دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

کاربردی از قضیه نمایش ریس برای حل رده ای از مسائل کنترل بهینه

نگارش
محمد مهدی شعبانی

استاد راهنما
دکتر کامران شریفی دکتر علیرضا ناظمی

بهمن ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان نامه قصد داریم با استفاده از نظریهٔ اندازه یک مسأله کنترل بهینه کلاسیک را به فضای اندازه منتقل نموده و جواب مسأله را در این فضا بدست آوریم، با توجه به خواصی که مسأله در این فضا بدست می آورد رسیدن به جواب بهینه را برای ما آسان می نماید.
روش کار بدین نحو است که بین تمام زوج های قابل قبول در فضای کنترل کلاسیک و فضای تابعی ها با تعریف یک نگاشت تناظری یک به یک برقرار می کنیم و در مرحله بعد با استفاده از قضیه نمایش ریس یک تناظر دو سویی بین فضای تابعی ها و فضای اندازه بوجود خواهد آمد. در پایان هم نشان خواهیم داد اندازه بهینه بدست آمده در فضای اندازه متناظر زوج قابل قبول بهینه ای است که تابع هدف (معیار) را در مسأله کنترل کلاسیک مینیموم (ماکسیموم) می سازد.

واژه‌های کلیدی: کنترل بهینه ، برنامه ریزی خطی ، فضای اندازه ،قضیه نمایش ریس

پیشگفتار

در بیشتر شاخه های ریاضیات، هدف تجزیه و تحلیل وضعیت یک دستگاه دینامیکی است. در دویست سال اخیر، شاخه های مختلف ریاضیات کاربردی (کلاسیک) از جمله نظریه مکانیک (ذرات، مایعات و جامدات)، الکترومغناطیس، ترمودینامیک و غیره پیشرفت های زیادی داشته اند، لکن حل بسیاری از مسائل مهم جهان محتاج راه حلی متفاوت با راه حل مسائل فوق می باشد. در این نوع از مسائل هدف آن است یک سیستم دینامیکی را طوری کنترل کنیم که بطریقی مطلوب رفتار و عمل نماید.

در بسیاری از مسائل با روش های کلاسیک نمی توان جواب دقیقی برای آن پیدا نمود. به همین دلیل روش های عددی می تواند تا حد زیادی در رفع این مشکل مفید باشد. روش نظریه اندازه بعنوان رده ای از روش های عددی چندی است که مورد توجه بسیاری از محققین و پژوهشگران علوم کاربردی قرار گرفته است. به همین دلیل، در این رساله سعی کرده ایم مروری بر روش نظریه اندازه داشته و با استفاده از این روش به حل رده ای از مسائل کنترل بهینه غیر خطی بپردازیم. در فصل اول به بیان مقدمه ای بر نظریه اندازه، تاریخچه ای از نظریه کنترل بهینه و شکل کلی مسائل کنترل بهینه می پردازیم. در فصل دوم به بیان تعاریف و قضایای مورد استفاده در نظریه اندازه می پردازیم. در فصل سوم به چگونگی انتقال مسأله کنترل بهینه کلاسیک به فضای اندازه مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در فصل چهارم به بحث در مورد فرم جواب در فضای اندازه خواهیم پرداخت و در پایان با بیان چند مثال عددی کارآیی روش ارائه شده مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

فهرست مطالب

فصل ۱
پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه ای بر نظریه کنترل

در نظریه کنترل نشان داده شده است که رفتار دینامیکی بسیاری از سیستم ها را می توان بشکل معادلات یا نامعادلات ریاضی بخصوص بشکل معادلات دیفرانسیل بیان نمود . البته ساختن یک مدل ریاضی برای یک سیستم ممکن است بسیار پیچیده باشد و این بحث در جای خود از اهمیت زیادی بر خوردار است. ما فرض خواهیم کرد که کسی معادلات ریاضی سیستم را که خواص مکانیکی سیستم مورد بررسی را مشخص می کند تهیه کرده باشد.

بنابراین برای کنترل یک سیستم لازم است کنترل ها مناسب انتخاب شوند، چنانکه معادلات ریاضی مربوط به آن سیستم برآورده شوند. البته محاسبه جواب های معادلات بخصوص معادلات دیفرانسیل غیر خطی عموما خیلی پیچیده است.

در نظریه کنترل کلاسیک بر اساس روش های تبدیل لاپلاس جواب های بسیاری از معادلات دیفرانسیل بدست می آید. اما حتی با این روش هم مشکلات و محدودیت ها بیشمار است. علاوه بر این امروزه صرفه جویی در زمان، سوخت، انرژی یا سرمایه گذاری اقتصادی و غیره نیز در یک سیستم کنترل پذیر ضرورت پیدا نموده است. بنابراین مساله کنترل سیستم به بهترین صورت مورد بررسی قرار می گیرد.

به عنوان مثال ما می خواهیم مساله مینیموم کردن مصرف سوخت راکت را مورد بررسی قرار دهیم. معادله حاکم بر حرکت راکت عبارت است از:

$$m\frac{dV}{dt} = mF + F_{ext}$$

که در آن m جرم راکت، F نیروی پرتاب که بوسیله راکت تولید می شود وF_{ext} برآیند نیروهای خارجی ای است که از محیط به راکت وارد می شود، همچنین داریم:[۱]

$$|F| = \frac{c}{m}\beta$$

که در آن c سرعت نسبی اگزوز و $\beta = -\dfrac{dm}{dt}$ ، نرخ مصرف سوخت است، اگر φ زاویه واقعی پرتاب (زاویه بین محور راکت و افق) باشد، آنگاه معادلات حرکت عبارتند از:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{c\beta}{m}\cos\varphi$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{c\beta}{m}\sin\varphi - mg$$

که در آن $V = [v_1, v_2]^T$ و $F_{ext} = [0, -mg]^T$ اختیار شده است. مساله مصرف مینیموم سوخت عبارت است از انتخاب کنترل های β وφ که راکت را از نقطه اولیه به ارتفاع مورد نظر، $\overline{y}$ ، برساند به قسمی که مقدار سوخت مصرفی مینیموم شود. سوخت مصرف شده عبارت است از:

$$I = \int_0^T \beta dt$$

که در آن T زمان رسیدن به $\overline{y}$ است.

۲.۱ تاریخچه نظریه اندازه

در حل مسائل کنترل بهینه سیستم های فشرده[۱] ، روبیو[۲] [۲] از نظریه اندازه استفاده کرد و کنترل بهینه ای بصورت قطعه ای ثابت برای سیستم بدست آورد. ویلسون [۳] و روبیو در وجود کنترل های بهینه برای سیستم های تحت معادله حرارت یک بعدی از نظریه اندازه استفاده کردند، همچنین آنها در سال ۱۹۹۱ میلادی حل مسائل کنترل بهینه سیستم های تحت معادله حرارت در حالت n بعدی را با همین روش بررسی کرده اند.

در سال ۱۹۹۲، کامیاد، روبیو و ویلسون [۴۱] نظریه اندازه را تحت معادله حرارت با یک کنترل بهینه توسیعی بکار بردند.کامیاد در سال ۱۹۹۲ در مسأله کنترل پذیری قوی از نظریه اندازه استفاده نموده است.

در سالهای اخیر روش نظریه اندازه برای حل معادلات دیفرانسیل های معمولی و پاره ای[۴۳], حل مسائل برنامه ریزی غیرخطی[۴۵]، حل دستگاه های غیر خطی[۴۲]، حل معادلات انتگرال[۴۴]، مسائل کنترل بهینه زمانی [۴۶] و مسائل طراحی شکل بهینه [۴۷] استفاده شده است. همچنین با انجام تغییراتی در این نظریه، مسائل کنترل بهینه در افق نامتناهی، مسائل کنترل بهینه در حالت گسسته، توسیع نظریه اندازه به حالت های چند اندازه ای و ... حل شده است. به نظر می رسد اگر بتوان هر مسأله ای که در شاخه های مختلف ریاضی مطرح می شود را به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال تبدیل نمود، در حل آن می توان از این نظریه استفاده نمود.

[۱] Lumped system
[۲] Rubio
[۳] Wilson

۳.۱ شکل کلی مساله کنترل بهینه

در اینجا شکل کلی از یک مساله کنترل بهینه معرفی می کنیم که در فصول بعدی با استفاده از نظریه اندازه به حل آن می پردازیم.

فرض کنید سیستم دینامیکی توسط n متغیر وضعیت $x_۱$ ، $x_۲$،...،x_n مشخص می شود اکنون بردار وضعیت x را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$x = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

مولفه های x را می توان به عنوان محور های مختصات یک فضایn بعدی بنام فضای وضعیت [۴] در نظر گرفت.

بردار کنترل u را بهٔ صورت برداری از m متغیر کنترل$u_۱$ ، $u_۲$،...،u_m بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$u = \begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \\ . \\ . \\ . \\ u_m \end{bmatrix}$$

فرض کنید (x, u) در یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بصورت زیر صدق می کند:

$$\begin{cases} \dot{x} = g(t, x, u) & t_a \leq t \leq t_b \\ x(t_a) = x_a & x(t_b) = x_b \end{cases} \qquad (۱.۱)$$

که در آن g یک بردار با مولفه های $g_۱$،$g_۲$،...،g_n است، $x(t_a)$ وضعیت اولیه و $x(t_b)$ وضعیت نهایی هستند.

[۴] state space

مسأله کنترل بهینه عبارت است از پیدا کردن $(x,u)^T$ که در ۱.۱ صدق کرده و تابعی زیر را ماکسیموم یا مینیموم کند:

$$I = \int_{t_a}^{t_b} f_0(t, x(t), u(t))dt \qquad (۲.۱)$$

در اینجا f_0 و g_i، $(i = 1, 2, ..., n)$ توابعی پیوسته از t و x و u هستند.

برای حل مساله کنترل بهینه به شکل فوق از نظریه اندازه استفاده می کنیم ودر نهایت یک کنترل قطعه ای ثابت بدست می آوریم برای این منظور نیاز به مقدماتی از توپولوژی، آنالیز حقیقی، آنالیز تابعی، آنالیز عددی و برنامه ریزی خطی داریم، که در فصل بعد خلاصه ای از این مفاهیم را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

فصل ۲

مفاهیم اساسی در توپولوژی و آنالیز

۱.۲ مقدمه

نظریه اندازه [۱] از زیبا ترین شاخه های ریاضیات است که در بسیاری از مسائل راهگشا می باشد. در این رساله قصد داریم کاربردی از نظریه اندازه در حل مسائل کنترل بهینه [۲] را نشان دهیم. به همین منظور لازم است مساله کنترل بهینه را به فضای اندازه [۳] و در این فضا به تعریف یک توپولوژی [۴] مناسب می پردازیم. همچنین آشنایی با بسیاری از قضایای مهم آنالیز ریاضی که از آن جمله مطالبی درباره تابعی ها ، انتگرال و اندازه و همچنین تعاریف و قضایایی در مورد فضاها و مجموعه ها ضرورت دارد. لذا این فصل را منحصراً وبه طور خلاصه به تعاریف و صورت قضایایی اختصاص می دهیم که در این رساله نقش اساسی دارند.

۲.۲ تعاریف و مقدمات توپولوژی و آنالیز

تعریف ۱.۲.۲. فضای توپولوژیکی (X,τ) تشکیل شده از یک مجموعه ناتهی X همراه با یک گردایه τ از زیر مجموعه های X که در سه شرط زیر صدق می کنند:

الف) $X \in \tau$ و $\phi \in \tau$.

[۱] Measure theory
[۲] optimal control problam
[۳] Measure spase
[۴] Topology

ب) اگر $O_۱ \in \tau$ و $O_۲ \in \tau$ آنگاه $O_۱ \cap O_۲ \in \tau$.

ج)اگر $\{O_\alpha : \alpha \in I\}$ یک خانواده از اعضای τ باشد آنگاه $\cup_{\alpha\in I} O_\alpha \in \tau$.

گردایه τ یک توپولوژی روی مجموعه X می باشد و هر عضو τ یک مجموعه باز [۵] نامیده می شود. اعضای مجموعه X را نقاط X می گوئیم و اگر $x \in X$ هر مجموعه باز شامل x را یک همسایگی از x می نامیم.

تعریف ۲.۲.۲. مجموعه $C \subset X$ را بسته [۶] گویند هر گاه $C^c \subset X$ باز باشد که در آن C^c متمم [۷] مجموعه C در X است.

قضیه ۳.۲.۲. [۶] مجموعه های X و ϕ بسته هستند و اجتماع دو مجموعه بسته ، بسته و اشتراک هر گردایه از مجموعه های بسته نیز بسته است.

تعریف ۴.۲.۲. فرض کنید $A \subset X$ ، نقطه $x \in A$ را درونی [۸] گوئیم هرگاه یک همسایگی از x مانند O موجود باشد که $O \subseteq A$. مجموعه نقاط درونی A را با A^o نشان می دهیم.

تعریف ۵.۲.۲. نقطه p یک نقطهٔ حدی مجموعه E است هرگاه هر همسایگی p شامل نقطه ای چون $q \in E$ غیر از p باشد.

تعریف ۶.۲.۲. هر گاه X یک فضای متری بوده و $E \subset X$ و E' مجموعهٔ تمام نقاط حدی E در X باشد ، آنگاه بست E عبارت است از مجموعه $\bar{E} = E \cup E'$.

تعریف ۷.۲.۲. مجموعه $E \subseteq X$ در X چگال است هر گاه:$\bar{E} = X$.

تعریف ۸.۲.۲. منظور از یک پوشش باز مجموعه E در فضای متری X یعنی گردایه ای از زیر مجموعه های باز X مانند $\{G_\alpha\}$ که $E \subset \cup_\alpha G_\alpha$.

[۵] Open set
[۶] Closed set
[۷] Complement
[۸] Interior point

تعریف ۹.۲.۲. زیر مجموعه E از فضای توپولوژیکی X فشرده است هر گاه هر پوشش باز E حاوی زیر پوششی متناهی باشد. اگر هر نقطه $x \in X$ دارای یک همسایگی باشد که بستار آن فشرده باشد در این صورت X را موضعاً فشرده [۹] می گویند.

تعریف ۱۰.۲.۲. گوئیم ردهٔ $\{A_i : i \in I\}$ از مجموعه ها دارای خاصیت اشتراک متناهی است اگر هر زیر ردهٔ متناهی $\{A_{i1}, ..., A_{im}\}$ اشتراک ناتهی داشته باشد.

قضیه ۱۱.۲.۲. [۶] فضای توپولوژی X فشرده است اگر و تنها اگر هر ردهٔ $\{A_i : i \in I\}$ از مجموعه های بسته X که در خاصیت اشتراک متناهی صدق می کند خود دارای اشتراک ناتهی باشد.

تعریف ۱۲.۲.۲. فرض کنید (X, τ) و (Y, τ^*) فضاهایی توپولوژیکی باشند. تابع $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته نسبت به τ و τ^* است اگر و تنها اگر نقش معکوس هر زیر مجموعه τ^*-باز B از Y یک زیر مجموعه τ-باز از X باشد یعنی اگر $B \in \tau^*$ آنگاه $f^{-1}(B) \in \tau$.

تعریف ۱۳.۲.۲. فرض کنید (X, τ)یک فضای توپولوژیکی باشد. $\mathfrak{B} \subset \tau$یک پایه [۱۰] برای$\tau$ است اگر در دو شرط زیر صدق کند:

الف) هر مجموعه باز$G \in \tau$ اجتماعی از اعضای $\mathfrak{B}$باشد.

ب) به ازای هر p در مجموعه باز G،$B \in \mathfrak{B}$ موجود باشد که$p \in B \subset G$.

تعریف ۱۴.۲.۲. یک تابعی ، تابع ای از یک تابع می باشد. بعبارتی دیگر میدان تعریف یک تابعی دسته ای از توابع می باشد.

فرض کنید x تابع پیوسته ای از t بوده که در فاصله $[t_0, t_f]$ تعریف شده باشد و

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} x(t)dt$$

[۹] Locally compact
[۱۰] Base

دراینصورت عدد نسبت داده شده توسط تابعی J ، سطح زیر منحنی $x(t)$ است.

تعریف ۱۵.۲.۲. تابع $f : X \to \mathbb{R}$ دارای محمل [۱۱] فشرده گویند اگر بستار مجموعه $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ فشرده باشد.

تعریف ۱۶.۲.۲. یک گردایه $\mathfrak{M}$ از زیر مجموعه های مجموعه ناتهیX یک جبر مجموعه ها نامیده می شود هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

الف) اگر$A, B \in \mathfrak{M}$ آنگاه $A \cap B \in \mathfrak{M}$.

ب) اگر$A \in \mathfrak{M}$ آنگاه $A^c \in \mathfrak{M}$.

تعریف ۱۷.۲.۲. جبر $\mathfrak{M}$ یکσ–جبر نامیده می شود هر گاه اجتماع هر گردایه شمارش پذیر از عناصر $\mathfrak{M}$ در $\mathfrak{M}$ باشند.

تعریف ۱۸.۲.۲. فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد. گردایه $\mathfrak{B}$ از مجموعه برل [۱۲] کوچکترین σ–جبری است که شامل تمام مجموعه های بسته می باشد. همچنین می توان گفت $\mathfrak{B}$ کوچکترین σ–جبری است که شامل تمام مجموعه های باز می باشد.

تعریف ۱۹.۲.۲. فرض کنید X وY دو مجموعه ناتهی و$P(X)$ ، $P(Y)$مجموعه های توانی آنها باشند در اینصورت تابع $f : A \subset P(X) \to P(Y)$ یک تابع مجموعه ای [۱۳] می نامیم.

به عنوان مثال تابعی که به هر بازه (a, b) عدد حقیقی $b - a$ را نسبت می دهد یک تابع مجموعه ای می باشد.

تعریف ۲۰.۲.۲. فرض کنید X دسته ای از زیر مجموعه های اعداد حقیقی باشد. اندازه لبگ [۱۴] یک تابع مجموعه ایμ است که به هر مجموعه E یک عدد نامنفی توسعه یافته نسبت می دهد و دارای خواص

[۱۱] Support
[۱۲] Borel set
[۱۳] Set function
[۱۴] Lebesgue measure

زیر است:

الف) $\mu(\phi) = ۰$.

ب)برای هر بازه $I = (a, b)$ داشته باشیم: $\mu(I) = l(I) = b - a$.

ج)اگر $\{E_i\}$ یک دنباله از مجموعه های مجزا باشد آنگاه:

$$\mu(\cup E_i) = \Sigma\mu(E_i)$$

د)μ نسبت به انتقال پایا باشد. یعنی اگر E مجموعه ای باشد که برای آن μ تعریف شده و

$$E + y = \{x + y : x \in E\} \quad \Longrightarrow \quad \mu(E + y) = \mu(E)$$

تعریف ۲۱.۲.۲. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد و $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر از زیر مجموعه های X باشد، در این صورت اندازهμ یک تابع مجموعه ای نامنفی است که برای تمام عناصر $\mathfrak{M}$ تعریف شده است و داریم:

الف) $\mu(\phi) = ۰$.

ب)برای هر دنباله E_i از عناصر مجزا $\mathfrak{M}$ داریم:

$$\mu(\cup_{i=۱}^{\infty} E_i) = \Sigma_{i=۱}^{\infty}\mu(E_i)$$

تعریف ۲۲.۲.۲. اگر X یک مجموعه ناتهی باشد و $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر از زیر مجموعه های X باشد در اینصورت $(X, \mathfrak{M})$ را یک فضای اندازه پذیر گویند.

تعریف ۲۳.۲.۲. فرض کنید A مجموعه ای از اعداد حقیقی باشد و$\{I_n\}$ گردایه ای از بازه های باز $I_n = (a_n, b_n)$ است که مجموعه A را می پوشاند.در اینصورت اندازه بیرونی [۱۵] A را بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \cup I_n} \Sigma l(I_n)$$

[۱۵] Outer measure

که درآن اینفیمم روی گردایه های $\{I_n\}$ گرفته می شود.

تعریف ۲۴.۲.۲. مجموعه E اندازه پذیر لبگ [۱۶] است اگر برای هر مجموعه A داشته باشیم:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

تعریف ۲۵.۲.۲. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر از زیر مجموعه های X باشد و υ یک تابع مجموعه ای با مقادیر حقیقی توسعه یافته باشد در اینصورت υ را یک اندازه علامتدار [۱۷] روی فضای اندازه پذیر $(X, \mathfrak{M})$ می نامیم هر گاه:

الف)υ حداکثر یکی از دو مقدار $+\infty$ یا $-\infty$ را اختیار کند.

ب) $\upsilon(\phi) = ۰$.

ج)برای هر دنباله E_i مجموعه های مجزا از هم و اندازه پذیر داشته باشیم:

$$\upsilon(\cup E_i) = \Sigma \upsilon(E_i)$$

تعریف ۲۶.۲.۲. فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد و دامنه f اندازه پذیر باشد در اینصورت تابع f اندازه پذیر گفته می شود هر گاه برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ اندازه پذیر باشد.

قضیه ۲۷.۲.۲. [۶] فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی با دامنه اندازه پذیر باشد در اینصورت گزاره های زیر هم ارزند:

الف) برای هر عدد حقیقی α مجموعه $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ اندازه پذیر است.

ب) برای هر عدد حقیقی α مجموعه $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ اندازه پذیر است.

ج) برای هر عدد حقیقی α مجموعه $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ اندازه پذیر است.

د) برای هر عدد حقیقی α مجموعه $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ اندازه پذیر است.

[۱۶] lebesgues measurable
[۱۷] Signed measure

در صورت بر قراری یکی از گزاره های فوق گزاره زیر نتیجه می شود.

ذ) برای هر عدد حقیقی α مجموعه $\{x \in X : f(x) = \alpha\}$ اندازه پذیر است.

تعریف ۲.۲.۲۸. فرض کنید که X یک فضای هاسدورف و به طور موضعی فشرده و $C_c(X)$ مجموعه تمام توابع پیوسته با محمل فشرده در X باشد. کوچکترین $\sigma-$ جبر $\mathfrak{M}$ از زیر مجموعه های X که هر تابع $f \in C_c(X)$ نسبت به $\mathfrak{M}$ اندازه پذیر باشد رده مجموعه های بیر [۱۸] را تشکیل می دهد.

تعریف ۲.۲.۲۹. اگر μ یک اندازه باشد که روی $\sigma-$ جبر از مجموعه های بیر تعریف شده آنگاه μ یک اندازه بیر [۱۹] است.

تعریف ۲.۲.۳۰. سه تایی $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازه [۲۰] نامیده می شود که در آن X یک مجموعه غیر تهی و $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$ جبر از زیر مجموعه های X و μ یک اندازه روی $\mathfrak{M}$ می باشد.

تعریف ۲.۲.۳۱. فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیکی و $\mathfrak{M}$ یک جبر تولید شده توسط زیر مجموعه های باز باشد برای هر مجموعه برل A اندازه اتمی [۲۱] بصورت زیر تعریف می شود:

$$\delta_{(z)}(A) = \begin{cases} ۱ & z \in A \\ ۰ & z \in A^c \end{cases}$$

تعریف ۲.۲.۳۲. [۶] فرض کنید f یک تابع اندازه پذیر نامنفی روی یک مجموعه A باشد و فرض کنید $\{A_i : i = ۱, ۲, ..., n\}$ یک دنباله متناهی از مجموعه ها باشد که:

الف) A_i جدا از هم باشند یعنی $A_i \cap A_j = \phi$.

ب) A_i ها اندازه پذیر است.

ج) $A = \cup_{i=۱}^{n} A_i$.

در اینصورت گفته می شود که $\{A_i : i = ۱, ۲, ..., n\}$ یک افراز [۲۲] مجموعه A است همچنین فرض

[۱۸] Bair set
[۱۹] Bair meassure
[۲۰] Measure spase
[۲۱] Atomic measure
[۲۲] Partition

کنید تابع f بر A نامنفی است و

$$S = \Sigma_{i=1}^{n} \{inf_{z \in A_i} f(z)\} \mu(A_i)$$

انتگرال تابع f روی مجموعه A را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\int_A f d\mu = Sup S \geq 0$$

که انتگرال تابع f نسبت به اندازه μ است.

و سوپرمیمم روی تمام افراز های ممکن مجموعه A گرفته شده است و در صورتی که حد فوق موجود و متناهی باشد تابع f ، μ-اندازه پذیر گفته می شود در مورد توابعی که شرط نامنفی بودن را ندارد می توان نوشت $f = f^+ - f^-$ که توابع f^+ ، f^- نامنفی می باشند وداریم:

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$$

تعریف ۳۳.۲.۲. تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ بطور مطلق پیوسته [23] گفته می شود اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ موجود باشد بطوری که اگر $\{(x_i, \acute{x}_i), i = 1, 2, ..., n\}$ زیر بازه های مجزا $[a,b]$ باشند ، داشته باشیم:

$$\Sigma_{i=1}^{n} \mid \acute{x}_i - x_i \mid < \delta \quad \Longrightarrow \quad \Sigma_{i=1}^{n} \mid f(\acute{x}_i) - f(x_i) \mid < \varepsilon$$

تعریف ۳۴.۲.۲. اگر تابع حقیقی f تعریف شده باشد و در نقطه $x_0 \in (a,b)$ ناپیوسته باشد و حدود چپ و راست موجود باشد یعنی:

$$Lim_{t \to x_0^+} f(t) = L_1 \neq \infty$$

$$Lim_{t \to x_0^-} f(t) = L_2 \neq \infty$$

و $L_1 \neq L_2$ در این صورت f در x_0 ناپیوستگی نوع اول دارد و در غیر اینصورت ناپیوستگی دوم دارد.

[23] Absolutely continuous

تعریف ۳۵.۲.۲. تابع حقیقی f بر $[a,b]$ بطور قطعه ای پیوسته است هر گاه حداکثر تعدادی متناهی ناپیوستگی نوع اول داشته باشد.

تعریف ۳۶.۲.۲. فرض کنید P یک خاصیت باشد که روی عناصر مجموعه ای تعریف شده، در اینصورت P تقریباً همه جا برقرار است اگر مجموعه نقاطی که خاصیت P را ندارد، دارای اندازه صفر باشند و معمولاً بطور خلاصه می نویسیم P بطور $a.e.$ برقرار است.

لم ۳۷.۲.۲. [۶] فرض کنید f تابعی حقیقی و بر $[a,b]$ کراندار و اندازه پذیر و $F(x)=\int_a^x f(t)dt+F(a)$ آنگاه تقریباً برای هر x در $[a,b]$ داریم: $F'(x)=f(x)$

قضیه ۳۸.۲.۲. [۶] تابع حقیقی F بطور مطلق پیوسته است اگر وتنها اگر F انتگرال نامعین باشد ودر اینصورت داریم:

$$F(x)=\int_a^x F'(t)dt+F(a)$$

قضیه ۳۹.۲.۲. فرض کنید f تابعی حقیقی و بر $[a,b]$ کراندار و اندازه پذیر است در اینصورت تابع F که با ضابطه زیر تعریف می شود بطور مطلق پیوسته است $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

اثبات. باید ثابت کنیم که برای هر $\varepsilon>۰$ داده شده $\delta>۰$ موجود است که اگر $\{(x_i,x'_i), i=۱,۲,...,n\}$ زیر بازه های مجزا از $[a,b]$ باشند و

$$\Sigma_{i=۱}^n \mid x'_i-x_i \mid<\delta \quad\Longrightarrow\quad \Sigma_{i=۱}^n \mid F(x'_i)-F(x_i) \mid<\varepsilon$$

$$\Sigma_{i=۱}^n \mid F(x'_i)-F(x_i) \mid=\Sigma_{i=۱}^n \mid \int_{x_i}^{x'_i} f(t)dt \mid \leq \Sigma_{i=۱}^n \int_{x_i}^{x'_i} \mid f(t) \mid dt \leq \Sigma_{i=۱}^n \|f\|.|x'_i-x_i|=\|f\|.\delta$$

که در آن $\|f\|=\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ ، و برای اثبات حکم کافی است قرار دهیم:

$$\delta\leq\frac{\varepsilon}{\|f\|}$$

و چون هر تابع که بر بازه بسته ای بطور قطعه ای پیوسته باشد بر آن بازه کراندار و اندازه پذیر است از قضایای قبل قضیه زیر نتیجه می شود. ■

قضیه ۴۰.۲.۲. اگر تابع حقیقی f بر $[a,b]$ بطور قطعه ای پیوسته باشد یک تابع F موجود است که بر $[a,b]$ بطور مطلق پیوسته است و تقریباً برای هر x در $F'(x)=f(x)$ و نیز

$$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a).$$

تعریف ۴۱.۲.۲. فرض کنید $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ کراندار باشد و یک افراز $\{\Omega_i : i=1,2,...,n\}$ از Ω موجود باشد طوریکه f روی هر Ω_i با توپولوژی نسبی پیوسته باشد و گردایه $\{A_i : i=1,2,...,n\}$ از زیر مجموعه های اعداد حقیقی موجود باشد طوریکه هر A_i در $\mathbb{R}^n$ همبند است و برای $i=1,2,...,n$ ، $\Omega_i\subset A_i$ در اینصورت تابع f را ناحیه ای پیوسته گوییم.

به عنوان مثال تابع f با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

ناحیه ای پیوسته نیست زیرا کراندار نیست.

ولی توابع زیر در شرایط تعریف ناحیه ای پیوستگی صدق می کنند

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x & 0<x<1\\ -x^2+x+1 & 1\leq x<2\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}2 & x>0\\ -2 & x\leq 0\end{cases}$$

و نیز برای تابع زیر داریم

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in Q\cap[0,1]\\ 1 & x\in[0,1]-Q\end{cases}$$

تابع f کراندار می باشد و اگر قرار دهیم $\Omega_1=Q\cap[0,1]$ و $\Omega_2=[0,1]-Q$ در اینصورت f بر هر یک از مجموعه های Ω_1 و Ω_2 با توپولوژی نسبی پیوسته است ولی دو مجموعه همبند و مجزای A_1 و

A_2 طوریکه $\Omega_1 \subset A_1$ و $\Omega_2 \subset A_2$ وجود ندارد و این تابع ناحیه ای پیوسته نیست.

همچنین فرض کنید $T = X = [0, 1]$ و $U = \{0, 0/1, 0/2, ..., 0/9\}$ و تعریف کنیم:

$$f : T \times X \times U \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(t, x, u) = \begin{cases} \frac{x^2 + t^2}{u} & u \neq 0 \\ 1000 & u = 0 \end{cases}$$

در این صورت تابع f ناحیه ای پیوسته است.

اگر $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ و f روی Ω پیوسته باشد می نویسیم$f \in C(\Omega)$

تعریف ۴۲.۲.۲. فرض کنید $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد μ را یک اندازه متناهی [۲۴] گفته می شود هرگاه $\mu(X) < \infty$ و $\delta-$ متناهی [۲۵] گفته می شود اگر دنباله X_n از مجموعه ها طوری باشد که $X = \cup X_n$ و $\mu(X_n) < \infty$.

قضیه ۴۳.۲.۲. [۲] فرض کنید X یک فضا ی فشرده و هاسدورف باشد و $C(X)$ فضای توابع حقیقی و پیوسته روی X باشد در اینصورت برای هر تابعی خطی و کراندار Λ که روی $C(X)$ تعریف می شود یک اندازه علامت دار بیر متناهی μ منحصر بفرد وجود دارد طوریکه برای هر f در $C(X)$ داریم:

$$\Lambda(f) = \int f d\mu$$

تعریف ۴۴.۲.۲. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ و $1 \leq k \leq n$ باشد در این صورت تابع f مستقل متغیر kام می گوییم هرگاه برای هر $x_k \neq \hat{x}_k$ داشته باشیم:

$$f(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, \hat{x}_k, x_{k+1}, ..., x_n)$$

بطور مشابه تابع f مستقل از متغیر x_{k_1}،...،x_{k_m} که $m \leq n$ است تعریف می شود.

[۲۴] Finite measure

تعریف ۴۵.۲.۲. تابع $h : S \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نقطه s_0 نیمپیوسته پائینی [۲۶] گویند هر گاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک همسایگی از s_0 مانند $U_\varepsilon(s_0)$ موجود باشد طوریکه

$$\forall s \in U_\varepsilon(s_0) : \qquad h(s) > h(s_0) - \varepsilon$$

به عنوان مثال تابع $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ که بصورت زیر تعریف می شود در هر عدد گنگ بازهٔ $[0,1]$ همچنین در صفر نیم پیوسته پائینی است.

$$h(s) = \begin{cases} s & s \in Q \cap [0,1] \\ 0 & s \in [0,1] - Q \end{cases}$$

تعریف ۴۶.۲.۲. فرض کنید E یک مجموعه ناتهی باشد یک رابطه $(\leq)$ رابطه جزئی مرتب [۲۷] است اگر دارای خواص زیر باشد:

۱) $\forall x, y \in E \ : \ x = y \iff x \leq y \ , \ x \geq y$

۲) $\forall x, y, z \in E \ : \ x \leq y \ , \ y \leq z \implies x \leq z$

تعریف ۴۷.۲.۲. فرض کنید یک رابطه جزئی مرتب برای E تعریف شده باشد در اینصورت عنصر $x \in E$ عنصر ماکزیمال است اگر داشته باشیم:

$$\forall y \in E \qquad x \leq y \implies x = y$$

تعریف ۴۸.۲.۲. فرض کنید E یک مجموعه ناتهی باشد و $P(E)$ مجموعه توانی E باشد در اینصورت $\mathfrak{F} \subset P(E)$ یک فیلتر [۲۸] است اگر دارای خواص زیر باشد:

۱) $\phi \in \mathfrak{F}^c$

۲) $\forall X, Y \in \mathfrak{F} \implies X \cap Y \in \mathfrak{F}$

۳) $X \in \mathfrak{F}, X \subset Y \subset E \implies Y \in \mathfrak{F}$

[۲۶] Lower Semicontinuous
[۲۷] Partial Ordering
[۲۸] Filter

فرض کنید E فضای توپولوژیکی باشد و $a \in E$ اگر U_a مجموعه تمام همسایگی های شامل a باشد U_a یک فیلتر است.

تعریف ۴۹.۲.۲. فرض کنید E یک فضای توپولوژیکی باشد و $\mathfrak{F}$ یک فیلتر روی E باشد. $\mathfrak{F}$ همگرا به $a \in E$ گفته می شود اگر برای هر همسایگی U از a ، U به $\mathfrak{F}$ متعلق باشد.

تعریف ۵۰.۲.۲. فرض کنید E یک مجموعه باشد برای فیلتر های تعریف شده در E یک رابطه جزئی مرتب [۲۹] به صورت زیر تعریف می کنیم:

اگر $\mathfrak{F}_۲ \subset \mathfrak{F}_۱$ باشد آنگاه می نویسیم $\mathfrak{F}_۲ \leq \mathfrak{F}_۱$ و می گوئیم $\mathfrak{F}_۲$ ظریفتر [۳۰] از $\mathfrak{F}_۱$ است یا می گوئیم $\mathfrak{F}_۱$ ضخیمتر [۳۱] از $\mathfrak{F}_۲$ است.

تعریف ۵۱.۲.۲. گوئیم $\mathfrak{F}$ یک فیلتر مافوق [۳۲] است اگر در رابطه جزئی مرتب بالا عنصر ماکسیمال باشد.

تعریف ۵۲.۲.۲. فرض کنید E یک مجموعه و $a \in E$ باشد. فیلتر بدیهی از a بصورت زیر تعریف می شود که فیلتر مافوق است.

$$\mathfrak{F}_a = \{X \ : \ X \subset E \ \ , \ \ a \in X \}$$

بدین ترتیب فیلتر بدیهی $\mathfrak{F}_a$ یک فیلتر از همسایگی ها در توپولوژی است اگر و تنها اگر در آن توپولوژی هر مجموعه تک عضوی $\{x\}$ یک مجموعه باز باشد.

قضیه ۵۳.۲.۲. [۸] فرض کنید E یک فضای توپولوژیکی باشد گزاره های زیر هم ارزند:

الف) E فشرده است.

ب) هر فیلتر مافوق در E همگرا به نقطه ای از مجموعه E است.

[۲۹] Partial ordering relation
[۳۰] Finer
[۳۱] Coarser
[۳۲] Ultrera filter

فصل ۳

مسأله کنترل بهینه کلاسیک و انتقال فضا

۱.۳ مقدمه

تاکنون روش هایی برای حل مسأله کنترل بهینه کلاسیک با قیود آمیخته[۱] ارائه گردیده است. ([۱۱] - [۱۲]) اما در اکثر این روش ها فرض می شود که تابع و حتی مشتقات جزئی آنها پیوسته است. همچنین همانطور که در فصل ۱ گفته شد معمولاً به معادلات دیفرانسیل غیر خطی یا به انتگرال هایی برخورد می کنیم که بدست آوردن جواب تحلیلی آنها بسیار پیچیده است.

ما قصد داریم با روشی مبتنی بر نظریه اندازه شرط پیوستگی و مشتق پذیری توابع را ساده تر کنیم همچنین خواهیم دید در این روش غیر خطی بودن معادلات به پیچیدگی راه حل نمی افزاید.

در این فصل مسأله کنترل بهینه کلاسیک با قیود آمیخته و متغیر های کراندار را معرفی می کنیم و سپس برای حل، مسأله کنترل بهینه را به فضای اندازه منتقل می کنیم.

[۱] Mixed Constraint

۲.۳ معرفی مسأله

مسأله کنترل بهینه بشکل زیر را در نظر بگیرید:

تابع کنترل $u(t)$ را پیدا کنید طوری که تابعی زیر را مینیمم کند

$$I = \int_{t_a}^{t_b} f_0(t, x(t), u(t))dt \tag{1.3}$$

تحت قیود

$$\dot{x}_i = g_i(t, x(t), u(t)) \qquad i = 1, 2, ..., n \quad a.e. \;\; t \in J \tag{2.3}$$

$$h_l(t, x(t), u(t)) \leq 0 \qquad l = 1, 2, ..., k \quad a.e. \;\; t \in J \tag{3.3}$$

که در آن $x(t_a)$ و $x(t_b)$ ممکن است نامشخص باشند و بردار x بصورت $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ است که در آن $x_i(t)$ ها متغیر های وضعیت[2] سیستم هستند، همچنین $u(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))$ که بطور مشابه $u_i(t)$ ها نیز متغیرهای کنترل سیستم نامیده می شوند. در حل مسأله بالا موارد زیر نیز برآورده شوند:

الف) بازهٔ $J = [t_a, t_b]$ ، $t_a \leq t_b$ یک بازهٔ زمانی است که در این بازه کنترل بر سیستم اعمال می شود و نقاط درونی آن را با $J^o = (t_a, t_b)$ نشان می دهیم.

ب) مجموعه $A \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه بسته و کراندار است و داریم:

$$\forall t \in J^o \qquad x(t) \in A$$

همچنین $x(t_a)$ و $x(t_b)$ که وضعیت ابتدایی و انتهایی سیستم را نشان می دهند در A قرار دارند.

ج) مجموعه $U \subset \mathbb{R}^m$ یک مجموعه بسته و کراندار است و داریم:

$$\forall t \in J^o \qquad u(t) \in U$$

[2] State

د) تابعی $I = \int_{t_a}^{t_b} f_\circ(t, x(t), u(t))dt$ تابع معیار نامیده می شود و باید مینیموم شود.

ه) در مسأله (۱.۳) با قیود (۲.۳) و (۳.۳)، $\Omega = J \times A \times U$ در نظر می گیریم. فرض می کنیم که توابع $g_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$، $i = ۱, ۲, ..., n$، و توابع $h_l : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$، $l = ۱, ۲, ..., k$ و تابع $f_\circ : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ توابعی ناحیه ای پیوسته باشند، $x_i(t)$، $i = ۱, ۲, ..., n$ مطلقاً پیوسته و $u_i(t)$، $i = ۱, ۲, ..., m$ در J اندازه پذیر است.

تعریف ۱.۲.۳. زوج $(x(\cdot), u(\cdot))$ را شدنی [۳] (قابل قبول) نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف) تابع مسیر[۴] $x(t)$ بطور مطلق روی J پیوسته باشد و $\forall \ t \in J \ : \ x(t) \in A$.

ب) تابع کنترل[۵] $u(t)$ اندازه پذیر لبگ باشد و $\forall \ t \in J \ : \ u(t) \in U$.

ج) شرایط مرزی[۶] $x(t_a) = x_a$ و $x(t_b) = x_b$ برآورده شوند.

د) زوج $(x(\cdot), u(\cdot))$ در معادله دیفرانسیل (۲.۳) و (۳.۳) تقریباً همه جا روی J^o برقرار باشد.

حال فرض کنید W مجموعه تمام زوج های شدنی $p = (x(\cdot), u(\cdot))$ باشد لذا تابعی I را بصورت زیر معرفی می کنیم:

$$I : W \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$I(p) = \int_J f_\circ(t, x(t), u(t))dt \qquad (۴.۳)$$

در اینجا مشخصاتی از زوج $(x(\cdot), u(\cdot))$ را بررسی می کنیم و در قسمت های بعد آنها را مورد استفاده قرار می دهیم. فرض کنید B یک گوی باز در $\mathbb{R}^{n+۱}$ باشد که مجموعه $J \times A$ را شامل می گردد.

---
[۳] Admissible
[۴] Trajectory function
[۵] Control function
[۶] Boundary condition

مجموعه تمام توابعی که مشتقات آنها بجز در تعداد متناهی نقطه از B موجود و متناهی است را با $C'(B)$ نشان می دهیم. حال فرض کنیم $\varphi \in C'(B)$ و $g = (g_1, g_2, ..., g_n)$، تعریف می کنیم:

$$\varphi_x(t,x) = (\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial\varphi}{\partial x_n})$$

$$\varphi^g(t,x,u) = \varphi_x(t,x)g(t,x,u) + \varphi_t(t,x) \tag{۵.۳}$$

توابع φ_x و g توابع برداری n بعدی هستندکه در تعریف φ^g از ضرب داخلی آنها استفاده کرده ایم ، بنابراین تابع φ^g یک تابع حقیقی و نیز $\varphi^g \in C(\Omega)$ می باشد. حال اگر $(x(t), u(t))$ یک زوج شدنی باشد داریم:

$$\int_J \varphi^g(t,x(t),u(t))dt = \int_J (\varphi_x(t,x)\dot{x}(t) + \varphi_t(t,x))dt$$

$$= \int_J \dot{\varphi}(t,x(t))dt = \varphi(t_b,x_b) - \varphi(t_a,x_a) \equiv \triangle\varphi \tag{۶.۳}$$

مشاهده می کنیم که در روابط بالا لازم است x_a و x_b مشخص باشند ولی خواهیم دید این ضرورت از بین خواهد رفت.

فرض کنید $D(J^o)$ مجموعه توابعی باشد که در J^o بی نهایت بار مشتق پذیرند و همچنین محمل آن در J^o قرار دارد و فشرده است. تعریف می کنیم:

$$\psi_j(t,x,u) = x_j(t)\psi'(t) + g_j(t,x(t),u(t))\psi(t) \qquad \forall\psi \in D(J^o)\ ,\ (j = 1, 2, ..., n) \tag{۷.۳}$$

چون محمل ψ در J^o قرار دارد در نتیجه ψ خارج از J^o مساوی صفر است و $\psi(t_a) = \psi(t_b) = 0$ ، بنابراین اگر $\psi \in D(J^o)$ و $(x(\cdot), u(\cdot))$ زوج شدنی باشد داریم:

$$\int_J \psi_j(t,x(t),u(t))dt = \int_J x_j(t)\psi'(t)dt + \int_J g_j(t,x(t),u(t))\psi(t)dt$$

$$= x_j(t)\psi(t)|_J - \int_J [\dot{x}_j(t) - g_j(t,x(t),u(t))]\psi(t)dt = 0 \tag{۸.۳}$$

تساوی آخر باتوجه به رابطه (۲.۳) و $\psi(t_a) = \psi(t_b) = 0$ نتیجه می شود. البته توابع $\psi_j(t,x(t),u(t))$ مستتقل از $\varphi^g(t,x(t),u(t))$ نیستند زیرا اگر در رابطه (۵.۳) قرار دهیم $\varphi(t,x(t)) = x_j(t)\psi(t)$ رابطه

(۷.۳) نتیجه می شود. همچنین توابعی از $C'(\Omega)$ را انتخاب می کنیم که فقط دارای متغیر زمان باشند و قرار می دهیم:

$$(t, x(t), u(t)) \in \Omega \quad , \quad \varphi(t, x(t), u(t)) = \theta(t) \tag{۹.۳}$$

در نتیجه داریم:

$$\varphi^g(t, x(t), u(t)) = \theta'(t) \tag{۱۰.۳}$$

اگر $\theta \in C'(B)$ ، زیر فضایی از $C(\Omega)$ را که توابع آن یعنی $\theta'(t)$ مستقل از x, u هستند با $C_1(\Omega)$ نشان می دهیم و عناصر آن را با $f(t, x, u)$ نمایش می دهیم. اگر $f \in C_1(\Omega)$ باشد، رابطه (۶.۳) بصورت زیر نوشته می شود:

$$\int_J f(t, x(t), u(t))dt = a_f \tag{۱۱.۳}$$

در [۲] تابع f در (۱۱.۳) پیوسته فرض شده است ولی ما فرض می گیریم که f بتواند در تعداد متناهی نقطه ناپیوستگی داشته باشد.مشاهده می شود که هر سه دسته توابع فوق از رابطه (۵.۳) اما در صورت های مختلف نتیجه می شود.

برای بدست آوردن صورت انتگرالی از (۳.۳) توجه کنید که اگر زوج $p = (x(\cdot), u(\cdot))$ شدنی باشد در اینصورت

$$h_l(t, x(t), u(t)) \leq 0 \qquad l = 1, 2, ..., k \qquad a.e \quad t \in J$$

در نتیجه داریم:

$$|h_l(t, x(t), u(t))| = -h_l(t, x(t), u(t)) \qquad a.e \quad t \in J$$

حال تابع حقیقی $H_l : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ را بصورت زیر معرفی می کنیم:

$$H_l(t, x(t), u(t)) = |h_l(t, x(t), u(t))| + h_l(t, x(t), u(t)) \tag{۱۲.۳}$$

و اگر زوج $p=(x(\cdot),u(\cdot))$ شدنی باشد آنگاه:

$$H_l(t,x(t),u(t))=0 \qquad l=1,2,...,k \quad a.e \quad t\in J \tag{۱۳.۳}$$

اینکه سعی می شود از شکل های خاص توابع در (۶.۳) استفاده شود به این منظور است که تقریب مساله با تعداد متناهی از توابع مورد نظر است پس باید این توابع به شکلی انتخاب شوند که بسوی چگال شدن در فضای $C(\Omega)$ میل کنند.

۳.۳ انتقال از فضای کنترل بهینه به فضای اندازه

با توجه به مشکلاتی که در نظریه کنترل کلاسیک وجود دارد و تعدادی از این مشکلات را در مقدمه فصل یادآور شدیم، سعی بر آن داریم که بین هر زوج شدنی در فضای کنترل کلاسیک با یک تابعی در فضای تابعی ها تناظر یک به یک ایجاد کنیم و سپس یک تناظر یک به یک با یک اندازه رادن در فضای اندازه برقرار نماییم. بدین ترتیب مسأله از فضای کنترل بهینه کلاسیک به فضای اندازه منتقل می شود.

برای هر زوج $p=(x(\cdot),u(\cdot))$ تابعی $\Lambda_p=C(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Lambda_p(f)=\int_J f(t,x(t),u(t))dt \tag{۱۴.۳}$$

این نگاشت دارای خواص زیر است:

الف) چون هر $f\in C(\Omega)$ انتگرال پذیر است پس نگاشت فوق خوش تعریف است.

ب) نگاشت Λ_p خطی است یعنی:

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ ,\ \forall f,g\in C(\Omega)\ :\ \Lambda_p(\alpha f+\beta g)=\alpha\Lambda_p(f)+\beta\Lambda_p(g)$$

ج) نگاشت Λ مثبت است یعنی:

$$\forall t\in J^o\ :\ f(t,x(t),u(t))\geq 0 \implies \Lambda_p\geq 0$$

د) نگاشت Λ_p پیوسته است یعنی یک عدد ثابت K مستقل از f موجود می باشد بطوریکه:

$$\forall f \in C(\Omega) \quad : \quad |\Lambda_p(f)| \leq K\|f\|$$

و در آن $\|f\|$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\|f\| = \sup_J |f(t, x(t), u(t))|$$

و $p = (x(t), u(t))$ همان زوج شدنی است که در تعریف Λ_p بکار رفته اثبات قسمت "د" از روابط زیر نتیجه می شود:

$$|\Lambda_p(f)| = |\int_J f(t, x(t), u(t))dt| \leq \int_J |f(t, x(t), u(t))|dt$$
$$\leq \int_J \|f\|dt = \|f\| \int_J dt = (t_b - t_a)\|f\|$$

پس کافی است K را بزرگتر یا مساوی $t_b - t_a$ اختیار کنیم.

قضیه ۱.۳.۳. تبدیل $p \longrightarrow \Lambda_p$ که هر زوج شدنی را به یک تابعی خطی می نگارد یک به یک است.

اثبات. باید نشان دهیم که اگر $p^۱ \neq p^۲$ آنگاه $\Lambda_{p^۱} \neq \Lambda_{p^۲}$.

فرض کنیم $p^j = (x^j(\cdot), u^j(\cdot))$، $j = ۱, ۲$ و همچنین $p^۱ \neq p^۲$ در اینصورت بدون کاستن از کلیت مسأله می توان فرض کرد که حداقل به ازای یکی از مولفه های تابع برداری $x^j(t) = (x_۱^j, ..., x_i^j, ..., x_n^j)$ ، $j = ۱, ۲$ و برای یک $t_۰ \in J^\circ$ داریم $x_i^۱ \neq x_i^۲$. البته همین فرض را می توان برای یکی از مولفه های تابع برداری u در نظر گرفت.

حال تابع f را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(t, x(t), u(t)) = x_i(t_۰)$$

که در آن $t_\circ$ و i مقادیر ثابت هستند، همچنین $f \in C(\Omega)$ و لذا داریم:

$$\Lambda_{p^1}(f) = \int_J f(t, x^1(t), u^1(t))dt = \int_J x_i^1(t_\circ)dt = x_i^1(t_\circ)(t_b - t_a) \neq$$
$$x_i^2(t_\circ)(t_b - t_a) = \int_J x_i^2(t_\circ)dt = \int_J f(t, x^2(t), u^2(t))dt = \Lambda_{p^2}(f)$$

در نتیجه حکم اثبات است. ■

نتیجه ای که از قضیه بالا بدست آمد این است که بین زوج های شدنی و تابعی های تعریف شده در (۱۴.۳) یک تناظر یک به یک وجود دارد.

اکنون با استفاده از رابطه (۱۴.۳) و نیز تساویهای (۶.۳) ، (۸.۳) ، (۱۱.۳) و (۱۳.۳) مسأله (۱.۳) با قیود (۲.۳) و (۳.۳) بصورت زیر تبدیل می شود:

$$Min \quad \Lambda_p(f_\circ) \tag{۱۵.۳}$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & \Lambda_p(\varphi^g) = \Delta\varphi && \varphi \in C'(B) \\ & \Lambda_p(\psi_j) = 0 && j = 1, 2, ..., n \ , \ \ \psi \in D(J^o) \\ & \Lambda_p(f) = a_f && f \in C_1(\Omega) \\ & \Lambda_p(|H_l|) = 0 && l = 1, 2, ..., k \end{aligned} \tag{۱۶.۳}$$

پس می توان مسأله را بصورت زیر بیان نمود:

تمام تابعک های خطی ، پیوسته و مثبت Λ_p که روی $C(\Omega)$ تعریف شده اند و در شرایط (۱۶.۳) صدق می کنند را در نظر می گیریم ، هدف یافتن Λ^* می باشد که تابع $\Lambda_p(f_\circ)$ را در (۱۵.۳) مینیموم نماید

تعریف ۲.۳.۳. یک تابعی خطی ، پیوسته و مثبت Λ_p که روی $C(\Omega)$ تعریف شده اند را اندازهٔ رادن مثبت می گویند.

حال طبق قضیه نمایش ریس می توان هر اندازهٔ رادن مثبتی را توسط یک اندازه برل منظم روی مجموعه Ω مشخص نمود.

قضیه ۳.۳.۳. (قضیه نمایش ریس) [۲] فرض کنید فضای Ω یک فضای هاسدورف ، فشرده و Λ تابع خطی پیوسته و مثبت (اندازه رادن مثبت) روی $C(\Omega)$ باشد. آنگاه اندازه برل منظم μ بطور یکتا روی Ω چنان یافت می شود که:

$$\Lambda(f) = \int_J f(t, x(t), u(t))dt = \int_\Omega f d\mu \equiv \mu(f) \quad , \quad f \in C(\Omega) \tag{۱۷.۳}$$

فضای $M^+(\Omega)$ را فضای تمام اندازه های برل منظم ، مثبت که روی مجموعه فشرده می باشد در نظر می گیریم. در این صورت به اندازه μ یک اندازه نمایشگر برای تابعک Λ گویند. با بکار گیری مفاهیم بالا و قضیه نمایش ریس، مسأله (۱۶.۳) بشکل زیر مطرح می شود:

اندازه $\mu^* \in M^+(\Omega)$ را بیابید طوریکه در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned}
&\mu(\varphi^g) = \Delta\varphi && \varphi \in C'(B) \\
&\mu(\psi_j) = ۰ && j = ۱, ۲, ..., n \ , \ \psi \in D(J^o) \\
&\mu(f) = a_f && f \in C_۱(\Omega) \\
&\mu(|H_l|) = ۰ && l = ۱, ۲, ..., k
\end{aligned} \tag{۱۸.۳}$$

همچنین تابعی $I : M^+(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ را مینیموم سازد که I بصورت زیر تعریف می شود:

$$I(\mu) = \mu(f_۰) \tag{۱۹.۳}$$

تاکنون یک قسمت مهم از کار یعنی انتقال مسأله به فضای $M^+(\Omega)$ انجام شده است. آنچه باید ثابت شود این است که μ^* بهینه وجود دارد و به $M^+(\Omega)$ تعلق دارد.

همچنین باید ثابت کنیم یک روش تقریبی برای تخمین μ^* وجود دارد، و در نهایت روشی برای تعیین کنترل بهینه $u(\cdot)$ با استفاده از μ^* ارائه دهیم. یک مزیت این انتقال فضا آن است که مسأله تغییر یافته در $M^+(\Omega)$ دارای تابع هدف و قیود خطی است و این مسأله را می توان توسط یک مسأله برنامه ریزی خطی با بعد متناهی بطور تقریبی حل کرد. قضیه بعد وجود اندازه بهینه μ^* را البته به شرط کنترل پذیری سیستم تضمین خواهند کرد.

قضیه ۴.۳.۳. اگر S یک زیر مجموعه فشرده از فضای هاسدورف X باشد و تابع $h : S \longrightarrow \mathbb{R}$ نیمه پیوسته پائینی باشد آنگاه :

الف) اینفیموم $h(s)$ موجود است.

ب) تابع h اینفیموم را در نقطه ای از S اختیار می کند.

اثبات. الف) نشان می دهیم که مجموعه $\{h(s) : s \in S\}$ دارای یک کران پائین متناهی است. فرض کنید اینطور نباشد، در اینصورت به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ یک s_i موجود است طوریکه $h(s_i) < -i$. اما عناصر دنباله $\{s_i\}$ همگی در مجموعه فشرده S هستند، بنابراین مجموعه $\{s_i : i \in \mathbb{N}\}$ دارای یک نقطه حدی مثل p است و بنا به بسته بودن S ، $p \in S$. چون $p \in S$ و h روی S نیم پیوسته پائینی است برای هر $\varepsilon > 0$ یک همسایگی $U_\varepsilon(p)$ وجود دارد که

$$\forall s \in U_\varepsilon(p) \qquad\qquad h(s) < h(p) - \varepsilon$$

و چون p نقطه حدی $\{s_i, i \in \mathbb{N}\}$ است، برای همسایگی $U_\varepsilon(p)$ یک $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد طوریکه:

$$s_k \in U_\varepsilon(p) \quad \Longrightarrow \quad h(s_k) > h(p) - \varepsilon$$

یا

$$-k > h(p) - \varepsilon$$

و چون $\varepsilon > \circ$ دلخواه فرض شده پس k را می توان اعداد طبیعی به اندازه کافی بزرگ در نظر گرفت اما $h(p)$ یک عدد حقیقی و ثابت است، بنابراین از آخرین رابطه به تناقض می رسیم. در نتیجه ثابت می شود مجموعه $\{h(s) : s \in S\}$ دارای کران پائین متناهی است در نتیجه اینفیموم $h(s)$ موجود است.

ب) فرض کنید $\inf\limits_{s\in S} h(s) = \eta$ و $\lambda > \eta$ ، تعریف می کنیم :

$$V_\lambda = \{s \in S : h(s) < \lambda\}$$

چون $\inf\limits_{s\in S} h(s) = \eta$ در نتیجه برای هر $\lambda > \eta$ ، یک s' در مجموعه S وجود دارد که $\eta < h(s') < \lambda$ در نتیجه برای هر $\lambda > \eta$ مجموعه V_λ ناتهی است.

برای اثبات بسته بودن V_λ فرض کنید $s_\circ$ یک نقطه حدی V_λ باشد چون تابع h در $s \in S$ نیم پیوسته پائینی است برای هر $\varepsilon > \circ$ یک همسایگی از $s_\circ$ مانند $U_\varepsilon(s_\circ)$ وجود دارد بطوریکه:

$$h(s) > h(s_\circ) - \varepsilon$$

چون $s_\circ$ نقطه حدی V_λ است لذا $U_\varepsilon(s_\circ) \cap V_\lambda$ شامل نقطه ای از V_λ بجز $s_\circ$ است.

فرض کنید $s_1 \in U_\varepsilon(s_\circ) \cap V_\lambda$ در اینصورت $h(s_1) > h(s_\circ) - \varepsilon$ در نتیجه :

$$h(s_\circ) < h(s_1) - \varepsilon \leq \lambda + \varepsilon$$

چون $\varepsilon > \circ$ دلخواه فرض شده از این رو $h(s_\circ) < \lambda$ و در نتیجه $s_\circ \in V_\lambda$ یعنی V_λ بسته است.

حال فرض کنید $\lambda_1 > \lambda_2$، طبق تعریف مجموعه های V_λ نتیجه می گیریم $V_{\lambda_1} \subset V_{\lambda_2}$ ، لذا هر گردایه دلخواه از مجموعه ها بصورت $\{V_{\lambda_i} : \lambda_i > \eta\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است و چون S فشرده است لذا حداقل یک $s^* \in S$ وجود دارد طوریکه:

$$s^* \in \cap_{\lambda>\eta} V_\lambda$$

همچنین $\eta = h(s^*)$ زیرا در غیر اینصورت s^* در بعضی از مجموعه های V_λ نخواهد بود. بنابراین $h(s^*) = \inf_{s\in S} h(s)$ و اثبات تمام است. ■

حال فرض کنید Q مجموعه اندازه های $\mu \in M^+(\Omega)$ باشد که در شرایط (۱۸.۳) صدق کنند. اکنون برای استفاده از قضیه ۴.۳.۳ باید یک توپولوژی روی اعضای $M^+(\Omega)$ تعریف کنیم طوریکه Q فشرده و $M^+(\Omega)$ هاسدورف باشد. همچنین تابع $I : M^+(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ با تعریف $I(\mu) = \mu(f_0)$ نیم پیوسته پائینی شود البته ما توپولوژی مورد نظر را طوری تعریف می کنیم که I پیوسته می شود.

توپولوژی که روی $M^+(\Omega)$ تعریف می کنیم یک توپولوژی ضعیف می باشد که پایه آن مجموعه همسایگی های نقاط فضای $M^+(\Omega)$ و به شعاع $\varepsilon > 0$ است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$U(\varepsilon, \mu_0, f_1, f_2, ..., f_n) = \{\mu \in M^+(\Omega) : |\mu_0(f_i) - \mu(f_i)| \le \varepsilon, i = 1, 2, ..., n\} \quad (۲۰.۳)$$

که در آن $\mu_0 \in M^+(\Omega)$ ، $\varepsilon > 0$ و f_i ها تعداد متناهی از توابع در $C(\Omega)$ هستند.

قضیه ۵.۳.۳. فضای $M^+(\Omega)$ با توپولوژی تعریف شده فوق هاسدورف است.

اثبات. فرض کنید μ_1 ، μ_2 دو اندازه در $M^+(\Omega)$ هستند و $\mu_1 \neq \mu_2$ لذا یک $f_0 \in C(\Omega)$ وجود دارد بطوریکه $\mu_1(f_0) \neq \mu_2(f_0)$ قرار می دهیم $\varepsilon = |\mu_1 - \mu_2|$ ، در نتیجه $\varepsilon > 0$ و همسایگی شامل μ_1 ، μ_2 را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$U(\frac{\varepsilon}{2}, \mu_1, f_0) = \{\mu \in M^+(\Omega) : |\mu(f_0) - \mu_1(f_0)| \le \frac{\varepsilon}{2}\}$$
$$U(\frac{\varepsilon}{2}, \mu_2, f_0) = \{\mu \in M^+(\Omega) : |\mu(f_0) - \mu_2(f_0)| \le \frac{\varepsilon}{2}\}$$

برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم $U(\frac{\varepsilon}{2}, \mu_1, f_0) \cap U(\frac{\varepsilon}{2}, \mu_2, f_0)$ تهی است. فرض کنید چنین نباشد، در نتیجه یک $\mu_0 \in M^+(\Omega)$ هست بطوریکه در اشتراک فوق وجود دارد، بنابراین

$$\mu_0 \in U(\frac{\varepsilon}{2}, \mu_1, f_0) \quad \Longrightarrow \quad |\mu(f_0) - \mu_1(f_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

و

$$\mu_{\circ} \in U(\frac{\varepsilon}{۲}, \mu_{۲}, f_{\circ}) \implies |\mu(f_{\circ}) - \mu_{۲}(f_{\circ})| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

در نتیجه

$$\varepsilon = |\mu_{۱}(f_{\circ}) - \mu_{۲}(f_{\circ})| \leq |\mu_{۱}(f_{\circ}) - \mu_{\circ}(f_{\circ})| + |\mu_{۲}(f_{\circ}) - \mu_{\circ}(f_{\circ})| < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

یعنی $\varepsilon < \varepsilon$ که یک تناقض است و لذا حکم ثابت شود.

البته اثبات قضیه فوق با این فرض بود که اگر $\mu_{۱} \neq \mu_{۲}$ آنگاه یک $f_{\circ} \in C(\Omega)$ وجود دارد طوریکه $\mu_{۱}(f_{\circ}) \neq \mu_{۲}(f_{\circ})$. برای اثبات وجود $f_{\circ}$ می بینیم که اگر $\mu_{۱} \neq \mu_{۲}$ پس یک مجموعه برل $A \in \Omega$ وجود دارد طوری که $\mu_{۱}(A) \neq \mu_{۲}(A)$. تابع $f_{\circ}$ را می توان بصورت زیر معرفی نماییم:

$$f_{\circ}(t,x,u) = \begin{cases} ۱ & (t,x,u) \in A \\ \circ & (t,x,u) \in A^c \end{cases} \implies \mu_{۱}(f_{\circ}) = \mu_{۱}(A) \neq \mu_{۲}(A) = \mu_{۲}(f_{\circ})$$

واضح است که $f_{\circ} \in C(\Omega)$ و لذا وجود $f_{\circ}$ که در اثبات قضیه نقش اساسی دارد ثابت می شود. ■

قضیه ۶.۳.۳. فرض کنید $f \in C(\Omega)$ تابعی $\hat{f} : M^{+}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ را بصورت زیر معرفی می کنیم:

$$\forall \mu \in M^{+}(\Omega) \qquad \hat{f}(\mu) = \mu(f)$$

در اینصورت $\hat{f}$ پیوسته است.

اثبات. کافی است ثابت کنیم تصویر معکوس هر همسایگی در $\mathbb{R}$ یک همسایگی در $M^{+}(\Omega)$ است. فرض کنید $\hat{f}(\mu_{\circ}) = x_{\circ} \in \mathbb{R}$ و N یک همسایگی $x_{\circ}$ باشد ، لذا داریم:

$$\hat{f}^{-۱}(N) = \hat{f}^{-۱}\{x \in \mathbb{R} : |x - x_{\circ}| < \varepsilon\} = \{\mu \in M^{+}(\Omega) : |\mu(f) - \mu_{\circ}(f)| < \varepsilon\}$$

و طبق تعریف توپولوژی روی $M^{+}(\Omega)$ مجموعه فوق یک مجموعه باز است و در نتیجه تابع $\hat{f}$ پیوسته است. ■

تعریف ۷.۳.۳. فرض کنید A مجموعه ای از اندازه ها باشد در اینصورت A کراندار ضعیف [۷] گفته می شود هرگاه مجموعه $\{\mu(f) : \mu \in A\}$ برای هر $f \in C(\Omega)$ ، کراندار باشد.

قضیه ۸.۳.۳. فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R}$ ، مجموعه $A = \{\mu \in M^+(\Omega) : \mu(1) = \alpha\}$ همراه با توپولوژی ضعیف تعریف شده فشرده است.

اثبات. ابتدا ثابت می کنیم A بسته است. چون تابع $\hat{I} : M^+(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ با تعریف $\hat{I}(\mu) = \mu(1)$ طبق قضیه ۶.۳.۳ پیوسته است و A نقش معکوس مجموعه بسته $\{\alpha\}$ تحت نگاشت $\hat{I}$ است، لذا A بسته است. همچنین ثابت می کنیم کراندار ضعیف است زیرا اگر $f \in C(\Omega)$ آنگاه:

$$\forall \mu \in A \qquad |\mu(f)| \leq |\, \|f\|\, \mu(1)| = \alpha \|f\|$$

حال فرض کنید که $\mathfrak{F}$ یک فیلتر مافوق باشد که روی A تعریف شده برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم که $\mathfrak{F}$ همگراست.

فرض کنید $f \in C(\Omega)$ تابع $\hat{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}$ رابا ضابطه $\hat{f}(\mu) = \mu(f)$ تعریف می کنیم در اینصورت تصویر $\mathfrak{F}$ تحت نگاشت $\hat{f}$ یک فیلتر مافوق در مجموعه اعداد حقیقی است که آن را $\mathfrak{F}^*$ می نامیم و چون A کراندار ضعیف و $\hat{f}$ پیوسته است پس $\hat{f}(A)$ زیر مجموعه بسته و کرانداری از $\mathbb{R}$ است، بنابراین $\mathfrak{F}^*$ یک فیلتر مافوق در زیر مجموعه فشرده ای از اعداد حقیقی است ، در نتیجه $\mathfrak{F}^*$ همگرا به عددی حقیقی است که آنرا $\mu_0(f)$ می نامیم.

بنابراین برای هر $f \in C(\Omega)$ یک $\mu_0 \in \mathbb{R}$ موجود است و یکتاست، لذا μ_0 یک اندازه خطی پیوسته و مثبت است که روی $C(\Omega)$ تعریف شده ، پس $\mu_0 \in M^+(\Omega)$ و $\mathfrak{F}$ به μ_0 همگرا است و چون A بسته است، در نتیجه $\mu_0 \in A$ و طبق آخرین قضیه فصل قبل مجموعه A فشرده است. ■

---

[۷] Weakly bounded

قضیه ۹.۳.۳. مجموعه Q یعنی مجموعه اندازه های $\mu \in M^{+}(\Omega)$ که در رابطه (۱۸.۳) صدق می کنند با توپولوژی ضعیف القا شده فشرده است.

اثبات. اگر $\mu \in Q$ آنگاه $\mu(۱) = t_b - t_a \equiv \Delta t$ و مجموعه $A = \{\mu \in M^{+}(\Omega) : \mu(۱) = \Delta t\}$ طبق قضیه ۸.۳.۳ فشرده است ، همچنین $Q \subset A$ لذا برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم Q بسته است. اگر $\mu \in Q$ آنگاه μ در روابط (۱۸.۳) صدق می کند و در این روابط قیود دوم و سوم را می توان از قیود اول نتیجه گرفت بنابراین Q را می توان به شکل زیر نوشت:

$$Q = (\cap_{\varphi \in C'(B)} \{\mu \in M^{+}(\Omega) : \mu(\varphi^g) = \Delta\varphi\}) \cap (\cap_{l=۱}^{k} \{\mu \in M^{+}(\Omega) : \mu(|H_l|) = ۰\})$$

برای هر $\varphi \in C'(B)$ مجموعه $\{\mu \in M^{+}(\Omega) : \mu(\varphi^g) = \Delta\varphi\}$ بسته است زیرا این مجموعه نقش معکوس $\Delta\varphi$ تحت تبدیل $\mu \longrightarrow \mu(\varphi^g)$ است و این تبدیل طبق قضیه ۶.۳.۳ پیوسته است.

همچنین برای هر $l = ۱, ۲, ..., k$ مجموعه $\{\mu \in M^{+}(\Omega) : \mu(|H_l|) = ۰\}$ بسته است زیرا این مجموعه نقش معکوس $\{۰\}$ تحت تبدیل $\mu \longrightarrow \mu(|H_l|)$ است و این تبدیل طبق قضیه ۶.۳.۳ پیوسته است. چون Q را می توانیم بصورت اشتراک مجموعه های بسته بنویسیم ، در نتیجه Q بسته است. ■

قضیه ۱۰.۳.۳. اندازه بهینه $\mu^* \in Q$ موجود است طوریکه برای هر $\mu \in Q$ داریم:

$$\mu^*(f_۰) \leq \mu(f_۰)$$

و $f_۰$ انتگرال در تابع معیار مسأله کنترل است.

اثبات قضیه فوق از قضایای ۴.۳.۳ تا ۹.۳.۳ نتیجه می شود.

فصل ۴

بحث در وجود جواب در فضای اندازه

۱.۴ مقدمه

در این فصل فرض می کنیم که تعاریف فصول قبل بهمان صورت هستند یعنی Q مجموعه تمام اندازه های μ است که روی مجموعه فشرده $\Omega = J \times A \times U$ تعریف شده و در شرایط زیر صدق می کند.

$$\begin{aligned}
&\mu(\varphi^g) = \Delta\varphi && \varphi \in C'(B) \\
&\mu(\psi_j) = 0 && j = 1, 2, ..., n \ \ , \ \ \psi \in D(J^o) \\
&\mu(f) = a_f && f \in C_1(\Omega) \\
&\mu(|H_l|) = 0 && l = 1, 2, ..., k
\end{aligned} \tag{۱.۴}$$

همچنین فرض کنید $\mu^* \in Q$ اندازه ای است که تابعی

$$I : M^+(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{۲.۴}$$

با تعریف $I(\mu) = \mu(f_0)$ را مینیموم کند.

مسأله فوق یک مسأله برنامه ریزی خطی است زیرا تمام قیود فوق و نیز تابع هدف نسبت به اندازه μ خطی هستند. برای حل تقریبی این مسأله توسط برنامه ریزی خطی در اولین تقریب بجای آنکه مینیموم سازی I را روی Q انجام دهیم، این کار را برای یک زیر مجموعه از $M^+(\Omega)$ که در تعدادی متناهی قید

از نوع (۱.۴) صدق می کنند انجام می دهیم. این زیر مجموعه از $M^{+}(\Omega)$ را $Q(M_{۱}, M_{۲})$ می نامیم و اندازه بهینه بدست آمده را با ν^* نمایش می دهیم و ثابت می کنیم که برای $\varepsilon > ۰$ دلخواه می توان $Q(M_{۱}, M_{۲})$ را طوری انتخاب کرد که $|\mu^*(f_{۰}) - \nu^*(f_{۰})| < \varepsilon$.

اما محاسبه ν^* نیز به راحتی مقدور نیست ما بجای آنکه جواب تقریبی را برای Ω محاسبه کنیم آنرا با انتخاب نقاطی از ω که یک زیر مجموعه چگال از Ω است بدست می آوریم و اندازه بهینه بدست آمده را $\tilde{\nu}$ می نامیم و نشان می دهیم که برای $\varepsilon > ۰$ و دلخواه می توان نقاطی از ω را طوری انتخاب کرد که $|\nu^*(f_{۰}) - \tilde{\nu}(f_{۰})| < \varepsilon$.

۲.۴ تبدیل تعداد قیود نامتناهی به متناهی

در این قسمت قضایایی که در متناهی کردن تعداد قیود مسأله نقش اساسی دارند مطرح می کنیم.

قضیه ۱.۲.۴. [۶] فرض کنید X یک مجموعه بسته و کراندار از $\mathbb{R}^n$ است و تابع f بر X پیوسته است در این صورت برای هر $\varepsilon > ۰$ یک چند جمله ای p هست که: $\forall x \in X \quad : \quad |p(x) - f(x)| < \varepsilon$.
بعبارتی دیگر مجموعه چند جمله ایهای در $C(X)$ چگال است.

این قضیه نشان می دهد که استفاده از چند جمله ایها در انتخاب توابع $\varphi \in C'(B)$ برای تقریب مسأله مناسب است.

قضیه ۲.۲.۴. [۵] فرض کنید X یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد و $۱ \leq p < +\infty$. مجموعه توابع پیوسته ای که محمل آنها فشرده است و در X قرار دارد یک زیر فضای خطی تشکیل می دهد که در $L^p(X)$ چگال است.

این قضیه استفاده از $D(J^o)$ را در تقریب مسأله (۱.۴) توجیه می کند.

حال برای اولین مجموعه از تساویهای (۱.۴) فرض کنید $\{\varphi_i : i = ۱, ۲, ...\}$ در $C'(B)$ چگال باشد و همانطور که گفته شد φ_i ها می توانند چند جمله ای هایی از مولفه های برداری n بعدی x یا متغیر t باشند.

تابع φ_i^g را بصورت زیر معرفی می کنیم:

$$\varphi_i^g(t,x,u) = \varphi_{ix}(t,x)g(t,x,u) + \varphi_{it}(t,x) \tag{۳.۴}$$

برای مجموعه دوم از تساویهای (۱.۴) که البته حالت خاصی از مجموعه معادلات اول می باشند توابع زیر را که در $D(J^o)$ چگال می باشند و مستقل از x و u هستند در نظر می گیریم:

$$\psi(t) = \begin{cases} sin[۲\pi r\dfrac{(t-t_a)}{\Delta t}] & t \in J^o \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۴.۴}$$

و یا اینکه

$$\psi(t) = \begin{cases} ۱ - cos[۲\pi r\dfrac{(t-t_a)}{\Delta t}] & t \in J^o \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۵.۴}$$

که در آ ن r عدد طبیعی و دلخواه و$\Delta t = t_b - t_a$ می باشد.

حال دنباله $\{\chi_h : h = ۱, ۲, ...\}$ از توابع را بصورت زیر معرفی می کنیم

$$\psi_j(t,x,u) = x_j\psi'(t) + g_j(t,x,u)\psi(t) \qquad j = ۱, ۲, ..., n \tag{۶.۴}$$

که در آن ψ از نوع (۴.۴) یا (۵.۴) است.

قضیه ۳.۲.۴. فرض کنید $Q(M_۱, M_۲)$ شامل اندازه های $\mu \in M^+(\Omega)$ باشد که μ در شرایط زیر صدق کند

$$\begin{aligned} &\mu(\varphi_i^g) = \Delta\varphi_i && i = ۱, ۲, ..., M_۱ \\ &\mu(\chi_h) = ۰ && h = ۱, ۲, ..., M_۲ \\ &\mu(|H_l|) = ۰ && l = ۱, ۲, ..., k \end{aligned} \tag{۷.۴}$$

همچنین فرض کنید $\{\varphi_i : i = ۱, ۲, ...\}$ در $C'(B)$ چگال باشد و $\{\chi_h : h = ۱, ۲, ...\}$ نیز در $D(J^o)$ چگال است. در این صورت اگر $M_۱$ و $M_۲$ به بی نهایت میل کنند آنگاه $\eta(M_۱, M_۲) = \inf_{Q(M_۱,M_۲)} \mu(f_۰)$ به $\eta = \inf_{Q} \mu(f_۰)$ میل می کند.

اثبات. ابتدا ثابت می کنیم که دنباله $\{\eta(M_۱, M_۲) : M_۱ = ۱, ۲, ... \ , \ M_۲ = ۱, ۲, ...\}$ همگراست و سپس ثابت می کنیم حد این دنباله برابر η است. دنباله $\{\eta(M, M) : M = ۱, ۲, ...\}$ را در نظر بگیرید از تعریف $\eta(M, M)$ نتیجه می شود

$$Q(۱, ۱) \supset Q(۲, ۲) \supset ... \supset Q(M, M) \supset ... \supset Q$$

بنابراین

$$\eta(۱, ۱) \leq \eta(۲, ۲) \leq ... \leq \eta(M, M) \leq ... \leq \eta$$

چون دنباله $\{\eta(M, M) : M = ۱, ۲, ...\}$ صعودی واز بالا کراندار است پس همگراست.

فرض کنید $\lim_{M\to\infty} \eta(M, M) = \xi$ چون η کران بالای این دنباله است پس $\xi \leq \eta$ و بنا به تعریف حد برای $\varepsilon > ۰$ یک N_ε موجود است طوریکه وقتی $M > N_\varepsilon$ نتیجه می گیریم $|\eta(M, M) - \xi| < \varepsilon$.

حال دنباله $\{\eta(M_۱, M_۲) : M_۱ = ۱, ۲, ... \ , \ M_۲ = ۱, ۲, ...\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $M_۲ \geq M_۱ \geq N_\varepsilon$ در نتیجه

$$\eta(M_۱, M_۱) \leq \eta(M_۱, M_۲) \leq \eta(M_۲, M_۲)$$

بنابراین

$$-\varepsilon < \eta(M_۱, M_۱) - \xi \leq \eta(M_۱, M_۲) - \xi \leq \eta(M_۲, M_۲) - \xi < \varepsilon$$

در نتیجه $|\eta(M_۱, M_۲) - \xi| < \varepsilon$ و بنابراین دنباله $\{\eta(M_۱, M_۲) : M_۱ = ۱, ۲, ... \ , \ M_۲ = ۱, ۲, ...\}$ نیز به ξ همگرا می باشد.

حال می باید ثابت کنیم $\eta = \xi$.

ابتدا ثابت می کنیم برای هر M_1 ، $\lim_{M_2 \to \infty} \eta(M_1, M_2)$ موجود است چون طبق تعریف داریم:

$$Q(M_1, 1) \supset Q(M_1, 2) \supset ... \supset Q(M_1, M_2) \supset ... \supset Q$$

بنابراین

$$\eta(M_1, 1) \leq \eta(M_1, 2) \leq ... \leq \eta(M_1, M_2) \leq ... \leq \eta$$

دنباله $\{\eta(M_1, M_2) : M_2 = 1, 2, ...\}$ صعودی واز بالا کراندار است پس همگراست به عددی که آنرا $\gamma(M_1)$ می نامیم ، نشان می دهیم:

$$\xi = \lim_{M_1 \to \infty} \gamma(M_1)$$

مجموعه $Q(M_1)$ از اندازه ها را بصورت زیر معرفی می کنیم :

$$Q(M_1) = \cap_{M_2=1}^{\infty} Q(M_1, M_2)$$

و چون $Q(M_1, i) \supseteq Q(M_1, i+1)$ در نتیجه:

$$\gamma(M_1) = \lim_{M_2 \to \infty} \eta(M_1, M_2) = \inf_{Q(M_1)} \mu(f)$$

و چون داریم:

$$Q(1) \supset Q(2) \supset ... \supset Q(M_1) \supset ... \supset Q$$

نتیجه می گیریم

$$\gamma(1) \leq \gamma(2) \leq ... \leq \gamma(M_1) \leq ... \leq \eta$$

بنابراین $\gamma(M_1)$ همگراست و$\xi = \lim_{M_1 \to \infty} \gamma(M_1)$ و چون η کران بالای $\gamma(M_1)$ است لذا داریم $\xi \leq \eta$

حال برای اثبات تساوی تعریف می کنیم:

$$P = \cap_{M_1=1}^{\infty} Q(M_1)$$

واضح است که $P \subset Q$ و $\xi = \lim_{M_1 \to \infty} \gamma(M_1) = \inf_P \mu(f_0)$ نشان می دهیم که $Q \subset P$. برای این منظور فرض کنید $\mu \in P$ همچنین فرض کنید که $\varphi \in C'(B)$ چون $\{\varphi_i : i = 1, 2, ...\}$ در $C'(B)$ چگال است پس یک دنباله φ^j از اعضای آن وجود دارد که همگرا به φ است طوریکه وقتی j بسمت بی نهایت میل می کند مقادیر زیر به صفر میل می کنند

$$\sup_B |\varphi_t(t,x) - \varphi_t^j(t,x)| \quad , \quad \sup_B \|\varphi_x(t,x) - \varphi_x^j(t,x)\| \quad , \quad \sup_B |\varphi(t,x) - \varphi^j(t,x)|$$

همچنین داریم:

$$\lim_{j\to\infty} \Delta\varphi^j = \lim_{j\to\infty} [\varphi^j(t_b, x_b) - \varphi^j(t_a, x_a)] = \varphi(t_b, x_b) - \varphi(t_a, x_a) = \Delta\varphi$$

بنابراین چون $\mu(\varphi^{jg}) - \Delta\varphi^j = 0$ لذا داریم:

$$\begin{aligned}
&|\mu(\varphi^g) - \Delta\varphi| = |\mu(\varphi^g) - \Delta\varphi - \mu(\varphi^{jg}) + \Delta\varphi^j| \\
&= |\int_\Omega ([\varphi_x(t,x) - \varphi_x^j(t,x)]g(t,x,u) + [\varphi_t(t,x) - \varphi_t^j(t,x)])d\mu - (\Delta\varphi - \Delta\varphi^j)| \\
&\le K_1 Sup|\varphi_x(t,x) - \varphi_x^j(t,x)| + K_2 Sup|\varphi_t(t,x) - \varphi_t^j(t,x)| + |\Delta\varphi - \Delta\varphi^j|
\end{aligned}$$

و چون وقتی j به بی نهایت میل می کند عبارت آخر به صفر میل می کند لذا داریم:

$$\mu(\varphi^g) = \Delta\varphi$$

حال فرض کنیم $\psi_j \in D(J^o)$ و $\mu \in P$ چون $\{\chi_h : h = 1, 2, ...\}$ چگال در $D(J^o)$ فرض شده پس یک دنباله $\{\chi_h\}$ از اعضای آن موجود است که به ψ_j همگراست بنابر پیوستگی μ داریم.

$$\mu(\psi_j) = \mu(\lim_{l\to\infty} \chi_l) = \lim_{l\to\infty} \mu(\chi_l) = \lim_{l\to\infty} 0 = 0$$

بنابراین $\mu \in Q$ در نتیجه $P \subset Q$ همچنین داشتیم $Q \subset P$ پس $Q = P$ و در نتیجه:

$$\xi = \lim_{M_1\to\infty} \gamma(M_1) = \inf_P \mu(f_0) = \inf_Q \mu(f_0) = \eta$$

و اثبات تمام است. ■

با توجه به قضیه بالا مشکل نامتناهی بودن قیود بر طرف می شود و بنابراین می توانیم مسأله را با تعداد متناهی قید در نظر گرفته و اندازه بهینه تقریبی را بیابیم .

۳.۴ تبدیل مسأله به مسأله برنامه ریزی خطی

در ادامه برای تبدیل مسأله به یک مسأله برنامه ریزی خطی چند تعریف و قضیه ارائه می گردد.

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنید X یک فضای برداری و x_1, x_2 دو نقطه از X باشند. قطعه خط [1] واصل x_1, x_2 را بشکل زیر تعریف می کنیم :

$$\{x \in X : x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2, 0 \leq \theta \leq 1\}$$

و نیز قطعه خط باز [2] واصل را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\{x \in X : x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2, 0 < \theta < 1\}$$

واضح است که تنها تفاوت بین دو مجموعه اخیر در نقاط ابتدا و انتهایی آنها است.

تعریف ۲.۳.۴. فرض کنید X یک فضای برداری باشد $C \subset X$ محدب [3] گفته می شود هرگاه برای هر دو نقطه x_1, x_2 در C ، قطعه خط واصل x_1, x_2 در C باشد.

تعریف ۳.۳.۴. فرض کنید X یک فضای برداری باشد $C \subset X$ فشرده باشد. نقطه x یک نقطه غیر فرین [4] از C گفته می شود اگر یک قطعه خط باز در C وجود داشته باشد طوریکه شامل x باشد. همچنین اگر نقطه ای از C غیر فرین نباشد به آن نقطه فرین [5] C گویند.

[1] Line segment
[2] Openline segment
[3] Convex
[4] Nonextremal
[5] Extremal

قضیه ۴.۳.۴. نقطه x یک نقطه فرین C است اگر و تنها اگر گزاره زیر درست باشد.

$$x = \frac{(x_1 + x_2)}{2} \quad , \quad x_1, x_2 \in C \qquad \Longrightarrow \qquad x = x_1 = x_2 \tag{۸.۴}$$

اثبات. اگر x نقطه فرین C باشد در این صورت درستی گزاره واضح است.

بلعکس اگر گزاره درست باشد می خواهیم ثابت کنیم که x نقطه فرین C است. فرض کنید چنین نباشد لذا یک y_1 و y_2 در C و یکθ بین صفر و یک یافت می شوند ، طوریکه $x = \theta y_1 + (1-\theta) y_2$ و قطعه خط باز واصل y_1 و y_2 درC قرار دارد.

بدون کاستن از کلیت فرض می کنیم $\frac{1}{2} \le \theta < 1$ ،(البته در غیر این صورت از $\gamma = 1 - \theta$ استفاده می کردیم). اگر قرار دهیم $\lambda = 2\theta - 1$ دراینصورت $0 \le \theta < 1$ و $1 - \lambda = 2(1-\theta)$. نقاط x_1 و x_2 را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_1 = y_1 \quad , \quad x_2 = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$$

چون فرض کردیم قطعه خط باز واصلy_1 و y_2 درC قرار دارد بنابراین x_2 در C قرار دارد همچنین $x_1 = y_1$ در C قرار دارد و نیز داریم:

$$x = \frac{(x_1 + x_2)}{2}$$

بنابر گزاره (۸.۴) ، $x = x_1 = x_2$ و از آنجا $x = y_1 = y_2$ ولی اگر $y_1 = y_2$ در نتیجه قطعه خط باز واصل y_1 و y_2 یک مجموعه تهی است پس فرض خلف باطل است و x یک نقطه فرین C است. ■

قضیه ۵.۳.۴. فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ یک فضای توپولوژی و هاسدورف باشد وC یک زیر مجموعه از $M^+(\Omega)$ است که با توپولوژی تعریف شده در (۲۰.۳) فشرده می باشد در اینصورت C حداقل یک نقطه فرین دارد.

اثبات . ابتدا یک رده از زیر مجموعه های C را تعریف می کنیم. $E \subset C$ را فرین می گوییم اگر E ناتهی باشد و

$$(\mu_1, \mu_2 \in C \ , \ \exists \ \theta \in (0, 1) : \theta\mu_1 + (1-\theta)\mu_2 \in E) \implies \mu_1, \mu_2 \in E$$

بنابراین می توانیم یک رابطه جزئی مرتب در رده همه زیر مجموعه های فرین و فشرده از C همراه با رابطه زیر مجموعه بودن تعریف کنیم و چون C خودش فرین است پس رده مذکور ناتهی است و طبق لم زورن یک عنصر مینیمال دارد که آن را E_0 می نامیم اکنون نشان می دهیم E_0 دقیقاً یک نقطه دارد بدین ترتیب که فرض می کنیم E_0 بیش از یک نقطه داشته باشد یعنی $\nu \in E_0$ و $\mu \neq \nu$ بنابراین یک تابع $f \in C(\Omega)$ وجود دارد که $\mu(f) \neq \nu(f)$.

تابع$\hat{f} : M^+(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ باضابطه $\hat{f}(\mu) = \mu(f)$ طبق قضیه ۶.۳.۳ پیوسته است و چون E_0 یک زیر مجموعه فشرده از فضای هاسدورف $M^+(\Omega)$ است لذا یک $\mu_0 \in E_0$ است که $\hat{f}$ بمقدار مینیموم خود بر E_0 می رسد اما $\{\mu_0\}$ زیر مجموعه E_0 است و مینیمال بودن E_0 نقض می شود بنابراین E_0 حداکثر یک نقطه دارد و چون ناتهی فرض شده بود دقیقاً یک نقطه دارد و همان یک نقطه فرین از C خواهد بود.

■

قضیه ۶.۳.۴. فرض کنید C زیر مجموعه محدب از $M^+(\Omega)$ باشد و با توپولوژی ضعیف فشرده باشد و $f \in C(\Omega)$ در اینصورت تابع $\hat{f} : C \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $\hat{f}(\mu) = \mu(f)$ مینیموم خود را در یک نقطه فرین C می گیرد.

اثبات . چون تابع $\hat{f}$ پیوسته است و بر مجموعه فشرده C تعریف شده لذا $m = \min_C \hat{f} > -\infty$ و نیز تعریف می کنیم:

$$A(a) = \{\mu \in C : \hat{f}(\mu) \leq a\} \subset C$$

اگر $a > m$ درآنصورت $A(a)$ ناتهی است و چون $(-\infty, a]$ بسته و $\hat{f}$ پیوسته است بنابراین $A(a)$ بسته و در نتیجه فشرده می باشد و همچنین

$$A(m) = \cap_{a>m} A(a)$$

چون $m = \min_C \hat{f}$ تابع $\hat{f}$ مینیموم خود را بر مجموعه فشرده C اختیار می کند پس $A(m)$ نا تهی است و چون اشتراک مجموعه های بسته است پس بسته و در نتیجه فشرده می باشد طبق قضیه قبل $A(m)$ یک نقطه فرین دارد که آن را ν^* می نامیم و ثابت می کنیم ν^* یک نقطه فرین C نیز می باشد

اگر اینچنین نباشد پس $\mu_۱$ و $\mu_۲$ در C وجود دارند که به ازای یک $\theta \in (۰, ۱)$ داریم:

$$\nu^* = \theta\mu_۱ + (۱ - \theta)\mu_۲ \qquad \mu_۱ \neq \nu^* \quad , \quad \mu_۲ \neq \nu^*$$

$$\Longrightarrow \qquad m = \nu^*(f) = \theta\mu_۱(f) + (۱ - \theta)\mu_۲(f) \geq \theta m + (۱ - \theta)m = m$$

بنابراین $\mu_۱(f) = \mu_۲(f) = m$ یعنی $\mu_۱$ و $\mu_۲$ نقاطی از $A(m)$ هستند و این با فرین بودن ν^* در $A(m)$ در تناقض است. لذا ν^* یک نقطه فرین C نیز هست و اثبات تمام است. ■

تعریف ۷.۳.۴. اندازه $\mu \in M^+(\Omega)$ را اندازه ابتدایی یا اندازه یا اندازه اولیه می گوئیم اگر $\mu(\Omega) = ۱$ و μ فقط مقادیر ۰ یا ۱ را بگیرد.

مثال ۸.۳.۴. اندازه اتمی تعریف شده در فصل دوم نیز یک اندازه اولیه است و برای هر مجموعه برل A بصورت زیر تعریف می شود

$$\delta_{(z)}(A) = \begin{cases} ۱ & z \in A \\ ۰ & z \in A^c \end{cases}$$

قضیه ۹.۳.۴. فرض کنید Ω فضای هاسدورف و فشرده و μ یک اندازه ابتدائی در $M^+(\Omega)$ باشد در نتیجه یک $z \in \Omega$ وجود دارد که یکتاست و

$$\forall f \in C(\Omega) \qquad\qquad \int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f d\delta_z = f(z)$$

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{F}$ ردهٔ تمام مجموعه های برل A در Ω باشد طوریکه $\mu(A) = ۰$. فرض کنید برای هر $x \in \Omega$ یک مجموعه باز $G(x)$ در $\mathfrak{F}$ موجود باشد و شامل x باشد. بنابراین گردایه $\{G(x) : x \in \Omega\}$ یک

پوشش باز برایΩ است و چون Ω فشرده است، لذا مجموعه های باز $G(x_i)\ ,\ i = ۱, ۲, ..., p$ موجودند طوریکه یک پوشش باز متناهی برای Ω تشکیل می دهند بنابراین:

$$\mu(\Omega) = \mu(\cup_{i=۱}^{p} G(x_i)) \leq \Sigma_{i=۱}^{p} \mu(G(x_i)) = ۰$$

و در نتیجه با اندازه ابتدایی بودن μ در تناقض است، لذا یک $z \in \Omega$ وجود دارد طوریکه هر مجموعه باز در $\mathfrak{F}$ شامل z نباشد.

حال فرض کنید $f \in C(\Omega)$ در نتیجه یک دنباله از توابع پیوسته مثل $\{g_n \in C(\Omega), n = ۱, ۲, ...\}$ وجود دارد که $g_n \longrightarrow f$. فرض کنید ε یک عدد حقیقی مثبت باشد و n عددی طبیعی و دلخواه ، چون g_n پیوسته است پس یک مجموعه باز O شامل z موجود است طوریکه O در $\mathfrak{F}$ نیست یعنی $\mu(O) \neq ۰$ ، همچنین داریم:

$$|g_n(x) - g_n(x)| \leq \varepsilon$$

بنابراین

$$g_n(z) - \varepsilon \leq g_n(x) \leq g_n(z) + \varepsilon$$

از طرفی $\mu(O) \neq ۰$ و μ اندازه ابتدایی است بنابراین $\mu(O) = ۱$ و داریم:

$$[g_n(z) - \varepsilon]\mu(O) \leq \int_O g_n d\mu \leq [g_n(z) + \varepsilon]\mu(O)$$

با توجه به اینکه $\mu(O) = \mu(\Omega) = ۱$ نتیجه می گیریم:

$$g_n(z) - \varepsilon \leq \int_\Omega g_n d\mu \leq g_n(z) + \varepsilon$$

و چون ε دلخواه بود بنابراین: $\int_\Omega g_n d\mu = g_n(z)$

و لذا

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} g_n(z) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

برای اثبات یکتایی z فرض کنید $z \neq z_1$ در اینصورت یک تابع پیوسته g وجود دارد طوریکه $g(z) = 0$ و $g(z_1) = 1$ بنابراین:

$$\int_\Omega g d\mu = g(z) = 0$$

در نتیجه $\int_\Omega g d\mu \neq g(z_1)$ و اثبات تمام است. ■

قضیه ۱۰.۳.۴. فرض کنید μ یک اندازه در $M^+(\Omega)$ باشد و حداکثر k مجموعه برل جدا از هم $A_1, A_2, ..., A_k$ وجود داشته باشند طوریکه $\mu(A_i) \neq 0 \ \ , \ (i = 1, 2, ..., k)$ در اینصورت می توان μ را بصورت ترکیب خطی از حداکثر k اندازه ابتدایی نوشت.

اثبات. فرض کنیم k مجموعه برل جدا از هم داشته باشیم طوریکه

$$\mu(A_i) = \alpha_i \neq 0 \qquad\qquad i = 1, 2, ..., k$$

اندازه های μ_i را بصورت زیر معرفی می کنیم:

$$\mu_i = \frac{[\mu(A \cap A_i)]}{\alpha_i} \qquad\qquad i = 1, 2, ..., k$$

اندازه μ_i برای هر مجموعه برل A تعریف شده است.

حال ثابت می کنیم μ_i اندازه ابتدایی است. فرض کنیم اینگونه نیست پس یک مجموعه برل B وجود دارد که: $\mu_i(B) \neq 0 \ \ , \ \ \mu_i(B) \neq 1$

مجموعه های برل زیر را در نظر می گیریم.

$$A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_i \cap B, A_i - B, A_{i+1}, ..., A_k$$

این مجموعه ها جدا از هم هستند و نیز داریم.

$$\mu(A_j) = \alpha_j \neq 0 \qquad\qquad j = 1, 2, ..., i-1, i+1, ..., k$$

از آنجا که

$$\mu_i(B) = \frac{[\mu(B \cap A_i)]}{\alpha_i}$$

در نتیجه

$$\mu(B \cap A_i) = \alpha_i \mu_i(B) \neq 0$$

همچنین داریم

$$\mu_i(\Omega - B) = \frac{[\mu(\Omega - B) \cap A_i]}{\alpha_i} = \frac{[\mu(A_i - B)]}{\alpha_i}$$

در نتیجه

$$\mu(A_i - B) = \alpha_i \mu_i(\Omega - B) = \alpha_i[1 - \mu_i(B)] \neq 0$$

یعنی توانستیم $k + 1$ مجموعه برل بیابیم که μ-اندازه آنها مخالف صفر است و این با فرض قضیه در تناقض است در نتیجه μ_i اندازه ابتدایی است.

همچنین از فرض قضیه به این نتیجه می رسیم که برای هر مجموعه برل دلخواه A داریم

$$\mu(A - \cup_{i=1}^{k} A_i) = 0$$

بنابراین

$$\mu(A) = \Sigma_{i=1}^{k} \mu(A \cap A_i) + \mu(A - \cup_{i=1}^{k} A_i) = \Sigma_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_i(A)$$

یعنی μ را بصورت یک ترکیب خطی از k اندازه ابتدایی نوشتیم. ■

قضیه ۱۱.۳.۴. فرض کنید که $f_1, f_2, ..., f_p$ توابعی در $C(\Omega)$ باشند و نیز برای هر z در Ω داشته باشیم $f_1(z) = 1$ و $Q_{(p)}$ مجموعه اندازه های رادن مثبت به شکل زیر باشد.

$$Q_{(p)} = \{\mu \in M^+(\Omega) : \mu(f_i) = c_i \quad , \quad i = 1, 2, ..., p\}$$

و همچنین $c_i > \circ$. اگر $Q_{(p)}$ ناتهی باشد.

الف) $Q_{(p)}$ فشرده است.

ب) $Q_{(p)}$ زیر مجموعه محدبی از $M^+(\Omega)$ است.

ج) اگر ν^* یک نقطه فرین از $Q_{(p)}$ باشد. ν^* را می توان بصورت ترکیب خطی از حداکثر p اندازه اتمی بصورت زیر نوشت:

$$\nu^* = \Sigma_{i=۱}^{p} \alpha_i^* \delta_{z_i^*}$$

که درآن برای $i = ۱, ۲, ..., p$ داریم: $z_i^* \in \Omega \ \ , \ \ \alpha^* \geq \circ$

اثبات. الف) چون برای هر μ در $Q_{(p)}$ داریم $\mu(f_۱) = \mu(۱) = c_۱ > \circ$ در نتیجه داریم:

$$Q_{(p)} \subset A = \{\mu \in M^+(\Omega) : \mu(۱) = c_۱\}$$

و طبق قضیه ۸.۳.۳ مجموعه A فشرده است و کافی است ثابت شود $Q_{(p)}$ بسته است و اثبات بسته بودن $Q_{(p)}$ شبیه برهان قضیه ۹.۳.۳ است.

ب) فرض کنیم $Q_{(p)}$ ناتهی باشد و $\mu_۱$ ، $\mu_۲$ به $Q_{(p)}$ تعلق دارند در نتیجه

$$i = ۱, ۲, ..., p \quad : \quad \mu_۱(f_i) = c_i \ \ , \ \ \mu_۲(f_i) = c_i$$

برای $\circ \leq \theta \leq ۱$ داریم:

$$\theta\mu_۱(f_i) + (۱ - \theta)\mu_۲(f_i) = \theta c_i + (۱ - \theta)c_i = c_i \ \ , \ \ i = ۱, ۲, ..., p$$

یعنی $\theta\mu_۱ + (۱ - \theta)\mu_۲$ نیز به $Q_{(p)}$ متعلق است پس $Q_{(p)}$ محدب است.

ج) اگر ν^* یک نقطه فرین از $Q_{(p)}$ باشد نشان می دهیم حداکثر p مجموعه جدا از هم برل موجودند طوریکه ν^*-اندازه های آنها مخالف صفر باشد. فرض کنید اینطور نباشد و حداقل $p + ۱$ مجموعه برل و

جدا از هم $A_0, A_1, ..., A_p$ باشند که $i = 0, 1, 2, ..., p$ و $\nu^*(A_i) \neq 0$.

قرار می دهیم $A_{p+1} = \Omega - (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_p)$ در نتیجه $A_0 \subset A_{p+1}$ و $\nu^*(A_{p+1}) > 0$.

حال هر $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}$ را با یک اندازه علامتدار به صورت زیر متناظر می کنیم.

$$\mu(A) = \Sigma_{i=1}^{p+1} \alpha_i \nu^*(A \cap A_i)$$

فرض کنید مجموعه $K \subset \mathbb{R}^{p+1}$ به شکل زیر تعریف شود.

$$K = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1} : \Sigma_{i=1}^{p+1} \alpha_i \nu^*(A \cap A_i) \in Q_{(p)}\}$$

ابتدا اثبات می کنیم که K یک مجموعه محدب در $\mathbb{R}^{p+1}$ است. فرض کنید:

$$Y_1 = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{p+1}) \in K \quad , \quad Y_2 = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{p+1}) \in K$$

بنابراین

$$\Sigma_{i=1}^{p+1} \gamma_i \nu^*(A \cap A_i) \in Q_{(p)} \quad , \quad \Sigma_{i=1}^{p+1} \beta_i \nu^*(A \cap A_i) \in Q_{(p)}$$

و برای $0 \leq \theta \leq 1$ بنا به محدب بودن $Q_{(p)}$ داریم:

$$\Sigma_{i=1}^{p+1} [\theta\gamma_i + (1-\theta)\beta_i] \nu^*(A \cap A_i) =$$

$$\theta \Sigma_{i=1}^{p+1} \gamma_i \nu^*(A \cap A_i) + (1-\theta) \Sigma_{i=1}^{p+1} \beta_i \nu^*(A \cap A_i) \in Q(p)$$

در نتیجه $\theta Y_1 + (1-\theta) Y_2 \in K$ پس K محدب است.

اندازه ν^* متناظر با یک نقطه K مثل $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_{p+1}^*)$ است و چون ν^* نقطه فرین $Q_{(p)}$ فرض شده با اثباتی شبیه برهان محدب بودن K ثابت می شود $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_{p+1}^*)$ نیز نقطه ای فرین از K است و چون ν^* اندازه رادن مثبت است مولفه های $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_{p+1}^*)$ نیز همگی مثبت یا صفر می باشند.

طبق قضایای فصل ۳ از [۴] حداکثر p تا از این مولفه ها مخالف صفرند، لذا حداقل برای یک j داریم $\lambda_j^* = 0$ پس $\nu^*(A_j) = 0$ که یک تناقض است. حال قضیه ۱۰.۳.۴ را در مورد ν^* بکار می بریم، بنابراین ν^* را می توان بصورت ترکیب خطی از حداکثر p اندازه ابتدایی نوشت و طبق قضیه ۹.۳.۴ این اندازه ها بصورت اتمی قابل نمایش هستند یعنی

$$\nu^* = \Sigma_{i=1}^{p} \alpha_i^* \delta_{z_i^*}$$

■

حال از قضایای ۵.۳.۴ تا ۱۱.۳.۴ قضیه زیر نتیجه می شود.

قضیه ۱۲.۳.۴. اندازه بهینه ν^* در مجموعه $Q(M_1, M_2)$ که تابع $I : M^+(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $I(\mu) = \mu(f_0)$ توسط آن مینیموم مقدار خود را اختیار می کند دارای فرم زیر است.

$$\nu^* = \Sigma_{i=1}^{M_1+M_2+k} \alpha_i^* \delta_{z_i^*}$$

با توجه به قضیه فوق مجهولات مسأله α^* ، z^* و $i = 1, 2, ..., M_1 + M_2 + k$ می باشند قضایای زیر نشان می دهند که z^* را نیز با هر دقت مورد نظر می توان تقریب زد.

قضیه ۱۳.۳.۴. فرض کنید ω یک زیر مجموعه چگال شمارش پذیر از Ω باشد و $\varepsilon > 0$ مفروض باشد یک اندازه $\tilde{\nu} \in M^+(\Omega)$ می توان یافت طوریکه:

$$|(\nu^* - \tilde{\nu})f_0| \leq \varepsilon \tag{۹.۴}$$

$$|(\nu^* - \tilde{\nu})\varphi_i^g| \leq \varepsilon \qquad i = 1, 2, ..., M_1$$

$$|(\nu^* - \tilde{\nu})\chi_h| \leq \varepsilon \qquad h = 1, 2, ..., M_2$$

$$|(\nu^* - \tilde{\nu})|H_l|| \leq \varepsilon \qquad l = 1, 2, ..., k$$

واندازه $\tilde{\nu}$ به شکل زیر است

$$\tilde{\nu} = \Sigma_{i=1}^{M_1+M_2+k} \alpha_r^* \delta_{\tilde{z}_r^*}$$

که ضرایب α_r^* ضرایب اندازه بهینه ν^* هستند و

$$\tilde{z}_r^* \in \omega \qquad , \qquad r = 1, 2, ..., M_1 + M_2 + k$$

اثبات. قرار می دهیم

$$f_i = \varphi_i^g \qquad , \qquad i = 1, 2, ..., M_1$$

$$f_i = \chi_h \qquad , \qquad h = 1, 2, ..., M_2 \qquad , \qquad i = M_1 + h$$

$$f_i = |H_l| \qquad , \qquad l = 1, 2, ..., k \qquad , \qquad i = M_1 + M_2 + l$$

پس برای $i = 1, 2, ..., M_1 + M_2 + k$ داریم:

$$|(\nu^* - \tilde{\nu})f_i| = |\Sigma_{i=1}^{M_1+M_2+k} \alpha_r^* [f_i(z_r^*) - f_i(\tilde{z}_r)]|$$

$$\leq \max_{i.r} |f_i(z_r^*) - f_i(\tilde{z}_r)| \Sigma_{i=1}^{M_1+M_2+k} \alpha_r^*$$

$$\nu^*(f) = \Sigma_{i=1}^{M_1+M_2+k} \alpha_r^* \delta_{z_r^*}(f) = \Sigma_{i=1}^{M_1+M_2+k} \alpha_r^*$$

و از طرفی

$$\nu^*(f) = \int_\Omega f d\nu^* = \int_J dt = \Delta t$$

بنابراین

$$|(\nu^* - \tilde{\nu})f_i| \leq \Delta t. \max_{i.r} |f_i(z_r^*) - f_i(\tilde{z}_r)|$$

وچون توابع f_i، $(i = 0, 1, 2, ..., M_1 + M_2 + k)$ ناحیه ای پیوسته هستند و نقاط $\tilde{z}_r$ در ω هستند و ω در Ω چگال است، لذا با انتخاب $\tilde{z}_r$ باندازه کافی نزدیک به z_r^* می توان مقدار $\max_{i.r} |f_i(z_r^*) - f_i(\tilde{z}_r)|$ را از $\frac{\varepsilon}{\Delta t}$ کمتر نمود و اثبات قضیه تمام می شود. ■

به کمک قضیه فوق می توانیم z_r^* را تقریب بزنیم و مسأله برنامه ریزی خطی زیر را بکار ببریم.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ و $\omega_N = \{z_1, z_2, ..., z_N\}$ مشخص باشند و N بقدر کافی بزرگ باشد مجهولات نامنفی $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$ را طوری بدست آورید که تابع هدف زیر را مینیمموم کند.

$$\Sigma_{j=1}^{N} \alpha_j f_0(z_j) \tag{10.4}$$

و قید زیر را نیز برآورده سازد

$$\begin{aligned} &-\varepsilon \leq \Sigma_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_i^g(z_j) - \Delta\varphi_i \leq \varepsilon \qquad && i = 1, 2, ..., M_1 \\ &-\varepsilon \leq \Sigma_{j=1}^{N} \chi_h(z_j) \leq \varepsilon && h = 1, 2, ..., M_2 \\ &-\varepsilon \leq \Sigma_{j=1}^{N} |H_l(z_j)| \leq \varepsilon && l = 1, 2, ..., k \end{aligned} \tag{11.4}$$

مسأله فوق دارای N متغیر و $2(M_1 + M_2 + k)$ قید است.

مجموعه نقاطی از $\mathbb{R}^N$ را که در قیود فوق صدق می کند را با $P(M_1 + M_2)^{\varepsilon}$ نشان می دهیم. در مسأله فوق انتخاب توابع H_l و تعداد آنها در اختیار ما نیست و تابع H_l از ابتدای فصل مشخص شده اند. در قضیه زیر نزدیکی دلخواه مقدار بهینه تابع هدف را در مسأله فوق و مقدار $\eta(M_1 + M_2)$ بکار رفته در قضیه ۳.۲.۴ بررسی می شود.

گزاره ۱۴.۳.۴. برای هر $\varepsilon > 0$ مسأله مینیموم سازی (۱۰.۴) با قیود (۱۱.۴) دارای یک جواب به ازای $N = N(\varepsilon)$ می باشد که در نامساوی زیر صدق می کند.

$$\eta(M_1, M_2) + \rho(\varepsilon) \leq \Sigma_{j=1}^{N} \alpha_j f_0(z_j) \leq \eta(M_1, M_2) + \varepsilon \tag{12.4}$$

طوریکه $\lim_{\varepsilon \to 0} \rho(\varepsilon) = 0$.

اثبات. همانطور که در اثبات قضیه ۱۳.۳.۴ گفته شد یک مجموعه

$$\{\tilde{z}_r : r = 1, 2, ..., M_1 + M_2 + k\} \subset \omega$$

وجود دارد طوریکه نامساوی (۱۱.۴) برقرار باشند. برای N به قدر کافی بزرگ مجموعه $\omega_N = \{z_j : j = 1, 2, ..., N\} \subset \omega$ شامل مجموعه $\{\tilde{z}_r : r = 1, 2, ..., M_1 + M_2 + k\}$ خواهد بود و چون N تایی $\{\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_{M_1+M_2+k}^*, 0, ..., 0\}$ در مجموعه $P(M_1 + M_2)^\varepsilon$ است. پس برای N بقدر کافی بزرگ مسأله دارای جواب است.

اولین نامساوی از شرایط (۱۱.۴) به ازای $\varphi^g \equiv 1$ بصورت زیر است:

$$-\varepsilon \leq \Sigma_{j=1}^N \alpha_j - \Delta t \leq \varepsilon \qquad , \qquad \alpha_j \geq 0$$

بنابراین مجموعه $P(M_1 + M_2)^\varepsilon$ کراندار است و چون قیود (۱۱.۴) به شکل کوچکتر یا نامساوی هستند. بنابراین $P(M_1+M_2)^\varepsilon$ بسته است در نتیجه فشرده است و تابع خطی و در نتیجه پیوسته $\Sigma_{j=1}^N \alpha_j f_0(z_j)$ مینیموم مقدار خود را در این مجموعه اختیار می کند و

$$min\ \Sigma_{j=1}^N \alpha_j f_0(z_j) \leq \Sigma_{j=1}^{M_1+M_2+k} \alpha_r f_0(z_r) \leq \eta(M_1 + M_2) + \varepsilon$$

بنابراین یک طرف از نامساوی (۱۲.۴) ثابت می شود برای اثبات طرف چپ این نامساوی فرض کنید:

$$Q(M_1, M_2)^\varepsilon = \{\mu \in M^+(\Omega) : |\mu(\varphi_i^g) - \Delta\varphi_i| \leq \varepsilon \;\; , \;\; |\mu(\chi_h)| \leq \varepsilon \;\; , \;\; |\mu(H_l)| \leq \varepsilon\}$$

که درآن $i = 1, 2, ..., M_1$ ، $h = 1, 2, ..., M_2$ و $l = 1, 2, ..., k$ می باشد.

بنابراین مجموعه اندازه های از نوع $\mu = \Sigma_{j=1}^N \alpha_j^* \delta_{z_j}$ با ضرایب α_j در مجموعه $P(M_1, M_2)^\varepsilon$ زیر مجموعه ای از $Q(M_1, M_2)^\varepsilon$ می باشد بنابراین:

$$min\ \Sigma_{j=1}^N \alpha_j f_0(z_j) \geq min\ \mu(f_0) \tag{۱۳.۴}$$

و از طرفی $Q(M_1, M_2) = \cap_{\varepsilon>0} Q(M_1, M_2)^\varepsilon$ و اگر $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ آنگاه:

$$Q(M_1, M_2)^{\varepsilon_2} \subset Q(M_1, M_2)^{\varepsilon_1}$$

فرض کنید $\eta_0(M_1, M_2, \varepsilon)$ اینفیموم $\mu(f_0)$ روی مجموعه $Q(M_1, M_2)^\varepsilon$ باشد بنابراین

$$\eta_0(M_1, M_2, \varepsilon_2) \geq \eta_0(M_1, M_2, \varepsilon_1)$$

حال دنباله ای از مقادیر ε بصورت $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$ در نظر می گیریم در نتیجه:

$$\eta(M_1, M_2, 1) \leq \eta(M_1, M_2, \frac{1}{2}) \leq ... \leq \eta(M_1, M_2, \frac{1}{p}) \leq ... \leq \eta(M_1, M_2)$$

دنباله $\{\eta(M_1, M_2, \frac{1}{p}) : p \in \mathbb{N}\}$ صعودی و از بالا کراندار است، بنابراین به عددی مانند $\gamma(M_1, M_2)$ همگرا است، لذا

$$\gamma(M_1, M_2) = \lim_{p\to\infty} \eta(M_1, M_2, \frac{1}{p}) = \inf_{Q(M_1,M_2)} \mu(f_0) = \eta(M_1, M_2)$$

بنابراین کافی است $\rho(\varepsilon)$ را به شکل زیر انتخاب کنیم.

$$0 < \rho(\varepsilon) \leq \eta(M_1, M_2, \varepsilon) - \eta(M_1, M_2) \tag{۱۴.۴}$$

در نتیجه:
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \rho(\varepsilon) = 0$$

و از روابط (۱۳.۴) و (۱۴.۴) نتیجه می شود.

$$min\ \Sigma_{j=1}^{N} \alpha_j f_0(z_j) \geq min\ \mu(f_0) = \eta(M_1, M_2) + \rho(\varepsilon)$$

و برهان قضیه تمام است. ■

در پایان نتیجه می گیریم که مسأله انتقال یافته به فضای اندازه را می توان بصورت یک مسأله برنامه ریزی خطی و با دقت مورد نظر تقریب زد به شرط آنکه توابع φ_i^g ، χ_h و نیز مجموعه ω و نقاط $z_j \in \omega$ مناسب انتخاب شوند.

فصل ۵

تقریب مسأله انتقال یافته

۱.۵ تقریب

در این فصل ابتدا نشان می دهیم که چگونه می توان با استفاده از اندازه بهینهٔ تقریبی بدست آمده از قضیه ۱۴.۳.۴ زوج $q = [x(\cdot), u(\cdot)]$ را بدست آورد و سپس نشان می دهیم که از زوج بدست آمده q که در آن $x(\cdot)$ قطعه ای ثابت است یک زوج $p = [x(\cdot), u(\cdot)]$ بدست آورد که در آن $x(\cdot)$ پیوسته است.

فرض کنید $\tilde{\mu} \in M^{+}(\Omega)$ اندازه ای بشکل زیر باشد.

$$\tilde{\mu} = \Sigma \alpha_j \delta_{z_j} \tag{۱.۵}$$

که در آن $j = ۱, ۲, ..., N$ ، $\alpha_j \geq ۰$ و $\tilde{\mu}$ اندازه بهینه ای باشد که ضرایبش تابع هدف (۱۰.۴) را مینیموم سازد و در قیود (۱۱.۴) صدق کند و $z_j \in \omega$ و ω یک مجموع چگال Ω است و $(\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_N) \in$. $P(M_۱, M_۲)^{\varepsilon}$

در فصل چهارم توابعی که فقط به زمان بستگی دارند را در نظر نگرفته بودیم ، اکنون برای بهتر شدن تقریب ، توابعی از مجموعه $\{\varphi_j^g : j = ۱, ۲, ..., M_۱\}$ که فقط به زمان بستگی دارند را نیز در نظر می گیریم و در حال حاضر توابعی را انتخاب می کنیم که ترکیب خطی آنها در $C_۱(\Omega)$ چگال باشند.

قرار می دهیم.

$$\theta_r(t,x,u) = t^r \qquad , \qquad r = ۱, ۲, ... \tag{۲.۵}$$

فرض کنید f_r ، $r = ۱, ۲, ..., Q$ توابعی از متغیرهای t ، x ، u باشند البته توابع $f_۰$ و $|H_l|$ نیز جزء همین توابع به حساب می آیند.

اکنون اگر L تابع از نوع θ_r موجود باشند داریم:

$$M_۱ + M_۲ + k = L + Q$$

و اندازه بهینه $\tilde{\mu}$ در روابط زیر صدق می کند.

$$|\tilde{\mu}(f_r) - b_r| \leq \varepsilon \qquad , \qquad r = ۱, ۲, ..., Q \tag{۳.۵}$$

$$|\tilde{\mu}(\theta_r) - a_r| \leq \varepsilon \qquad , \qquad r = ۱, ۲, ..., L$$

که b_r و a_r انتگرال f_r و θ_r هستند که در (۱.۴) با نماد $\Delta\varphi$ و a_f نشان داده می شدند.

حال فرض کنید $\varepsilon_۱ > ۰$ داده شده باشد و Q ثابت باشد و L تغییر کند ، چون f بر ناحیه فشرده Ω ناحیه ای می توان اعداد

$$t_a = t_۰ < t_۱ < ... < t_i < ... < t_R = t_b$$

و مجموعه های برل $W_۱, W_۲, ..., W_s$ که افرازی از $A \times U$ هستند را چنان یافت که برای $i = ۱, ۲, ..., R$ ، $j = ۱, ۲, ..., s$ و $r = ۱, ۲, ..., Q$ داشته باشیم:

اگر $t, t' \in [t_{i-۱}, t_i)$ و $(x,u), (x',u') \in W_j$ آنگاه:

$$|f_r(t,x,u) - f_r(t',x',u')| < \varepsilon \tag{۴.۵}$$

البته لازم است به این نکته اشاره شود که چون توابع f_r ناحیه ای پیوسته فرض شده اند ممکن است رابطه (۴.۵) مثلاً برای $t, t' \in [t_{i-1}, t_i)$ بر قرار نباشد و در عوض برای $t, t' \in (t_{i-1}, t_i]$ یا برای $t, t' \in (t_{i-1}, t_i)$ برقرار باشد ولی چون در اینجا تقریب مسأله مورد نظر است بنابر تساوی زیر خواهیم دید فرض فوق از کلیت مسأله کم نخواهد کرد.

$$\int_{[t_{i-1}, t_i)} f_r(t, x(t), u(t))dt = \int_{(t_{i-1}, t_i)} f_r(t, x(t), u(t))dt$$
$$= \int_{(t_{i-1}, t_i]} f_r(t, x(t), u(t))dt$$

همچنین Q ثابت است و f_r ها از قبل مشخص هستند، لذا این افرازها که به L بستگی ندارند ثابت هستند.

حال عدد K_{ij} را تعریف می کنیم.

$$K_{ij} = \tilde{\mu}([t_{i-1}, t_i) \times W_j) \qquad i = 1, 2, ..., R \quad , \quad j = 1, 2, ..., s \tag{۵.۵}$$

و تعریف می کنیم:

$$F_i(t, x, u) = \begin{cases} 1 & t \in [t_{i-1}, t_i) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۶.۵}$$

در نتیجه:

$$\Sigma_{j=1}^{s} K_{ij} = \tilde{\mu}([t_{i-1}, t_i) \times W_j) = \tilde{\mu}(\cup_{j=1}^{s} [t_{i-1}, t_i) \times W_j)$$

$$= \tilde{\mu}([t_{i-1}, t_i) \times A \times U) = \tilde{\mu}(F_i)$$

با توجه به اینکه توابع F_i مستقل از x و u هستند این توابع را با $F_i(t)$ نشان می دهیم . فرض کنید P_i^L تابع زمان و شامل اولین L جمله تقریب چبیشف از F_i باشد در نتیجه:

$$P_i^L = \Sigma_{r=1}^{L} \beta_{ir} \theta_r \qquad\qquad i = 1, 2, ..., R$$

چون $\tilde{\mu}$ در (۳.۵) صدق می کند در نتیجه: $\tilde{\mu}(\theta_r) = a_r + \lambda_r(\varepsilon)$

که در آن $\lim_{\varepsilon \to ۰} \lambda_r(\varepsilon) = ۰$. و لذا:

$$\tilde{\mu}(P_i^L) = \tilde{\mu}(\Sigma_{r=۱}^L \beta_{ir}\theta_r) = \Sigma_{r=۱}^L \beta_{ir} a_r + \Sigma_{r=۱}^L \beta_{ir}\lambda_r(\varepsilon) \tag{۷.۵}$$

همچنین داریم:

$$\int_J P_i^L(t)dt = \int_J \Sigma_{r=۱}^L \beta_{ir}\theta_r dt = \Sigma_{r=۱}^L \beta_{ir} a_r \tag{۸.۵}$$

و $\sigma_i(\varepsilon)$ را به شکل زیر معرفی می کنیم:

$$\sigma_i(\varepsilon) = \Sigma_{r=۱}^L \beta_{ir}\lambda_r(\varepsilon) \tag{۹.۵}$$

در نتیجه از روابط (۷.۵) و (۸.۵) و (۹.۵) داریم.

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(P_i^L(t)) &= \int_J P_i^L(t)dt + \sigma_i(\varepsilon)\\ &= \int_J F_i(t)dt + \int_J (P_i^L(t) - F_i(t))dt + \sigma_i(\varepsilon)\\ &= (t_i - t_{i-۱}) + \int_J (P_i^L(t) - F_i(t))dt + \sigma_i(\varepsilon)\end{aligned}$$

و اگر Δ_i و δ_i^L را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\delta_i^L = \tilde{\mu}(F_i - P_i^L) + \int_J (P_i^L(t) - F_i(t))dt + \sigma_i(\varepsilon)$$

$$\Delta_i = t_i - t_{i-۱}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(F_i) &= \tilde{\mu}(F_i - P_i^L) + \tilde{\mu}(P_i^L)\\ &= \tilde{\mu}(F_i - P_i^L) + (t_i - t_{i-۱}) + \int_J (P_i^L(t) - F_i(t))dt + \sigma_i(\varepsilon)\\ &= \Delta_i + \delta_i^L\end{aligned}$$

اکنون ρ_i^L و H_{ij} را تعریف می کنیم

$$\rho_i^L = \frac{-\delta_i^L}{(\delta_i^L + \Delta_i)} \qquad , \qquad H_{ij} = K_{ij}(1 + \rho_i^L)$$

در این صورت داریم:

$$\Sigma_{j=1}^{s} H_{ij} = (1 + \rho_i^L)\Sigma_{j=1}^{s} K_{ij} = (1 + \rho_i^L)\tilde{\mu}(F_i) \tag{۱۰.۵}$$

$$= (1 + \rho_i^L)(\Delta_i + \delta_i^L)$$

$$= (1 - \frac{\delta_i^L}{\Delta_i + \delta_i^L})(\Delta_i + \delta_i^L) = \Delta_i$$

و اگر $\xi_i^L = \frac{1}{1 + \rho_i^L}$ نتیجه می گیریم که:

$$K_{ij} = \xi_i^L H_{ij} \tag{۱۱.۵}$$

اکنون آماده ایم تا زوج $q = [x(\cdot), u(\cdot)]$ را که از اندازه بهینه تقریبی $\tilde{\mu}$ بدست می آید معرفی کنیم.

$$\begin{cases} x(t) = x_j \\ u(t) = u_j \end{cases} \quad , \quad t \in B_{ij} \quad , \quad j = 1, 2, ..., s \quad , \quad i = 1, 2, ..., R$$

و در آن (x_j, u_j) نقطه ای از W_j است و B_{ij} بصورت زیر تعریف می شود.

$$B_{ij} = [t_{i-1} + \Sigma_{l<j} H_{il} \;\; , \;\; t_{i-1} + \Sigma_{l\leq j} H_{il})$$

اگر $H_{ij} = 0$ آنگاه طول بازهٔ B_{ij} صفر خواهد بود ، ثابت خواهیم کرد که حداکثر $M_1 + M_2 + L + k$ بازه از نوع B_{ij} داریم که طول بازه بزرگتر از صفر باشد.

اگر $H_{ij} > 0$ و μ_q اندازه متناظر با زوج $q = [x(\cdot), u(\cdot)]$ باشد برای $i = 1, 2, ..., R$ و $j = 1, 2, ..., s$ و $k = 0, 1, 2, ..., Q$ تعریف می کنیم.

$$l_{ijk} = \int_{B_{ij} \times A \times U} f_k(t, x, u) d\mu_q = \int_{B_{ij}} f_k(t, x_j, u_j) dt$$

و اعداد I_{ijk} و S_{ijk} را بصورت زیر معرفی می کنیم.

$$I_{ijk} = inf\{f_k(t,x,u) \quad : \quad (t,x,u) \in [t_{i-1}, t_i) \times W_j\}$$

$$S_{ijk} = sup\{f_k(t,x,u) \quad : \quad (t,x,u) \in [t_{i-1}, t_i) \times W_j\}$$

بنابراین اگر $T_{ijk} = \int_{[t_{i-1},t_i)\times W_j} f_k d\tilde{\mu}$ باشد در این صورت

$$K_{ij} I_{ijk} \leq T_{ijk} \leq K_{ij} S_{ijk} \tag{۱۲.۵}$$

همچنین با توجه به تعریف B_{ij} و l_{ijk} داریم:

$$H_{ij} I_{ijk} \leq l_{ijk} \leq H_{ij} S_{ijk} \tag{۱۳.۵}$$

از روابط (۱۱.۵) ، (۱۲.۵) و (۱۳.۵) به نتیجه زیر می رسیم.

$$H_{ij}(I_{ijk} - \xi_i^L S_{ijk}) \leq l_{ijk} - T_{ijk} \leq H_{ij}(S_{ijk} - \xi_i^L I_{ijk}) \tag{۱۴.۵}$$

که روابط زیر از نامساوی مثلثی نتیجه می شود.

$$|I_{ijk} - \xi_i^L S_{ijk}| \leq |I_{ijk} - S_{ijk}| + |1 - \xi_i^L||S_{ijk}| \tag{۱۵.۵}$$

$$|S_{ijk} - \xi_i^L I_{ijk}| \leq |S_{ijk} - I_{ijk}| + |1 - \xi_i^L||I_{ijk}|$$

ما می خواهیم ثابت کنیم که با افزایش L به قدر کافی ، می توان اندازه های $\tilde{\mu}$ و μ_q را به اندازه دلخواه به یکدیگر نزدیک کرد و برای این منظور ابتدا ثابت می کنیم که مقدار $|l_{ijk} - T_{ijk}|$ را می توان به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد.

حال اگر $L \longrightarrow \infty$ آنگاه P_i^L به F_i نزدیک می شود و در نتیجه تفاضل $F_i - P_i^L$ به صفر میل می کند و از آنجا δ_i^L و ρ_i^L به صفر میل می کنند و طبق تعریف ξ_i^L داریم:

$$\lim_{L\to\infty} \xi_i^L = 1 \implies \lim_{L\to\infty} |\xi_i^L - 1| = 0$$

با توجه به نتایج فوق و روابط ۱۴.۵ و ۱۵.۵ داریم:

$$|l_{ijk} - T_{ijk}| \leq H_{ij} max\{|I_{ijk} - \xi_i^L S_{ijk}|, |S_{ijk} - \xi_i^L I_{ijk}|\} \tag{۱۶.۵}$$

$$\leq H_{ij}[\varepsilon_1 + |1 - \xi_i^L| max(|S_{ijk}|, |I_{ijk}|)] \leq 2 H_{ij}\varepsilon_1$$

رابطه فوق برای L بقدر کافی بزرگ درست است و از روابط فوق و رابطه ۱۰.۵ نتیجه می شود:

$$|\int_\Omega f_k d\tilde{\mu} - \int_\Omega f_k d\mu_q| \leq \Sigma_{i=1}^R \Sigma_{j=1}^s |l_{ijk} - T_{ijk}|$$

$$\leq 2\varepsilon_1 \Sigma_{i=1}^R \Sigma_{j=1}^s H_{ij} \leq 2\varepsilon_1 \Delta t$$

یعنی با افزایش L می توانیم $\tilde{\mu}$ و μ_q را به یکدیگر نزدیک کنیم.

اکنون زوج متناظر μ_q یعنی $q = [x(\cdot), u(\cdot)]$ دارای توابع مسیر ناپیوسته است.

اگر بازهٔ $B_{ij} = [t_{i-1} + \Sigma_{l<j} H_{il} \quad , \quad t_{i-1} + \Sigma_{l\leq j} H_{il})$ را $[t_{i,j-1}, t_{ij})$ بنامیم آنگاه $x(t)$ در هر یک از این بازه ها تابعی ثابت است و می توان با روشی مشابه آنچه در قضیه $(IV.1)$ مرجع [۲] آمده است $x(t)$ را مجدداً در همسایگی های کوچک نقاط انتهایی بازه های $[t_{i,j-1}, t_{ij})$ چنان تعریف کرد که تابع مسیر پیوسته شود ولی در مثالها ما مسیر $x(t)$ را با توجه به معادله $\dot{x}_i = g_i(t, x(t), u(t))$ و جملات اول و دوم بسط سری تیلور تابع $x_i(t)$ محاسبه می کنیم.

بسط سری تیلور تابع x_i در همسایگی نقطه t بصورت زیر نوشته می شود:

$$x_i(t') = x_i(t) + (t - t')\dot{x}_i(t) + (t - t')^2 \frac{\ddot{x}_i(t)}{2} + \ldots$$

در مثالها خواهیم دید که در عمل به جای اینکه توابع θ_r را چند جمله ای انتخاب کنیم این توابع را به شکل زیر انتخاب می کنیم.

$$\theta_s = \begin{cases} ۱ & t \in J_s \\ ۰ & t \in J_s^c \end{cases} \quad , \quad s = ۱, ۲, ..., L$$

(۱۷.۵)

که در آن J_s به شکل مقابل است: $J_s = [t_a + \frac{(۱ - s)(t_b - t_a)}{L} \; , \; t_a + \frac{s(t_b - t_a)}{L})$

و همانطور که می دانیم وقتی N را به بی نهایت میل دهیم ترکیبات خطی توابع θ_s در $C(\Omega)$ چگال خواهد شد و در محاسبات این فصل اگر بجای L جمله اول تقریب چبیشف از ترکیبات خطی θ_s ها استفاده کنیم از لحاظ تئوری به نتایج مشابه می رسیم و در عمل نیز علت استفاده از توابع θ_s بجای تک جمله ای های θ_r این است که استفاده از ترکیبات توابع قطعه ای ثابت θ_s حتی برای Lهای نه چندان بزرگ تقریب بسیار خوبی برای توابع پیوسته و قطعه ای پیوسته است در حالی که استفاده از ترکیبات تک جمله ایها ی θ_r برای L هایی که در عمل قابل استفاده اند معمولاً تقریب خوبی حتی فقط برای توابع پیوسته نیز نمی باشد.

اکنون مسأله کنترل بهینه با تابع هدف (۱.۳) و قیود (۳.۳) - (۲.۳) در نظر می گیریم یک افراز برای $\Omega = J \times A \times U$ شامل N حجره انتخاب می کنیم و از حجره k نقطه ای به دلخواه انتخاب کرده و z_k می نامیم که

$$z_k = (t_k, x_k, u_k) \quad , \quad k = ۱, ۲, ...N$$

توابع φ_i ، $(i = ۱, ۲, ..., M_۱)$ را بصورت زیر انتخاب می کنیم.

$$\varphi_۱ = x_۱ \quad , \quad \varphi_۲ = x_۲ \quad , \quad \varphi_۳ = x_۳ \quad , \quad ... \quad , \quad \varphi_n = x_n \qquad (۱۸.۵)$$

$$\varphi_{n+۱} = x_۱^۲ \quad , \quad \varphi_{n+۲} = x_۲^۲ \quad , \quad \varphi_{n+۳} = x_۳^۲ \quad , \quad ... \quad , \quad \varphi_{۲n} = x_n^۲$$

$$...$$

حال M_1 تابع از نوع بالا را انتخاب می کنیم و φ_i^g به شکل زیر می نویسیم.

$$\varphi_i^g(t,x,u)=\frac{\partial\varphi_i(t,x)}{\partial x}.g(t,x,u) \qquad i=1,2,...,M_1 \tag{۱۹.۵}$$

و توابع χ_h را بصورت زیر انتخاب می کنیم.

$$\psi_j^r(t,x,u)=x_j.(\psi^r(t))'+g_j(t,x,u).\psi^r(t) \tag{۲۰.۵}$$

که در آن $(t,x,u)\in\Omega \quad , \quad j=1,2,...,n \quad , \quad r=1,2,...,2M_{21}$

و

$$\begin{cases} \psi^r=sin[2\pi r\frac{(t-t_a)}{\Delta t}] & r=1,2,...,M_{21} \\ \psi^r=1-cos[2\pi(r-M_{21})\frac{(t-t_a)}{\Delta t}] & r=M_{21}+1,...,2M_{21} \end{cases} \tag{۲۱.۵}$$

در فرمول بالا $\Delta t=t_b-t_a$ ، $h=1,2,...,M_2$ و $M_2=2nM_{21}$ می باشد.

و برای انتخاب توابع نوع سوم از θ_s که در ۱۷.۵ تعریف شده استفاده می کنیم.

و فرض می کنیم:

$$\int_J\theta_s dt=a_s \tag{۲۲.۵}$$

اکنون در مسأله برنامه ریزی خطی ۱۰.۴ با قیود ۱۱.۴ ، ε را به صفر میل می دهیم و قیود ۲۲.۵ را به آن اضافه می کنیم و خواهیم داشت.

$$min\ \ \Sigma_{j=1}^N\alpha_j f_0(z_j) \tag{۲۳.۵}$$

$$s.t: \qquad \Sigma_{j=1}^N\alpha_j\varphi_i^g(z_j)=\Delta\varphi_i \qquad i=1,2,...,M_1$$

$$\Sigma_{j=1}^N\alpha_j\chi_h(z_j)=0 \qquad h=1,2,...,M_2$$

$$\Sigma_{j=1}^N\alpha_j\theta_s(z_j)=a_s \qquad s=1,2,...,L$$

$$\Sigma_{j=1}^N\alpha_j|H_l(z_j)|=0 \qquad l=1,2,...,k$$

همچنین با توجه به اینکه $\Delta\varphi \equiv \varphi_i(t_b, x_b) - \varphi_i(t_a, x_a)$ در دسته اول قیود بکار رفته، اگر یکی از مقادیر $\varphi_i(t_a, x_a)$ یا $\varphi_i(t_b, x_b)$ و یا هر دو آنها مجهول باشند این مجهول را می توانیم به مجهولات دیگر α_i ، $i = ۱, ۲, ..., N$ اضافه نمایم بعنوان مثال اگر $x(t_b)$ نامشخص باشد خواهیم داشت:

$$min \;\; \Sigma_{j=۱}^{N} \alpha_j f_۰(z_j) \tag{۲۴.۵}$$

$$s.t: \qquad \Sigma_{j=۱}^{N} \alpha_j \varphi_i^g(z_j) - \beta_i = \varphi_i(t_a, x_a) \qquad i = ۱, ۲, ..., M_۱$$

$$\Sigma_{j=۱}^{N} \alpha_j \chi_h(z_j) = ۰ \qquad h = ۱, ۲, ..., M_۲$$

$$\Sigma_{j=۱}^{N} \alpha_j \theta_s(z_j) = a_s \qquad s = ۱, ۲, ..., L$$

$$\Sigma_{j=۱}^{N} \alpha_j |H_l(z_j)| = ۰ \qquad l = ۱, ۲, ..., k$$

که در آن α_j متغیر نامنفی است و β_i با توجه به تعریف φ_i نامقید یا نامنفی باشد. اگر β_i نامقید باشد بصورت $\beta_i = \beta_i^+ - \beta_i^-$ که $\beta_i^+, \beta_i^- \geq ۰$ تعریف می شود. اگر مسأله برنامه ریزی خطی فوق را که ماتریس ضرایب قیود آن دارای $M_۱ + M_۲ + L + k$ سطر و حداکثر $M_۱ + N$ ستون می باشد را حل کنیم، کنترل تقریبی u را که توابع قطعه ای ثابت هستند بصورت زیر بدست می آوریم.

چون $\varepsilon \longrightarrow ۰$ در نتیجه $\rho_i^L \longrightarrow ۰$ و از رابطه $H_{ij} = (۱ + \rho_i^L)K_{ij}$ نتیجه می شود:

$$H_{ij} = K_{ij}$$

حال تابع G_{ij} را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$G_{ij}(t) = \begin{cases} ۱ & t \in [t_{i-۱}, t_i) \times W_j \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۲۵.۵}$$

در این صورت

$$\tilde{\mu}(G_{ij}) = \int_{\Omega} G_{ij} d\tilde{\mu} = \int_{[t_{i-۱}, t_i)\times W_j} d\tilde{\mu} = \tilde{\mu}([t_{i-۱}, t_i) \times W_j) = K_{ij} \tag{۲۶.۵}$$

از N نقطه $z_۱, z_۲, ..., z_N$ فقط یکی از آنها در $[t_{i-۱}, t_i) \times W_j$ قرار دارد.

فرض می کنیم $z_k \in [t_{i-۱}, t_i) \times W_j$ در نتیجه:

$$G_{ij}(z_s) = \begin{cases} ۱ & s = k \\ ۰ & s \neq k \end{cases}$$

و

$$\tilde{\mu}(G_{ij}) = \Sigma_{s=۱}^{N} \alpha_s \delta_{z_s}(G_{ij}) = \Sigma_{s=۱}^{N} \alpha_s G_{ij}(z_s) = \alpha_k \tag{۲۷.۵}$$

از روابط ۲۶.۵ و ۲۷.۵ نتیجه می شود $\alpha_k = K_{ij}$ که در آن $z_k \in [t_{i-۱}, t_i) \times W_j$ می باشد.

قبلاً دیدیم کنترل u را می توان توسط توابع قطعه ای ثابت به شکل زیر تعریف کرد.

$$u(t) = u_j \qquad\qquad t \in B_{ij} \tag{۲۸.۵}$$

و چون $H_{ij} = K_{ij}$ داریم:

$$B_{ij} = [t_{i-۱} + \Sigma_{l<j} K_{il} \ \ , \ \ t_{i-۱} + \Sigma_{l\leq j} K_{il}) \tag{۲۹.۵}$$

در نتیجه:

$$B_{ij} = [t_{i-۱} + \Sigma_{l<j} K_{il} \ \ , \ \ t_{i-۱} + \Sigma_{l\leq j} K_{il} + \alpha_k) \tag{۳۰.۵}$$

چون حداکثر $M_۳$ تا از متغیرهای $\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_N$ مخالف صفر هستند $M_۳$ برابر تعداد سطر های ماتریس ضرایب مسأله برنامه ریزی خطی است، ([۴]) پس اگر α_i های مخالف صفر را بصورت $\{\theta_۱, \theta_۲, ..., \theta_{M_۳}\}$ نشان دهیم داریم:

$$\theta_۱ + \theta_۲ + ... + \theta_{M_۳} = t_b - t_a$$

از روابط ۲۸.۵ ، ۲۹.۵ و ۳۰.۵ نتیجه می گیریم که کنترل u را می توان بصورت زیر نوشت:

$$u(t) = u_j \qquad\qquad t \in [\Sigma_{l<j} \alpha_j \ \ , \ \ \Sigma_{l\leq j} \alpha_j) \tag{۳۱.۵}$$

اکنون با توجه به معادله $\dot{x}_i = g_i(t, x(t), u(t))$ وجملات اول و دوم بسط تیلور تابع $x_i(t)$ ، توابع $x_۱(t), ..., x_n(t)$ را تقریب می زنیم.

۲.۵ حل چند مثال عددی

این فصل را با ذکر چند مثال نمونه و حل آن با استفاده از نظریه اندازه به پایان می رسانیم.

مثال ۱.۲.۵.

$$min \;\; I = \int_{0}^{1} x^{2}(t)dt$$

$$s.t: \qquad \dot{x} = u(t)$$

$$x(0) = 0 \;\; , \;\; x(1) = 0/5$$

ناحیه Ω را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$\Omega = J \times A \times U = [0, 1] \times [0, 1] \times [-1, 1]$$

معرفی Ω بصورت فوق نتیجه حل مسأله با نواحی متفاوت و انتخاب بهترین جواب است. اکنون افراز ناحیه Ω را بصورت زیر انجام می دهیم. بازهٔ J را به ۲۰ قسمت و نیز بازه های A و U را نیز به ۲۰ قسمت مساوی تقسیم می کنیم و در نتیجه: $N = 20 \times 20 \times 20 = 8000$

از تقسیمات فوق یک نقطه را به دلخواه انتخاب می کنیم.نقاط $z_k = (t_k, x_k, u_k)$ ، $k = 1, 2, ..., 8000$ را بصورت زیر انتخاب می کنیم:برای مولفه های t_k در نظر می گیریم:

$$t_1 = t_2 = ... = t_{400} = 0/05$$

$$t_{401} = t_{402} = ... = t_{800} = 0/1$$

......

$$t_{7601} = t_{7602} = ... = t_{8000} = 1$$

و برای مولفه های x_k نقاط زیر را در نظر می گیریم:

$$x_۱ = x_۲ = ... = x_{۲۰} = x_{۴۰۱} = ... = x_{۴۲۰} = ... = x_{۷۶۰۱} = ... = x_{۷۶۲۰} = ۰/۰۵$$

$$x_{۲۱} = x_{۲۲} = ... = x_{۴۰} = x_{۴۲۱} = ... = x_{۴۴۰} = ... = x_{۷۶۲۱} = ... = x_{۷۶۴۰} = ۰/۱$$

......

$$x_{۳۸۱} = x_{۳۸۲} = ... = x_{۴۰۰} = x_{۷۸۱} = ... = x_{۸۰۰} = ... = x_{۷۹۸۱} = ... = x_{۸۰۰۰} = ۱$$

و نیز برای مولفه های u_k نقاط زیر را در نظر می گیریم:

$$u_۱ = u_{۲۱} = u_{۴۱} = u_{۶۱} = ... = u_{۷۹۸۱} = -۰/۹$$

$$u_۲ = u_{۲۲} = u_{۴۲} = u_{۶۲} = ... = u_{۷۹۸۲} = -۰/۸$$

......

$$u_{۲۰} = u_{۴۰} = u_{۶۰} = u_{۸۰} = ... = u_{۸۰۰۰} = ۱$$

همچنین $M_۱$ و $M_۲$ را بترتیب ۲ و ۴ انتخاب می کنیم و $L = ۱۰$ در نظر می گیریم. قرار می دهیم:

$$\varphi_۱(t,x) = x \qquad , \qquad \varphi_۲(t,x) = x^۲$$

بنابراین

$$\varphi_۱^g = \varphi_{۱x}(t,x)\ g(t,x,u) + \varphi_{۱t}(t,x) = u$$

$$\varphi_۲^g = \varphi_{۲x}(t,x)\ g(t,x,u) + \varphi_{۲t}(t,x) = ۲xu$$

در روابط بالا $g(t,x,u) = u$ و نیز با توجه به $\Delta\varphi_i = \varphi_i(t_b,x_b) - \varphi_i(t_a,x_a)$ مقادیر $\Delta\varphi_۱$ و $\Delta\varphi_۲$ برابر با ۱ می شوند.

همچنین برای محاسبه χ_h چون $\Delta t = ۱$ طبق رابطه ۲۱.۵ داریم:

$$\psi_r(t) = sin(۲\pi rt) \qquad r = ۱, ۲$$

$$\psi_{r+۲}(t) = ۱ - cos(۲\pi rt) \qquad r = ۱, ۲$$

از رابطه ۲۰.۵ و $\psi_i(t)$ تعریف شده در بالا خواهییم داشت:

$$\chi_h(t) = ۲\pi hxcos(۲\pi ht) + usin(۲\pi ht) \qquad h = ۱, ۲$$

$$\chi_{h+۲}(t) = ۲\pi hxsin(۲\pi ht) + u(۱ - cos(۲\pi ht)) \qquad h = ۱, ۲$$

و طبق رابطه ۱۷.۵ توابع θ_s را بشکل زیر معرفی می کنیم:

$$\theta_s(t) = \begin{cases} ۱ & t \in [\frac{s-۱}{۱۰}, \frac{s}{۱۰}) \qquad s = ۱, ۲, ..., ۱۰ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال مسأله برنامه ریزی خطی زیر را تشکیل می دهیم:

$$min \;\; \Sigma_{j=۱}^{۸۰۰۰} x_j^۲ \alpha_j$$

$$s.t: \qquad \Sigma_{j=۱}^{۸۰۰۰} u_j \alpha_j = ۱$$

$$\Sigma_{j=۱}^{۸۰۰۰} ۲x_j u_j \alpha_j = ۱$$

$$\Sigma_{j=۱}^{۸۰۰۰} [۲\pi hx_j cos(۲\pi ht_j) + u_j sin(۲\pi ht_j)]\alpha_j = ۰ \qquad h = ۱, ۲$$

$$\Sigma_{j=۱}^{۸۰۰۰} [۲\pi hx_j sin(۲\pi ht_j) + u_j(۱ - cos(۲\pi ht_j))]\alpha_j = ۰ \qquad h = ۱, ۲$$

$$\Sigma_{j=۱}^{۸۰۰} \alpha_j = ۰/۱$$

.....

$$\Sigma_{j=۷۶۰۱}^{۸۰۰۰} \alpha_j = ۰/۱$$

$$\alpha_j \geq ۰ \qquad , \qquad j = ۱, ۲, ..., ۸۰۰۰$$

مسأله برنامه ریزی خطی فوق دارای ۸۰۰۰ متغیر و ۱۶ قید می باشد. توسط برنامه ریزی کامپیوتری ، براساس روش سیمپلکس تجدید نظر شده [1] و در محیط نرم افزاری $Matllab$ جواب قابل قبول بهینه ای بدست می آید که متغیرهای مخالف صفر آن در جواب بهینه بصورت زیر است:

$\alpha(۶۰) = ۰/۱$ $\qquad$ $\alpha(۳۲۸۰) = ۰/۰۴۲۳$

$\alpha(۸۴۰) = ۰/۰۲۲۱$ $\qquad$ $\alpha(۴۴۰۱) = ۰/۱$

$\alpha(۸۶۰) = ۰/۰۷۱۵$ $\qquad$ $\alpha(۵۲۰۱) = ۰/۰۰۰۳$

$\alpha(۱۲۰۱) = ۰/۰۰۶۵$ $\qquad$ $\alpha(۵۲۸۰) = ۰/۰۹۹۷$

$\alpha(۲۰۰۱) = ۰/۱$ $\qquad$ $\alpha(۶۰۸۰) = ۰/۰۹۳۷$

$\alpha(۲۸۸۰) = ۰/۱$ $\qquad$ $\alpha(۶۱۰۰) = ۰/۰۰۶۳$

$\alpha(۳۲۰۸) = ۰/۰۵۶۴$ $\qquad$ $\alpha(۶۸۸۰) = ۰/۱$

$\alpha(۳۲۶۰) = ۰/۰۰۱۳$ $\qquad$ $\alpha(۷۲۸۰) = ۰/۱$

در جواب بهینه فوق تعداد متغیرهای غیر صفر برابر تعداد قیود مسأله برنامه ریزی خطی است و مجموعه آنها برابر $\Delta t = ۱$ می باشد همچنین مقدار تابع هدف برابر ۰/۰۲۶۶ می باشد.

اکنون کنترل تقریبی u را با استفاده از جواب فوق بدست می آوریم.

طبق رابطه ۳۱.۵داریم:

$$u(t) = u_j \qquad\qquad t \in [\Sigma_{l<j}\alpha_j \ \ , \ \ \Sigma_{l\leq j}\alpha_j)$$

کنترل $u(t)$ را بعنوان نمونه در چند زیر بازه مشخص می کنیم و در سایر بازه ها ، کنترل به طریق مشابه محاسبه می شود.

[1] Revised Simplex

چون $\alpha_{۶۰} = ۰/۱$ اولین مولفه غیر صفر از از جواب بهینه می باشد طبق رابطه فوق داریم:

$$u(t) = u_{۶۰} = ۱ \qquad t \in [\Sigma_{l<۶۰}\alpha_j \;,\; \Sigma_{l\leq ۶۰}\alpha_j) = [۰ \,,\, ۰/۱)$$

و نیز $\alpha_{۸۴۰} = ۰/۰۲۲۱$ دومین مولفه غیر صفر از از جواب بهینه می باشد، لذا داریم:

$$u(t) = u_{۸۴۰} = ۱ \qquad t \in [\Sigma_{l<۸۴۰}\alpha_j \;,\; \Sigma_{l\leq ۸۴۰}\alpha_j) = [۰/۱ \,,\, ۰/۱۲۲۱)$$

و برای $\alpha(۸۶۰) = ۰/۰۷۱۵$ مقدار کنترل u عبارت است از :

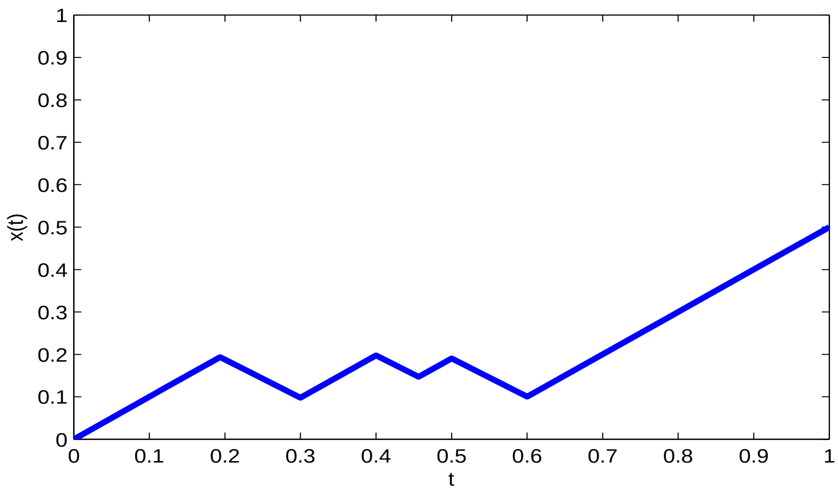
$$u(t) = u_{۸۶۰} = ۱ \qquad t \in [\Sigma_{l<۸۶۰}\alpha_j \;,\; \Sigma_{l\leq ۸۶۰}\alpha_j) = [۰/۱۲۲۱ \,,\, ۰/۱۹۳۶)$$

مولفه غیر صفر بعدی از جواب بهینه $\alpha(۱۲۰۱) = ۰/۰۰۶۵$ است که مقدار کنترل u مربوطه عبارت است از:

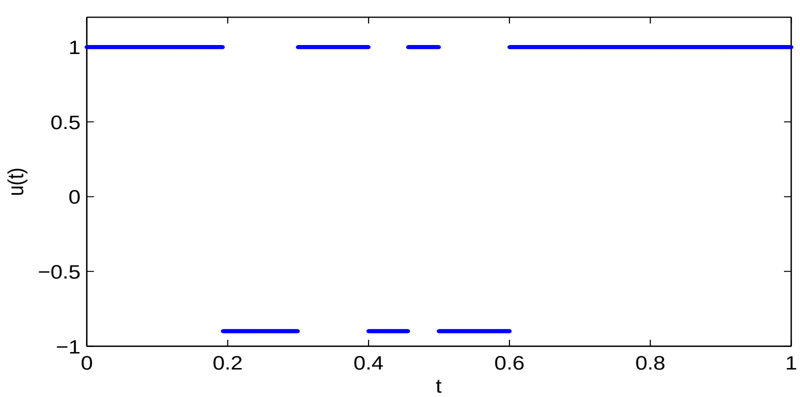
$$u(t) = u_{۱۲۰۱} = -۰/۹ \qquad t \in [\Sigma_{l<۱۲۰۱}\alpha_j \;,\; \Sigma_{l\leq ۱۲۰۱}\alpha_j) = [۰/۱۹۳۶ \,,\, ۰/۲۰۰۱)$$

همین روند را ادامه می دهیم تا تابع کنترل $u(t)$ بر بازه $[۰, ۱]$ مشخص شود. نمودار کنترل تقریبی $u(t)$ در شکل ۱.۵ نمایش داده شده است.

همچنین با توجه به اینکه $x(۰) = ۰$ و $\dot{x}(t) = u(t)$ می توانیم نمودار تقریبی مسیر را رسم کنیم. این نمودار در شکل ۲.۵ توسط خطوط پیوسته مشخص شده است.



شکل ۱.۵: کنترل $u(t)$



شکل ۲.۵: تابع مسیر $x(t)$

مثال ۲.۲.۵.

$$min \;\; I = \int_{۰}^{۱} u^{۲}(t)dt$$

$$s.t: \qquad \dot{x}^{۱} = x^{۲}$$

$$\dot{x}^{۲} = u$$

$$x^{۱}(۰) = ۰ \;\; , \;\; x^{۱}(۱) = ۲ \;\; , \;\; x^{۲}(۰) = -۵ \;\; , \;\; x^{۲}(۱) = ۲$$

$$u(۰) = -۶ \;\; , \;\; u(۱) = ۶$$

ناحیه Ω را بصورت زیر معرفی می کنیم:

$$\Omega = J \times A_{۱} \times A_{۲} \times U = [۰, ۱] \times [۰, ۲] \times [-۵, ۲] \times [-۶, ۶]$$

معرفی Ω بصورت فوق نتیجه حل مسأله با نواحی متفاوت و انتخاب بهترین جواب است. اکنون افراز ناحیه Ω را بصورت زیر انجام می دهیم. بازهٔ $A_{۱}$ را به ۶ قسمت و نیز بازه های $A_{۲}$ و U را نیز به ۵ قسمت و بازه J را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می کنیم و در نتیجه: $N = ۱۵۰۰$

از تقسیمات فوق یک نقطه را به دلخواه انتخاب می کنیم. نقاط $z_k = (t_k, x_k, u_k)$ ، $k = ۱, ۲, ..., ۱۵۰۰$ را بصورت زیر انتخاب می کنیم:

برای مولفه های t_k در نظر می گیریم:

$$t_{۱} = t_{۲} = ... = t_{۱۵۰} = ۰/۱$$

$$t_{۱۵۱} = t_{۱۵۲} = ... = t_{۳۰۰} = ۰/۲$$

$$......$$

$$t_{۱۳۵۱} = t_{۱۳۵۲} = ... = t_{۱۵۰۰} = ۱$$

و برای مولفه های x_k^1 نقاط زیر را در نظر می گیریم:

$$x_1^1 = x_2^1 = ... = x_{25}^1 = x_{151}^1 = ... = x_{175}^1 = ... = x_{1351}^1 = ... = x_{1375}^1 = 0/333$$

$$x_{26}^1 = x_{27}^1 = ... = x_{50}^1 = x_{176}^1 = ... = x_{200}^1 = ... = x_{1376}^1 = ... = x_{1400}^1 = 0/666$$

......

$$x_{126}^1 = x_{127}^1 = ... = x_{150}^1 = x_{276}^1 = ... = x_{300}^1 = ... = x_{1476}^1 = ... = x_{1500}^1 = 2$$

و برای مولفه های x_k^2 نقاط زیر را در نظر می گیریم:

$$x_1^2 = x_2^2 = ... = x_5^2 = x_{26}^2 = ... = x_{30}^2 = ... = x_{1376}^2 = ... = x_{1380}^2 = -3/6$$

$$x_6^2 = x_7^2 = ... = x_{10}^2 = x_{31}^2 = ... = x_{35}^2 = ... = x_{1381}^2 = ... = x_{1385}^2 = -2/2$$

......

$$x_{21}^2 = x_{22}^2 = ... = x_{25}^2 = x_{46}^2 = ... = x_{50}^2 = ... = x_{1496}^2 = ... = x_{1500}^2 = 2$$

و برای مولفه های u_k نقاط زیر را در نظر می گیریم:

$$u_1 = u_7 = u_{13} = u_{19} = ... = u_{1495} = -3/6$$

$$u_2 = u_8 = u_{14} = u_{20} = ... = u_{1496} = -1/2$$

......

$$u_6 = u_{12} = u_{18} = u_{24} = ... = u_{1500} = 6$$

همچنین M_1 و M_2 را بترتیب ۲و ۴ انتخاب می کنیم و $L = 10$ در نظر می گیریم. قرار می دهیم:

$$\varphi_1(t,x) = x^1 \qquad , \qquad \varphi_2(t,x) = x^2$$

بنابراین

$$\varphi_1^g = \varphi_{1x}(t,x)\ g(t,x,u) + \varphi_{1t}(t,x) = x^2$$

$$\varphi_2^g = \varphi_{2x}(t,x)\ g(t,x,u) + \varphi_{2t}(t,x) = u$$

در روابط بالا $g(t,x,u) = (x^2, u)$ و نیز با توجه به $\Delta\varphi_i = \varphi_i(t_b, x_b) - \varphi_i(t_a, x_a)$ مقادیر $\Delta\varphi_1$ و $\Delta\varphi_2$ به ترتیب برابر با ۲ و ۷ می شوند.

همچنین برای محاسبه χ_h چون $\Delta t = 1$ طبق رابطه ۲۱.۵ داریم:

$$\psi_r(t) = sin(2\pi rt) \qquad r = 1, 2$$

$$\psi_{r+2}(t) = 1 - cos(2\pi rt) \qquad r = 1, 2$$

از رابطه ۲۰.۵ و $\psi_i(t)$ تعریف شده در بالا خواهییم داشت:

$$\chi_h(t) = 2\pi hx^1 cos(2\pi ht) + x^2 sin(2\pi ht) \qquad h = 1, 2$$

$$\chi_{h+2}(t) = 2\pi hx^2 sin(2\pi ht) + u(1 - cos(2\pi ht)) \qquad h = 1, 2$$

و طبق رابطه ۱۷.۵ توابع θ_s را بشکل زیر معرفی می کنیم:

$$\theta_s(t) = \begin{cases} 1 & t \in [\frac{s-1}{10}, \frac{s}{10}) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad s = 1, 2, ..., 10$$

حال مسأله برنامه ریزی خطی زیر را تشکیل می دهیم:

لازم بذکر است که مسأله برنامه ریزی خطی زیر دارای ۱۵۰۰ متغیر و ۱۶ قید می باشدکه از این ۱۵۰۰ متغیر فقط تعداد ۱۶ تای آنها مخالف صفر می باشند.

$$min \;\; \Sigma_{j=۱}^{۱۵۰۰} u_j^۲ \alpha_j$$

$$s.t: \quad \Sigma_{j=۱}^{۱۵۰۰} x_j^۲ \alpha_j = ۲$$

$$\Sigma_{j=۱}^{۱۵۰۰} u_j \alpha_j = ۷$$

$$\Sigma_{j=۱}^{۱۵۰۰} [۲\pi h x_j^۱ cos(۲\pi h t_j) + x_j^۲ sin(۲\pi h t_j)]\alpha_j = ۰ \qquad h = ۱, ۲$$

$$\Sigma_{j=۱}^{۱۵۰۰} [۲\pi h x_j^۲ sin(۲\pi h t_j) + u_j(۱ - cos(۲\pi h t_j))]\alpha_j = ۰ \qquad h = ۱, ۲$$

$$\Sigma_{j=۱}^{۱۵۰} \alpha_j = ۰/۱$$

$$\Sigma_{j=۱۵۱}^{۳۰۰} \alpha_j = ۰/۱$$

.....

$$\Sigma_{j=۱۳۵۱}^{۱۵۰۰} \alpha_j = ۰/۱$$

$$\alpha_j \geq ۰ \quad , \quad j = ۱, ۲, ..., ۱۵۰۰$$

با استفاده از محیط نرم افزاری $Matllab$ جواب قابل قبول بهینه ای بدست می آید که متغیرهای مخالف صفر آن در جواب بهینه بصورت زیر است:

$\alpha(۲) = ۰/۰۱۸۲$	$\alpha(۸۲۱) = ۰/۱$
$\alpha(۱۳۱) = ۰/۰۸۱۸$	$\alpha(۱۰۲۶) = ۰/۱$
$\alpha(۲۸۱) = ۰/۰۱۳$	$\alpha(۱۰۵۱) = ۰/۰۰۲۷$
$\alpha(۲۹۷) = ۰/۰۸۷$	$\alpha(۱۰۷۲) = ۰/۰۰۵۸$
$\alpha(۴۴۶) = ۰/۱$	$\alpha(۱۱۷۶) = ۰/۰۹۱۵$
$\alpha(۵۷۶) = ۰/۰۶۰۹$	$\alpha(۱۲۲۱) = ۰/۱$

$$\alpha(\text{۵۹۷}) = \text{۰/۰۳۹۱} \qquad \alpha(\text{۱۳۵۲}) = \text{۰/۰۸۸۴}$$

$$\alpha(\text{۶۰۱}) = \text{۰/۰۱} \qquad \alpha(\text{۱۳۶۷}) = \text{۰/۰۱۱۶}$$

کنترل $u(t)$ را بعنوان نمونه در چند زیر بازه مشخص می کنیم و در سایر بازه ها ، کنترل به طریق مشابه محاسبه می شود.

چون $\alpha_{\text{۲}} = \text{۰/۰۱۸۲}$ اولین مولفه غیر صفر از از جواب بهینه می باشد طبق رابطه فوق داریم:

$$u(t) = u_{\text{۲}} = -\text{۱/۲} \qquad t \in [\Sigma_{l<\text{۲}}\alpha_j \ , \ \Sigma_{l\leq\text{۲}}\alpha_j) = [\text{۰} \ , \ \text{۰/۰۱۸۲})$$

و نیز $\alpha_{\text{۱۳۱}} = \text{۰/۰۸۱۸}$ دومین مولفه غیر صفر از از جواب بهینه می باشد پس داریم:

$$u(t) = u_{\text{۱۳۱}} = -\text{۳/۶} \qquad t \in [\Sigma_{l<\text{۱۳۱}}\alpha_j \ , \ \Sigma_{l\leq\text{۱۳۱}}\alpha_j) = [\text{۰/۰۱۸۲} \ , \ \text{۰/۱})$$

و برای $\alpha(\text{۲۸۱}) = \text{۰/۰۱۳}$ مقدار کنترل u عبارت است از :

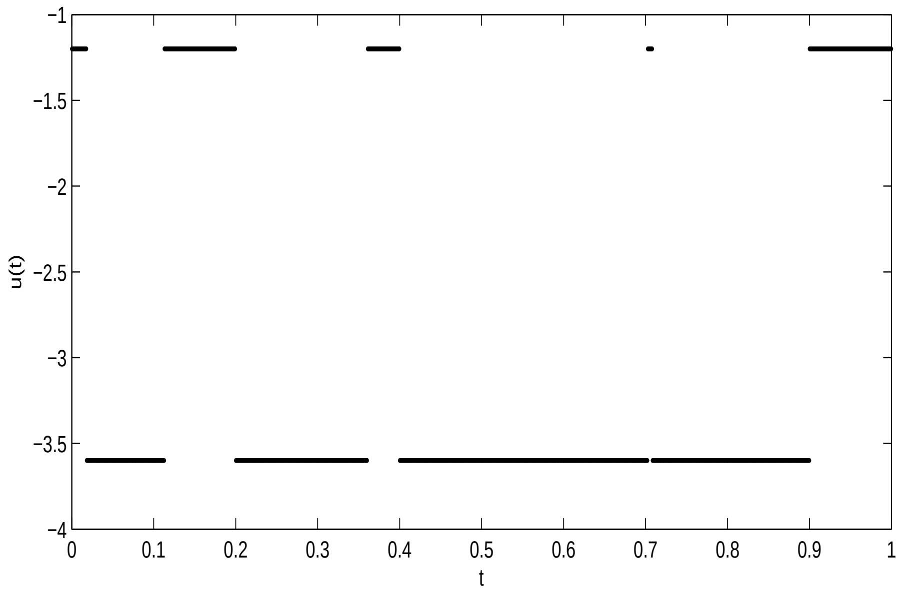
$$u(t) = u_{\text{۲۸۱}} = -\text{۳/۶} \qquad t \in [\Sigma_{l<\text{۲۸۱}}\alpha_j \ , \ \Sigma_{l\leq\text{۲۸۱}}\alpha_j) = [\text{۰/۱} \ , \ \text{۰/۱۱۳})$$

مولفه غیر صفر بعدی از جواب بهینه $\alpha(\text{۲۹۷}) = \text{۰/۰۸۷}$ است که مقدار کنترل u مربوطه عبارت است از:

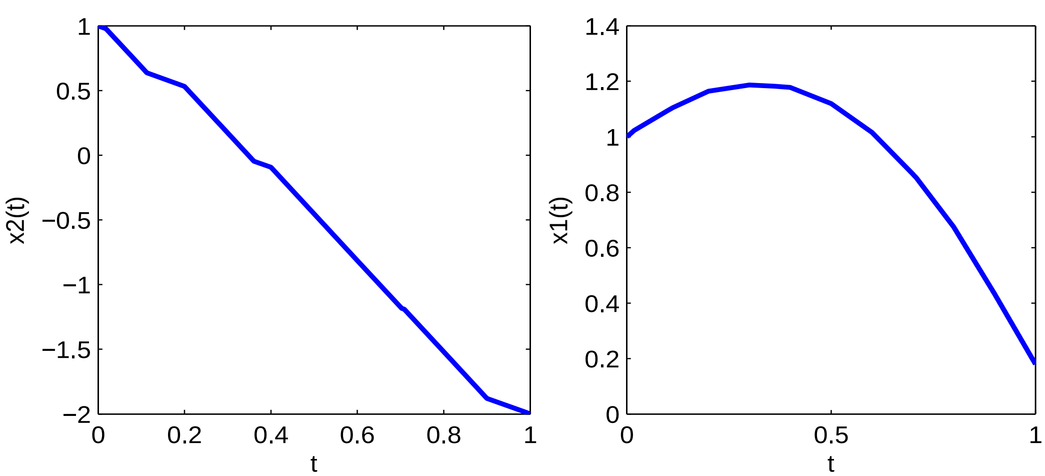
$$u(t) = u_{\text{۲۹۷}} = -\text{۱/۲} \qquad t \in [\Sigma_{l<\text{۲۹۷}}\alpha_j \ , \ \Sigma_{l\leq\text{۲۹۷}}\alpha_j) = [\text{۰/۱۱۳} \ , \ \text{۰/۲})$$

همین روند را ادامه می دهیم تا تابع کنترل $u(t)$ بر بازه $[\text{۰}, \text{۱}]$ مشخص شود. نمودار کنترل تقریبی $u(t)$ در شکل۳.۵ آورده شده است.

همچنین نمودار تقریبی توابع مسیر $x^{\text{۲}}(t), x^{\text{۱}}(t)$ در شکل ۴.۵ آورده شده است.



شکل ۳.۵: کنترل $u(t)$



شکل ۴.۵: تابع مسیر $x^{۱}(t)$ و $x^{۲}(t)$

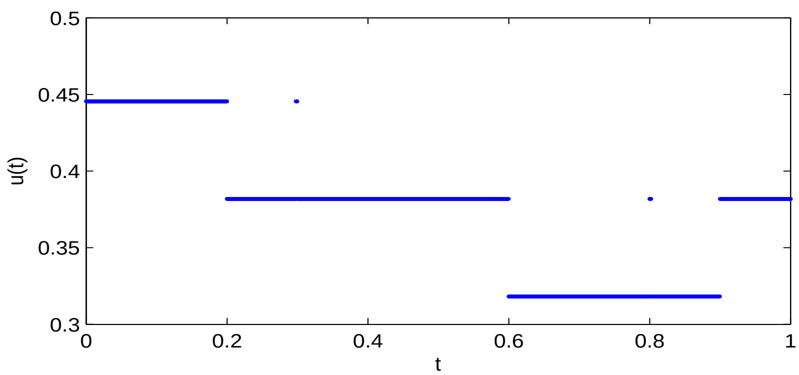
مثال ۵.۲.۳.

$$\begin{aligned} &min \;\; I = \int_{0}^{1} u^{2}(t)dt \\ &s.t: \qquad \dot{x} = \frac{1}{2}x(t) + u(t) \\ &\qquad\qquad x(0) = 0 \;\;,\;\; x(1) = 0/5 \end{aligned}$$

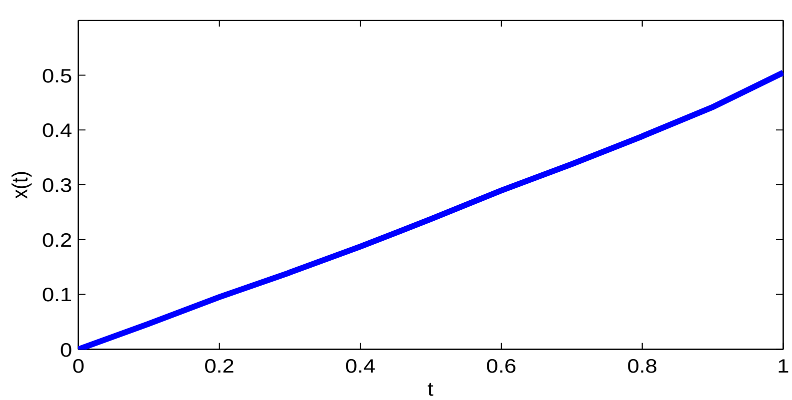
ناحیه Ω را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$\Omega = J \times A \times U = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 0/7]$$

فرض کنید $I = 10$ ، $J = 10$ و $M = 10$، بنابراین $N = I \times J \times M = 1000$ که تعداد متغیرهای مسأله برنامه ریزی خطی است. همچنین فرض کنید $M_1 = 2$ ، $M_2 = 4$ و $L = 10$. حل مسأله فوق توسط نظریه اندازه مقدار تابع هدف برابر ۰/۱۴۳۱ بدست می آید. تابع کنترل $u(t)$ و تابع مسیر $x(t)$ در شکلهای ۵.۵ و ۶.۵ نمایش داده می شوند.



شکل ۵.۵: تابع کنترل $u(t)$



شکل ۶.۵: تابع مسیر $x(t)$

مثال ۴.۲.۵.

$$min \;\; I = \int_{0}^{1} [x_1^2(t) - x_2^2(t)]dt$$

$$s.t: \qquad \dot{x}_1 = \dot{x}_2(t)$$

$$\dot{x}_2 = 10x_1^3(t) + u(t)$$

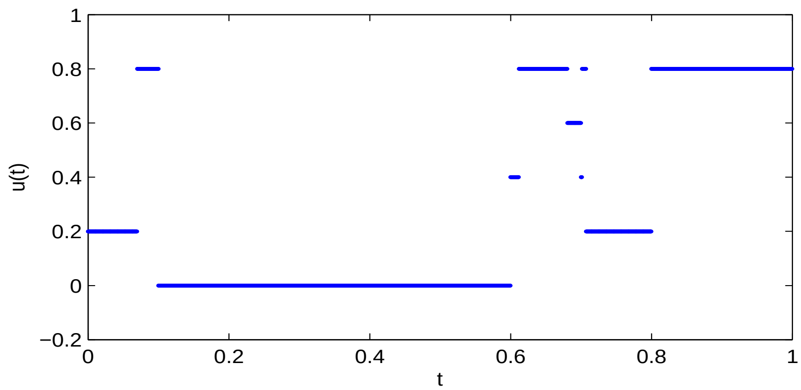
$$x_1(0) = 0 \;\;,\;\; x_1(1) = 0/1$$

$$x_2(0) = 0 \;\;,\;\; x_2(1) = 0/3$$

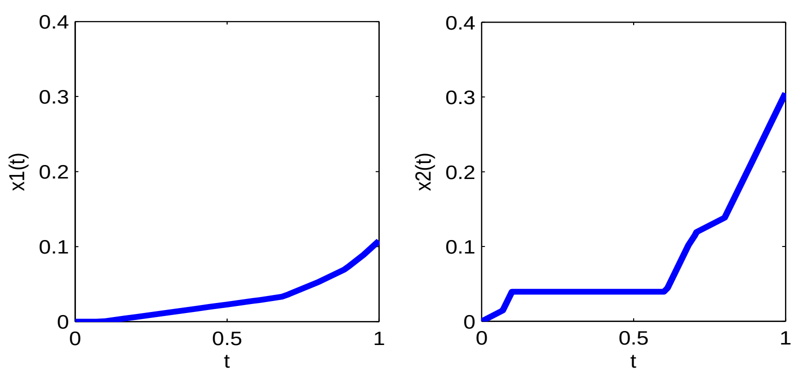
ناحیه Ω را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$\Omega = J \times A \times U = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$$

فرض کنید $I_1 = 5$، $I_2 = 5$ و $J = 5$ و $M = 10$ ، بنابراین $N = 1250$ که تعداد متغیرهای مسأله برنامه ریزی خطی است. همچنین $M_1 = 2$ ، $M_2 = 8$ و $L = 10$ انتخاب می شوند. پس از حل مسأله فوق توسط نظریه اندازه مقدار تابع هدف برابر ۰/۰۲۳۴ بدست می آید. نمودار تابع کنترل $u(t)$ و توابع مسیر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در شکلهای ۷.۵ و ۸.۵ نمایش داده می شوند.



شکل ۷.۵: تابع کنترل $u(t)$



شکل ۸.۵: توابع مسیر $x_۱(t)$ و $x_۲(t)$

مثال ۵.۲.۵. فرض کنید تابع $f_۰$ با ضابطه زیر داده شده باشد.

$$f_۰(t,x,u)=\begin{cases} |x-۲t|+|u_۱-۱| & t\in[۰,۰/۲۵), \\ |x-۰/۲۵|+|u_۱+۱| & t\in[۰/۲۵,۰/۷۵), \\ |x-۲t+۱|+|u_۱-۱| & t\in[۰/۷۵,۱), \end{cases}$$

مسأله زیر را در نظر بگیرید.

$$min\ \ I=\int_۰^۱ f_۰(t,x,u)dt$$

$$s.t: \qquad \dot{x}_۱=u_۱(t)+u_۱^۲(t)+u_۲(t)$$

$$x(t)+u_۱^۲(t)\leq ۰$$

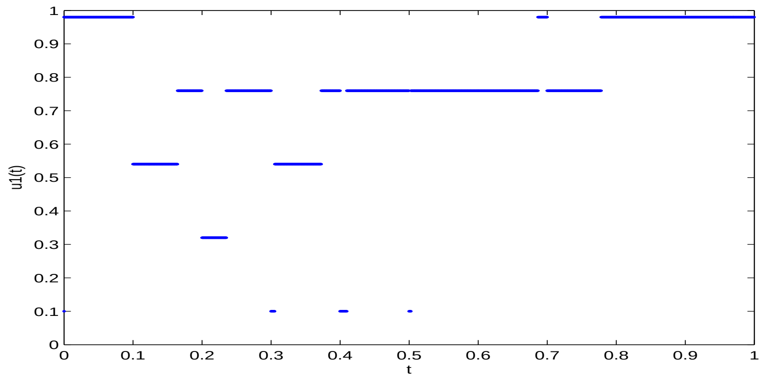
$$x(۰)=۰\ \ ,\ \ x(۱)=۱$$

$$|u_۱|\leq ۱\ \ ,\ \ u_۲(t)\geq ۰$$

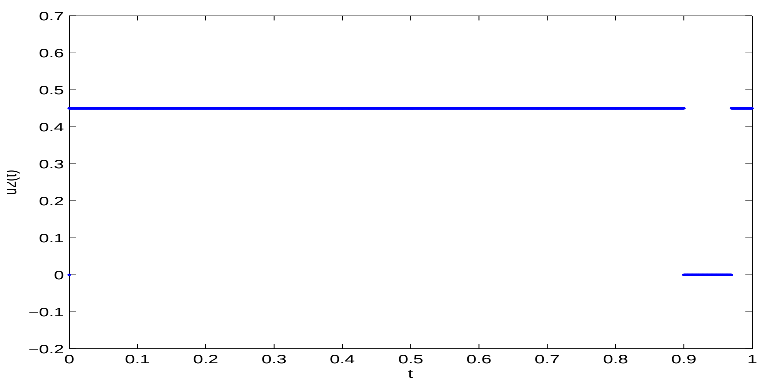
ناحیه Ω را بصورت زیر معرفی می کنیم:

$$\Omega=J\times A\times U=[۰,۱]\times[۰,۱]\times[-۱,۱]\times[۰,۰/۵]$$

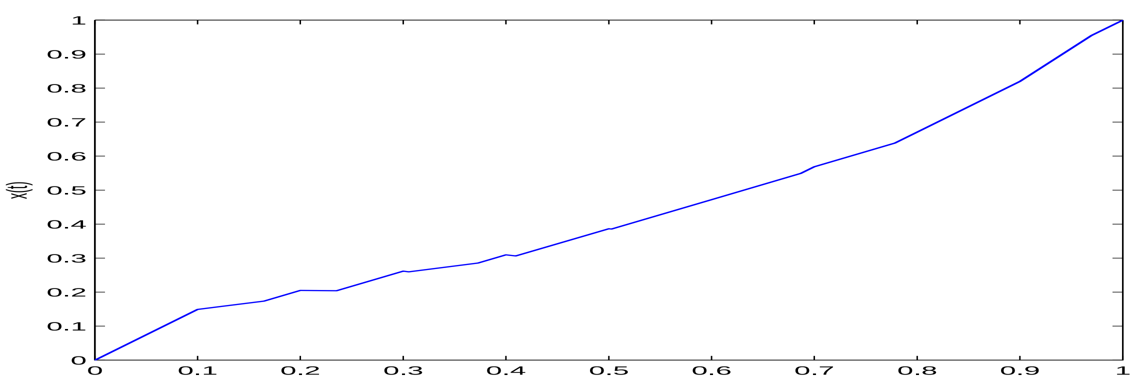
و هر یک از بازه ها فوق را به ۱۰ قسمت تقسیم می کنیم، بنابراین $N=۱۰۰۰۰$ می شود که تعداد متغیرهای مسأله برنامه ریزی خطی است. همچنین $M_۱=۲$ ، $M_۲=۸$ و $L=۱۰$ انتخاب می شوند.پس از حل مسأله فوق توسط نظریه اندازه مقدار تابع هدف برابر ۰/۳۵۴۵ بدست می آید. توابع کنترل $u_۱(t)$ ، $u_۲(t)$ و توابع مسیر $x(t)$ در شکلهای ۹.۵ ، ۱۰.۵ و ۱۱.۵ نمایش داده می شوند.



شکل ۹.۵: تابع کنترل $u_1(t)$



شکل ۱۰.۵: تابع کنترل $u_2(t)$



شکل ۱۱.۵: تابع مسیر $x(t)$

فصل ۶

مسائل کنترل بهینه زمانی پرتاب موشک با هدف ثابت

۱.۶ معرفی

مسائل کنترل بهینه شامل رده وسیعی از مسائل بهینه سازی می باشند. مسائل کنترل بهینه در زمینه های مختلف علوم مهندسی هوافضا، رباتیک، مهندسی شیمی، مهندسی مکانیک و مهندسی عمران مورد استفاده می باشد. همچنین در زمینه اقتصاد و داروسازی نیز موفق بوده است. بسیاری از مسائل کنترل بهینه تحت قیودی از متغیرهای وضعیت و کنترل می باشند. لذا حل اینگونه از مسائل کنترل بهینه سخت و در حل آنالیزی آنها در بسیاری از موارد فاقد جواب می باشند. بنابراین روشهای عددی در حل بسیاری از این مسائل مناسب مورد نیاز است. در حال حاضر مدلهای عددی بسیاری برای مسائل کنترل بهینه در کتب مختلف موجود می باشد([۱۳] - [۲۹]).

مسائل کنترل مینیموم زمان یک رده مهم از مسائل کنترل بهینه می باشد که در موضوعات مختلفی مورد استفاده قرار می گیرند. استفاده این رده از مسائل هم توسط ریاضی دانان و هم مهندسین رشته های مختلف نشان از جایگاه این مسائل در بین علوم دیگر است ([۳۰] - [۳۵]). مشهورترین نوع مسائلی که در این خصوص مورد مطالعه قرار گرفته است سیستمهای کنترل زمانی است که هدف آن مینیموم سازی زمان حرکت یک شئ است.

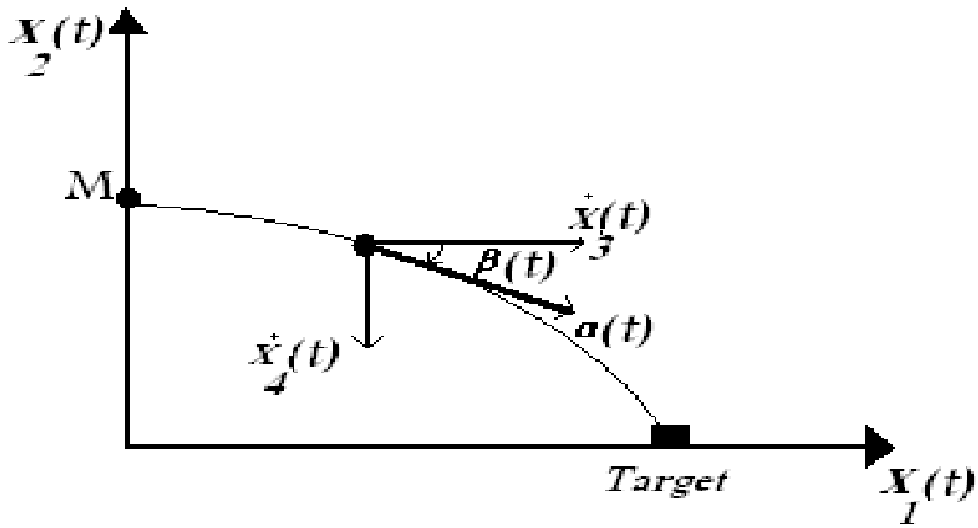
برای مثال در صنایع هوافضا مینیموم سازی زمان پرواز در وسایل مورد نظر می باشد که این وسایل ممکن است راکت، هواپیما و شاتلهای فضایی باشند.([۱۳] ، [۲۰]).

در این فصل با استفاده از روش نظریه اندازه به حل مسائل کنترل بهینه زمانی حرکت راکت بسوی اهداف ثابت می پردازیم. در این مدلبندی مساله شتاب و زاویه پرتاب راکت بعنوان ورودیهای کنترل می باشد و مینیموم سازی زمان پرواز تحت سناریوی حرکت مورد بررسی قرار می گیرد. زمان بهیه در مساله کنترل بهینه زمانی با بکار گیری تکنیک بهینه سازی بر اساس روش تئوری اندازه بدست خواهد آمد. مزیت روش ارائه شده ناشی از این واقعیت است که این روش فاقد تکرار، خود شروع و نیاز به حل مسأله مقدار مرزی متناظر ندارد. علاوه براین خصوصیات، این مدل قابل توسعه به مسائل متنوع کنترل بهینه دیگر می باشد که می توان در این خصوص مسأله مرز آزاد جدا کننده قسمت های خشک و نمناک یک سد ناهمگن [۳۶] ، طراحی شکل بهینه برای یک قطب آهنربا مغناطیسی [۳۷] ، مسائل کنترل زمانی در معادلات گرما [۳۸] ، طراحی بهینه نازل های دو بعدی [۳۹] ، مسائل کنترل بهینه زمانی اهداف چند گانه [۴۰] و تقریب عددی در کنترل اغتشاشات در معادله انتشار [۴۱] نام برد.

۲.۶ بیان مسأله

فرض کنید راکت M با نیروی تراست [۱] $F = M\alpha(t)$ روی محور $x_{۲}(t)$ عمل می نماید. مطلوب است که M هدف T را که روی محور $x_{۱}(t)$ نشان داده شده مورد اصابت قرار دهد. همچنین در این طرح هدف مینیموم سازی زمان پرواز راکت از لحظه پرتاب تا اصابت به هدف می باشد.

[۱] Trust



شکل ۱.۶: مسیر پرواز راکت

از لحاظ فیزیکی می توان حرکت راکت را بصورت زیر فرمول بندی نمود:

$$\begin{cases} \dot{x}_۱ = x_۳, \\ \dot{x}_۲ = x_۴, \\ \dot{x}_۳ = \alpha(t)\cos\beta(t), \\ \dot{x}_۴ = \alpha(t)\sin\beta(t) - g, \end{cases} \tag{۱.۶}$$

که درآن $x_۱(t)$ ، $x_۲(t)$ ، $x_۳(t)$ ، $x_۴(t)$، $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ به ترتیب موقعیت افقی ، موقعیت عمودی ، سرعت افقی ، سرعت عمودی ، شتاب راکت و زاویه پرتاب راکت می باشد و g نیروی گرانش زمین است. مسئله کنترل بهینه زمانی در سیستم فوق، هدایت راکت از $x_۰ \in \mathbb{R}^۴$ تا $x_f \in \mathbb{R}^۴$ در حداقل زمان می باشد. کنترل های مورد استفاده در مسأله $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ می باشد که در اینجا شتاب راکت ثابت در نظر گرفته می شود. بنابراین متغیرهای وضعیت و کنترل مسأله بشکل زیر است:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_۱(t) \\ x_۲(t) \\ x_۳(t) \\ x_۴(t) \end{bmatrix} \quad , \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_۱(t) \\ u_۲(t) \end{bmatrix} \quad , \quad u_۱(t) = \alpha(t) \quad , \quad u_۲(t) = \beta(t)$$

با توجه به تعاریف بالا مسأله کنترل بهینه زمانی حرکت راکت بصورت زیر نوشته می شود:

$$minimize \quad \int_{0}^{T_f} dt \tag{۲.۶}$$

$$s.t. \qquad \dot{x}_1 = x_3 \tag{۳.۶}$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \tag{۴.۶}$$

$$\dot{x}_3 = \alpha(t)\cos\beta(t) \tag{۵.۶}$$

$$\dot{x}_4 = \alpha(t)\sin\beta(t) - g \tag{۶.۶}$$

$$x(0) = x_0 \quad , \quad x(T_f) = x_f \tag{۷.۶}$$

همان طور که در فصل ۵ اشاره شد، مسأله کنترل بهینه بالا توسط نظریه اندازه به یک مسأله برنامه ریزی خطی بصورت زیر تبدیل می شود:

$$min \;\; \Sigma_{j=1}^{N}\alpha_j \tag{۸.۶}$$

$$s.t: \quad \Sigma_{j=1}^{N}\alpha_j\varphi_i^g(z_j) = \Delta\varphi_i \qquad i = 1, 2, ..., M_1 \tag{۹.۶}$$

$$\Sigma_{j=1}^{N}\alpha_j\chi_h(z_j) = 0 \qquad h = 1, 2, ..., M_2 \tag{۱۰.۶}$$

$$\Sigma_{j=1}^{N}\alpha_j\theta_s(z_j) = a_s \qquad s = 1, 2, ..., L \tag{۱۱.۶}$$

در مسأله فوق z_j ها معلوم و مجهولات مسأله α_j ها می باشند که مجموعه α_j ها نیز طول بازه J را نشان می دهد. در مسائل کنترل بهینه زمانی چون هدف پیدا کردن طول بازه J می باشد، لذا تابع معیار مسأله فوق بصورت زیر در خواهد بود:

$$\int_{0}^{T_f} dt = \Sigma_{j=1}^{N}\alpha_j$$

حال به بررسی توابع φ ، ψ و f_a که در افراز Ω به J بستگی دارند می پردازیم.

همانطور که بیان گردید توابع φ را می توان از چند جمله ایهای x ، $x^{۲}$ و... انتخاب نمود. اما توابع ψ بصورت زیر می باشند:

$$\psi(t) = \begin{cases} sin[۲\pi r\dfrac{(t-t_a)}{\Delta t}] & t \in J^o \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۱۲.۶}$$

و یا اینکه

$$\psi(t) = \begin{cases} ۱ - cos[۲\pi r\dfrac{(t-t_a)}{\Delta t}] & t \in J^o \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۱۳.۶}$$

با توجه به اینکه در روابط ۱۲.۶و ۱۳.۶ ، $\Delta t = t_b - t_a$ می باشد که t_b همان T_f مورد نظر می باشد. با استفاده از الگوریتم زیر مقدار $T_۱$ را که بعنوان یک کران پایین برای T_f است بدست آورده و در توابع ψ و f_a قرار می دهیم.

فرض کنید $I = [T_۱, T_۲]$ باشد که در آن $T_۱ = ۰$ و $T_۲$ کران بالای T_f و $M << T_۲$ جریمه می باشد.

مرحله ۱) بافرض $T^{۱} = T_۱ + ۰/۳۸۲(T_۲ - T_۱)$ و $T^{۲} = T_۱ + ۰/۶۱۸(T_۲ - T_۱)$ و حل مسأله کنترل بهینه متناظر با آن مقدار $T(T^{۱})$ و $T(T^{۲})$ را بدست می آوریم. اگر مسأله برنامه ریزی خطی متناظر به هر کدام از آنها ناشدنی بود مقدار جریمه M را به آن اختصاص می دهیم.

مرحله ۲) اگر $T(T^{۱}) > T(T^{۲})$ بود ، $T_۱ = T^{۱}$ و $T_۲ = T_۲$ قرار می دهیم و اگر $T(T^{۱}) < T(T^{۲})$ ، $T_۱ = T_۱$ و $T_۲ = T^{۲}$ قرار می دهیم.

مرحله۳) اگر طول بازه $I = [T_۱, T_۲]$ بقدر کافی کوچک شده توقف می نماییم و $\dfrac{T_۱ + T_۲}{۲}$ را مینیموم مقدار برای $T_۱$ در نظر می گیریم و در غیر این صورت به مرحله ۱می رویم.

حال توابع ψ را بصورت زیر می نویسیم:

$$\psi(t) = \begin{cases} sin(\dfrac{۲\pi rt}{T_۱}) & t \in [۰, T_۱] \\ ۰ & t \in [T_۱, T_f] \end{cases} \tag{۱۴.۶}$$

و یا اینکه

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 - cos(\frac{2\pi rt}{T_1}) & t \in [0, T_1] \\ 0 & t \in [T_1, T_f] \end{cases} \tag{۱۵.۶}$$

در مسائل کنترل بهینه زمانی توابع f_s نیز به افراز J نیاز دارند لذا برای f_s ها نیز توابع زیر را در نظر می گیریم:

$$f_s(t) = \begin{cases} 1 & t \in J_s \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۱۶.۶}$$

که در آن

$$J_s(t) := (\frac{(s-1)T_1}{L_1 - 1}\ ,\ \frac{sT_1}{L_1 - 1}) \qquad s = 1, 2, ..., L_1 - 1$$

$$J_{L_1} = [T_1, T_f]$$

و نیز انتگرال تابع f_s روی J که برابر a_{fs} می باشد بصورت زیر خواهد بود:

$$a_{fs} = \begin{cases} \frac{T_1}{L_1 - 1} & s = 1, 2, ..., L_1 - 1 \\ T_f - T_1 & s = L_1 \end{cases} \tag{۱۷.۶}$$

لذا در مسأله برنامه ریزی خطی مربوطه می توان توابع f_s را بصورت زیر گسترش داد:

$$\begin{aligned} &\Sigma_{j=1}^{L_2}\alpha_j = \frac{T_1}{L_1 - 1} \\ &\Sigma_{j=L_2+1}^{2L_2}\alpha_j = \frac{T_1}{L_1 - 1} \\ &\vdots \\ &\Sigma_{j=(L_1-2)L_2+1}^{(L_1-1)L_2}\alpha_j = \frac{T_1}{L_1 - 1} \\ &\Sigma_{j=(L_1-2)L_2+1}^{(L_1)L_2}\alpha_j = T_f - T_1 \end{aligned} \tag{۱۸.۶}$$

۳.۶ یک مثال عملی

حال می خواهیم کاربرد موارد مطرح شده در مسائل کنترل بهینه زمانی به روش نظریه اندازه در یک مثال مورد بررسی قرار دهیم. در اینجا مسأله ۲.۶ - ۷.۶ را با اطلاعات زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} x_1(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0, \\ x_2(0) = 10 \quad , \quad x_1(T_f) = 110, \\ x_3(T_f) = 141/4 \quad , \quad x_4(T_f) = -14/14 \\ \alpha(t) = 100, \end{cases} \tag{۱۹.۶}$$

و نیز بازه های A و U را بصورت زیر انتخاب می نماییم:

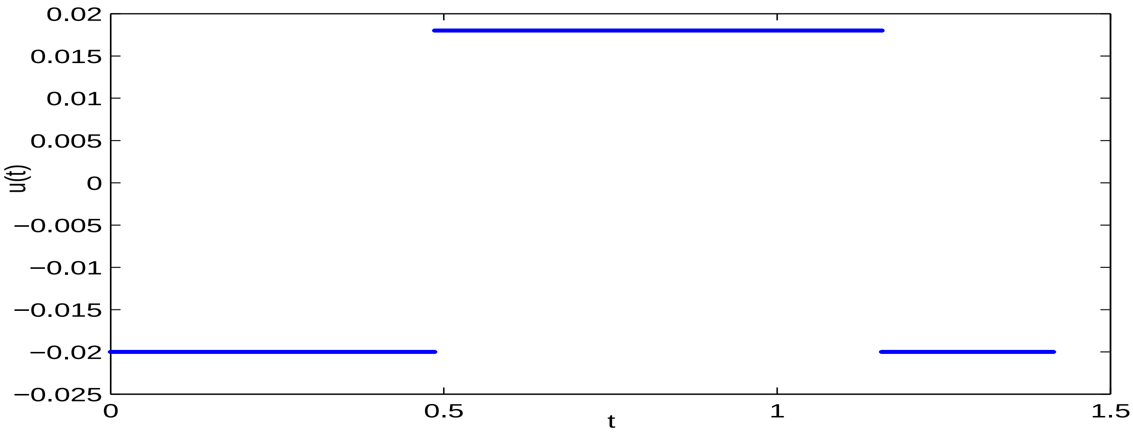
$$U = [-0/14, 0/22] \quad , \quad A = [0, 110] \times [0, 10] \times [0, 150] \times [-15, 0]$$

حال فضای $\Omega = J \times U \times A$ را به $N = 184800$ قسمت افراز می کنیم که در آن U به ۱۰ قسمت و $A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ به ۱۵۴۰ قسمت و J را به ۱۲ قسمت افراز می کنیم. بنابراین مجموعه $\Omega = J \times U \times A$ با نوعی شبکه بندی پوشیده می شود که هر شبکه از مجموعه Ω با (t_j, x_j, u_j) برای $j = 1, 2, ..., N$ شناخته می شود.

اکنون برای روابط ۹.۶ ، ۱۰.۶ و ۱۱.۶ مقادیر M_1 ، M_2 و L را بترتیب برابر ۴ ، ۴ و ۱۲ در نظر می گیریم، بطور مثال توابع φ را بصورت زیر انتخاب می کنیم:

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \varphi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \varphi_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

با بکارگیری الگوریتم مطرح شده در صفحه ۷۷ و با در نظر گرفتن کران بالا $T_2 = 10$ ، کران پایین $T_1 = 1/38$ بدست می آوریم و نیز با بکار بردن مدل LP متناظر با مسأله فوق زمان بهینه $T_f = 1/414$ بدست می آید. تابع کنترل و مسیر متناظر آن روی بازه $[0, 1/414]$ در شکلهای ۲.۶ ، ۳.۶ نمایش داده می شوند.

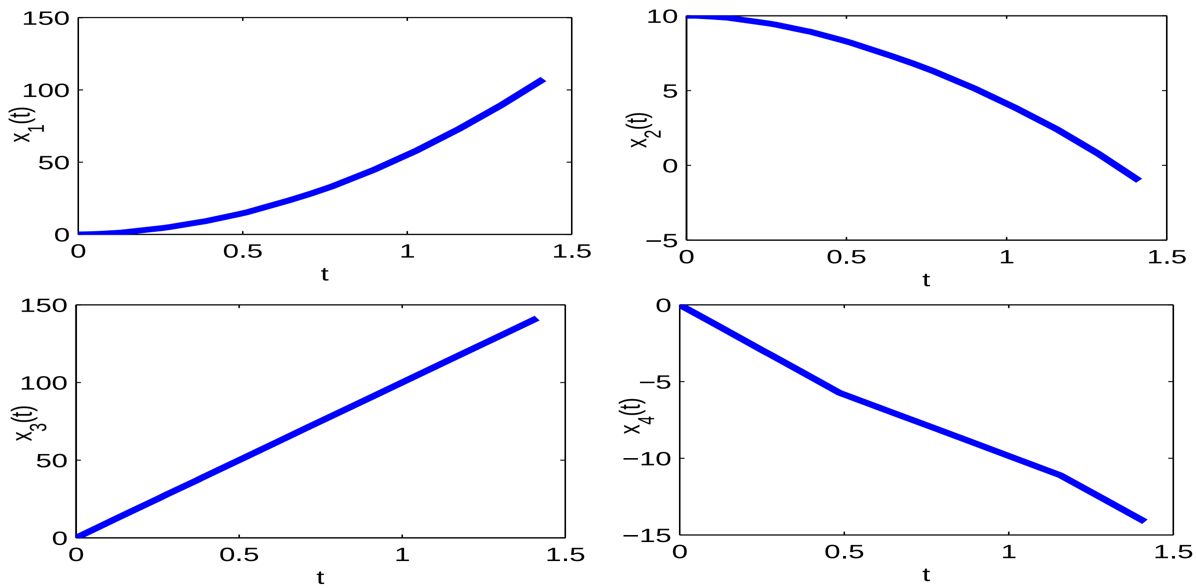


شکل ۲.۶: تابع کنترل $u(t)$

۴.۶ نتیجه گیری و پیشنهادات

در این پایان نامه سعی داشتیم که یک مسأله کنترل بهینه با قیود خطی یا غیر خطی را براساس روش نظریه اندازه حل نماییم. با استفاده از مفاهیمی در آنالیز و توپولوژی توانستیم فضای جواب را از فضای کنترل بهینه کلاسیک به فضای تابعی ها و از آنجا به فضای اندازه انتقال دهیم.

همچنین دیدیم که در این روش خطی یا غیر خطی بودن قیود به پیچیده شدن راه حل نمی افزود. لازم است یادآوری کنیم که در حل مسائل کنترل بهینه به روش نظریه اندازه کراندار بودن متغیرهای وضعیت و کنترل ضروری می باشد. انتها یک مسأله کنترل بهینه زمانی (مسائلی که در آن زمان نهایی مجهول می باشد) را مورد بررسی قرار داده و با استفاده از الگوریتم و تغییراتی در توابع موجود در قیود مسأله به حل آن بپردازیم.



شکل ۳.۶: تابع مسیر $x(t)$

پیشنهاد می شود با توجه به اینکه در این روش می باید متغیرهای وضعیت و کنترل کراندار باشند در این روش روی حالاتی کار شود که بتوان این الزام را از بین برد و نیز روی توابعی کار نمود که بجای توابع φ ، ψ و f_a استفاده شوند که در رسیدن به جواب در مسأله برنامه ریزی خطی متناظر با آن از زمان کمتری استفاده گردد.

مراجع

[1] D. N. Burghes, *Introduction to Control Theorey Including Optimal Control* , (1936).

[2] J. E. Robio, *Control and Optimization the Linear Treatment of Nonlinearproblems* , (1986).

[3] W. Rudin, *Fourier analysis on Groups* , (1960).

[4] S. I. Gass, *Linear Programing , Methods and application.* , (1975).

[5] F. Treves, Topoloical Vector Space, Distributions and Kerenels. *Distributions and Kerenels* , (1976).

[6] H. L. Royden, *Real Analysis* , (1968).

[7] S. Lipschutz , *General Topology* , (1965).

[8] G. choquet , *Lectures on Analysis* ,(1969).

[9] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equation*, (1972).

[10] M. H. Farahi , J. E. Rubio and D. A. Wilson, The Optimal Control of the Linear Wave Equation *international Journal of Control 1996 ,833-848(1995).*

[11] H. Maurer, H. J. Pesch, Differentiability for Parametric Nonlinear Control Problam with Control-Stat Constraints . *Journal of OptimzationTheory and Applications, 285-309, (1995)*

[12] G. Fraser-Andrews, Shooting Method for the Numerical Solution of Optimal Control Problams with Bounded State Variables. *Journal of Optimization Theory and Applications,351 - 372, (1996).*

[13] P. L. Falb, M. Athansand, *An Introduction to the Theory and its Applications* , (1966) .

[14] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction*, (1970).

[15] J. Betts, Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization *Journal Guidance Control Dynamics 21 193-207 (1998)* .

[16] G. N. Elnagar, State-Control Spectral Chebyshev Parametrization for Linearly Con- Strained Quadratic Optimal Control Problems, *Journal of Computational and Applied 19-40, (1997).*

[17] H. P. Hua, Numerical Solution of Optimal Control Problems *Optimal Control Applied 233-241 (2000)* .

[18] H. Jaddu, E. Shimemura, Computational Method Based on State Parameterization for Solving Constrained Nonlinear Optimal Control Problems, *International Journal of Systems Science 275-282 (1999).*

[19] G. Leitmann, *Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems*, (1962).

[20] F. L. Lewis, *Optimal Control*, (1986).

[21] Y. Liu, S. Ito,H. W. J. Lee, K. L. Teo, Semi-in Nite Programming Approach to Continuously-Constrained Linear-Quadratic Optimal Control Problems, *Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems 617-632, (2001).*

[22] Y. Liu, K. L. Teo, S. Y. Wu, A New Quadratic Semi-in¯nite Programming Algorithm Based on Dual Parametrization, *Journal Global Optimization 401-413 ,(2004).*

[23] C. P. Neuman, A Suboptimal Control Algorithm for Constrained Problems Using Cubic Splines, *Automatica 601-613, (1973).*

[24] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, (1962).

[25] H. R. Sirsena, K. S. Tan, Computation of Constrained Optimal Controls Using Parametrization Techniques, *IEEE Trans. Automat. Control 759-766 (1974).*

[26] K. L. Teo, C. J. Goh, K. H. Wong, Computational Approach to Optimal Control Problem, *Longman Scientic Technical, (1991).*

[27] K. L. Teo, L. S. Jennings, H. W. J. Lee, V. Rehbock, The Control Parametrization Enhancing Transform for Constrained Optimal Control Problems, *Journal Austral Mathematics 314-335, (1999)* .

[28] J. Vlassenbroeck, R. V. Dooren, A Chebyshev Technique for Solving Nonlinear Optimal Control Problems, *IEEE Trans. Automa. Control 333-340 (1998).*

[29] C. Z. Wu, K. L. Teo, Yi Zhao, Numerical Method for a Class of Optimal Control Problems Subject to Nonsmooth Functional Constraints , *Journal of Computational and Applied Mathematics 311-325 (2008).*

[30] V. M. Aleksandrov, Numerical solution for a linear optimal control problem, *Fundamental and Applied Mathematics 23-42, (2000).*

[31] O. Ansary, A. Rahrooh, *Optimial Control of a Moving Missile Tracking a MovingTarget* (1995).

[32] K. Balachandran,N. Rajagopal , Time-Optimal Synthesis for a Special Class of Second Order Nonlinear Control System, *Elektronnoe Modelirovanie 106-117, (1999).*

[33] L. Doyen, M. Quincampoix, Multi-Target Control Problems, *Journal of Optimization Theory and Applications 121-139, (1997)* .

[34] B. Farhadinia, K. L. Teo, R. C. Loxton, A Computational Method for a Class of NonStandard Time Optimal Control Problems Involving Multiple Time Horizons, *Mathematical and Computer Modelling 1682-1691, (2009)* .

[35] M. E. Fisher, J. L. Noakes, K. L. Teo, A Minimum Trapping Time Problem in Optimal Control Theory, *Journal of Australian Mathematical Society 100-114, (1990).*

[36] A. R. Nazemi, M. H. Farahi and M. Zamirian, Filtration problem in Inhomogeneous Dam by Using Embedding Method, *Journal of Applied Mathematics Computing 313-332, (2008).*

[37] A. R. Nazemi, M. H. Farahi and H. H. Mehne, Optimal Shape Design of Iron Pole Section of Electromagnet, *Journal of Physics Letters 3440-3451, (2008).*

[38] A. R. Nazemi, LP Modelling for the Time Optimal Control Problem of the Heat Equation, *Journal of Mathematical Modelling and Algorithm 227-244, (2011).*

[39] M. H. Farahi, A. H. Borzabadi, H. H. Mehne, A. V. Kamyad, Measure Theoretical Approach for Optimal Shape Design of a Nozzle, *Journal of Applied Mathematics Computing 315-328, (2005).*

[40] H. H. Mehne, M. H. Farahi, A. V. Kamyad, MILP Modelling for the Time Optimal Control Problem in the Case of Multiple Targets, *Optimal Control Applied 77-91, (2006).*

[41] A. V. Kamyad, J. E. Rubio and D. A. Wilson, The Optimal Control of the Multidimensional Diffusion Equation, *Optimal Control Applied 191-209, (1991).*

[42] S. Effati, A. R. Nazemi, A New Method for Solving a System of the Nonlinear Equations, *Applied Mathematics and Computation 877–894, (2005).*

[43] S. Effati, A. R. Nazemi, A New Approach for Asymptotic Stability System of the Nonlinear Ordinary Differential Equations, *Journal of Applied Mathematics Computing 231-244, (2007).*

[44] A. R. Nazemi, M. H. Farahi and A. V. Kamyad, A New Technique for Approximate Solutions of the Nonlinear Volterra Integral Equations of the Second Kind, *Scientia Iranica 579-585, (2006).*

[45] H.Basirzadh, S. Effati and A. V. Kamyad, An Approach for Solving Nonlinear Programming Problems, *Journal of Applied Mathematics Computing 231-244, (2007).*

[46] H. H. Mehne, M. H. Farahi and A. V. Kamyad, MILP Modelling for the Time Optimal Control Problem in the Case of Multiple Targets, *Optimal Control Applied 77–91, (2006).*

[47] A.R. Nazemi , M.H. Farahi , H.H. Mehneb Optimal Shape Design of Iron Pole Section of Electromagnet, *Physics Letters 3440–3451, (2008).*

فهرست الفبایی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

افراز	Partition
از هم جدا	Disjoint
بی کران	Unbounded
تابع هدف	Objective function
ترکیب خطی	Combination linear
ترکیب آفین	Affine combination
تقریب	Approximation
جواب شدنی پایه	Basic feasible solution
جواب شدنی	Feasible solution
جواب پایه	Basic solution
چگالی	Density
سیستم معادلات خطی	System of linear equation
قضیه نمایش ریس	Representation theorem Rich
فاصله	Interval
کران پایین	Lower bounds
کنترل بهینه	optimal control
محافظ	Support
محدودیت فعال	Active constraint
متغیرهای کراندار	Bounded variables
متغیرهای پایه	Basic variables
مجموعه کراندار	Bounded set
محدودیت	Constraint
محمل	Carrier
متغیر وضعیت	State variable
منحصر بفرد	Unique
متغیر کنترل	Control variable
مولفه	Component
همگرایی	Convergence
نامساوی	Inequality
ناحیه شدنی	Feasible region
نگاشت	Mapping

واژه نامه انگلیسی به فارسی

محدودیت فعال .... Active constraint
ترکیب آفین .... Affine combination
تقریب .... Approximation
جواب شدنی پایه .... Basic feasible solution
متغیرهای کراندار .... Bounded variables
جواب پایه .... Basic solution
متغیرهای پایه .... Basic variables
مجموعه کراندار .... Bounded set
ترکیب خطی .... Combination linear
مولفه .... Component
محدودیت .... Constraint
محمل .... Carrier
متغیر کنترل .... Control variable
همگرایی .... Convergence
چگالی .... Density
از هم جدا .... Disjoint
ناحیه شدنی .... Feasible region
جواب شدنی .... Feasible solution
فاصله .... Interval
نامساوی .... Inequality
کران پایین .... Lower bounds
نگاشت .... Mapping
تابع هدف .... Objective function
کنترل بهینه .... Optimal control
افراز .... Partition
قضیه نمایش ریس .... Representation theorem Rich
متغیر وضعیت .... State variable
سیستم معادلات خطی .... System of linear equation
محافظ .... Support
بی کران .... Unbounded
منحصر بفرد .... Unique

Abstract

we use measure theory in the discrete case to solve a wide range of the nonlinear equations systems. First, we transform the problem to an optimal control problem in discrete case. The new problem is modified into one consisting of the minimization of a linear functional over a set of Radon measures; the optimal measure then is approximated by a finite combination of atomic measures and the problem converted approximately to a finite-dimensional nonlinear programming. Finally, we obtain an approximate solution for the original problem, furthermore, we obtain the path from the initial point up to the approximate solution.

Keywords: *Riesz representation ,measure theorem ,approximation techniques, optimal control.*

Shahrood University of Technology

Department of Mathematics

MS Thesis

Application of Riesz representation theorem for solving a class of Nonlinear optimal control problem

By:

Mohammad Mehdi Shabani

Supervisor:

Dr. Kamran Sharifi , Dr. Ali Reza Nazmi

Date 2012