

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

مساله مکانیابی خط در صفحه

دانشجو: مهدی گلپایگانی

استاد راهنما:

دکتر جعفر فتحعلی

استاد مشاور:

دکتر محمد آرشی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

آذر ماه ۱۳۹۰

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به

باران عشق و دریای محبت

پدر و مادر عزیزم

راهنمایان فداکار زندگی‌ام

تشکر و قدردانی

خدای متعال را به عظمت و کبریایی اش می‌ستایم، همو که خالق این بنده و همیشه راهنما و یاور من در سخت‌ترین لحظات زندگی و همچنین در این تحقیق بوده است.

مجموعه حاضر مدیون حمایت و تلاش بزرگوارانی است که در جهت پیشبرد این تحقیق مرا از الطاف بی‌دریغ خویش بهره‌مند ساخته‌اند و بر خود لازم می‌دانم که تلاش ایشان را با بضاعتی اندک ارج نهم. از پدر و مادر عزیزم که همواره در تمامی عرصه‌های زندگی پشتیبان و مشوق من بوده‌اند تشکر می‌کنم.

از استاد راهنمای ارجمندم، **جناب آقای دکتر فتحعلی** به پاس کوشش‌ها و رهنمودهای بی‌شائبه‌شان در طول این دوره تشکر و قدردانی می‌کنم. کاملاً واقفم که بدون هدایت، حمایت و همفکری ایشان این تحقیق سرانجام نمی‌یافت.

از استاد مشاور گرامی ام، **جناب آقای دکتر آرشی** به علت رهنمودهای ارزشمندشان در مسیر انجام این تحقیق قدردانی می‌کنم.

از اساتید محترم، **جناب آقای دکتر زعفرانی** و **جناب آقای دکتر زیره** نیز به جهت مطالعه و داوری این پایان‌نامه کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در نهایت از تمامی دوستان و هم‌دوره‌ای های عزیزم که در تدوین و انجام این پایان‌نامه به من یاری رساندند صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایم.



چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا به معرفی مفاهیم اساسی مورد نیاز و مقدمه ای بر مسائل مکانیابی می‌پردازیم. در ادامه، مکانیابی خط در صفحه را بیان کرده سپس به بیان خواص این مساله با استفاده از نرم‌های مختلف می‌پردازیم و قضایای مربوط به آن را بررسی می‌کنیم. همچنین مکانیابی خط در فضای سه بعدی را بیان می‌کنیم و حالات مختلف این مساله را مورد بررسی قرار داده، به معرفی الگوریتم‌های ارائه شده برای این مسائل می‌پردازیم. در ادامه، مکانیابی خط نیمه ناخوشایند را معرفی کرده و با استفاده از الگوریتم بهینه سازی پرندگان (PSO) و خواص مسائل مکانیابی خط نیمه ناخوشایند یک الگوریتم برای مکانیابی خط میانه نیمه ناخوشایند ارائه می‌کنیم و نتایج محاسباتی آن را بدست می‌آوریم و نشان می‌دهیم می‌توان این الگوریتم را به عنوان یک الگوریتم کارا برای مسائل مکانیابی خط میانه نیمه ناخوشایند در نظر گرفت.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

[1] Mehdi Golpayegani, Jafar Fathali, Iman khosravian "A particle swarm optimization method for semi-obnoxious median line location problem", *submitted*.

[۲] مهدی گلپایگانی، جعفر فتحعلی، (۱۳۸۹). "مساله مکان‌یابی خط و کاربرهای آن". اولین همایش ملی الکترونیکی نقش ریاضی در توسعه علوم، مجتمع آموزش عالی جهرم.

[۳] مهدی گلپایگانی، جعفر فتحعلی، (۱۳۹۰) "مساله مکان‌یابی خط نیمه ناخوشایند". چهارمین کنفرانس بین‌المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات، دانشگاه گیلان.

[۴] مهدی گلپایگانی، جعفر فتحعلی، (۱۳۹۰). "مساله مکان‌یابی خط در صفحه با وزن‌های مثبت و منفی"، چهل و دومین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه ولی عصر (عج).

فهرست مندرجات

فصل اول: مقدمه و تعاریف

۱-۱- مقدمه.....	۲
۲-۱- اهداف مسائل مکانیابی.....	۵
۳-۱- فضای مسائل مکانیابی.....	۷
۴-۱- مکانیابی خط.....	۸
۵-۱- انواع مکانیابی خط.....	۱۱
۱-۵-۱- مکانیابی خط محدود شده.....	۱۱
۲-۵-۱- مساله مکانیابی خط (با وزن مثبت).....	۱۲
۳-۵-۱- مکانیابی خط ناخوشایند.....	۱۲
۶-۱- تعاریف.....	۱۳

فصل دوم: مکانیابی خط در صفحه

۱-۲- مقدمه.....	۱۷
۲-۲- فرمول بندی ریاضی مساله.....	۱۷
۳-۲- خواص مساله با نرم اقلیدسی.....	۱۸
۴-۲- مکانیابی خط با استفاده از نرم مستطیلی.....	۲۴
۵-۲- مکانیابی یک خط با نرم های دلخواه.....	۲۷
۶-۲- الگوریتم ها و نتایج.....	۴۰

فصل سوم: مکانیابی خط در فضای سه بعدی

۱-۳- مقدمه.....	۴۳
۲-۳- فرمول بندی مساله.....	۴۴
۳-۳- فواصل اندازه گیری.....	۴۶
۴-۳- نتایج نظری.....	۵۱
۵-۳- روش های بررسی موضعی.....	۵۹
۱-۵-۳- حالت اقلیدسی.....	۶۰

۶۱.....	۳-۵-۲- حالت p نرم.....
۶۳.....	۳-۵-۳- حالت مستطیلی.....

فصل چهارم: مکانیابی خط نیمه ناخوشایند

۶۶.....	۴-۱- مقدمه.....
۶۶.....	۴-۲- مساله مکانیابی خط نیمه ناخوشایند با نرم اقلیدسی.....
۷۲.....	۴-۳- مساله مکانیابی خط نیمه ناخوشایند با نرم مستطیلی.....

فصل پنجم: روش بهینه سازی پرندگان (PSO) برای حل مساله مکانیابی خط

۷۷.....	۵-۱- مقدمه.....
۸۰.....	۵-۲- مفاهیم الگوریتم PSO.....
۸۰.....	۵-۳- الگوریتم بهینه سازی پرندگان (PSO).....
۸۵.....	۵-۴- مراحل اجرای الگوریتم.....
۹۰.....	۵-۴-۱- شبه کد الگوریتم PSO.....
۹۱.....	۵-۵- الگوریتم PSO برای مساله مکانیابی خط نیمه ناخوشایند.....
۹۴.....	۵-۶- نتایج محاسباتی.....
۹۸.....	نتیجه گیری و پیشنهادات.....
۱۰۰.....	کتابنامه.....
۱۰۴.....	واژه نامه.....

فهرست اشکال

شکل ۱-۲.....	۳۰
شکل ۱-۴.....	۶۹
شکل ۲-۴.....	۷۱
شکل ۱-۵ - همکاری گروهی ماهیان جهت یافتن غذا.....	۷۸
شکل ۲-۵ - حرکت دسته جمعی ماهیان جهت حفاظت خود در برابر دشمنان و گمراه نمودن آنها.....	۷۹
شکل ۳-۵ - حرکت V شکل پرندگان در زمان مهاجرت.....	۷۹
شکل ۴-۵ - نمایش چگونگی حرکت ذرات در الگوریتم PSO.....	۸۹

فهرست جداول

جدول ۵-۱- نتایج محاسباتی برای مسائل با وزن مثبت..... ۹۶

جدول ۵-۲- نتایج محاسباتی برای مسائل با وزن های مثبت و منفی..... ۹۷

فصل اول

مقدمه و تعاریف

۱-۱ مقدمه

مکانیابی^۱ به بیان ساده، یعنی یافتن یک یا چند مکان مناسب با در نظر گرفتن شرایط حاکم بر مساله. اما مسائل مکانیابی بطور دقیق تر مسائلی هستند که در آن‌ها به دنبال یافتن محل و نحوه قرار گرفتن بهینه یک یا چند فعالیت معین (سرویس دهنده) بر اساس عوامل یا متغیرهای موثر بر مکانیابی هستیم. در این مسائل فرض بر این است که تعدادی مشتری یا سرویس گیرنده موجودند و می‌خواهیم بهترین و مطلوب‌ترین مکان برای استقرار سرویس دهندگان جدید را بیابیم به طوری که هزینه‌ها، تاثیرات محیطی نامطلوب، زمان سرویس دهی، سود، ... بسته به شرایط مساله بهینه گردند. در سالهای اخیر مطالعات مکانیابی یکی از عناصر کلیدی در موفقیت و بقای مراکز صنعتی است. مطالعات مکانیابی هم در سطح ملی و هم در سطح بین المللی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. در این میان شناخت هدف‌ها و روش‌های حل مسائل مکانیابی از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است.

مکانیابی از جمله علوم کاربردی است که توجه به آن سبب کاهش هزینه‌ها و موفقیت واحدهای صنعتی می‌شود. مکانیابی مراکز را انتخاب مکان برای یک یا چند مرکز، با در نظر گرفتن سایر مراکز و محدودیت‌های موجود می‌دانند بگونه‌ای که هدف ویژه‌ای بهینه شود. این هدف می‌تواند هزینه حمل و نقل، ارائه خدمات عادلانه به مشتریان، در دست گرفتن بزرگترین بازار و غیره باشد. در واقع هدف از مکانیابی تسهیلات و زیرساخت‌ها، خدمت رسانی به مجموعه‌ای از نقاط تقاضا (مشتری) از طریق ایجاد یا بهره‌برداری از مجموعه‌ای از نقاط سرویس‌دهی (تسهیلات^۲) است به نحوی که دسترسی مشتریان به تسهیلات با کمترین هزینه و بصورت کارا انجام پذیرد. فاصله‌ها در مساله استاندارد مکانیابی تسهیلات در فضای متریک محاسبه می‌شوند. هزینه ایجاد یا بهره‌برداری از هر یک از تسهیلات تابعی است از نقطه‌ای که تسهیلات مذکور در آن واقع شده است.

^۱Location

^۲Facility

در برخی گونه‌ها ممکن است هزینه‌های ایجاد یا بهره‌برداری تسهیلات در همه نقاط یکسان فرض شود (مساله مکانیابی تسهیلات با هزینه یکسان). در حالت کلی یک روش برای حل مساله مکانیابی تسهیلات این است که یک زیر مجموعه از تسهیلات برای خدمت رسانی انتخاب شود. راه حل مورد نظر همچنین تعیین می‌کند کدام نقطه تقاضا (مشتری) توسط چه نقطه سرویس دهنده خدمت می‌گیرد. پارامترهایی از قبیل متحرک یا ثابت بودن تسهیلات، محدودیت تعداد تسهیلات، محدودیت تعداد تقاضاهایی که می‌توانند از یک سرویس دهنده خدمت بگیرند و...، گونه‌های مختلفی از مساله مکانیابی تسهیلات را بوجود می‌آورند که با توجه به کاربرد آن‌ها در دنیای واقعی، برای تحقیقات و ارائه راه حل‌های نزدیک به بهینه مورد توجه و جالب هستند.

زمان پیدایش مسائل مکانیابی به اوایل قرن هفدهم و مساله‌ای که فرما^۳ مطرح کرد بر می‌گردد. مساله‌ای که فرما مطرح کرد به این صورت است: "یک مثلث را در نظر بگیرید که وزن هر یک از رئوس آن +۱ باشد. نقطه چهارم را به گونه‌ای پیدا کنید که مجموع فواصل وزنی آن تا رئوس مثلث کمینه گردد. توریچلی^۴ مشاهده کرد که محل برخورد دایره‌های محیطی مثلث‌های متساوی الاضلاعی که بر روی اضلاع مثلث اصلی و رو به بیرون آن ساخته می‌شوند، جواب مساله است. نظریه مکانیابی که ما امروزه با آن سروکار داریم، اولین بار با انتشار کتاب آلفرد وبر^۵ در سال ۱۹۰۹ بوجود آمد. اما مطالعات جدی‌تر بر روی مسائل مکانیابی از زمانی آغاز شد که حکیمی [1] در سال ۱۹۶۴ تابع هدف را به دو صورت کمترین مجموع^۶ و مینیماکس^۷ مطرح کرد. او همچنین در ادامه تحقیقات خود مطالعاتی بر روی مسائل مکانیابی روی شبکه انجام داد که یک نقطه شروع برای مکانیابی گسسته مدرن به شمار می‌آید. معمولاً در مسائل مکانیابی سرویس دهندگانی که می‌خواهیم مکان استقرار آن‌ها را بیابیم، مطلوب در نظر گرفته می‌شوند و تنها تاثیرات مثبت شان را به حساب می‌آوریم. بنابراین

^۳Fermat

^۴Torricelli

^۵Alfred Weber

^۶Minisum

^۷Minimax

نزدیک بودن به آن‌ها نوعی جاذبه و دوری از آن‌ها دافعه، تلقی می‌شود. در جوامع مدرن و پیشرفته امروزی با فعالیت‌ها و سرویس دهندگانی رو برو هستیم که علاوه بر ارائه خدمات، تاثیرات منفی و مخربی نیز بر محیط پیرامون خود دارند. کارگاه‌های تولیدی مثال آشکار این مورد هستند. کارگاه کالای مورد نیاز جامعه را تولید کرده و از طرف دیگر آلاینده محیط زیست است. مراکز ورزشی در عین حال که باید در دسترس باشند و امکانات ورزشی و تفریحی مناسب را ارائه دهند، می‌توانند تاثیرات منفی همچون سر و صدا، ازدحام جمعیت و یا مشکلاتی از این قبیل را داشته باشند.

مطالعه مدل‌هایی که هر دو ویژگی را به طور همزمان در خود دارند، انطباق بیشتری با مسائل واقعی و کاربردی دارد و به سرعت در حال پیشرفت است. از دهه ۱۹۶۰ تا اواسط ۱۹۷۰ مدل‌های کمترین مجموع در بخش‌های خصوصی و مدل‌های مینیماکس در بخش عمومی به کار گرفته می‌شد. از اواسط ۱۹۷۰ این موضوع تغییر کرد. این دسته از مدل‌ها که بعداً مدل‌های مکانیابی مضر^۸ نام گرفتند توسط گلدمن و دیرینگ [2]، چرچ و گارفینکل [3] معرفی شدند. در این دسته مدل‌ها، مشتریان فرض مطلوب بودن سرویس دهنده‌ها را کنار می‌گذارند و دیگر سعی در نزدیکتر بودن به آن‌ها را نداشته و تا حدی از آنها دوری می‌کنند. به عنوان کاربردی از این مدل‌ها می‌توان به مکانیابی راکتورهای هسته‌ای، مراکز تصفیه آب و اماکن دفن زباله اشاره کرد. در حقیقت ویژگی‌های این نوع سرویس دهندگان نوعی دافعه ایجاد می‌کند و سبب می‌شود که مشتریان آن‌ها را از خود دور کنند طبقه بندی این‌گونه مدل‌های مکانیابی ابتدا توسط هندلر و میرچندانی [4] ارائه شد. پس از آن طبقه بندی‌های دیگری توسط هاماکر و نیکل [5] و نیز ارکوت و نیومن [6] انجام شده است.

^۸Obnoxious

۲-۱ اهداف مسائل مکانیابی

مسائل مکانیابی هدف‌های مختلفی را در بردارند. هدف‌ها در شناسایی و اولویت بندی معیارهای تصمیم‌گیری در یک مساله مکانیابی و زیر معیارهای آن‌ها، اهمیت و نقش مهمی دارند. در یک تقسیم بندی، هدف‌های مسائل مکانیابی با رویکرد برنامه ریزی ریاضی و برحسب انواع تابع هدف، به سه دسته تقسیم می‌شوند [7].

(۱) **اهداف کششی**^۹: این هدف‌ها اشاره به نزدیکی هر چه بیشتر محل استقرار تسهیل به مشتریان و کمتر کردن مسافت دارند که شامل قدیمی‌ترین مسائل مکانیابی می‌شوند. در واقع مسائلی که تابع هدف آن‌ها به صورت کمینه سازی است، هدف‌های کششی دارند.

(۲) **اهداف فشاری**^{۱۰}: این هدف‌ها مسائل مکانیابی مراکز نامطلوب را در برمی‌گیرند و از اوایل دهه ۱۹۷۰ بوجود آمده‌اند. هدف در این مسائل حداکثر کردن فاصله مراکز جدید از مراکز موجود است. مدل‌هایی که برای این نوع هدف‌ها ارائه شدند به مدل‌های مکانیابی مضر معروف شدند که همانطور که گفته شد یافتن مکان مناسب برای دفن زباله یکی از مثال‌های آن است که در آن یکی از هدف‌ها بیشینه کردن فاصله این مکان از مناطق مسکونی است.

(۳) **اهداف متعادل**^{۱۱}: هدف‌هایی هستند که تلاش در متعادل کردن مسافت بین مراکز و مشتریان دارند و هدف اصلی آن‌ها دستیابی به برابری است. این هدف‌ها بیشتر در تصمیم‌گیری‌های عمومی کاربرد دارند، جایی که هدف، برقراری عدالت بین افراد است. مانند متعادل کردن حجم کاری مراکز پلیس که سبب متعادل شدن ارائه خدمات به متقاضیان می‌شود.

حال در ادامه به معرفی دو نوع از انواع مسائل مکانیابی که ما در ادامه با آن‌ها بیشتر سروکار داریم می‌پردازیم:

^۹Pull

^{۱۰}Push

^{۱۱}Balancing

(۱) مساله p میانه^{۱۲} (مساله وبر): مساله وبر به این صورت است که فرض کنید n نقطه p_1, p_2, \dots, p_n در صفحه داده شده است و متناظر با هر راس یک وزن تخصیص داده شده است. اگر وزن مثبت باشد یعنی هزینه با افزایش فاصله، زیاد می شود و اگر منفی باشد یعنی با افزایش فاصله، هزینه کم می شود. هدف پیدا کردن مکان یک سرویس دهنده جدید است به قسمی که مجموع وزنی فاصله بین سرویس دهنده جدید و نقاط موجود کمینه گردد، یعنی

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n w_i d(x, p_i)$$

که در آن x ، سرویس دهنده جدید است.

w_i ، وزن متناظر با نقطه i است.

$d(x, p_i)$ فاصله بین نقطه p_i و سرویس دهنده جدید است.

همچنین اگر هدف پیدا کردن مکان p سرویس دهنده جدید باشد، آن گاه این مساله را مساله p - میانه می نامیم.

(۲) مساله p مرکز^{۱۳}: فرض کنید n نقطه p_1, p_2, \dots, p_n در صفحه داده شده است و متناظر با هر راس یک وزن تخصیص داده شده است. در مساله مرکز هدف پیدا کردن نقطه ای مانند x است به قسمی که فاصله وزنی x تا دورترین نقطه موجود می نیمم شود. یعنی اگر فاصله x تا p_i را w_i به-

صورت $d(x, p_i)$ نمایش دهیم آن گاه مساله به صورت زیر است

$$\min \max_{i=1,2,\dots,n} w_i d(x, p_i)$$

در این حالت که تابع هدف به صورت مینیماکس است، مساله را مساله مرکز می نامند. همچنین اگر هدف پیدا کردن مکان p وسیله جدید باشد آن گاه این مساله، مساله p - مرکز نامیده می شود.

^{۱۲}P-median

^{۱۳}P-center

در واقع این گونه مسائل برای استقرار خدمات اورژانس مانند آتش‌نشانی، خدمات آمبولانس و مراکز پلیس در جامعه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱-۳ فضای مسائل مکانیابی

۱. پیوسته: هرگاه فضای مکان تاسیسات و نقاط تقاضا پیوسته باشند، یعنی توسط

متغیرهایی که به صورت پیوسته تغییر می‌کنند، نظیر مختصات مشخص شود، مدل را پیوسته گویند. در این مدل‌ها مکان سرویس دهنده را در فضای d بعدی R^d پیدا می‌کنیم. اکثر مسائل مکانیابی در فضای حداقل دو بعدی تعریف می‌شوند. مسائل دو بعدی به خاطر ویژگی‌های هندسی و قابلیت ادراک بصری شان بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرند. در مواجهه با مسائل پیوسته از ابزارهای هندسه و آنالیز (آنالیز تابعی، که معمولاً از ویژگی‌های تحدب و تقعر استفاده می‌شود) بهره می‌بریم.

۲. گسسته: مدل‌های مکانیابی گسسته مدل‌هایی هستند که در آن‌ها باید مکان سرویس

دهندگان را تنها روی نقاط از پیش تعیین شده پیدا کنیم. در این مدل‌ها مجموعه‌ای

متناهی از نقاط کاندیدا شده است که توسط متغیرهای گسسته نشان داده می‌شوند.

در مدل‌های مکانیابی پیوسته برخلاف مدل‌های گسسته نمی‌توان لیست کامل و جامعی از

نقاط در دسترس را ارائه داد. از این جهت، مدل‌های پیوسته را مدل‌های ایجاد مکان^{۱۴} و مدل

گسسته را مدل‌های انتخاب مکان^{۱۵} خوانده‌اند.

حال در ادامه به معرفی مساله مکانیابی خط و تاریخچه آن می‌پردازیم:

^{۱۴}Location

^{۱۵}Allocation

۴-۱ مکانیابی خط

مساله مکانیابی خط^{۱۶} یک شاخه از مکانیابی تسهیلات است که در آن به جای یافتن یک نقطه می‌خواهیم یک خط را مکانیابی کنیم. در واقع هدف یافتن یک خط راست در صفحه یا فضا است به طوری که مجموع فواصل وزنی یا ماکزیمم فاصله وزنی نقاط داده شده تا خط مورد نظر می‌نیمم شود، که حالت اول را مساله خط میانه و حالت دوم را مساله خط مرکز گویند. در واقع تفاوت مساله مکانیابی با مساله مکانیابی خط در این است که در مساله مکانیابی یک مجموعه نقاط داریم و به دنبال یافتن مکان بهینه یک نقطه هستیم اما در مساله مکانیابی خط، می‌خواهیم با توجه به یک مجموعه نقاط، یک خط راست را مکانیابی کنیم. مساله مکانیابی خط در صفحه اولین بار در سال ۱۹۷۵ توسط ولسفسکی [8] مطرح شد و تا به امروز پژوهش‌ها در این راستا ادامه دارد.

مساله مکانیابی خط همانند سایر شاخه‌های دیگر مساله مکانیابی، کاربردهای فراوانی دارد. برای مثال ایجاد راه‌آهن، بزرگراه‌ها، جاده‌ها در نزدیکی شهرها که نقش مهمی را در حمل و نقل ایفا می‌کنند، همچنین مسیریابی لوله‌ها از جمله گاز، آب،... که از نیازهای ضروری جامعه امروز بشر هستند نمونه‌هایی از کاربردهای مکانیابی خط هستند. مساله‌های مکانیابی خط نه تنها در تحقیق در عملیات و تئوری مکانیابی کاربرد دارد بلکه در آمار پایدار و در هندسه محاسباتی مانند بازشناسی و در کاتگوری^{۱۷} نیز کاربرد دارد. در آمار مساله‌های مکانیابی خط به صورت مساله‌های رگرسیون خط شناخته می‌شوند یا بصورت مساله‌های برازش l_1 یا برازش l_∞ مطرح می‌شوند و در هندسه محاسباتی عمدتاً کلی سازی با مساله‌های مکانیابی ابرصفحه مدنظر است. چون مساله‌های تقریب کمترین توان‌های دوم (مساله‌های رگرسیون خطی) بسیار مشهورند و برای بیشتر آن-

^{۱۶}Line Location Problem

^{۱۷}Category

ها حساب مقدماتی و تکنیک‌های جبری برای حل وجود دارد، آن‌ها هرگز در این پایان‌نامه مورد بحث قرار نمی‌گیرند.

حال به بیان تعاریفی که در مساله مکانیابی خط با آن‌ها سروکار داریم می‌پردازیم:

- **وزن:** در مساله مکانیابی خط، وزن یک معیار عددی برای تشخیص اهمیت نقاط است. مثلا اگر هدف ما ایجاد یک بزرگراه در نزدیکی شهرها باشد، وزن نقاط را می‌توان تعداد ساکنان آن شهرها در نظر گرفت.
- **تابع هدف:** در این قسمت توابع هدف مورد استفاده در مدل‌های مکانیابی خط را معرفی می‌کنیم که انتخاب این توابع به هدفی که تصمیم گیرنده دنبال می‌کند بستگی دارد و عبارتند از تابع هدف کمترین مجموع و تابع هدف مینیماکس که اولی خط را بگونه‌ای مکانیابی می‌کند که مجموع فواصل وزنی کمینه شود و نوع مینیماکس به دنبال مکانیابی خطی است که به همه نقاط نزدیک باشد.
- **تابع فاصله:** فاصله یک معیار عددی برای تشخیص میزان دور بودن اشیا است. قابل توجه است که در حالت پیوسته باید یک تابع برای تخمین فاصله بین نقاط انتخاب شود که نحوه انتخاب یک تابع مناسب، خود موضوع مقالات زیادی در زمینه مکانیابی پیوسته بوده است. با توجه به موقعیت و شرایط مسئله اندازه‌های مختلفی برای ارزیابی فاصله به کار می‌روند. استفاده از روند نرم‌های تصحیح شده^{۱۸} به عنوان تابع تخمین فاصله در یک مسئله مکانیابی با فضای پیوسته اولین بار توسط لائو و موریس [7] پیشنهاد شد. وارد و وندل [9-10] نیز استفاده از نرم‌های بلوکی^{۱۹} را مورد مطالعه قرار دادند. برای اندازه‌گیری فاصله بین خط و نقاط معمولا از مترهای زیر استفاده می‌شود.

^{۱۸}Round norm

^{۱۹}Block norm

۱. **نرم l_2 (اقلیدسی^۲):** فاصله بین دو نقطه $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ در صفحه با

استفاده از این نرم به صورت زیر است:

$$l_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

۲. **نرم l_1 (مستطیلی یا منهتن^۳):** فاصله بین دو نقطه $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ در

صفحه با استفاده از این نرم به صورت زیر است:

$$l_1(x, y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

۳. **نرم بلوکی:** نرم های بلوکی نرم هایی هستند که گوی یکه آن ها چند وجهی است. برای

مثال گوی واحد نرم اقلیدسی به شکل دایره است. نرم های L_1, L_∞ دو مثال از نرم های

بلوکی هستند. این نرمها برای مدل کردن فاصله در مسائلی که محدود به حرکت در

جهت های از پیش تعیین شده هستیم، مناسب اند. همچنین کاربرد های زیادی در

مسائل مکانیابی با مانع دارند. نرم بلوکی بردار x را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\|x\|_B = \min \left\{ \sum_{g=1}^r \lambda_g \mid x = \sum_{g=1}^r \lambda_g b_g \right\}$$

که نقاط $g = 1, \dots, r$ و b_g و $-b_g$ ، نقاط گوشه ای چند ضلعی کانتور واحد آن نرم هستند.

قابل توجه است که انتخاب نوع فضا و متر مناسب به نظر تصمیم گیرنده بستگی دارد. مثلا در یک

شهر ممکن است که انتخاب فاصله مستطیلی دقت بسیار زیادی در تخمین فاصله واقعی بین دو نقطه

از آن فاصله را داشته باشد. عمدتا شهرهایی که دارای خیابان های عمود برهم و توری شکل هستند در

این دسته قرار می گیرند.

نرم مستطیلی برای مدل کردن فاصله های خیابانی (به شرطی که خیابان ها یکطرفه نباشند) و فاصله

اقلیدسی برای مدل کردن فاصله های هوایی یا دریایی مناسب است.

^۲Euclidean

^۳Manhatan

۱-۵ انواع مکانیابی خط

۱-۵-۱. مکانیابی خط محدود شده:

در صورتی که نظریه مکانیابی را برای مدل کردن مسائل واقعی بکار می‌بریم اغلب مجبور به حساب کردن محدودیت‌ها برای مجموعه جواب‌های شدنی هستیم. چنین قیود اضافی اغلب کل ساختار مدل را تغییر می‌دهد و از این رو بسیاری از نتایج تئوری ممکن است در عمل غیر مفید باشد. بنابراین در مسائل مکانیابی کلاسیک، تئوری مکانیابی بسیاری از مقالات، در رابطه با انواع مختلفی از محدودیت‌ها است. یک نوع از محدودیت که بکار می‌آید، معرفی منطقه ممنوعه R (مجموعه محدود نام دارد) برای استقرار دستگاه‌های جدید می‌باشد. در واقع ناحیه ممنوعه R می‌تواند یک دریاچه، مانع طبیعی یا یک مرکز صنعتی باشد. برای حالت مکانیابی خط، یک منطقه ممنوعه R نباید با دستگاه خطی شکل جدید اشتراک داشته باشد. به جای جستجوی یک منطقه ممنوعه باید خط را در ناحیه L مکانیابی کنیم. یعنی مجموعه‌ای مانند F را می‌یابیم، به طوری که $F \cap L \neq \emptyset$ باشد. در حالتی که خط مجبور به عبور از میان یک نقطه ویژه p باشد، آن را مکانیابی خط لنگر^{۲۲} می‌نامند، که برای تابع هدف میانه و فاصله اقلیدسی بررسی شده است [11].

برای فرمول‌بندی مساله مکانیابی خط محدود شده، فرض کنید R منطقه‌ای در صفحه باشد که نباید با هیچ خطی اشتراک داشته باشد. آن‌گاه مساله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min f(L) \\ \text{s.t. } L \cap R = \emptyset \end{aligned}$$

این مسائل برای فواصل قائم، با استفاده از دوگان هندسی حل شده است که در آن خطوط به نقاط منتقل می‌شوند و نقاط به خطوط و نتایج آن نسبت به سایر نرم‌ها از جمله نرم‌های بلوکی و سایر نرم-های دلخواه قابل تعمیم می‌باشد [12].

^{۲۲}Anchor Line

۱-۵-۲ مساله مکانیابی خط (با وزن های مثبت):

یک مجموعه از نقاط با وزن مثبت را در صفحه یا فضا در نظر بگیرید. در مسائل مکانیابی خط، هدف یافتن یک خط راست در صفحه یا فضا می باشد به طوری که مجموع فواصل وزنی یا ماکزیمم فاصله وزنی نقاط تا این خط می نیمم شود. در این مسائل محدودیتی در صفحه یا فضا در نظر گرفته نمی شود یعنی مانند حالت قبل با هیچ ناحیه ممنوعه ای مواجه نیستیم. همچنین وزن مثبت نقاط نشان دهنده مطلوب بودن نقاط است و لذا بهتر است خط بهینه تا حد امکان به این نقاط نزدیک باشد. در این پایان نامه به این دسته از مسائل مکانیابی خط می پردازیم.

۱-۵-۳ مکانیابی خط ناخوشایند^{۲۳} (با وزن منفی):

اگرچه نظریه مکانیابی ریشه در قرن هفدهم دارد ولی مسائل مکانیابی که شامل سرویس دهندگان نامطلوب می باشند، تقریباً از اوایل دهه ۱۹۷۰ مورد بررسی قرار گرفته اند دلیل این امر ناشی از پیشرفت های تکنولوژیکی و صنعتی سازی است [13].

در مسائل مکانیابی خط ناخوشایند، مجموعه ای از نقاط موجود هستند که تحت تاثیرات منفی خط قرار دارند و هدف، می نیمم کردن این تاثیرات است. یعنی خط مورد نظر باید تا جایی که امکان دارد از نقاط موجود دور باشد. همانطور که می دانیم در مباحث بهینه سازی و تحقیق در عملیات، از جمله در مسائل مکانیابی خط، داشتن جواب نامتناهی بی معنی است، لذا برای جلوگیری از داشتن چنین جوابی در مسائل مکانیابی خط ناخوشایند، خط بهینه بگونه ای در نظر گرفته می شود که باید پوسته محدب نقاط مفروض را قطع کند و برقراری این شرط برای مسائل مکانیابی خط ناخوشایند ضروری است. از کاربردهای این مساله می توان به تعیین خطوطی که برای بعضی نقاط مضر است مانند ریلهای راه آهن که مثلاً باید از بیمارستانها دور باشند اشاره کرد.

در ادامه به بیان برخی از تعاریف که در فصل های بعد با آنها سروکار داریم، می پردازیم.

^{۲۳}Obnoxious Line Location Problem

۱-۶ تعاریف

تعریف 1-6-1. به ازای هر دو بردار x, y در R^n ، حاصل ضرب داخلی را با $x \cdot y$ نشان داده و به صورت زیر محاسبه می کنند

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

تعریف 1-6-2. به ازای هر $x \in R^n$ ، نرم x را با $\|x\|$ نشان داده و عبارت است از

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف 1-6-3. فرض کنید $u \in R^n$ یک بردار باشد. سوی بردار u ، برداری هم جهت با بردار u و بطول

$$\lambda_{\bar{u}} = \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}$$
 واحد است که معمولاً آن را بصورت $\lambda_{\bar{u}}$ نمایش می دهند و برابر است با

تعریف 1-6-4. فرض کنیم U و V دو فضای برداری باشند. در این صورت تابع $T: U \rightarrow V$ را یک تبدیل

خطی نامیم اگر به ازای هر $u_1, u_2 \in U$ داشته باشیم

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) \quad (۱)$$

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) \quad (۲)$$

که در آن $\alpha \in R$.

تعریف 1-6-5. اگر $T: U \rightarrow V$ یک تبدیل خطی و $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ و $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ به-

ترتیب پایه های مرتب برای دو فضای U و V باشند و $T(u_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} v_j$ ، در این صورت ماتریس

$$A = (a_{ji})_{m \times n}$$
 را ماتریس تبدیل خطی T نسبت به دو پایه α و β می نامند.

تعریف 1-6-6. اگر $T: U \rightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد آن گاه فضای پوچی T را با $\text{Ker } T$ نشان داده و

برابر است با

$$\text{Ker } T = \{u \in U; T(u) = \bar{0}\}$$

تعریف 7-6-1. تابع $d: E \times E \rightarrow R$ را یک تابع فاصله یا متریک روی E می‌نامیم هرگاه d در شرایط زیر صدق کند:

$$(1) \quad d(x, y) \geq 0 \text{ و } d(x, y) = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = y.$$

$$(2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (نابرابری مثلثی)}$$

در این وضع جفت مرتب (E, d) (یا به اختصار، E) را یک فضای متریک و هر $x \in E$ را یک نقطه می‌نامیم. اگر $x, y \in E$ ، عدد نامنفی $d(x, y)$ فاصله x و y نام دارد.

تعریف 8-6-1. مجموعه $E \subseteq R^k$ را محدب می‌نامیم هرگاه:

$$\forall x, y \in E, \forall 0 < \lambda < 1; \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in E$$

به عبارت دیگر باید معادله خط واصل دو نقطه x و y ، یعنی $\lambda x + (1 - \lambda)y$ درون مجموعه E قرار بگیرد.

تعریف 9-6-1. یک مجموعه از نقاط در صفحه را در نظر بگیرید. منظور از پوسته محدب نقاط، کوچکترین مجموعه محدب شامل آن نقاط است.

تعریف 10-6-1. فرض کنیم a نقطه‌ای در R^n باشد. مجموعه $\{x \in R^n; d(x, a) < r\}$ را یک گوی باز به مرکز a و شعاع r می‌نامیم و آن را با $B_r(a)$ نشان می‌دهیم.

تعریف 11-6-1. بازه $I \subseteq R$ و تابع $f: I \rightarrow R$ مفروض‌اند. می‌گوییم f تابعی محدب است، هرگاه به ازای هر $x, y \in I$ و هر $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم:

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

اگر به ازای هر $x \neq y$ و هر $0 < \lambda < 1$ نامساوی

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

برقرار باشد، می‌گوییم f اکیدا محدب است.

می‌گوییم $f: I \rightarrow R$ تابعی مقعر (اکیدا مقعر) است هرگاه f - تابعی محدب (اکیدا محدب) باشد.

تعریف 1-6-12. یک ابر صفحه در E^n مفهوم خط مستقیم در E^2 و مفهوم صفحه در E^3 را کلیت می‌بخشد. یک ابر صفحه H یک مجموعه به صورت $\{x: px = k\}$ است که در آن p یک بردار ناصفر در E^n است و k یک اسکالر است. در این جا p را معمولاً نرمال یا گرادیان ابر صفحه می‌گویند. به بیان دیگر، یک ابر صفحه شامل تمام نقاط $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ است که در معادله $\sum_{j=1}^n p_j x_j = k$ صدق می‌کنند.

فصل دوم

مکانیابی خط در صفحه

۱-۲ مقدمه

مکانیابی خط، یک شاخه از مکانیابی تسهیلات کلاسیک است. یک مجموعه $\varepsilon_x = \{E_{x_1}, E_{x_2}, \dots, E_{x_n}\}$ از تسهیلات موجود در صفحه با وزنه‌های نامنفی w_m ، $m \in M = \{1, 2, \dots, n\}$ داریم که نشانگر اهمیت تسهیلات موجود است. در این مساله به جای یافتن یک نقطه منحصر به فرد می‌خواهیم یک خط را مکانیابی کنیم. تابع هدف مشابه مکانیابی تسهیلات کلاسیک است، یعنی مینیمم کردن فواصل (میانگین فواصل یا بیشترین فاصله) میان تسهیلات موجود و خطی که می‌خواهیم آن را مکانیابی کنیم. مساله‌ی مکانیابی خط در حالت دو بعدی اولین بار توسط ولسفسکی در سال ۱۹۷۵ بصورت تئوری مطرح شد [8] سپس توسط موریس و نوریک در سال‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۸۳ توسعه یافت [14, 11] و تاکنون این پژوهش‌ها ادامه دارد. کاربردهای این مساله عبارتند از: طراحی راه آهن یا بزرگراه جدید که نقاط موجود می‌توانند شهرها باشند و وزن نقاط را تعداد ساکنان شهرها در نظر می‌گیریم. مکانیابی خط در فضای دو بعدی، همچنین می‌تواند جهت مسیریابی لوله‌ها، زهکشی یا آبیاری نهرها و طراحی نوار نقاله بکار رود [15].

۲-۲ فرمول بندی مساله مکانیابی خط

فرمول بندی ریاضی مساله مکانیابی خط در صفحه به صورت زیر است:

یک تابع فاصله d **Error! Bookmark not defined.** و مجموعه اندیس گذار $M = \{1, 2, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\varepsilon_x = \{E_{x_1}, E_{x_2}, \dots, E_{x_n}\}$ مجموعه تسهیلات موجود باشد بطوری که برای هر $E_{x_m} = (a_{m_1}, a_{m_2})$ ، $w_m \geq 0$ وزن‌های نامنفی باشند. هدف پیدا کردن خط $L_{p,s} = \{x : x = p + \lambda s, \lambda \in R\}$ است بطوری که یکی از توابع هدف زیرمی‌نیمم شود:

مساله خط میانه:

یا

مساله خط مرکز:

که در آن $d(E_{x_m}, L) = \min_{p \in L} d(E_{x_m}, p)$ فاصله نقطه‌ی مفروض تا خط را نشان می‌دهد. خطوط بهینه را به ترتیب، خط میانه و خط مرکز می‌نامیم. همچنین $W = \sum_{m \in M} w_m$ را مجموع وزن‌ها تعریف می‌کنیم.

۲-۳ خواص مساله با نرم اقلیدسی

برای این مساله با نرم اقلیدسی، گزاره‌های زیر برقرارند.

قضیه 2-3-1[14]: هر خط بهینه در مساله خط میانه، حداقل از یک نقطه از نقاط مفروض عبور می‌کند.

برهان: فرض کنیم L^* یک خط بهینه باشد و از هیچ نقطه‌ای عبور نکند. فرض کنیم مجموع وزن نقاط در دو طرف خط L^* به ترتیب W_1 و W_2 باشد و همچنین $W_1 \geq W_2$. L^* را به موازات خودش به اندازه $\varepsilon > 0$ به سمت W_1 آنقدر حرکت می‌دهیم تا اینکه یکی از نقاط روی خط بیفتد. این نقطه را b و خط جدید را L' می‌نامیم. مجموع وزن نقاط در دو طرف خط L' را به ترتیب با W_1' و W_2' نشان می‌دهیم. داریم $W_1' = W_1 - w_b$ و $W_2' = W_2$ حال با محاسبه تابع هدف به ازای خط L' داریم:

$$\begin{aligned} f(L') &= \sum_{m \in W_1'} w_m d(E_{x_m}, L') + \sum_{m \in W_2'} w_m d(E_{x_m}, L') \\ &= \sum_{m \in W_1} w_m (d(E_{x_m}, L^*) - \varepsilon) + \sum_{m \in W_2} w_m (d(E_{x_m}, L^*) + \varepsilon) - d(b, L^*) w_b \\ &= f(L^*) + \varepsilon \left(\sum_{m \in W_2} w_m - \sum_{m \in W_1} w_m \right) - \varepsilon w_b \\ &= f(L^*) + \varepsilon (W_2 - W_1) - \varepsilon w_b < f(L^*) \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که ما خطی مانند L' یافتیم که مقدار تابع هدف به ازای آن از مقدار $f(L^*)$ کمتر است و از آنجا که تابع هدف میانه از نوع می‌نیم سازی است لذا رابطه اخیر با بهینگی L^* تناقض دارد

بنابراین فرض خلف باطل است، و نتیجه می‌گیریم هر خط بهینه از مساله خط میانه حداقل از یک نقطه می‌گذرد. □

قضیه 2-3-2 (Med1): [16] یک خط میانه گذرنده از حداقل دو تا از نقاط مفروض وجود دارد.

برهان: فرض کنیم $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ مجموعه نقاط موجود در صفحه باشند. قبلاً ثابت کردیم که حداقل یک نقطه روی هر خط میانه وجود دارد. بنابراین بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم که نقطه (x_1, y_1) روی خط قرار دارد. حال دستگاه مختصات دکارتی را به نقطه (x_1, y_1) انتقال می‌دهیم یعنی $x_1 = y_1 = 0$. به عبارت دیگر می‌توانیم مساله را بصورت یافتن یک خط راست به شکل $ax + by = 0$ که مجموع فواصل وزنی نقاط (x_i, y_i) ، $(i = 2, \dots, n)$ ، تا خط را می‌نیمیم می‌کند در نظر بگیریم. فاصله میان یک نقطه (x_i, y_i) و خط $ax + by = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)، برابر است با:

$$\frac{|ax_i + by_i|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

بنابراین می‌خواهیم تابع $f(a, b) = \sum_{i=2}^n w_i |ax_i + by_i|$ را با توجه به محدودیت $a^2 + b^2 = 1$ می‌نیمیم کنیم. فرض کنیم (a^*, b^*) یک جواب بهینه برای مساله بهینه سازی که ما مطرح کردیم باشد. با فرض:

$$S^+ = \{i, 2 \leq i \leq n, a^* x_i + b^* y_i \geq 0\} \text{ و } S^- = \{i, 2 \leq i \leq n, a^* x_i + b^* y_i \leq 0\}$$

داریم:

$$\begin{aligned} f(a^*, b^*) &= \sum_{i \in S^+} w_i (a^* x_i + b^* y_i) - \sum_{i \in S^-} w_i (a^* x_i + b^* y_i) \\ &= \left(\sum_{i \in S^+} w_i x_i - \sum_{i \in S^-} w_i x_i \right) a^* + \left(\sum_{i \in S^+} w_i y_i - \sum_{i \in S^-} w_i y_i \right) b^* \end{aligned}$$

حال فرض کنید α و β به ترتیب نمایانگر ضرایب a^* و b^* در معادله اخیر باشند یعنی $f(a^*, b^*) = \alpha a^* + \beta b^*$. یک شرط ضروری برای اینکه (a^*, b^*) ، $f(a, b)$ را می‌نیمیم کند (به شرطی که $a^2 + b^2 = 1$) این است که جواب مساله می‌نیمیم سازی زیر نیز باشد:

$$\min_{a,b} \alpha a + \beta b$$

s.t

$$ax_i + by_i \geq 0$$

$$ax_i + by_i \leq 0$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

حال اگر به ازای بعضی i ها که $(2 \leq i \leq n)$ داشته باشیم $a^* x_i + b^* y_i = 0$ ، آنگاه قضیه برقرار است زیرا خط $a^* x + b^* y = 0$ از (x_1, y_1) و (x_i, y_i) می‌گذرد لذا فرض کنیم برای تمام i ها که $(2 \leq i \leq n)$ ، $a^* x_i + b^* y_i \neq 0$. پس بوضوح محدودیت های $(i \in S^+) ax_i + by_i \geq 0$ و $(i \in S^-) ax_i + by_i \leq 0$ در نقطه (a^*, b^*) تلاقی ندارند. این ایجاب می‌کند که (a^*, b^*) در واقع یک جواب بهینه برای مساله می-نیمم سازی $\alpha a + \beta b$ تنها با قید $a^2 + b^2 = 1$ است. توجه کنید تحت فرض‌های موجود $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ، زیرا در غیر این صورت داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 0, \beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0$$

9

$$\alpha = 0 \Rightarrow \sum_{i \in S^+} w_i x_i - \sum_{i \in S^-} w_i x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i \in S^+} w_i x_i = \sum_{i \in S^-} w_i x_i$$

$$\beta = 0 \Rightarrow \sum_{i \in S^+} w_i y_i - \sum_{i \in S^-} w_i y_i = 0 \Rightarrow \sum_{i \in S^+} w_i y_i = \sum_{i \in S^-} w_i y_i$$

با ضرب معادله اول در a و معادله دوم در b داریم:

$$\sum_{i \in S^+} w_i a x_i + \sum_{i \in S^+} w_i b y_i = \sum_{i \in S^-} w_i a x_i + \sum_{i \in S^-} w_i b y_i \Rightarrow \sum_{i \in S^+} w_i (a x_i + b y_i) = \sum_{i \in S^-} w_i (a x_i + b y_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in S^+} w_i (a x_i + b y_i) = \sum_{i \in S^-} w_i (a x_i + b y_i) = 0 \xrightarrow{w_i > 0} \begin{cases} a x_i + b y_i = 0 (i \in S^+) \\ a x_i + b y_i = 0 (i \in S^-) \end{cases}$$

و این یعنی به ازای تمام i ها $a^* x_i + b^* y_i = 0$ که این تناقض است زیرا فرض کرده بودیم

$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \text{ بنابراین } (2 \leq i \leq n), a^* x_i + b^* y_i \neq 0$$

با حل مساله می نیمم سازی $\alpha a + \beta b$ با قید $a^2 + b^2 = 1$ با استفاده از روش لاگرانژ داریم:

$$F(a, b) = \alpha a + \beta b + \lambda(a^2 + b^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = 0 \rightarrow \alpha + 2a\lambda = 0 \Rightarrow a = -\frac{\alpha}{2\lambda} \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 0 \rightarrow \beta + 2b\lambda = 0 \Rightarrow b = -\frac{\beta}{2\lambda} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow a^2 + b^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\lambda^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, b = \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

مقدار تابع هدف به ازای این می نیمم موضعی برابر است با: $\alpha a^* + \beta b^* = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 0$

که این تناقض است زیرا $\alpha a^* + \beta b^* = \sum_{i=2}^n w_i |a^* x_i + b^* y_i| \geq 0$ بنابراین به ازای حداقل یک

$(2 \leq i \leq n) i$ داریم $a^* x_i + b^* y_i = 0$ یعنی حداقل دو نقطه روی خط میانه وجود دارد و

این برهان قضیه را کامل می کند. □

قضیه 2-3-3 (Med2): [15] هر خط میانه L^* در روابط زیر صدق می کند:

$$\sum_{E_{x_m} \in \beta_L^{*-}} w_m \leq \frac{W}{2}$$

$$\sum_{E_{x_m} \in \beta_L^{*+}} w_m \leq \frac{W}{2}$$

که β_L^{*+} و β_L^{*-} دو نیم صفحه از R^2 هستند که بوسیله خط L^* جدا

شده اند (بدون خود خط L^*).

برهان: فرض کنیم که $\{E_{x_m}; m = 1, 2, \dots, n\}$ مجموعه نقاط مفروض و L^* خط بهینه باشد.

به فرض خلف $\sum_{E_{x_m} \in \beta_{L^*}^-} w_m > \frac{W}{2}$. مجموع وزن نقاط در $\beta_{L^*}^+$ را با W_1 و مجموع وزن نقاط در $\beta_{L^*}^-$ را با W_2 نشان می‌دهیم. بنا بر فرض خلف $W_2 > W_1$ ، $\varepsilon > 0$ را به اندازه‌ای کوچک انتخاب می‌کنیم که با انتقال خط L^* به موازات خودش به اندازه ε به سمت $\beta_{L^*}^-$ ، خط جدید که آن را L' می‌نامیم هیچ نقطه‌دیگری از نیم صفحه $\beta_{L^*}^-$ را شامل نشود. داریم:

$$\begin{aligned} f(L') &= \sum_{E_{x_m} \in \beta_{L^*}^+} w_m d(L', E_{x_m}) + \sum_{E_{x_m} \in \beta_{L^*}^-} w_m d(L', E_{x_m}) \\ &= \sum_{E_{x_m} \in \beta_{L^*}^+} w_m d((L^*, E_{x_m}) + \varepsilon) + \sum_{E_{x_m} \in \beta_{L^*}^-} w_m d((L^*, E_{x_m}) - \varepsilon) \\ &= \sum_{E_{x_m} \in \beta_{L^*}^+} w_m d(L^*, E_{x_m}) + \sum_{E_{x_m} \in \beta_{L^*}^-} w_m d(L^*, E_{x_m}) + \varepsilon \left(\sum_{E_{x_m} \in \beta_{L^*}^+} w_m - \sum_{E_{x_m} \in \beta_{L^*}^-} w_m \right) \\ &= f(L) + \varepsilon(W_1 - W_2) \xrightarrow{W_1 - W_2 < 0} f(L') < f(L^*) \end{aligned}$$

که این تناقض با بهینگی L^* است بنابراین فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود. \square

قضیه 2-3-4(Cen1): [11] یک خط مرکز وجود دارد که در حداکثر فاصله از حداقل سه تا از تسهیلات موجود قرار دارد.

برهان: فرض کنیم $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ مجموعه نقاط موجود در صفحه باشند و معادله خط به شکل $y = sx + b$ باشد. چون با نرم اقلیدسی سروکار داریم، فاصله نقاط (x_j, y_j) از خط به

$$\text{صورت} \left| \frac{y_j - sx_j - b}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right| \text{ می‌باشد. مساله زیر را در نظر بگیرید:}$$

$$\min_{s,b} m_p(s,b);$$

$$m_p(s,b) = \max \left\{ w_j \frac{|y_j - sx_j - b|}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}, j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

این مساله را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \min_{z,s,b} Z \\ & s.t \\ & w_j \frac{|y_j - sx_j - b|}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \leq Z \end{aligned}$$

مطابق شرایط تجزیه‌ای که توسط فرانسیس، لاو و راتلیف ارائه شده است [17]، مساله اخیر معادل است با:

$$\begin{aligned} & \min_{z,s} Z; \\ & s.t \\ & \left(\frac{w_j w_k}{w_j + w_k} \right) \left| \frac{(y_j - y_k) - s(x_j - x_k)}{(s^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right| \leq Z \end{aligned}$$

سمت چپ نامساوی فوق، فاصله وزنی نقطه $P_{jk} = (x_j - x_k, y_j - y_k)$ تا خط $y = sx$ است. بوضوح مقدار بهینه Z توسط دو نقطه (مثلا P_{ij} و P_{kl} که دارای فاصله وزنی یکسانی تا خط می‌باشند) تعیین می‌شود. حداقل سه تا از اندیس‌های i و j و k و l متفاوتند. از مساله دوم نتیجه می‌شود:

$$w_i |y_i - s_p x_i - b_p| = w_j |y_j - s_p x_j - b_p| = w_k |y_k - s_p x_k - b_p| = w_l |y_l - s_p x_l - b_p|$$

بنابراین حکم ثابت می‌شود. □

قضیه 2-3-5(Cen2): [11] اگر تمام وزن‌ها مساوی باشند، یک خط مرکز وجود دارد که شیب آن با شیب یکی از وجه‌های پوسته محدب نقاط موجود برابر است.

برهان: پوسته محدب نقاط در واقع کوچکترین مجموعه محدب شامل همه نقاط است. در قضیه قبل نشان دادیم یک خط مرکز وجود دارد که در حداکثر فاصله از حداقل سه تا از نقاط موجود قرار دارد.

از این سه نقطه حداقل دو تا در یک طرف خط و در یک راستا قرار دارند که دارای فاصله یکسانی تا خط می‌باشند. خط واصل بین این دو نقطه، یک وجه از پوسته محدب نقاط را تشکیل می‌دهد که بوضوح این وجه دارای شیب یکسان با خط می‌باشد. □

۲-۴ مکانیابی خط با استفاده از نرم مستطیلی

در مساله مکانیابی خط در صفحه نرم‌های مختلفی برای تعیین فاصله بین نقاط مفروض و خط مورد نظر بکار می‌رود. یکی از این نرم‌ها نرم مستطیلی یا منهتن است که با l_1 نشان داده می‌شود. از آنجا که کانتور l_1 به شکل لوزی است، لذا برای تعیین فاصله بین نقطه و خط مفروض، می‌توان لوزی واحد احاطه کننده نقطه را آنقدر بزرگ کنیم تا خط را لمس کند. حال می‌نیم اندازه قطرهای لوزی حاصل، فاصله نقطه از خط با استفاده از نرم مستطیلی است. برای تعیین فاصله بین یک نقطه و یک خط راست در صفحه با استفاده از نرم l_1 به این صورت نیز می‌توان عمل کرد: از نقطه مفروض یکبار موازی محور افقی و یکبار موازی محور قائم حرکت می‌کنیم تا این که خط مورد نظر را قطع کند، فواصل بدست آمده را به ترتیب فاصله افقی و فاصله قائم نقطه تا خط می‌نامیم. می‌نیم فاصله افقی و قائم، فاصله نقطه مفروض تا خط مورد نظر را بدست می‌دهد. بیان ریاضی این موضوع به صورت زیر است:

با استفاده از فواصل مستطیلی و یک خط $L := \{(x_1, x_2) : x_2 = \tilde{s}x_1 + b\} \subset \mathbb{R}^2$ (که $\tilde{s}, b \in \mathbb{R}$) داریم:

$$l_1(E_{x_m}, L) = \min \{d_{hor}(E_{x_m}, L), d_{ver}(E_{x_m}, L)\}$$

که $d_{hor}(E_{x_m}, L)$ و $d_{ver}(E_{x_m}, L)$ به ترتیب فاصله افقی و قائم نقاط از خط می‌باشند که با توجه به معادله خط به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$d_{hor}(E_{x_m}, L) = \frac{1}{|\tilde{s}|} |\tilde{s}a_{m_1} - a_{m_2} + b|$$

$$d_{ver}(E_{x_m}, L) = |\tilde{s}a_{m_1} - a_{m_2} + b|$$

زیرا فرض کنیم $E_{m_1} = \begin{pmatrix} a_{m_1} \\ a_{m_2} \end{pmatrix}$ یک نقطه در صفحه مختصات باشد. با در نظر گرفتن معادله خط L ,

حال اگر به ترتیب موازی محورهای قائم و افقی حرکت کنیم تا خط L را قطع کند، نقاط

دو نقطه در صفحه با استفاده از نرم l_1 داریم: $E'_{m_1} = \begin{pmatrix} a_{m_1} \\ \tilde{s}a_{m_1} + b \end{pmatrix}$ و $E''_{m_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{s}}(a_{m_2} - b) \\ a_{m_2} \end{pmatrix}$ بدست می‌آیند. بنابراین با استفاده از فرمول فاصله بین

دو نقطه در صفحه با استفاده از نرم l_1 داریم:

$$d_{ver}(E_{x_m}, L) = l_1(E_{m_1}, E'_{m_1}) = |a_{m_1} - a_{m_1}| + |a_{m_2} - \tilde{s}a_{m_1} - b| = |\tilde{s}a_{m_1} - a_{m_2} + b|$$

$$d_{hor}(E_{x_m}, L) = l_1(E_{m_1}, E''_{m_1}) = \left| a_{m_1} - \frac{1}{\tilde{s}}(a_{m_2} - b) \right| + |a_{m_2} - a_{m_2}| = \frac{1}{|\tilde{s}|} |\tilde{s}a_{m_1} - a_{m_2} + b|$$

توجه کنید که هریک از d_{hor} و d_{ver} تنها به شیب خط وابسته است و نسبت به نقاط و همچنین b مستقل می‌باشند.

حال گزاره‌هایی که در مساله مکانیابی خط با استفاده از نرم اقلیدسی به آن‌ها اشاره شد را با استفاده از نرم l_1 مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای اثبات گزاره‌ها برای فواصل مستطیلی کفایت نشان دهیم که این گزاره‌ها برای فواصل قائم و افقی برقرارند. این گزاره‌ها را به صورت لم بیان می‌کنیم.

لم 2-4-1: به ازای d_{ver} ، گزاره‌های Med1 و Cen1 و Cen2 برقرارند.

اثبات Med1 در [16] آمده است. اثبات های Cen1 و Cen2 نیز در رساله دکترای شاموس [18] آمده است.

لم 2-4-2: [15] به ازای d_{ver} ، Med2 برقرار است.

اثبات: فرض کنید $L := \{(x_1, x_2) : x_2 = \tilde{s}x_1 + b\}$ خط بهینه باشد ولی برای این خط بهینه داشته

باشیم؛ $\sum_{m: a_{m_2} > \tilde{s}a_{m_1} + b} w_m > \frac{1}{2}W$ (فرض خلف)، لذا $\sum_{m: a_{m_2} \leq \tilde{s}a_{m_1} + b} w_m < \frac{1}{2}W$ با فرض

$h = \min \{a_{m_2} - \tilde{s}a_{m_1} - b ; a_{m_2} > \tilde{s}a_{m_1} + b\} \in R$ داریم $h > 0$ و نیز خواهیم داشت:

$$\{m : a_{m_2} > \tilde{s}a_{m_1} + b\} = \{m : a_{m_2} > \tilde{s}a_{m_1} + b + h\}$$

با در نظر گرفتن $L_h := \{(x_1, x_2) : x_2 = \tilde{s}x_1 + b + h\}$ داریم:

$$\begin{aligned} f(L_h) &= \sum_{m: a_{m_2} > \tilde{s}a_{m_1} + b} w_m |\tilde{s}a_{m_1} - a_{m_2} + b + h| + \sum_{m: a_{m_2} \leq \tilde{s}a_{m_1} + b} w_m |\tilde{s}a_{m_1} - a_{m_2} + b + h| \\ &= \sum_{m: a_{m_2} > \tilde{s}a_{m_1} + b} w_m (|\tilde{s}a_{m_1} - a_{m_2} + b| - h) + \sum_{m: a_{m_2} \leq \tilde{s}a_{m_1} + b} w_m (|\tilde{s}a_{m_1} - a_{m_2} + b + h|) \\ &= f(L) + h \underbrace{\left(\sum_{m: a_{m_2} \leq \tilde{s}a_{m_1} + b} w_m - \sum_{m: a_{m_2} > \tilde{s}a_{m_1} + b} w_m \right)}_{< 0} < f(L) \end{aligned}$$

که این تناقض با بهینگی L دارد. بنابراین فرض خلف باطل است و حکم ثابت می شود. □

تذکر: لم 1-4-2 و لم 2-4-2 به ازای فاصله افقی d_{hor} نیز برقرارند بنابراین می توان نتیجه گرفت با

استفاده از نرم مستطیلی l_1 تمامی گزاره های Cen1 و Med1 و Cen2 و Med2 برقرارند.

۲-۵ مکانیابی یک خط با نرم‌های دلخواه

فرض کنید B یک مجموعه محدب فشرده در صفحه و شامل مبدا در درونش باشد. بعلاوه فرض کنید B نسبت به مبدا قرینه باشد و x یک نقطه در صفحه باشد. یک نرم روی دایره واحد B به صورت $\gamma_B(x) := \min \{|\lambda| : x \in \lambda B\}$ تعریف می‌شود. از سوی دیگری دانیم که تمام نرم‌ها را می‌توان با دایره واحد مشخص کرد [19]. لازم به یادآوری است که فاصله بین یک نقطه E_{x_m} در صفحه و خط $L = L_{p,s} := \{x \in R^2 : x = \lambda s + p, \lambda \in R\}$ به صورت $d(E_{x_m}, L) = \min_{p \in L} d(E_{x_m}, p)$ تعریف می‌شود. در [16] نشان داده شده است که مکانیابی r خط در صفحه برای تمام فواصل مشتق شده از نرم‌ها، NP سخت^{۲۴} است. در ادامه ثابت می‌کنیم که برای $r=1$ ، این مساله حل پذیر چندجمله‌ای است. به عنوان اولین نتیجه، توجه کنید که برای تعیین فاصله بین یک نقطه E_{x_m} و خط L ، می‌توانیم دایره واحد دور E_{x_m} را بزرگ کنیم تا اینکه با خط مماس شود یعنی برای نقطه $p \in L$ داریم:

$$d(E_{x_m}, p) = \min \{|\lambda| ; p - E_{x_m} \in \lambda B\}$$

لم 2-5-1: [15] برای هر نرم d با دایره واحد B ، هر خط L و هر نقطه E_{x_m} در صفحه رابطه زیر برقرار است:

$$d(E_{x_m}, L) = \min \{|\lambda| : (E_{x_m} + \lambda B) \cap L \neq \emptyset\}$$

^{۲۴}NP- hard

برهان:

$$\begin{aligned}
 d(E_{x_m}, L) &= \min_{p \in L} d(E_{x_m}, p) \\
 &= \min_{p \in L} \min \{ |\lambda| : p - E_{x_m} \in \lambda B \} \\
 &= \min_{p \in L} \min \{ |\lambda| : p \in \lambda B + E_{x_m} \} \\
 &= \min \{ |\lambda| : \exists p \in L; p \in \lambda B + E_{x_m} \} \\
 &= \min \{ |\lambda| : (E_{x_m} + \lambda B) \cap L \neq \emptyset \}
 \end{aligned}$$

و این برهان قضیه را کامل می کند. □

فرض کنید d متریک دلخواه مشتق شده از یک نرم باشد. مساله عبارت است از

یافتن یک خط L که به ترتیب $f(L) = \sum_{m \in M} w_m d(E_{x_m}, L)$ یا $g(L) = \max_{m \in M} w_m d(E_{x_m}, L)$ را می نیمم

کند. همانطور که در [20] آمده است، می توانیم مسائل را به ترتیب به صورت $1L/p/./norm/\Sigma$ و

$1L/p/./norm/\max$ بنویسیم. به طور خلاصه یعنی می خواهیم با استفاده از متر گرفته شده از نرم و

می نیمم سازی $f(L)(\Sigma)$ یا $g(L)(\max)$ ، یک خط $(1L)$ را در صفحه (p) با هیچ گونه فرض خاصی

(\cdot) مکانیابی کنیم. برای این مسائل مکانیابی، ابتدا لازم است مساله مکانیابی دیگری را تعریف کنیم

که به سادگی قابل حل است.

تعریف 2-5-2: فرض کنید $t \in R^2$ یک جهت باشد، آن گاه برای دو نقطه x و y در صفحه تعریف

$$\gamma_t(x) := \begin{cases} |\alpha| & \text{if } x = \alpha t \\ \infty & \text{o.w} \end{cases} \quad \text{می کنیم: } d_t(x, y) := \gamma_t(y - x)$$

توجه کنید که γ_t می تواند بی نهایت شود بنابراین نرم نیست، اما برای هر $x, y \in R^2$ و $\alpha \in R$

- $\gamma_t(x) \geq 0$
- $\gamma_t(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\gamma_t(\alpha x) = |\alpha| \gamma_t(x)$

و نامساوی مثلث نیز برقرار است. در زیر فاصله بین یک نقطه E_{x_m} و خط L را تعریف می‌کنیم. این تعریف از تعریف 2-5-2 گرفته شده است که در لم بعدی واضح‌تر بیان خواهد شد.

تعریف 3-5-2: برای $E_{x_m} \in R^2$ و $t \in R^2$ و هر خط $L \subset R^2$ فرض کنید

$$d_t(E_{x_m}, L) := \min \{ |\lambda| : E_{x_m} + \lambda t \in L \}$$

همچنین اگر چنین λ ای یافت نشود آنگاه $d_t(E_{x_m}, L) = \infty$ در نظر گرفته می‌شود.

$d_t(E_{x_m}, L)$ به این معنی است که به اندازه کمترین مقدار $|\lambda|$ از نقطه $E_{x_m} \in R^2$ در جهت t حرکت کنیم تا اینکه خط L را قطع کند. در واقع $|\lambda|$ طول گام بوده و فاصله نقطه تا خط را در جهت t نشان می‌دهد.

لم 4-5-2: [15] برای تمام $t \in R^2$ و هر $E_{x_m} \in R^2$ داریم: $d_t(E_{x_m}, L) = \min_{p \in L} d_t(E_{x_m}, p)$

لازم به ذکر است این لم به ازای d های گرفته شده از نرم‌ها برقرار است اما به ازای تعریف شده، یک ادعاست و باید ثابت شود.

برهان: با استفاده از لم قبل و با فرض $B := \{X = \lambda t : |\lambda| \leq 1\}$ داریم:

$$\begin{aligned} d_t(E_{x_m}, L) &= \min \{ |\lambda| : E_{x_m} + \lambda t \in L \} \\ &= \min \{ |\lambda| : \exists p \in L; E_{x_m} + \lambda t = p \} \\ &= \min_{p \in L} \min \{ |\lambda| : E_{x_m} + \lambda t = p \} \\ &= \min_{p \in L} d_t(E_{x_m}, p) \end{aligned}$$

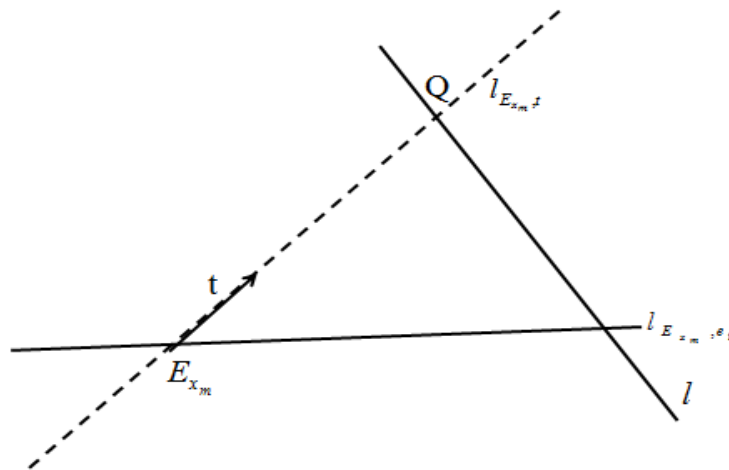
بدین ترتیب برهان قضیه کامل می‌شود. \square

اگر $L = L_{p,s}$ یک خط مستقیم و $l_2(t)$ طول اقلیدسی $t \in R^2$ باشد، داریم:

$$d_t(E_{x_m}, L) := \begin{cases} \frac{l_2(E_{x_m}, Q)}{l_2(t)} & \text{با } Q \in L \cap L_{E_{x_m}, t} ; \quad |L \cap L_{E_{x_m}, t}| = 1 \\ 0 & ; \quad |L \cap L_{E_{x_m}, t}| = \infty \\ \infty & ; \quad L \cap L_{E_{x_m}, t} = \emptyset \end{cases}$$

در واقع برای $L \cap L_{E_{x_m}, t}$ سه حالت در نظر گرفته می‌شود. حالت اول زمانی رخ می‌دهد که L و $L_{E_{x_m}, t}$ یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند که در این صورت، فاصله نقطه تا خط در جهت t برابر است با $\frac{l_2(E_{x_m}, Q)}{l_2(t)}$. و همچنین $d_t(E_{x_m}, L) = 0$ هرگاه L و $L_{E_{x_m}, t}$ یکدیگر را در بی‌نهایت نقطه قطع کنند به عبارتی برهم منطبق باشند. و حالت سوم زمانی اتفاق می‌افتد که L و $L_{E_{x_m}, t}$ هیچ نقطه تقاطعی نداشته باشند که در این حالت دو خط موازی نسبت به یکدیگر قرار دارند.

توجه کنید که $0 < d_t(E_{x_m}, L) < \infty$ اگر و تنها اگر s و t بردارهای مستقل خطی باشند زیرا بنا بر توضیحات فوق اگر $|L \cap L_{E_{x_m}, t}| \neq 1$ آن‌گاه L و $L_{E_{x_m}, t}$ یا بر هم منطبق‌اند و یا موازی‌اند که در هر صورت نشان می‌دهد s به عنوان شیب خط L و بردار t به عنوان جهت خط $L_{E_{x_m}, t}$ ، وابسته خطی هستند. شکل ۱-۲ مفهوم تعریف 2-5-3 را برای حالتی که L یک خط راست است نشان می‌دهد.



شکل ۱-۲

با توجه به مثال‌ها در می‌یابیم که فاصله افقی E_{x_m} تا L ، برابر است با $d_{e_1}(E_{x_m}, L) = d_{hor}(E_{x_m}, L)$ و فاصله قائم این نقطه تا خط به صورت $d_{e_2}(E_{x_m}, L) = d_{ver}(E_{x_m}, L)$ است که e_1 و e_2 بردارهای

واحداند یعنی $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ یعنی در جهت e_1 از نقطه E_{x_m} تا L حرکت

کنیم، کمترین مقدار $|\lambda|$ فاصله مورد نظر را نشان می‌دهد.

حال می‌توانیم مسائل مکانیابی زیر را تعریف کنیم:

برای یک $t \in R^2$ مفروض، خط L_t را که به ترتیب توابع $f(L_t) = \sum_{m \in M} w_m d_t(E_{x_m}, L_t)$ و

$$g(L_t) = \max_{m \in M} w_m d_t(E_{x_m}, L_t)$$
 می‌نیمم کند را بیابید.

به منظور تعمیم خواص Cen1 و Med1 و Cen2 و Med2 به ازای نرم‌های دلخواه، در ادامه ثابت خواهیم کرد برای هر فاصله d مشتق شده از نرم γ و هر خط با شیب ثابت s ، یک جهت $t \in R^2$ وجود دارد به طوری که برای هر $m \in M$ ، $d(E_{x_m}, L) = d_t(E_{x_m}, L)$ و این یعنی هنگام ارزیابی توابع هدف $f(L)$ و $g(L)$ ، می‌توان d را با d_t جایگزین کرد. لم بعدی نشان می‌دهد چگونه یک خط بهینه L_t^* وقتی که فاصله بکاررفته از نوع d_t باشد را بیابیم.

لم 2-5-5: [15] فرض کنید $p, q \in R^2$ و D یک تبدیل خطی باشد به طوری که

- 1) $D(p) = q$
- 2) $\det(D) \neq 0$

آن‌گاه برای هر $E_{x_m} \in R^2$ داریم: $d_q(D(E_{x_m}), D(L)) = d_p(E_{x_m}, L)$ که در آن $D(L) := \{D(p); p \in L\}$

برهان: برای اثبات لم، ابتدا نشان می‌دهیم برای نقاط $x, y \in R^2$ رابطه $d_q(D(x), D(y)) = d_p(x, y)$

برقرار است. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: $d_p(x, y) = \bar{\alpha} < \infty$ ، یعنی $x - y = \alpha p$ با $|\alpha| = \bar{\alpha}$ و داریم:

$$\begin{aligned}
d_q(D(x), D(y)) &= \gamma_q(D(y) - D(x)) \\
&= \gamma_q(D(y-x)) \\
&= \gamma_q(D(\alpha p)) \\
&= \gamma_q(\alpha D(p)) \\
&= \gamma_q(\alpha q) = |\alpha| = \bar{\alpha}
\end{aligned}$$

حالت ۲: $d_p(x, y) = \infty$ ؛ که در اینصورت $x-y$ و p مستقل خطی اند. از آنجا که فرض کردیم $\det(D) \neq 0$ ، پس نتیجه می‌گیریم که $D(x-y)$ و $D(p)$ نیز مستقل خطی اند، زیرا در غیر این صورت اگر فرض کنیم وابسته خطی باشند، مثلا اگر $D(x-y) = \alpha D(p)$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
D(x-y) - \alpha D(p) &= 0 \Rightarrow D(x-y) - D(\alpha p) = 0 \\
\Rightarrow D(x-y - \alpha p) &= 0
\end{aligned}$$

از آن‌جا که $\det(D) \neq 0$ ، بنابراین D معکوس پذیر است و $\ker(D) = 0$.

بنابراین:

$$x-y - \alpha p = 0 \Rightarrow x-y = \alpha p \Rightarrow d_p(x, y) = |\alpha|$$

که این متناقض با فرض اولیه می‌باشد، لذا $D(x-y) = q$ و $D(p) = q$ مستقل خطی اند، که نتیجه می‌-

$$d_q(D(x), D(y)) = \infty \text{ شود}$$

زیرا

$$d_q(D(x), D(y)) = \gamma_q(D(y) - D(x)) = \gamma_q(D(y-x)) = \infty$$

لذا نتیجه بوضوح برقرار است.

حال با استفاده از لم 2-5-4 می‌توانیم نتیجه بگیریم برای یک خط L و هر نقطه E_{x_m} :

$$d_q(D(E_{x_m}), D(L)) = \min_{p \in L} d_q(D(E_{x_m}), D(p)) = \min_{p \in L} d_p(E_{x_m}, p) = d_p(E_{x_m}, L)$$

که این برهان قضیه را کامل می‌کند. \square

ما می‌توانیم از این نتیجه برای تبدیل $1L/p./d_t/\Sigma$ و $1L/p./d_t/\max$ به مسائل خط قائم

متناظر که قبلا شرح داده شد استفاده کنیم. به عنوان یک نتیجه، قضیه زیر را داریم:

قضیه 2-5-6: [15] برای تمام فواصل d_t ، گزاره‌های Med1 و Med2 و Cen1 و Cen2 برقرارند.

برهان: با استفاده از لم 2-5-5 با $p = t$ و $q = e_2$ داریم

$$d_{e_2}(D(E_{x_m}), D(L)) = d_t(E_{x_m}, L) \quad (1-2)$$

به طوریکه برای توابع هدف $f(L)$ و $g(L)$ رابطه زیر برقرار است

$$D(L) \text{ برای } d_{ver} \text{ و } D(\varepsilon_x) \text{ بهینه است} \Leftrightarrow L \text{ برای } d_t \text{ و } \varepsilon_x \text{ بهینه است} \quad (2-2)$$

رابطه (2-2) همواره برقرار است زیرا اگر $D(L)$ به ازای d_{ver} و $D(\varepsilon_x)$ بهینه باشد، یعنی مقادیر توابع هدف f و g برای $D(L)$ می‌نیمم باشد، آن‌گاه این مقادیر نیز به ازای خط L و d_t و ε_x بهینه است در غیر این صورت با توجه به رابطه (1-2) با بهینگی $D(L)$ به تناقض می‌رسیم زیرا برای مثال فرض کنیم به ازای یک خط مانند L' و با در نظر گرفتن فاصله d_t ، تابع f که به صورت کمترین مجموع است، می‌نیمم شود آنگاه با توجه به رابطه (1-2)، تابع f به ازای $D(L)$ و d_{ver} نیز می‌نیمم خواهد شد که این با بهینگی $D(L)$ در تناقض است. عکس همین روابط نیز برقرار است.

(I) از لم 2-4-2 و 2-4-2 می‌دانیم که Med1 و Med2 و Cen1 و Cen2 برای d_{ver} برقرارند.

حال تنها باید نشان دهیم آن خواص با اعمال تبدیل D تغییر نمی‌کنند. به علت پیوستگی D داریم:

$$D(\partial(A)) = \partial(D(A)) \quad (3-2)$$

Med1: بواسطه (1-2) داریم:

$$E_{x_m} \in L \Leftrightarrow D(E_{x_m}) \in D(L) \quad (4-2)$$

و این بدین معنی است که $D(L)$ حداقل از دو نقطه متمایز $D(E_{x_k})$ و $D(E_{x_l})$ می‌گذرد اگر و فقط اگر L از حداقل دو تا از نقاط مفروض بگذرد. حال چون سمت راست رابطه (2) با d_{ver} برقرار است، بنا بر (3-2)، طرف چپ رابطه هم برای d_t برقرار است.

Med2: از آنجا که $\det(D) \neq 0$ پس؛

$$E_{x_m} \in \beta_L^- \Leftrightarrow D(E_{x_m}) \in D(\beta_L^-) \quad (5-2)$$

از (۳-۲) نتیجه می‌گیریم که $D(\beta_L^-) \in \{\beta_{D(L)}^+, \beta_{D(L)}^-\}$ و این بدین معنی است که دو نقطه E_{x_m} و E_{x_k} در یک طرف L قرار می‌گیرند اگر و فقط اگر $D(E_{x_k})$ و $D(E_{x_m})$ در یک طرف $D(L)$ قرار بگیرند حال با استفاده از (I)، چون سمت راست رابطه (۵-۲) با d_{ver} برقرار است، بنا بر (۲-۲)، طرف چپ رابطه هم برای d_t برقرار است.

Cen1: یک نتیجه که مستقیماً از (۱-۲) گرفته می‌شود این است که:

$$d_t(E_{x_k}, L) \geq d_t(E_{x_m}, L) \Leftrightarrow d_{e_2}(D(E_{x_k}), D(L)) \geq d_{e_2}(D(E_{x_m}), D(L)) \quad (۶-۲)$$

تاکید می‌شود که L در حداکثر فاصله از حداقل سه تا از نقاط مفروض است اگر و فقط اگر $D(L)$ در حداکثر فاصله از حداقل سه نقطه عضو $D(\varepsilon_x)$ باشد. با توجه به این رابطه و روابط (I) و (۲-۲) حکم نتیجه می‌شود.

Cen2: از (۳-۲) نتیجه می‌شود که f یک رویه از مجموعه A است اگر و فقط اگر $D(f)$ یک رویه $D(A)$ باشد. بواسطه رابطه (۱-۲)؛

$$d(E_{x_k}, L) = d(E_{x_m}, L) \quad \text{و فقط اگر} \quad d(D(E_{x_k}), D(L)) = d(D(E_{x_m}), D(L)) \quad \text{به-} \quad (۷-۲)$$

طوری‌که می‌توان نتیجه گرفت L شیب یکسان با یکی از رویه‌های پوسته محدب نقاط موجود (مثلاً بین E_{x_m} و E_{x_k}) دارد اگر و فقط اگر $D(L)$ شیب یکسان با یکی از رویه‌های پوسته محدب نقاط موجود تبدیل یافته $D(\varepsilon_x)$ بین $D(E_{x_k})$ و $D(E_{x_m})$ داشته باشد. به این ترتیب برهان قضیه کامل می‌شود. \square

با توجه به قضایای فوق برای حل مساله $1L/p./d_t/\Sigma$ بصورت زیر عمل می‌کنیم:

یک ماتریس D با $D(t) = e_2$ و $\det(D) \neq 0$ انتخاب می‌کنیم. سپس برای هر $m \in M$ تعریف می‌کنیم $D_{x_m} := D(E_{x_m})$. با مجموعه جدید از تسهیلات موجود D_{x_1} و D_{x_2} و ... و D_{x_n} ، مساله خط قائم را حل می‌کنیم. جواب بهینه را با L^* نشان می‌دهیم، آنگاه $D^{-1}(L^*)$ یک جواب بهینه

به طور مشابه می توان برای $1L/p./d_t/\max$ عمل کرد. در واقع ابتدا ثابت شد به ازای d_t ، خط بهینه موجود است و در گزاره ها صدق می کند، سپس با استفاده از رابطه (۲-۱) نحوه یافتن این خط بهینه به صورت تئوری شرح داده شد.

لم 2-5-7: [15] شیب $s \in R^2$ مفروض است. فرض کنید γ یک نرم باشد و بردار $t \in R^2$ ، $\gamma = \gamma_t$ باشد که s و t مستقل خطی هستند و فرض کنید $d(x, y) = \gamma(y - x)$ فاصله متناظر باشد. آنگاه ثابت $C := C(s, d, l_2)$ وجود دارد به طوری که برای هر $P \in R^2$ و هر $E_{x_m} \in R^2$ داریم:

$$d(E_{x_m}, L_{P,s}) = Cl_2(E_{x_m}, L_{P,s})$$

برهان: ابتدا $E_{x_m} = 0$ را در نظر بگیرید. برای یک نقطه ثابت P_0 که P_0 و s مستقل خطی هستند، می دانیم که $l_2(0, L_{P_0,s}) \neq 0$ و $d(0, L_{P_0,s}) < \infty$ (از آنجا که P_0 و s مستقل خطی اند، بنابراین P_0 صفر نیست یعنی $L_{P_0,s}$ از مبدا نمی گذرد، بنابراین $d(0, L_{P_0,s}) \neq 0$) و بنابراین یک عدد حقیقی $C \neq 0$ پیدا می کنیم به طوری که $d(0, L_{P_0,s}) = Cl_2(0, L_{P_0,s})$ ، لذا حکم به ازای $E_{x_m} = 0$ و نقطه ثابت P_0 برقرار است. اکنون خط $L = L_{P,s} \neq L_{P_0,s}$ را در نظر بگیرید. چون P_0 و s مستقل خطی اند، برای یک عدد حقیقی β ، خط L را می توان بصورت $L_{P,s}$ با $P = \beta P_0$ نوشت.

$$\begin{aligned} \beta d(0, L_{P_0,s}) &= \beta \min_{Q \in L_{P_0,s}} d(0, Q) = \min_{\alpha \in R} \beta d(0, \alpha s + P_0) \\ &= \min_{\alpha \in R} \beta \gamma(\alpha s + P_0) = \min_{\alpha \in R} \gamma(\beta \alpha s + \beta P_0) \\ &= \min_{\alpha' \in R} \gamma(\alpha' s + P) = d(0, L_{P,s}) \\ &\Rightarrow d(0, L_{P,s}) = \beta d(0, L_{P_0,s}) = \beta Cl_2(0, L_{P_0,s}) = Cl_2(0, L_{P,s}) \end{aligned}$$

به ازای $E_{x_m} = 0$ و نقطه دلخواه P نیز حکم برقرار است.

حال با بکارگیری معادله بالا برای d و l_2 ، برای هر نقطه $E_{x_m} = 0$ و $E_{x_m} \in R^2$ در نهایت داریم:

$$\begin{aligned}
d(E_{x_m}, L_{P,s}) &= \min_{Q \in L_{P,s}} d(E_{x_m}, Q) \\
&= \min_{\alpha \in R} d(E_{x_m}, \alpha s + P) \\
&= \min_{\alpha \in R} d(0, \alpha s + P - E_{x_m}) \\
&= d(0, L') \quad \text{با} \quad L' = \{x : x = \alpha s + P - E_{x_m}\} \\
&= Cl_2(0, L') \\
&= Cl_2(E_{x_m}, L_{P,s})
\end{aligned}$$

به این ترتیب حکم به ازای E_{x_m} و نقطه دلخواه P برقرار است و این برهان را کامل می‌کند. □
توجه کنید که در لم 7-5-2 از خواص فاصله اقلیدسی l_2 استفاده نشده است، لذا می‌توان l_2 را با هر فاصله دیگر که از یک نرم گرفته شده باشد یا با فواصل گرفته شده از γ_t که s و t مستقل خطی باشند جایگزین کرد. اگر d_1 و d_2 و d_3 این قبیل فواصل باشند، داریم:

$$C(s, d_1, d_2) = \frac{C(s, d_1, d_3)}{C(s, d_2, d_3)} \quad (۸-۲)$$

زیرا با فرض $d = d_1$ و استفاده از لم 7-5-2 و با فرض ؛

$$C_3 = C(s, d_2, d_3), C_2 = C(s, d_1, d_3), C_1 = C(s, d_1, d_2)$$

داریم:

$$d_1(E_{x_m}, L) = C_1 d_2(E_{x_m}, L) \quad (۹-۲)$$

$$d_1(E_{x_m}, L) = C_2 d_3(E_{x_m}, L) \quad (۱۰-۲)$$

$$d_2(E_{x_m}, L) = C_3 d_3(E_{x_m}, L) \quad (۱۱-۲)$$

حال با استفاده از تقسیم روابط (۹-۲) و (۱۰-۲) داریم؛

$$\frac{C_1 d_2(E_{x_m}, L)}{C_2 d_3(E_{x_m}, L)} = 1 \quad (۱۲-۲)$$

با جایگذاری رابطه (۱۱-۲) در رابطه (۱۲-۲) داریم؛

$$\frac{C_1 C_3}{C_2} = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{C_2}{C_3}$$

به عنوان مثال اگر $L = \{(x_1, x_2) : x_2 = \tilde{s}x_1 + b\}$ و $\tilde{s}, b \in R$ و $\tilde{s} \neq 0$ آن گاه:

$$C\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{s} \end{pmatrix}, d_{hor}, d_{ver}\right) = \frac{1}{|\tilde{s}|}$$

زیرا با فرض $C\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{s} \end{pmatrix}, d_{hor}, d_{ver}\right) = C$ و همچنین با توجه به تعاریف d_{hor} و d_{ver} از لم 7-5-2

داریم:

$$d_{hor}(E_{x_m}, L) = C d_{ver}(E_{x_m}, L) \Rightarrow \frac{1}{|\tilde{s}|} |\tilde{s}a_{m_1} - a_{m_2} + b| = C |\tilde{s}a_{m_1} - a_{m_2} + b|$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{|\tilde{s}|}$$

قضیه 8-5-2: [15] برای یک شیب مفروض $s \in R^2$ ، تمام خطوط میانه با شیب s ، یعنی خطوط

راست $L_{P^*,s}$ می‌نیمم کننده $\min_{P \in R^2} f(L_{P,s})$ ، برای تمام فواصل d مشتق شده از نرم‌ها و فواصل d_t ،

یکسان می‌باشند. این نتیجه همچنین برای خطوط مرکز با شیب ثابت s نیز برقرار است.

برهان: با توجه به لم 7-5-2 و با در نظر گرفتن رابطه $d(E_{x_m}, L_{P,s}) = Cl_2(E_{x_m}, L_{P,s})$ و این که می‌توان

l_2 را با هر فاصله دیگر که از یک نرم گرفته شده باشد یا با فواصل گرفته شده از γ_t که t و s

مستقل خطی باشند جایگزین کرد، به وضوح نتیجه می‌شود خطوط بهینه به ازای فواصل d که از نرم-

ها گرفته شده است و فواصل d_t ، یکسان می‌باشد. □

در لم زیر ارتباط میان هر نرم γ (با متر $d(x, y) = \lambda(y - x)$) و فواصل d_t ، به وضوح آمده است

لم 9-5-2: [15] فرض کنید γ یک نرم و d فاصله متناظرش باشد و فرض کنید $E_{x_m} \in R^2$ و L یک

خط راست باشد. در این صورت داریم:

$$d(E_{x_m}, L) = \min_{t \in R^2, \gamma(t)=1} d_t(E_{x_m}, L)$$

برهان: بواسطه لم 1-5-2 می‌دانیم که؛

$$d(E_{x_m}, L) = \min \{ |\lambda| : (E_{x_m} + \lambda B) \cap L \neq \emptyset \} =: \lambda^\circ$$

یعنی $t^\circ \in R^2$ با $\gamma(t^\circ) = 1$ وجود دارد به طوری که $E_{x_m} + \lambda^\circ t^\circ \in L$. توجه کنید که $\gamma(t) = 1$ اگر و فقط اگر $t \in \partial(B)$ (نشان دهنده کران مجموعه است). با استفاده از تعریف d_{t° که

$$d(E_{x_m}, L) = d_{t^\circ}(E_{x_m}, L), \text{ برای هر } t' \text{ با } \gamma(t') = 1 \text{ می توان نتیجه گرفت که:}$$

$$d_{t'}(E_{x_m}, L) = \min \{ |\lambda| : E_{x_m} + \lambda t' \in L \} \geq \min \{ |\lambda| : E_{x_m} + \lambda B \cap L \neq \emptyset \} = d(E_{x_m}, L)$$

لازم به ذکر است رابطه تساوی با استفاده از لم 1-5-2 بدست آمده است. به این ترتیب برهان کامل

می شود. \square

لم 10-5-2: [15] فرض کنید γ یک نرم و d فاصله متناظرش باشد. همچنین فرض کنید L یک خط

راست با شیب $s \in R^2$ باشد. در این صورت $t \in R^2$ وجود دارد به طوری که برای هر $E_{x_m} \in R^2$,

$$d(E_{x_m}, L) = d_t(E_{x_m}, L)$$

برهان: فرض کنید E_{x_m} یک نقطه مفروض ثابت باشد. بنا بر لم 7-5-2 می توان $u \in R^2$ یافت به-

طوری که $\gamma(u) = 1$ ، که برای هر $t \in R^2$ ؛

$$d(E_{x_m}, L) = d_u(E_{x_m}, L) \leq d_t(E_{x_m}, L)$$

حال فرض کنید $k \in M$ و $v \in R^2$ با $\gamma(v) = 1$ موجود باشد و

زیرا $d(E_{x_k}, L) = d_v(E_{x_k}, L) < d_u(E_{x_k}, L)$ باشد. توجه کنید که (u, s) و (v, s) مستقل خطی اند، زیرا

$d(E_{x_m}, L) \neq \infty$ ($d(E_{x_k}, L) \neq \infty$) با استفاده از لم 7-5-2 می دانیم که $C := C(s, d_u, d_v)$ وجود دارد

بطوریکه:

$$d_u(E_{x_k}, L) = C d_v(E_{x_k}, L) \quad (13-2)$$

و

$$d_u(E_{x_m}, L) = C d_v(E_{x_m}, L) \quad (14-2)$$

که با در نظر گرفتن $C \leq 1$ برای رابطه (۲-۱۳) و $C > 1$ برای رابطه (۲-۱۴)، به تناقض می‌رسیم. □

قضیه 2-5-11: [15] گزاره‌های Med1 و Med2 و Cen1 و Cen2 برای تمام فواصل مشتق شده از نرم‌ها برقرارند.

برهان:

Med1: فرض کنید L^* خط بهینه باشد اما از حداقل دو تا از نقاط موجود عبور نکند. بنا بر لم 2-5-9

برای هر $m \in M$ ، t^* را انتخاب کنید به طوری که

$$d(E_{x_m}, L^*) = d_{t^*}(E_{x_m}, L^*) \quad (۲-۱۵)$$

بواسطه قضیه 2-5-6 می‌دانیم Med1 برای $\sum / d_{t^*} / p / 1L$ برقرار است و می‌توانیم خط L°

می‌نیمز کننده فاصله d_{t^*} و گذرنده از حداقل دو تا از نقاط موجود مفروض را انتخاب کنیم.

حال دوباره برای هر $m \in M$ طبق لم 2-5-9، t° را طوری در نظر بگیرید که

$$d(E_{x_m}, L^\circ) = d_{t^\circ}(E_{x_m}, L^\circ)$$

بنا بر لم 2-5-9، $d(E_{x_m}, L^\circ) = \min_{t \in R^2, \gamma(t)=1} d_t(E_{x_m}, L^\circ)$ که این رابطه به ازای t^* نیز درست است،

بنابراین

$$d_{t^\circ}(E_{x_m}, L^\circ) = d(E_{x_m}, L^\circ) \leq d_{t^*}(E_{x_m}, L^\circ) \quad (۲-۱۶)$$

حال با استفاده از روابط (۲-۱۵) و (۲-۱۶) داریم:

$$\begin{aligned} f(L^*) &= \sum_{m \in M} w_m d(E_{x_m}, L^*) = \sum_{m \in M} w_m d_{t^*}(E_{x_m}, L^*) \geq \sum_{m \in M} w_m d_{t^\circ}(E_{x_m}, L^\circ) \geq \sum_{m \in M} w_m d_{t^\circ}(E_{x_m}, L^\circ) \\ &= \sum_{m \in M} w_m d(E_{x_m}, L^\circ) = f(L^\circ) \Rightarrow f(L^\circ) \leq f(L^*) \end{aligned}$$

و این رابطه با توجه به فرض بهینگی L^* ($f(L^\circ) \geq f(L^*)$) نتیجه می‌دهد $f(L^\circ) = f(L^*)$. یعنی L°

یک خط بهینه است که همچنین از حداقل دو تا از نقاط موجود عبور می‌کند، و این برهان را کامل

می‌کند.

Cen1 و Cen2: برهان Cen1 و Cen2 مشابه برهان برای Med1 است. با جایگزینی \sum با \max در فرمول‌های بالا و بکارگیری خاصیت در ماکزیمم فاصله بودن از حداقل سه تا از نقاط موجود برای Cen1 و عبور از یک وجه از پوسته محدب نقاط موجود برای Cen2، بجای عبور از حداقل دو تا از نقاط موجود در برهان بالا، به طریقی مشابه، خط L° را می‌سازیم که $g(L^*) \geq g(L^\circ) \geq g(L^*)$ که در آن $g(L) = \max_{m \in M} w_m d(E_{x_m}, L)$ ادامه برهان همانند قسمت قبل است.

Med2: فرض کنیم یک خط میانه L^* با خاصیت $\sum_{E_{x_m} \in \beta_{L^*}^-} w_m > \frac{W}{2}$ موجود باشد. با توجه به برهان

Med1، از قضیه 2-5-6 می‌دانیم برای هر خط L° که d_{L^*} را می‌نیم می‌کند، داریم:

$$\sum_{E_{x_m} \in \beta_{L^\circ}^-} w_m \leq \frac{W}{2}, \quad \sum_{E_{x_m} \in \beta_{L^\circ}^+} w_m \leq \frac{W}{2}$$

لذا:

$$\begin{aligned} f(L^*) &= \sum_{m \in M} w_m d(E_{x_m}, L^*) = \sum_{m \in M} w_m d_{L^*}(E_{x_m}, L^*) \\ &> \sum_{m \in M} w_m d_{L^*}(E_{x_m}, L^\circ) \geq \sum_{m \in M} w_m d_{L^\circ}(E_{x_m}, L^\circ) \\ &= \sum_{m \in M} w_m d(E_{x_m}, L^\circ) = f(L^\circ) \Rightarrow f(L^\circ) < f(L^*) \end{aligned}$$

که تناقض با بهینگی L^* است، بنابراین فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود. \square

۲-۶ الگوریتم‌ها و نتایج

برای متریک l_1 و l_2 تاکنون الگوریتم‌های زیادی ارائه شده است. یک خط میانه با استفاده از نرم l_2 را می‌توان در زمان $O(n^2 \log n)$ یا $O(n^2)$ یافت که الگوریتم آن‌ها در [16] و [21] آمده است. برای l_1 یک الگوریتم $O(n \log^2 n)$ در [16] پیشنهاد شده است، در حالی که الگوریتم ارائه شده در [22] در زمان خطی اجرا می‌شود. مساله خط مرکز در حالت اقلیدسی را می‌توان در زمان $O(n \log n)$ توسط

الگوریتم ارائه شده در [23] حل کرد و همچنین این مساله برای نرم l_1 در [24] از طریق برنامه‌ریزی خطی در زمان $O(n)$ حل شده است.

برای فواصل d مشتق شده از نرم‌های بلوکی با نقاط فرین G ، یک الگوریتم $O(Gn)$ برای مساله خط میانه و همچنین یک الگوریتم $O(Gn)$ برای مساله خط مرکز در [25] پیشنهاد شده است. از آنجا که همیشه یک خط میانه وجود دارد که از حداقل دو تا از نقاط موجود می‌گذرد، به آسانی می‌توان یک الگوریتم $O(n^3)$ برای بررسی تمام جفت نقاط موجود پیشنهاد داد. با استفاده از این حقیقت که یک خط میانه باید یک خط تنصیف باشد، می‌توان پیچیدگی این الگوریتم را کاهش داد زیرا نیازی نیست که تمام جفت نقاط موجود بررسی شوند.

برای مساله خط مرکز، همیشه یک خط بهینه وجود دارد که در حداکثر فاصله از حداقل سه تا از نقاط موجود قرار دارند، بنابراین یک خط مرکز را می‌توان بوسیله شمارش تمام سه تایی‌های نقاط موجود در زمان $O(n^4)$ یافت. اگر تمام وزن‌ها مساوی باشند، یکی از خطوط بهینه شیبی برابر با یکی از وجه‌های پوسته محدب نقاط موجود دارد. این نتیجه بدین معنی است که کافیت پوسته محدب مجموعه نقاط موجود را تعیین کنیم که به یک الگوریتم $O(n \log n)$ منجر می‌شود.

فصل سوم

مکانیابی خط در فضای سه بعدی

همانطور که در فصل پیش اشاره شد، مطالعات بر روی مساله مکانیابی خط در فضای دوبعدی سابقه طولانی دارد، اما در مقایسه با مساله مکانیابی خط دوبعدی، مقالات درباره مکانیابی خط در فضای سه بعدی (R^3) نسبتاً نادر است. تاکنون مقالات کمی درباره یافتن بزرگترین استوانه که شامل یک مجموعه مفروض از نقاط در R^3 نمی‌باشد ارائه شده است که از آن به عنوان مکانیابی یک خط در فضای سه بعدی تعبیر شده است و می‌توان به مقاله فولرت [26] اشاره کرد. این پژوهش بواسطه مشکلات بوجود آمده در درمان بیماری‌های مغزی انجام شد، که پرتوهای اشعه نباید ارگانهای مهم داخل مغز را از بین ببرد. بنابراین یافتن کوچکترین استوانه‌ی احاطه کننده‌ی ارگان‌های غیرسالم مغز حائز اهمیت است تا بتوان بافت‌های سالم مغز را که در این استوانه قرار ندارند از نابود شدن توسط اشعه حفظ کرد. از سوی دیگر یافتن کوچکترین استوانه احاطه کننده یک مجموعه نقاط مفروض، معادل است با یافتن یک خط در R^3 با تابع هدف مرکز که در مقاله شومر مورد مطالعه قرار گرفته است [27].

کاربرد عملی دیگر یافتن خطوط در R^3 را می‌توان در استخراج معدن جستجو کرد. فرض کنید یک منطقه شامل ذخایر معدنی چند کانی معدنی در مکانهایی معلوم در زیر زمین باشند. به جای حفاری مجزا برای هر ذخیره معدنی، ساختن یک شفت اصلی و دسترسی به ذخایر با استفاده از تونل‌ها مقرون به صرفه است. در واقع هدف، مکانیابی یک شفت است بطوریکه هزینه‌های سالیانه انتقال مواد معدنی از طریق تونل‌ها به طرف بالای شفت را کمینه کند. در عمل، طول شفت متناهی است، بنابراین در واقع هدف، مکانیابی یک نیم‌خط است. مکانیابی یک نیم‌خط پیچیده‌تر از یافتن یک خط است. یک حالت خاص از مکانیابی نیم‌خط توسط شوپل و بریمبرگ بررسی شده است [29]. اما در این فصل، ما تنها به مکانیابی خط در فضای R^3 می‌پردازیم.

۲-۳ فرمول بندی مساله

مساله مکانیابی خط در R^3 را می توان بصورت زیر فرمول بندی کرد:

فرض کنید $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ یک مجموعه از مکان های تسهیلات موجود با $A_m = (a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3}) \in R^3$ و وزن های نامنفی w_m ، $m \in M = \{1, 2, \dots, n\}$ باشد. فرض کنید d تابع فاصله باشد.

می خواهیم خط راست $L \in R^3$ را بیابیم به طوریکه تابع هدف $f(L) = \sum_{m \in M} w_m d(A_m, L)$ کمینه گردد. فاصله بین یک نقطه $A \in R^3$ و خط $L \in R^3$ ، بر مبنای تابع فاصله d ، توسط کوتاهترین فاصله بیان می شود یعنی:

$$d(A, L) = \min_{X \in L} d(A, X)$$

در مثال معدن کاری که قبلا ذکر کردیم، تسهیلات موجود همان ذخایر معدنی و خط L ، مدل های شفت معدن کاری را نشان می دهد. در اینجا هدف، می نیم کردن هزینه های سیستم تونل است که ما فرض می کنیم وابسته به طول تونل ها باشد. طول تونل از ذخیره معدنی معلوم در A تا شفت L توسط $d(A, L)$ بیان می شود که اساسا وابسته به خواص سیستم تونل است. در پژوهشی که در [28] انجام شده است فرض بر این است که مسیرهای ارتباطی خط با تسهیلات موجود (تونل ها از ذخایر تا شفت در مثال معدن کاری) باید افقی باشند. در صفحه افقی، هر p -نرم می تواند به عنوان یک اندازه فاصله در نظر گرفته شود. چنین اندازه فاصله ای، فاصله افقی l_p نامیده می شود. اگرچه بواسطه تعریف، یک تابع فاصله سه بعدی است اما می توان آن را به فاصله دو بعدی l_p در صفحه افقی شامل A کاهش داد که این کار، بطور قابل توجهی مساله مکانیابی خط را ساده می کند.

ما در اینجا فرض می‌کنیم که تونل‌های اتصال دهنده شفت به ذخایر معدنی باید افقی باشند یعنی ما به جای فواصل p -نرم افقی با فواصل p -نرم سروکار داریم. برای $1 \leq p \leq \infty$ ، p -نرم متناظر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$l_p(X) = l_p(x_1, x_2, x_3) = \left(\sum_{j=1}^3 |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

بنابراین برای یک نقطه $A \in R^3$ و یک خط $L \subset R^3$ ، کوتاهترین فاصله بر مبنای نرم l_p بصورت زیر می‌باشد:

$$\ell_p(A, L) = \min_{X \in L} l_p(A - X)$$

با در نظر گرفتن دو پارامتر $\alpha, \beta \in R^3$ ، خط دلخواه $L_{\alpha, \beta}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_{\alpha, \beta} = \{X \in R^3; X = \lambda\alpha + \beta, \lambda \in R\}$$

که در حقیقت حرکت از نقطه β در جهت α می‌باشد.

در ادامه ابتدا درباره چگونگی بکارگیری فواصل اندازه l_p -نرم بحث می‌کنیم، سپس به جنبه‌های نظری مدل‌های مکانیابی می‌پردازیم و در پایان، برای بعضی مدل‌ها، روش‌های حل ابتکاری را ارائه می‌دهیم.

به منظور توضیح درباره نتایج این فصل، مسائل مکانیابی خط سه بعدی را مطابق با دو خاصیت زیر دسته بندی می‌کنیم.

ساختار مکانی تسهیلات

یکی از حالات زیر را برای تسهیلات موجود در نظر می‌گیریم، تمام تسهیلات:

- بر روی صفحه افقی واقع هستند،
- بر روی یک ابر صفحه واقع هستند،
- بطور دلخواه در R^3 قرار گرفته‌اند.

محدودیت‌ها روی خط

یکی از محدودیت‌های زیر در یافتن خط بهینه اعمال می‌شود، خط مورد نظر باید:

- در صفحه افقی قرار گیرد،
- در یک ابر صفحه قرار گیرد،
- هیچ محدودیتی روی خط نداشته باشیم یعنی به دنبال بهترین خط در R^3 هستیم.

۳-۳ فواصل اندازه‌گیری

ما مساله یافتن یک خط مانند L را بررسی می‌کنیم به‌طوری‌که تابع هدف

$$f(L) = \sum_{m \in M} w_m \ell_p(A_m, L)$$

می‌باشند.

دو بردار $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ مفروض است. یک خط در R^3 را می‌توان به‌صورت

$$L_{\alpha, \beta} = \{X \in R^3; X = \lambda\alpha + \beta, \lambda \in R\}$$

نمایش داد که ما در ادامه فرض می‌کنیم $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. قبل از حل مساله لازم است درباره فاصله‌ی $\ell_p(A_m, L_{\alpha, \beta})$ یک نقطه تا یک

خط در R^3 بحث کنیم. ابتدا با فاصله اقلیدسی l_2 شروع می‌کنیم.

• فاصله اقلیدسی

برای هر نقطه مفروض $A_m = (a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3}) \in R^3$ ، نزدیکترین نقطه روی خط تا A_m بوسیله یک λ^*

که به‌صورت ضرب داخلی $\lambda_m^* = \langle \alpha, A_m - \beta \rangle$ می‌باشد یافت می‌شود. اگر α به ۱ نرمال شود، فرمول

زیر برای محاسبه فاصله بین $A_m \in R^3$ و خط $L = L_{\alpha, \beta}$ بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \ell_2(A_m, L) &= \sqrt{\sum_{j=1}^3 (a_{mj} - \alpha_j \lambda_m^* - \beta_j)^2} \\ &= \sqrt{\langle A_m - \beta, A_m - \beta \rangle - \langle A_m - \beta, \alpha \rangle \langle A_m - \beta, \alpha \rangle} \end{aligned} \quad (1-3)$$

بنابراین تابع هدف برابر است با:

$$f(L_{\alpha,\beta}) = \sum_{m \in M} w_m \sqrt{\langle A_m - \beta, A_m - \beta \rangle - \langle A_m - \beta, \alpha \rangle \langle A_m - \beta, \alpha \rangle}$$

در ادامه درستی این عبارات را نشان می‌دهیم:

با فرض $L_{\alpha,\beta} = \{X \in R^3; X = \lambda\alpha + \beta, \lambda \in R\}$ داریم

$$\ell_2(A_m, L) = \min_{X \in L} \ell_2(A - X) = \min_{\lambda \in R} \sqrt{\sum_{j=1}^3 (a_{m_j} - \alpha_j \lambda_m - \beta_j)^2}$$

اما؛

(۲-۳)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 (a_{m_j} - \alpha_j \lambda_m - \beta_j)(a_{m_j} - \alpha_j \lambda_m - \beta_j) &= \sum_{j=1}^3 a_{m_j}^2 - a_{m_j} \alpha_j \lambda_m - a_{m_j} \beta_j - a_{m_j} \alpha_j \lambda_m + \alpha_j^2 \lambda_m^2 \\ &\quad + \alpha_j \beta_j \lambda_m - a_{m_j} \beta_j + \alpha_j \beta_j \lambda_m + \beta_j^2 \\ &= \sum_{j=1}^3 a_{m_j}^2 - 2a_{m_j} \alpha_j \lambda_m - 2a_{m_j} \beta_j + \alpha_j^2 \lambda_m^2 + 2\alpha_j \beta_j \lambda_m + \beta_j^2 \end{aligned}$$

حال با قرار دادن $j=1,2,3$ و با توجه به این که فرض کردیم $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ آن گاه با باز کردن

عبارت فوق، عبارت $\alpha_j^2 \lambda_m^2$ به صورت زیر است

$$\alpha_1^2 \lambda_m^2 + \alpha_2^2 \lambda_m^2 + \alpha_3^2 \lambda_m^2 = \lambda_m^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) = \lambda_m^2$$

حال با بازنویسی رابطه (۲-۳) بر حسب j ، در نهایت این رابطه به صورت زیر ساده می‌شود؛

$$\sum_{j=1}^3 a_{m_j}^2 - 2a_{m_j} \alpha_j \lambda_m - 2a_{m_j} \beta_j + \lambda_m^2 + 2\alpha_j \beta_j \lambda_m + \beta_j^2 \quad (۳-۳)$$

اگر رابطه (۳-۳) را A بنامیم، آن گاه می‌نویسیم A را بر حسب $\lambda \in R$ می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{j=1}^3 a_{m_j}^2 - \lambda_m (2a_{m_j} \alpha_j - 2\alpha_j \beta_j) - 2a_{m_j} \beta_j + \beta_j^2 + \lambda_m^2 \\
\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial \lambda_m} &= 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^3 -(2a_{m_j} \alpha_j - 2\alpha_j \beta_j) = -2\lambda_m \Rightarrow \lambda_m = \sum_{j=1}^3 \alpha_j a_{m_j} - \alpha_j \beta_j \\
\Rightarrow \lambda_m^* &= \sum_{j=1}^3 \alpha_j (a_{m_j} - \beta_j)
\end{aligned}$$

که مجدداً با جایگذاری $j=1,2,3$ خواهیم داشت

$$\lambda_m^* = \langle \alpha, A_m - \beta \rangle$$

حال نشان می‌دهیم

$$\sqrt{\sum_{j=1}^3 (a_{m_j} - \alpha_j \lambda_m^* - \beta_j)^2} = \sqrt{\langle A_m - \beta, A_m - \beta \rangle - \langle A_m - \beta, \alpha \rangle \langle A_m - \beta, \alpha \rangle} \quad (۴-۳)$$

با توجه به این که فرض کردیم $A = \sum_{j=1}^3 (a_{m_j} - \alpha_j \lambda_m^* - \beta_j)^2$ ، با جایگذاری λ_m^* در رابطه (۳-۳) داریم

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{j=1}^3 a_{m_j}^2 - 2a_{m_j} \alpha_j \lambda_m^* - 2a_{m_j} \beta_j + \lambda_m^2 + 2\alpha_j \beta_j \lambda_m^* + \beta_j^2 \\
&= \sum_{j=1}^3 a_{m_j}^2 - 2a_{m_j} \alpha_j (\alpha_j a_{m_j} - \alpha_j \beta_j) - 2a_{m_j} \beta_j + (\alpha_j a_{m_j} - \alpha_j \beta_j) (\alpha_j a_{m_j} - \alpha_j \beta_j) \\
&\quad + 2\alpha_j \beta_j (\alpha_j a_{m_j} - \alpha_j \beta_j) + \beta_j^2 \\
&= \sum_{j=1}^3 a_{m_j}^2 - 2\alpha_j^2 a_{m_j}^2 + 2\alpha_j^2 \beta_j a_{m_j} - 2a_{m_j} \beta_j + \alpha_j^2 a_{m_j}^2 - \alpha_j^2 \beta_j a_{m_j} - \alpha_j^2 \beta_j a_{m_j} + \alpha_j^2 \beta_j^2 \\
&\quad + 2\alpha_j^2 \beta_j a_{m_j} - 2\alpha_j^2 \beta_j^2 + \beta_j^2 \\
&= \sum_{j=1}^3 a_{m_j}^2 - \alpha_j^2 a_{m_j}^2 - 2a_{m_j} \beta_j - \alpha_j^2 \beta_j^2 + 2\alpha_j^2 \beta_j a_{m_j} + \beta_j^2 \quad (۵-۳)
\end{aligned}$$

رابطه (۵-۳) مجذور طرف چپ رابطه (۴-۳) است. حال اگر طرف دوم رابطه (۴-۳) را باز کنیم داریم

$$\langle A_m - \beta, A_m - \beta \rangle = A_m^2 - A_m \beta - A_m \beta + \beta^2 \quad (۶-۳)$$

$$\langle A_m - \beta, \alpha \rangle \langle A_m - \beta, \alpha \rangle = (A_m \alpha - \alpha \beta) (A_m \alpha - \alpha \beta) = A_m^2 \alpha^2 - 2A_m \alpha^2 \beta + \alpha^2 \beta^2 \quad (۷-۳)$$

حال

$$\langle A_m - \beta, A_m - \beta \rangle - \langle A_m - \beta, \alpha \rangle \langle A_m - \beta, \alpha \rangle = A_m^2 - 2A_m\beta + \beta^2 - A_m^2\alpha^2 + 2A_m\alpha^2\beta - \alpha^2\beta^2$$

حال اگر این رابطه را بر حسب j بازنویسی کنیم، این رابطه به صورت زیر است

$$\sum_{j=1}^3 a_{m_j}^2 - \alpha_j^2 a_{m_j}^2 - 2a_{m_j}\beta_j - \alpha_j^2\beta_j^2 + 2\alpha_j^2\beta_j a_{m_j} + \beta_j^2 \quad (۸-۳)$$

که این نیز مجذور سمت راست رابطه (۳-۴) است و با رابطه (۳-۵) برابر می باشد. بدین ترتیب درستی رابطه (۳-۱) ثابت شد.

متاسفانه این تابع هدف نه محدب و نه مقعر است. شایان ذکر است وقتی تابع هدف نه محدب و نه مقعر باشد می نیمم موضعی ممکن است می نیمم سراسری نباشد. خاصیت زیر برای فاصله اقلیدسی جهت توسعه یک الگوریتم می تواند مفید واقع شود.

لم 1-3 [29]: فرض کنید $L = L_{\alpha, \beta} \subset R^3$ یک خط و $A \in R^3$ یک نقطه باشد. آنگاه کوتاه ترین مسیر اقلیدسی از A تا L ، پاره خط قائم بر L است یعنی در یک صفحه با بردار نرمال α واقع می شود.

• l_p نرم ها

اگر به جای فاصله اقلیدسی، فاصله l_p را بکار ببریم، خاصیت لم 1-3 در حالت کلی درست نخواهد بود. برای تعیین فاصله بین یک نقطه A_m و یک خط $L = L_{\alpha, \beta}$ باید λ_m^* را بگونه ای بیابیم که $P_m = \lambda_m^* \alpha + \beta$ نزدیک ترین نقطه روی خط باشد که با حل یک مساله می نیمم سازی یک بعدی بدست می آید.

$$l_p(A_m, L) = \min_{P \in L} l_p(A_m - P) = l_p(A_m - \lambda_m^* \alpha - \beta)$$

بنابراین تابع هدف به صورت $f(L_{\alpha, \beta}) = \sum_{m \in M} w_m \left(\sum_{j=1}^3 |a_{m_j} - \alpha_j \lambda_m^* - \beta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ می باشد که این تابع

نیز نه محدب و نه مقعر است.

• فاصله مستطیلی (نرم l_1)

در حالت خاص فاصله مستطیلی l_1 ، لم زیر را برای تعیین فاصله بین یک نقطه و یک خط در R^3 داریم.

لم 3-28]: فرض کنید $A = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$ و $L_{\alpha, \beta} \subset R^3$ یک خط معین با پارامترهای $\alpha, \beta \in R^3$ باشد. آن گاه:

$$\ell_1(A, L_{\alpha, \beta}) = \min \left\{ \sum_{j=1}^3 \left| a_j - \frac{a_i - \beta_i}{\alpha_i} \alpha_j - \beta_j \right|, i=1, 2, 3 \right\}$$

برهان:

$$\begin{aligned} \ell_1(A, L_{\alpha, \beta}) &= \min_{X \in L} l_1(A - X) \\ &= \min_{\lambda \in R} l_1(A - \lambda \alpha - \beta) \\ &= \min_{\lambda \in R} (|a_1 - \lambda \alpha_1 - \beta_1| + |a_2 - \lambda \alpha_2 - \beta_2| + |a_3 - \lambda \alpha_3 - \beta_3|) \\ &= \min_{\lambda \in R} \sum_{j=1}^3 \left| \alpha_j \left| \frac{a_j - \beta_j}{\alpha_j} - \lambda \right| \right| \end{aligned}$$

بدون از دست دادن کلیت، فرض کنیم $\alpha_j \neq 0$ است در غیراین صورت j زمین عبارت یک عدد ثابت است و بنابراین می توان از آن صرف نظر کرد. چون اینمساله مانند یک مساله ۱-میانه وزن دار

با نرم l_1 است، یک $i \in \{1, 2, 3\}$ وجود دارد به طوری که $\lambda = \frac{a_i - \beta_i}{\alpha_i}$ بهینه باشد. اکنون با تعریف

$$P_i = \frac{a_i - \beta_i}{\alpha_i} \alpha + \beta \in R^3, \quad i=1, 2, 3$$

فاصله بین A و $L_{\alpha, \beta}$ به صورت $\ell_1(A, L_{\alpha, \beta}) = \min \{l_1(A - P_1), l_1(A - P_2), l_1(A - P_3)\}$ جواب

بهینه مساله است. □

توجه کنید که کوتاهترین مسیر مستطیلی از نقطه A تا خط L در فضای سه بعدی، به یک صفحه محدود می شود. به ویژه اگر اندیس i برای λ ی بهینه در برهان لم 3-2 با $i=3$ بدست آمده باشد آن گاه مسیر از A تا L ، کاملاً در صفحه افقی گذرنده از A قرار می گیرد. بطور مشابه

اگر $i = 1, 2$ باشد، آن‌گاه مسیر مورد نظر کاملاً در صفحه قائم به ترتیب محورهای مختصات x_1 و x_2 قرار می‌گیرد. متأسفانه انتخاب اندیس i برای λ نه تنها به پارامترهای خط وابسته است، بلکه به موقعیت نقطه A نیز وابسته است، بنابراین خاصیت لم 1-3 برای فاصله مستطیلی l_1 برقرار نیست.

۳-۴ نتایج محاسباتی

همانطور که در فصل ۲ اشاره شد، برای مساله مکانیابی خط در صفحه با فاصله اقلیدسی، یک خط بهینه گذرنده از دو تا از تسهیلات مفروض وجود دارد. این خاصیت را خاصیت وقوع می‌نامیم. این خاصیت توسط کورنینکو و مارتینی مرجع به صورت زیر بیان شده است.

با استفاده از نرم اقلیدسی، تمام خطوط بهینه از دو تا از تسهیلات مفروض عبور می‌کنند [30].
تعمیم این خاصیت وقوع به سایر فواصل به جز اقلیدسی توسط شویل ارائه شده است [31]. به این ترتیب ممکن است این‌طور به نظر آید که خاصیت وقوع برای مکانیابی یک خط در فضای سه بعدی نیز درست است. اما در مثال نقض زیر هیچ خط بهینه‌ای از دو تا از تسهیلات مفروض عبور نمی‌کند. بنابراین خاصیت وقوع دوبعدی برای فضای سه بعدی قابل تعمیم نیست.

مثال 3-3: فرض کنید $n = 8$ تا تسهیلات مفروض به عنوان رئوس یک مکعب مستطیل با

مختصات زیر داده شده باشند:

$$\begin{aligned} A_1 &= (0, 0, -1), & A_2 &= (0, 0, 1), & A_3 &= (0, 2, 1), & A_4 &= (0, 2, -1), \\ A_5 &= (e, 0, -1), & A_6 &= (e, 0, 1), & A_7 &= (e, 2, 1), & A_8 &= (e, 2, -1), \end{aligned}$$

که $e > 0$.

خط L_1 گذرنده از نقاط $(0, 1, 0)$ و $(e, 1, 0)$ را در نظر بگیرید. در این صورت برای هر $m = 1, 2, \dots, 8$ ، $\ell_2(A_m, L_1) = \sqrt{2}$. بنابراین مقدار تابع هدف وقتی که تمام وزن‌ها ۱ در نظر

گرفته شوند برابر است با $f(L_1) = 8\sqrt{2}$ که مستقل از e است. حال ما می‌خواهیم نشان دهیم برای e های بزرگ، خط L_1 نسبت به هر خط دیگر که از دو تا از تسهیلات موجود عبور می‌کند، بهتر است. برای خط $L_2 = L_{\alpha,\beta}$ با $\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{e^2+8}}\right)(e, 2, 2)$ و $\beta = (0, 0, -1)$ که از نقاط A_1 و A_7 می‌گذرد، داریم:

$$\ell_2(A_1, L_2) = \ell_2(A_7, L_2) = 0,$$

$$\ell_2(A_2, L_2) = \ell_2(A_4, L_2) = \ell_2(A_6, L_2) = \ell_2(A_8, L_2) = 2\sqrt{\frac{e^2+4}{e^2+8}},$$

$$\ell_2(A_3, L_2) = \ell_2(A_5, L_2) = 2\sqrt{\frac{2e^2}{e^2+8}}$$

$$\Rightarrow f(L_2) = \frac{4}{\sqrt{e^2+8}}(2\sqrt{e^2+4} + \sqrt{2e^2}).$$

$$.f(L_2) \rightarrow 8 + 4\sqrt{2} > 8\sqrt{2} = f(L_1) \quad \text{وقتی } e \rightarrow \infty, \text{ داریم:}$$

خطوط افقی و قائم گذرنده از دو تا از تسهیلات و همچنین خطوطی که در یکی از وجوه مورب هستند (مانند خط گذرنده از A_7 و A_2) نسبت به خط L_2 بدتر هستند. این بدین معنی است که برای e های به اندازه کافی بزرگ، خط L_1 نسبت به تمام خطوط گذرنده از دو تا از تسهیلات مفروض بهتر است. بنابراین هیچ یک از این خطوط گذرنده از دو نقطه، بهینه نیستند.

حال به بیان برخی حالت‌های خاص از تسهیلات و خط جدید می‌پردازیم. برای مثال فرض کنید تمام تسهیلات مفروض بر یک صفحه مشترک H واقع باشند. در لم زیر حالت خاصی را بررسی می‌کنیم که این صفحه به صورت $E := R^2 \times \{0\} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = 0\}$ باشد یعنی برای هر $a_{m3} = 0, m \in M$. همچنین در این حالت تمام خطوط بهینه که بر حسب l_p -نرم بدست می‌آیند، توسط E دربرگرفته می‌شوند.

لم 3-4[29]: فرض کنید برای هر $a_{m3} = 0, m \in M$ است. آن گاه یک خط بهینه $L_{\alpha, \beta}$ بر حسب l_p وجود دارد به طوری که $\alpha_3 = 0$ و $\beta_3 = 0$ است. بعلاوه اگر $p < \infty$ باشد آن گاه تمام خطوط بهینه در این شرط صدق می کنند.

برهان: فرض کنید $X = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ یک نقطه و $P(X) = (x_1, x_2, 0)$ تصویر X به روی $R^2 \times \{0\}$ باشد. توجه کنید که برای تمام l_p نرم ها داریم:

$$l_p(X - Y) \geq l_p(P(X) - P(Y)) \quad (9-3)$$

و همچنین برای $p < \infty$ ، $X \neq P(X)$ و $Y = P(Y)$ به آسانی می توان نشان داد

$$l_p(X - Y) > l_p(P(X) - Y) \quad (10-3)$$

زیرا شرط $X \neq P(X)$ مولفه سوم $l_p(X - Y)$ را مخالف صفر می کند چون با این شرط، x_3 قطعا صفر نیست. حال چون $Y = P(Y)$ ، پس $y_3 = 0$. بنابراین طرف چپ رابطه (10-3) به طور اکید از طرف راست رابطه بزرگ تر است.

اکنون فرض کنید $L = L_{\alpha, \beta}$ خطی دلخواه در R^3 بوده و $P(L) = L_{P(\alpha), P(\beta)}$ تصویر L به روی

$$R^2 \times \{0\} \text{ باشد. در واقع } P(L) = L_{P(\alpha), P(\beta)} \text{ خطی است که به ازای آن}$$

$$P(\beta) = P(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\beta_1, \beta_2, 0) \text{ و } P(\alpha) = P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, 0)$$

با استفاده از رابطه (9-3)، فاصله بین یک نقطه $A = (a_1, a_2, 0) = P(A)$ و خط L در رابطه زیر صدق می کند:

$$\ell_p(A, L) = \min_{X \in L} l_p(A - X) \geq \min_{X \in L} l_p(A - P(X)) = \min_{X \in P(L)} l_p(A - X) = \ell_p(A, P(L)) \quad (11-3)$$

اگر $L_{\alpha, \beta}$ خط بهینه باشد باید همواره $\ell_p(A, L) \leq \ell_p(A, P(L))$ باشد و با توجه به رابطه

$$(11-3) \text{ بهترین حالت زمانی رخ می دهد که } \ell_p(A, L) = \ell_p(A, P(L)) \text{ و این یعنی } \alpha_3 = 0$$

است. همچنین به وضوح رابطه (11-3) به طور اکید برقرار است، اگر $p < \infty$ و $L \neq P(L)$

باشد. □

نتیجه 3-5[29]: فرض کنید برای هر $a_{m3} = 0, m \in M$. برای تمام l_p نرم‌ها که $1 \leq p \leq \infty$ ، یک خط بهینه گذرنده از دو تا از تسهیلات مفروض وجود دارد.

نتیجه 3-6[29]: فرض کنید H یک صفحه در R^3 و شامل تمام تسهیلات موجود باشد. آن‌گاه تمام خطوط بهینه که برحسب فاصله اقلیدسی l_2 بدست می‌آیند، توسط H دربر گرفته می‌شوند.

برهان: چون با نرم l_2 سروکار داریم با دوران یکسان نقاط و خط، فاصله‌ها ثابت می‌ماند، بنابراین بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که $H = E = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = 0\}$ ، و نتیجه مستقیماً از لم 3-4 بدست می‌آید. زیرا در لم 3-4 برای هر $L_{\alpha, \beta}$ داشتیم $\alpha_3 = \beta_3 = 0$ ، یعنی $L_{\alpha, \beta}$ در E واقع است. \square

در لم 3-4 با یک صفحه شامل تمام تسهیلات مفروض سروکار داشتیم اما در خاصیت بعد، تسهیلات مفروض، دلخواه می‌باشند ولی در عین حال تنها خطوطی که در $E = R^2 \times \{0\}$ قرار دارند را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

لم 3-7[29]: فرض کنید L یک خط در صفحه $E = R^2 \times \{0\} \subset R^3$ باشد و $A = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$ یک نقطه و $P(A) = (a_1, a_2, 0)$ تصویر A بروی E باشد. آن‌گاه:

$$\ell_p(A, L) = l_p(\ell_p(P(A), L), a_3).$$

توجه کنید که علامت ℓ_p به یک تابع فاصله در R^3 اشاره دارد، حال آن‌که l_p سمت راست، تنها

یک p -نرم دویبعدی است که بصورت $l_p(X) = l_p(x_1, x_2) = \left(\sum_{j=1}^2 |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ می‌باشد. بعلاوه

$\ell_p(P(A), L)$ را می‌توان توسط یک فاصله دویبعدی جایگزین کرد، چون $P(A)$ و L هر دو در $E = R^2 \times \{0\}$ قرار دارند.

برهان: دو نقطه $X = (x_1, x_2, x_3)$ و $Y = (y_1, y_2, y_3)$ مفروض است. خاصیت زیر را برای l_p - نرم‌ها بکار خواهیم برد:

$$l_p(X - Y) = l_p(l_p(P(X) - P(Y)), x_3 - y_3)$$

با توجه به این که برای تمام $X \in L$ ، $x_3 = 0$ و چون بنا بر فرض مساله $P(X) = (x_1, x_2, 0)$ لذا برای هر $X \in L$ داریم

$$X = P(X) \quad (۱۲-۳)$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۱۲-۳) داریم

$$\begin{aligned} \ell_p(A, L) &= \min_{X \in L} l_p(A - X) \\ &= \min_{X \in L} \{l_p(l_p(P(A) - P(X)), a_3 - 0)\} \\ &= l_p\left(\min_{X \in L} \{l_p(P(A) - P(X))\}, a_3\right) \\ &= l_p\left(\min_{X \in L} \{l_p(P(A) - X)\}, a_3\right) \\ &= l_p(\ell_p(P(A), L), a_3) \end{aligned}$$

به این ترتیب برهان کامل می‌شود. □

لم 7-3، منجر به تعریف مساله مکانیابی خط محدود شده به صفحه^{۲۵} (PRL) به صورت زیر می‌شود:

(PRL): یک مجموعه A از تسهیلات در R^3 مفروض است، خط L را در صفحه $E = R^2 \times \{0\}$ بگونه‌ای بیابید که تابع هدف $f(L) = \sum_{m \in M} w_m \ell_p(A_m, L)$ می‌نیمم شود.

در حقیقت تعریف فوق مساله‌ای را بیان می‌کند که نقاط مفروض در فضا و خط L در صفحه واقع هستند.

با استفاده از محدودیت $L \subset E$ و همچنین لم 7-3، تابع هدف (PRL) را می‌توان به صورت زیر فرمول‌بندی کرد

^{۲۵}Planarly Restricted Line Location Problem

$$f(L) = \sum_{m \in M} w_m l_p(\ell_p(P(A_m), L), a_{m3}).$$

قضیه 3-8[29]: مساله (PRL) با فاصله مستطیلی l_1 ، معادل است با مساله مکانیابی یک خط در صفحه E که تسهیلات موجود بصورت تصاویر نقاط مفروض A_m بروی E می‌باشند و تابع فاصله بوسیله فاصله دوبعدی l_1 بدست می‌آید.

برهان: با استفاده از لم 3-7، برای نرم l_1 داریم:

$$\begin{aligned} f(L) &= \sum_{m \in M} w_m l_1(\ell_1(P(A_m), L), a_{m3}) \\ &= \sum_{m \in M} w_m \ell_1(P(A_m), L) + \sum_{m \in M} w_m |a_{m3}| \end{aligned}$$

یعنی برای l_1 ، (PRL) معادل است با

$$\min \sum_{m \in M} w_m \ell_1((a_{m1}, a_{m2}), L)$$

مساله اخیر یک مساله مکانیابی خط در صفحه با تصاویر دوبعدی A_m به عنوان تسهیلات مفروض است. \square

از این قضیه نتایج زیر حاصل می‌شود.

نتیجه 3-9[29]: برای مساله (PRL) با فاصله l_1 ، یک خط بهینه گذرنده از حداقل دوتا از نقاط تصویر $P(A_m)$ وجود دارد.

برهان: اثبات مستقیماً از خواص مسائل مکانیابی خط در صفحه نتیجه می‌شود. \square

توجه کنید چون تجزیه مختصات برای $1 < p < \infty$ برقرار نیست بنابراین نتایج قضیه 3-8 و نتیجه 3-9 برای p -نرم‌های کلی برقرار نمی‌باشد. مثلاً برای نرم اقلیدسی l_2 ، مثال 3-3 را در نظر بگیرید. اگر به دنبال یافتن یک خط بهینه در E باشیم، خط L_1 که از هیچ یک از نقاط تصویر A عبور نمی‌کند، دارای مقدار تابع هدف $f(L_1) = 8\sqrt{2}$ است که نسبت به بهترین خط گذرنده از دوتا از

نقاط تصویر که برای $e \rightarrow \infty$ دارای مقدار تابع هدف $f(L) \rightarrow 4(1+\sqrt{5})$ می باشد، بهتر است. همچنین از خواص تقارن نرم l_1 ، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه 4-10[29]: فرض کنید H یک ابر صفحه با بردار نرمال n باشد که $n \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ است. آن گاه با استفاده از نرم مستطیلی l_1 ، مساله یافتن یک خط بهینه در H با مساله مکانیابی یک خط در صفحه معادل است. بعلاوه تمام خطوط بهینه حداقل از دو تا از نقاط تصویر تسهیلات مفروض A_m بروی H عبور می کنند.

همچنین حالت خاص دیگر زمانی رخ می دهد که تمام تسهیلات در ابر صفحه مفروض H قرار بگیرند. برای مجموعه ابر صفحه های ذکر شده در نتیجه 3-10، اکنون این مساله با یافتن یک خط در صفحه R^2 معادل است، بنابراین بلافاصله می توان نتیجه گرفت به ازای تمام فواصل l_p ، یک خط بهینه وجود دارد که از دو تا از تسهیلات می گذرد. نتیجه 3-6 برای فاصله اقلیدسی l_2 ، مستقل از ابر صفحه H ، همان نتیجه را نشان می دهد. در ادامه این بخش، خاصیت وقوع را برای تمام فواصل l_p و ابر صفحه های دلخواه H تعمیم می دهیم. ابتدا مساله مکانیابی خط در یک ابر صفحه^{۲۶} را فرمول بندی می کنیم که آنرا با (LH) نشان می دهیم.

(LH): یک مجموعه A از تسهیلات در ابر صفحه مفروض $H \subset R^3$ مفروض است، یک خط L در

$$H \text{ را بیابید به طوریکه تابع هدف } f(L) = \sum_{m \in M} w_m \ell_p(A_m, L) \text{ می نیمم شود.}$$

لم 3-11[29]: اگر خط $L = L_{\alpha^*, \beta^*}$ جواب مساله می نیمم سازی $f(L) = \sum_{m \in M} w_m \ell_p(A_m, L)$

باشد، آن گاه خط تبدیل یافته $L = L_{\alpha^*, \beta^* + \Delta}$ جواب مساله می نیمم سازی تبدیل یافته

$$g(L) = \sum_{m \in M} w_m \ell_p(A_m + \Delta, L) \text{ می باشد.}$$

برهان: ابتدا توجه کنید که انتقال یکسان یک نقطه و یک خط، فاصله را تغییر نمی دهد.

^{۲۶}Line Location Problem within a Hyperplane

$$\begin{aligned} \ell_p(A + \Delta, L_{\alpha, \beta + \Delta}) &= \min_{\lambda} l_p(A + \Delta - \alpha\lambda - \beta - \Delta) \\ &= \min_{\lambda} l_p(A - \alpha\lambda - \beta) = \ell_p(A, L_{\alpha, \beta}) \end{aligned} \quad (13-3)$$

داریم: $L = L_{\alpha, \beta}$

$$\begin{aligned} g(L_{\alpha^*, \beta^* + \Delta}) &= \sum_{m \in M} w_m \ell_p(A_m + \Delta, L_{\alpha^*, \beta^* + \Delta}) \\ &= \sum_{m \in M} w_m \ell_p(A_m, L_{\alpha^*, \beta^*}) \leq \sum_{m \in M} w_m \ell_p(A_m, L_{\alpha, \beta - \Delta}) \end{aligned} \quad (14-3)$$

با استفاده از رابطه (13-3)؛

$$= \sum_{m \in M} w_m \ell_p(A_m + \Delta, L_{\alpha, \beta}) = g(L_{\alpha, \beta})$$

یعنی برای هر $L_{\alpha, \beta}$ دلخواه، L_{α^*, β^*} بهینه است. لازم به ذکر است رابطه (14-3) به دلیل بهینگی

L_{α^*, β^*} برقرار است. \square

قضیه 3-12 [29]: یک ابرصفحه $H \subset R^3$ مفروض است. برای مساله (LH) به ازای تمام p نرم‌ها

که $1 \leq p \leq \infty$ ، یک خط بهینه گذرنده از دوتا از تسهیلات مفروض وجود دارد.

برهان: فرض کنید $H = H_{n,b} = \{X \in R^3 : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b\}$ یک ابرصفحه با بردار

نرمال $n \neq 0$ باشد. برطبق لم 3-11 بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد H شامل مبدا

باشد، یعنی $b = 0$ است. B_p به عنوان گوی یک‌ه‌ی یک نرم، یک مجموعه محدب است که شامل

مبدا در درونش است و همچنین نسبت به مبدا متقارن است. توجه کنید که $\tilde{B} := B_p \cap H$ یک

مجموعه دوبعدی است که محدب بوده و مبدا را در درونش دارد و نسبت به مبدا متقارن است. در

واقع \tilde{B} محل برخورد یک صفحه و گوی است که فصل مشترک آن‌ها یک دایره می‌باشد. در

نتیجه \tilde{B} یک نرم را روی H بصورت زیر تعریف می‌کند:

$$\tilde{\gamma}(X) := \inf \{ \lambda \geq 0 : X \in \lambda \tilde{B} \}, \quad X \in H$$

این یعنی (LH) با مساله مکانیابی خط در صفحه معادل است، که برای چنین مسائلی با استفاده از برخی نرم‌های $\tilde{\gamma}$ (نه لزوماً l_p) نشان داده شده است که یک خط بهینه گذرنده از دوتا از تسهیلات وجود دارد [31] و این برهان را کامل می‌کند. □

در واقع در قضیه قبل حکم را برای \tilde{B} با نرم $\tilde{\gamma}$ ثابت می‌کند و چون \tilde{B} درون H قرار دارد، لذا یک خط بهینه گذرنده از حداقل دوتا از تسهیلات موجود در H نیز وجود دارد.

توجه کنید که یک مساله مسطح معادل در اثبات قبلی را می‌توان بطور تحلیلی بصورت زیر تعریف کرد:

فرض کنید $H = H_{n,b}$ یک ابرصفحه باشد و فرض کنید $n_3 \neq 0$ و $b = 0$. همچنین $P: H \rightarrow E$ به عنوان تصویر (نگاشت دوسویی) از H بروی صفحه xy باشد و فرض کنید P^{-1} معکوس این نگاشت باشد. با در نظر گرفتن $\tilde{A} := \{P(A): A \in A\}$ ، تعریف کنید

$$\tilde{\gamma}(X) = l_p(P^{-1}(X))$$

از برهان قبل نتیجه می‌شود که $\tilde{\gamma}$ یک نرم بر H است. بعلاوه چون

$$l_p(X - Y) = \tilde{\gamma}(P(X) - P(Y))$$

داریم: $X, Y \in H$ تمام ازای تمام

$$l_p(A, L) = \tilde{\gamma}(P(A), P(L))$$

در واقع این نتیجه حاصل می‌شود که (LH) با مساله مکانیابی خط مسطح معادل است.

۳-۵ روش‌های بررسی موضعی

همانطور که قبلاً اشاره شد، تابع هدف مسائل مکانیابی خط سه بعدی مطرح شده در بخش‌های قبل، نه محدب و نه مقعر است بنابراین بدون نیاز به بررسی وسیع، تنها می‌توانیم به دنبال یک می‌نیم موضعی باشیم. لازم به ذکر است زمانی که تابع هدف نه محدب است و نه مقعر، می‌نیم موضعی ممکن است می‌نیم سراسری نباشد. ابتدا فاصله اقلیدسی را در نظر می‌گیریم.

۳-۵-۱ حالت اقلیدسی

لم 1-3 بیان می‌کند که اگر شیب خط $L_{\alpha,\beta}$ ثابت باشد (یعنی بردار α داده شده باشد) آن‌گاه فواصل از تسهیلات تا خط را می‌توان برحسب فاصله اقلیدسی در داخل صفحه متعامد بر $L_{\alpha,\beta}$ محاسبه کرد. بنابراین می‌توان با بکارگیری دوران $r: R^3 \rightarrow R^3$ ، مساله را به عنوان مکانیابی یک خط دلخواه برحسب فاصله اقلیدسی افقی تقریب زد بطوریکه L یک خط قائم باشد. در ادامه یک الگوریتم را برای یافتن یک خط با کوتاهترین فاصله اقلیدسی بیان می‌کنیم.

الگوریتم 1-3 [29]:

- گام ۱. یک جواب آغازین L^0 و $g=0$ انتخاب کنید.
- گام ۲. یک دوران مانند r که L^g را به یک خط قائم می‌نگارد را بیابید. فرض کنید B مجموعه نقاط باشد قرار دهید $B^r = \{r(A): A \in B\}$.
- گام ۳، ۱. برای محورهای دوران یافته، $\alpha^g = (0, 0, 1)$ را ثابت در نظر گرفته و بهترین نقطه آغاز $\beta^{g+1} = (\beta_1^{g+1}, \beta_2^{g+1}, 0)$ را برای خط قائم L^g بیابید [28].
- گام ۳، ۲. β^{g+1} را ثابت گرفته و، α^{g+1} را برحسب فاصله اقلیدسی بهینه کنید. سپس $L^{g+1} = r^{-1}(L_{\alpha^{g+1}, \beta^{g+1}})$ را تعیین کنید.
- گام ۴. اگر $f(L^g) - f(L^{g+1}) < \delta$ ، آن‌گاه توقف کنید، در غیر این صورت قرار دهید $g = g + 1$ و به گام ۲ بروید.

۳-۵-۲ حالت نرم l_p

اگر به جای فاصله اقلیدسی از فاصله l_p نرم استفاده کنیم، آن‌گاه تابع هدف بصورت زیر است:

$$f(L_{\alpha,\beta}) = \sum_{m \in M} w_m \left(\sum_{j=1}^3 |a_{mj} - \alpha_j \lambda_m^* - \beta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

که این تابع نیز نه محدب است و نه مقعر، اما می توان یک می نیمم موضعی را با استفاده از الگوریتم زیر یافت.

الگوریتم [29] 2-3 (برای مکانیابی یک خط با کوتاه ترین فاصله l_p)

در الگوریتم 2-3، نیاز به روش وایزفلد^{۲۷} داریم بنابراین ابتدا الگوریتم weisfeld را به طور مختصر معرفی می کنیم.

مساله زیر را در نظر بگیرید

$$\min_X W(X) = \sum_{j=1}^n w_j \left(|x_1 - a_{j1}|^p + |x_2 - a_{j2}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

که در آن $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ مقادیر مجهول و (a_{j1}, a_{j2}) مقادیر معلومی باشند و می خواهیم X بهینه را با

استفاده از روش وایزفلد بیابیم. ثابت می شود این مساله را می توان با مساله زیر تقریب زد

$$\min_X WH(X) = \sum_{j=1}^n w_j \left(\left((x_1 - a_{j1})^2 + \varepsilon \right)^{\frac{p}{2}} + \left((x_2 - a_{j2})^2 + \varepsilon \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

حال برای یافتن می نیمم این تابع و x_k ، که $(k=1,2)$ ، از این تابع نسبت به x_k مشتق می گیریم. در

تکرار $\ell+1$ داریم

$$x_k^{(\ell+1)} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{w_j a_{jk}}{d'(X^{(\ell)}, a_j) d''(x_k^{(\ell)}, a_{jk})}}{\sum_{j=1}^n \frac{w_j}{d'(X^{(\ell)}, a_j) d''(x_k^{(\ell)}, a_{jk})}}$$

که در آن

^{۲۷}Weisfeld

$$d'(X, a_j) = \left(\left((x_1 - a_{j1})^2 + \varepsilon \right)^{\frac{p}{2}} + \left((x_2 - a_{j2})^2 + \varepsilon \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{1 - \frac{1}{p}}$$

9

$$d''(x_k, a_{jk}) = \left((x_k - a_{jk})^2 + \varepsilon \right)^{1 - \frac{p}{2}}$$

اکنون به معرفی الگوریتم یافتن یک خط با کوتاه‌ترین فاصله l_p می‌پردازیم:

گام ۱. یک جواب آغازین (α^0, β^0) را انتخاب کنید، مقادیر λ_m^* و مقدار تابع هدف $f(L_{\alpha^0, \beta^0}^0)$ را محاسبه کنید و شمارش‌گر را $g = 0$ قرار دهید.

گام ۱، ۲. با ثابت در نظر گرفتن α^g و مقادیر λ_m^* بهترین نقطه شروع $\beta^{g+1} = (\beta_1^{g+1}, \beta_2^{g+1}, \beta_3^{g+1})$ را برای خط، با استفاده از الگوریتم وایزفلد برای مساله وبر، بیابید.

گام ۲، ۲. با ثابت نگه‌داشتن β^{g+1} و مقادیر λ_m^* ، تکرارهای وایزفلد را روی α اجرا کنید تا این که معیار توقف حاصل شود. جواب جاری را با $(\alpha^{g+1}, \beta^{g+1})$ نشان دهید.

گام ۳. برای جواب جاری، λ_m^* ، $m \in M$ را محاسبه کنید. اگر $f(L_{\alpha, \beta}^g) - f(L_{\alpha, \beta}^{g+1}) < \delta$ توقف کنید در غیراین صورت قرار دهید $g = g + 1$ و به گام ۱، ۲ بروید.

در گام ۱، ۲ به این نتیجه می‌رسیم که مساله یافتن β^{g+1} به یک مساله تک وسیله‌ای کلاسیک در R^3 با فاصله l_p کاهش می‌یابد که به ازای هر $m \in M$ ، تسهیلات بصورت

$$A'_m = (a_{m1} - \lambda_m^* \alpha_1, a_{m2} - \lambda_m^* \alpha_2, a_{m3} - \lambda_m^* \alpha_3)$$
 می‌باشد.

تکرارهای وایزفلد در هر دو بخش از گام ۲ به یک دنباله از تکرارهای نزولی برای مقادیر ثابت λ_m^* منجر می‌شود. با به هنگام کردن مقادیر λ_m^* در گام ۳ برای خط جدید $L_{\alpha, \beta}^{g+1}$ ، فواصل تا خط را بوسیله کوتاه‌ترین فواصل جایگزین می‌کنیم، در نتیجه بهبودی برای تابع هدف فراهم می‌شود. بنابراین روش تکرار به یک نقطه ثابت همگرا می‌شود.

۳-۵-۳ حالت مستطیلی

برای حل مسائل مکانیابی خط در R^3 بر حسب فواصل مستطیلی، مجدداً می‌توان همانند حالت نرم l_p یک جستجوی محلی را برای یافتن یک می‌نیمم موضعی بکار برد، اما گام‌های ۲,۱ و ۲,۲ از الگوریتم 2-3 را می‌توان با هم ترکیب کرد تا به زمان اجرای خطی رسید که در الگوریتم زیر نشان داده شده است.

الگوریتم [29] 3-3 (برای مکانیابی یک خط با کوتاهترین فاصله مستطیلی)

گام ۱. یک جواب آغازین (α^0, β^0) را انتخاب کنید، مقادیر λ_m^* و مقدار تابع هدف $f(L_{\alpha^0, \beta^0}^0)$ را محاسبه کنید و شمارش‌گر را $g = 0$ قرار دهید.

گام ۲. با ثابت نگه‌داشتن λ_m^* ، برای α و β جواب بهینه را بیابید. جواب را با $L_{\alpha^{g+1}, \beta^{g+1}}^{g+1} = L_{\alpha^g, \beta^g}^g$ نشان دهید.

گام ۳. به ازای جواب جاری، برای هر $m \in M$ مقدار λ_m^* را محاسبه کنید. اگر $f(L_{\alpha, \beta}^g) - f(L_{\alpha, \beta}^{g+1}) < \delta$ توقف کنید در غیر این صورت قرار دهید $g = g + 1$ و به گام ۲ بروید. مساله می‌نیمم سازی گام ۲ بصورت زیر است.

$$\min_{\alpha, \beta} \sum w_m \left(|a_{m1} - \lambda_m^* \alpha_1 - \beta_1| + |a_{m2} - \lambda_m^* \alpha_2 - \beta_2| + |a_{m3} - \lambda_m^* \alpha_3 - \beta_3| \right)$$

این مساله را می‌توان به سه زیرمساله P_k ، $k = 1, 2, 3$ ، تجزیه کرد که هر کدام یک مساله مکانیابی خط در صفحه بر حسب فاصله قائم است. در زیرمساله P_k ، به ازای هر $m \in M$ ، تسهیلات بصورت داده می‌شوند. وزن‌ها همان وزن‌های اصلی w_m می‌باشند و جواب بهینه یک خط با شیب α_k^* و نقطه تقاطع β_k^* را می‌دهد. هر سه زیرمساله را با توجه به ساختارشان می‌توان با استفاده از برنامه ریزی خطی در زمان خطی حل کرد زیرا همان‌طور که در بخش ۲-۶

اشاره شد، مساله مکانیابی خط در صفحه با استفاده از فاصله قائم در زمان $O(n)$ حل می-
شود[32].

فصل چهارم

مکانیابی خط نیمه ناخوشایند

۱-۴ مقدمه

تاکنون مساله مکانیابی خط را برای حالتی مورد بحث و بررسی قرار دادیم که وزن نقاط مثبت باشد، اما در این فصل حالتی را مطرح و بررسی می‌کنیم که نقاط دارای وزن مثبت و منفی بوده و مجموع وزن‌ها مثبت باشد، یعنی نزدیکی خط به بعضی نقاط و دور بودن خط از بعضی نقاط، مورد نظر است. در واقع در این حالت برای حل مساله بهنقطاتی که باید از خط بهینه دور باشند، وزن منفی و به بقیه نقاط وزن مثبت می‌دهیم و سپس مساله را حل می‌کنیم. از کاربردهای این مساله می‌توان به تعیین خطوطی که برای بعضی نقاط ناخوشایند است مانند ریل‌های راه آهن که مثلاً باید از بیمارستانها دور باشند اشاره کرد. در این بخش، مساله خط میانه را با وزن‌های مثبت و منفی و با استفاده از نرم‌های اقلیدسی و مستطیلی بررسی می‌کنیم و خواصی را برای آن بدست می‌آوریم. همچنین با استفاده از این نتایج یک الگوریتم برای یافتن خط نیمه ناخوشایند با نرم اقلیدسی بدست می‌آوریم که نتایج آن را در فصل بعد ارائه خواهیم داد.

۲-۴ مساله مکانیابی خط نیمه ناخوشایند^{۲۸} با نرم اقلیدسی

در این قسمت مساله خط میانه با وزن‌های مثبت و منفی را با استفاده از نرم اقلیدسی مورد بررسی قرار می‌دهیم و خواصی را برای این مساله بدست می‌آوریم. همچنین با توجه به این خواص، نشان می‌دهیم گزاره‌هایی که برای مساله مکانیابی خط میانه با وزن‌های مثبت برقرار است، لزوماً برای مساله با وزن مثبت و منفی برقرار نمی‌باشد لذا الگوریتم‌های ارائه شده در فصل دوم، برای مساله نیمه ناخوشایند قابل تعمیم نیست. بنابراین بر آن شدیم که با استفاده از این خواص الگوریتمی را برای

^{۲۸}Semi-obnoxious

مکانیابی خط نیمه ناخوشایند بدست آوریم. همچنین در تمامی گزاره‌های زیر، مجموع وزن‌ها را مثبت

در نظر می‌گیریم یعنی $W = \sum_{m \in M} w_m > 0$ است.

قضیه 4-2-1: اگر خط L جواب مساله می‌نیمم سازی $f(L) = \sum_{m \in M} w_m d(E_{x_m}, L)$ همراه با نرم l_2 باشد

و S_1 و S_2 مجموعه نقاط دو طرف خط L باشد و A مجموعه نقاط روی خط L باشد آن‌گاه

$$S_1 \cup A \neq \emptyset \text{ و } S_2 \cup A \neq \emptyset.$$

برهان: فرض کنیم $S_1 \cup A = \emptyset$ یا $S_2 \cup A = \emptyset$ (فرض خلف). بدون از دست دادن کلیت فرض می‌-

کنیم $S_1 \cup A = \emptyset$. بنابراین هیچ نقطه‌ای روی خط L و نیز در S_1 واقع نمی‌باشد. همواره داریم:

$$f(L) = \sum_{m \in S_1 \cup A} w_m d(E_{x_m}, L) + \sum_{m \in S_2} w_m d(E_{x_m}, L)$$

حال اگر خط L را به موازات خودش به اندازه ε به سمت S_2 حرکت دهیم به‌طوری‌که هیچ نقطه‌ای را

شامل نشود و خط جدید را L' بنامیم داریم:

$$f(L') = \sum_{m \in S_2'} w_m d(E_{x_m}, L') = \sum_{m \in S_2} w_m (d(E_{x_m}, L) - \varepsilon) = f(L) - \varepsilon \sum_{m \in S_2} w_m < f(L)$$

یعنی خطی مانند L' یافته‌ایم که مقدار تابع هدف به ازای آن از مقدار تابع هدف به ازای خط L بطور

اکید کمتر است که این تناقض با بهینگی L است. لذا فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود. \square

نتیجه 4-2-2: از قضیه فوق مستقیماً نتیجه می‌شود مساله می‌نیمم سازی مفروض با نرم l_2 همواره

دارای جواب بهینه متناهی است.

در مساله مکانیابی خط ناخوشایند، تمام نقاط دارای وزن منفی می‌باشند و به همین دلیل چون مساله

از نوع می‌نیمم سازی است، اگر خط در بی‌نهایت واقع شود آن‌گاه جواب بهینه نامتناهی خواهیم

داشت. یعنی برای تمام مسائل با وزن منفی، جواب نامتناهی خواهیم داشت اما در مبحث بهینه سازی،

با توجه به وجود محدودیت‌ها و هزینه‌ها، این جواب بی‌معنی است. لذا برای جلوگیری از این

موضوع، مساله مکانیابی خط ناخوشایند را با محدودیت زیر در نظر می‌گیرند:

حداقل یک نقطه باید در هر یک از دوطرف خط یا روی خط بهینه واقع باشد.

اما بنابر قضیه فوق، مساله مکانیابی خط نیمه ناخوشایند همواره دارای جواب بهینه متناهی است و خط بهینه پوسته محدب نقاط را قطع می‌کند، بنابراین محدودیت ذکر شده به خودی خود برای مساله خط نیمه ناخوشایند برقرار است.

قضیه 3-2-4: در مساله می‌نیمم سازی $f(L) = \sum_{m \in M} w_m d(E_{x_m}, L)$ همراه با نرم l_2 ، هیچ خط بهینه‌ای

وجود ندارد که فقط از نقطه ای با وزن منفی بگذرد و هیچ نقطه با وزن مثبتی را شامل نشود.

برهان: فرض کنیم L یک خط بهینه باشد که از یک نقطه با وزن منفی مانند a گذشته باشد و هیچ نقطه مثبتی را شامل نشود. چون یک نقطه روی خط واقع است بنابر قضیه 1-2-4، بقیه نقاط در S_1 یا S_2 یا در هر دو قرار دارند. مجموع وزن نقاط در S_1 و S_2 را محاسبه می‌کنیم و آن‌ها را به ترتیب W_1 و W_2 می‌نامیم. همواره داریم $W_1 \leq W_2$ یا $W_2 \leq W_1$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $W_1 \leq W_2$. حال مشابه اثبات قضیه 1-2-4، خط L را به موازات خودش به اندازه ε به سمت S_2 حرکت می‌دهیم به طوری که دیگر نقطه منفی a روی خط نباشد و همچنین هیچ نقطه ای روی خط قرار نگیرد. خط جدید را L' می‌نامیم و داریم:

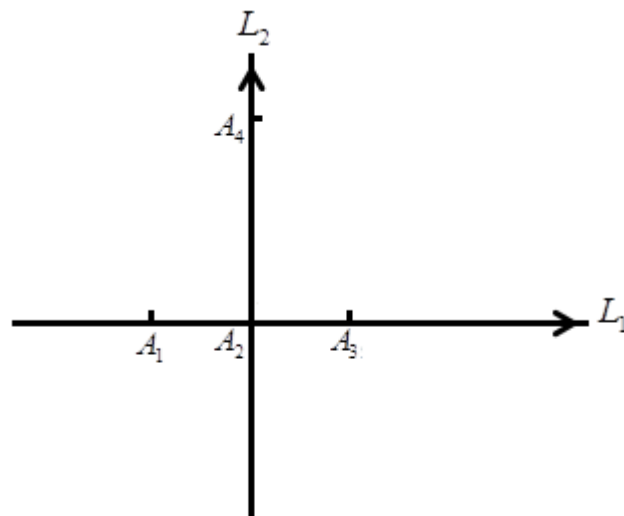
$$\begin{aligned} f(L') &= \sum_{m \in S'_2} w_m d(E_{x_m}, L') + \sum_{m \in S'_1} w_m d(E_{x_m}, L') \\ &= \sum_{m \in S_2} w_m (d(E_{x_m}, L) - \varepsilon) + \sum_{m \in S_1} w_m (d(E_{x_m}, L) + \varepsilon) + d(a, L') w_a \\ &= f(L) + \varepsilon \left(\sum_{m \in S_1} w_m - \sum_{m \in S_2} w_m \right) + \varepsilon w_a \\ &= f(L) + \varepsilon (W_1 - W_2) + \varepsilon w_a < f(L) \end{aligned}$$

با توجه به این که $W_1 - W_2 \leq 0$ و $w_a < 0$ ، رابطه فوق به وضوح برقرار است. لذا یک خط مانند L' یافتیم که مقدار تابع هدف به ازای آن از $f(L)$ کمتر است که این تناقض با بهینگی L است. بنابراین

خطی موجود نیست که از یک نقطه منفی بگذرد و از هیچ نقطه مثبتی عبور نکند. \square

در واقع قضیه فوق بیان می‌کند بهتر است خط بهینه تا حد امکان از نقاط ناخوشایند عبور نکند. در زیر با مثالی نشان می‌دهیم هنگامی که یک نقطه با وزن منفی با دو نقطه دیگر با وزن‌های مثبت در یک راستا باشد، ممکن است خط بهینه از این نقطه منفی نیز بگذرد.

مثال 4-2-4: فرض کنید $A_1 = (-1, 0)$ ، $A_2 = (0, 0)$ ، $A_3 = (1, 0)$ ، $A_4 = (0, 2)$ چهار نقطه در صفحه بترتیب با وزن‌های $w_1 = 5$ ، $w_2 = -1$ ، $w_3 = 4$ ، $w_4 = -1$ باشند (شکل ۱-۴)، آن‌گاه:



شکل ۱-۴

خط L_1 را خط گذرنده از نقاط A_1 و A_2 و A_3 در نظر می‌گیریم و همچنین فرض می‌کنیم خط L_2 ، منطبق بر محور قائم و گذرنده از نقاط A_2 و A_4 باشد. برای نمونه مقدار تابع هدف میانه را برای این دو خط محاسبه می‌کنیم.

$$f(L_1) = w_4 \times d(A_4, L_1) = -1 \times 2 = -2$$

$$f(L_2) = w_1 \times d(A_1, L_2) + w_3 \times d(A_3, L_2) = (5 \times 1) + (4 \times 1) = 9$$

حال هر خط دیگر بجز L_1 را در نظر بگیریم مقدار تابع هدف به ازای آن از -2 بیشتر است. یعنی L_1 که از یک نقطه با وزن منفی می‌گذرد بهینه است و این در حالی است که این نقطه با دو نقطه با وزن مثبت هم‌راستا می‌باشد.

همچنین با ارائه مثالی به آسانی می‌توان حالتی را نشان داد که در آن یک نقطه منفی با دو نقطه مثبت در یک راستا باشد ولی خط بهینه از این نقطه منفی عبور نکند.

مثال 4-2-5: اگر $A_1 = (-2, 0)$ ، $A_2 = (0, 0)$ ، $A_3 = (1, 0)$ ، $A_4 = (0, 2)$ چهار نقطه در صفحه با وزن‌های به ترتیب $w_1 = 5$ ، $w_2 = -2$ ، $w_3 = 1$ ، $w_4 = -1$ باشند.

اگر خط L_1 را خط گذرنده از نقطه A_1 و موازی با محور قائم در نظر بگیریم و خط L_2 را گذرنده از نقاط A_1 و A_2 و A_3 در نظر بگیریم، با محاسبه مقدار تابع هدف به ازای این خطوط داریم:

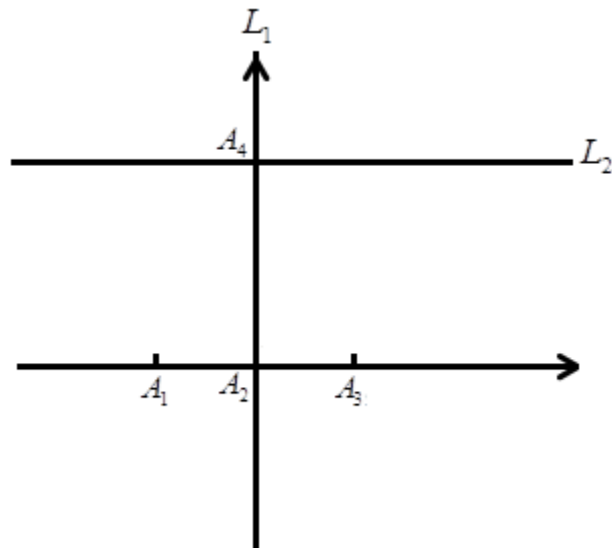
$$f(L_1) = w_2 \times d(A_2, L_1) + w_3 \times d(A_3, L_1) + w_4 \times d(A_4, L_1) = (-2 \times 2) + (1 \times 3) + (-1 \times 2) = -3$$

$$f(L_2) = w_4 \times d(A_4, L_2) = -1 \times 2 = -2$$

مشاهده می‌شود خط L_1 که از نقطه با وزن مثبت A_1 عبور کرده است نسبت به خط L_2 که علاوه بر دو نقطه مثبت، از نقطه منفی A_2 نیز عبور کرده است، خط بهتری می‌باشد. بنابراین L_2 بهینه نیست. علاوه بر این خطوط دیگری که در این صفحه در نظر بگیریم نیز دارای مقدار تابع هدف بیشتر از -3 هستند و این نشان می‌دهد L_1 بهینه است.

Remark: همان‌طور که گفته شد، برای مساله مکانیابی خط در صفحه با وزن‌های مثبت، با نرم اقلیدسی، یک خط بهینه گذرنده از دو نقطه وجود دارد. با این پس زمینه ممکن است بنظر آید که این خاصیت، برای مکانیابی خط با وزن‌های مثبت و منفی نیز برقرار است، اما در مثال زیر هیچ خط بهینه‌ای از دو تا از نقاط مفروض عبور نمی‌کند.

مثال 4-2-6: فرض کنید $A_1 = (-1, 0)$ و $A_2 = (0, 0)$ و $A_3 = (1, 0)$ و $A_4 = (0, \sqrt{3})$ و وزن نقاط به ترتیب $w_1 = -2$ ، $w_2 = 1$ ، $w_3 = -2$ ، $w_4 = 6$ باشند (شکل ۴-۲).



شکل ۲-۴

فرض کنیم L_1 خط گذرنده از نقاط A_2 و A_4 باشد و L_2 ، خطی باشد که از نقطه A_4 عبور کرده و موازی با محور افقی باشد. در این صورت:

$$f(L_1) = w_1 \times d(A_1, L_1) + w_3 \times d(A_3, L_1) = (-2 \times 1) + (-2 \times 1) = -4$$

$$f(L_2) = w_1 \times d(A_1, L_2) + w_2 \times d(A_2, L_2) + w_3 \times d(A_3, L_2) \\ = (-2 \times \sqrt{3}) + (-2 \times \sqrt{3}) + (1 \times \sqrt{3}) = -3\sqrt{3} \approx -5.1$$

بنابراین خط L_2 که تنها از یک نقطه می‌گذرد، نسبت به خط L_1 که از دو نقطه مثبت می‌گذرد، بهتر است بنابراین L_2 بهینه می‌باشد. پس خاصیت Med2 در فصل ۲، برای مساله مکانیابی نیمه ناخوشایند قابل تعمیم نیست.

با توجه به مثال‌ها و قضایای فوق، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم‌های ارائه شده برای مکانیابی خط در صفحه در حالتی که وزن نقاط مثبت است را نمی‌توان برای مسائل مکانیابی خط نیمه ناخوشایند بکاربرد، زیرا در آن الگوریتم‌ها از گزاره‌هایی مانند Med1 استفاده شده است و الگوریتم را براساس این خواص ارائه داده اند در حالی که این گزاره برای مکانیابی خط نیمه ناخوشایند لزوماً برقرار نیست. همچنین ما ثابت کردیم در مساله مکانیابی خط نیمه ناخوشایند، خط بهینه از یک نقطه منفی منحصر به فرد عبور نمی‌کند و این در حالی است که این خاصیت در مساله مکانیابی خط با وزن

مثبت جایگاهی ندارد زیرا تمام وزن‌ها مثبت اند و به همین دلیل در آن الگوریتم‌ها این خاصیت در نظر گرفته نشده است. به دلایلی که گفته شد، بعد از بررسی مساله مکانیابی خط نیمه ناخوشایند و بدست آوردن خواص مختلف، ارائه یک الگوریتم کارا برای اینگونه مسائل که البته در دنیای واقعی کاربردیتrend لازم و مفید به نظر می‌رسد که در ادامه به معرفی آن خواهیم پرداخت.

۴-۳ مساله مکانیابی خط نیمه ناخوشایند با نرم مستطیلی

در این بخش مساله مکانیابی خط میانه را برای نقاط با وزن مثبت و منفی با استفاده از نرم مستطیلی یا l_1 مطرح کرده و خواص و نتایجی را برای آن بدست می‌آوریم. ضمناً در تمامی گزاره‌های زیر نیز مجموع وزن‌ها را مثبت در نظر می‌گیریم.

فرض کنیم خط L بصورت $L = \{(x_1, x_2) : x_2 = sx_1 + b\} \subset R^2$ باشد. فاصله یک نقطه مفروض تا خط L با استفاده از متر l_1 (مستطیلی) به صورت زیر است:

$$l_1(E_{x_m}, L) = \min \{d_{hor}(E_{x_m}, L), d_{ver}(E_{x_m}, L)\}$$

که در آن: $d_{hor}(E_{x_m}, L) = |sa_{m_1} - a_{m_2} + b|$ و $d_{ver}(E_{x_m}, L) = \frac{1}{|s|} |sa_{m_1} - a_{m_2} + b|$ که d_{hor} و d_{ver}

به ترتیب فاصله افقی و قائم بین نقاط مفروض و خط L می‌باشد که نحوه بدست آمدن این روابط در بخش ۲-۴ آمده است. هریک از d_{hor} و d_{ver} تنها به شیب خط وابسته است و نسبت به نقاط و همچنین b مستقل می‌باشند. در واقع اگر $0 < |s| < 1$ آن‌گاه فاصله نقطه از خط، موازی با محور y ‌ها اندازه گیری می‌شود یعنی همان d_{ver} و در غیر این صورت d_{hor} را در نظر می‌گیریم.

لم 1-3-4: با استفاده از نرم l_1 ، اگر برای یکی از نقاط مفروض می‌نیمم فاصله تا خط برحسب فاصله افقی (قائم) باشد برای تمامی نقاط نیز می‌نیمم فاصله برحسب فاصله افقی (قائم) است.

برهان: با توجه به توضیحات فوق، از آنجا که شیب خط ثابت است واضح است اینکه می‌نیمم فاصله برحسب فاصله افقی یا قائم باشد به شیب خط وابسته است بنابراین لم به راحتی نتیجه می‌شود. □

تذکر: فرض کنیم خط L_1 به صورت $y = sx + b$ باشد که s و b به ترتیب شیب و عرض از مبدا خط باشند، حال اگر خط L_1 را به موازات خودش به اندازه ε حرکت دهیم، خطی مانند L_2 با معادله $y = sx + b'$ خواهیم داشت. لذا اگر $d(L_1, L_2)$ را به عنوان فاصله بین دو خط موازی L_1 و L_2 در نظر

بگیریم داریم: $d(L_1, L_2) = \frac{|b-b'|}{\sqrt{1+s^2}}$ اما از آن جا که $d(L_1, L_2) = \varepsilon$ لذا داریم:

$$|b-b'| = \varepsilon \sqrt{1+s^2} \Rightarrow b' = b \pm \varepsilon \sqrt{1+s^2}$$

حال اگر با جابه جایی خط به اندازه ε به موازات خودش، با توجه به این که با نرم مستطیلی سروکار داریم، هر یک از نقاط به اندازه ε_i به خط جدید نزدیک می شوند که این مقدار ε_i برای تمامی نقاط مساوی بوده و برابر است با $|b-b'|$.

قضیه 4-3-2: اگر خط L جواب مساله می نیمم سازی $f(L) = \sum_{m \in M} w_m d(E_{x_m}, L)$ همراه با نرم l_1

باشد و S_1 و S_2 مجموعه نقاط دو طرف خط L باشد و A مجموعه نقاط روی خط L باشد آن گاه $S_1 \cup A \neq \emptyset$ و $S_2 \cup A \neq \emptyset$.

برهان: همانند اثبات قضیه 4-2-1، فرض کنیم $S_1 \cup A = \emptyset$ یا $S_2 \cup A = \emptyset$ (فرض خلف). بدون از دست دادن کلیت فرض می کنیم $S_1 \cup A = \emptyset$. بنابراین هیچ نقطه ای روی خط L و نیز در S_1 واقع نمی باشد. برای خط بهینه مفروض L داریم:

$$f(L) = \sum_{w_i \in S_1 \cup A} w_i d(E_{x_i}, L) + \sum_{w_i \in S_2} w_i d(E_{x_i}, L)$$

حال اگر خط L را به اندازه ε به موازات خودش به سمت S_2 حرکت دهیم به طوریکه هیچ نقطه ای

$$f(L') = \sum_{w_i \in S_2'} w_i d(E_{x_i}, L') \quad \text{را شامل نشود، خط جدید را } L' \text{ بنامیم آن گاه:}$$

از آنجا که با نرم l_1 سروکار داریم بنابراین بنا بر لم قبل فاصله نقاط تا خط بر حسب نرم l_1 توسط d_{ver} یا d_{hor} تعیین می شوند. فرض کنیم برای تمام نقاط موجود، d_{hor} کمترین مقدار باشد. چون شیب خط جدید L' تغییر نکرده است، باز هم فاصله نقاط تا خط جدید L' توسط d_{hor} تعیین می شود. فرض کنیم برای هر نقطه E_{x_i} ، $i=1,2,\dots,m$ ، فاصله افقی آن نقطه تا خط جدید با حرکت به اندازه ε به مقدار ε_i تغییر کرده باشد بنابراین با محاسبه مقدار تابع هدف برای خط جدید داریم:

$$\begin{aligned} f(L') &= \sum_{w_i \in S'_2} w_i d_{hor}(E_{x_i}, L') = \sum_{w_i \in S_2} w_i (d_{hor}(E_{x_i}, L) - \varepsilon_i) \\ &= \sum_{w_i \in S_2} w_i d_{hor}(E_{x_i}, L) - \sum_{w_i \in S_2} w_i \varepsilon_i \end{aligned}$$

حال با توجه به تذکر قبل، $\varepsilon_i = |b-b'| > 0$ و همچنین با توجه به این که فرض بر این است که مجموع وزن‌ها مثبت است لذا $\sum_{w_i \in S_2} w_i > 0$ ، بنابراین:

$$f(L') = \sum_{w_i \in S_2} w_i d_{hor}(E_{x_i}, L) - |b-b'| \sum_{w_i \in S_2} w_i = f(L) - |b-b'| \sum_{w_i \in S_2} w_i < f(L)$$

که این تناقض با بهینگی L است بنابراین فرض خلف باطل است و حکم ثابت می شود. □

همین حکم برای وقتی که نرم l_1 بوسیله d_{ver} تعیین شود نیز برقرار است.

نتیجه 3-3-4: مساله خط میانه با وزن‌های مثبت و منفی که مجموع وزن‌ها مثبت باشد، با استفاده از نرم l_1 همواره دارای جواب بهینه متناهی است.

برهان: همانند نتیجه 2-2-4 می باشد. □

قضیه 4-3-4: در مساله می‌نیمم سازی $f(L) = \sum_{m \in M} w_m d(E_{x_m}, L)$ ، با استفاده از نرم l_1 ، هیچ خط

بهینه ای موجود نمی‌باشد که فقط از نقطه ای منفی بگذرد و هیچ نقطه مثبتی را شامل نشود.

برهان: با استفاده از قضیه 2-3-4 و نیز قضیه 3-2-4، بوضوح حکم برقرار است. □

شایان ذکر است، مثال‌های 4-2-4 و 5-2-4 نیز برای نرم مستطیلی I_1 نیز قابل تعمیم است. یعنی با استفاده از این نرم نیز ممکن است در حالتی که یک نقطه منفی با دو نقطه با وزن مثبت دیگر در یک راستا باشند، خط بهینه از این نقطه منفی نیز بگذرد.

تذکر: همانطور که در فصل دوم اشاره شد، در مساله مکانیابی خط میانه در صفحه با استفاده از نرم مستطیلی، خط بهینه از حداقل دو تا از نقاط موجود عبور می‌کند. اما با استفاده از مثال 6-2-4 همین فصل و بکارگیری نرم مستطیلی به جای اقلیدسی در محاسبات به وضوح می‌توان نشان داد که خاصیت Med2 برای مکانیابی خط نیمه ناخوشایند با استفاده از نرم مستطیلی نیز قابل تعمیم نمی‌باشد.

فصل پنجم

روش بهینه سازی پرندگان (PSO) برای حل مساله
مکانیابی خط

۱-۵ مقدمه

دانشمندان متعددی، قوانین ضروری حاکم بر گروه پرندگان و ماهیان را مورد مطالعه قرار داده‌اند و آن‌ها را شبیه‌سازی نموده‌اند. رعایت این قوانین توسط تک تک پرندگان و ماهیان، آنها را قادر ساخته تا با هم همگام شده و بدون برخورد با یکدیگر، در حرکات دسته جمعی به رقص آرائی بپردازند و صحنه‌های شگفت‌انگیزی را خلق کنند. در شبیه‌سازی، حرکت گله، در نتیجه تلاش همه اعضا (پرنده، ماهی و غیره) است که سعی می‌کنند در هنگام حرکت، فاصله بهینه را با همسایگان خود حفظ نمایند. شکل (۱-۵) نشان‌دهنده همکاری گروهی ماهیان، جهت به دام انداختن پلانکتون در مرکز گروه و تغذیه از آنها می‌باشد. در شکل (۲-۵) نیز ماهیان با حرکات دسته جمعی، سعی در گمراه کردن ماهیان بزرگتر دارند و از خود در برابر دشمنان محافظت می‌کنند. در شکل (۳-۵) پرندگان با حرکت گروهی و V شکل خود در زمان مهاجرت، در میزان مصرف انرژی خود تا حد زیادی صرفه جویی می‌کنند. بر رفتار اجتماعی سایر حیوانات و در بعضی حالات بر رفتار انسان‌ها نیز، قوانین مشابه‌ای حکم فرماست. هر چند که رفتار اجتماعی انسان‌ها خیلی پیچیده تر از حرکت گروهی پرندگان است، زیرا علاوه بر حرکت فیزیکی، انسان‌ها قادرند اعتقادات خود را سازگار کنند. بدین معنی که می‌توانند در فضای باور و اعتقادات نیز حرکت کنند. هر چند که دو نفر نمی‌توانند همزمان، فضای یکسانی را از محیط فیزیکی اطرافشان اشغال نمایند، اما آنها می‌توانند عقاید یکسانی داشته باشند و بدون برخورد باهم، موقعیت یکسانی از فضای اعتقادی را اشغال کنند. وجود این موارد در رفتار اجتماعی انسان‌ها، زمینه‌ساز شبیه‌سازی‌های آن شده است. مثال‌هایی که از طبیعت گرفته شده است، ثابت می‌کند که انتشار اطلاعات در میان اعضای یک جمعیت، ممکن است که یک فرآیند تکاملی برتری را فراهم آورد. این نظریه، ایده اصلی توسعه الگوریتم بهینه‌سازی پرندگان^{۲۹} (PSO) می‌باشد [33].

^{۲۹}Particle Swarm Optimization



شکل ۵-۱: همکاری گروهی ماهیان جهت یافتن غذا



شکل ۲-۵: حرکت دسته جمعی ماهیان جهت حفاظت خود در برابر دشمنان و گمراه نمودن آنها



شکل ۳-۵: حرکت V شکل پرندگان در زمان مهاجرت

۵-۲ مفاهیم الگوریتم PSO

الگوریتم PSO یک الگوریتم جستجوی اجتماعی است که از روی رفتار اجتماعی دسته‌های پرندگان مدل شده است. در ابتدا این الگوریتم به منظور کشف الگوهای حاکم بر پرواز همزمان پرندگان و تغییر ناگهانی مسیر آنها و تغییر شکل بهینه‌ی گروه به کار گرفته شد.

در PSO، ذرات در فضای جستجو قرار دارند. تغییر مکان ذرات^{۳۰} در فضای جستجو تحت تأثیر تجربه و دانش خودشان و همسایگانشان است. بنابراین موقعیت دیگر ذره‌های گروه^{۳۱} روی چگونگی جستجوی یک ذره اثر می‌گذارد. نتیجه‌ی مدل‌سازی این رفتار اجتماعی فرایند جستجویی است که ذرات به سمت نواحی موفق میل می‌کنند. ذرات در گروه از یکدیگر می‌آموزند و بر مبنای دانش بدست آمده به سمت بهترین همسایگان خود می‌روند.

۵-۳ الگوریتم بهینه‌سازی پرندگان (PSO)

الگوریتم PSO که به نام های الگوریتم انبوه ذرات، الگوریتم ازدحام ذرات و پرندگان نیز مشهور است، یکی از الگوریتم های بسیار پر کاربرد در زمینه بهینه‌سازی است. این الگوریتم سرعت همگرایی مناسبی دارد و در اغلب کاربردها، به عنوان گزینه اول مورد استفاده قرار می‌گیرد. با وجود قدمت ۱۴ ساله این الگوریتم، که در مقایسه با عمر الگوریتم ژنتیک بسیار کمتر است، گرایش به سمت این الگوریتم قدرتمند، هر روز بیشتر و بیشتر می‌شود. فرض کنید شما و گروهی از دوستانتان به دنبال گنج می‌گردید. هر یک از اعضای گروه یک فلزیاب و یک بی‌سیم دارد که می‌تواند مکان و وضعیت کار خود را به همسایگان نزدیک خود اطلاع بدهد. بنابراین شما می‌دانید آیا همسایگانتان از شما به گنج نزدیکترند یا نه؟ پس اگر همسایه‌ای به گنج نزدیکتر بود شما می‌توانید به طرف او حرکت کنید. با

^{۳۰} Particel

^{۳۱} Swarm

چنین کاری شانس شما برای رسیدن به گنج بیشتر می‌شود و همچنین گنج زودتر از زمانی که شما تنها باشید، پیدا خواهد شد.

این یک مثال ساده از رفتار جمعی است که افراد برای رسیدن به یک هدف نهایی همکاری می‌کنند. این روش مؤثرتر از زمانی است که افراد جداگانه عمل کنند. گروه را می‌توان به صورت مجموعه‌ای سازمان یافته‌تر از موجوداتی تعریف کرد که با یکدیگر همکاری می‌کنند. در کاربردهای محاسباتی، هوش اجتماعیاز موجوداتی مانند مورچه‌ها، زنبورها، موریانه‌ها، دسته‌های ماهیان و دسته‌ی پرندگان الگو برداری می‌شود. در این نوع اجتماعات هر یک از موجودات ساختار نسبتاً ساده‌ای دارند ولی رفتار جمعی آنها بی‌نهایت پیچیده است. برای مثال در کولونی مورچه‌ها^{۳۲} هر یک از مورچه‌ها یک کار ساده‌ی مخصوص را انجام می‌دهد ولی به طور جمعی عمل و رفتار مورچه‌ها، ساختن بهینه‌ی لایه، محافظت از ملکه و نوزادان، تمیز کردن لانه، یافتن بهترین منابع غذایی و بهینه‌سازی استراتژی حمله را تضمین می‌کند. رفتار کلی، یکگروه به صورت غیر خطی از آمیزش رفتارهای تک‌تک افراد اجتماع بدست می‌آید. یا به عبارتی یک رابطه‌ی بسیار پیچیده بین رفتار جمعی و رفتار فردی یک اجتماع وجود دارد. رفتار جمعی فقط وابسته به رفتار فردی افراد اجتماع نیست بلکه به چگونگی تعامل میان افراد نیز وابسته است. تعامل بین افراد، تجربه‌ی افراد درباره‌ی محیط را افزایش می‌دهد و موجب پیشرفت اجتماع می‌شود. ساختار اجتماعی گروه، بین افراد مجموعه کانالهای ارتباطی ایجاد می‌کند که طی آن افراد می‌توانند به تبادل تجربه‌های شخصی بپردازند، مدل‌سازی محاسباتیگروه‌ها کاربردهای موفق و بسیاری را در پی داشته است. اساس کار PSO بر این اصل استوار است که در هر لحظه در فضای جستجو، مکان هر ذره با توجه به بهترین مکانی که تاکنون در آن قرار گرفته است و بهترین مکانی که در کل همسایگی‌اش وجود دارد، تعیین می‌شود. فرض کنید می‌خواهیم زوج مرتب (x, y) را طوری بدست آوریم که تابع $F(X, Y) = X^2 + Y^2$ ، مینیمم شود. ابتدا نقاطی را به صورت تصادفی در فضای جستجو، روی صفحه‌ی $x-y$ انتخاب می‌کنیم. فرض کنید این دسته نقاط را به همسایگی تقسیم

^{۳۲}Ant Colony

کنیم که در هر همسایگی نقاط موجود با یکدیگر تعامل دارند. در هر همسایگی هر یک از نقاط به سمت بهترین نقطه در آن همسایگی و بهترین مکانی که آن نقطه تاکنون در آن قرار داشته است، حرکت می‌کند. برای حل یک مسئله چند متغیر بهینه‌سازی می‌توان از چندگروه استفاده کرد که هر یک از گروه‌ها کار مخصوصی را انجام می‌دهند. این همان ایده‌ای است که کلونی مورچگان از آن ریشه می‌گیرد. از آنجا که دانش هوش اجتماعی^{۳۳} بسیار جدید است در حال حاضر کاربردهای کمی از آن شناخته شده است. ولی صاحب‌نظران معتقدند با رشد روزافزون این علم، نقش مهمی را در علوم مختلف ایفا خواهد کرد.

همان‌طور که گفته شد اساس کار PSO بر این اصل استوار است که در هر لحظه هر ذره مکان خود را در فضای جستجو با توجه به بهترین مکانی که تاکنون در آن قرار گرفته است و بهترین مکانی که در کل همسایگی‌اش وجود دارد، تنظیم می‌کند.

الگوریتم PSO اولین بار در سال ۱۹۷۵ توسط ایبرهارت^{۳۴} و کندی^{۳۵} معرفی شد [33]. این تکنیک‌ها بسیار رشد کرده‌اند و نسخه اصلی این الگوریتم به طور واضحی در نسخه‌های امروزی نیز قابل شناخت است. تاثیرگذاری اجتماعی و یادگیری اجتماعی یک شخص را قادر می‌سازد تا ثبات دانستنی‌هایش را برقرار سازد. انسان‌ها مسائلشان را به کمک صحبت با دیگران و نیز به کمک برهم‌کنش با باورهایشان، گرایش‌هایشان و تغییر رفتارشان حل می‌کنند؛ این تغییرات را می‌توان به طور نمونه به شکل حرکت افراد به سوی یکدیگر در فضای آگاهی اجتماعی مجسم کرد. ذرات جمعی شبیه‌سازی شده، این نوع از بهینه‌سازی اجتماعی می‌باشند. مساله داه شده و چند راه برای ارزیابی مساله پیشنهادی به شکل کلی، "تابع شایستگی" نام دارد. یک فرایند تکراری برای بهبود کاندیدها در طی حرکت ذرات در نظر گرفته شده است. ذرات مکرراً شایستگی جواب‌های کاندیدا را ارزیابی می‌کنند و موقعیتی را که

^{۳۳}Social Intelligence

^{۳۴}Eberhart

^{۳۵}Kennedy

در آن بهترین موفقیت را داشته‌اند، به خاطر می‌سپارند. بهترین جواب، "بهترین ذره" یا "بهترین محل" نامیده می‌شود. هر ذره این اطلاعات را برای دیگر ذرات موجود در همسایگی قابل دسترسی می‌کند. همچنین آن‌ها نیز می‌توانند ببینند که دیگر ذرات موجود در همسایگی در کجا بهترین موفقیت را داشته‌اند. وقتی حرکت در فضای جستجو با در نظر گرفتن هوش جمعی باشد یعنی اگر موقعیت بقیه ذرات و همچنین بهترین موقعیتی که تا به حال داشته‌اند در نظر گرفته شود، نزدیکی به جواب سریعتر خواهد بود. گروه به صورت نمونه بوسیله ذرات در فضای چند بعدی که دارای مکان و سرعت است مدل سازی می‌شود. این ذرات در میان این ابر فضا حرکت می‌کنند و دو توانایی ضروری دارند:

- حافظه‌ای برای ذخیره‌سازی بهترین مکان خود
 - آگاهی در مورد بهترین موقعیت در همسایگی خود یا در کل فضای جواب.
- اعضای گروه مکان‌های خوب را به یکدیگر از طریق ارتباط انتقال می‌دهند و موقعیت و سرعتشان را بر حسب مکان‌های خوب تنظیم می‌کنند.
- هر ذره برای اعمال تغییری مناسب در مکان و سرعت خود اطلاعات زیر را داراست:

- "بهترین مکان عمومی" که برای همه شناخته شده است و هنگامی که هر ذره بهترین مکان جدیدی را شناسایی کند، فوراً برای بقیه ذرات اطلاعات مربوطه را به‌روز رسانی می‌کند.
 - "بهترین همسایگی" که ذره از طریق ارتباط با زیر مجموعه‌های گروه، آن را بدست می‌آورد.
 - "بهترین مکان محلی" که بهترین جوابی است که ذره تاکنون تجربه کرده است.
- همه ذرات شروع به تاثیرپذیری از "بهترین عمومی" می‌کنند تا سرانجام به آن نزدیک شوند.

ذرات در فضای جستجو در نزدیکی "بهترین جواب عمومی" حرکت می‌کنند و بقیه فضا را کاوش نمی‌کنند، به این پدیده "همگرایی" گفته می‌شود اگر ضریب سرعت را کوچک انتخاب کنیم، تمام

ذرات می‌توانند سرعتشان را کاهش دهند تا اینکه در "بهترین جواب عمومی" به سرعت صفر نزدیکتر شوند.

یک راه خروج از وضعیت همگرایی اولیه (نامطلوب) این است که دوباره به موقعیت ذرات (پس از رخ دادن همگرایی) مقدار نسبت دهیم [34].

در واقع هر ذره یک نقطه از فضای جواب را ارائه می‌دهد. همانند سایر الگوریتم‌های تکاملی، این پارامترها می‌توانند بسته به شرایط مساله، به صورت مقادیر حقیقی و یا به صورت کدگذاری شده، تعریف شوند. اساس الگوریتم، جستجوی فضای جواب با یک روش مناسب است، که توسط حرکت گله ای ذرات به سوی بهترین موقعیتی که در گذشته با آن روبرو شده‌اند، با این امید که در این فرآیند به موقعیت بهتری برسند، صورت می‌گیرد. و سرانجام همه ذرات در نقطه بهینه همگرا می‌شوند. در PSO، هر عضو دارای یک سرعت است که مطابق با آن در فضای جستجو حرکت می‌کند. علاوه بر آن، هر کدام از آن‌ها دارای حافظه نیز می‌باشند. یعنی بهترین موقعیتی که در فضای جستجو به آن می‌رسند را به خاطر می‌سپارند.

بنابراین حرکت هر عضو در دو جهت صورت می‌گیرد:

۱- به سوی بهترین موقعیتی که تا بحال داشته‌است.

۲- به سوی بهترین موقعیتی که بهترین عضو در همسایگی آنها داشته‌است.

۴-۵ مراحل اجرای الگوریتم

فرض کنیم که X ، فضای جست و جوی PSO، یک فضای جست و جوی n -بعدی و پیوسته باشد.

هر ذره در تکرار t ام الگوریتم PSO دارای سه ویژگی می باشد:

$x_j(t)$: موقعیت فعلی ذره j ام در تکرار t ام

$v_j(t)$: سرعت فعلی ذره j ام در تکرار t ام

$p_j(t)$: بهترین موقعیت فردی ذره j ام تا تکرار t ام

بنابراین با توجه به فضای جست و جوی n بعدی، $x_j(t)$ و $v_j(t)$ به صورت زیر می باشند

$$v_j(t) = (v_{j1}(t), v_{j2}(t), \dots, v_{jn}(t)) \quad (2-5) \quad x_j(t) = (x_{j1}(t), x_{j2}(t), \dots, x_{jn}(t)) \quad (1-5)$$

در حالت کلی $X = \prod_{i=1}^n [l_i, u_i]$ که l_i, u_i به ترتیب کران های بالا و پایین بعد i ام فضای جستجو

هستند.

بردارهای اولیه مکان و سرعت را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$x_j(0) = (x_{j1}(0), x_{j2}(0), \dots, x_{jn}(0)) \quad (3-5)$$

$$v_j(0) = (v_{j1}(0), v_{j2}(0), \dots, v_{jn}(0)) \quad (4-5)$$

که در آن

$$\begin{aligned} x_j(0) &\sim U[l_j, u_j] \quad j = 1, \dots, n \\ v_j(0) &\sim U[V_{\min j}, V_{\max j}] \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5-5)$$

و $U[l_j, u_j]$ توزیع یکنواخت روی بازه $[l_j, u_j]$ است.

میزان شایستگی هر ذره را برابر با مقدار تابع هدف به ازای آن تعریف می کنیم و سپس هر ذره با سرعت v که مبتنی بر شایستگی ذره و سایر ذرات گروه می باشد، در فضای جست و جو حرکت می کند. بهترین موقعیت فردی ذره تا تکرار t ام، $y(t)$ بهترین مقدار شایستگی برای ذره را نتیجه می دهد و بهترین موقعیتی می باشد که ذره از ابتدا تا تکرار t ام مشاهده کرده است. فرض کنید که در تکرار t ام PSO قرار داریم. با توجه به اینکه اندازه گروه برابر با m می باشد، می توان مجموعه های $S(t)$

به عنوان مجموعه مکان ها و $V(t)$ را به عنوان مجموعه سرعت ها را به صورت زیر تعریف کرد :

$$\begin{aligned} S(t) &= \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\} \\ V(t) &= \{v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t)\} \end{aligned} \quad (6-5)$$

توجه شود که n بعد فضا است و m تعداد ذرات در جمعیت است.

حال بر اساس تابع هدف $F(t)$ ، شایستگی هر ذره در $S(t)$ سنجیده می شود. مجموعه $F(t)$ به صورت زیر ساخته می شود:

$$F(t) = \{F(x_1(t)), F(x_2(t)), \dots, F(x_m(t))\} \quad (7-5)$$

حال بر اساس مجموعه $F(t)$ به راحتی می توان بهترین موقعیت فردی ذره i ام تا تکرار t ام، یعنی $y_i(t)$ را بر اساس رابطه زیر مشخص کرد:

$$y_i(t) = \begin{cases} x_i(t) & F(x_i(t)) < F(y_i(t-1)) \\ y_i(t-1) & o.w. \end{cases} \quad (8-5)$$

بعد از مشخص شدن $y_i(t)$ ها می توان مجموعه $P(t)$ به عنوان مجموعه بهترین موقعیت ها تا تکرار t ام را به صورت زیر تعریف کرد:

$$P(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)\} \quad (9-5)$$

بنابراین $\hat{y}(t) = y_g(t) = \arg \min_{i=1, \dots, m} F(y_i(t))$ بهترین موقعیت سراسری پیدا شده بین تمام ذرات گروه تا تکرار t ام می باشد.

پس از مشخص شدن مجموعه های $S(t)$ ، $P(t)$ ، و همچنین $\hat{y}(t)$ می توان موقعیت هر ذره در $S(t)$ را بر اساس روابط زیر به روز رسانی کرد:

$$v_i(t+1) = wv_i(t) + r_1c_1(y_i(t) - x_i(t)) + r_2c_2(\hat{y}(t) - x_i(t)) \quad (10-5)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \quad (11-5)$$

که در آن $r_1, r_2 \sim U(0,1)$ به منظور حفظ پراکندگی ذرات، القای خاصیت تصادفی بودن ذرات و جلوگیری از جهش ناگهانی ذرات PSO به کار برده می شوند و $v_i(t)$ در واقع جهت حرکت را نشان می دهد. c_1, c_2 ضرایب شتاب فردی و اجتماعی می باشند که مقادیر آنها بر اساس نتایج تجربی، از راه

آزمون و خطا تعیین می شوند. شای و ابرهات [35] و [36] با فرض اینکه $X = \prod_{i=1}^n [l_i, u_i]$ ، V_{\max} ، V_{\min}

را به صورت زیر تعریف کردند،

$$V_{\max j} = \gamma(u_j - l_j)$$

$$V_{\min} = -V_{\max j}$$

که γ با توزیع یکنواخت از بازه $[0,1]$ انتخاب می شود. الگوریتم PSO بر اساس روابط (۵-۱۰) و (۵-۵) (۱۱) فرآیند خود را بروز رسانی می کند تا اینکه معیار توقف حاصل شود.

هنگام بروز رسانی موقعیت ذرات PSO ممکن است حالتی اتفاق بیافتد که ذره امکان خروج از فضای جست و جوی X را پیدا کند. شای و ابرهات به منظور جلوگیری از خروج ذرات از فضای X مقید کردن v به $[V_{\min}, V_{\max}]$ را پیشنهاد کردند [37]، به طوریکه:

$$v_{ij}(t+1) = \begin{cases} V_{\max j} & v_{ij}(t+1) > V_{\max j} \\ V_{\min j} & v_{ij}(t+1) < V_{\min j} \end{cases}$$

اما اگر پس از مقید کردن v ذره همچنان تمایل به خروج از فضای جست و جو را داشت، این بار از مقید کردن x استفاده می کنیم، به این صورت که

$$x_{ij}(t+1) = \begin{cases} x_{ij}(t+1) - \alpha & x_{ij}(t+1) > u_j \\ x_{ij}(t+1) + \beta & x_{ij}(t+1) < l_j \end{cases} \quad (12-5)$$

به طوریکه

$$\alpha \sim U[x_{ij}(t+1) - u_j, x_{ij}(t+1) - l_j]$$

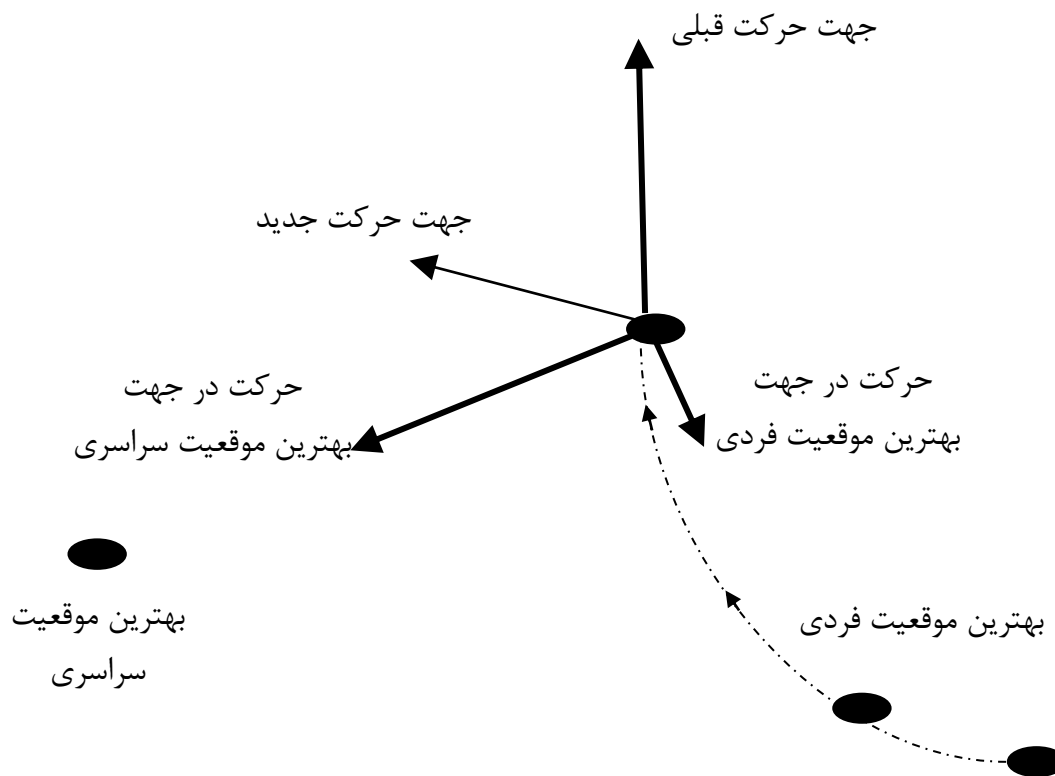
$$\beta \sim U[l_j - x_{ij}(t+1), u_j - x_{ij}(t+1)] \quad (13-5)$$

به منظور درک بهتر معادلات (۵-۱۰) و (۵-۱۱) حرکت ذره i ام و تکرار $t+1$ ام، $x_i(t+1)$ در شکل (۴-۵) نشان داده شده است.

سرعت $v_i(t)$ متناسب با جهت حرکت پیشین ذره می باشد که به طور چشمگیری از تغییر ناگهانی ذره جلوگیری کرده و حرکت ذره را به سمت جهت فعلی سوق می دهد.

مؤلفه فردی می باشد که میزان بازدهی ذره i ام را نسبت به مراحل قبل تعیین می کند.

می کند. $r_p c_p (\hat{y}(t) - x_i(t))$ مولفه اجتماعی می باشد که میزان بازدهی ذره i ام را نسبت به کل گروه تعیین



شکل ۴-۵: نمایش چگونگی حرکت ذرات در الگوریتم PSO

مرحله آغازین از الگوریتم PSO شامل گام های زیر می باشد :

۱- در شروع الگوریتم، مولفه z ام از ذره i ام را با x_{ij} نشان می دهیم و با توزیع تصادفی یکنواخت در بازه $[l_j, u_j]$ مشخص کنید. و این روند را برای $j=1, \dots, n$, $i=1, \dots, m$ تکرار نمایید.

۲- در شروع الگوریتم، مولفه z ام بردار سرعت i ام را v_{ij} ، با توزیع تصادفی در بازه $[V_{min}, V_{max}]$ مشخص کنید و این روند را برای $j=1, \dots, n$, $i=1, \dots, m$ تکرار نمایید. به جای این روش می توان سرعت اولیه همه ذرات را صفر در نظر گرفت .

۳- در شروع الگوریتم $(i = 1, \dots, m)$ در نظر بگیرید. همچنین می توان به جای این روش، دو بردار تصادفی را برای هر یک از اعضا تولید کرده و برداری که شایستگی بهتری دارد را به y_i نسبت داد. به وضوح روش دوم به محاسبات بیشتری نیاز دارد.

۱-۴-۵ شبه کد الگوریتم PSO

شبه کد الگوریتم PSO به صورت زیر است:

مرحله ۱ آغاز الگوریتم

$$t = 0 \quad : 1-1$$

$$i = 1, \dots, m \quad x_i(t) \text{ تصادفی تولید شوند} \quad : 1-2$$

$$i = 1, \dots, m \quad v_i(t) \text{ تصادفی تولید شوند} \quad : 1-3$$

$$i = 1, \dots, m \quad y_i(t) \text{ بهترین موقعیت فردی ذرات تعیین شوند} \quad : 1-4$$

$$\hat{y}(t) = y_g(t) = \arg \min_{i=1, \dots, m} F(y_i(t)) \quad : 1-5$$

مرحله ۲ تا زمانی که معیار توقف حاصل نشده است مراحل زیر تکرار شوند:

$$2-1: \text{ برای ذره } i \text{، محاسبات زیر انجام شود:}$$

$$v_i(t+1) \text{ از رابطه (۱۰-۵) محاسبه شود.}$$

$$x_i(t+1) \text{ از رابطه (۱۱-۵) محاسبه شود.}$$

$$2-2: \text{ شرط } x \in [L, U] \text{ بررسی شده و در صورت لزوم از رابطه های اصلاح شدنی بودن}$$

استفاده شود و سپس $y_i(t)$ ها به روز شوند.

$$2-3: \hat{y}(t+1) = \arg \min_{i=1, \dots, m} F(y_i(t+1))$$

$$2-4: t = t + 1$$

یکی از مهمترین بخش های الگوریتم PSO معیار توقف آن است. در حالت کلی معیار توقف PSO به مسئله در دست حل بستگی دارد. در بعضی از مسائل، معیار توقف دستیابی به بیشینه تکرار مجاز از

قبل تعیین شده T می باشد و حال آنکه در برخی دیگر از مسائل معیار توقف، دستیابی به آستانه خطا از پیش تعیین شده ε در میزان شایستگی است.

اگر فقط از معیار T به منظور توقف PSO استفاده شود، ممکن است قبل از آنکه PSO به معیار T برسد، آستانه خطا برای مقدار شایستگی $\hat{y}(t)$ حاصل شود. بنابراین استفاده تنها از معیار T ، تنها محاسبات را افزایش می دهد.

همچنین اگر فقط از معیار آستانه خطا استفاده شود ممکن است حالتی رخ دهد که الگوریتم دچار همگرایی زودرس شود و لذا اگر از معیار T استفاده نشود، آنگاه الگوریتم PSO فرصت بهبود حالت رخ داده را ندارد. معیار دیگری که در شرط توقف الگوریتم می توان استفاده کرد، تعریف یک کران برای اجرای الگوریتم بعد از آخرین بهبود است. یعنی بعد از آخرین بروز رسانی $\hat{y}(t)$ ، چند مرحله الگوریتم اجرا شد و در $\hat{y}(t)$ بهبودی حاصل نشد، الگوریتم متوقف شود.

بنابراین در طیف وسیعی از مسائل، معیار توقف بر اساس ترکیب بیشینه تکرار مجاز T یا $|F_{\min} - F_{\max}| < \varepsilon$ یا $|F_{\min}| < \varepsilon$ می باشد که در آن

$$\begin{aligned} F_{\min} &= F(\hat{y}(t)) \\ F_{\max} &= F(\hat{z}(t)), \quad \hat{z}(t) = \arg \max_{i=1, \dots, m} F(y_i(t)) \end{aligned} \quad (14-5)$$

۵-۵ الگوریتم PSO برای مساله مکانیابی خط میانه نیمه ناخوشایند

همان طور که در فصل ۴ گفته شد، در مسائل مکانیابی خط نیمه ناخوشایند وزن نقاط مثبت و منفی می باشد و نشان دادیم خواصی که برای مساله مکانیابی خط در حالتی که وزن نقاط مثبت است لزوماً برای مسائل مکانیابی خط نیمه ناخوشایند برقرار نیست. لذا الگوریتم‌های ارائه شده برای مسائل با وزن مثبت، برای مکانیابی خط نیمه ناخوشایند قابل استفاده نمی باشد. برای مثال در فصل دوم ثابت شد که در مساله مکانیابی خط با وزن مثبت خط بهینه حداقل از دو تا از نقاط موجود می گذرد اما در

مسائل مکانیابی خط نیمه ناخوشایند، این خاصیت برقرار نمی‌باشد (مثال 4-2-6 را ببینید). همچنین در مسائل مکانیابی خط نیمه ناخوشایند ثابت کردیم که خط بهینه از یک نقطه منفی منحصر به فرد عبور نمی‌کند که این خاصیت در الگوریتم ارائه شده برای مسائل مکانیابی خط با وزن مثبت در نظر گرفته نشده است زیرا در این مسائل وزن تمامی نقاط مثبت در نظر گرفته می‌شود و نقطه‌ای با وزن منفی نداریم.

با توجه به دلایل فوق، الگوریتم‌های معرفی شده برای مسائل مکانیابی خط (با وزن مثبت) را نمی‌توان برای مسائل مکانیابی خط نیمه ناخوشایند تعمیم داد. به همین دلیل ارائه الگوریتمی کارا برای این مسائل مفید به نظر می‌رسد.

در ادامه با استفاده از روش بهینه سازی پرندگان، الگوریتمی را برای مسائل مکانیابی خط نیمه ناخوشایند با نرم I_2 ارائه می‌دهیم و نتایج را با الگوریتم‌های ارائه شده برای مسائل با وزن مثبت مقایسه می‌کنیم. بدین ترتیب که بعد از ارائه الگوریتم جدید، برای انجام یک مقایسه مناسب، الگوریتم جدید را به ازای نقاط با وزن مثبت اجرا کرده و نتایج حاصل از این الگوریتم را با الگوریتم‌های قبلی مقایسه می‌کنیم. سپس با توجه به این که خواص بدست آمده برای مسائل مکانیابی خط نیمه ناخوشایند را در الگوریتم جدید اعمال می‌کنیم، و همچنین با توجه به نزدیکی جواب‌های حاصل از این الگوریتم با الگوریتم‌های قطعی، این الگوریتم را می‌توان به عنوان یک الگوریتم مناسب و کارا برای مکانیابی خط نیمه ناخوشایند در نظر گرفت.

حال به شرح الگوریتم می‌پردازیم:

همان‌طور که در ابتدای این فصل گفته شد، برای شروع الگوریتم PSO یک جمعیت از ذرات به صورت تصادفی تولید می‌شوند. در مساله مکانیابی خط نیمه ناخوشایند، خطوط ذرات گروه را تشکیل می‌دهند.

ابتدا n نقطه وزن دار با مختصات $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ به صورت تصادفی در صفحه تولید می‌کنیم به طوری که مجموع

وزن نقاط مثبت باشد و مولفه اول نقاط را نیز در یک بازه مشخص در نظر می‌گیریم. حال برای شروع الگوریتم، ابتدا نقاطی که وزن آن‌ها منفی است را کنار می‌گذاریم. برای نقاط مثبت باقیمانده تمامی خطوط راست به فرم $y = s_i x + b_i$ را می‌یابیم به طوری که خط اول از نقطه اول و دوم، خط دوم از نقطه سوم و چهارم، ... ، بگذرد. فرض کنیم تعداد این خطوط m تا باشد. هر خط را به صورت بردار

$$\begin{pmatrix} s_i \\ b_i \end{pmatrix} \text{ در نظر می‌گیریم که } i = 1, 2, \dots, m.$$

ابتدا قرار می‌دهیم $t=0$ و بردارهای سرعت اولیه را نیز صفر قرار می‌دهیم یعنی $v(t)=0$ و فرض می‌کنیم $x_i(0)=y_i(0)$ که بهترین موقعیت فردی ذرات را در لحظه $t=0$ را نشان می‌دهند. حال با توجه به این که تابع هدف به صورت $F(L) = \sum_{m \in M} w_m d(E_{x_m}, L)$ است، $\hat{y}(0) = \arg \min_{i=1,2,\dots,m} F(y_i(0))$ را محاسبه می‌کنیم یعنی خطی را می‌یابیم که به ازای آن مقدار تابع هدف می‌نیم است. حال معیار توقف را بررسی می‌کنیم، که معیار توقف به صورت ترکیبی از تعداد تکرارها و تعریف یک کران برای اجرای الگوریتم بعد از آخرین بهبود است. یعنی اگر بعد از آخرین بروز رسانی $\hat{y}(t)$ ، چند مرحله الگوریتم اجرا شد و در $\hat{y}(t)$ بهبودی حاصل نشد، الگوریتم متوقف شود.

اگر معیار توقف حاصل نشده باشد مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

• گام اصلی

$$t=t+1$$

$v_i(t+1)$ از رابطه (۵-۱۰) محاسبه شود .

$x_i(t+1)$ از رابطه (۵-۱۱) محاسبه شود .

حال با توجه به این که طبق قضیه ثابت کردیم خط بهینه از یک نقطه منفی منحصر به فرد عبور نمی- کند بنابراین فاصله اقلیدسی تمام نقاط را از خطوط جدید محاسبه می-کنیم. اگر فاصله هر کدام از نقاط از هر یک از خطوط صفر شد یعنی آن نقطه روی خط مورد نظر واقع است. اگر وزن این نقطه مثبت باشد که مطلوب است در غیر این صورت اگر نقطه‌ای که روی خط واقع شده است دارای وزن منفی باشد آن گاه مجموع وزن تمام نقاطی که در نیم صفحه بالای خط قرار دارند را محاسبه می-کنیم. همین عمل را برای نقاط واقع در نیم صفحه پایین انجام می-دهیم. این دو عدد را با هم مقایسه می-کنیم، فرض کنیم مجموع وزن نقاط نیم صفحه بالایی (پایین) خط، بیشتر باشد. حال می-نیم فاصله نقاط بالای (پایین) خط را تا خط مورد نظر محاسبه می-کنیم و آن را ε می-نامیم. خط مورد نظر را به اندازه $\varepsilon - \varepsilon'$ که ε' عدد مثبت کوچک است، به موازات خودش به سمت بالا (پایین) حرکت می-دهیم. اگر به سمت بالا حرکت کنیم خط اصلاح شده به صورت $L' = sx + b + (\varepsilon - \varepsilon')$ است و اگر به سمت پایین حرکت کرده باشیم خط جدید به صورت $L' = sx + b - (\varepsilon - \varepsilon')$ خواهد بود. این روش به ما کمک می-کند تا خطی که نقطه منفی روی آن واقع است، حرکت کرده و نقطه منفی روی آن نباشد و همچنین مقدار تابع هدف به ازای آن خط، بدتر نشود.

حال برای تمام خطوط که تعدادی از آنها اصلاح شده‌اند مقدار تابع هدف را محاسبه می-کنیم و مجدداً $\hat{y}(t) = \arg \min_{i=1,2,\dots,m} F(y_i(t))$ را بدست می-آوریم و معیار توقف را نیز بررسی می-کنیم. اگر معیار توقف برقرار نباشد، $\hat{y}(t)$ را به عنوان خط بهینه در نظر می-گیریم. در غیر این صورت به گام اصلیمی-رویم و مراحل را تکرار می-کنیم تا خط بهینه را بیابیم.

۵-۶ نتایج محاسباتی

ما الگوریتم پیشنهادی را بر روی ۲۰ مساله با تعداد ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ نقطه اجرا کردیم که این نقاط به صورت تصادفی توسط نرم افزار MATLAB در بازه $[-10,10]$ تولید شده‌اند.

در جدول ۱-۵ نتایج حاصل از اجرای الگوریتم PSO برای مساله مکانیابی خط میانه نیمه ناخوشایند آمده است. این نتایج به ازای نقاط با وزن مثبت به دست آمده است و وزن‌ها بطور تصادفی از بازه $(0,1]$ انتخاب شده‌اند. جواب‌های بهینه در جدول ۱-۵، جواب‌های حاصل از الگوریتم ارائه شده توسط لی و چنگ است که در فصل ۲ و بخش ۲-۶ به آن اشاره شد.

جدول ۲-۵، نتایج محاسباتی حالتی را نشان می‌دهد که بعضی از نقاط مفروض دارای وزن منفی می‌باشند. در این حالت وزن‌ها به صورت تصادفی از بازه $[-10,10]$ انتخاب شده‌اند و مجموع وزن‌ها نیز مثبت می‌باشد. الگوریتم را به ازای مقادیر مختلف c_1 و c_2 اجرا کردیم و متوجه شدیم بهترین مقادیر برای این ضرایب، $c_1=c_2=2.05$ است. بعد از بررسی حالات مختلف اینرسی وزن نیز دریافتیم که بهتر است با $w=1$ شروع کرد و در هر تکرار کاهش یابد تا این که در پایان الگوریتم به مقدار 0.2 می‌رسد.

در تمامی مسائل، اندازه جمعیت، n و تعداد تکرارها را $2n$ در نظر گرفته شده است. همچنین معیار توقف از ترکیب تعداد تکرارها و نیز به تعداد $\frac{n}{2}$ تکرار بعد از آخرین بهبود می‌باشد. ما تمام مسائل را به تعداد ۵ بار با استفاده از هر دو روش حل کرده و میانگین نتایج را ارائه کردیم. نتایج جدول ۱-۵ نشان می‌دهد که در اکثر مسائل، جواب‌های بدست آمده از الگوریتم PSO برای مسائل مکانیابی خط میانه ناخوشایند به جواب‌های بهینه حاصل از الگوریتم قطعی بسیار نزدیک است و از آن جا که الگوریتم دقیقی برای مسائل مکانیابی خط میانه ناخوشایند وجود ندارد، لذا الگوریتم ما می‌تواند یک روش مناسب برای این گونه مسائل به شمار آید.

N	Objective function		CPU time (sec.)	
	PSO	optimal	OptimalPSO	
100	236.941	236.891	0.436	0.081
100	219.949	213.172	0.456	0.092

200	493.485	493.423	3.043	0.516
200	438.929	438.928	4.389	0.237
300	662.866	662.856	7.254	4.020
300	684.752	684.752	10.920	4.484
400	909.988	909.984	15.179	9.001
400	932.330	932.330	19.281	9.438
500	1119.859	1119.858	27.971	25.659
500	1161.615	1161.614	30.841	28.232
600	1319.200	1319.200	42.167	36.946
600	1326.792	1326.792	48.771	38.524
700	1616.208	1616.208	60.448	63.392
700	1674.330	1674.330	66.889	66.121
800	1754.715	1754.714	91.603	97.771
800	1868.405	1868.405	90.215	96.117
900	2131.388	2131.388	128.295	144.838
900	2155.736	2155.736	128.139	149.958
1000	2336.769	2336.769	165.064	191.625
1000	2140.389	2140.389	161.804	183.267

جدول ۵-۱: نتایج محاسباتی برای مسائل با وزن مثبت

test	N	F_{PSO}	$W = \sum w_i$	CPU time (sec.)
1	100	10.655	5.7051	0.568
2	100	36.996	9.1525	0.467
3	200	-165.679	1.3186	4.162
4	200	-24.323	8.1159	5.177
5	300	-15.002	9.8438	11.159
6	300	17.2195	12.7017	12.252
7	400	-47.283	6.3016	20.856
8	400	-10.367	13.1622	23.813
9	500	67.894	17.3539	29.919
10	500	18.316	19.407	31.437
11	600	44.799	18.991	52.445
12	600	-75.111	16.442	52.055
13	700	-15.221	15.158	71.304
14	700	19.792	15.638	65.329
15	800	-146.714	3.356	101.992
16	800	26.184	25.596	104.982
17	900	111.924	25.737	134.996
18	900	90.398	25.592	128.308
19	1000	-18.309	25.389	170.828
20	1000	-83.346	22.866	183.775

جدول ۵-۲: نتایج محاسباتی برای مسائل با وزن‌های مثبت و منفی

نتیجه گیری و پیشنهادات

در این پایان نامه مسائل مکانیابی خط برای حالتی که وزن نقاط مثبت باشد مورد مطالعه و بررسی قرار گرفتند و همچنین مکانیابی خط برای نقاط با وزن مثبت و منفی معرفی شد که آنرا مکانیابی خط نیمه ناخوشایند می نامیم. قضا یا و نتایج این فصل تماما جدید بوده و در این پایان نامه بدست آمده و استخراج گردیده است. در حالتی که فاصله نقاط تا خط با نرم‌های اقلیدسی و مستطیلی مورد

سنجش قرار گیرد، خواصی برای مساله بدست آوردیم که با استفاده از این خواص و نتایج، الگوریتم مناسبی را با استفاده از روش بهینه سازی پرندگان (PSO) برای این مسائل ارائه کردیم.

نگرش دیگری که می تواند مورد مطالعه قرار گیرد، بررسی مساله در حالت فازی است و می توان داده ها و متغیرهای مساله را فازی در نظر گرفت. همچنین می توان مساله را در حالتی که وزن ها تصادفی باشند مورد بررسی قرار داد.

کتابنامه

- [1] Hakimi, S. L., (1964), "Optimum locations of switching centers and absolute centers and medians of a graph", **Operations Research**, 12, 450-459.
- [2] Goldman A.J., Dearing P.M., (1975) "Concepts of optimal location for partially noxious facilities", **ORSA Bulletin**. 23(1), B-31.
- [3] Church R.L., Garfinkel R.S., (1978) "Locating an obnoxious facility on a network," **Transportation Science**. 12, 107–118.
- [4] Handler G. Y., Mirchandani P. B., (1979) **Location on Networks: Theory and Algorithms (Signal Processing, Optimization, and Control)**. MIT Press, Cambridge.
- [5] Hamacher H.W., Nickel S., (1998) "Classification of location models", **Location Science**., 6, 229-242.
- [6] Erkut E., Neuman S., (1989) "Analytical models for locating undesirable facilities," **European Journal of Operational Research**. 40, 275–291.
- [7] Drezner Z., (1995) **Facility Location: A Survey of Applications and Methods**, Springer-Verlag, New York, Inc.
- [8] Wesolowsky G. O. (1975) "Location of the median line for weighted points" **Environment and planning A**.,7, 163-170.
- [9] Ward J. E., Wendell R. E., (1980) "A new norm for measuring distance which yields linear location problems," **Operations Research**, 28, 836-844.
- [10] Ward J. E., Wendell R. E., (1985) "Using block norms for location modelling," **Operations Research**, 33, 1074-1090.
- [11] Morris J.G., Norback J.P., (1983) "Linear facility location—solving extensions on the basic problems", **European Journal of Operational Research**, 12, 90-94.
- [12] Schobel A., (1999) "Solving restricted line location problems via a dual interpretation," **Discrete Applied Mathematics**, 93, 109-125.
- [13] Drezner Z., Wesolowsky G.O., (1989) "Location of an obnoxious route", **Journal of Operational Research Society**, 40(11), 1011-1018.
- [14] Morris J.G., Norback J.P., (1980) "A simple approach to linear facility location", **Transportation Science**., 14, 1-8.
- [15] Schobel A. (1998) "Locating least- distant lines in the plane" **European Journal of Operational Research**., 106, 152-159.

- [16] Megiddo N. and Tamir A. (1983) "Finding least-distances lines" **SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods.**, 4, 207-211.
- [17] Francis R. C., Lowe T. J. and Ratliff H. D. (1978) "Distance constraints for tree network multifacility location problems" **Operations Research**, 26, 570-596.
- [18] Shamos M. I., (1978), PhD. Thesis, "Computational Geometry", **Computer Science Department. Yale University, New Haven.**
- [19] Minkowski H. (1967) **Gesammelte Abhandlungen, Band 2** Chelsea Publishing Company, New York.
- [20] Hamacher H.W. and Nickel S. (1996) "Multicriteria planar location problems" **European Journal of Operational Research.**, 94, 66-86.
- [21] Lee D. T. and Ching Y. T. (1985) "The power of geometric duality revisited" **Information Processing Letters.**, 21, 117-122.
- [22] Zemel E. (1984) "An $O(n)$ algorithm for the linear multiple choice knapsack problem and related problems" **Information Processing Letters.**, 18, 123-128.
- [23] Houle M. E., Imai H., Imai K., Robert J. M. (1989) "Weighted orthogonal linear L_∞ -approximation and applications" **Lecture Notes Computer Science.**, 382, 183-191.
- [24] Megiddo N. (1984) "Linear programming in linear time when the dimension is fixed" **Journal of the ACM.**, 31, 114-127.
- [25] Schobel A. (1996) "Locating least distance lines with block norms" **Studies in Locational Analysis.**, 10, 139-150.
- [26] Follert F. (1995) "Maxmin location of an anchored ray in 3-space and related problems" **7th Canadian Conference on Computational Geometry, Quebec.**
- [27] Schomer E., Sellen J., Teichmann M. and Yap C. (1996) "Efficient algorithms for the smallest enclosing cylinders problem", **Proceedings of the 8th Canadian Conference on Computational Geometry, Quebec.**
- [28] Brimberg J., Juel H. and Schobel A. (2002) "Linear facility location in three dimensions-models and solution methods", **Operations Research.**, 50, 1050-1057.
- [29] Brimberg J., Juel H. and Schobel A. (2003) "Properties of three-dimensional median line location models", **Annals of Operations Research**, 122, 71-85.
- [30] Korneenko N. M. and Martini H. J. (1993) Hyperplane Approximation and Related Topics: **In J.Pach (ed.), New Trends in Discrete and Computational Geometry**, New York, Springer.

- [31] Schobel A. (1999) Locating Lines and Hyperplanes: **Theory and Algorithms**, Dordrecht, Springer.
- [32] Zemel E. (1984) "An $O(n)$ algorithm for the linear multiple choice knapsack problem and related problems" **Information Processing Letters.**, 18, 123-128.
- [33] Eberhart R. C. , Kennedy J., (1995) "A new optimizer using particle swarm theory" **6th international Symposium Micro Machine and Human science**, Nagoya, Japan, 39-43.
- [34] Shi Y., Eberhart R.C., (1998), "Parameter selection in particle swarm optimization," Evolutionary Programming VII. Lecture Notes in Computer Science., **Springer, Berlin.**, 1447, 591–600.
- [35] Fan H., Shi Y., (2001) "Study on Vmax of particle swarm optimization." **Proceedings of the Workshop on Particle Swarm Optimization.** Indianapolis, IN: Purdue School of Engineering and Technology, IUPUI .
- [36] Shi Y., Eberhart R.C., (1998), "A modified particle swarm optimizer." **Proceedings of the IEEE international conference on evolutionary computation.** NJ, IEEE Press, Piscataway, 69–73.
- [37] Ali M.M., Kaelo P., (2008), "Improved particle swarm algorithms for global optimization," **Applied Mathematics and Computation**, 196, 578-593.

واژه نامه انگلیسی به فارسی

Attraction	جاذبه
Barrier	نواحی ممنوع
Bound	کران
Lower	پایین
Upper	بالا
Computational geometry	هندسه محاسباتی
Concave	مقعر
Connected	همبند
Convergence	همگرایی
Convex	محدب
Convex hull	پوسته محدب
Covering	پوشش
Customer	مشتری
Demand point	نقطه تقاضا
Distance	فاصله
Evolutionary	تکاملی
Facility	سرویس دهنده
Global optimum	بهینه سراسری
Heuristic	ابتکاری
Iterative	تکراری
Lagrangean relaxation	روش ضرایب لاگرانژ
Layout	جایابی
Local optimum	بهینه موضعی
Location	مکانیابی
Minisum	کمترین مجموع
Norm	نرم
Block	بلوکی
Noxious	مضر
Obnoxious	نامطلوب
Particle	ذره
Polygone	چندضلعی

Position	موقعیت
Pull	دافعه
Push	جاذبه
Repulsion	دافعه
Semi-obnoxious, semi-undesirable	نیمه نامطلوب
Space	فضا
Continuous	پیوسته
Discrete	گسسته
Swarm	دسته ، گروه
Undesirable	نامطلوب
Velocity	سرعت
Weight	وزن

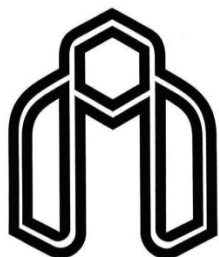
واژه نامه فارسی به انگلیسی

Heuristic	ابتکاری
Global optimum	بهینه سراسری
Local optimum	بهینه موضعی
Convex hull	پوسته محدب
Covering	پوشش
Iterative	تکراری
Push, Attraction	جاذبه
Polygone	چندضلعی
Pull, Repulsion	دافعه
Swarm	دسته ، گروه
Particle	ذره
Lagrangean relaxation	روش ضرایب لاگرانژ
Velocity	سرعت
Facility	سرویس دهنده
Distance	فاصله
Space	فضا
Continuous	پیوسته
Discrete	گسسته
Bound	کران
Upper	بالا
Lower	پایین
Minisum	کمترین مجموع
Convex	محدب
Customer	مشتری
Noxious	مضر
Concave	مقعر
Location	مکانیابی
Obnoxious, Undesirable	نامطلوب
Norm	نرم
Block	بلوکی
Demand point	نقطه تقاضا

Barrier	نواحی ممنوع
Semi-obnoxious, semi-undesirable	نیمه نامطلوب
Weight	وزن
Connected	همبند
Convergence	همگرایی
Computational geometry	هندسه محاسباتی

Abstract

In this thesis we first present an introduction to basic concepts of location problem. Then we consider the line location problem in the plane and its properties by using different norms. Also we express line location in three dimensions space. Different cases of this problem is investigated and considered the proposed algorithms for this problem. Also we introduce semi-obnoxious line location and using particle swarm optimization (pso) for solving this problem. We obtain some properties of semi-obnoxious line location problem and offer an algorithm to locate the semi-obnoxious median line in the plane. We obtain the computational results and we show this algorithm can be used as an efficient algorithm for this problem.



Shahrood University of Technology
Faculty of Mathematics

Line Location Problem in the Plane

Student:

Mehdi Golpayegani

Supervisor:

Dr. Jafar Fathali

Advisor:

Dr. Mohammad Arashi

A Thesis Submitted for Master of Science Degree in Applied Mathematics

December 2011