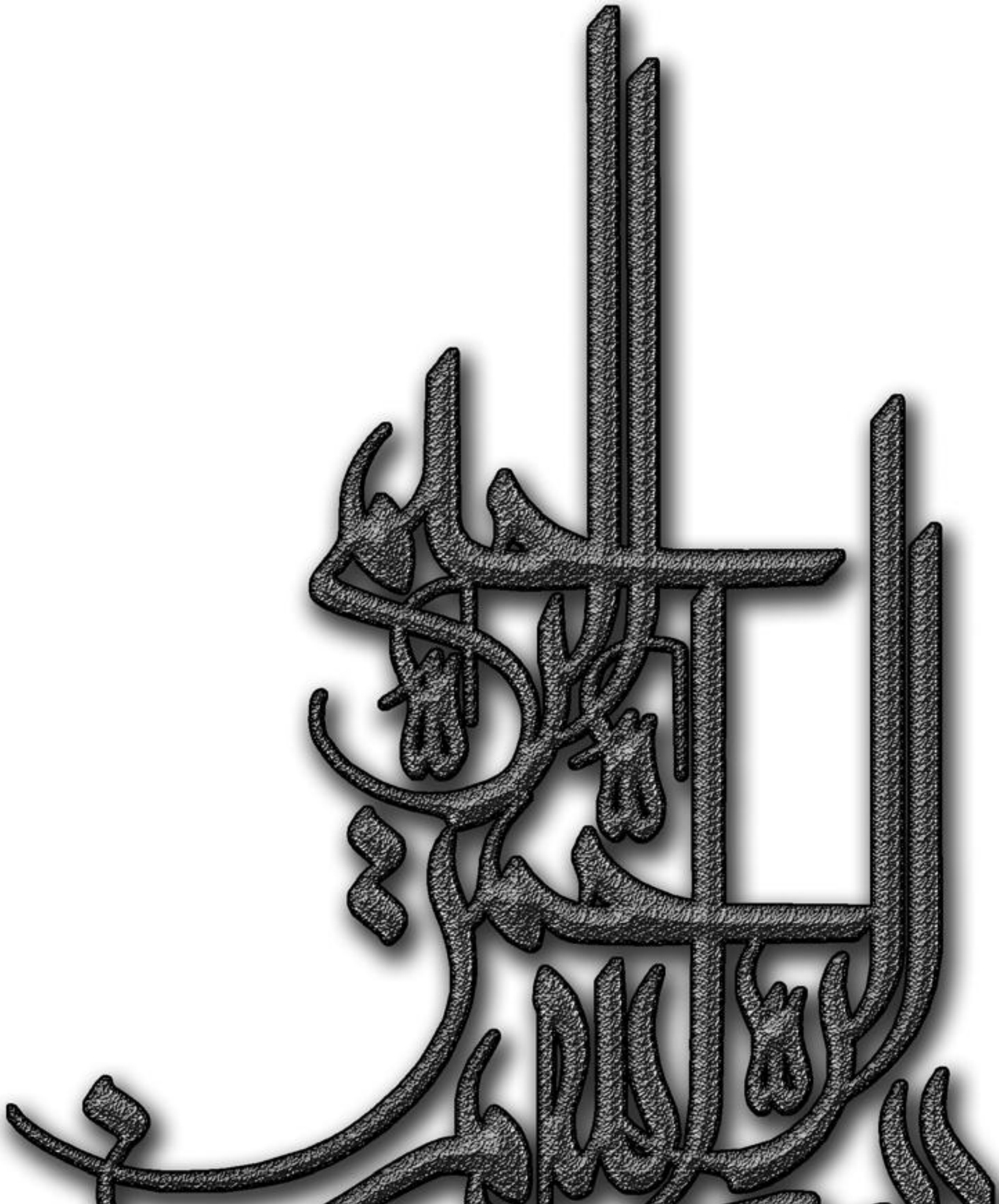
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

متناهیاً انقباض پذیری حلقه ی چند جمله ای های اریب

نگارش
حمیدرضا اللهی

استاد راهنما
دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور
دکتر احمد زیره

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر عزیزم

و

مادر مهربانم

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس پروردگار یکتا را که لطف و کرم بی کرانش من را نیز در بر گرفت تا به وسع توان خویش گامی کوچک در گستره علم و معرفت بردارم و مسیر گشت تا از خرمن دانش و تجربه بزرگان بهره ببرم.

اکنون که به یاری خداوند متعال، این دوره پرخاطره از دوران تحصیلم را به پایان رسانده‌ام، هر چند واژه‌ها را یارای آن نیست که لطف و محبت و بزرگواری آنانی را که در تمام دوران زندگی‌ام جرعه نوش دریای مهر و محبتشان بوده‌ام به تصویر بکشم، اما به رسم ادب و احترام بوسه بر دستانشان زده و بر خود واجب می‌دانم، زحمات پدر و مادر مهربانم را که همواره راه‌گشای مشکلاتم در تمام مراحل زندگی بوده‌اند ارج نهم و مراتب تشکر قلبی و باطنی را از الطاف و مهربانی‌های آنان ابراز دارم. در این جا بر خود لازم می‌دانم که از زحمات فراوان اساتید توانمندم آقایان دکتر هاشمی و دکتر زیره که با راهنمایی‌ها و نظرات ارزنده و صبر و حوصله فراوان، نقش مهمی در به ثمر رساندن این کار داشته‌اند صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم، بی‌تردید انجام این پایان‌نامه بدون همکاری و راهنمایی این عزیزان امکان‌پذیر نبود. همچنین از برادران خود و دوستان عزیزم آقایان نوری، اکبرزاده، رحمانیان، شریعتی، خوجم لی، امیدیان، لندرانی، گلپایگانی، پرهیزکار و بحتو که مایه دلگرمی من بوده و متحمل زحمات زیادی شدند نهایت سپاسگزاری را دارم و برایشان آرزوی موفقیت می‌نمایم.

حمیدرضا اللهی

بهمن ۱۳۹۰

مقالات مستخرج

حمید رضا اللهی، ابراهیم هاشمی، **حلقه‌های انقباض پذیر**، چهل و دومین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه ولی عصر (عج)، رفسنجان، شهریور ۱۳۹۰، ۴۱۰-۴۱۴.

Hamid Reza Ellahi, Ebrahim Hashemi, **On Loewy length of Skew polynomial rings**, 22nd Iranian Algebra Seminar, Sabzevar, Iran,31th Jan – 2nd Feb, 2012.

فهرست مطالب

فصل ۱
زیرمدول های اساسی و پوش انژکتیو

۱.۱ زیر مدول های اساسی

در این پایان نامه R نمایانگر یک حلقه ی شرکت پذیرِ یکدار و M یک R-مدول راست یکانی است. منظور از یک ایدآل از حلقه ی R، یک ایدآل دوطرفه از آن می باشد. فرض کنیم N یک R-مدول راست باشد. مجموعه ی همه ی R-همریختی های $M \to N$ را با علامت $Hom_R(M, N)$ نمایش می دهیم. $Hom_R(M, M)$ با جمع و ترکیب توابع یک حلقه تشکیل می دهد که آن را **حلقه ی درونریختی های** M می نامیم و با علامت $End_R(M)$ نمایش می دهیم. مدول $Hom_R(M, R_R)$ را **دوگان** M می نامیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم N زیر مدولی از M_R باشد و $X \subseteq M$. در این صورت مجموعه ی $\{r \in R | Xr \subseteq N\}$ را با $(N : X)$ نمایش می دهیم و هرگاه $N = ۰$، آنگاه $(۰ : X)$ را **پوچ ساز** X می‌نامیم و آن را با $Ann(X)$ نشان می‌دهیم.

پوچ ساز راست و **پوچ ساز چپ** زیر مجموعه ی I از حلقه ی R را به ترتیب با علامت $Ann_r(I)$ و $Ann_l(I)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم: $Ann_r(I) := \{r \in R | Ir = ۰\}$ و $Ann_l(I) := \{r \in R | rI = ۰\}$.

گزاره ۲.۱.۱. فرض کنیم N زیر مدولی از M_R باشد و $X \subseteq M$ و $I \subseteq R$. در این صورت $(N : X)$ و $Ann_r(I)$ دو ایدآل راست R هستند و اگر $I \leq R_R$ آنگاه $Ann_r(I)$ ایدآلی از حلقه ی R است.

اثبات . واضح است. ■

تعریف ۳.۱.۱. زیرمدول N از M را **اساسی** می‌نامیم، هرگاه با هر زیرمدول ناصفر M اشتراک ناصفر داشته باشد. در این صورت M را یک **توسیع اساسی** از N می گوییم و با علامت $N \leq_e M$ نمایش می‌دهیم.

مثال . می دانیم که هر ایدآل $\mathbb{Z}$ به فرم $n\mathbb{Z}$ است و برای هر $\circ \neq m \in \mathbb{Z}$، $mn \in n\mathbb{Z}$. لذا $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} \neq \circ$ و این نشان می دهد که هر ایدآل ناصفر از $\mathbb{Z}$ (به عنوان $\mathbb{Z}$-مدول) در آن اساسی است.

مثال . فرض کنیم p یک عدد اول باشد و $R = \dfrac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ و برای هر $i \in \mathbb{N}$، $G_i = \{\frac{a}{p^i} + \mathbb{Z} | a \in \mathbb{Z}\}$. واضح است که $G_1 \subset G_2 \subset \cdots$ و هر G_i یک $\mathbb{Z}$-مدول است. قرار می دهیم $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$. می توان ثابت نمود که $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول است و G_i ها تنها زیر مدول های آن هستند. چون برا ی هر i و j که $i \leq j$، $G_i \subseteq G_j$، پس برای هر $i \geq 1$، G_i در $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ اساسی است.

گزاره ۴.۱.۱. زیر مدول N در M اساسی است، اگر و تنها اگر برای هر زیر مجموعه‌ی متناهی $\circ \neq X \subseteq M$، عنصر $r \in R$ موجود باشد، به طوریکه $\circ \neq Xr \subseteq N$.

اثبات . فرض کنیم X زیر مجموعه ای متناهی و ناصفر از M باشد و $N \leq_e M$. اگر $X \setminus N = \emptyset$، آنگاه با فرض $r = 1$ نتیجه حاصل است. فرض کنیم $X \setminus N = \{m\}$. چون $N \cap mR \neq \circ$، پس $r \in R$ وجود دارد که $\circ \neq mr \in N$. در نتیجه $Xr \subseteq N$. حال فرض کنیم هرگاه Y زیر مجموعه ای متناهی و ناصفر از M باشد و $|X \setminus N| < n$، آنگاه $r \in R$ وجود داشته باشد که $Xr \subseteq N$. فرض کنیم $X \setminus N = \{m_1, \cdots, m_n\}$. چون $N \cap m_1R \neq \circ$، پس $r_1 \in R$ وجود دارد که $\circ \neq m_1r_1 \in N$. چون $|Xr_1 \setminus N| < n$، پس $r_2 \in R$ وجود دارد که $\circ \neq Xr_1r_2 \subseteq N$. بعکس، فرض کنیم $\circ \neq n_1 \in N_1 \leq M$. بنا به فرض، عنصر $r \in R$ وجود دارد که $\circ \neq n_1r \in N$، و لذا $N_1 \cap N \neq \circ$. در نتیجه $N \leq_e M$. ■

نتیجه ۵.۱.۱. زیر مدول N در M_R اساسی است، اگر و تنها اگر برای هر عنصر ناصفر $y \in M$، عنصر $r \in R$ وجود داشته باشد که $\circ \neq yr \in N$.

اثبات . اگر $N \leq_e M$، آنگاه بنا به گزاره ی قبل، نتیجه حاصل است.

بعکس، فرض کنیم N زیر مدولی از M باشد که برای هر $0 \neq y \in M$، $r \in R$ ای موجود باشد که $0 \neq yr \in N$. فرض کنیم A زیرمدولی از M باشد و $0 \neq y \in A$. در این صورت بنا به فرض، $r \in R$ ای وجود دارد که $0 \neq yr \in N$ و چون A یک زیر مدول M است، پس $yr \in A$. بنابراین $0 \neq yr \in N \cap A$. ■

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم N و M دو R-مدول باشند. تکریختی $f : N \to M$ را **اساسی** می‌نامیم، هرگاه $f(N) \leq_e M$.

گزاره ۷.۱.۱. زیر مدول N در M_R اساسی است، اگر و تنها اگر نگاشت شمول $N \hookrightarrow M$ یک تکریختی اساسی باشد.

اثبات . بدیهی است. ■

گردایه ی متناهی N_1، N_2، $\cdots$، N_n از زیر مدول های M_R را مستقل می نامیم هرگاه برای هر i که $1 \leq i \leq n$، اشتراک N_i با مجموع دیگر N_j ها برابر با صفر باشد:

$$N_i \cap N_1 + \cdots + N_{i-1} + N_{i+1} + \cdots + N_n = 0$$

گردایه ی $\{N_i\}_{i \in I}$ از زیرمدول های مدول M_R را **مستقل** می خوانیم، هرگاه هر زیر گردایه ی متناهی از آن مستقل باشد.

چنانچه در [۴، ص ۷۰] می توان دید، گردایه ی $\{N_i\}_{i \in I}$ از زیر مدول های مدول M_R **مستقل** است، هرگاه مجموع N_i ها یک مجموع مستقیم باشد. به عبارت دیگر، هرگاه نگاشت جمعی $\bigoplus_{i \in I} N_i \to \sum_{i \in I} N_i$ یک یکریختی باشد. در این حالت می نویسیم $\sum_{i \in I} N_i = \bigoplus_{i \in I} N_i$.

گزاره ۸.۱.۱. (الف) فرض کنیم N، M و C مدول باشند و $N \leq M \leq C$. در این صورت $N \leq_e C$، اگر وتنها اگر $N \leq_e M$ و $M \leq_e C$.

(ب) فرض کنیم $N_۱$، $N_۲$، $M_۱$ و $M_۲$ زیر مدولهایی از مدول C باشند. در اینصورت اگر $N_۱ \leq_e M_۱$ و $N_۲ \leq_e M_۲$، آنگاه $N_۱ \cap N_۲ \leq_e M_۱ \cap M_۲$.

(پ) فرض کنیم $f : M \to C$ یک همریختی باشد و $N \leq C$. اگر $N \leq_e C$، آنگاه $f^{-۱}(N) \leq_e M$. در حالت خاص اگر $N \leq_e C$ و $c \in C$، آنگاه $(N : c)$ در R_R اساسی است.

(ت) فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از R-مدولها باشد و برای هر $i \in I$، $N_i \leq_e M_i$. دراین صورت $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i\in I} M_i$.

(ث) فرض کنیم $\{N_i\}_{i\in I}$ و $\{M_i\}_{i\in I}$ دو گردایه از زیرمدولهای C باشند. اگر N_i ها مستقل باشند و برای هر $i \in I$، $N_i \leq_e M_i$، آنگاه M_i ها مستقل هستند و $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i\in I} M_i$.

(ج) فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از R-مدولها باشد. اگر $\prod_{i\in I} N_i \leq_e \prod_{i\in I} M_i$، آنگاه برای هر $i \in I$، $N_i \leq_e M_i$.

اثبات . (الف) هرگاه $N \leq_e C$ آنگاه $M \leq_e C$. بعکس، فرض کنیم $N \leq_e M$ و $M \leq_e C$. در این صورت اگر $۰ \neq A \leq C$، آنگاه $۰ \neq A\cap M \leq M$. بنابراین $A\cap N = (A\cap M)\cap N \neq ۰$ و لذا $N \leq_e C$.

(ب) فرض کنیم $۰ \neq A \leq M_۱ \cap M_۲$. چون $۰ \neq A \leq M_۲$ و $N_۲ \leq_e M_۲$ لذا $N_۲ \cap A \neq ۰$. از طرفی چون $N_۱ \leq_e M_۱$ و $۰ \neq N_۲ \cap A \leq M_۱$، پس $(N_۱\cap N_۲)\cap A = N_۱ \cap (N_۲ \cap A) \neq ۰$. بنابراین $N_۱ \cap N_۲ \leq_e M_۱ \cap M_۲$.

(پ) فرض کنیم $۰ \neq A \leq M$. اگر $f(A) = ۰$، آنگاه $۰ \neq A \subseteq Kerf \subseteq f^{-۱}(N)$ و لذا $A \cap f^{-۱}(N) = A \neq ۰$. اگر $f(A) \neq ۰$، آنگاه از $N \leq_e C$، نتیجه می گیریم $f(A)\cap N \neq ۰$. بنابراین $A\cap f^{-۱}(N) \neq ۰$. در نتیجه $f^{-۱}(N) \leq_e M$.

(ت) هرگاه I تک عضوی باشد حکم بدیهی است. فرض کنیم $I = \{1, 2\}$. چون برای هر $i \in I$، $N_i \leq_e M_i$، پس بنا به بند (پ)

$$M_1 \oplus N_2 = \pi_2^{-1}(N_2) \leq_e M_1 \oplus M_2 \text{ و } N_1 \oplus M_2 = \pi_1^{-1}(N_1) \leq_e M_1 \oplus M_2$$

که در روابط اخیر، برای هر $i \in I$، π_i نگاشت کانونی از $M_1 \oplus M_2$ به M_i می باشد. اکنون، بنابه بند (ب) داریم:

$$N_1 \oplus N_2 = (N_1 \oplus M_2) \cap (M_1 \oplus N_2) \leq_e M_1 \oplus M_2$$

به این صورت می توان به استقرا حکم را برای هر مجموعه ی اندیس گذار متناهی ثابت نمود. حال فرض کنیم I یک مجموعه ی اندیس گذار دلخواه باشد و $0 \neq x \in A \leq \bigoplus_{i\in I} M_i$. زیر مجموعه ی متناهی J از I وجود دارد که $x \in \bigoplus_{j\in J} M_j$. چون $\bigoplus_{j\in J} N_j \leq_e \bigoplus_{j\in J} M_j$، پس $r \in R$ وجود دارد که $0 \neq xr \in \bigoplus_{j\in J} N_j$ و لذا $0 \neq xr \in \bigoplus_{i\in I} N_i$.

(ث) هرگاه I تک عضوی باشد حکم بدیهی است. فرض می کنیم $I = \{1, 2\}$. بنا به بند (ب) از $N_1 \leq_e M_1$ و $N_2 \leq_e M_2$ نتیجه می شود $0 = N_1 \cap N_2 \leq_e M_1 \cap M_2$. پس $M_1 \cap M_2 = 0$. بنابراین M_1 و M_2 مستقل هستند و بنا به بند (ت)، $N_1 \oplus N_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$.

اکنون فرض می کنیم $I = \{1, 2, \dots, n\}$، که $n > 2$، و مدول های M_1، ...، M_{n-1} مستقل هستند. بنا به بند (ت)، $N_1 \oplus \dots \oplus N_{n-1} \leq_e M_1 \oplus \dots \oplus M_{n-1}$. حال بنا به آنچه در بالا ذکر کردیم، از $N_1 \oplus \dots \oplus N_{n-1} \cap N_n = 0$، نتیجه می شود $(M_1 \oplus \dots \oplus M_{n-1}) \cap M_n = 0$، لذا M_1، ...، M_n مستقل هستند. لذا به استقرا نتیجه می شود که هر زیر مجموعه ی متناهی از $\{M_i\}_{i\in I}$ مستقل است، بنابراین $\{M_i\}_{i\in I}$ مستقل می باشد.

(ج) فرض کنیم $j \in I$ و $0 \neq m_j \in M_j$. عنصر $x \in \prod_{i\in I} M_i$ را چنان در نظر می گیریم که مؤلفه j-ام آن m_j و بقیه صفر باشند. واضح است که $x \neq 0$ و بنا به فرض، عنصر $r \in R$ موجود

است که $\circ \neq xr \in \prod_{i\in I} N_i$. بنابراین $\circ \neq m_j r \in N_j$ که نشان می دهد $N_j \leq_e M_j$. ■

تعریف ۹.۱.۱. مجموعه ی $\{m \in M | Ann(m) \leq_e R_R\}$ را **زیر مدول منفردِ** مدول M_R می نامیم و با علامت $Z(M)$ نمایش می‌دهیم. مدول M را **منفرد** می‌نامیم، هرگاه $Z(M) = M$. اگر $Z(M) = \circ$، گوییم M **نامنفرد** است.

حلقه‌ی R را **منفرد** (به همین ترتیب **نامنفرد**) **راست** می‌نامیم، هرگاه R_R منفرد (به همین ترتیب نامنفرد) باشد. حلقه‌ی منفرد (نامنفرد) چپ متناظراً به طور مشابه تعریف می شود.

به راحتی می توان ثابت کرد که $Z(M)$ یک زیر مدول از M است.

مثال . قبلاً دیدیم که هر ایدآل ناصفر از $\mathbb{Z}$ اساسی است. اما اگر $\circ \neq m \in \mathbb{Z}$، آنگاه $Ann_l(m) = Ann_r(m) = \circ$، و چون ایدآل $\circ$ در $\mathbb{Z}$ اساسی نیست، پس $Z(\mathbb{Z}) = \circ$. بنابراین $\mathbb{Z}$ یک حلقه ی نامنفرد است. همچنین به ازای هر $\circ \neq m \in \mathbb{Z}$، $m\mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول نامنفرد است.

گزاره ۱۰.۱.۱. فرض کنیم N زیر مدولی از M_R باشد. در این صورت $Z(N) = N \cap Z(M)$. در حالت خاص هرگاه M منفرد (نامنفرد) باشد، هر زیر مدول آن نیز منفرد (نامنفرد) است.

اثبات . بدیهی است. ■

در گزاره ی زیر، یکی از ویژگی های حلقه های نامنفرد راست را بیان می کنیم.

گزاره ۱۱.۱.۱. حاصلضرب دو ایدآل راست اساسی از یک حلقه‌ی نامنفرد راست، اساسی است.

اثبات . فرض کنیم I و J دو ایدآل راست اساسی از حلقه ی نامنفرد راست R باشند و $\circ \neq y \in R$. از اینکه $I \leq_e R$، نتیجه می گیریم که $r_\text{۱} \in R$ وجود دارد که $\circ \neq yr_\text{۱} \in I$. چون R یک حلقه ی نامنفرد راست است و $J \leq_e R$، پس $yr_\text{۱}J \neq \circ$. بنابراین عنصر $j \in J$ چنان موجود است که $\circ \neq yr_\text{۱}j \in IJ$. ■

قضیه ۱۲.۱.۱. فرض کنیم N و M زیرمدولهایی از مدول C باشند و M نسبت به ویژگی $N\cap M = 0$ ماکسیمال باشد. در این صورت $N \oplus M \leq_e C$، و $\frac{N\oplus M}{M} \leq_e \frac{C}{M}$.

اثبات . فرض کنیم $N \oplus M$ در C اساسی نباشد. پس زیر مدول ناصفری از C مانند A موجود است که $(N\oplus M)\cap A = 0$. بنابراین N، M و A مستقل هستند و لذا $N \cap (M\oplus A) = 0$. حال با استفاده از نحوه انتخاب M نتیجه می گیریم که $M \oplus A = M$، پس $A = 0$، که این یک تناقض است. بنابراین $N \oplus M \leq_e C$.

چون هر زیر مدول ناصفر از $\frac{C}{M}$ به فرم $\frac{B}{M}$ است، که در آن $M \subsetneqq B \leq C$، لذا از نحوه انتخاب M نتیجه می گیریم $N\cap B \neq 0$. بنابراین $\frac{N\oplus M}{M} \cap \frac{B}{M} \neq 0$. در نتیجه $\frac{N\oplus M}{M} \leq_e \frac{C}{M}$. ■

نتیجه ۱۳.۱.۱. هر زیر مدول، جمعوند مستقیم یک زیر مدول اساسی است.

اثبات . فرض کنیم N زیر مدولی از C باشد. قرار می دهیم:

$$A = \{M \leq C | M\cap N = 0\}$$

بوضوح A مخالف تهی است و بنا به لم زُرن A عضوی ماکسیمال چون M دارد. حال با استفاده از قضیه قبل نتیجه می گیریم $M \oplus N \leq_e C$. ■

نتیجه ۱۴.۱.۱. هرگاه J یک ایدآل راست ماکسیمال از حلقه ی R باشد، آنگاه J در R اساسی است یا جمعوند مستقیم R_R است.

اثبات . بنا به نتیجه ی ۱۳.۱.۱، J جمعوند مستقیم یک ایدآل راست اساسی از R، مانند I است. چون J ماکسیمال است، پس $I = J$ یا $I = R_R$. در نتیجه J اساسی است یا جمعوند مستقیم R_R است. ■

تعریف ۱۵.۱.۱. مجموع تمام زیرمدول های ساده‌ی M را **ساکل** M می‌نامیم و با علامت $Soc(M)$ نمایش می‌دهیم و هرگاه M شامل زیر مدول ساده ای نباشد، قرار می دهیم $Soc(M) = ۰$. مدول M را **نیم ساده** می خوانیم، هرگاه $M = Soc(M)$.

در اثبات قضیه ی زیر از **قانون مدولار** [۴، ص ۷۱] استفاده می کنیم. بنا به این قانون، اگر N و L و P زیر مدول هایی از مدول M_R باشند که $L \leq N$ آنگاه $(L+P)\cap N = L + (P\cap N)$. از این می توان نتیجه گرفت که اگر $L \leq N \leq L\oplus P$، آنگاه $N = L\oplus(P\cap N)$

قضیه ۱۶.۱.۱. مدول M نیم ساده است، اگر و تنها اگر هر زیر مدولش جمعوند مستقیم آن باشد.

اثبات . فرض کنیم M نیم ساده و $\{N_i\}_{i\in I}$ گردایه ی تمام زیر مدول های ساده ی متمایزِ مدول M باشد و $N \leq M$. از آنجا که N_i ها ساده هستند، پس این گردایه مستقل است. بنابراین $M = Soc(M) = \sum_{i\in I} N_i = \bigoplus_{i\in I} N_i$. فرض کنیم J بزرگترین زیر مجموعه ای از I باشد که $\bigoplus_{j\in J} N_j \cap N = ۰$. فرض کنیم $N_۱ = \bigoplus_{j\in J} N_j$، ادعا می کنیم $M = N_۱ \oplus N$.
برای اثبات ادعایمان کافیست توجه کنیم که به ازای هر $i \in I\setminus J$، $N_i \subseteq N$؛ زیرا در غیر این صورت برای $J_۱ = J\cup\{i\}$، $\bigoplus_{j\in J_۱} N_j \cap N = ۰$، که با انتخاب J در تناقض است. بنابراین

$$M = Soc(M) = N_۱ \oplus (\bigoplus_{i\in I\setminus J} N_i) \subseteq N_۱ \oplus N \subseteq M$$

بعکس، فرض کنیم M مدولی باشد که هر زیر مدولش جمعوند مستقیم آن است. در حالت خاص برای زیر مدول L از M، $M = Soc(M)\oplus L$. اگر $L \neq ۰$، آنگاه P را یک زیر مدول دوری ناصفر از L در نظر می گیریم. اگر p مولدی برای P باشد، انگاه بنا به لم زُرن، P دارای زیر مدولی مانند Q است که نسبت به خاصیت $p \notin Q$ ماکسیمال است. لذا Q یک زیر مدول ماکسیمال سره از P است. حال برای زیر مدول N از M، $M = Q\oplus N$ و بنا به قانون مدولار $P = Q\oplus(P\cap N)$. چون $P\cap N \cong \frac{P}{Q}$، پس $P\cap N$ یک زیر مدول ساده ی M است. بنابراین $P\cap N \leq Soc(M)$ که این با

$P \cap N \leq L$ در تناقض است. در نتیجه $L = ۰$ و بنابراین $M = Soc(M)$. ■

قضیه ۱.۱.۱۷. مدول M نیم ساده است، اگر و تنها اگر هیچ زیر مدول اساسی سره ای نداشته باشد.

اثبات . هرگاه M نیم ساده باشد، آنگاه بنابه قضیه ی ۱.۱.۱۶، هر زیر مدول سره ی M جمعوند مستقیم آن است و بنابراین نمی تواند اساسی باشد. لذا M هیچ زیر مدول اساسی سره ای ندارد.

بعکس، فرض کنیم M هیچ زیر مدول اساسی سره ای نداشته باشد و $N \leq M$. بنا به نتیجه ی ۱.۱.۱۳، N جمعوند مستقیم یک زیرمدول اساسی از M چون B است. بنا به فرض، B نمی تواند زیر مدول سره ای از M باشد، لذا $B = M$. بنابراین N جمعوند مستقیم M است. حال با استفاده از ۱.۱.۱۶، نتیجه می گیریم که M نیم ساده است. ■

گزاره ۱.۱.۱۸. فرض کنیم $\{N_i\}_{i\in I}$ گردایه ی تمام زیر مدول های اساسیِ مدول M_R باشد. در این صورت $Soc(M) = \bigcap_{i\in I} N_i$.

اثبات . چون هر زیر مدول اساسی با هر زیر مدول ساده اشتراک ناصفر دارد، پس هر زیر مدول اساسی شامل تمام زیر مدول های ساده می باشد. بنابراین $Soc(M) \subseteq \bigcap_{i\in I} N_i = N$.

حال نشان می دهیم N نیم ساده است. فرض کنیم L زیر مدولی دلخواه از N باشد. بنابه قضیه ی ۱.۱.۱۲، زیر مدول P از M موجود است که $L \oplus P \leq_e M$. چون $N \leq L \oplus P$، پس بنابه قانون مدولار $N = L \oplus (P \cap N)$. بنابراین L یک جمعوند مستقیم N است و بنابه قضیه ی ۱.۱.۱۶، N نیم ساده است. ■

۲.۱ پوش انژکتیو یک مدول

مدول M_R را **انژکتیو** می نامیم، هرگاه برای هر R-مدول راست A و هر $B \leq A$، هر همریختی $f : B \to M$ را بتوان به همریختی $f_۱ : A \to M$ توسیع داد.

به عنوان مثال $\mathbb{Q}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول انژکتیو است. اما $\mathbb{Z}$ انژکتیو نیست؛ زیرا همریختی $f : ۲\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ با ضابطه ی $f(۲n) = n$ را نمی توان به هیچ همریختی $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ توسیع داد.

اثبات قضیه ی زیر را می توان در منبع [۷] یافت.

قضیه ۱.۲.۱. ۱. مدول M_R انژکتیو است، اگر و تنها اگر برای هر ایدآل راست I از R، و هر $f \in Hom_R(I, M)$، عنصر $m \in M$ موجود باشد که برای هر $r \in I$، $f(r) = mr$.

۲. هر جمعوند مستقیم، هر حاصلضرب مستقیم از مدول های انژکتیو، انژکتیو است.

۳. هر مدول قابل نشاندن در یک مدول انژکتیو است.

قضیه ۲.۲.۱ (بئر[۱]). مدول M انژکتیو است، اگر و تنها اگر M جمعوند مستقیم هر مدولی باشد که شامل M است.

اثبات . فرض کنیم M انژکتیو باشد و $M \leq B$. در این صورت همریختی $id_M : M \to M$ قابل توسیع به همریختی $f : B \to M$ می باشد. واضح است که $M \cap Ker(f) = ۰$. از طرفی چون $M \cong \frac{B}{Ker(f)}$، پس $B = M + Ker(f)$. بنابراین $B = M \oplus Ker(f)$.

بعکس، فرض کنیم M جمعوند مستقیم هر مدول شامل M باشد. بنا به قضیه ی ۱.۲.۱ (۳)، M قابل نشاندن در یک مدول انژکتیو چون E می باشد. بنا به فرض M جمعوند مستقیم E است و در نتیجه انژکتیو است. ■

[۱] Baer

تعریف ۳.۲.۱. مدول M را یک **توسیعِ اساسیِ سره** از مدول N می‌نامیم، هرگاه $N \leq_e M$ و $N < M$.

حال به بیان ارتباط میان دو مفهوم انژکتیو بودن و توسیعِ اساسیِ سره می پردازیم:

قضیه ۴.۲.۱. مدول M انژکتیو است، اگر و تنها اگر هیچ توسیعِ اساسیِ سره‌ای نداشته باشد.

اثبات . فرض کنیم M انژکتیو باشد و $M < A$. بنا به قضیه ۲.۲.۱، M جمعوند مستقیم A می باشد. لذا M در A اساسی نیست. بنابراین M هیچ توسیعِ اساسیِ سره ای ندارد.

بعکس، فرض کنیم M هیچ توسیعِ اساسیِ سره ای نداشته باشد. بنا به قضیه ی ۱.۲.۱(۳)، M قابل نشاندن در یک مدول انژکتیو چون E است. بنا به قضیه ی ۱۲.۱.۱، زیر مدولی از E چون N موجود است که $M \oplus N \leq_e E$. اگر $M \oplus N = E$، آنگاه M جمعوند مستقیمِ مدول انژکتیو E است و در نتیجه انژکتیو است. حال فرض کنیم $M \oplus N \neq E$. بنا به قضیه ی ۱۲.۱.۱، $\frac{M \oplus N}{N} \leq_e \frac{E}{N}$، و چون $M \oplus N < E$، پس $\frac{E}{N} > \frac{M \oplus N}{N} \cong M$. بنابراین مدولی یکریخت با $\frac{E}{N}$ چون $\overline{E}$ موجود است که $M \leq_e \overline{E}$ و $M < \overline{E}$، که یک تناقض است. ■

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم $N \leq M_R$. در این صورت N را در M **بطور اساسی** بسته می نامیم، هرگاه هیچ توسیعِ اساسیِ سره‌ای در M نداشته باشد. به عبارت دیگر N در M بطور اساسی بسته است، هرگاه $N \leq_e C \leq M$، نتیجه دهد $N = C$.

مثال . فرض کنیم N یک جمعوند مستقیم از مدول M_R باشد. چون هر زیر مدول P از M که شامل N است، یک مجموع مستقیم از زیر مدول های M است و N جمعوند مستقیمی از آن می باشد، پس P نمی تواند توسیعِ اساسیِ سره ای از N در M باشد. این نشان می دهد که N در M به طور اساسی بسته است.

نتیجه ۶.۲.۱. فرض کنیم مدول E انژکتیو باشد و $M \leq E$. در اینصورت M انژکتیو است، اگر و تنها اگر M در E بطور اساسی بسته باشد.

اثبات. فرض کنیم M انژکتیو باشد. بنا به قضیه ۴.۲.۱، مدول M هیچ توسیعِ اساسیِ سره ای ندارد. لذا M در E هیچ توسیعِ اساسیِ سره ای ندارد و در نتیجه M در E به طور اساسی بسته است.

بعکس، فرض کنیم M در مدول انژکتیو E به طور اساسی بسته باشد. ثابت می کنیم M انژکتیو است. اگر $M = E$ آنگاه نتیجه حاصل است. فرض کنیم $M < E$. واضح است که M در E اساسی نیست. بنا به قضیه ی ۱۲.۱.۱، زیر مدول N از E موجود است، که $M \oplus N \leq_e E$. ادعا می کنیم $M \oplus N = E$. در غیر این صورت $\frac{E}{N} > \frac{M \oplus N}{N} \cong M$؛ زیرا $M \oplus N \neq E$، و بنا به قضیه ی ۱۲.۱.۱، $\frac{E}{N} \geq_e \frac{M \oplus N}{N} \cong M$. E شامل زیرمدولی چون $A \cong \frac{E}{N}$ است که $M \leq_e A$ و $M < A$. پس A یک توسیعِ اساسیِ سره ی M در E می باشد که یک تناقض است. بنابراین $M \oplus N = E$. این نشان می دهد که M جمعوند مستقیم یک مدول انژکتیو است و در نتیجه خودش نیز انژکتیو است. ■

تعریف ۷.۲.۱. مدول E را یک **پوش انژکتیو** برای مدول M می نامیم، هرگاه E انژکتیو باشد و $M \leq_e E$.

مثال . میدان اعداد گویا، $\mathbb{Q}$، یک پوش انژکتیو برای حلقه ی اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$، است.

قضیه ۸.۲.۱ (بئر، اکمن-شوف). فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت:

(الف) هر مدول انژکتیو شامل M، شامل یک پوش انژکتیو از M می باشد. در نتیجه پوش انژکتیوی برای M وجود دارد.

(ب) اگر E یک پوش انژکتیو برای M باشد و $M \leq_e C$، آنگاه نگاشت همانی روی M به یک تکریختی $C \to E$ توسیع می یابد.

(پ) اگر E یک پوش انژکتیو برای M باشد و $M \leq E'$، که E' انژکتیو است، آنگاه نگاشت همانی روی M، به یک تکریختی $E \to E'$ توسیع می یابد.

اثبات. (الف) فرض کنیم F یک مدول انژکتیو شامل M باشد. به کمک لم زُرن می توان دید که F دارای زیر مدولی چون E شامل M است، که نسبت به ویژگی $M \leq_e E$ ماکسیمال است. ادعا می کنیم که E انژکتیو می باشد. فرض کنیم $E \leq_e E' \leq F$. در این صورت واضح است که $M \leq_e E'$ و بنا به ماکسیمال بودن E بایستی $E = E'$. این نشان می دهد که E در F هیچ توسیعِ اساسیِ سره ای ندارد و در نتیجه به طور اساسی بسته است. پس بنا به نتیجه ی ۶.۲.۱، E انژکتیو است. بنابراین E یک پوش انژکتیو برای M می باشد.

توجه داریم که قضیه ی ۱.۲.۱(۳)، وجود مدول انژکتیو F را تضمین می کند. بنابراین حداقل یک پوش انژکتیو برای مدول M وجود دارد.

(ب) چون E انژکتیو است، پس نگاشت شمول $M \hookrightarrow E$، به یک همریختی $g : C \to E$ توسیع می یابد، که بوضوح $M \cap Ker(g) = 0$. از این که $M \leq_e C$ نتیجه می گیریم $Ker(g) = 0$. بنابراین g یک تکریختی است.

(پ) چون E' انژکتیو است، پس نگاشت شمول $M \hookrightarrow E'$، به همریختی $g : E \to E'$ توسیع می یابد، و مشابه اثبات بند (ب)، می توان دید که g یک تکریختی است. ■

در حقیقت، یک پوش انژکتیو برای M_R، کوچکترین مدول انژکتیو شامل M است. به همین صورت می توان گفت، یک پوش انژکتیو برای مدول M_R، بزرگترین توسیع اساسی ممکن برای مدول M می باشد.

نتیجه ۹.۲.۱. فرض کنیم E یک پوش انژکتیو برای مدول M_R باشد و $j : M \to E$ نگاشت شمول باشد. در این صورت:

(الف) هرگاه $f : M \to N$ یک تکریختی اساسی باشد، آنگاه تکریختی $g : N \to E$ وجود دارد که $gf = j$.

(ب) هرگاه E' یک مدول انژکتیو و $f : M \to E'$ یک تکریختی باشد، آنگاه تکریختی $g : E \to E'$ وجود دارد که $gj = f$.

اثبات . (الف) چون f اساسی است، پس $M \cong f(M) \leq_e N$. بنا به قضیه ی ۸.۲.۱ (ب)، $f(M) \cong M \to E$ به یک تکریختی چون $g : N \to E$ توسیع می یابد، که برای هر $m \in M$، $gf(m) = j(m)$. بنابراین $gf = j$.

(ب) چون $M \cong f(M) \leq E'$، و E یک پوش انژکتیو برای $M \cong f(M)$ است، پس بنا به قضیه ۸.۲.۱ (پ)، نگاشت $f(M) \cong M \to E$ به یک تکریختی چون $g : E \to E'$ توسیع می یابد. واضح است که برای هر $m \in M$، $gj(m) = f(m)$. بنابراین $gj = f$. ■

مثال زیر نشان می دهد که پوش انژکتیو برای یک مدول، که در قضیه ی ۸.۲.۱ (الف) وجود آن تضمین گشت، منحصر بفرد نیست.

مثال . فرض کنیم $R = \frac{\mathbb{Z}}{۴\mathbb{Z}}$. بوضوح $R \cong \mathbb{Z}_۴$ و می توان دید که R_R انژکتیو است. قرار می دهیم $F = R \oplus R$، و $M = (\overline{۲}, \overline{۰})R \leq F$. در این صورت $(\overline{۱}, \overline{۰})R$ و $(\overline{۱}, \overline{۲})R$ زیر مدول هایی از F و یکریخت با R هستند و بنابراین انژکتیو می باشند. علاوه براین می توان دید که $M \leq_e (\overline{۱}, \overline{۰})R$ و $M \leq_e (\overline{۱}, \overline{۲})R$. در نتیجه $(\overline{۱}, \overline{۰})R$ و $(\overline{۱}, \overline{۲})R$ هر دو پوش انژکتیو هایی برای M می باشند.

حال نشان می دهیم پوش انژکتیو برای یک مدول در حد یکریختی منحصر بفرد است.

قضیه ۱۰.۲.۱. اگر E و E' به ترتیب پوش انژکتیو هایی برای مدول های یکریخت M و M' باشند، آنگاه هر یکریختی از M به M' به یک یکریختی از E به E' توسیع می یابد. در حالت خاص، اگر E

و E' دو پوش انژکتیو برای مدول M باشند، آنگاه نگاشت همانی روی M به یکریختی از E به E' توسیع می یابد.

اثبات . فرض کنیم $j : M \to E$ و $j' : M' \to E'$ نگاشت های شمول باشند و $f : M \to M'$ یک یکریختی باشد. در این صورت $j'f : M \to E'$ یک تکریختی است. بنا به نتیجه ی ۹.۲.۱(ب)، تکریختی $g : E \to E'$ موجود است که $gj = j'f$. لذا $M' = f(M) = g(M) \leq g(E)$ و در نتیجه $g(E) \leq_e E'$. بنابراین g یک تکریختی اساسی است. چون E انژکتیو است، بنابه قضیه ی ۴.۲.۱، هیچ توسیعِ اساسیِ سره ای ندارد. در نتیجه $g(E) = E'$ و لذا g یک یکریختی است. ■

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. چون پوش انژکتیو M در حد یکریختی منحصر بفرد است آن را با علامت $E(M)$ نمایش می دهیم.

با توجه به تعریف فوق، هرگاه می نویسیم $E(N) = E(M)$ منظورمان این است که هر پوش انژکتیو N یک پوش انژکتیو M است و هر پوش انژکتیو M یک پوش انژکتیو N است.

مثال . فرض کنیم M_1 و M_2 دو مدول باشند. در این صورت $E(M_1 \oplus M_2) = E(M_1) \oplus E(M_2)$.

حل . چون $E(M_1)$ و $E(M_2)$ انژکتیو هستند، پس $E(M_1) \oplus E(M_2)$ انژکتیو است. بنا به قضیه ۸.۱.۱ (ت)، از اینکه $M_1 \leq_e E(M_1)$ و $M_2 \leq_e E(M_2)$ نتیجه می گیریم $M_1 \oplus M_2 \leq_e E(M_1) \oplus E(M_2)$. بنابراین $E(M_1) \oplus E(M_2)$ پوش انژکتیو $M_1 \oplus M_2$ است. ■

گزاره ۱۲.۲.۱. اگر N یک زیر مدول اساسی از مدول M_R باشد، آنگاه $E(N) = E(M)$.

اثبات . فرض کنیم $E = E(M)$. چون $N \leq_e M$ و $M \leq_e E(M)$، پس $N \leq_e E(M)$. بنابراین $E(M)$ یک پوش انژکتیو برای N است.

بعکس، فرض کنیم $E = E(N)$. در این صورت نگاشت همانی روی N به تکریختی چون

$f : M \to E(N)$ توسیع می یابد و چون $N \leq M \cong f(M) \leq E(N)$ و $N \leq_e E(N)$، پس $E(N) \leq_e f(M) \cong M$. بنابراین $E(N)$ یک پوش انژکتیو برای $f(M)$ است. ■

فصل ۲

زیرمدول های اساسی قوی و حلقه های نیم آرتینی

۱.۲ زیرمدول های اساسی قوی

در بخش ۱.۱ دیدیم که زیرمدول N در M_R اساسی است، اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعه ی متناهی ناصفر (و ناتهی) X از M، $r \in R$ ای موجود باشد که $0 \neq Xr \subseteq N$ (گزاره ۴.۱.۱). در بررسی زیرمدول های مختلف می توان دسته ای از زیرمدول ها را یافت که حتی با حذفِ شرط متناهی بودن X، در عبارت فوق صدق می کنند. در این بخش ما به بحث و بررسیِ این گونه زیر مدول های اساسی می پردازیم.

تعریف ۱.۱.۲. زیرمدول N از M را **اساسی قوی** می‌نامیم، هرگاه برای هر زیر مجموعه‌ی ناصفر $X \subseteq M$، عنصر $r \in R$ وجود داشته باشد که $0 \neq Xr \subseteq N$. در این صورت M را یک **توسیع اساسی قوی** از N می نامیم و با علامت $N \leq_{se} M$ نمایش می دهیم.

مثال. فرض کنیم D یک دامنه ی صحیح باشد و $0 \neq I \leq D$. چون برای هر زیر مجموعه ی ناصفر X از D، $0 \neq XI = IX \subseteq I$، پس $I \leq_{se} D$. در نتیجه هر ایدآل از یک دامنه ی صحیح در آن اساسی قوی است. لذا هر ایدآل ناصفر $\mathbb{Z}$ در آن اساسی قوی است.

بدیهی است که هر زیر مدول اساسی قوی، اساسی است. چنانچه در مثال زیر خواهیم دید، عکس این گزاره در حالت کلی برقرار نیست.

مثال. در بخش قبل دیدیم که برای هر $i \geq 1$، $G_i \leq_e \mathbb{Z}_{p^\infty}$. حال فرض کنیم $X = \{\frac{1}{p^i} + \mathbb{Z} | i \in \mathbb{N}\}$. به راحتی می توان دید که هیچ عنصر $r \in \mathbb{Z}$ ای وجود ندارد که $0 \neq Xr \subseteq G_1$. لذا G_i یک زیر مدول اساسی از $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ است که اساسی قوی نمی باشد.

گزاره ۲.۱.۲. زیر مدول N در M_R اساسی قوی است، اگر و تنها اگر برای هر مجموعه ی اندیس گذار I، $\prod_I N \leq_e \prod_I M$.

اثبات . فرض کنیم I مجموعه ی اندیس گذار دلخواهی باشد و $N \leq_{se} M$ و $0 \neq X \subseteq \prod_I M$. هر عنصر $x \in X$، به فرم $x = \{x_i\}_{i\in I}$ است که به ازای هر $i \in I$، $x_i \in M$. لذا x توسط مؤلفه هایش (x_i ها) مشخص می شود. فرض کنیم Y مجموعه ی تمام مؤلفه های عناصر X باشد. بنابراین $0 \neq Y \subseteq M$ و چون $N \leq_{se} M$، پس $r \in R$ موجود است که $0 \neq Yr \subseteq N$. از نحوه ی انتخاب عناصر Y نتیجه می گیریم $0 \neq Xr \subseteq \prod_I N$، در نتیجه $\prod_I N \leq_e \prod_I M$.

بعکس، فرض کنیم برای هر مجموعه ی اندیس گذار I، $\prod_I N \leq_e \prod_I M$ و $0 \neq X \subseteq M$. حال برای $I = X$، عنصر $x = \{x_i\}_{i\in I} \in \prod_I M$ را در نظر می گیریم که برای هر $i \in I$، $x_i = i$. بوضوح $x \neq 0$، و لذا $r \in R$ وجود دارد که $0 \neq xr \in \prod_I N$. بنابراین $0 \neq Xr \subseteq N$. ■

نتیجه ۳.۱.۲. زیر مدول N در M_R اساسی قوی است، اگر و تنها اگر برای هر I، $\prod_I N \leq_{se} \prod_I M$.

اثبات . فرض کنیم $N \leq_{se} M$. بنابه قسمت اول اثبات گزاره ی قبل، برای هر مجموعه ی اندیس گذار I و هر زیر مجموعه ی ناتهی ناصفر X از $\prod_I M$، $r \in R$ وجود دارد که $0 \neq Xr \subseteq \prod_I N$. در نتیجه $\prod_I N \leq_{se} \prod_I M$. بعکس، بدیهی است. ■

گزاره ۴.۱.۲. فرض کنیم $N \leq_{se} M$، آنگاه $(N : X)$ و $Ann(M/N)$ در R_R اساسی قوی هستند. علاوه براین هرگاه $N \subseteq P \leq M$، آنگاه $0 \neq X \subseteq M_R$. دراینصورت اگر

$Ann(P) \neq Ann(P/N) \leq_{se} R_R$.

اثبات . فرض کنیم $0 \neq Y \subseteq R_R$. هرگاه $Y \subseteq (N : X)$، حکم بدیهی است. فرض کنیم $Y \nsubseteq (N : X)$. از اینکه $XY \subseteq M$ و $N \leq_{se} M$، نتیجه می گیریم عنصر $r \in R$ وجود دارد که $0 \neq XYr \subseteq N$. بنا براین $0 \neq Yr \subseteq (N : X)$ و در نتیجه $(N : X) \leq_{se} R_R$.

چون $Ann(M/N) = (N : M)$، پس با فرض $X = M$ در قسمت قبل نتیجه می گیریم $Ann(M/N) \leq_{se} R_R$.

حال توجه داریم که اگر $N \subset P \leq M$، آنگاه از اینکه N در M اساسی قوی است، نتیجه می گیریم عنصر $r \in R$ وجود دارد که $0 \neq Pr \subseteq N$. بنابراین $r \in Ann(\frac{P}{N}) = (N : P) \leq_{se} R_R$، که $r \notin Ann(P)$. ■

گزاره ۵.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت :

(الف) اگر $f : M \to P$ یک R-همریختی باشد و $N \leq_{se} P$، آنگاه $f^{-1}(N) \leq_{se} M$.

(ب) اگر $I \leq_{se} R_R$، آنگاه I شامل $(I : R)$ است و $(I : R) \leq_{se} R_R$.

(پ) فرض کنیم $N \leq P \leq M$. در این صورت $N \leq_{se} M$، اگر و تنها اگر $P \leq_{se} M$ و $N \leq_{se} P$.

(ت) اگر $N_1 \leq_{se} M_1 \leq M$ و $N_2 \leq_{se} M_2 \leq M$، آنگاه $N_1 \cap N_2 \leq_{se} M_1 \cap M_2$.

(ث) اگر برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، $N_i \leq M_i$، آنگاه $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i \leq_{se} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$، اگر و تنها اگر برای هر $i = 0, 1, \ldots, n$، $N_i \leq_{se} M_i$.

(ج) اگر I یک مجموعه‌ی اندیس گذار دلخواه باشد و $\prod_{i\in I} N_i \leq_{se} \prod_{i\in I} M_i$، آنگاه برای هر $i \in I$، $N_i \leq_{se} M_i$.

(چ) اگر I یک مجموعه‌ی اندیس گذار دلخواه باشد، و $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_{se} \bigoplus_{i\in I} M_i$، آنگاه برای هر $i \in I$، $N_i \leq_{se} M_i$.

اثبات . (الف) فرض کنیم $0 \neq X \subseteq M$. اگر $f(X) = 0$، آنگاه $0 \neq X \subseteq Ker(f) \leq f^{-1}(N)$. فرض کنیم $f(X) \neq 0$. بنا به فرض $r \in R$ ای وجود دارد که $0 \neq f(X)r = f(Xr) \subseteq N$. از این می توان نتیجه گرفت $0 \neq Xr \subseteq f^{-1}(N)$. بنابراین $f^{-1}(N) \leq_{se} M$.

(ب) فرض کنیم $I \leq_{se} R_R$. در این صورت چون $(I : R) \subseteq R$، پس $r \in R$ ای وجود دارد که $(I : R) = (I : R)r \subseteq I$.

حال فرض کنیم $0 \neq X \subseteq R$. بنا به فرض $r \in R$ ای وجود دارد که $0 \neq Xr \subseteq I$. لذا $XrR \subseteq IR = I$، که نتیجه می دهد $0 \neq Xr \subseteq (I : R)$. بنابراین $(I : R) \leq_{se} R_R$.

(پ) هرگاه $N \leq_{se} M$ حکم بدیهی است.

بعکس، فرض کنیم $0 \neq X \subseteq M$. چون $P \leq_{se} M$، پس $r_1 \in R$ ای وجود دارد که $0 \neq Xr_1 \subseteq P$ و چون $N \leq_{se} P$، پس $r_2 \in R$ ای وجود دارد که $0 \neq Xr_1r_2 \subseteq N$. بنابراین $N \leq_{se} M$.

(ت) فرض کنیم $0 \neq X \subseteq M_1 \cap M_2$. چون $N_1 \leq_{se} M_1$، پس $r_1 \in R$ وجود دارد که $0 \neq Xr_1 \subseteq N_1$. چون $N_2 \leq_{se} M_2$، از $0 \neq Xr_1 \subseteq M_2$ نتیجه می گیریم $r_2 \in R$ وجود دارد که $0 \neq Xr_1r_2 \subseteq N_2$. بنابراین $0 \neq Xr_1r_2 \subseteq N_1 \cap N_2$. در نتیجه $N_1 \cap N_2 \leq_{se} M_1 \cap M_2$.

(ث) فرض کنیم $0 \neq X \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ و برای هر $i = 1, 2, \dots, n$، $N_i \leq_{se} M_i$ و π_i نگاشت کانونی از $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ به M_i باشد. در این صورت هرگاه $\pi_1(X) = 0$، آنگاه قرار می دهیم $r_1 = 1$ و اگر $\pi_1(X) \neq 0$، آنگاه بنا به فرض $r_1 \in R$ ای وجود دارد که $0 \neq \pi_1(X)r_1 \subseteq N_1$. برای هر $i = 2, \dots, n$، اگر $\pi_{i-1}(X)r_1 \dots r_{i-1} = 0$، آنگاه قرار می دهیم $r_i = 1$ و در غیر این صورت، بنا به فرض $r_i \in R$ ای وجود دارد که $0 \neq \pi_{i-1}(X)r_1 \dots r_{i-1}r_i \subseteq N_i$. اکنون فرض کنیم $r = r_1 \dots r_n$. می توان دید که $0 \neq Xr \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ و لذا $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i \leq_{se} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$.

بعکس، فرض کنیم $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i \leq_{se} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$. بنا به بند (الف)، برای هر $i = 1, \dots, n$،

$$N_i = \pi_i^{-1}(\bigoplus_{i=1}^{n} N_i) \leq_{se} M_i.$$

(ج) فرض کنیم I یک مجموعه ی اندیس گذار دلخواه باشد و $\prod_{i \in I} N_i \leq_{se} \prod_{i \in I} M_i$. فرض کنیم $j \in I$ و $0 \neq X \subseteq M_j$ و π_j نگاشت کانونی از $\prod_{i \in I} M_i$ به M_j باشد. چون $0 \neq \pi_j^{-1}(X) \subseteq \prod_{i \in I} M_i$، پس $r \in R$ وجود دارد که $0 \neq \pi_j^{-1}(X)r = \pi_j^{-1}(Xr) \subseteq \prod_{i \in I} N_i$ و لذا $0 \neq Xr \subseteq N_j$. در نتیجه

$N_j \leq_{se} M_j$.

اثبات بند (چ) مشابه بند (ج) می باشد. ■

گزاره ۶.۱.۲. فرض کنیم X مجموعه‌ای از متغیر های تعویض پذیر روی R باشد و $S = R[X]$. در این صورت $I \leq_{se} R_R$، اگر و تنها اگر $I[X] \leq_{se} S_S$.

اثبات . فرض کنیم $0 \neq A \subseteq S$ و Y مجموعه ی همه ی ضرایب عناصر A باشد. واضح است که $0 \neq Y \subseteq R$. چون $I \leq_{se} R_R$، پس عنصر $r \in R \subseteq S$ وجود دارد که $0 \neq Yr \subseteq I$. لذا $0 \neq Ar \subseteq I[X]$. بنابراین $I[X] \leq_{se} S_S$.

بعکس، فرض کنیم $0 \neq Y \subseteq R$. چون $I[X] \leq_{se} S$، پس $f \in S$ وجود دارد که $0 \neq Yf \subseteq I[X]$. اگر b ضریب پیشرو f باشد، آنگاه $0 \neq Yb \subseteq I$. بنابراین $I \leq_{se} R$. ■

گزاره ۷.۱.۲. اگر $\{R_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از حلقه ها باشد، آنگاه $\bigoplus_{i\in I} R_i$ هم به عنوان ایدآل چپ و هم به عنوان ایدآل راست در $\prod_{i\in I} R_i$ اساسی قوی است.

اثبات . فرض کنیم $0 \neq y = \{y_i\}_{i\in I} \in Y \subseteq \prod_{i\in I} R_i$ و $j \in I$ اندیسی باشد که $0 \neq y_j \in R_j$. قرار می دهیم $x = \{x_i\}_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} R_i$، که در آن $x_j = 1$، و برای هر $i \in I$ که $j \neq i$، $x_i = 0$. واضح است که برای هر $z \in Y$، $zx \in \bigoplus_{i\in I} R_i$. چون $yx \neq 0$، پس $0 \neq Yx \subseteq \bigoplus_{i\in I} R_i$. بنابراین $\bigoplus_{i\in I} R_i$ به عنوان ایدآل راست در $\prod_{i\in I} R_i$ اساسی قوی است. به طور مشابه ثابت می شود که $\bigoplus_{i\in I} R_i$ به عنوان ایدآل چپ در $\prod_{i\in I} R_i$ اساسی قوی است. ■

تعریف ۸.۱.۲. حلقه ی جابجایی R را **موضعی** می نامیم، هرگاه R یک ایدآل راست ماکسیمال منحصر به فرد داشته باشد.

گزاره ۹.۱.۲. فرض کنیم I یک ایدآل از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $I + Ann_l(I) \leq_{se} R_R$. در نتیجه ایدآل ماکسیمال یک حلقه‌ی موضعی و ایدآلهای ناصفر یک حلقه ی اول اساسی قوی هستند.

اثبات . فرض کنیم $0 \neq Y \subseteq R$. هرگاه $YI = 0$، آنگاه $Y \subseteq Ann_l(I) \subseteq I + Ann_l(I)$ و هرگاه $YI \neq 0$، آنگاه چون I ایدآل است، پس $0 \neq YI \subseteq I \subseteq I + Ann_l(I)$. بنابراین $I + Ann_l(I) \leq_{se} R_R$.

اگر I ایدآل ماکسیمال یک حلقه موضعی، و یا ایدآل ناصفری از یک حلقه ی اول باشد، آنگاه $Ann_l(I) \subseteq I$. بنابراین $I = I + Ann_l(I) \leq_{se} R_R$ ■

مثال . اگر N یک ایدآل راست پوچ توان از حلقه‌ی R باشد، آنگاه $Ann_l(N) \leq_{se} R_R$.

حل . فرض کنیم $0 \neq X \subseteq R$. هرگاه $X \subseteq Ann_l(N)$ حکم بدیهی است. در غیر این صورت، چون N پوچ توان است، پس عدد صحیح مثبت $n \geq 1$ وجود دارد که $XN^n \neq 0$ و $XN^{n+1} = 0$. لذا عنصر $r \in N^n$ وجود دارد که $Xr \neq 0$. چون $XrN \subseteq XN^{n+1} = 0$، پس $Xr \subseteq Ann_l(N)$. بنابراین $Ann_l(N) \leq_{se} R_R$. ■

مثال . فرض کنیم I یک ایدآل چپ پوچ توان از حلقه‌ی R و M یک R-مدول راست باشد. اگر $P = \{x \in M | I \subseteq Ann(x)\}$، آنگاه $P \leq_{se} M$.

حل . به راحتی می توان دید که P یک زیر مدول از M است. فرض کنیم $0 \neq X \subseteq M$. هرگاه $XI = 0$، آنگاه $X \subseteq P$ و هرگاه $XI \neq 0$، آنگاه پوچ توان بودن I نتیجه می دهد که عدد صحیح مثبت $n \geq 1$ وجود دارد که $XI^n \neq 0$ و $XI^{n+1} = 0$. لذا عنصر $r \in I^n$ وجود دارد که $Xr \neq 0$. چون $XrI \subseteq XI^{n+1} = 0$، پس برای هر $x \in X$، $I \subseteq Ann(xr)$. بنابراین $Xr \subseteq P$ و در نتیجه $P \leq_{se} M$. ■

۲.۲ معرفی و بررسی t-بخش و t-مؤلفه ها

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنیم N زیر مدولی از M_R باشد. در این صورت اجتماع تمام زیر مجموعه های X از M که $X \in ۰$ و $(N : X) = Ann(X)$ را با $T_M(N)$ (و هرگاه ابهامی وجود نداشته باشد با $T(N)$) نمایش می دهیم و آن را t-**بخش** N در M می نامیم.

منظور از یک t-**مؤلفه** ی N در M، زیر مجموعه ای چون X از M است که $X \cap N = ۰$ و $(N : X) = Ann(X)$.

فرض کنیم $T'_M(N)$ نمایانگر اجتماع تمام t-مؤلفه های N در M باشد، یعنی $T'_M(N) = \bigcup_{X\in A} X$ که در آن

$$A = \{X | X \subseteq M, (N : X) = Ann(X), X \cap N = ۰\}$$

واضح است که $T'_M(N) \cap N = ۰$. فرض کنیم $r \in (N : T'_M(N))$. اگر $x \in T'_M(N)$ و X یک t-مؤلفه ی N در M شامل x باشد، آنگاه از $r \in (N : X) = Ann(X)$، نتیجه می گیریم $xr = ۰$ و لذا $r \in Ann(T'_M(N))$. بنابراین $T'_M(N)$ بزرگترین t-مؤلفه ی N در M است.

در ادامه هرگاه ابهامی وجود نداشته باشد، برای خلاصه نویسی از نماد T' به جای $T'_M(N)$ استفاده می نماییم.

به راحتی می توان دید که $-T' \subseteq T'$ و برای هر $r \in R$، $(T'r \setminus N) \subseteq T'$. حال به بیان ویژگی های $T(N)$ و T' می پردازیم.

گزاره ۲.۲.۲. فرض کنیم N یک زیر مدول M_R باشد. در این صورت $T(N)$ بزرگترین زیرمدول T از M است که $(N : T) = Ann(T)$. علاوه بر این $N + T(N) \leq_{se} M$.

اثبات . ابتدا ثابت می کنیم $T(N) \leq M$. چون $۰ \in T(N)$، پس $T(N) \neq \emptyset$.

حال اگر $x, y \in T(N)$، آنگاه زیر مجموعه های X و Y از M وجود دارند که $x \in X$ و $y \in Y$ و

$(N:X) = Ann(X)$ و $(N:Y) = Ann(Y)$. از طرفی

$$(N : X+Y) = (N:X) \cap (N:Y) = Ann(X) \cap Ann(Y) = Ann(X+Y)$$

لذا $X+Y \subseteq T(N)$ و بنابراین $x+y \in T(N)$.

اکنون فرض کنیم $r \in R$ و $x \in T(N)$. در این صورت زیر مجموعه ی X از M وجود دارد که $x \in X$ و $(N:X) = Ann(X)$. فرض کنیم $y \in r(N:Xr)$. در این صورت $h \in (N:Xr)$ وجود دارد که $y = rh$. بنابراین $Xy = Xrh \subseteq N$. پس $y \in (N:X) = Ann(X)$ و لذا

$$r(N:Xr) \subseteq (N:X) = Ann(X)$$

در نتیجه هرگاه $s \in (N:Xr)$، آنگاه $rs \in (N:X) = Ann(X)$. لذا $Xrs = ۰$ و بنابراین $s \in Ann(Xr)$. این نتیجه می دهد $(N:Xr) = Ann(Xr)$ و لذا $Xr \subseteq T(N)$. پس $xr \in T(N)$. بنابراین ثابت نمودیم که $T(N)$ زیر مدولی از M است.

حال فرض کنیم $a \in (N:T(N)) \setminus Ann(T(N))$. در این صورت $x \in T(N)$ ای وجود دارد که $۰ \neq xa \in N$. زیر مجموعه ی X از M شامل x وجود دارد که $a \in (N:X) = Ann(X)$. در نتیجه $xa = ۰$، که یک تناقض است. بنابراین $(N:T(N)) = Ann(T(N))$.

اگر L زیر مدولی از M باشد که $(N:L) = Ann(L)$، آنگاه از تعریف t-بخش نتیجه می گیریم $L \subseteq T(N)$. بنابراین $T(N)$ بزرگترین زیر مدول M است که $(N:T(N)) = Ann(T(N))$.

اکنون فرض کنیم $۰ \neq Y \subseteq M$. هرگاه $(N:Y) = Ann(Y)$، آنگاه $Y \subseteq T_M(N) \subseteq N+T_M(N)$ و هرگاه $r \in (N:Y) \setminus Ann(Y)$، آنگاه $۰ \neq Yr \subseteq N \subseteq N+T_M(N)$. بنابراین $N+T_M(N) \leq_{se} M$.

■

نتیجه ۳.۲.۲. فرض کنیم N زیر مدولی از M_R باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

۱. $N \leq_{se} M$.

۲. $T(N) \subseteq N$.

۳. $T(N) = 0$.

اثبات . بنا به گزاره ی قبل $T(N) \subseteq N$، اگر و تنها اگر $Ann(T(N)) = (N : T(N)) = R$، اگر و تنها اگر $T(N) = 0$. حال فرض کنیم $T(N) = 0$، در این صورت از گزاره قبل نتیجه می گیریم $N = N + T(N) \leq_{se} M$.

بعکس، فرض کنیم $N \leq_{se} M$. اگر $T(N) \neq 0$، آنگاه $r \in R$ ای وجود دارد که $0 \neq T(N)r \subseteq N$. لذا $r \in (N : T(N)) = Ann(T(N))$ و در نتیجه $T(N)r = 0$، که یک تناقض است. ■

نتیجه ۴.۲.۲. فرض کنیم N یک زیر مدول از M_R باشد. در این صورت $N \leq_{se} M$، اگر و تنها اگر برای هر زیر مدول ناصفر P از M، $Ann(\frac{N+P}{N}) \neq Ann(P)$.

اثبات . اگر $N \leq_{se} M$، آنگاه بنابه گزاره ی ۴.۱.۲، برای هر زیر مدول ناصفر P از M، $(N : P) = Ann(\frac{N+P}{N}) \neq Ann(N+P)$. لذا $(N : P) \neq Ann(P)$.

بعکس، فرض کنیم برای هر $0 \neq P \leq M$، $(N : P) \neq Ann(P)$، ثابت می کنیم $N \leq_{se} M$. بنا به گزاره ی ۲.۲.۲، $T(N)$ بزرگترین زیر مدول M است که $(N : T(N)) = Ann(T(N))$. بنابراین $T(N) = 0$. حال با استفاده از نتیجه ی ۳.۲.۲، نتیجه می گیریم $N \leq_{se} M$. ■

گزاره ۵.۲.۲. فرض کنیم N زیر مدولی از M_R باشد. در این صورت $N + T'_M(N) = N + T_M(N)$. علاوه بر این $T'_M(N)$ بزرگترین زیر مجموعه ی T' از M است که $T' \cap N = 0$ و

$$Ann(T(N)) = (N : T(N)) = (N : T') = Ann(T').$$

اثبات . می دانیم که $T'_M(N) \cap N = 0$، $(N : T'_M(N)) = Ann(T'_M(N))$ و $(N : T(N)) = Ann(T(N))$. فرض کنیم X زیر مجموعه ای از M باشد که $(N : X) = Ann(X)$.

در این صورت اگر قرار دهیم $X' = (X \setminus N) \cup \{0\}$، آنگاه $X' \cap N = 0$ و

$$Ann(X') \subseteq (N : X') = (N : X) = Ann(X) \subseteq Ann(X')$$

بنابراین $Ann(X) = (N : X) = (N : X') = Ann(X')$، که نشان می دهد $X' \subseteq T'$.

بنابه تعریف t-بخش و بزرگترین t-مؤلفه، واضح است که

$$N + T'_M(N) = \{x + y | x \in N, y \in T'_M(N)\} = N + T(N)$$

پس

$$Ann(T'_M(N)) = (N : T'_M(N)) = (N : N + T'_M(N))$$

$$= (N : N + T(N)) = (N : T(N)) = Ann(T(N))$$

و بدیهی است که $T'_M(N)$ بزرگترین زیر مجموعه از M با خاصیت فوق است. ■

نتیجه ۶.۲.۲. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد و $A \leq B \leq M$. در این صورت $T_M(B) \subseteq T_M(A)$ و $T_B(A) \subseteq T_M(A)$. همچنین برای هر ایدآل راست I از R، $T_M(MI)I = 0$ و برای هر ایدآل J از R، $T_{R_R}(J) \subseteq Ann_l(J)$.

اثبات. اگر X زیر مجموعه ای از $T_M(B)$ شامل ۰ باشد که $(B : X) = Ann(X)$، آنگاه از $A \leq B$ نتیجه می شود که $(B : X) = Ann(X) \subseteq (A : X) \subseteq (B : X)$. بنابراین $(A : X) = Ann(X)$. پس $X \subseteq T_M(A)$ و در نتیجه $T_M(B) \subseteq T_M(A)$.

اگر X زیر مجموعه ای از $T_B(A)$ شامل ۰ باشد که $(A : X) = Ann(X)$، آنگاه واضح است که $X \subseteq T_M(A)$. در نتیجه $T_B(A) \subseteq T_M(A)$

اکنون فرض می کنیم I یک ایدآل راست از حلقه ی R باشد. بنابه گزاره ی ۲.۲.۲، $T_M(MI)$ بزرگترین زیر مدولِ M است که $Ann(T_M(MI)) = (MI : T_M(MI))$. از طرفی $T_M(MI)I \subseteq MI$. لذا $I \subseteq (MI : T_M(MI)) = Ann(T_M(MI))$، بنابراین $T_M(MI)I = 0$.

حال فرض کنیم J یک ایدآل از حلقه ی R باشد. بنابه قسمت قبل،

$T_{R_R}(J)J = T_{R_R}(RJ)J = 0$. بنابراین $T_{R_R}(J) \subseteq Ann_l(J)$. ■

تعریف ۷.۲.۲. زیر مجموعه‌ی X از Y را **متمم متناهی** می‌نامیم، هرگاه مجموعه ی $Y \setminus X$ متناهی باشد.

گزاره ۸.۲.۲. فرض کنیم N یک زیر مدول از M_R باشد. دراین صورت $Ann(T(N))$ هیچ عنصری از $M \setminus T(N)$ را پوچ نمی‌سازد و اگر $N \leq_e M$، آنگاه برای هر زیر مجموعه‌ی متمم متناهیِ X از $T(N)$، $(N : X) = Ann(X)$.

اثبات . فرض کنیم عنصر $m \in M$ چنان باشد که $mAnn(T(N)) = 0$. بنابراین $Ann(T(N)) \subseteq Ann(m) \subseteq (N : m)$. حال قرار می دهیم $Y = T(N) \cup \{m\}$. در نتیجه

$$(N : Y) = (N : T(N) \cup \{m\}) = (N : T(N)) \cap (N : m) = Ann(T(N)) \cap (N : m)$$

$$= Ann(T(N)) = Ann(T(N)) \cap Ann(m) = Ann(T(N) \cup \{m\}) = Ann(Y)$$

بنابراین $(N : Y) = Ann(Y)$ و لذا $Y \subseteq T(N)$. در نتیجه $m \in T(N)$.

اکنون فرض کنیم $N \leq_e M$ و F زیرمجموعه ای متناهی از $T(N)$ باشد و $X = T(N) \setminus F$. اگر $a \in (N : X) \setminus Ann(X)$، آنگاه $0 \neq Xa \subseteq N$. ادعا می کنیم $Fa = 0$. در غیر این صورت، اگر $Fa \neq 0$، آنگاه بنابه گزاره ی ۴.۱.۱، از $N \leq_e M$ نتیجه می گیریم عنصر $b \in R$ ای وجود دارد که $0 \neq Fab \subseteq N$. از طرفی چون $f \subseteq T(N)$، پس $T(N)ab = (X \cup F)ab = Xab \cup Fab \subseteq N$. بنابراین $ab \in (N : T(N)) = Ann(T(N))$. در نتیجه $Fa = 0$، که یک تناقض است. لذا $Fa = 0$. بنابراین از

$$T(N)a = (X \cup F)a = Xa \cup Fa = Xa \subseteq N$$

نتیجه می گیریم $a \in (N : T(N)) = Ann(T(N))$. لذا $Xa = 0$، که یک تناقض است. ■

گزاره ۹.۲.۲. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد. در این صورت $Ann(M)$ اول است، اگر و تنها اگر برای هر زیر مدول N از M، $T(N) = M$ یا $Ann(N) = Ann(M)$.

اثبات. فرض کنیم $Ann(M)$ یک ایدآل اول باشد و $N \leq M$. واضح است که $(N : M)Ann(N) \subseteq Ann(M)$. بنابراین $Ann(N) \subseteq Ann(M)$ یا $(N : M) \subseteq Ann(M)$. پس $Ann(N) = Ann(M)$ یا $(N : M) = Ann(M)$. اگر $(N : M) = Ann(M)$، آنگاه $M \subseteq T(N)$ و در نتیجه $M = T(M)$.

بعکس، فرض کنیم برای هر زیر مدول N از M، $T(N) = M$ یا $Ann(N) = Ann(M)$. ثابت می کنیم $Ann(M)$ اول است. برای این منظور، فرض کنیم A و B دو ایدآل از حلقه ی R باشند به طوری که $BA \subseteq Ann(M)$. بنا به فرض، برای زیر مدول MB از M، $T(MB) = M$ یا $Ann(MB) = Ann(M)$.

بنابه نتیجه ی ۶.۲.۲، $T(MB)B = ۰$. بنابراین اگر $T(MB) = M$، آنگاه $MB = ۰$ و در نتیجه $B \subseteq Ann(M)$. اگر $Ann(MB) = Ann(M)$، آنگاه از $BA \subseteq Ann(M)$ نتیجه می گیریم $MBA = ۰$. لذا $A \subseteq Ann(MB) = Ann(M)$ و در نتیجه $A \subseteq Ann(M)$. ■

گزاره ۱۰.۲.۲. اگر P یک ایدآل اول از حلقه‌ی R باشد که به عنوان ایدآل راست اساسی قوی نیست، آنگاه $T(P) = Ann_l(P)$.

اثبات. بنا به نتیجه ی ۶.۲.۲، $T(P) \subseteq Ann_l(P)$. از طرفی چون $T(P)Ann_r(T(P)) = ۰ \subseteq P$، پس $T(P) \subseteq P$ یا $Ann_r(T(P)) \subseteq P$. چون P به عنوان ایدآل راست، اساسی قوی نیست، پس $T(P) \not\subseteq P$ و بنابراین $Ann_r(T(P)) \subseteq P$. حال از گزاره ی ۸.۲.۲، نتیجه می گیریم:

$$Ann_l(P) \subseteq Ann_l(Ann_r(T(P)) = T(P)$$

■

تعریف ۱۱.۲.۲. مجموعه ی $\{m \in M | Ann(m) \leq_{se} R_R\}$ را **زیر مدول منفرد قوی** مدول M_R می نامیم و با علامت $SZ(M)$ نمایش می دهیم. مدول M را t–**منفرد** می نامیم، هرگاه $SZ(M) = M$. اگر $SZ(M) = ۰$، گوییم M t–**نامنفرد** است.

گزاره ۱۲.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی باشد. در این صورت $SZ(R) = ۰$، اگر و تنها اگر $Z(R) = ۰$.

اثبات . واضح است که $SZ(R) \subseteq Z(R)$. بنابراین اگر $Z(R) = ۰$، آنگاه $SZ(R) = ۰$. فرض کنیم $۰ \neq a \in Z(R)$. پس $I \leq_e R$ وجود دارد که $aI = ۰$. از اینکه $۰ \neq a \in R$ و $I \leq_e R$، نتیجه می گیریم عنصر $r \in R$ وجود دارد که $۰ \neq ar \in I$. بنابراین $ar(I+Ann_l(I)) = arI+arAnn_r(I) = ۰$. چون $I + Ann_l(I) \leq_{se} R$، پس $۰ \neq ar \in SZ(R)$. ■

تعریف ۱۳.۲.۲. ایدآل I از حلقه ی R را **نیم اول** می نامیم، هرگاه با اشتراک خانواده ای از ایدآل های اول برابر باشد. R را یک **حلقه ی نیم اول** می نامیم، هرگاه ایدآلِ صفرِ آن نیم اول باشد.

اثبات قسمت های مختلف گزاره ی زیر را می توان در منبع [۴] یافت.

گزاره ۱۴.۲.۲. فرض کنیم I ایدآلی از حلقه ی R باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

۱. ایدآل I نیم اول است.

۲. حلقه ی R/I نیم اول است.

۳. اگر J ایدآلی از R باشد که $J^۲ \subseteq I$، آنگاه $J \subseteq I$.

۴. اگر J ایدآلی اکیداً شامل I باشد، آنگاه $J^۲ \nsubseteq I$.

۵. اگر J ایدآلی راست از R باشد که $J^۲ \subseteq I$، آنگاه $J \subseteq I$.

۶. اگر J ایدآلی چپ از R باشد که $J^2 \subseteq I$، آنگاه $J \subseteq I$.

۷. برای هر $x \in R$، $xRx \subseteq I$ نتیجه دهد $x \in I$

مثال . هر ایدآل اول، نیم اول است. لذا هر حلقه ی اول، نیم اول است.

لم ۱۵.۲.۲. فرض کنیم I ایدآلی از حلقه ی نیم اول R باشد. در این صورت

$$Ann_r(I) = T_{R_R}(I) = T_{{}_RR}(I) = Ann_l(I)$$

اثبات . فرض کنیم $x \in Ann_r(I)I$. چون

$$xRx \subseteq (Ann_r(I)I)R(Ann_r(I)I) \subseteq Ann_r(I)IAnn_r(I)I = 0$$

پس $xRx = 0$ و چون R نیم اول است، از قضیه ی ۱۴.۲.۲، نتیجه می گیریم $x = 0$. بنابراین $Ann_r(I)I = 0$ و در نتیجه $Ann_r(I) \subseteq Ann_l(I)$. چون I یک ایدآل دوطرفه است، پس به طور مشابه نتیجه می گیریم $Ann_l(I) \subseteq Ann_r(I)$. بنابراین $Ann_l(I) = Ann_r(I)$.

حال فرض کنیم X زیرمجموعه ای از $T_{R_R}(I)$ باشد که $(I : X) = Ann(X)$. چون $XI \subseteq I$، پس $I \subseteq (I : X) = Ann(X)$ و در نتیجه $XI = 0$. لذا $X \subseteq Ann_l(I)$ و در نتیجه

$$T_{R_R}(I) \subseteq Ann_l(I) = Ann_r(I)$$

به طور مشابه می توان نشان داد که $T_{{}_RR}(I) \subseteq Ann_r(I) = Ann_l(I)$.

فرض کنیم $a \in Ann_l(I) = Ann_r(I)$. پس $a(I : a) \subseteq I \cap Ann_r(I)$. از طرفی چون $(I \cap Ann_r(I))^2 = 0$ نتیجه می دهد $I \cap Ann_r(I) = 0$، پس $(I : a) \subseteq Ann_r(a)$. بنابراین $a \in T_{R_R}(I)$. لذا $Ann_r(I) \subseteq T_{R_R}(I)$ و بنابراین $T_{R_R}(I) = Ann_r(I) = Ann_l(I)$. به طور مشابه می توان نشان داد که $T_{{}_RR}(I) = Ann_l(I)$. ■

قضیه ۱۶.۲.۲. حلقه‌ی R نیم اول است، اگر و تنها اگر پوچ ساز های راست و چپِ هر ایدآل آن برابر باشند و $SZ({}_RR) = SZ(R_R) = 0$.

اثبات . فرض کنیم R یک حلقه ی نیم اول باشد. بنا به لم ۱۵.۲.۲، پوچ ساز های چپ و راست هر ایدآل R برابرند.

فرض کنیم $a \in SZ(R_R)$. ایدآلی چون $J \leq_{se} R_R$ وجود دارد که $aJ = 0$. لذا $a \in Ann_l(J)$ و از لم ۱۵.۲.۲، نتیجه می گیریم $a \in T_{R_R}(J)$. چون $J \leq_{se} R_R$، پس $T_{R_R}(J) = 0$ و در نتیجه $a = 0$. بنابراین $SZ(R_R) = 0$. به طور مشابه می توان نشان داد که $SZ({}_RR) = 0$.

بعکس، فرض کنیم برای هر ایدآل I از حلقه ی R، $Ann_l(I) = Ann_r(I)$ و $SZ({}_RR) = SZ(R_R) = 0$. ثابت می کنیم R نیم اول است.

فرض کنیم I، ایدآلی از R باشد که $I^2 = 0$. بنا به گزاره ی ۹.۱.۲، $I + Ann_l(I) \leq_{se} R_R$. چون $Ann_l(I) = Ann_r(I)$، پس

$$I(I + Ann_l(I)) = I^2 + IAnn_l(I) = IAnn_r(I) = 0$$

بنابراین $I \subseteq SZ(R_R) = 0$ و در نتیجه $I = 0$. حال از گزاره ی ۱۴.۲.۲، نتیجه می گیریم که حلقه ی R نیم اول است. ■

نتیجه ۱۷.۲.۲. اگر R یک حلقه‌ی جابجایی باشد، آنگاه $SZ(\frac{R}{SZ(R)}) = 0$.

اثبات . فرض کنیم J ایدآلی از $\frac{R}{SZ(R)}$ باشد که $J^2 = 0$. اگر $\overline{a} = a + SZ(R) \in J$، آنگاه $\overline{a}^2 = 0$ و لذا $a^2 \in SZ(R)$. در نتیجه $Ann(a^2) \leq_{se} R$. فرض کنیم X زیرمجموعه ی ناصفری از $Ann(a^2)$ باشد. هرگاه $Xa = 0$، آنگاه $0 \neq X \subseteq Ann(a)$ و هرگاه $Xa \neq 0$، آنگاه چون $Xaa = 0$، پس $0 \neq Xa \subseteq Ann(a)$. بنابراین $Ann(a) \leq_{se} Ann(a^2)$ و در نتیجه $Ann(a) \leq_{se} R$. لذا $a \in SZ(R)$. بنابراین $\overline{a} = 0$ و لذا $J = 0$. حال از گزاره ی ۱۴.۲.۲، نتیجه می گیریم که $\frac{R}{SZ(R)}$ نیم اول است و بنا به قضیه ۱۶.۲.۲، $SZ(\frac{R}{SZ(R)}) = 0$. ■

لم ۱۸.۲.۲. اگر N یک زیر مدول با تولید متناهی از $SZ(M)$ باشد، آنگاه $Ann(N) \leq_{se} R_R$.

اثبات. فرض کنیم $N = x_1R + \ldots + x_nR$. چون برای هر $i = 1, \ldots, n$، $x_i \in SZ(M)$، پس برای هر $i = 1, \ldots, n$، $Ann(x_i) \leq_{se} R_R$. برای هر $i = 1, \ldots, n$، قرار می دهیم $I_i = (Ann(x_i) : R)$. واضح است که برای هر $i = 1, \ldots, n$، $Ann(x_i)$ شامل ایدآل I_i است و $I_i \leq_{se} R_R$. حال فرض کنیم $I = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$. بدیهی است که $NI = 0$ و لذا $I \subseteq Ann(N)$. چون $I \leq_{se} R_R$، پس $Ann(N) \leq_{se} R_R$.

■

تعریف ۱۹.۲.۲. فرض کنیم I یک ایدآل راست از حلقه ی R باشد. اگر $I = I^2$، آنگاه I را **خودتوان** می نامیم.

قضیه ۲۰.۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت $SZ(R_R)$ شامل هیچ ایدآل راست خود توانِ با تولید متناهیِ ناصفری نیست.

اثبات. فرض کنیم I یک ایدآل راست با تولید متناهیِ ناصفر از $SZ(R_R)$ باشد که $I^2 = I$. بنا به لم قبل، $Ann_r(I) \leq_{se} R_R$ و چون $0 \neq I \subseteq R$، پس $r \in R$ ای وجود دارد که $0 \neq Ir \subseteq Ann_r(I)$. بنابراین $0 \neq Ir = I^2r = I(Ir) = 0$ که یک تناقض است. ■

گزاره ۲۱.۲.۲. فرض کنیم I و J دو ایدآل راست اساسی قوی از حلقه ی R باشند. اگر M یک R-مدول راست t-نامنفرد باشد، آنگاه $MIJ \leq_{se} M$.

اثبات. چون $IJ \subseteq (MIJ : M) \subseteq (MIJ : T(MIJ)) = Ann(T(MIJ))$، پس $T(MIJ)IJ = 0$ و چون $SZ(M) = 0$ و $J \leq_{se} R_R$، پس $T(MIJ)I = 0$. به همین صورت، چون $I \leq_{se} R_R$، پس $T(MIJ) = 0$.بنابراین $MIJ \leq_{se} M$. ■

تعریف ۲۲.۲.۲. اشتراک تمام زیرمدول های اساسیِ قویِ M_R را **نوع ساکل** M می‌نامیم و با $ST(M_R)$ نمایش می‌دهیم.

مثال . فرض کنیم R حلقه‌ی ماتریس های بالا مثلثی ۲ × ۲ روی حلقه‌ی ساده‌ی S باشد. در این صورت $ST(_RR) = \begin{pmatrix} S & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $ST(R_R) = \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & S \end{pmatrix}$. در نتیجه $ST(_RR) \neq ST(R_R)$.

گزاره ۲۳.۲.۲. اگر $T'(N)$ بزرگترین t-مولفه‌ی زیر مدول N در M باشد، آنگاه

$$ST(M) = \bigcap_{N \leq_e M} (N + T(N)) = \bigcap_{N \leq_e M} (N + T'(N))$$

اثبات . اگر $N \leq M$، آنگاه بنا به گزاره ۲.۲.۲، $N + T'(N) = N + T(N) \leq_{se} M$. بنابراین

$$\bigcap_{N \leq_e M} (N + T(N)) = \bigcap_{N \leq_e M} (N + T'(N)) \subseteq \bigcap_{A \leq_{se} M} A = ST(M)$$

از طرفی اگر $A \leq_{se} M$، آنگاه $A \leq_e M$ و $A = A + T(A) = A + T'(A)$. بنابراین

$$ST(M) = \bigcap_{A \leq_{se} M} A \subseteq \bigcap_{N \leq_e M} (N + T(N)) = \bigcap_{N \leq_e M} (N + T'(N))$$

■

قضیه ۲۴.۲.۲. فرض کنیم N زیر مدولی از مدول t-نامنفرد M_R باشد. در این صورت $N \leq_{se} M$، اگر و تنها اگر $(N : M) \leq_{se} R_R$. در نتیجه $ST(M) = \bigcap_{I \leq_{se} R_R} MI$.

اثبات . اگر $N \leq_{se} M$، آنگاه از گزاره ی ۴.۱.۲، نتیجه می شود $(N : M) \leq_{se} R_R$.

بعکس، فرض کنیم $I = (N : M) \leq_{se} R_R$. چون $T(MI)I \subseteq MI$، پس $I \subseteq (MI : T(MI)) = Ann(T(MI))$. لذا $T(MI)I = 0$ و بنابراین $T(MI) \subseteq SZ(M) = 0$. پس $T(MI) = 0$ و در نتیجه $MI \leq_{se} M$، که نشان می دهد $MI \subseteq N \leq_{se} M$.

برای اثبات نتیجه کافیست توجه کنیم که هر زیر مدول اساسی قوی مانند N از M شامل $MI = M(N : M)$ است که $I \leq_{se} R$. از طرف دیگر برای هر $I \leq_{se} R$، چون $SZ(M) = 0$، پس $MI \leq_{se} M$. بنابراین $ST(M) = \bigcap_{N \leq_{se} M} N = \bigcap_{I \leq_{se} R_R} MI$. ■

گاهی می توان از اساسی بودن، اساسی قوی بودن را نتیجه گرفت. برای مثال، فرض کنیم I یک ایدآل دو طرفه در حلقه ی R باشد به طوری که $Z(R_R) \subseteq I \leq_e R_R$. در این صورت چون $Ann_l(I) \subseteq I$، پس $I \leq_{se} R_R$.

مثال . اگر R یک حلقه ی جابجایی باشد و I یک ایدآل رادیکال باشد (یعنی با اشتراک تعدادی از ایدآل های اول برابر است) که اساسی است، آنگاه $I \leq_{se} R$.

گزاره ۲.۲.۲۵. اگر R یک حلقه ی جابجایی باشد، آنگاه هر زیر مدول ماکسیمال اساسی از مدول M_R، اساسی قوی است.

اثبات . فرض کنیم N یک زیرمدول ماکسیمال اساسی از M باشد که اساسی قوی نیست. لذا $T(N) \nsubseteq N$. چون N ماکسیمال است، پس $N + T(N) = M$. بنابراین

$$Ann(\frac{M}{N}) = Ann(\frac{N+T(N)}{N}) = (N : N + T(N)) = (N : T(N)) = Ann(T(N))$$

از طرفی چون N ماکسیمال است، پس $\frac{M}{N}$ ساده است. لذا $Ann(\frac{M}{N}) = Ann(T(N))$ یک ایدآل ماکسیمال است و بنابراین $T(N)$ نیم ساده است و چون N در M اساسی بود، پس $T(N) \subseteq N$ که یک تناقض است. ■

۳.۲ حلقه های نیم آرتینی

تعریف ۱.۳.۲. مجموعه ی α را یک **عدد ترتیبی** می نامیم، هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

۱. مجموعه ی α با رابطه ی $\in$ (عضویت) خوش ترتیب باشد.

۲. $\beta \in \alpha$ نتیجه دهد $\beta \subset \alpha$.

فرض کنیم α یک عدد ترتیبی باشد و $\beta \in \alpha$، در این صورت می نویسیم $\beta < \alpha$. بنا به تعریف مجموعه ی تهی یک عدد ترتیبی است که آن را با ۰ نمایش می دهیم. همچنین $\{۰\} = ۱$، $\{۰, ۱\} = ۲$، $\{۰, ۱, ۲\} = ۳$ و ... اعداد ترتیبی هستند. این اعداد ترتیبی که مجموعه های متناهی هستند را **اعداد ترتیبی متناهی** می خوانیم. می توان دید که اعداد ترتیبی متناهی همان اعداد طبیعی (به همراه صفر) می باشند.

مجموعه ی $\omega = \{۰, ۱, ۲, \cdots\}$ شامل تمام اعداد طبیعی نیز یک عدد ترتیبی است. هر عدد ترتیبی که یک مجموعه ی نامتناهی است را یک **عدد ترتیبی نامتناهی** می نامیم. بنابراین ω یک عدد ترتیبی نامتناهی است.

هرگاه α یک عدد ترتیبی باشد، آنگاه مجموعه ی $\alpha' = \{\beta | \beta \leq \alpha\}$ یک عدد ترتیبی است که آن را **تالی** α می نامیم. اگر عدد ترتیبی β تالی هیچ عدد ترتیبی نباشد، آنگاه β را یک **عدد ترتیبی حدی** می نامیم. به عنوان مثال ω یک عدد ترتیبی حدی است. تالی عدد ترتیبی α را با $\alpha + ۱$ نمایش می دهیم. برای مطالعه ی بیشتر در باب اعداد ترتیبی می توان به منابع [۶] و [۸] مراجعه نمود.

تعریف ۲.۳.۲. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد. **سری لویی(پایینی)** [۱] مدول M را به صورت ترامتناهی و به روش زیر تعریف می کنیم:

[۱] (lower) Loewy

۱- برای $\alpha = 0$، $S_0 = 0$؛

۲- برای هر عدد ترتیبی $\alpha \geq 0$، $\frac{S_{\alpha+1}}{S_\alpha} = Soc(\frac{M}{S_\alpha})$؛

۳- برای هر عدد ترتیبی حدی α، $S_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta$.

از تعریف فوق می توان نتیجه گرفت که اگر برای یک عدد ترتیبی چون α، $Soc(\frac{M}{S_\alpha}) = 0$، آنگاه برای هر عدد ترتیبی $\beta > \alpha$، $S_\beta = S_\alpha$.

تعریف ۳.۳.۲. مدول M_R را یک **مدول لویی** می نامیم، هرگاه عدد ترتیبی α وجود داشته باشد که $S_\alpha = M$. در این صورت کوچکترین عدد ترتیبی γ که $S_\gamma = M$ را **طول لویی** مدول M می نامیم و با نماد $L(M) = \gamma$ نشان می دهیم.

مثال . اگر M_R یک مدول نیم ساده باشد، آنگاه M یک مدول لویی است و $L(M) = 1$.

قضیه ۴.۳.۲. گزاره های زیر برای حلقه ی R معادلند:

۱. مدول R_R یک مدول لویی است.

۲. هر R-مدول راست لویی است.

۳. هر R-مدول راست ناصفر ساکل ناصفر دارد.

۴. هر R-مدول راست ناصفر شامل یک زیرمدول ساده است.

اثبات . (۱⇐۲) توجه داریم که برای هر R-مدول M، $MSoc(R_R) \subseteq Soc(M)$. اگر I یک ایدآل راست از R باشد، آنگاه $MSoc(\frac{R}{I}) \subseteq Soc(\frac{M}{MI})$. بنابراین اگر $\{S_\alpha\}_\alpha$ سری لویی R_R باشد، آنگاه برای هر α، $MSoc(\frac{R}{S_\alpha}) \subseteq Soc(\frac{M}{MS_\alpha})$. لذا اگر $\{T_\alpha\}_\alpha$ سری لویی (پایینی) مدول M_R باشد، آنگاه برای هر عدد ترتیبی α، $MS_\alpha \subseteq T_\alpha$. چون R_R یک مدول لویی است، پس برای عدد ترتیبی

$L(R_R) = \gamma$، $S_\gamma = R$ و در نتیجه $M = MR = MS_\gamma \subseteq T_\gamma$. بنابراین $T_\gamma = M$، که نشان می دهد، مدول M یک مدول لویی است.

(۲⇐۱) و (۲⇐۳) و (۳⇔۴) بدیهی هستند.

(۳⇐۲) فرض کنیم $\{T_\alpha\}_\alpha$ سری لویی (پایینی) مدول M_R باشد. در این صورت از (۳) نتیجه می گیریم که برای هر عدد ترتیبی α، اگر $\frac{M}{T_\alpha} \neq \circ$، آنگاه $Soc(\frac{M}{T_\alpha}) \neq \circ$. بنابراین $\frac{T_{\alpha+1}}{T_\alpha} \neq \circ$. پس برای هر α، اگر $\frac{M}{T_\alpha} \neq \circ$، آنگاه $T_{\alpha+1}$ اکیداً شامل T_α می باشد. در نتیجه برای یک عدد ترتیبی چون β، $T_\beta = M$. ■

تعریف ۵.۳.۲. اگر حلقه ی R در یکی از گزاره های قضیه ی قبل صدق کند، آنگاه R را یک **حلقه ی نیم آرتینی (لویی)راست** می نامیم. حلقه ی R را **نیم آرتینی (لویی) چپ** می خوانیم، هرگاه $_RR$ یک مدول لویی باشد. توجه داریم که عبارات مشابه قضیه ی قبل برای حلقه ی نیم آرتینی چپ برقرار است.

از اثبات قضیه ی ۴.۳.۲ (۱⇐۲)، نتیجه می گیریم که اگر R حلقه ای باشد که $L(R_R) = \gamma$، آنگاه هر R-مدول M، یک مدول لویی است و $L(M_R) \leq \gamma$. همچنین توجه می کنیم که چون R با تولید متناهی است، پس $L(R_R)$ نمی تواند یک عدد ترتیبی حدی باشد؛ زیرا هرگاه α یک عدد ترتیبی حدی باشد و $L(R_R) = \alpha$، آنگاه از اینکه $1_R \in R = S_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta$، نتیجه می گیریم که عدد ترتیبی $\beta_\circ < \alpha$ وجود دارد که $1_R \in S_{\beta_\circ}$ و لذا $S_{\beta_\circ} = R$، که یک تناقض است.

گزاره ۶.۳.۲. حلقه ی R نیم آرتینیِ راست است، اگر و تنها اگر برای هر مدول M_R، $Soc(M) \leq_e M$.

اثبات . واضح است که اگر برای هر R-مدول M، $Soc(M) \leq_e M$، آنگاه R نیم آرتینی راست است. بعکس، فرض کنیم R نیم آرتینی راست باشد و $\circ \neq N \leq M_R$. چون R نیم آرتینی راست است، پس $Soc(N) \neq \circ$. از طرفی $Soc(N) = Soc(M) \cap N$. بنابراین $Soc(M) \leq_e M$. ■

نتیجه ۷.۳.۲. حلقه ی R نیم آرتینی راست است، اگر و تنها اگر برای هر R-مدول راست انژکتیو E، $Soc(E) \leq_e E$.

اثبات . هرگاه R نیم آرتینی راست باشد، آنگاه از گزاره ی قبل حکم بدست می آید. فرض کنیم برای هر مدول انژکتیو E_R، $Soc(E) \leq_e E$. از قضیه ی ۱.۲.۱، نتیجه می گیریم که M قابل نشاندن در یک مدول انژکتیو E است. پس $Soc(M) = Soc(E) \cap M \neq 0$. بنابراین $Soc(M) \leq_e M$. لذا از گزاره قبل حکم بدست می آید. ■

قضیه ۸.۳.۲. برای حلقه ی R گزاره های زیر معادلند:

۱. برای هر R-مدول راست M، $M \leq_{se} E(M)$.

۲. برای هر R-مدول راست M ، $N \leq_e M$ نتیجه می دهد $N \leq_{se} M$.

۳. برای هر خانواده $\{M_i\}_{i\in I}$ از R-مدول های راست، $\prod_{i\in I} N_i \leq_e \prod_{i\in I} M_i$، اگر و تنها اگر برای هر $i \in I$، $N_i \leq_e M_i$.

۴. حلقه ی R نیم آرتینی راست است.

اثبات . (۱⇐ ۲) فرض کنیم $N \leq_e M$. از گزاره ی ۱۲.۲.۱، نتیجه می گیریم $E(N) = E(M)$ و لذا $N \leq_{se} E(N) = E(M)$. چون $M \leq E(M)$، پس $N \leq_{se} M$.

(۲⇐ ۱) فرض کنیم M یک R-مدول دلخواه باشد. چون $M \leq_e E(M)$، پس $M \leq_{se} E(M)$.

(۲⇐ ۳) از گزاره ی ۸.۱.۱ (ج)، نتیجه می گیریم که اگر $\prod_{i\in I} N_i \leq_e \prod_{i\in I} M_i$، آنگاه برای هر $i \in I$، $N_i \leq_e M_i$.

بعکس، فرض کنیم برای هر $i \in I$، $N_i \leq_e M_i$. بنا به گزاره ی ۸.۱.۱ (ت)، $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i\in I} M_i$ و از(۲) نتیجه می گیریم $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_{se} \bigoplus_{i\in I} M_i$. حال فرض کنیم $0 \neq x = \{x_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$.

برای هر $j \in I$، عنصر $y^j = \{y_i^j\}_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ را در نظر می گیریم که در آن $y_j^j = x_j$ و برای هر $j \neq i \in I$، $y_i^j = 0$. چون $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_{se} \bigoplus_{i\in I} M_i$، پس $r \in R$ ای وجود دارد که $0 \neq \{y_i^j\}_{i\in I} r \in \bigoplus_{i\in I} N_i$. لذا با توجه به تعریف y_i^jها نتیجه می گیریم $0 \neq xr \in \prod_{i\in I} N_i$. بنابراین $\prod_{i\in I} N_i \leq_e \prod_{i\in I} M_i$.

(۳⇐۲) فرض کنیم $N \leq_e M$. بنا به (۳) برای هر مجموعه ی اندیس گذار I، $\prod_I N \leq_e \prod_I M$. پس بنابه گزاره ی ۲.۱.۲، $N \leq_{se} M$.

(۳⇐ ۴) فرض کنیم $\{N_i\}_{i\in I}$ گردایه ی تمام زیر مدول های اساسی مدول M_R باشد. چون برای هر $i \in I$، $N_i \leq_e M$، پس از (۳) نتیجه می گیریم $\prod_{i\in I} N_i \leq_e \prod_I M$. حال فرض کنیم $0 \neq m \in M$.عنصر $y = \{y_i\}_{i\in I} \in \prod_I M$ را در نظر می گیریم، که در آن برای هر $i \in I$، $y_i = m$. چون $y \neq 0$، پس عنصر $r \in R$ وجود دارد که $0 \neq yr \in \prod_{I\in I} N_i$. بنابراین برای هر $i \in I$، $0 \neq mr \in N_i$. از گزاره ی ۱۸.۱.۱، نتیجه می گیریم $0 \neq mr \in \bigcap_{i\in I} N_i = Soc(M)$. بنابراین هر R-مدول راست ناصفر ساکل ناصفر دارد. لذا از قضیه ۴.۳.۲، نتیجه می گیریم R نیم آرتینی راست است.

(۴⇐ ۲) فرض کنیم $\{S_i\}_{i\in I}$ سری لویی R_R و M یک R-مدول راستِ ناصفر باشد و $N \leq_e M$. فرض کنیم $T(N) \neq 0$. چون R نیم آرتینی راست است، پس کوچکترین عدد ترتیبی $\alpha \in I$ وجود دارد که $T(N)S_\alpha \neq 0$. هرگاه α یک عدد ترتیبی حدی باشد، آنگاه چون برای هر $\beta < \alpha$، $T(N)S_\beta = 0$، پس $T(N)S_\alpha = T(N)\bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta = \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta = 0$ که یک تناقض است. لذا α یک عدد ترتیبی غیر حدی است و $T(N)S_{\alpha-1} = 0$.

چون $\frac{S_\alpha}{S_{\alpha-1}} = Soc(\frac{R_R}{S_{\alpha-1}})$، پس $\frac{S_\alpha}{S_{\alpha-1}}$ یک R-مدول نیم ساده است و در نتیجه R-مدول $T(N)S_\alpha \cong \frac{T(N)S_\alpha}{T(N)S_{\alpha-1}}$ نیم ساده است. بنابراین $T(N)S_\alpha \subseteq Soc(M) \subseteq N$ که یک تناقض است. لذا $T(N) = 0$ و در نتیجه $N \leq_{se} M$. ■

فصل ۳

مدول های (اساساً) انقباض پذیر

۱.۳ مدول های انقباض پذیر

تعریف ۱.۱.۳. مدول M_R را **انقباض پذیر** می نامیم، هرگاه برای هر زیر مدولِ ناصفر N از M، $Hom_R(M, N) \neq 0$.

مثال . می دانیم که هر ایدآل I از $\mathbb{Z}$ اساسی قوی است. لذا عنصر $r \in \mathbb{Z}$ وجود دارد که $0 \neq r\mathbb{Z} = \mathbb{Z}r \subseteq I$. بنابراین همریختی $g : \mathbb{Z} \to I$ با ضابطه ی $g(z) = rz$ خوش تعریف و ناصفر است. در نتیجه مدول $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ انقباض پذیر است.

مثال . هر مدول دوری روی یک حلقه ی جابجایی، انقباض پذیر است.

حل . فرض کنیم $M = mR$ و $0 \neq n \in N \leq M$. چون R جابجایی است، پس نگاشت $f : M \to N$ با ضابطه ی $f(mr) = nr$ یک همریختی ناصفر است. لذا $Hom_R(M, N) \neq 0$. بنابراین $M = mR$ انقباض پذیر است. ■

گزاره ۲.۱.۳. هر مدول نیم ساده، انقباض پذیر است.

اثبات . فرض کنیم M_R یک مدول نیم ساده باشد و $0 \neq N \leq M$. در این صورت بنا به نیم ساده بودن M، زیر مدول N_1 از M وجود دارد که $M = N \oplus N_1$. این نشان می دهد که برای هر $m \in M$، عناصر منحصر به فرد $n_m \in N$ و $l_m \in N_1$ وجود دارند که $m = n_m + l_m$. حال نگاشت $f : M \to N$ را با ضابطه ی $f(m) = n_m$ در نظر می گیریم. به راحتی می توان دید که f یک R-همریختی است و $f(M) = N$. بنابراین $0 \neq f \in Hom_R(M, N)$. ■

مثال . هر R-مدولِ آزاد، انقباض پذیر است.

حل . فرض کنیم N زیر مدولِ ناصفری از مدول آزاد M_R باشد و $\{m_i | i \in I\}$ پایه ای برای M باشد. هرگاه $0 \neq n \in N$، آنگاه برای اندیس $i_0 \in I$، R-همریختی $f : M \to N$ را چنان در

نظر می گیریم که $f(m_{i_\circ}) = n$ و برای هر $j \in I$، اگر $j \neq i_\circ$، آنگاه $f(m_j) = \circ$. واضح است که $\circ \neq f \in Hom_R(M, N)$. بنابراین M انقباض پذیر است. ■

گزاره ۳.۱.۳. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت مدول $R \oplus M$ انقباض پذیر است.

اثبات. فرض کنیم $\circ \neq N \leq R \oplus M$. در این صورت برای عنصر ناصفر $n \in N$، R-همریختی $f : M \to N$ را چنان در نظر می گیریم که $f(\text{۱}) = n$ و برای هر $m \in M$، $f(m) = \circ$. واضح است که f ناصفر است و $f \in Hom_R(M, N)$. بنابراین $R \oplus M$ انقباض پذیر است. ■

تعریف ۴.۱.۳. مدول M_R را **شبه تصویری** می نامیم، هرگاه به ازای هر زیر مدولِ N از M و هر R-همریختی $f : M \to \dfrac{M}{N}$، R-همریختی $g : M \to M$ وجود داشته باشد که اگر $\pi : M \to \dfrac{M}{N}$ بروریختی طبیعی باشد، آنگاه $f = \pi g$.

مثال. هر مدول تصویری، شبه تصویری است.

گزاره ۵.۱.۳. فرض کنیم M_R یک مدول شبه تصویری باشد و $N \leq M_R$. در این صورت $(\dfrac{M}{N})_R$ انقباض پذیر است، اگر و تنها اگر برای هر زیر مدول L از M و اکیداً شامل N، مجموعه ی زیر ناتهی باشد:

$$A_L := \{f \in End_R(M) | f(N) \subseteq N, f(M) \subseteq L, f(M) \nsubseteq N\}$$

اثبات. فرض کنیم $\dfrac{M}{N}$ انقباض پذیر باشد و L یک زیر مدول از M و اکیداً شامل N باشد. چون $\dfrac{L}{N}$ زیر مدولی ناصفر از $\dfrac{M}{N}$ است، پس $Hom_R(\dfrac{M}{N}, \dfrac{L}{N}) \neq \circ$. لذا همریختی ناصفری چون $f : \dfrac{M}{N} \to \dfrac{L}{N}$ وجود دارد. فرض کنیم $\pi : M \to \dfrac{M}{N}$ بروریختی طبیعی باشد. قرار می دهیم $g = f\pi : M \to \dfrac{L}{N}$. حال اگر $i : \dfrac{L}{N} \to \dfrac{M}{N}$ تکریختی همانی باشد، آنگاه چون $ig : M \to \dfrac{M}{N}$ و M شبه تصویری است، پس درونریختی $h : M \to M$ وجود دارد که $\pi h = ig$. ادعا می کنیم $h \in A_L$.

چون برای هر $a \in N$، $ig(a) = if\pi(a) = if(\circ) = \circ$، پس $\pi h(a) = \circ$. لذا $h(a) \in N$ و در نتیجه $h(N) \subseteq N$. چون $ig(M) = if\pi(M) = if(\frac{M}{N}) \subseteq i(\frac{L}{N}) = \frac{L}{N}$، پس $\pi h(M) \subseteq \frac{L}{N}$ و لذا $h(M) \subseteq L$.

چون f ناصفر است، پس عنصری مانند $\overline{m} \in \frac{M}{N}$ وجود دارد که $f(\overline{m}) \neq \overline{\circ}$. بنابراین $g(m) = f(\overline{m}) \neq \circ$ و لذا $\pi h(m) \neq \circ$. در نتیجه $h(m) \notin N$ و لذا $h(M) \nsubseteq N$.

بعکس، فرض کنیم برای هر زیرمدول اکیداً شامل N مانند L داشته باشیم : $A_L \neq \emptyset$. فرض کنیم K زیر مدولِ ناصفری از $\frac{M}{N}$ باشد. زیر مدولی از M چون L وجود دارد که اکیداً شامل N است و $K = \frac{L}{N}$. فرض کنیم $\circ \neq f \in A_L$. نگاشت $\overline{f} : \frac{M}{N} \to \frac{L}{N}$ با ضابطه ی $\overline{f}(\overline{m}) := \overline{f(m)}$ یک همریختی ناصفر است و لذا $Hom_R(\frac{M}{N}, \frac{L}{N}) \neq \circ$. ■

گزاره ۶.۱.۳. فرض کنیم M_R انقباض پذیر باشد. اگر N یک زیر مدول ناصفر از M باشد که $Hom_R(\frac{M}{N}, N) = \circ$، آنگاه N انقباض پذیر است.

اثبات . فرض کنیم $\circ \neq K \leq N$. درونریختی ناصفر $f : M \to M$ وجود دارد که $f(M) \subseteq K$. هرگاه $f(N) = \circ$، آنگاه بروریختی طبیعی $\frac{M}{N} \to \frac{M}{Ker(f)} \cong f(M)$ ناصفر می باشد که با فرض $Hom_R(\frac{M}{N}, N) = \circ$ در تناقض است. لذا $f(N) \neq \circ$ و در نتیجه $f|_N$ یک درونریختی ناصفر از N است که تصویر آن در K است. بنابراین N انقباض پذیر است. ■

قضیه ۷.۱.۳. فرض کنیم I یک ایدآل راستِ سره ی حلقه ی R باشد. در این صورت R-مدول دوری $\frac{R}{I}$ انقباض پذیر است، اگر و تنها اگر برای هر ایدآل راست J از R، $J \subseteq I$ یا عنصر $x \in J \setminus I$ وجود داشته باشد که $xI \subseteq I$.

اثبات . فرض کنیم $\frac{R}{I}$ انقباض پذیر باشد و $J \leq R_R$. هرگاه $J \nsubseteq I$، آنگاه عنصر $a \in J \setminus I$ وجود دارد که $aR + I \neq I$. لذا $\frac{aR+I}{I}$ زیر مدول ناصفری از $\frac{R}{I}$ است.

فرض کنیم $0 \neq f \in Hom_R(\frac{R}{I}, \frac{aR+I}{I})$ و $r \in R$ چنان باشد که $f(1+I) = ar + I$. پس

$$ari + I = (ar + I)i = f(1 + I)i = f(i + I) = f(I) = I$$

بنابراین برای هر $i \in I$، $ari \in I$. اگر قرار دهیم $x = ar$، آنگاه $x \in J - I$ و $xI \subseteq I$.

بعکس، فرض کنیم K یک زیر مدول ناصفر از $\frac{R}{I}$ باشد. ایدآل راست J از R اکیداً شامل I وجود دارد که $K = \frac{J}{I}$. چون $J \not\subseteq I$، پس بنابه فرض، عنصر $x \in J - I$ وجود دارد که $xI \subseteq I$. اکنون $f : \frac{R}{I} \to \frac{J}{I}$ را با ضابطه ی $f(r + I) = xr + I$ در نظر می گیریم. چون برای هر $i \in I$، $f(i+I) = xi+I = I$، پس f یک R-همریختی است و چون برای $1+I \in \frac{R}{I}$، $f(1+I) = x+I \neq I$، پس $f \neq 0$. بنابراین $0 \neq f \in Hom_R(\frac{R}{I}, \frac{J}{I})$. بنابراین $\frac{R}{I}$ انقباض پذیر است. R-مدول ■

تعریف ۸.۱.۳. زیر مجموعه ی I از حلقه ی R را T-**پوچ توان چپ** می نامیم، هرگاه برای هر دنباله ی a_1،a_2،... از عناصر I، عدد صحیح مثبت n وجود داشته باشد که $a_1 a_2 \dots a_n = 0$.

نتیجه ۹.۱.۳. اگر I یک ایدآل راستِ T-پوچ توان چپ از حلقه ی R باشد، آنگاه R-مدول $\frac{R}{I}$ انقباض پذیر است.

اثبات. فرض کنیم J ایدآلی راست از R باشد که $J \not\subseteq I$. عنصر $b \in J \setminus I$ را در نظر می گیریم. اگر $bI \subseteq I$ ، آنگاه نتیجه حاصل است. در غیر این صورت $a_1 \in I$ چنان موجود است که $ba_1 \notin I$. هرگاه $ba_1 I \subseteq I$، باز هم حکم ثابت می شود. در غیر این صورت $a_2 \in I$ موجود است که $ba_1 a_2 \notin I$. با ادامه این روند s ای وجود دارد که $x = ba_1 a_2 \dots a_s \in J \setminus I$ و $xI \subseteq I$. در غیر این صورت دنباله ی a_1، a_2، ... از عناصر I بدست می آید که برای هر n ، $ba_1 a_2 \dots a_n \notin I$ و این با فرضِ T-پوچ توان چپ بودنِ I در تنافض است. ■

گزاره ۱۰.۱.۳. فرض کنیم برای هر $i \in I$، M_i یک R-مدول انقباض پذیر باشد. در اینصورت R-مدولِ $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$، انقباض پذیر است. اما عکس این گزاره در حالت کلی درست نیست.

اثبات. فرض کنیم N یک زیرمدول ناصفر از $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ باشد و $0 \neq n = \{n_i\}_{i\in I} \in N$. برای هر $j \in I$ که $0 \neq n_j \in M_j$، $0 \neq n_jR \leq M_j$ و لذا R-همریختی ناصفر $f_j : M_j \to n_jR$ وجود دارد. نگاشت $f : M \to N$ با ضابطه ی $f(\{m_i\}_{i\in I}) := \{f_i(m_i)\}_{i\in I}$ در نظر می گیریم. به راحتی می توان دید که f یک R-همریختی ناصفر است و لذا M انقباض پذیر است.

حال فرض کنیم L_R انقباض پذیر نباشد. بنا به گزاره ی ۳.۱.۳، $R \oplus L$ به عنوان R-مدول انقباض پذیر است و این نشان می دهد که عکس قسمت اول، نه تنها در حالت کلی بلکه برای یک مجموعه ی اندیس گذار متناهی نیز برقرار نمی باشد. ■

۲.۳ مدول های اساساً انقباض پذیر

تعریف ۱.۲.۳. مدول M_R را **اساساً انقباض پذیر** می نامیم، هرگاه برای هر زیر مدول اساسی N از M، $Hom_R(M,N) \neq ۰$.

واضح است که هر مدول انقباض پذیر، اساساً انقباض پذیر می باشد. مثال زیر نشان می دهد که مدول اساساً انقباض پذیری وجود دارد که انقباض پذیر نیست.

مثال . فرض کنیم p یک عدد اول باشد و $M = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$. در این صورت $\mathbb{Z}$ -مدول M اساساً انقباض پذیر است ولی انقباض پذیر نیست.

حل . چون $\mathbb{Z}_p$ یک $\mathbb{Z}$-مدول ساده است، پس هر زیرمدول اساسی از M شامل $\mathbb{Z}_p$ است. لذا برای هر زیر مدول اساسی N از M، همریختی کانونی $\pi : M = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p \subseteq N$ یک همریختی ناصفر از M به N است. بنابراین M اساسا انقباض پذیر است.

چون $\mathbb{Z} \subseteq Q$، پس $\mathbb{Z} \leq M$. فرض کنیم $f : M \to \mathbb{Z}$ یک همریختی ناصفر باشد. چون هیچ همریختی ناصفری از $\mathbb{Q}$ به $\mathbb{Z}$ وجود ندارد، پس $f|_{\mathbb{Q}} = ۰$. چون f ناصفر است، پس عناصر $q \in \mathbb{Q}$ و $\bar{i} \in \mathbb{Z}_p$ وجود دارند که $f(q,\bar{i}) \neq ۰$. واضح است که $\bar{i} \neq ۰$، زیرا در غیر این صورت $۰ \neq f(q,۰) \in f|_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q})$ که یک تناقض است. حال فرض کنیم $۰ \neq n = f(q,\bar{i})$. قرار می دهیم $s = \frac{q}{pn+۱}$. از اینکه f یک همریختی است نتیجه می گیریم $n = f(q,\bar{i}) = f((pn+۱)(s,\bar{i})) = (pn+۱)f(s,\bar{i})$ لذا $f(s,\bar{i}) = \frac{n}{pn+۱} \notin \mathbb{Z}$ که یک تناقض است. در نتیجه $Hom_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z}) = ۰$. بنابراین M انقباض پذیر نیست. ■

مثال . گروه جمعی $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ اساساً انقباض پذیر نیست.

حل . قبلاً دیدیم که $G_۱ \leq_e \mathbb{Z}_{p^\infty}$. حال فرض کنیم $f : \mathbb{Z}_{p^\infty} \to G_۱$ یک همریختی ناصفر باشد.

چون $Ker(f) \leq \mathbb{Z}_{p^\infty}$ و $G_1 < \mathbb{Z}_{p^\infty}$، پس می توان ثابت نمود که عدد صحیح مثبت n وجود دارد که $Ker(f) = G_n$. بنابراین می توان دید که

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} \cong \frac{\mathbb{Z}_{p^\infty}}{G_n} = \frac{\mathbb{Z}_{p^\infty}}{Ker(f)} \cong f(\mathbb{Z}_{p^\infty}) \subseteq G_1$$

که یک تناقض است، زیرا G_1 متناهی و $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ نامتناهی است. بنابراین $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ اساساً انقباض پذیر نیست.

■

گزاره ۲.۲.۳. فرض کنیم M_R یک مدول ناصفر باشد. اگر برای هر زیر مدول N از M، R-مدول $\frac{M}{N}$ اساساً انقباض پذیر باشد، آنگاه M_R انقباض پذیر است.

اثبات . فرض کنیم $M \leq N \neq 0$. چون $E(N)$ یک مدول انژکتیو است، پس نگاشت شمول $N \hookrightarrow E(N)$، به همریختی ناصفری چون $f : M \to E(N)$ توسیع می یابد. چون $N \leq_e E(N)$، پس $N \cap f(M) \leq_e f(M)$ و چون برای $K = Ker(f) \leq M$، $f(M) \cong \frac{M}{K}$، پس بنا به فرض $f(M)$ اساساً انقباض پذیر است و در نتیجه $Hom_R(f(M), N \cap f(M)) \neq 0$. حال اگر $h : f(M) \to N \cap f(M)$ یک همریختی ناصفر باشد، آنگاه واضح است که $fh : M \to N \cap F(M) \subseteq N$ یک R-همریختی ناصفر است. در نتیجه $Hom_R(M, N) \neq 0$. ■

گزاره ۳.۲.۳. هر مجموع مستقیم از R-مدول های اساساً انقباض پذیر، اساساً انقباض پذیر است.

اثبات. فرض کنیم $\{M_i\}_{i \in I}$ گردایه ای از R-مدول های اساساً انقباض پذیر باشد و $N \leq_e \bigoplus_{i \in I} M_i$. اگر برای هر $i \in I$، $t_i : M_i \to \bigoplus_{i \in I} M_i$ تکریختی شمول باشد، آنگاه بنا به گزاره ی ۸.۱.۱(پ)، برای هر $i \in I$، $t_i^{-1}(N) \leq_e M_i$. پس برای هر $i \in I$، همریختی ناصفری چون $f_i : M_i \to t_i^{-1}(N)$ وجود دارد. نگاشت $f : \bigoplus_{i \in I} M_i \to N$ با ضابطه ی $f(\{m_i\}_{i \in I}) = \{f_i(m_i)\}_{i \in I}$ را در نظر می گیریم. با توجه به تعریف f و f_i ها واضح است که f یک همریختی ناصفر است و در نتیجه $\bigoplus_{i \in I} M_i$ اساساً انقباض پذیر است. ■

گزاره ۴.۲.۳. مدول ناصفر M_R اساساً انقباض پذیر است، اگر و تنها اگر یک همریختی ناصفر $f : M \to M$ وجود داشته باشد که $f(M)$ یک R-مدول اساساً انقباض پذیر باشد.

اثبات . هرگاه M اساساً انقباض پذیر باشد، آنگاه Id_M همان درونریختی مورد نظر است.
بعکس، فرض کنیم f یک درونریختی از M باشد به طوری که $f(M)$ اساساً انقباض پذیر باشد. هرگاه $N \leq_e M$، آنگاه $N \cap f(M) \leq_e f(M)$ و بنابه فرض، همریختی ناصفر $h : f(M) \to N \cap f(M)$ وجود دارد. پس $fh : M \to N \cap f(M) \subseteq N$ ناصفر است. در نتیجه $Hom_R(M, N) \neq ۰$. بنابراین M اساساً انقباض پذیر است. ■

تعریف ۵.۲.۳. حلقه ی R را **خود انژکتیوِ راست** می نامیم، هرگاه R_R انژکتیو باشد.

مثال . همانطور که در آغاز بخش ۲.۱ دیدیم، حلقه ی $\mathbb{Z}$ خود انژکتیو نیست.

گزاره ۶.۲.۳. فرض کنیم S یک دامنه ی ایدآل اصلی راست باشد (یعنی هر ایدآل راست آن یک ایدآل اصلی است). اگر $b \neq ۰$ عنصری از S باشد که $bS = Sb$، آنگاه حلقه ی خارج قسمتی $R := \overline{S} = \dfrac{S}{bS}$ خود انژکتیو راست است.

اثبات . فرض کنیم $A = \dfrac{aS}{bS}$ یک ایدآل از R باشد. بنابه قضیه ی ۱.۲.۱ کافیست ثابت کنیم که برای هر R-همریختی $h : A \to R_R$، عنصر $\overline{d} \in R_R$ وجود دارد که برای هر $\overline{as} \in A$، $h(\overline{as}) = \overline{d}\overline{as}$.
فرض کنیم t عنصری از S باشد که $\overline{t} = h(\overline{a})$. چون $۰ \neq b \in bS \subseteq aS$، پس می توانیم فرض کنیم $b = ac$، که $c \in S \setminus \{۰\}$. لذا $\overline{tc} = \overline{t}\overline{c} = h(\overline{ac}) = h(\overline{b}) = h(۰) = ۰$. بنابراین $tc \in bS$ و چون $bS = Sb$، نتیجه می گیریم عنصر $d \in S$ وجود دارد که $tc = db = dac$. پس $t = da$ و در نتیجه برای هر $\overline{as} \in A$، $h(\overline{as}) = h(\overline{a})\overline{s} = \overline{t}\overline{s} = \overline{da}\overline{s} = \overline{d}\overline{as}$. ■

نتیجه ۷.۲.۳. (الف) برای هر عدد صحیح ناصفر n، حلقه ی خارج قسمتی $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ خود انژکتیو است.

(ب) فرض کنیم K یک میدان باشد و $f(x) \in K[x]$. در این صورت حلقه ی $\frac{K[x]}{f(x)K[x]}$ خود انژکتیو است.

اثبات . با استفاده از گزاره ی قبل نتیجه حاصل است. ■

لم ۸.۲.۳. اگر R یک حلقه ی خود انژکتیو راست باشد، آنگاه هر R-مدول راست دوری نامنفرد، انژکتیو است.

اثبات . فرض کنیم مدول $M = mR$ نامنفرد باشد. لذا $a \in R$ وجود دارد که $Ann(m) \cap aR = \circ$ و لذا برای هر $r \in R$، $mar \neq \circ$. در نتیجه برای هر $r \in R$، $ar \neq \circ$. پس $Ann_r(a) = \circ$ و در نتیجه $aR \cong R_R$. بنابراین aR انژکتیو است. می توان دید که نگاشت $f : M = mR \to aR$ با ضابطه ی $f(mr) = ar$ یک یکریختی است و لذا $M = mR \cong aR$. بنابراین M انژکتیو است. ■

گزاره ۹.۲.۳. اگر R یک حلقه ی خود انژکتیو راست و نامنفرد راست باشد، آنگاه هر R-مدول یا منفرد است و یا اساساً انقباض پذیر است.

اثبات . فرض کنیم M یک R-مدول ناصفر باشد. هرگاه $Z(M) \leq_e M$، آنگاه از اینکهR نامنفرد است، نتیجه می گیریم که M یک مدول منفرد است. هرگاه $Z(M)$ در M اساسی نباشد، آنگاه عنصر ناصفر $m \in M$ وجود دارد که $Z(M) \cap mR = \circ$. از لم قبل نتیجه می گیریم که mR انژکتیو است. از قضیه ی ۲.۲.۱ نتیجه می گیریم که mR جمعوند مستقیم M است و لذا M شامل یک جمعوند مستقیم انقباض پذیر است. حال از گزاره ی ۴.۲.۳ نتیجه می گیریم M_R اساساً انقباض پذیر است. ■

لم ۱۰.۲.۳. فرض کنیم M_R یک مدول انقباض پذیر باشد که حلقه ی درونریختی های آن نیم اول است. اگر W یک مجموع مستقیم از نسخه هایی از M_R باشد، آنگاه هر زیر مدول از W_R انقباض پذیر است.

اثبات. فرض کنیم S حلقه ی درونریختی های مدول M_R باشد. از گزاره ی ۱۰.۱.۳ می توان نتیجه گرفت که W_R انقباض پذیر است. چون S یک حلقه ی نیم اول است، پس حلقه ی ماتریس های $n \times n$ روی S نیز چنین است. بنابراین $T = End_R(W)$ یک حلقه ی نیم اول است. حال فرض کنیم $W \leq N \leq K \neq ۰$ و $I = Hom_R(W, N)$ و $J = Hom_R(W, K)$. واضح است که I و J دو ایدآل راست در T هستند و $J \subseteq I$. چون W_R انقباض پذیر است، پس $J \neq ۰$ و چون T نیم اول است، پس $JI \supseteq J^۲ \neq ۰$. در نتیجه عناصر $f \in J$ و $g \in I$ وجود دارند که $fg : W \to K$ و $fg \neq ۰$. این نتیجه می دهد که $f|_N : N \to K$ ناصفر است. بنابراین N_R انقباض پذیر است. ■

قضیه ۱۱.۲.۳. فرض کنیم M_R یک مدول نامنفرد باشد. اگر M اساساً انقباض پذیر باشد، آنگاه $Hom_R(M, R) \neq ۰$. همچنین اگر R یک حلقه ی نیم اول نامنفرد راست باشد، آنگاه عکس این گزاره نیز برقرار است.

اثبات. فرض کنیم m یک عنصر ناصفر از M باشد. چون $Ann(m)$ در R_R اساسی نیست، پس ایدآل راست ناصفر I از R وجود دارد که $Ann(m) \cap I = ۰$ و لذا $mI \cong I$. بنابراین هر زیر مدول ناصفر از M، شامل یک زیر مدول یکریخت با یک ایدآل راست ناصفر از R است. فرض کنیم A خانواده ای مستقل و ماکسیمال از زیر مدول هایی از M باشد که هر یک یکریخت با یک ایدآل راست ناصفر از R می باشند. اگر $N = \bigoplus_{L \in A} L$، آنگاه N یک زیرمدول اساسی از M_R است و چون M اساساً انقباض پذیر است، پس $Hom_R(M, N) \neq ۰$. بنابراین $Hom_R(M, R) \neq ۰$.

اکنون فرض کنیم R یک حلقه ی نیم اول و نامنفرد راست باشد و N را همانند بالا در نظر می گیریم. فرض کنیم $f : M \to R$ یک همریختی ناصفر باشد. هرگاه $Ker(f)$ در M_R اساسی باشد، آنگاه برای هر $m \in M$، $(Ker(f) : m) \leq_e R_R$ و از اینکه $f(m)(Ker(f) : m) = ۰$ نتیجه می گیریم $f(m) \in Z(R_R) = ۰$ و لذا برای هر $m \in M$، $f(m) = ۰$ که یک تناقض است. بنابراین $Ker(f)$ در

M_R اساسی نیست. حال از اینکه $N \leq_e M$ نتیجه می گیریم $f(N) \neq ۰$ و چون R نیم اول است، پس $(f(N))^۲ \neq ۰$. لذا عنصر $n \in N$ وجود دارد که $nf(M) \neq ۰$. حال نگاشت $g : f(M) \to N$ باضابطه ی $g(x) = nx$ را در نظر می گیریم. می توان دید که g یک R-همریختی است و هرگاه $h = gf : M \to N$، آنگاه h ناصفر است. چون $h(M) \leq N = \bigoplus_{L \in A} L$، پس $h(M)$ را می توان در یک R-مدول آزاد نشاند و در نتیجه $h(M)$ زیر مدولی از مجموع مستقیم نسخه هایی از مدول انقباض پذیر R_R است. بنابراین از لم ۱۰.۲.۳ نتیجه می گیریم که $h(M)$ انقباض پذیر است. لذا از گزاره ی ۴.۲.۳ نتیجه می گیریم M_R اساساً انقباض پذیر است. ■

نتیجه ۱۲.۲.۳. یک مدول نامنفرد روی یک حلقه ی نیم اول و جابجایی، اساساً انقباض پذیر است، اگر و تنها اگر دوگانش ناصفر باشد.

اثبات . فرض کنیم R یک حلقه ی نیم اول و جابجایی باشد. چون R نیم اول است، پس از قضیه ی ۱۶.۲.۲ نتیجه می گیریم $SZ(R_R) = ۰$ و چون R جابجایی است، پس از گزاره ی ۱۲.۲.۲ نتیجه می گیریم $Z(R) = ۰$. لذا R نامنفرد است. اکنون حکم از قضیه ی قبل بدست می آید. ■

نتیجه ۱۳.۲.۳. اگر R یک حلقه ی اول و M_R نامنفرد باشد، آنگاه گزاره های زیر معادلند:

۱. $Hom_R(M, R) \neq ۰$.

۲. مدول M_R انقباض پذیر است.

۳. مدول M_R اساساً انقباض پذیر است.

اثبات . (۱ $\Leftarrow$ ۲) فرض کنیم m یک عنصر ناصفر از M و $f : M \to R$ یک همریختی ناصفر باشد. چون M نامنفرد است، پس ایدآل راست I از R وجود دارد که $mI \cong I$. چون R یک حلقه ی اول است، پس $If(M) \neq ۰$. لذا عنصر ناصفر $i \in I$ وجود دارد که $if(M) \neq ۰$. اکنون نگاشت $g : f(M) \to I$

با ضابطه ی $g(r) = ir$ را در نظر می گیریم. به راحتی می توان دید که g یک همریختی ناصفر است و لذا $Hom_R(f(M), I) \neq 0$. چون $I \cong mI \subseteq mR$، پس $Hom_R(M, mR) \neq 0$. در نتیجه M_R انقباض پذیر است.

(۲ ⇐ ۳) بدیهی است.

(۳ ⇐ ۱) از قضیه ۳.۲.۱۱ نتیجه می شود. ■

فصل ۴

حلقه های (متناهیاً) انقباض پذیر

۱.۴ هم ارزی رسته ای موریتا

در نظریه ی اصل موضوعی مجموعه ها، **رده** یکی از مفاهیم اولیه (تعریف نشده) می باشد. برای آشنایی با این مفهوم می توان گفت که هر رده گردایه ای است مانند A از اشیاء (عنصرها) که به ازای هر شیء x، بتوان مشخص کرد که x یک عضو A هست یا نه. بر خلاف رده، رسته دارای تعریفی کاملاً مشخص است:

تعریف ۱.۱.۴. هر **رسته** مانند $\mathcal{C}$ رده ای از اشیاء است (که با A، B، C ، ... نمایش داده می شوند) به انضمام

۱. یک رده از مجموعه های از هم جدا برای هر جفت از عناصر $\mathcal{C}$، که با $hom(A,B)$ نمایش داده می شوند. هر عنصر از $hom(A,B)$ مانند f را یک **ریخت** از A به B می نامند و این را با $f : A \to B$ نشان می دهند.

۲. به ازای هر سه تایی (A,B,C) از عناصر $\mathcal{C}$، تابعی مانند

$$hom(B,C) \times hom(A,B) \to hom(A,C)$$

(برای ریخت های $g : B \to C$ و $f : A \to B$، این تابع به صورت $(g,f) \mapsto g \circ f$ نوشته می شود و $g \circ f : A \to C$ ترکیب f و g خوانده می شود). این تابع در دو اصل موضوع زیر صدق می کند:

(الف) شرکت پذیری. هرگاه $h : C \to D$، $g : B \to C$، و $f : A \to B$ ریخت هایی از $\mathcal{C}$ باشند، آنگاه $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(ب) همانی. به ازای هر عنصر B از $\mathcal{C}$ ریختی مانند $۱_B : B \to B$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $g : B \to C$ و $f : A \to B$، $g \circ ۱_B = g$ و $۱_B \circ f = f$.

اگر M و N دو R-مدول راست باشند، آنگاه هر R-همریختی از M به N را می توان به عنوان یک ریخت در نظر گرفت. همچنین واضح است که عمل ترکیب R-همریختی ها در دو اصل موضوع (الف) و (ب) از تعریف قبل صدق می کند. بنابراین می توانیم بنویسیم:

مثال . فرض کنیم R یک حلقه باشد. رده ی همه ی R-مدول های راست به همراه همه ی R-همریختی های آنها تشکیل یک رسته می دهد، که آن را **رسته ی R-مدول های راست** می نامیم، و با نماد $\mathfrak{M}_R$ نشان می دهیم. به صورت مشابه می توان **رسته ی مدول های چپ** روی R را معرفی نمود، که با نماد ${}_R\mathfrak{M}$ نشان داده می شود.

تعریف ۲.۱.۴. فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. **تابعگر همورد** T از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، که با $T:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ نمایش داده می شود، جفتی از توابع است که هر دو با T نمایش داده می شوند؛ یکی **تابع شیء**، که به هر شیء C از $\mathcal{C}$ شیء ای مانند $T(C)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می دهد؛ دیگری **تابع ریخت** که به هر ریخت $f:C\to C'$ از $\mathcal{C}$، ریختی مانند $T(f):T(C)\to T(C')$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می دهد، به طوری که

(یک) به ازای هر ریخت همانی ۱_C از $\mathcal{C}$، $T(۱_C)=۱_{T(C)}$؛

(ب) به ازای هر دو ریخت f و g از $\mathcal{C}$ که ترکیب $g\circ f$ آنها تعریف شده باشد، $T(g\circ f)=T(g)\circ T(f)$.

مثال . تابعگر همانی (همورد) $Id_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ هر شیء و هر ریخت از رسته ی $\mathcal{C}$ را به خودش نسبت می دهد.

در ادامه، منظور از تابعگر یک تابعگر همورد است مگر آنکه خلاف آن ذکر شود.

تعریف ۳.۱.۴. رسته ی $\mathcal{C}$ را **هم ارز** رسته ی $\mathcal{D}$ می نامیم، هرگاه تابعگر های (همورد) $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ و $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ موجود باشند که $G\circ F\cong Id_{\mathcal{C}}$ و $F\circ G\cong Id_{\mathcal{D}}$.

در تعریف فوق، منظور ما از "$\cong$" یک یکریختی طبیعی بین تابعگر ها می باشد و چون تابعگر ها را توابعی در نظر گرفتیم، منظورمان از ترکیب آنها واضح است.

مثال . تابعگر همانی هر رسته، یک هم ارزی رسته ای بین آن رسته و خودش است.

قضیه ۴.۱.۴. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $S = M_n(R)$ ($n > ۰$) . در این صورت رسته های $\mathfrak{M}_R$ و $\mathfrak{M}_S$ هم ارزند.

اثبات . فرض کنیم V یک شیء از $\mathfrak{M}_R$ باشد. $G(V)$ را برابر با مجموعه ی $V^{(n)}$ در نظر می گیریم (که $V^{(n)}$ فضای n-تایی های سطری $(v_۱, v_۲, \ldots, v_n)$ می باشد). در این صورت $S = M_n(R)$ با ضرب ماتریسی روی $V^{(n)}$ عمل می کند. بنابراین $G(V) = V^{(n)}$ یک S-مدول راست می باشد. برای $\alpha \in Hom_R(V, V')$، $G(\alpha) : G(V) \to G(V')$ را با ضابطه ی

$$G(\alpha)(v_۱, v_۲, \ldots, v_n) = (\alpha v_۱, \alpha v_۲, \ldots, \alpha v_n)$$

تعریف می کنیم. می توان بررسی نمود که $G(\alpha)$ یک S-همریختی است، و G یک تابعگر از $\mathfrak{M}_R$ به $\mathfrak{M}_S$ است.

فرض کنیم برای هر i و j که $۱ \leq i, j \leq n$، E_{ij} عنصری از $S = M_n(R)$ باشد که همه ی درایه های آن صفر می باشند، بجز درایه ی سطر i-ام و ستون j-ام که برابر ۱_R است. در این صورت برای هر شیء U از $\mathfrak{M}_S$، $F(U)$ را برابر $UE_{۱۱}$ تعریف می کنیم .

چون برای هر $r \in R$، $UE_{۱۱}r = UrE_{۱۱} \subseteq UE_{۱۱}$، پس $F(U)$ یک R-مدول راست است، یعنی $F(U)$ یک شیء از $\mathfrak{M}_R$ است. برای هر $\beta \in Hom_S(U, U')$، بوضوح $\beta(UE_{۱۱}) = \beta(U)E_{۱۱}$. حال $F(\beta)$ را برابر نگاشت $F(U) \to F(U')$ معرفی شده توسط β(همان رابطه ی بالایی) قرار می دهیم. پس $F(\beta) \in Hom_R(F(U), F(U'))$. به سادگی می توان بررسی نمود که F یک تابعگر از $\mathfrak{M}_S$ به $\mathfrak{M}_R$ است.

برای $V \in \mathfrak{M}_R$ (یعنی برای شیء V از $\mathfrak{M}_R$)، $(F \circ G)(V) = F(V^{(n)}) = V^{(n)}E_{11}$ تشکیل شده از سطرهایی بفرم $(v, 0, \ldots, 0)$ است که $v \in V$. لذا $V^{(n)}E_{11}$ به طور طبیعی یکریخت با V است. این نشان می دهد که $F \circ G$ به طور طبیعی برابر با تابعگر همانی روی $\mathfrak{M}_R$ می باشد.

برای محاسبه ی $G \circ F$، فرض کنیم $U \in \mathfrak{M}_S$، و می نویسیم $V = UE_{11} = F(U)$. حال کار ما یافتن یک یکریختی طبیعی ε_U از U به $V^{(n)} = (G \circ F)(U)$.

ε_U را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\varepsilon_U(u) = (uE_{11}, uE_{21}, \ldots, uE_{n1}) \in V^{(n)}$$

توجه داریم که برای هر i، $uE_{i1} = uE_{i1}E_{11} \in V$. برای اینکه S-همریختی بودن ε_U را بررسی کنیم، کافیست نشان دهیم برای هر $r \in R$، $\varepsilon_U(urE_{ij}) = \varepsilon_U(u)rE_{ij}$.

بنابه تعریف

$$\varepsilon_U(urE_{ij}) = (urE_{ij}E_{11}, \ldots, urE_{ij}E_{n1}) = (0, \ldots, 0, urE_{i1}, 0, \ldots, 0)$$

که urE_{i1} در jامین مکان است. از طرف دیگر با ضرب مستقیم ماتریسی می بینیم که $\varepsilon_U(u)rE_{ij}$ نیز چیزی مشابه است. بنابراین $\varepsilon_U \in Hom(U, V^{(n)})$. در ادامه، یکریختی بودن ε_U را بررسی می نماییم.

اگر $\varepsilon_U(u) = 0$، آنگاه $uE_{ii} = (uE_{i1})E_{1i} = 0$. لذا $u = u(\sum E_{ii}) = 0$، که نشان می دهد ε_U یک به یک است.

حال برای اینکه نشان دهیم ε_U پوشا است، کافیست نشان دهیم که برای هر $v \in V$، $(v, 0, \ldots, 0) \in \varepsilon_U(U)$. برای این منظور $u \in U$ را ثابت در نظر می گیریم، به طوری که $v = uE_{11}$. پس

$$\varepsilon_U(v) = (vE_{11}, \ldots, vE_{i1}, \ldots, vE_{n1}) = (uE_{11}E_{11}, \ldots, uE_{11}E_{i1}, \ldots, uE_{11}E_{n1})$$

$$= (uE_{11}, 0, \dots, 0) = (v, 0, \dots, 0)$$

بنابراین ε_U پوشا است.

بوضوح $G \circ F$ تابعگر همانی روی $\mathfrak{M}_S$ است. این اثبات را کامل می کند. ■

تعریف ۵.۱.۴. حلقه ی R را **هم ارز موریتا** با حلقه ی S می گوییم، هرگاه یک هم ارزی رسته ای بین $\mathfrak{M}_R$ و $\mathfrak{M}_S$ موجود باشد.

از قضیه ی ۴.۱.۴ نتیجه ی زیر بدست می آید.

نتیجه ۶.۱.۴. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $S = M_n(R)$ ($n > 0$) . در این صورت حلقه های R و S هم ارز موریتا هستند.

مقصود از مطالب این بخش، استفاده از مزایای هم ارزی رسته ها و هم ارزی موریتا در راستای موضوع پایان نامه می باشد. از جمله مزایای اصلی هم ارزی رسته ها، انتقال خصوصیات و ویژگی های اشیاء و ریخت های یک رسته به اشیاء و ریخت های رسته ی دیگر می باشد.

تعریف ۷.۱.۴. خاصیت $\mathcal{P}$ روی اشیاء (به همین صورت روی ریخت های) رسته ی R-مدول های راست $\mathfrak{M}_R$ را یک **خصوصیت رسته ای** می خوانیم، هرگاه برای هر هم ارزی رسته ای $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_S$، اگر $M \in \mathfrak{M}_R$ (به همین صورت $g \in Hom_R(M, N)$) در $\mathcal{P}$ صدق کند، آنگاه $F(M)$ (به همین صورت $F(g)$) نیز در آن صدق کند.

به کمک تعریف فوق می توان دید که اگر خاصیت $\mathcal{P}$ کاملاً بر حسب عبارات رسته ای (تنها با استفاده از اشیاء و ریخت ها، و بدون ارجاع به عناصر مدول ها و یا حلقه ی پایه) تعریف شده باشد (و یا قابل تعریف باشد)، آنگاه $\mathcal{P}$ یک خاصیت رسته ای است و هرگاه F یک هم ارزی رسته ای باشد، خاصیت $\mathcal{P}$ را از M (به همین صورت g) به $F(M)$ (به همین صورت $F(g)$) "منتقل" می کند.

بدین ترتیب در سطح همریختی ها (ریخت ها) تکریختی، بروریختی و یکریختی بودن، خصوصیات رسته ای می باشند، زیرا:

- همریختی $g : M \to N$ یک به یک است، هرگاه از صفر شدن ترکیب g با $h : X \to M$ نتیجه بگیریم $h = 0$.

- همریختی $g : M \to N$ پوشا است، هرگاه از صفر شدن ترکیب $k : N \to Y$ با g نتیجه بگیریم $k = 0$.

از عبارت فوق بر می آید که دنباله ی دقیق بودن $0 \to M \to N \to M \to 0$ یک خصوصیت رسته ای است.

در سطح مدول ها (اشیاء) صفر، ناصفر، ساده، نیم ساده، نوتری و آرتینی بودن خصوصیاتی رسته ای می باشند و برای زیر مدول ها ماکسیمال، مینیمال، اساسی، اساسی قوی، جمعوند مستقیم بودن خصوصیاتی رسته ای هستند. به همین صورت، از تعریف مدول تصویری و انژکتیو نتیجه می شود که این خصوصیات رسته ای هستند و در نتیجه پوش انژکتیو بودن نیز یک خصوصیت رسته ای می باشد. حتی خاصیت "با تولید متناهی بودن" هم رسته ای می باشد، زیرا می توانیم یک توصیف از "با تولید متناهی بودن" یک مدول ارائه دهیم که در آن از عناصر استفاده نمی شود:

- مدول M_R با تولید متناهی است، اگر و تنها اگر برای هر مجموعه $\{N_i | i \in I\}$ از زیر مدول های M، اگر $M = \sum_{i\in I} N_i$، آنگاه زیر مجموعه ی متناهی $J \subseteq I$ وجود داشته باشد که $M = \sum_{i\in J} N_i$.

گزاره ۸.۱.۴. انقباض پذیر بودن، یک خاصیت رسته ای است.

هرچند برای اثبات کافیست متذکر شویم که در تعریف انقباض پذیریِ یک مدول، تنها از عبارات رسته ای استفاده شده است، ولی برای درک بهتر و تأکید بیشتر روی رسته ای بودنِ خاصیت انقباض پذیری، به بیان این اثبات به کمک مفاهیم رسته ای و به صورت مستقیم از تعریف می پردازیم:

اثبات . فرض کنیم $F:\mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_S$ و $G:\mathfrak{M}_S \to \mathfrak{M}_R$ یک هم ارزی رسته های $\mathfrak{M}_R$ و $\mathfrak{M}_S$ باشد و $M \in \mathfrak{M}_R$ یک مدول انقباض پذیر باشد. اگر فرض کنیم $0 \neq K \leq F(M)$، آنگاه داریم

$$0 \neq G(K) \leq G(F(M)) = M$$

پس بنا به انقباض پذیر بودن M، $Hom_R(M, G(K)) \neq 0$. هرگاه $0 \neq h \in Hom_R(M, G(K))$، آنگاه

$$0 \neq F(h) \in Hom_S(F(M), F(G(K))) = Hom_S(F(M), K)$$

بنابراین $Hom_S(F(M), K) \neq 0$. ■

گزاره ۹.۱.۴. خاصیت اساساً انقباض پذیر بودن، یک خاصیت رسته ای است.

اثبات . چون اساسی بودن یک خاصیت رسته ای است، پس مشابه گزاره ی قبل می توان ثابت نمود که اساساً انقباض پذیر بودن یک خاصیت رسته ای است. ■

با اینکه دیدیم بسیاری از خواص آشنا در نظریه مدول ها خصوصیات رسته ای هستند، ولی می توان دید که خصوصیاتی مانند "مدول آزاد بودن" و "مدول دوری بودن" رسته ای نیستند، زیرا نمی توانیم تعاریف آنها را بدون وابستگی به حلقه ی زمینه ی مدول بیان نماییم.

تعریف ۱۰.۱.۴. خاصیت $\mathcal{P}$ روی حلقه ها را یک **خاصیت موریتا پایا** می نامیم، هرگاه برای هر دو حلقه ی هم ارز موریتای R و S، R دارای خاصیت $\mathcal{P}$ است، اگر و تنها اگر S دارای خاصیت $\mathcal{P}$ باشد.

از تعریف اخیر و آنچه در مورد خصوصیات رسته ای گفته شد نتیجه می گیریم که نیم ساده، نوتری راست و آرتینی راست بودن، خصوصیاتی موریتا پایا هستند.

نتیجه ۱۱.۱.۴. اگر حلقه ی R نیم ساده، نوتری راست یا آرتینی راست باشد، آنگاه $M_n(R)$ نیز چنین است.

اثبات. چون بنا به نتیجه ی ۶.۱.۴، R هم ارز موریتا با حلقه ی $M_n(R)$ می باشد و خصوصیات ذکر شده موریتا پایا هستند، پس حکم بدیهی است. ■

گزاره ۱۲.۱.۴. نیم آرتینیِ راست بودن یک خاصیت موریتا پایا است.

اثبات. بنابه گزاره ی ۸.۳.۲، حلقه ی R نیم آرتینی راست است، اگر و تنها اگر هر زیر مدول اساسی از یک R-مدول، اساسی قوی باشد. حال از آنجا که اساسی و اساسی قوی بودن خواص رسته ای می باشند، نتیجه می گیریم نیم آرتینی راست بودن یک خاصیت موریتا پایا است. ■

۲.۴ حلقه های (متناهیاً) انقباض پذیر

تعریف ۱.۲.۴. حلقه ی R را **(متناهیاً) انقباض پذیر** می نامیم، هرگاه هر R-مدولِ (با تولید متناهیِ) ناصفر انقباض پذیر باشد.

مثال. از آنجا که رسته ی تمام R-مدول ها شامل رسته ی R-مدول های با تولید متناهی می باشد، بنابراین هر حلقه ی انقباض پذیر، متناهیاً انقباض پذیر است.

گزاره ۲.۲.۴. فرض کنیم R حلقه ای باشد که R_R ساده است. در این صورت R انقباض پذیر است.

اثبات. فرض کنیم M یک R-مدول راست باشد. چون $M = \sum_{m\in M} mR$ و برای هر $m \in M$، mR ساده است، پس M نیم ساده است. حال از گزاره ی ۲.۱.۳ نتیجه می گیریم M انقباض پذیر است. ■

نتیجه ۳.۲.۴. هر میدان انقباض پذیر است.

اثبات. چون هر میدان به عنوان یک مدول روی خودش ساده است، پس از گزاره ی قبل نتیجه می گیریم که هر میدان انقباض پذیر است. ■

چنانچه در مثال بعد خواهیم دید، برخی حلقه ها متناهیاً انقباض پذیر هستند اما انقباض پذیر نیستند.

مثال. حلقه ی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، انقباض پذیر نیست اما متناهیاً انقباض پذیر است.

حل. بنا به مثال ابتدای بخش ۲.۳، $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ انقباض پذیر نیست و لذا $\mathbb{Z}$ انقباض پذیر نیست. اکنون فرض کنیم M یک گروه آبلی با تولید متناهی باشد که توسط $\{m_1, m_2, \dots, m_s\}$ تولید می شود و $0 \neq f \in Hom_R(M, E(N))$. چون $0 \neq N \leq M$ و $N \leq_e E(N)$ و $N \leq f(M) \leq E(N)$،

پس $f(M) \leq_e N$. لذا عنصر $r \in R$ وجود دارد که $\circ \neq \{f(m_1), \cdots, f(m_s)\}r \subseteq N$. حال می توان دید که نگاشت $g : M \to N$ با ضابطه ی $g(m) = f(m)r$ ($m \in M$) یک همریختی ناصفر است. بنابراین M انقباض پذیر است و در نتیجه $\mathbb{Z}$ یک حلقه ی متناهیاً انقباض پذیر است. ■

گزاره ۴.۲.۴. اگر R یک حلقه ی نیم ساده باشد (یعنی هر مدول روی آن نیم ساده باشد)، آنگاه R انقباض پذیر است.

اثبات . چون هر R-مدول نیم ساده است، پس از گزاره ی ۲.۱.۳، نتیجه می گیریم هر مدول روی R انقباض پذیر است و لذا R انقباض پذیر است. ■

قضیه ۵.۲.۴. تصویر همریخت هر حلقه ی (متناهیاً) انقباض پذیر، (متناهیاً) انقباض پذیر است.

اثبات . فرض کنیم R یک حلقه ی (متناهیاً) انقباض پذیر باشد و $I \leq R_R$. اگر M یک R/I-مدول (با تولید متناهی) باشد، آنگاه با توسیع اسکالر ها نسبت به بروریختی طبیعیِ $R \to R/I$، M یک R-مدول (با تولید متناهی) می باشد. حال اگر N یک R/I-زیر مدول M باشد، آنگاه N یک R-زیر مدول از M نیز می باشد و به راحتی می توان دید $\circ \neq Hom_R(M, N) = Hom_{R/I}(M, N)$. ■

نتیجه ۶.۲.۴. فرض کنیم R_1، R_2،…، R_n حلقه باشند و $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$. در این صورت R (متناهیاً) انقباض پذیر است، اگر و تنها اگر برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، R_i (متناهیاً) انقباض پذیر باشد.

اثبات . فرض کنیم R (متناهیاً) انقباض پذیر باشد. چون برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، R_i تصویر همریخت حلقه ی R است، پس از قضیه ی ۵.۲.۴ نتیجه می شود R_i (متناهیاً) انقباض پذیر است. بعکس، فرض کنیم M یک R-مدول (با تولید متناهی) ناصفر باشد. برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، اگر e_i عنصر همانیِ حلقه ی R_i باشد، آنگاه $M_i = Me_i$ یک R_i-مدول (با تولید متناهی) و یک R-زیر مدول (با تولید متناهی) از M است. از اینکه $1_R = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$، نتیجه می گیریم

$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$.

حال فرض کنیم $0 \neq N \leq M$. در این صورت می توان نوشت $N = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$، که برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، $N_i = N \cap M_i$. چون $N \neq 0$، پس $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ وجود دارد که $N_j \neq 0$. حال چون M_j یک R_j-مدول انقباض پذیر است، پس یک R_j-همریختی ناصفر $f_j : M_j \to N_j$ وجود دارد. اکنون نگاشت $f : M \to N$ را در نظر می گیریم که برای هر $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in M$، $f(m) = (0, 0, \ldots, 0, f_j(m_j), 0, \ldots, 0)$ و $f_j(m_j)$ در j-امین مکان قرار دارد. به راحتی می توان دید که f یک R-همریختی ناصفر است. ■

قضیه ۷.۲.۴. گزاره های زیر برای حلقه ی R هم ارزند:

۱. حلقه ی R (متناهیاً) انقباض پذیر است؛

۲. هر R-مدول (با تولید متناهی) انقباض پذیر است؛

۳. هر R-مدول (با تولید متناهی) اساساً انقباض پذیر است؛

۴. برای هر R-مدول (با تولید متناهی) چون M و هر R-مدول مانند N، $Hom_R(M, N) = 0$، اگر وتنها اگر $Hom_R(M, E(N)) = 0$.

اثبات. ($1 \Leftrightarrow 2$) و ($2 \Leftarrow 3$) بدیهی می باشند.

($3 \Leftarrow 2$) فرض کنیم M یک R-مدول (با تولید متناهی) باشد، و $0 \neq N \leq M$. نگاشت شمول $N \to E(N)$ به همریختی ناصفر $f : M \to E(N)$ توسیع می یابد. واضح است که $N \leq f(M)$. چون $N \leq_e E(N)$ و $f(M) \leq E(N)$، پس $N \leq_e f(M)$. حال از (۳) نتیجه می گیریم که همریختی ناصفری چون $g : f(M) \to N$ وجود دارد و لذا $gf : M \to N$ یک همریختی ناصفر است.

($4 \Leftarrow 3$) فرض کنیم M یک R-مدول (با تولید متناهی) و N یک R-مدول دلخواه باشد.

فرض کنیم $0 \neq f \in Hom_R(M, E(N))$. چون $N \leq_e E(N)$، پس $0 \neq N \cap f(M) \leq_e f(M)$.

چون بنابه (۳)، $f(M)$ اساساً انقباض پذیر است، پس

$$Hom_R(f(M), N \cap f(M)) \neq 0.$$

اگر $0 \neq g \in Hom_R(f(M), N \cap f(M))$، آنگاه $0 \neq gf \in Hom_R(M, N)$.با چنین استدلالی می توان نشان داد که اگر $Hom_R(M, N) = 0$، آنگاه $Hom_R(M, E(N)) = 0$.

بعکس، فرض کنیم $Hom_R(M, N) \neq 0$. چون $E(N)$ انژکتیو است، پس $Hom_R(M, E(N)) \neq 0$.

(۴ $\Leftarrow$ ۳) فرض کنیم M یک R-مدول (با تولید متناهی) باشد و $N \leq_e M$. از گزاره ی ۱۲.۲.۱ نتیجه می گیریم $E(N) = E(M)$. چون $Hom_R(M, E(N)) = Hom_R(M, E(M)) \neq 0$، پس از (۴) نتیجه می گیریم $Hom_R(M, N) \neq 0$. بنابراین M اساساً انقباض پذیر است. ■

چنانکه در بخش ۱.۴ دیدیم، خصوصیات "با تولید متناهی بودن" و "انقباض پذیر بودن"، رسته ای هستند. از این به راحتی نتیجه می شود که خصوصیات انقباض پذیری و متناهیاً انقباض پذیریِ یک حلقه، موریتا پایا هستند:

قضیه ۸.۲.۴. فرض کنیم R حلقه ای (متناهیاً) انقباض پذیر باشد، در این صورت هر حلقه ی هم ارز موریتا با R (متناهیاً) انقباض پذیر است.

اثبات . فرض کنیم S یک حلقه هم ارز موریتا با R و $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_S$ یک هم ارزی موریتا باشد. اگر M یک R-مدول (با تولید متناهی) باشد، آنگاه بنا به فرض M انقباض پذیر است و از گزاره ی ۸.۱.۴، نتیجه می گیریم که $F(M)$ انقباض پذیر است.(توجه داریم که با تولید متناهی بودن یک خصوصیت رسته ای است. لذا اگر M با تولید متناهی باشد، آنگاه $F(M)$ با تولید متناهی است). بنابراین حلقه ی S یک حلقه ی (متناهیاً) انقباض پذیر است. ■

نتیجه ۹.۲.۴. حلقه ی R (متناهیاً) انقباض پذیر است، اگر و تنها اگر حلقه ی $M_n(R)$ (متناهیاً) انقباض پذیر باشد.

اثبات. از نتیجه ی ۶.۱.۴ و قضیه قبل بدست می آید. ■

قضیه ۱۰.۲.۴. هر حلقه ی هم ارز موریتا با یک حلقه ی جابجایی نیم آرتینی، انقباض پذیر است.

اثبات. کافیست ثابت کنیم هر حلقه ی جابجایی نیم آرتینی، انقباض پذیر است. فرض کنیم R یک حلقه ی جابجایی نیم آرتینی باشد و $0 \neq N \leq M_R$. چون $E(N)$ انژکتیو است، پس نگاشت شمول $N \to E(N)$ به همریختی ناصفری چون $f : M \to E(N)$ توسیع می یابد. چون R یک حلقه ی نیم آرتینی است، پس از قضیه ی ۸.۳.۲، نتیجه می گیریم $N \leq_{se} E(N)$. لذا از $0 \neq f(M) \subseteq E(N)$، نتیجه می گیریم عنصر $r \in R$ وجود دارد که $0 \neq f(M)r \subseteq N$. بنابراین اگر $g : M \to N$ را باضابطه ی $g(m) = f(m)r$ ($m \in M$) در نظر بگیریم، آنگاه می توان بررسی نمود که g یک R-همریختی ناصفر است. (توجه داریم که از جابجایی بودنِ R، نتیجه می شود که g ضرب اسکالر را حفظ می کند). لذا $0 \neq g \in Hom_R(M, N)$. ■

قضیه ۱۱.۲.۴. هر حلقه ی هم ارز موریتا با یک حلقه ی جابجایی، متناهیاً انقباض پذیر است.

اثبات. فرض کنیم N یک مدول دلخواه روی حلقه ی جابجایی R باشد و $M = \sum_{i=1}^{n} m_i R$ یک R-مدول با تولید متناهی باشد. هرگاه $0 \neq f \in Hom_R(M, E(N))$، آنگاه $f(M) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)R$. چون $N \leq_e E(N)$، پس عنصر $r \in R$ وجود دارد که $0 \neq \{f(m_i) | i = 1, 2, \ldots, n\}r \subseteq N$. اکنون نگاشت $g : M \to N$ را با ضابطه ی $g(m) = f(m)r$ در نظر می گیریم. از اینکه R جابجایی است نتیجه می گیریم g یک R-همریختی است. لذا $0 \neq g \in Hom_R(M, N)$. بعکس، واضح است که هرگاه $Hom_R(M, N) \neq 0$، آنگاه از اینکه $E(N)$ انژکتیو است نتیجه می گیریم $Hom_R(M, E(N)) \neq 0$. حال از قضیه ی ۷.۲.۴ (۴)، نتیجه می گیریم که R متناهیاً انقباض پذیر است. ■

فصل ۵

حلقه های چندجمله ای های اریب

۱.۵ حلقه ی چند جمله ای های اریب

تعریف ۱.۱.۵. فرض کنیم R یک حلقه باشد، در این صورت تابع $\delta : R \to R$ را یک **تابع مشتق** می نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in R$،

۱. $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$

۲. $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$

مثال . فرض کنیم c عنصری از حلقه ی R باشد. تابع $\delta : R \to R$ را در نظر می گیریم که برای هر $b \in R$، $\delta(b) = cb - bc$. به راحتی می توان بررسی نمود که δ یک تابع مشتق است. در این حالت δ را یک **تابع مشتق داخلی** می نامیم.

تعریف ۲.۱.۵. فرض کنیم α یک درونریختی از حلقه ی R باشد. تابع جمعی $\delta : R \to R$ را یک α-**مشتق (چپ)** می نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in R$، $\delta(ab) = \alpha(a)\delta(b) + \delta(a)b$.

مثال . فرض کنیم Id_R همریختی همانی حلقه ی R باشد. در این صورت واضح است که توابع مشتق همان Id_R-مشتق ها می باشند.

تعریف ۳.۱.۵. فرض کنیم α یک درونریختی حلقه ی R و δ یک α-مشتق (چپ) باشد. **حلقه ی چند جمله ای های اریب** را با $R[x; \alpha, \delta]$ نمایش می دهیم. عناصر این حلقه چندجمله ای ها روی حلقه ی R می باشند. عمل جمع و ضرب در آن به طور طبیعی تعریف می شود و برای هر $r \in R$، عمل ضرب از قانون $xr = \alpha(r)x + \delta(r)$ پیروی می کند.

هرگاه $\delta = 0$ آنگاه حلقه ی $R[x; \alpha, \delta]$ را با علامت $R[x; \alpha]$ نمایش می دهیم و اگر $\alpha = Id_R$، آنگاه حلقه ی $R[x; \alpha, \delta]$ را با $R[x; \delta]$ نشان می دهیم.

مثال . فرض کنیم α یک درونریختی از حلقه ی R باشد. اگر α خودریختی همانی R باشد، آنگاه $R[x;\alpha] \cong R[x]$، در غیر این صورت $R[x;\alpha]$ یک حلقه ی ناجابجایی است. همچنین اگر α یک به یک نباشد، آنگاه برای عنصر ناصفری چون $b \in R$، $xb = \alpha(b)x = 0$ و لذا x یک مقسوم علیه چپ صفر است که مقسوم علیه راست صفر نیست. اگر α پوشا نباشد، آنگاه نمی توان هر جمله ax را به فرم xb نوشت که $b \in R$.

مثال . چنانچه در [۹، ص.۱۲] بیان شده است، اگر δ یک تابع مشتق داخلی روی حلقه ی R باشد، آنگاه $R[x;\delta] \cong R[x]$.

تعریف ۴.۱.۵. فرض کنیم α یک درونریختی از حلقه ی R باشد و $S = R[x;\alpha]$ و $\emptyset \neq I \subseteq S$. برای هر $i \geq 0$، قرار می دهیم $I_i = \{a \in R | \exists f(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in I; a = b_i\}$. در این صورت $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ را **دنباله ضرایب I در** R می نامیم.

در ادامه سعی داریم ساختار ایدآل های راست حلقه ی $R[x;\alpha]$ را مشخص نماییم.

لم ۵.۱.۵. فرض کنیم α یک درونریختی حلقه ی R باشد و I یک زیر مجموعه ی ناتهی از حلقه ی $S = R[x;\alpha]$ باشد که $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ دنباله ی ضرایب آن در R است. در این صورت :

(الف) اگر I یک ایدآل راست از حلقه ی S باشد، آنگاه برای هر $i = 0, 1, \cdots$، داریم:

۱- I_i یک $\alpha^i(R)$-مدول راست است.

۲- $I_i \subseteq I_{i+1}$.

(ب) اگر $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ در شرایط ۱ و ۲ قسمت (الف) صدق کند و $I = \sum_i I_i x^i$، آنگاه I یک ایدآل راست از حلقه ی S است.

اثبات . (الف) فرض کنیم I یک ایدآل راست از حلقه ی $S = R[x;\alpha]$ باشد. فرض کنیم $a, b \in I_i$. در این صورت عناصر $f, g \in S$ وجود دارند که a و b ضریب x^i بترتیب در f و g می باشند. چون I یک ایدآل راست از S است، پس $f + g \in I$. چون $a + b$ ضریب x^i در $f + g$ است، پس $a + b \in I_i$. حال فرض کنیم $t = \alpha^i(r) \in \alpha^i(R)$. چون $fr \in I$ و ضریب x^i در fr برابر است با at پس $at \in I_i$. بنابراین I_i یک $\alpha^i(R)$-مدول راست است و لذا شرط ۱ برقرار است. چون $f(x)x \in I$ و a ضریب x^{i+1} در $f(x)x$ است، پس $a \in I_{i+1}$. بنابراین برای هر $i \geq 0$، $I_i \subseteq I_{i+1}$ و لذا ۲ برقرار است.

(ب) فرض کنیم $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ در شرایط ۱ و ۲ قسمت (الف) صدق کند و $I = \sum_i I_i x^i$. واضح است که I ناتهی می باشد و تحت جمع بسته است. فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in I$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in S$. در این صورت از تعریف ضرب در S نتیجه می گیریم که برای هر $k = 0, 1, 2, \ldots, n + m$، ضریب x^k در حاصلضرب fg برابر است با $c_k = \sum_{i+j=k} a_i \alpha^i(b_j)$. چون برای هر i، I_i یک $\alpha^i(R)$-مدول راست است، پس برای هر i و j داریم $a_i \alpha^i(b_j) \in I_i$. از اینکه برای هر i، $I_i \subseteq I_{i+1}$، به استقرا می توان نتیجه گرفت که برای هر i که $i \leq k$، $I_i \subseteq I_k$. لذا $c_k = \sum_{i+j=k} a_i \alpha^i(b_j) \in I_k$. در نتیجه $fg \in I$. بنابراین I یک ایدآل راست از حلقه ی S است. ■

قضیه ۶.۱.۵. فرض کنیم α یک درونریختی حلقه ی R باشد و $S = R[x;\alpha]$. در این صورت $Soc(S_S) = 0$.

اثبات . به کمک لم قبل می توان دید که برای هر $i \geq 0$، Sx^i یک ایدآل راست ناصفر از حلقه ی S است. اگر $0 \neq f \in S$، آنگاه $0 \neq fx^i \in S$. لذا برای هر $i \geq 0$، Sx^i یک ایدآل راست اساسی در S است. حال از گزاره ی ۱۸.۱.۱، نتیجه می گیریم که $Soc(S_S) \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} Sx^i = 0$. بنابراین $Soc(S_S) = 0$. ■

نتیجه ۷.۱.۵. فرض کنیم α یک درونریختی حلقه ی R باشد. در این صورت حلقه ی $S = R[x, \alpha]$

نیم آرتینی راست نیست.

اثبات . بنابه قضیه قبل داریم $Soc(S_S) = 0$. حال از قضیه ی ۴.۳.۲ نتیجه می گیریم که S نیم آرتینی راست نیست. ■

چنانچه در روند اثبات نتیجه ی قبل هم می بینیم، با اینکه α نقش مهمی در چگونگی ساختار حلقه ی $S = R[x;\alpha]$ دارد، اما نیم آرتینی راست بودن حلقه ی S، حتی با یکریختی بودن α میسر نمی شود. همچنین، چون برای $\alpha = Id_R$، $R[x;\alpha]$ همان $R[x]$ می باشد، پس $R[x]$ نیز نیم آرتینی راست نمی باشد. در عین حال، از اینکه $R[x;\alpha]$ نمی تواند نیم آرتینی راست باشد نباید نتیجه ی سریعی مبنی بر اینکه $R[x;\alpha]$ نمی تواند انقباض پذیر یا متناهیاً انقباض پذیر باشد گرفت :

مثال . فرض کنیم R یک حلقه ی جابجایی باشد. در این صورت $R[x] = R[x;Id_R]$ نیز جابجایی است و از قضیه ی ۱۱.۲.۴ نتیجه می گیریم که حلقه ی $R[x]$ متناهیاً انقباض پذیر است.

مثال . فرض کنیم K یک حلقه ی جابجایی باشد و $R = M_n(K)$. چون حلقه ی $K[x]$ جابجایی است، پس از نتیجه ی ۹.۲.۴ نتیجه می گیریم که $M_n(k[x])$ متناهیاً انقباض پذیر است و چون $R[x] = M_n(K)[x] \cong M_n(k[x])$، پس $R[x]$ متناهیاً انقباض پذیر است.

قضیه ی بعدی ارتباطی میان انقباض پذیری حلقه ی $R[x;\alpha]$ و حلقه ی R برقرار نموده است.

قضیه ۸.۱.۵. فرض کنیم α یک درونریختی حلقه ی R باشد. در این صورت، اگر $S = R[x;\alpha]$ (متناهیاً) انقباض پذیر باشد، آنگاه R نیز (متناهیاً) انقباض پذیر است.

اثبات . فرض کنیم $J_0 = 0$ و برای هر $i > 0$، $J_i = R$. واضح است که J_i ها در شرایط ۱ و ۲ لم ۵.۱.۵(الف) صدق می کنند. لذا $J = \sum_i J_i x^i$ یک ایدآل راست S می باشد. از طرفی به راحتی می توان دید که نگاشت $f : S \to R$ با ضابطه ی $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto a_0$، یک بروریختی حلقه ای از

S به R است که $Ker(f) = J$. لذا $R \cong S/J$. بنابراین R تصویر همریخت S می باشد و از قضیه ی ۵.۲.۴ حکم ثابت می شود. ■

نتیجه ۹.۱.۵. اگر $R[x]$ (متناهیاً) انقباض پذیر باشد، آنگاه R نیز (متناهیاً) انقباض پذیر است.

اثبات. از قضیه ی قبل نتیجه می شود. ■

همانند لم ۵.۱.۵ که در مورد ایدآل های راست حلقه ی $R[x;\alpha]$ بود، می توانیم ساختار ایدآل های چپ حلقه ی $R[x;\alpha]$ را مشخص نماییم.

لم ۱۰.۱.۵. فرض کنیم α یک درونریختی حلقه ی R باشد و I یک زیر مجموعه ی ناتهی از حلقه ی $S = R[x;\alpha]$ باشد که $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ دنباله ی ضرایب آن در R است. در این صورت :

(الف) اگر I یک ایدآل چپ از حلقه ی S باشد، آنگاه برای هر $i = 0, 1, \cdots$، داریم:

۱- I_i یک ایدآل چپ حلقه ی R است.

۲- $\alpha(I_i) \subseteq I_{i+1}$.

(ب) اگر $\{I_i\}_{i=0}^{\infty}$ در شرایط ۱ و ۲ قسمت (الف) صدق کنند و $I = \sum_i I_i x^i$، آنگاه I یک ایدآل چپ از حلقه ی S است.

اثبات. (الف) فرض کنیم I یک ایدآل چپ از حلقه ی S باشد. فرض کنیم $a, b \in I_i$. در این صورت عناصر $f, g \in S$ وجود دارند که a و b بترتیب ضریب x^i در f و g می باشند. چون $f + g \in I$ و $a+b$ ضریب x^i در $f + g$ است، پس $a + b \in I_i$. چون برای هر $r \in R$، $rf \in I$، پس $ra \in I_i$. بنابراین I_i یک ایدآل چپ از حلقه ی R است. از آنجا که $xf \in I$ و $\alpha(a)$ ضریب x^{i+1} در xf است، نتیجه می گیریم $\alpha(a) \in I_{i+1}$. بنابراین برای هر $i \geq 0$، $\alpha(I_i) \subseteq I_{i+1}$. لذا شروط ۱ و ۲ برقرار می باشند.

(ب) فرض کنیم $I = \sum_i I_i x^i$. واضح است که I ناتهی و تحت جمع بسته است. فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in I$ و $h(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in S$. در این صورت از تعریف ضرب در S نتیجه می گیریم که برای هر $k = 0, 1, 2, \dots, n+m$، ضریب x^k در حاصلضرب hf برابر است با

$$c_k = \sum_{i+j=k} b_j \alpha^j(a_i)$$

چون برای هر i، $\alpha(I_i) \subseteq I_{i+1}$، پس به استقرا ثابت می شود که برای هر i که $i \leq k$ و هر $j \geq 0$، $\alpha^j(I_i) \subseteq I_k$. لذا برای هر i و j، $\alpha^j(a_i) \in I_k$. حال چون I_k یک ایدآل چپ حلقه ی R است، پس $c_k = \sum_{i+j=k} b_j \alpha^j(a_i) \in I_k$. در نتیجه $hf \in I$. بنابراین I یک ایدآل چپ از حلقه ی S است. ■

قضیه ۱۱.۱.۵. فرض کنیم α یک درونریختی از حلقه ی R باشد و $S = R[x;\alpha]$. در این صورت $Soc(_SS) = 0$، اگر و تنها اگر $Ker(\alpha) \cap Soc(_RR) = 0$.

اثبات . ثابت می کنیم $Ker(\alpha) \cap Soc(_RR) \neq 0$، اگر و تنها اگر $Soc(_SS) \neq 0$. فرض کنیم I یک ایدآل چپ ساده از حلقه ی R باشد به طوری که $\alpha(I) = 0$. به کمک لم قبل می توان دید که برای هر $i \geq 0$، Ix^i یک ایدآل چپ ساده از حلقه ی S می باشد. بنابراین $Soc(_SS) \neq 0$.

بعکس، فرض کنیم J یک ایدآل چپ ساده از حلقه ی S باشد و $\{J_i\}_{i=0}^{\infty}$ دنباله ضرایب J در R باشد. هرگاه j کوچکترین عدد صحیح مثبت باشد که $J_j \neq 0$، آنگاه قرار می دهیم

$$K = \{f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in J | a_j = 0\}$$

به راحتی می توان دید که K یک ایدآل چپ از حلقه ی S می باشد. از طرفی داریم $xJ \subseteq K$. حال اگر $xJ \neq 0$، آنگاه $0 \neq xJ \subseteq K < J$ که با ساده بودن J در تناقض است. بنابراین $xJ = 0$. لذا $\alpha(J_j) = 0$. حال اگر $L \leq J_j$، آنگاه مجموعه ی

$$K_1 = \{f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in J | a_j \in L\}$$

یک ایدآل چپ از S است که زیر مجموعه ی J می باشد. پس اگر J_j اکیداً شامل L باشد، آنگاه J اکیداً شامل K_1 است که با ساده بودن J در تناقض است. از این نتیجه می گیریم که J_j یک ایدآل ساده از حلقه ی R است. بنابراین $0 \neq J_j \subseteq Ker(\alpha) \cap Soc({}_RR)$. ■

نتیجه ۱۲.۱.۵. فرض کنیم α یک درونریختی از حلقه ی R باشد و $S = R[x;\alpha]$. در این صورت اگر $Ker(\alpha) \cap Soc({}_RR) = 0$، آنگاه S نیم آرتینی چپ نیست. در حالت خاص اگر α یک به یک باشد یا $Soc({}_RR) = 0$ آنگاه S نیم آرتینی چپ نیست.

اثبات . اگر $Ker(\alpha) = 0$ یا $Soc({}_RR) = 0$ آنگاه $Ker(\alpha) \cap Soc({}_RR) = 0$ و بنابه قضیه قبل $Soc({}_SS) = 0$. حال از قضیه ی ۴.۳.۲ (که در مورد نیم آرتینی چپ نیز به طور مشابه قابل بیان می باشد) نتیجه می گیریم که S نیم آرتینی چپ نیست. ■

مراجع

[1] Camillo V. P. and Fuller K. R. (1974) *On loewy length of rings.* Pacific J. of Math., 53, pp 347-354.

[2] Ecevit Ş. and Koşan M. T. (2009) *On rings all of whose modules are retractable.* Tomus, 45, pp 71–74.

[3] Ghirati M. and Karamzadeh O.A.S. (2008) *On strongly essential submodules.* Communications In Algebra, 36, pp 564-580.

[4] Goodearl K. R. (2004) *An introduction to noncommutative Noetherian rings.* London Mathematical Society Student Texts, 61, Cambridge University Press, Cambridge. , 4, 9, 31

[5] Haghany A, Karamzadeh O. A. S. and Vedadi M. R. (2009) *Rings with all finitely generated modules retractable.* Bull. of Iran. Math. Soc., 35, 2, pp 37-45.

[6] Hrbacek K, Jech T. J. (1984) *Introduction to set theory / Karel Hrbacek, Thomas Jech* 3 rd ed., rev. and expanded. M. Dekker, New York. 37

[7] Hungerford T. W. (1989) *Algebra.* Grad. Texts in Math. 73, Springer-Verlag, New York. , 11

[8] Kiyosi Ito (ed.) (1987) *Encyclopedic dictionary of mathematics.* Second Edition, by the Mathematical Society of Japan, The MIT Press, Cambridge, MA. 37

[9] Lam T.Y. (1991) *A firstcourse in noncommutative rings.* Springer Inc. 71

[10] Lam T.Y. (1998) *Lectures on modules and rings.* Springer Verlag.

[11] Vedadi M. R. (2007) *Essentially retractable modules.* J. Sci. Islam. Repub. Iran, 18, pp 355-369.

Abstract

In this thesis, we are investigating the retractablity and right and left semi-artinianity of skew polynomials rings. Several characterizations of a ring R is given for which any non-zero finitely generated module M is retractable in the sense that $Hom_R(M, N)$ is non-zero whenever N is a non-zero submodule of M. Such rings are called finite retractable. It is shown that any ring being Morita equivalent to a commutative ring is finite retractable. Also, if the commutative ring is semi-Artinian then any non-zero module is retractable. The class of (finite) retractable rings is shown to be closed under Morita equivalence.

Keywords: *Skew polynomials ring, semi-artinian ring, retractable module, retractable ring, essentially retractable module, finitely retractable ring.*

Shahrood University of Technology
Department of Mathematics

M.S. Thesis

Finite retractablity of skew polynomial ring

By:

Hamid Rreza Ellahi

Supervisor:

Ebrahim Hashemi

Advisor:

Ahmad Zireh

January 2012