حوزه معاونت پژوهشی و فناوری

گزارش پایانی طرح پژوهشی

گراف مقسوم علیه های صفر بدون دور به طول ۳ یا ٤

کد ۲۳۰۵۵

مجری: سید حیدر جعفری

عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی شاهرود

همکار: نادر جعفری راد

عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی شاهرود

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده
و تاریخ های تصویب و اختتام آن به ترتیب ۱۳۸۸/۱۱/۲۰ و ۱۳۸۹/۱۰/۵ می باشد.

دانشگاه صنعتی شاهرود

ردیف		
عنوان طرح		گراف مقسوم علیه های صفر بدون دور به طول ۳ یا ۴
عنوان لاتین		Zero divisor graphs having no cycle of length 2 or 3
+محـــل نگهـــداری گزارش (اصلی یا کپی) طرح(سازمان از کـل بـه جزء)	نام سازمان	دانشگاه صنعتی شاهرود
	آدرس پستی	شـاهرود- میـدان هفـتم تیـر- بلـوار دانشـگاه- صـندوق پسـتی۳۱۶- کدپستی۳۶۱۹۹۹۵۱۶۱
	کشور	ایران
	تلفن	09111574876
	فاکس	
	E-mail	www.shjafari55@gmail.com
رشته های اصلی		جبر
بعدی....		
مسئول		سید حیدر جعفری
مجری(سازمان)		دانشگاه صنعتی شاهرود
همکاران		نادر جعفری راد
تاریخ شروع		۱۳۸۸/۱۱/۲۰
تاریخ خاتمه		۱۳۸۹/۱۰/۵
اعتبـار مصـوب بـه عدد(ریال)		۳۰۰۰۰۰۰۰
میـــزان پیشـــرفت کار(درصد)		
نوع طرح		نوع ۲
چکیده		فرض کنیم R حلقه ای جابجایی و یکدار باشد . عنصر x را مقسوم علیه صفر می نامیم در صورتی که عنصر ناصفر y از R چنان موجود باشد که $xy=0$. گراف $\Gamma(R)$ را طوری در نظر می گیریم که رئوس آن عناصر مقسوم علیه صفر ناصفر R باشند و دو راس a و b را زمانی به هم وصل می کنیم که $ab=0$. در فصل اول نتایج و لم های مقدماتی در مورد گرافها و گراف مقسوم علیه های صفر بیان خواهیم کرد و در فصل دوم همه حلقه هایی را مشخص می کنیم که شامل یک دور به طول ۳ یا یک دور به طول ۴ نباشند .
کلید واژه فارسی		گراف- مقسوم علیه صفر- حلقه - ایده آل
کلید واژه لاتین		graph-Zero-divisor - Ideal -Ring

شناسنا هشی

این طرح با مشخصات ذیل با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است.

الف) عنوان طرح:

۱- فارسی: گراف مقسوم علیه های صفر بدون دور به طول ۳ یا ۴

چکیده

فرض کنیم R حلقه ای جابجایی و یکدار باشد. عنصر x را مقسوم علیه صفر می نامیم در صورتی که عنصر ناصفر y از R چنان موجود باشد که $xy = 0$. گراف $\Gamma(R)$ را طوری در نظر می گیریم که رئوس آن عناصر مقسوم علیه صفر ناصفر R باشند و دو راس a و b را زمانی به هم وصل می کنیم که $ab = 0$.

در فصل اول نتایج و لم های مقدماتی در مورد گرافها و گراف مقسوم علیه های صفر بیان خواهیم کرد و در فصل دوم همه حلقه هایی که شامل یک دور به طول ۳ یا یک دور به طول ۴ نباشند را مشخص می کنیم.

کلید واژه: گراف - ایده آل - مقسوم علیه صفر - حلقه ی جابجایی

فهرست مطالب

فصل اول

لم ها و تعاریف مقدماتی

در این فصل برخی از مفاهیم و نتایج بنیادی را که در فصل های آتی رساله مـورد نیـاز خواهـد بود، می آوریم. نمادهای بکار رفته عموماً از [۵] می باشند.

۱. ۱ مقدمه ای از گرافها

در این بخش گرافها را به صورت کلی تعریف کرده و بعضی از مفاهیم و قضایای آن را بیان می کنیم.

۱. ۱. ۱ تعریف. فرض کنیم V یک مجموعه باشد و E زیر مجموعه ای از زیر مجموعه های دو عضوی V باشد. در این صورت $G=(V,E)$ را یک گراف می نامیم. عناصـر V را رئـوس گـراف G و عناصـر E را یالهای G می نامیم و هر عنصر $\{u,v\}$ از E را با نماد uv نمایش می دهیم.

توجه: به هر گراف یک شکل نیز نسبت داده می شود که در آن به تعداد عناصـر v نقـاط روی صـفحه در نظر گرفته می شود و دو نقطه متناظر u و v را به هم وصل می کنیم در صورتی که $uv\in E$.

۱. ۱. ۲ تعریف. گراف G را کامل از درجه n می نامیم در صورتی که هر دو رأس G به هم وصل باشـند. در این صورت G را با K_n نمایش می دهیم.

توجه: K_n دارای $\binom{n}{۲}$ یال می باشد.

۱. ۱. ۳ تعریف. گراف G را دو بخشی می نامیم در صورتی که بتوان مجموعه رئوس G را به دو مجموعه ناتهی A و B طوری افراز کرد که هر یال G فقط نقاط A را به نقاط B وصل کند و هیچ یالی با رئوس A و یا با رئوس B وجود نداشته باشد. در این صورت اگر A، m عضوی و B، n عضوی باشد، G را با $K_{m,n}$ نمایش می دهیم.

۱. ۱. ۴ تعریف. گراف G را یک مسیر می نامیم در صورتی که رئوس G طوری به صورت $u_n,\cdots,u_۱$ مرتب شوند که $u_۱$ به $u_۲$ و ... و u_i به $u_{i+۱}$ و...و $u_{n-۱}$ به u_n وصل شوند و G هیچ یال دیگری نداشته باشد.

۱. ۱. ۵ تعریف. گراف G را یک دور به طول n می نامیم در صورتی که رئوس G طوری به صورت $u_n,\cdots,u_۱$ مرتب شوند که $u_۱$ به $u_۲$ و ... و $u_{n-۱}$ به u_n و u_n به $u_۱$ وصل شوند و G یال دیگری نداشته باشد. دور به طول n را با C_n نمایش می دهیم.

۱. ۱. ۶ تعریف. گراف G را مسطح می نامیم در صورتی که G را بتوان طوری در یک صفحه رسم کرد که یالهای آن همدیگر را قطع نکنند.

۱. ۱. ۷ قضیه. گراف G مسطح است اگر و تنها اگر یک زیرگرافی به صورت $K_۵$ یا $K_{۳,۳}$ نداشته باشد.

برهان. به [۱۰] مراجعه شود.

براحتی می توان قضیه زیر را برای گراف های دو بخشی بیان کرد:

۱. ۱. ۸ قضیه. گراف G دو بخشی است اگر و تنها اگر G زیرگرافی به صورت دور فرد نداشته باشد.

برهان. به [۶] مراجعه شود.

۱. ۲ حلقه ها

در این بخش حلقه ها را به صورت کلی معرفی کرده و بعضی از مفاهیم آن را که در ادامه کار از آنها استفاده می کنیم، می آوریم.

۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم (R و + و ۰) یک حلقه جابجایی و یکدار باشد و $x \in R$. عنصر x را پوچتوان می نامیم در صورتی که عدد طبیعی n وجود داشته باشد که $x^n = 0$.

مجموعه ی همه عناصر پوچتوان R را با $NiL(R)$ نمایش می دهیم. براحتی می توان با استفاده از تکنیک های جبر جابجایی قضیه زیر را نشان داد.

قضیه ۱. ۲. ۲. فرض کنیم R حقله ای جابجایی و یکدار باشد. در این صورت $NiL(R)$ برابر اشتراک همه ی ایده آل های اول R است.

برهان. به [۵] مراجعه شود.

۱. ۲. ۳ قضیه. اگر R حلقه ای جابجایی و یکدار باشد و عضو x از R پوچتوان باشد آنگاه $1-x$ و $1+x$ وارون پذیرند.

برهان. فرض کنیم x پوچتوان باشد و $x^n = 0$. داریم:

$$(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1}) = 1-x^n = 1-0 = 1$$

پس $1+x+\cdots+x^{n-1}$ وارون $1-x$ می باشد. از طرفی چون $x^n = 0$ پس $(-x)^n = 0$ و لذا $-x$ نیز پوچتوان است. بنابراین $1+x = 1-(-x)$ نیز وارون پذیر است.

۱. ۲. ۴ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی یکدار باشد و $x \in R$. پوچساز x را که با $ann_R(x)$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$ann_R(x) = \{r \in R \mid rx = 0\}.$$

همچنین برای هر زیر مجموعه A از R، پوچساز A به صورت زیر تعریف می شود:

$$ann_R(A) = \{r \in R \mid \forall x \in A : rx = 0\}.$$

۱. ۲. ۵ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $I \le R$ و $J \le R$.

در این صورت IJ به صورت زیر تعریف می شود:

$$IJ = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid n \in N \quad , a_1, \cdots, a_n \in I, b_1, \cdots, b_n \in J\}.$$

توجه: به صورت مقدماتی می توان دید که $IJ \subseteq I \cap J$.

۱. ۲. ۶ تعریف. فرض کنیم $R_۱$ و $R_۲$ دو حلقه باشند در این صورت $R_۱ \times R_۲$ بـا جمـع و ضـرب زیـر یـک حلقه است که حاصلضرب $R_۱$ در $R_۲$ نام دارد:

برای هر (a و b) و (c و d) از $R_۱ \times R_۲$،

$$(a,b)+(c,d):=(a+c,b+d),(a,b)\,(c,d):=(ac,bd).$$

۱. ۲. ۷ قضیه. اگر R یک حلقه باشدو I، J و K ایده آل هایی از R باشند و $k \subseteq IUJ$، آنگاه $K \subseteq I$ یا $K \subseteq J$.

در انتهای این بخش حلقه های ذیل را که در بخشهای بعد استفاده می کنیم معرفی می کنیم.

$$\begin{aligned}
T_4 &= \{0, x, x+1, 1\} \mid x^2 = 2x = 2 = 0\},\\
T_8 &= \{0, x, x^2, x+x^2, 1, 1+x, 1+x^2, 1+x+x^2 \mid x^3 = 2x = 2 = 0\},\\
T_8' &= \{0, x, x^2, x+x^2, 1, 1+x, 1+x^2, 1+x+x^2 \mid x^3 = 2x = 4 = 0\},\\
T_9 &= \{0, 1, -1, x, -x, 1+x, 1-x, x-1, -1-m \mid x^2 = 3x = 3 = 0\}.
\end{aligned}$$

فصل دوم

گراف های مقسوم علیه های صفر بدون مثلث و مربع

در این فصل ابتدا گراف مقسوم علیه صفر حلقه های جابجایی را معرفی کرده و چند مثال را بیان می کنیم. سپس حلقه های جابجایی که گراف مقسوم علیه صفر آنها دو بخشی هستند را بطور کامل مشخص می کنیم. در سراسر این فصل حلقه را جابجایی در نظر می گیریم.

۲. ۱ گراف مقسوم علیه های صفر حلقه های جابجایی

۲. ۱. ۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد گراف $\Gamma(R)$ را طوری در نظر می گیریم که رئوس آن مقسوم علیه های صفر ناصفر R باشند و دو رأس x و y را زمانی به هم وصل می کنیم که $xy=0$.

۲. ۱. ۲ مثال. برای (Z_{12} و + و ۰)، $\Gamma(Z_{12})$ دارای ۶ راس ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۶ ، ۸ و ۱۰ می باشد و مجموعه ی یال های آن به صورت زیر است:

$E(\Gamma(Z_{12}))=$ {۶ ۱۰ و ۶ ۸ و ۴ ۶ و ۳ ۸ و ۳ ۴ و ۲ ۶}.

۲. ۱. ۳ مثال. برای حلقه (Z_{16} و + و ۰)، $\Gamma(Z_{16})$ دارای رئوس ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ ، ۱۰ ، ۱۲ و ۱۴ می باشد و مجموعه یال های آن به صورت زیر است:

$E(\Gamma(Z_{۱۴}))=\{۸\ ۲$ و $۸\ ۳$ و $۱۲\ ۴$ و $۸\ ۶$ و $۱۰\ ۸$ و $۱۲\ ۸$ و $۱۴\ ۸\}$.

۲. ۱. ۴ قضیه. گراف مقسوم علیه های صفر حلقه دو بخشی است اگر و تنها اگر شامل مثلث نباشد.

برهان: به [۷] مراجعه شود.

۲. ۲ گرافهای مقسوم علیه صفر بدون مثلث

ابتدا بحث را در مورد ضرب حلقه ها بیان می کنیم .

۲. ۲. ۱ لم. فرض کنیم $R_۱$ و $R_۲$ دو حقله باشند و $|R_۱|=m$ و $|R_۲|=n$. در این صورت $\Gamma(R_۱\times R_۲)$ شامل زیرگرافی به صورت $K_{m-۱,n-۱}$ می باشد.

برهان. کافی است توجه کنیم که برای هر $a\in R^*_۱$ و $a\in R^*_۲$، $(a,0)$ و $(0,b)$ مقسوم علیه صفر هستند و $(a,0)(0,b)=(0,0)$.

۲. ۲. ۲ نتیجه. فرض کنیم $R_۱$ و $R_۲$ دو حلقه باشند و $|R_۱|=m$ و $|R_۲|=n$. در این صورت $\Gamma(R_۱\times R_۲)\cong K_{m-۱,n-۱}$ اگر و تنها اگر یکی از $\Gamma(R_i)$ راس نداشته باشد و دیگری بدون یال باشد.

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنیم $\Gamma(R_۱\times R_۲)\cong K_{m-۱,n-۱}$. اگر $x\in V(\Gamma(R_۱))$ و $y\in V(\Gamma(R_۲))$، آنگاه عضو ناصفر t از $R_۱$ موجود است که $xt=0$ و در نتیجه $(x,y)(t,0)=(0,0)$ و لذا (x,y) یک راس گراف $\Gamma(R_۱\times R_۲)$است. اما عناصر $R^*_۱\times 0$ و $0\times R^*_۲$ نیز رئوس گراف هستند و لذا $\Gamma(R_۱\times R_۲)$ باید دارای حداقل $m-۱+n-۱+۱$ راس باشد که با فرض تناقض دارد. پس $\Gamma(R_۱)$ یا $\Gamma(R_۲)$ بدون رأس می باشند. فرض کنیم $ab\in E(\Gamma(R_۱))$ در نتیجه $(a,0)$ و $(0,b)$ در $\Gamma(R_۱\times R_۲)$ به هم وصل می باشند و بنابر لم قبل $\Gamma(R_۱\times R_۲)$ با $K_{m-۱,n-۱}$ برابر نخواهد بود که یک تناقض است، پس $\Gamma(R_۱)$ فاقد یال است. به همین صورت $\Gamma(R_۲)$ نیز بدون یال است.

اثبات قسمت عکس نتیجه مقدماتی است.

۲. ۲. ۳ قضیه. فرض کنیم $R_۱$ و $R_۲$ دو حلقه حداقل دو عضوی باشند و $R=R_۱\times R_۲$. در این صورت $\Gamma(R)$ دارای مثلث است اگر و تنها اگر $\Gamma(R_۱)$ یا $\Gamma(R_۲)$ شامل یک یال باشند یا $\min\{|V(\Gamma(R_۱))|$ و $|V(\Gamma(R_۲))|\}\geq 1$.

برهان. ($\Rightarrow$) فرض می کنیم $\Gamma(R_1)$ شامل یال ab باشد. فرض کنیم $d \neq 0$ عضوی از R_2 باشد. در این صورت $(a,0)-(b,0)-(0,d)-(a,0)$ به شکل یک مثلث است. حال فرض می کنیم $\Gamma(R_1)$ و $\Gamma(R_2)$ گراف تهی نباشند ولی شامل هیچ یالی نباشند و $a \in V(\Gamma(R_1))$ و $b \in V(\Gamma(R_2))$. در نتیجه $a^2=0$ و $b^2=0$. حال $(a,0)$ و (a,b) و $(0,b)$ رئوس یک مثلث هستند.

($\Leftarrow$) از عکس نقیض استفاده می کنیم فرض کنیم $\Gamma(R_1)$ یا $\Gamma(R_2)$ بدون رأس باشد. بدون اینکه خللی به اثبات وارد شود فرض می کنیم $\Gamma(R_1)=\phi$. چون $\Gamma(R_2)$ فاقد یال است پس برای هر راس b از $\Gamma(R_2)$، $b^2=0$ و برای هر $c \in R_2^*$، $bc \neq 0$. حال برای هر (x,y) و (r,s) از $R_1 \times R_2$، که $x \neq 0$ یا $y \neq 0$ داریم:

$$(x,y)\,(r,s)=0 \Rightarrow rx=0,\ ys=0 \Rightarrow r=0 \text{ و } y=s.$$

بنابراین رئوس گراف $\Gamma(R_1 \times R_2)$ به صورت $(r,0)$ و $(0,s)$ و (r,y) ها می باشند که $r \neq 0$، $s \neq 0$ و $y^2=0$، که (r,y) فقط به رأس $(0,y)$ متصل است حال بنابر نتیجه قبل حکم ثابت می شود.

۲. ۲. ۴ نتیجه. فرض کنیم R_1، R_2 و R_3 سه حلقه باشند در این صورت $\Gamma(R_1 \times R_2 \times R_3)$ شامل یک مثلث است.

برهان. چون $\Gamma(R_1 \times R_2)$ شامل یال به صورت $(x,0)(0,y)$ می باشد، حکم از قضیه قبل نتیجه می شود.

نمادگذاری. برای عضو پوچتوان x از حلقه R، کوچکترین عدد طبیعی t که $x^t=0$ را با $d(x)$ نمایش می دهیم.

۲. ۲. ۵ لم. برای حلقه R،اگر $\Gamma(R)$ فاقد مثلث باشدآنگاه برای هر x از R، $d(x) \leq 3$.

برهان. اگر برای عضوی مانند x از R، $d(x) \geq 4$ آنگاه بنابر قضیه ۱. ۲. ۳، $x^{d(x)-1}$ و $x^{d(x)-2}$ و $x^{d(x)-2}+x^{d(x)-1}$ سه عضو متمایز R هستند که

$$= x^{d(x)-2}\ x^{d(x)-1}\ x^{d(x)-1}\ (x^{d(x)-1}+x^{d(x)-2})$$

$$= x^{d(x)-2}\,(x^{d(x)-1}+x^{d(x)-2}) = 0$$

لذا $x^{d(x)-1} - x^{d(x)-2} - (x^{d(x)-1} + x^{d(x)-2}) - x^{d(x)-1}$ یک مثلث است، که یک تناقض است.

۲. ۲. ۶ لم. فرض کنیم $\Gamma(R)$ بدون مثلث باشد اگر $A=\{x : x \neq 0, x^2=0\}$، آنگاه $|A| \leq 2$.

برهان. فرض کنیم $|A| \geq 3$ و $x \in A$. به علاوه فرض کنیم y عضو ناصفری از A باشد که $y \neq x$. اگر $x+y \neq 0$ و $xy = 0$ آنگاه $x-(x+y)-y-x$ یک مثلث است، که تناقض است. حال اگر $x+y \neq 0$ و $xy \neq 0$، آنگاه $x-xy-y-x$ به شکل یک مثلث می باشد که دوباره یک تناقض است. لذا $x+y=0$ و $y=-x$، یعنی $A=\{x,-x\}$.

۲. ۲. ۷ لم. فرض کنیم $\Gamma(R)$ بدون مثلث باشد. اگر $B=\{x : x^3 = 0, x \neq 0\}$، آنگاه $|B| \leq 2$.

برهان. فرض کنیم $x \in B$ و A مجموعه ی تعریف شده در لم قبل باشد. چون $(x^2)^3 = x^3.x = 0$ پس $x^2 \in A$. حال اگر $x^2 \neq -x^2$ آنگاه $x-x^2-(-x^2)-x$ به شکل یک مثلث است. در نتیجه $A=\{x^2\}$. فرض کنیم $y \in B-\{x\}$. چون $(x^2)^2=(y^2)^2=0$ پس $y^2 \in A$ و لذا $x^2=y^2$. در نتیجه $(xy)^2 = x^2y^2 = y^2y^2 = 0$ و بنابراین $xy=0$ یا $xy \in A$ یعنی $xy=0$ یا $xy=x^2$. از اینجا داریم:

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2 = x^2 \pm (xy+xy) + y^2$$
$$= x^2 \pm (xy-xy) - x^2 = 0$$

بنابراین $y+x=x^2=y-x$ و از اینجا $2x=0$. لذا $Char(B)=2$. همچنین برای هر $z \in B-\{x\}$، $(x+z)^2 = 0 = (x+y)^2$. در نتیجه $x+z=x+y=x^2$ و $z=y$. یعنی $|B| \leq 2$.

۲. ۲. ۸ نتیجه. اگر $\Gamma(R)$ فاقد مثلث باشد، آنگاه $NiL(R)$ به شکل های زیر است:

الف) 0

ب) $\{0,x\}$ که $x^2=2x=0$

ج) $\{0,x,-x\}$ که $x^2=3x=0$

د) $\{0,x,x^2,x+x^2\}$ که $x^3=2x=0$.

در ادامه حلقه هایی که در یکی از شرایط فوق صدق می کنند را به طور کامل مشخص خواهیم کرد.

۲. ۲. ۹ قضیه. فرض کنیم R یک حلقه با حداقل یک مقسوم علیه صفر ناصفر باشد و $NiL(R)=0$. در این صورت $\Gamma(R)$ فاقد مثلث است اگر و تنها اگر $Z(R)=I \bigcup J$ که I و J به عنوان حلقه فاقد مقسوم علیه صفر هستند و $I \bigcap J = 0$.

برهان. $(\Leftarrow)$ چون $NiL(R)=0$، دو عضو متمایز a و b از R وجود دارند که $ab=0$. فرض کنیم $I=ann(a)$ و $J=ann(b)$. به راحتی دیده می شود که $a,b\notin I\bigcap J$. اگر $I\bigcap J\neq 0$ و $r\in I\bigcap J-\{0\}$، آنگاه $a-r-b-a$ به شکل یک مثلث است که یک تناقض است. بنابراین $I\bigcap J=0$ و $I+J\cong I\times J$. چون $\Gamma(I+J)\leq\Gamma(R)$، پس $\Gamma(I+J)$ فاقد مثلث است. بنابر قضیه ۲. ۲. ۳، I و J به عنوان حلقه، دارای مقسوم علیه صفر نا صفر نیستند. از طرفی چون $IJ\subseteq I\bigcap J=0$، پس $IJ=0$ و لذا $I\bigcup J\subseteq Z(R)$. فرض کنیم $x\in Z(R)$. پس $r\in R-\{0\}$ وجود دارد که $rx=0$. ما دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

حالت اول) $x\in I+J$، لذا $x=c_1+c_2$ که $c_1\in I$ و $c_2\in J$. در این صورت $rc_1+rc_2=0$ و لذا $rc_1=-rc_2$ در $I\bigcap J$ قرار می گیرد. در نتیجه $rc_1=-rc_2=0$ و لذا $(cb)c_1=0$ و $(cb)c_2=0$. اگر c_1 و c_2 هر دو ناصفر باشند، چون I و J دامنه هستند، پس $ra=rb=0$. در نتیجه $r\in I\bigcap J=0$ و $r=0$، که یک تناقض است. نتیجه می گیریم که $c_1=0$ یا $c_2=0$ و بنابراین $x\in I\bigcup J$.

حالت دوم) اگر $x\notin I+J$، آنگاه قرار می دهیم $K=ann(x)$. اگر $K\bigcap(I+J)=0$ آنگاه $K+(I+J)\cong K\times I\times J$ و بنابر نتیجه ۲. ۲. ۴، $\Gamma(I+J+K)$ شامل یک مثلث است، که تناقض است. بنابراین $K\bigcap(I+J)\neq 0$ و بنابر حالت اول، $K\bigcap(I+J)\subseteq I\bigcup J$. در نتیجه $K\bigcap J\subseteq K\bigcap(I+J)$ و $I\bigcap J=0$، پس $K\bigcap I=0$ یا $K\bigcap J=0$. بنابراین $KI=0$ یا $KJ=0$ و از آنجا $aK=0$ یا $bK=0$. در نتیجه $K\subseteq I$ یا $K\subseteq J$. فرض کنیم $K\subseteq I$. اگر $K=I$، آنگاه $xI=0$ و در نتیجه $x\in ann(b)=J$، که با $x\notin I+J$ در تناقض است. بنابراین $K\subseteq J$. از طرفی چون $xI\neq 0$، پس $<x>\bigcap I\neq 0$. فرض کنیم sx عضوی ناصفر از $<x>\bigcap I$ باشد. بعلاوه فرض کنیم t یک عضو نابدیهی K باشد. اگر $(sx)x=0$، آنگاه $(sx)^2=0$، که یک تناقض است. بنابراین $t\neq sx$. حال $t-sx-a-t$ به شکل یک مثلث است، که یک تناقض است. به طور مشابه $K\subseteq J$ نیز به تناقض می رسد. از اینجا نتیجه می گیریم که $x\in I+J$ و به حالت اول بر می گردد.

$(\Rightarrow)$ چون $\Gamma(R)=\Gamma(I\times J)$، حکم از قضیه ۲. ۲. ۳ نتیجه می شود.

۲. ۲. ۱۰ قضیه. فرض کنیم $NiL(R)=\{0,x\}$. در این صورت $\Gamma(R)$ فاقد مثلث است اگر و تنها اگر $R=Z_4$ یا T_4.

برهان. توجه می کنیم که $\Gamma(Z_4)=\Gamma(T_4)=K_1$. فرض کنیم $NiL(R)=\{0,x\}$ و $r\in R$. در این صورت rx نیز پوچتوان است و لذا $rx\in\{0,x\}$ و لذا r یا $r-1$ در $ann(x)$ قرار می گیرند. این ایجاب می کند که $\frac{R}{ann(x)}$ دو عضوی است. فرض کنیم $r\in ann(x)-\{0,x\}$، در این صورت چون r پوچتوان نیست پس $ann(x)\subseteq ann(R)$. اگر $ann(x)\cap ann(r)\neq\{0,x\}$، آنگاه با در نظر گرفتن $a\in ann(x)\cap ann(r)-\{0,x\}$، $r-a-x-r$ به شکل یک مثلث است. بنابراین $ann(x)\subseteq ann(R)=0$. فرض کنیم $s\in ann(x)-ann(r)$. در این صورت $rs\neq 0$ و از طرفی $rs\in ann(x)\cap ann(r)$. بنابراین $rs=x$. حال $r^2-x-s^2-r^2$ یک مثلث است، که یک تناقض است. در نتیجه $ann(x)=\{0,x\}$. چون $\left|\frac{R}{ann(x)}\right|=2$، پس $|R|=4$ و $R=\{0,x,1+x,1\}$. بنابراین $R\cong Z_4$ یا $R\cong T_4$.

۲. ۲. ۱۱ لم. فرض کنیم $Char(R)=n$، در این صورت R زیر حلقه ای یکریخت با Z_n دارد.

۲. ۲. ۱۲ قضیه. فرض کنیم $NiL(R)=\{0,x,-x\}$ که $x\neq -x$. در این صورت $\Gamma(R)$ فاقد مثلث است اگر و تنها اگر $R=Z_9$ یا $R=T_9$.

برهان: $(\Rightarrow)$ توجه می کنیم که $\Gamma(Z_9)=\Gamma(T_9)=K_2$، که فاقد مثلث است.

$(\Leftarrow)$ اگر $r\in ann(x)-\{0,x,-x\}$، آنگاه $r-x-(-x)-r$ یک مثلث است، که یک تناقض است. بنابراین $ann(x)=\{0,x,-x\}$. حال برای هر $r\in R$، rx پوچتوان است و در نتیجه $rx\in\{0,x,-x\}$. پس r، $r-1$ یا $r+1$ در $ann(x)$ قرار می گیرند. از اینجا نتیجه می گیریم که $\left|R/ann(x)\right|=3$ و در نتیجه $|R|=9$. اگر $Char(R)=3$، آنگاه

$$R=\{0,1,-1,x,-x,1+x,1-x,x-1,-1-x\},$$

که همان T_9 است. اگر $Char(R)=9$، آنگاه $R\cong Z_9$.

۲. ۲. ۱۳ قضیه. فرض کنیم $NiL(R)=\{0,x,x^2,x+x^2\}$ که $x^3=2x=0$. در این صورت $\Gamma(R)$ فاقد مثلث است اگر و تنها اگر $R\cong Z_8$، $R\cong T_8$ یا $R\cong T'_8$.

برهان. $(\Rightarrow)$ توجه می کنیم که $\Gamma(Z_8)=\Gamma(T_8)=\Gamma(T'_8)K_{1,2}$.

$(\Leftarrow)$ فرض کنیم $I = ann(x^2)$ و $r \in R$. چون $(rx^2)^2 = 0$، پس $rx^2 = 0$ یا $rx^2 = x^2$. و در نتیجه $r - 1 \in I$ یا $r \in I$. این ایجاب می کند که $\left|R/I\right| = 2$. نشان می دهیم که $I = NiL(R)$. اگر $r \in I - NiL(R)$، آنگاه $rx^2 = 0$ و لذا $(rx)^2 = 0$. با توجه به فرضها، داریم $rx = 0$ یا $rx = x^2$. اگر $rx = 0$ آنگاه $r - x - x^2 - r$ یک مثلث است که تناقض است. بنابراین $rx = x^2$. در این صورت $(r - x)x = 0$ و $(r + x) - x - x^2 - (r + x)$، یک مثلث است، که یک تناقض است. در نتیجه $I = NiL(R)$ و بنابراین $|R| = 8$. پس

$$R = \{0, x, x^2, x + x^2, 1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x + x^2\},$$

چون $Char(R) \in \{2, 4, 8\}$، حکم ثابت می شود.

۲. ۲. ۱۴ قضیه. فرض کنیم R حلقه ای جابجایی و یکدار باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ فاقد مثلث است اگر و تنها اگر در یکی از شرایط زیر صدق کند.

(۱) $Z(R) = I \bigcup J$، که I و J به عنوان حلقه دامنه هستند و $I \bigcap J = 0$.

(۲) $R \in \{Z_4, Z_8, Z_9, T_8, T'_8, T_9\}$.

برهان. از قضیه های ۲. ۲. ۹، ۲. ۲. ۱۰، ۲. ۲. ۱۲ و ۲. ۲. ۱۳ حکم ثابت می شود.

از قضیه ۲. ۱. ۴ و ۲. ۲. ۱۴ قضیه زیر را می توان نتیجه گرفت.

۲. ۲. ۱۵ قضیه. فرض کنیم R حلقه ای جابجایی و یکدار باشد و R دامنه صحیح نباشد. در این صورت $\Gamma(R)$ دو بخشی است اگر و تنها اگر R در یکی از شرایط زیر صدق کند.

(۱) $Z(R) = I \bigcup J$، که I و J به عنوان حلقه دامنه هستند و $J \bigcap J = 0$.

(۲) $R \in \{Z_8, Z_9, T_8, T'_8, T_9\}$.

۲. ۳ گرافهای مقسوم علیه صفر بدون مربع

در این بخش همه ی حلقه های جابجایی و یکدار را که گراف مقسوم علیه صفر آنها فاقد مربع است را به طور کامل مشخص می کنیم.

۲. ۳. ۱ لم. اگر $x \in R$ آنگاه $Rx = \left|\dfrac{R}{ann(x)}\right|$.

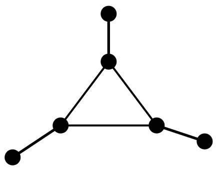
۲. ۳. ۲ لم. اگر $R = R_1 \times R_2$ و $\min\{|R_1|,|R_2|\} \geq 3$، آنگاه $\Gamma(R)$ شامل یک مربع است.

برهان. کافی است توجه کنیم که $K_{m-1,n-1} \leq \Gamma(R)$.

۲. ۳. ۳ نتیجه. $\Gamma(R_1 \times R_2 \times R_3)$ بدون مربع است اگر و تنها اگر برای هر i، $R_i \cong Z_2$.

برهان. ($\Leftarrow$) از لم قبل نتیجه می شود.

($\Rightarrow$) کافی است توجه کنیم که گراف $\Gamma(Z_2 \times Z_2 \times Z_2)$ به شکل زیر است.



۲. ۳. ۴ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $x \in Z(R)$. در این صورت $d_1(x)$ و $D_1(\Gamma(R))$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$d_1(x) = |\{y \in R \mid y \neq 0, xy = 0\}|,$$
$$D_1(\Gamma(R)) = Max\{d_1(x) \mid x \in Z(R), x \neq 0\}$$

۲. ۳. ۵ لم. فرض کنیم $R = Z_2 \times R_2$. در این صورت $\Gamma(R)$ دارای یک مربع است اگر و تنها اگر $D_1(\Gamma(R_2)) \geq 2$.

برهان. ($\Leftarrow$) اگر $\Gamma(R)$ شامل یک مربع باشد و $D_1(\Gamma(R_2)) \leq 1$ آنگاه رئوس گراف $\Gamma(R)$ به مجموعه های $A_1 = \{(0,a) \mid a \in Z - \{R_2\}\}$ و $A_2 = \{(1,a) \mid a \in R_2 - \{0\}\}$ افراز می شود که زیرگراف با رئوس A_2، فاقد یال است. با توجه به فرض زیرگراف با رئوس A_1 دارای درجه حداکثر یک می باشد. بنابراین مربع باید طوری باشد که دو راس غیر مجاورآن در A_1 و دو راس دیگر آن در A_2 باشند. فرض کنیم $(1,a) - (0,b) - (1-c) - (0,d) - (1,a)$ یک مربع باشد پس $ab = bc = cd = da = 0$ و چون $a \neq 0$ یا $c \neq 0$ پس $d_1(a) \geq 2$ یا $d_1(c) \geq 2$ و لذا $D_1(\Gamma(R_2)) > 1$ که تناقض است.

($\Rightarrow$) فرض کنیم $D_1(\Gamma(R_2)) \geq 2$. در این صورت $a \in R_2$ وجود دارد که $\deg(a) \geq 2$ یا $\deg(a) = 1$ و $a^2 = 0$. اگر $\deg(a) \geq 2$، و $a - b$ و $a - c$ یالهایی متمایز از $\Gamma(R_2)$ باشند آنگاه

$$(1,0) - (0,b) - (0,a) - (0,c) - (1,0)$$

یک مربع است. اگر $\deg(a)=1$ و $a^2=0$ و $bc=0$ که $b\neq c$، آنگاه $(1,a)-(0,a)-(1,0)-(0,b)-(1,a)$ یک مربع است.

۲. ۳. ۶ قضیه. فرض کنیم R حلقه ای جابجایی و یکدار باشد و R دامنه صحیح نباشد و $\Gamma(R)$ بدون مثلث باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ فاقد مربع است اگر و تنها اگر $R=Z_2\times F$، که F یک میدان است.

برهان. $\Gamma(R)$ بدون مثلث است اگر و تنها اگر در یکی از شرایط قضیه ۲. ۲. ۱۴ صدق کند. اگر R در شرط (۲) صدق کند، آنگاه $|Z(R)|\leq 4$ و لذا $|V(\Gamma(R))|\leq 3$ و در نتیجه $\Gamma(R)$ فاقد مربع است. فرض کنیم R در شرط (۱) صدق کند و $Z(R)=I\cup J$ که I و J در شرایط قضیه ۲. ۲. ۱۴ صدق کنند. چون $\Gamma(I\times J)$ زیرگرافی از $\Gamma(R)$ است، بنابر لم ۲. ۳. ۲، $|I|=2$ یا $|J|=2$. فرض کنیم $|I|=2$ و $I=\{0,x\}$. در این صورت بنابر لم ۲. ۳. ۱، چون $J=ann(x)$ و $Rx=I=\{0,x\}$، پس $\left|\frac{R}{J}\right|=2$. در نتیجه J یک ایده آل ماکزیمال است. بنابراین $I+J=R$ و لذا $I+J=R$. در نتیجه $R\cong I\times J$ که I بعنوان حلقه میدان و J به عنوان حلقه یک دامنه صحیح است.

برای قسمت عکس کافی است توجه کنیم که $\Gamma(R)$ یک ستاره است و لذا فاقد یک مربع است.

۲. ۳. ۷ لم. فرض کنیم a و b دو عضو متمایز ناصفر از R باشند. اگر $|ann(a)\cap ann(b)-\{0,a,b\}|\geq 2$، آنگاه $\Gamma(R)$ شامل یک مربع است.

۲. ۳. ۸ گزاره. فرض کنیم $NiL(R)=0$ و $\Gamma(R)$ دارای مثلث باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ بدون مربع است اگر و تنها اگر $R\cong Z_2\times Z_2\times Z_2$.

برهان. فرض کنیم $x-y-z-x$ یک مثلث در $\Gamma(R)$ باشد. قرار می دهیم $I=ann(x)$ و $J=ann(y)$. چون $y,z\in I$، پس $|I|\geq 3$. همچنین چون $NiL(R)=0$ پس $I\cap Rx=0$. بنابر لم ۲. ۳. ۲، $|Rx|=2$ و از لم ۲. ۳. ۱، $\left|\frac{R}{I}\right|=2$. به همین صورت، $\left|\frac{R}{J}\right|=2$. از طرفی بنابر لم ۲. ۳. ۷، $|I\cap J|\leq 2$ و چون $Z\in I\cap J$، پس $|I\cap J|=2$. حال $\left|\frac{R}{I\cap J}\right|\leq\left|\frac{R}{I}\right|\left|\frac{R}{J}\right|$، و بنابراین $\left|\frac{R}{I\cap J}\right|\leq 4$ و $|R|\leq 8$. حال توجه می کنیم که $\{0,y,z,y+z\}\subseteq I$ و $|Rx|\leq 8$ و $|R|=|I|$، پس $I=\{0,y,z,y+z\}$ و ازاینجا داریم $|I|=|J|=|ann(z)|=4$ و $ann(x^2)=I$ و $ann(y^2)=J$ و $ann(z^2)=ann(z)$. چون $I\cap Rx=0$ پس

$R = I \oplus Rx$. ادعا می کنیم که $y^2 = y$. فرض کنیم $y^2 \neq y$. چون $y^2x = 0$ پس $y^3 = z$ یا $y^2 = z + y$.
اگر $y^2 = z$ آنگاه $y^3 = zy = 0$ که تناقض است. پس $y^2 = z + y$ و لذا $y^3 = y^2 + yz = y^2$ و در نتیجه $y^2(y-1) = 0$، پس $y - 1 \in J$ و لذا $y(y-1) = 0$. یعنی $y^2 = y$ که تناقض است. بنابراین $y^2 = y$. به طور مشابه $z^2 = z$. در نتیجه $y(y+z) = y$ و $z(y+z) = z$. نتیجه می گیریم که $I \cong Z_2 \times Z_2$. اثبات عکس قضیه مقدماتی است.

۲. ۳. ۹ لم. اگر $\Gamma(R)$ بدون مربع باشد و $x^n = 0$، آنگاه $n \leq 4$.

برهان. اگر $n \geq 5$، آنگاه عضوهای x^{n-1}، x^{n-2}، x^{n-3} و $x^{n-1} + x^{n-2}$ دو بدو متمایز هستند و رئوس یک مربع هستند.

قرار می دهیم :

$$A = \{x \mid x^2 = 0, x \neq 0\}$$
$$B = \{x \mid x^3 = 0, x^2 \neq 0\}$$
$$C = \{x \mid x^4 = 0, x^3 \neq 0\}$$

۲. ۳. ۱۰ گزاره. فرض کنیم $C \neq \phi$. در این صورت $\Gamma(R)$ بدون مربع است اگر و تنها اگر $|R| = 16$ و $NiL(R) = \{0, x, x^2, x^3, x + x^2, x + x^3 + x^2 + x^3, x + x^2 + x^3\}$.

برهان. فرض کنیم $x \in C$. قرار می دهیم

$$C_1 = \{0, x, x^2, x^3, x + x^2, x + x^3, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3\}.$$

نشان می دهیم که $ann(x^2) \subseteq C_1$. اگر $r \in ann(x^2) - C_1$، آنگاه $rx^2 = 0$ و بنابراین $r - x^2 - x^3 - (x^2 + x^3) - r$ به شکل مربع است، که تناقض است. بنابراین $ann(x^2) = \{0, x^2, x^3, x^2 + x^3\}$.
حال برای هر $r \in R$، $(rx^2)x^2 = 0$ و لذا $rx^2 \in ann(x^2)$ و در نتیجه $rx^2 = 0$، $rx^2 = x^2$، $rx^2 = x^3$ یا $rx^2 = x^2 + x^3$.در نتیجه $r \in ann(x^2)$، $(r-1) \in ann(x^2)$ ، $r - x \in ann(x^2)$ یا $r - x - 1 \in ann(x^2)$.
بنابراین $\left|\frac{R}{ann(x^2)}\right| \leq 4$. چون $x \notin ann(x^2)$، پس $\left|\frac{R}{ann(x^2)}\right| = 4$ و از طرفی $|ann(x^2)| = 4$، پس $|R| = 16$. چون R حلقه ای یکدار است پس $ann(x^3) = C_1$ و لذا $C_1 = NiL(R)$ تنها ایده آل ماکزیمال R می باشد. بنابراین هر عنصر $R - C_1$ وارون پذیر است و لذا $\Gamma(R) = \Gamma(C_1)$. اما $\Gamma(C_1)$ فاقد مربع است.

اثبات قسمت عکس مقدماتی است.

۲. ۳. ۱۱ گزاره. فرض کنیم $NiL(R)=\{x \mid x^3=0\}$ و $B\neq\phi$. در این صورت $\Gamma(R)$ بدون مربع است اگر و تنها اگر $R=\{0,x,x^2,x+x^2,1,1+x,1+x^2,1+x+x^2\}$، که در آن $x\in B$ و $Char(R)\in\{2,4,8\}$.

برهان. فرض کنیم $x\in B$، ابتدا نشان می دهیم که $ann(x)=\{0,x^2\}$. فرض کنیم $r\in ann(x)-\{0,x^2\}$. در این صورت $r-x-x^2-(x+x^2)-r$ یک مربع است، که یک تناقض است. بنابراین $ann(x)=\{0,x^2\}$ و در نتیجه $Rx^2=\{0,x^2\}$. بنابراین $\left|\frac{R}{ann(x^2)}\right|=2$. حال نشان می دهیم که $ann(x^2)=\{0,x,x^2,x+x^2\}$. فرض کنیم $r\in ann(x)-\{0,x,x^2,x+x^2\}$، لذا $rx^2=0$ و $rx\in ann(x)$. بنابراین $rx=0$ یا $rx=x^2$. اگر $r\notin ann(x)$، آنگاه $rx=x^2$، و بنابراین $(r-x)x=0$. این ایجاب می کند که $r-x\in ann(x)=\{0,x^2\}$. در نتیجه $r\in\{0,x,x^2,x+x^2\}$، که یک تناقض است. بنابراین $ann(x^2)-\{0,x,x^2,x+x^2\}$، $|R|=8$، $NiL(R)=ann(x^2)$. اثبات قسمت عکس مقدماتی است.

۲. ۳. ۱۲ لم. فرض کنیم $NiL(R)=\{x \mid x^2=0\}$، $A\neq\phi$ و $Char(NiL(R))\neq 2$. در این صورت $\Gamma(R)$ بدون مربع است اگر و تنها اگر $|R|=9$ و $NiL(R)=\{0,x,-x\}$.

برهان. فرض کنیم $x\in B$ و $x\neq -x$. نشان می دهیم $ann(x)-\{0,x,-x\}$. فرض کنیم r و s دو عضو متمایز از $ann(x)-\{0,x,-x\}$ باشند. در این صورت $r-x-s-(-x-r)$ یک مربع است، که یک تناقض است. بنابراین $|ann(x)|\leq 4$. از طرفی $\{0,x,-x\}$ به عنوان یک زیرگروه سه عضوی $ann(x)$ است و در نتیجه $3 \mid |ann(x)|$ و از آنجا $|ann(x)|=3$. لذا $\{0,x,-x\}\lhd R$ و $Rx=\{0,x,-x\}$ و بنابر لم، $\left|\frac{R}{ann(x)}\right|=3$ و لذا $|R|=9$. بنابراین

$$R=\{0,x,-x,1,1+x,1-x,-1,-1+x,-1-x\}$$

و در نتیجه $NiL(R)=Z(R)=\{0,x,-x\}$.

برای قسمت عکس، کافی است توجه کنیم که $\Gamma(R)=K_2$.

۲. ۳. ۱۳ لم. فرض کنیم $NiL(R)=\{x|x^2=0\}$، $A\neq\phi$، $Char(NiL(R))=2$ و $NiL(R)$ حداقل دارای دو عضو نابدیهی x و y باشد که $xy\neq 0$. در این صورت $\Gamma(R)$ بدون مربع است اگر و تنها اگر $|R|=16$ و $NiL(R)=\{0,x,y,xy,x+xy,y+x,y+xy,x+y+xy\}$.

برهان. ابتدا نشان می دهیم که $ann(x)=\{0,x,xy,x+xy\}$. فرض کنیم $r\in ann(x)-\{0,x,yx,x+xy\}$. در این صورت $r-x-(x+xy)-xy-r$ یک مربع است، که یک تناقض است. بنابراین $ann(x)=\{0,x,xy,x+xy\}$. از طرفی $Rx\subseteq ann(x)$ و بنابراین $Rx=ann(x)$. بنابر لم ۲. ۳. ۱، $\left|\frac{R}{ann(x)}\right|=|Rx|=4$ و لذا $|R|=16$. از طرفی عناصر مجموعه ی

$$\{0,x,y,x+xy,x+y,y+xy,xy,x+y+xy\}$$

پوچتوان هستند و $NiL(R)\leq 8$ و لذا حکم ثابت می شود.

برای قسمت عکس، کافی است توجه کنیم که $R=NiL(R)\bigcup(1+NiL(R))$ و لذا $Z(R)=NiL(R)$ و بنابراین $\Gamma(R)=\Gamma(NiL(R))$، و به راحتی می توان بررسی کرد که $\Gamma(R)$ بدون مربع است.

۲. ۳. ۱۴ لم. فرض کنیم $NiL(R)=\{x|x^2=0\}$، $A\neq\phi$، $Char(NiL(R))=2$، و برای هر x و y ، از $NiL(R)$، $yx=0$. در این صورت $|NiL(R)|\leq 4$.

برهان. اگر x، y، a و b عناصری نابدیهی و متمایز از $NiL(R)$ باشند. در این صورت $a-b-x-y-a$ یک مربع است، که تناقض است.

۲. ۳. ۱۵ لم. فرض کنیم $NiL(R)=\{0,x\}$، $\Gamma(R)$ دارای مثلث باشد. در این صورت $\Gamma(R)$ دارای یک مربع است.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم $\Gamma(R)$ بدون مربع باشد و $a-b-c-a$ یک مثلث در $\Gamma(R)$ باشد. فرض کنیم $r\in R$. اگر $ra\notin\{0,a,b,c\}$، آنگاه $a-b-ra-c-a$ یک مربع است که تناقض است. پس $ra\in\{0,a,b,c\}$. حالات زیر را در نظر می گیریم.

حالت اول. $x\notin\{a,b,c\}$. داریم $ra\notin\{0,a,b,c\}$. اگر $ra=b$،آنگاه $ra^2=ba=0$ و لذا $(ra)^2=0$. بنابراین $ra=0\neq b$، که یک تناقض است. بنابراین $ra\neq b$. به طور مشابه $ra\neq c$. نتیجه می گیریم که $Ra=\{0,a\}$ و بنابرلم ۲. ۳. ۱، $\left|\frac{R}{anna}\right|=2$. به همین صورت، $\left|\frac{R}{ann(b)}\right|=2$. چون

$a,b\notin ann(a)\cap ann(b)$، بنابر لم ۲. ۳. ۷، $|ann(a)\cap ann(b)|=2$. از طرفی چون $ann(a)\neq ann(b)$ و $\left|\frac{R}{ann(a)}\right|=2$، پس $ann(a)+ann(b)=R$ و در نتیجه $\left|\frac{R}{ann(a)}\right|=\left|\frac{ann(b)}{ann(a)\cap ann(b)}\right|=2$ و لذا $|R|=8$. همچنین $ann(a)=\{0,b,c,b+c\}$ و $R=ann(a)\cup a+ann(a)$. حال $x\in R$، پس $x\in\{b+c,a+b,a+c,a+b+c\}$. اگر $x=b+c$ آنگاه $x^2=b^2+c^2=0$ و لذا $b^2=-c^2$ و در نتیجه $b^3=-c^2b=0$. بنابراین $b=x$، که تناقض است. بنابراین $x\neq b+c$. با اثباتی مشابه نتیجه می گیریم که $x\neq a+b$، $x\neq a+c$ و $x\neq a+b+c$ و بنابراین $x\notin R$ که تناقض است.

حالت دوم. $x\in\{a,b,c\}$، بدون اینکه به کلیت اثبات خدشه ای وارد شود فرض می کنیم $x=c$. اگر $a+x\neq b$، آنگاه $a-x-(a+x)-b-a$ یک مربع است، که یک تناقض است. پس $a+x=b$ و بنابراین $(a+x)a=ba=0$ و در نتیجه $a^2=0$. با توجه به فرض $a=x$، که دوباره تناقض است.

۲. ۳. ۱۶ لم. فرض کنیم $NiL(R)=\{0,x,y,x+y\}$، که $2x=2y=xy=0$. اگر $\Gamma(R)$ بدون مربع باشد آنگاه $|R|\in\{8,16,32,64\}$.

برهان. قرار می دهیم $I=ann(x)$ و $J=ann(y)$. بنابر لم ۲. ۳. ۷، $|I\cap Y|=4$. از طرفی دیگر $Rx\subseteq NiL(R)$ و بنابر لم ۲. ۳. ۱، $\left|\frac{R}{I}\right|\in\{2,4\}$. به همین صورت $\left|\frac{R}{J}\right|\in\{2,4\}$ و از اینجا حکم ثابت می شود.

با استفاده از لم های ۲. ۳. ۱۲، ۲. ۳. ۱۳، ۲. ۳. ۱۴، ۲. ۳. ۱۵ و ۲. ۳. ۱۶ گزاره زیر را بدست می آوریم.

گزاره ۲. ۳. ۱۷. فرض کنیم R دارای مثلث باشد و $A\neq\phi$ و $|R|\notin\{8,16,32,64\}$. در این صورت $\Gamma(R)$ دارای مربع است اگر و تنها اگر $|R|=9$ و $|NiL(R)|=3$.

حال با ترکیب قضیه ۲. ۳. ۶ و گزاره های ۲. ۳. ۸، ۲. ۳. ۱۰، ۲. ۳. ۱۱ و ۲. ۳. ۱۷، قضیه زیر را نتیجه می گیریم.

۲. ۳. ۱۸ قضیه. فرض کنیم R حلقه ای جابجایی و یکدار باشد، R دامنه صحیح نباشد و $|\boldsymbol{R}| \in \{۸,۱۶,۳۲,۶۴\}$. در این صورت $\Gamma(R)$ بدون مربع است اگر و تنها اگر R در یکی از شرایط زیر صدق کند.

(۱) $|R| = ۹$ و $NiL(R) = \{0, x, -x\}$

(۲) $R \cong Z_۲ \times D$، که D یک دامنه صحیح است.

واژه نامه

adjacent --مجاور

algebraic---جبری

bipartite--دوبخشی

characterize --مشخص کردن

column--ستون

bijective ---دوسویی

complete---کامل

contain--شامل بودن

cycle--دور

connected--همبند

degree---درجه

disjoint---مجزا

distinct --متمایز

domain --دامنه

edge --یال

endpoint---نقطه انتهایی

finite --متناهی

graph ---گراف

ideal--ایده آل

identity --همانی
integral domain-------------------------------------دامنه صحیح
length ---طول
path--مسیر
partition --مؤلفه
representation--نمایش
result --نتیجه
relation --رابطه
ring --حلقه
several--چندین
section --بخش
subring --زیرحلقه
subgraph --زیرگراف
set ---مجموعه

theorem --قضیه
theory ---نظریه
triangle --مثلث
zero-divisor-------------------------------------مقسوم علیه صفر

مراجع

[1] S. Akbari, and A. Mohammadian, *Zero-divisor graphs of non-commutative rings*, J. Algebra 296 (2006) ,462-479.

[2] S. Akbari, H. R. Maimani, and S. Yasemi, When a *zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph*, Journal of Algebra, 270 (2003), 169-180.

[3] D. F. Anderson, A. Frazier, A. Lauve, and P. S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring* . II , in : Ideal Theoretic Methodsin

Commutative Algebhra (Cloumbia, MO, 1999), Dekker, New York, 2001 , pp.61-72.

[4] D. F. Anderson , and P. S. Livingston , *The zero-divisor graph of a commutative ring*. J. Algebra 217 (1999) 434-447.

[5] M. F. Atiyah, Ian G. Macdonald, *Introduction to Commutatiue Algebra*, Addison–WesleyPublishing Co, Reading, Mass. London-Don Mills, Ont, 1969.

[6] L. Dancheng, and W. Tongsuo, *On bipartite zero-diuisor* , Discrete Mathematis 309 (2009) 755762 .

[7] F. Demeyer, and K. Schneider, *Automorphisms and zero divisor graphs of commutative rings*, International J. Commutative Rings 1 (3) (2002) 93106 .

[8] S. P. Redmond, *An ideal-based zero-divisor graph of a commutative ring*, Comm. Algebra *31 (9) (200) , 4425-4443*.

[9] S. Singh, Q. Zameeruddin, *Modern Algebra , third reprint*, Vikas Publishing House Pvt. Ltd., Dehli, *1995* .

[10] D. B. West, *Introduction* To *Graph Theory* , Prentice - Hall of India *Pvt* . Ltd , 2003.