



دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان

حل رده ای از معادلات دیفرانسیل
معمولی به روش B-اسپلاین

نگارش

زهرا پارسائی تبار

استاد راهنما

دکتر علیرضا ناظمی

شهریور ۹۰

قدردانی

وظیفه خود می دانم که از اساتید و بزرگان و سروران گرامی که در مدت تحصیل با لطف و محبت و تلاش علمی به نگارنده توفیق استفاده از محضر علمی خود را داده اند تشکر و قدردانی بنمایم به خصوص از جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی استاد راهنمای این رساله که در امر تحقیق راهنمایی های شایان توجهی نموده از خداوند متعال سلامتی و آرزوی توفیق دارم.

همچنین از جناب آقای دکتر داوود شاهسونی استاد راهنمای این رساله که تذکرات سودمندی را عرضه داشته اند نیز نهایت تشکر را دارم و از استاتید محترم جناب آقای دکتر امینی خواه و دکتر فتحعلی و بقیه عزیزانی که در طول تحصیل از محضر علمی ایشان بهره مند شدم نیز تقدیر به عمل می آورم.

چکیده

در این پایان نامه از توابع B -اسپلاین درجه ۳ برای حل عددی رده ای از مسائل مقدار مرزی تکین خطی و غیرخطی، دستگاه مسائل مقدار مرزی مرتبه دوم خطی و مسائل مقدار اولیه تکین خطی و غیرخطی استفاده شده است. در نقطه تکین ابتدا معادلات را تغییر داده و سپس با استفاده از روش B -اسپلاین حل می کنیم.

در مسائل غیرخطی با استفاده از روش شبه خطی سازی ابتدا مساله را خطی کرده و مساله بدست آمده را با روش B -اسپلاین حل می کنیم.

جهت بررسی کارائی روش ارائه شده در این پایان نامه، طی ارائه چند مثال، جواب های تقریبی روش B -اسپلاین را با جواب های دقیق و همچنین با جواب های حاصل از سایر تقریب ها نظیر روش های هوموتوپی و تفاضلات متناهی، مورد مقایسه قرار داده ایم.

واژه های کلیدی: B -اسپلاین، معادلات دیفرانسیل معمولی، مسائل مقدار مرزی تکین، مسائل مقدار اولیه، دستگاه مسائل مقدار مرزی مرتبه دو، معادلات لن-آمدن

مقالات مستخرج از پایان نامه

- 1- Parsaee Tabar. Z, Dosti. M, (1390), "An application of B-spline functions for a class of nonlinear singular initial value problems", 42nd Annual Iranian Mathematics Conference, 1407, Rafsanjan.
- 2- Z. Parsaee Tabar, A. R. Nazemi, B-spline collocation method for solving a class of singular initial value problems.

فهرست مطالب

چ	لیست جداول	
ح	لیست تصاویر	
۱	مقدمه و مفاهیم اولیه	۱
۳	۱.۱ معادلات خطی مرتبه دوم	۱.۱
۳	۲.۱ مسائل مقدار مرزی	۲.۱
۴	۳.۱ مسائل مقدار اولیه	۳.۱
۵	۴.۱ نقاط عادی و نقاط تکین	۴.۱
۶	۵.۱ معادله بسل	۵.۱
۷	۶.۱ B-اسپلاین	۶.۱
۱۲	۱.۶.۱ مشتق و انتگرال B-اسپلاین ها	۱.۶.۱
۱۴	۲.۶.۱ کاربردها	۲.۶.۱
۱۵	۳.۶.۱ ماتریس درونیابی	۳.۶.۱
۱۵	۴.۶.۱ B-اسپلاین های درجات بالاتر	۴.۶.۱
۱۸	۷.۱ نرم ها	۷.۱
۱۸	۸.۱ تجزیه مقدار تکین و شبه معکوس	۸.۱
۱۹	۹.۱ قضیه تیلور	۹.۱
۲۱	۲ روش B-اسپلاین برای مسائل مقدار مرزی دو نقطه ای تکین	۲
۲۲	۱.۲ مقدمه	۱.۲
۲۴	۲.۲ مسائل خطی	۲.۲
۲۹	۳.۲ مسائل غیر خطی	۳.۲
۳۱	۴.۲ نتایج عددی:	۴.۲
۳۹	۳ روش B-اسپلاین برای حل دستگاه مسائل مقدار مرزی مرتبه دوم خطی	۳
۴۰	۱.۳ مقدمه	۱.۳
۴۰	۲.۳ تحلیل روش B-اسپلاین	۲.۳

۴۴	نتایج عددی	۳.۳
۴۸		روش B- اسپلاین برای حل رده ای از مسائل مقدار اولیه تکین	۴
۴۹	مقدمه	۱.۴
۵۰	مسائل خطی	۲.۴
۵۳	مسائل غیر خطی	۳.۴
۵۵	نتایج عددی	۴.۴
۶۴		نتیجه گیری و پیشنهاداتی برای کارهای آتی	
۶۵		برنامه های کامپیوتری	
۷۵		کتابنامه	

لیست جداول

۲۵	مقادیر $B_j(x)$ ومشتقاتش درنقاط گرهی	۱.۲
۳۲	نتایج عددی مثال ۱.۴.۲	۲.۲
۳۲	مقایسه نتایج عددی مثال ۱.۴.۲	۳.۲
۳۳	نتایج عددی مثال ۲.۴.۲	۴.۲
۳۵	نتایج مثال ۳.۴.۲	۵.۲
۳۶	نتایج عددی مثال ۴.۴.۲	۶.۲
۳۷	مقایسه نتایج عددی مثال $(h = \frac{1}{64})$ ۴.۴.۲	۷.۲
۳۸	نتایج عددی مثال ۵.۴.۲	۸.۲
۳۸	مقایسه نتایج عددی مثال $(h = \frac{1}{64})$ ۵.۴.۲	۹.۲
۴۱	مقادیر B_i ومشتقاتش درنقاط گرهی	۱.۳
۴۵	نتایج عددی برای u	۲.۳
۴۶	نتایج عددی برای v	۳.۳
۵۶	نتایج عددی مثال ۱.۴.۴	۱.۴
۵۸	نتایج مثال ۲.۴.۴: معادله کره های گاز هم دما	۲.۴
۶۰	نتایج معادله تئوری جریان های الکترونی ریچاردسون	۳.۴
۶۲	نتایج عددی مثال ۴.۴.۴	۴.۴
۶۳	نتایج عددی مثال ۵.۴.۴	۵.۴

لیست تصاویر

۸	$B_{i,0}$ -اسپلاین	۱.۱
۱۱	$B_{i,1}$ -اسپلاین	۲.۱
۳۲	نتایج عددی مثال ۱.۴.۲ برای $h = \frac{1}{40}$	۱.۲
۳۴	نتایج مثال ۲.۴.۲ برای $h = \frac{1}{40}$	۲.۲
۳۴	نتایج مثال ۳.۴.۲ برای $h = \frac{1}{40}$	۳.۲
۳۷	نتایج مثال ۴.۴.۲ برای $h = \frac{1}{40}$	۴.۲
۳۷	نتایج مثال ۵.۴.۲ برای $h = \frac{1}{40}$	۵.۲
۴۶	نتایج عددی مثال ۱.۳.۳ برای $u(x) = x^2 - x$	۱.۳
۴۷	نتایج عددی مثال ۱.۳.۳ برای $v(x) = x - x^2$	۲.۳
۵۷	نتایج عددی مثال ۱.۴.۴ برای $h = \frac{1}{40}$	۱.۴
۵۷	نتایج عددی مثال ۲.۴.۴ با $n = 15$	۲.۴
۵۸	تابع خطا مثال ۲.۴.۴	۳.۴
۶۰	نتایج عددی مثال ۳.۴.۴ با $n = 10$	۴.۴
۶۱	تابع خطا مثال ۳.۴.۴	۵.۴
۶۱	تابع خطا مثال ۴.۴.۴	۶.۴
۶۳	نتایج مثال ۵.۴.۴ با $n = 15$	۷.۴

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

معادلات دیفرانسیل که مبحثی جالب و در عین حال مشکل است، بخشی از ریاضیات است که بیش از هر بخش از هندسه، مکانیک و نجوم الهام یافته است. این مبحث از قرن هفدهم زمانی که دانشمندان به حل چند معادله دیفرانسیل ساده ناشی از هندسه و مکانیک دست یافتند، مورد توجه قرار گرفت. کشفیات اولیه در این مبحث این فکر را پیش آورد که جواب همه معادلات دیفرانسیل ناشی از هندسه و فیزیک را می توان بر حسب توابع مقدماتی آشنا در حساب دیفرانسیل و انتگرال بیان کرد. از اینروست که بخش اعظم کارهای اولیه به یافتن روش های حل معادلات دیفرانسیل با وسائل مقدماتی اختصاص دارد.

روش های خاص نظیر جداسازی متغیرها و استفاده از عامل های انتگرال گیری پیش از پایان قرن هفدهم ابداع شده بودند. در قرن هجدهم روش های اصولی تری به دست آمدند، و به زودی معلوم شد که معادلات دیفرانسیل نسبتاً کمی را می توان با وسائل مقدماتی حل کرد. بدین ترتیب، معادلات دیفرانسیل به عنوان منبع جدیدی از توابع مطرح شد، و آنچنان بسط و گسترش یافت که امروزه به عنوان نیرومندترین حربه ریاضیات در مسائل کاربردی به حساب می آید.

گاهی در رشته های مختلف علوم، مهندسی، پزشکی، اقتصاد و ... ضرورت پیدا می کند که برای بیان مساله مدل ریاضی مشخصی ساخته شود. اغلب این مدل های ریاضی معادلاتی شامل یک تابع مجهول و مشتقات تابع نسبت به متغیرهای مستقل هستند. چنین معادلاتی را معادلات دیفرانسیل می نامند.

۱.۱ معادلات خطی مرتبه دوم

این معادلات به شکل کلی زیر هستند:

$$a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = g(x), \quad a_2(x) \neq 0, \quad (1.1)$$

معادله (۱.۱) را می توان با تقسیم طرفین آن به $a_2(x)$ ، به صورت ساده زیر نوشت:

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x). \quad (2.1)$$

که اگر $f(x) = 0$ ، آنگاه معادله

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0, \quad (3.1)$$

همگن نامیده شده و در غیر اینصورت آن را ناهمگن نامند.

تعریف ۱.۱.۱. جواب های تحلیلی جواب هایی هستند که در آنها متغیر مجهول u به صورت عبارتی ریاضی بر حسب متغیر مستقل و پارامترهای دستگاه بیان می شوند. این عبارت ممکن است به صورت یک سری نامتناهی یا انتگرال داده شوند.

۲.۱ مسائل مقدار مرزی

در نظریه و کاربرد معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معمولی، معمولاً باید تابع در شرایطی روی مرز حوزه ای که معادله دیفرانسیل در آن تعریف شده است صدق کند. معادلاتی که آن شرایط مرزی را نمایش می دهند، ممکن است شامل مقادیر تابع و مشتقات آن در نقاط مرز باشند. بعلاوه شرایطی در مورد پیوستگی تابع و مشتقات آن در حوزه و روی مرز لازم است. چنین مجموعه ای از شرایط، یک مساله مقدار مرزی تشکیل می دهد.

مثال ۱.۲.۱. سه معادله

$$\begin{aligned} u''(x) - u(x) &= -1, & 0 < x < 1, \\ u'(0) &= 0, & u(1) &= 0, \end{aligned} \quad (۴.۱)$$

نمونه ای از یک مساله مقدار مرزی در معادلات دیفرانسیل معمولی است. این معادله دیفرانسیل در حوزه $0 < x < 1$ ، با نقاط مرزی $x = 0$ و $x = 1$ تعریف شده است. یک جواب این مساله که خود آن و مشتقاتش در بازه بسته $0 \leq x \leq 1$ پیوسته باشند عبارت است از

$$u(x) = 1 - \frac{\cosh x}{\cosh 1}. \quad (۵.۱)$$

که با جایگذاری مستقیم می توان بسادگی درستی جواب (۵.۱) را تحقیق کرد.

۳.۱ مسائل مقدار اولیه

به طور کلی در معادلات مرتبه n ، به مسائلی که مقدار تابع پاسخ و مشتق های آن تا مرتبه $(n - 1)$ در یک نقطه از دامنه جواب مشخص باشد، مسائل مقدار اولیه گویند. به عنوان مثال، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر با دو شرط داده شده، یک مساله مقدار اولیه نامیده می شود:

$$\begin{aligned} u'' &= f(x, u, u'), & a \leq x \leq b, \\ u(x_0) &= \alpha, & u'(x_0) &= \beta. \end{aligned} \quad (۶.۱)$$

که در آن $x_0 = a$ و α, β اعداد حقیقی معلومی هستند. منظور از حل مساله (۶.۱)، یافتن $u(x)$ برای $a \leq x \leq b$ است.

قضیه ۱.۳.۱. [۲] فرض کنید توابع $p(x)$ ، $q(x)$ و $f(x)$ در بازه I پیوسته باشند. همچنین فرض کنید $x_0 \in I$ و u_0 و z_0 دو عدد حقیقی باشند. آنگاه مساله مقدار اولیه

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad u(x_0) = u_0, \quad u'(x_0) = z_0. \quad (۷.۱)$$

دارای یک جواب یکتاست. این جواب بر تمام بازه I تعریف می شود.

۴.۱ نقاط عادی و نقاط تکین

تعریف ۱.۴.۱. تابع f روی مجموعه باز D تحلیلی است اگر برای هر $x_0 \in D$ بتوان نوشت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

در این فرمول a_0, a_1, \dots اعداد حقیقی هستند و سری برای x در یک همسایگی از x_0 همگرا است.

به عنوان مثال هر چندجمله ای تحلیلی است، به این دلیل که اگر چندجمله ای از درجه n باشد، هر جمله از درجه بزرگتر از n در بسط سری تیلورش صفر است بنابراین این سری به طور جزئی همگرا خواهد بود.

تعریف ۲.۴.۱. معادله خطی همگن مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0. \quad (۸.۱)$$

نقطه x_0 را یک نقطه عادی معادله (۸.۱) می نامیم، هرگاه هر دو تابع $p(x)$ و $q(x)$ در x_0 تحلیلی باشند. اگر حداقل یکی از توابع $p(x)$ و $q(x)$ در x_0 تحلیلی نباشند، نقطه x_0 را یک نقطه تکین معادله (۸.۱) می نامیم.

در اغلب معادلات دیفرانسیل به شکل (۸.۱) که در کاربردها با آنها روبرو می شویم، توابع $p(x)$ و $q(x)$ توابعی گویا هستند و بنابراین، در هر نقطه بجز نقاطی که به ازای آنها مخرج صفر می شود، تحلیلی می باشند. نقاطی که به ازای آنها مخرج صفر می شود، نقاط تکین معادله نامیده شده و بقیه نقاط، نقاط عادی هستند.

تعریف ۳.۴.۱. نقطه x_0 را یک نقطه تکین منظم معادله (۸.۱) می نامیم هرگاه x_0 یک نقطه تکین معادله بوده و دو تابع

$$(x - x_0)p(x), \quad (x - x_0)^2 q(x),$$

در x_0 تحلیلی باشند. اگر حداقل یکی از دو تابع در x_0 تحلیلی نباشند، آنگاه x_0 یک نقطه تکین نامنظم معادله (۸.۱) نامیده می شود.

۵.۱ معادله بسل

معادله

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - p^2) u = 0, \quad (9.1)$$

که در آن $p \geq 0$ ، معادله بسل مرتبه p نامیده می شود.

همچنین تابع بسل نوع اول مرتبه p را با $J_p(x)$ نشان می دهیم و با انتخاب

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} = \frac{1}{2^p p!},$$

به شکل زیر تعریف می کنیم

$$J_p(x) = \frac{1}{2^p p!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+p}}{2^{2n} n! (p+1)(p+2)\cdots(p+n)},$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}. \quad (10.1)$$

تابع $J_p(x)$ در (۱۰.۱) یک جواب معادله بسل (۹.۱) است.

تابع بسل مرتبه صفر با جایگزین نمودن $p = 0$ در عبارت (۱۰.۱) به صورت زیر بدست

می آید

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots$$

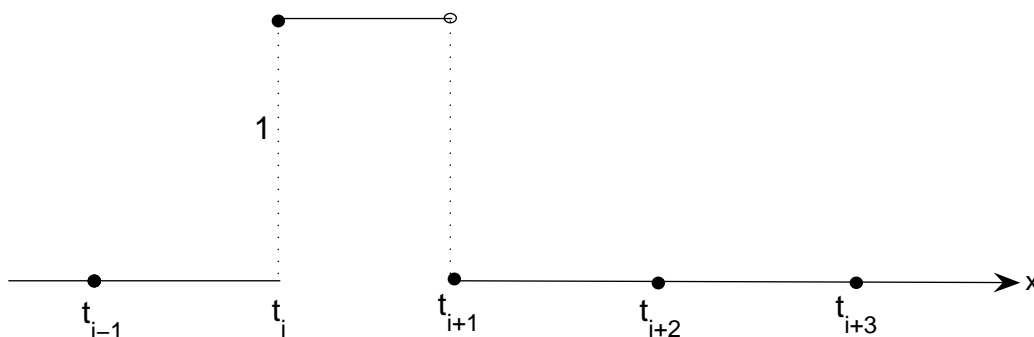
۶.۱ -B اسپلین

در این بخش توابع اسپلینی معرفی می شوند که از آنها کلیه توابع اسپلین دیگر می توانند با تشکیل ترکیب های خطی به دست آیند. به عبارت دیگر این اسپلین ها یک پایه برای فضا های اسپلین های خاص فراهم می کنند و بنابراین -B اسپلین نامیده می شوند.

با دستگاهی از گره های t_i بر روی خط حقیقی شروع می کنیم. برای اهداف عملی همیشه یک مجموعه متناهی از نقاط لازم می باشد، اما برای گسترش نظریه بسیار راحت تر است که فرض کنیم که مجموعه گره ها یک مجموعه نامتناهی، از راست تا $+\infty$ و از چپ تا $-\infty$ را تشکیل می دهد:

$$\dots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \dots$$

این دنباله گره ها در تمام این بخش ثابت فرض می شود، و همه اسپلین های ما بر آن استوار خواهند بود.

شکل ۱.۱: B-اسپلاین $B_{i,0}$

B-اسپلاین‌های درجه صفر

B-اسپلاین‌های درجه صفر را با $B_{i,0}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1, & t_i \leq x < t_{i+1}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

و نمودار آن مطابق شکل (۱.۱) می‌باشد.

برخی از خواص قابل توجه B-اسپلاین درجه صفر عبارتند از:

۱. اگر $x \notin [t_i, t_{i+1})$ آنگاه $B_{i,0} = 0$.

۲. $B_{i,0}(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{Z}$.

۳. $B_{i,0}$ بر روی همه خط حقیقی از راست پیوسته است.

$$۴. \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_{i,0}(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

درستی خاصیت چهارم، با انتخاب هر $x \in \mathbb{R}$ و تعیین بازه ای که x در آن واقع است به سهولت قابل بررسی می باشد زیرا مثلا اگر $t_j \leq x < t_{j+1}$ آنگاه $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_{i,0}(x) = 1$ و $B_{j,0}(x) = 1$.

تذکر قابل توجه درباره اسپلاین های $B_{i,0}$ این است که آنها یک پایه برای همه اسپلاین های درجه صفر براساس دنباله گره های مفروض تشکیل می دهند، به شرط آنکه چنین اسپلاین هایی را به پیوسته بودن از راست مقید کنیم. برای تحقیق این ادعا، فرض کنید که S تابع اسپلاینی باشد که از راست پیوسته است. آنگاه این اسپلاین قطعه ای ثابت است و با یک مجموعه قواعد به صورت زیر تعریف می شود

$$S(x) = c_i, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t_i \leq x < t_{i+1}.$$

واضح است که $S(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_{i,0}(x)$ بنابراین ما یک پایه به مفهوم شودر^۱ داریم (هر بردار در فضا یک نمایش منحصر بفرد به صورت یک سری نامتناهی $\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_{i,0}$ دارد).

توابع $B_{i,0}$ نقطه شروعی برای تعریف بازگشتی همه B -اسپلاین های از درجه بالاتر هستند. رابطه بازگشتی اساسی عبارت است از

$$B_{i,k}(x) = \left(\frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i}\right) B_{i,k-1}(x) + \left(\frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}}\right) B_{i+1,k-1}(x), \quad (k \geq 1) \quad (11.1)$$

تمام ویژگی های B -اسپلاین های از درجه بالاتر از این تعریف بازگشتی نتیجه خواهند شد.

^۱Schauder

با وارد کردن برخی از توابع خطی خاص

$$V_{i,k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} \quad (12.1)$$

می‌توانیم رابطه بازگشتی را به صورت زیر و به شکل زیباتری بنویسیم

$$B_{i,k} = V_{i,k}B_{i,k-1} + (1 - V_{i+1,k})B_{i+1,k-1}. \quad (13.1)$$

از آنجا که $V_{i,k}$ تابعی خطی و $B_{i,0}$ یک چندجمله‌ای قطعه به قطعه از درجه صفر است، لذا $B_{i,1}$ یک چندجمله‌ای قطعه به قطعه از درجه کوچکتر یا مساوی ۱ می‌باشد. این موضوع نشان دهنده آن است که بطور کلی $B_{i,k}$ یک چندجمله‌ای قطعه به قطعه از درجه کوچکتر یا مساوی k خواهد بود. همچنین مقادیر $B_{i,k}(x)$ به ازای هر مقدار مشخص x که

$t_j \leq x < t_{j+1}$ با کمک جدول زیر مشخص می‌شوند

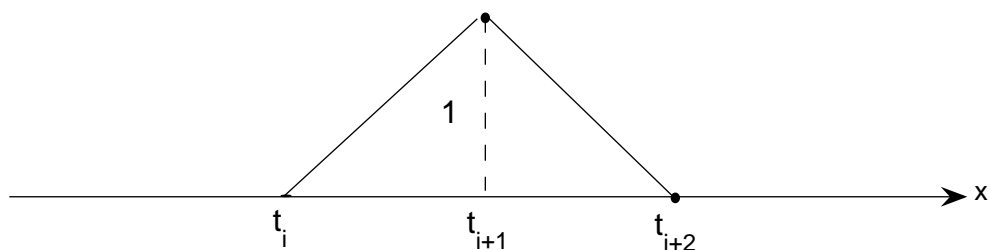
$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \dots & & \\ \circ & \circ & \circ & B_{j-3,3} & \dots & & \\ \circ & \circ & B_{j-2,2} & B_{j-2,3} & \dots & & \\ \circ & B_{j-1,1} & B_{j-1,2} & B_{j-2,3} & \dots & & \\ B_{j,0} & B_{j,1} & B_{j,2} & B_{j,3} & \dots & & \end{array}$$

از آنجا که بنا به خاصیت چهارم، برای هر $t_j \leq x < t_{j+1}$ مقدار $B_{j,0}$ در اولین ستون برابر یک است لذا بنا به رابطه (۱۱.۱) کلیه عناصر $B_{i,k}$ در ماتریس بالا، بر اساس دو عنصر مجاور آن یعنی $B_{i,k-1}$ و $B_{i+1,k-1}$ قابل محاسبه خواهند بود.

B- اسپلاین‌های درجه ۱

با کمک معادله (۱۱.۱) می‌توانیم یک فرمول صریح برای $B_{i,1}$ به صورت زیر ارائه دهیم:

$$\begin{aligned} B_{i,1}(x) &= \left(\frac{x - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right)B_{i,0}(x) + \left(\frac{t_{i+2} - x}{t_{i+2} - t_{i+1}}\right)B_{i+1,0}(x) \\ &= \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i}, & t_i \leq x < t_{i+1}, \\ \frac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_{i+1}}, & t_{i+1} \leq x < t_{i+2}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \end{aligned}$$



شکل ۲.۱: B-اسپلاین $B_{i,1}$

نمودار $B_{i,1}$ در شکل (۲.۱) نشان داده شده است.

برخی از خواص قابل توجه B-اسپلاین درجه یک عبارتند از:

$$۱. \text{ اگر } x \notin (t_i, t_{i+2}) \text{ آنگاه } B_{i,1} = ۰.$$

$$۲. B_{i,1}(x) \geq ۰, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

۳. $B_{i,1}$ پیوسته است و در هر نقطه بجز t_i ، t_{i+1} ، t_{i+2} مشتق پذیر است.

$$۴. \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_{i,1}(x) = ۱, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

برای بررسی خاصیت چهارم، x ای دلخواه و متعلق به \mathbb{R} در نظر می‌گیریم، چون t_i وقتی i افزایش می‌یابد به $+\infty$ همگرا می‌گردد و وقتی i کاهش می‌یابد به $-\infty$ همگرا می‌شود، می‌توانیم یک اندیس j طوری بیابیم که $t_j \leq x < t_{j+1}$ سپس $B_{i,1}(x) = 0$ برای تمام i ها به استثنای $i = j$ یا $i = j - 1$ از این رو برای این x داریم

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_{i,1}(x) = B_{j-1,1}(x) + B_{j,1}(x) = \frac{t_{j+1} - x}{t_{j+1} - t_j} + \frac{x - t_j}{t_{j+1} - t_j} = 1.$$

برخی خواص مهم B-اسپلاین‌ها:

۱. اگر $k \geq 1$ و $x \notin (t_i, t_{i+k+1})$ آنگاه $B_{i,k}(x) = 0$.

۲. فرض کنید $k \geq 0$ ، اگر $x \in (t_i, t_{i+k+1})$ آنگاه $B_{i,k}(x) > 0$.

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_{i,k} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} [c_i V_{i,k} + c_{i-1} (1 - V_{i,k})] B_{i,k-1} \quad ۳.$$

۴. به ازای هر k ,

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_{i,k}(x) = 1.$$

۱.۶.۱ مشتق و انتگرال B-اسپلاین‌ها

لم ۱.۶.۱ یک فرمول مهم برای مشتق $B_{i,k}$ ارائه می‌دهد. بهتر است از فرمول (۱۲.۱) برای $V_{i,k}$ استفاده کرده و قرار دهیم

$$\alpha_{i,k} = \frac{1}{t_{i+k} - t_i}, \quad (۱۴.۱)$$

با این نمادگذاری ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{d}{dx} V_{i,k}(x) = \alpha_{i,k}, \quad (۱۵.۱)$$

بقیه فرمول های مفید دیگر عبارتند از:

$$\alpha_{i,k} V_{i,k+1} = \alpha_{i,k+1} V_{i,k}, \quad (16.1)$$

$$\alpha_{i+1,k} (1 - V_{i,k+1}) = \alpha_{i,k+1} (1 - V_{i+1,k}). \quad (17.1)$$

صحت روابط فوق بر اساس تعاریف $\alpha_{i,k}$ و $V_{i,k}$ قابل بررسی است.

لم ۱.۶.۱. [۵]. به ازای $k \geq 2$,

$$\frac{d}{dx} B_{i,k}(x) = \left(\frac{k}{t_{i+k} - t_i}\right) B_{i,k-1}(x) - \left(\frac{k}{t_{i+k+1} - t_{i+1}}\right) B_{i+1,k-1}, \quad (18.1)$$

وقتی $k = 1$ معادله برای تمام x ها به جز $x = t_i, t_{i+1}, t_{i+2}$ برقرار است.

لم ۲.۶.۱. [۵]. به ازای $k \geq 1$ $-B$ اسپلاین های $B_{i,k}$ به رده پیوستگی $C^{k-1}(\mathbb{R})$ تعلق دارند.

لم ۳.۶.۱. [۵].

$$\int_{-\infty}^x B_{i,k}(s) ds = \left(\frac{t_{i+k+1} - t_i}{k+1}\right) \sum_{j=i}^{\infty} B_{j,k+1}(x).$$

ویژگی های اضافی

اگر f یک تابع و K یک زیر مجموعه از دامنه اش باشد، آنگاه تحدید f به K را با $f|K$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$(f|K)(x) = f(x), \quad (x \in K),$$

این مفهوم در کار با اسپلاین ها مفید می باشد، زیرا هر تابع $B_{i,k}|(t_j, t_{j+1})$ یک چند جمله ای و به طور دقیق تر تحدید یک چند جمله ای است. منظور از این که یک مجموعه از

توابع f_i بر روی یک مجموعه K مستقل خطی اند آن است که مجموعه توابع تحدید شده $f_i|_K$ به مفهوم معمول، مستقل خطی هستند.

حال توابع B -اسپلاین $B_{\circ,k}, B_{1,k}, \dots, B_{k,k}$ را در نظر بگیرید. وقتی این توابع به بازه $(t_\nu, t_{\nu+1})$ محدود شوند، مجموعه ای از چندجمله ای ها از درجه کوچکتر یا مساوی k ایجاد می شود. یک واقعیت مفید و تعجب آور آن است که اگر بازه مورد نظر (t_k, t_{k+1}) باشد، این تحدیدها یک پایه برای فضای چندجمله ایهای Π_k تشکیل می دهند.

لم ۴.۶.۱. [۵]. مجموعه B -اسپلاین های $\{B_{j,k}, B_{j+1,k}, \dots, B_{j+k,k}\}$ بر روی (t_{k+j}, t_{k+j+1}) مستقل خطی است.

لم ۵.۶.۱. [۵]. مجموعه B -اسپلاین های $\{B_{-k,k}, B_{-k+1,k}, \dots, B_{n-1,k}\}$ بر روی (t_\circ, t_n) مستقل خطی است.

۲.۶.۱ کاربردها

در بخش قبل توابع را به طور کلی از رده C^{k-1} و چندجمله ای قطعه به قطعه را از درجه کوچکتر یا مساوی k بر روی n بازه $[t_\circ, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ در نظر گرفتیم. فرض کنید خانواده چنین اسپلاین هایی را با $S_{n,k}$ نمایش دهیم. نمادگذاری، گره ها را که از ابتدا ثابت هستند، نمایش نمی دهد. ما توابع اسپلینی را در $S_{n,k}$ در نظر می گیریم که دارای دامنه $[t_\circ, t_n]$ باشند. دامنه توابع $B_{i,k}$ را به بازه $[t_\circ, t_n]$ محدود می کنیم، نمادگذاری برای توابع محدود شده عبارت است از: $B_{i,k}|_{[t_\circ, t_n]}$.

قضیه ۶.۶.۱. [۵]. یک پایه برای فضای $S_{n,k}$ عبارت است از

$$\{B_{i,k}|_{[t_\circ, t_n]}; -k \leq i \leq n-1\}$$

در نتیجه بعد $S_{n,k}$ برابر با $k + n$ می باشد.

۳.۶.۱ ماتریس درونیابی

فرض کنید $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ مجموعه‌ای از گره‌های داده شده باشند می‌خواهیم توسط یک تابع اسپلاین به شکل $\sum_{j=1}^n c_j B_{j,k}$ ، داده‌های دلخواه داده شده در گره‌ها را درونیابی کنیم. برای اینکه این عمل ممکن باشد، ماتریس درونیابی A ، ارائه شده به صورت

$$A_{ij} = B_{j,k}(x_i), \quad (1 \leq i, j \leq n) \quad (19.1)$$

باید نامنفرد باشد. قضیه شونبرگ^۲ و ویتنی^۳ شرایط لازم و کافی برای نامنفرد بودن A را بیان می‌کند.

لم ۷.۶.۱ [۵]. اگر ماتریس A نامنفرد باشد، آنگاه $A_{ii} \neq 0$ به ازای $1 \leq i \leq n$.

لم ۸.۶.۱ [۵]. اگر $k = 1$ و برای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $t_i < x_i < t_{i+1}$ آنگاه A نامنفرد است.

قضیه ۹.۶.۱ (شونبرگ - ویتنی) [۵]. فرض کنید $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ برای اینکه ماتریس A ، ارائه شده به صورت $A_{ij} = B_{j,k}(x_i)$ ، نامنفرد باشد، لازم و کافی است هیچ عنصر صفی بر روی قطرش وجود نداشته باشد.

۴.۶.۱ B-اسپلاین‌های درجات بالاتر

در بخش‌های قبلی B-اسپلاین درجه صفر و درجه یک معرفی شدند و همچنین اشاره گردید که با توجه به رابطه بازگشتی می‌توان B-اسپلاین‌های درجه بالاتر را با همان خواص تولید کرد.

^۲Scheonberg

^۳Whitney

برای راحتی کار و ساده نویسی فرض می کنیم فاصله گره ها از یکدیگر ثابت باشد یعنی $h = x_{i+1} - x_i$ حال با توجه به رابطه بازگشتی (۱۱.۱) -B اسپلاین درجه دو را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$B_i(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{i+2} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^2 + 3(x_i - x)^2, & x \in [x_{i-1}, x_i), \\ (x_{i+2} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^2, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ (x_{i+2} - x)^2, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}), \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

دوباره با توجه به رابطه بازگشتی، -B اسپلاین درجه سه برابر است با:

$$B_i(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i+2})^3, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}), \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3, & x \in [x_{i-1}, x_i), \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x)^2 + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ (x_{i+2} - x)^3, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}), \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به همین ترتیب، -B اسپلاین های درجه چهار، پنج، شش و هفت را به ترتیب به صورت زیر خواهیم داشت که همگی دارای خواص ذکر شده در بخش های پیشین می باشند.

$$B_i(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x - x_{i-2})^4, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}), \\ (x - x_{i-2})^4 - 5(x - x_{i-1})^4, & x \in [x_{i-1}, x_i), \\ (x - x_{i-2})^4 - 5(x - x_{i-1})^4 + 10(x - x_i)^4, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ (x_{i+2} - x)^4 - 5(x_{i+2} - x)^4, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}), \\ (x_{i+2} - x)^4, & x \in [x_{i+2}, x_{i+3}), \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$B_i(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{i-3})^5, & x \in [x_{i-3}, x_{i-2}), \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}), \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5 + 15(x - x_{i-1})^5, & x \in [x_{i-1}, x_i), \\ (x_{i+3} - x)^5 - 6(x_{i+2} - x)^5 + 15(x_{i+1} - x)^5, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ (x_{i+3} - x)^5 - 6(x_{i+2} - x)^5, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}), \\ (x_{i+3} - x)^5, & x \in [x_{i+2}, x_{i+3}), \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$B_i(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} (x - x_{i-4})^6, & x \in [x_{i-4}, x_{i-3}), \\ (x - x_{i-4})^6 - 7(x - x_{i-3})^6, & x \in [x_{i-3}, x_{i-2}), \\ (x - x_{i-4})^6 - 7(x - x_{i-3})^6 + 21(x - x_{i-2})^6, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}), \\ (x - x_{i-4})^6 - 7(x - x_{i-3})^6 + 21(x - x_{i-2})^6 - 35(x - x_i)^6, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ (x - x_{i-4})^6 - 7(x - x_{i-3})^6 + 21(x - x_{i-2})^6, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}), \\ (x - x_{i-4})^6 - 7(x - x_{i-3})^6, & x \in [x_{i+2}, x_{i+3}), \\ (x - x_{i-4})^6, & x \in [x_{i+3}, x_{i+4}), \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$B_i(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{i-4})^5, & x \in [x_{i-4}, x_{i-3}), \\ (x - x_{i-4})^5 - \lambda(x - x_{i-3})^5, & x \in [x_{i-3}, x_{i-2}), \\ (x - x_{i-4})^5 - \lambda(x - x_{i-3})^5 + 2\lambda(x - x_{i-2})^5, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}), \\ (x - x_{i-4})^5 - \lambda(x - x_{i-3})^5 + 2\lambda(x - x_{i-2})^5 - 5\lambda(x - x_{i-1})^5, & x \in [x_{i-1}, x_i), \\ (x_{i+4} - x)^5 - \lambda(x_{i+3} - x)^5 + 2\lambda(x_{i+2} - x)^5 - 5\lambda(x_{i+1} - x)^5, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ (x_{i+4} - x)^5 - \lambda(x_{i+3} - x)^5 + 2\lambda(x_{i+2} - x)^5, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}), \\ (x_{i+4} - x)^5 - \lambda(x_{i+3} - x)^5, & x \in [x_{i+2}, x_{i+3}), \\ (x_{i+4} - x)^5, & x \in [x_{i+3}, x_{i+4}), \\ 0, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

توابع B-اسپلاین در حل عددی مسائل گوناگون کاربردهای قابل توجهی دارند. به عنوان نمونه، B-اسپلاین درجه سه و درجه پنج در [۷] برای حل مسائل مقدار مرزی خطی توسط جاتور^۴ و سینکالا^۵ بکار گرفته شده اند و همچنین B-اسپلاین درجه سه توسط کاگلر^۶ و آزر^۷ برای حل چند مساله مقدار مرزی تکین غیر خطی مطرح در فیزیولوژی در [۸] مورد استفاده قرار گرفت. همچنین B-اسپلاین درجه شش توسط لقمانی و احمدی نیا در حل مسائل مقدار مرزی مرتبه ۶ در [۹] استفاده شده است. روش B-اسپلاین و روش های تفاضلات متناهی^۸، عناصر متناهی^۹ و حجم متناهی^{۱۰} نیز در [۱۰] مورد مقایسه قرار گرفته اند.

همچنین معادلات دیفرانسیل معمولی با روش های عددی دیگری نیز حل شده اند برای نمونه می توان به موارد زیر اشاره کرد:

روش تجزیه آدمین در [۱۱] برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی درجه سه، در [۱۲] برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تکین و در [۱۳] برای حل مسائل مقدار اولیه بکار برده شده است. روش آشفتگی هوموتوپی در [۱۴] برای حل دستگاهی از معادلات

^۴Jator^۵Sinkala^۶Caglar^۷Ozer^۸finite difference^۹finite element^{۱۰}finite volume

دیفرانسیل معمولی و در [۱۵] برای حل مسائل مقدار مرزی غیر خطی بکار برده شده است. در [۱۶] کاربرد روش های تفاضلات متناهی، عناصر متناهی و حجم متناهی برای حل مسائل مقدار مرزی بیان شده است.

۷.۱ نرم ها

یکی از اولین نکاتی که در تقریب یک تابع و یا برازش یک مدل داده های مفروض باید در نظر گرفت، نوع تابع تقریب است. تابع تقریب عموماً ترکیب خطی از یک مجموعه از توابع است که اعضایش دارای خواص معینی می باشند. مساله اصلی، تعیین ضرایب این ترکیب خطی است به طوری که تابع تقریب به اندازه کافی به تابع مورد نظر نزدیک بوده و یا به قدر کافی داده های مفروض را برازش کند. برای سنجش نزدیکی یا کفایت تقریب می توان از نرم تابع استفاده نمود.

تعریف ۱.۷.۱. به ازای تابع معلوم $f \in C[a, b]$ ، نرم های $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_\infty$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_a^b (f(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

تعریف ۲.۷.۱. هر گاه S تقریبی از $f \in C[a, b]$ باشد، خطای مطلق مساوی $\|f - S\|$ و خطای نسبی برابر $\frac{\|f - S\|}{\|S\|}$ است.

۸.۱ تجزیه مقدار تکین و شبه معکوس

قضیه ۱.۸.۱. (تجزیه مقدار تکین)

فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $m \times n$ باشد آنگاه ماتریس های متعامد U و V وجود

دارند به قسمی که

$$U^T AV = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} = \Sigma.$$

که در آن Σ_1 یک ماتریس قطری نامنفرد است. عناصر قطر Σ همگی نامنفی هستند و می توانند به ترتیب غیرصعودی مرتب شوند. تعداد عناصر قطری مخالف صفر Σ برابر با رتبه ماتریس A است.

شبه معکوس

شبه معکوس یک ماتریس همیشه وجود دارد. شبه معکوس A را با A^\dagger نمایش داده و دارای خاصیت های زیر است:

$$AA^\dagger A = A \quad (۱)$$

$$A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger \quad (۲)$$

$$(AA^\dagger)^T = AA^\dagger \quad (۳)$$

$$(A^\dagger A)^T = A^\dagger A \quad (۴)$$

فرض کنید $A = U\Sigma V^T$ ، SVD^{۱۱} ماتریس A باشد آنگاه $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T$ که در آن

$$\Sigma^\dagger = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, \circ, \dots, \circ\right) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

و σ_i ها مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

۹.۱ قضیه تیلور

یک قضیه بسیار مهم در رابطه با توابع $C^m[a, b]$ ، قضیه تیلور است که در سرتاسر مطالعه آنالیز عددی مطرح می شود.

^{۱۱}Singular Value Decomposition

قضیه ۱.۹.۱. (قضیه تیلور با باقیمانده لاگرانژ)

اگر $f \in C^n[a, b]$ و $f^{(n+1)}$ بر روی (a, b) وجود داشته باشد آنگاه برای هر دو نقطه c و x در $[a, b]$ داریم

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k + E_n(x), \quad (20.1)$$

که

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}.$$

و ξ نقطه ای بین x و c است.

قضیه ۲.۹.۱. (قضیه تیلور دو متغیره)

اگر $f \in C^{n+1}([a, b] \times [c, d])$ آنگاه برای هر دو نقطه $x+h$ و $y+k$ در $[a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ داریم

$$f(x+h, y+k) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(x, y) + E_n(h, k),$$

که

$$E_n(h, k) = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x+\theta h, y+\theta k), \quad 0 < \theta < 1.$$

فصل ۲

روش B- اسپلاین برای مسائل مقدار
مرزی دو نقطه ای تکین

۱.۲ مقدمه

در این فصل، رده‌ای از معادلات مقدار مرزی دو نقطه‌ای تکین به صورت زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$x^{-k}(x^k u')' = f(x, u), \quad 0 < x \leq 1, \quad (1.2)$$

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = \beta. \quad (2.2)$$

که در آن $k \in (0, 1)$ (تکین ضعیف) و یا می‌تواند مقادیر ۱ یا ۲ (تکین قوی) را اختیار کند. اگر $k = 1$ ، آنگاه معادله (۱.۲) یک مساله استوانه‌ای^۱ و اگر $k = 2$ ، آن را یک مساله کروی^۲ نامند. همچنین β مقدار متناهی دارد. اگر $f(x, u)$ پیوسته و $\partial f / \partial u$ موجود و پیوسته باشد و $\partial f / \partial u \geq 0$ ، آنگاه معادله (۱.۲) جواب یکتا دارد [۱۷].

برای $k \in (0, 1)$ ، معادله فوق در حالت خطی توسط جامت^۳ [۱۸]، به کمک یک طرح تفاضل متناهی سه نقطه‌ای استاندارد و با تقسیم بندی یکنواخت^۴ مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که خطا، با نرم ماکزیمم، از مرتبه $O(h^{1-k})$ می‌باشد. کارلت^۵ کاربرد روش ریلی^۶ - ریتس^۷ - گالرکین^۸ را مورد بررسی قرار داد و نشان داد که خطا، با نرم یکنواخت^۹، از مرتبه $O(h^{2-k})$ است [۱۹]. ردین^{۱۰} در [۲۱] و ردین و شوماکر^{۱۱} در [۲۲] روش‌های تصویری خاص و اسپلاین‌های ویژه‌ای را برای حل معادله‌های خطی استفاده

^۱ cylindrical problem

^۲ spherical problem

^۳ Jamet

^۴ uniform mesh

^۵ Ciarlet

^۶ Rayleigh

^۷ Ritz

^۸ Galerkin

^۹ the uniform norm

^{۱۰} Reddien

^{۱۱} Schumaker

نموده و همچنین وجود و یکتایی و مرتبه همگرایی این روش ها را بررسی کردند. راسل و شامپین تفاضلات متناهی مرتبه دوم متداول را با $k = 1, 2$ مورد استفاده قرار داده‌اند [۱۷]. برای $k = 2$ ، چاولا^{۱۲} و کتی^{۱۳} طرح تفاضلات متناهی سه نقطه‌ای را به کار برده و همگرایی آن را از مرتبه $O(h^2)$ را بدست آوردند [۲۳]. کاربرد روش‌های تفاضلات متناهی برای معادله‌های مقدار مرزی تکین غیرخطی توسط جامت مورد بحث قرار گرفته است [۱۸]. یک طرح تفاضلات متناهی سه نقطه‌ای توسط راسل و شامپین با روش تکرار نیوتن برای حل معادلات غیرخطی پیشنهاد شده است [۱۷].

هدف ما در این بخش، توضیح روش B -اسپلاین برای حل رده‌ی از معادلات مقدار مرزی تکین خطی و غیرخطی به فرم زیر می‌باشد

$$u''(x) + \frac{k}{x}u'(x) = f(x, u(x)), \quad 0 < x \leq 1, \quad (3.2)$$

که در آن $k = 1$ یا $k = 2$. و شرایط مرزی عبارتند از

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = \beta, \quad (4.2)$$

در معادلات غیرخطی، روش شبه خطی سازی^{۱۴}، که توسط بلمن^{۱۵} و کالبا^{۱۶} [۲۴] توسعه یافته است، برای تبدیل این نوع معادلات به دنباله‌ای از معادلات خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

^{۱۲}Chawla

^{۱۳}Katti

^{۱۴}quasilinearization

^{۱۵}Bellman

^{۱۶}kalaba

۲.۲ مسائل خطی

برای بررسی فرم خطی معادله (۳.۲)، فرض می‌کنیم

$$f(x, u(x)) = r(x)u(x) - s(x),$$

لذا معادله (۳.۲) به صورت زیر در می‌آید

$$u''(x) + \frac{k}{x}u'(x) - r(x)u(x) + s(x) = 0, \quad 0 < x \leq 1. \quad (۵.۲)$$

برای سادگی، عملگر دیفرانسیل L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Lu(x) = -\left(u''(x) + \frac{k}{x}u'(x) - r(x)u(x)\right)$$

لذا معادله (۵.۲) به صورت $Lu(x) = s(x)$ بازنویسی می‌شود. با فرض $r(x) = a$ (ثابت)

نتایج زیر برقرار است: (برای جزئیات بیشتر به [۱۷] مراجعه کنید).

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید $s(x) \in C[0, 1]$ و ثابت a در نامساوی‌های زیر صدق کند:

$$a > -j_0^2, \quad k = 1,$$

$$a > -\pi^2, \quad k = 2,$$

که $j_0 = 2.40483$ کوچکترین صفر مثبت تابع بسل $j_0(x)$ می‌باشد، آنگاه معادله (۵.۲)

با شرایط (۴.۲) دارای جواب یکتای $u(x)$ است.

نتیجه ۲.۲.۲. فرض کنید که $u(1) \geq 0$ ، $u'(0) = 0$ ، $u(x) \in C^2[0, 1]$ ، $0 < x < 1$ و

$$Lu(x) \geq 0. \text{ آنگاه } u(x) \geq 0 \text{ برای } 0 \leq x \leq 1.$$

جدول ۱.۲: مقادیر $B_j(x)$ و مشتقاتش در نقاط گرهی

	x_{j-2}	x_{j-1}	x_j	x_{j+1}	x_{j+2}
$B_j(x)$	۰	۱	۴	۱	۰
$B'_j(x)$	۰	$\frac{3}{h}$	۰	$-\frac{3}{h}$	۰
$B''_j(x)$	۰	$\frac{6}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	۰

اگر دامنه تغییرات متغیر مستقل x بازه $[0, 1]$ باشد، نقاط متساوی الفاصله $\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ را طوری انتخاب می کنیم که $x_0 = 0$ و $x_N = 1$ و $h = \frac{1}{N}$ است. تعریف می کنیم $S_3(\pi) = \{p(t) \in C^2[0, 1]\}$ بطوریکه $p(t)$ در هر زیر بازه (x_i, x_{i+1}) برای هر i چند جمله ای درجه ۳ است. $S_3(\pi)$ یک فضای خطی است [۲۶]. برای $i = 0, 1, \dots, N$ توابع پایه را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$B_i(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ (x_{i+2} - x)^3, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۶.۲)$$

علاوه بر این چهارگره اضافی و خارج از بازه را به صورت $x_{N+2} > x_{-2} < x_{-1} < x_0$ در نظر می گیریم. با توجه به معادله (۶.۲)، به سادگی می توان تحقیق کرد که $B_i(x) \in C^2(\mathbb{R})$. همچنین جدول (۱.۲) مقادیر B -اسپلاین و مشتقاتش را در نقاط گرهی نشان می دهد. لذا هر $B_i(x)$ یک چندجمله ای قطعه به قطعه درجه ۳ با نقاط گرهی π می باشد، بطوریکه $B_i(x) \in S_3(\pi)$. فرض کنید $\Omega = \{B_{-1}, B_0, \dots, B_{N+1}\}$ و $B_3(\pi) = \text{Span} \Omega$. توابع Ω روی بازه $[0, 1]$ مستقل خطی هستند، بنابراین $B_3(\pi)$ ، $(N+3)$ بعدی است. همچنین $B_3(\pi) = S_3(\pi)$ [۲۶].

فرض کنید $S(x)$ تابع اسپلاینی باشد که $u(x)$ را در نقاط گرهی درونیابی می کند و

$S(x) \in B_3(\pi)$. لذا $S(x)$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$S(x) = \sum_{k=-1}^{N+1} c_k B_k(x). \quad (7.2)$$

حال با قرار دادن (۷.۲) در (۵.۲) و در نقاط گرهی داریم

$$\begin{aligned} & c_{-1}(B''_{-1}(x_i) + (k/x_i)B'_{-1}(x_i) - r(x_i)B_{-1}(x_i)) + c_0(B''_0(x_i) + (k/x_i)B'_0(x_i) \\ & - r(x_i)B_0(x_i)) + c_1(B''_1(x_i) + (k/x_i)B'_1(x_i) - r(x_i)B_1(x_i)) + \dots \\ & + c_N(B''_N(x_i) + (k/x_i)B'_N(x_i) - r(x_i)B_N(x_i)) + c_{N+1}(B''_{N+1}(x_i) \\ & + (k/x_i)B'_{N+1}(x_i) - r(x_i)B_{N+1}(x_i)) = -s(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (8.2)$$

با توجه به خصوصیات توابع B-اسپلاین، برای هر i امین نقطه گرهی $x = x_i$ ،

$1, 2, \dots, N$ ، معادله (۸.۲) به صورت زیر در می آید

$$\begin{aligned} & c_{i-1}(B''_{i-1}(x_i) + (k/x_i)B'_{i-1}(x_i) - r_i B_{i-1}(x_i)) + c_i(B''_i(x_i) \\ & + (k/x_i)B'_i(x_i) - r_i B_i(x_i)) + c_{i+1}(B''_{i+1}(x_i) \\ & + (k/x_i)B'_{i+1}(x_i) - r_i B_{i+1}(x_i)) = -s_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (9.2)$$

که در آن $r(x_i) = r_i$ و $s(x_i) = s_i$.

با توجه به مقادیر داده شده در جدول (۱.۲) داریم

$$\begin{aligned} & (6 - 3\frac{kh}{x_i} - r_i h^2)c_{i-1} + (-12 - 4r_i h^2)c_i + (6 + 3\frac{kh}{x_i} \\ & - r_i h^2)c_{i+1} = -s_i h^2, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (10.2)$$

در نقطه تکین $x_0 = 0$ ، معادله (۵.۲) را به صورت زیر تغییر می دهیم

$$(1 + k)u''(x) - r(x)u(x) = -s(x), \quad x = x_0. \quad (11.2)$$

با بکارگیری روش B-اسپلاین ذکر شده فوق برای معادله (۱۱.۲) در نقطه $x = x_0$ ، به رابطه زیر می‌رسیم

$$(1+k) \sum_{i=-1,0,1} c_i B_i''(x_0) - r_0 \sum_{i=-1,0,1} c_i B_i(x_0) = -s_0, \quad (12.2)$$

لذا داریم

$$\begin{aligned} & (6(1+k) - r_0 h^2) c_{-1} - (12(1+k) + 4r_0 h^2) c_0 \\ & + (6(1+k) - r_0 h^2) c_1 = -s_0 h^2. \end{aligned} \quad (13.2)$$

همچنین از معادله (۴.۲) داریم:

$$\sum_{i=-1,0,1} c_i B_i'(x_0) = 0, \quad (14.2)$$

و

$$\sum_{i=N-1,N,N+1} c_i B_i(x_N) = \beta. \quad (15.2)$$

از معادله (۱۴.۲) داریم

$$\frac{-3}{h} c_{-1} + \frac{3}{h} c_1 = 0, \quad (16.2)$$

و از معادله (۱۵.۲) داریم

$$c_{N-1} + 4c_N + c_{N+1} = \beta. \quad (17.2)$$

معادلات (۱۰.۲)-(۱۵.۲) به یک دستگاه با ماتریس ضرایب $(N+3) \times (N+3)$ و $(N+3)$ مجهول $C_N = (c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_{N+1})^T$ منجر می‌شوند. حال با حذف c_{-1} از معادلات (۱۳.۲) و (۱۶.۲) معادله زیر به دست می‌آید

$$c_0 (36(1+k) + 12r_0 h^2) + c_1 (-36(1+k) + 6r_0 h^2) = 3s_0 h^2. \quad (18.2)$$

به طور مشابه، با حذف c_{N+1} از معادلات (۱۰.۲) و (۱۷.۲) در $x = x_N$ داریم

$$c_{N-1}(6kh/x_N) + c_N(36 + 12kh/x_N) = \beta(6 + 3kh/x_N - r_N h^2) + s_N h^2. \quad (19.2)$$

دو معادله (۱۸.۲) و (۱۹.۲) همراه با $(N-1)$ معادله اول (۱۰.۲) یک دستگاه سه قطری

تشکیل می‌دهند، که از $(N+1)$ معادله خطی $Ax_N = d_N$ با $(N+1)$ مجهول $x_N =$

$(c_0, c_1, \dots, c_N)^T$ و طرف راست

$$d_N = (3s_0 h^2, -s_1 h^2, \dots, -s_{N-1} h^2, \beta(6 + 3kh/x_N - r_N h^2) + s_N h^2)^T.$$

تشکیل شده است. ماتریس ضرایب A به صورت زیر می‌باشد

$$A = \begin{bmatrix} 36(1+k) + 12r_0 h^2 & -36(1+k) + 6r_0 h^2 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \dots \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & \dots \\ \dots & \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_{N-1} & \beta_{N-1} & \gamma_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & 6\frac{kh}{x_N} & 36 + \frac{12kh}{x_N} \end{bmatrix},$$

که در آن:

$$\alpha_i = 6 - \frac{3kh}{x_i} - r_i h^2, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$\beta_i = -12 - 4r_i h^2, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$\gamma_i = 6 + \frac{3kh}{x_i} - r_i h^2, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

با حل دستگاه فوق ضرایب c_0, c_1, \dots, c_N ، و با استفاده از معادلات (۱۶.۲) و (۱۷.۲)

ضرایب c_{N+1}, c_{-1} را بدست می‌آیند.

۳.۲ مسائل غیر خطی

در روش شبه خطی سازی^{۱۷}، معادله دیفرانسیل غیر خطی به صورت بازگشتی با کمک یک دنباله از معادلات دیفرانسیل خطی حل می‌شود. مزیت اصلی این روش این است که در صورت همگرایی، روش با مرتبه دو به جواب مساله اصلی همگرا می‌باشد. همگرایی مرتبه دو به این معناست که خطا، در تکرار $(n+1)$ ام، با مجذور خطا در تکرار (n) ام متناسب است.

فرض کنید در معادله (۳.۲)، $f(x, u(x))$ نسبت به $u(x)$ غیرخطی باشد. در $(n+1)$ امین مرحله معادله (۳.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$(u'')^{n+1}(x) + \frac{k}{x}(u')^{n+1}(x) = f(x, u^{n+1}(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20.2)$$

بسط عبارت غیر خطی $f(x, u^{n+1}(x))$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f(x, u^{n+1}(x)) = f(x, u^n(x)) + (u^{n+1} - u^n)f'(x, u^n(x)) + \dots, \quad n = 0, 1, \dots \quad (21.2)$$

تقریب اولیه تابع $u(x)$ در $f(x, u(x))$ را به صورت $u^0(x)$ در نظر می‌گیریم. حال معادله (۲۰.۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$(u'')^{n+1}(x) + \frac{k}{x}(u')^{n+1}(x) + p^{(n)}(x)(u)^{n+1}(x) = q^{(n)}(x), \quad (22.2)$$

با شرایط مرزی:

$$(u')^{n+1}(0) = 0,$$

$$(u)^{n+1}(1) = \beta, \quad (23.2)$$

^{۱۷}quasilinearization technique

که در آن:

$$\begin{aligned} p^{(n)}(x) &= -f'(x, u^n(x)), \\ q^{(n)}(x) &= f(x, u^n(x)) - u^n f'(x, u^n(x)). \end{aligned} \quad (24.2)$$

برای حل معادله مقدار مرزی تکین خطی داده شده در (۲۲.۲)، با شرایط (۲۳.۲)، از B -اسپلاین توضیح داده شده در بخش قبل استفاده می‌کنیم. لذا در i -امین نقطه گرهی داریم

$$\begin{aligned} &c_{i-1}^{n+1}(B_{i-1}''(x_i) + (\frac{k}{x_i})B_{i-1}'(x_i) + p_i^n B_{i-1}(x_i)) + c_i^{n+1}(B_i''(x_i) \\ &+ (\frac{k}{x_i})B_i'(x_i) + p_i^n B_i(x_i)) + c_{i+1}^{n+1}(B_{i+1}''(x_i) + (\frac{k}{x_i})B_{i+1}'(x_i) \\ &+ p_i^n B_{i+1}(x_i)) = q_i^n, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \quad \forall n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (25.2)$$

که در آن $p_i^n = p^n(x_i)$ و $q_i^n = q^n(x_i)$. در نقطه تکین $x = x_0$ ، مانند بخش قبل، معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$(1+k)(u'')^{n+1}(x) + p^{(n)}(x)(u)^{n+1}(x) = q^{(n)}(x), \quad x = x_0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (26.2)$$

اکنون با بکارگیری روش B -اسپلاین در $x = x_0$ برای معادله (۲۶.۲) داریم

$$(1+k) \sum_{i=-1,0,1} c_i^{n+1} B_i''(x_0) + p^n \sum_{i=-1,0,1} c_i^{n+1} B_i(x_0) = q^n \quad \forall n = 0, 1, \dots, \quad (27.2)$$

همچنین شرایط مرزی (۲۳.۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند

$$\sum_{i=-1,0,1} c_i^{n+1} B_i'(x_0) = 0, \quad (28.2)$$

و

$$c_{N-1}^{n+1} B_{N-1}(x_N) + c_N^{n+1} B_N(x_N) + c_{N+1}^{n+1} B_{N+1}(x_N) = \beta. \quad (29.2)$$

با استفاده از معادلات (۲۵.۲) - (۲۹.۲)، مانند بخش قبل، در هر مرحله یک دستگاه سه قطری بدست می آید. مقدار جواب تقریبی، در هر مرحله از تکرار $(n = 0, 1, 2, \dots)$ ، تا زمانی که نامساوی $|u_i^{n+1} - u_i^n| < \epsilon$ به ازای ϵ مشخص شده برقرار شود، محاسبه می شود.

۴.۲ نتایج عددی:

در این بخش، نتایج عددی با ارائه چند مثال نشان داده می شود.

مثال ۱.۴.۲. [۳۱] در معادله (۵.۲)، قرار می دهیم $k = 2$ ، $r(x) = 4$ و $s(x) = 2$ ، و شرایط مرزی را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = 5/5.$$

این معادله، توسط راسل^{۱۸} و شامپین^{۱۹} در [۱۷] مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین جواب دقیق آن به صورت زیر می باشد

$$u(x) = \frac{1}{2} + \frac{5 \sinh(2x)}{x \sinh(2)}.$$

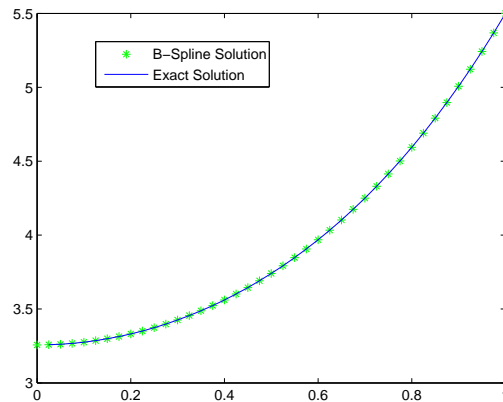
جواب تقریبی برای مقادیر مختلف h در جدول (۲.۲) نشان دهنده آن است که در این مثال جواب بدست آمده با تعداد نقاط گرهی بیشتر خطای کمتری دارد. همچنین در جدول (۳.۲)، به ازای تعداد نقاط گرهی متفاوت، ماکزیمم خطای روش B -اسپلاین با دو روش دیگر مقایسه گردیده و نشان دهنده عملکرد بهتر روش B -اسپلاین نسبت به دو روش دیگر است. نتایج عددی برای $h = \frac{1}{4}$ در شکل (۱.۲) نشان داده شده است.

^{۱۸}Russel

^{۱۹}Shampine

جدول ۲.۲: نتایج عددی مثال ۱.۴.۲

x	$S(x)$			جواب دقیق
	$h_1 = \frac{1}{4}$	$h_2 = \frac{1}{8}$	$h_3 = \frac{1}{16}$	
۰/۰۰۰	۳/۲۳۵۹۸۱	۳/۲۵۱۸۹۷	۳/۲۵۷۱۳۱	۳/۲۵۷۲۰۵
۰/۱۲۵	-	۳/۲۸۳۳۳۰	۳/۲۸۵۹۴۲	۳/۲۸۶۰۱۶
۰/۲۵۰	۳/۳۶۳۰۴۴	۳/۳۷۱۷۳۷	۳/۳۷۳۴۶۱	۳/۳۷۳۵۳۳
۰/۳۷۵	-	۳/۵۲۱۳۲۴	۳/۵۲۲۹۹۲	۳/۵۲۳۰۶۱
۰/۵۰۰	۳/۷۳۳۸۱۳	۳/۷۳۸۶۴۸	۳/۷۴۰۲۰۶	۳/۷۴۰۲۷۱
۰/۶۲۵	-	۴/۰۳۲۰۳۴	۴/۰۳۳۳۹۹	۴/۰۳۳۴۵۶
۰/۷۵۰	۴/۴۰۹۳۲۳	۴/۴۱۲۷۷۴	۴/۴۱۳۸۶۲	۴/۴۱۳۹۰۷
۰/۸۷۵	-	۴/۸۹۵۷۴۸	۴/۸۹۶۳۹۹	۴/۸۹۶۴۲۶
۱/۰۰۰	۵/۵۰۰۰۰۰۰	۵/۵۰۰۰۰۰۰	۵/۵۰۰۰۰۰۰	۵/۵۰۰۰۰۰۰



شکل ۱.۲: نتایج عددی مثال ۱.۴.۲ برای $h = \frac{1}{4}$

جدول ۳.۲: مقایسه نتایج عددی مثال ۱.۴.۲

$N = \frac{1}{h}$	$\ u(x) - S(x)\ _\infty$		
	finite diff. method [۱۷]	Patch bases [۱۷]	روش B-اسپلاین
۴	$۲/۱۲E - ۰۱$	$۲/۰۲E - ۰۱$	$۲/۱۲۲۳۸۱E - ۰۲$
۹	$۵/۰۵E - ۰۲$	$۴/۰۹E - ۰۲$	$۴/۱۹۴۹E - ۰۳$
۱۶	$۱/۸۰E - ۰۲$	$۱/۳۰E - ۰۲$	$۱/۳۲۸۵۳E - ۰۳$
۲۵	$۸/۰۲E - ۰۳$	$۵/۳۳E - ۰۳$	$۵/۴۴۰۵۲۴E - ۰۴$
۶۴	$۱/۴۳E - ۰۳$	$۸/۱۴E - ۰۴$	$۸/۲۴۹۵۳E - ۰۵$

جدول ۴.۲: نتایج عددی مثال ۲.۴.۲

 u_i : جواب B -اسپلاین، U_i : جواب دقیق

x_i	$u_i(h = \frac{1}{40})$	$u_i(h = \frac{1}{80})$	U_i
۰/۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰
۰/۰۲۵	-	۰/۹۹۹۳۷۵	۰/۹۹۹۳۷۵
۰/۰۵۰	۰/۹۹۷۵۰۰	۰/۹۹۷۵۰۰	۰/۹۹۷۵۰۰
۰/۰۷۵	-	۰/۹۹۴۳۷۵	۰/۹۹۴۳۷۵
۰/۱۰۰	۰/۹۹۰۰۰۰	۰/۹۹۰۰۰۰	۰/۹۹۰۰۰۰
۰/۲۰۰	۰/۹۶۰۰۰۰	۰/۹۶۰۰۰۰	۰/۹۶۰۰۰۰
۰/۳۰۰	۰/۹۱۰۰۰۰	۰/۹۱۰۰۰۰	۰/۹۱۰۰۰۰
۰/۴۰۰	۰/۸۴۰۰۰۰	۰/۸۴۰۰۰۰	۰/۸۴۰۰۰۰
۰/۵۰۰	۰/۷۵۰۰۰۰	۰/۷۵۰۰۰۰	۰/۷۵۰۰۰۰
۰/۶۰۰	۰/۶۴۰۰۰۰	۰/۶۴۰۰۰۰	۰/۶۴۰۰۰۰
۰/۷۰۰	۰/۵۱۰۰۰۰	۰/۵۱۰۰۰۰	۰/۵۱۰۰۰۰
۰/۸۰۰	۰/۳۶۰۰۰۰	۰/۳۶۰۰۰۰	۰/۳۶۰۰۰۰
۰/۹۰۰	۰/۱۹۰۰۰۰	۰/۱۹۰۰۰۰	۰/۱۹۰۰۰۰
۱/۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰

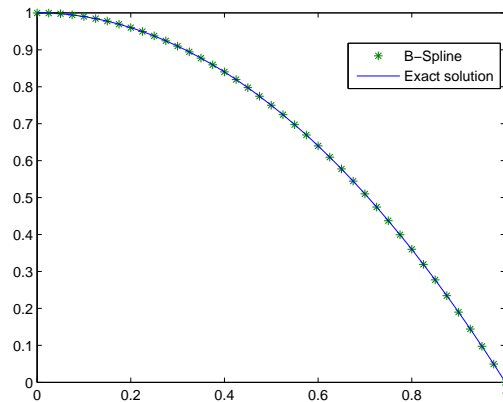
مثال ۲.۴.۲. [۳۲] معادله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید

$$-u''(x) - \frac{2}{x}u'(x) + (1-x^2)u(x) = x^4 - 2x^2 + 7, \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

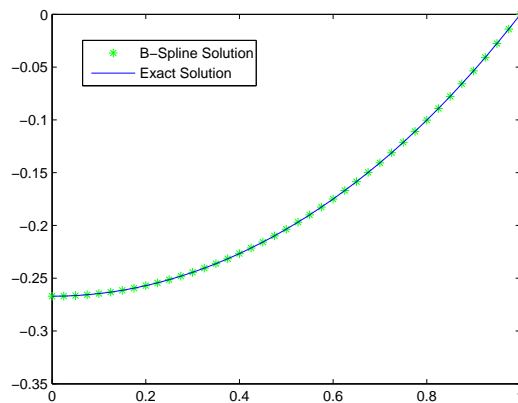
با در نظر گرفتن $r(x) = -(1-x^2)$ ، $s(x) = -(x^4 - 2x^2 + 7)$ ، و $k = 2$ ، معادله فوق را می‌توان به صورت معادله (۵.۲) بازنویسی کرد. جواب دقیق، $u(x) = 1 - x^2$ می‌باشد. نتایج عددی بدست آمده در جدول (۴.۲) نشان می‌دهد که در برخی از مسائل با تعداد نقاط گرهی کمتری نیز می‌توان به جواب مورد نظر دست یافت. همچنین شکل (۲.۲) نتایج را برای ۴۰ گره نمایش می‌دهد.

مثال ۳.۴.۲. [۳۲] معادله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) = \left(\frac{8}{8-x^2}\right)^2, \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$



شکل ۲.۲: نتایج مثال ۲.۴.۲ برای $h = \frac{1}{40}$.



شکل ۳.۲: نتایج مثال ۳.۴.۲ برای $h = \frac{1}{40}$.

با در نظر گرفتن $r(x) = 0$ ، $s(x) = -\left(\frac{\lambda}{\lambda-x}\right)^2$ و $k = 1$ ، معادله فوق را می توان به صورت معادله (۵.۲) بازنویسی نمود، جواب دقیق، $u(x) = 2 \log \frac{\lambda}{\lambda-x^2}$ می باشد. نتایج عددی در جدول (۵.۲) و شکل (۳.۲) نشان داده شده است.

مثال ۴.۴.۲. [۳۱] معادله غیرخطی، مطرح شده در علم نجوم (موازنه کره های گاز

جدول ۵.۲: نتایج مثال ۳.۴.۲
 u_i : جواب B -اسپلین، U_i : جواب دقیق

x_i	$u_i(h = \frac{1}{4})$	$u_i(h = \frac{1}{8})$	U_i
۰/۰۰۰	-۰/۲۶۷۰۸۹	-۰/۲۶۷۰۶۹	-۰/۲۶۷۰۶۳
۰/۰۲۵	-	-۰/۲۶۶۹۱۳	-۰/۲۶۶۹۰۷
۰/۰۵۰	-۰/۲۶۶۴۶۴	-۰/۲۶۶۴۴۴	-۰/۲۶۶۴۳۸
۰/۰۷۵	-	-۰/۲۶۵۶۶۲	-۰/۲۶۵۶۵۶
۰/۱۰۰	-۰/۲۶۴۵۸۸	-۰/۲۶۴۵۶۷	-۰/۲۶۴۵۶۱
۰/۲۰۰	-۰/۲۵۷۰۶۴	-۰/۲۵۷۰۴۴	-۰/۲۵۷۰۳۸
۰/۳۰۰	-۰/۲۴۴۴۶۰	-۰/۲۴۴۴۴۱	-۰/۲۴۴۴۳۵
۰/۴۰۰	-۰/۲۲۶۶۸۱	-۰/۲۲۶۶۶۳	-۰/۲۲۶۶۵۷
۰/۵۰۰	-۰/۲۰۳۵۸۷	-۰/۲۰۳۵۷۰	-۰/۲۰۳۵۶۵
۰/۶۰۰	-۰/۱۷۴۹۹۴	-۰/۱۷۴۹۷۹	-۰/۱۷۴۹۷۵
۰/۷۰۰	-۰/۱۴۰۶۶۶	-۰/۱۴۰۶۵۴	-۰/۱۴۰۶۵۱
۰/۸۰۰	-۰/۱۰۰۳۱۱	-۰/۱۰۰۳۰۲	-۰/۱۰۰۳۰۰
۰/۹۰۰	-۰/۰۵۳۵۶۸	-۰/۰۵۳۵۶۳	-۰/۰۵۳۵۶۲
۱/۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰

هم‌دما^{۲۰}، با قرار دادن $k = 2$ و $f(x, u) = -u^5(x)$ در معادله (۳.۲) و شرایط مرزی زیر توصیف می‌شود:

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

که جواب دقیق آن $u(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ است. همچنین این معادله در [۱۷] و [۳۰] نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در جدول (۶.۲) نتایج با تعداد نقاط گرهی مختلف نشان دهنده افزایش دقت با افزایش تعداد گره‌ها می‌باشد. در جدول (۷.۲) روش B -اسپلین با دو روش دیگر قابل مقایسه است و در شکل (۴.۲) نتایج عددی به ازای $u^0 = 0$ ، $n = 20$ و $\epsilon = 10^{-5}$ رسم شده است.

مثال ۵.۴.۲ [۳۱] فرض کنید در معادله (۳.۲)، $k = 1$ ، $f(x, u) = -\exp(u)$ ، با شرایط

^{۲۰}the equilibrium of isothermal gas spheres

جدول ۶.۲: نتایج عددی مثال ۴.۴.۲

x	$S(x)$				جواب دقیق
	$h = \frac{1}{10}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{40}$	$h = \frac{1}{80}$	
۰/۰	۰/۹۹۹۹۴۳	۰/۹۹۹۹۸۵	۰/۹۹۹۹۹۶	۰/۹۹۹۹۹۹	۱/۰۰۰۰۰۰
۰/۱	۰/۹۹۸۲۸۴	۰/۹۹۸۳۲۴	۰/۹۹۸۳۳۴	۰/۹۹۸۳۳۶	۰/۹۹۸۳۳۷
۰/۲	۰/۹۹۳۳۵۱	۰/۹۹۳۳۸۷	۰/۹۹۳۳۹۶	۰/۹۹۳۳۹۸	۰/۹۹۳۳۹۹
۰/۳	۰/۹۸۵۲۸۹	۰/۹۸۵۳۱۹	۰/۹۸۵۳۲۶	۰/۹۸۵۳۲۸	۰/۹۸۵۳۲۹
۰/۴	۰/۹۷۴۳۲۴	۰/۹۷۴۳۴۶	۰/۹۷۴۳۵۲	۰/۹۷۴۳۵۴	۰/۹۷۴۳۵۴
۰/۵	۰/۹۶۰۷۴۷	۰/۹۶۰۷۶۳	۰/۹۶۰۷۶۷	۰/۹۶۰۷۶۸	۰/۹۶۰۷۶۸
۰/۶	۰/۹۴۴۸۹۸	۰/۹۴۴۹۰۸	۰/۹۴۴۹۱۰	۰/۹۴۴۹۱۰	۰/۹۴۴۹۱۱
۰/۷	۰/۹۲۷۱۴۰	۰/۹۲۷۱۴۴	۰/۹۲۷۱۴۵	۰/۹۲۷۱۴۵	۰/۹۲۷۱۴۵
۰/۸	۰/۹۰۷۸۴۰	۰/۹۰۷۸۴۱	۰/۹۰۷۸۴۱	۰/۹۰۷۸۴۱	۰/۹۰۷۸۴۱
۰/۹	۰/۸۸۷۳۵۷	۰/۸۸۷۳۵۶	۰/۸۸۷۳۵۶	۰/۸۸۷۳۵۶	۰/۸۸۷۳۵۶
۱/۰	۰/۸۶۶۰۲۵	۰/۸۶۶۰۲۵	۰/۸۶۶۰۲۵	۰/۸۶۶۰۲۵	۰/۸۶۶۰۲۵

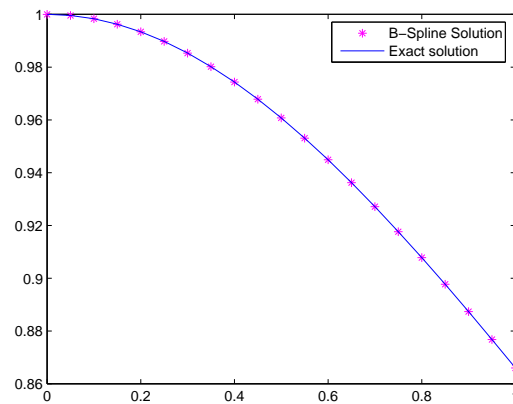
مرزی :

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

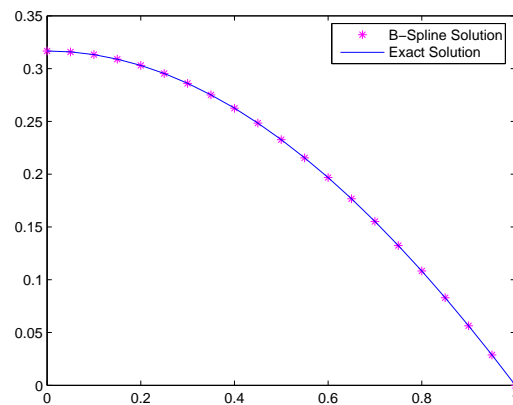
این معادله غیرخطی توسط راسل و شامپین [۱۷] بحث شده است. جواب دقیق آن $u(x) = 2 \left(\log \frac{B+1}{Bx+1} \right)$ با $B = 3 \pm 2\sqrt{2}$ است. در محاسبات $B = 3 - 2\sqrt{2}$ در نظر گرفته شده است. نتایج بدست آمده با تعداد گره های متفاوت در جدول (۸.۲) نشان دهنده افزایش دقت روش ارائه شده با افزایش تعداد گره ها می باشد و مقایسه نتایج در جدول (۹.۲) دقت روش را نشان می دهد و همچنین نتایج در شکل (۵.۲) با $u^0 = 0$ و $n = 15$ رسم شده است.

جدول ۷.۲: مقایسه نتایج عددی مثال ۴.۴.۲ ($h = \frac{1}{64}$)

x	finite diff. method [۱۷]	Patch bases [۱۷]	روش B -اسپلاین	جواب دقیق
۰/۰	۰/۹۹۹۹۲	۱/۰۰۰۰۰	۰/۹۹۹۹۹۸	۱/۰۰۰۰۰۰
۰/۱۲۵	۰/۹۹۷۳۷	۰/۹۹۷۴۲	۰/۹۹۷۴۰۴	۰/۹۹۷۴۰۶
۰/۲۵۰	۰/۹۸۹۷۱	۰/۹۸۹۷۶	۰/۹۸۹۷۴۲	۰/۹۸۹۷۴۳
۰/۳۷۵	۰/۹۷۷۳۳	۰/۹۷۷۳۷	۰/۹۷۷۳۵۴	۰/۹۷۷۳۵۵
۰/۵۰۰	۰/۹۶۰۷۵	۰/۹۶۰۷۸	۰/۹۶۰۷۶۸	۰/۹۶۰۷۶۸
۰/۶۲۵	۰/۹۴۰۶۲	۰/۹۴۰۶۴	۰/۹۴۰۶۳۳	۰/۹۴۰۶۳۴
۰/۷۵۰	۰/۹۱۷۶۵	۰/۹۱۷۶۷	۰/۹۱۷۶۶۲	۰/۹۱۷۶۶۲
۰/۸۷۵	۰/۸۹۲۵۷	۰/۸۹۲۵۶	۰/۸۹۲۵۶۹	۰/۸۹۲۵۶۹



شکل ۴.۲: نتایج مثال ۴.۴.۲ برای $h = \frac{1}{64}$



شکل ۵.۲: نتایج مثال ۵.۴.۲ برای $h = \frac{1}{64}$

جدول ۸.۲: نتایج عددی مثال ۵.۴.۲

x	$S(x)$				جواب دقیق
	$h = \frac{1}{10}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{40}$	$h = \frac{1}{80}$	
۰/۰	۰/۳۱۶۵۶۶	۰/۳۱۶۶۶۲	۰/۳۱۶۶۸۶	۰/۳۱۶۶۹۲	۰/۳۱۶۶۹۴
۰/۱	۰/۳۱۳۱۴۰	۰/۳۱۳۲۳۴	۰/۳۱۳۲۵۸	۰/۳۱۳۲۶۳	۰/۳۱۳۲۶۵
۰/۲	۰/۳۰۲۸۹۶	۰/۳۰۲۹۸۵	۰/۳۰۳۰۰۸	۰/۳۰۳۰۱۳	۰/۳۰۳۰۱۵
۰/۳	۰/۲۸۵۰۳۷	۰/۲۸۶۰۱۹	۰/۲۸۶۰۴۰	۰/۲۸۶۰۴۵	۰/۲۸۶۰۴۷
۰/۴	۰/۲۶۲۴۳۳	۰/۲۶۲۵۰۶	۰/۲۶۲۵۲۵	۰/۲۶۲۵۲۹	۰/۲۶۲۵۳۱
۰/۵	۰/۲۳۲۶۱۳	۰/۲۳۲۶۷۶	۰/۲۳۲۶۹۱	۰/۲۳۲۶۹۵	۰/۲۳۲۶۹۶
۰/۶	۰/۱۹۶۷۵۹	۰/۱۹۶۸۱۰	۰/۱۹۶۸۲۲	۰/۱۹۶۸۲۵	۰/۱۹۶۸۲۶
۰/۷	۰/۱۵۵۱۹۷	۰/۱۵۵۲۳۵	۰/۱۵۵۲۴۴	۰/۱۵۵۲۴۷	۰/۱۵۵۲۴۸
۰/۸	۰/۱۰۸۲۸۹	۰/۱۰۸۳۱۴	۰/۱۰۸۳۲۰	۰/۱۰۸۳۲۲	۰/۱۰۸۳۲۳
۰/۹	۰/۰۵۶۴۲۲	۰/۰۵۶۴۳۴	۰/۰۵۶۴۳۷	۰/۰۵۶۴۳۸	۰/۰۵۶۴۳۸
۱/۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰

جدول ۹.۲: مقایسه نتایج عددی مثال ۵.۴.۲ ($h = \frac{1}{64}$)

x	finite diff. method [۱۷]	Patch bases [۱۷]	روش B-اسپلاین	جواب دقیق
۰/۰	۰/۳۱۶۴۳	۰/۳۱۶۷۲	۰/۳۱۶۶۹	۰/۳۱۶۶۹
۰/۱۲۵	۰/۳۱۱۲۵	۰/۳۱۱۳۵	۰/۳۱۱۳۳	۰/۳۱۱۳۴
۰/۲۵۰	۰/۲۹۵۳۰	۰/۲۹۵۳۷	۰/۲۹۵۳۵	۰/۲۹۵۳۶
۰/۳۷۵	۰/۲۶۸۹۷	۰/۲۶۹۰۲	۰/۲۶۹۰۰	۰/۲۶۹۰۱
۰/۵۰۰	۰/۲۳۲۶۷	۰/۲۳۲۷۰	۰/۲۳۲۶۹	۰/۲۳۲۷۰
۰/۶۲۵	۰/۱۸۶۹۳	۰/۱۸۶۹۶	۰/۱۸۶۹۵	۰/۱۸۶۹۵
۰/۷۵۰	۰/۱۳۲۴۲	۰/۱۳۲۴۳	۰/۱۳۲۴۲	۰/۱۳۲۴۳
۰/۸۷۵	۰/۰۶۹۸۴۷	۰/۰۶۹۸۵۴	۰/۰۶۹۸۵	۰/۰۶۹۸۵۳

فصل ۳

روش B- اسپلاین برای حل دستگاه
مسائل مقدار مرزی مرتبه دوم خطی

۱.۳ مقدمه

دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی در زمینه‌های زیادی مانند مسائل فیزیک، مهندسی، زیست‌شناسی و ... کاربرد دارد. تاکنون روش‌های عددی گوناگونی برای حل این نمونه از دستگاه‌ها مطرح شده است. برای نمونه، روش تفاضلات متناهی در [۳۴] و [۳۹] پیشنهاد شده است. همچنین گنگ^۱ و همکاران حل عددی دستگاه معادلات مقدار مرزی مرتبه دوم غیرخطی در فضای تابع هسته^۲ [۴۰]، را مورد مطالعه قرار داده اند. روش تکرار وردشی^۳ نیز برای دستگاه غیرخطی این گونه از معادلات توسط جی لیو^۴ بررسی شده است [۳۵]. در این فصل، روش B-اسپلاین برای حل دستگاه معادلات مقدار مرزی مرتبه دوم خطی باپیش فرض یکتا بودن جواب توضیح داده می‌شود. دستگاه معادلات مقدار مرزی خطی زیر را در مورد بررسی قرار می‌دهیم [۴۱]

$$\begin{cases} u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u + a_3(x)v'' + a_4(x)v' + a_5(x)v = f_1(x), \\ v'' + b_1(x)v' + b_2(x)v + b_3(x)u'' + b_4(x)u' + b_5(x)u = f_2(x), \\ u(0) = u(1) = 0, \quad v(0) = v(1) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

که در آن $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، $a_i(x)$ ، $b_i(x)$ توابعی معلوم و $a_i(x)$ ، $b_i(x)$ ، $i = 1, 2, 3, 4, 5$ پیوسته هستند.

۲.۳ تحلیل روش B-اسپلاین

برای حل عددی دستگاه (۱.۳)، از B-اسپلاین درجه سه استفاده می‌کنیم. شرح جزئیات توابع B-اسپلاین درجه سه در فصل ۲ آمده است. B-اسپلاین درجه سه را به صورت زیر

^۱Geng et al

^۲the reproducing kernel space

^۳variational iteration

^۴J. Lu

جدول ۱.۳: مقادیر B_i و مشتقاتش در نقاط گرهی

	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}	x_{i+3}	x_{i+4}
B_i	۰	۱	۴	۱	۰
B_i'	۰	$-\frac{3}{h}$	۰	$\frac{3}{h}$	۰
B_i''	۰	$\frac{6}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	۰

در نظر می‌گیریم:

$$B_{i-1}(x) = B_i(x - (i-1)h), \quad i = 2, 3, \dots,$$

$$B_0(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} x^3, & 0 \leq x < h \\ -3x^3 + 12hx^2 - 12h^2x + 4h^3, & h \leq x < 2h \\ 3x^3 - 24hx^2 + 60h^2x - 44h^3, & 2h \leq x < 3h \\ -x^3 + 12hx^2 - 48h^2x + 64h^3, & 3h \leq x < 4h \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (2.3)$$

برای حل معادله‌های مقدار مرزی مرتبه دوم مقادیر B_i ، B_i' و B_i'' در نقاط گرهی لازم

است که این مقادیر در جدول (۱.۳) مشخص شده‌اند. فرض می‌کنیم:

$$u(x) = \sum_{j=-3}^{n-1} C_j B_j(x), \quad (3.3)$$

$$v(x) = \sum_{j=-3}^{n-1} D_j B_j(x), \quad (4.3)$$

$u(x)$ و $v(x)$ جواب تقریبی دستگاه (۱.۳) هستند که در آن D_j ، C_j ضرایب حقیقی مجهول

و $B_j(x)$ توابع اسپلاین درجه سه می‌باشند. فرض کنیم x_0, x_1, \dots, x_n نقاط گرهی در

بازه $[0, 1]$ باشند، به طوریکه

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

در نقاط گرهی x_i جواب تقریبی (۳.۳) و (۴.۳) باید در دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳)

صدق کنند. با قرار دادن (۳.۳) و (۴.۳) در (۱.۳)، داریم:

$$\sum_{j=-3}^{n-1} C_j [B_j''(x_i) + a_1(x_i)B_j'(x_i) + a_2(x_i)B_j(x_i)] + \sum_{j=-3}^{n-1} D_j [a_3(x_i)B_j''(x_i) + a_4(x_i)B_j'(x_i) + a_5(x_i)B_j(x_i)] = f_1(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (5.3)$$

$$\sum_{j=-3}^{n-1} D_j [B_j''(x_i) + b_1(x_i)B_j'(x_i) + b_2(x_i)B_j(x_i)] + \sum_{j=-3}^{n-1} C_j [b_3(x_i)B_j''(x_i) + b_4(x_i)B_j'(x_i) + b_5(x_i)B_j(x_i)] = f_2(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (6.3)$$

و شرایط مرزی :

$$\sum_{j=-3}^{n-1} C_j B_j(x) = 0, \quad x = 0, \quad (7.3)$$

$$\sum_{j=-3}^{n-1} C_j B_j(x) = 0, \quad x = 1, \quad (8.3)$$

$$\sum_{j=-3}^{n-1} D_j B_j(x) = 0, \quad x = 0, \quad (9.3)$$

$$\sum_{j=-3}^{n-1} D_j B_j(x) = 0, \quad x = 1. \quad (10.3)$$

جواب اسپلاین معادله (۱.۳) با حل معادله ماتریسی زیر بدست می آید. مقادیر توابع اسپلاین در نقاط گرهی در جدول (۱.۳) مشخص شده اند که در معادلات (۵.۳)-(۱۰.۳) جایگذاری می کنیم. یک دستگاه از $2(n+3)$ معادله خطی و $2(n+3)$ مجهول $C_{-2}, C_{-3}, \dots, C_{n-1}, D_{-2}, D_{-3}, \dots, D_{n-1}$ تشکیل می شود. این دستگاه را می توان به صورت زیر نوشت :

$$AE = F, \quad (11.3)$$

که در آن

$$E = [C_{-۳}, C_{-۲}, \dots, C_{n-۱}, D_{-۳}, \dots, D_{n-۱}]^T,$$

$$F = [\circ, f_۱(x_۰), \dots, f_۱(x_n), \circ, \circ, f_۲(x_۰), \dots, f_۲(x_n), \circ]^T,$$

و A ماتریس $۲(n+۳) \times ۲(n+۳)$ بعدی زیر است:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} M_۱ & & M_۲ & \\ \hline & & & \\ M_۴ & & M_۳ & \end{array} \right],$$

و چهار زیر ماتریس $M_۱$ ، $M_۲$ ، $M_۳$ ، $M_۴$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M_۱ = \left[\begin{array}{ccccccc} ۱ & ۴ & ۱ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \alpha_۱(x_۰) & \beta_۱(x_۰) & \gamma_۱(x_۰) & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \circ & \alpha_۱(x_۱) & \beta_۱(x_۱) & \gamma_۱(x_۱) & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & \circ & \alpha_۱(x_n) & \beta_۱(x_n) & \gamma_۱(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & ۱ & ۴ & ۱ \end{array} \right],$$

$$M_۲ = \left[\begin{array}{ccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \alpha_۲(x_۰) & \beta_۲(x_۰) & \gamma_۲(x_۰) & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \circ & \alpha_۲(x_۱) & \beta_۲(x_۱) & \gamma_۲(x_۱) & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & \circ & \alpha_۲(x_n) & \beta_۲(x_n) & \gamma_۲(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \circ & \circ & \circ \end{array} \right],$$

$$M_۳ = \left[\begin{array}{ccccccc} ۱ & ۴ & ۱ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \alpha_۳(x_۰) & \beta_۳(x_۰) & \gamma_۳(x_۰) & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \circ & \alpha_۳(x_۱) & \beta_۳(x_۱) & \gamma_۳(x_۱) & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & \circ & \alpha_۳(x_n) & \beta_۳(x_n) & \gamma_۳(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & ۱ & ۴ & ۱ \end{array} \right],$$

$$M_۴ = \left[\begin{array}{ccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \alpha_۴(x_۰) & \beta_۴(x_۰) & \gamma_۴(x_۰) & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \circ & \alpha_۴(x_۱) & \beta_۴(x_۱) & \gamma_۴(x_۱) & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & \circ & \alpha_۴(x_n) & \beta_۴(x_n) & \gamma_۴(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \circ & \circ & \circ \end{array} \right],$$

و همچنین داریم:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_i) &= \frac{\epsilon}{h^2} + a_1(x_i)\frac{\epsilon}{h} + a_2(x_i), & i = 0, \dots, n, \\ \alpha_2(x_i) &= a_3(x_i)\frac{\epsilon}{h^2} + a_4(x_i)\frac{\epsilon}{h} + a_5(x_i), & i = 0, \dots, n, \\ \alpha_3(x_i) &= \frac{\epsilon}{h^2} + b_1(x_i)\frac{\epsilon}{h} + b_2(x_i), & i = 0, \dots, n, \\ \alpha_4(x_i) &= b_3(x_i)\frac{\epsilon}{h^2} + b_4(x_i)\frac{\epsilon}{h} + b_5(x_i), & i = 0, \dots, n, \\ \beta_1(x_i) &= \frac{-12}{h^2} + a_1(x_i)\frac{\epsilon}{h} + 4a_2(x_i), & i = 0, \dots, n, \\ \beta_2(x_i) &= a_3(x_i)\frac{-12}{h^2} + a_4(x_i)\frac{\epsilon}{h} + 4a_5(x_i), & i = 0, \dots, n, \\ \beta_3(x_i) &= \frac{-12}{h^2} + b_1(x_i)\frac{\epsilon}{h} + 4b_2(x_i), & i = 0, \dots, n, \\ \beta_4(x_i) &= b_3(x_i)\frac{-12}{h^2} + b_4(x_i)\frac{\epsilon}{h} + 4b_5(x_i), & i = 0, \dots, n, \\ \gamma_1(x_i) &= \frac{\epsilon}{h^2} + a_1(x_i)\frac{-3}{h} + a_2(x_i), & i = 0, \dots, n, \\ \gamma_2(x_i) &= a_3(x_i)\frac{\epsilon}{h^2} + a_4(x_i)\frac{-3}{h} + a_5(x_i), & i = 0, \dots, n, \\ \gamma_3(x_i) &= \frac{\epsilon}{h^2} + b_1(x_i)\frac{-3}{h} + b_2(x_i), & i = 0, \dots, n, \\ \gamma_4(x_i) &= b_3(x_i)\frac{\epsilon}{h^2} + b_4(x_i)\frac{-3}{h} + b_5(x_i), & i = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

توضیح روش و تحلیل خطای مساله (۱.۳) در بخش بعدی توسط مثال ارائه شده است.

۳.۳ نتایج عددی

در این بخش یک مثال عددی برای نشان دادن دقت روش ارائه شده مورد مطالعه قرار گرفته است.

جدول ۲.۳: نتایج عددی برای u

x_i	$s_i(h = \frac{1}{4})$	$s_i(h = \frac{1}{8})$	جواب دقیق
۰/۰	-۰/۰۰۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۰۰
۰/۱	-۰/۰۸۹۹۹۹	-۰/۰۹۰۰۰۰	-۰/۰۹۰۰۰۰
۰/۲	-۰/۱۵۹۹۹۹	-۰/۱۶۰۰۰۰	-۰/۱۶۰۰۰۰
۰/۳	-۰/۲۰۹۹۹۹	-۰/۲۰۹۹۹۹	-۰/۲۱۰۰۰۰
۰/۴	-۰/۲۳۹۹۹۹	-۰/۲۳۹۹۹۹	-۰/۲۴۰۰۰۰
۰/۵	-۰/۲۴۹۹۹۹	-۰/۲۴۹۹۹۹	-۰/۲۵۰۰۰۰
۰/۶	-۰/۲۳۹۹۹۹	-۰/۲۳۹۹۹۹	-۰/۲۴۰۰۰۰
۰/۷	-۰/۲۰۹۹۹۹	-۰/۲۰۹۹۹۹	-۰/۲۱۰۰۰۰
۰/۸	-۰/۱۵۹۹۹۹	-۰/۱۵۹۹۹۹	-۰/۱۶۰۰۰۰
۰/۹	-۰/۰۸۹۹۹۹	-۰/۰۸۹۹۹۹	-۰/۰۹۰۰۰۰
۱/۰	-۰/۰۰۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۰۰

مثال ۱.۳.۳. [۴۱] معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$u''(x) + xu(x) + xv(x) = f_1(x),$$

$$v''(x) + 2xv(x) + 2xu(x) = f_2(x),$$

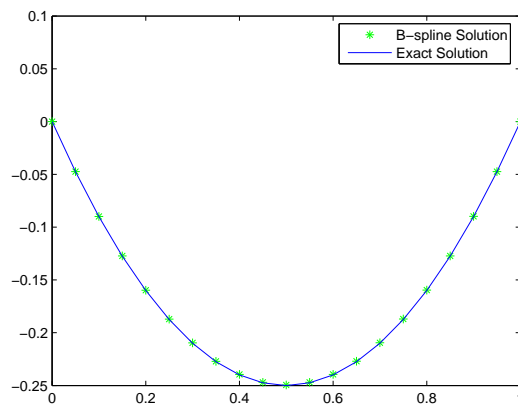
با شرایط مرزی :

$$u(0) = u(1) = 0, \quad v(0) = v(1) = 0,$$

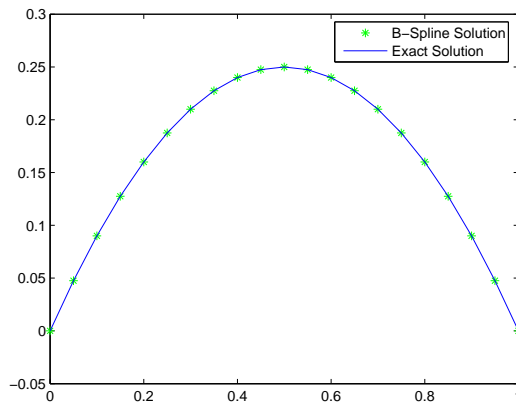
که در آن $0 < x < 1$ ، $f_1(x) = 2$ و $f_2(x) = -2$. جواب دقیق مساله $u(x) = x^2 - x$ و $v(x) = x - x^2$ می‌باشد. نتایج عددی برای ۲۰ و ۴۰ گره در جداول (۲.۳) و (۳.۳) نشان دهنده خطای کم روش و کاربرد آن در حل دستگاه ها می باشد و همچنین نتایج عددی با ۲۰ گره در شکل‌های (۱.۳) و (۲.۳) رسم شده است.

جدول ۳.۳: نتایج عددی برای v

x_i	$s_i(h = \frac{1}{40})$	$s_i(h = \frac{1}{40})$	جواب دقیق
۰/۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰
۰/۱	۰/۰۸۹۹۹۹	۰/۰۹۰۰۰۰	۰/۰۹۰۰۰۰
۰/۲	۰/۱۵۹۹۹۹	۰/۱۶۰۰۰۰	۰/۱۶۰۰۰۰
۰/۳	۰/۲۰۹۹۹۹	۰/۲۱۰۰۰۰	۰/۲۱۰۰۰۰
۰/۴	۰/۲۳۹۹۹۹	۰/۲۴۰۰۰۰	۰/۲۴۰۰۰۰
۰/۵	۰/۲۴۹۹۹۹	۰/۲۵۰۰۰۰	۰/۲۵۰۰۰۰
۰/۶	۰/۲۳۹۹۹۹	۰/۲۴۰۰۰۰	۰/۲۴۰۰۰۰
۰/۷	۰/۲۰۹۹۹۹	۰/۲۱۰۰۰۰	۰/۲۱۰۰۰۰
۰/۸	۰/۱۵۹۹۹۹	۰/۱۶۰۰۰۰	۰/۱۶۰۰۰۰
۰/۹	۰/۰۸۹۹۹۹	۰/۰۹۰۰۰۰	۰/۰۹۰۰۰۰
۱/۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰



شکل ۱.۳: نتایج عددی مثال ۱.۳.۳ برای $u(x) = x^2 - x$



شکل ۲.۳: نتایج عددی مثال ۱.۳.۳ برای $v(x) = x - x^2$

فصل ۴

روش B- اسپلاین برای حل رده ای از
مسائل مقدار اولیه تکین

۱.۴ مقدمه

بسیاری از مسائل فیزیک ریاضی و فیزیک نجومی را می توان توسط نمونه ای از مسائل مقدار اولیه لن-آمدن^۱ به صورت زیر مدل سازی کرد

$$u'' + \frac{2}{x}u' + f(u) = 0, \quad 0 < x \leq 1, \quad (1.4)$$

با شرایط

$$u(0) = A, \quad u'(0) = B, \quad (2.4)$$

که در آن A و B ثابت و $f(u)$ تابع پیوسته مقدار حقیقی می باشند. معادله (۱.۴) با $f(u)$ خاص را می توان برای مدل سازی چندین پدیده فیزیک ریاضی و فیزیک نجومی مانند تئوری ساختار ستاره ای^۲، رفتار گرمایی یک توده کروی گاز^۳، کره های گاز هم دما^۴ و تئوری جریان های الکترونی^۵ استفاده کرد [۴۲]. یکی دیگر از نمونه های معادله لن-آمدن به صورت زیر می باشد

$$u'' + \frac{2}{x}u' + f(x, u) = g(x), \quad 0 < x \leq 1, \quad (3.4)$$

با شرایط (۲.۴)، که در آن $f(x, u)$ یک تابع پیوسته مقدار حقیقی است و $g \in C[0, 1]$.

جواب تقریبی مسائل فوق با استفاده از روش تجزیه آدومین توسط شاوگفه^۶ در [۴۵]

و توسط وازواز^۷ در [۴۵]، مورد بررسی قرار گرفته است. بعضی مواقع محاسبه چند جمله

^۱Lane-Emden equation

^۲the theory of stellar structure

^۳the thermal behavior of a spherical cloud of gas

^۴isothermal gas sphere

^۵theory of thermionic currents

^۶Shawagfeh

^۷Wazwaz

ایهای آدومین بسیار پیچیده است. یکی دیگر از روش های تحلیلی مناسب و توانا، روش آشفتگی هوموتوپی^۸ می باشد که اولین بار توسط هی^۹ مطرح شد [۴۷]. همچنین روش آشفتگی هوموتوپی برای حل مسائل (۱.۴)–(۲.۴) و (۳.۴) توسط چاودخوری^{۱۰} در [۴۸] مورد مطالعه قرار گرفته است.

در تئوری تقریب مسائل مقدار مرزی و معادلات دیفرانسیل جزئی، تئوری توابع اسپلین، زمانیکه حل عددی مورد نظر باشد، میدان وسیعی را به خود اختصاص می دهد. در میان رده های مختلف اسپلین ها، چند جمله ای اسپلین اهمیت فراوانی دارد چون یک پایه از B -اسپلین ها تشکیل می دهد که به آسانی قابل محاسبه هستند [۴۹]–[۵۲]. لذا چندجمله ای قطعه به قطعه B -اسپلین ها یک ابزار بنیادی در روش های عددی برای بدست آوردن جواب معادلات دیفرانسیل محسوب می شود.

در این فصل از روش مطرح شده در فصل دوم استفاده می کنیم. همانند فصل دوم فرض کنید $S(x)$ ، تابع اسپلینی باشد که $u(x)$ را در نقاط گرهی درونیابی می کند و به صورت زیر می باشد

$$S(x) = \sum_{k=-1}^{N+1} c_k B_k(x), \quad (4.4)$$

که در آن $B_k(x)$ توابع B -اسپلین تعریف شده در (۶.۲) می باشند.

۲.۴ مسائل خطی

فرض کنید در معادله (۳.۴) $f(x, u) = r(x)u$ ، لذا داریم

$$u'' + \frac{2}{x}u' + r(x)u = g(x), \quad 0 < x \leq 1, \quad (5.4)$$

^۸Homotopy-perturbation method

^۹He

^{۱۰}Chowdhury

با شرایط

$$u(\circ) = A, \quad u'(\circ) = \circ. \quad (۶.۴)$$

لذا $x = \circ$ نقطه تکین معادله (۵.۴) می باشد. در ابتدا معادله را در $x = \circ$ توسط قانون هاسپیتال^{۱۱} [۳۲] به صورت زیر تبدیل می کنیم

$${}^3 u'' + r(x)u = g(x), \quad x = x_\circ. \quad (۷.۴)$$

حال با قرار دادن (۴.۴) در (۵.۴) برای هر نقطه گرهی $x = x_i$ ، $i = 1, 2, \dots, N$ ، و با توجه به توضیحات فصل دوم معادله (۵.۴) به صورت زیر بدست می آید

$$\begin{aligned} & c_{i-1} (B''_{i-1}(x_i) + (\frac{2}{x_i}) B'_{i-1}(x_i) + r_i B_{i-1}(x_i)) + c_i (B''_i(x_i) \\ & + (\frac{2}{x_i}) B'_i(x_i) + r_i B_i(x_i)) + c_{i+1} (B''_{i+1}(x_i) \\ & + (\frac{2}{x_i}) B'_{i+1}(x_i) + r_i B_{i+1}(x_i)) = g_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (۸.۴)$$

که $r(x_i) = r_i$ و $g(x_i) = g_i$. با توجه به جدول (۲.۲) و جایگذاری داریم

$$\begin{aligned} & (6 - \frac{6h}{x_i} + r_i h^2) c_{i-1} + (-12 + 4r_i h^2) c_i + (6 + \frac{6h}{x_i} + r_i h^2) c_{i+1} = g_i h^2, \\ & \forall i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (۹.۴)$$

همچنین در $x = x_\circ$ رابطه زیر را بدست می آوریم

$${}^3 \sum_{i=-1, \circ, 1} c_i B''_i(x_\circ) + r_\circ \sum_{i=-1, \circ, 1} c_i B_i(x_\circ) = g_\circ. \quad (۱۰.۴)$$

^{۱۱}L'Hospital rule

و شرایط اولیه (۶.۴)

$$\sum_{i=-1,0,1} c_i B_i(x_0) = A, \quad (11.4)$$

$$\sum_{i=-1,0,1} c_i B'_i(x_0) = 0, \quad (12.4)$$

از معادله (۱۲.۴) داریم $c_1 = c_{-1}$. با حذف c_{-1} از معادلات (۱۰.۴) و (۱۱.۴) و (۱۲.۴) داریم

$$c_0 \left(4 - \frac{36}{h^2} + 4r_0 \right) + c_1 \left(2 + \frac{36}{h^2} + 2r_0 \right) = g_0 + A. \quad (13.4)$$

معادلات (۹.۴) و (۱۳.۴) یک دستگاه از $(N+1)$ معادلات خطی $Tx_N = d_N$ و $(N+2)$ مجهول $x_n = (c_0, c_1, \dots, c_{N+1})^T$ و سمت راست

$$d_N = (A + g_0, g_1 h^2, \dots, g_N h^2)^T,$$

تشکیل می دهند. ماتریس ضرایب T به صورت زیر می باشد

$$T = \begin{bmatrix} 4 - \frac{36}{h^2} + 4r_0 & 2 + \frac{36}{h^2} + 2r_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_N & \beta_N & \gamma_N \end{bmatrix},$$

که در آن:

$$\alpha_i = 6 - \frac{6h}{x_i} + r_i h^2, \quad \beta_i = -12 + 4r_i h^2, \quad \gamma_i = 6 + \frac{6h}{x_i} + r_i h^2 \quad (i = 1, \dots, N).$$

دستگاه $Tx_N = d_N$ را توسط برنامه ای بر پایه روش تجزیه مقدار تکین^{۱۲} (SVD) [۵۴]

حل می کنیم و جواب B -اسپلاین $S(x_i)$ ، $i = 0, 1, \dots, N$ را بدست می آوریم.

^{۱۲}singular value decomposition

عدد شرطی^{۱۳} ماتریس T

$$k_s(T) = \|T\|_s \|T^{-1}\|_s, \quad s = 1, 2, \infty.$$

به تابع $r(x)$ در معادله (۵.۴) و فاصله نقاط گرهی h وابسته است. بنابراین یک تغییر کوچک در مقادیر $r(x)$ ممکن است یک تغییر بزرگ در جواب به وجود آورد. همچنین عدد شرطی به ازای $r(x)$ ثابت با تغییر N تغییر می کند.

۳.۴ مسائل غیر خطی

مساله مقدار اولیه زیر را در نظر می گیریم

$$u'' + \frac{2}{x}u' = f(x, u), \quad (14.4)$$

با شرایط (۶.۴).

همانند بخش مسائل غیر خطی فصل دوم، روش شبه خطی سازی را بکار می گیریم. فرض کنید $f(x, u)$ در معادله (۱۴.۴) نسبت به u غیر خطی باشد و در مرحله $(n + 1)$ ام به صورت زیر می نویسیم

$$(u'')^{n+1} + \frac{2}{x}(u')^{n+1} = f(x, u^{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15.4)$$

عبارت غیر خطی $f(x, u^{n+1})$ را می توان به صورت زیر بسط داد

$$f(x, u^{n+1}) = f(x, u^n) + (u^{n+1} - u^n)f'(x, u^n) + \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16.4)$$

با انتخاب u^0 به عنوان تقریب اولیه u در $f(x, u)$ ، معادله (۱۵.۴) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$(u'')^{n+1} + \frac{2}{x}(u')^{n+1} + p^{(n)}(x)(u)^{n+1} = q^{(n)}(x), \quad (17.4)$$

^{۱۳}Condition Number

با شرایط اولیه

$$(u)^{n+1}(\circ) = A, \quad (u')^{n+1}(\circ) = \circ, \quad (18.4)$$

که در آن

$$p^{(n)}(x) = -f'(x, u^n),$$

$$q^{(n)}(x) = f(x, u^n) - u^n f'(x, u^n). \quad (19.4)$$

برای حل مسائل مقدار اولیه تکین خطی (۱۷.۴) با شرایط (۱۸.۴) همانند بخش قبل با استفاده از توابع B-اسپلاین در هر نقطه گرهی داریم

$$\begin{aligned} c_{i-1}^{n+1}(B''_{i-1}(x_i) + (\frac{2}{x_i})B'_{i-1}(x_i) + p_i^n B_{i-1}(x_i)) + c_i^{n+1}(B''_i(x_i) + (\frac{2}{x_i})B'_i(x_i) + \\ p_i^n B_i(x_i)) + c_{i+1}^{n+1}(B''_{i+1}(x_i) + (\frac{2}{x_i})B'_{i+1}(x_i) + p_i^n B_{i+1}(x_i)) = q_i^n, \\ \forall i = 1, 2, \dots, N, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, (20.4) \end{aligned}$$

که $p_i^n = p^n(x_i)$ و $q_i^n = q^n(x_i)$ همچنین در نقطه تکین $x = x_\circ$ داریم

$$3(u'')^{n+1} + p^{(n)}(x)(u)^{n+1} = q^{(n)}(x), \quad x = x_\circ, \quad \forall n = 0, 1, \dots. \quad (21.4)$$

با بکارگیری، روش B-اسپلاین معادله فوق به صورت زیر بازنویسی می شود

$$3 \sum_{i=-1,0,1} c_i^{n+1} B''_i(x_\circ) + p^n \sum_{i=-1,0,1} c_i^{n+1} B_i(x_\circ) = q^n \quad \forall n = 0, 1, 2, (22.4)$$

و شرایط اولیه

$$\sum_{i=-1,0,1} c_i^{n+1} B_i(x_\circ) = A, \quad (23.4)$$

و

$$\sum_{i=-1,0,1} c_i^{n+1} B'_i(x_0) = 0. \quad (24.4)$$

معادلات (۲۰.۴) و (۲۲.۴)-(۲۴.۴)، همانند بخش قبل یک دستگاه تشکیل می دهند که مقدار جواب تقریبی، در هر مرحله از تکرار $(n = 0, 1, 2, \dots)$ ، تا زمانیکه نامساوی $|u_i^{n+1} - u_i^n| < \epsilon$ به ازای ϵ مشخص شده برقرار شود، محاسبه می شود.

۴.۴ نتایج عددی

در این بخش، نتایج عددی تعدادی از مسائل نمونه مورد بررسی قرار می گیرد. برای مقایسه جواب ها تابع خطایی به صورت زیر تعریف می کنیم

$$e(x_i) = S(x_i) - u(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

با فرض اینکه $S(x_i) = s_i$ جواب روش -B اسپلاین و $u(x_i) = u_i$ چهار جمله اول حل هوموتوپی بدست آمده در [۴۸] می باشند.

مثال ۱.۴.۴. معادله ناهمگن خطی لن-آمدن زیر را مورد بررسی قرار می دهیم

$$u'' + \frac{2}{x}u' + u = 6 + 12x + x^2 + x^3, \quad (25.4)$$

با شرایط اولیه

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0. \quad (26.4)$$

جواب دقیق آن $u(x) = x^2 + x^3$ است [۵۳]. جدول (۱.۴) نتایج عددی را به ازای مقادیر

جدول ۱.۴: نتایج عددی مثال ۱.۴.۴

x_i	$s_i(h = \frac{1}{10})$	$s_i(h = \frac{1}{40})$	$s_i(h = \frac{1}{80})$	جواب دقیق
۰/۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۷۳۷۱	۰/۰۰۰۳۱۸۲۹	۰/۰۰۰۰۰۸۱۳	۰
۰/۰۲۵	-	۰/۰۰۰۳۸۳۹۰	۰/۰۰۰۰۷۰۰۴	۰/۰۰۰۰۶۴۰۶
۰/۰۵۰	-	۰/۰۰۰۵۸۹۱۱	۰/۰۰۰۲۶۵۹۸	۰/۰۰۰۲۶۲۵۰
۰/۰۷۵	-	۰/۰۰۰۸۷۹۰۸	۰/۰۰۰۶۱۴۰۳	۰/۰۰۰۶۰۴۶۸
۰/۱۰۰	۰/۰۱۰۲۰۹۷	۰/۰۱۳۴۸۵۷	۰/۰۱۱۰۰۶۴	۰/۰۱۱۰۰۰۰
۰/۲۰۰	۰/۰۵۲۷۵۵۴	۰/۰۵۱۲۶۵۰	۰/۰۴۸۰۵۶۱	۰/۰۴۸۰۰۰۰
۰/۳۰۰	۰/۱۲۶۲۸۷۵	۰/۱۱۹۵۱۷۰	۰/۱۱۷۰۰۹۶	۰/۱۱۷۰۰۰۰
۰/۴۰۰	۰/۲۳۵۷۲۲۲	۰/۲۲۷۱۸۱۹	۰/۲۲۴۱۰۱۰	۰/۲۲۴۰۰۰۰
۰/۵۰۰	۰/۳۹۳۰۲۰۸	۰/۳۷۷۹۴۱۰	۰/۳۷۵۰۹۷۰	۰/۳۷۵۰۰۰۰
۰/۶۰۰	۰/۵۸۰۹۷۶۶	۰/۵۷۸۱۰۷۶	۰/۵۷۶۰۵۸۱	۰/۵۷۶۰۰۰۰
۰/۷۰۰	۰/۸۳۸۱۵۷۷	۰/۸۳۶۰۷۲۱	۰/۸۳۳۰۴۳۸	۰/۸۳۳۰۰۰۰
۰/۸۰۰	۱/۱۵۶۲۲۳۸	۱/۱۵۴۳۵۲۱	۱/۱۵۲۰۰۷۷	۱/۱۵۲۰۰۰۰
۰/۹۰۰	۱/۵۳۸۷۹۲۷	۱/۵۴۱۱۱۸۹	۱/۵۳۸۹۹۵۲	۱/۵۳۹۰۰۰۰
۱	۲/۰۰۰۵۶۸۳۶	۲/۰۰۰۳۳۸۳۹	۲/۰۰۰۰۰۷۷۰	۲/۰۰۰۰۰۰۰

مختلف h نشان می دهد که با تعداد ۸۰ گره نتایج بهتری حاصل شده است، همچنین

شکل (۱.۴) نتایج را برای $h = \frac{1}{40}$ نمایش می دهد.

مثال ۲.۴.۴. معادله کره های گاز هم دما^{۱۴}

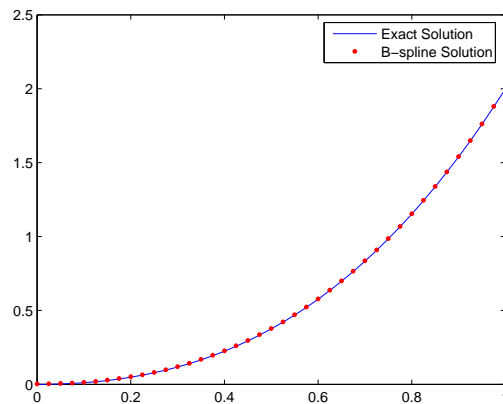
کره های گاز هم دما را با معادله ای به صورت زیر مدل سازی می کنند

$$u'' + \frac{2}{x}u' + e^u = 0, \quad (27.4)$$

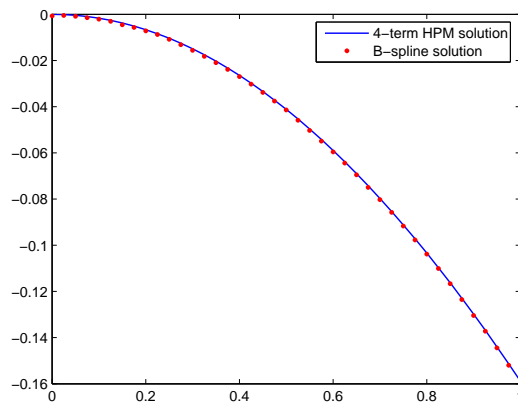
با شرایط

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0. \quad (28.4)$$

^{۱۴}Isothermal gas spheres equation

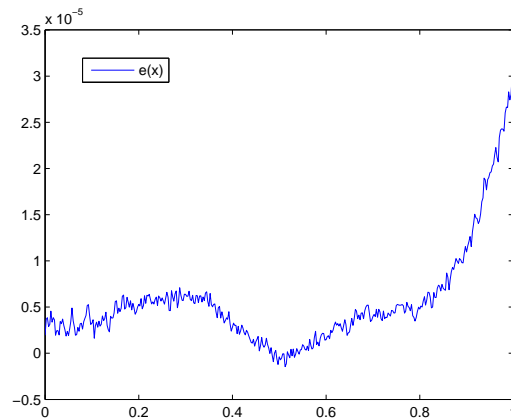


شکل ۱.۴: نتایج عددی مثال ۱.۴.۴ برای $h = \frac{1}{40}$.



شکل ۲.۴: نتایج عددی مثال ۲.۴.۴ با $n = 15$.

جدول (۲.۴) نشان دهنده آن است که جواب بدست آمده با روش B -اسپلاین با $N = 400$ و $n = 5$ خیلی نزدیک به جواب روش هوموتوبی در [۴۸] می باشد. همچنین شکل (۲.۴) نتایج عددی را برای $n = 15$ و $N = 40$ نشان می دهد. تابع خطا در شکل (۳.۴) رسم شده است.



شکل ۳.۴: تابع خطا مثال ۲.۴.۴

جدول ۲.۴: نتایج مثال ۲.۴.۴: معادله کره های گاز هم دما

x_i	u_i	s_i	e_i
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۱۹	$۱/۹۵۶۲E-۶$
۰/۱۰۰	-۰/۰۰۱۶۶۵	-۰/۰۰۱۶۶۲	$۳/۲۵۵۵E-۶$
۰/۲۰۰	-۰/۰۰۶۶۵۳	-۰/۰۰۶۶۴۸	$۵/۲۹۰۵E-۶$
۰/۳۰۰	-۰/۰۱۴۹۳۲	-۰/۰۱۴۹۲۶	$۶/۳۸۲۰E-۶$
۰/۴۰۰	-۰/۰۲۶۴۵۵	-۰/۰۲۶۴۵۲	$۲/۸۱۸۲E-۶$
۰/۵۰۰	-۰/۰۴۱۱۵۴	-۰/۰۴۱۱۵۴	$۳/۷۹۶۷E-۷$
۰/۶۰۰	-۰/۰۵۸۹۴۴	-۰/۰۶۲۸۶۱	$۱/۴۶۶۷E-۶$
۰/۷۰۰	-۰/۰۷۹۷۲۸	-۰/۰۷۹۷۲۴	$۳/۹۸۱۱E-۶$
۰/۸۰۰	-۰/۱۰۳۳۹۲	-۰/۱۰۳۳۸۷	$۴/۷۸۸۱E-۶$
۰/۹۰۰	-۰/۱۲۹۸۱۳	-۰/۱۲۹۸۰۲	$۱/۰۹۶۴E-۵$
۱	-۰/۱۵۸۸۶۲	-۰/۱۵۸۸۳۱	$۳/۰۸۸۸E-۵$

مثال ۳.۴.۴. تئوری جریان های الکترونی ریچاردسون^{۱۵}

در این مثال معادله دیفرانسیل غیر خطی تئوری جریان های الکترونی ریچاردسون را مورد بررسی قرار می دهیم

$$u'' + \frac{2}{x}u' + e^{-u} = 0, \quad (29.4)$$

با شرایط

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0. \quad (30.4)$$

این مدل می تواند زمانی که چگالی و نیروی الکتریکی یک الکترون گاز در همسایگی یک جسم گرم به تعادل گرمایی می رسد مورد استفاده قرار گیرد. نتایج عددی در شکل (۴.۴) رسم شده است و با توجه به قوی بودن روش هوموتوبی در حل معادلات دیفرانسیل، جدول (۳.۴) نشان دهنده نتایج قابل قبولی برای حل عددی با روش ارائه شده می باشد، این نتایج با تعداد تکرار $n = 5$ و تقریب اولیه $u^0 = 0$ بدست آمده اند. تابع خطا در شکل (۵.۴) رسم شده است.

مثال ۴.۴.۴. در این مثال نمونه ای از معادله همگن غیرخطی لن-آمدن را مورد بررسی قرار می دهیم

$$u'' + \frac{2}{x}u' + 4(2e^u + e^{\frac{u}{2}}) = 0, \quad (31.4)$$

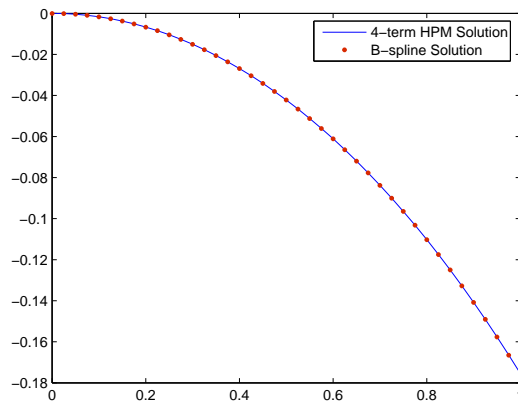
با شرایط

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0. \quad (32.4)$$

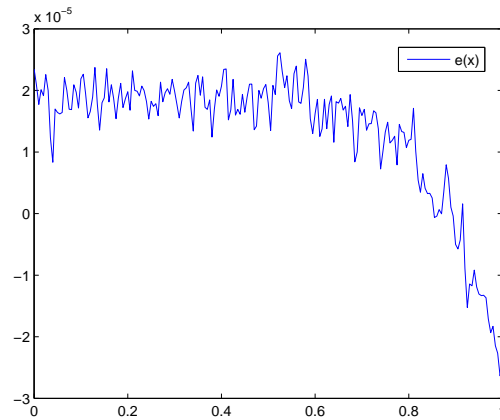
^{۱۵}Richardson's theory of thermionic currents

جدول ۳.۴: نتایج معادله تئوری جریان های الکترونی ریچاردسون.

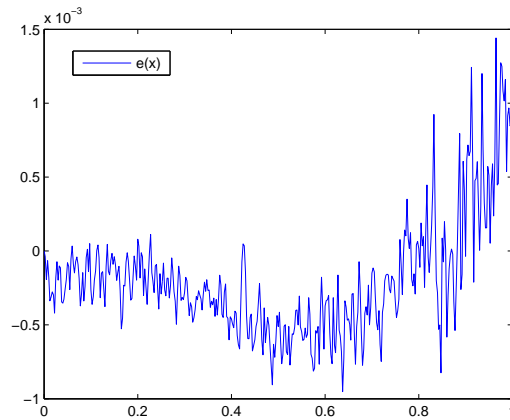
x_i	u_i	s_i	e_i
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۱۴	$۲/۳۴۷۳E - ۵$
۰/۱۰۰	-۰/۰۰۰۱۶۶۷	-۰/۰۰۰۱۶۴۹	$۲/۱۸۸۹E - ۵$
۰/۲۰۰	-۰/۰۰۰۶۶۸۰	-۰/۰۰۰۶۶۶۰	$۱/۹۷۹۳E - ۵$
۰/۳۰۰	-۰/۰۰۱۵۰۶۷	-۰/۰۰۱۵۰۴۷	$۱/۹۸۹۷E - ۵$
۰/۴۰۰	-۰/۰۰۲۶۸۸۲	-۰/۰۰۲۶۸۵۷	$۲/۰۶۹۰E - ۵$
۰/۵۰۰	-۰/۰۰۴۲۱۹۵	-۰/۰۰۴۲۱۷۷	$۱/۷۹۸۸E - ۵$
۰/۶۰۰	-۰/۰۰۶۱۱۰۴	-۰/۰۰۶۱۰۷۸	$۱/۶۲۴۵E - ۵$
۰/۷۰۰	-۰/۰۰۸۳۷۲۹	-۰/۰۰۸۳۶۸۹	$۱/۵۹۳۲E - ۵$
۰/۸۰۰	-۰/۰۰۱۱۰۲۱۸	-۰/۰۰۱۱۰۱۳۹	$۱/۱۹۰۰E - ۵$
۰/۹۰۰	-۰/۰۰۱۴۰۷۴۸	-۰/۰۰۱۴۰۶۱۴	$۴/۹۹۶۵E - ۶$
۱	-۰/۰۰۱۷۵۵۲۹	-۰/۰۰۱۷۵۲۸۲	$۲/۴۶۴۵E - ۵$



شکل ۴.۴: نتایج عددی مثال ۳.۴.۴ با $n = ۱۰$



شکل ۵.۴: تابع خطا مثال ۳.۴.۴.



شکل ۶.۴: تابع خطا مثال ۴.۴.۴.

نتایج عددی در جدول (۴.۴) قابل ملاحظه می باشند. این نتایج با تعداد تکرار $n = 10$ و تقریب اولیه $u^0 = 0$ بدست آمده اند. تابع خطا در شکل (۶.۴) نشان داده شده است.

مثال ۵.۴.۴. معادله ناهمگن غیر خطی لن-آمدن زیر را در نظر بگیرید

$$u'' + \frac{2}{x}u' + u^3 = 6 + x^6, \quad (33.4)$$

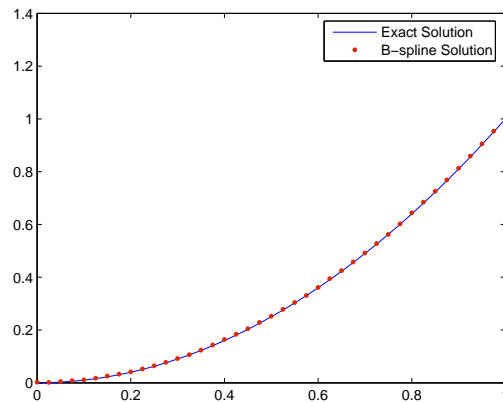
جدول ۴.۴: نتایج عددی مثال ۴.۴.۴

x_i	u_i	s_i	e_i
۰/۱۰۰	-۰/۰۱۹۹۰۰	-۰/۰۲۰۱۶۱	$۲/۶۰۸۴۰۳E - ۴$
۰/۲۰۰	-۰/۰۷۸۴۴۱	-۰/۰۷۸۳۶۱	$۷/۹۵۰۴۴۰E - ۵$
۰/۳۰۰	-۰/۱۷۲۳۵۵	-۰/۱۷۲۶۳۷	$۲/۸۲۳۷۹۷E - ۴$
۰/۴۰۰	-۰/۲۹۶۸۴۰	-۰/۲۹۷۳۰۰	$۴/۶۰۲۱۱۴E - ۴$
۰/۵۰۰	-۰/۴۴۶۲۸۷	-۰/۴۴۶۷۹۸	$۵/۱۱۱۸۱۲E - ۴$
۰/۶۰۰	-۰/۶۱۴۹۶۹	-۰/۶۱۵۳۴۱	$۳/۷۱۷۵۳۳E - ۴$
۰/۷۰۰	-۰/۷۹۷۵۵۲	-۰/۷۹۷۷۰۲	$۱/۵۰۳۴۹۸E - ۴$
۰/۸۰۰	-۰/۹۸۹۳۹۲	-۰/۹۸۹۳۷۶	$۱/۶۳۳۰۲۷E - ۵$
۰/۹۰۰	-۱/۱۸۶۶۵۳	-۱/۱۸۶۶۸۹	$۳/۵۷۴۳۷E - ۵$
۱	-۱/۳۸۶۲۹۴	-۱/۳۸۵۳۷۶	$۹/۱۸۱۵۶۶E - ۴$

با شرایط اولیه

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0. \quad (۳۴.۴)$$

جواب دقیق $u = x^2$ است. با کمی دقت در نتایج جدول (۵.۴) ملاحظه می شود در برخی نقاط، با گره های کمتر نیز به جواب بهتری دست یافته ایم لذا در همه مسائل محاسبه جواب با گره های بیشتر لازم نیست و همچنین شکل (۷.۴) نتایج را به ازای ۱۵ مرحله ($n = ۱۵$) و ۴۰ گره نشان می دهد. این نتایج با تعداد $n = ۱۵$ و تقریب اولیه $u^0 = 0$ محاسبه شده اند.



شکل ۷.۴: نتایج مثال ۵.۴.۴ با $n = 15$

جدول ۵.۴: نتایج عددی مثال ۵.۴.۴

x_i	$s_i(h = \frac{1}{4})$	$s_i(h = \frac{1}{8})$	$s_i(h = \frac{1}{16})$	جواب دقیق
۰/۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۶۷۱	۰/۰۰۰۰۲۱۰	-۰/۰۰۰۰۱۱۲	۰
۰/۰۲۵	-	-	۰/۰۰۰۰۶۱۳	۰/۰۰۰۰۶
۰/۰۵۰	۰/۰۰۰۳۴۰۵	۰/۰۰۰۲۹۳۸	۰/۰۰۰۲۳۹۷	۰/۰۰۰۲۵۰۰
۰/۰۷۵	-	-	۰/۰۰۰۵۴۳۱	۰/۰۰۰۵۶
۰/۱۰۰	۰/۰۰۰۹۰۰۰	۰/۰۱۰۱۱۵	۰/۰۰۰۹۹۴۴	۰/۰۱۰۰۰۰
۰/۲۰۰	۰/۰۳۵۵۰۶	۰/۰۴۰۲۲۳	۰/۰۳۹۸۶۹	۰/۰۴۰۰۰۰
۰/۳۰۰	۰/۰۸۷۳۰۱	۰/۰۸۹۸۷۳	۰/۰۹۰۰۴۱	۰/۰۹۰۰۰۰
۰/۴۰۰	۰/۱۵۷۰۳۳	۰/۱۶۰۰۷۴	۰/۱۵۹۹۴۱	۰/۱۶۰۰۰۰
۰/۵۰۰	۰/۲۴۷۵۴۶	۰/۲۵۰۲۷۶	۰/۲۴۹۹۹۴	۰/۲۵۰۰۰۰
۰/۶۰۰	۰/۳۵۸۰۵۸	۰/۳۵۹۹۸۱	۰/۳۵۹۹۰۲	۰/۳۶۰۰۰۰
۰/۷۰۰	۰/۴۸۹۸۵۷	۰/۴۸۹۹۲۱	۰/۴۸۹۸۶۰	۰/۴۹۰۰۰۰
۰/۸۰۰	۰/۶۳۹۹۱۵	۰/۶۴۰۰۴۷	۰/۶۳۹۹۴۴	۰/۶۴۰۰۰۰
۰/۹۰۰	۰/۸۰۶۵۸۳	۰/۸۱۰۲۲۶	۰/۸۰۹۸۶۱	۰/۸۱۰۰۰۰
۱	۰/۹۹۹۴۳۴	۱/۰۰۰۰۱۴۵	۰/۹۹۹۹۶۴	۱/۰۰۰۰۰۰

نتیجه گیری و پیشنهاداتی برای کارهای آتی

در این پایان نامه، هدف ما بررسی حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی بود. چون در برخی رشته ها مانند: فیزیک، مهندسی، نجوم و ... بسیاری از مسائل به صورت معادلات دیفرانسیل مدل سازی می شوند. اما به دلیل اینکه در برخی از معادلات جواب تحلیلی وجود ندارد از روش های عددی استفاده می کنیم تا جواب مورد نیاز در بازه مورد نظر را بدست آوریم. توابعی که در اینجا به عنوان یکی از ابزار اساسی در حل عددی ما مورد استفاده قرار می گیرد توابع B- اسپلاین هستند، که برای حل رده ای از مسائل مقدار مرزی تکین و دستگاه مسائل مقدار مرزی و مسائل مقدار اولیه تکین مورد استفاده قرار گرفتند. نتایج حاصله روی مسائل مختلف، نشان می دهد که بکارگیری روش ارائه شده برای بدست آوردن جواب تقریبی مساله را ساده تر و خطا را کمتر می کند.

به عنوان پژوهش های آتی می توان به حل موارد زیر با روش B- اسپلاین اشاره کرد:

- معادلاتی با جواب ناهموار
- معادلاتی با مراتب بالاتر
- حل مسائل کنترل بهینه

پیوست

برنامه های کامپیوتری

در همه برنامه ها n تعداد نقاط گرهی می باشد.
برنامه تابع SVDSol که جهت حل دستگاه مورد استفاده قرار گرفته به صورت زیر می باشد:

```
function [xp,Xo,R]=SVDSol(A0,b0)
[ row,col]=size(A0); Condition=cond(A0);
A=A0.'*A0; b=A0.'*b0;
[u,w,v]=svd(A);
d=diag(w); p=find(abs(d)>1e-10);
c=1./d(p); d(p)=c;
s=diag(d);
Inv A=v*s*u';
xp=Inv A*b;
m=find(abs(d)<=1e-10);
Xo=v(:,m);
R=norm(A0*xp-b0);
end
```

(مثال ۱.۴.۲)

```
n=input('Enter the number nodal points:');
A=[36*3+12*4/n^2,-36*3+6*4/n^2,zeros(1,n-1)];
b(1,1)=3*2/n^2;
for i=1:n-1
    A(i+1,:)= [zeros(1,i-1),6-6/i-4/n^2,-12-16/n^2,6+6/i-4/n^2,zeros(1,n-1-i)];
    b(i+1,1)=-2/n^2;
end
A(n+1,:)= [zeros(1,n-1),12/n,36+12*2/n];
b(n+1,1)=5.5*(6+6/n-4/n^2)+2/n^2;
[c,x0,r0]=SVDSol(A,b);
```

```

for i=1:n+1
    r(i+1)=c(i);
end
r(1)=r(3);
r(n+3)=5.5-r(n+1)-4*r(n+2);
for i=1:n+1
    y(1,i)=r(i)+r(i+1)*4+r(i+2);
end
y

stp=1/n;
X=[0:stp:1];
plot(X,y,'g*',X,1/2+(5.*sinh(2.*X)./(X.*sinh(2))))

```

مثال ۲.۴.۲

```

n=input('Enter the number nodal points:')
A=[36*3+12/n^2,-36*3+6/n^2,zeros(1,n-1)];
b(1,1)=3/n^2;
for i=1:n-1
    r=1-(i/n)^2;
    s=(i/n)^4-2*(i/n)^2+7;
    A(i+1,:)= [zeros(1,i-1),6-6/i-r/n^2,-12-4*r/n^2,6+6/i-r/n^2,zeros(1,n-1-i)];
    b(i+1,1)=-s/n^2;
end
A(n+1,:)= [zeros(1,n-1),12/n,36+12*2/n];
b(n+1,1)=(1-2+7)/n^2;
[c,x0,r0]=SVDSol(A,b);
for i=1:n+1
    r(i+1)=c(i);
end
r(1)=r(3);
r(n+3)=-r(n+1)-4*r(n+2);
for i=1:n+1
    y(1,i)=r(i)+r(i+1)*4+r(i+2);
end
y
stp=1/n;
X=[0:stp:1];
plot(X,y,'g*',X,1-X.^2)

```

مثال ۳.۴.۲

```

n=input('Enter the number nodal points:')
A=[36*2,-36*2,zeros(1,n-1)];
b(1,1)=-3/n^2;
for i=1:n-1
    s=-(8/(8-(i/n)^2))^2;
    A(i+1,:)= [zeros(1,i-1),6-3/i,-12,6+3/i,zeros(1,n-1-i)];
    b(i+1,1)=-s/n^2;
end
A(n+1,:)= [zeros(1,n-1),6/n,36+12/n];
b(n+1,1)=- (8/7)^2/n^2;
[c,x0,r0]=SVDSol(A,b);
for i=1:n+1
    r(i+1)=c(i);
end
r(1)=r(3);
r(n+3)=-r(n+1)-4*r(n+2);
for i=1:n+1
    y(1,i)=r(i)+r(i+1)*4+r(i+2);
end
y
stp=1/n;
X=[0:stp:1];
plot(X,y,'g*',X,2*log(7./(8-X.^2)))

```

مثال ۴.۴.۲

```

n=input('Enter the number nodal points:')
y=zeros(1,n+1);
v=zeros(1,n+1);
for n=1:20
    p=5*y(1)^4*v(1);
    q=-y(1)^5+y(1)*p;
    A(1,:)= [36*3-12*p/n^2,-36*3-6*p/n^2,zeros(1,n-1)];
    d(1,1)=-3*q/n^2;
    for i=1:n-1
        p=5*(y(i+1)^4)*v(i+1);
        q=-y(i+1)^5+y(i+1)*p;
        A(i+1,:)= [zeros(1,i-1),6-6/i+p/n^2,-12+4*p/n^2,6+6/i+p/n^2,zeros(1,n-1-i)];
        d(i+1,1)=q/n^2;
    end
end

```

```

end
A(n+1,:)=[zeros(1,n-1),6*2/n,36+12*2/n];
p=5*y(n+1)^4*v(n+1);
q=-y(n+1)^5+y(n+1)*p;
d(n+1,1)=(3/4)^(1/2)*(6+3*2/n+p/n^2)-q/n^2;
[c,x0,r0]=SVDSol(A,d);
for i=1:n+1
    r(i+1)=c(i);
end
r(1)=r(3);
r(n+3)=(3/4)^(1/2)-r(n+1)-4*r(n+2);
for i=1:n+1
    y(1,i)=r(i)+r(i+1)*4+r(i+2);
    v(1,i)=-(3*n)*r(i)+(3*n)*r(i+2);
end
end
y
stp=1/n;
X=[0:stp:1];
plot(X,y,'g*',X,1./(1+X.^2./3).^1/2)
-----

```

مثال ۵.۴.۲

```

n=input('Enter the number nodal points:')
y=zeros(1,n+1);
v=zeros(1,n+1);
for n=1:15
    p=v(1)*exp(y(1));
    q=-exp(y(1))+y(1)*p;
    A(1,:)=[36*2-12*p/n^2,-36*2-6*p/n^2,zeros(1,n-1)];
    d(1,1)=-3*q/n^2;
    for i=1:n-1
        p=v(i+1)*exp(y(i+1));
        q=-exp(y(i+1))+y(i+1)*p;
        A(i+1,:)=[zeros(1,i-1),6-3/i+p/n^2,-12+4*p/n^2,6+3/i+p/n^2,zeros(1,n-1-i)];
        d(i+1,1)=q/n^2;
    end
end
A(n+1,:)=[zeros(1,n-1),6/n,36+12/n];
p=v(n+1)*exp(y(n+1));
q=-exp(y(n+1))+y(n+1)*p;

```

```

d(n+1,1)=-q/n^2;
[c,x0,r0]=SVDSol(A,d);
for i=1:n+1
    r(i+1)=c(i);
end
r(1)=r(3);
r(n+3)=-r(n+1)-4*r(n+2);
for i=1:n+1
    y(1,i)=r(i)+r(i+1)*4+r(i+2);
    v(1,i)=-(3*n)*r(i)+(3*n)*r(i+2);
end
end
y
stp=1/n;
X=[0:stp:1];
plot(X,y,'g*',X,2*log((4-2*(2)^(1/2))./((3-2*(2)^(1/2))*X^2+1)))
-----

```

مثال ۱.۳.۳

```

p(1,:)= [1,4,1,zeros(1,20)];
q(1,:)=zeros(1,23);
r(1,:)=zeros(1,23);
s(1,:)= [1,4,1,zeros(1,20)];
b(1,:)=0;
b(23,:)=0;
b(24,:)=0;
b(46,:)=0;
for i=1:21
    p(i+1,:)= [zeros(1,i-1),6*400+(i-1)/20,-12*400+4*(i-1)/20,
                6*400+(i-1)/20,zeros(1,21-i)];
    q(i+1,:)= [zeros(1,i-1),(i-1)/20,4*(i-1)/20,(i-1)/20,zeros(1,21-i)];
    r(i+1,:)= [zeros(1,i-1),2*(i-1)/20,4*2*(i-1)/20,2*(i-1)/20,zeros(1,21-i)];
    s(i+1,:)= [zeros(1,i-1),6*400+2*(i-1)/20,-12*400+4*2*(i-1)/20,
                6*400+2*(i-1)/20,zeros(1,21-i)];
    b(i+1,:)=2;
    b(24+i,:)= -2;
end
p(23,:)= [zeros(1,20),1,4,1];
q(23,:)=zeros(1,23);
r(23,:)=zeros(1,23);

```

```

s(23,:)=zeros(1,20),1,4,1];
A=[p q;r s];
[c,x0,r0]=SVDSol(A,b);
for i=1:21
    u(1,i)=c(i)+4*c(i+1)+c(i+2);
    v(1,i)=c(i+23)+4*c(i+24)+c(i+25);
end
stp=1/20;
X=[0:stp:1];
plot(X,X.^2-X,X,u,'g*')
plot(X,X-X.^2,X,v,'g*')

```

مثال ۱.۴.۴

```

n=input('Enter the number nodal points:')
A(1,:)=4-36*n^2+4,2+36*n^2+2,zeros(1,n)];
d(1,1)=6;
for i=1:n
    g=6+12*(i/n)+(i/n)^2+(i/n)^3;
    A(i+1,:)=zeros(1,i-1),6-6/i+1/n^2,-12+4/n^2,6+6/i+1/n^2,zeros(1,n-i)];
    d(i+1,1)=g/n^2;
end
[c,x0,r0]=SVDSol(A,d);
for i=1:n+2
    r(i+1)=c(i);
end
r(1)=r(3);
for i=1:n+1
    y(1,i)=r(i)+r(i+1)*4+r(i+2);
end
y

stp=1/n;
X=[0:stp:1];
plot(X,X.^2+X.^3,X,y,'g*')

```

مثال ۲.۴.۴

```

N=input('Enter the number nodal points:')
y=zeros(1,N+1);

```

```

v=zeros(1,N+1);
for n=1:10
    p=v(1)*exp(y(1));
    q=-exp(y(1))+y(1)*p;
    A(1,:)= [4-36*N^2+4*p, 2+36*N^2+2*p, zeros(1,N)];
    d(1,1)=q;
    for i=1:N
        p=v(i+1)*exp(y(i+1));
        q=-exp(y(i+1))+y(i+1)*p;
        A(i+1,:)= [zeros(1,i-1), 6-6/i+p/N^2, -12+4*p/N^2, 6+6/i+p/N^2, zeros(1,N-i)];
        d(i+1,1)=q/N^2;
    end
    [c,x0,r0]=SVDSol(A,d);
for i=1:N+2
    r(i+1)=c(i);
end
r(1)=c(3);
for i=1:N+1
    y(1,i)=r(i)+r(i+1)*4+r(i+2);
    v(1,i)=(-3*N)*r(i)+(3*N)*r(i+2);
end
end
w(1)=0;
for i=1:N
    w(i+1)=-(1/6)*(i/N)^2+(1/120)*(i/N)^4-(1/1890)*(i/N)^6;
end
e=w-y;
stp=1/N;
X=[0:stp:1];
plot(X, -(1/6)*X^2+(1/120)*X^4-(1/1890)*X^6, X, y, 'g*')
plot(X, e)

```

مثال ۳.۴.۴

```

N=input('Enter the number nodal points:')
y=zeros(1,N+1);
v=zeros(1,N+1);
for n=1:5
    p=-exp(-y(1))*v(1);
    q=-exp(-y(1))+y(1)*p;

```

```

A(1,:)=[4-36*N^2+4*p,2+36*N^2+2*p,zeros(1,N)];
d(1,1)=q;
for i=1:N
    p=-exp(-y(i+1))*v(i+1);
    q=-exp(-y(i+1))+y(i+1)*p;
    A(i+1,:)=[zeros(1,i-1),6-6/i+p/N^2,-12+4*p/N^2,6+6/i+p/N^2,zeros(1,N-i)];
    d(i+1,1)=q/N^2;
end
[c,x0,r0]=SVDSol(A,d);
for i=1:N+2
    r(i+1)=c(i);
end
r(1)=r(3);
for i=1:N+1
    y(1,i)=r(i)+r(i+1)*4+r(i+2);
    v(1,i)=-3*N*r(i)+3*N*r(i+2);
end
end
w(1)=0;
for i=1:N
    w(i+1)=-(1/6)*(i/N)^2-(1/120)*(i/N)^4-(1/1890)*(i/N)^6;
end
e=y-w;
stp=1/N;
X=[0:stp:1];
plot(X,e)

```

مثال ۴.۴.۴

```

N=input('Enter the number nodal points:')
y=zeros(1,N+1);
v=zeros(1,N+1);
for n=1:10
    p=8*exp(y(1))*v(1)+v(1)*exp(y(1)/2)*2;
    q=-4*(2*exp(y(1))+exp(y(1)/2))+y(1)*p;
    A(1,:)=[4-36*N^2+4*p,2+36*N^2+2*p,zeros(1,N)];
    d(1,1)=q;
    for i=1:N
        p=8*exp(y(i+1))*v(i+1)+v(i+1)*exp(y(i+1)/2)*2;
        q=-4*(2*exp(y(i+1))+exp(y(i+1)/2))+y(i+1)*p;
    end
end

```



```

    A(i+1,:)= [zeros(1,i-1),6-6/i+p/N^2,-12+4*p/N^2,6+6/i+p/N^2,zeros(1,N-i)];
    d(i+1,1)=q/N^2;
end
[c,x0,r0]=SVDSol(A,d);
for i=1:N+2
    r(i+1)=c(i);
end
r(1)=r(3);
for i=1:N+1
    y(1,i)=r(i)+r(i+1)*4+r(i+2);
    v(1,i)=-3*N*r(i)+3*N*r(i+2);
end
end
for i=1:N
    v(i+1)=-2*log(1+(i/N)^2);
end
v(1)=-2;
stp=1/N;
X=[0:stp:1];
plot(X,y-v)

```

مثال ۵.۴.۴

```

N=input('Enter the number nodal points:')
y=zeros(1,N+1);
v=zeros(1,N+1);
for n=1:15
    p=3*y(1)^2*v(1);
    q=6-y(1)^3+y(1)*p;
    A(1,:)= [4-36*N^2+4*p,2+36*N^2+2*p,zeros(1,N)];
    d(1,1)=q;
    for i=1:N
        p=-6*(i/N)^5+3*y(i+1)^2*v(i+1);
        q=6+(i/N)^6-y(i+1)^3+y(i+1)*p;
        A(i+1,:)= [zeros(1,i-1),6-6/i+p/N^2,-12+4*p/N^2,6+6/i+p/N^2,zeros(1,N-i)];
        d(i+1,1)=q/N^2;
    end
    [c,x0,r0]=SVDSol(A,d);
for i=1:N+2
    r(i+1)=c(i);

```

```
end
r(1)=r(3);
for i=1:n+1
    y(1,i)=r(i)+r(i+1)*4+r(i+2);
    v(1,i)=-3*N*r(i)+3*N*r(i+2);
end
end
y
```

کتابنامه

- [۱] ا. آی. کیزلف، ام. ال. کرازنف، جی. آی. ماکارنگو، (۱۳۶۶)، **معادلات دیفرانسیل معمولی**، علی اکبر عالم زاده، حسین دوستی، چاپ اول، انتشارات علوی.
- [۲] اصغر کرایه چیان، (۱۳۸۴)، **آنالیز عددی ۲**، چاپ اول، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ص ۱۴۵.
- [۳] چرچیل، براون، (۱۳۷۶)، **سریهای فوریه و مسائل مقدار مرزی**، دکتر سید محمد حسینی، دکتر امیر خسروی، چاپ اول، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ص ۸ و ۹.
- [۴] اصغر کرایه چیان، (۱۳۸۴)، **معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها**، چاپ نهم، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ص ۱۹۲، ۲۲۷.
- [۵] دیوید کینکید، وارد چنی، (۱۳۸۱)، **آنالیز عددی**، جلد دوم، دکتر فائزه توتونیان، منصوره صائمی، چاپ اول، دانشگاه امام رضا، مشهد، ص ۵۱۰-۵۲۸.
- [6] C. de Boor, (1978), **A practical guide to splines**, Springer-Verlag, New York .
- [7] S. Jator, Z. Sinkala, (2007), A high order B-spline collocation method for linear boundary value problems, **App. Math. Comp.**, 191, 100–116.
- [8] H. Caglar, N. Caglar, M.Ozer, (2009), B-spline solution of non-linear singular boundary value problems arising in physiology, **Chaos, Solitons and Fractals**, 39, 1232–1237.
- [9] G.B. Loghmani, M. Ahmadiania, (2007), Numerical solution of sixth order boundary value problems with sixth degree B-spline functions, **App. Math. Comp.**, 186, 992–999.
- [10] H. Caglar, N. Caglar, K. Elfaituri, (2006), B-spline interpolation compared with finite difference, finite element and finite volume methods which applied to two-point boundary value problems, **SIAM J. Numer. Anal.**, 175, 72–79.

- [11] E. Momoniat, T.A. Selway, K. Jina, (2007), Analysis of Adomian decomposition applied to a third-order ordinary differential equation from thin film flow, **Nonlinear Analysis**, 66, 2315–2324.
- [12] X. Lu, M. Cui, (2008), Solving a singular system of two nonlinear ODEs, **App. Math. Comp.**, 198, 534–543.
- [13] A. Majid. Wazwaz, A new method for solving singular initial value problems in the second-order ordinary differential equations, **App. Math. Comp.**, 128, 45–57.
- [14] I. Hashim, M.S.H. Chowdhur, (2008), Adaptation of homotopy-perturbation method for numeric–analytic solution of system of ODEs, **Physics Letters A**, 372, 470–481.
- [15] S.S. Motsa, P. Sibanda, S. Shateyi, (2010), A new spectral-homotopy analysis method for solving a nonlinear second order BVP, **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat**, 15, 2293–2302.
- [16] Q. Fang, T. Tsuchiya and T. Yamamoto, (2002), Finite difference, finite element and finite volume methods applied to two-point boundary value problems, **App. Math. Comp.**, 139, 9–19.
- [17] R.D. Russel, L.F. Shampine, (1975), Numerical methods for singular boundary value problems, **SIAM J. Numer. Anal.**, 12, 13–35.
- [18] P. Jamet, (1970), On the convergence of finite difference approximations to one dimensional singular boundary value problems, **Numer. Math.**, 14, 355–378.
- [19] P.G Ciarlet, F. Natterer, R.S. Varga, (1970), Numerical methods of high order accuracy for singular non-linear boundary value problems, **Numer. Math.**, 15, 87–99.
- [20] B. Gustafsson, (1973), A numerical method for solving singular boundary value problems, **Numer. Math.**, 21, 328–344.
- [21] Reddien, (1973), Projection methods and singular two point boundary value problems, **Numer. Math.**, 21, 193–205.
- [22] G.W. Reddien, L.L. Schumaker, (1976), On the collocation method for singular two point boundary value problems, **Numer. Math.**, 25, 427–432.
- [23] M.M. Chawala, C.P. Katti, (1984), A finite difference method for a class of singular two-point boundary value problems, **IMA J. Numer. Anal.**, 4, 457–466.

- [24] R. Bellman, R. Kalaba, (1965), **Quasilinearization and nonlinear boundary value problems**, American Elsevier, New York .
- [25] M.H. Protter, H.F. Weinberger, (1967), **Maximum Principles in Differential Equations**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [26] P.M. Prenter, (1975), **Splines and Variational Methods**, John Wiley.
- [27] L.F. Shampine, M.W. Reichelt, J. Kierzenka, (2000), **solving boundary value problems for ordinary differential equations in matlab using bvp4c**, <ftp://ftp.mathworks.com/pub/doc/papers/bvp>.
- [28] L.F. Shampine, (2003), Solving boundary value problems for odes, **App. Math. Comp.**, 4, 99–112.
- [29] H.B. Keller, (1992), **Numerical Methods for Two Point Boundary Value Problems**, Blaisdell, London.
- [30] F.R. DeHoog, R. Weiss, (1976), Difference methods for boundary value problems with a singularity of the first kind, **SIAM J. Numer. Anal.**, 13, 775–813.
- [31] M. Kadalbajoo, V. Kumar, (2007), B-spline method for a class of singular two-point boundary value problems using optimal grid, **App.Math. Comp.**, 188, 1856-1869.
- [32] N. Caglar, H. Caglar, (2006), B-spline solution of singular boundary value problems, **Appl. Math. Comput.**, 182, 1509-1513.
- [33] M.K. Kadalbajoo, K.S. Raman, (1984), Numerical Solution of singular boundary value problems by invariant imbedding, **J. Comp. Phy.**, 55, 268–277.
- [34] S.H. Chen, J. Hu, L. Chen, C.P. Wang, (2005), Existence results for n-point boundary value problem of second order ordinary differential equations, **J. Comput. Appl. Math.**, 180, 425-432.
- [35] J. Lu, (2007), Variational iteration method for solving a nonlinear system of second-order boundary value problems, **Comput. Math.Appl.**, 54, 1133-1138.
- [36] X.Y. Cheng, C.K. Zhong, (2005), Existence of positive solutions for a second order ordinary differential system, **J. Math. Anal. Appl.**, 312, 14-23.
- [37] A. Lomtadze, L. Malaguti, (2003), On a two-point boundary value problem for the second order ordinary differential equations with singularities, **Nonlinear Anal.**, 52, 1553-1567.

- [38] H.B. Thompson, C. Tisdell, (2002), Boundary value problems for systems of difference equations associated with systems of second-order ordinary differential equations, **Appl. Math. Lett.**, 15 (6), 761-766.
- [39] H.B. Thompson, C. Tisdell, (2003), The nonexistence of spurious solutions to discrete, two-point boundary value problems, **Appl. Math. Lett.**, 16 (1), 79-84.
- [40] F.Z. Geng, M.G. Cui, (2007), Solving a nonlinear system of second order boundary value problems, **J. Math. Anal. Appl.**, 327, 1167-1181.
- [41] N. Caglar, H. Caglar, (2009), B-spline method for solving linear system of second-order boundary value problems, **Comput. Math. App.**, 57, 757-762.
- [42] S. Chandrasekhar, (1967), **Introduction to the Study of Stellar Structure**, Dover, New York.
- [43] H.T. Davis, (1962), **Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations**, Dover, New York.
- [44] J.H. He, (2005), He's variational approach for nonlinear oscillators with high nonlinearity, **Chaos Solitons Fractals**, 26, 695.
- [45] N.T. Shawagfeh, (1993), Nonperturbative approximate solution for Lane–Emden equation, **J. Math. Phys.**, 34, 4364.
- [46] A.M. Wazwaz, (2001), A new analytic algorithm of Lane–Emden–type equations, **Appl. Math. Comput.**, 118, 287.
- [47] J.H. He, (1999), Solutions of singular IVPs of Lane–Emden type by homotopy perturbation method, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 178, 257.
- [48] M.S.H. Chowdhury, I. Hashim, (2007), Solutions of a class of singular second-order IVPs by homotopy-perturbation method, **Physics Letters A**, 365, 439–447.
- [49] L. L. Schumaker, (1981), **Spline Functions: Basic Theory**, Krieger Publishing Company, Florida.
- [50] J. M. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh, (1967), **The Theory of Splines and Their Applications**, Academic Press, New York.
- [51] P. M. Prenter, (1975), **Splines and Variational Methods**, John Wiley, New York.
- [52] G. Micula, (1999), **Handbook of Splines**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

-
- [53] J.I. Ramos, (2005), Sinc-collocation method for solving astrophysics equations, **Appl. Math. Comput.**, 161, 525.
- [54] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, (2007), **Numerical mathematics**, Springer-Verlag, Berlin .
- [55] P.M. Prenter, (1975), **Splines and Variational Methods**, John Wiley.

Abstract

In this thesis, the B-spline method is used for the numerical solution class linear and non-linear singular boundary value problems, linear system of second-order boundary value problems and linear and non-linear singular initial value problems. The original differential equation is modified at singular point then the modified problem is solved by B-spline method.

In the case of non-linear problems, we first linearize the equation using Quasilinearization technique and the resulting problem is solved by B-spline.

In the present examples, the results obtained by the present method are compared with exact solution and or the another methods solution for instance: the homotopy method, the finite difference method.

Keywords: *B-spline method, Ordinary differential equation, Singular boundary value problem, Initial value problem, system of second-order boundary value problem, Lane-Emden equation .*