دانشگاه صنعتی شاهرود

حوزه معاونت پژوهشی و فناوری

گزارش پایانی طرح پژوهشی

بررسی صفر سازهای شبه حلقه های سریهای توانی اریب

با کد ۲۳۰۱۱

مجری: ابراهیم هاشمی

عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی شاهرود

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است و تاریخ های تصویب و خاتمه آن به ترتیب ۱۳۸۵/۱۱/۲۹ و ۱۳۸۶/۴/۱۷ می باشد.

بسم الله الرحمن الرحيم

بررسی صفر سازهای شبه حلقه‌های سریهای توانی اریب روی یک حلقه

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه شرکت پذیر و یکدار باشد. فرض کنیم α یک همومورفیسم از R باشد. فرض کنیم $(R[x;\alpha],+,\circ)$ و $(R_\circ[[x;\alpha]],+,\circ)$ بترتیب شبه حلقه چند جمله ایهای اریب و شبه حلقه سریهای توانی اریب روی حلقه R باشند. در این طرح با فرض اینکه R یک حلقه α—صلب باشد به بررسی صفر سازهای زیر مجموعه های شبه حلقه‌های $(R_\circ[x;\alpha],+,\circ)$ و $(R_\circ[[x;\alpha]],+,\circ)$ می پردازیم.

فهرست

همچنین برای هر $x \in R$، $(\lambda x)^* = \lambda^* x^*$، یک $*$—جبر نامیده می‌شود. C^*—جبرها نمونه خاص و مهمی از $*$—حلقه‌ها می‌باشد. خانوادهٔ حلقه‌های بئر شامل جبرهای فون نیومن (یعنی جبر همهٔ عملگرهای کراندار روی یک فضای هیلبرت[۲])، C^*—جبر جابجایی $C(T)$ از توابع با مقدار مختلط پیوسته روی یک فضای استونی T [۳] و حلقه‌های منظمی که شبکهٔ ایده‌آلهای راست اصلی آن کامل است (بعنوان نمونه حلقه‌های منظمی که خود انژکتیو راست هستند) می‌باشد. R را یک حلقه $p.p.$—چپ نامند هرگاه هر ایده‌آل چپ اصلی آن یک جمعوند از $_RR$ باشد. واضح است R یک حلقه $p.p.$—چپ است اگر و تنها اگر صفرساز چپ هر عنصر از R بعنوان یک ایده‌آل چپ توسط یک خودتوان تولید گردد. بطور مشابه $p.p.$—راست تعریف می‌شود. حلقه R را $p.p.$ (ریکارت[۴]) نامیم اگر هم $p.p.$—چپ و هم $p.p.$—راست باشد. کلاس حلقه‌های $p.p.$ شامل کلاس حلقه‌های بئر است. حلقه R را آبلی نامیم هرگاه هر عنصر خودتوان آن مرکزی باشد. اندو[۵] نشان داد که اگر حلقه R آبلی باشد آنگاه R یک حلقه $p.p.$—چپ است اگر و تنها اگر $p.p.$—راست باشد. حلقه (شبه حلقه R) کاهشی نامیده می شود هر گاه عنصر پوچتوان غیر صفر نداشته باشد. فرض کنیم R یک حلقه باشد. مجموعه تمام چند جمله ایها با ضرائب از R همراه با دو عمل جمع معمولی چند جمله ایها و ترکیب معمولی چند جمله ایها تشکیل یک شبه حلقه می دهد. این شبه حلقه را با $(R[x], +, \circ)$ نمایش می دهیم. در [۳] برکینمیر به مطالعه صفر سازها در کلاس شبه حلقه‌ها پرداخت. فرض کنیم S زیر مجموعه غیر تهی از شبه حلقه N باشد. مجموعه های $r_N(S) = \{a \in N | Sa = \circ\}$ و $\ell_N(S) = \{a \in N | aS = \circ\}$

---

[۲] Hilbert

[۳] Stonian

[۴] Rikart

[۵] Endo

را بترتیب صفرسازهای چپ و راست مجموعه S در N نامیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم S یک زیر مجموعه ناتهی از شبه حلقه N باشد.

الف. هرگاه صفرساز راست S توسط یک خودتوان مانند e تولید گردد گوییم $N \in \beta_{r1}$.
$(r_N(S) = eN)$

ب. هرگاه صفرساز راست S برابر با صفرساز راست یک خودتوان مانند e باشد گوییم $N \in \beta_{r2}$. $(r_N(S) = r_N(e))$

ج. هرگاه صفرساز چپ S توسط یک خودتوان مانند e تولید گردد گوییم $N \in \beta_{\ell 1}$.
$(\ell_N(S) = Ne)$

د. هرگاه صفرساز چپ S برابر با صفرساز چپ یک خودتوان مانند e باشد گوییم $N \in \beta_{\ell 2}$.
$(\ell_N(S) = \ell_N(e))$

لم ۱.۱.۱ فرض کنیم S و T دو زیر مجموعه ناتهی از شبه حلقه N باشند. در این صورت:

الف. $S \subseteq r(\ell(S))$، $S \subseteq \ell(r(S))$.

ب. اگر $S \subseteq T$، آنگاه $r(T) \subseteq r(S)$ و $\ell(T) \subseteq \ell(S)$.

ج. $\ell(S) = \ell(r(\ell(S)))$ و $r(S) = r(\ell(r(S)))$.

د. اگر $\{S_i\}$ خانواده ای از زیر مجموعه های ناتهی N باشد آنگاه $\ell(\cup S_i) = \cap \ell(S_i)$ و $r(\cup S_i) = \cap r(S_i)$.

با استفاده از تعریف حلقه بئر می توان نتیجه زیر را ثابت نمود.

نتیجه ۱.۱.۱ اگر N یک حلقه یکدار باشد، آنگاه $N \in \beta_{r1} \cup \beta_{r2} \cup \beta_{\ell 1} \cup \beta_{\ell 2}$ اگر و تنها اگر N یک حلقه بئر است.

تعریف ۲.۱.۱ شبه حلقه N را متقارن نامیم هرگاه برای هر $a \in N$، $a.0 = 0.a = 0$.
کرویل[۶] [۷]، شبه حلقه یکدار و متقارن N را بئر نامید هرگاه $N \in \beta_{r1} \cap \beta_{\ell 1}$. این تعریف کاملا مشابه تعریفی است که در مورد حلقه ها بیان شد.

مثال ۱.۱.۱ فرض کنیم $(G, +)$ یک گروه باشد. در این صورت مجموعه تمام توابع از G به G یعنی $M(G) = \{f : G \to G\}$ و $M_0(G) = \{f : G \to G | (0)f = 0\}$ با دو عمل جمع نقطه ای و ترکیب معمولی توابع شبه حلقه تشکیل می دهند.

نتایج زیر توسط بیرکنمیر[۷] و هوانگ[۸] در مقاله [۳] اثبات شده اند.

قضیه ۱.۱.۱ فرض کنیم $\{N_i | i \in \Lambda\}$ مجموعه ای از شبه حلقه ها باشد که در یکی از شرایط $\beta_{\ell 1}$، $\beta_{\ell 2}$، β_{r1} یا β_{r2} صدق می کنند. در این صورت $N = \Pi_{i \in \Lambda} N_i$ نیز در همان شرط صدق می کند.

قرارداد: فرض کنیم $\Omega_r(N)$ نمایانگر مجموعه تمام صفر سازهای راست شبه حلقه N باشد.
فرض کنیم Tو S دو زیر مجموعه ناتهی از N باشند. در این صورت:
$r(S) \wedge r(T) := r(S) \cap r(T)$ و $r(S) \vee r(T) := r(\ell(r(S) + r(T))$.

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنیم N یک شبه حلقه متقارن باشد. در این صورت $(\Omega_r(N), \wedge, \vee)$ که با رابطه شمول مرتب شده است یک شبکه کامل می باشد.

قضیه ۳.۱.۱ فرض کنیم $N \in \beta_{r2}$. در این صورت:

الف. e عضو خنثی چپ شبه حلقه N است اگر و تنها اگر $r(e) = 0$. بویژه، اگر N یک شبه حلقه کاهشی باشد آنگاه e عضو خنثی N است.

---
[۶] Courville
[۷] Birkenmeier
[۸] Huang

ب. فرض کنیم N یک شبه حلقه متقارن باشد و ایده‌آل I یک جمع وند مستقیم N باشد. اگر e عضو خنثی چپ N باشد آنگاه $I \in \beta_{r2}$ و یک عنصر خودتوان از N مانند v وجود دارد بطوری که $I = vN$. همچنین، اگر N یکدار باشد آنگاه v تنها عنصر خودتوان مرکزی N است.

قضیه **۴.۱.۱** فرض کنیم N یک شبه حلقه و K یک زیر شبه حلقه از آن باشد. فرض کنیم K شامل تمام خودتوانهای N باشد. در این صورت:

الف. اگر $N \in \beta_{r1}(N \in \beta_{r2})$ آنگاه $K \in \beta_{r1}(K \in \beta_{r2})$.

ب. اگر N متقارن باشد و $N \in \beta_{\ell1}(N \in \beta_{\ell2})$ آنگاه $K \in \beta_{\ell1}(N \in \beta_{\ell2})$.

قضیه **۵.۱.۱** فرض کنیم N یک شبه حلقه یکدار و فاقد مقسوم علیه صفر باشد. در این صورت $N \in \beta_{r2} \cup \beta_{\ell2}$. علاوه بر آن، اگر N متقارن باشد آنگاه $N \in \beta_{r1} \cap \beta_{\ell1} \cap \beta_{r2} \cap \beta_{\ell2}$.

مثال **۲.۱.۱** فرض کنیم R یک حلقه باشد و $R_0[x]$ نمایانگر مجموعه تمام چند جمله ایهای روی R باشد که جمله ثابت آنها صفر می باشد. در این صورت $R_0[x]$ همراه با دو عمل جمع معمولی چند جمله ایها و ترکیب معمولی چند جمله ایها یک شبه حلقه متقارن تشکیل می دهد.

قضیه **۶.۱.۱** فرض کنیم $(G,+)$ یک گروه باشد. در این صورت

الف. $M(G) \in \beta_{r2} \cap \beta_{\ell2}$، $M(G) \notin \beta_{r1} \cup \beta_{\ell1}$.

ب. $M_0(G) \in \beta_{r1} \cap \beta_{r2} \cap \beta_{\ell1} \cap \beta_{\ell2}$.

قضیه **۷.۱.۱** فرض کنیم D یک حوزه صحیح باشد. در این صورت

$D_0[x] \in \beta_{r1} \cap \beta_{r2} \cap \beta_{\ell1} \cap \beta_{\ell2}$.

لم ۲.۱.۱ فرض کنیم N یک شبه حلقه باشد. در اینصورت:

(۱) اگر $N \in \beta_{\ell 1}$، آنگاه N متقارن است و عضو خنثی راست دارد و $N \in \beta_{r2}$.

(۲) اگر N متقارن باشد و $N \in \beta_{r1}$، آنگاه N عضو خنثی چپ دارد و $N \in \beta_{\ell 2}$.

لم ۳.۱.۱ فرض کنیم N یک شبه حلقه متقارن باشد. اگر N کاهشی باشد آنگاه:

(۱) اگر $N \in \beta_{\ell 1}$، آنگاه $N \in \beta_{r1}$.

(۲) اگر N یکدار باشد و $N \in \beta_{r1}$، آنگاه $N \in \beta_{\ell 1}$.

(۳) اگر $N \in \beta_{\ell 2}$، آنگاه $N \in \beta_{r2}$.

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه کاهشی باشد. در این صورت اگر حلقه R بئر باشد آنگاه $R_0[x] \in \beta_{r1} \cap \beta_{r2} \cap \beta_{\ell 1} \cap \beta_{\ell 2}$.

قضیه ۹.۱.۱ اگر $R_0[x] \in \beta_{r1} \cup \beta_{r2} \cup \beta_{\ell 1} \cup \beta_{\ell 2}$، آنگاه حلقه R بئر است.

نتیجه ۲.۱.۱ فرض کنیم حلقه R کاهشی باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

الف. حلقه R بئر است.

ب. حلقه $R[x]$ بئر است.

ج. $(R_0[x], +, \circ) \in \beta_{r1} \cup \beta_{r2} \cup \beta_{\ell 1} \cup \beta_{\ell 2}$.

فرض کنیم R یک حلقه یکدار باشد. برکینمیر و هوانگ در مقاله [۴] نشان دادند که مجموعه تمام سریهای توانی با جمله ثابت صفر روی حلقه R همراه با دو عمل جمع معمولی سریهای توانی و ترکیب معمولی سریهای توانی یک شبه حلقه متقارن تشکیل می دهند. این شبه حلقه را با علامت $(R[[x]], +, \circ)$ نمایش می دهیم. برکینمیر و هوانگ نتایج زیر را در ارتباط با صفر سازهای زیر مجموعه های R و شبه حلقه سریهای توانی بدست آوردند.

قضیه ۱۰.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه کاهشی باشد. در این صورت اگر حلقه R بئر باشد آنگاه $R_\circ[[x]] \in \beta_{r1} \cap \beta_{r2} \cap \beta_{\ell 1} \cap \beta_{\ell 2}$.

قضیه ۱۱.۱.۱ اگر $R_\circ[[x]] \in \beta_{r1} \cup \beta_{r2} \cup \beta_{\ell 1} \cup \beta_{\ell 2}$، آنگاه حلقه R بئر است.

نتیجه ۳.۱.۱ فرض کنیم حلقه R کاهشی باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

الف. حلقه R بئر است.

ب. حلقه $R[[x]]$ بئر است.

ج. $(R_\circ[[x]], +, \circ) \in \beta_{r1} \cup \beta_{r2} \cup \beta_{\ell 1} \cup \beta_{\ell 2}$.

فصل ۲

۱.۲ شبه حلقه های توسیع های اریب

فرض کنیم α یک همومورفیسم روی حلقه R باشد. حلقه چند جمله ایهای اریب روی R را با علامت $R[x;\alpha]$ نمایش می دهیم. عناصر این حلقه همان چندجمله ایها روی R هستند. عمل جمع همان جمع معمولی چند جمله ایهاست و عمل ضرب از قانون $xr = \alpha(r)x$ تبعیت می کند. حال عمل ترکیب روی $R[x;\alpha]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم: اگر $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ دو عضو از $R[x;\alpha]$ باشند $f(x) \circ g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)^j$. می توان نشان داد $(R[x;\alpha], +, \circ)$ یک شبه حلقه آبلی است. به عنوان مثال اگر $f(x) = a_0 + a_1 x$ و $g(x) = x^2$، آنگاه $f(x) \circ g(x) = (a_0 + a_1 x)^2 = a_0^2 + (a_0 a_1 + a_1 \alpha(a_0))x + a_1 \alpha(a_1) x^2$.

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنیم α یک همومورفیسم روی حلقه R باشد. α را یک همومورفیسم صلب می نامند هرگاه $a\alpha(a) = 0$ نتیجه دهد $a = 0$. حلقه R را α—صلب می نامند هرگاه α یک همومورفیسم صلب از R باشد.

واضح است که هر هومومورفیسم صلب یک منومورفیسم است. هر حلقه α—صلب یک حلقه کاهشی است. در واقع اگر R یک حلقه α—صلب باشد و $a^2 = 0$، آنگاه $a\alpha(a)\alpha(a\alpha(a)) = 0$. در نتیجه $a\alpha(a) = 0$، و لذا $a = 0$. بنابراین، حلقه R کاهشی است.

لم ۲.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد و $a, b \in R$. در این صورت:

(۱) اگر $ab = 0$، آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n، $a\alpha^n(b) = \alpha^n(a)b = 0$.

(۲) اگر برای عدد صحیح مثبت k، $a\alpha^k(b) = 0$ یا $\alpha^k(a)b = 0$، آنگاه $ab = 0$.

(۳) اگر $e^2 = e \in R$، آنگاه $\alpha(e) = e$.

اثبات : (۱) اگر $ab = 0$، آنگاه $\alpha^n(a)\alpha^n(b) = 0$. چون R یک حلقه α—صلب است لذا $\alpha^n(a)b = 0$.

(۲) اگر $\alpha^k(a)b = 0$، آنگاه $\alpha^k(a)\alpha^k(b) = 0$. در نتیجه $\alpha^k(ab) = 0$، و چون α یک منومورفیسم است لذا $ab = 0$.

(۳) اگر $e^2 = e$، آنگاه $e(1 - e) = 0$. در نتیجه بنا به (۱)، $e(1 - \alpha(e)) = 0$. یعنی $e = e\alpha(e)$. لذا $(e - \alpha(e))^2 = e^2 - e\alpha(e) - \alpha(e)e + \alpha^2(e) = 0$. چون حلقه R کاهشی است پس $e - \alpha(e) = 0$، و در نتیجه $\alpha(e) = e$.

هونگ[1] و همکارانش در مقاله [۱۲] حلقه α—آرمنداریز اریب را بصورت زیر تعریف نمود. فرض کنیم α یک هومومورفیسم روی حلقه R باشد. گوییم R یک حلقه α—آرمنداریز اریب است هرگاه $f(x) = a_0 + \cdots + a_nx^n$ و $g(x) = b_0 + \cdots + b_mx^m$ دو عضو از حلقه $R[x;\alpha]$ باشند بطوری که $f(x)g(x) = 0$، آنگاه برای هر i, j، $a_i\alpha^i(b_j) = 0$. هونگ و همکارانش مثالهایی از حلقه های α—آرمنداریز اریب ارائه نمودند و نتایجی بین

[1] Hong

صفر سازهای حلقه R و حلقه چند جمله ایهای اریب $R[x;\alpha]$ بدست آوردند. تعریف فوق را بصورت زیر به شبه حلقه چند جمله ایهای اریب توسیع می دهیم.

تعریف **۲.۱.۲** فرض کنیم α یک هومورفیسم روی حلقه R باشد. گوییم R یک حلقه شبه $\alpha-$آرمنداریز اریب است هرگاه $f(x)=a_\circ+\cdots+a_nx^n$ و $g(x)=b_\circ+\cdots+b_mx^m$ دو عضو از شبه حلقه $R[x;\alpha]$ باشند بطوری که $f(x)\circ g(x)=\circ$، آنگاه $b_\circ+\cdots+b_ma_\circ^m=\circ$ و برای هر i,j، $b_j(a_ix^i)^j=\circ$.

با استفاده از لم ۱.۱.۲ می توان نشان داد اگر R یک حلقه $\alpha-$صلب باشد آنگاه R یک حلقه شبه $\alpha-$آرمنداریز اریب است اگر و تنها اگر R یک حلقه $\alpha-$آرمنداریز اریب است. برکینمیر و هوانگ در مقاله [۳] نشان دادند که اگر R یک حلقه کاهشی باشد و α تابع همانی روی R باشد آنگاه R یک حلقه شبه $\alpha-$آرمنداریز اریب است. فرض کنیم α یک منومورفیسم روی حلقه R باشد و $R[x;\alpha]$ حلقه چند جمله ایهای اریب روی R باشد. می توان نشان داد $\{x^i\}_{i\geq\circ}$ یک زیرمجموعه اُر چپ از حلقه $R[x;\alpha]$ تشکیل می دهد. بنابراین می توانیم حلقه $R[x;\alpha]$ را موضعی نماییم و حلقه چند جمله ایهای اریب لوران $R[x,x^{-1};\alpha]$ را تشکیل دهیم. زیر مجموعه $A=\{x^{-i}rx^i|i\geq\circ\}$ از حلقه چند جمله ایهای اریب لوران $R[x,x^{-1};\alpha]$ را در نظر بگیرید. چون برای هر $j\geq\circ$، $x^{-i}rx^i=x^{-(i+j)}\alpha^j(r)x^{(i+j)}$، لذا می توان نشان داد A زیر حلقه ای از حلقه چند جمله ایهای اریب لوران $R[x,x^{-1};\alpha]$ می باشد. در واقع دو عمل جمع و ضرب بصورت زیر می باشند $x^{-i}rx^i+x^{-j}sx^j=x^{-(i+j)}(\alpha^j(r)+\alpha^i(s))x^{(i+j)}$ و $(x^{-i}rx^i)(x^{-j}sx^j)=x^{-(i+j)}(\alpha^j(r)\alpha^i(s))x^{(i+j)}$. می توان تابع α را به اتومورفیسمی از A با ضابطه $\alpha(x^{-i}rx^i)=x^{-i}\alpha(r)x^i$ توسیع داد. حلقه A اولین بار توسط جردن [۲] در مقاله

[۲] Jordan

[۱۴] تعریف شد. می دانیم اگر تابع α پوشا نباشد مشکلات زیادی در بدست آوردن نتایج خواهیم داشت. نتیجه زیر به ما کمک می کند تا این مشکل را به نحوی حل کنیم.

لم ۲.۱.۲ فرض کنیم α یک منومورفیسم روی حلقه R باشد و A حلقه جردن باشد. در این صورت:

(۱) R یک حلقه α—صلب است اگر و تنها اگر A یک حلقه α—صلب باشد.

(۲) R یک حلقه کاهشی است اگر و تنها اگر A یک حلقه کاهشی باشد.

(۳) R یک حلقه شبه α—آرمنداریز اریب (α—آرمنداریز اریب) است اگر و تنها اگر A یک حلقه شبه α—آرمنداریز اریب (α—آرمنداریز اریب) باشد.

اثبات : (۱) فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد و $a\alpha(a) = 0$. بنابه تعریف مجموعه A، عدد $n \geq 0$ وجود دارد بطوری که $\alpha^n(a) \in R$. در نتیجه $\alpha^n(a)\alpha^{n+1}(a) = 0$. چون α یک به یک است لذا $a = 0$. واضح است که اگر A یک حلقه α—صلب باشد آنگاه R نیز α—صلب است.

(۲) با استدلالی مشابه (۱) می توان آن را ثابت نمود.

(۳) فرض کنیم R یک حلقه شبه α—آرمنداریز اریب باشد و $f(x) = a_0 + \cdots + a_nx^n$ و $g(x) = b_0 + \cdots + b_mx^m$ دو عضو از شبه حلقه $A[x;\alpha]$ باشند بطوری که $f(x)g(x) = 0$. بنا به تعریف حلقه A، عدد $k \geq 0$ وجود دارد بطوری که برای هر $0 \leq i \leq n$ و هر $0 \leq j \leq m$، $\alpha^k(a_i) \in R$ و $\alpha^k(b_j) \in R$. بنابه [۱۴] می توان α را به اتومورفیسمی از حلقه $(A[x;\alpha], +, .)$ توسیع داد بطوری که $\alpha(x) = x$. در نتیجه $\alpha^k(b_0) + \alpha^k(b_1)\alpha^k((x)f) + \cdots + \alpha^k(b_m)\alpha^k(((x)f)^m) = 0$ و لذا $(\alpha^k(a_0) + \alpha^k(a_1)x + \cdots + \alpha^k(a_n)x^n) \circ ((\alpha^k(b_0) + \cdots + \alpha^k(b_m)x^m) = 0$. بنابراین $\alpha^k((x)f) \circ (\alpha^k((x)g) = 0$. چون R یک حلقه شبه α—آرمنداریز اریب است لذا

$\alpha^k(b_\circ) + \alpha^k(b_1)\alpha^k(a_\circ) + \cdots + \alpha^k(b_m)\alpha^{k+m}(a_\circ) = \circ$ و برای هر $\circ \leq i \leq n$ و هر $\circ \leq j \leq m$، $\alpha^k(b_j)\alpha^k(a_i)\alpha^{k+i}(a_i)\cdots\alpha^{k+(j-1)i}(a_i) = \circ$. چون α یک منومورفیسم است لذا $b_\circ + b_1\alpha(a_\circ) + \cdots + b_m\alpha^m(a_\circ) = \circ$ و برای هر $\circ \leq i \leq n$ و هر $\circ \leq j \leq m$، $b_j a_i \alpha^i(a_i)\cdots\alpha^{(j-1)i}(a_i) = \circ$. در نتیجه حلقه A شبه α—آرمنداریز اریب است. واضح است که زیر حلقه هر حلقه شبه α—آرمنداریز اریب همچنان شبه α—آرمنداریز اریب است. بطور مشابه می توان نشان داد A یک حلقه α—آرمنداریز اریب است اگر و تنها اگر R یک حلقه α—آرمنداریز اریب است.

تعریف ۳.۱.۲ گوییم شبه حلقه N خاصیت IFP دارد، اگر برای هر $a, b, n \in N$، $ab = \circ$ نتیجه دهد $anb = \circ$.

لم ۳.۱.۲ فرض کنیم α یک منومورفیسم روی حلقه R باشد و $R[x;\alpha]$ و $R_\circ[x;\alpha]$ بترتیب نمایانگر شبه حلقه چند جمله ایهای اریب و شبه حلقه چند جمله ایهای اریب متقارن (یعنی چند جمله ایهایی که جمله ثابت آنها صفر باشد) روی حلقه R باشند. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) حلقه R کاهشی است و اگر $f(x) = a_\circ + a_1x + \cdots + a_nx^n$ و $g(x) = b_\circ + b_1x + \cdots + b_mx^m$ دو عضو از شبه حلقه $R[x;\alpha]$ باشند بطوری که $f(x)\circ g(x) = \circ$، آنگاه برای هر $1 \leq j \leq m$ و هر $1 \leq i \leq n$، $b_ja_i = \circ$.

(۲) R یک حلقه α—صلب است.

(۳) شبه حلقه $R[x;\alpha]$ کاهشی است.

(۴) شبه حلقه $R_\circ[x;\alpha]$ کاهشی است.

اثبات : (۱)←(۲) فرض کنیم $a \in R$ و $a\alpha(a) = \circ$. بنابه لم ۲.۱.۲، می توانیم فرض

کنیم α یک اتومورفیسم روی حلقه R است. فرض کنیم $f(x) = a\alpha^{-2}(a)x^{3}$. چون حلقه R خاصیت IFP دارد و $a\alpha(a) = 0$،

لذا $f(x) \circ f(x) = (a\alpha^{-2}(a))^{2}\alpha^{3}(a)\alpha(a)\alpha^{6}(a)\alpha^{4}(a)x^{9} = 0$. در نتیجه $(a\alpha^{-2}(a))^{2} = 0$. چون R یک حلقه کاهشی است و α اتومورفیسمی روی R است لذا $a\alpha^{2}(a) = 0 = \alpha^{2}(a)a$. حال فرض کنیم $g(x) = ax + \alpha(a)x^{2}$ و $h(a) = \alpha^{2}(a)x + ax^{2} \in R[x;\alpha]$. چون $a\alpha^{2}(a) = 0 = \alpha^{2}(a)a$، لذا $g(x) \circ h(x) = \alpha^{2}(a)(ax + \alpha(a)x^{2}) + a(ax + \alpha(a)x^{2})^{2} = 0$. در نتیجه بنا به (۱)، $a^{2} = 0$ و لذا $a = 0$.

(۲)←(۱) بوضوح R یک حلقه کاهشی است. فرض کنیم $f, g \in R[x;\alpha]$. از استقرا روی $deg(f) + deg(g)$ استفاده می کنیم. بوضوح برای $deg(f) + deg(g) = 2$ نتیجه برقرار است. حال فرض کنیم برای هر $f, g \in R[x;\alpha]$ که $deg(f) \geq 1$ و $deg(g) \geq 1$ و $deg(f) + deg(g) < k$ نتیجه برقرار باشد. فرض کنیم $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x;\alpha]$ و $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ و $n, m \geq 1$ و $n + m = k$ بطوری که $g(x) \circ f(x) = 0$. در نتیجه $\sum_{j=0}^{m} b_j(f(x))^j = 0$ و $b_ma_n\alpha^{n}(a_n)\cdots\alpha^{(m-1)n}(a_n) = 0$. در نتیجه بنا به لم ۲.۱.۱، $b_ma_n = a_nb_m = 0$. بنابراین $\sum_{j=0}^{m-1} a_nb_j(f(x))^j = 0$، یعنی $f(x)\circ(a_nb_0 + a_1b_1x + \cdots + a_nb_{m-1}x^{m-1}) = 0$. در نتیجه بنا به فرض استقرا، برای هر $1 \leq j \leq m-1$، $a_nb_ja_n = 0$. چون حلقه R کاهشی است لذا برای هر $1 \leq j \leq m-1$، $a_nb_j = 0$. چون حلقه R در شرط IFP صدق می کند لذا $g(x) \circ f(x) = (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) \circ (b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m) = 0$. در نتیجه با استفاده از فرض استقرا نتیجه حاصل می شود.

(۲)←(۳) فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. فرض کنیم شبه حلقه $R[x;\alpha]$ کاهشی نباشد. در نتیجه $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x;\alpha]$ وجود دارد بطوری که $n \geq 1$، $a_n \neq 0$ و $f(x) \circ f(x) = 0$. بنابراین $a_n^2\alpha^n(a_n)\cdots\alpha^{(n-1)}(a_n) = 0$ و در نتیجه بنا به لم ۲.۲، $a_n = 0$. این یک تناقض است لذا شبه حلقه $R[x;\alpha]$ کاهشی است.

(۳)←(۲) ابتدا نشان می دهیم حلقه R کاهشی است. فرض کنیم $a^2 = 0$. در نتیجه $ax \circ ax = a^2x = 0$. چون شبه حلقه $R[x;\alpha]$ کاهشی است لذا $ax = 0$ و در نتیجه $a = 0$. حال با استدلالی مشابه روشی که در اثبات (۱)←(۲) به کار برده شد می توان نشان داد R یک حلقه α—صلب است.

اثبات معادل بودن (۲) و (۴) مشابه اثبات معادل بودن (۲) و (۳) می باشد.

لم ۴.۱.۲ فرض کنیم α یک ایندومورفیسم روی حلقه R باشد و $R[x;\alpha]$ شبه حلقه چند جمله ایهای اریب روی حلقه R باشد. در این صورت:

(۱) اگر R یک حلقه α—صلب باشد و $E(x) \in R[x;\alpha]$ یک خودتوان باشد، آنگاه $E(x) = e_1x + e_0$، بطوری که e_1 یک خودتوان از R است و $e_1e_0 = 0$.

(۲) اگر $E(x) = \sum_{i=0}^{n} e_ix^i \in R_0[x;\alpha]$ یک خودتوان باشد آنگاه e_1 خودتوانی از R است و اگر $n \geq 2$، آنگاه $e_n^2\alpha^n(e_n)\cdots\alpha^{n(n-1)}(e_n) = 0$. علاوه بر آن اگر R یک حلقه α—صلب باشد آنگاه $E(x) = e_1x$.

اثبات : (۱) فرض کنیم $E(x) = e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n$ یک خودتوان باشد. چون $E(x) = E(x) \circ E(x)$ و R یک حلقه α—صلب است لذا برای هر $i \geq 2$، $e_i = 0$. در نتیجه $e_0 + e_1x = e_0 + e_1(e_0 + e_1x)$ و لذا $e_1e_0 = 0$ و $e_1^2 = e_1$.

با استدلالی مشابه می توان (۲) را ثابت نمود.

قضیه ۱.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. اگر $R[x;\alpha] \in \beta_{r2}$، آنگاه حلقه R بئر است.

اثبات : فرض کنیم S زیر مجموعه ای ناتهی از حلقه R باشد و $S_x = \{sx | s \in S\} \subseteq R[x;\alpha]$. چون $R[x;\alpha] \in \beta_{r2}$ و R یک حلقه α—صلب است لذا بنا به لم ۴.۱.۲ خودتوان $(x)E = e_1 x + e_0 \in R[x;\alpha]$ وجود دارد بطوری که $r(S_x) = r((x)E)$. نشان می دهیم $\ell_R(S) = \ell_R(e_1)$. فرض کنیم $a \in \ell_R(S)$. در نتیجه $(e_1 x + e_0) \circ (ax - ae_0) = a(e_1 x + e_0) - ae_0 = 0$. پس $ax - ae_0 \in r((x)E) = r(S_x)$. بنابراین $sx \circ (ax - ae_0) = 0$ و لذا برای هر $s \in S$، $as = ae_0 = 0$. در نتیجه $a \in \ell_R(S)$ و $\ell_R(e_1) \subseteq \ell_R(S)$. حال فرض کنیم $a \in \ell_R(S)$. در نتیجه $sx \circ ax = asx = 0$. بنابراین $as \in r(S_x) = r((x)E)$. در نتیجه $a(e_1 x + e_0) = (x)E \circ ax = 0$، و لذا $ae_1 = ae_0 = 0$. پس $a \in \ell_R(e_1)$ و $\ell_R(S) \subseteq \ell_R(e_1)$. بنابراین $\ell_R(S) = \ell_R(e_1)$ و $R \in \beta_{\ell 2}$. بنا به لم ۳.۱.۱، $R \in \beta_{r2}$ و لذا بنا به [۳، گزاره ۱.۴]، حلقه R یکدار است. بنابراین حلقه R بئر است.

عکس قضیه ۱.۱.۲ همیشه درست نیست. مثال زیر نشان می دهد که حلقه R چنان موجود است که کاهشی، جابجایی، متناهی و بئر است اما $R[x] \notin \beta_{r2}$.

مثال ۱.۱.۲ فرض کنیم $R = Z_6$ و $S = \{2x + 2, 2x + 5\}$. بنا به لم ۴.۱.۲، $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, x, 3x + 2, 3x + 4, 4x + 3\}$ مجموعه تمام خودتوانهای $Z_6[x]$ می باشد. توجه داریم برای هر خودتوان ثابت $c \in Z_6[x]$، $x - c \in r(c)$ و $x - c \notin r(S)$. همچنین بنا به لم ۴.۱.۲، $4x$ و $4x + 3$ تنها خودتوانهای $Z_6[x]$ هستند که می توانند در رابطه $r(S) = r((x)E)$ صدق کنند. مشاهده می کنیم که $3x \in r(4x)$ اما $3x \notin r(S)$، همچنین $3x^3 + 3 \in r(4x + 3)$ اما $3x^3 + 3 \notin r(S)$. بنابراین، خودتوان $(x)E \in Z_6[x]$

وجود ندارد بطوری که $r(S) = r((x)E)$. در نتیجه $Z_6[x] \notin \beta_{r2}$.

قرارداد: اگر $(x)f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x;\alpha]$، مجموعه تمام ضرایب $(x)f$ را به $S_f^* = \{a_0, \cdots, a_n\}$ نمایش می دهیم.

قضیه ۲.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. اگر $R \in \beta_{\ell 2} \cup \beta_{r2}$، آنگاه $R[x;\alpha] \in R_{r2}$.

اثبات : بنا به لم ۳.۱.۱ کافی است فرض کنیم $R \in \beta_{\ell 2}$. فرض کنیم $(x)f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x;\alpha]$. چون $R \in \beta_{\ell 2}$، لذا خودتوان $e_1 \in R$ موجود است بطوری که $\ell_R(S_f^*) = \ell_R(e_1)$. فرض کنیم $(x)E = e_1 x + e_0$ بطوری که $e_0 = -e_1 a_0 + a_0$. واضح است که $(x)E$ یک خودتوان از $R[x;\alpha]$ است. نشان می دهیم $r((x)f) = r((x)E)$. فرض کنیم $(x)g = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in r((x)f)$. در نتیجه بنا به لم ۳.۱.۲، برای هر $1 \leq j \leq n$، $b_j \in \ell_R(S_f^*)$ و $b_0 + b_1 a_0 + \cdots + b_n a_0^n = 0$. بنا به لم ۱.۱.۲، $\alpha(e_1) = e_1$، لذا با محاسبه ساده‌ای می توان نشان داد $((x)E)^k = e_1 x^k + e_0^k$. بنابراین $(x)E \circ (x)g = \sum_{j=0}^{n} b_j ((x)E)^j = \sum_{j=0}^{n} b_j e_1 x^j + \sum_{j=1}^{n} b_j e_0^j + b_0 = 0$. در نتیجه $(x)g \in r((x)E)$ و $r((x)f) \subseteq r((x)E)$. حال فرض کنیم $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in r((x)E)$. در نتیجه بنا به لم ۳.۱.۲، برای هر $1 \leq j \leq n$، $b_j \in \ell_R(e_1) = \ell_R(S_f^*)$ و $b_0 + b_1 e_0 + \cdots + b_n e_0^n = 0$. چون برای هر $t \geq 1$، $e_0^t = -e_1 a_0^t + a_0^t$، لذا $b_0 + b_1 a_0 + \cdots + b_n a_0^n = 0$ و در نتیجه $(x)g \in r((x)f)$. بنابراین $r((x)f) = r((x)E)$. در نتیجه $R[x;\alpha] \in R_{r2}$.

مثال زیر نشان می دهد که حلقه R چنان موجود است که α--صلب نیست اما اگر $(x)f = a_1 x + \cdots + a_n x^n \in R_0[x;\alpha]$، $(x)g = b_1 x + \cdots + b_m x^m$ و $(x)f \circ (x)g = 0$،

آنگاه برای هر $1 \leq j \leq m$ و $1 \leq i \leq n$، $b_j a_i = 0$.

مثال ۲.۱.۲ فرض کنیم F یک میدان باشد و $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & r \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, r \in F \right\}$ توسیع بدیهی حلقه F باشد. به سادگی می‌توان بررسی نمود که R یک حلقه جابجایی است. فرض کنید $\alpha : R \to R$ نگاشتی با ضابطه $\alpha\left(\begin{pmatrix} a & r \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & ur \\ 0 & a \end{pmatrix}$ باشد، که u یک عنصر ناصفر از F است. می توان نشان داد α یک اتومورفیسم از R است. حال نشان می‌دهیم:

(۱) R یک حلقه α—صلب نیست.

چون حلقه R کاهشی نیست لذا α—صلب نیست.

(۲) فرض کنیم $(x)f = A_1 x + \cdots + A_n x^n \in R_0[x; \alpha]$، $(x)g = B_1 x + \cdots + B_m x^m$، بطوری که برای هر $1 \leq i \leq n$ و هر $1 \leq j \leq m$، $A_i = \begin{pmatrix} a_i & r_i \\ 0 & a_i \end{pmatrix}$ و $B_j = \begin{pmatrix} b_j & s_j \\ 0 & b_j \end{pmatrix}$. فرض کنیم $(x)f \circ (x)g = 0$، $A_n \neq 0$ و $B_m \neq 0$. ادعا می کنیم برای هر $1 \leq i \leq n$ و هر $1 \leq j \leq m$، $B_j (A_i x^i)^j = 0$. چون

$$0 = (x)f \circ (x)g = B_1(A_1 x + \cdots + A_n x^n) + \cdots + B_m (A_1 x + \cdots + A_n x^n)^m, \qquad (\dagger)$$

پس $B_m (A_n x^n)^m = 0$ و لذا $B_m A_n \alpha^n(A_n) \cdots \alpha^{n(m-1)}(A_n) = 0$. پس $b_m a_n^m = 0$ و در نتیجه $b_m = 0$ یا $a_n = 0$.

حالت اول. فرض کنیم $b_m \neq 0$ و $a_n = 0$. چون $A_n \neq 0$، لذا $r_n \neq 0$. چون برای هر $k \geq 0$، $A_n \alpha^k(A_n) = 0$، و حلقه R جابجایی است لذا اگر A_n را در رابطه $(\dagger)$ از سمت چپ ضرب کنیم خواهیم داشت

$$A_n B_1 (A_1 x + \cdots + A_{n-1} x^{n-1}) + \cdots + A_n B_m (A_1 x + \cdots + A_{n-1} x^{n-1})^m = 0.$$

در نتیجه $A_n B_m (A_{n-1})^m = 0$. بنابراین $r_n b_m a_{n-1}^m = 0$، و لذا $a_{n-1} = 0$.

چون برای هر $k \geq ۰$، $A_n\alpha^k(A_{n-۱}) = ۰$، و حلقه R جابجایی است لذا $A_nB_۱(A_۱x + \cdots + A_{n-۲}x^{n-۲}) + \cdots + A_nB_m(A_۱x + \cdots + A_{n-۲}x^{n-۲})^m = ۰$.

به همین نحو می توان نتیجه گرفت $a_۱ = \cdots = a_n = ۰$. چون برای هر $i \geq ۱$، $A_i\alpha^i(A_i) = ۰$، لذا برای هر $۱ \leq i \leq n$ و هر $۲ \leq j \leq m$، $B_j(A_ix^i)^j = ۰$. در نتیجه $B_۱(A_۱x + \cdots + A_nx^n) = ۰ = (x)f \circ (x)g$، و لذا برای هر $۱ \leq i \leq n$، $B_۱(A_ix^i) = ۰$. با ادامه این روند می توان نتیجه گرفت برای هر $۱ \leq i \leq n$ و هر $۱ \leq j \leq m$، $B_j(A_ix^i)^j = ۰$.

حالت دوم. فرض کنیم $b_m = ۰$ و $a_n \neq ۰$. چون $B_mA_n\alpha^n(A_n) \cdots \alpha^{n(m-۱)}(A_n) = ۰$، لذا $s_ma_n^m = ۰$ و در نتیجه $s_m = ۰$. بنابراین $B_m = ۰$، و این یک تناقض است.

حالت سوم. فرض کنیم $a_n = ۰ = b_m$. ادعا می کنیم $a_۱ = \cdots = a_n = ۰$ یا $b_۱ = \cdots = b_m = ۰$. فرض کنیم چنین نباشد در نتیجه اعداد $n_۱$ و $m_۱$ چنان موجودند که $a_{n_۱} \neq ۰$ و $b_{m_۱} \neq ۰$، اما $a_{n_۱+۱} = \cdots = a_n = ۰$ و $b_{m_۱+۱} = \cdots = b_m = ۰$. در نتیجه $A_nB_۱(A_۱x + \cdots + A_{n_۱}x^{n_۱}) + \cdots + A_nB_{m_۱}(A_۱x + \cdots + A_{n_۱}x^{n_۱})^{m_۱} = ۰$. بنابراین $A_nB_{m_۱}(A_{n_۱}x^{n_۱})^{m_۱} = ۰$، و لذا $r_nb_{m_۱}a_{n_۱}^{m_۱} = ۰$. پس $r_n = ۰$، و این یک تناقض است. اگر $a_۱ = \cdots = a_n = ۰$، آنگاه با استفاده از (۱) برای هر $۱ \leq i \leq n$ و هر $۱ \leq j \leq m$ خواهیم داشت $B_j(A_ix^i)^j = ۰$. اگر $b_۱ = \cdots = b_m = ۰$، آنگاه

$$۰ = (x)f \circ (x)g = B_۱(A_۱x + \cdots + A_{n-۱}x^{n-۱}) + \cdots + B_m(A_۱x + \cdots + A_{n-۱}x^{n-۱})^m$$

و لذا $B_m(A_{n-۱}x^{n-۱})^m = ۰$. در نتیجه $a_{n-۱} = ۰$. با ادامه این روند می توان نشان داد $a_۱ = \cdots = a_{n-۱} = ۰$. بنابراین برای هر $۱ \leq i \leq n$، $۱ \leq j \leq m$، $B_j(A_ix^i)^j = ۰$.

قضیه **۳.۱.۲** فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. در این صورت:

(۱) $R \in \beta_{r۱}$ اگر و تنها اگر $R_\circ[x;\alpha] \in \beta_{\ell۱}$.

(۲) $R \in \beta_{r2}$ اگر و تنها اگر $R_\circ[x;\alpha] \in \beta_{\ell 2}$.

اثبات : (۱) فرض کنیم $R \in \beta_{r1}$. فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای ناتهی از $R_\circ[x;\alpha]$ باشد. در نتیجه $T = \cup_{f\in S} S_f^*$ زیر مجموعه ای ناتهی از R است. چون $R \in \beta_{r1}$، لذا خودتوان $e \in R$ وجود دارد بطوری که $r_R(T) = eR$. نشان می دهیم $\ell(S) = R_\circ[x;\alpha] \circ (ex) = e.R_\circ[x;\alpha]$. فرض کنیم $(x)f = \sum_{i=1}^{m} a_i x^i \in S$. چون $\alpha(e) = e$، خواهیم داشت $(ex) \circ (x)f = \sum_{i=1}^{m} a_i (ex)^i = \sum_{i=1}^{m} a_i e x^i = 0$. بنابراین $ex \in \ell(S)$ و در نتیجه $eR_\circ[x;\alpha] \subseteq \ell(S)$. حال فرض کنیم $(x)h = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k \in \ell(S)$. در نتیجه بنا به لم ۳.۱.۲، برای هر $1 \le k \le n$، $c_k \in r_R(T)$. پس برای هر $1 \le k \le n$، $c_k = ec_k$. در نتیجه $(x)h = e\sum_{k=1}^{n} c_k x^k \in eR_\circ[x;\alpha]$ و لذا $\ell(S) = R_\circ[x;\alpha] \circ (ex)$. بنابراین $R_\circ[x;\alpha] \in \beta_{\ell 1}$.

حال فرض کنیم $R_\circ[x;\alpha] \in \beta_{\ell 1}$. فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای ناتهی از R باشد. زیر مجموعه $S_x = \{sx | s \in S\}$ از $R_\circ[x;\alpha]$ را در نظر می گیریم. چون $R_\circ[x;\alpha] \in \beta_{\ell 1}$، لذا بنا به لم ۴.۱.۲، خودتوان $e \in R$ چنان موجود است که $\ell(S_x) = R_\circ[x;\alpha] \circ (ex)$. برای هر $s \in S$، $sex = (ex) \circ (sx) = 0$. در نتیجه $e \in r_R(S)$. حال فرض کنیم $a \in r_R(S)$. در نتیجه برای هر $sx \in S_x$، $(ax) \circ (sx) = sax = 0$. بنابراین $ax \in \ell(S_x) = R_\circ[x;\alpha] \circ (ex) = eR_\circ[x;\alpha]$. پس $a = ea \in eR$. در نتیجه $r_R(S) = eR$، و لذا $R \in \beta_{r1}$.

(۲) فرض کنیم $R \in \beta_{r2}$. فرض کنیم S زیر مجموعه ای ناتهی از $R_\circ[x;\alpha]$ باشد و $T = \cup_{f\in S} S_f^*$. با اثباتی مشابه (۱) می توان نشان داد خودتوانی مانند $e \in R$ وجود دارد بطوری که $r_R(T) = r_R(e)$. ادعا می کنیم $\ell(S) = \ell(ex)$. فرض کنیم $(x)g = \sum_{j=1}^{n} b_j x^j \in \ell(ex)$. در نتیجه $e(x)g = (x)g \circ ex = 0$. پس برای

هر $1 \leq j \leq n$، $eb_j = 0$. بنابراین، برای هر $1 \leq j \leq n$، $b_j \in r_R(e) = r_R(T)$.
فرض کنیم $(x)f = \sum_{i=1}^{m} a_i x^i \in S$. در نتیجه با استفاده از لم ۱.۱.۲، $0 = (x)g \circ (x)f = \sum_{i=1}^{m} a_i (\sum_{j=1}^{n} b_j x^j)^i$. بنابراین $\ell(ex) \subseteq \ell(S)$. حال فرض کنیم $(x)g = \sum_{j=1}^{n} b_j x^j \in \ell(S)$. در نتیجه بنا به لم ۳.۱.۲، برای هر $1 \leq j \leq n$، $b_j \in r_R(T) = r_R(e)$. پس $0 = e(x)g = (x)g \circ (ex)$. بنابراین $\ell(S) = \ell(ex)$ و لذا $R_0[x;\alpha] \in \beta_{\ell 2}$.

حال فرض کنیم $R_0[x;\alpha] \in \beta_{\ell 2}$. فرض کنیم S زیر مجموعه ناتهی از R باشد. زیر مجموعه $S_x = \{sx | s \in S\}$ از $R_0[x;\alpha]$ را در نظر بگیرید. بنا به لم ۴.۱.۲، خود توان $(x)E = ex \in R_0[x;\alpha]$ وجود دارد بطوری که $\ell(S_x) = \ell((x)E)$. ادعا می کنیم $r_R(S) = r_R(e)$. فرض کنیم $a \in r_R(S)$. در نتیجه برای هر $sx \in S_x$، $ax \circ sx = sax = 0$. پس $ax \in \ell(S_x) = \ell((x)E)$. بنابراین، $ax \circ ex = eax = 0$ و لذا $a \in r_R(e)$. در نتیجه $r_R(S) \subseteq r_R(e)$. حال فرض کنیم $b \in r_R(e)$. در نتیجه $bx \circ ex = ebx = 0$، و لذا $bx \in \ell(S_x)$. پس برای هر $s \in S$، $bx \circ sx = sbx = 0$. در نتیجه $b \in r_R(S)$. بنابراین، $R \in \beta_{r2}$.

مثال زیر نشان می دهد که حلقه ای بئر مانند R وجود دارد بطوری که $R_0[x;\alpha] \notin \beta_{\ell 1} \cup \beta_{r2}$. بنابراین، شرط α—صلب بودن R در قضیه ۳.۱.۲ قابل حذف نمی باشد.

مثال **۳.۱.۲** فرض کنیم F یک میدان باشد و $R = F[y]$ حلقه چند جمله ایها روی F باشد. در نتیجه R یک دامنه جابجایی است و لذا بئر است. فرض کنیم $\alpha : R \to R$ یک هomomorfism با ضابطه $\alpha((f(y)) = f(0)$ باشد. در این صورت:

(۱) R یک حلقه α—صلب نیست.

چون $y\alpha(y)=0$، اما $y\neq 0$.

(۲) $R_0[x;\alpha]\notin \beta_{\ell 1}\cup\beta_{r2}$.

ابتدا نشان می دهیم 0 و x تنها خودتوانهای $R_0[x;\alpha]$ می باشند. فرض کنیم $(x)e=f_1(y)x+\cdots+f_n(y)x^n$ یک خودتوان ناصفر از $R_0[x;\alpha]$ باشد. در نتیجه $(x)e\circ(x)e=(x)e$ و لذا

$$f_1(y)(f_1(y)x+\cdots+f_n(y)x^n)+\cdots+f_n(y)(f_1(y)x+\cdots+f_n(y)x^n)^n=$$
$$f_1(y)x+\cdots+f_n(y)x^n$$

پس $f_1(y)^2=f_1(y)$، و چون R یک دامنه است لذا $f_1(y)=1$ یا $f_1(y)=0$. اگر $f_1(y)=0$، با محاسبه ساده ای می توان نشان داد $(x)e=0$، و این یک تناقض است. در نتیجه $f_1(y)=1$. چون $f_2(y)=f_1(y)f_2(y)+f_2(y)f_1(y)\alpha(f_1(y))$ و $\alpha(f_1(y))=1$، لذا $f_2(y)=1$. با ادامه این روند می توان نشان داد $(x)e=1$. حال نشان می دهیم $R_0[x;\alpha]\notin\beta_{\ell 1}$. فرض کنیم $S=\{x^2\}$. چون $yx\circ x^2=0$، لذا $\ell_{R_0[x;\alpha]}(S)\neq 0$. چون $x\circ x^2=x^2$، لذا $\ell_{R_0[x;\alpha]}(S)\neq R_0[x;\alpha]=R_0[x;\alpha]\circ x$. بنابراین $R_0[x;\alpha]\notin\beta_{\ell 1}$. با استدلالی مشابه می توان نشان داد $R_0[x;\alpha]\notin\beta_{\ell 2}$.

قضیه ۴.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. در این صورت:

(۱) اگر حلقه R بئر باشد آنگاه $R_0[x;\alpha]\in\beta_{r1}\cap\beta_{r2}\cap\beta_{\ell 1}\cap\beta_{\ell 2}$.

(۲) اگر $R_0[x;\alpha]\in\beta_{r1}\cup\beta_{r2}\cup\beta_{\ell 1}\cup\beta_{\ell 2}$، آنگاه حلقه R بئر است.

اثبات : فرض کنیم حلقه R بئر باشد. کافی است نشان دهیم $R_0[x;\alpha]\in\beta_{\ell 1}$. فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای ناتهی از شبه حلقه $R_0[x;\alpha]$ باشد و $T=\cup_{f\in S}S_f^*$. چون حلقه

R بئر است لذا خودتوان $e \in R$ وجود دارد بطوری که $r_R(T) = eR$. نشان می دهیم $\ell(S) = (1-e)R_0[x;\alpha] = R_0[x;\alpha] \circ (1-e)x$. فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i x^i \in S$ و $g(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j x^j \in \ell(S)$. در نتیجه بنا به لم ۳.۱.۲، برای هر $1 \leq i \leq m$ و هر $1 \leq j \leq m$، $a_i b_j = 0$. پس برای هر $1 \leq j \leq m$، $eb_j = 0$ و $b_j = (1-e)b_j$. در نتیجه $g(x) = (1-e)\sum_{j=1}^{n} b_j x^j \in (1-e)R_0[x;\alpha]$ و لذا $\ell(S) \subseteq (1-e)R_0[x;\alpha]$. حال فرض کنیم $g(x) = (1-e)\sum_{j=1}^{n} b_j x^j \in (1-e)R_0[x;\alpha]$. چون R یک حلقه α-صلب است لذا $\alpha(1-e) = (1-e)$ و $(1-e)$ یک خودتوان مرکزی است. در نتیجه برای هر $f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i x^i \in S$، $g(x) \circ f(x) = (\sum_{j=1}^{n} b_j x^j)(\sum_{i=1}^{m} a_i (1-e) x^i) = 0$. بنابراین $\ell(S) = (1-e)R_0[x;\alpha]$. در نتیجه $R_0[x;\alpha] \in \beta_{\ell 1}$.

(۲) فرض کنیم $R_0[x;\alpha] \in \beta_{r1} \cup \beta_{r2} \cup \beta_{\ell 1} \cup \beta_{\ell 2}$. در نتیجه بنا به [۳، گزاره ۱.۴]، $R_0[x;\alpha] \in \beta_{\ell 2}$ و بنا به قضیه ۳.۱.۲، $R \in \beta_{r2}$ و بنا به [۳، لم ۲.۳] حلقه R یکدار است. لذا حلقه R بئر است.

نتیجه ۱.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه α-صلب باشد. در این صورت شرایط زیر هم ارزند:

(۱) حلقه R بئر است.

(۲) حلقه $R[x;\alpha]$ بئر است.

(۳) $R_0[x;\alpha] \in \beta_{r1} \cup \beta_{r2} \cup \beta_{\ell 1} \cup \beta_{\ell 2}$.

اثبات : در مقاله [۱۳] هنگ و همکارانش ثابت کردند حلقه R بئر است اگر و تنها اگر حلقه $R[x;\alpha]$ بئر است و بنا به قضیه ۴.۱.۲، حلقه بئر است اگر و تنها اگر $R_0[x;\alpha] \in \beta_{r1} \cup \beta_{r2} \cup \beta_{\ell 1} \cup \beta_{\ell 2}$.

قضیه ۵.۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. فرض کنیم S زیر شبه حلقه ای از $R[x;\alpha]$ باشد که توسط مجموعه $\{ex|e^2 = e \in R\}$ تولید می شود و T زیر شبه حلقه ای از $R[x;\alpha]$ باشد. اگر $S \subseteq T$ و $R[x;\alpha] \in \beta_{ij}$، بطوری که $i \in \{\ell, r\}$ و $j \in \{1, 2\}$، آنگاه $T \in \beta_{ij}$.

۲.۲ شبه حلقه سریهای توانی اریب روی حلقه R

فرض کنیم α یک هومومورفیسم روی حلقه R باشد. حلقه چند جمله ایهای اریب روی R را با علامت $R[[x;\alpha]]$ نمایش می دهیم. عناصر این حلقه همان سریهای توانی روی R هستند. عمل جمع همان جمع معمولی سریهای توانی است و عمل ضرب از قانون $xr = \alpha(r)x$ تبعیت می کند. می توان نشان داد مجموعه سریهای توانی با جمله ثابت صفر روی حلقه R همراه با دو عمل جمع معمولی سریهای توانی و ترکیب معمولی سریهای توانی یک شبه حلقه آبلی تشکیل می دهد. این شبه حلقه را با علامت $(R_0[[x;\alpha]], +, \circ)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۱.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد و α یک منومورفیسم روی حلقه R باشد و $R_0[[x;\alpha]]$ نمایانگر شبه حلقه سریهای توانی اریب متقارن روی R باشد. در اینصورت R یک حلقه α—صلب است اگر و تنها اگر $R_0[[x;\alpha]]$ کاهشی باشد.

اثبات : فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد اما شبه حلقه $R_0[[x;\alpha]]$ کاهشی نباشد. در نتیجه $f(x) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i x^i \in R[[x;\alpha]]$ وجود دارد بطوری که $n \geq 1$، $a_n \neq 0$ و $f(x) \circ f(x) = 0$. پس $a_n^2 \alpha^n(a_n) \cdots \alpha^{n(n-1)}(a_n) = 0$ و در نتیجه بنا به لم ۱.۱.۲، $a_n = 0$ و این یک تناقض است. بنابراین شبه حلقه $R_0[[x;\alpha]]$ کاهشی است. حال فرض

کنیم شبه حلقه $R_0[[x;\alpha]]$ کاهشی باشد. با توجه به اینکه $R_0[x;\alpha]$ شبه زیر حلقه ای کاهشی از $R_0[[x;\alpha]]$ است لذا بنا به لم ۳.۱.۲ حلقه R یک حلقه α—صلب است.

لم ۱.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد و $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=1}^{\infty}b_jx^j$ دو عضو از شبه حلقه $R[[x;\alpha]]$ باشند. در اینصورت $g(x)\circ f(x)=0$ اگر و تنها اگر برای هر i,j، $b_ja_i=0$.

اثبات : فرض کنیم $g(x)\circ f(x)=0$. در نتیجه

$$* \qquad b_1f(x)+b_2(f(x))^2+b_3(f(x))^3+\cdots=0.$$

چون $b_1a_1=0$ ضریب x در تساوی $*$ است و حلقه R کاهشی است لذا $a_1b_1=0$. عنصر a_1 را از چپ در تساوی $*$ ضرب می کنیم. در نتیجه

$$** \qquad a_1b_2(f(x))^2+a_1b_3(f(x))^3+\cdots=0.$$

چون $a_1b_2\alpha(a_1)=0$ ضریب x^2 در تساوی $**$ است لذا با استفاده از لم ۱.۱.۲ خواهیم داشت $a_1b_2=0$. بطور استقرایی می توان نتیجه گرفت برای هر $j\geq 1$، $a_1b_j=b_ja_1=0$. در نتیجه از آنجایی که حلقه R در شرط IFP صدق می کند نتیجه می گیریم $(\sum_{j=1}^{\infty}b_jx^j)\circ(\sum_{i=2}^{\infty}a_ix^i)=0$. با ادامه این روند می توان نشان داد برای هر i,j، $b_ja_i=0$.

حال فرض کنیم برای هر i,j، $b_ja_i=0$. چون حلقه R در شرط IFP صدق می کند لذا با استفاده از لم ۱.۱.۲ نتیجه می گیریم $g(x)\circ f(x)=0$.

لم ۲.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد و α یک هومومورفیسم روی R باشد. اگر $E(x)=\sum_{i=1}^{\infty}e_ix^i\in R_0[[x;\alpha]]$ یک خودتوان باشد آنگاه $e_1^2=e_1$. اگر R یک حلقه α—صلب باشد آنگاه $E(x)=e_1x$.

اثبات : واضح است که $e_1 = e_1^2$. چون $E(x) = E(x) \circ E(x)$، لذا $e_1 E(x) + e_2 (E(x))^2 + \cdots = E(x)$ و $\cdots = e_1 E(x) + e_1 e_2 (E(x))^2 + \cdots = e_1 e_1 E(x)$. در نتیجه $E(x) \circ (e_1 E(x) - e_1 x) = E(x) \circ (e_1 e_2 x^2 + e_1 e_3 x^3 + \cdots) = 0$. بنابراین بنا به لم ۱.۲.۲ برای هر $i \geq 2$، $e_1 e_i = e_i e_1 = 0$. پس $E(x) \circ (e_2 E(x) - e_2 x) = E(x) \circ (-e_2 x + e_2 e_2 x^2 + \cdots) = 0$. در نتیجه بنا به لم ۱.۲.۲، $e_2 = 0$. با ادامه این روند نتیجه می گیریم برا ی هر $i \geq 2$، $E(x) \circ (-e_i x + e_i e_2 x^2 + \cdots) = 0$ و لذا بنا به لم ۱.۲.۲، برای هر $i \geq 2$، $e_i = 0$.

قضیه ۲.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. در این صورت:

(۱) $R \in \beta_{r1}$ اگر و تنها اگر $R_0[[x;\alpha]] \in \beta_{\ell 1}$.

(۲) $R \in \beta_{r2}$ اگر و تنها اگر $R_0[[x;\alpha]] \in \beta_{\ell 2}$.

اثبات : (۱) فرض کنیم $R \in \beta_{r1}$. فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای ناتهی از $R_0[[x;\alpha]]$ باشد. در نتیجه $T = \cup_{f \in S} S_f^*$ زیر مجموعه ای ناتهی از R است. چون $R \in \beta_{r1}$، لذا خودتوان $e \in R$ وجود دارد بطوری که $r_R(T) = eR$. نشان می دهیم $\ell(S) = R_0[[x;\alpha]] \circ (ex) = e.R_0[[x;\alpha]]$. فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \in S$ و $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} e b_i x^i \in eR_0[[x;\alpha]]$. چون $\alpha(e) = e$ و e یک خودتوان مرکزی است لذا $g(x) \circ f(x) = (\sum_{i=1}^{\infty} e b_i x^i) \circ (\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i) = 0$. بنابراین $g(x) \in \ell(S)$ و در نتیجه $eR_0[[x;\alpha]] \subseteq \ell(S)$. حال فرض کنیم $h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \in \ell(S)$. در نتیجه بنا به لم ۱.۲.۲، برای هر $k \geq 1$، $c_k \in r_R(T)$. پس برای هر $k \geq 1$، $c_k = e c_k$. در نتیجه $h(x) = e \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \in eR_0[[x;\alpha]]$ و لذا $\ell(S) = R_0[[x;\alpha]] \circ (ex)$. بنابراین $R_0[[x;\alpha]] \in \beta_{\ell 1}$.

حال فرض کنیم $R_\circ[[x;\alpha]] \in \beta_{\ell 1}$. فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای ناتهی از R باشد. زیر مجموعه $S_x = \{sx | s \in S\}$ از $R_\circ[[x;\alpha]]$ را در نظر می گیریم. چون $R_\circ[[x;\alpha]] \in \beta_{\ell 1}$، لذا بنا به لم ۲.۲.۲، خودتوان $e \in R$ چنان موجود است که $\ell(S_x) = R_\circ[[x;\alpha]] \circ (ex)$. برای هر $s \in S$، $sex = (ex) \circ (sx) = \circ$. در نتیجه $e \in r_R(S)$. حال فرض کنیم $a \in r_R(S)$. در نتیجه برای هر $sx \in S_x$، $(ax) \circ (sx) = sax = \circ$. بنابراین $ax \in \ell(S_x) = R_\circ[[x;\alpha]] \circ (ex) = eR_\circ[[x;\alpha]]$. پس $a = ea \in eR$. در نتیجه $r_R(S) = eR$، و لذا $R \in \beta_{r 1}$.

(۲) فرض کنیم $R \in \beta_{r 2}$. فرض کنیم S زیر مجموعه ای ناتهی از $R_\circ[[x;\alpha]]$ باشد و $T = \cup_{f \in S} S_f^*$. با اثباتی مشابه (۱) می توان نشان داد خودتوانی مانند $e \in R$ وجود دارد بطوری که $r_R(T) = r_R(e)$. ادعا می کنیم $\ell(S) = \ell(ex)$. فرض کنیم $(x)g = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j \in \ell(ex)$. در نتیجه $e(x)g = (x)g \circ ex = \circ$. پس برای هر $j \geq 1$، $eb_j = \circ$. بنابراین، برای هر $j \geq 1$، $b_j \in r_R(e) = r_R(T)$. فرض کنیم $(x)f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \in S$. در نتیجه با استفاده از لم ۱.۱.۲، $(x)g \circ (x)f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (\sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j)^i = \circ$. بنابراین $\ell(ex) \subseteq \ell(S)$. حال فرض کنیم $(x)g = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j \in \ell(S)$. در نتیجه بنا به لم ۱.۲.۲، برای هر $j \geq 1$، $b_j \in r_R(T) = r_R(e)$. پس $(x)g \circ (ex) = e(x)g = \circ$. بنابراین $\ell(S) = \ell(ex)$ و لذا $R_\circ[[x;\alpha]] \in \beta_{\ell 2}$.

حال فرض کنیم $R_\circ[[x;\alpha]] \in \beta_{\ell 2}$. فرض کنیم S زیر مجموعه ناتهی از R باشد. زیر مجموعه $S_x = \{sx | s \in S\}$ از $R_\circ[[x;\alpha]]$ را در نظر بگیرید. بنا به لم ۲.۲.۲، خود توان $(x)E = ex \in R_\circ[[x;\alpha]]$ وجود دارد بطوری که $\ell(S_x) = \ell((x)E)$. ادعا می کنیم $r_R(S) = r_R(e)$. فرض کنیم $a \in r_R(S)$. در نتیجه برای هر $sx \in S_x$،

$ax \circ sx = sax = \circ$. پس $ax \in \ell(S_x) = \ell((x)E)$. بنابراین، $ax \circ ex = eax = \circ$ و لذا $a \in r_R(e)$. در نتیجه $r_R(S) \subseteq r_R(e)$. حال فرض کنیم $b \in r_R(e)$. در نتیجه $bx \circ ex = ebx = \circ$، و لذا $bx \in \ell(S_x)$. پس برای هر $s \in S$، $bx \circ sx = sbx = \circ$. در نتیجه $b \in r_R(S)$. بنابراین، $R \in \beta_{r۲}$.

قضیه ۳.۲.۲ فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. در این صورت:

(۱) اگر حلقه R بئر باشد آنگاه $R_\circ[[x;\alpha]] \in \beta_{r۱} \cap \beta_{r۲} \cap \beta_{\ell۱} \cap \beta_{\ell۲}$.

(۲) اگر $R_\circ[[x;\alpha]] \in \beta_{r۱} \cup \beta_{r۲} \cup \beta_{\ell۱} \cup \beta_{\ell۲}$، آنگاه حلقه R بئر است.

اثبات : فرض کنیم حلقه R بئر باشد. بنا به لمهای ۲.۱.۱ و ۳.۱.۱ و قضیه ۲.۲.۲ کافی است نشان دهیم $R_\circ[[x;\alpha]] \in \beta_{\ell۱}$. فرض کنیم S یک مجموعه ناتهی از $R_\circ[[x;\alpha]]$ باشد و $T = \cup_{f\in S} S_f^*$. چون حلقه R بئر است لذا خودتوان $e \in R$ وجود دارد بطوری که $r_R(T) = eR$. نشان می دهیم $\ell(S) = (۱-e)R_\circ[[x;\alpha]] = R_\circ[[x;\alpha]] \circ (۱-e)x$. فرض کنیم $(x)f = \sum_{i=۱}^{\infty} a_i x^i \in S$ و $(x)g = \sum_{j=۱}^{\infty} b_j x^j \in \ell(S)$. در نتیجه بنا به لم ۱.۲.۲، برای هر $i \leq ۱$ و هر $j \leq ۱$، $a_i b_j = \circ$. پس برای هر $j \leq ۱$، $eb_j = \circ$ و $b_j = (۱-e)b_j$. در نتیجه $(x)g = (۱-e)\sum_{j=۱}^{\infty} b_j x^j \in (۱-e)R_\circ[[x;\alpha]]$ و لذا $\ell(S) \subseteq (۱-e)R_\circ[[x;\alpha]]$. حال فرض کنیم $(x)g = (۱-e)\sum_{j=۱}^{\infty} b_j x^j \in (۱-e)R_\circ[[x;\alpha]]$. چون R یک حلقه α—صلب است لذا $\alpha(۱-e) = (۱-e)$ و $(۱-e)$ یک خودتوان مرکزی است. در نتیجه برای هر $(x)f = \sum_{i=۱}^{\infty} a_i x^i \in S$، $(x)g \circ (x)f = (\sum_{j=۱}^{\infty} b_j x^j)(\sum_{i=۱}^{\infty} a_i (۱-e)x^i) = \circ$. بنابراین $\ell(S) = (۱-e)R_\circ[[x;\alpha]]$. در نتیجه $R_\circ[[x;\alpha]] \in \beta_{\ell۱}$.

(۲) فرض کنیم $R_\circ[[x;\alpha]] \in \beta_{r۱} \cup \beta_{r۲} \cup \beta_{\ell۱} \cup \beta_{\ell۲}$. بنا به به لمهای ۲.۱.۱ و ۳.۱.۱ فرض می کنیم $R_\circ[[x;\alpha]] \in \beta_{\ell۲}$. بنا به قضیه ۲.۲.۲، $R \in \beta_{r۲}$ و چون حلقه R

کاهشی است لذا بنا به مقاله [۳]، حلقه R یکدار است. لذا حلقه R بئر است.

نتیجه زیر توسیعی از مقاله [۳] است برای حالتی که R یک حلقه α—صلب باشد.

نتیجه **۱.۲.۲** فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. در اینصورت گزاره های زیر معادلند:

(۱) حلقه R بئر است.

(۲) حلقه $(R[[x;\alpha]],+,.)$ بئر است.

(۳) $R_{\circ}[[x;\alpha]] \in \beta_{r۱} \cup \beta_{r۲} \cup \beta_{\ell۱} \cup \beta_{\ell۲}$.

کتاب‌نامه

[1] E.P. Armendariz, A note on extensions of Baer and p.p.-rings, *J. Austral. Math. Soc. 18 (1974), 470-473.*

[2] S.K. Berberian, Baer $*$-Rings, Grundlehren Math. Wiss. Band 195, Springer: Berlin, 1972, 296 pp.

[3] G.F. Birkenmeie and F.K. Huang, Annihilator conditions on polynomials, *Comm. Algebra 29(5) (2001) 2097-2112.*

[4] G.F. Birkenmeie and F.K. Huang, Annihilator conditions on formal power series, *Algebra Colloq. 9(1) (2002) 29-37.*

[5] G.F. Birkenmeier, J. Y. Kim and J.K. Park, On quasi-Baer rings, *Contemporary Mathematics 259 (2000), 67-92.*

[6] G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim and J.K. Park, Polynomial extentions of Baer and quasi-Baer, rings, *J. Pure Appl. Algebra 159 (2001), 25-42.*

[7] J.R. Courville, On idempotents and subsystems generated by idempotents in nearring; *Dissertation, University of Southwestern Louisiana; Lafayette Louisiana, 1976.*

[8] E. Hashemi and A. Moussavi, Polynomial extensions of Baer and quasi-Baer rings, *Acta Math. Hungar. 107(3) (2005) 207-224.*

[9] E. Hashemi and A. Moussavi, Polynomial ore extensions of Baer and p.p.-rings, *Bull. of the Iranian Math. Soc. 29(2)(2003), 65-85.*

[10] E. Hashemi and A. Moussavi, Skew power series extensions of α-rigid p.p.-rings, *Bull. Korian Math. Soc. 41(4)(2004), 657-665.*

[11] Y. Hirano, On annihiator ideals of polynomial ring over a noncommutative ring, *J. Pure Appl. Algebra 168 (2002), 45-52.*

[12] C.Y. Hong, N.K. Kim and T.K. Kwak, On skew Armendariz rings,*Comm. Algebra 31 (1) (2003), 103-122*

[13] C.Y. Hong, N.K. Kim and T.K. Kwak, Ore extensions of Baer and PP rings, *J. Pure Appl. Algebra 151 (2000), 215-226.*

[14] D.A. Jordan, Bijective extension of injective ring endomorphism, *J. London Math. Soc. 35 (2) (1982), 435-488*

[15] I. Kaplansky, Rings of operators, Benjamin, New York, 1995.

[16] J. Krempa, Some examples of reduced rings, *Algebra Colloq. 3(4) (1996), 289-300.*

[17] P. Pollingher and A. zaks, On Baer and quasi-Baer rings, *Duke Math. J. 37 (1970), 127-138.*

[18] C.E. Rickart, Banach algebras with an adjoint operation, *Ann. of Math. 47 (1946), 528-550.*