورت

$$\frac{n+ks}{1+k} \max_{|z|=1} | p(z) | \leq \max_{|z|=1} | p'(z) | . \tag{29.3}$$

قابل بررسی است که در نامساوی (۲۹.۳) برای چندجمله‌ای به فرم $p(z) = z^s(z+k)^{n-s}$؛ $0 \leq s \leq n$ ، تساوی برقرار است. زیرا در این حالت:

$$\max_{|z|=1} | p(z) | = \max_{|z|=1} | z^s(z+k)^{n-s} | = (1+k)^{n-s}$$

و از سوی دیگر

$$\begin{aligned}
\max_{|z|=1} | p'(z) | &= \max_{|z|=1} | sz^{s-1}(z+k)^{n-s} + z^s(n-s)(z+k)^{n-s-1} | \\
&= s(1+k)^{n-s} + (n-s)(1+k)^{n-s-1} \\
&= (s + \frac{n-s}{1+k})(1+k)^{n-s} \\
&= \frac{n+ks}{1+k}(1+k)^{n-s}
\end{aligned}$$

و بنابراین در این جا تساوی خواهیم داشت.

کتاب‌نامه

[1] *Q.I. Rahman and G. Schmeisser*, Analytic Theory of Polynomials, *London Math. Society Monographs New Series No. 26, Clarendon Press, Oxford, 2002.*

[2] *Hille, E.*, Analytic Function Theory, *Vol. I, Blaisdell Publishing Company, New York, 1959.*

مراجع

[1] A. Aziz, Integral mean estimates for polynomials with restricted zeros, J. Approx.Theory, 55 (1988), 232-239. 5, 8

[2] A. Aziz and N. Ahemad, Integral mean estimates for polynomials whose zeros are within a circle, Glas. Mat. Ser. III 31(51) (1996), no. 2, 229–237.

[3] A. Aziz and Q. M. Dawood, Inequalities for a polynomial and its derivative, J. Approx.Theory, 53(1988),155-62. 8

[4] A. Aziz and N. A. Rather, A refinement of a theorem of Paul Turan concerning polynomials, Math. Ineq. Appl. , 1 (1998) 231-238. 8, 46

[5] R. P. Boas Jr., Q. I. Rahman, L^p inequalities for polynomials and entire functions, Arch. Rational Mech. Anal., 11 (1962), 34-39. 14

[6] T. N. Chan and M. A. Malik, On Erdös-Lax theorem, Proc. Indian Acad. Sci. , 92(1983),191- 93. 11

[7] K. K. Dewan, J. Kaur, A. Mir, Inequalities for the derivative of a polynomial, J. Math. Anal. and Appl.,269 (2002), 489-499. 29

[8] R. B. Gardner and N. K. Govil, An L^p inequality for a polynomial and its derivative, J. Math. Anal. Appl.,199(1995), 720-726.

[9] N. K. Govil, Some inequalities for derivatives of polynomials, J. Approx. Theory, 35(1991),29-35. 5

[10] N. K. Govil, On the derivative of a polynomial, Proc. Amer. Math. Soc., 41 (1973), 543-546. 6

[11] G. H. Hardy, The mean value of modulus of an analytic function Proc. London Math. Soc. , 14(1915).269-277. 7

[12] P. D. Lax, Proof of a conjecture of P. Erdös on the derivative of a polynomial, Bull. Amer. Math. Soc. , 50 (1944), 509-513. 4

[13] M. A. Malik, An integral mean estimate for polynomials, Proc. Amer. Math. Soc , 91 (1984), 281-284. *7*

[14] M. A. Malik, On the derivative of a polynomial, J. London Math. Soc., 1 (1969), 57-60. *5*

[15] M. A. Qazi, On the maximum modulus of polynomials, Proc Am Math Soc , 115(1990), 337–343. *20*

[16] A. C. Shaeffer, Inequalities of A.Markoff and S.Bernstein for polynomials and related functions, Bull. Amer. Math. soc., 47(1941),565-579. *3*

[17] W. M. Shah, A generalization of a theorem of Paul Turan, J. Ramanujan Math. Soc. ,1 (1996) 67-72. *45*

[18] P. Turan, Über die Ableitung von Polynomen, Compositio Math., 7 (1939), 89-95. *4*

فهرست الفبایی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

انتگرال .... *Integral*
برآورد .... *Estimate*
تحلیلی .... *Analytic*
تساوی .... *Equality*
تعمیم .... *Generalization*
چندجمله ای .... *Polynomial*
خاص .... *Special*
دقیق .... *Sharp*
درجه .... *Degree*
رده .... *Class*
رشد .... *Growth*
شعاع .... *Radius*
صفر .... *Zero*
ضریب .... *Factor*
لم .... *Lemma*
مثبت .... *Positive*
مجموع .... *Sum*
مختلط .... *complex*
مشتق .... *Derivative*
ناحیه .... *Region*
نامساوی .... *Inequality*
نتیجه .... *Result*
یکه .... *Unit*

Abstract

In this thesis, we express inequalities for the integral mean estimates for polynomials whose zeros are within a circle. Our results generalize and sharpen some famous inequalities of Aziz ,Shah and some other known results in this direction.

Keywords: *polynomial ,maximum modulus,integral mean estimates, derivative of a polynomial*

Shahrood University of Technology
Department of Mathematics
Facualty of Methematical Sciences

MS Thesis

Integral mean estimates for polynomials

By:
Morteza Moslemi

Supervisor:
Dr. Ahmad Zireh

Advisor:
Dr. Ebrahim Hashemi

July 2012