بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

حل رده ای از معادلات با مشتقات جزئی با استفاده از توابع B - اسپلاین

اساتید راهنما

آقای دکتر احمد نزاکتی رضازاده
آقای دکتر علیرضا ناظمی

نگارش

مرضیه دوستی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

۲۶ شهریور ۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد **خانم مرضیه دوستی رشته ریاضی گرایش ریاضی کاربردی تحت عنوان: حل رده ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از توابع B - اسپلاین** که در تاریخ ۹۰/۶/۲۶ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : عالی امتیاز: ۲۰) ☒ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵ـ نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	دکتر احمدنزاکتی	دانشیار	
	دکتر علیرضا ناظمی	استادیار	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر محمد آرشی	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر علی مس فروش	استادیار	
۵ ـ استاد ممتحن	دکتر رضا پورقلی	استادیار	

رئیس دانشکده :

دانشکده ریاضی
دانشگاه صنعتی شاهرود

بسمه تعالی

احتراماً

به استحضار می رساند که عنوان روی جلد صحیح می باشد

ناظمی

۹۰/۷/۱۸

تقدیم به:

پدرم به خاطر تمام تلاش هایش، همون که توانش خستگی را خسته کرده است

مادرم طیبه ای که برایم حرمت عشق و سرچشمه لطف و کرامت است

برادران و خواهرانم مشوقینم در تحصیل

قدردانی

سپاس و ثنا خاص درگاه احدیت است. خدای را شکر می کنم که به من توانایی عطا فرمود تا این مرحله از تحصیلاتم را با موفقیت به پایان برسانم.

این مجال نیزگذشت و تجلی گاهش این چند سطرایست که شاید بماند که تنها نوشتار است که وقتی حک می شود ابدی است.

ندای وجدان براین است تا در مقام یک شاگرد، قدردانی نمایم از تمام کسانی که از ابتدای خلقتم رسالت آموزگاری مرا به عهده داشته اند. از مادر عزیزم که اولین معلم زندگی ام می باشد و همه معلمانم که تا به امروز اندیشه هایشان، درخت اندوخته هایم را بارور کرده اند. در این مورد خاص جا دارد از جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی به پاس کوشش هایی که در فرهیختگی ام نمودند، مراتب سپاس خود را از ایشان داشته باشم. همچنین از زحمات و کمک های جناب آقای دکتر احمد نزاکتی رضازاده تشکر وقدرانی نمایم. از اساتید محترم جناب آقای دکتر علی مس فروش و جناب آقای دکتر رضا پورقلی که زحمت مطالعه و داوری پایان نامه را متقبل شده اند، کمال تشکر را دارم. همچنین از نماینده تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر محمد آرشی صمیمانه تشکر می کنم.

از خانواده مهربانم که در طول تحصیل پشتیبان من بوده اند، سپاسگزاری نمایم.

در پایان از دوستانی که در انجام این پایان نامه اینجانب را مورد تفقد قرار دادند نیز سپاسگزارم.

مرضیه دوستی

۲۶ شهریور ۱۳۹۰

تعهد نامه

اینجانب **مرضیه دوستی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** دانشکده **علوم** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **حل عددی رده ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از توابع B – اسپلاین** تحت راهنمائی**دکتر احمد نزاکتی و دکتر علی رضا ناظمی** متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۱۳۹۰/۰۶/۲۶

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

*** متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .**

چکیده

در این پایان‌نامه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از توابع B - اسپلاین همراه با شرایط اولیه و شرایط مرزی می پردازیم. در ابتدا به معرفی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و توابع B - اسپلاین می پردازیم. سپس روش کالوکیشن با استفاده از تابع B - اسپلاین مرتبه ۴ برای حل عددی معادله برگرز شرح داده شده است. در ادامه معادله برگرز را با B - اسپلاین مرتبه هفت و روش کالوکیشن حل شده است. در فصل ۳و ۴ یک روش عددی بر اساس توابع B - اسپلاین و روش کالوکیشن برای حل معادله تلگراف هذلولوی خطی مرتبه دوم استفاده می کنیم. در فصل ۵ معادله تلگراف توسط روش شبه درونیاب B - اسپلاین مکعبی بصورت عددی حل خواهد شد. در پایان طرح کالوکیشن B - اسپلاین مرتبه چهار برای یافتن جواب عددی معادله غیر خطی فرنبرگ - وایتهام بکار می بریم. در انتهای هر فصل کارایی طرح مذکور توسط چند مثال نشان داده می شود. تمام محاسبات انجام شده و همچنین رسم نمودار ها در سرتاسر رساله با توجه به نرم افزار مطلب ۷ صورت گرفته است.

واژه‌های کلیدی: B - اسپلاین، معادله تلگراف، معادله فورنبرگ - وایتهام، روش کالوکیشن، پایداری

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Solving one-dimensional hyperbolic telegraph equation using cubic B - spline quasi - interpolation, Marzieh Dosti and Alireza Nazemi, International Journal of Mathematical and Computer Sciences 7:2, 57-62, 2011.

2. Septic B - spline collocation method for solving one - dimensional hyperbolic telegraph equation, Marzieh Dosti and Alireza Nazemi, World Academy of Science, Engineering and Technology 80: 1085- 1089, 2011.

3. A numerical solution of the telegraph equation using Quartic B- spline, The 4th Mathematics Annual National Conference of PNU Payam Noor University, Ardabil, Iran, sep 25-26, 2011.

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

اکثر پدیده های فیزیکی، چه در دینامیک سیالات، الکتریسیته، مغناطیس، کوانتوم و .... با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی[۱] توصیف می شوند؛ در واقع اکثر مطالب ریاضی فیزیک بصورت معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مدلسازی می شوند. در این فصل ما ابتدا خلاصه ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که چه هستند، چرا مفیدند، و چگونه حل می شوند و همچنین بحث کوتاهی از طرز رده بندی انواع مختلف آنها بیان می کنیم، سپس به بیان تعاریف اولیه و قضایای مربوط به B- اسپلاین ها[۲] می پردازیم. در انتها به تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل های بعدی اشاره خواهیم کرد.

۲.۱ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معادله ای با مشتقات پاره ای است. تفاوت آن با معادله دیفرانسیل معمولی[۳] که در آنها تابع مجهول فقط به یک متغیر بستگی دارد، در این است که در این معادلات تابع مجهول به چندین متغیر بستگی دارد.

برای تسهیل در نمادگذاری قرار داده ایم:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

حال چند معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معروف بیان می کنیم.

معادله گرما[۴] $u_t = u_{xx},$

[۱] Partial Differential Equation

[۲] B-Splins

[۳] Ordinary Differential Equation

[۴] Heat Equation

معادله موج[۵] $u_{tt} = u_{xx},$

معادله لاپلاس[۶] $u_{xx} + u_{yy} = 0,$

اکثر قوانین فیزیک، نظیر معادلات ماکسول[۷]، قانون تبرید نیوتن[۸]، معادلات ناویه[۹] - استوکس[۱۰] و معادله شرودینگر[۱۱] در مکانیک کوانتوم بر حسب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیان شده اند (یا قابل بیانند)؛ یعنی این قوانین پدیده ای فیزیکی را به وسیله ارتباط فضا و مشتقات نسبت به زمان توضیح می دهند. وجود مشتق ها در این معادلات بدان خاطر است که مشتق ها چیز های طبیعی (مانند سرعت، شتاب، نیرو، شار و شدت جریان) را نمایش می دهند. از اینرو معادلاتی داریم که مشتقات جزئی کمی مجهولی را که می خواهیم بیابیم به هم ارتباط می دهند.

هدف ما این است که چطور معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را همراه با شرایط اولیه و مرزی را حل نماییم.

سوالی که برای ما پیش می آید این است که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را چطور حل کنیم؟

روش های زیادی برای این کار وجود دارند مهمترین آنها روش هایی هستند که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به معادلات دیفرانسیل معمولی تغییر دهند. ده تکنیک مفید عبارتند از

[۵] Wave Equation

[۶] Laplace's Equation

[۷] Maxwell

[۸] Newton

[۹] Navier

[۱۰] Stokes

[۱۱] Schrodinger

۱. جداسازی متغیر ها[۱۲]: این تکنیک یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با n متغیر را به n، معادله دیفرانسیل معمولی تحویل می کند.

۲. تبدیل های انتگرال[۱۳]: این روند یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با n متغیر مستقل را به یک معادله با دیفرانسیل با مشتقات جزئی با $n - ۱$ متغیر تحویل می کند.

۳. تغییر مختصات[۱۴]: این روش با تغییر مختصات مسئله (دوران محور یا کارهای از این قبیل) معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به یک معادله دیفرانسیل معمولی یا معادله مشتقات جزئی دیگر (آسانتر) تغییر می دهد.

۴. تبدیل متغیر وابسته[۱۵]: این روش مجهول یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به یک مجهول جدید که آسانتر به دست می آیند تبدیل می کند.

۵. روش های عددی[۱۶]: این روش یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به یک دستگاه معادلات تفاضلی که بشود آن را با تکنیک های مکرر در کامپیوتر حل کرد تغییر می دهند. در بسیاری حالات، این تنها تکنیکی است که کار می کند. علاوه بر روش های جایگزینی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با معادلات تفاضلی، روش های دیگری نیز هستند که جواب ها را با سطوح چندجمله ای تقریب می کنند (تقریب های اسپلاین). امروزه بیشترین روش های مورد استفاده روش های المان

[۱۲] Separation of Variables

[۱۳] Integral Transforms

[۱۴] Change of Coordinates

[۱۵] Transformation of the Dependent Variable

[۱۶] Numerical Methods

محدود[۱۷]، روش تفاضلات متناهی[۱۸]، روش عناصر مرزی[۱۹]، روش آدومین[۲۰]، روش تکرار وردشی[۲۱]، روش حجم محدود[۲۲] و روش هموتوپی[۲۳] می باشد.

۶. روش اختلال[۲۴]: این روش یک مسئله غیرخطی را به یک رشته مسائل خطی که مسئلهٔ غیرخطی را تقریب می کنند تغییر می دهد.

۷. تکنیک پاسخ - ضربه ای[۲۵]: این روند شرایط اولیه و مرزی مسئله را به ضربه های ساده تجزیه کرده و پاسخ مربوط به هر ضربه را پیدا می کند. سپس پاسخ کل با افزودن این پاسخ های ساده به دست می آیند.

۸. معادلات انتگرال[۲۶]: این تکنیک یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به یک معادله انتگرال تغییر می دهد سپس معادله انتگرال با تکنیک های مختلف حل می شود.

۹. روش های حساب تغییرات[۲۷]: این روش ها جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را با تنظیم مجدد معادله به صورت یک مسئلهٔ مینیمم سازی می یابند.

---

[۱۷] Finit Element Differential

[۱۸] Boundary Element Method

[۱۹] Finite Difference Method

[۲۰] Adomian method

[۲۱] Variational Iteration Method

[۲۲] Finite Volume Method

[۲۳] Homotopy Perturbation Method

[۲۴] Pertubation Methods

[۲۵] Impulser- Response Technique

[۲۶] Integral Equations

[۲۷] Calculus of Variations Methods

۱۰. بسط تابع ویژه ای[۲۸]: این روش جواب یک معادله با مشتقات جزئی را به صورت یک مجموع نامتناهی از توابع ویژه می یابد. این توابع ویژه با حل آنچه به عنوان یک مسئله مقدار ویژه نظیر مسئله اصلی معروف است به دست می آیند.

برای جزئیات بیشتر میتوان به [۱] مراجعه کرد.

۳.۱ انواع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بر اساس معیارهای مختلفی رده بندی می شوند. رده بندی مفهوم مهمی است زیرا نظریه عمومی و روش های حل معمولاً فقط بر یک رده از معادلات داده شده اعمال می شود.

فرم کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به صورت زیر است

$$G(u, u_x, u_{xx}, \dots u_x^{(n)}, u_t, u_{tt}, \dots, u_t^{(m)}, u_{xt}, \dots) = 0, \qquad (۱.۱)$$

که در آن $u(x,t)$ تابعی وابسته به x و t می باشد.

تعریف ۱.۳.۱. مرتبه یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، مرتبه بالاترین مشتق جزئی است.

۱.۳.۱ معادلات دیفرانسیل با مشقات جزئی مرتبه اول

فرض کنید u تابعی از دو متغیر مستقل x و t باشد. کلی ترین معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول با دو متغیر مستقل به صورت زیر است

$$G(x, t, u, u_x, u_t) = 0,$$

[۲۸] Eigenfunction Expansion

معادله مرتبه اول را به صورت های زیر رده بندی می کنیم. هر معادله مر تبه اول به صورت کلی زیر

$$P(x,t,u)u_x + Q(x,t,u)u_t = R(x,t,u), \qquad (۲.۱)$$

اگر توابع P و Q و R در حالت کلی به x، t و u بستگی داشته باشد، شبه خطی[۲۹]گوییم. توجه داشته باشید رابطه (۲.۱) نسبت به مشتقات u_x و u_t خطی[۳۰]است. و هر معادله به صورت کلی

$$P(x,t)u_x + Q(x,t)u_t = H(x,t,u), \qquad (۳.۱)$$

اگر P و Q به u بستگی نداشته باشد یک معادله نیمه خطی[۳۱] نامیده می شود. و بالاخره معادله کلی

$$P(x,t)u_x + Q(x,t)u_t + C(x,t)u = D(x,t,u), \qquad (۴.۱)$$

را یک معادله مرتبه اول خطی می نامیم، طرف چپ نسبت به متغیرهای u_x، u_t و u یک عبارت خطی است. هر معادله مرتبه اول که به صورت های فوق نباشد، غیرخطی[۳۲] نامیده می شود.

۲.۳.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم

فرض کنید u تابعی از دو متغیر مستقل x و t باشد. یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم رابطه ای است بین متغیرهای x، t، u و مشتقات جزئی مرتبه اول و مرتبه

[۲۹] Quasi-linear

[۳۰] Linear

[۳۱] Half-Linear

[۳۲] Non-Linear

دوم u نسبت x و t یعنی

$$G(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = ۰, \qquad (۵.۱)$$

در حالت خاص یک معادله مرتبه دوم بصورت

$$Au_{xx} + ۲Bu_{xy} + Cu_{tt} = F, \qquad (۶.۱)$$

که در آن ضرایب A، B، C و F هر یک تابعی هستند از پنج متغیر x، t، u، u_x و u_t تقریباً خطی یا نیمه خطی گفته می شود زیرا این معادله نسبت به مشتقات مرتبه دوم خطی است. اگر در رابطه (۶.۱) ضرایب A، B و C تابعی فقط از x، t و F تابعی خطی از u، u_x و u_t یعنی

$$F = a(x, t)u + b(x, t)u_x + c(x, t)u_t,$$

آنگاه (۶.۱) را خطی می نامیم. پس صورت کلی یک معادله مرتبه دوم خطی

$$Au_{xx} + ۲Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Hu = ۰, \qquad (۷.۱)$$

که ضرایب A، B، C، D، E و H هر یک تابعی فقط از x و t هستند.

معادلات خطی مرتبه دوم نیمه خطی به صورت (۶.۱) یا خطی به صورت (۷.۱) را به شکل زیر دسته بندی می کنیم.

الف) اگر $B^۲ - AC > ۰$، در مجموعه ای از نقاط xt، معادله را هذلولوی[۳۳] می نامیم.

ب) اگر $B^۲ - AC = ۰$، در مجموعه ای از نقاط xt، معادله را سهموی[۳۴] می نامیم.

ج) اگر $B^۲ - AC < ۰$، در مجموعه ای از نقاط xt، معادله را بیضوی[۳۵]می نامیم.

[۳۳]Hyperbolic

[۳۴]Parabolic

[۳۵]Elliptic

۴.۱ جواب عددی و جواب تحلیلی

تعریف ۱.۴.۱. جوابهای تحلیلی[۳۶] جواب هایی هستند که در آنها متغیر مجهول u به صورت عبارتی ریاضی بر حسب متغیرهای مستقل و پارامترهای دستگاه که معمولاً سری نامتناهی یا انتگرال اند داده شده است.

تعریف ۲.۴.۱. جواب عددی[۳۷] یعنی یافتن جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به وسیله تعویض معادله دیفرانسیل با یک معادله تقریبی و حل معادله آسانتر.

نتیجه معمولاً جدولی از اعداد است که جواب u را به ازای مقادیر مختلفی از متغیرهای مستقل لیست می کند.

مزایای جواب تحلیلی

۱. اگر جواب تحلیلی به صورت سری باشد برای بدست آوردن نقطه مشخص(x,t)، به آسانی می توان برای خطا کران بالایی یافت.

۲. جواب تحلیلی اجازه یافتن جواب را در تنها نقطه (x,t) بدون انجام تمام فرایند مارش برای یافتن جواب در سایر نقاط، به ما می دهد.

۳. جواب تحلیلی یافتن جواب را نه تنها در نقاط شبکه بلکه در هر نقطه مجاز می سازد.

۴. مهمتر از همه موارد بالا شاید این باشد که جواب تحلیلی نحوهٔ تاثیر پارامترهای فیزیکی و شرایط اولیه و مرزی را بر جواب بازگو می کند.

جواب های عددی این روابط را آشکار نمی کند، زیرا ما جواب عددی را به ازای پارامترها و شرایط اولیه و مرزی خاصی پیدا می کنیم. در بسیاری از حالات، دانستن رابطه بین

[۳۶] Analytic Solutions

[۳۷] Numerical Solution

پارامترهای مدل و جواب مهم است، زیرا ممکن است هدف تخمین پارامترها از جواب باشد.

مزایای جواب عددی

جواب های عددی یک مزیت مهم دارند، و آن این است که بسیاری از مسائل دارای جواب تحلیلی معلوم نیستند. عملاً تمام معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیر خطی را به روش عددی حل کرد و در واقع اغلب مدل های حقیقی در فیزیک، شیمی، زیست شناسی و .... ماهیت غیر خطی دارند.

بعضی از معادلات غیر خطی بسیا مهم :

۱. معادله موج غیرخطی $u_{tt} = u_{xx} + f(u)$

۲. معادله واکنش - پخش $u_t = u_{xx} + f(u)$

۳. معادلات هودگکین [۳۸]- هاکسلی [۳۹] $\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u, v), \\ v_t = g(u, v), \end{cases}$

جواب های تحلیلی معلومی به ازای جمیع غیرخطی های f و g ندارند. لذا، حمله کلی به اغلب مسائل غیرخطی (و بعضی از مسائل خطی) مستلزم استفاده از جواب های عددی می باشد[۱].

۵.۱ B - اسپلاین ها

۱.۵.۱ نظریه اساسی

در این بخش به دستگاهی از توابع اسپلاین اختصاص یافته که از آنها کلیه توابع اسپلاین دیگر می توانند با تشکیل ترکیب های خطی به دست آیند. این اسپلاین ها یک پایه برای

[۳۸] Hodgkin

[۳۹] Huxley

فضاهای اسپلاین های خاص فراهم می کنند و بنابراین B - اسپلاین[۴۰] نامیده می شوند. با معلوم بودن گره ها، B - اسپلاین ها به وسیله روابط بازگشتی به راحتی قابل تولید هستند و الگوریتم آنها نیز نسبتاً ساده است. B - اسپلاین ها به واسطه برخورداری از نظریه ای زیبا و رفتاری نمونه در محاسبات عددی متمایز هستند. بعلاوه B - اسپلاین ها می توانند تعمیم پیدا کنند.

با دستگاهی از گره های x_i بر روی اعداد حقیقی شروع می کنیم. در عمل معمولاً به یک مجموعه متناهی نیاز است اما برای گسترش راحت تر است که گره ها یک مجموعه نامتناهی از راست تا $+\infty$ و از چپ تا $-\infty$ را شامل باشد

$$\ldots < x_{-۲} < x_{-۱} < x_{۰} < x_{۱} < x_{۲} < \ldots$$

در تمام مباحث این گره ها ثابت فرض می شوند و تمام اسپلاین ها را بر این گره ها استوار می کنیم.

۲.۵.۱ B - اسپلاین درجه صفر

B - اسپلاین درجه صفر را با نماد $B_i^{۰}$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

تعریف ۱.۵.۱.

$$B_i^{۰}(x) = \begin{cases} ۱, & x_i \leq x < x_{i+۱}, \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که دارای شکل (۱.۱) می باشد. این B - اسپلاین ها دنباله نامتناهی $\{B_i^{۰} : i \in Z\}$ را تشکیل می دهند.

برخی از خواص B - اسپلاین فوق در زیر آمده است.

[۴۰] B spline

۱. محمل[۴۱] B_i° (یعنی مجموعه هایی که $B_i^\circ \neq 0$) بازه $[x_i, x_{i+1})$ می باشد.

۲. $B_i^\circ(x) \geq 0$ به ازای همه x ها و i ها.

۳. B_i° از راست پیوسته است.

۴. $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_i^\circ(x) = 0$ به ازای تمام x ها.

نکته مهم دیگر این است که B - اسپلاین های درجه صفر یک پایه برای همه B - اسپلاین های درجه صفر تشکیل می دهند به شرط آنکه چنین B - اسپلاین هایی را به پیوسته بودن از راست استاندارد کنیم. برای اثبات این ادعا، فرض کنید S یک تابع اسپلاین درجه صفر باشد. آنگاه این اسپلاین قطعه ای ثابت[۴۲] است و به صورت زیر تعریف می شود

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}, i \in Z \longrightarrow S(x) = c_i,$$

واضح است که

$$S(x) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} B_i^\circ(x),$$

بنابراین ما یک پایه به مفهوم شودر[۴۳] داریم (هر بردار در فضا یک نمایش منحصربفرد به صورت یک سری نامتناهی $\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} c_i B_i^\circ$ دارد).

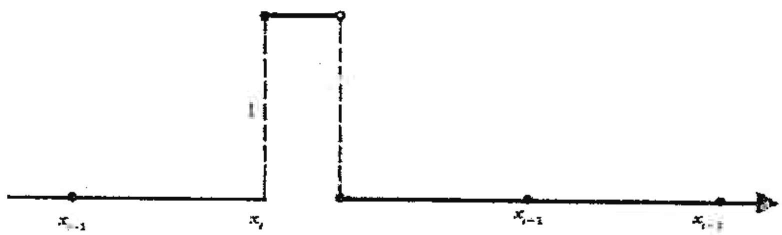
توابع B_i° نقطه شروعی برای تعریف بازگشتی همه B - اسپلاین های از درجه بالاتر هستند. رابطه بازگشتی برای بدست آوردن B - اسپلاین های با درجه بالاتر عبارتست از

$$B_i^k(x) = \left(\frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}\right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}}\right) B_{i+1}^{k-1}(x), \quad (k \geq 1) \tag{۸.۱}$$

[۴۱] Support

[۴۲] Piecewise Constant

[۴۳] Schauder



شکل ۱.۱: B - اسپلاین $B_i^{۰}$

تمام ویژگی های B - اسپلاین از درجه بالاتر از این تعریف بازگشتی نتیجه خواهد شد. با وارد کردن برخی توابع خطی خاص

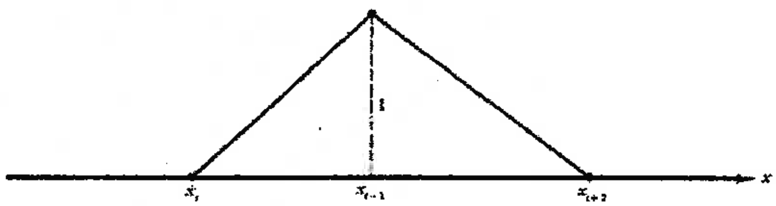
$$V_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}, \qquad (۹.۱)$$

می توانیم رابطه بازگشتی را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$B_i^k = V_i^k B_i^{k-۱} + (۱ - V_{i+۱}^k) B_{i+۱}^{k-۱}, \qquad (۱۰.۱)$$

چون $B_i^{۰}$ یک چند جمله ای قطعه به قطعه[۴۴] از درجه صفر است و V_i^k خطی است لذا $B_i^{۱}$ یک چندجمله ای حداکثر از درجه یک می باشد. به همین دلیل میتوان نشان داد که بطور کلی B_i^k یک چندجمله ای قطعه به قطعه حداکثر از درجه k می باشد.

[۴۴]Piecewse Polynomial



شکل ۲.۱: B – اسپلاین B_i^1

۳.۵.۱ B – اسپلاین درجه یک

با توجه به رابطه (۸.۱)، B – اسپلاین درجه یک را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$B_i^1(x) = (\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i})B_i^0(x) + (\frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}})B_{i+1}^0(x),$$

لذا

$$B_i^1(x) = \begin{cases} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x} & x_i \leq x < x_{i+1}, \\ \frac{x_{i+2}-x}{x_{i+2}-xi+1} & x_{i+1} \leq x < x_{i+2}, \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

نمودار B_i^1 را می توان در شکل (۲.۱) دید. خواص B – اسپلاین درجه یک به صورت زیر می باشد.

۱. محمل B_i^1 بازه $[x_i, x_{i+2})$ می باشد.

۲. $B_i^1(x) \geq 0$ به ازای همه x ها و i ها.

۳. B_i^1 از راست پیوسته است ودر هر نقطه به جز x_i، x_{i+1} و x_{i+2} مشتق پذیر است.

۴. $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_i^1(x) = 0$ به ازای تمام x ها.

۴.۵.۱ خواص B - اسپلاین

لم ۲.۵.۱. اگر $k \geq 1$, $x \notin (x_i, x_{i+k+1})$ آنگاه $B_i^k(x) = 0$.

لم ۳.۵.۱. فرض کنید $k \geq 0$، اگر $x \in (x_i, x_{i+1})$، آنگاه $B_i^k(x) > 0$.

لم ۴.۵.۱. داریم : $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_i B_i^k = \sum_{-\infty}^{+\infty} [c_i V_i^k + c_{i-1}(1 - V_i^k)] B_i^{k-1}$

رویه عددی

در لم (۴.۵.۱)، ضرایب می توانند ثابت یا تابع باشند. بنابراین لم راهی برای محاسبه یک تابع داده شده به شکل زیر فراهم می کند.

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^k(x) B_i^k(x),$$

فرض می کنیم که توابع C_i^k داده شده باشند؛ البته آنها ممکن است ثابت باشند. حال تعریف می کنیم

$$C_i^{k-1}(x) = C_i^k(x) V_i^k(x) + C_{i-1}^k(x)[1 - V_i^k(x)], \qquad (۱۱.۱)$$

سپس بنابر لم (۴.۵.۱) و رابطه (۱۱.۱) داریم

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^k(x) B_i^k(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^{k-1}(x) B_i^{k-1}(x),$$

باتکرار بحث برای $0, 1, ..., k-2, k-1$ بالاخره به دست می آوریم

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^k(x) B_i^k(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^0(x) B_i^0(x),$$

همان طور که می دانیم عبارت سمت راست به راحتی محاسبه می شود. برای $x_j \le x < x_{j+1}$، مقدارش برابر $C_j^{\circ}(x)$ است. رابطه (۱۱.۱) را با استفاده از رابطه (۱۰.۱) با جزئیات بیشتر به صورت زیر می نویسیم

$$C_i^{j-1}(x) = \frac{(x-x_i)C_i^j(x) + (x_{i+j}-x)C_{i-1}^j(x)}{x_{i+j}-x_i}, \tag{۱۲.۱}$$

ملاحظات قبلی ما را به رویه عددی زیر هدایت می کند.

الگوریتم۱ اگر ضرایب C_i^k مفروض باشند، تابع اسپلاین $S(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i^k(x)B_i^k(x)$ برای یک x داده شده می توانند به صورت زیر محاسبه شود: اندیس m را به گونه ای تعیین کنید که $x_m \le x < x_{m+1}$. با استفاده از معادله (۱۲.۱) آرایه مثلثی زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{lllll}
C_m^k & C_m^{k-1} & \cdots & C_m^1 & C_m^0 \\
C_{m-1}^k & C_{m-1}^{k-1} & \cdots & C_{m-1}^1 & \\
\vdots & & & & \\
C_{m-k+1}^k & C_{m-k+1}^{k-1} & & & \\
C_{m-k}^k & & & &
\end{array}$$

آنگاه $S(x) = C_m^o$.

لم ۵.۵.۱. به ازای هر k،

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_i^k(x) = ۱.$$

۵.۵.۱ مشتق و انتگرال B - اسپلاین

لمی که ارائه خواهیم کرد فرمول مهم برای مشتق B_i^k ارائه می دهد. بهتر است از رابطه برای V_i^k استفاده کرده و قرار می دهیم

$$\alpha_i^k = \frac{1}{x_{i+k} - x_i},$$

با این نمادگذاری ملاحظه می کنیم که

$$\frac{d}{dx} V_i^k(x) = \alpha_i^k,$$

بقیه فرمول های دیگر که تحقیق آنها بدیهی است، عبارتند از:

$$\alpha_i^k V_i^{k+1} = \alpha_i^{k+1} V_i^k,$$

$$\alpha_{i+1}^k (1 - V_i^{k+1}) = \alpha_i^{k+1} (1 - V_{i+1}^k),$$

لم ۶.۵.۱. به ازای $k \geq 2$

$$\frac{d}{dx} B_i^k(x) = (\frac{k}{x_{i+k} - x_i}) B_i^{k-1}(x) - (\frac{k}{x_{i+k+1} - x_{i+1}}) B_{i+1}^{k-1},$$

وقتی $k = 1$ معادله برای تمام x ها به جز $x = x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$ برقرار است.

لم ۷.۵.۱. به ازای $k \geq 1$ ، B - اسپلاین های B_i^k به رده پیوستگی $C^{k-1}(R)$ تعلق دارند.

لم ۸.۵.۱.

$$\int_{-\infty}^{x} B_i^k(s) ds = (\frac{x_{i+k+1} - x_i}{k+1}) \sum_{j=i}^{\infty} B_j^{k+1}(x).$$

اگر f یک تابع و K یک زیر مجموعه از دامنه اش باشد، آنگاه $f \mid k$ تحدید[۴۵] f به K را نمایش می دهد. بنابراین،

$$(f \mid k)(x) = f(x) \ (x \in K),$$

[۴۵] Restriction

این مفهوم در کار با اسپلاین ها مفید می باشد، زیرا هر تابع $B_i^k \mid (x_j, x_{j+1})$ یک چندجمله ای (به طور دقیق تر تحدید یک چند جمله ای) است. وقتی گفته می شود که یک مجموعه از توابع f_i بر روی یک مجموعه K مستقل خطی اند، به این معناست که مجموعه توابع تحدید شدۀ $f_i \mid K$ به مفهوم معمول مستقل خطی هستند.

حال توابع B - اسپلاین B_0^k، B_1^k،...، B_n^k را در نظر بگیرید. وقتی اینها به هر بازۀ تنهایی بین گره های (x_v, x_{v+1}) محدود شوند، نتیجه یک مجموعه از چند جمله ای های از درجه کوچکتر یا مساوی k می باشد. یک واقعیت مفید و تعجب آور آن است که اگر بازه (x_k, x_{k+1}) باشد این تحدید ها یک پایه برای فضای چندجمله ای هایی $\prod_k$ تشکیل می دهند.

لم ۱.۵.۹. مجموعه B - اسپلاین های $\{B_j^k, B_{j+1}^k, ..., B_{j+k}^k\}$ بر روی بازه (x_{k+j}, x_{k+j+1}) مستقل خطی است.

لم ۱.۵.۱۰. مجموعه B - اسپلاین های $\{B_{-k}^k, B_{-k+1}^k, ..., B_{n-1}^k\}$ بر روی بازه (x_0, x_n) مستقل خطی اند.

پایه ای برای فضای S_n^k: S_n^kمجموعه تمام توابع از رده C^{k-1} و چند جمله ای های قطعه به قطعه از درجه کوچکتر مساویk بر روی n بازه$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ می باشد. برای اینکه دامنه B - اسپلاین ها یکسان باشد، B - اسپلاین ها را به بازه $[x_0, x_n]$ محدود می کنیم و با نماد$B_i^k \mid [x_0, x_n]$ نمایش می دهیم.

قضیه ۱.۵.۱۱. یک پایه برای فضای S_n^k عبارت است از

$$\{B_i^k \mid [x_0, x_n] : -k \leq i \leq n-1\}, \qquad (۱.۱۳)$$

در نتیجه بعد S_n^k، $n+k$ می باشد.

جدول ۱.۱: مقادیر B_i و B'_i.

x	$x_{i-۱}$	x_i	$x_{i+۱}$	$x_{i+۲}$
B_i	۰	۱	۱	۰
B'_i	۰	$\frac{۲}{h}$	$\frac{-۲}{h}$	۰

۶.۱ B - اسپلاین های مراتب بالاتر

در بخش های قبلی به B - اسپلاین درجه صفر و درجه یک اشاره کردیم. همچنین اشاره کردیم با توجه به رابطه بازگشتی میتوان B - اسپلاین های درجه بالاتر با همان خواص را تولید کرد.

برای راحتی کار و ساده نویسی فرض می کنیم فاصلهٔ گره ها از یکدیگر ثابت باشد یعنی $h = x_{i+۱} - x_i$.

حال با توجه به رابطه (۱۰.۱) و B - اسپلاین مرتبه یک میتوان B - اسپلاین مرتبه دو[۴۶] را به صورت زیر بدست آورد:

$$B_i(x) = \frac{۱}{h^۲}\begin{cases} (x_{i+۲}-x)^۲ - ۳(x_{i+۱}-x)^۲ + ۳(x_i - x)^۲ & [x_{i-۱}, x_i], \\ (x_{i+۲}-x)^۲ - ۳(x_{i+۱}-x)^۲ & [x_i, x_{i+۱}], \\ (x_{i+۲}-x)^۲ & [x_{i+۱}, x_{i+۲}], \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۱۴.۱)$$

و در جدول (۱.۱) مقادیر B - اسپلاین و مشتقاتش در گره ها بدست آورده شده است.

دوباره باتوجه به رابطه بازگشتی (۱۰.۱) و رابطه (۱۴.۱) B- اسپلاین مرتبه سه[۴۷] برابر

[۴۶] Quadratic B-spline

[۴۷] Cubic B-spline

جدول ۲.۱: مقادیر B_i و B_i'، B_i''.

x	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
B_i	0	1	4	1	0
B_i'	0	$\frac{-3}{h}$	0	$\frac{3}{h}$	0
B_i''	0	$\frac{6}{h^2}$	$\frac{-12}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	0

است با

$$B_i(x) = \frac{1}{h^3}\begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & [x_{i-1}, x_i], \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x)^2 + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & [x_i, x_{i+1}], \\ (x_{i+2} - x)^3 & [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (15.1)$$

به همین ترتیب B - اسپلاین های درجه چهار [48]و پنج [49]و شش [50] و هفت [51]را به صورت زیر خواهیم داشت که همگی داری خواص ذکر شده در بخش های پیشین را دارا می باشند و به ترتیب جدول های (۳.۱)، (۴.۱)، (۵.۱) و (۶.۱) نشان دهنده مقادیر B - اسپلاین در نقاط گره ای می باشد.

$$Q_i(x) = \frac{1}{h^4}\begin{cases} (x - x_{i-2})^4 & [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ (x - x_{i-2})^4 - 5(x - x_{i-1})^4 & [x_{i-1}, x_i], \\ (x - x_{i-2})^4 - 5(x - x_{i-1})^4 + 10(x - x_i)^4 & [x_i, x_{i+1}], \\ (x_{i+3} - x)^4 - 5(x_{i+2} - x)^4 & [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ (x_{i+3} - x)^4 & [x_{i+2}, x_{i+3}], \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (16.1)$$

[48]Quartic B-spline

[49]Quintic B-spline

[50]Sextic B-spline

[51]Septic B-spline

جدول ۳.۱: مقادیر Q_i، Q_i'، Q_i''، Q_i'''.

x	$x_{i-۲}$	$x_{i-۱}$	x_i	$x_{i+۱}$	$x_{i+۲}$	$x_{i+۳}$
Q_i	۰	۱	۱۱	۱۱	۱	۰
Q_i'	۰	$\frac{-۴}{h}$	$\frac{-۱۲}{h}$	$\frac{۱۲}{h}$	$\frac{۴}{h}$	۰
Q_i''	۰	$\frac{۱۲}{h^۲}$	$\frac{-۱۲}{h^۲}$	$\frac{-۱۲}{h^۲}$	$\frac{۱۲}{h^۲}$	۰
Q_i'''	۰	$\frac{-۲۴}{h^۳}$	$\frac{۷۲}{h^۳}$	$\frac{-۷۲}{h^۳}$	$\frac{۲۴}{h^۳}$	۰

جدول ۴.۱: مقادیر B_i، B_i'، B_i''، B_i'''.

x	$x_{i-۳}$	$x_{i-۲}$	$x_{i-۱}$	x_i	$x_{i+۱}$	$x_{i+۲}$	$x_{i+۳}$
B_i	۰	۱	۲۶	۶۶	۲۶	۱	۰
B_i'	۰	$\frac{-۵}{h}$	$\frac{-۵۰}{h}$	۰	$\frac{۵۰}{h}$	$\frac{۵}{h}$	۰
B_i''	۰	$\frac{۲۰}{h^۲}$	$\frac{۴۰}{h^۲}$	$\frac{-۱۲۰}{h^۲}$	$\frac{۴۰}{h^۲}$	$\frac{۲۰}{h^۲}$	۰
B_i'''	۰	$\frac{-۶۰}{h^۳}$	$\frac{۱۲۰}{h^۳}$	۰	$\frac{-۱۲۰}{h^۳}$	$\frac{۶۰}{h^۳}$	۰

$$
B_i(x) = \frac{۱}{h^۵}
\begin{cases}
(x - x_{i-۳})^۵ & [x_{i-۳}, x_{i-۲}], \\
(x - x_{i-۳})^۵ - ۶(x - x_{i-۲})^۵ & [x_{i-۲}, x_{i-۱}], \\
(x - x_{i-۳})^۵ - ۶(x - x_{i-۲})^۵ + ۱۵(x - x_{i-۱})^۵ & [x_{i-۱}, x_i], \\
(x_{i+۳} - x)^۵ - ۶(x_{i+۲} - x)^۵ + ۱۵(x_{i+۱} - x) & [x_i, x_{i+۱}], \\
(x_{i+۳} - x)^۵ - ۶(x_{i+۲} - x)^۵ & [x_{i+۱}, x_{i+۲}], \\
(x_{i+۳} - x)^۵ & [x_{i+۲}, x_{i+۳}], \\
۰ & \text{در غیر این صورت}
\end{cases}
\tag{۱۷.۱}
$$

$$
B_i(x) = \frac{۱}{h^۶}
\begin{cases}
(x - x_{i-۳})^۶ & [x_{i-۳}, x_{i-۲}], \\
(x - x_{i-۳})^۶ - ۷(x - x_{i-۲})^۶ & [x_{i-۲}, x_{i-۱}], \\
(x - x_{i-۳})^۶ - ۷(x - x_{i-۲})^۶ + ۲۱(x - x_{i-۱})^۶ & [x_{i-۱}, x_i], \\
(x - x_{i-۳})^۶ - ۷(x - x_{i-۲})^۶ + ۲۱(x - x_{i-۱})^۶ - ۳۵(x - x_i)^۶ & [x_i, x_{i+۱}], \\
(x - x_{i-۴})^۶ - ۷(x - x_{i-۳})^۶ + ۲۱(x - x_{i-۲})^۶ & [x_{i+۱}, x_{i+۲}], \\
(x - x_{i-۴})^۶ - ۷(x - x_{i-۳})^۶ & [x_{i+۲}, x_{i+۳}], \\
(x - x_{i-۴})^۶, & [x_{i+۳}, x_{i+۴}], \\
۰ & \text{در غیر این صورت}
\end{cases}
\tag{۱۸.۱}
$$

جدول ۵.۱: مقادیر Q_i، Q'_i، Q''_i، Q'''_i.

x	$x_{i-۳}$	$x_{i-۲}$	$x_{i-۱}$	x_i	$x_{i+۱}$	$x_{i+۲}$
Q_i	۱	۵۷	۳۰۲	۳۰۲	۵۷	۱
Q'_i	$\frac{-۶}{h}$	$\frac{-۱۵۰}{h}$	$\frac{-۲۴۰}{h}$	$\frac{۲۴۰}{h}$	$\frac{۱۵۰}{h}$	$\frac{۶}{h}$
Q''_i	$\frac{۳۰}{h^۲}$	$\frac{۲۷۰}{h^۲}$	$\frac{-۳۰۰}{h^۲}$	$\frac{-۳۰۰}{h^۲}$	$\frac{۲۷۰}{h^۲}$	$\frac{۳۰}{h^۲}$
Q'''_i	$\frac{-۱۲۰}{h^۳}$	$\frac{-۱۲۰}{h^۳}$	$\frac{-۹۶۰}{h^۳}$	$\frac{۹۶۰}{h^۳}$	$\frac{۱۲۰}{h^۳}$	$\frac{۱۲۰}{h^۳}$

جدول ۶.۱: مقادیر $\phi_m, \phi'_m, \phi''_m, \phi'''_m$.

x	$x_{m-۴}$	$x_{m-۳}$	$x_{m-۲}$	$x_{m-۱}$	x_m	$x_{m+۱}$	$x_{m+۲}$	$x_{m+۳}$	$x_{m+۴}$
ϕ_i	۰	۱	۱۲۰	۱۱۹۱	۲۴۱۶	۱۱۹۱	۱۲۰	۱	۰
ϕ'_i	۰	$\frac{۷}{h}$	$\frac{۳۹۲}{h}$	$\frac{۱۷۱۵}{h}$	۰	$\frac{-۱۷۱۵}{h}$	$\frac{-۳۹۲}{h}$	$\frac{-۷}{h}$	۰
ϕ''_i	۰	$\frac{۴۲}{h^۲}$	$\frac{۱۰۰۸}{h^۲}$	$\frac{۶۳۰}{h^۲}$	$\frac{-۳۳۶۰}{h^۲}$	$\frac{۶۳۰}{h^۲}$	$\frac{۱۰۰۸}{h^۲}$	$\frac{۴۲}{h^۲}$	۰
ϕ'''_i	۰	$\frac{۲۱۰}{h^۳}$	$\frac{۱۶۸۰}{h^۳}$	$\frac{-۳۹۹۰}{h^۳}$	۰	$\frac{۳۹۹۰}{h^۳}$	$\frac{-۱۶۸۰۰}{h^۳}$	$\frac{-۲۱۰}{h^۳}$	۰

$$\phi_i(x) = \frac{۱}{h^۷}\begin{cases} (x-x_{i-۴})^۷ & [x_{i-۴}, x_{i-۳}], \\ (x-x_{i-۴})^۷ - ۸(x-x_{i-۳})^۷, & [x_{i-۳}x_{i-۲}], \\ (x-x_{i-۴})^۷ - ۸(x-x_{i-۳})^۷ + ۲۸(x-x_{i-۲})^۷ & [x_{i-۲}, x_{i-۱}], \\ (x-x_{i-۴})^۷ - ۸(x-x_{i-۳})^۷ + ۲۸(x-x_{i-۲})^۷ - ۵۶(x-x_{i-۱}) & [x_{i-۱}, x_i], \\ (x_{i+۴}-x)^۷ - ۸(x_{i+۳}-x)^۷ + ۲۸(x_{i+۲}-x)^۷ - ۵۶(x_{i+۱}-x) & [x_i, x_{i+۱}], \\ (x_{i+۴}-x)^۷ - ۸(x_{i+۳}-x)^۷ + ۲۸(x_{i+۲}-x)^۷ & [x_{i+۱}, x_{i+۲}], \\ (x_{i+۴}-x)^۷ - ۸(x_{i+۳}-x)^۷ & [x_{i+۲}, x_{i+۳}], \\ (x_{i+۴}-x)^۷ & [x_{i+۳}x_{i+۴}], \\ ۰ & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \quad (۱۹.۱)$$

۱.۶.۱ نرم ها

یکی از اولین نکاتی که در تقریب یک تابع و یا برازش داده های مفروض باید در نظر گرفت نوع تابع تقریب (مثلاً U است) که باید به کار برود. U عموماً ترکیبی خطی از یک مجموعه از توابع است که اعضایش دارای خواص معینی می باشند. مسئله، تعیین ضرایب در این

ترکیب خطی است بطوری که U به اندازه کافی به تابع نزدیک بوده و یا به قدر کافی داده های مفروض را برازش کند. برای سنجش نزدیکی یا کفایت تقریب U، از نرم تابع استفاده می شود. نرم های بکار رفته در این پایان نامه در زیر تعریف شده اند.

تعریف ۱.۶.۱. به ازای تابع معلوم $f \in C[a,b]$، نرم های $\|.\|_{۲}$ و $\|.\|_{\infty}$ به ترتیب برابر است با:

$$\|f\|_{۲} = \{\int_a^b [f(x)]^{۲} dx\}^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

تعریف ۲.۶.۱. هرگاه U تقریبی از تابع معلوم $f \in C[a,b]$ باشد، خطای مطلق بصورت $\|f-U\|$ و خطای نسبی بصورت $\frac{\|f-U\|}{\|U\|}$ تعریف می شوند.

برای سنجش تقریب تابع U می بایست $L_{۲} = \|f-U\|_{۲}$ و $L_{\infty} = \|f-U\|_{\infty}$ را مینیمم کنیم.

در بدست آوردن نتایج عددی در بعضی موارد به حل دستگاه ماتریسی مربعی و غیر مربعی می رسیم که برای حل آنها از تجزیه مقدار تکین آنها استفاده کرده ایم بر خود لازم دانستم در اینجا کمی در مورد آن توضیح دهیم.

قضیه ۳.۶.۱. تجزیه مقدار تکین: فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $m \times n$ باشد آنگاه ماتریس های متعامد U و V وجو دارند به قسمی که

$$U^T AV = \begin{bmatrix} \Sigma_{۱} & ۰ \\ & \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \Sigma,$$

که در آن $\Sigma_{۱}$ یک ماتریس قطری نا منفرد است. عناصر قطر Σ همگی نامنفی هستند و می توانند به ترتیب ناصعودی مرتب شوند. تعداد عناصر قطری مخالف صفر Σ برابر با رتبه ماتریس A است.

SVD و شبه معکوس

شبه معکوس یک ماتریس همیشه وجود دراد و منحصربفرد است. نشان می دهیم که SVD یک عبارت زیبا برای شبه معکوس فراهم می سازد. شبه معکوس A را با $A^\dagger$ نمایش داده و دارای خاصیت های زیر است :

۱) $AA^\dagger A = A$.

۲) $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$.

۳) $(AA^\dagger)^T = AA^\dagger$.

۴) $(A^\dagger A)^T = A^\dagger A$.

فرض کنید $A = U\Sigma V^T$، SVD ماتریس A باشد ؛ آنگاه $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T$ که در آن

$$\Sigma^\dagger = diag(\frac{۱}{\sigma_۱}, \frac{۱}{\sigma_۲}, ..., \frac{۱}{\sigma_r}, ۰, ..., ۰) \in R^{m\times n},$$

قضیه تیلور

یک قضیه بسیار مهم در رابطه با توابع $C^n[a,b]$ قضیه تیلور است که در سرتاسر مطالعه آنالیز عددی مطرح می شود.

قضیه ۱.۶.۴. قضیه تیلور با باقیمانده لاگرانژ: اگر $f \in C^n[a,b]$ و اگر $f^{(n+1)}$ بر روی (a,b) وجود داشته باشد، آنگاه برای هر دو نقطه c و x در $[a,b]$ داریم

$$f(x) = \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k!} f^k(c)(x-c)^k + E_n(x), \qquad (۲۰.۱)$$

که در آن، به ازای نقطه ای مانند ξ بین x و c داریم

$$E_n(x) = \frac{۱}{(n+۱)!} f^{(n+۱)}(\xi)(x-c)^{n+۱},$$

قضیه ۱.۶.۵. قضیه تیلور دو متغیره : اگر $f \in C^{n+1}([a,b] \times [c,d])$ آنگاه برای هر دو نقطه $x+h$ و $y+k$ در $[a,b] \times [c,d] \subseteq R^{2}$ داریم

$$f(x+h,y+k) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{1}{\partial y})^{i} f(x,y) + E_n(h,k), \qquad (۲۱.۱)$$

$$E_n(h,k) = \frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{1}{\partial y})^{n+1} f(x+\theta h, y+\theta k),$$

که در آن θ عددی بین ۰ و ۱ می باشد.

تعریف ۱.۶.۶. فرض کنید u_i^j جواب واقعی یک معادله تفاضلی (یک طرح) باشد و $\tilde{u}_i^j$ جواب محاسبه شده در نقطه (x_i, t_j) باشد به دلیل وجود خطای گرد کردن در هر ردیف از زمانی ممکن است پیش آید که u_i^j با $\tilde{u}_i^j$ برابر نیستند. قرار می دهیم $e_i^j = u_i^j - \tilde{u}_i^j$. گفته می شود طرح پایدار است هرگاه وقتی $i,j \longrightarrow \infty$ آنگاه $|e_i^j| \leq k$ که در آن k ثابت باشد.

تجزیه و تحلیل پایداری (روش فوریه)

مسئله پایداری در روش های عددی معادلات دیفرانسیل جزئی تقریباً در همه مسائل پیش می آید که شامل متغیر زمان به عنوان یک متغیر مستقل هستند. این طبیعی است چون ممکن است جواب روی بازه های طولانی مد نظر باشد. روشی که به روش فون - نویمان[۵۲] منصوب است می توان روش فوریه نامیده شود. در این روش سعی می کنیم یک جواب معادلات تفاضل متناهی را که دارای شکل زیر است بیابیم

$$u_j^n = \exp(ij\beta h)\exp(n\lambda k), \qquad i = \sqrt{-1},$$

(در اینجا از j برای اولین زیر نویس و از i برای عدد مختلط $\sqrt{-1}$ استفاده می کنیم.) رفتار این جواب وقتی که $t \longrightarrow +\infty$ یا $n \longrightarrow +\infty$ مورد آزمن قرار می گیرد. بوضوح این موضوع بستگی به عامل $\exp(n\lambda k)$ دارد. اگر $|\exp(\lambda k)| > 1$ آنگاه این جواب بیکران است. در غیر این صورت دارای جواب می باشد.

[۵۲] Von-Neumann Stability

فصل ۲

حل معادله برگرز به کمک توابع B – اسپلاین

ارتجاعی[۱۰] و ...دارد. معادله برگرز بصورت دقیق برای شرایط اولیه و مرزی دلخواه حل شده است [۳]-[۵]. بعضی از جواب ها دارای جواب سری هستند. توابع اسپلاین انتگرال و مشتق پذیر هستند که منجر به توابع تکه ای می شوند و چون آنها پایه هایی با محمل کوچک دارند، بسیاری از انتگرال هایی که در روش های عددی ایجاد می شوند صفر هستند. بنابراین توابع اسپلاین با روش های عددی برای بدست آوردن جواب معادله دیفرانسیل مناسب است.

روش های عددی با توابع اسپلاین در بدست آوردن جواب عددی منجر به ماتریس های نواری[۱۱] می شود که به آسانی قابل حل هستند. جواب اسپلاین معادله برگرز در بسیاری از مطالعات انجام شده است. برای مثال روش کالوکیشن اسپلاین مکعبی برای معادله برگرز یک بعدی در مقالات [۶]-[۸]، و طرح تفاضلات متناهی ضمنی[۱۲] برای حل عددی معادله برگرز با استفاده از درونیابی مکعبی توسط جین و همکارانش[۱۳][۹]-[۱۰] و روش گالرکین[۱۴] در مقالات [۱۱]-[۱۲] پیشنهاد شده است. در این فصل موفقیت B - اسپلاین مرتبه چهار در روش کالوکیشن توسط مقایسه با نتایج قبلی شرح می دهیم[۱۳].

۳.۲ روش کالوکیشن B - اسپلاین مرتبه ۴ (QBCM۱)

معادله برگرز بصورت زیر است

$$U_t + UU_x - vU_{xx} = ۰, \qquad (۱.۲)$$

[۱۰] Elasticity

[۱۱] Band matrices

[۱۲] Implicit finite difference schemes

[۱۳] Jain et al.

[۱۴] Galerkin method

که در آن v ضریب ثابتی است که ضریب گرانروی (لزجت) ایستایی[۱۵] نامیده می شود.

در مثال های عددی شرایط مرزی[۱۶] از شرایط زیر انتخاب می شوند:

$$U(a,t)=\beta_1, \quad U(b,t)=\beta_2,$$

$$U_x(a,t)=U_x(b,t)=U_{xx}(a,t)=U_{xx}(b,t)=0, \qquad (2.2)$$

و شرایط اولیه[۱۷] در قسمت محاسباتی گفته می شود. دامنه جواب $[a,b]$ به عناصر متناهی با طول گام h توسط گره های x_m افراز بندی می شوند:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b, \qquad h=x_{i+1}-x_i, \qquad i=0,1,\ldots,N-1,$$

روی این افراز توابع B - اسپلاین مرتبه ۴ به صورت زیر بیان می شوند

$$Q_m(x)=\frac{1}{h^4}\begin{cases}(x-x_{m-2})^4 & x\in[x_{m-2},x_{m-1}],\\ (x-x_{m-2})^4-5(x-x_{m-1})^4 & x\in[x_{m-1},x_m],\\ (x-x_{m-2})^4-5(x-x_{m-1})^4+10(x-x_m)^4 & x\in[x_m,x_{m+1}],\\ (x_{m+3}-x)^4-5(x_{m+2}-x)^4 & x\in[x_{m+1},x_{m+2}],\\ (x_{m+3}-x)^4 & x\in[x_{m+2}x_{m+3}],\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases} \qquad (3.2)$$

مجموعه B - اسپلاین های مرتبه چهار $Q_m(x)$، $m=-2,-1,\ldots,N+1$ یک پایه روی ناحیه $a\le x\le b$ تشکیل می دهند[۱۴]. بنابراین تقریب U_N را میتوان به صورت ترکیب خطی از B - اسپلاین ها بنویسیم

$$U_N(x)=\sum_{m=-2}^{N+1}\delta_m(t)Q_m(x), \qquad (4.2)$$

در این جواب تقریبی $\delta_m(t)$ پارامتری است که به زمان بستگی دارد. مقدار U و سه مشتق

[۱۵] KinematicsViscosity

[۱۶] Boundary Conditions

[۱۷] Initial Condition

اصلی آن را در گره x_m بصورت زیر بدست می آوریم:

$$
\begin{aligned}
U_m &= U(x_m) = \delta_{m-۲} + ۱۱\delta_{m-۱} + ۱۱\delta_m + \delta m + ۱,\\
U'_m &= U'(x_m) = \frac{۴}{h}(-\delta_{m-۲} - ۳\delta_{m-۱} + ۳\delta_m + \delta m + ۱),\\
U''_m &= U''(x_m) = \frac{۱۲}{h^۲}(\delta_{m-۲} - \delta_{m-۱} - \delta_m + \delta m + ۱),\\
U'''_m &= U'''(x_m) = \frac{۲۴}{h^۳}(-\delta_{m-۲} + ۳\delta_{m-۱} - ۳\delta_m + \delta m + ۱).
\end{aligned} \tag{۵.۲}
$$

اگر جواب تقریبی (۴.۲) و مشتق های مورد نیاز آن در (۵.۲) را در معادله (۱.۲) قرار دهیم، یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول بصورت زیر بدست می آوریم

$$
\delta^{\circ}_{m-۲} + ۱۱\delta^{\circ}_{m-۱} + ۱۱\delta^{\circ}_m + \delta^{\circ}_{m+۱} + \frac{۴z_m}{h}(-\delta_{m-۲} - ۳\delta_{m-۱} + ۳\delta_m + \delta_{m+۱})
$$

$$
-\frac{۱۲v}{h^۲}(\delta_{m-۲} - \delta_{m-۱} - \delta_m + \delta_{m+۱}) = ۰, \tag{۶.۲}
$$

که در آن ۰ مشتق نسبت زمان است و $z_m = \delta_{m-۲} + ۱۱\delta_{m-۱} + ۱۱\delta_m + \delta_{m+۱}$.

روند حل را با جدا سازی سیستم (۶.۲) در زمان ادامه می دهیم. اگر پارامتر زمان δ_m و مشتق آن در (۶.۲) توسط قانون کرانک نیکلسون[۱۸] و قانون تفاضلات متناهی[۱۹] جدا سازی کنیم، داریم:

$$
\delta_m = \frac{\delta^{n+۱}_m + \delta^n_m}{۲}, \qquad \delta^{\circ}_m = \frac{\delta^{n+۱}_m - \delta^n_m}{\Delta t},. \tag{۷.۲}
$$

یک رابطه بازگشتی بین دو مرحله متوالی n و $n+۱$ زمان مربوط به پارامترهای مجهول متوالی $\delta^{n+۱}_i$، δ^n_i و $i = m-۲, ..., m+۱$ بدست می آیند

$$
\alpha_{m۱}\delta^{n+۱}_{m-۲} + \alpha_{m۲}\delta^{n+۱}_{m-۱} + \alpha_{m۳}\delta^{n+۱}_m + \alpha_{m۴}\delta^{n+۱}_{m+۱} =
$$

[۱۸] Crank-Nicholson Rule

[۱۹] Forward Difference Rule

$$\alpha_{m5}\delta^n_{m-2}+\alpha_{m6}\delta^n_{m-1}+\alpha_{m7}\delta^n_m+\alpha_{m8}\delta^n_{m+1}, \tag{8.2}$$

که در آن

$$\alpha_{m1}=h^3-2h^2\Delta t z_m-6vh\Delta t, \qquad \alpha_{m2}=11h^3-6h^2\Delta t z_m+6vh\Delta t,$$

$$\alpha_{m3}=11h^3+6h^2\Delta t z_m+6vh\Delta t, \qquad \alpha_{m4}=h^3+2h^2\Delta t-66vh\Delta t,$$

$$\alpha_{m5}=h^3+2h^2\Delta t z_m+6vh\Delta t, \qquad \alpha_{m6}=11h^3+6h^2\Delta t z_m-66vh\Delta t,$$

$$\alpha_{m7}=11h^3-2h^2\Delta t z_m+66vh\Delta t, \qquad \alpha_{m8}=h^3-6h^2\Delta t z_m-66vh\Delta t.$$

سیستم جبری غیر خطی بالادارای $N+1$ معادله و $N+4$ پارامتر مجهول می باشد که قابل حل با انتخاب شرایط مرزی از معادلات (۲.۲) می باشد. این شرایط قادر هستند که پارامترهای δ_{-1}، δ_{-2} و δ_{N+1} را از دستگاه حذف کنند. بعد سیستم ماتریس نتیجه $(N+1)\times(N+1)$ است که قبل از شروع فرایند حل بازگشتی، باید پارامترهای اولیه δ^0_m توسط شرایط اولیه و مرزی تعیین شوند:

$$\begin{aligned}
(U(a,t))_x &= U'(a,0)=\frac{4}{h}(\delta_1+3\delta_0-3\delta_{-1}-\delta_{-2}),\\
U(a,t)_{xx} &= U''(a,0)=\frac{12}{h^2}(\delta_{-2}-\delta_{-1}-\delta_0+\delta_1),\\
U_N(x_i,0) &= f_0(x)=\delta_{i-2}+11\delta_{i-1}+11\delta_i+\delta_{i+1}, \quad i=0,1,\dots,N, \qquad (9.2)\\
(U(b,t))_{xx} &= U'(b,0)=\delta_{N-2}+11\delta_{N-1}+11\delta_N+\delta_{N+1}.
\end{aligned}$$

برای رفع غیرخطی بودن سیستم، پارامتر غیرخطی z_m توسط استفاده از پارامتر مرحله nام خطی می شود. پایداری طرح تفاضلی توسط روش پایداری فوریه بررسی می شود. جمله غیرخطی UU_x توسط گرفتن U بعنوان یک ثابت، خطی کرد. روش فوریه، $\delta^n_m=q^ne^{im\varphi}$ را

در فرم خطی معادله (۸.۲) جایگذاری می کنیم و بدست می آوریم

$$q = \frac{a+ib}{c+id},$$

که در آن

$$a = \alpha_{m5}\cos 2\phi + (\alpha_{m6}+\alpha_{m8})\cos\phi + \alpha_{m7},$$

$$b = -\alpha_{m5}\sin 2\phi - (\alpha_{m6}-\alpha_{m8})\sin\phi,$$

$$c = \alpha_{m1}\cos 2\phi + (\alpha_{m2}+\alpha_{m4})\cos\phi + \alpha_{m3},$$

$$d = -\alpha_{m1}\sin 2\phi - (\alpha_{m2}-\alpha_{m4})\sin\phi,$$

شرط ثبات $|q| < 1$ در نامساوی زیر صدق می کند،

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = -192vh^4\Delta t sin^2\phi(cos\phi + 5) \leq 0,$$

بنابراین طرح تفاضلی (۸.۲) بدون قید و شرط پایدار است.

۴.۲ روش دوم کالوکیشن B - اسپلاین مرتبه چهار (QBCN۲)

معادله (۱.۲) را به دو معادله تفکیک می کنیم:

$$U_t + 2UU_x = 0, \quad (۱۰.۲)$$

$$U_t - 2vU_{xx} = 0, \quad (۱۱.۲)$$

یکبار دیگر گره ها را بعنوان نقاط کالوکیشن روی دامنه مسئله در نظر می گیریم. با جایگذاری معادله (۴.۲) و مشتقات مورد نیازش در معادلات (۱۰.۲) و (۱۱.۲) به دو دستگاه معادله مرتبه اول زیر می رسیم:

$$\delta^{\circ}_{m-2} + 11\delta^{\circ}_{m-1} + 11\delta^{\circ}_{m} + \delta^{\circ}_{m+1} + \frac{8z_m}{h}(-\delta_{m-2} - 3\delta_{m-1} + 3\delta_m + \delta_{m+1}) = 0, \quad (۱۲.۲)$$

$$\delta^{\circ}_{m-2} + 11\delta^{\circ}_{m-1} + 11\delta^{\circ}_{m} + \delta^{\circ}_{m+1} - \frac{24v}{h^2}(\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1}) = 0, \qquad (۱۳.۲)$$

که در آن $\circ$ مشتق نسبت زمان است و $z_m = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}$.

پارامتر زمان در معادله (۱۲.۲) توسط درونیابی فرمول کرانک نیکلسون و مشتق آن توسط تفاضلات متناهی بصورت زیر تقریب زده می شود:

$$\delta_m = \frac{\delta^n_m + \delta^{n+\frac{1}{2}}_m}{2}, \qquad \delta^{\circ}_m = \frac{\delta^{n+\frac{1}{2}}_m - \delta^n_m}{2}. \qquad (۱۴.۲)$$

معادله (۱۲.۲) را میتوان بصورت زیر میتوان نوشت

$$\alpha_1\delta^{n+\frac{1}{2}}_{m-2} + \alpha_2\delta^{n+\frac{1}{2}}_{m-1} + \alpha_3\delta^{n+\frac{1}{2}}_{m} + \alpha_4\delta^{n+\frac{1}{2}}_{m+1} = \alpha_4\delta^n_{m-2} + \alpha_3\delta^n_{m-1} + \alpha_2\delta^n_m + \alpha_1\delta^n_{m+1}, \qquad (۱۵.۲)$$

که در آن

$$\alpha_1 = h^3 - 2h^2\Delta t z_m, \qquad \alpha_2 = 11h^3 - 6h^2\Delta t z_m,$$

$$\alpha_3 = 11h^3 + 6h^2\Delta t z_m, \qquad \alpha_4 = h^3 + 2h^2\Delta t z_m,$$

بطور مشابه، پارامتر زمان δ_m توسط کرانک نیکلسون و مشتق پارامتر زمان δ°_m توسط تفاضلات پیشرو در مرحله های زمانی $n+\frac{1}{2}$ و $n+1$ تقریب می زنیم:

$$\delta_m = \frac{\delta^{n+1}_m + \delta^{n+\frac{1}{2}}_m}{2}, \qquad \delta^{\circ}_m = \frac{\delta^{n+1}_m - \delta^{n+\frac{1}{2}}_m}{\Delta t}, \qquad (۱۶.۲)$$

معادله (۱۳.۲) بصورت زیر تقریب زده می شود

$$\alpha_5\delta^{n+1}_{m-2} + \alpha_6\delta^{n+1}_{m-1} + \alpha_6\delta^{n+1}_{m} + \alpha_5\delta^{n+1}_{m+1} =$$

$$\alpha_7\delta^{n+\frac{1}{2}}_{m-2} + \alpha_8\delta^{n+\frac{1}{2}}_{m-1} + \alpha_8\delta^{n+\frac{1}{2}}_{m} + \alpha_7\delta^{n+\frac{1}{2}}_{m+1}, \qquad (۱۷.۲)$$

که در آن

$\alpha_5 = h^3 - 6vh\Delta t, \qquad \alpha_6 = 11h^3 + 6vh\Delta t,$

$\alpha_7 = h^3 + 6vh\Delta t, \qquad \alpha_8 = 11h^3 - 6vh\Delta t.$

معادله های (۱۵.۲) و (۱۷.۲) تقریب تفاضلی متناهی ضمنی[20] معادله برگرز را تشکیل می دهند. این معادلات منجر به یک دستگاه جبری می شود که در هر گام از زمان حل می شود. پدیده غیر خطی معادله (۱۵.۲) را با در نظر گرفتن پارامتر زمان در مرحله n ام حذف می کنیم. جواب یکتایی از دستگاه معادلات با $N+4$ مجهول و $N+1$ معادله با به کاربردن شرایط مرزی بدست می آید. این شرایط مرزی برای حذف پارامترهای δ_{-1}^n، δ_{-2}^n و δ_{N+1} استفاده می شود. دستگاه ماتریسی ۴ قطری $N+1$ پارامتر در $N+1$ معادله را توسط الگوریتم های متفاوتی میتوان حل کرد. قبل از فرایند تکرار الگوریتم، پارامتر اولیه δ_m^0 را میتوان با توجه به شرط اولیه و شرایط مرزی تعیین نمود. بعد از اینکه تقریب اولیه δ^0 تعیین شد، جواب پارامترهای $\delta_i^{n+\frac{1}{2}}$ در معادله (۱۵.۲) پیدا می کنیم و این جواب پارامترها را در معادله (۱۷.۲) برای بدست آوردن δ_i^{n+1} را در هر مرحله زمانی جایگذاری می کنیم. مقادیر گره ها و مشتقاتشان را از معادله (۵.۲) میتوان یافت.

آنالیز پایداری را با بکار بردن روش پایداری فوریه برای دستگاه (۱۵.۲) بررسی می کنیم. جمله غیر خطی UU_x با ثابت دانستن U خطی می شود. در روش فوریه، $\delta_m^n = q^n e^{im\phi}$ را در شکل خطی معادله (۱۵.۲) قرار می دهیم و بدست می آوریم

$$q = \frac{a+ib}{c+id}$$

که در آن

$a = \alpha_4 \cos 2\phi + (\alpha_3 + \alpha_1)\cos\phi + \alpha_2$

[20] Implicit Finite Difference Approximation

$b = -\alpha_4 \sin 2\phi - (\alpha_3 - \alpha_1)\sin\phi$

$c = \alpha_1 \cos 2\phi + (\alpha_2 + \alpha_4)\cos\phi + \alpha_3$

$d = -\alpha_1 \sin 2\phi - (\alpha_2 - \alpha_4)\sin\phi$

در نتیجه $|q| = 1$ و طرح تفاضلی معادله (۱۵.۲) بدون هیچ قید و شرطی پایدار است. با روشی مشابه میتوان نشان داد که طرح تفاضلی معادله (۱۷.۲) نیز بدون هیچ شرطی پایدار است.

۵.۲ مثال های عددی

کارایی الگوریتم ارائه شده توسط مطالعه ۳ مثال نشان داده می شود. خطا توسط خطای میانگین مربع L_2 و خطای ماکزیمم L_∞ و نرم وزن دار e_1 اندازه گیری می شود:

$$L_2 = |U - U_N|^2 = h\sum_{j=0}^{N} |(U_j - (U_N)_j^n)^2|, \quad L_\infty = \max_j |U_j - (U_N)_j^n|,$$
$$|e|_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} \frac{|U_j - (U_N)_j^n|}{|U_j|}$$

نرم خطای L_2 و L_∞ برای مثال های (۱.۵.۵)و (۲.۵.۵) محاسبه می شود و با نتایج ارجاعی[۱۵]-[۱۷] مقایسه می شود.

نرم خطای L_∞ و $|e|_1$ برای مثال (۳.۵.۵) محاسبه می شود و با نتایج ارجاعی [۱۷]-[۲۳]مقایسه می شود.

مثال ۱.۵.۲. یک جواب تحلیلی مشهور از معادله برگرز[۲۴] بصورت زیر است:

$$U(x,t) = \frac{x/t}{1 + sqrt(t/t_0)\exp(x^2/(4vt))}, \quad t \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad (18.2)$$

که در آن $t_0 = \exp(1/(8v))$. شرط اولیه با قرار دادن $t = 1$ در معادله (۱۸.۲) بدست می آید و شرایط مرزی عبارتند از: $U(0,t) = U_x(0,t) = U(1,t) = 0$. انتشار شوک با پارامتر

جدول ۲.۱: مقایسه نتایج در زمان های متفاوت برای $\Delta t =$ ۰/۰۱

	$L_۲ \times ۱۰^۴$	$L_\infty \times ۱۰^۳$	$L_۲ \times ۱۰^۳$	$L_\infty \times ۱۰^۴$	$L_۲ \times ۱۰^۳$	$L_\infty \times ۱۰^۳$
$h =$ ۰/۰۰۵, $v =$ ۰/۰۰۵	$t =$ ۱/۷	$t =$ ۱/۷	$t =$ ۲/۴	$t =$ ۲/۴	$t =$ ۳/۱	$t =$ ۳/۱
$QBCM۱$	۰/۰۱۷۰۵	۰/۰۶۱۹۲	۰/۰۱۲۵۲	۰/۰۵۸۸۲	۰/۶۰۱۹۹	۴/۴۳۴۶۹
$QBCM۲$	۰/۳۵۸۹۱	۱/۲۱۱۷۰	۰/۲۵۱۳۲	۰/۸۰۷۷۷	۰/۶۳۰۵۲	۴/۷۹۰۶۱
$Ref.$[۱۷]	۰/۳۵۱۲۶	۱/۲۰۷۲۶	۰/۲۴۴۴۸	۰/۸۰۱۷۶	۰/۶۳۳۳۵	۴/۷۹۰۶۱
$Ref.$[۱۶]	۰/۳۵۱۳۳	۱/۲۰۷۵۵	۰/۲۴۴۵۱	۰/۸۰۱۸۷	۰/۶۳۳۳۵	۴/۷۹۰۶۱
$Ref.$[۱۵]	۰/۸۵۷	۲/۵۷۶	۰.۴۲۳	۱/۲۴۲	۰/۲۳۵	۰/۶۸۸
$h =$ ۰/۰۲, $v =$ ۰/۰۰۵	$t =$ ۱/۸	$t =$ ۱/۸	$t =$ ۲/۴	$t =$ ۲/۴	$t =$ ۳/۲	$t =$ ۳/۲
$QBCM۱$	۰/۱۹۱۲۷	۰/۵۴۰۵۸	۰/۱۴۲۴۶	۰/۳۹۲۴۱	۰/۹۳۶۱۷	۵.۵۴۸۹۹
$QBCM۲$	۰/۴۹۱۳۰	۱/۱۶۹۳۰	۰/۴۱۸۶۴	۰/۹۳۶۶۴	۱.۲۸۸۶۳	۷.۴۹۱۴۷
$Ref.$[۱۶]	۰/۶۸۷۶۱	۲.۴۷۱۸۹	۰/۶۷۹۴۳	۲.۱۶۷۸۴	۱.۴۸۵۵۹	۷.۴۹۱۴۶
$h =$ ۰/۰۲, $v =$ ۰/۰۱	$t =$ ۱/۸	$t =$ ۱/۸	$t =$ ۲/۴	$t =$ ۲/۴	$t =$ ۳/۲	$t =$ ۳/۲
$QBCM۱$	۰/۱۷۰۱۴	۰/۴۰۴۳۱	۰/۲۰۴۷۶	۰/۸۶۳۶۳	۱.۲۹۹۵۱	۶.۶۹۴۲۵
$QBCM۲$	۰/۲۴۰۰۳	۰/۴۸۸۰۰	۰/۳۰۸۴۹	۱/۱۴۷۶۰	۱.۵۷۵۴۸	۸/۰۶۷۹۹
$Ref.$[۱۶]	۰/۶۹۹۱۰	۳.۱۳۴۷۶	۰/۷۲۹۷۶	۲.۶۶۹۸۶	۱/۷۴۵۷۰	۸/۰۶۷۹۸

مثال ۲.۵.۲. دومین مسئله نمونه از معادله برگرز دارای جواب تحلیلی زیر است:

$$U(x,t) = \frac{\alpha + \mu + (\mu - \alpha)\exp\eta}{۱ + \exp\eta}, \quad ۰ \leq x \leq ۱, \quad t \geq ۰, \qquad (۲.۱۹)$$

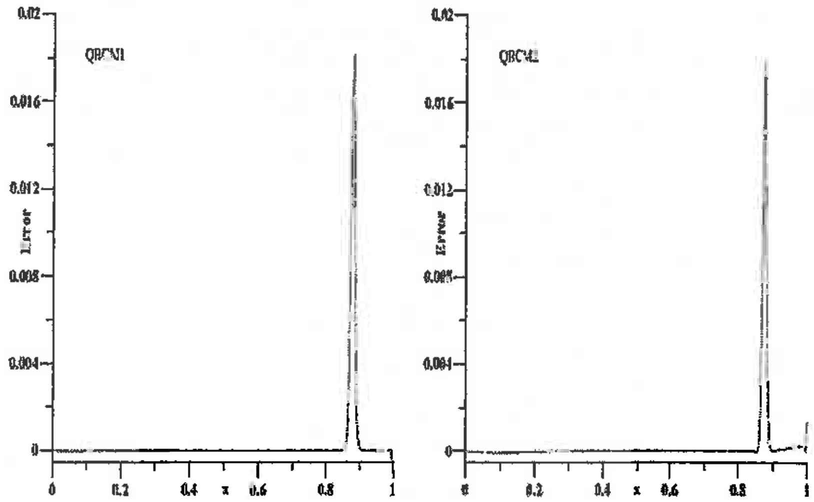
که در آن

$$\eta = \frac{\alpha(x - \mu t - \gamma)}{v},$$

α، μ و γ ثابت هستند، که در این مثال $\alpha =$ ۰/۴، $\mu =$ ۰/۶ و $\gamma =$ ۰/۱۲۵ است. شرط اولیه را از قرار دادن $t =$ ۰ در معادله بدست می آوریم و شرایط مرزی عبارتند از: $U(۰,t) =$ ۱ ، $U(۱,t) =$ ۰/۲ و $U_x(۰,t) =$ ۰ $\quad t \geq$ ۰ .

گام زمانی $\Delta t =$ ۰/۰۱، گام مکانی $h = \frac{۱}{۳۶}$ و ضریب گرانروی $v =$ ۰/۰۱ در نظر می گیریم و نتایج بدست آمده از $t =$ ۰/۵ در جدول (۲.۲) ذکر شده است. QBCM۱ دقت بهتری نسبت به QBCM۲ فراهم می کند. جواب عددی بدست آمده از روش حاضر نتایج

[۲۱] Finite Galerkin Method

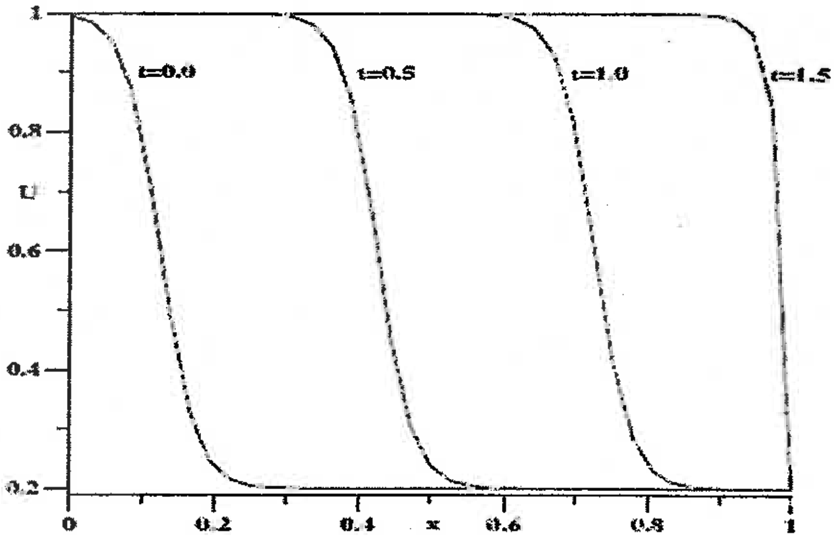


شکل ۲.۲: خطا (جواب تحلیلی - تقریبی) برای $v = ۰/۰۰۰۵$ در $t = ۳/۱$.

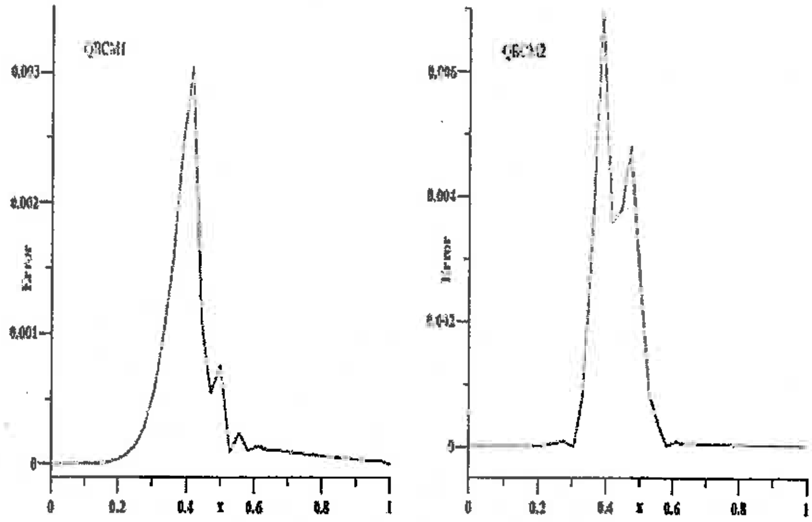
رضایت بخشی می دهد آنچنانچکه به واسطه نرم خطای $L_۲$ و L_∞ تصدیق می شود. پروفایل موج اولیه و انتشار آن در برخی از زمان ها در شکل (۳.۲) به تصویر کشیده شده است. جواب بدست آمده با روش حاضر تایید خوبی بر نتایج بدست آمده از مطالعات قبلی است. خطا بین جواب تحلیلی و جواب تقریبی در زمان $t = ۰/۵$ در شکل (۴.۲) به تصویر کشیده شده است.

جدول ۲.۲: مقایسه نتایج در زمان $t = ۰/۵$ برای $v = ۰/۰۱$ به ازای $h = ۱/۳۶$ و $\Delta t = ۰/۰۱$.

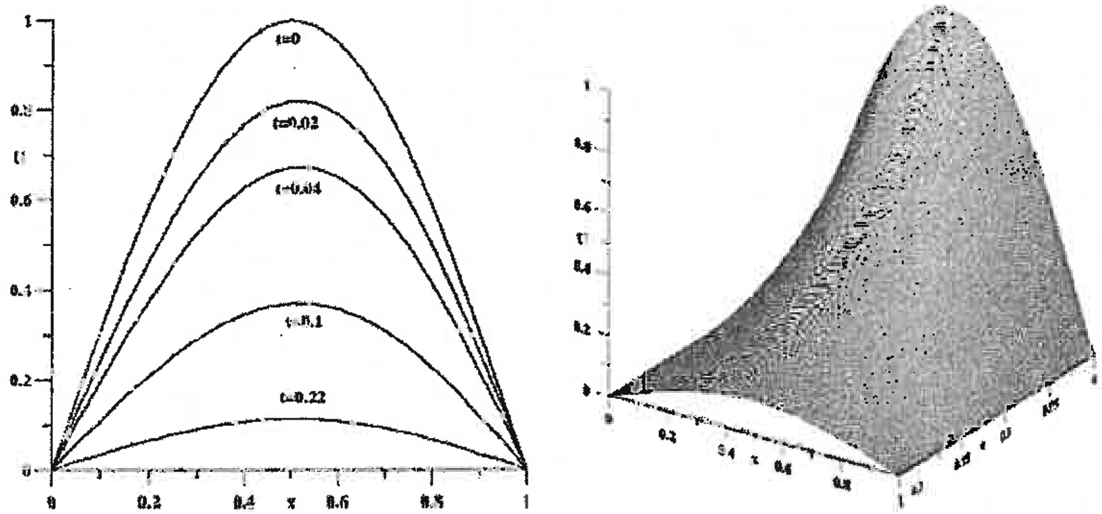
	QBCM۱	QBCM۲
$L_۲ \times ۱۰^۳$	۰/۷۷۰۳۳	۱.۸۱۹۵
$L_۲ \times ۱۰^۳$[۱۷]	۱.۹۲۵۵۸	
$L_۲ \times ۱۰^۳$[۱۶]	۱/۷۳۱۰۶	
$L_\infty \times ۱۰^۳$	۳/۰۳۸۱۷	۶/۹۴۰۱۵
$L_\infty \times ۱۰^۳$[۱۷]	۶.۳۵۴۸۹	
$L_\infty \times ۱۰^۳$[۱۶]	۵.۴۸۸۹۲	



شکل ۳.۲: $v = ۰/۰۱, h = ۱/۳۶, \Delta t = ۰/۰۱.$



شکل ۴.۲: خطا(جواب تحلیلی - تقریبی) در زمان $t = ۰/۵$



شکل ۵.۲: $h = ۰/۰۵, \Delta t = ۰/۰۱, v = ۱$

مثال ۳.۵.۲. معادله برگرز را با شرط اولیه

$$U(x,۰) = \sin(\pi x), \quad ۰ \leq x \leq ۱, \tag{۲۰.۲}$$

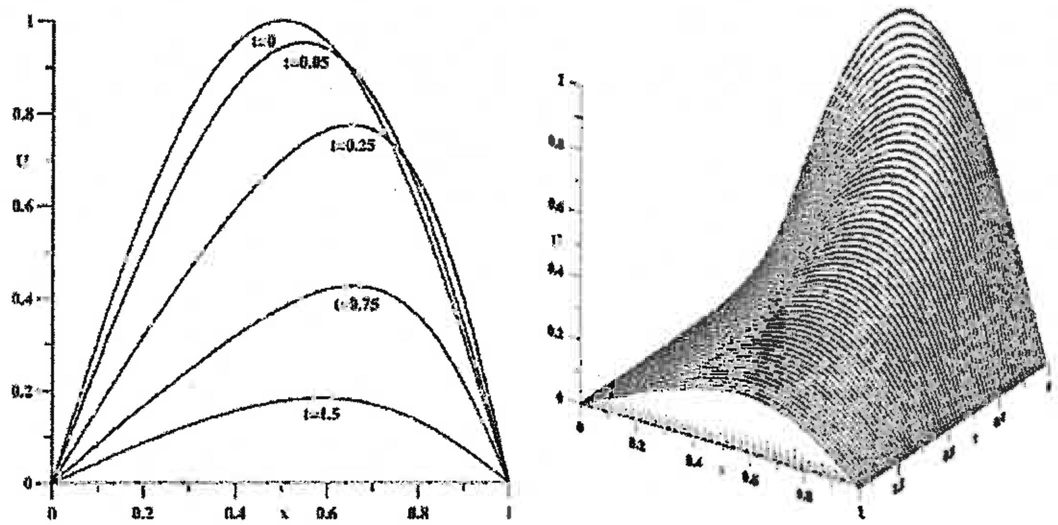
و شرایط مرزی

$$U(۰,t) = U_x(۰,t) = U(۱,t) = ۰, \quad t \geq ۰, \tag{۲۱.۲}$$

در نظر می گیریم. جواب تحلیلی مساله بصورت زیر است

$$U(x,t) = \frac{۴\pi v \sum_{j=۱}^{\infty} j I_j(\frac{۱}{۲\pi v}) \sin(j\pi x) \exp(-j^۲\pi^۲ vt)}{I_۰(\frac{۱}{۲\pi v}) + ۲\sum_{j=۱}^{\infty} I_j(\frac{۱}{۲\pi v}) \cos(j\pi x) \exp(-j^۲\pi^۲ vt)} \tag{۲۲.۲}$$

که در آن I_j توابع بسل اصلاح شده است. این مسئله شامل فروپاشی اختلال سینوسی در جهت زمان است. برای مقایسه با برخی از نتایج قبلی، برنامه با پارامترهای مختلف اجرا می شود. حل عددی معادله برگرز در مقالات با الگوریتم حاضر مقایسه می شود. نرم L_∞ را در جدول (۳.۲) و نرم $|e_۱|$ در جدول (۴.۲) ارائه می دهیم. جواب گرافیکی به ازای $v = ۱, ۰/۱$ در شکل های (۵.۲) و (۶.۲) برای هر دو روش به تصویر کشیده شده است.



شکل ۶.۲: $h = \Delta t = ۰/۰۲۵, v = ۰/۱$

جدول ۳.۲: مقایسه خطای نرم L_∞ جواب های عددی

	t	v	$QBCM۱$	$QBCM۲$	$Ref.[۱۸]$	$Ref.[۱۹]$
۰/۰۲	۱/۰	$۲/۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۳۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۵/۱۹ \times ۱۰^{-۳}$		
۰/۰۴		$۳/۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۶۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۶/۹۱ \times ۱۰^{-۳}$		
۰/۱۰		$۳/۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۴۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۸/۱۷ \times ۱۰^{-۳}$		
۰/۲۲		$۲/۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۶۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۵۰ \times ۱۰^{-۳}$		
۰/۰۵	۰/۱	$۸/۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۰۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۹۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۶/۱۴ \times ۱۰^{-۴}$	
۰/۲۵		$۱/۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۱۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۹/۰۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۷/۶۳ \times ۱۰^{-۴}$	
۰/۷۵		$۴/۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۶/۶۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۹۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۶۶ \times ۱۰^{-۴}$	
1.5		$۳/۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۴۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۲۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۷/۷۰ \times ۱۰^{-۵}$	
۰/۴	۰/۰۱	$۸/۸ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۲۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۲/۶۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۳/۲۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۶ \times ۱۰^{-۲}$
۰/۸		$۱/۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۵/۶۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۸۸ \times ۱۰^{-۲}$	$۵/۹۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۶ \times ۱۰^{-۲}$
1.۲		$۸/۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۱۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۷۷ \times ۱۰^{-۲}$	$۱/۲۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۸/۰ \times ۱۰^{-۳}$
۳/۰		$۱/۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۵۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۶/۹۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۵۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۵ \times ۱۰^{-۵}$

۶.۲ روش کالوکیشن B - اسپلاین مرتبه ۷

شبکه $a = x_۰ < x_۱ < ... < x_N = b$، بعنوان یک افراز یکنواخت از دامنه جواب $a \le x \le b$ توسط گره های x_j و $j = -۳, -۲, -۱, ۰, ..., N, N+۱, N+۲, N+۳$ که در آن $h = x_{j+1} - x_j$

جدول ۴.۲: نتایج در $t = ۰/۱$ برای $v = ۱, \Delta t = ۱۰^{-۵}$ نرم $|e|_۱$

	$h = ۰/۱$	$h = ۰/۰۵$	$h = ۰/۰۲۵$	$h = ۰/۰۱۲۵$	$h = ۰/۰۰۶۲۵$
$QBCM۱$	۰/۰۰۱۷۴	۰/۰۰۰۲۹	۰/۰۰۰۰۵	۰/۰۰۰۱۴	۰/۰۰۰۱۶
$QBCM۲$	۰/۰۰۱۷۷	۰/۰۰۰۴۱	۰/۰۰۰۰۶	۰/۰۰۰۱۳	۰/۰۰۰۱۶
$Ref[۱۷]$	۰/۰۰۰۶۳۵	۰/۰۰۰۰۸۵	۰/۰۰۰۰۲۴	۰/۰۰۰۰۰۶	۰/۰۰۰۰۰۶
$Ref[۲۱]$	۰/۰۰۷۵۷۱	۰/۰۰۲۰۲۵	۰/۰۰۰۵۵۵	۰/۰۰۰۱۷۷	
$Ref[۲۲]$	۰/۰۱۲۱۶۵	۰/۰۰۶۹۴۱	۰/۰۰۳۶۵۱	۰/۰۰۱۸۵۸	۰/۰۰۰۹۲۸
$Ref[۲۳]$	۰/۰۰۷۳۴	۰/۰۰۰۹۵	۰/۰۰۰۱۴	۰/۰۰۰۰۳	۰/۰۰۰۰۱

در نظر می گیریم.

فرض کنید تابع B - اسپلاین مرتبه ۷ در گره های شبکه به صورت زیر باشد:

$$\phi_m(x) = \frac{۱}{h^۷}\begin{cases} (x-x_{m-۴})^۷ & x \in [x_{m-۴}, x_{m-۳}], \\ (x-x_{m-۴})^۷ - ۸(x-x_{m-۳})^۷ & x \in [x_{m-۳}, x_{m-۲}], \\ (x-x_{m-۴})^۷ - ۸(x-x_{m-۳})^۷ + ۲۸(x-x_{m-۲})^۷ & x \in [x_{m-۲}, x_{m-۱}], \\ (x-x_{m-۴})^۷ - ۸(x-x_{m-۳})^۷ + ۲۸(x-x_{m-۲})^۷ - & \\ ۵۶(x-x_{m-۱})^۷ & x \in [x_{m-۱}, x_m], \\ (x_{m+۴}-x)^۷ - ۸(x_{m+۳}-x)^۷ + ۲۸(x_{m+۲}-x)^۷ - & \\ ۵۶(x_{m+۱}-x)^۷ & x \in [x_m, x_{m+۱}], \\ (x_{m+۴}-x)^۷ - ۸(x_{m+۳}-x)^۷ + ۲۸(x_{m+۲}-x)^۷ & x \in [x_{m+۱}, x_{m+۲}], \\ (x_{m+۴}-x)^۷ - ۸(x_{m+۳}-x)^۷ & x \in [x_{m+۲}, x_{m+۳}], \\ (x_{m+۴}-x)^۷ & x \in [x_{m+۳}, x_{m+۴}], \\ ۰ & \text{در غیر این صورت}, \end{cases}$$

که مجموعه اسپلاین های $\{\phi_{-۳}, \phi_{-۲}, \phi_{-۱}, \phi_۰, ..., \phi_N, \phi_{N+۱}, \phi_{N+۲}, \phi_{N+۳}\}$ یک پایه برای فضای جواب روی $a \le x \le b$ تشکیل می دهند. این بدین معنی است که مقادیر تابع B - اسپلاین مرتبه ۷ ومشتقات مرتبه اول، دوم و سوم بیرون بازه $[x_{m-۴}, x_{m+۴}]$ صفر می باشند. مقادیر B - اسپلاین مرتبه ۷ و مشتقات آن در نقاط گره ای در جدول (۵.۲) نشان داده شده است.

در حل عددی برای معادله (۱.۲) از روش کالوکیشن همراه با B - اسپلاین های مرتبه هفت استفاده می کنیم که به دنبال جواب تقریبی $U_N(x,t)$ از جواب دقیق $u(x,t)$ به فرم

$$U_N(x,t) = \sum_{m=-۳}^{N+۳} w_m(t)\phi_m(x), \qquad (۲۳.۲)$$

جدول ۵.۲: مقادیر ϕ_m، ϕ'_m، ϕ''_m و ϕ'''_m.

x	$x_{m+۴}$	$x_{m+۳}$	$x_{m+۲}$	$x_{m+۱}$	x_m	$x_{m-۱}$	$x_{m-۲}$	$x_{m-۳}$	$x_{m-۴}$
ϕ_i	۰	۱	۱۲۰	۱۱۹۱	۲۴۱۶	۱۱۹۱	۱۲۰	۱	۰
ϕ'_i	۰	$\frac{-۷}{h}$	$\frac{-۳۹۲}{h}$	$\frac{-۱۷۱۵}{h}$	۰	$\frac{۱۷۱۵}{h}$	$\frac{۳۹۲}{h}$	$\frac{۷}{h}$	۰
ϕ''_i	۰	$\frac{۴۲}{h^۲}$	$\frac{۱۰۰۸}{h^۲}$	$\frac{۶۳۰}{h^۲}$	$\frac{-۳۳۶۰}{h^۲}$	$\frac{۶۳۰}{h^۲}$	$\frac{۱۰۰۸}{h^۲}$	$\frac{۴۲}{h^۲}$	۰
ϕ'''_i	۰	$\frac{-۲۱۰}{h^۳}$	$\frac{-۱۶۸۰۰}{h^۳}$	$\frac{۳۹۹۰}{h^۳}$	۰	$\frac{-۳۹۹۰}{h^۳}$	$\frac{-۱۶۸۰}{h^۳}$	$\frac{-۲۱۰}{h^۳}$	۰

هستیم که در آن $w_m(t)$ مقادیر وابسته به زمان است که همراه با شرایط مرزی :

$$U_N(a,t) = \beta_۱, \quad U_N(b,t) = \beta_۲, \qquad (۲۴.۲)$$

$$(U_x)_N(a,t) = (U_x)_N(b,t) = ۰, \qquad (۲۵.۲)$$

$$(U_{xx})_N(a,t) = (U_{xx})_N(b,t) = ۰, \qquad (۲۶.۲)$$

و شرایط کالوکیشن

$$(U_t)_N(x_j,t) + U_N(x_j,t)(U_x)_N(x_j,t) - v(U_{xx})_N(x_j,t) = ۰, \qquad (۲۷.۲)$$

تعیین می شوند. معادله (۲۳.۲) را در معادله (۲۷.۲) جایگذاری می کنیم و معادله زیر را به دست می آوریم

$$\sum_{i=-۳}^{N+۳} \phi_i(x_j)\frac{dw_i(t)}{dt} + \sum_{i=-۳}^{N+۳} \phi'_i(x_j)w_i(t)[\sum_{i=-۳}^{N+۳} \phi_i(x_j)w_i(t)] - v\sum_{i=-۳}^{N+۳} \phi''_i(x_j)w_i(t) = ۰ \qquad (۲۸.۲)$$

که در آن $j = ۰, ۱, ..., N$.

فرض کنید که w_i بین دو مرحله زمانی n و $n+۱$ ام درونیابی خطی شده باشد

$$w_i = (۱-\theta)w_i^n + \theta w_i^{n+۱}, \qquad (۲۹.۲)$$

که در آن $۰ \leq \theta \leq ۱$ و w_j^n پارامتر زمان $n\Delta t$ است. از روش تفاضلات متناهی خواهیم داشت

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{w_i^{n+۱} - w_i^n}{\Delta t}, \qquad (۳۰.۲)$$

و از این رو معادله (۲۸.۲) را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\sum_{i=-3}^{N+3}\phi_i(x_j)\frac{w_i^{n+1}-w_i^n}{\Delta t}+\sum_{i=-3}^{N+3}\phi_i'(x_j)(1-\theta)w_i^n+\theta w_i^{n+1}.[\sum_{i=-3}^{N+3}\phi_i(x_j)w_i(t)]-v$$

$$\sum_{i=-3}^{N+3}\phi_i''(x_j)(1-\theta)w_i^n+\theta w_i^{n+1}=0, \qquad (۳۱.۲)$$

در (۳۱.۲) مقدار پارامتر θ را برابر با $\frac{1}{2}$ می گیریم، در این صورت به فرمول کرانک نیکلسون می رسیم که رابطه بازگشتی زیر را نتیجه می دهد

$$\sum_{i=-3}^{N+3}\{\phi_i(x_j)+\frac{\Delta t}{2}\phi_i'(x_j)(\sum_{k=-3}^{N+3}\phi_k(x_j)w_k(t))-\frac{v\Delta t}{2}\phi_i''(x_j)\}w_i^{n+1}=\sum_{i=-3}^{N+3}\{\phi_i(x_j)-$$

$$\frac{\Delta t}{2}\phi_i'(x_j)(\sum_{k=-3}^{N+3}\phi_k(x_j)w_k(t))\frac{v\Delta t}{2}\phi_i''(x_j)\}w_i^n. \qquad (۳۲.۲)$$

از مقادیر مفروض در جدول (۵.۲) استفاده کرده، معادله (۳۲.۲) را در نقاط گره ای x_j، برای $j=0,1,2,..N$ را بدست می آوریم. بنابراین در $x=x_0$ معادله (۳۲.۲) بصورت زیر می شود

$$a_0 w_{-3}^{n+1}+b_0 w_{-2}^{n+1}+c_0 w_{-1}^{n+1}+d_0 w_0^{n+1}+e_0 w_1^{n+1}+f_0 w_2^{n+1}+g_0 w_3^{n+1}=$$

$$a_0' w_{-3}^n+b_0' w_{-2}^n+c_0' w_{-1}^n+d_0' w_0^n+e_0' w_1^n+f_0' w_2^n+g_0' w_3^n, \qquad (۳۳.۲)$$

که در آن

$a_0=1-r_1Z_{-3}-r_2, \quad a_0'=1+r_1Z_{-3}+r_2,$

$b_0=120-56r_1Z_{-3}-24r_2, \quad b_0'=120+56r_1Z_{-3}+24r_2,$

$c_0=1191-245r_1Z_{-3}-15r_2, \quad c_0'=1191+245r_1Z_{-3}+15r_2,$

$$d_\circ = ۲۴۱۶ + ۸۰r_۲, \quad d'_\circ = ۲۴۱۶ - ۸۰r_۲,$$

$$e_\circ = ۱۱۹۱ + ۲۴۵r_۱Z_{-۳} - ۱۵r_۲, \quad e'_\circ = ۱۱۹۱ - ۲۴۵r_۱Z_{-۳} + ۱۵r_۲,$$

$$f_\circ = ۱۲۰ + ۵۶r_۱Z_{-۳} - ۲۴r_۲, \quad f'_\circ = ۱۲۰ - ۵۶r_۱Z_{-۳} + ۲۴r_۲,$$

$$g_\circ = ۱ + r_۱Z_{-۳} - r_۲, \quad g'_\circ = ۱ - r_۱Z_{-۳} + r_۲.$$

در ازای $r_۱ = \frac{۷\Delta t}{۲h}$ ، $r_۲ = \frac{۲۱v\Delta t}{h^۲}$ و

$$Z_{-۳} = w_{-۳} + ۱۲۰w_{-۲} + ۱۱۹۱w_{-۱} + ۲۴۱۶w_\circ + ۱۱۹۱w_۱ + ۱۲۰w_۲ + w_۳ \text{ ،}$$

در $x = x_i$ معادله (۳۲.۲) را بصورت زیر خواهیم داشت:

$$a_iw_{i-۳}^{n+۱} + b_iw_{i-۲}^{n+۱} + c_iw_{i-۱}^{n+۱} + d_iw_i^{n+۱} + e_iw_{i+۱}^{n+۱} + f_iw_{i+۲}^{n+۱} + g_iw_{i+۳}^{n+۱} =$$

$$a'_iw_{i-۳}^n + b'_iw_{i-۲}^n + c'_iw_{i-۱}^n + d'_iw_i^n + e'_iw_{i+۱}^n + f'_iw_{i+۲}^n + g'_iw_{i+۳}^n, \qquad (۳۴.۲)$$

که در آن

$$a_i = ۱ - r_۱Z_{i-۳} - r_۲, \quad a'_i = ۱ + r_۱Z_{i-۳} + r_۲,$$

$$b_i = ۱۲۰ - ۵۶r_۱Z_{i-۳} - ۲۴r_۲, \quad b'_i = ۱۲۰ + ۵۶r_۱Z_{i-۳} + ۲۴r_۲,$$

$$c_i = ۱۱۹۱ - ۲۴۵r_۱Z_{i-۳} - ۱۵r_۲, \quad c'_i = ۱۱۹۱ + ۲۴۵r_۱Z_{i-۳} + ۱۵r_۲,$$

$$d_i = ۲۴۱۶ + ۸۰r_۲, \quad d'_i = ۲۴۱۶ - ۸۰r_۲,$$

$$e_i = ۱۱۹۱ + ۲۴۵r_۱Z_{i-۳} - ۱۵r_۲, \quad e'_i = ۱۱۹۱ - ۲۴۵r_۱Z_{i-۳} + ۱۵r_۲,$$

$$f_i = ۱۲۰ + ۵۶r_۱Z_{i-۳} - ۲۴r_۲, \quad f'_i = ۱۲۰ - ۵۶r_۱Z_{i-۳} + ۲۴r_۲,$$

$$g_i = ۱ + r_۱Z_{i-۳} - r_۲, \quad g'_i = ۱ - r_۱Z_{i-۳} + r_۲,$$

و $Z_{i-۳} = w_{i-۳} + ۱۲۰w_{i-۲} + ۱۱۹۱w_{i-۱} + ۲۴۱۶w_i + ۱۱۹۱w_{i+۱} + ۱۲۰w_{i+۲} + w_{i+۳}$.

سیستم (۳۴.۲) شامل $N+۱$ معادله در $N+۷$ مجهول

$(w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0, \dots, w_N, w_{N+1}, w_{N+2}, w_{N+3})^T$ است. برای بدست آوردن یک جواب از این سیستم، شش محدودیت نیاز داریم. این محدودیت ها از شرایط مرزی بدست می آیند که w_{-3}، w_{-2}، w_{-1}، w_{N+1}، w_{N+2} و w_{N+3} را از سیستم حذف می کنند. سپس معادله ماتریسی سیستم را داریم

$$A(w^n)w^{n+1} = B(w^n)w^n + r \tag{۳۵.۲}$$

که در آن $A(w^n)$ و $B(w^n)$ ماتریس های $(N+1) \times (N+1)$ هفت قطری هستند و r بردار ستونی $N+1$ بعدی است. الگوریتم هفت قطری را برای حل سیستم استفاده می کنیم. شرط اولیه

$$U_N(x, 0) = \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i(x) w_i^0 \tag{۳۶.۲}$$

را برای تعیین حالت اولیه $\{w_{-3}^0, w_{-2}^0, \dots, w_{N+2}^0, w_{N+3}^0\}$ بکار می بریم.

جواب تقریب $U_N(n, 0)$ در شرایط زیر باید صدق کند:

الف) آن باید با شرط اولیه $u(x, 0)$ در گره x_j برابر باشد.

ب) مشتق مرتبه اول، دوم و سوم تقریب شرط اولیه باید با مشتق مرتبه اول، دوم و سوم شرط اولیه دقیق در هر دو انتهای دامنه موافق باشند.

این دو شرط را میتوان به صورت زیر بیان کرد :

$$(U_x)_N(x_0, 0) = u_x(a, 0) = 0, \quad (U_{xx})_N(x_0, 0) = u_{xx}(a, 0) = 0, \quad (U_{xxx})_N(x_0, 0) =$$

$$u_{xxx}(a, 0) = 0, \quad U_N(x_i, 0) = u(x_i, 0), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (U_{xxx})_N(x_N, 0) = u_{xxx}(b, 0) = 0,$$

$$(U_{xx})_N(x_N, 0) = u_{xx}(b, 0) = 0, \quad (U_x)_N(x_N, 0) = u_x(b, 0) = 0, \tag{۳۷.۲}$$

از دستگاه (۳۷.۲) پارامترهای w^{0}_{-3}، w^{0}_{-2}، w^{0}_{-1} و w^{0}_{N+1}، w_{N+2}، w^{0}_{N+3}حذف می کنیم در نتیجه خواهیم داشت

$$Aw^{0} = r \qquad (۳۸.۲)$$

که A ماتریس هفت قطری مفروض است:

$$A = \begin{bmatrix} 1536 & 2712 & 768 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{82731}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{10063.5}{81} & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{9600}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96474}{81} & 120 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 120 & \frac{96474}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{9600}{81} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{10063.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{82731}{81} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 768 & 2712 & 1536 \end{bmatrix}$$

و $w^{0} = [w^{0}_{0}, w^{0}_{1}, \ldots, w^{0}_{N}]^T$

۷.۲ آنالیز پایداری

پایداری ون - نویمان را برای سیستم (۳۴.۲) بکار می بریم. ابتدا باید آن را خطی کنیم، برای این منظور قرارمی دهیم

$$Z_{i-3} = (d + 120d + 1191d + 2416d + 1191d + 120d + d) = 5040d.$$

برطبق ون - نویمان داریم

$$w_j^n = \xi^n \exp(qkjh), \quad q = \sqrt{-1}, \qquad (۳۹.۲)$$

که در آن h اندازه عنصر است که برای طرح عددی خطی تعیین خواهد شد. در $x = x_j$ معادله (۳۴.۲) را به صورت زیر می نویسیم

$$a_j w_{j-3}^{n+1} + b_j w_{j-2}^{n+1} + c_j w_{j-1}^{n+1} + d_j w_j^{n+1} + e_j w_{j+1}^{n+1} + f_j w_{j+2}^{n+1} + g_j w_{j+3}^{n+1} =$$

$$a_j' w_{j-۳}^n + b_j' w_{j-۲}^n + c_j' w_{j-۱}^n + d_j' w_j^n + e_j' w_{j+۱}^n + f_j' w_{j+۲}^n + g_j' w_{j+۳}^n \quad (۴۰.۲)$$

معادله (۳۹.۲) را در معادله بازگشتی (۴۰.۲) بصورت زیر جایگذاری می کنیم

$$\xi_{n+۱}\{a_j \exp((j-۳)qkh) + b_j \exp((j-۲)qkh) + c_j \exp((j-۱)qkh) + d_j \exp(jqkh) + e_j \exp((j+۱)qkh) + f_j \exp((j+۲)qkh) + g_j \exp((j+۳)qkh)\} = \xi_n\{a_j' \exp((j-۳)qkh) + b_j{}' \exp((j-۲)qkh) + c_j{}' \exp((j-۱)qkh) + d_j{}' \exp(jqkh) + e_j{}' \exp((j+۱)qkh) + f_j{}' \exp((j+۲)qkh) + g_j{}' \exp((j+۳)qkh)\} \quad (۴۱.۲)$$

که در آن $j = ۰, ۱, ..., N$ و

$$a_j = ۱ - mr_۱ - r_۲, \quad a_j' = ۱ + mr_۱ + r_۲$$

$$b_j = ۱۲۰ - ۵۶mr_۱ - ۲۴r_۲, \quad b_j' = ۱۲۰ + ۵۶mr_۱ + ۲۴r_۲$$

$$c_j = ۱۱۹۱ - ۲۴۵mr_۱ - ۱۵r_۲, \quad c_j' = ۱۱۹۱ + ۲۴۵mr_۱ + ۱۵r_۲,$$

$$d_j = ۲۴۱۶ - ۸۰r_۲, \quad d_j' = ۲۴۱۶ + ۸۰r_۲,$$

$$e_j = ۱۱۹۱ + ۲۴۵mr_۱ - ۱۵r_۲, \quad e_j' = ۱۱۹۱ - ۲۴۵mr_۱ + ۱۵r_۲,$$

$$f_j = ۱۲۰ + ۵۶mr_۱ - ۲۴r_۲, \quad f_j' = ۱۲۰ - ۵۶mr_۱ + ۲۴r_۲,$$

$$g_j = ۱ + mr_۱ - r_۲, \quad g_j' = ۱ - mr_۱ + r_۲,$$

به ازای $m = ۵۰۴۰d$.

هر دو طرف معادله (۴۱.۲) را بر $\exp(jqkh)$ تقسیم می کنیم و معادله زیر را بدست می آوریم

$$\xi_{n+۱}\{a_j \exp(-۳qkh) + b_j \exp(-۲qkh) + c_j \exp(-qkh) + d_j + e_j \exp(qkh) + f_j \exp(۲qkh) + g_j \exp(۳qkh)\} = \xi_n\{a_j' \exp(-۳qkh) + b_j{}' \exp(-۲qkh) + c_j{}' \exp(-qkh) + d_j{}' + e_j{}' \exp(qkh)$$

$$+f_j{}' \exp(2qkh) + g_j{}' \exp(3qkh)\} \qquad (۴۲.۲)$$

معادله (۴۲.۲) را به شکل ساده تری دوباره می نویسیم

$$(X_1 + qY)\xi^{n+1} = (X - qY)\xi^n, \qquad (۴۳.۲)$$

که در آن X_1، X و Y بصورت زیر اند:

$$X_1 =$$
$$2(1 - r_2)\cos(3kh) + 2(120 - 24r_2)\cos(2kh) + 2(1191 - 15r_2)\cos(kh) + 2416 + 80r_2,$$
$$X =$$
$$2(1 + r_2)\cos(3kh) + 2(120 + 24r_2)\cos(2kh) + 2(1191 + 15r_2)\cos(kh) + 2416 - 80r_2,$$
$$Y = 2(r\sin(3kh) + 56r\sin(2kh) + 24r\sin(kh)),$$

که در آن $r = mr_1$. حال قرار می دهیم

$$g = \frac{\xi^{n+1}}{\xi^n}, \qquad (۴۴.۲)$$

با استفاده از (۴۳.۲) و (۴۴.۲) داریم

$$g = \frac{X - qY}{X_1 + qY}, \qquad (۴۵.۲)$$

که X_1 و X را دوباره به شکل زیر میتوان نوشت:

$$X_1 = 4[\cos^2(\tfrac{3kh}{2}) + 120\cos^2(kh) + 1191\cos^2(\tfrac{kh}{2}) - 52] - 4r_2[\cos^2(\tfrac{3kh}{2}) +$$
$$24\cos^2(kh) + 15\cos^2(\tfrac{kh}{2}) - 40],$$
$$X = 4[\cos^2(\tfrac{3kh}{2}) + 120\cos^2(kh) + 1191\cos^2(\tfrac{kh}{2}) - 52] + 4r_2[\cos^2(\tfrac{3kh}{2}) +$$
$$24\cos^2(kh) + 15\cos^2(\tfrac{kh}{2}) - 40],$$

توجه داشته باشید که $X \leq X_1$ بنابراین $\sqrt{\frac{X^2+Y^2}{X_1^2+Y^2}} \leq 1$ = $|g| = \sqrt{g\bar{g}}$. بنابراین طرح عددی خطی برای معادله برگرز بدون هیچ قید و شرط پایدار است.

۸.۲ نتایج عددی

حل عددی معادله برگرز و برگرز اصلاح شده برای دو مسئله استاندارد بدست می آوریم. دقت روش عددی با محاسبه تفاضل بین جواب عددی و تحلیلی در هر نقطه گره شبکه و نرم خطای L_2 و L_∞ مورد بررسی قرار می گیرد.

مثال ۱.۸.۲. یک جواب تحلیلی از معادله برگرز را بفرم زیر در نظر می گیریم

$$u(x,t) = \frac{x/t}{1+\sqrt{(t/t_0)}\exp(x^2/(4vt))}, \quad t \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad (46.2)$$

که در آن $t_0 = \exp(1/8v)$ و شرط اولیه را وقتی $t = 1$ در معادله قرار می دهیم بدست می آوریم. شرایط مرزی

$$u(a,t) = u(b,t) = 0, \quad u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0,$$
$$u_{xx}(a,t) = u_{xx}(b,t) = 0, \quad u_{xxx}(a,t) = u_{xxx}(b,t) = 0.$$

نتایج بدست آمده در جدول (۶.۲)-(۸.۲) خلاصه شده است و همچنین نمودار های (۷.۲)-(۹.۲) رفتار جواب عددی را در زمان های مختلف نشان می دهد. شکل ها نشان می دهند که هر چه زمان افزایش می یابد منحنی جواب عددی از بین می رود.

مثال ۲.۸.۲. برای حل معادله برگرز اصلاح شده به فرم زیر

$$u_t + u^2 u_x - v u_{xx} = 0, \qquad (47.2)$$

جدول ۶.۲: نرم خطای L_2 و L_∞ در $\Delta x =$ ۰/۰۰۵، $\Delta t =$ ۰/۰۱ و v ۰/۰۰۱۵.

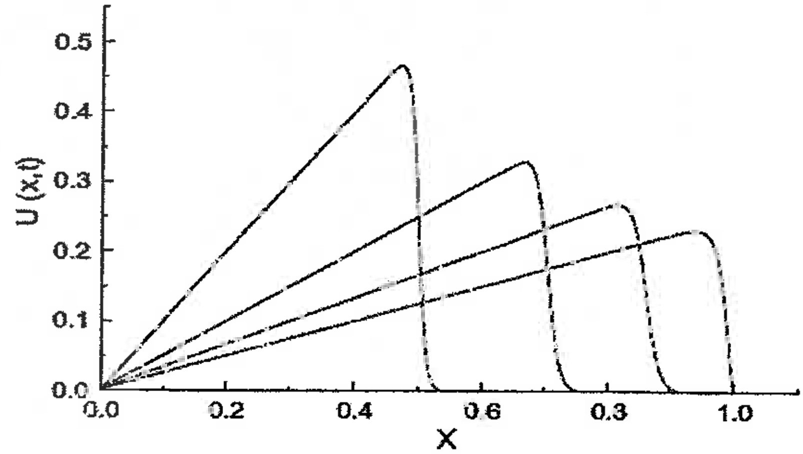
Time	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^4$
۱.۲۰۰	۰.۳۸۵۳۸۷۹۴۹۸	۳.۲۳۶۸۴۷۶۶۵۲
۱.۴۰۰	۰.۴۶۴۴۳۴۸۰۷۳۸	۳.۳۴۸۸۹۲۶۸۷۹
۱.۶۰۰	۰.۴۹۶۴۷۴۹۴۰۶	۳.۱۹۲۳۲۳۸۳۱۹
۱.۸۰۰	۰.۵۰۹۲۷۹۰۳۴۶	۲.۹۸۶۷۸۹۵۷۲۱
۲.۰۰۰	۰.۵۱۲۵۱۴۷۴۹۲	۲.۷۸۳۱۵۰۱۳۲۸
۲.۲۰۰	۰.۵۱۰۵۹۶۱۲۷۷	۲.۵۹۵۱۲۱۲۰۸۵
۲.۴۰۰	۰.۵۰۵۸۰۱۱۵۰۵	۲.۴۲۵۵۴۴۶۵۴۶
۲.۸۰۰	۰.۴۹۲۱۰۹۶۹۳۶	۲.۱۳۸۰۴۶۰۷۳
۳.۰۰۰	۰.۴۸۴۳۹۱۱۶۳۹	۲.۰۱۶۴۷۳۷۹۶۵
۳.۴۰۰	۰.۴۶۸۷۳۰۸۳۱۳	۱.۸۰۸۶۹۴۳۳۷۷
۳.۷۰۰	۰.۶۴۴۶۳۱۸۳۹۵	۴.۷۰۸۱۹۱۴۰۵۱

جدول ۷.۲: نرم خطا L_2 و L_∞ در $\Delta x =$ ۰/۰۲، $\Delta t =$ ۰/۰۱ و ۰/۰۱ $= v$.

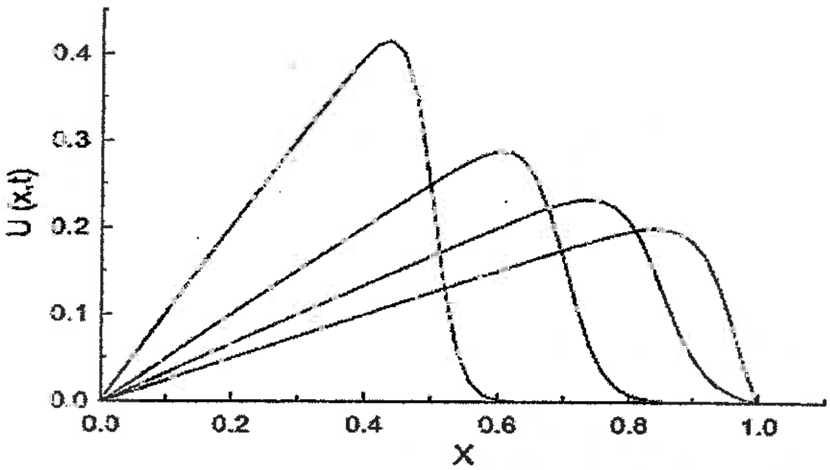
Time	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^4$
۱.۲۰۰	۰.۵۸۱۴۳۱۷۱۶۶	۳.۱۳۵۴۰۶۲۷۳۰
۱.۴۰۰	۰.۶۴۶۷۶۱۷۶۷۸	۲.۹۳۱۳۴۸۸۴۳۴
۱.۶۰۰	۰.۶۷۶۰۹۵۱۵۶۴	۲.۶۹۲۲۶۴۵۵۲۵
۱.۸۰۰	۰.۶۸۷۶۱۸۳۷۳۴	۲.۴۷۱۸۹۱۵۴۳۸
۲.۰۰۰	۰.۶۸۹۵۳۵۰۸۲۱	۲.۳۷۶۶۵۷۴۰۰۱
۲.۲۰۰	۰.۶۸۶۰۱۶۶۶۱۶	۲.۲۷۳۱۹۲۱۸۹۶
۲.۴۰۰	۰.۶۷۹۴۳۲۸۰۶۶	۲.۱۶۷۸۴۷۷۵۰۶
۲.۸۰۰	۰.۶۸۳۰۷۰۶۲۵۵	۱.۹۶۸۹۵۲۲۷۸۶
۳.۰۰۰	۰.۸۲۹۵۱۳۲۸۱۹	۲.۹۵۷۲۴۷۲۴۰۷
۳.۲۰۰	۱.۴۸۵۵۹۸۱۹۱۷	۷.۴۹۱۴۶۴۸۷۱۳

جدول ۸.۲: نرم خطا L_2 و L_∞ در $\Delta x =$ ۰/۰۲، $\Delta t =$ ۰/۰۱ و ۰/۰۱ $= v$.

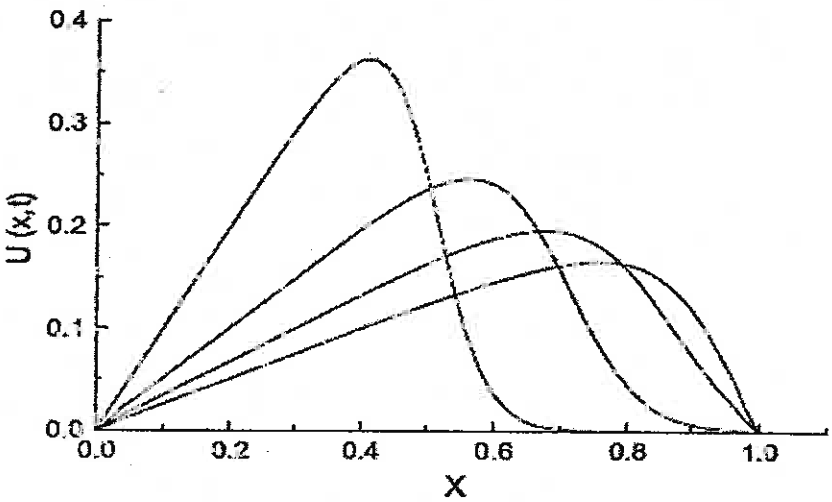
Time	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
۱.۱۰۰	۰.۴۶۶۴۸۷۴۹۴۵	۲.۸۶۸۳۰۵۵۴۷۰
۱.۳۰۰	۰.۶۱۷۴۶۱۳۰۱۰	۳.۴۷۱۶۳۴۲۱۹۷
۱.۵۰۰	۰.۶۷۷۵۲۹۵۹۴۹	۳.۳۵۴۷۵۶۶۹۶۱
۱.۷۰۰	۰.۶۹۹۱۰۱۰۰۵۳	۳.۱۳۴۷۶۲۹۳۵۱
۱.۹۰۰	۰.۷۰۶۰۸۷۵۶۹۰	۲.۸۸۸۰۴۱۴۳۴۳
۲.۱۰۰	۰.۷۲۹۷۶۶۸۸۸۹	۲.۶۶۹۸۶۶۰۶۴۰
۲.۳۰۰	۰.۸۷۳۱۱۷۱۷۳۴	۲.۸۰۷۶۵۰۰۲۰۱
۲.۶۰۰	۱.۷۴۵۷۰۰۴۵۳۶	۸.۰۶۷۹۸۳۷۰۴۰



شکل ۷.۲: ارتباط بین جواب عددی و فاصله در $\Delta x = ۰/۰۰۵$، $\Delta t = ۰/۰۱$ و $v = ۰/۰۰۱۵$.



شکل ۸.۲: ارتباط بین جواب عددی و فاصله در $\Delta x = ۰/۰۲$، $\Delta t = ۰/۰۱$ و $v = ۰/۰۰۵$.



شکل ۹.۲: ارتباط بین جواب عددی و فاصله در $\Delta x = ۰/۰۲$، $\Delta t = ۰/۰۱$ و $v = ۰/۰۱$.

از $(Z_{j-۳}^{۲})$ به جای $(Z_{j-۳})$ در طرح عددی (۴۰.۲) استفاده می کنیم. جواب تحلیلی معادله برگرز اصلاح شده بصورت زیر است:

$$u(x,t) = \frac{x/t}{۱ + sqrt(t/c_۰)\exp(x^۲/(۴vt))}, \quad t \geq ۱, \quad ۰ \leq x \leq ۱, \qquad (۴۸.۲)$$

که $۰ < c \leq ۱$. شرایط مرزی زیر را استفاده می کنیم:

$$u(a,t) = ۰ = u(b,t), \quad u_x(a,t) = ۰ = u_x(b,t),$$

$$u_{xx}(a,t) = ۰ = u_{xx}(b,t), \quad u_{xxx}(a,t) = ۰ = u_{xxx}(b,t).$$

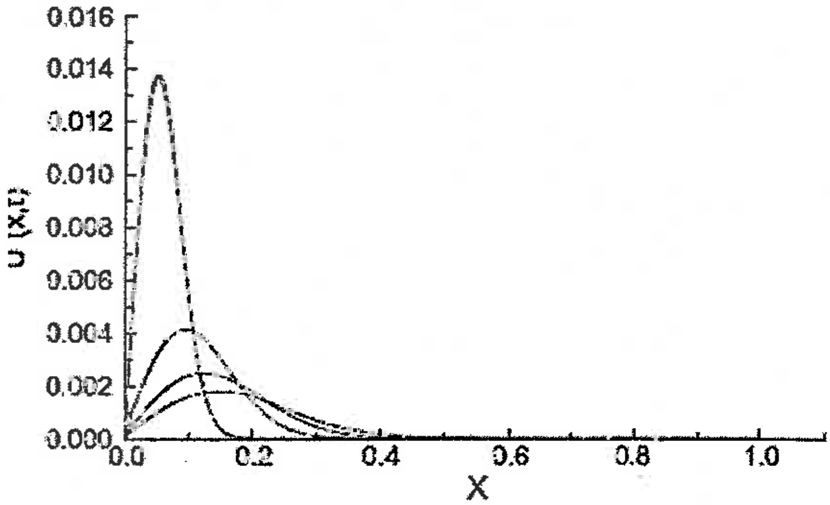
دقت طرح عددی با محاسبه نرم خطای $L_۲$ و L_∞ برای این مسئله بررسی می شود. نتایج بدست آمده در جداول (۹.۲) و (۱۰.۲) خلاصه شده است. همچنین نمودار هایی که در ادامه می آیند رفتار جواب عددی را در زمان های مختلف $t = ۱$، $t = ۴$، $t = ۷$ و $t = ۱۰$ نشان می دهند که به ترتیب بالاترین نمودار در شکل هار مربوط به $t = ۱$ و پایین ترین نمودار مربوط به $t = ۱۰$ می باشد.

جدول ۲.۹: نرم خطا $L_۲$ و L_∞ در $\Delta x = ۰/۰۵$، $\Delta t = ۰/۰۱$ و $v = ۰/۰۰۱$.

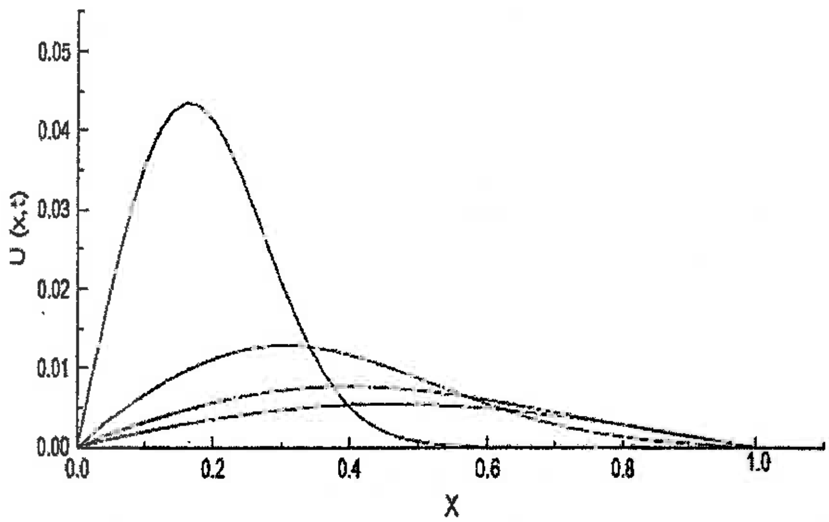
Time	$L_۲ \times ۱۰^۴$	$L_\infty \times ۱۰^۴$
۲	۰.۱۸۳۵۴۹۱۱۱۹۰	۰.۸۱۸۵۲۱۱۱۱۲
۳	۰.۱۴۴۱۴۲۴۳۳۵	۰.۵۲۳۴۸۳۳۳۴۶
۴	۰.۱۱۴۴۱۱۰۷۸۳	۰.۳۵۶۳۵۳۷۲۰۷
۵	۰.۰۹۴۷۸۶۵۲۷۲	۰.۲۵۴۹۷۹۰۰۵۸
۶	۰.۰۸۱۴۱۷۴۶۷۷	۰.۲۱۳۴۸۴۷۸۳۵
۷	۰.۰۷۱۸۹۷۷۷۵۷	۰.۱۸۸۰۰۴۸۴۳۲
۸	۰.۰۶۴۸۳۶۸۹۴۲	۰.۱۶۸۲۶۰۱۷۷۰
۹	۰.۰۵۹۴۱۱۴۹۷۰	۰.۱۵۲۴۰۷۴۹۶۶
۱۰	۰.۰۵۵۱۱۵۱۴۵۶	۰.۱۳۹۴۳۱۲۱۲۷

جدول ۲.۱۰: نرم خطا $L_۲$ و L_∞ در $\Delta x = ۰/۰۲$، $\Delta t = ۰/۰۱$ و $v = ۰/۰۱$.

Time	$L_۲ \times ۱۰^۴$	$L_\infty \times ۱۰^۴$
۲	۰.۷۹۰۴۲۹۶۶۲۰	۱.۷۰۳۰۹۲۱۱۸۸
۳	۰.۶۵۵۱۹۲۸۲۹۰	۱.۱۸۳۲۶۹۸۲۱۶
۴	۰.۵۵۷۶۷۹۴۲۶۴	۰.۹۹۶۴۵۲۳۳۶۸
۵	۰.۵۱۰۵۶۱۷۵۳۶	۰.۸۵۶۱۳۴۲۴۴۵
۶	۰.۵۱۶۷۲۲۹۵۷۵	۰.۷۶۱۰۵۳۰۰۶۰
۷	۰.۵۶۷۷۴۳۸۶۱۴	۱.۰۶۵۴۵۴۸۰۹۰
۸	۰.۶۴۲۷۵۴۲۲۶۶	۱.۳۵۸۱۱۱۳۶۳۵
۹	۰.۷۲۳۶۴۳۰۲۵۷	۱.۶۰۴۸۳۰۶۶۵۳
۹	۰.۸۰۰۲۵۶۴۲۰۱	۱.۸۰۲۳۹۳۸۵۵۳



شکل ۲.۱۰: ارتباط بین جواب عددی و فاصله در $\Delta x = ۰/۰۰۵$، $\Delta t = ۰/۰۱$ و $v = ۰/۰۰۱$.



شکل ۲.۱۱: ارتباط بین جواب عددی و فاصله در $\Delta x = ۰/۰۲$، $\Delta t = ۰/۰۱$ و $v = ۰/۰۱$.

فصل ۳

حل معادله تلگراف با استفاده از B – اسپلاین مرتبه ۴

۱.۳ مقدمه

در این فصل، یک روش عددی بر اساس توابع B - اسپلاین و روش کالوکیشن[۱] برای حل معادله دیفرانسیل هذلولوی خطی مرتبه دوم تلگراف[۲]، استفاده خواهد شد. در پایان فصل نتایج عددی ارائه شده است که نشان دهنده این است که روش یک تکنیک کاربردی و همچنین تقریبی بسیار خوب از جواب دقیق مسئله است.

۲.۳ معرفی معادله

معادله دیفرانسیل تلگراف هذلولوی خطی مرتبه دوم در فضای یک بعدی را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad a \le x \le b, \quad t \ge 0, \tag{۱.۳}$$

با شرایط اولیه

$$u(x,0) = f_0(x), \quad a \le x \le b, \tag{۲.۳}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_1(x), \quad a \le x \le b, \tag{۳.۳}$$

و شرایط مرزی دیریکله[۳]

$$u(a,t) = g_0(t), \quad u(b,t) = g_1(t), \quad t \ge 0, \tag{۴.۳}$$

که در آن α و β ضرایب ثابت و معلوم هستند. فرض می کنیم توابع $f_0(x)$، $f_1(x)$ و مشتق های آنها توابعی پیوسته از x می باشند، همچنین توابع $g_i(t)$، $(i = 0, 1)$ و مشتقاتشان،

[۱] Collocation method

[۲] Second-order linear hyperbolic telegraph equation

[۳] Dirichlet boundary conditions

توابعی پیوسته از t هستند. ولتاژ الکتریکی[۴] و جریان[۵] هر دو در یک رسانا[۶] در معادله تلگراف صدق می کند که در آن x فاصله و t زمان است. برای $\alpha > 0$ و $\beta = 0$ معادله (۱.۳) با معادله موج میرا[۷] متناظر می باشد و برای $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ معادله را معادله تلگراف می نامیم. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی هذلولوی ساختارهای ارتعاشات (برای مثال ساختمان، تیرها[۸] و ماشین آلات) طراحی می کند و پایه ای برای معادلات بنیادی[۹] در فیزیک اتمی[۱۰] است.

نظریه توابع اسپلاین در زمینه های تقریب توابع، مسائل مقدار مرزی [۱۱]و معادلات با مشتقات جزئی زمانی که جنبه های عددی مورد نظر می باشد، بسیار کاربرد دارد. در میان طبقات مختلف اسپلاین ها، اسپلاین های چند جمله ای مورد توجه بیشتری هستند بدلیل اینکه آنها یک پایه از B - اسپلاین ها [۲۵]-[۲۸] فراهم می کنند که می تواند دقیق و کارآمد محاسبه شود. بعنوان چندجمله های قطعه ای، B - اسپلاین ها ابزاری اساسی برای روش های عددی در بدست آوردن حل معادلات دیفرانسیل هستند. در این فصل از پایان نامه حل عددی معادله دیفرانسیل هذلولوی با استفاده از B - اسپلاین مرتبه ۴ و روش کالوکیشن مورد بررسی قرار خواهد گرفت. موفقیت روش کالوکیشن B - اسپلاین وابسته به انتخاب پایه B - اسپلاین است. پایه B - اسپلاین مرتبه ۴ به منظور ایجاد راه

[۴]Electric voltage

[۵]Current

[۶]Conductor

[۷]Damped wave equation

[۸]Beams

[۹]Fundamental equations

[۱۰]Atomic physics

[۱۱]Boundary value problems

حل تقریبی برای برخی معادلات دیفرانسیل استفاده شده است[۲۹]-[۳۳].

۳.۳ روش کالوکیشن B - اسپلاین مرتبه ۴

فرض کنید Ω یک افراز یکنواخت از بازه $[a,b]$ به صورت $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ باشد که در آن $h = x_{j+1} - x_j$ و $j = 0, 1, \cdots, N-1$.

مجموعه B - اسپلاین های مرتبه چهار $\{Q_{-2}, Q_{-1}, ..., Q_{N+1}\}$ یک پایه روی $[a,b]$ تشکیل می دهد[۲۷].

فرض کنید $Q_m(x)$ که $m = -2, -1, ..., N+1$

$$Q_m(x) = \begin{cases} (x - x_{m-2})^4 & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 & x \in [x_{m-1}, x_m], \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4 & x \in [x_m, x_{m+1}], \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4 & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ (x_{m+3} - x)^4 & x \in [x_{m+2}, x_{m+3}], \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \tag{۵.۳}$$

B - اسپلاین های مرتبه ۴ باشند، که بیرون بازه $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ صفر است.

اکنون جواب تقریبی از مسئله (۱.۳) بصورت زیر در نظر می گیریم

$$U_N(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+1} \delta_m(t) Q_m(x), \tag{۶.۳}$$

که در آن $\delta_m(t)$ مقادیر مجهول وابسته به زمان هستند که از شرایط مرزی و اولیه تعیین می شوند. مقادیر $Q_m(x)$ و سه مشتقات اولی آن یعنی $Q'_m(x)$، Q''_m، Q'''_m در گره ها در جدول (۱.۳) بدست آورده شده است. از بسط تیلور[۱۲] استفاده می کنیم و در ادامه فصل از نماد $u_i = u(x, t_i)$ که در آن $t_i = t_{i-1} + \Delta t$ استفاده می کنیم. طرح های تفاضل متناهی

[۱۲] Taylor Expansion

جدول ۱.۳: مقادیر Q_i، Q_i'، Q_i''، Q_i'''.

x	$x_{i-۲}$	$x_{i-۱}$	x_i	$x_{i+۱}$	$x_{i+۲}$	$x_{i+۳}$
Q_i	۰	۱۱	۱۱	۱	۱	۰
Q_i'	۰	$\frac{-۴}{h}$	$\frac{-۱۲}{h}$	$\frac{۱۲}{h}$	$\frac{۴}{h}$	۰
Q_i''	۰	$\frac{۱۲}{h^۲}$	$\frac{-۱۲}{h^۲}$	$\frac{-۱۲}{h^۲}$	$\frac{۱۲}{h^۲}$	۰
Q_i'''	۰	$\frac{-۲۴}{h^۳}$	$\frac{۷۲}{h^۳}$	$\frac{-۷۲}{h^۳}$	$\frac{۲۴}{h^۳}$	۰

زیر را داریم :

$$\frac{\partial^۲ u(x,t_i)}{\partial t^۲} = \frac{u_{i+۱} - ۲u_i + u_{i-۱}}{(\Delta t)^۲} + O((\Delta t)^۲), \qquad (۷.۳)$$

$$\frac{\partial u(x,t_i)}{\partial t} = \frac{u_{i+۱} - u_i}{\Delta t} + O(\Delta t), \qquad (۸.۳)$$

$$u(x,t_i) = \frac{u_{i+۱} + u_i}{۲} + O(\Delta t), \qquad (۹.۳)$$

$$\frac{\partial^۲ u(x,t_i)}{\partial x^۲} = \frac{u''_{i+۱} + u''_i}{۲} + O(\Delta t), \qquad (۱۰.۳)$$

اکنون، معادله (۱.۳) بر طبق طرح های (۷.۳)-(۱۰.۳) بصورت زیر نوشته می شود

$$\frac{u_{i+۱} - ۲u_i + u_{i-۱}}{(\Delta t)^۲} + ۲\alpha\frac{u_{i+۱} - u_i}{\Delta t} + \beta^۲\frac{u_{i+۱} + u_i}{۲} = \frac{u''_{i+۱} + u''_i}{۲} + f(x,t_i), \qquad (۱۱.۳)$$

معادله (۱۱.۳) را بصورت زیر بازنویسی می کنیم

$$(۱ + ۲\alpha\Delta t + \frac{\beta^۲(\Delta t)^۲}{۲})u_{i+۱} - \frac{(\Delta t)^۲}{۲}u''_{i+۱} = (۲ + ۲\alpha\Delta t - \frac{\beta^۲(\Delta t)^۲}{۲})u_i - u_{i-۱}$$

$$+\frac{(\Delta t)^۲}{۲}u''_i + (\Delta t)^۲ f(x,t_i), \qquad (۱۲.۳)$$

و شرایط اولیه داده شده در معادله های (۲.۳)-(۳.۳) را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$u(x,۰) = f_۰(x) = u_۰, \qquad (۱۳.۳)$$

$$u_t(x,۰) = \frac{u_۱ - u_۰}{\Delta t} = f_۱(x), \qquad (۱۴.۳)$$

$$u_۱ = u_۰ + \Delta t f_۱(x). \qquad (۱۵.۳)$$

معادله (۱۵.۳) را در معادله (۱۲.۳) جایگذاری می کنیم در این صورت داریم:

$$i=1,\quad (1+2\alpha\Delta t+\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{2})u_2-\frac{(\Delta t)^2}{2}u_2''=(2+2\alpha\Delta t-\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{2})u_1$$

$$-u_0+\frac{(\Delta t)^2}{2}u_1''+(\Delta t)^2f(x,t_1), \tag{16.3}$$

$$i=2,\quad (1+2\alpha\Delta t+\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{2})u_3-\frac{(\Delta t)^2}{2}u_3''=(2+2\alpha\Delta t-\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{2})u_2$$

$$-u_1+\frac{(\Delta t)^2}{2}u_2''+(\Delta t)^2f(x,t_2), \tag{17.3}$$

...

...

...

$$i=n-1,\quad (1+2\alpha\Delta t+\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{2})u_n-\frac{(\Delta t)^2}{2}u_n''=(2+2\alpha\Delta t-\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{2})u_{n-1}$$

$$-u_{n-2}+\frac{(\Delta t)^2}{2}u_{n-1}''+(\Delta t)^2f(x,t_{n-1}). \tag{18.3}$$

حال جواب تقریبی در نظر گرفته شده $U_N(x,t)$ را در معادله های(۱۶.۳)-(۱۸.۳) قرار می دهیم، داریم:

$$i=1,\quad (1+2\alpha\Delta t+\tfrac{\beta^2(\Delta t)^2}{2})(U_N)_2-\tfrac{(\Delta t)^2}{2}(U_N)_2''=(2+2\alpha\Delta t-\tfrac{\beta^2(\Delta t)^2}{2})u_1$$

$$-u_0+\frac{(\Delta t)^2}{2}u_1''+(\Delta t)^2f(x,t_1), \tag{19.3}$$

$$i=2,\quad (1+2\alpha\Delta t+\tfrac{\beta^2(\Delta t)^2}{2})(U_N)_3-\tfrac{(\Delta t)^2}{2}(U_N)''_3=(2+2\alpha\Delta t-\tfrac{\beta^2(\Delta t)^2}{2})u_2$$

$$-u_1+\frac{(\Delta t)^2}{2}u''_2+(\Delta t)^2 f(x,t_2), \tag{۲۰.۳}$$

...

...

...

$$i=n-1,\quad (1+2\alpha\Delta t+\tfrac{\beta^2(\Delta t)^2}{2})(U_N)_n-\tfrac{(\Delta t)^2}{2}(U_N)''_n=(2+2\alpha\Delta t-\tfrac{\beta^2(\Delta t)^2}{2})u_{n-1}$$

$$-u_{n-2}+\frac{(\Delta t)^2}{2}u''_{n-1}+(\Delta t)^2 f(x,t_{n-1}), \tag{۲۱.۳}$$

و شرایط مرزی را نیز میتوان بدین شکل نوشت:

$$\sum_{m=-2}^{N+2}\delta_m(t)Q_m(x_0)=g_0(t),\qquad x=a,\ 0\le t\le T, \tag{۲۲.۳}$$

$$\sum_{m=-2}^{N+2}\delta_m(t)Q_m(x_N)=g_1(t),\qquad x=b,\ 0\le t\le T. \tag{۲۳.۳}$$

جواب اسپلاینی از معادله (۱۹.۳) با شرایط مرزی (۲۳.۳)-(۲۲.۳) در گره های $\{x_i\}_{i=0}^{N}$. توسط حل دستگاه زیر بدست می آید:

$$AX=B \tag{۲۴.۳}$$

که در آن $X=[\delta_{-2},\delta_{-1},\dots,\delta_N,\delta_{N+1}]$. بعد ماتریس A برابر با $(N+3)\times(N+4)$ و ماتریس B یک ماتریس ستونی با $N+3$ سطر است که به ترتیب از سمت چپ و راست معادله های

(۱۹.۳) و شرایط مرزی (۲۲.۳)-(۲۳.۳) بصورت زیر بدست آمده است:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱۱ & ۱۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ r_۱ & r_۲ & r_۲ & r_۱ & ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & r_۱ & r_۲ & r_۲ & r_۱ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۱ & r_۲ & r_۲ & r_۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \dots & r_۱ & r_۲ & r_۲ & r_۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۱ & ۱۱ & ۱۱ & ۱ \end{bmatrix},$$

و

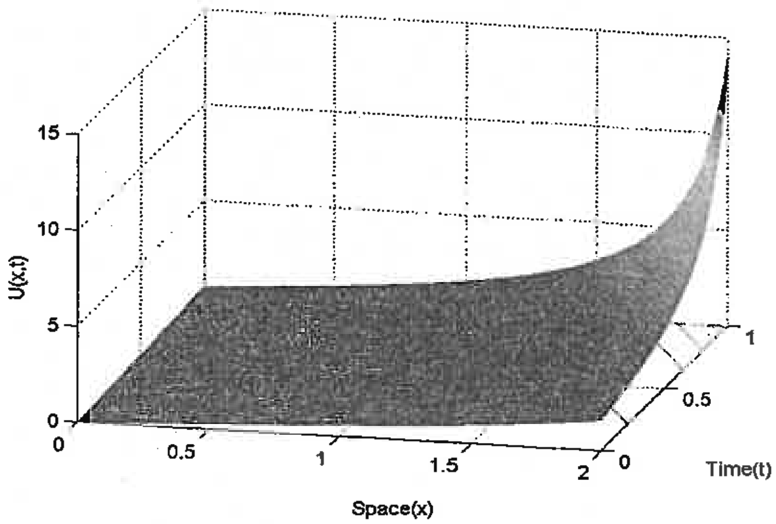
$$B=\begin{bmatrix} g_۰(t_۱) \\ (\Delta t)^۲ f(x_۰,t_۱)-u_۰(x_۰)+\frac{(\Delta t)^۲}{۲}u_۱''(x_۰)+(۲+۲\alpha\Delta t-\frac{\beta^۲(\Delta t)^۲}{۲})u_۱(x_۰) \\ (\Delta t)^۲ f(x_۱,t_۱)-u_۰(x_۱)+\frac{(\Delta t)^۲}{۲}u_۱''(x_۱)+(۲+۲\alpha\Delta t-\frac{\beta^۲(\Delta t)^۲}{۲})u_۱(x_۱) \\ \vdots \\ (\Delta t)^۲ f(x_N,t_۱)-u_۰(x_N)+\frac{(\Delta t)^۲}{۲}u_۱''(x_N)+(۲+۲\alpha\Delta t-\frac{\beta^۲(\Delta t)^۲}{۲})u_۱(x_N) \\ g_۱(t_۱) \end{bmatrix},$$

که در آن

$$r_۱=(۱+۲\alpha\Delta t+\frac{\beta^۲(\Delta t)^۲}{۲})-\frac{۶(\Delta t)^۲}{h^۲}$$
$$r_۲=۱۱(۱+۲\alpha\Delta t+\frac{\beta^۲(\Delta t)^۲}{۲})+\frac{۶(\Delta t)^۲}{h^۲}.$$

به آسانی میتوان تقریبی مشابه برای معادله های (۲۰.۳) و (۲۱.۳) همراه با شرایط مرزی متناظر(۲۳.۳)-(۲۲.۳) بدست آورد. سیستم (۲۴.۳) را $n-۱$ بار توسط برنامه ای که براساس روش تجزیه مقدار تکین[۱۳] نوشته ایم[۳۴]، حل می کنیم و در هر مرحله $u(x_۰,t_i),u(x_۱,t_i),\dots,u(x_N,t_i)$ ،$(i=۱,\dots,n-۱)$ بدست می آوریم.

[۱۳] Singular value decomposition method



شکل ۱.۳: نمودار سه بعدی جواب تقریبی در مثال ۱.۳.۲

۱.۳.۳ نتایج عددی

در این بخش روش توضیح داده شده را روی چند مسئله بررسی می کنیم.

مثال ۱.۳.۳. معادله تلگراف (۱.۳) را با $\alpha = ۱۰$، $\beta = ۵$ و $f(x,t) = \alpha(۱ + \tan^۲(\frac{x+t}{۲})) + \beta^۲ \tan(\frac{x+t}{۲})$، در بازه $۰ \leq x \leq ۲$ در نظر می گیریم. همچنین شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر داده شده است:

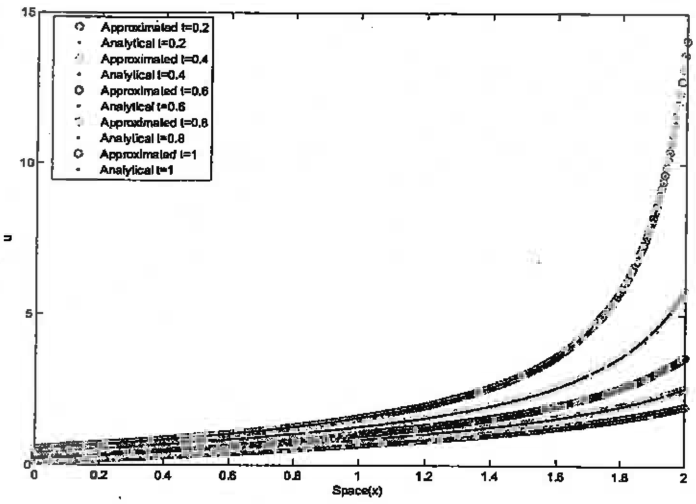
$$u(x,۰) = \tan(\frac{x}{۲}), \quad u_t(x,۰) = \frac{۱}{۲}(۱ + \tan^۲(\frac{x}{۲})),$$
$$u(۰,t) = \tan(\frac{t}{۲}), \quad u(۲,t) = \tan(\frac{۲+t}{۲}).$$

جواب این مسئله را به ازای شرایط مرزی و اولیه ذکر شده در بالا بدست می آوریم. جواب تحلیلی این مساله $u(x,t) = \tan((x+t)/۲)$ است. حال خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم را حساب کرده و نتایج را در جدول (۲.۳) ارائه می کنیم.

نمودار سه بعدی جواب تقریبی را برای $۰ \leq x \leq ۲$ و $۰ \leq t \leq ۱$ در شکل (۱.۳) نمایش می دهیم و همچنین به ازای t های متفاوت از مسئله جواب تقریبی و جواب دقیق مسئله

جدول ۲.۳: نتایج خطای میانگین و خطای ماکزیمم در $\Delta t = ۰/۰۰۱$ و $\Delta x = ۰/۰۰۵$ در مثال (۱.۳.۳).

t	$t = ۰/۲$	$t = ۰/۴$	$t = ۰/۶$	$t = ۰/۸$	$t = ۱$
L_∞	$۲/۷۷۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۰۷۸۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۳۸۴۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۰۹۳۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۳۴۲۴ \times ۱۰^{-۲}$
$L_۲$	$۳/۳۱۸۹ \times ۱۰^{-۸}$	$۲/۳۰۶۷ \times ۱۰^{-۷}$	$۸/۲۰۸ \times ۱۰^{-۷}$	$۳/۲۳۷ \times ۱۰^{-۶}$	$۳/۲۷۸۲ \times ۱۰^{-۵}$



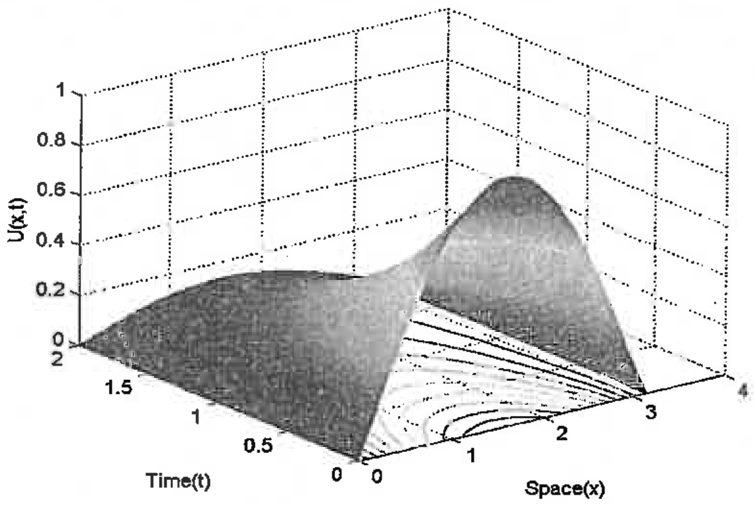
شکل ۲.۳: نمودار مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی به ازای t های مختلف در مثال (۱.۳.۳).

را در شکل (۲.۳) نمایش می دهیم.

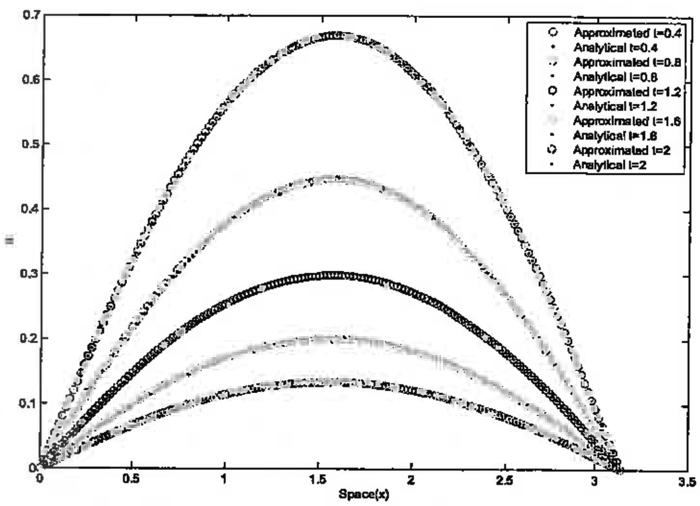
مثال ۲.۳.۳. معادله تلگراف (۱.۳) را با $\alpha = ۴$، $\beta = ۲$ و $f(x,t) = (۲-۲\alpha+\beta^۲)\exp(-t)\sin(x)$ که $x \in [۰,\pi]$ در نظر می گیریم. شرایط مرزی به صورت زیر داده شده است.

$$u(x,۰) = \sin(x), \qquad u_t(x,۰) = -\sin(x),$$
$$u(۰,t) = u(\pi,t) = ۰.$$

در مقایسه جواب بدست آمده از روش BQCM با جواب تحلیلی مساله $u(x,t) = \exp(-t)\sin(x)$ نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در جدول (۳.۳) نشان داده شده است.



شکل ۳.۳: نمودار سه بعدی جواب تقریبی در مثال (۲.۳.۳).



شکل ۴.۳: نمودار مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی به ازای t های مختلف در مثال (۲.۳.۳).

جدول ۳.۳: نتایج خطای میانگین و خطای ماکزیمم در $\Delta t = ۰/۰۰۰۱$ و $\Delta x = ۰/۰۲$ در مثال (۲.۳.۳).

$t = ۲$	$t = ۱/۶$	$t = ۱/۲$	$t = ۰/۸$	$t = ۰/۴$	t
L_∞	$۲/۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۸ \times ۱۰^{-۳}$
$L_۲$	$۵/۸۶۹۰ \times ۱۰^{-۶}$	$۱/۰۱۹۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۹/۳۵۹۱ \times ۱۰^{-۶}$	$۶/۹۰۱۱ \times ۱۰^{-۶}$	$۴/۵۷۸۲ \times ۱۰^{-۶}$

جدول ۴.۳: نتایج خطای میانگین و خطای ماکزیمم در $\Delta t = ۰/۰۱$ و $\Delta x = ۰/۰۰۵$ در مثال (۳.۳.۳)

t	$t = ۱$	$t = ۲$	$t = ۳$	$t = ۴$	$t = ۵$
L_∞	$۱/۹۱۷۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۱۳۸۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۷۰۵۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۰۲۷۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۹/۸۴۰۵ \times ۱۰^{-۵}$
$L_۲$	$۲/۱۱۲۰ \times ۱۰^{-۸}$	$۶/۵۸۳۰ \times ۱۰^{-۹}$	$۱/۵۶۶۰ \times ۱۰^{-۸}$	$۲/۱۷۳۴ \times ۱۰^{-۸}$	$۵/۲۷۱۳ \times ۱۰^{-۹}$

همچنین نمودار ۳ بعدی جواب تقریبی و نمودار به ازای t های متفاوت از مسئله برای جواب تقریبی وجواب تحلیلی به ترتیب در شکل ها (۳.۳) و (۴.۳) نمایش داده شده است.

مثال ۳.۳.۳. در این مثال معادله تلگراف (۱.۳) را با
$\alpha = \frac{۱}{۲}$، $\beta = ۱$ و $f(x,t)(۲ - ۲t + t^۲)(x - x^۲)\exp(-t) + ۲t^۲\exp(-t)$
برای $x \in [۰, ۱]$ در نظر بگیرید. شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر داده شده است:

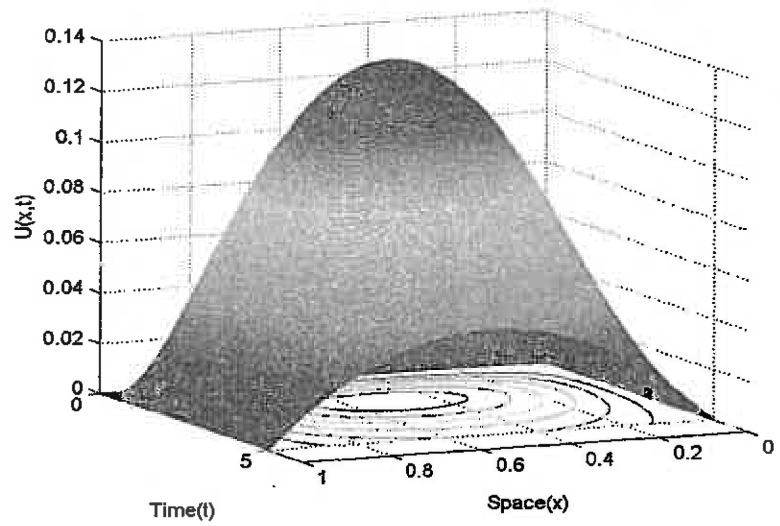
$$u(x, ۰) = u_t(x, ۰) = ۰, \quad ۰ \leq x \leq ۱, \tag{۲۵.۳}$$

$$u(۰, t) = u(۱, t) = ۰, \quad ۰ \leq t \leq ۵. \tag{۲۶.۳}$$

با داشتن جواب دقیق مسئله، دقت طرح ارائه شده را توسط $L_۲$ و L_∞ بدست می آوریم و در جدول (۴.۳) نمایش می دهیم. همچنین می توان نمودار سه بعدی جواب تقریبی

جدول ۵.۳: نتایج خطای میانگین و خطای ماکزیمم در $\Delta t = ۰/۰۰۱$ و $\Delta x = ۰/۰۰۵$ در مثال (۴.۳.۳).

t	$t = ۰/۲$	$t = ۰/۴$	$t = ۰/۶$	$t = ۰/۸$	$t = ۱$
L_∞	$۲/۴۲۷۹ \times ۱۰^{-۵}$	$۷/۹۳۱۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۲۰۹۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۴۸۸۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۶۴۶۲ \times ۱۰^{-۴}$
$L_۲$	$۱/۶۹۹۸ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۲/۶۷۰۷ \times ۱۰^{-۹}$	$۶/۷۸۴۹ \times ۱۰^{-۹}$	$۱/۰۷۲۶ \times ۱۰^{-۸}$	$۱/۳۴۳۸ \times ۱۰^{-۸}$



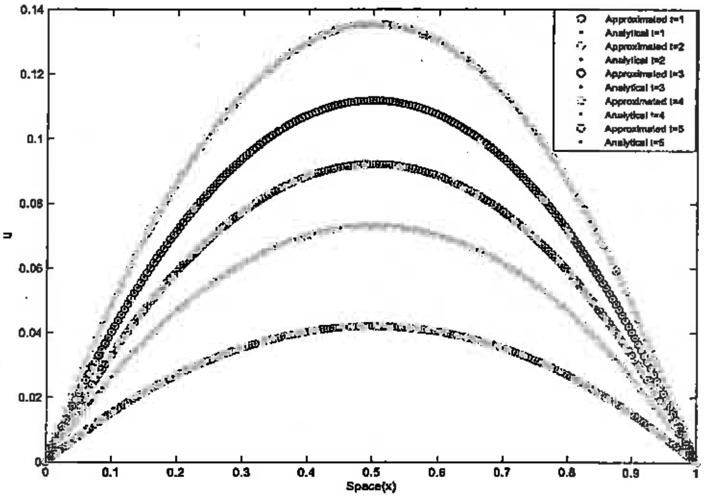
شکل ۵.۳: نمودار سه بعدی جواب تقریبی در مثال (۳.۳.۳).

مسئله و نمودار جواب دقیق و تقریبی را به ازای t های مختلف به ترتیب در شکل های (۵.۳) و (۶.۳) ارائه کرد.

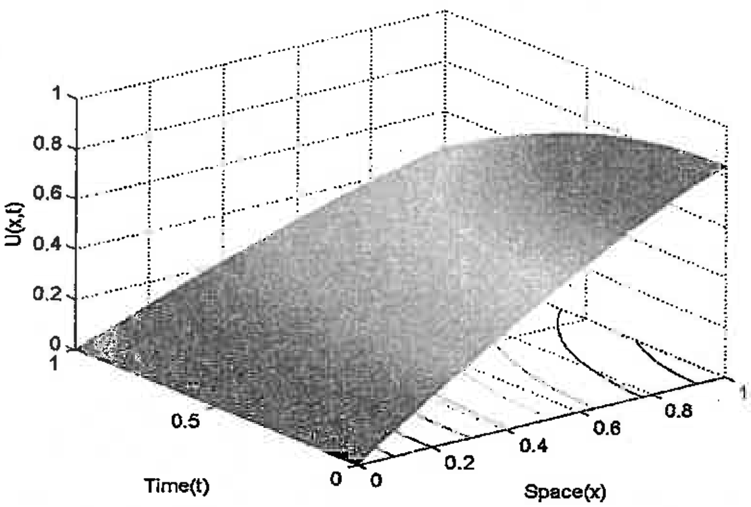
مثال ۴.۳.۳. معادله (۱.۳) را با $\alpha = ۶$، $\beta = ۲$ برای $x \in [۰, ۱]$ و شرایط زیر در نظر می گیریم:

$$
\begin{cases}
f_۰(x) = \sin(x), \\
f_۱(x) = ۰, \\
g_۰(t) = ۰, \\
g_۱(t) = \cos(t)\sin(۱), \\
f(x,t) = -۲\alpha \sin(t)\sin(x) + \beta^۲ \cos(t)\sin(x).
\end{cases}
$$

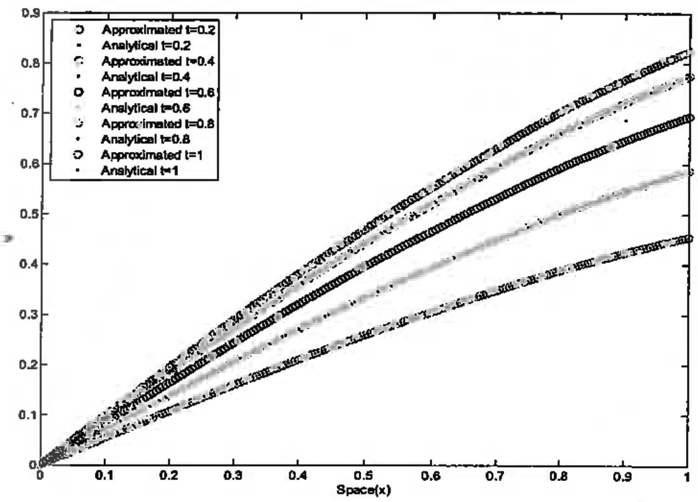
با مقایسه جواب تقریبی و جواب تحلیلی این مسئله یعنی $u(x,t) = \cos(t)\sin(x)$ خطای میانگین مربع $L_۲$ و خطای ماکزیمم L_∞ را بدست آورده و در جدول (۵.۳) ارائه شده است. نمودار سه بعدی جواب تقریبی در شکل (۷.۳) نمایش می دهیم و به ازای بعضی از t ها



شکل ۶.۳: نمودار مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی به ازای t های مختلف (۳.۳.۳).



شکل ۷.۳: نمودار سه بعدی جواب تقریبی در مثال (۴.۳.۳).



شکل ۸.۳: نمودار مقایسه جواب تقریبی و تحلیلی به ازای t های مختلف در مثال (۴.۳.۳).

نمودار جواب تقریبی و تحلیی در شکل (۸.۳) با هم مقایسه شده اند.

فصل ۴

حل عددی معادله تلگراف با استفاده از B – اسپلاین های مرتبه ۷

۱.۴ مقدمه

در این فصل، یک روش عددی بر اساس توابع B - اسپلاین مرتبه ۷[1]و روش کالوکیشن برای حل معادله دیفرانسیل هذلولوی تلگراف، استفاده خواهد شد. در پایان فصل نتایج عددی ارائه شده است که نشان دهنده این است که روش یک تکنیک کاربردی و همچنین تقریبی بسیار خوب از جواب دقیق مسئله است.

۲.۴ آشنایی با معادله

معادله هذلولوی خطی یک بُعدی مرتبه دوم را در نظر بگیرید

$$u_{tt} + ۲\alpha u_t + \beta u = u_{xx} + f(x,t), \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq ۰, \qquad (۱.۴)$$

با شرایط اولیه

$$u(x,۰) = f_۰(x), a \leq x \leq b, \qquad (۲.۴)$$

$$\frac{\partial u(x,۰)}{\partial t} = f_۱(x), a \leq x \leq b, \qquad (۳.۴)$$

وشرایط مرزی

$$u(a,t) = g_۰(t), \; u(b,t) = g_۱(t), u_x(a,t) = g_۲(t), \qquad (۴.۴)$$

$$u_x(b,t) = g_۳(t), \; u_{xx}(a,t) = g_۴(t), \; u_{xx}(b,t) = g_۵(t), \qquad (۵.۴)$$

---

[1]Septic B - spline

معادله (۱.۴) به عنوان معادله مرتبه دوم با ضرایب ثابت تلگراف شناخته می شود. این معادله به ترکیب بین پخش [۲] و انتشار موج [۳] توسط معرفی یک جمله که اثر سرعت محدود در معادله گرما یا معادله حمل ونقل [۴] حساب می کند، می سازد. معادله (۱.۴) معمولاً در آنالیز سیگنال ها برای انتقال و انتشارسیگنال های برق مورد استفاده قرار می گیرد و همچنین کاربرد هایی در سایر رشته ها نیز دارد [۳۵].

۳.۴ B - اسپلاین مرتبه ۷ و روش کالوکیشن

شبکه $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ ، بعنوان یک افراز یکنواخت از دامنه جواب $a \le x \le b$ توسط گره های x_j که $j = -3, -2, -1, 0, \ldots, N, N+1, N+2, N+3$ و $h = x_{j+1} - x_j$ در نظر می گیریم.

فرض کنید توابع B - اسپلاین مرتبه ۷ در گره های شبکه به صورت زیر تعریف شوند:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & x \in [x_{m-4}, x_{m-3}], \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & x \in [x_{m-3}, x_{m-2}], \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - & \\ 56(x - x_{m-1})^7, & x \in [x_{m-1}, x_m], \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - & \\ 56(x_{m+1} - x)^7, & x \in [x_m, x_{m+1}], \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & x \in [x_{m+2}, x_{m+3}], \\ (x_{m+4} - x)^7, & x \in [x_{m+3}, x_{m+4}], \\ 0, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

مجموعه اسپلاین های $\{\phi_{-3}, \phi_{-2}, \phi_{-1}, \phi_0, \ldots, \phi_N, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}, \phi_{N+3}\}$ یک پایه برای فضای جواب $a \le x \le b$ تشکیل می دهد. این بدین معنی است که مقادیر توابع B - اسپلاین

[۲] Diffusion

[۳] Wave Propagation

[۴] Mass transport Equation

مرتبه ۷ ومشتقات مرتبه اول و دوم سوم بیرون بازه $[x_{m-۴}, x_{m+۴}]$ صفر می باشد. مقادیر B - اسپلاین مرتبه ۷ و مشتقات آن در نقاط گره ای در جدول (۱.۴) نشان داده شده است.

جدول ۱.۴: مقادیر $\phi_m, \phi'_m, \phi''_m, \phi'''_m$.

x	$x_{m-۴}$	$x_{m-۳}$	$x_{m-۲}$	$x_{m-۱}$	x_m	$x_{m+۱}$	$x_{m+۲}$	$x_{m+۳}$	$x_{m+۴}$
ϕ_i	۰	۱	۱۲۰	۱۱۹۱	۲۴۱۶	۱۱۹۱	۱۲۰	۱	۰
ϕ'_i	۰	$\frac{۷}{h}$	$\frac{۳۹۲}{h}$	$\frac{۱۷۱۵}{h}$	۰	$\frac{-۱۷۱۵}{h}$	$\frac{-۳۹۲}{h}$	$\frac{-۷}{h}$	۰
ϕ''_i	۰	$\frac{۴۲}{h^۲}$	$\frac{۱۰۰۸}{h^۲}$	$\frac{۶۳۰}{h^۲}$	$\frac{-۳۳۶۰}{h^۲}$	$\frac{۶۳۰}{h^۲}$	$\frac{۱۰۰۸}{h^۲}$	$\frac{۴۲}{h^۲}$	۰
ϕ'''_i	۰	$\frac{۲۱۰}{h^۳}$	$\frac{۱۶۸۰}{h^۳}$	$\frac{-۳۹۹۰}{h^۳}$	۰	$\frac{۳۹۹۰}{h^۳}$	$\frac{-۱۶۸۰۰}{h^۳}$	$\frac{-۲۱۰}{h^۳}$	۰

در حل عددی معادله (۱.۴)، از روش کالوکیشن همراه با B - اسپلاین های مرتبه ۷ استفاده می کنیم. هدف یافتن جواب تقریبی $U_N(x,t)$ از جواب دقیق $u(x,t)$ به فرم

$$U_N(x,t) = \sum_{m=-۳}^{N+۳} \delta_m(t)\phi_m(x), \tag{۶.۴}$$

می باشد که در آن $\delta_m(t)$ مقادیر وابسته به زمان است که همراه با شرایط مرزی تعیین می شود:

$$U_N(a,t) = g_۰(t), \qquad U_N(b,t) = g_۱(t), \tag{۷.۴}$$

$$(U_x)_N(a,t) = g_۲(t), \quad (U_x)_N(b,t) = g_۳(t), \tag{۸.۴}$$

$$(U_{xx})_N(a,t) = g_۴(t), \quad (U_{xx})_N(b,t) = g_۵(t). \tag{۹.۴}$$

در ادامه این فصل از نماد $u_i = u(x, t_i)$ که در آن $t_i = t_{i-۱} + \Delta t$ استفاده می کنیم. طرح

های تفاضل متناهی زیر را داریم :

$$\frac{\partial^2 u(x,t_i)}{\partial t^2}=\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta t)^2}+O((\Delta t)^2), \qquad (10.4)$$

$$\frac{\partial u(x,t_i)}{\partial t}=\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta t}+O((\Delta t)^2), \qquad (11.4)$$

$$u(x,t_i)=\frac{u_{i+1}+2u_i+u_{i-1}}{4}+O((\Delta t)^2), \qquad (12.4)$$

$$\frac{\partial^2 u_{xx}(x,t_i)}{\partial x^2}=\frac{u''_{i+1}+u''_{i-1}}{2}+O((\Delta t)^2). \qquad (13.4)$$

اکنون، معادله (۱.۴) بر طبق طرح های معادله های (۱۳.۴)-(۱۰.۴) جدا سازی می کنیم و خواهیم داشت

$$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta t)^2}+2\alpha\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta t}+\beta^2\frac{u_{i+1}+2u_i+u_{i-1}}{4}=$$
$$\frac{u''_{i+1}+u''_{i-1}}{2}+f(x,t_i). \qquad (14.4)$$

معادله (۱۴.۴) را بصورت بازنویسی می کنیم

$$(1+\alpha\Delta t+\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{4})u_{i+1}-\frac{(\Delta t)^2}{2}u''_{i+1}=(2-\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{2})u_i+(\alpha\Delta t-$$
$$1-\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{4})u_{i-1}+\frac{(\Delta t)^2}{2}u''_i+(\Delta t)^2 f(x,t_i), \qquad (15.4)$$

و شرایط اولیه داده شده در معادله (۲.۴)-(۳.۴) را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$u(x,0)=f_0(t)=u_0, \qquad (16.4)$$

$$u_t(x,0)=\frac{u_1-u_0}{\Delta t}=f_1(x), \qquad (17.4)$$

$$u_1=u_0+\Delta t f_1(x). \qquad (18.4)$$

معادله (۱۸.۴) را در معادله (۱۵.۴) جایگذاری می کنیم؛ در این صورت داریم:

$$i=1,\quad (1+\alpha\Delta t+\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{4})u_2-\frac{(\Delta t)^2}{2}u''_2=(2-\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{2})u_1-(\alpha\Delta t-$$

$$1-\frac{\beta^{2}(\Delta t)^{2}}{4})u_{0}+\frac{(\Delta t)^{2}}{2}u_{1}''+(\Delta t)^{2}f(x,t_{1}), \tag{19.4}$$

$$i=2,\quad (1+\alpha\Delta t+\tfrac{\beta^{2}(\Delta t)^{2}}{4})u_{3}-\tfrac{(\Delta t)^{2}}{2}u_{3}''=(2-\tfrac{\beta^{2}(\Delta t)^{2}}{2})u_{2}-(\alpha\Delta t-$$

$$1-\frac{\beta^{2}(\Delta t)^{2}}{4})u_{1}+\frac{(\Delta t)^{2}}{2}u_{2}''+(\Delta t)^{2}f(x,t_{2}), \tag{20.4}$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$i=n-1,\quad (1+\alpha\Delta t+\frac{\beta^{2}(\Delta t)^{2}}{4})u_{n}-\frac{(\Delta t)^{2}}{2}u_{n}''=(2-\frac{\beta^{2}(\Delta t)^{2}}{2})u_{n-1}-(\alpha\Delta t-$$

$$1-\frac{\beta^{2}(\Delta t)^{2}}{4})u_{n-2}+\frac{(\Delta t)^{2}}{2}u_{n-1}''+(\Delta t)^{2}f(x,t_{n-1}). \tag{21.4}$$

حال جواب تقریبی در نظر گرفته شده $U_N(x,t)$ را در معادله های (۱۹.۴)-(۲۱.۴) قرار می دهیم، داریم:

$$i=1,\quad (1+\alpha\Delta t+\frac{\beta^{2}(\Delta t)^{2}}{4})(U_N)_{2}-\frac{(\Delta t)^{2}}{2}(U_N)_{2}''=(2-\frac{\beta^{2}(\Delta t)^{2}}{2})u_{1}-(\alpha\Delta t-$$

$$1-\frac{\beta^{2}(\Delta t)^{2}}{4})u_{0}+\frac{(\Delta t)^{2}}{2}u_{1}''+(\Delta t)^{2}f(x,t_{1}), \tag{22.4}$$

$$i=2,\quad (1+\alpha\Delta t+\frac{\beta^{2}(\Delta t)^{2}}{4})(U_N)_{3}-\frac{(\Delta t)^{2}}{2}(U_N)_{3}''=(2-\frac{\beta^{2}(\Delta t)^{2}}{2})u_{2}-(\alpha\Delta t-$$

$$1-\frac{\beta^{2}(\Delta t)^{2}}{4})u_{1}+\frac{(\Delta t)^{2}}{2}u_{2}''+(\Delta t)^{2}f(x,t_{2}), \tag{23.4}$$

...

...

...

$$i=n-1,\quad (1+\alpha\Delta t+\tfrac{\beta^2(\Delta t)^2}{4})(U_N)_n-\tfrac{(\Delta t)^2}{2}(U_N)''_n=(2-\tfrac{\beta^2(\Delta t)^2}{2})u_{n-1}+(\alpha\Delta t-$$

$$1-\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{4})u_{n-2}+\frac{(\Delta t)^2}{2}u''_{n-1}+(\Delta t)^2f(x,t_{n-1}), \qquad (۲۴.۴)$$

و شرایط مرزی را نیز میتوان به شکل زیر نوشت:

$$\sum_{m=-3}^{N+3}\delta_m(t)\phi_m(x_0)=g_0(t),\qquad x=a,\ 0\le t\le T, \qquad (۲۵.۴)$$

$$\sum_{m=-3}^{N+3}\delta_m(t)\phi_m(x_N)=g_1(t),\qquad x=b,\ 0\le t\le T, \qquad (۲۶.۴)$$

$$\sum_{m=-3}^{N+3}\delta_m(t)\phi'_m(x_0)=g_2(t),\qquad x=a,\ 0\le t\le T, \qquad (۲۷.۴)$$

$$\sum_{m=-3}^{N+3}\delta_m(t)\phi'_m(x_N)=g_3(t),\qquad x=b,\ 0\le t\le T, \qquad (۲۸.۴)$$

$$\sum_{m=-3}^{N+3}\delta_m(t)\phi''_m(x_0)=g_4(t),\qquad x=a,\ 0\le t\le T, \qquad (۲۹.۴)$$

$$\sum_{m=-3}^{N+3}\delta_m(t)\phi''_m(x_N)=g_5(t),\qquad x=b,\ 0\le t\le T. \qquad (۳۰.۴)$$

جواب اسپلاینی از معادله (۲۲.۴) با شرایط مرزی (۲۵.۴)-(۳۰.۴) توسط حل دستگاه زیر بدست می آید

$$AX=B, \qquad (۳۱.۴)$$

که در آن $X=[\delta_{-3},\delta_{-1},...,\delta_N,\delta_{N+3}]$. بعد ماتریس A برابر با $(N+7)\times(N+7)$ و ماتریسB یک ماتریس ستونی با $N+7$ سطر است که به ترتیب از سمت چپ و راست

معادله های (۲۲.۴) و(۲۵.۴)-(۳۰.۴) بصورت زیر بدست آمده است:

$$A=\begin{bmatrix}
1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\frac{4}{h} & \frac{392}{h} & \frac{1715}{h} & 0 & \frac{-1715}{h} & \frac{-392}{h} & \frac{-7}{h} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\frac{42}{h^2} & \frac{1008}{h^2} & \frac{630}{h^2} & \frac{-3360}{h^2} & \frac{630}{h^2} & \frac{1008}{h^2} & \frac{42}{h^2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_3 & r_2 & r_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_3 & r_2 & r_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_3 & r_2 & r_1 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_3 & r_2 & r_1\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{4}{h} & \frac{392}{h} & \frac{1715}{h} & 0 & \frac{-1715}{h} & \frac{-392}{h} & \frac{-7}{h}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{42}{h^2} & \frac{1008}{h^2} & \frac{630}{h^2} & \frac{-3360}{h^2} & \frac{630}{h^2} & \frac{1008}{h^2} & \frac{42}{h^2}
\end{bmatrix}$$

و

$$B=\begin{bmatrix}
g_0(t_1)\\
g_2(t_1)\\
g_4(t_1)\\
(\Delta t)^2 f(x_0,t_1)+(\alpha\Delta t-1-\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{4})u_0(x_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2}u_1''(x_0)+(2-\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{4})u_1(x_0)\\
(\Delta t)^2 f(x_1,t_1)+(\alpha\Delta t-1-\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{4})u_0(x_1)+\frac{(\Delta t)^2}{2}u_1''(x_1)+2-\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{4})u_1(x_1)\\
\vdots\\
(\Delta t)^2 f(x_N,t_1)+(\alpha\Delta t-1-\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{4})u_0(x_N)+\frac{(\Delta t)^2}{2}u_1''(x_N)+2-\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{4})u_1(x_N)\\
g_1(t_1)\\
g_3(t_1)\\
g_5(t_1)
\end{bmatrix}$$

که در آن

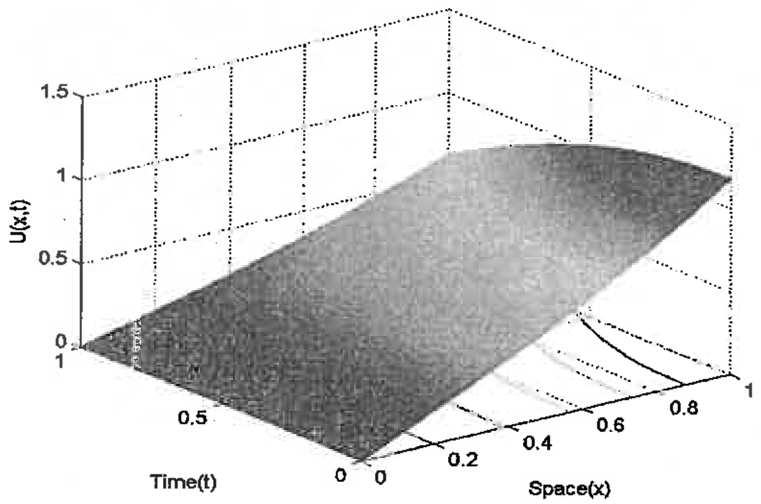
$$r_1=(1+\alpha\Delta t+\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{4})-\frac{21(\Delta t)^2}{h^2},$$

$$r_2=120(1+\alpha\Delta t+\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{4})-\frac{504(\Delta t)^2}{h^2},$$

$$r_3=1191(1+\alpha\Delta t+\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{4})-\frac{315(\Delta t)^2}{h^2},$$

$$r_4=2416(1+\alpha\Delta t+\frac{\beta^2(\Delta t)^2}{4})+\frac{1680(\Delta t)^2}{h^2}.$$

به آسانی می توان تقریبی مشابه برای معادله های (۲۳.۴) و (۲۴.۴) همراه با شرایط مرزی متناظر(۲۵.۴)-(۳۰.۴) بدست آورد. سیستم (۳۱.۴) را $n-1$ بار توسط برنامه که براساس



شکل ۴.۱: نمودار سه بعدی جواب تقریبی مثال (۴.۴.۱).

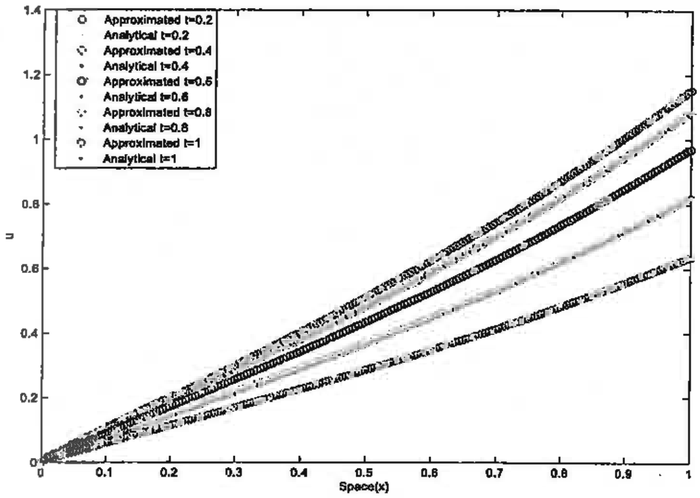
روش تجزیه مقدار تکین نوشته ایم، حل می کنیم و در هر مرحله $u(x_\circ, t_i), ..., u(x_N, t_i)$، ($i = ۱, ..., n - ۱$) بدست می آوریم.

۴.۴ مثال های عددی

در این بخش حل عددی از معادله هذلولوی تلگراف را برای دو مسئله بیان می کنیم. دقت روش عددی توسط محاسبه اختلاف بین حل عددی و تحلیلی در هر نقطه از شبکه محاسبه می کنیم و از آنها برای محاسبه خطای $L_۲$ و خطای نرم L_∞ استفاده می کنیم.

مثال ۴.۴.۱. معادله هذلولوی تلگراف (۴.۱) با $\alpha = ۲, \beta = ۱$ و $f(x,t) = -۲\alpha \sinh(x)\sin(t) + (\beta^۲ - ۲)\sinh(x)\cos(t)$ در بازه $[\circ, ۱]$ در نظر می گیریم. شرایط اولیه بصورت زیر مفروض است:

$$u(x, \circ) = \sinh(x), \qquad u_t(x, \circ) = \circ,$$



شکل ۲.۴: مقایسه جواب تحلیلی و جواب تقریبی مثال (۱.۴.۴) در زمان های مختلف.

و شرایط مرزی عبارتست از

$$u(\circ,t) = u_{xx}(\circ,t) = \circ, \qquad u(\text{۱},t) = u_{xx}(\text{۱},t) = \cos(t)\sinh(\text{۱}),$$
$$u_x(\circ,t) = \cos(t), \qquad u_x(\text{۱},t) = \cos(t)\cosh(\text{۱}).$$

خطای میانگین مربع $L_{\text{۲}}$ و خطای ماکزیمم L_∞ در جدول (۲.۴) ارائه شده است. همچنین نمودار سه بعدی آن در شکل (۱.۴) و نمودار جواب تحلیلی و تقریبی به ازای t های مختلف در شکل (۲.۴) رسم شده است.

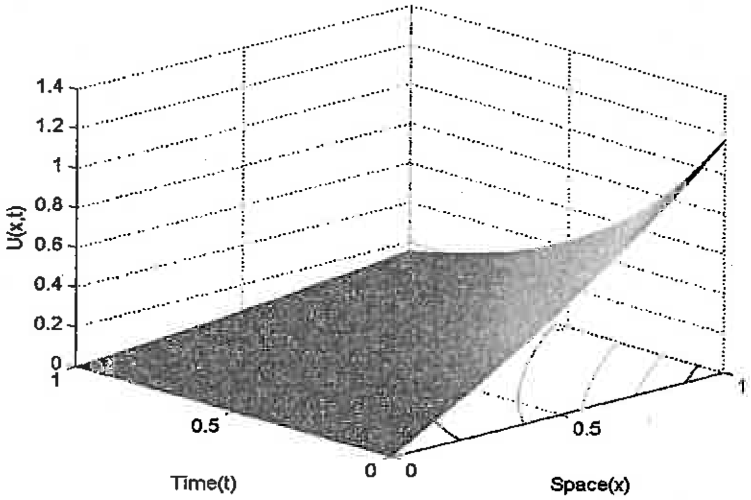
مثال ۲.۴.۴. معادله (۱.۴) همراه با شرایط اولیه و مرزی زیر را در نظر می گیریم:

$$u(x,\circ) = \sinh(x), \qquad u_t(x,\circ) = -\text{۲}\sinh(x),$$
$$u(\circ,t) = u_{xx}(\circ,t) = \circ, \qquad u(\text{۱},t) = u_{xx}(\text{۱},t) = \exp(-\text{۲}t)\sinh(\text{۱}),$$
$$u_x(\circ,t) = \exp(-\text{۲}t), \qquad u_x(\text{۱},t) = \exp(-\text{۲}t)\cosh(\text{۱}).$$

خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در جدول (۳.۴) ارائه شده است. همچنین نمودار

جدول ۲.۴: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم به ازای $\Delta t =$ ۰/۰۰۱ و $\Delta x =$ ۰/۰۰۵ در مثال (۱.۴.۴)

t	$t =$ ۰/۲	$t =$ ۰/۴	$t =$ ۰/۶	$t =$ ۰/۸	$t =$ ۱
L_∞	۲/۷۷۴ × ۱۰$^{-۴}$	۷/۰۷۸۲ × ۱۰$^{-۴}$	۱/۳۸۴۸ × ۱۰$^{-۳}$	۳/۰۹۳۰ × ۱۰$^{-۳}$	۱/۳۴۲۴ × ۱۰$^{-۲}$
$L_۲$	۳/۳۱۸۹ × ۱۰$^{-۸}$	۲/۳۰۶۷ × ۱۰$^{-۷}$	۸/۲۰۸ × ۱۰$^{-۷}$	۳/۲۳۷ × ۱۰$^{-۶}$	۳/۲۷۸۲ × ۱۰$^{-۵}$

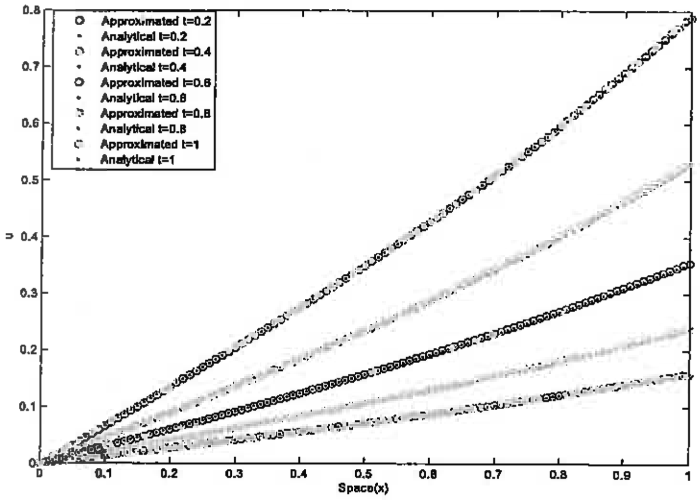


شکل ۳.۴: نمودار سه بعدی جواب تقریبی مثال (۲.۴.۴).

سه بعدی آن در شکل (۳.۴) و نمودار جواب تحلیلی و تقریبی به ازای t های مختلف در شکل (۴.۴) رسم شده است.

جدول ۳.۴: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم به ازای $\Delta t =$ ۰/۰۰۱ و $\Delta x =$ ۰/۰۱ در مثال (۲.۴.۴).

t	$t =$ ۰/۲	$t =$ ۰/۴	$t =$ ۰/۶	$t =$ ۰/۸	$t =$ ۱
L_∞	۳/۲ × ۱۰$^{-۳}$	۱/۵ × ۱۰$^{-۳}$	۶/۵۱۳۷ × ۱۰$^{-۴}$	۲/۹۴۲۶ × ۱۰$^{-۴}$	۱/۴۵۵۵ × ۱۰$^{-۴}$
$L_۲$	۲/۰۸۶۵ × ۱۰$^{-۷}$	۶/۱۱۷۷ × ۱۰$^{-۷}$	۱/۳۸۶۴ × ۱۰$^{-۷}$	۴/۱۰۰۷ × ۱۰$^{-۸}$	۱/۰۶۶۵ × ۱۰$^{-۸}$



شکل ۴.۴: مقایسه جواب تحلیلی و جواب تقریبی مثال (۲.۴.۴) در زمان های مختلف.

فصل ۵

حل معادله تلگراف به روش شبه درونیاب با B - اسپلاین مکعبی

۱.۵ مقدمه

در این فصل از پایان نامه معادله تلگراف بصورت عددی توسط روش شبه درونیاب B - اسپلاین[1] حل خواهد شد. ما یک طرح عددی با استفاده از مشتق شبه درونیاب برای تقریب مشتق فضایی متغیر وابسته و تفاضلات پیشرو مرتبه پایین برای تقریب مشتق زمانی متغیر وابسته، بدست خواهیم آورد. یکی از مزیت های نتایج طرح ارائه شده این است که الگوریتم آن بسیار ساده است و به حل دستگاه های ماتریسی نمی رسیم. در انتها با ارائه ۳ مثال عددی، نتایج این طرح با جواب تحلیلی مقایسه می شود که تائیدی بر دقت خوب طرح ارائه شده است.

۲.۵ معرفی معادله

معادله تلگراف در یک بُعد را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} + ۲\alpha\frac{\partial u}{\partial t} + \beta^۲ u = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + f(x,t), \quad ۰ \leq x \leq L, \quad ۰ \leq t \leq T, \qquad (۱.۵)$$

با شرایط اولیه

$$u(x,۰) = f_۰(x), ۰ \leq x \leq L, \qquad (۲.۵)$$

$$\frac{\partial u(x,۰)}{\partial t} = f_۱(x), \quad ۰ \leq x \leq L, \qquad (۳.۵)$$

و شرایط مرزی

$$u(a,t) = g_۰(t), \quad u(b,t) = g_۱(t), \qquad (۴.۵)$$

[1] cubic B-spline quasi-interpolation

که در آن α و β ضرایب ثابت معلوم در مسئله هستند و $\alpha > \beta \geq 0$. معادله هایی به فرم معادله (۱.۵) در مطالعات گسترش سیگنال های الکتریکی[۲] در خطوط انتقال کابل و پدیده های موجی رخ می دهد. اثر متقابل بین انتقال و انتشار یا عمل متقابل از واکنش و انتشاردر تعدادی از پدیده های غیرخطی در فرایند های فیزیکی، شیمی و زیستی شرح داده شده است [۳۶]-[۳۹].

در واقع معادله تلگراف بسیار مناسب تر از معادله انتشار معمولی در مدل سازی عکس العمل انتشار برای شاخه هایی از علوم است. برای مثال زیست شناسان با این معادله در مطالعه جریان فشار خون در شریان و حرکت تصادفی ساس[۳] در امتداد پرچین در یک بُعد[۴۰] مواجه می شوند. همچنین انتشار امواج صوتی در رسانه های متخلخل نوع دارسی[۴][۴۱] و جریان های موازی مایع ماکسول چسبناک [۵] [۴۲] بعضی از پدیده های حاکم [۴۳]-[۴۴] توسط معادله (۱.۵) هستند . در اینجا طرح عددی از معادله دیفرانسیل تلگراف را پیشنهاد می کنیم که بر اساس مشتقات درونیاب B - اسپلاین مرتبه ۳ برای تقریب مشتقات x و تفاضلات متناهی برای مشتقات t است. این طرح برای معادلات برگرز و برگرز - فیشر در مقالات به کار برده شده است. مزیت این روش اینست که نیازمند به حل دستگاه های ماتریسی نمی شویم و نگران بد وضع بودن ماتریس نخواهیم بود و همچنین این روش دارای خطای عددی کمتری خواهد بود و در زمان نیز صرفه جویی می شود.

[۲] Propagation of electrical signals

[۳] Bugs

[۴] Darcy-type porous media

[۵] Parallel Flows of Viscous Maxwell Fluids

۳.۵ طرح عددی شبه درونیابی B - اسپلاین یک متغییره

برای بازه $I = [a, b]$ فضای توابع اسپلاین های یک متغییره مرتبه d را با $S_d(X_n)$ و C^{d-1} روی افراز یکنواخت $X_n = \{x_i = a + ih, i = 0, \dots, n\}$ با طول گام $h = \frac{b-a}{n}$ که در آن $x_n = b$ باشد، تعیین می کنیم. فرض کنید پایه B - اسپلاین $S_d(X_n)$ مجموعه $\{B_j; j \in J\}$ با $J = \{1, 2, ..., n+d\}$ باشد که توسط فرمول deBoor – Cox محاسبه می شود [۴۵].

رابطه deBoor – Cox [۴۵] برای محاسبه B - اسپلاین B_j، $j \in J$ بصورت زیر است:

$$B_j(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_j)^3}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)(x_{j+3}-x_j)} & x \in [x_j, x_{j+1}), \\[2ex] \frac{(x-x_j)^2(x_{j+2}-x)}{(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_j)} + \frac{(x-x_j)(x_{j+3}-x)(x-x_{j+1})}{(x_{j+3}-x_j)(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})} + \frac{(x_{j+4}-x)(x-x_{j+1})^2}{(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+4}-x_{j+1})} & x \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\[2ex] \frac{(x-x_j)(x_{j+3}-x)^2}{(x_{j+3}-x_j)(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+2})} + \frac{(x-x_{j+1})(x_{j+4}-x)(x_{j+3}-x)}{(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+4}-x_{j+1})} + \frac{(x_{j+4}-x)^2(x-x_{j+2})}{(x_{j+4}-x_{j+1})(x_{j+4}-x_{j+2})(x_{j+3}-x_{j+2})} & x \in [x_{j+2}, x_{j+3}), \\[2ex] \frac{(x_{j+4}-x)^3}{(x_{j+4}-x_{j+1})(x_{j+4}-x_{j+2})(x_{j+4}-x_{j+3})} & x \in [x_{j+3}, x_{j+4}), \\[2ex] 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{5.5}$$

محمل B_j با نماد $\mathrm{supp}(B_j)$ نشان داده می شود و عبارتست از $\mathrm{supp}(B_j) = [X_{j-d-1}, X_j]$. بطور معمول، گره های مضاعف را در انتهای نقاط پایانی بصورت زیر قرار می دهیم:

$b = X_n = X_{n+1} = ... = X_{n+d}$ و $a = X_{-d} = X_{-d+1} = ... = X_0$

در [۴۶]-[۴۷]، شبه درونیابی B - اسپلاین[۶] یک متغییره (به اختصار QIs) میتوان به صورت

[۶] Quasi-Interpolants

عملگر زیر تعریف می شود

$$Q_d f = \sum_{j\in J} \mu_j B_j. \qquad (۶.۵)$$

فضای چندجمله ای های حداکثر از مرتبه d را با نماد Π_d نمایش می دهیم. در حالت کلی، ما اعمال نفوذ می کنیم که Q_d روی فضای Π_d دقیق است بدین معنی که $Q_d p = p$ برای همه $p \in \Pi_d$. به عنوان دنباله ای از این خاصیت، تقریب مرتبه Q_d روی توابع هموار $O(h^{d+1})$ است. ضرایب μ_j یک ترکیب خطی از مقادیر f در بعضی از نقاط همسایگی $\mathrm{supp}(B_j)$ است[۴۶]-[۴۷]. مزیت اصلی این روش دارا بودن یک روش مستقیم بدون حل کردن هیچ دستگاه معادله خطی می باشد. خصوصاً اینکه این روش بسیار ساده و تاثیرگذار برای مشتق گیری و انتگرال گیری عددی است. اگرچه این محلی است، بدین معنی که مقدار $Q_d f(x)$ فقط به مقدار f در همسایگی x بستگی دارد. سرانجام این روش دارای تقریباً نرم بی نهایت کوچکی است، بنابراین جواب های بدست آمده بسیار دقیق می باشند[۴۷].

در این پایان نامه از شبه درونیاب B - اسپلاین مکعبی استفاده می کنیم. فرض کنید $y_i = f(x_i)$ که $i = ۰, ۱, ..., n$ برای شبه درونیاب B - اسپلاین مکعبی

$$Q_۳ f = \sum_{j=۱}^{n+۳} \mu_j(f) B_j, \qquad (۷.۵)$$

ضرایب آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \mu_۱(f) = f_۰, \\ \mu_۲(f) = \frac{۱}{۱۸}(۷f_۰ + ۱۸f_۱ - ۹f_۲ + ۲f_۳), \\ \mu_j(f) = \frac{۱}{۶}(-f_{j-۳} + ۸f_{j-۲} - f_{j-۱}), \ j = ۳, ..., n+۱, \\ \mu_{n+۲}(f) = \frac{۱}{۱۸}(۲f_{n-۳} - ۹f_{n-۲} + ۱۸f_{n-۱} + ۷f_n), \\ \mu_{n+۳}(f) = f_n. \end{cases} \qquad (۸.۵)$$

برای $f \in C^۴(I)$، خطای تقریب شبه درونیاب [۴۷] برابر است با

$$\|f - Q_۳ f\|_{\infty, I_k} \le \frac{۸}{۳} d_{\infty, I_k}(f, \Pi_۳), \qquad ۱ \le k \le n, \qquad (۹.۵)$$

در نتیجه

$$\|f - Q_3 f\|_\infty = O(h^4).$$

درونیابی چندجمله ای ها منجر به تفاضلات متناهی کلاسیکی برای محاسبه تقریب مشتق می شود. بنابراین طبیعی به نظر می رسد تقریب مشتق های f توسط مشتق های $Q_3 f(x)$ تا مرتبه h^3 باشد. میتوان مقدار f در x_i ها را توسط تقریب های زیر $(Q_3 f)' = \sum_{j=1}^{n+3} \mu_j(f) B_j'$ و $(Q_3 f)'' = \sum_{j=1}^{n+3} \mu_j(f) B_j''$ ارزیابی کرد. برای $j \in J$، میتوان B_j' و B_j'' توسط فرمول مشتق های B - اسپلاین زیر محاسبه می شوند[۴۵]:

$$B_j'(x) = \begin{cases} \frac{3(x-x_j)^2}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)(x_{j+3}-x_j)} & x \in [x_j, x_{j+1}), \\ \frac{2(x-x_j)(x_{j+2}-x)-(x-x_j)^2}{(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_j)} + \frac{(x-x_j)(x_{j+3}-x)+(x-x_{j+1})(x_{j+3}+x_j-2x)}{(x_{j+3}-x_j)(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})} + \frac{-(x-x_{j+1})^2+2(x_{j+4}-x)(x-x_{j+1})}{(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+4}-x_{j+1})} & x \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ \frac{(x_{j+3}-x)^2-2(x-x_j)(x_{j+3}-x)}{(x_{j+3}-x_j)(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+2})} + \frac{(x_{j+3}-2x+x_{j+1})(x_{j+4}-x)-(x-x_{j+1})(x_{j+3}-x)}{(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+4}-x_{j+1})} + \frac{(x_{j+4}-x)^2-2(x-x_{j+2})(x_{j+4}-x)}{(x_{j+4}-x_{j+1})(x_{j+4}-x_{j+2})(x_{j+3}-x_{j+2})} & x \in [x_{j+2}, x_{j+3}), \\ \frac{-3(x_{j+4}-x)^2}{(x_{j+4}-x_{j+1})(x_{j+4}-x_{j+2})(x_{j+4}-x_{j+3})} & x \in [x_{j+3}, x_{j+4}), \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۱۰.۵)$$

و

$$B_j''(x)=\begin{cases}\frac{6(x-x_j)}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)(x_{j+3}-x_j)} & x\in[x_j,x_{j+1}),\\[2ex] \frac{2(x_{j+2}+2x_j-3x)}{(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_j)} \\ +\frac{2(x_{j+3}+x_{j+1}+x_j-3x)}{(x_{j+3}-x_j)(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})} \\ +\frac{2(x_{j+4}+2x_{j+1}-3x)}{(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+4}-x_{j+1})} & x\in[x_{j+1},x_{j+2}),\\[2ex] \frac{-4x_{j+3}-2x_j+6x}{(x_{j+3}-x_j)(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+2})} \\ +\frac{-2x_{j+4}-2x_{j+3}-2x_{j+1}+6x}{(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+4}-x_{j+1})} \\ +\frac{-4x_{j+4}-2x_{j+2}+6x}{(x_{j+4}-x_{j+1})(x_{j+4}-x_{j+2})(x_{j+3}-x_{j+2})} & x\in[x_{j+2},x_{j+3}),\\[2ex] \frac{6(x_{j+4}-x)}{(x_{j+4}-x_{j+1})(x_{j+4}-x_{j+2})(x_{j+4}-x_{j+3})} & x\in[x_{j+3},x_{j+4}),\\[2ex] 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases} \qquad (۱۱.۵)$$

در نتیجه فرمول مشتق برای شبه درونیاب B - اسپلاین مکعبی بدین صورت است:

$$(Q_3f)'=\sum_{j=1}^{n+3}\mu_j(f)B_j',\quad (Q_3f)''=\sum_{j=1}^{n+3}\mu_j(f)B_j''. \qquad (۱۲.۵)$$

حال اگر Q_3f' و Q_3f'' را در نقاط x_i حساب کنیم، داریم:

$$\begin{cases} Q_3f'(x_0)=\frac{1}{h}(-\frac{11}{6}f_0+3f_1-\frac{3}{2}f_2+\frac{1}{3}f_3),\\ Q_3f'(x_1)=\frac{1}{h}(-\frac{1}{3}f_0-\frac{1}{2}f_1+f_2-\frac{1}{6}f_3),\\ Q_3f'(x_j)=\frac{1}{h}(-\frac{1}{12}f_{j-2}-\frac{2}{3}f_{j-1}+\frac{2}{3}f_{j+1}-\frac{1}{12}f_{j+2}), \quad 2\le j\le n-2\\ Q_3f'(x_{n-1})=\frac{1}{h}(\frac{1}{6}f_{n-3}-f_{n-2}+\frac{1}{2}f_{n-1}+\frac{1}{3}f_n),\\ Q_3f'(x_n)=\frac{1}{h}(-\frac{1}{3}f_{n-3}+\frac{3}{2}f_{n-2}-3f_{n-1}+\frac{11}{6}f_n),\end{cases} \qquad (۱۳.۵)$$

و

$$\begin{cases} Q_3f''(x_0)=\frac{1}{h^2}(2f_0-5f_1+4f_2-f_3),\\ Q_3f''(x_1)=\frac{1}{h^2}(f_0-2f_1+f_2),\\ Q_3f''(x_j)=\frac{1}{h^2}(-\frac{1}{6}f_{j-2}+\frac{5}{3}f_{j-1}-3f_j+\frac{5}{3}f_{j+1}-\frac{1}{6}f_{j+2}), \quad 2\le j\le n-2\\ Q_3f''(x_{n-1})=\frac{1}{h^2}(f_{n-2}-2f_{n-1}+f_n),\\ Q_3f''(x_n)=\frac{1}{h^2}(-f_{n-3}+4f_{n-2}-5f_{n-1}+2f_n).\end{cases} \qquad (۱۴.۵)$$

۴.۵ طرح عددی با استفاده از شبه درونیاب B - اسپلاین مکعبی

در این بخش، یک طرح عددی برای حل معادله تلگراف (۱.۵) براساس شبه درونیاب B - اسپلاین مکعبی ارائه می شود. اگر طول گام زمانی را Δt در نظر بگیریم، بدین معنی که $t_j = j\Delta t$، آنگاه با استفاده از طرح تفاضلات متناهی، معادله (۱.۵) بصورت زیر تبدیل می شود

$$\frac{U_j^{k+1} - 2U_j^k + U_j^{k-1}}{(\Delta t)^2} + 2\alpha\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\Delta t} + \beta^2 U_j^k = (U_{xx})_j^k + f(x_j, t_k). \qquad (۱۵.۵)$$

سپس داریم

$$(1 + 2\alpha\Delta t)U_j^{k+1} = (2 + 2\alpha\Delta t - \beta^2(\Delta t)^2)U_j^k - U_j^{k-1} + (\Delta t)^2$$

$$(U_{xx})_j^k + (\Delta t)^2 f(x_j, t_k), \qquad (۱۶.۵)$$

که در آن $U_j^k \approx U(x_j, t_k)$. همچنین از مشتق های شبه درونیاب B - اسپلاین مکعبی $Q_3U(x_j, t_k)$ برای تقریب $(U_{xx})_j^k$ استفاده می کنیم. یا با جایگذاری معادله های (۱۴.۵) در معادله (۱۶.۵)داریم:

$j = 0,$

$(1 + 2\alpha\Delta t)U_0^{k+1} = (2 + 2\alpha\Delta t - \beta^2(\Delta t)^2)U_0^k - U_0^{k-1} + \frac{(\Delta t)^2}{h^2}(2U_0^k - 5U_1^k + 4U_2^k - U_3^k),$

$j = 1,$

$(1 + 2\alpha\Delta t)U_1^{k+1} = (2 + 2\alpha\Delta t - \beta^2(\Delta t)^2)U_1^k - U_1^{k-1} + \frac{(\Delta t)^2}{h^2}(U_0^k - 2U_1^k + U_2^k),$

$2 \leq j \leq n - 2,$

$(1+2\alpha\Delta t)U_j^{k+1} =$

$(2+2\alpha\Delta t-\beta^2(\Delta t)^2)U_j^k - U_j^{k-1} + \frac{(\Delta t)^2}{h^2}(-\frac{1}{6}U_{j-2}^k + \frac{5}{3}U_{j-1}^k - 3U_j^k + \frac{5}{3}U_{j+1}^k - \frac{1}{6}U_{j+2}^k),$

$j = n-1,$

$$(1+2\alpha\Delta t)U_{n-1}^{k+1} = (2+2\alpha\Delta t-\beta^2(\Delta t)^2)U_{n-1}^k - U_{n-1}^{k-1} + \frac{(\Delta t)^2}{h^2})(U_{n-2}^k - 2U_{n-1}^k \quad (17.5)$$

$+U_n^k),$

$j = n,$

$(1+2\alpha\Delta t)U_n^{k+1} = (2+2\alpha\Delta t-\beta^2(\Delta t)^2)U_n^k - U_n^{k-1} + \frac{(\Delta t)^2}{h^2}(-U_{n-3}^k + 4U_{n-2}^k - 5U_{n-1}^k + 2U_n^k).$

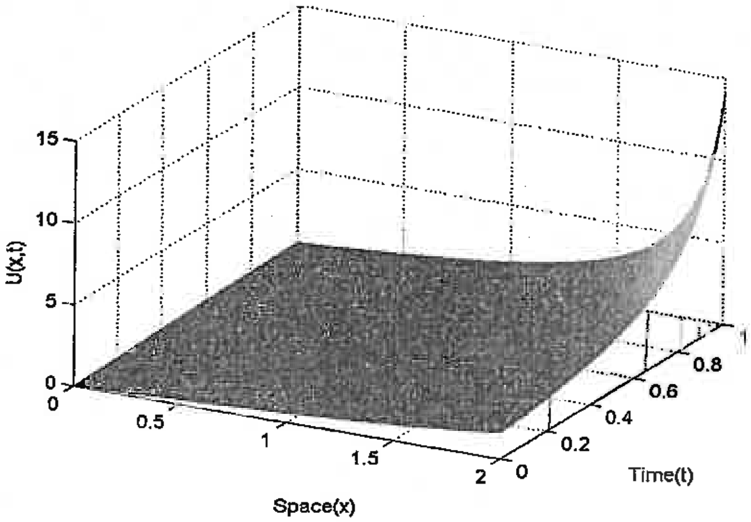
با توجه به شرایط اولیه و شرایط مرزی حل عددی معادله تلگراف و با توجه به طرح شبه درونیاب B - اسپلاین مکعبی ارائه شده یک جواب تقریبی برای معادله تلگراف (۱.۵) بدست خواهیم آورد.

۵.۵ مثال های عددی

در این بخش ۳ مسئله از معادله تلگراف را با شرایط اولیه(۲.۵)-(۳.۵) و شرایط مرزی(۴.۵) و طرح عددی(۱۷.۵) حل می کنیم. در اینجا خطا توسط خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم بصورت زیر محاسبه می کنیم:

$$L_2 = |U - U_N|^2 = h\sum_{j=0}^{N} |U_j - (U_N)_j|^2, \quad L_\infty = |U - U_N|_\infty = \max_j |U_j - (U_N)_j|.$$

مثال ۱.۵.۵. معادله تلگراف هذلولوی را با $\alpha = 10, \beta = 5, f(x,t) = \alpha(1+\tan^2(\frac{x+t}{2})) + \beta^2\tan(\frac{x+t}{2})$ در بازه $0 \le x \le 2$ در نظر می گیریم. همچنین فرض کنید شرایط اولیه و



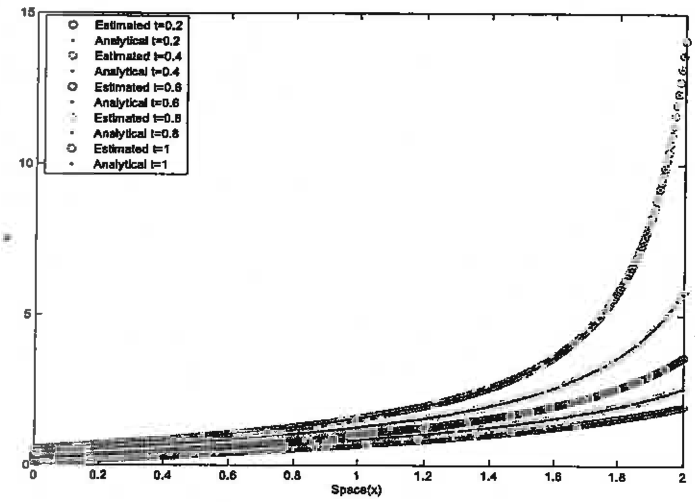
شکل ۱.۵: نمودار سه بعدی جواب تقریبی در مثال(۱.۵.۵).

مرزی به صورت زیر داده شده است:

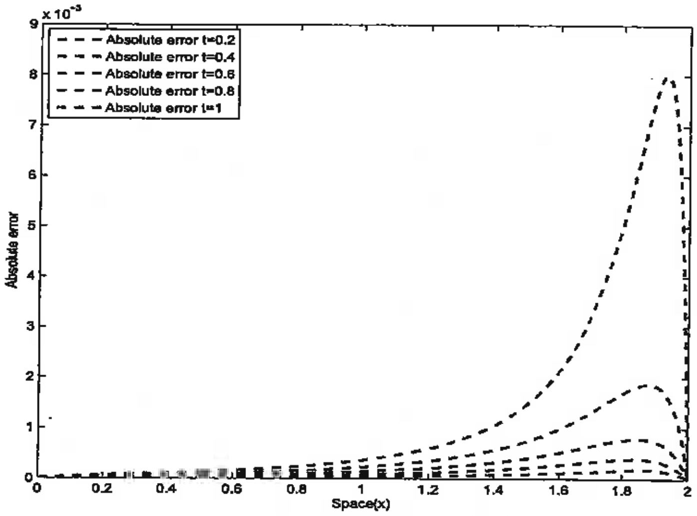
$$u(x,\circ) = \tan(\frac{x}{۲}), \quad u_t(x,\circ) = \frac{۱}{۲}(۱ + \tan^۲(\frac{x}{۲})),$$
$$u(\circ,t) = \tan(\frac{t}{۲}), \quad u(۲,t) = \tan(\frac{۲+t}{۲}).$$

جواب این مسئله را به ازای شرایط مرزی و اولیه ذکر شده در بالا بدست می آوریم. جواب تحلیلی این مثال $u(x,t) = \tan((x+t)/۲)$ است. حال خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم را حساب کرده و نتایج را در جدول (۱.۵) ارائه می کنیم. نمودار سه بعدی جواب تقریبی را برای $\circ \le x \le ۲$ و $\circ \le t \le ۱$ در شکل (۱.۵) نشان داده می شود؛ همچنین به ازای t های متفاوت از مسئله، جواب تقریبی و جواب دقیق مسئله در شکل (۲.۵) نمایش داده می شود. نمودار خطای مطلق بین جوابها ی تقریبی و تحلیلی در شکل (۳.۵) نمایش داده می شود.

مثال ۲.۵.۵. معادله تلگراف با $\alpha = ۴, \beta = ۲, f(x,t) = (۲ - ۲\alpha + \beta^۲)\exp(-t)\sin(x)$ که $x \in [\circ, \pi]$ است، در نظر بگیرید.



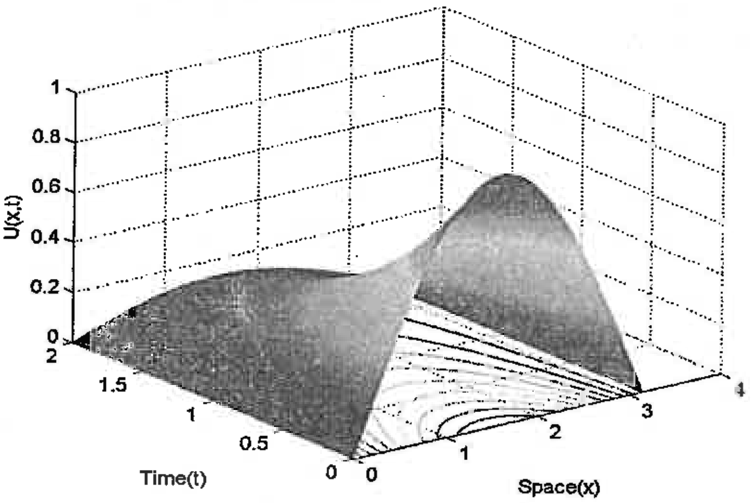
شکل ۲.۵: نمودار مقایسه جواب تحلیلی و جواب تقریبی به ازای $t = ۰/۲, t = ۰/۴, t = ۰/۶, t = ۰/۸, t = ۱$ برای مثال (۱.۵.۵)



شکل ۳.۵: خطای مطلق جواب تحلیلی و جواب تقریبی در مثال (۱.۵.۵).

جدول ۱.۵: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم با $\Delta t = ۰/۰۰۱$ و $\Delta x = ۰/۰۰۵$ در مثال (۱.۵.۵).

t	$t = ۰/۲$	$t = ۰/۴$	$t = ۰/۶$	$t = ۰/۸$	$t = ۱$
L_∞	$۱/۸۹۱۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۹۷۱۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۹۹۴۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۸۷۹۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۸/۰۱۱۳ \times ۱۰^{-۳}$
$L_۲$	$۱/۲۶۴۵ \times ۱۰^{-۸}$	$۶/۲۵۵۲ \times ۱۰^{-۸}$	$۲/۳۵۲۳ \times ۱۰^{-۷}$	$۱/۰۷۳۲ \times ۱۰^{-۶}$	$۱/۷۷۱ \times ۱۰^{-۵}$

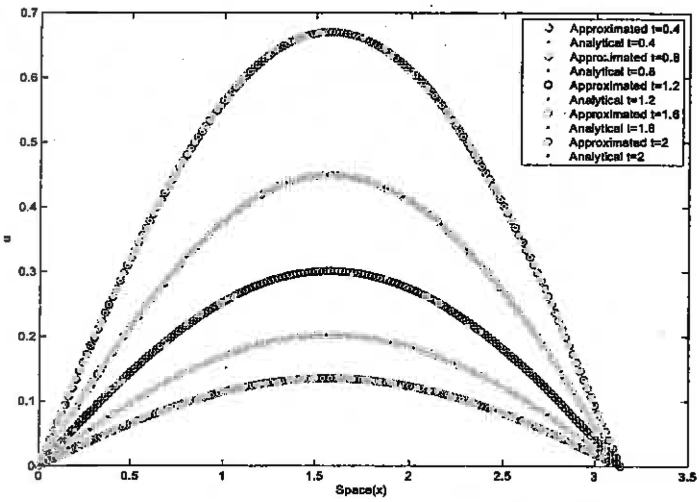


شکل ۴.۵: نمودار سه بعدی جواب تقریبی در مثال (۲.۵.۵).

شرایط مرزی به صورت زیر داده شده است:

$$u(x, ۰) = \sin(x), \quad u_t(x, ۰) = -\sin(x),$$
$$u(۰, t) = u(\pi, t) = ۰.$$

این مسئله دارای جواب تحلیلی $u(x,t) = \exp(-t)\sin(x)$ است. در مقایسه جواب بدست آمده از روش BQCM با جواب تحلیلی مساله، نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در جدول (۲.۵) نشان داده شده است. نمودار ۳ بعدی جواب تقریبی و نمودار به ازای t های متفاوت از مسئله جواب تقریبی وجواب تحلیلی به ترتیب در شکل های (۴.۵) و (۵.۵) نمایش داده شده است. همچنین نمودار خطای مطلق بین جوابها ی تقریبی و تحلیلی در



شکل ۵.۵: نمودار مقایسه جواب تحلیلی و جواب تقریبی در $t = ۰/۴, t = ۰/۸, t = ۱/۲, t = ۱/۶, t = ۲$ برای مثال (۲.۵.۵).

جدول ۲.۵: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم با $\Delta t = ۰/۰۰۱$ و $\Delta x = ۰/۰۲$ در مثال (۲.۵.۵).

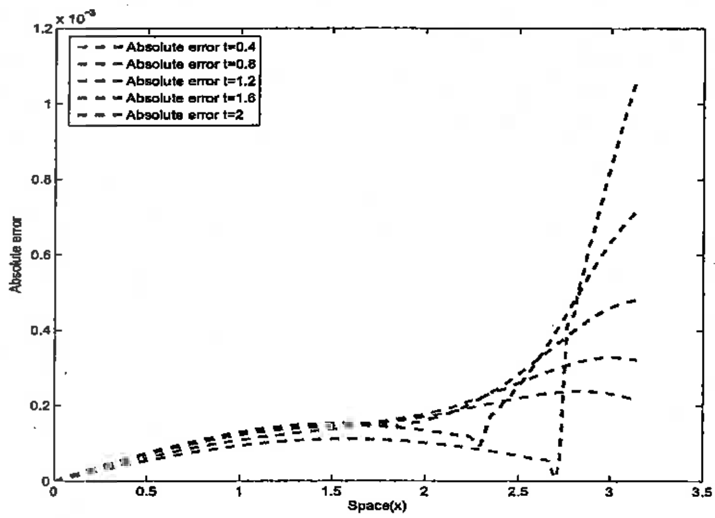
t	$t = ۰/۵$	$t = ۱$	$t = ۱/۵$	$t = ۱/۷۵$	$t = ۲$
L_∞	$۱/۰۶۷۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۷/۱۵۶۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۸۱۲۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۵۱۹۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۸۳۹۸ \times ۱۰^{-۴}$
$L_۲$	$۲/۸۴۵۰ \times ۱۰^{-۷}$	$۲/۸۹۸۳ \times ۱۰^{-۷}$	$۲/۵۸۲۵ \times ۱۰^{-۷}$	$۲/۰۸۹۲ \times ۱۰^{-۷}$	$۱/۵۷۴۴ \times ۱۰^{-۷}$

شکل (۶.۵) نشان داده می شود.

مثال ۳.۵.۵. معادله (۱.۵) را با $\alpha = ۶, \beta = ۲$ در بازه $x \in [۰, ۱]$ و با شرایط زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} f_۰(x) = \sin(x), \\ f_۱(x) = ۰, \\ g_۰(t) = ۰, \\ g_۱(t) = \cos(t)\sin(۱), \\ f(x,t) = -۲\alpha \sin(t)\sin(x) + \beta^۲ \cos(t)\sin(x). \end{cases}$$

جواب تحلیلی این مساله $u(x,t) \cos(t)\sin(x)$ است. در مقایسه جواب تقریبی و جواب

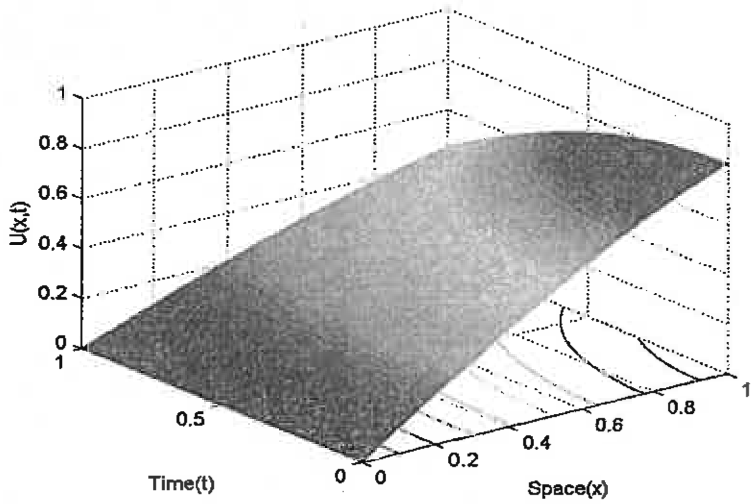


شکل ۶.۵: خطای مطلق جواب تحلیلی و جواب تقریبی در مثال (۲.۵.۵)

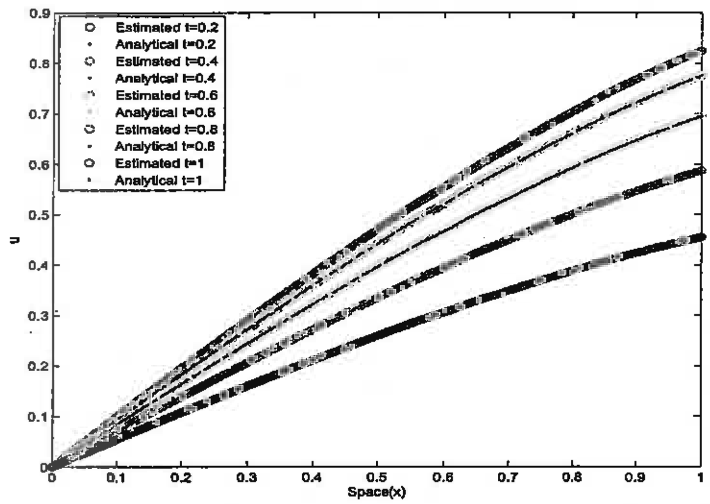
تحلیلی این مسئله، خطای میانگین مربع $L_۲$ و خطای ماکزیمم L_∞ در جدول (۳.۵) ارائه شده است. نمودار سه بعدی جواب تقریبی در شکل (۷.۵) نمایش داده شده و به ازای بعضی از t ها نمودار جواب تقریبی و تحلیلی در شکل (۸.۵) نشان داده شده است. در نهایت نمودار خطای مطلق بین جوابها ی تقریبی و تحلیلی در شکل (۹.۵) ارائه شده است.

جدول ۳.۵: نتایج خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم با $\Delta t = ۰/۰۰۰۵$ و $\Delta x = ۰/۰۰۲$ در مثال (۳.۵.۵).

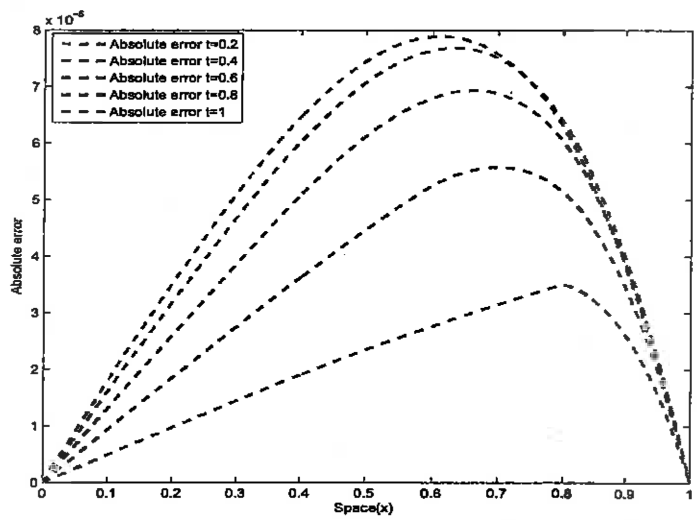
t	$t = ۰/۲$	$t = ۰/۴$	$t = ۰/۶$	$t = ۰/۸$	$t = ۱$
L_∞	$۳/۵۰۰۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۵/۵۷۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۶/۹۳۳۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۶۸۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۷/۸۹۰۸ \times ۱۰^{-۵}$
$L_۲$	$۴/۸۶۹۱ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۱/۴۱۶۸ \times ۱۰^{-۹}$	$۲/۳۱۲۸ \times ۱۰^{-۹}$	$۲/۹۱۹۹ \times ۱۰^{-۹}$	$۳/۱۲۲۳ \times ۱۰^{-۹}$



شکل ۷.۵: نمودار سه بعدی جواب تقریبی در مثال (۳.۵.۵).



شکل ۸.۵: نمودار مقایسه جواب تحلیلی و جواب تقریبی به ازای $t = ۰/۲, t = ۰/۴, t =$ $۰/۶, t = ۰/۸, t = ۱$ در مثال (۳.۵.۵).



شکل ۵.۹: خطای مطلق جواب تحلیلی و جواب تقریبی در مثال (۵.۵.۳).

فصل ۶

حل عددی معادله فرنبرگ - وایتهام

۱.۶ مقدمه

در این فصل، طرح کالوکیشن B - اسپلاین مرتبه چهار برای پیدا کردن جواب عددی از معادله فرنبرگ - وایتهام[۱] پیاده سازی می کنیم. این طرح براساس فرمول کرانک نیکلسون[۲] برای زمان است و همچنین طرح ارائه شده روشی مشابه روش تفاضلات متناهی استفاده می کند. در ادامه کار به دنبال پایداری روش ارائه شده برای مسئله هستیم.

در پایان فصل نتایج عددی ارائه شده است که با جواب تحلیلی آن مقایسه می شود که تاییدی برای دقت خوبی طرح ارائه شده می باشد. همچنین نتایج مقایسه را بصورت گرافیگی نیز ارائه خواهیم کرد.

۲.۶ معرفی معادله

معادله فرنبرگ - وایتهام را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$u_t - u_{xxt} + u_x = uu_{xxx} - uu_x + ۳u_xu_{xx}, \qquad (۱.۶)$$

در ابتدا مطالعه حرکت کیفی شکست موج پیشنهاد شده است [۴۸]. در سال ۱۹۷۸، فرنبرگ - وایتهام یک جواب نوک تیز $u(x,t) = Ae^{-\frac{۱}{۲}|x-\frac{۴}{۳}t|}$ با ثابت اختیاری A بدست آوردند. این معادله با روش تحلیلی مثل روش تجزیه آدومیان[۴۹]، روش آشفتگی هموتوپی [۵۰] و روش ناپایداری تکراری[۵۱] حل شده است و ما در اینجا به دنبال جواب عددی با استفاده از تابع B - اسپلاین و روش کالوکیشن از این معادله هستیم.

[۱] Fornberg-Whitham equation

[۲] Crank-Nicholson rule

۳.۶ روش کالوکیشن B - اسپلاین مرتبه ۴

معادله فرنبرگ - وایتهام (۱.۶) را همراه با انتخاب شرایط مرزی از شرایط زیر

$$u(a,t) = g_0(t), \quad u(b,t) = g_1(t), \quad u_x(a,t) = g_2(t),$$

$$u_x(b,t) = g_3(t), \quad u_{xx}(a,t) = g_4(t), \quad u_{xx}(b,t) = g_5(t), \tag{۲.۶}$$

و شرط اولیه ای که در قسمت های محاسباتی مسئله مطرح می شود، در نظر می گیریم.
دامنه جواب $[a,b]$ به عناصر متناهی با طول گام h توسط گره های x_i که $i = 0, 1, ..., N$ بصورت زیر افراز بندی می شوند:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b, \qquad h = x_{i+1} - x_i, \qquad i = 0, 1, ..., N-1.$$

روی این افراز توابع B - اسپلاین مرتبه ۴ به صورت زیر بیان می شوند:

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^4}\begin{cases} (x - x_{m-2})^4 & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 & x \in [x_{m-1}, x_m], \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4 & x \in [x_m, x_{m+1}], \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4 & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ (x_{m+3} - x)^4 & x \in [x_{m+2}, x_{m+3}], \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۳.۶}$$

مجموعه B - اسپلاین های مرتبه ۴، $\{Q_{-2}, Q_{-1}, ..., Q_{N+1}\}$ یک پایه روی ناحیه $a \le x \le b$ برای فضای جواب مساله تشکیل می دهد. بنابراین تقریب U_N از جواب را میتوان به صورت ترکیب خطی از B - اسپلاین ها بصورت زیر نوشت

$$U_N(x) = \sum_{m=-2}^{N+1} \delta_m(t) Q_m(x), \tag{۴.۶}$$

در این جواب تقریبی δ_m، پارامتری است که به زمان بستگی دارد. مقدار U و سه مشتق اصلی آن را در گره x_m بصورت زیر بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U'_m &= U'(x_m) = \frac{4}{h}(-\delta_{m-2} - 3\delta_{m-1} + 3\delta_m + \delta_{m+1}), \\ U''_m &= U''(x_m) = \frac{12}{h^2}(\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1}), \\ U'''_m &= U'''(x_m) = \frac{24}{h^3}(-\delta_{m-2} + 3\delta_{m-1} - 3\delta_m + \delta_{m+1}). \end{aligned} \tag{5.6}$$

اگر جواب تقریبی(۴.۶) و مشتق های مورد نیاز آن (۵.۶) را در معادله (۱.۶) قرار دهیم یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول بصورت زیر بدست می آوریم

$$\begin{aligned} &\delta^\circ_{m-2} + 11\delta^\circ_{m-1} + 11\delta^\circ_m + \delta^\circ_{m+1} - \frac{12}{h^2}(\delta^\circ_{m-2} - \delta^\circ_{m-1} - \delta^\circ_m + \delta^\circ_{m+1}) + \\ &\frac{4}{h}(\delta_{m-2} + 3\delta_{m-1} - 3\delta_m - \delta_{m+1}) = \frac{24 z_m}{h^3}(\delta_{m-2} - 3\delta_{m-1} + 3\delta_m - \delta_{m+1}) - \\ &\frac{4 z_m}{h}(\delta_{m-2} + 3\delta_{m-1} - 3\delta_m - \delta_{m+1}) + \frac{12 v_m}{h}(\delta_{m-2} + 3\delta_{m-1} - 3\delta_m - \delta_{m+1}), \end{aligned} \tag{6.6}$$

جایی که $\circ$ مشتق نسبت زمان است و

$z_m = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}$ و $v_m = \frac{12}{h^2}(\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1})$.

روند حل را با جدا سازی سیستم (۶.۶) در زمان ادامه می دهیم. اگر پارامتر زمان δ_m و مشتقش در (۶.۶) توسط قانون کرانک نیکلسون و قانون تفاضلات متناهی بصورت زیر جدا سازی کنیم:

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2}, \qquad \delta^\circ_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t}, \tag{7.6}$$

یک رابطه بازگشتی بین دو مرحله متوالی n و $n+1$ زمان مربوط به پارامترهای مجهول متوالی δ_i^n، δ_i^{n+1} و $i = m-2, ..., m+1$ بدست می آید

$$\mu_m\delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_m\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_m\delta_m^{n+1} + \alpha_m\delta_{m+1}^{n+1} = \alpha_m\delta_{m-2}^n + \beta_m\delta_{m-1}^n + \gamma_m\delta_m^n + \mu_m\delta_{m+1}^n, \quad (8.6)$$

که در آن

$$\alpha_m = h^3 - 12h + 2(1 + z_m - 3v_m)h^2\Delta t - 12z_m\Delta t,$$

$$\beta_m = 11h^3 + 12h + 6(1 + z_m - 3v_m)h^2\Delta t + 36z_m\Delta t,$$

$$\gamma_m = 11h^3 + 12h - 6(1 + z_m - 3v_m)h^2\Delta t - 36z_m\Delta t,$$

$$\mu_m = h^3 - 12h - 2(1 + z_m - 3v_m)h^2\Delta t + 12z_m\Delta t.$$

سیستم جبری غیر خطی بالا دارای $N+1$ معادله و $N+4$ پارامتر مجهول می باشد که قابل حل با انتخاب شرایط مرزی از معادلات (۲.۶) می باشد. این شرایط قادر هستند که پارامترهای δ_{-1}, δ_{-2} و δ_{N+1} را از دستگاه حذف کنند. بُعد سیستم ماتریس نتیجه $(N+1)\times(N+1)$ است. قبل از شروع فرایند حل بازگشتی، باید پارامترهای اولیه δ_m^0 توسط شرایط اولیه و مرزی بصورت زیر تعیین می شوند:

$$\begin{aligned}
U(a,t) &= g_0(t) = \delta_{-2} + 11\delta_{-1} + 11\delta_0 + \delta_1,\\
U(a,t)_{xx} &= g_2(t) = \frac{12}{h^2}(\delta_{-2} - \delta_{-1} - \delta_0 + \delta_1),\\
U(x_i, 0) &= f_0(x) = \delta_{i-2} + 11\delta_{i-1} + 11\delta_i + \delta_{i+1}, \quad i = 0, 1, ..., N, \qquad (9.6)\\
U(b,t) &= g_1(t) = \delta_{N-2} + 11\delta_{N-1} + 11\delta_N + \delta_{N+1}.
\end{aligned}$$

۴.۶ آنالیز پایداری

برای بررسی پایداری این طرح روش فون - نویمان را بکار می بریم. برای استفاده از این روش ابتدا ما باید جمله های غیر خطی u_xu_{xx} وuu_x را با در نظر گرفتن u_x و u به عنوان ثابت در معادله خطی کنیم. اکنون با جایگذاری $\delta_m^n = \xi^n e^{i\beta h}$ در معادله (۸.۶)، که در آن h اندازه عنصر و $i = \sqrt{-۱}$ بدست می آوریم

$$\xi^{n+۱}(\mu_m e^{i(m-۲)\beta h} + \gamma_m e^{i(m-۱)\beta h} + \beta_m e^{im\beta h} + \alpha_m e^{i(m+۱)\beta h}) = \xi^n(\alpha_m e^{i(m-۲)\beta h}$$

$$+\beta_m e^{i(m-۱)\beta h} + \gamma_m e^{im\beta h} + \mu_m e^{i(m+۱)\beta h}), \qquad (۱۰.۶)$$

در اینجا $\beta h = \phi$ می گیریم. هر دو طرف معادله بر $e^{im\phi}$ تقسیم کرده و بعد از ساده کردن داریم

$$\xi = \frac{X_۱ - iY_۱}{X_۲ - iY_۲},$$

که در آن

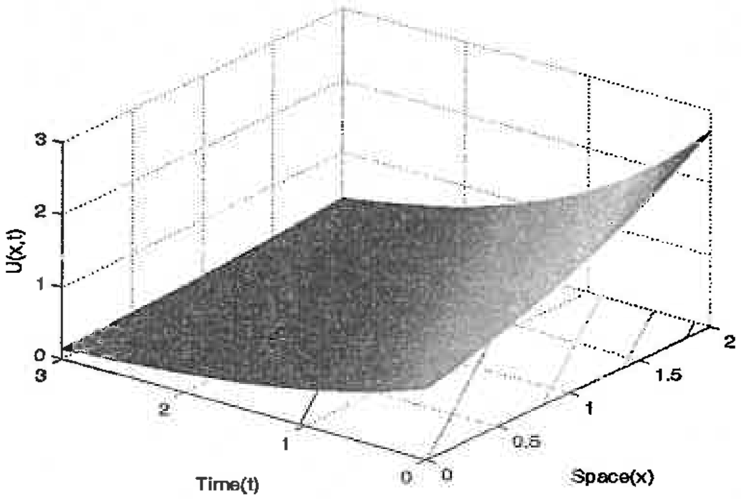
$$X_۱ = \mu_m \cos(۲\phi) + (\gamma_m + \alpha_m)\cos(\phi) + \beta_m$$

$$Y_۱ = \mu_m \sin(۲\phi) + (\gamma_m - \alpha_m)\sin(\phi)$$

$$X_۲ = \alpha_m \cos(۲\phi) + (\beta_m + \mu_m)\cos(\phi) + \gamma_m$$

$$Y_۲ = \alpha_m \sin(۲\phi) + (\beta_m - \mu_m)\sin(\phi).$$

و برا ی اینکه طرح پایدار باشد، لازم است که $|\xi| \leq ۱$.



شکل ۶.۱: نمودار سه بعدی جواب تقریبی

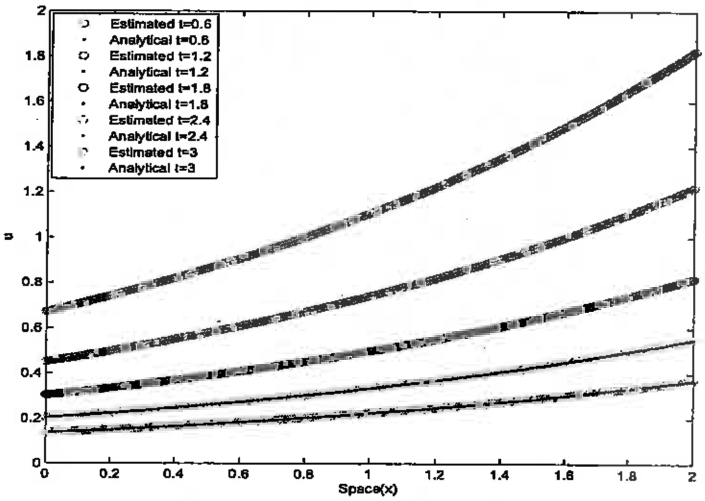
۶.۵ مثال عددی

در این بخش طرح گفته شده در بخش (۶.۳) را بر روی مثالی که در ادامه گفته می شود بررسی کنیم. خطا توسط خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم بصورت زیر محاسبه می کنیم:

$$L_۲ = |U - U_N|^۲ = h \sum_{j=۰}^{N} |U_j - (U_N)_j|^۲, \quad L_\infty = |U - U_N|_\infty = \max_j |U_j - (U_N)_j|.$$

مثال ۶.۵.۱. معادله فرنبرگ - وایتهام (۶.۱) را با شرط اولیه

$$u(x, ۰) = \exp(\frac{x}{۲}),$$



شکل ۲.۶: مقایسه جواب تحلیلی و جواب تقریبی در زمان های $t = ۰/۶$ ، $t = ۱/۲$ ، $t = ۱/۸$ ، $t = ۲/۴$ ، $t = ۳$.

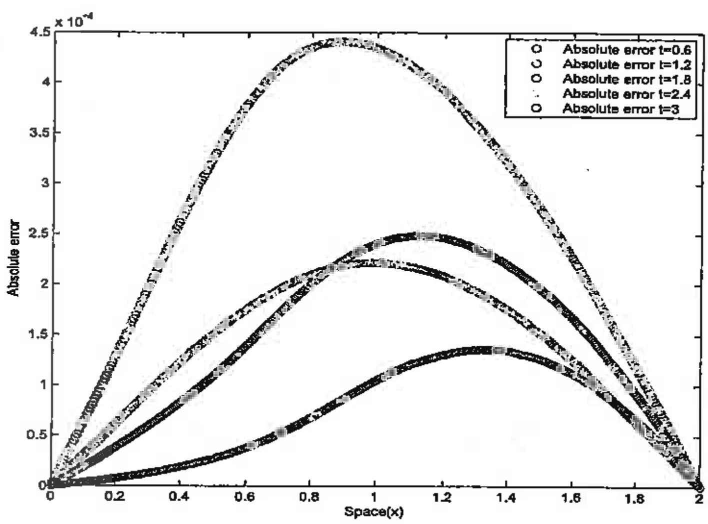
جدول ۱.۶: نتایج نرم خطای ماکزیمم و خطای میانگین مربع در $\Delta t = ۰/۰۰۱$ و $\Delta x = ۰/۰۰۵$

t	$t = ۰/۶$	$t = ۱/۲$	$t = ۱/۸$	$t = ۲/۴$	$t = ۳$
L_∞	$۲/۲۱۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۴۱۱۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۴۸۳۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۳۵۶۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۸/۳۸۳ \times ۱۰^{-۵}$
$L_۲$	$۴/۷۲۰۸ \times ۱۰^{-۸}$	$۵/۴۰۵۷ \times ۱۰^{-۸}$	$۱/۵۸۷ \times ۱۰^{-۷}$	$۱/۳۷۹۹ \times ۱۰^{-۸}$	$۴/۵۸۳۲ \times ۱۰^{-۹}$

و شرایط مرزی

$$u(۰,t) = \exp(-\frac{۲t}{۳})$$
$$u(۲,t) = \exp(۱ - \frac{۲t}{۳})$$
$$u_{xx}(۰,t) = \frac{۱}{۴}\exp(-\frac{۲t}{۳}).$$

در نظر می گیریم. جواب تحلیلی این مثال $u(x,t) = \exp(\frac{x}{۲} - \frac{۲t}{۳})$ است . خطای میانگین مربع و خطای ماکزیمم در جدول (۱.۶) ارائه شده است. همچنین نمودار سه بعدی آن در شکل (۱.۶) و نمودار جواب تحلیلی و تقریبی به ازای t های مختلف درشکل (۲.۶) رسم شده است. نمودار خطای مطلق در شکل (۳.۶) نشان می دهیم.



شکل ۳.۶: خطای مطلق بین جواب تحلیلی و جواب تقریبی

نتایج و پیشنهاداتی برای کارهای آینده

در این پایان نامه، هدف ما بررسی حل عددی معادلات با مشتقات جزئی بود. چون معادله دیفرانسیل نقش بسیار مهم در ریاضیات کاربردی دارند. مسائل متنوعی دارد در مهندسی، فیزیک و... میتوان به زبان معادلات دیفرانسیل بیان کرد. اما چون همیشه و به دلیل اینکه این معادلات جواب تحلیلی آنها وجود ندارد ما از روش های عددی استفاده می کنیم تا جواب مورد نیاز در بازه های مختلف را بدست آوریم. توابعی که در اینجا به عنوان یکی از ابزار اساسی در حل عددی ما مورد استفاده قرار می گیرد توابع B - اسپلاین هستند که پایه های بسیار مناسب برای فضاهای جواب می باشند. در فصل های ۲ تا ۶ معادله برگرز، معادله تلگراف و معادله فورنبرگ - وایتهام با روش ها و B - اسپلاین های متفاوت حل نمودیم. معادله تلگراف یک معادله خطی و معادله برگرز و معادله فورنبرگ - وایتهام ، معادله غیرخطی می باشند.

نتایج حاصله از این فصل ها روی مسائل مختلف، نشان می دهد که به کارگیری روش و پایه های مناسب برای بدست آوردن جواب تقریبی نزدیک به جواب واقعی مسئله، مسئله را ساده تر و خطا را کمتر می کند. همچنین میتوان از مقایسه این روش ها به این نتیجه رسید که روش شبه درونیاب به خاطر اینکه به حل دستگاه های ماتریسی نمی رسیم بسیار مناسب تر از روش های کالوکیشن می باشد. در روش کالوکیشن سعی می شود از B -

اسپلاین های مرتبه پایین تر استفاده شود، چون بعد ماتریس حاصله و خطای نتایج را کمتر می شود علی الخصوص زمانی که سیستم ما غیر خطی باشد و در زمان صرفه جویی می شود.

برای کارهای آتی میتوان از این رو برای مسائلی همچون مسائل کنترل و بهینه سازی استفاده نمود. توصیه ای دیگر برای کارهای آتی برای حل مسائل با مرز آزاد می باشد.

مراجع

[1] S. J. Farlow, (1982), "**Partial Differential Equation for Scientists and Engineers**", John Wiley, New York.

[2] H. Bateman, (1915), "Some recent researches on the motion of the fluids", **Mon. Wea. Rev**, 43: 163–170.

[3] JM. Burgers, (1948), "A mathematical model illustrating the theory of turbulence", **Adv. Appl. Mech**, 1: 171-199.

[4] E. Hopf (1950), "The partial differential equation $U - t + UU_x - vU_{xx} = 0$", **Commun. Pure. Appl. Math.**: 3,201–230.

[5] J. D. Cole, (1951), "On a quasi-linear parabolic equations occurring in aerodynamics," **Quart. Appl. Math.**, 9: 225–236.

[6] S.G. Rubin and R.A. Graves, (1975), "Viscous flow solutions with a cubic spline approximation", **Comput. Fluids**, 3: 1–36.

[7] S.G. Rubin and P.K. Khosla, (1976), "Higher-order numerical solutions using cubic splines", **A. I. A. A. J.**, 14: 851–858.

[8] J. Caldwell, "Applications of cubic splines to the nonlinear Burgers' equation", **Numer. Meth. Nonlinear Prob.**, 3: 253–261.

[9] P. C. Jain and D. N. Holla, (1978), "Numerical solutions of coupled Burgers' equations", **Int. J. Non-linear Mech.**, 13: 213–222.

[10] P. C. Jain and B. L. Lohar, (1979), "Cubic spline technique for coupled nonlinear parabolic equations", **Comput. Math. Appl.**, 5: 179–185.

[11] A. M. Davies, (1977), "A numerical investigation of errors arising in applying the Galerkin method of the solution of nonlinear partial differential equations", **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 11: 341–350.

[12] A. M. Davies, (1978), "Application of the Galerkin method to the solution of Burgers' equation", **Comput. Meth. Appl. Mech Eng**, 14: 305–321.

[13] B. Saka, I. Dag, (2007), "Quartic B-spline collocation method to the numerical solutions of the Burgers' equation", **Chaos, Solitons Fractals**, 32: 1125–1137.

[14] P. M. Prenter, (1975)," **Splines and variational methods**", John Wiley, New York.

[15] A.H.A. Ali, L.R.T. Gardner and G.A. A Gardner, (1990), "**Galerkin approach to the solution of Burgers' equation** ", University of Wales, Bangor.

[16] M. A. Ramadan, T. S. El-Danaf and F. Alaal, (2005), "A numerical solution of the Burgers equation using septic B-splines", **Chaos, Solitons Fractals**, 26: 795–804.

[17] I. Dag, B. Saka and A. Boz, (2005), "B-spline Galerkin methods for numerical solutions of the Burgers' equation", **Appl. Math. Comput.**, 166: 506–522.

[18] K. Kakuda and N. Tosaka, (1990), "The generalized boundary element approach to Burgers' equation", **Int. J. Numer. Methods Eng**, 29: 245–261.

[19] DS. Zhang, GW. Wei , DJ. Kouri and DK. Hoffman, (1997), "Burgers' equation with high Reynolds number", **Phys. Fluids**, 9: 1853–1855.

[20] G.W. Wei, D.S. Zhang, D.J. Kouri and D.K. Hoffman, (1998), "A robust and reliable approach to nonlinear dynamical problems", **Comput. Phys. Commun.**, 111: 87–92.

[21] S. Kutluay, A.R. Bahadır and A. Ozdes (1999), "Numerical solution of one-dimensional Burgers' equation: explicit and exact-explicit finite difference methods", **J. Comput. Appl. Math.**, 103: 251–261.

[22] S. Kutluay, A. Esen and I. Dag, (2004), "Numerical solutions of the Burgers' equation by the least squares quadratic B-spline finite element method", **J Comput. Appl. Math.** , 167: 21–33.

[23] I. Dag, D. Irk and B. Saka, (2005), "A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines", **Appl. Math. Comput.**, 163: 199–211.

[24] H. Nguyen and J. Reynen, (1982), "A space–time finite element approach to Burgers' equation", **Numer. Meth. Non-Linear Prob.**, 2: 718–728.

[25] L. L. Schumaker, (1981), "**Spline Functions: Basic Theory**", Krieger Publishing Company, Florida.

[26] J. M. Ahlberg, E. N. Nilson and J. L. Walsh, (1967), "**The Theory of Splines and Their Applications**", Academic Press, NewYork.

[27] P. M. Prenter, (1975), "**Splines and Variational Methods**", John Wiley, New York.

[28] G. Micula and S. Micula, (1999), "**Handbook of Splines**", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Netherlands.

[29] B. Saka and I. D (2009), "Quartic B-spline Galerkin approach to the numerical solution of the KdVB equation", **Appl. Math. Comput.** , 215: 746-758.

[30] B. Saka and I. DaǦ, (2007), "Quartic B-spline collocation method to the numerical solutions of the Burgers equation", **Chaos Solitons Fractals** , 32: 1125-1137.

[31] F. Gao and C. M Chi, (2006), "Solving third-order obstacle problems with quartic B-splines", **Appl. Math. Comput.** , 180: 270-274.

[32] K. R. Raslan, (2005), "Collocation method using quartic B-spline for the equal width (EW) equation", **Appl. Math. Comput.**, 168: 795-805.

[33] F. i. Haq, S. u. Islam and I. A. Tirmizi, (2010), "A numerical technique for solution of the MRLW equation using quartic B-splines", **Appl. Math. Modell.**, 34: 4151-4160.

[34] A. Quarteroni, R. Sacco and F. Saleri,(2007), "**Numerical Mathematics**", second edition, Springer-Verlag, Berlin.

[35] G. Roussy and J.A. Pearcy, (1995), "**Foundations and Industrial Applications of Microwaves and Radio Frequency Fields**", John Wiley, New York.

[36] D. M. Pozar, (1990), " **Microwave Engineering**", Addison-Wesley, NewYork.

[37] A. Mohebbi, M. Dehghan, (2008), "High order compact solution of the one-space- dimensional linear hyperbolic equation", **Numer. Meth. P. D. E.**, 24: 1222-1235.

[38] A. Jeffrey, (2002), "**Advanced Engineering Mathematics**", Academic Press, Harcourt.

[39] A. Jeffrey, (2002), "**Applied Partial Differential Equations**", Academic Press, NewYork.

[40] R. K. Mohanty, (2008), " New unconditionally stable difference schemes for the solution of multi-dimensional telegraphic equations", **Int. J. Comput. Math.**, 86: 2061 - 2071.

[41] H. Pascal, (1986), "Pressure wave propagation in a fluid flowing through a porous medium and problems related to interpretation of Stoneley's wave attenuation in acoustical well logging", **Int. J. Eng. Sci.**, 24: 1553-1570.

[42] G. Bohme,(1987), "**Non-Newtonian Fluid Mechanics**", North-Holland, NewYork.

[43] D. J. Evans and H. Bulut, (2003), "Thenumerical solution of thetelegraph equation by the alternating group explicit method", **Int. J. Comput. Math.**, 80: 1289 - 1297.

[44] P. M. Jordan, M. R. Meyer and A. Puri,(2000), "Causal implications of viscous damping in compressible fluid flows", **Phys. Rev.** , 62: 7918-7926.

[45] G. Farin, (2001), "**Curves and Surfaces for CAGD**," fifth ed., Morgan Kaufman, San Francisco.

[46] P. Sablonniere, (2000), "Quasi-interpolants splines sobre particiones uniforms", First Meeting in Approximation Theory of the University of Jaen, P00-38, Ubeda.

[47] P. Sablonniere,(2005), "Univariate spline quasi-interpolants and applications to numerical analysis", **Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino**, 63: 211-222.

[48] G.B. Whitham, (1967), "Variational methods and applications to water wave", **Proc. R. Soc. London Ser. A**, 299: 6–25.

[49] A.M. Wazwaz, (1999), "A reliable modification of Adomian decomposition method", **Appl. Math. Comput.**, 102: 77–86.

[50] J.H. He, (2000), "A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems", **Int. J. Non-Linear Mech.**, 35 (1): 37–43.

[51] J.H. He, (1997), "Variational iteration method for delay differential equations", **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.**, 2 (4): 235–236.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

دینامیک سیالات	Fluid dynamics
کوانتوم	Quantum
قانون تبرید نیوتن	Newton's law of cooling
معادلات ناویه - استوکس	Navier-stokes equation
شار	Flux
شدت جریان	Current
ضریب	Coefficient
بازگشتی	Recursion
رویه عددی	Numerical Procedure
پیوستگی	Continuity
مستقل خطی	Linear independent
نرم	Norm
خطای مطلق	Absolute error
خطای نسبی	Relative error
تقریب	Approximation
مینیمم	Minimum
شبه معکوس	Quasi-inverse
قضیه تیلور	Taylor theorem
مشتق پذیر	Differentiable
ترکیب خطی	Linear combination
غیر خطی	nonlinear
جواب یکتا	Unique solution
معادله برگرز اصلاح شده	modified Burgers equation
یکنواخت	Uniform
یک متغییره	Univariate
افراز	Partition
دقت	Accuracy
سیگنال	Signal
شبکه	Network
بدوضع، نامساعد	Ill-condition

انتگرال گیری .... Intrgration
مشتق گیری .... Differentiation
موج .... Wave
کنترل .... Control
بهینه سازی .... Optimization

Abstract

In this thesis, we solve partial differential equations with initial conditions and boundary conditions using B-spline function. At first, we introduce the partial differential equations and B-spline function.Then the collocation method using quartic B-splines is described for the numerical solutions of the Burgers' equation and we solved the Burgers' equation with septic b-splines and collocation method. In chapter 3 and 4 we use a numerical method based on B-spline function and collocation method to solve second-order linear hyperbolic telegraph equation.In chapter 5, the telegraph equation is solved numerically by cubic B-spline quasi-interpolation.Finally the quartic B-spline collocation scheme is implemented to find numerical solution of the nonlinear fornberg-Whitham equation. At the end of each chapter the efficiency of the mentioned methods are showed by several numerical examples. Note that we have computed the numerical results by Matlab programming.

Keywords: *B-spline, Telegraph equation, Fornberg-Whitham equation, Collocation method, Stability*

Shahrood University of Technology
Facualty of Methematical Sciences
Department of Mathematics

M.S Thesis

Solvind a class of partial differential equations using B-spline function

By:
Marzieh Dosti

Supervisor:
Ph.D. Ahmad Nezakati Rezazadeh
P.hD. Alireza Nazemi

Date
17 Sep 2011