دانشگاه شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه ارشد ریاضی

عنوان

وجود بهترین تقریب همزمان در فضاهای مختلف

نگارش
فاطمه عامری

استاد راهنما
دکتر مهدی ایرانمنش

تاریخ

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

تقدیم به پدربزرگ و مادربزرگ عزیزم؛ این دو عزیز که هستی خودشان را به پای من ریختند و مهربانی را به من آموختند.
تقدیم به پدر عزیزم؛ او که قامت استوارش به زیر بار محبت خمید و وجودش به من توان زیستن داد.
تقدیم به مادر مهربانم؛ او که بهشت را در قلب پر محبتش جای داد. فرشته ای که با جانش روح به تنم دمید.
تقدیم به همسر با محبتم؛ او که در تک تک لحظات در کنارم بود و با تمام وجود در اتمام این پایان نامه کمکم نمود.
تقدیم به تمامی اساتید گرانقدری که در طول دوره تحصیل از خرمن علمشان خوشه چیدم.
با تشکر از استاد راهنما جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش و استاد مشاور جناب آقای دکتر کامران شریفی که با راهنمایی ها و حمایت های ارزشمند خود اینجانب را در انجام صحیح و کامل این پایان نامه یاری رساندند.

چکیده

نظریه بهترین تقریب همزمان در شاخه های مختلفی از ریاضیات از جمله بهینه سازی ، آنالیز عددی و ... به کار برده می شود. مثال ساده این بحث یافتن نقاطی از یک مجموعه است که نسبت به نقطه ای در فضا دارای کمترین فاصله باشد.

هدف اصلی ما در این پایان نامه معرفی مفهوم بهترین تقریب همزمان در چند فضای مختلف است. همچنین به دنبال بیان شرایطی هستیم که تحت آن شرایط یک مجموعه به طور همزمان پروکسیمینال باشد.

واژه‌های کلیدی: به طور همزمان پروکسیمینال ، بهترین تقریب همزمان و به طور همزمان چبیشف

پیشگفتار

بهترین تقریب همزمان نقش مهمی در بخش هائی از ریاضیات از جمله بهینه سازی و اقتصاد ایفا می کند. در سال ۱۹۷۴ گول [۱] ، هلند [۲] و نسیم [۳] بهترین تقریب همزمان را در فضای خطی نرمدار X بررسی کردند. بهترین تقریب همزمان در سال ۱۹۷۶ توسط دانهام [۴] ، دیاز [۵] و لاگلین [۶] مورد مطالعه قرار گرفت که X فضای توابع حقیقی مقدار پیوسته روی بازه فشرده $[a,b]$ و G زیرمجموعه ای از X است.

در این پایان نامه مساله بهترین تقریب همزمان را در چند فضا مورد بررسی قرار می دهیم و شرایطی را جستجو می کنیم که تحت آن شرایط یک مجموعه به طور همزمان پروکسیمینال باشد. همچنین به دنبال آن هستیم که آیا می توان معادلی برای بهترین تقریب همزمان در فضاهای مورد بحث پیدا کرد؟

این پایان نامه شامل شش فصل است. در فصل اول به تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در فصول بعد پرداخته شده است. در فصل دوم بهترین تقریب همزمان در فضای توابع پیوسته مورد مطالعه قرار می گیرد. در فصل سوم مساله بهترین تقریب همزمان در فضای توابع $L^p(I,X)$ مطرح می شود. فصل چهارم به بررسی این مساله در $L^\infty(I,X)$ پرداخته است. فصل پنجم این موضوع را به طور کلی در توابع و عملگرها مورد بررسی قرار می دهد و در نهایت فصل ششم به نتایجی در مورد مفهوم بهترین تقریب همزمان در فضای توابع $L^p(I,X)$ اشاره می کند.

[۱] Geol
[۲] Holand
[۳] Nasim
[۴] Dunham
[۵] Diaz
[۶] Laughlin

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی از آنالیز

در این فصل به تعاریف، قضایا و لم های مورد نیاز در فصول بعد اشاره می نماییم که از مراجع [۴] ، [۵] ، [۸] ، [۹] ، [۱۱] ، [۱۲] و [۱۴] برگرفته شده اند.

۱.۱ تعاریف اولیه و مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. منظور از یک متر روی مجموعه X یک تابع مانند $\rho : X \times X \to [\cdot, \infty)$ است به قسمی که:

۱. $x = y \Longleftrightarrow \rho(x,y) = \cdot$

۲. برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$\rho(x,y) = \rho(y,x)$$

۳. برای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم:

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

$\rho(x,y)$ را فاصله x از y می نامند. مجوعه ای مانند X که با یک متر مجهز شده باشد را یک فضای متریک می نامند.

تعریف ۲.۱.۱. یک گردایه مانند τ از زیرمجموعه های مجموعه X یک توپولوژی در X نامیده می شود اگر سه خاصیت زیر را داشته باشد:

۱. $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$ باشد.

۲. اگر برای $i = 1, 2, \cdots, n$، $V_i \in \tau$ باشد آنگاه $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \in \tau$ است.

۳. اگر $\{V_\alpha\}$ یک گردایه دلخواه از اعضای τ (متناهی ، شمارش پذیر یا شمارش ناپذیر) باشد آنگاه $\cup_\alpha V_\alpha \in \tau$ است.

تعریف ۳.۱.۱. اگر τ یک توپولوژی در X باشد. در این صورت X یک فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه های باز در X می نامند.

تعریف ۴.۱.۱. گردایه ای مانند m از زیرمجموعه های مجموعه X را یک σ - جبر نامیم اگر در خواص زیر صدق کند:

۱. $X \in m$

۲. اگر $A \in m$ باشد آنگاه $A^{\complement} \in m$ است.

۳. اگر برای $i = 1, 2, \cdots$، $A_i \in m$ باشد آنگاه $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in m$ است.

تعریف ۵.۱.۱. اگر m یک σ - جبر [1] روی X باشد آنگاه X را یک فضای اندازه پذیر و اعضای m را مجموعه های اندازه پذیر در X می نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. هرگاه X یک فضای اندازه پذیر و Y یک فضای توپولوژیک و f نگاشتی از X به Y باشد گوییم f اندازه پذیر است اگر هر مجموعه باز در Y توسط f^{-1} به مجموعه اندازه پذیری در X بازگردد.

تعریف ۷.۱.۱. یک اندازه مثبت ، تابعی مانند μ است که بر یک σ جبر مانند m تعریف شده است که بردش در $[0, \infty)$ است و جمعی شمارش پذیر است یعنی هرگاه $\{A_i\}$ ها گردایه ای شمارش پذیر و از هم جدا از اعضای

[1] σ - aljebra

m باشد آنگاه داریم:

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

تعریف ۸.۱.۱. هر فضای اندازه، یک فضای اندازه پذیر است که یک اندازه مثبت تعریف شده بر روی σ - جبر مجموعه های اندازه پذیر خود داشته باشد.

تعریف ۹.۱.۱. $\chi_E(x)$ را تابع مشخصه مجموعه E می نامیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

تعریف ۱۰.۱.۱. یک تابع مختلط S روی فضای اندازه پذیر X که بردش فقط از تعدادی متناهی نقطه تشکیل شده باشد یک تابع ساده نامیده می شود. برد یک تابع ساده زیرمجموعه ای متناهی از $[0,\infty)$ است.

گردایه ای از مجموعه ها مانند $A_i = \{x : S(x) = \alpha_i\}$ را در نظر می گیریم. هرگاه $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ مقادیر متمایز یک تابع ساده S باشند، آنگاه $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ است که در آن χ_{A_i} تابع مشخصه A_i است.

قضیه ۱۱.۱.۱. فرض کنید $f : X \to [0,\infty)$ اندازه پذیر باشد. در این صورت توابع اندازه پذیر ساده ای چون S_n بر X وجود دارند به طوریکه:

۱. $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq f$

۲. برای هر $x \in X$ وقتی $n \to \infty$ میل می کند آنگاه $S_n(x) \to f(x)$ میل می کند.

اثبات. مرجع [۱۱] قضیه ۱.۱۷.

□

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید $S : X \to [0,\infty)$ یک تابع اندازه پذیر ساده به شکل $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ باشد که در آن مقادیر $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ متمایزاند و $E \in m$ است. تعریف می کنیم:

$$\int_E S d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

تعریف ۱.۱.۱۳. اگر $f : X \to [0,\infty)$ اندازه پذیر و $E \in m$ باشد. تعریف می کنیم:

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E S d\mu$$

که سوپریمم روی تمام توابع اندازه پذیر ساده S که $0 \leq S \leq f$ است گرفته شده است. $\int_E f d\mu$ را انتگرال لبگ f روی E نسبت به اندازه μ می نامند که عددی در $[0,\infty]$ می باشد.

تعریف ۱.۱.۱۴. اگر f یک تابع اندازه پذیر دلخواه و مختلط روی X باشد و $0 < p < \infty$ باشد. تعریف می کنیم:

$$\| f \|_p = [\int | f |^p \, d\mu]^{\frac{1}{p}}$$

و همچنین $L^p(X,m,\mu)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L^p(X,m,\mu) = \{f : X \longrightarrow C, \text{اندازه پذیر است } f, \| f \|_p < \infty\}$$

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنید $g : X \to [0,\infty)$ اندازه پذیر باشد و S مجموعه تمامی α های حقیقی باشد به طوریکه $\mu(g^{-1}(\alpha,\infty]) = 0$. حال β را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\beta = \begin{cases} \infty & S = \emptyset \\ \inf S & S \neq \emptyset \end{cases}$$

β را سوپریمم اساسی g می گویند.

تعریف ۱.۱.۱۶. اگر f یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X باشد. $\| f \|_\infty$ را سوپریمم اساسی $| f |$ تعریف کرده و فرض می کنیم $L^\infty(\mu)$ مجموعه تمامی f هایی باشد که $\| f \|_\infty < \infty$. اعضای $L^\infty(\mu)$ را توابع اندازه پذیر به طور اساسی کراندار بر X می نامند.

تعریف ۱.۱.۱۷. اگر (X,m,μ) یک فضای اندازه باشد. مجموعه $A \in m$ یک اتم برای اندازه μ نامیده می شود اگر و فقط اگر $0 < \mu(A) < \infty$ و برای هر $C \subseteq A$ که $C \in m$ داشته باشیم $\mu(C) = 0$ یا $\mu(C) = \mu(A)$. یک اندازه که فاقد اتم باشد غیر اتمی [2] نامیده می شود.

[2] Non-atomic

تعریف ۱۸.۱.۱. فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرمدار می گوییم اگر برای هر $x \in X$ یک عددحقیقی نامنفی مانند $\| x \|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد به قسمی که در موارد زیر صدق کند:

۱. برای تمامی $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

۲. اگر $x \in X$ و α یک عدد ثابت باشد آنگاه

$$\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$$

۳. $\| x \| = ۰ \Longleftrightarrow x = ۰$

هر فضای خطی نرمدار را می توانیم به عنوان یک فضای متریک در نظر بگیریم که در آن فاصله بین هر دو نقطه x و y یا $d(x,y)$ ، همان $\| x-y \|$ است و توپولوژی آن را توپولوژی حاصل از نرم یا توپولوژی یکنواخت می گوییم.

تعریف ۱۹.۱.۱. روی فضای برداری X با استفاده از تابع $d(x,y) = \| x-y \|$ متریکی بر حسب نرم تعریف می کنیم. با توجه به ویژگی های نرم ، $d(\cdot,\cdot)$ یک متریک روی X است. این متریک را متریک القائی به وسیله نرم می نامیم.

تعریف ۲۰.۱.۱. هر فضای نرمدار مانند X را که نسبت به متریک القایی به وسیله نرم، فضایی تام باشد یک فضای باناخ [۳] می نامیم. به عبارت دیگر هر دنباله کشی در این فضای نرمدار همگرا است.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار باشد. برای هر زیر مجموعه غیر تهی W از X و هر $x \in X$ تعریف می کنیم:

$$d(x,W) = \inf_{w \in W} \| x-w \|$$

[۳] Banach

$w_\circ \in W$ یک بهترین تقریب برای $x \in X$ نامیده می شود اگر

$$\| x - w_\circ \| = d(x, W)$$

اگر برای هر $x \in X$ ، حداقل یک بهترین تقریب $w \in W$ موجود باشد. در این صورت W ، یک زیر مجموعه پروکسیمینال از X نامیده می شود.

اگر برای هر $x \in X$ ، یک بهترین تقریب یکتا در W موجود باشد W یک زیر مجموعه چبیشف از X نامیده می شود.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار باشد و W زیر مجموعه ای از X باشد. برای هر $x \in X$ ، $P_W(x)$ به مجموعه تمامی بهترین تقریب های X از W اشاره می کند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_W(x) := \{w \in W : \| x - w \| = d(x, W)\}$$

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار باشد. W زیرمجموعه ای از X و S یک مجموعه کراندار از X باشد، تعریف می کنیم:

$$d(S, W) := \inf_{w \in W} \sup_{s \in S} \| s - w \|$$

عنصر $w_\circ \in W$ یک بهترین تقریب همزمان S از W نامیده می شود هرگاه:

$$d(S, W) = \sup_{s \in S} \| s - w_\circ \|$$

مجموعه تمامی بهترین تقریب های همزمان S از W با S_W نمایش داده می شود و به صورت زیر تعریف می شود:

$$S_W := \{w \in W : \sup_{s \in S} \| s - w \| = d(S, W)\}$$

اگر برای هر مجموعه کراندار S در X ، حداقل یک بهترین تقریب همزمان S از W وجود داشته باشد. در این صورت W، یک زیر مجموعه به طور همزمان پروکسیمینال از X نامیده می شود.

اگر برای هر مجموعه کراندار S در X ، یک بهترین تقریب همزمان یکتا برای S از W وجود داشته باشد. در این صورت W، یک زیر مجموعه به طور همزمان چبیشف از X نامیده می شود.

تعریف ۲۴.۱.۱. فضای توپولوژیک X یک فضای هاسدورف است هر گاه به ازای هر $p \in X$ و $q \in X$ که $p \neq q$ باشد یک p همسایگی مانند U و یک q همسایگی مانند V وجود داشته باشد به طوریکه $U \cap V = \emptyset$.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری ، F یک میدان و τ یک توپولوژی در X باشد. در این صورت X یک فضای برداری توپولوژیک نامیده می شود هر گاه:

۱. هر نقطه از X یک مجموعه بسته باشد.

۲. نگاشت های $X \times X \to X$ و $F \times X \to X$ به ترتیب با ضابطه های $x + y$ و αx نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشند.

قضیه ۲۶.۱.۱. هر فضای برداری توپولوژیک هاسدورف است.

اثبات. مرجع [۱۲] قضیه ۱۲.۱ . □

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید F یک خانواده از توابع باشد که هر تابع ، فضای متریک (X, d_X) را به فضای متریک (Y, d_Y) می نگارد. خانواده F در $x_\circ \in X$ همپیوسته نامیده می شود اگر برای هر $\epsilon > \circ$ ، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد به طوریکه برای تمامی $f \in F$ داشته باشیم:

$$d_X(x_\circ, x) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_\circ), f(x)) < \epsilon$$

اگر تعریف بالا برای هر $x_\circ \in X$ برقرار باشد می گوییم F در X هم پیوسته است.

قضیه ۲۸.۱.۱. (اصل انتخاب). [۴] فرض کنید A یک تابع روی مجموعه I باشد به قسمی که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $A(x) \neq \emptyset$. در این صورت تابعی مانند f وجود دارد به قسمی که برای هر $x \in I$ ، $f(x) \in A(x)$ باشد.

[۴] Axiom of choice

اثبات. مرجع [۴] قضیه ۱.۵ . □

تعریف ۲۹.۱.۱. نگاشت $P : X \to Y$ را یک عملگر خطی و یا به اختصار عملگر می نامیم هر گاه برای هر $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \in F$ داشته باشیم:

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y)$$

تعریف ۳۰.۱.۱. عملگر $P : X \to Y$ ایزومتریک است هرگاه داشته باشیم:

$$\| P(x) \| = \| x \|$$

تعریف ۳۱.۱.۱. عملگر خطی کراندار $P : X \to X$ تعریف شده روی فضای خطی نرمدار X که $P^{۲} = P$ است یک تصویر نامیده می شود.

تعریف ۳۲.۱.۱. عملگر $P : X \to Y$ یک نشاننده نامیده می شود هرگاه برای یک $c > ۰$ و تمامی $x \in X$ داشته باشیم:

$$c \| x \| \leq \| P(x) \|$$

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. فضای همه تابعک های خطی کراندار روی X را فضای دوگان X می نامیم و با X^* نمایش می دهیم. داریم:

$$X^* = \{\Lambda : X \to F, \text{پیوسته است } \Lambda\}$$

جمع و ضرب اسکالر در X^* به صورت زیر تعریف می شود:

$$(\alpha\Lambda)(x) = \alpha.\Lambda(x), (\Lambda_۱ + \Lambda_۲)(x) = \Lambda_۱(x) + \Lambda_۲(x)$$

این اعمال X^* را به یک فضای برداری تبدیل می کند.

قضیه زیر نتیجه ای از قضیه هان باناخ [۵] است.

[۵] Hahn-Banach theorem

قضیه ۳۴.۱.۱. اگر X یک فضای نرمدار و $x_{\circ} \in X \setminus \{\circ\}$ باشد. آنگاه $\Lambda \in X^*$ وجود دارد به قسمی که $\parallel \Lambda \parallel = ۱$ و $\Lambda x_{\circ} = \parallel x_{\circ} \parallel$ باشد. بعلاوه برای هر $x \in X$ داریم:

$$\parallel x \parallel = \sup\{\mid \Lambda x \mid : \Lambda \in X^*, \parallel \Lambda \parallel = ۱\}$$

اثبات. مرجع [۱۲] قضیه ۳.۴. □

تعریف ۳۵.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار و X^* دوگان X باشد. توپولوژی تولید شده به وسیله X^* روی X، یعنی ضعیف ترین توپولوژی روی X به قسمی که هر $\Lambda \in X^*$ نسبت به آن پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف روی X می نامند و متشکل از تمام اجتماع ها از اشتراک های متناهی از مجموعه های $\Lambda^{-۱}(v)$ می باشد که $\Lambda \in X^*$ و v در F باز است.

تعریف ۳۶.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد. X^* یک فضای نرمدار با نرم

$$\parallel \Lambda \parallel = \sup\{\mid \Lambda x \mid : \parallel x \parallel \leq ۱\}$$

است. دوگان X^* را با X^{**} نمایش می دهیم.

نگاشت ϕ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\phi : X \to X^{**}$$

$$\phi(x)(\Lambda) = \Lambda x, \Lambda \in X^*$$

تعریف ۳۷.۱.۱. اگر Xیک فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد آنگاه کوچکترین توپولوژی روی X^* که نسبت به آن برای هر $x \in X$، $\phi(x)$ پیوسته می گردد را توپولوژی ضعیف ستاره روی X می نامیم. X را فشرده ضعیف ستاره می نامیم هر گاه در توپولوژی ضعیف ستاره فشرده باشد.

قضیه ۳۸.۱.۱. (باناخ آل-اغلو). [۶] فرض کنید v یک همسایگی از صفر در فضای برداری توپولوژیک X باشد.

[۶] Banach - Alaoglu theorem

اگر

$$K = \{\Lambda \in X^* : \forall x \in v, | \Lambda x | \leq 1\}$$

باشد. آنگاه K فشرده ضعیف ستاره است.

اثبات. مرجع [۱۲] قضیه ۳.۱۵ □

تعریف ۳۹.۱.۱. فرض کنید $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ گردایه ای از مجموعه ها و $\beta \in I$ باشد. آنگاه نگاشت تصویری نظیر اندیس β به شکل $\Pi_\beta = \Pi_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\beta$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in I}) = x_\beta$$

حال قرار می دهیم:

$$\delta_\beta = \{\Pi_\beta^{-1}(U_\beta) : \text{باز است } X_\beta \text{ در } U_\beta\}$$

$\delta = \cup_{\beta \in I} \delta_\beta$ در این صورت توپولوژی تولید شده به وسیله δ را توپولوژی حاصل ضربی می نامیم.

قضیه ۴۰.۱.۱. (تیخونف) [۷]. در توپولوژی حاصل ضربی ضرب دلخواه فضاهای فشرده، فشرده است.

اثبات. مرجع [۹] قضیه ۳۷.۳ . □

قضیه ۴۱.۱.۱. فرض کنید X و Y دو فضای برداری توپولوژیک باشند و $\Lambda : X \to Y$ نگاشتی خطی باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند:

۱. Λ پیوسته است.

۲. Λ کراندار است.

اثبات. مرجع [۱۲] قضیه ۱.۳۲ . □

[۷] Tychonoff theorem

تعریف ۴۲.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری و C یک مجموعه محدب در V باشد. تابع حقیقی مقدار f از C محدب نامیده می شود اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in C$ و $۰ \leq \lambda \leq ۱$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (۱ - \lambda) f(y)$$

تعریف ۴۳.۱.۱. فضای X پیش فشرده نامیده می شود اگر هر پوشش باز مانند A از X یک زیر پوشش باز موضعا متناهی مانند β داشته باشد که X را بپوشاند.

قضیه ۴۴.۱.۱. هر فضای متریک پذیر پیش فشرده است.

اثبات. مرجع [۹] قضیه ۴۱.۴ . □

تعریف ۴۵.۱.۱. فرض کنید Φ یک نگاشت باشد که مقادیر آن مجموعه باشد و فضای توپولوژیک S را به خانواده همه زیر مجموعه های فضای توپولوژیک T بنگارد. نگاشت Φ از پایین نیم پیوسته نامیده می شود اگر برای هر مجموعه باز O در T مجموعه $\{s \in S : \Phi(s) \cap O \neq \emptyset\}$ در S باز باشد.

قضیه ۴۶.۱.۱. (انتخاب میشل) [۸] . فرض کنید Φ یک نگاشت نیم پیوسته از پایین بر فضای پیش فشرده S به خانواده ای از زیر مجموعه های غیر تهی، بسته و محدب از فضای باناخ X باشد. در این صورت یک نگاشت پیوسته $\phi : S \to X$ وجود دارد به قسمی که برای تمامی $s \in S$ داشته باشیم $\phi(s) \in \Phi(s)$.

اثبات. مرجع [۸] قضیه ۱۱.۱۴ . □

[۸] Michael selection

فصل ۲

L^q - بهترین تقریب همزمان

۱.۲ مقدمه

در این فصل به بررسی L^q - بهترین تقریب همزمان می پردازیم. سپس قضیه ای را مطرح می کنیم که برای L^1 - بهترین تقریب همزمان معادلی را بیان می کند. در این فصل از مراجع [۷] ، [۱۰] و [۱۳] استفاده شده است.

۲.۲ L^q - بهترین تقریب همزمان

فرض کنید که D یک زیرمجموعه فشرده از R^d و $C(D)$ فضای توابع حقیقی مقدار پیوسته تعریف شده روی D باشد، β به مجموعه تمامی اندازه های مثبت متناهی و غیراتمی روی D اشاره می کند و $\mu \in \beta$.

فرض کنید $C_1(D, \mu)$ فضای خطی $C(D)$ باشد که با نرم $\| \cdot \|_1$ مجهز شده است. این نرم برای تمامی $f \in C_1(D, \mu)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\| f \|_1 = \int_D | f(x) | \, d\mu$$

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید $1 \leqslant q \leqslant +\infty$ و $m \in N \cup \{\infty\}$ که N مجموعه تمامی اعداد صحیح مثبت را مشخص می کند. فرض کنید $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ یک دنباله با مقادیر مثبت باشد که $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

برای هر دنباله حقیقی مقدار $a = \{a_i\}_{i=1}^m$ تعریف می کنیم:

$$\| a \|_q = \begin{cases} (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mid a_i \mid^q)^{\frac{1}{q}}, & 1 \le q < +\infty \\ \max_{1 \le i \le m} a_i, & q = +\infty \end{cases}$$

واضح است که نرم تعریف شده در بالا یعنی $\| . \|_q$ به وزن های λ_i وابسته است .

تعریف ۲.۲.۲. Y_q فضای خطی نرمدار شامل همه دنباله های توابع به فرم $f := \{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$ است که در آن هر f_i متعلق به $C_1(D, \mu)$ بوده و داریم:

$$\int_D \| f(x) \|_q \, d\mu(x) < +\infty$$

و وقتی که $q = +\infty$ است آنگاه $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$ هم پیوسته است.

فرض کنید Y_q با نرم $\| . \|_{Y_q}$ مجهز شده باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|f\|_{Y_q} = \int_D \|f(x)\|_q d\mu(x)$$

توجه می کنیم که $C_1(D, \mu)$ با Y_1 ایزومتریک است در واقع اگر $f \in C_1(D, \mu)$ باشد $f \in Y_1$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f := (f, f, \cdots, f)$$

حال خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \| f \|_{Y_1} &= \int_D \|f_i(x)\|_1 d\mu(x) \\ &= \int_D \sum_{i=1}^{m} \lambda_i |f(x)| d\mu(x) \\ &= \int_D |f(x)| d\mu(x) \\ &= \| f \|_1 \end{aligned}$$

فرض کنید U یک زیر فضای n بعدی از $C(D)$ باشد و $f = (f_1, \ldots, f_m) \in Y_q$. در این صورت مساله بهترین تقریب همزمان یعنی پیدا کردن یک عنصر $u^\circ \in U$ به قسمی که:

$$\| f - u^\circ \|_{Y_q} \le \| f - u \|_{Y_q}, \forall u \in U \qquad (1.2)$$

به عبارت دیگر

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mid f_i - u^\circ \mid^q \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mid f_i - u \mid^q$$

تعریف ۳.۲.۲. عنصر $u^\circ \in U$ که در ۱.۲ صدق می کند L^q - بهترین تقریب همزمان f از U نامیده می شود.

تعریف ۴.۲.۲. اگر هر $f \in Y_q$ دارای یک L^q - بهترین تقریب همزمان منحصر به فرد از U باشد U را یک فضای L^q - به طور همزمان چبیشف می نامیم.

۳.۲ نتایج

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید Ω یک فضای هاسدورف فشرده باشد و $C(\Omega)$ فضای تمامی توابع حقیقی مقدار پیوسته روی Ω باشد که با نرم چبیشف $\| . \|$ مجهز شده است. فرض کنید R^m فضای خطی دنباله های حقیقی مقدار $(a_1, \cdots, a_m)$ باشد و V به گوی واحد زیر اشاره کند:

$$V = \{a = (a_1, \cdots, a_m) \in R^m : \| a \| \leq 1\}$$

در این صورت برای $f = (f_1, \cdots, f_m)$ و هر $f_i \in C(\Omega)$ نرمی را بر روی f به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\| f \|_C = \sup_{a \in V} \| \sum_{i=1}^{m} a_i f_i \|$$

که $\sum_{i=1}^{m} a_i f_i \in C(\Omega)$ و $\sup_{a \in V} \| \sum_{i=1}^{m} a_i f_i \| < \infty$ است.

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنید E یک فضای خطی نرمدار و G یک زیر فضای خطی با بعد n از E باشد و $x \in E \setminus G$ و $g_\circ \in G$ باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند:

۱. $g_\circ \in P_G(x)$

۲. h نقطه $f_1, \cdots, f_n$ از S_{E^*} ($S_{E^*} \subseteq E^*$ گوی واحد بسته است) وجود دارند که اگر h نقطه حقیقی باشند آنگاه $1 \leq h \leq n+1$ و اگر مختلط باشند $1 \leq h \leq 2n+1$ و عدد h و $\lambda_1 \cdots, \lambda_h > 0$ وجود دارند به قسمی

که $\sum_{i=1}^{h} \lambda_i = 1$ و

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i f_i(g) = 0 (g \in G)$$

و

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i f_i(x - g_\circ) = \| x - g_\circ \|$$

اثبات. مرجع [۱۳] قضیه ۱.۱ . □

قضیه ۳.۳.۲. فرض کنید $f := (f_1, \cdots, f_m) \in Y_1$ و $u^\circ \in U$ باشد. در این صورت u° یک L^1-بهترین تقریب همزمان از f برای U است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $\{h_i^*\}_{i=1}^{m} \subseteq L^\infty(D, \mu)$ که اگر $\|h_i^*\|_\infty \leq 1$ خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{D \setminus Z(f_i - u^\circ)} \lambda_i sgn(f_i - u^\circ)(x) u(x) d\mu + \sum_{i=1}^{m} \int_{Z(f_i - u^\circ)} \lambda_i h_i^*(x) u(x) d\mu = 0 \forall u \in U$$

اثبات. در ابتدا به اثبات عکس قضیه می پردازیم. لذا شرایط موجود در تعریف ۱.۳.۲ را ایجاد می کنیم. فرض کنید B_∞ گوی واحد بسته از $L^\infty(D, \mu)$ با توپولوژی ضعیف ستاره باشد. بنا به ۲۶.۱.۱ می دانیم هر فضای برداری توپولوژیک هاسدورف است. چون B_∞یک فضای برداری توپولوژیک است لذا هاسدورف است. از طرفی طبق قضیه ۳۸.۱.۱، B_∞ فشرده ضعیف ستاره است. فرض کنید $\Omega = B_\infty \times \cdots \times B_\infty$. ، Ω دارای توپولوژی حاصل ضربی است. طبق قضیه ۴۰.۱.۱ فشرده است و چون هر کدام از B_∞ ها هاسدورف است پس Ω نیز هاسدورف است. بنابراین Ω یک فضای هاسدورف فشرده است.

فرض کنید V به گوی واحد زیر اشاره می کند:

$$V = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in R^m : \| \lambda \| \leqslant 1\}$$

فرض کنید $g = (g_1, \cdots, g_m) \in Y_1$. تابع $\phi(g) : \Omega \longrightarrow R$ را برای هر $(h_1, \cdots, h_m) \in \Omega$ به صورت زیر

تعریف می کنیم:

$$\phi(g)(h_۱,\cdots,h_m)=\sum_{i=۱}^{m}\int_D \lambda_i h_i(x)g_i(x)d\mu$$

حال می خواهیم نشان دهیم که $\phi(g)$ به مجموعه توابع حقیقی مقدار پیوسته روی Ω تعلق دارد. فرض کنید که $\epsilon>۰$ و $w_\circ=(h_۱^\circ,h_۲^\circ,\cdots)\in\Omega$ باشد. در این صورت بنا به تعریف ۱.۳.۲ $m_\circ$ ای وجود دارد به قسمی که:

$$\sum_{i=m_\circ+۱}^{\infty}\lambda_i\|g_i\|_۱ < \frac{\epsilon}{۴} \qquad (۲.۲)$$

$O(\varepsilon,w_\circ)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$O(\varepsilon,w_\circ)=\{w:=(h_۱,h_۲,\ldots)\in\Omega:|\int_D\lambda_i(h_i-h_i^\circ)(x)g_i(x)d\mu|<\frac{\epsilon}{۲m_\circ}\forall i\le m_\circ\}$$

اگر به جای w مقدار $w_\circ=(h_۱^\circ,h_۲^\circ,\cdots)$ را جایگزین کنیم حاصل انتگرال ما صفر می شود . لذا $O(\epsilon,w_\circ)$ یک زیر مجموعه باز از Ω است که شامل $w_\circ$ می باشد.

حال نشان می دهیم که $\phi(g)$ پیوسته است. برای هر $w:=(h_۱,h_۲,\cdots)\in O(\varepsilon,w_\circ)$ داریم:

$$\begin{aligned}
|\phi(g(w)-\phi(g)(w_\circ)| &= |\sum_{i=۱}^{\infty}\int_D\lambda_i(h_i-h_i^\circ)(x)g_i(x)d\mu|\\
&= |\sum_{i=۱}^{m_\circ}\int_D\lambda_i(h_i-h_i^\circ)(x)g_i(x)d\mu+\sum_{i=m_\circ+۱}^{\infty}\int_D\lambda_i(h_i-h_i^\circ)(x)g_i(x)d\mu|\\
&\le |\sum_{i=۱}^{m_\circ}\int_D\lambda_i(h_i-h_i^\circ)(x)g_i(x)d\mu|\\
&+ |\sum_{i=m_\circ+۱}^{\infty}\int_D\lambda_i(h_i-h_i^\circ)(x)g_i(x)d\mu|\\
&\le |\sum_{i=۱}^{m_\circ}\int_D\lambda_i(h_i-h_i^\circ)(x)g_i(x)d\mu|+|\sum_{i=m_\circ+۱}^{\infty}\int_D\lambda_i h_i(x)g_i(x)d\mu|\\
&+ |\sum_{i=m_\circ+۱}^{\infty}\int_D\lambda_i h_i^\circ(x)g_i(x)d\mu|\\
&\le m_\circ\times\frac{\epsilon}{۲m_\circ}+\frac{\epsilon}{۴}+\frac{\epsilon}{۴}\\
&\le \frac{\epsilon}{۲}+\frac{\epsilon}{۲}\\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

بنابراین عبارت بالا نشان می دهد که $\phi(g)$ به فضای توابع پیوسته حقیقی تعلق دارد پس $\phi(g) \in C(\Omega)$. همچنین بنا به فرض قضیه چون $f := (f_1, \cdots, f_m) \in Y_1$ است لذا خواهیم داشت $\phi(f) \in C(\Omega)$ و $\phi(U) \in C(\Omega)$ که:

$$\phi(U) = \{\phi(u) \in C(\Omega) : u \in U\}$$

در فرض قضیه داشتیم که $u^\circ \in U$ یک L^1 - بهترین تقریب همزمان برای f از U است. با استفاده از این فرض و با استفاده از تعریف ۱.۳.۲ و اینکه $C(\Omega)$ فضای تمامی توابع حقیقی مقدار پیوسته روی Ω با نرم چبیشف است برای هر $u \in U$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\| \Phi(f) - \Phi(u) \|_c &= max_{(h_1,\cdots,h_m)\in\Omega} \sum_{i=1}^{\infty} (\int_D \lambda_i h_i(x) f_i(x) d\mu \\
&- \int_D \lambda_i h_i(x) u(x) d\mu) \\
&= max_{(h_1,\cdots,h_m)\in\Omega} \sum_{i=1}^{\infty} (\int_D \lambda_i h_i(x)(f_i - u)(x) d\mu) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} max_{h_i \in B_\infty} \int_D \lambda_i h_i(x)(f_i - u)(x) d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \| f_i - u \|_1 \, d\mu \\
&= \| f - u \|_{Y_1}
\end{aligned}$$

بنابراین $u^\circ \in U$ یک L^1 - بهترین تقریب همزمان برای f از U است اگر و فقط اگر $\phi(u^\circ)$ یک بهترین تقریب چبیشف برای $\phi(f)$ از $\phi(U)$ باشد. طبق قضیه ۲.۳.۲ ، k نقطه $q_1, \cdots, q_k \in \Omega$ که $1 \leq k \leq n+1$ و k عدد غیر صفر $c_1, \cdots, c_k$ که $\sum_{j=1}^{k} \mid c_j \mid = 1$ است وجود دارند به قسمی که برای هر $u \in U$ داشته باشیم:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j(\phi(f) - \phi(u^\circ))(q_j) = \| f - u^\circ \|_{Y_1} \tag{۳.۲}$$

و

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \phi(u)(q_j) = 0 \tag{۴.۲}$$

فرض کنید که برای هر $j = ۱, \cdots, k$

$$q_j = (h_۱^j, \cdots, h_m^j)$$

و برای هر $i = ۱, ۲, \cdots, m$ قرار دهید

$$h_i^* = \sum_{j=۱}^{k} c_j h_i^j$$

دراین صورت داریم ۱ $\leq \| h_i^* \|$ زیرا هم c_j ها و هم h_i^j ها کوچکتر از ۱ هستند. حال معادل عبارات ۳.۲ و ۴.۲ را محاسبه می کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{j=۱}^{k} c_j(\phi(f) - \phi(u^\circ))(q_j) &= \sum_{j=۱}^{k} c_j(\phi(f) - \phi(u^\circ))((h_۱^j, \cdots, h_m^j) \\ &= \sum_{j=۱}^{k} c_j \sum_{i=۱}^{m} \int_D \lambda_i h_i^j(x)(f_i - u^\circ)(x) d\mu \\ &= \sum_{i=۱}^{m} \int_D \lambda_i \sum_{j=۱}^{k} c_j h_i^j(x)(f_i - u^\circ)(x) d\mu \\ &= \sum_{i=۱}^{m} \int_D \lambda_i h_i^*(x)(f_i - u^\circ)(x) d\mu \end{aligned} \tag{۵.۲}$$

و همچنین داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=۱}^{k} c_j \phi(u)(q_j) &= \sum_{j=۱}^{k} c_j \phi(u)(h_۱^j, \cdots, h_m^j) \\ &= \sum_{j=۱}^{k} c_j \sum_{i=۱}^{m} \int_D \lambda_i h_i^j(x) u(x) d\mu \\ &= \sum_{i=۱}^{m} \int_D \lambda_i \sum_{j=۱}^{k} c_j h_i^j(x) u(x) d\mu \\ &= \sum_{i=۱}^{m} \int_D \lambda_i h_i^*(x) u(x) d\mu \end{aligned} \tag{۶.۲}$$

از ۳.۲ و ۵.۲ داریم:

$$\sum_{i=۱}^{m} \int_D \lambda_i h_i^*(x)(f_i - u^\circ)(x) d\mu = \|f - u^\circ\|_{Y_۱} \forall u \in U$$

و همچنین از ۴.۲ و ۶.۲ نتیجه می گیریم که:

$$\sum_{i=۱}^{m} \int_D \lambda_i h_i^*(x) u(x) d\mu = ۰ \forall u \in U$$

همچنین از عبارت بالا نتیجه می گیریم که:

$$\begin{aligned} \parallel f - u^\circ \parallel_{Y_۱} &= \sum_{i=۱}^{m} \int_{D \setminus Z(f_i - u^\circ)} \lambda_i h_i^*(x)(f_i - u^\circ)(x) d\mu \\ &\leq \sum_{i=۱}^{m} \int_{D \setminus Z(f_i - u^\circ)} \lambda_i \mid (f_i - u^\circ)(x) \mid d\mu \\ &= \sum_{i=۱}^{m} \int_{D \setminus Z(f_i - u^\circ)} \lambda_i sgn(f_i - u^\circ)(x)(f_i - u^\cdot)(x) d\mu \\ &= \parallel f - u^\circ \parallel_{Y_۱} \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

بنا به ۷.۲ برای $i = ۱, ۲, \cdots, m$ و هر $x \in D \setminus Z(f_i - u^\circ)$ داریم:

$$h_i^*(x) = sgn(f_i - u^\circ)(x)$$

بنابراین برای هر $u \in U$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=۱}^{m} \int_{D \setminus Z(f_i - u^\circ)} \lambda_i sgn(f_i - u^\circ)(x) u(x) d\mu \\ + & \sum_{i=۱}^{m} \int_{Z(f_i - u^\circ)} \lambda_i h_i^*(x) u(x) d\mu \\ = & \sum_{i=۱}^{m} \int_D \lambda_i h_i^*(x) u(x) d\mu \\ = & \; ۰ \end{aligned}$$

برای اثبات قضیه طبق فرض داریم:

$$\sum_{i=۱}^{m} \int_D \lambda_i h_i^*(x) u(x) d\mu = ۰ \forall u \in U$$

با استفاده از ۶.۲ داریم:

$$\sum_{j=۱}^{k} c_j \phi(u)(q_j) = \sum_{i=۱}^{m} \int_D \lambda_i h_i^*(x) u(x) d\mu$$

بنابراین با توجه به قضیه ۲.۳.۲ ، U° یک L^1- بهترین تقریب همزمان از f برای U است. $\square$

فصل ۳

بهترین تقریب همزمان در فضای توابع $L^p(I,X)$

۱.۳ مقدمه

مطالبی که در این فصل ارائه می گردد در مورد بهترین تقریب همزمان و وجود آن در فضای توابع $L^p(I,X)$ است. در ابتدا مفهوم به طور همزمان پروکسیمینال بودن را در $L^p(I,X)$ بیان کرده و L^p - جمعوند [۱] را تعریف می کنیم و یک نامساوی فاصله برای بهترین تقریب همزمان در $L^p(I,X)$ ارائه می دهیم. سپس در خصوص بهترین تقریب همزمان قضایایی را مطرح می کنیم. در این فصل از مرجع [۱] استفاده شده است.

۲.۳ به طور همزمان پروکسیمینال در $L^p(I,X)$

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. برای هر زیر مجموعه متناهی $E \subseteq X$ و $p \geq ۱$ تعریف می کنیم:

$$d_p(E,G) = inf\{(\sum_{e\in E} \parallel e-y \parallel^p)^{۱/p} : y \in G\}$$

چنین اینفیممی ای لازم نیست که اخذ شود. در حالتی که برای هر زیر مجموعه متناهی $E \subseteq X$ ، اینفیمم اخذ شود در این صورت G به طور همزمان پروکسیمینال تحت p نرم نامیده می شود یا به عبارت ساده تر G، $(|E|,p)$ به طور همزمان پروکسیمینال است. $|E|$ کاردینال E است. در حالتی که $|E| = ۱$ ، $(۱,۱)$ پروکسیمینالیتی

[۱] Summand

همزمان همان پروکسیمینالیتی است.

تعریف ۲.۲.۳. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. در این صورت G ، $(۲,p)$ به طور همزمان پروکسیمینال در X است اگر برای هر $x_۱, x_۲$ در X ، y ای متعلق به G وجود داشته باشد به قسمی که:

$$\begin{aligned} d_p(\{x_۱,x_۲\},G) &= (\| x_۱ - y \|^p + \| x_۲ - y \|^p)^{\frac{۱}{p}} \\ &= \inf\{(\| x_۱ - z \|^p + \| x_۲ - z \|^p)^{\frac{۱}{p}} : z \in G\} \end{aligned}$$

تعریف ۳.۲.۳. $L^p(I,X)$ فضای باناخ تمامی توابع انتگرال پذیر p- بوخنر [۲] تعریف شده روی I با مقادیری در X است که در آن $I = [۰,۱]$ است.

نرم تمامی توابعی که متعلق به $L^p(I,X)$ هستند به صورت زیر تعریف می شود:

$$\| f \|_p = (\int_I \|f\|^p d\mu)^{\frac{۱}{p}}$$

لم ۴.۲.۳. فرض کنید که X یک فضای نرمدار و $x,y \in X$ باشند. در این صورت برای هر عدد طبیعی p داریم:

$$\|x+y\|^p \leq ۲^{p-۱}(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

اثبات. در ابتدا ثابت می کنیم که:

$$\| x \|^k \| y \| + \| y \|^k \| x \| \leq \| x \|^{k+۱} + \| y \|^{k+۱}$$

برای این منظور توجه می کنیم که:

$$(\| y \| - \| x \|)(\| y \|^k - \| x \|^k) \geq ۰$$

و لذا

$$\| x \|^{k+۱} + \| y \|^{k+۱} - \| x \|^k \| y \| - \| y \|^k \| x \| \geq ۰$$

[۲] p-Bochner

و بنابراین حکم ثابت می شود.

حال از طریق استقرا به اثبات لم می پردازیم.

$$\begin{aligned} \| x+y \|^{k+1} &= \| x+y \|^{k} \| x+y \| \\ &\leq 2^{k-1}(\| x \|^{k} + \| y \|^{k}) \| x+y \| \\ &\leq 2^{k-1}(\| x \|^{k} + \| y \|^{k})(\| x \| + \| y \|) \\ &= 2^{k-1}(\| x \|^{k+1} + \| y \|^{k+1} + \| x \|^{k} \| y \| + \| y \|^{k} \| x \|) \\ &\leq 2^{k-1}(2 \| x \|^{k+1} + 2 \| y \|^{k+1}) \\ &= 2^{k}(\| x \|^{k+1} + \| y \|^{k+1}) \end{aligned}$$

و لم ثابت شد. □

۳.۳ L^p-جمعوند

تعریف ۱.۳.۳. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. در این صورت G را یک L^p-جمعوند از X می نامیم هرگاه $X = G \oplus G'$ و $G \cap G' = \emptyset$ به قسمی که برای هر $x \in G$ و هر $y \in G'$ داشته باشیم:

$$\| x+y \|^{p} = \| x \|^{p} + \| y \|^{p}$$

یا نگاشت تصویری مانند $P : X \to G$ موجود باشد به قسمی که

$$\| x \|^{p} = \| x - P(x) \|^{p} + \| P(x) \|^{p}$$

لم ۲.۳.۳. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک L^p- جمعوند از X باشد. در این صورت G ، $(2,p)$ به طور همزمان پروکسیمینال در X است.

اثبات. فرض کنید $x,y\in X=G\oplus G'$ ، $G\cap G'=\emptyset$ ، $x=x_۱+x_۲$ و $y=y_۱+y_۲$ باشند به قسمی که $x_۱,y_۱\in G$ و $x_۲,y_۲\in G'$ می باشند. ثابت می کنیم که $\theta=\frac{x_۱+y_۱}{۲}$ یک بهترین تقریب همزمان برای x,y از G است. چون G یک L^p - جمعوند از X است. لذا داریم:

$$\begin{aligned}\| x-\theta \|^p &= \| x_۱+x_۲-\frac{x_۱+y_۱}{۲} \|^p\\ &= \| x_۲+\frac{x_۱-y_۱}{۲} \|^p\\ &= \| x_۲ \|^p+(\frac{۱}{۲})^p \| y_۱-x_۱ \|^p \end{aligned} \qquad (۱.۳)$$

به طور مشابه

$$\| y-\theta \|^p = \| y_۲ \|^p+(\frac{۱}{۲})^p \| y_۱-x_۱ \|^p \qquad (۲.۳)$$

با جمع سمت چپ دو عبارت ۱.۳ و ۲.۳خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\| x-\theta \|^p+\| y-\theta \|^p &= \| x_۲ \|^p+\| y_۲ \|^p+۲(\frac{۱}{۲})^p \| y_۱-x_۱ \|^p\\ &= \| x_۲ \|^p+\| y_۲ \|^p+۲^{۱-p} \| y_۱-x_۱ \|^p\end{aligned}$$

فرض کنید $z\in G$ باشد . در این صورت با استفاده از لم ۴.۲.۳ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\| x-\theta \|^p+\| y-\theta \|^p &= \| x_۲ \|^p+\| y_۲ \|^p+۲^{۱-p} \| y_۱-z+z-x_۱ \|^p\\ &\le \| x_۲ \|^p+\| y_۲ \|^p+(۲)^{۱-p}(۲^{p-۱}(\| x_۱-z \|^p+\| y_۱-z \|^p))\\ &= \| x_۲ \|^p+\| y_۲ \|^p+\| x_۱-z \|^p+\| y_۱-z \|^p\\ &= \| x_۲+x_۱-z \|^p+\| y_۲+y_۱-z \|^p\\ &= \| x-z \|^p+\| y-z \|^p\end{aligned}$$

چون z دلخواه است برای هر $z\in G$ خواهیم داشت:

$$(\| x-\theta \|^p+\| y-\theta \|^p)^{۱/p}\le(\| x-z \|^p+\| y-z \|^p)^{۱/p}$$

پس

$$(\| x-\theta \|^p + \| y-\theta \|^p)^{۱/p} = \inf_{z\in G}(\| x-z \|^p + \| y-z \|^p)^{۱/p}$$

$$(\| x-\theta \|^p + \| y-\theta \|^p)^{۱/p} = d_p(\{x,y\},G)$$

$\square$

۴.۳ p- نرم هسته ای

تعریف ۱.۴.۳. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و X^* و Y^* دوگان آنها باشد. منظور از عبارت $\sum_{i=۱}^n x_i \otimes y_i$ که $x_i \in X$ ، $y_i \in Y$ و $n \in N$ عملگری مانند $A : X^* \to Y$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$A\phi = \sum_{i=۱}^n \phi(x_i)y_i, \phi \in X^*$$

این عملگر یک رابطه هم ارزی را از X^* به Y به صورت زیر تعریف می کند:

$\sum_{i=۱}^n x_i \otimes y_i \sim \sum_{i=۱}^n u_i \otimes v_i$ اگر و فقط اگر این دو عبارت عملگر یکسانی را از X^* به Y تعریف کنند.

مجموعه تمام کلاس های هم ارزی ایجادشده را فضای تانسوری و با نماد $X \otimes Y$ نمایش می دهند.

تعریف ۲.۴.۳. فرض کنید α یک نرم روی $X \otimes Y$ باشد. α یک نرم متقاطع [۳] نامیده می شود اگر برای هر $x \in X$ و هر $y \in Y$ داشته باشیم

$$\alpha(x \otimes y) = \| x \| \| y \|$$

تعریف ۳.۴.۳. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. برای $x_۱, \cdots, x_n \in X$ اگر $۱ \le q < \infty$ باشد

$$\mu_q(x_۱, \cdots, x_n) = \sup\{(\sum_{i=۱}^n | \psi(x_i) |^q)^{\frac{۱}{q}} : \psi \in Y^*, \| \psi \| = ۱\}$$

و هنگامی که $q = +\infty$ باشد $\mu_q(x_۱, \cdots, x_n)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_\infty(x_۱, \cdots, x_n) = \sup\{\max_{۱\le i\le n} | \psi(x_i) | : \psi \in Y^*, \| \psi \| = ۱\}$$

[۳] Crossnorm

تعریف ۴.۴.۳. فرض کنید $z\in X\otimes Y$ باشد که X و Y دو فضای باناخ هستند. p - نرم هسته ای [۴] برای z که $1\le p\le\infty$ و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ است به صورت زیر تعریف می شود:

$$\alpha_p(z):=\inf\{(\sum_{i=1}^{n}\parallel x_i\parallel^p)^{\frac{1}{p}}\mu_q(y_1,\cdots,y_n):z=\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i\}$$

لم ۵.۴.۳. p - نرم هسته ای یک نرم متقاطع است.

اثبات. مرجع [۸] لم ۱.۴۶ . □

لم ۶.۴.۳. فرض کنید X یک فضای باناخ و S یک فضای با اندازه متناهی باشد و $1\le p\le\infty$. در این صورت می توان $L^p(S)\otimes_{\alpha_p}X$ را در فضای $L^p(S,X)$ با نرم ۱ نشاند.

اثبات. مرجع [۸] لم ۱.۴۷ . □

قضیه ۷.۴.۳. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک L^p - جمعوند از X باشد. در این صورت $L^p(I,G)$ ، $(2,p)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $L^p(I,X)$ است.

اثبات. با استفاده از لم ۶.۴.۳ کافی است نشان دهیم که $L^p(I)\otimes_{\alpha(p)}G$ یک L^p- جمعوند از $L^p(I)\otimes_{\alpha(p)}X$ است. فرض کنید $P:X\to G$ یک نگاشت تصویر باشد و id یک تابع همانی روی $L^p(I)$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$id\otimes P:L^p(I)\otimes_{\alpha(p)}X\to L^p(I)\otimes_{\alpha(p)}G$$

به طوریکه $id\otimes P(f\otimes x)=f\otimes P(x)$.

$id\otimes p$ خطی است زیرا برای هر $\beta,\gamma\in R$ و $f,g\in L^p(I)$ داریم:

$$\begin{aligned}id\otimes P((\beta f+\gamma g)\otimes x) &= (\beta f+\gamma g)\otimes P(x)\\ &= \beta f\otimes P(x)+\gamma g\otimes P(x)\\ &= \beta id\otimes P(f\otimes x)+\gamma id\otimes P(g\otimes x)\end{aligned}$$

[۴] p - nuclear norm

و همچنین $id\otimes p$ یک تصویر است زیرا

$$\begin{aligned} id\otimes P(id\otimes P(f\otimes x)) &= id\otimes P(f\otimes P(x)) \\ &= f\otimes P^{2}(x) \\ &= f\otimes P(x) \end{aligned}$$

فرض کنید $f\in L^p(I,X)=L^p(I)\otimes_{\alpha(p)}X$ یک تابع ساده باشد، بنابراین $f=\sum_{i=1}^{n}1_{E_i}\otimes x_i$ که E_i ها به ازای $i=1,2,\cdots,n$ دو به دو از هم جدا هستند و $\sum_{i=1}^{n}1_{E_i}=1$ که ۱ تابع ثابت ۱ است و $\cup_{i=1}^{n}E_i=I$.

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{n}1_{E_i}\otimes x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}1_{E_i}\otimes P(x_i)+\sum_{i=1}^{n}1_{E_i}\otimes (x_i-P(x_i)) \end{aligned}$$

نشان می دهیم که G $L^p(I)\otimes_{\alpha(p)}$ یک L^p - جمعوند از X $L^p(I)\otimes_{\alpha(p)}$ است. بنا به لم ۵.۴.۳ داریم:

$$\begin{aligned} \| f \|^p &= \int_I \| \sum_{i=1}^{n}1_{E_i}(t)\otimes x_i \|^p \, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{E_i} \| \sum_{i=1}^{n}1_{E_i}(t) \|^p \| x_i \|^p \, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{n}\mu(E_i) \| x_i \|^p \end{aligned}$$

چون G یک L^p - جمعوند از X است نتیجه می گیریم که:

$$\| x_i \|^p = \| P(x_i) \|^p + \| x_i - P(x_i) \|^p$$

که $P(x_i)$ متعلق بهG و $x_i - P(x_i)$ متعلق به G' است. در ادامه داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \parallel x_i \parallel^p \\ = & \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)(\parallel P(x_i) \parallel^p + \parallel x_i - P(x_i) \parallel^p) \\ = & \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \parallel P(x_i) \parallel^p + \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \parallel x_i - P(x_i) \parallel^p \\ = & \parallel \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i} \otimes P(x_i) \parallel^p + \parallel \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i} \otimes (x_i - P(x_i) \parallel^p \\ = & \parallel id \otimes P(\sum_{i=1}^{n} 1_{E_i} \otimes x_i) \parallel^p + \parallel \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i} \otimes x_i - (id \otimes P)(\sum_{i=1}^{n} 1_{E_i} \otimes x_i) \parallel^p \\ = & \parallel (id \otimes P)(f) \parallel^p + \parallel f - ((id \otimes P)(f) \parallel^p \end{aligned}$$

بنا به قضیه ۱۱.۱.۱ توابع ساده در $L^p(I,X)$ چگالند. بنابراین داریم:

$$\parallel f \parallel^p = \parallel (id \otimes P)(f) \parallel^p + \parallel f - (id \otimes P)(f) \parallel^p, \forall f \in L^p(I,X)$$

پس G $L^p(I) \otimes_{\alpha(p)}$ یک L^p - جمعوند از $L^p(I) \otimes_{\alpha(p)} X$ است. □

۵.۳ نامساوی فاصله

در این بخش، یک نامساوی فاصله برای مفهوم بهترین تقریب همزمان در $L^p(I,X)$ بیان می گردد.

تعریف ۱.۵.۳. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. برای $p \geq 1$ تعریف می کنیم

$$X \bigoplus_p X = \{(x,y) : x,y \in X\}$$

که $\parallel (x,y) \parallel = (\parallel x \parallel^p + \parallel y \parallel^p)^{\frac{1}{p}}$ و

$$D(G) = \{(g,g) : g \in G\}$$

که $\parallel (g,g) \parallel = (\parallel g \parallel^p + \parallel g \parallel^p)^{\frac{1}{p}}$ است.

قضیه ۲.۵.۳. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد، $f_۱, f_۲ \in L^p(I, X)$ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. اگر

$$\phi(t) = d_p((f_۱(t), f_۲(t)), D(G))$$

در این صورت $\phi \in L^p(I, R)$ است و

$$(\int_I \mid \phi(t) \mid^p dt)^{\frac{۱}{p}} \leqslant d_p((f_۱, f_۲), D(L^p(I, X)))$$

اثبات. فرض کنید $f_۱, f_۲ \in L^p(I, X)$ باشند. در این صورت بنا به قضیه ۱۱.۱.۱ دو دنباله $\{f_{۱n}\}, \{f_{۲n}\}$ از توابع اندازه پذیر ساده وجود دارند به قسمی که:

$$\lim \parallel f_۱(t) - f_{۱n}(t) \parallel = ۰, \lim \parallel f_۲(t) - f_{۲n}(t) \parallel = ۰$$

ثابت می کنیم که ϕ اندازه پذیر است. تابع فاصله، تابعی پیوسته است. پس طبق تعریف پیوستگی داریم:

$$\lim d_p((f_{۱n}(t), f_{۲n}(t)), D(G)) = d_p((f_۱(t), f_۲(t)), D(G))$$

$f_{۱n}(t), f_{۲n}(t)$ توابعی ساده هستند. لذا طبق تعریف تابع ساده می توان آنها را به صورت زیر نمایش داد:

$$f_{۱n}(t) = \sum_{i=۱}^{n} ۱_{E_i} \otimes x_i, f_{۲n}(t) = \sum_{i=۱}^{n} ۱_{E_i} \otimes y_i$$

فرض کنید که E_i ها به ازای $i = ۱, ۲, \cdots, n$ دو به دو از هم جدا هستند ، $\sum_{i=۱}^{n} ۱_{E_i} = ۱$ که ۱ تابع ثابت ۱ است و $\cup_{i=۱}^{n} E_i = I$.

فرض کنید

$$\phi_n(t) = inf\{(\parallel f_{۱n}(t) - z \parallel^p + \parallel f_{۲n}(t) - z \parallel^p)^{۱/p} : z \in G\}$$

پس

$$\begin{aligned}
\phi_n(t) &= inf\{(\| f_{1n}(t) - z \|^p + \| f_{2n}(t) - z \|^p)^{\frac{1}{p}} : z \in G\} \\
&= inf\{(\| \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i} \otimes x_i - z \|^p + \| \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i} \otimes y_i - z \|^p)^{\frac{1}{p}} : z \in G\} \\
&= inf\{(\sum_{i=1}^{n} 1_{E_i}(t) \| x_i - z \|^p + \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i}(t) \| y_i - z \|^p)^{\frac{1}{p}} : z \in G\} \\
&= inf\{\sum_{i=1}^{n} 1_{E_i}(t)(\| x_i - z \|^p + \| y_i - z \|^p)^{\frac{1}{p}} : z \in G\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i}(t) inf\{\| (x_i - z \|^p + \| y_i - z \|^p)^{\frac{1}{p}} : z \in G\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i}(t) d_p((x_i, y_i), D(G))
\end{aligned}$$

پس به ازای تمامی n ها، $\phi_n(t)$ یک تابع ساده است، لذا

$$\lim \| \phi_n(t) - \phi(t) \| = 0$$

و چون $\phi_n(t)$ اندازه پذیر است، پس $\phi(t)$ نیز اندازه پذیر است.

حال به اثبات نامساوی می پردازیم. فرض کنید$g \in L^p(I,G)$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
(\| f_1 - g \|^p + \| f_2 - g \|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\int_I \| f_1(t) - g(t) \|^p \, dt + \int_I \| f_2(t) - g(t) \|^p \, dt)^{\frac{1}{p}} \\
&= (\int_I \| (f_1(t) - g(t) \|^p + \| f_2(t) - g(t) \|^p \, dt)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq (\int_I d_p((f_1(t), f_2(t)), D(G))^p dt)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

با گرفتن اینفیمم روی هر $g \in L^p(I,G)$ خواهیم داشت:

$$(\int_I | \phi(t) |^p \, dt)^{\frac{1}{p}} \leqslant d_p((f_1, f_2), D(L^p(I,X)))$$

نامساوی اثبات شد. $\square$

قضایای زیر نتیجه ای از قضیه ۲.۵.۳ است.

قضیه ۳.۵.۳. فرض کنید X یک فضای باناخ و $f_1, f_2 \in L^1(I, X)$ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. اگر

$$\phi(t) = d_1((f_1(t), f_2(t)), D(G))$$

در این صورت $\phi \in L^1(I, R)$ است و خواهیم داشت:

$$\int_I \phi(t)dt = d_1((f_1, f_2), D(L^1(I, G))$$

اثبات. در قضیه ۲.۵.۳، با قرار دادن $p = 1$ قضیه ثابت می شود. □

قضیه ۴.۵.۳. فرض کنید X یک فضای باناخ، G یک زیر فضای بسته از X و $f_1, f_2 \in L^1(I, X)$ توابع ساده باشند. در این صورت داریم:

$$(\int_I d_p((f_1(t), f_2(t)), D(G))^p dt)^{\frac{1}{p}} = d_p((f_1, f_2), D(L^p(I, G))$$

اثبات. بنا به قضیه ۲.۵.۳ کافی است که نشان دهیم

$$d_p((f_1, f_2), L^p(I, G)) \leq (\int_I d_p((f_1(t), f_2(t)), D(G))^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

فرض کنید $\epsilon > 0$ و f'_1, f'_2 دو تابع ساده باشند. به طور مشابه با استفاده از روش اثبات قضیه ۲.۵.۳ نتیجه می گیریم:

$$d_p((f_1, f_2), L^p(I, G)) \leq \frac{\epsilon}{2} + (\int_I d_p((f_1(t), f_2(t)), D(G))^p dt)^{\frac{1}{p}} \tag{۳.۳}$$

چون ϵ دلخواه است لذا نامساوی ثابت شد.

از ۳.۳ و قضیه ۲.۵.۳ نتیجه می گیریم که

$$(\int_I d_p((f_1(t), f_2(t)), D(G))^p dt)^{\frac{1}{p}} = d_p((f_1, f_2), D(L^p(I, G))$$

□

قضیه ۵.۵.۳. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. در این صورت برای تابع اندازه پذیر $g: I \to G$ عبارات زیر معادلند:

۱. برای $f_۱, f_۲ \in L^p(I,G)$ اگر $g(t)$ یک بهترین تقریب همزمان برای $f_۱(t), f_۲(t)$ در X از G باشد آنگاه g یک بهترین تقریب همزمان برای $f_۱, f_۲$ از $L^p(I,G)$ است.

۲. اگر g یک بهترین تقریب همزمان برای دو تابع ساده $f_۱, f_۲ \in L^p(I,X)$ از $L^p(I,G)$ باشد آنگاه $g(t)$ یک بهترین تقریب همزمان برای $f_۱(t), f_۲(t)$ در X از G است.

اثبات. ۱. فرض کنید $g(t)$ یک بهترین تقریب همزمان برای $f_۱(t), f_۲(t)$ در X از G باشد. در این صورت برای هر $z \in G$ خواهیم داشت:

$$(\| f_۱(t) - g(t) \|^p + \| f_۲(t) - g(t) \|^p)^{\frac{۱}{p}} \leq (\| f_۱(t) - z \|^p + \| f_۲(t) - z \|^p)^{\frac{۱}{p}}$$

در ابتدا نشان می دهیم که $g \in L^p(I,G)$ است. طرفین را در $۲^{p-۱}$ ضرب می کنیم. خواهیم داشت:

$$۲^{p-۱}(\| f_۱(t) - g(t) \|^p + \| f_۲(t) - g(t) \|^p) \leq ۲^{p-۱}(\| f_۱(t) - z \|^p + \| f_۲(t) - z \|^p)$$

از لم ۴.۲.۳ نتیجه می گیریم:

$$\| f_۱(t) + f_۲(t) - ۲g(t) \|^p \leq ۲^{p-۱}(\| f_۱(t) - z \|^p + \| f_۲(t) - z \|^p)$$

پس

$$\begin{aligned}
(\| ۲g(t) \| - \| f_۱(t) + f_۲(t) \|)^p &\leq ۲^{p-۱}(\| f_۱(t) - z \|^p + \| f_۲(t) - z \|^p) \\
\| ۲g(t) \| &\leq ۲^{\frac{p-۱}{p}}(\| f_۱(t) - z \|^p + \| f_۲(t) - z \|^p)^{\frac{۱}{p}} + \| f_۱(t) + f_۲(t) \| \\
\| g(t) \| &\leq ۲^{\frac{-۱}{p}}((\| f_۱(t) - z \|^p + \| f_۲(t) - z \|^p)^{\frac{۱}{p}} + \frac{۱}{۲} \| f_۱(t) + f_۲(t) \| \\
\| g(t) \|^p &\leq \frac{۱}{۲}(\| f_۱(t) - z \|^p + \| f_۲(t) - z \|^p) + \frac{۱}{۲^p} \| f_۱(t) + f_۲(t) \|^p
\end{aligned}$$

بنابراین $g \in L^p(I,G)$ است.

حال فرض کنید $h \in L^p(I,G)$ دلخواه باشد. چون طبق فرض $g(t)$ یک بهترین تقریب همزمان برای $f_1(t), f_2(t)$ است. بنابراین

$$(\| f_1(t) - g(t) \|^p + \| f_2(t) - g(t) \|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\| f_1(t) - h(t) \|^p + \| f_2(t) - h(t) \|^p)^{\frac{1}{p}}$$

با گرفتن سوپریمم از دو طرف نامساوی بالا نتیجه می گیریم که:

$$(\| f_1 - g \|^p + \| f_2 - g \|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\| f_1 - h \|^p + \| f_2 - h \|^p)^{\frac{1}{p}}$$

چون $h \in L^p(I,G)$ دلخواه بود. لذا داریم:

$$\begin{aligned}
(\| f_1 - g \|^p + \| f_2 - g \|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq (\| f_1 - h \|^p + \| f_2 - h \|^p)^{\frac{1}{p}} \\
(\| f_1 - g \|^p + \| f_2 - g \|^p)^{\frac{1}{p}} &= \inf\{(\| f_1 - h \|^p + \| f_2 - h \|^p)^{\frac{1}{p}} : h \in L^p(I,G)\} \\
(\| f_1 - g \|^p + \| f_2 - g \|^p)^{\frac{1}{p}} &= d_p((f_1, f_2), D(L^p(I,G)))
\end{aligned}$$

۲. فرض کنید g یک بهترین تقریب همزمان برای دو تابع ساده $f_1, f_2 \in L^p(I,X)$ از $L^p(I,G)$ باشد. بنا به قضیه ۴.۵.۳ داریم:

$$(\| f_1 - g \|^p + \| f_2 - g \|^p)^{\frac{1}{p}} = (\int_I d_p((f_1(t), f_2(t)), D(G))^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

پس

$$\int_I (\| f_1(t) - g(t) \|^p + \| f_2(t) - g(t) \|^p) dt = \int_I d_p((f_1(t), f_2(t)), D(G))^p dt$$

لذا خواهیم داشت:

$$(\| f_1(t) - g(t) \|^p + \| f_2(t) - g(t) \|^p)^{\frac{1}{p}} = d_p((f_1(t), f_2(t)), D(G))$$

پس $g(t)$ یک بهترین تقریب همزمان برای $f_1(t), f_2(t)$ در X از G است.

□

قضیه ۶.۵.۳. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. اگر $L^p(I,G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $L^p(I,X)$ باشد آنگاه G به طور همزمان پروکسیمینال در X است.

اثبات. فرض کنید $x,y \in X$ باشند. قرار می دهیم $f_x = 1 \otimes x, f_y = 1 \otimes y$ که ۱ تابع ثابت ۱ روی I است. چون (I,μ) یک فضای اندازه متناهی است بنا براین $1 \in L^p(I)$ است. لذا بنا به لم ۶.۴.۳، $f_x, f_y \in L^p(I,X)$ می باشند.

همچنین بنا به فرض قضیه $L^p(I,G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $L^p(I,X)$ است لذا g ای متعلق به $L^p(I,G)$ وجود دارد به قسمی که:

$$(\| f_x - g \|^p + \| f_y - g \|^p)^{\frac{1}{p}} = d_p((f_x,f_y),D(L^p(I,G)))$$

طبق قضیه ۵.۵.۳ داریم:

$$\| f_x(t) - g(t) \|^p + \| f_y(t) - g(t) \|^p = d_p((f_x(t),f_y(t)),D(G))^p$$

پس

$$\| x - g(t) \|^p + \| y - g(t) \|^p = d_p((x,y),D(G))^p$$

لذا برای یک $t_\circ \in I$ داریم:

$$(\| x - g(t_o) \|^p + \| y - g(t_\circ) \|^p)^{\frac{1}{p}} = d_p((x,y),D(G))$$

پس $g(t_\circ)$ یک بهترین تقریب همزمان برای x,y در X از G است. □

فصل ۴

بهترین تقریب همزمان در $L^{\infty}(I,X)$

۱.۴ مقدمه

در این فصل به بررسی مفهوم بهترین تقریب همزمان در $L^{\infty}(I,X)$ می پردازیم. در ابتدا مفهوم بهترین تقریب همزمان را در $L^{\infty}(I,X)$ تعریف کرده و سپس یک فرمول فاصله برای آن ارائه می دهیم. در این فصل از مرجع [۶] استفاده شده است.

۲.۴ تعریف بهترین تقریب همزمان در $L^{\infty}(I,X)$

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. تعریف می کنیم

$$Y = X \bigoplus_{\infty} X = \{(x,y) : x, y \in X\}$$

به قسمی که

$$\| (x,y) \| = \max\{\| x \|, \| y \|\}$$

و $D(G) = \{(g,g) : g \in G\}$ به طوریکه

$$\| (g,g) \| = \| g \|$$

تعریف ۲.۲.۴. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. می گوییم G به طور همزمان

پروکسیمینال در X است اگر برای هر $(x_1,x_2)\in X$، z ای متعلق به G موجود باشد به قسمی که:

$$\begin{aligned} d_\infty((x_1,x_2),D(G)) &= \inf_{g\in G}\max\{\| x_1-g \|,\| x_2-g \|\} \\ &= \max\{\| x_1-z \|,\| x_2-z \|\} \end{aligned}$$

در این صورت z یک بهترین تقریب همزمان برای x_1,x_2 نامیده می شود.

فرض کنید $I=[0,1]$ و $L^\infty(I,X)$ فضای توابع به طور اساسی کراندار با مقادیری در فضای باناخ X باشد.

۳.۴ فرمول فاصله

در این بخش یک فرمول فاصله برای مفهوم بهترین تقریب همزمان در $L^\infty(I,X)$ ارائه می دهیم. این فرمول در مساله بهترین تقریب همزمان در $L^\infty(I,X)$ نقش اساسی دارد.

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. برای f_1,f_2 متعلق به $L^\infty(I,X)$ اگر $\phi:I\to R$ و

$$\phi(t)=d_\infty((f_1(t),f_2(t)),D(G))$$

باشد. در این صورت $\phi\in L^\infty(I,R)$ است و خواهیم داشت:

$$\| \phi(t) \|_\infty = d_\infty((f_1,f_2),D(L^\infty(I,X))$$

اثبات. در ابتدا نشان می دهیم که ϕ اندازه پذیر است. فرض کنید $f_1,f_2\in L^\infty(I,X)$ توابعی اندازه پذیر باشند. در این صورت بنا به قضیه ۱۱.۱.۱ دو دنباله از توابع ساده $\{f_{1n}\}$ و $\{f_{2n}\}$ وجود دارند به قسمی که:

$$\lim_{n\to\infty}\| f_{1n}(t)-f_1(t) \| = \lim_{n\to\infty}\| f_{2n}(t)-f_2(t) \| = 0$$

$f_{1n}(t),f_{2n}(t)$ توابعی ساده هستند. لذا طبق تعریف تابع ساده می توان آنها را به صورت زیر نمایش داد:

$$f_{1n}(t)=\sum_{i=1}^{n} 1_{E_i}\otimes x_i,\ f_{2n}(t)=\sum_{i=1}^{n} 1_{E_i}\otimes y_i$$

فرض کنید که E_i ها به ازای $i=۱,۲,\cdots,n$ دو به دو از هم جدا هستند و $\sum_{i=۱}^{n} ۱_{E_i}=۱$ است که ۱ تابع ثابت ۱ است و $\cup_{i=۱}^{n} E_i = I$.

از اینکه تابع فاصله $d_\infty((x,y),D(G))$ برای هر $(x,y)\in X\bigoplus_\infty X$ پیوسته است و

$$\lim(f_{۱n}(t),f_{۲n}(t))=(f_۱(t),f_۲(t))$$

نتیجه می گیریم که:

$$\lim d_\infty((f_{۱n}(t),f_{۲n}(t)),D(G))=d_\infty((f_۱(t),f_۲(t)),D(G))$$

اگر $\phi_n(t)=d_\infty((f_{۱n}(t),f_{۲n}(t)),D(G))$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\phi_n(t) &= \inf_{g\in G}\max\{\| \sum_{i=۱}^{n} ۱_{E_i}\otimes x_i-g \|,\| \sum_{i=۱}^{n} ۱_{E_i}\otimes y_i-g \|\}\\ &= \sum_{i=۱}^{n} ۱_{E_i}(t)\inf_{g\in G}\max\{\| x_i-g \|,\| y_i-g \|\}\end{aligned}$$

بنابراین برای هر n، ϕ_n یک تابع ساده است. همچنین داریم

$$\lim \mid \phi_n(t)-\phi(t) \mid = ۰$$

پس ϕ اندازه پذیر است. قسمت اول قضیه ثابت شد.

حال به اثبات فرمول فاصله می پردازیم. فرض کنید $g\in L^\infty(I,G)$ باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}\| f_۱(t)-g(t) \| &\leq \max\{\| f_۱(t)-g(t) \|,\| f_۲(t)-g(t) \|\}\\ &\leq \max\{\| f_۱-g \|_\infty,\| f_۲-g \|_\infty\}\end{aligned}$$

که ایجاب می کند:

$$\begin{aligned}\| f_۱-g \|_\infty &\leq ess\sup\max\{\| f_۱(t)-g(t) \|,\| f_۲(t)-g(t) \|\}\\ &\leq \max\{\| f_۱-g \|_\infty,\| f_۲-g \|_\infty\} \qquad (۱.۴)\end{aligned}$$

به طور مشابه داریم:

$$\| f_۲ - g \|_\infty \quad \leq \quad \max\{\| f_۱ - g \|_\infty, \| f_۲ - g \|_\infty\} \qquad (۲.۴)$$

بنابراین از ۱.۴ و ۲.۴ خواهیم داشت:

$$ess\sup\max\{\| f_۱(t) - g(t) \|, \| f_۲(t) - g(t) \|\} \quad = \quad \max\{\| f_۱ - g \|_\infty, \| f_۲ - g \|_\infty\} \qquad (۳.۴)$$

می دانیم که:

$$\begin{aligned} & ess\sup\inf_{h\in G}\max\{\| f_۱(t) - h \|, \| f_۲(t) - h \|\} \\ \leq \quad & ess\sup\max\{\| f_۱(t) - g(t) \|, \| f_۲(t) - g(t) \|\} \end{aligned} \qquad (۴.۴)$$

بنابراین با استفاده از ۳.۴ و ۴.۴ و اینکه g دلخواه است برای تمامی $g \in L^\infty(I,G)$ خواهیم داشت:

$$ess\sup d_\infty((f_۱(t), f_۲(t)), D(G)) \leq \max\{\| f_۱ - g \|_\infty, \| f_۲ - g \|_\infty\}$$

پس نتیجه می گیریم که:

$$\| \phi \|_\infty \quad \leq \quad d_\infty((f_۱, f_۲), D(L^\infty(I,G))) \qquad (۵.۴)$$

حال به اثبات عکس نامساوی می پردازیم. فرض کنید $\epsilon > ۰$ باشد و $f'_۱$ و $f'_۲$ توابعی با مقادیر قابل شمارش در $L^\infty(I,X)$ باشند به قسمی که:

$$\| f_۱ - f'_۱ \|_\infty < \frac{\epsilon}{۳}, \| f_۲ - f'_۲ \|_\infty < \frac{\epsilon}{۳}$$

که $f'_۱ = \sum_{i=۱}^{\infty} ۱_{A_i} \otimes x_i$ و $f'_۲ = \sum_{i=۱}^{\infty} ۱_{A_i} \otimes y_i$ که ۱ تابع ثابت است و برای هر i، $\mu(A_i) > ۰$ است و $\cup_{i=۱}^{\infty} A_i = ۱$ است.

فرض کنید برای هر $h_i \in G$ داشته باشیم:

$$\max\{\| x_i - h_i, \| y_i - h_i \|\} < d_\infty((x_i, y_i), D(G)) + \frac{\varepsilon}{۳}$$

و $h_i \otimes 1_{A_i} \sum_{i=1}^{\infty} = g$ باشد. بنابراین بنا به لم ۶.۴.۳ ، $g \in L^{\infty}(I,G)$ است. همچنین داریم:

$$d_{\infty}((f_1,f_2),D(L^{\infty}(I,G))$$

$$\leq d_{\infty}((f_1,f_2),(f'_1,f'_2)) + d_{\infty}((f'_1,f'_2),D(L^{\infty}(I,G)))$$

$$\leq \max\{\| f_1 - f'_1 \|_{\infty}, \| f_2 - f'_2 \|_{\infty}\} + d_{\infty}((f'_1,f'_2),D(L^{\infty}(I,G)))$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + d_{\infty}((f'_1,f'_2),D(L^{\infty}(I,G)))$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \max\{\| f'_1 - g \|_{\infty}, \| f'_2 - g \|_{\infty}\}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + ess\sup \max\{\| f'_1(t) - g(t) \|, \| f'_2(t) - g(t) \|\}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + ess\sup \max\{\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i}(t) \| x_i - h_i \|, \sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i}(t) \| y_i - h_i \|\}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + ess\sup \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i}(t) \max\{\| x_i - h_i \|, \| y_i - h_i \|\}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + ess\sup \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i}(t) d_{\infty}((x_i,y_i),D(G)) + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{3} + ess\sup d_{\infty}((f'_1(t),f'_2(t)),D(G))$$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{3} + ess\sup d_{\infty}((f_1(t),f_2(t)),D(G)) + \max\{\| f_1(t) - f'_1(t) \|, \| f_2(t) - f'_2(t) \|\}$$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{3} + ess\sup d_{\infty}((f_1(t),f_2(t)),D(G)) + ess\sup \max\{\| f_1(t) - f'_1(t) \|, \| f_2(t) - f'_2(t) \|\}$$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{3} + ess\sup d_{\infty}((f_1(t),f_2(t)),D(G)) + \max\{\| f_1 - f'_1 \|_{\infty}, \| f_2 - f'_2 \|_{\infty}\}$$

$$\leq \varepsilon + ess\sup d_{\infty}((f_1(t),f_2(t)),D(G))$$

$$\leq \varepsilon + \| \phi \|_{\infty}$$

و چون ϵ دلخواه بود . پس

$$d_\infty((f_1,f_2),D(L^\infty(I,G)) \quad \leq \quad \| \phi \|_\infty \tag{۶.۴}$$

بنابراین از ۵.۴ و ۶.۴ نتیجه می گیریم که:

$$\| \phi \|_\infty = d_\infty((f_1,f_2),D(L^\infty(I,X))$$

□

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. فرض کنید $f_1,f_2 \in L^\infty(I,X)$ باشند. اگر $f(t)$ یک بهترین تقریب همزمان برای $f_1(t)$ و $f_2(t)$ در X از G باشد. در این صورت f یک بهترین تقریب همزمان برای f_1 و f_2 در $L^\infty(I,X)$ از $L^\infty(I,G)$ است.

اثبات. فرض کنید $f(t)$ یک بهترین تقریب همزمان برای $f_1(t)$ و $f_2(t)$ در X از G باشد. در این صورت برای هر $z \in G$ داریم:

$$\max\{\| f_1(t)-f(t) \|, \| f_2(t)-f(t) \|\} \leq \max\{\| f_1(t)-z \|, \| f_2(t)-z \|\} \tag{۷.۴}$$

در ابتدا نشان می دهیم که f متعلق به $L^\infty(I,G)$ است. با استفاده از خواص نرم داریم:

$$\| f(t) \| - \| f_1(t) \| \leq \| f_1(t)-f(t) \| \tag{۸.۴}$$

و همچنین از ۷.۴ خواهیم داشت:

$$\| f_1(t)-f(t) \| \leq \max\{\| f_1(t)-z \|, \| f_2(t)-z \|\}$$

بنابراین با استفاده از ۷.۴ و ۸.۴ و جایگذاری $z=0$ خواهیم داشت:

$$\| f(t) \| - \| f_1(t) \| \leq \max\{\| f_1(t) \|, \| f_2(t) \|\}$$

لذا داریم:

$$\| f(t) \| \leq \max\{\| f_1(t) \|, \| f_2(t) \|\} + \| f_1(t) \|$$

پس نتیجه می گیریم که:

$$\| f(t) \| \leq 2 \max\{\| f_1(t) \|, \| f_2(t) \|\}$$

و همچنین :

$$\| f \|_\infty \leq 2 \max\{\| f_1 \|_\infty, \| f_2 \|_\infty\}$$

پس $f \in L^\infty(I,G)$ است. با استفاده از قضیه ۱.۳.۴ داریم:

$$ess \sup d_\infty((f_1(t), f_2(t)), D(G)) = d_\infty((f_1, f_2), D(L^\infty(I,G))$$

و چون $f(t)$ یک بهترین تقریب همزمان برای $f_1(t)$ و $f_2(t)$ در X از G است بنابراین

$$ess \sup \max\{\| f_1(t) - f(t) \|, \| f_2(t) - f(t) \|\} = d_\infty((f_1, f_2), D(L^\infty(I,G))$$

پس

$$\max\{\| f_1 - f \|_\infty, \| f_2 - f \|_\infty\} = d_\infty((f_1, f_2), D(L^\infty(I,G))$$

لذا f یک بهترین تقریب همزمان برای f_1 و f_2 در $L^\infty(I,X)$ از $L^\infty(I,G)$ است. □

لم ۳.۳.۴. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. در این صورت:

۱. $D(L^\infty(I,G)) = L^\infty(I, D(G))$

۲. $L^\infty(I,G) \bigoplus_\infty L^\infty(I,G) = L^\infty(I, G \bigoplus_\infty G)$

اثبات. قسمت دوم را ثابت می کنیم. قسمت اول اثباتی مشابه دارد. فرض کنید f_1, f_2 دو تابع باشند که

$$f_1, f_2 : I \to G$$

و $f(t)=(f_۱(t),f_۲(t))$ باشد و $f\in L^\infty(I,G\bigoplus_\infty G)$ باشد .

چون f یک تابع اندازه پذیر است ، $f_۱$ و $f_۲$ نیز توابعی اندازه پذیرند زیرا:

$$\max\{\| f_۱(t)\|,\| f_۲(t)\|\}\leq \| f(t)\|\leq \| f\|_\infty$$

پس $f_۱,f_۲\in L^\infty(I,G)$ هستند. حال داریم

$$\| f_۱(t)\| \quad \leq \quad \max\{\| f_۱(t)\|,\| f_۲(t)\|\}\leq \max\{\| f_۱\|_\infty,\| f_۲\|_\infty\}$$

پس

$$\| f_۱\|_\infty\leq ess\sup\max\{\| f_۱(t)\|,\| f_۲(t)\|\}\leq \max\{\| f_۱\|_\infty,\| f_۲\|_\infty\}$$

به طور مشابه

$$\| f_۲\|_\infty\leq ess\sup\max\{\| f_۱(t)\|,\| f_۲(t)\|\}\leq \max\{\| f_۱\|_\infty,\| f_۲\|_\infty\}$$

پس خواهیم داشت:

$$ess\sup\max\{\| f_۱(t)\|,\| f_۲(t)\|\}=\max\{\| f_۱\|_\infty,\| f_۲\|_\infty\} \tag{۹.۴}$$

نگاشت ϕ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\phi: L^\infty(I,G\bigoplus_\infty G)\to L^\infty(I,G)\bigoplus_\infty L^\infty(I,G)$$

که $\phi(f)=(f_۱,f_۲)$ است. حال با استفاده از ۹.۴ و تعریف ۱.۲.۴ نشان می دهیم که ϕ یک عملگر ایزومتریک

است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \| \phi(f) \| &= \max\{\| f_1 \|_\infty, \| f_2 \|_\infty\} \\ &= ess \sup \max\{\| f_1(t) \|, \| f_2(t) \|\} \\ &= ess \sup \| f(t) \| \\ &= \| f \|_\infty \end{aligned}$$

و قضیه ثابت شد. □

قضیه ۴.۳.۴. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند:

۱. $L^\infty(I, D(G))$ پروکسیمینال در $L^\infty(I, X \bigoplus_\infty X)$ است.

۲. $D(L^\infty(I, G))$ به طور همزمان پروکسیمینال در $L^\infty(I, X) \bigoplus_\infty L^\infty(I, X)$ است.

اثبات. با استفاده از لم ۳.۳.۴، $L^\infty(I, D(G))$ پروکسیمینال در $L^\infty(I, X \oplus_\infty X)$ است اگر و فقط اگر $D(L^\infty(I, G))$ به طور همزمان پروکسیمینال در $L^\infty(I, X) \bigoplus_\infty L^\infty(I, X)$ باشد. □

فصل ۵

بهترین تقریب همزمان در فضای توابع و عملگرها

۱.۵ مقدمه

در این فصل به بررسی مفهوم بهترین تقریب همزمان در فضای توابع و عملگرها می پردازیم. مفهوم بهترین تقریب همزمان را در فضای توابع پیوسته X مقدار روی فضای هاسدورف فشرده S مورد مطالعه قرار داده ، مفهوم نگاشت تقریب همزمان را تعریف می کنیم. سپس خواص آن را بیان و اثبات کرده رابطه آن را با مفهوم بهترین تقریب همزمان بیان می کنیم. در انتها تعریفی از مفهوم M - جمعوند ارائه داده و نقش آن را در بهترین تقریب همزمان بررسی می کنیم. در این فصل از مرجع [۲] و [۳] استفاده شده است.

۲.۵ نگاشت تقریب همزمان

تعریف ۱.۲.۵. فرض کنید S یک فضای هاسدورف فشرده و X یک فضای باناخ باشد. در این صورت $L^\infty(S,X)$ فضای باناخ تمامی توابع کراندار از S به X است که نرم تعریف شده بر آن به صورت زیر است:

$$\| f \| = \sup_{s\in S} \| f(s) \|$$

تعریف ۲.۲.۵. فرض کنید S یک فضای هاسدورف فشرده و X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. $C(S,G)$ زیر مجموعه ای از $L^\infty(S,X)$ است که شامل تمامی توابع پیوسته است.

تعریف ۳.۲.۵. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند. در این صورت $L(X,Y)$ فضای باناخ تمامی عملگر های خطی کراندار از X به Y است.

تعریف ۴.۲.۵. فرض کنید $x_۱, x_۲ \in X$ باشند. $P_G(x_۱, x_۲)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$P_G(x_۱, x_۲) = \{g \in G : d(\{x_۱, x_۲\}, G) = \max\{\|x_۱ - g\|, \|x_۲ - g\|\}\}$$

اگر G به طور همزمان پروکسیمینال در X باشد آنگاه $P_G(x_۱, x_۲)$ برای هر $x_۱, x_۲ \in X$ ناتهی است.

تعریف ۵.۲.۵. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. اگر G به طور همزمان پروکسیمینال در X باشد. در این صورت منظور از نگاشت تقریب همزمان [۱]

$$\Pi_G : X \bigoplus_{\infty} X \to G$$

است که هر عضو $(x_۱, x_۲) \in X \bigoplus_{\infty} X$ را به عضوی در $P_G(x_۱, x_۲)$ می نگارد.

قضیه ۶.۲.۵. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. در این صورت اگر G به طور همزمان پروکسیمینال در X باشد و $\Pi_G : X \bigoplus_{\infty} X \to G$ یک نگاشت تقریب همزمان باشد. در این صورت:

۱. برای هر $x_۱, x_۲$ متعلق به X داریم:

$$\Pi_G(\Pi_G(x_۱, x_۲), \Pi_G(x_۱, x_۲)) = \Pi_G(x_۱, x_۲)$$

۲. برای هر $x_۱, x_۲$ متعلق به X داریم:

$$\Pi_G(x_۱, x_۲) \leqslant ۲\|(x_۱, x_۲)\|$$

۳. برای هر $x_۱, x_۲$ متعلق به X و هر $g \in G$ داریم:

$$\Pi_G((x_۱, x_۲) + (g, g)) = \Pi_G(x_۱, x_۲) + g$$

[۱] Simultaneous Proximity map

۴. برای هر x_1, x_2 متعلق به X و عدد ثابت α داریم:

$$\Pi_G(\alpha(x_1, x_2)) = \alpha \Pi_G(x_1, x_2)$$

از خواص بالا نتیجه می گیریم که Π_G خطی و کراندار است لذا بنا به قضیه ۴۱.۱.۱ پیوسته است.

اثبات. ۱. برای هر $g \in G$ داریم $\Pi_G((g,g)) = g$. فرض کنید $(x_1, x_2) \in X \bigoplus_\infty X$ دلخواه باشد و $\Pi_G(x_1, x_2) = g$ باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Pi_G(\Pi_G(x_1, x_2), \Pi_G(x_1, x_2)) &= \Pi_G((g,g)) \\ &= \Pi_G(x_1, x_2) \end{aligned}$$

۲. برای هر (x_1, x_2) و (y_1, y_2) متعلق به $X \bigoplus_\infty X$ داریم:

$$\begin{aligned} \| (x_1, x_2) - \Pi_G(x_1, x_2) \| &\leq \| (x_1, x_2) - \Pi_G(y_1, y_2) \| \\ &\leq \| (x_1, x_2) - (y_1, y_2) \| + \| (y_1, y_2) - \Pi_G(y_1, y_2) \| \end{aligned} \tag{۱.۵}$$

از ۱.۵ نتیجه می گیریم که:

$$\| (x_1, x_2) - \Pi_G(x_1, x_2) \| - \| (y_1, y_2) - \Pi_G(y_1, y_2) \| \leq \| (x_1, x_2) - (y_1, y_2) \|$$

$\Pi_G(0, 0) = 0$ است. لذا با قرار دادن $y = (0, 0)$ داریم:

$$\| (x_1, x_2) - \Pi_G(x_1, x_2) \| \leq \| (x_1, x_2) \| \tag{۲.۵}$$

حال با استفاده از خواص نرم نتیجه می گیریم که:

$$\| \Pi_G(x_1, x_2) \| \leq \| \Pi_G(x_1, x_2) - (x_1, x_2) \| + \| (x_1, x_2) \| \tag{۳.۵}$$

از ۲.۵ و ۳.۵ داریم:

$$\begin{aligned} \| \Pi_G(x_1, x_2) \| &\leq \| \Pi_G(x_1, x_2) - (x_1, x_2) \| + \| (x_1, x_2) \| \\ &\leq 2 \| (x_1, x_2) \| \end{aligned}$$

۳. برای هر x_1, x_2 متعلق به X داریم:

$$\begin{aligned} \Pi_G((x_1, x_2) + (g, g)) &= P_G((x_1, x_2) + (g, g)) \\ &= P_G(x_1, x_2) + P_G(g, g) \\ &= P_G(x_1, x_2) + g \\ &= \Pi_G(x_1, x_2) + g \end{aligned}$$

۴. برای هر x_1, x_2 متعلق به X و عدد ثابت α داریم:

$$\begin{aligned} \Pi_G(\alpha(x_1, x_2)) &= P_G(\alpha(x_1, x_2)) \\ &= \alpha P_G(x_1, x_2) \\ &= \alpha \Pi_G(x_1, x_2) \end{aligned}$$

□

۳.۵ M - تصویر و M - جمعوند

تعریف ۱.۳.۵. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. یک تصویر خطی $P : X \to G$، M- تصویر [۲] نامیده می شود هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$\| x \| = \max\{\| P(x) \|, \| x - P(x) \|\}$$

[۲] M - projection

یک زیرفضای بسته $G \subseteq X$، یک M - جمعوند نامیده می شود هر گاه در برد یک M - تصویر باشد.

قضیه ۲.۳.۵. فرض کنید G یک زیرفضای M - جمعوند از X باشد. در این صورت G به طور همزمان پروکسیمینال در X است. به علاوه G دارای یک نگاشت تقریب همزمان خطی است.

اثبات. فرض کنید $x_۱, x_۲ \in X$ و $\theta = \frac{P(x_۱)+P(x_۲)}{۲}$ باشد. بنا به فرض G یک زیرفضای M - جمعوند از X است. پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \| x_۱ - \theta \| &= \| x_۱ - \frac{P(x_۱)+P(x_۲)}{۲} \| \\ &= \| x_۱ - P(x_۱) + \frac{۱}{۲}(P(x_۱) - P(x_۲)) \| \\ &= \max\{\| x_۱ - P(x_۱) \|, \frac{۱}{۲} \| P(x_۱) - P(x_۲) \|\} \end{aligned}$$

به طور مشابه

$$\| x_۲ - \theta \| = \max\{\| x_۲ - P(x_۲) \|, \tfrac{۱}{۲} \| P(x_۱) - P(x_۲) \|\}$$

بنابراین داریم:

$$\max\{\| x_۱ - \theta \|, \| x_۲ - \theta \|\} \leq \max\{\| x_۱ - P(x_۱) \|, \| x_۲ - P(x_۲) \|, \frac{۱}{۲} \| P(x_۱) - P(x_۲) \|\} \tag{۴.۵}$$

حال فرض کنید $z \in G$ باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \frac{۱}{۲} \| P(x_۱) - P(x_۲) \| &= \frac{۱}{۲} \| P(x_۱) - z + z - P(x_۲) \| \\ &\leq \frac{۱}{۲} \| P(x_۱) - z \| + \frac{۱}{۲} \| P(x_۲) - z \| \\ &\leq \max\{\| P(x_۱) - z \|, \| P(x_۲) - z \|\} \end{aligned} \tag{۵.۵}$$

با استفاده از ۴.۵ و ۵.۵ نتیجه می گیریم که:

$$\begin{aligned}\max\{\|x_۱-\theta\|,\|x_۲-\theta\|\} &\leq \max\{\max\{\|x_۱-P(x_۱)\|,\|P(x_۱)-z\|\},\\ &\max\{\|x_۲-P(x_۲)\|,\|P(x_۲)-z\|\}\}\\ &= \max\{\|x_۱-z\|,\|x_۲-z\|\}\end{aligned}$$

از اینکه G یک زیر فضای M - جمعوند از X است و اینکه $z\in G$ دلخواه است برای هر $z\in G$ داریم:

$$\max\{\| x_۱-\theta \|,\| x_۲-\theta \|\}\leq \max\{\| x_۱-z \|,\| x_۲-z \|\}$$

بنابراین $\theta\in G$ یک بهترین تقریب همزمان برای $x_۱,x_۲\in X$ است و G به طور همزمان پروکسیمینال در X است.

حال نگاشت Π را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Pi: X\bigoplus_{\infty} X\to G, \Pi(x_۱,x_۲)=\frac{P(x_۱)+P(x_۲)}{۲}$$

به وضوح طبق تعریف نگاشت تقریب همزمان، Π یک نگاشت تقریب همزمان است. خطی بودن آن نیز از خطی بودن P نتیجه می شود. □

نتیجه ۳.۳.۵. فرض کنید G یک زیرفضای M - جمعوند از X باشد. در این صورت G دارای نگاشت تقریب همزمان پیوسته است.

اثبات. نتیجه ای از قضیه ۲.۳.۵ است. □

۴.۵ نتایج

در این قسمت به اثبات چند قضیه مهم می پردازیم.

قضیه ۱.۴.۵. فرض کنید S یک فضای هاسدورف فشرده و G یک زیر فضای بسته از فضای باناخ X باشد. در این صورت برای هر $f_۱,f_۲\in C(S,X)$ داریم:

$$d(f_۱, f_۲, C(S,G)) = d(f_۱, f_۲, L^\infty(S,G)) = \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G)$$

اثبات. $C(S,G) \subseteq L^\infty(S,G)$ است. پس داریم:

$$d(f_۱, f_۲, C(S,G)) \geq d(f_۱, f_۲, L^\infty(S,G)) \tag{۶.۵}$$

هم اکنون می خواهیم ثابت کنیم که

$$d(f_۱, f_۲, L^\infty(S,G)) \geq \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G)$$

اگر $g \in L^\infty(S,G)$ دلخواه باشد. خواهیم داشت:

$$\max\{\| f_۱(t) - g(t) \|, \| f_۲(t) - g(t) \|\} \geq d(f_۱(t), f_۲(t), G)$$

با گرفتن سوپریمم از دو طرف نامساوی خواهیم داشت:

$$\max\{\| f_۱ - g \|, \| f_۲ - g \|\} \geq \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G)$$

چون $g \in L^\infty(S,G)$ دلخواه بود. بنابراین نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} \inf_{g\in L^\infty(S,G)} \max\{\| f_۱ - g \|, \| f_۲ - g \|\} &\geq \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G) \\ d(f_۱, f_۲, L^\infty(S,G)) &\geq \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G) \end{aligned} \tag{۷.۵}$$

حال باید ثابت کنیم که:

$$d(f_۱, f_۲, C(S,G)) \leq \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G)$$

برای اثبات شرایط قضیه ۴۶.۱.۱ را بررسی می کنیم. فرض کنید $\lambda > \sup d(f_۱(t), f_۲(t), G)$ باشد. برای $t \in S$ ، $\phi(t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\phi(t) = \{h \in G : \max\{\| f_۱(t) - h \|, \| f_۲(t) - h \|\} \leq \lambda\} \tag{۸.۵}$$

لذا ϕ یک زیر مجموعه بسته غیر تهی از G است زیرا $\lambda > \sup d(f_1(t), f_2(t), G)$ است.

باید نشان داد که برای هر $t \in S$، $\phi(t)$ محدب است و ϕ یک نگاشت نیم پیوسته از پایین [3] است. برای این منظور فرض کنید $t \in S$ باشد و $h_1, h_2 \in \phi(t)$ و $0 \leq \alpha \leq 1$ باشند. چون $h_1, h_2 \in \phi(t)$ هستند. لذا طبق ۸.۵ داریم:

$$\max\{\| f_1(t) - h_1 \|, \| f_2(t) - h_1 \|\} \leq \lambda \tag{9.5}$$

و همچنین

$$\max\{\| f_1(t) - h_2 \|, \| f_2(t) - h_2 \|\} \leq \lambda \tag{10.5}$$

حال می خواهیم ثابت کنیم کهϕ محدب است. لذا با استفاده از ۹.۵ و ۱۰.۵ داریم:

$$\begin{aligned}
& \max\{\| f_1(t) - \alpha h_1 - (1-\alpha) h_2 \|, \| f_2(t) - \alpha h_1 - (1-\alpha) h_2 \|\} \\
= \; & \max\{\| f_1(t) - \alpha f_1(t) + \alpha f_1(t) - \alpha h_1 - (1-\alpha) h_2 \| \\
& , \| f_2(t) - \alpha f_2(t) + \alpha f_2(t) - \alpha h_1 - (1-\alpha) h_2 \|\} \\
\leq \; & \max\{\alpha \| f_1(t) - h_1 \| + (1-\alpha) \| f_1(t) - h_2 \|, \alpha \| f_2(t) - h_1 \| + (1-\alpha) \| f_2(t) - h_2 \|\} \\
\leq \; & \alpha \max\{\| f_1(t) - h_1 \|, \| f_2(t) - h_1 \|\} + (1-\alpha) \max\{\| f_1(t) - h_2 \|, \| f_2(t) - h_2 \|\} \\
\leq \; & \alpha\lambda + (1-\alpha)\lambda = \lambda
\end{aligned}$$

حال نشان می دهیم که ϕ یک نگاشت نیم پیوسته از پایین است. برای این منظور بنا به تعریف ۴۵.۱.۱ فرض کنید $\eth$ یک مجموعه باز در G باشد و قرار دهید:

$$\eth^* = \{t \in S : \phi(t) \cap \eth \neq \emptyset\}$$

[3] Lower semicontinuous

حال می خواهیم نشان دهیم $\eth^*$ باز است. فرض کنید $\sigma \in \eth^*$ باشد آنگاه داریم $\phi(\sigma) \cap \eth \neq \emptyset$. پس h ای متعلق به $\eth$ وجود دارد به قسمی که:

$$\max\{\| f_۱(\sigma) - h \|, \| f_۲(\sigma) - h \|\} \leq \lambda$$

با تعریفی که از λ داریم خواهیم داشت:

$$\lambda > \inf_{y \in G} \max\{\| f_۱(\sigma) - y \|, \| f_۲(\sigma) - y \|\}$$

در این صورت h' ای متعلق به G وجود دارد به قسمی که:

$$\max\{\| f_۱(\sigma) - h' \|, \| f_۲(\sigma) - h' \|\} < \lambda$$

طبق فرض $h \in \eth$ است. چون $\eth$ مجموعه ای باز بود، لذا طبق تعریف مجموعه باز ϵ ای بزرگتر از صفر موجود است به قسمی که:

$$B(h, \epsilon) = \{y \in G : \| y - h \| < \epsilon\} \subseteq \eth \tag{۱۱.۵}$$

فرض کنید $\delta = \frac{\epsilon}{۲\|h-h'\|}$ باشد. اگر $\| h - h' \| \geq ۱ + \frac{\epsilon}{۲}$ باشد. آنگاه خواهیم داشت:

$$\delta = \frac{\epsilon}{۲\|h-h'\|} \leq \frac{\epsilon}{۲(۱+\frac{\epsilon}{۲})} = \frac{\epsilon}{\epsilon+۲} \leq ۱$$

حال فرض کنید $h'' = (۱ - \delta)h + \delta h'$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\| h'' - h \| = \| (۱ - \delta)h + \delta h' - h' \| = \delta \| h - h' \| < \epsilon$$

پس $h'' \in B(h, \epsilon)$ است و طبق ۱۱.۵ نتیجه می گیریم که $h'' \in \eth$. چون $\phi(\sigma)$ محدب است لذا $h'' \in \phi(\sigma)$ است. پس خواهیم داشت:

$$\max\{\| f_۱(\sigma) - h'' \|, \| f_۲(\sigma) - h'' \|\} < \lambda \tag{۱۲.۵}$$

می خواهیم نشان دهیم که ∂^* باز است. فرض کنید N یک همسایگی از σ باشد به قسمی که برای هر $t \in N$ داشته باشیم:

$$\max\{\| f_1(\sigma) - f_1(t) \|, \| f_2(\sigma) - f_2(t) \|\} < \lambda - \max\{\| f_1(\sigma) - h'' \|, \| f_2(\sigma) - h'' \|\} \qquad (۱۳.۵)$$

طبق ۱۲.۵ این همسایگی موجود است. بنا بر ۱۳.۵ برای هر $t \in N$ داریم:

$$\begin{aligned}
& \max\{\| f_1(t) - h'' \|, \| f_2(t) - h'' \|\} \\
\leq \; & \max\{\| f_1(t) - f_1(\sigma) \| + \| f_1(\sigma) - h'' \|, \| f_2(t) - f_2(\sigma) \| + \| f_2(\sigma) - h'' \|\} \\
\leq \; & \max\{\| f_1(t) - f_1(\sigma) \|, \| f_2(t) - f_2(\sigma) \|\} + \max\{\| f_1(\sigma) - h'' \|, \| f_2(\sigma) - h'' \|\} \\
\leq \; & \lambda - \max\{\| f_1(\sigma) - h'' \|, \| f_2(\sigma) - h'' \|\} + \max\{\| f_1(\sigma) - h'' \|, \| f_2(\sigma) - h'' \|\} \\
\leq \; & \lambda
\end{aligned}$$

درنهایت داریم $h'' \in \phi(t) \cap \partial$ ، $t \in \partial^*$ و $N \subseteq \partial^*$. پس ∂^* باز است. لذا ϕ یک نگاشت نیم پیوسته از پایین است. شرایط قضیه ۴۶.۱.۱ برقرار است. بنا به قضیه ۴۶.۱.۱ ، g ای متعلق به $C(S,G)$ موجود است به قسمی که برای هر $t \in S$ ، $g(t) \in \phi(t)$ است. پس برای هر $t \in S$ داریم:

$$\max\{\| f_1(t) - g(t) \|, \| f_2(t) - g(t) \|\} \leq \lambda$$

لذا:

$$\max\{\| f_1 - g \|, \| f_2 - g \|\} \leq \lambda$$

بنابراین

$$d(f_1, f_2, C(S,G)) \leq \max\{\| f_1 - g \|, \| f_2 - g \|\} \leq \lambda$$

پس داریم:

$$d(f_۱, f_۲, C(S,G)) \leq \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G) \tag{۱۴.۵}$$

از ۶.۵، ۷.۵ و ۱۴.۵ نتیجه می گیریم که:

$$d(f_۱, f_۲, C(S,G)) = d(f_۱, f_۲, L^{\infty}(S,G)) = \sup_{t\in S} d(f_۱(t), f_۲(t), G)$$

□

لم ۲.۴.۵. فرض کنید S یک فضای هاسدورف فشرده باشد. X یک فضای باناخ و H و G دو زیر فضای بسته از X باشند. در این صورت داریم:

$$C(S, H \bigoplus_{\infty} G) = C(S,H) \bigoplus_{\infty} C(S,G)$$

اثبات. فرض کنید $f \in C(S, H \bigoplus_{\infty} G)$ باشد و برای هر $t \in S$، $f_۱ : S \to H$ و $f_۲ : S \to G$ و $f(t) = (f_۱(t), f_۲(t))$ باشد . $f_۱ \in C(S,H)$ و $f_۲ \in C(S,G)$ هستند. نگاشت Ψ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Psi : C(S, H \bigoplus_{\infty} G) \to C(S,H) \bigoplus_{\infty} C(S,G)$$

که $\psi(f) = (f_۱, f_۲)$ است . نگاشت ψ ایزومتریک است زیرا

$$\begin{aligned} \| \Psi(f) \| &= \max\{\| f_۱ \|, \| f_۲ \|\} \\ &= \sup \max\{\| f_۱(t) \|, \| f_۲(t) \|\} \\ &= \sup \| f(t) \| \\ &= \| f \| \end{aligned}$$

□

قضیه ۳.۴.۵. فرض کنید S یک فضای هاسدورف فشرده و G یک زیر فضای بسته از فضای باناخ X باشد. در این صورت:

۱. اگر $C(S,G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $C(S,X)$ باشد آنگاه G به طور همزمان پروکسیمینال در X است.

۲. اگر G یک نگاشت تقریب همزمان پیوسته داشته باشد آنگاه $C(S,G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $C(S,X)$ است و دارای یک نگاشت تقریب همزمان پیوسته است.

اثبات. ۱. فرض کنید $x,y \in X$ باشند. توابع $f_y : S \to X$ و $f_x : S \to X$ را برای هر $s \in S$ به ترتیب با ضابطه های $f_y(s) = y$ و $f_x(s) = x$ در نظر بگیرید.

طبق فرض چون $C(S,G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $C(S,X)$ است لذا بنا به قضیه ۱.۴.۵ ، g ای متعلق به $C(S,G)$ به قسمی که

$$\begin{aligned}
\max\{\| f_y - g \|, \| f_x - g \|\} &= d(f_y, f_x, C(S,G)) \\
&= \sup_{s\in S} d(f_y(s), f_x(s), G) \\
&= \sup_{s\in S} d(x, y, G)
\end{aligned}$$

لذا برای یک $s. \in S$ داریم:

$$\max\{\| f_y(s.) - g(s.) \|, \| f_x(s.) - g(s.) \|\} \leq d(x,y,G)$$

بنابراین $g(s.)$ یک بهترین تقریب همزمان برای x,y از G است.

۲. فرض کنید $A : X \bigoplus_{\infty} X \to G$ یک نگاشت تقریب همزمان پیوسته برای G با ضابطه

$$A(x_۱, x_۲) = P_G(x_۱, x_۲)$$

باشد. A' را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$A' : C(S, X \bigoplus_{\infty} X) \to C(S, G)$$

که $A'(f) = A \circ f$ است. طبق لم ۲.۴.۵ می توان A' را برای هر $s \in S$ به صورت زیر نوشت:

$$A' : C(S, X) \bigoplus_{\infty} C(S, X) \to C(S, G)$$

که ضابطه آن عبارت است از:

$$A'(f_1, f_2)(s) = A(f_1(s), f_2(s)) = P_G(f_1(s), f_2(s))$$

لذا $A'(f_1, f_2) \in C(S, G)$ است. فرض کنید $g \in C(S, G)$ باشد. در این صورت برای هر $s \in S$ داریم:

$$\begin{aligned} & \max\{\| f_1(s) - A(f_1(s), f_2(s)) \|, \| f_2(s) - A(f_1(s), f_2(s)) \|\} \\ = \; & \max\{\| f_1(s) - P_G(f_1(s), f_2(s)) \|, \| f_2(s) - P_G(f_1(s), f_2(s)) \|\} \\ \leq \; & \max\{\| f_1(s) - g(s) \|, \| f_2(s) - g(s) \|\} \end{aligned}$$

لذا بنا به قضیه ۱.۴.۵ خواهیم داشت:

$$\max\{\| f_1 - A(f_1, f_2) \|, \| f_2 - A(f_1, f_2) \|\} \leq \max\{\| f_1 - g \|, \| f_2 - g \|\}$$

پس $A(f_1, f_2)$ یک بهترین تقریب همزمان برای f_1 و f_2 از $C(S, G)$ است و لذا $C(S, G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $C(S, X)$ است. همچنین

$$A' : C(S, X) \bigoplus_{\infty} C(S, X) \to C(S, G)$$

یک نگاشت تقریب همزمان پیوسته است.

□

نتیجه ۴.۴.۵. فرض کنید G یک زیر فضای M - جمعوند از فضای باناخ X باشد. در این صورت $C(S,G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $C(S,X)$ است و یک نگاشت تقریب همزمان پیوسته دارد.

اثبات. چون G یک زیرفضای M - جمعوند از فضای باناخ X است لذا بنا به نتیجه ۳.۳.۵ ، G دارای یک نگاشت تقریب همزمان است و طبق قضیه ۳.۴.۵ ، $C(S,G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $C(S,X)$ است و یک نگاشت تقریب همزمان پیوسته دارد. $\square$

لم ۵.۴.۵. فرض کنید Xیک فضای باناخ باشد . آنگاه داریم:

$$L(X, X \bigoplus_{\infty} X) = L(X,X) \bigoplus_{\infty} L(X,X)$$

اثبات. فرض کنید $T \in L(X, X \bigoplus_{\infty} X)$ و $T(x) = (z_۱, z_۲)$ باشد. تعریف می کنیم:

$$A(x) = z_۱, B(x) = z_۲$$

در این صورت $A, B \in L(X,Y)$ هستند. برای هر $x \in X$ که $\| x \| = ۱$ است داریم:

$$\| A(x) \| \leq \max\{\| A(x) \|, \| B(x) \|\} \leq \max\{\| A \|, \| B \|\}$$

با گرفتن سوپریمم از عبارت بالا خواهیم داشت:

$$\| A \| \leq \sup_{\|x\|=۱} \max\{\| A(x) \|, \| B(x) \|\} \leq \max\{\| A \|, \| B \|\} \quad (۱۵.۵)$$

به طور مشابه داریم:

$$\| B \| \leq \sup_{\|x\|=۱} \max\{\| A(x) \|, \| B(x) \|\} \leq \max\{\| A \|, \| B \|\} \quad (۱۶.۵)$$

با استفاده از ۱۵.۵ و ۱۶.۵ داریم:

$$\max\{\| A \|, \| B \|\} \leq \sup_{\|x\|=۱} \max\{\| A(x) \|, \| B(x) \|\} \leq \max\{\| A \|, \| B \|\}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\max\{\| A \|, \| B \|\} = \sup_{\|x\|=1} \max\{\| A(x) \|, \| B(x) \|\}$$

تعریف می کنیم:

$$\phi : L(X, X \bigoplus_{\infty} X) \to L(X, X) \bigoplus_{\infty} L(X, X)$$

که $\phi(t) = (A, B)$ است. به وضوح این نگاشت ایزومتریک است زیرا:

$$\begin{aligned} \| \phi(T) \| &= \max\{\| A \|, \| B \|\} \\ &= \sup \max\{\| A(x) \|, \| B(x) \|\} \\ &= \sup \| T(x) \| \\ &= \| T \| \end{aligned}$$

□

قضیه ۶.۴.۵. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای به طور همزمان پروکسیمینال از فضای باناخ Y باشد. اگر G دارای یک نگاشت تقریب همزمان خطی باشد آنگاه $L(X, G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $L(X, Y)$ است و یک نگاشت تقریب همزمان خطی دارد.

اثبات. فرض کنید $\Pi : Y \bigoplus_{\infty} Y \to G$ یک نگاشت تقریب همزمان خطی برای G باشد که برای هر (x, y) متعلق به $Y \bigoplus_{\infty} Y$ ضابطه آن به صورت زیر است:

$$\Pi(x, y) = P_G(x, y)$$

نگاشت $A : L(X, Y \bigoplus_{\infty} Y) \to L(X, G)$ را با ضابطه $A(f) = \Pi \circ f$ در نظر می گیریم که $f = (f_1, f_2)$ است. بنا به لم ۵.۴.۵ داریم:

$$A : L(X, Y) \bigoplus_{\infty} L(X, Y) \to L(X, G)$$

و برای هر $x \in X$ ضابطه آن به صورت زیر است:

$$A(f_۱, f_۲) = \Pi \circ (f_۱, f_۲)$$

$$\Pi \circ (f_۱, f_۲)(x) = \Pi(f_۱(x), f_۲(x)) = P_G(f_۱(x), f_۲(x))$$

همچنین این نگاشت، یک نگاشت خطی است زیرا برای هر $(f_۱, f_۲)$ و $(g_۱, g_۲)$ متعلق به $L(X,Y) \bigoplus_{\infty} L(X,Y)$ و هر α و β ثابت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
A(\alpha(f_۱, f_۲) + \beta(g_۱, g_۲))(x) &= \Pi \circ (\alpha(f_۱, f_۲) + \beta(g_۱, g_۲))(x) \\
&= \Pi(\alpha(f_۱(x), f_۲(x)) + \beta(g_۱(x), g_۲(x))) \\
&= P_G(\alpha(f_۱(x), f_۲(x)) + \beta(g_۱(x), g_۲(x))) \\
&= \alpha P_G(f_۱(x), f_۲(x)) + \beta P_G(g_۱(x), g_۲(x)) \\
&= \alpha \Pi(f_۱(x), f_۲(x)) + \beta \Pi(g_۱(x), g_۲(x)) \\
&= \alpha A(f_۱, f_۲)(x) + \beta A(g_۱, g_۲)(x) \\
&= (\alpha A(f_۱, f_۲) + \beta A(g_۱, g_۲))(x)
\end{aligned}$$

پس A یک نگاشت تقریب همزمان خطی برای $L(X,G)$ است. حال می خواهیم ثابت کنیم که $L(X,G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $L(X,Y)$ است.

فرض کنید $g \in L(X,G)$ دلخواه باشد. در این صورت برای هر $x \in X$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\max\{\| f_۱(x) - A(f_۱(x), f_۲(x)) \|, \| f_۲(x) - A(f_۱(x), f_۲(x)) \|\} \\
= \ &\max\{\| f_۱(x) - P_G(f_۱(x), f_۲(x)) \|, \| f_۲(x) - P_G(f_۱(x), f_۲(x)) \|\} \\
\leq \ &\max\{\| f_۱(x) - g(x) \|, \| f_۲(x) - g(x) \|\}
\end{aligned}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\max\{\| f_۱ - A(f_۱, f_۲) \|, \| f_۲ - A(f_۱, f_۲) \|\} \leq \max\{\| f_۱ - g \|, \| f_۲ - g \|\}$$

بنابراین $A(f_۱, f_۲)$ یک بهترین تقریب همزمان برای $f_۱, f_۲$ است و $L(X, G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $L(X, Y)$ است. □

نتیجه ۷.۴.۵. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای M - جمعوند از فضای باناخ Y باشد. در این صورت $L(X, G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $L(X, Y)$ است و یک نگاشت تقریب همزمان پیوسته دارد.

اثبات. بنا به نتیجه ۳.۳.۵ ، G دارای یک نگاشت تقریب همزمان پیوسته است و طبق قضیه ۶.۴.۵ $L(X, G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $L(X, Y)$ است و یک نگاشت تقریب همزمان پیوسته دارد. □

قضیه ۸.۴.۵. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از فضای باناخ Y باشد. اگر $L(X, G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $L(X, Y)$ باشد آنگاه G به طور همزمان پروکسیمینال در Y است.

اثبات. فرض کنید $y_۱, y_۲ \in Y$ و $۰ \neq x_\circ \in X$ باشد. با استفاده از قضیه ۳۴.۱.۱ ، x^* ای متعلق به X^* وجود دارد به قسمی که $x^*(x_\circ) = \| x_\circ \|$ و $\| x^* \| = ۱$ باشد. عملگرهای زیر را در نظر بگیرید:

$$x^* \otimes y_۱, x^* \otimes y_۲ : X \to Y$$

برای هر $x \in X$ و $i = ۱, ۲$ ضابطه آن را به صورت $(x^* \otimes y_i)(x) = x^*(x) y_i$ تعریف می کنیم. $x^* \otimes y_۱, x^* \otimes y_۲$ به فضای عملگرهای خطی کراندار تعلق دارند زیرا

$$\| (x^* \otimes y_i)(x) \| = \| x^*(x) y_i \| \leq \| x^* \| \| y_i \| \leq \| y_i \|$$

و همچنین برای α و β ثابت داریم

$$\begin{aligned} x^* \otimes y_i(\alpha x_۱ + \beta x_۲) &= x^*(\alpha x_۱ + \beta x_۲)y_i \\ &= (\alpha x^*(x_۱) + \beta x^*(x_۲))y_i \\ &= \alpha x^*(x_۱)y_i + \beta x^*(x_۲)y_i \\ &= \alpha x^* \otimes y_i(x_۱) + \beta x^* \otimes y_i(x_۲) \end{aligned}$$

طبق فرض چون $L(X,G)$ طور همزمان پروکسیمینال در $L(X,Y)$ است لذا T ای متعلق به $L(X,G)$ وجود دارد به قسمی که:

$$\max\{\| x^* \otimes y_۱ - T \|, \| x^* \otimes y_۲ - T \|\} \leq \max\{\| x^* \otimes y_۱ - B \|, \| x^* \otimes y_۲ - B \|\}, \forall B \in L(X,G)$$

فرض کنید B به تمامی عملگرهایی به شکل $x^* \otimes g$ اشاره می کند که $g \in G$ است و $T = x^* \otimes g_۱$ در نظر بگیرید. در این صورت برای هر $g \in G$ داریم:

$$\max\{\| x^* \otimes y_۱ - T \|, \| x^* \otimes y_۲ - T \|\} \leq \max\{\| x^* \otimes y_۱ - x^* \otimes g \|, \| x^* \otimes y_۲ - x^* \otimes g \|\}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \max\{\| (x^* \otimes y_۱)(x_۰) - T(x_۰) \|, \| (x^* \otimes y_۲)(x_۰) - T(x_۰) \|\} \\ = & \max\{\| x^*(x_۰)y_۱ - x^*(x_۰)g_۱ \|, \| x^*(x_۰)y_۲ - x^*(x_۰)g_۱ \|\} \\ \leq & \max\{\| x^*(x_۰)y_۱ - x^*(x_۰)g \|, \| x^*(x_۰)y_۲ - x^*(x_۰)g \|\} \end{aligned}$$

پس برای هر $g \in G$ نتیجه می گیریم که:

$$\max\{\| y_۱ - g_۱ \|, \| y_۲ - g_۱ \|\} \leq \max\{\| y_۱ - g \|, \| y_۲ - g \|\}$$

بنابراین بنا به تعریف بهترین تقریب همزمان، $g_۱$ یک بهترین تقریب همزمان برای $y_۱$ و $y_۲$ از G است. □

لمی که در زیر ارائه می شود همان قضیه ۱.۴.۵ است با این تفاوت که در اینجا S یک مجموعه غیر تهی در نظر گرفته شده است.

لم ۹.۴.۵. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X و S یک مجموعه مخالف تهی باشد. در این صورت برای هر $f, g \in L^{\infty}(S, X)$ داریم:

$$d(f, g, L^{\infty}(S, G)) = \sup_{s \in S} d(f(s), g(s), G)$$

اثبات. فرض کنید $h \in L^{\infty}(S, G)$ باشد. آنگاه برای هر $s \in S$ داریم:

$$\max\{\| f(s) - h(s) \|, \| g(s) - h(s) \|\} \geq d(f(s), g(s), G)$$

با گرفتن سوپریمم از دو طرف نامساوی بالا داریم:

$$\max\{\| f - h \|, \| g - h \|\} \geq \sup_{s} d(f(s), g(s), G)$$

حال از اینکه $h \in L^{\infty}(S, G)$ دلخواه بود داریم:

$$d(f, g, L^{\infty}(S, G)) \geq \sup_{s} d(f(s), g(s), G)$$

یک طرف نامساوی اثبات شد. حال به اثبات عکس نامساوی می پردازیم. فرض کنید $\epsilon > 0$ دلخواه باشد. در این صورت برای هر $s \in S$، $k(s) \in G$ وجود دارد به قسمی که:

$$\max\{\| f(s) - k(s) \|, \| g(s) - k(s) \|\} < d(f(s), g(s), G) + \epsilon \tag{۱۷.۵}$$

با استفاده از قضیه ۲۸.۱.۱ برای هر $s \in S$، $h_{\circ}(s) = k(s)$ تعریف می کنیم. $h_{\circ} \in L^{\infty}(S, G)$ است. با گرفتن سوپریمم از دو طرف عبارت ۱۷.۵ نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} d(f, g, L^{\infty}(S, G)) &\leq \max\{\| f - h_{\circ} \|, \| g - h_{\circ} \|\} < \sup_{s} d(f(s), g(s), G) + \epsilon, \\ d(f, g, L^{\infty}(S, G)) &\leq \sup_{s} d(f(s), g(s), G) + \epsilon \end{aligned}$$

چون $\epsilon > 0$ دلخواه بود. لذا داریم:

$$d(f,g,L^\infty(S,G)) \leq \sup_s d(f(s),g(s),G)$$

و قضیه ثابت می گردد. $\square$

قضیه ۱۰.۴.۵. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X و S یک مجموعه مخالف تهی باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند:

۱. G به طور همزمان پروکسیمینال در X است.

۲. $L^\infty(S,G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $L^\infty(S,X)$ است.

اثبات. ۱ $\leftarrow$ ۲

فرض کنید $f,g \in L^\infty(S,X)$ باشند. چون G به طور همزمان پروکسیمینال در X است لذا برای هر $s \in S$ ، $k(s)$ ای متعلق به G وجود دارد به قسمی که

$$\max\{\| f(s)-k(s) \|, \| g(s)-k(s) \|\} \leq \max\{\| f(s)-z(s) \|, \| g(s)-z(s) \|\} \tag{۱۸.۵}$$

که $z \in L^\infty(S,G)$ و $z(s) \in G$ است. با استفاده از قضیه ۲۸.۱.۱ ، k ای متعلق به $L^\infty(S,G)$ وجود دارد که در ۱۸.۵ صدق می کند. بنابراین برای هر $z \in L^\infty(S,G)$ داریم:

$$\max\{\| f-k \|, \| g-k \|\} \leq \max\{\| f-z \|, \| g-z \|\}$$

لذا

$$\sup_s d(f(s),g(s),G) = \max\{\| f-k \|, \| g-k \|\} = d(f,g,L^\infty(S,G))$$

و این ایجاب می کند که $L^\infty(S,G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $L^\infty(S,X)$ است.

۲ $\leftarrow$ ۱

فرض کنید $x, y \in X$ باشند. $f_x : S \to X$ و $f_y : S \to X$ را برای هر $s \in S$ به ترتیب با ضابطه $f_x(s) = x$ و $f_y(s) = y$ در نظر بگیرید. با استفاده از لم ۹.۴.۵ داریم:

$$d(f_x, f_y, L^\infty(S, G)) = \sup_s d(f_x(s), f_y(s), G) = d(x, y, G) \qquad (۱۹.۵)$$

طبق فرض چون $L^\infty(S, G)$ به طور همزمان پروکسیمینال در $L^\infty(S, X)$ است لذا g ای متعلق به $L^\infty(S, G)$ وجود دارد به قسمی که:

$$\max\{\| f_x - g \|, \| f_y - g \|\} = d(x, y, G)$$

لذا با استفاده از ۱۹.۵ می توانیم $s.$ ای متعلق به S در نظر بگیریم که:

$$\max\{\| x - g(s.) \|, \| y - g(s. \|\} \leq d(x, y, G)$$

لذا $g(s.)$ یک بهترین تقریب همزمان برای x و y از G است.

□

فصل ۶

نتایجی دیگر از بهترین تقریب همزمان در $L^p(I,X)$

۱.۶ مقدمه

در فصل سوم مفهوم بهترین تقریب همزمان در فضای توابع $L^p(I,X)$ مورد بررسی قرار گرفت که توسط [۱] انجام شده بود. در این فصل نتایجی جدید را در این زمینه مطرح می کنیم.

۲.۶ زیر فضای ضعیف و شبه به طور همزمان چبیشف

تعریف ۱.۲.۶. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. اگر برای هر x_1, x_2 در X ، $P_G(x_1,x_2)$ یک مجموعه غیر تهی و با بعد متناهی در X باشد. در این صورت G یک زیر فضای ضعیف به طور همزمان چبیشف نامیده می شود.

تعریف ۲.۲.۶. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. اگر برای هر x_1, x_2 در X ، $P_G(x_1,x_2)$ یک مجموعه غیر تهی و فشرده در X باشد. در این صورت G یک زیر فضای شبه به طور همزمان چبیشف نامیده می شود.

لم ۳.۲.۶. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد و $1 \leq p < \infty$. در این صورت اگر $L^p(I,G)$ یک زیر فضای به طور همزمان چبیشف از $L^p(I,X)$ باشد در این صورت G یک زیر فضای به طور همزمان چبیشف در X است.

اثبات. بنا به قضیه ۶.۵.۳ ، G به طور همزمان پروکسیمینال در X است. لذا برای هر $x_۱, x_۲$ متعلق به X ، $P_G(x_۱, x_۲) \neq \emptyset$ است. فرض کنید $g_۱, g_۲ \in P_G(x_۱, x_۲)$ باشند. فرض کنید $h_۱ = g_۱\chi_E$ ، $h_۲ = g_۲\chi_E$ ، $f_۱ = x_۱\chi_E$ و $f_۲ = x_۲\chi_E$ باشند که E_i ها به ازای $i = ۱, ۲, \cdots, n$ دو به دو از هم جدا هستند ، $\sum_{i=۱}^{n} ۱_{E_i} = ۱$ که ۱ تابع ثابت ۱ است و $\cup_{i=۱}^{n} E_i = I$.

بنا به لم ۶.۴.۳ ، $h_۱, h_۲ \in L^p(I,G)$ و $f_۱, f_۲ \in L^p(I,X)$ هستند. طبق فرض $L^p(I,G)$ یک زیر فضای به طور همزمان چبیشف از $L^p(I,X)$ است بنابراین با استفاده از این فرض و قضیه ۵.۵.۳ خواهیم داشت:

$$h_۱ = h_۲ \quad \Rightarrow \quad g_۱\chi_E = g_۲\chi_E$$

$$\Rightarrow \quad g_۱ = g_۲$$

لذا G به طور همزمان چبیشف است. □

قضیه ۴.۲.۶. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد و $۱ \leq p < \infty$. در این صورت اگر $L^p(I,G)$ یک زیر فضای ضعیف به طور همزمان چبیشف یا شبه به طور همزمان چبیشف از $L^p(I,X)$ باشد در این صورت G نیز این خواص را داراست.

اثبات. ۱. فرض کنید $L^p(I,G)$ یک زیر فضای ضعیف به طور همزمان چبیشف از $L^p(I,X)$ باشد. بنا به قضیه ۶.۵.۳ ، G به طور همزمان پروکسیمینال است لذا برای هر $x_۱, x_۲$ متعلق به X داریم $P_G(x_۱, x_۲) \neq \emptyset$. از فرض خلف استفاده می کنیم. فرض می کنیم G یک زیر فضای ضعیف به طور همزمان چبیشف نباشد بنابراین $x_\circ$ ای متعلق به $X \setminus G$ و $x'_\circ$ ای متعلق به $X \setminus G$ وجود دارند به قسمی که $dimP_G(x_\circ, x'_\circ) = +\infty$ فرض کنید $g \in P_G(x_\circ, x'_\circ)$ دلخواه باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$dimP_G(x_\circ, x'_\circ) = dim[P_G(x_\circ, x'_\circ) - g] = +\infty$$

بنابراین $P_G(x_\circ, x'_\circ) - g$ شامل تعداد نامتناهی عناصر مستقل خطی مانند $g_۱ - g, g_۲ - g, \cdots$ است که برای تمامی $n \geq ۱$ ، $g_n \in P_G(x_\circ, x'_\circ)$ است.

حال فرض کنید برای $n = ۱, ۲, \cdots$ ، $h = g\chi_E$ ، $h_n = g_n\chi_E$ ، $f_۱ = x_\circ\chi_E$ و $f_۲ = x'_\circ\chi_E$ باشند. از لم ۶.۴.۳ نتیجه می گیریم که برای هر $n = ۱, ۲, \cdots$ ، $h_۱, h_n \in P_{L^p(I,G)}(f_۱, f_۲)$ هستند که $h_۱, h_n \in L^p(I, G)$ و $f_۱, f_۲ \in L^p(I, X)$ می باشند.

$\{h_n - h\}_{n\geq ۱}$ یک دنباله خطی از عناصر $[P_{L^p(I,G)}(f_۱, f_۲) - h]$ است. بنابراین نتیجه می گیریم که

$$P_{L^p(I,G)}(f_۱, f_۲) = P_{L^p(I,G)}(f_۱, f_۲) - h = +\infty$$

که با فرض اینکه $L^p(I, G)$ یک زیر فضای ضعیف به طور همزمان چبیشف است در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و G یک زیر فضای ضعیف به طور همزمان چبیشف در X است.

۲. فرض کنید $L^p(I, G)$ یک زیر فضای شبه به طور همزمان چبیشف از $L^p(I, X)$ باشد. فرض کنید که $x_۱, x_۲ \in X \setminus G$ و $\{g_n\}_{n\geq ۱}$یک دنباله دلخواه در $P_G(x_۱, x_۲)$ باشد. با فرض $h_n = g_n\chi_E$ برای $n = ۱, ۲, \cdots$ ، $f_۱ = x_۱\chi_E$ و $f_۲ = x_۲\chi_E$ برای هر $n \geq ۱$ داریم $h_n \in P_{L^p(I,G)}(f_۱, f_۲)$.

بنا به فرض قضیه $L^p(I, G)$ یک زیر فضای شبه به طور همزمان چبیشف از $L^p(I, X)$ است لذا یک زیر دنباله $\{h_{n_k}\}_{k\geq ۱}$ از $\{h_n\}_{n\geq ۱}$ وجود دارد به قسمی که $h \in P_{L^p(I,G)}(f_۱, f_۲)$ است و خواهیم داشت:

$$\lim_{k\to\infty} \| h_{n_k} - h \|_۱ = ۰$$

بنابراین

$$\| h_{n_k} - h \|_۱ = \int_I \| h_{n_k}(t) - h(t) \| \, dt = ۰$$

لذا یک زیر دنباله مانند $\{h_{n_{k_s}}\}_{s\geq ۱}$ از $\{h_{n_k}\}_{k\geq ۱}$ موجود است به طوریکه بر روی بازه I داریم $h_{n_{k_s}}(t) \to h(t)$. در نتیجه $t_\circ \in I$ موجود است به قسمی که $h_{n_{k_s}}(t_\circ) \to h(t_\circ)$.

لذا نتیجه می گیریم که $g_{n_{k_s}} \to h(t_\circ)$. پس $P_G(x_۱, x_۲)$ فشرده است و G شبه به طور همزمان چبیشف است.

□

۳.۶ نامساوی فاصله

در این بخش، یک نامساوی فاصله برای مفهوم بهترین تقریب همزمان در $L^p(I,X)$ بیان می گردد.

تعریف ۱.۳.۶. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. برای $p \geq 1$ داریم

$$X \bigoplus_p \cdots \bigoplus_p X = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_1, \cdots, x_n \in X\}$$

که

$$\| (x_1, \cdots, x_n) \| = (\| x_1 \|^p + \cdots + \| x_n \|^p)^{\frac{1}{p}}$$

و $D(G) = \{(g, \cdots, g) : g \in G\}$ که

$$\| (g, \cdots, g) \| = (\| g \|^p + \cdots + \| g \|^p)^{\frac{1}{p}}$$

قضیه ۲.۳.۶. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد، $f_1, f_2, \cdots, f_n \in L^p(I,X)$ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. اگر

$$\phi(t) = d_p((f_1(t), \cdots, f_n(t)), D(G))$$

باشد. در این صورت $\phi \in L^p(I)$ است و

$$(\int_I |\phi(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \leq d_p((f_1, \cdots, f_n), D(L^p(I,X)))$$

اثبات. فرض کنید $f_1, \cdots, f_n \in L^p(I,X)$ باشند. در این صورت بنا به قضیه ۱.۱.۱۱، n دنباله $\{f_{1m}\}, \cdots, \{f_{nm}\}$ از توابع اندازه پذیر ساده وجود دارند به قسمی که:

$$\lim \|f_1(t) - f_{1m}(t)\| = 0, \cdots, \lim \|f_n(t) - f_{nm}(t)\| = 0$$

می خواهیم نشان دهیم که ϕ اندازه پذیر است. تابع فاصله، تابعی پیوسته است. پس طبق تعریف پیوستگی داریم:

$$\lim d_p(f_{1m}(t), \cdots, f_{nm}(t)), D(G)) = d_p((f_1, \cdots, f_n), D(G)) = \phi(t)$$

$f_{1m}(t), \cdots, f_{nm}(t)$ توابعی ساده هستند. لذا طبق تعریف تابع ساده می توان آنها را به صورت زیر نمایش داد:

$$f_{1m}(t) = \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i} x_i, \cdots, f_{nm}(t) = \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i} y_i$$

فرض کنید که E_i ها به ازای $i = 1, 2, \cdots, n$ دو به دو از هم جدا هستند ، $\sum_{i=1}^{n} 1_{E_i} = 1$ که ۱ تابع ثابت ۱ است و $\cup_{i=1}^{n} E_i = I$.

قرار دهید

$$\phi_m(t) = \inf\{(\|f_{1m}(t) - z\|^p + \cdots + \|f_{nm}(t) - z\|^p)^{\frac{1}{p}} : z \in G\}$$

حال به محاسبه $\phi_m(t)$ می پردازیم.

$$\begin{aligned}
\phi_m(t) &= \inf\{(\|f_{1m}(t) - z\|^p + \cdots + \|f_{nm}(t) - z\|^p)^{\frac{1}{p}} : z \in G\} \\
&= \inf\{(\sum_{i=1}^{n} 1_{E_i}(t)\|x_i - z\|^p + \cdots + \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i}(t)\|y_i - z\|^p)^{\frac{1}{p}} : z \in G\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i}(t) \inf\{(\|x_i - z\|^p + \cdots + \|y_i - z\|^p)^{\frac{1}{p}} : z \in G\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i}(t) d_p((x_i, \cdots, y_i), D(G))
\end{aligned}$$

پس به ازای تمامی m ها، $\phi_m(t)$ یک تابع ساده است، لذا

$$\lim \| \phi_m(t) - \phi(t) \| = 0$$

و همچنین $\phi_m(t)$ اندازه پذیر است، پس $\phi(t)$ نیز اندازه پذیر است.

حال به اثبات نامساوی می پردازیم. فرض کنید $g \in L^p(I,G)$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(\|f_1 - g\|^p + \cdots + \|f_n - g\|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\int_I \|f_1(t) - g(t)\|^p dt + \cdots + \int_I \|f_n(t) - g(t)\|^p)dt)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\int_I (\|f_1(t) - g(t)\|^p + \cdots + \|f_n(t) - g(t)\|^p)dt)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq (\int_I d_p((f_1(t), \cdots, f_n(t)), D(G))^p dt)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

با گرفتن اینفیمم روی هر $g \in L^p(I,G)$ نامساوی اثبات می شود. □

قضیه ۶.۳.۳. فرض کنید X یک فضای باناخ و $f_1, f_2 \in L^1(I,X)$ و G یک زیر فضای بسته از X باشد. اگر

$$\phi(t) = d_1((f_1(t), f_2(t)), D(G))$$

باشد. در این صورت $\phi \in L^1(I)$ است و خواهیم داشت:

$$\int_I \phi(t)dt = d_1((f_1, f_2), D(L^1(I,G))$$

اثبات. در قضیه ۶.۳.۲، با قرار دادن $p = 1$ قضیه ثابت می شود. □

تعریف ۶.۳.۴. فرض کنید $f \in C(D)$ باشد. دراین صورت خواهیم داشت:

$$Z(f) = \{x \in D : f(x) = 0\}$$

مراجع

[1] E. Abu-sirhan. Best simultaneous approximation in $l^p(i, x)$. *Journal of math Analysis*, 3(24):1157–1168, 2009. 21, 65

[2] E. Abu-sirhan. Best simultaneous appriximation in function and operator space. *TUBLTAK*, 34:1–12, 2010. 44

[3] E. Abu-sirhan and R. Khalil. Simultaneous approximation in operator and tensor product spaces. *Applied Functional Analysis*, 4(1):112–121, 2009. 44

[4] R. M .Dudley. *Real analysis and probability.* Cambridge university press. 1, 8

[5] M. Iranmanesh and H. Mohebi. Best simultaneous approximation in tensor product spaces. 1

[6] R. Khalil and E. Abu-sirhan. Best simultaneous approximation in $l^\infty(i, x)$. 51(2):391–400, 2009. 35

[7] Chong Li and G .A. Watson. On nonlinear simultaneous chebyshev approximation problems. *J. Math. Anal. Appl*, pages 167–181, 2003. 12

[8] W. A. light and E.W. cheney. *Approximation theory in tensor product spaces.* Springer-verlag, 1985. 1, 11, 26

[9] James Munker. *Topology.* 1, 10, 11

[10] Lihui Peng and Chong Li. Uniqueness of simultaneous approximation in continuous function spaces. *Applied Mathematics*, (21):383–387, 2008. 12

[11] W. Rudin. *Real And Complex Analysis.* New York, 1986. 1, 3

[12] W. Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill, 1991. 1, 7, 9, 10

[13] I. Singer. *Best approximation in normed linear space by elements of linear subspace.* Springer-verlag, 1970. 12, 15

[14] P. Wojtaszczyk. *Banach spaces for Analysts.* Press syndicate of the University of cambridge, 1991. 1

واژه نامه انگلیسی به فارسی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

انتگرال لبگ .... Lebesgue integral
اندازه لبگ .... Lebesgue measure
ایزومتریک .... Isometric
بهترین تقریب .... Best approximation
بهترین تقریب همزمان .... Best simultaneous approximation
به طور همزمان پروکسیمینال .... Simultaneously proximinal
به طور همزمان چبیشف .... Simultaneously chebyshev
پارا فشرده .... Para compact
پیوسته .... Continuous
تابع ساده .... Simple function
توپولوژی .... Topology
توپولوژی حاصل ضربی .... Product topology
توپولوژی ضعیف .... Weak topology
توپولوژی ضعیف ستاره .... Weak* topology
چبیشف .... Chebyshev
عملگر .... Operator
فشرده ضعیف ستاره .... Weak * compact
فضای باناخ .... Banach space
فضای برداری توپولوژیک .... Topological vector space
فضای دوگان .... Dual space
فضای متریک .... Metric space
نشاننده .... Embedding
نگاشت .... Mapping
نگاشت تصویر .... Projection mapping
وجود .... Existence
هاسدورف .... Hausdorff
هم پیوسته .... Equi-continuous

Abstract

Our main goal of this thesis is to introduce the best simultaneous approximation in some special spaces. We also state that under wich conditions a set in such space has simultaneous approximation.

Keywords: *Simultaneous proximinal , Best simultaneous approximation , Simultaneous chebyshev .*

Shahrood University

Facualty of Methematical Sciences

Department of Mathematics

M.S.C Thesis

Existance Of Best Simultaneous Approximation In Some Spaces

By:

Fatemeh Ameri

Supervisor:
Mehdi Iranmanesh

Date