بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

محاسبه S− انحنای فضای راندرز همگن

نگارش

سمیرادلاور

استاد راهنما

دکتر حمید رضا سلیمی مقدم

استاد مشاور

آقای سید رضا موسوی

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به...

تقدیم به همسر عزیزم که با عشقش مرا همراهی، و با گذشت و صبرش به من فداکاری آموخت.

و تقدیم به پدرم، بزرگ معلم زندگیم که شهامت را به من آموخت و مادرم که وجودش برایم همه صبر است و وجودم برایش همه رنج، توانش رفت تا به توانایی برسم، مویش سپیدی گرفت تا روی سپید بمانم. او که فروغ نگاهش، گرمی کلامش و روشنایی رویش سرمایه زندگانی من است. در برابر وجود گرامیش زانوی ادب بر زمین می نهم و با دلی مالامال از عشق و محبت، بر دستانش بوسه می زنم.

تشکر و قدردانی

نخست بر خود می دانم که پروردگار خود را شکر گویم به پاس لبخندهای محبت بار، دستان یاری رسان، عشق و محبت و همه آنچه را که از رحمت او دریافت کرده ام و از او می خواهم که لیاقت تشکر از استاد را بر من ارزانی کند که قدر استاد نکو دانستن، حیف! استاد به من یاد نداد، ...

از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر حمید رضا سلیمی مقدم به خاطر راهنمایی‌های بی منتشان کمال تشکر را دارم،

همچنین از استاد پر تلاشم جناب آقای سید رضا موسوی به خاطر راهنمایی‌های بی دریغشان قدردانی می نمایم،

و برای هر دوی این عزیزان آرزوی سرافرازی و کمال انسانیت را دارم،

همچنین لازم می دانم از همسر، خانواده و تمامی دوستانی که مرا در این مهم یاری نمودند، تقدیر و تشکر کنم.

چکیده

در این پایان‌نامه، ما با محاسبه الصاق لوی چویتا در منیفلد های ریمانی همگن، یک فرمول صریح از S-انحنای فضای راندرز همگن بدست می آوریم و اثبات خواهیم کرد که یک فضای راندرز همگن با S-انحنای ایزوتروپیک تقریبی ، S-انحنای صفر دارد.

واژه‌های کلیدی: فضای راندرز، S-انحنا، فضای بروالد، فضای همگن تحویلی، الصاق لوی چویتا، میدان برداری کیلینگ، S-انحنای ایزوتروپیک

فهرست مقالات مستخرج

مقاله "$The S-curvature of homogenous Matsumoto spaces$" در اولین همایش ملی الکترونیکی نقش ریاضی در توسعه علوم.

پیشگفتار

هندسه فینسلر اولین بار توسط پل فینسلر [۱] در سال ۱۹۱۸ در پایان نامه اش معرفی شد. این هندسه از انتگرال ساده شروع شده و بسیار نزدیک به حساب تغییرات می باشد.

هندسه فینسلری تعمیمی از هندسه ریمانی نیست بلکه توضیح بهتری از هندسه ریمانی بدون محدودیت درجه دوم می باشد داده های هندسی در هندسه فینسلری شامل خانواده های هموار از نرم های مینکوفسکی ،بجای خانواده ای از ضرب های داخلی می باشد.

این خانواده از نرم های مینکوفسکی ساختار فینسلر را معرفی می کند. با توجه به دیدگاه های مختلف هندسه کاربردی، الصاق های خطی متنوعی در هندسه فینسلر پدید آمده اند. تنوع الصاق ها در هندسه راهگشای حل بسیاری از مسائل پیچیده در کاربرداین هندسه بخصوص در برق ، کنترل، نسبیت عام، بیولوژی، اکولوژی، کریستال ها، صنعت ذوب فلزات، اخترشناسی، و اخیرا نحوه رشد سلول های سرطانی وزمین شناسی شده است. با توجه به این موضوع پیدایش هر گونه الصاق جالب دیگری می تواند موجب توسعه کاربرد هندسه فینسلری در شاخه های فوق گردد. مسئله ترافیک را می توان از دیدگاه هندسه فینسلر بررسی کرد و می توان نشان داد که متریک وابسته به آن متریک فینسلر از نوع راندرزی می باشد، بنابراین مسیر های بهینه زمانی برای مساله ترافیک ژئودزیک های متر راندرز هستند، و همچنین در مطالعه مساله حرکت هواپیما در گردباد از دیدگاه هندسه فینسلر، نشان داده شده است که هندسه حرکت هواپیما در گردباد از نوع راندرز می باشد و مسیر های بهینه زمانی آن هم ژئودزیک های متر راندرز خواهند بود. یک نوع خاص از متر های فینسلر ،(α,β)متریک ها هستند که کاربردهای فراوانی در مهندسی وفیزیک دارند. در سالهای اخیر مطالعه انحنای (α,β)متریک ها از جمله انحنای پرچمی بیشتر مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است، اما از آنجا که محاسبات مربوط به(α,β) متریک ها در حالت کلی بسیار پیچیده است این مسئله برای هر (α,β)متریک به طور جداگانه صورت می گیرد.

یکی از پر اهمیت ترین (α,β)-متریک ها، متر راندرز می باشد[۹] که ما قصد داریم در این پایان نامه کمیت S-انحنا را بر روی آن در حالت همگن بودن بررسی کنیم. در این راستا فصل اول به بیان تعاریف ومقدماتی می

[۱] Paul Finsler

پردازیم که در فصل های بعد مورد نیاز می باشندو در فصل دوم الصاق لوی چویتا را برای فضای راندرز همگن بررسی می کنیم و در فصل آخر به محاسبه فرمول S-انحنای این فضا می پردازیم وچند کاربرد از فرمول بدست آمده را بیان می کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیاز ها ومفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

علاوه بر روش های اقلیدسی و ریمانی برای محاسبه طول یک بردار روش های دیگری نیز موجود است که نظر به کاربرد بسیار زیاد آنها در علوم فنی مهندسی و فیزیک، در اینجا به یکی از آنها به نام متر فینسلری اشاره می کنیم. مطالعه ی متر فینسلری ابتدا توسط جی اف بی ریمان [۱] در سال [۱۸۵۴] آغاز گردید ولی از آنجائیکه او عقیده داشت که مفهوم متریکی که بعد ها به نام ریمان معروف شد برای مطالعه ی مفاهیم هندسی و ادامه ی کارهای گاوس [۲] مناسب تر است به مطالعات خود ادامه نداد.

اما نظر باینکه این تابع در تعابیر پدیده های فیزیکی نقش موثری داشت، بعدهاتوسط دیگران مورد مطالعه قرار گرفت. از جمله این افراد پل فینسلر بود که در سال [۱۹۱۸] با استفاده از نتایج بدست آمده توسط استاد خودش کنستانتین کاراتئودوری [۳] و قضیه ی اویلر توانست تعریف مدرن از این متر را ارائه نماید. او در حقیقت شرایطی برای یک تابع مانند $F(x,y)$ روی کلاف مماس TM ارائه نمود که در عین حالی که از تابع ریمان جامع تر بود خواص اصلی آن را نیز داشت. وی ثابت کرد که این تابع در هر نقطه $x \in M$ یک ضرب داخلی به صورت $F^{۲} = g_{ij}(x,y)y^iy^j$ روی T_xM تعریف می کند.

متر راندرز به عنوان حالت خاصی از مترفینسلری توسط فیزیکدان ج. راندرز [۴] در سال [۱۹۴۱] معرفی

[۱] Georg Friedrich Berhnard Riemann 1826-1866.
[۲] Carl Friedrich Gauss 1777-1855
[۳] Constantin Caratheodory
[۴] G.Randers

شد [۹] . پس از آن، این متر ها در نظریه میکروسکوپ های الکترونی توسط اینگاردن [5] در سال [۱۹۵۷] به کار گرفته و متر های راندرز نامیده شدند.

۲.۱ تعاریف و نمادهای مقدماتی

ابتدا به بیان قرار دادهایی می پردازیم که در سراسر این پایان نامه بکار برده شده است:

۱-جمع بندی اینشتین، یعنی اگر اندیسی یک بار در بالا و یک بار در پایین تکرار شود،آنرا جمع بندی شده می نامیم و از نوشتن علامت $\sum$ خودداری می نماییم.

۲-منیفلد ها در این پایان نامه، هموار و متناهی البعد می باشند.

۳-مجموعه ی توابع حقیقی مقدار روی M راکه از کلاس C^∞ هستند را با $C^\infty(M)$ نمایش می دهیم.

لازم به ذکر است که مطالب ارجاع داده نشده در فصل یک به مرجع [۲] و در فصل های دو و سه، به مرجع [۱۶] باز می گردد.

تعریف ۱.۲.۱. تابع $H : R^n \setminus ۰ \longrightarrow R$ را همگن مثبت [6] از درجه r نسبت به y گوییم، اگر به ازای هر عدد مثبت λ داشته باشیم :

$$\forall\lambda > ۰ \qquad H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$$

وآن را همگن مطلق از درجه r گوییم اگر به ازای هر عدد حقیقی λ داشته باشیم:

$$\forall\lambda \in R \qquad H(\lambda y) = |\lambda|^r H(y)$$

تعریف ۲.۲.۱. منظور از یک میدان برداری روی منیفلد M نگاشتی هموار مانند $X : M \longrightarrow TM$ است به طوری که

$$M \longrightarrow^X TM \longrightarrow^P M \qquad PoX = id_M$$

$$\forall p \in M \quad X(p) \in T_pM$$

[5] Ingarden
[6] Positively homogenous

یا به عبارت دیگر، اگر U یک همسایگی از M باشد، X یک میدان برداری هموار روی U است اگروتنها اگر $X = x^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ که در آن $x^i \in C^\infty(U)$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار باشد، در این صورت مجموعه همه میدان های برداری روی M رابا $\chi(M)$ نمایش می دهیم.

برای تعمیم یک تعریف از فضای R^n به روی منیفلد ها باید به دو موضوع توجه داشت اول خاصیت خوش تعریف بودن به این معنی که آن مفهوم روی منیفلد ها قابل بیان باشد. دوم آن که اگر این تعریف به دستگاه مختصات مو ضعی یعنی چارت ها بستگی نداشته باشد آنگاه یک تعریف اساسی است. برای روشن شدن مورد اول فرض کنیم که $c(t)$ یک منحنی روی منیفلد باشد.

اگر شتاب این منحنی یعنی $c''(t)$ را با رابطه

$$Lim_{\triangle t \longrightarrow ۰} \frac{c'(t+\triangle t) - c'(t)}{\triangle t}$$

تعریف کنیم آنگاه این تعریف بی معنی است زیرا صورت کسر از تفاضل دو بردار در دو فضای برداری متفاوت یعنی T_tM و $T_{t+\triangle t}M$ تشکیل شده است.

لذا برای اینکه بتوانیم مفهوم شتاب یک منحنی روی یک منیفلد را تعمیم دهیم لازم است راهی پیدا کنیم که بتوان بدون توجه به مختصات از بردار ها (یا میدان های برداری) در طول یک منحنی مشتق گیری نماییم. به بیان ساده تر باید بتوانیم مقادیر دو بردار از دو فضای برداری مجاور و متفاوت رابا یکدیگر مقایسه نماییم یا به عبارت دیگر دو فضای برداری مجاور را توسط یک مشتق گیری به یکدیگر "الصاق" [۷] نماییم. این موضوع اولین بار توسط لوی چویتا دانشمند ایتالیایی در سال [۱۹۱۷]مورد مطالعه قرار گرفت.

تعریف ۴.۲.۱. الصاق آفین ∇روی منیفلد مشتق پذیر M نگاشت

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

[۷] Connection

$$(X,Y) \longrightarrow \nabla_X Y$$

می باشد که در شرایط زیر صدق می کند:

$$i)\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$ii)\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Y$$

$$iii)\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$$

لم ۵.۲.۱. فرض کنیم (x,U) یک چارت در همسایگی نقطه p روی منیفلد n-بعدی M همراه با الصاق آفین ∇ باشد. آنگاه $\nabla_X Y$در این مختصات را می توان به صورت گسترده زیر نوشت.

$$\nabla_X Y = (X.Y^i + \Gamma^i_{jk}X^j Y^k)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

که ضرایب Γ^k_{ij} توابعی حقیقی روی M هستند.

اثبات. در همسایگی هر نقطه $p \in M$ یک چارت موضعی (x,U) در نظر می گیریم که به هر نقطه p مختصات $(x_1(p),...,x_n(p))$ را وابسته می کند. فرض کنیم $(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n})$ پایه ای برای T_pM روی چارت موضعی (x,U) باشد. اگر $X = X^i\frac{\partial}{\partial x_i}$ و $Y = Y^j\frac{\partial}{\partial x_j}$، آنگاه چون $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(M)$ ،می توان فرض کرد که

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

که در آن فرض کرده ایم ضرایب Γ^k_{ij} توابعی حقیقی روی M هستند. از آنجا داریم :

$$\begin{aligned}\nabla_X Y = \nabla_X(Y^i\tfrac{\partial}{\partial x_i}) &= Y^i\nabla_X\tfrac{\partial}{\partial x_i} + X(Y^i)\tfrac{\partial}{\partial x_i}\\ &= Y^iX^j\Gamma^k_{ji}\tfrac{\partial}{\partial x_k} + X(Y^i)\tfrac{\partial}{\partial x_i}\\ &= (X(Y^k) + Y^iX^j\Gamma^k_{ji}\tfrac{\partial}{\partial x_k}\end{aligned}$$

در اینجا Γ^k_{ij} ها را ضرایب الصاق یا علائم کریستوفل می نامیم. ■

برای آنکه بتوان هندسه یک فضارا مطالعه کرد باید ببینیم خط راست را چگونه می توان روی آن فضا تعریف کرد. اگر منیفلد خمیدگی داشته باشد ممکن است آن چیزی که ما آن را با تعبیر اقلیدس واصول موضوعه آن خط راست می نامیم دیگر وجود نداشته باشد.

برای تعمیم خط راست روی منیفلد ها که آن را ژئودزیک می نامیم باید از خواص خط راست استفاده کنیم. بارزترین خاصیت خط راست طبیعت کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه است که استفاده از آن کمی پیچیده به نظر می رسد، لذا از خاصیت خط راست به عنوان یک منحنی با شتاب صفر استفاده می کنیم. استفاده از این خاصیت خط راست روی منیفلد ها احتیاج به یک نوع مشتق گیری موسوم به عمل مشتق گیری کوواریان دارد.

تعریف ۶.۲.۱. مشتق کوواریان: فرض کنید M یک منیفلد مشتق پذیر با الصاق آفین ∇ باشد، وجود دارد یک تناظری که وابسته می کند هر میدان برداری V در طول منحنی مشتق پذیر $c : I \longrightarrow M$ را به میدان برداری $\frac{DV}{dt}$ در طول c که مشتق کوواریان V در طول c نامیده می شود بطوریکه:

a) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$

c) اگر V بوسیله میدان برداری $Y \in \chi(M)$ القا شودیعنی $V(t) = Y(c(t))$ ، سپس $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$

مشتق کوواریان تعمیمی از مشتق سویی یا اثر یک میدان برداری X روی یک تابع f است. به عبارت دقیق تر مشتق سویی $X.f$ میزان تغییرات تابع f در سوی بردار X را ارزیابی می کند، در صورتی که مشتق کوواریان میزان تغییرات توابع، میدان های برداری، ۱-فرم ها و یا به طور کلی یک میدان تانسوری را در سوی یک بردار محاسبه می نماید.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر باالصاق خطی ∇ باشد. میدان برداری V را در طول منحنی $C : I \longrightarrow M$ موازی [8] گوئیم، اگر به ازای هر $t \in I$ داشته باشیم $\frac{DV}{dt} = 0$. بعلاوه اگر $V(t_0) = V_0$ آنگاه میدان برداری V را انتقال موازی V_0 در طول C می نامیم.

[8] Parallel

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد مشتق پذیر با الصاق آفین ∇ و متریک ریمانی g باشد. الصاق سازگار با متر می باشد، در صورتی که برای هر منحنی هموار C وهر جفت از میدان های برداری موازی P, P' در طول C داشته باشیم:

$$< P, P' >= canstant$$

تعریف ۹.۲.۱. الصاق آفین ∇ روی منیفلد هموار M متقارن نامیده می شود، اگر

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \qquad \forall X, Y \in \chi(M)$$

نتیجه ۱۰.۲.۱. در دستگاه مختصات موضعی (x, U) از متقارن بودن ∇ نتیجه می شود که برای هر $i, j = 1, ..., n$

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0 \qquad\qquad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

واین معادل با اینست که $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد ریمانی باشد. الصاق آفین∇ روی M یک الصاق لوی چویتا [۹] می باشد، اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف)∇متقارن باشد.

ب)∇سازگار با متر ریمانی باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. انحنا R از منیفلد ریمانی M تناظری است که به هر $X, Y \in \chi(M)$ نگاشت $R(X, Y) : \chi(M) \to \chi(M)$ را وابسته می کندکه

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \qquad Z \in \chi(M)$$

که ∇ الصاق ریمانی از M می باشد.

و خواص زیر را دارا می باشد:

[۹] Levi-Civita

الف- R در $\chi(M)\times\chi(M)$ دو خطی می باشد، بنابراین:

$$\forall f,g\in C^{\infty}(M),\qquad X_۱,X_۲,Y_۱,Y_۲\in\chi(M)$$

$$R(fX_۱+gX_۲,Y_۱)=fR(X_۱,Y_۱)+gR(X_۲,Y_۱)$$

$$R(X_۱,fY_۱+gY_۲)=fR(X_۱,Y_۱)+gR(X_۱,Y_۲)$$

ب-برای هر $X,Y\in\chi(M)$، عملگر انحنای $R(X,Y):\chi(M)\longrightarrow\chi(M)$ خطی می باشد، بطوریکه:

$$\forall f\in C^{\infty}(M),\quad Z,W\in\chi(M)$$

$$R(X,Y)(Z+W)=R(X,Y)Z+R(X,Y)W$$

$$R(X,Y)fZ=fR(X,Y)Z$$

واضح است که اگر $M=R^n$، سپس $R(X,Y)Z=۰$ برای هر $X,Y,Z\in\chi(R^n)$.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد n-بعدی، $p\in M$ و $X,Y\in T_pM$ پایه هایی داخواه از یک زیر فضای ۲-بعدی π از T_pM باشد، آنگاه عدد

$$K(\pi)=K(X,Y)=\frac{R_m(X,Y,Y,X)}{<X,X><Y,Y>-<X,Y>^۲}$$

را انحنای برشی [۱۰] در نقطه p می نامیم.

انحنای برشی $K(X,Y)$ مستقل از انتخاب بردارهای $X,Y\in\pi$ است.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی باشد. می گوییم M با انحنای ثابت [۱۱] است، اگر انحنای برشی K در تمام نقاط $P\in M$ ثابت باشد.

---
[۱۰] Sectional curvature
[۱۱] Canstant curvature

تعریف ۱۵.۲.۱. متر ریمانی : [۱۲] فرض کنید M یک منیفلد n-بعدی باشد. متر ریمانی هموار g روی M خانواده $\{g_x\}_{x\in M}$ از ضرب های داخلی روی هر فضای مماس T_xM می باشد، بطوریکه توابع

$$g_{ij}(x) = g_x(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$$

c^∞، میباشد.

چون هر g_x ضرب داخلی می باشد، ماتریس g_{ij}در هر نقطه $x \in M$ مثبت معین می باشد.

به عبارتی دیگر متر ریمانی روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M عبارت است از یک تانسور g از نوع $\binom{2}{0}$ روی M بطوریکه در هر نقطه p از M ، g_p متقارن - یعنی $\forall X, Y \in T_pM, g_p(X,Y) = g_p(Y,X)$ -و معین مثبت -یعنی $\forall X \neq 0 \;\; g_p(X,X) > 0$ - باشد.

به راحتی می توان بررسی نمود که این تانسور در هر نقطه M یک ضرب داخلی روی T_pM تعریف می کند . این ضرب داخلی را توسط $< X, Y >_p$ یا تانسور $g_p(X,Y)$ نمایش می دهیم.

اگر (x, U) یک چارت در همسایگی نقطه p از منیفلد M ، $x(p) = (x^1, \dots, x^n)$ مختصات موضعی وابسته به آن و $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ پایه ای در همسایگی p روی T_pM باشد داریم:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \quad , \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

آنگاه در مختصات موضعی تانسور ریمان به صورت زیر نوشته می شود.

$$g_p(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p) dx^i \otimes dx^j (X,Y).$$

اگر $X, Y \in T_pM$ ، آنگاه متریک ریمانی $g(X,Y)$ یا ضرب داخلی بین دو بردار X و Y را می توان به صورت زیر نوشت:

$$< X, Y > = < \sum_{i=1} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} > = \sum_{i,j} X^i X^j < \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} > .$$

$$g(X,Y) = < X, Y > = \sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j.$$

[۱۲] Riemannian metric

گزاره ۱۶.۲.۱. روی هر منیفلد دیفرانسیل پذیر (هاسدورف با پایه شمارا) می توان یک متر ریمانی تعریف نمود.

اثبات. در حقیقت می خواهیم شرایطی فراهم نمائیم که متریک القائی توسط چارت های موضعی تشکیل یک متر ریمانی روی M بدهد. فرض کنیم $\{f_\alpha\}$ یک افراز یکانی دیفرانسیل پذیر وابسته به پوشش $\{V_\alpha\}$ از M بوسیله همسایگی های مختصاتی باشد. یعنی $\{V_\alpha\}$ پوشش موضعا متناهی داشته باشد(یعنی هر نقطه از M یک همسایگی U دارد بطوریکه $U \cap V_\alpha \neq \phi$ در حداکثر تعداد متناهی از اندیس). و $\{f_\alpha\}$ هایک خانواده از توابع دیفرانسیل پذیر روی M باشد که در خواص زیر صدق می کند:

۱) $f_\alpha \geq ۰$ و $f_\alpha = ۰$ روی متمم مجموعه بسته ی $\overline{V}_\alpha$

۲) $\sum_\alpha f_\alpha(p) = ۱$ به ازای هر $p \in M$

واضح است که ما می توانیم متر ریمانی $<,>^\alpha$ روی هر V_α تعریف کنیم. متر به وسیله دستگاه مختصات موضعی القا می شود. فرض کنیم $(V_\alpha, \varphi_\alpha = (x_۱, ..., x_n))$ یک دستگاه مختصات موضعی برای M باشد. می توان متر ریمانی را به صورت $< \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} >^\alpha = \delta_{ij}$ تعریف کرد.

اکنون با استفاده از متر ریمانی و افراز یکانی یک متر ریمانی روی کل M به صورت $< u, v, >_p = \sum_\alpha f_\alpha(p) < u, v >_p^\alpha$ تعریف می کنیم.

برای هر $p \in M$، $u, v \in T_pM$ که این ساختار یک متر ریمانی روی M تعریف می کند. ■

قضیه ۱۷.۲.۱. (قضیه اساسی هندسه ریمانی) روی هر منیفلد ریمانی (M, g) یک وتنها یک الصاق ریمانی وجود دارد.

اثبات. (اثبات وجود)فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی بوده و X و Y دو میدان برداری روی M باشند.

عملگر $\nabla : (X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$ را توسط رابطه زیر تعریف نموده نشان می دهیم که به ازای هر میدان برداری دلخواه Z یک الصاق ریمانی روی M است.

$$۲ < \nabla_X Y, Z >= X < Y, Z > +Y < X, Z > -Z < X, Y >$$

$$+ < [X,Y],Z > + < [Z,X],Y > + < X,[Z,Y] >$$

براحتی می توان نشان داد که عملگر در شرایط الصاق خطی صدق می کند.

(اثبات یکتایی).برای اثبات یکتایی کافی است توجه کنیم که سمت راست رابطه بالا به ∇ بستگی ندارد و هر عملگر دیگری مانند ∇' که توسط این رابطه تعریف شود با ∇ برابر است. ■

برای محاسبه طول برداری مانند X در فضای اقلیدسی از ضرب داخلی دو بردار یعنی $< X,X >^{\frac{1}{2}}$ استفاده می کنیم . این ضرب داخلی یک متر موسوم به متریک اقلیدسی در فضای R^n تعریف می کند، $< X,Y >= \delta_{ij}X^iY^j$ که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر است. به همین صورت در منیفلد ریمانی (M,g) طول یک بردار مماس X با ارائه یک ضرب داخلی روی فضای مماس T_pM به صورت $g(X,Y) = g_{ij}X^iY^j$ ، محاسبه می گرددکه در آن $g_{ij}(x)$ها توابعی حقیقی روی M هستند، که بستگی به نقطه $x \in M$ دارند.

حال می خواهیم ضرب داخلی تعریف کنیم که در آن طول یک بردار علاوه بر نقطه $x \in M$، به جهت آن نیز بستگی داشته باشد. متریک بر خاسته از این ضرب داخلی را متریک فینسلری می نامیم و با $g(X,Y) = g_{ij}X^iY^j$ نمایش می دهیم. در اینجا $g_{ij}(x,y)$ها توابعی حقیقی روی TM هستند، که علاوه بر نقطه $x \in M$ به جهت آن یعنی $y \in T_pM$ بستگی دارند.

تعریف ۱.۲.۱۸. یک ساختار فینسلر روی TM تابعی است چون $F : TM \longrightarrow [0,\infty)$ که در شرایط زیر صدق می کند :

منظم بودن : F روی $TM \setminus 0$ هموار است.

همگن مثبت: به ازای هر $\lambda > 0$، $F(x,\lambda y) = \lambda F(x,y)$

تحدب قوی: ماتریس زیر موسوم به ماتریس هیسن در تمام نقاط $TM \setminus 0$ معین مثبت باشد.

$$(g_{ij}) = (\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j})$$

به این صورت که برای هر $v \neq 0$ داشته باشیم $g(v,v) > 0$.

تانسور متقارن و معین مثبت g با مولفه های g_{ij} را تانسور اساسی یا متریک فینسلر نامیده، دو تایی (M,F)را منیفلد فینسلری می نامند.

توجه نمایید که در اینجا مولفه های تانسور متر فینسلری یعنی $g_{ij}(x,y)$ روی TM تعریف شده و توابعی از x و y هستند، در صورتی که مولفه های تانسور متریک ریمان یعنی $g_{ij}(x)$ روی M تعریف شده و توابعی از x هستند.

تذکر۱ : در اینجا معین مثبت بودن به این معنی است که ماتریس (g_{ij}) ناتبهگون-یعنی با دترمینان مخالف صفر- بوده و برای هر بردار $y \neq 0$ داشته باشیم $g_{ij}(x,y)y^iy^j > 0$.

تذکر۲ : اگر فرض کنیم $C_{ijk} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$، آنگاه C را مولفه های تانسور تاب کارتان می نامند. تانسور تاب کارتان انحراف متریک فینسلری را از متریک ریمانی مشخص می کند. به عبارت معادل اگر $C_{ijk} = 0$ باشد، آنگاه (g_{ij}) به y بستگی نداشته و در نتیجه یک متریک ریمانی است.

تذکر۳ : شرط تحدب قوی به این منظور آورده شده است، که ماتریس g_{ij} معکوس پذیر بوده و مانند ماتریس متریک ریمانی ضرایب معکوس آن یعنی g^{ij} نیز تعریف شود. مثبت معین بودن g_{ij} بستگی به انتخاب پایه در T_xM ندارد.

تذکر۴ : شرط مثبت بودن F از آنجا مورد نیاز است که بتوان با استفاده از آن یک تابع فاصله روی M تعریف کرد.

تذکر۵ : شرط همگن بودن F به دلیل فراهم آوردن یک شرط لازم و کافی است که بر آن اساس طول قوس یک منحنی که توسط انتگرال $\int F(x(t),y(t))dt$ داده می شود به پارامتر t بستگی نداشته باشد. این موضوع توسط ک .کارا تئودوری استاد پ. فینسلر ثابت شده است.

تذکر۶ : شرط همگن مثبت در بعضی مراجع با شرط دیگری به نام شرط همگنی مطلق تعویض می شود. در این حالت به ازای هر $\lambda \in R \quad F(x,\lambda y) = |\lambda| F(x,y),$. نظر به اینکه این شرط نسبتا سنگین بوده و موجب حذف برخی از مثال های جالب در فضای فینسلر مانند فضای راندرز می شود، در اینجا از آن استفاده نشده

است.

هر متر فینسلری F روی منیفلد M یک ساختار طولی L_F را روی خم های جهت دار در M تعریف می کند. برای اندازه گیری طول یک منحنی هموار C مشخص شده با $C = C(t)$، $a \leqslant t \leqslant b$، در منیفلد M، کافی است تابع اسکالر غیر منفی $F(x,.)$ روی هر فضای مماس T_xM تعریف کنیم. پس طول C بصورت زیر تعریف می شود

$$L_F(C) = \int_a^b F(C(t), C'(t))dt$$

تابع $L_F(C)$ نیازمند این است که مستقل از پارامتریسازی باشد و باید به طور مثبت همگن از درجه ۱ باشد،

$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \qquad \lambda > ۰$$

ساختار طولی شامل یک تابع غیر منفی $d : M \times M \longrightarrow [۰, \infty)$ با $d(p,q) = inf_C L(C)$ است، که اینفیموم روی همه ی منحنی های هموار C از p تا q گرفته می شود.

d برگشت ناپذیر می باشد، یعنی $d(p,q) \neq d(q,p)$ برای هر جفت از نقاط $\{p,q\}$. F به طور منحصر به فرد با d_F مشخص می شود.

چند مثال از متریک فینسلری

مثال. فضای ریمانی: ساده ترین مثال از یک متریک فینسلری، یک متریک ریمانی است. R^n را همراه با متریک ریمانی a_{ij} در نظر میگیریم، در این صورت منیفلد ریمانی (R^n, a_{ij}) را می توان به عنوان یک منیفلد فینسلری در نظر گرفت که تابع اساسی آن توسط $F(x,y) = \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ تعریف می شود.

مثال . فضای کرو پینا: [۱۳] فرض کنیم α معرف یک متریک ریمانی و βیک ۱-فرم روی منیفلد M باشند. زیر فضایی از $TM_۰$ را در نظر می گیریم که در آن ۱-فرم $\beta > ۰$ اکیدا مثبت باشد. می توان نشان داد که $f(x,y) = \frac{\alpha^۲}{\beta}$ در شرایط تابع اساسی فینسلری صدق می کند. در این صورت آن را از نوع کرو پینا گفته و فضای $(M, \frac{\alpha^۲}{\beta})$را فضای کروپینا می نامند.

[۱۳] kropina space

مثال. فضای ماتسوموتو : [۱۴] فرض کنیم α معرف یک متریک ریمانی و β یک -۱فرم روی منیفلد M باشند. زیر فضایی از TM_0 را درنظر می گیریم که در آن تابع $F(x,y)=\frac{\alpha^2}{a\alpha-b\beta}$ تعریف شود. تابع $F(x,y)$ در شرایط تابع اساسی فینسلری صدق می کند. در اینصورت آن را از نوع ماتسوموتو گفته و فضای $(M,\frac{\alpha^2}{a\alpha-b\beta})$ را فضای ماتسوموتو می نامند.

تعریف ۱.۲.۱۹. تحدید متر فینسلری به صفحه مماس T_xM، یک نرم مینکوفسکی نامیده می شود.

قضیه ۱.۲.۲۰. قضیه اویلر [۱۵] : فرض کنیم تابع حقیقی H در تمام نقاط $R^n\setminus\{0\}$ دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه H همگن مثبت از درجه r است اگر وتنها اگر

$$y^iH_{y^i}(y)=rH(y)$$

اثبات. فرض کنیم H همگن مثبت از درجه r باشد بنابر تعریف به ازای هر $\lambda>0$ ، داریم $H(x,\lambda y)=\lambda^rH(x,y)$ با فرض ثابت بودن y از این رابطه نسبت به λ مشتق می گیریم:

$$y^iH_{\lambda y^i}(\lambda y)=r\lambda^{r-1}H(y)$$

با قرار دادن $\lambda=1$ نتیجه حاصل می شود. حال بر عکس فرض کنیم: $y^iH_{y^i}(y)=rH(y)$. با ثابت در نظر گرفتن y و $\lambda>0$ از قاعده زنجیره ای داریم:

$$\frac{d}{d\lambda}H(\lambda y)=\frac{dH(\lambda y)}{d(\lambda y)}\frac{d(\lambda y)}{d\lambda}=H_{\lambda y}(\lambda y)y=\frac{1}{\lambda}\lambda H_{\lambda y}(\lambda y)y=\frac{1}{\lambda}rH(\lambda y)$$

لذا معادله دیفرانسیل زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{d}{d\lambda}H(\lambda y)-\frac{r}{\lambda}H(\lambda y)=0$$

که این معادله را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(\frac{d}{d\lambda})(\frac{H(\lambda y)}{\lambda^r})=0$$

[۱۴] matsomoto space
[۱۵] Euler's Theorem

که جواب آن به شکل $H(\lambda y)=c\lambda^r$ است که در آن c یک مقدار ثابت است. بافرض $\lambda=1$ مقدار $c=H(y)$ بدست می آید. در نتیجه $H(\lambda y)=\lambda^r H(y)$ که همگن بودن H را نتیجه می دهد. ■

تعریف ۲۱.۲.۱. متر راندرز : فرض کنید M یک منیفلدn بعدی باشد. متر راندرز، یک ساختار فینسلریF روی TM می باشد که فرمی به صورت:

$$F(x,y):=\alpha(x,y)+\beta(x,y)$$

داردکه $\alpha(x,y)=\sqrt{\widetilde{a}_{ij}(x)y^iy^j}$ و $\beta(x,y)=\widetilde{b}_i(x)y^i$ بطوریکه $\widetilde{a}_{ij}$مولفه های متریک ریمانی باشند و $\widetilde{b}_i$ها ضرایب ۱-فرمی می باشند

به خاطر عبارت β، موقعی که $\tilde{b}_i\neq 0$، مترهای راندرزدر شرط $F(x,-y)=F(x,y)$ صدق نمی کنند. در حقیقت تابع فینسلر از فضای راندرز، همگن است اگر وتنها اگر ریمانی باشد.

چون $\beta(x,y)$ در y خطی می باشد امکان داشتن یک علامت ثابت وجود ندارد. بنابراین برای اینکه F روی TM مثبت باشد باید اندازه مولفه های $\tilde{b}$ قابل قبول باشد. یعنی مثبت بودن برقرار است اگروتنها اگر

$$\parallel\tilde{b}\parallel=\sqrt{\tilde{b}_i\tilde{b}^i}<1,$$

که

$$\tilde{b}^i=\tilde{a}^{ij}\tilde{b}_i.$$

گزاره ۲۲.۲.۱. فرض کنید $x\in M$، متر راندرز F روی $TM\setminus 0$ مثبت می باشد. یعنی

$$\sqrt{\tilde{a}_{ij}y^iy^j}>-\tilde{b}_iy^i \qquad \forall\ y\neq 0 \qquad (*)$$

اگروتنها اگر $\parallel\tilde{b}\parallel<1$

اثبات. فرض کنیم F مثبت باشد. اگر $\tilde{b}\neq 0$ ، رابطه ی

$$y^i=-\tilde{b}^i=-\tilde{a}^{ij}\tilde{b}_j$$

را داخل $(*)$ جانشین کنید، $\sqrt{\tilde{a}_{ij}(-\tilde{a}^{ij}\tilde{b}_j)(-\tilde{b}^j)} > -\tilde{b}_i(-\tilde{b}^i)$

چون $\tilde{a}^{ij}$ ماتریس معکوس $\tilde{a}_{ij}$ می باشد، لذا $\tilde{a}^{ij}\tilde{a}_{ij} = I$

$$\Longrightarrow \sqrt{\tilde{b}_i\tilde{b}^i} > \tilde{b}_i\tilde{b}^i \qquad \Longrightarrow \frac{\tilde{b}_i\tilde{b}^i}{\sqrt{\tilde{b}_i\tilde{b}^i}} < ۱ \qquad \Longrightarrow \| \tilde{b} \| < ۱$$

برعکس، فرض کنید ۱ $> \| \tilde{b} \|$ بنا به نامساوی کوشی شوارتز، اگر $y \neq ۰$ داریم:

$$|\tilde{b}_i y^i| < \sqrt{\tilde{a}_{ij}y^iy^j}$$

■

فضاهای راندرز کاربرد زیادی در ارائه مدل های هندسی برای نظریه نسبیت دارند.

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد n بعدی و $\Pi : TM_۰ = TM\backslash\{۰\} \to M$ یک نگاشت تصویر می باشد. اسپری روی M یک میدان برداری هموار خاص روی $TM_۰$ بصورت:

$$G = Y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - ۲G^i\frac{\partial}{\partial y^i}$$

می باشد که $G^i = G^i(x,y)$ توابع موضعی با همگنی زیر باشد،

$$G^i(x, \lambda y) = \lambda^۲ G^i(x,y) \qquad \lambda > ۰.$$

تعریف ۲۴.۲.۱. یک دیفئورفیسم ازمنیفلد M به خودش (یعنی یک همومورفیسم مانند φکه φ و $\varphi^{-۱}$ مشتق پذیر باشند)یک تبدیل مشتق یا تبدیل [۱۶] از M نامیده می شود.

تعریف ۲۵.۲.۱. ناوردای چپ و راست:

متریک ریمانی روی G ناوردای چپ می باشد، اگر $\forall x,y \in G \quad ,\forall u,v \in T_yG$

$$\langle u,v\rangle_y = \langle d(L_x)_y u, d(L_x)_y v\rangle_{L_x(y)}.$$

میدان برداری مشتق پذیر X روی گروه لی G ناوردای چپ می باشد، اگر $\forall x \in G \quad dL_xX = X$.

[۱۶] Transformation

و متر فینسلر F روی G ناوردای چپ می باشد، اگر:

$$F(h,Y)=F(L_gh,L_{g_*}Y)\ \ \forall Y\in T_hG,\quad \forall g,h\in G$$

در حالت ناوردای راست به جای L_h از R_h استفاده می شود.

تعریف ۲۶.۲.۱. گروه یک پارامتری [۱۷] از تبدیلات Mیک نگاشت از

$$R\times M\longrightarrow M$$

$$(t,p)\in R\times M\longrightarrow \varphi_t(p)\in M$$

که در شرایط زیر صدق می کند :

الف) φ_t که $t\in R$ $\varphi_t(p)$ $\varphi_t:p\longrightarrow$ یک تبدیل ازM می باشد.

ب) $\varphi_{t+s}(p)=\varphi_t(\varphi_s(p))$، $p\in M$، $t,s\in R$.

هر گروه یک پارامتری از تبدیلات φ_t یک میدان برداری مانند X را تولید می کند.

گروه یک پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی می تواند به صورت یکسانی تعریف شود بجز اینکه $\varphi_t(p)$ تنها برای t هایی که دریک همسایگی از صفر هستند، تعریف می شود و p در یک مجموعه باز از M می باشد. فرض کنید I_ϵ یک همسایگی باز به صورت $(-\epsilon,\epsilon)$ باشد و u مجموعه بازی ازM باشد گروه یک پارامتری موضعی از تبدیلات موضعی روی $I_\epsilon\times u$ تعریف می شود به طوری که

$$\text{۱)}\ \ \forall t\in I_\epsilon\qquad \varphi_t:p\longrightarrow\varphi_t(p)$$

یک دیفئومورفسیم ازu به داخل مجموعه باز $\varphi_t(u)$ از M می باشد.

$$\text{۲)}\quad if\quad t,s,t+s\in I_\epsilon\ \ p,\varphi_s(p)\in u\Rightarrow\varphi_{t+s}(p)=\varphi_t(\varphi_s(p))$$

[۱۷] One-parameter

تعریف ۲۷.۲.۱. گروه ایزومتری ها : فرض کنید (M,F) فضای فینسلر باشد. نگاشت φ از M به خودش یک ایزومتری نامیده میشود، اگر φ دیفئومورفیسم باشد و برای هر

$$\forall \quad x \in M \quad X \in T_xM \qquad F(\varphi(x), d\varphi_x(X)) = F(x, y).$$

ایزومتری های (M,F) را با $I(M)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲۸.۲.۱. میدانهای برداری X روی M میدان برداری کیلینگ نامیده میشود، اگردر یک همسایگی ازهر نقطه M گروه یک پارامتری ها از تبدیلات موضعی ایجاد شده بوسیله X ، ایزومتری های موضعی باشند.

تعریف ۲۹.۲.۱. هر متر فینسلر $F = F(x,y)$ روی منیفلد n بعدی M یک فرم حجمی تعریف می کند. فرض کنید در نقطه $x \in M$، $\{b_i\}$پایه ای برای T_xM و $\{\theta_i\}$پایه ای برای هر T_x^*M باشد.n- فرمی زیر در $x \in M$ ، خوش تعریف میباشد.

$$dV_F = \sigma_F(x)\theta^1 \Lambda....\Lambda\theta^n.$$

که در آن:

$$\sigma_F(x) = \frac{Vol(B^n(1))}{Vol((y^i) \in R^n | F(x, y^i b_i) < 1)}.$$

$Vol(.)$تابع حجم اقلیدسی روی زیر فضاها در R^n را نشان می دهد، بطوریکه برای مکعب واحد $U = [0, 1]^n$ $Vol(U) = 1$.

n-فرمی dV_F فرم حجمی فینسلر نامیده می شود. برای هر زیر مجموعه باز $u \in M$، حجم u با $Vol_F(u) = \int_u dV_F$ تعریف می شود. حال تغییر شکل را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\tau = ln\frac{\sqrt{det(g_{ij}(y))}}{\sigma_F}.$$

تغییر شکل روی فضای مماس مینکوفسکی تعریف می شود و خصوصیات غیر اقلیدسی از نرم مینکوفسکی را اندازه گیری می کند در حالی که S-انحناکمیتی است که سرعت تغییرات حجم را در طول ژئودزیک ها محاسبه می کند.

مثال . فرض کنید $R \subset M$ زیر مجموعه همبند بازباشد، که بستارش فشرده باشد. فرض می کنیم که R شامل یک همسایگی مختصاتی $x(U)$ با پارامتری ساز مثبت $x : U \longrightarrow M$ و اینکه مرز از $x^{-1}(R)$ از اندازه صفر در R^n باشد، اکنون حجم $Vol(R)$ از R با انتگرال در R^n به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Vol(R) = \int_{x^{-1}(R)} \sqrt{det(g_{ij})} dx_1 ... dx_n.$$

تعریف ۳۰.۲.۱. برای هر $y \in T_xM - \{0\}$، فرض کنید $\sigma = \sigma(t)$ یک ژئودزیک با $\sigma(x) = 0$ و $\sigma'(x) = y$. قرار دهید:

$$S(x, y) := \frac{d}{dt}[\tau(\sigma(t), \sigma'(t))]|_{t=0},$$

که همگن از درجه یک می باشد یعنی:

$$S(x, y) = \lambda S(x, y), \quad \lambda > 0$$

S تعریف شده در بالا S-انحنا [18] نامیده می شود.

تعریف ۳۱.۲.۱. متریک فینسلر F روی منیفلد nبعدی M، S-انحنای ایزوتروپیک تقریبی دارد، اگر تابع اسکالر $C = C(x)$ روی Mموجود باشد به طوری که

$$S = (n + 1)\{CF + \eta\}$$

که $\eta = \eta_i(x)y^i$ یک فرمی بسته می باشد.

اگر $\eta = 0$ باشد، آنگاه F،S– انحنای ایزوتروپیک دارد. همچنین اگر $\eta = 0$ و ثابت$= C$ آنگاه F ، S–انحنای ثابت دارد.

گزاره ۳۲.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر با الصاق خطی ∇و $C : I \longrightarrow M$ یک منحنی دیفرانسیل پذیر روی M باشد. اگر $V_0 \in T_{C(t_0)}M$ بردار مماس بر M در نقطه $C(t_o)$ باشد، آنگاه یک میدان برداری موازی یکتا V در طول منحنی C موجود است به طوری که $V(t_0) = V_0$.

[18] S-curvature

اثبات. ابتدا ثابت می کنیم که اگر گزاره روی یک چارت موضعی M بر قرار باشد آنگاه می توان از آن نتیجه گرفت که گزاره روی کل M بر قرار است. فرض کنیم گزاره برای حالتی که منحنی C زیر مجموعه ی یک چارت موضعی است بر قرار باشد. سپس می توان به شرح زیر نشان داد که گزاره روی کل M بر قرار است از فشردگی I نتیجه می شود که برای هر $t_1 \in I$ قطعه $C([t_0,t_1])$ نیز فشرده بود (چون C پیوسته است) و آنرا می توان بوسیله تعداد متناهی از چارت های موضعی پوشاند.

طبق فرض V را می توان روی هر یک از این چارت ها به طور یکتا تعریف نمود. از فرض یکتا یی میدان برداری V در طول منحنی C نتیجه می شود که این میدان های برداری هنگامی که اشتراک چارت ها نا تهی است بر یک دیگر منطبق می شود. بنابراین V در تمام نقاط در طول بازه $[t_0,t_1]$ تعریف می شود و در نتیجه V در کل بازه I به طور یکتا تعریف می شود، لذا کافیست گزاره را در حالتی که C زیر مجموعه چارت موضعی (x,U) است ثابت کنیم .

فرض کنیم که میدان برداری V در همسایگی U موجود بوده بطوریکه در طول $C(t) = (C_1(t)\ ,...,\ C_n(t))$ موازی و شرط $V(t_0) = V_0$ صدق کند. اگر $V = \sum_j \nu^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ آنگاه بنابر قرار داد $C_i = x(C^i(t)) = x_i$ و با توجه به تعریف $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} V$ داریم:

$$\frac{D\frac{\partial}{\partial x_j}}{dt} = \nabla_{\frac{dC}{dt}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla_{\frac{dC_i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{dC_i}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

لذا داریم:

$$0 = \frac{DV}{dt} = \frac{D(\nu^j \frac{\partial}{\partial x_j})}{dt} = \frac{d\nu^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x_j} + \nu^j \frac{D\frac{\partial}{\partial x_j}}{dt} = \frac{d\nu^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x_j} + \nu^j \frac{dC_i}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} *$$

با جایگذاری رابطه(*) و تعویض اندیس j با k در جمله اول داریم:

$$\frac{DV}{dt} = \{\frac{d\nu^k}{dt} + \nu^j \frac{dC_i}{dt}\Gamma_{ij}^k\}\frac{\partial}{\partial x_k} = 0$$

از این رابطه یک دستگاه n معادله دیفرانسیل درجه اول خطی نسبت به $\nu^k(t)$ ازای $k = 1...n$ بدست می آید.

$$\frac{d\nu^k}{dt} + \nu^j \frac{dC_i}{dt}\Gamma_{ij}^k = 0$$

براساس قضیه وجود ویکتایی جواب در معادلات دیفرانسیل، این معادله با شرط اولیه $\nu^k(t_0) = \nu_0^k$ دارای جواب یکتاست. از طرف دیگر چون دستگاه خطی است به ازای هر $t \in I$ جواب های آن موجود بوده و به طور یکتا تعریف می شود، از آن وجود و یکتایی یک میدان برداری موازی یکتا V با شرط اولیه فوق نتیجه می گردد. ■

تعریف ۳۳.۲.۱. منحنی $\gamma(t)$ روی منیفلد ریمانی (M,g) را ژئودزیک گوییم، اگر بردار سرعت آن در امتداد خودش موازی باشد. به عبارت دیگر، منحنی $\gamma : I \longrightarrow M$ ژئودزیک می باشد اگر در هر نقطه $t_0 \in I$ ، $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$.

اگر $\gamma : I \longrightarrow M$ یک ژئودزیک باشد، آنگاه

$$\frac{d}{dt} < \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} >= 2 < \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} >= 0$$

حال چارت مختصاتی (U,x) راحول $\gamma(t_0)$ در نظر می گیریم منحنی γ

$$\gamma(t) = (x_1(t)\ , ...,\ x_n(t))$$

ژئودزیک خواهد بود اگروتنها اگر

$$0 = \frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = \Sigma_k(\frac{d^2x_k}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt})\frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2x_k}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0, \qquad\qquad k = 1, ..., n$$

لم ۳۴.۲.۱. همگنی ژئودزیک ها: اگر ژئودزیک $\gamma(t,p,v)$ روی $(-\delta,\delta)$ تعریف شده باشد، آنگاه ژئودزیک $\gamma(t,p,av)$ نیز روی فاصله $(-\frac{\delta}{a},\frac{\delta}{a})$ تعریف می شود به طوریکه $\forall a \in R^+$ ،

$$\gamma(t,p,av) = \gamma(at,p,v).$$

با استفاده از این لم ما می توانیم سرعت یک ژئودزیک را با کم کردن فاصله ی تعریف آن، زیاد یا کم کنیم. با استفاده از وجود و یکتایی ژئودزیک های یک منیفلد ریمانی (M,g) به وجود ویکتایی آن در روی کلاف مماس

TM می رسیم. فرض کنیم (x,U) یک چارت روی M و γ ، یک منحنی هموار روی آن باشد. در این صورت منحنی $(\gamma(t),\gamma'(t))$ را در روی TM در نظر می گیریم. با توجه به این که $TU = U \times R^n$ ، اگر γ روی M ژئودزیک باشد، منحنی $t \longrightarrow (x_1(t), \ \dots \ , x_n(t))$ در دستگاه زیر صدق می کند.

$$\frac{dx_k}{dt} = y_k, \qquad \frac{dy_k}{dt} = -\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} y_i y_j \quad (k = 1 \ , \dots, \ n) \tag{1.1}$$

قضیه ۳۵.۲.۱. قضیه شار موضعی : فرض کنیم X یک میدان برداری C^∞ روی بازه V در منیفلد M باشد. آنگاه به ازای هر نقطه $p \in M$ ، مجموعه ی باز $V_0 \subset V$ حول p و عدد $\delta > 0$ و نگاشت $\varphi : (-\delta,\delta)\times V_0 \longrightarrow V, C^\infty$ وجود دارند به طوریکه منحنی $t \longrightarrow \varphi(t,q)$ به ازای هر $q \in V_0$ تنها مسیر X است که در لحظه ی $t = 0$ از q میگذرد و بردار سرعت آن X_q است.

با استفاده از قضیه شار موضعی داریم:

لم ۳۶.۲.۱. فرض کنیم γ یک ژئودزیک روی M باشد. آنگاه یک میدان برداری یکتا مانند G روی TM وجود دارد به طوریکه $t \longrightarrow (\gamma(t),\gamma'(t))$ منحنی انتگرال G روی TM باشد.

اثبات . ابتدا یکتایی G را با فرض وجود آن بررسی می کنیم. چارت (x,U) را روی M در نظر می گیریم . منحنی انتگرال میدان برداری G در TU منحنی هایی به صورت $(\gamma(t),\gamma'(t))$ است که در آن γ یک ژئودزیک روی M است. لذا در معادله 1.1 صدق می کند. چون جواب معادله یکتاست پس G یکتاست. با توجه به وجود جواب در دستگاه فوق وجود G ثابت می شود. یعنی y_k و $\frac{dy_k}{dt}$ ها مولفه های G را تشکیل می دهند. ■

میدان برداری G در لم بالا را یک میدان برداری ژئودزیک یا یک اسپری ژئودزیک روی TM می گویند.

با استفاده از وجود و یکتایی ژئودزیک ها می توان نگاشت نمایی را به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۳۷.۲.۱. فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی، $p \in M$ و $\Omega \subset TM$ بصورت زیر تعریف شود $\{\gamma_\nu$ در فاصله ای شامل $[۰,۱]$ تعریف شود$\Omega_p = \{\nu \in T_pM|$. نگاشت نمایی در نقطه p رابه صورت زیر تعریف می کنیم:

$$exp_p : \Omega_p \longrightarrow M,$$

$$\nu \mapsto exp\nu = \gamma_\nu(۱).$$

تذکر: حوزه تعریف نگاشت نمایی همواره شامل یک همسایگی کوچک صفر (مبدا) $۰ \in T_pM$ است.

به زبان ساده نگاشت نمایی نگاشتی از فضای مماس TM به روی ژئودزیک های M تعریف می کندکه هر بردار ν رابه نقطه ای از ژئودزیک γ_ν در زمان $t = ۱$ می برد که آن را توسط $\gamma(۱, p, \nu)$ یا $\gamma_\nu(۱)$ نیز نمایش می دهیم.

نظریه گروه های لی در اواخر قرن نوزدهم میلادی بوجود آمد. ریشه های آن در مطالعه تقارن های برخی از دستگاه های معادلات دیفرانسیل و روش پیداکردن حلی برای آنها است. مفهوم گروه های لی اولین دفعه توسط سوفوس لی [۱۹] درسال [۱۸۷۴]مطرح شد و در آن زمان آنها را "گروه های پیوسته" نامیدو هدف اصلی وی توسعه نظریه گالوا در مورد معادلات دیفرانسیل بود.این معادلات دیفرانسیل امروزه معادلات از نوع لی نامیده می شوند ویک نمونه مشهور آن معادلات ریکاتی است.

در ابتدا نظریه گروه های لی مفهومی موضعی داشت و کار های لی،کیلینگ و کارتان در این مورد تا اوایل قرن بیستم[۱۹۲۰]به همین شکل موضعی ادامه داشت. اصطلاح "گروه لی" برای این گروه ها از کارتان [۲۰] است. سپس کار های ویل و کارتان این نظریه را به سمت سراسری شدن سوق داد وکتاب "نظریه گروه های لی" تالیف شوالی در سال[۱۹۴۶]اولین اثر مدون در زمینه نظریه گروه های لی بطور سراسری است.

قضیه ۳۸.۲.۱. منیفلد با یک ساختار گروهی یک گروه لی است اگروتنها اگر نگاشت های

[۱۹] S.Lie
[۲۰] E.Cartan

$$G \times G \longrightarrow G \qquad G \longrightarrow G$$

$$(x,y) \longrightarrow xy \qquad x \longrightarrow x^{-1}$$

مشتق پذیر باشند.

چند مثال از گروهای لی:

۱-مجموعه اعداد مختلط غیر صفر (C^*) و اعداد حقیقی غیر صفر (R^*) ، گروهای لی هستند. منیفلد بودن و گروه بودن واضح است تنها باید بگوییم که نگاشت $\mu(z,z') = z + z'$ از کلاس C^∞ است اما به علت خطی بودن μ ، C^∞ بودن واضح است.

۲-مجموعه ی ماتریس های معکوس پذیر n بعدی $(GL(n,R))$ نیز گروه لی می باشد.

۳- مجموعه ماتریس های بالا مثلثی، نا منفرد و با ضرب ماتریسی نیز یک گروه لی است.

فضای مماس $\mathfrak{g}$ در عنصر همانی از گروه G با یک نقش ترکیبی $[X,Y] \longrightarrow (X,Y)$ (که عمل براکت روی میدانهای برداری ناوردا روی G است) بدست می آید.

مثال. مجموعه میدان های برداری به همراه کروشه لی تعریف شده به صورت فوق یک جبر لی می باشد.

ساختار$G,\mathfrak{g}$ بوسیله نگاشت $exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ با هم مرتبط هستند که خط های راست از مبدا در $\mathfrak{g}$ به زیر گروهای یک پارامتری از G برده میشود، همچنین ساختار G با یک همسایگی دلخواه از عنصر همانی G مشخص می گردد.

فرم های انتقال چپ L_x و راست R_xبصورت:

$$L_x : G \longrightarrow G, L_x(y) = xy \quad ; \quad R_x : G \longrightarrow G, R_x(y) = yx$$

می باشند، که دیفئومورفیسم می باشند.

تعریف ۳۹.۲.۱. [۴] هر زیرگروه ۱-پارامتری از گروه لی G یک همومورفیسم تحلیلی از R به G می باشد.

برای هر $X \in \mathfrak{g}$ ، $exp(tX)$ زیر گروه یک ۱-پارامتری از G تولید شده توسط X می باشد. عمل $exp(tX)$ روی X ، آن را به گروه ۱-پارامتری φ_t از دیفئومورفیسم های M تعریف شده با $\varphi_t(y) = exp(tX)y$ تبدیل می کند. اکنون X در $\mathfrak{g}$ را با میدان برداری روی M تولید شده بوسیله φ_t، تعریف می کنیم. در حقیقت $\mathfrak{g}$ را با مجموعه ای از میدان های برداری کیلینگ از $(M, \mathfrak{g})$ که زیر گروه های ۱-پارامتری از G تولید می کند، تعریف می کنیم.

قضیه ۴۰.۲.۱. [۴] همسایگی N_0 ازصفر در $\mathfrak{g}$ و همسایگی باز N_e از e در G وجود دارد، بطوریکه تابع exp یک دیفئومورفیسم تحلیلی از N_0 به داخل N_e می باشد.

فرض کنید $X_1, ..., X_n$ پایه ای از $\mathfrak{g}$ باشد. نگاشت

$$exp(x_1 X_1 + \ ... \ + x_n X_n) \longrightarrow (x_1, ..., x_n)$$

از N_e به N_0 یک چارت مختصاتی روی N_e می باشد که چارت مختصاتی متعارف نسبت به $X_1, ..., X_n$ نامیده می شود وN_e همسایگی مختصاتی متعارف نامیده می شود.

تعریف ۴۱.۲.۱. اگر $a \in G$، فرض کنید $C_a = L_a o R_{a^{-1}}$ تابعی باشد که هر g را به aga^{-1} می فرستد. چون $C_a = L_a o R_{a^{-1}}$ دیفئومورفیسم می باشد، بنابراین C_a یک اتومورفیسم از G می باشد. مشتق C_a با Ad_a نشان داده می شود. اگر $a, b \in G$ سپس

$$C_{ab}(g) = abg(ab)^{-1} = a(bgb^{-1})a^{-1} \qquad \Longrightarrow C_{ab} = C_a o C_b$$

حال با مشتق گیری داریم: $Ad_{ab} = Ad_a o Ad_b$.

هومومورفیسم $Ad_a \longrightarrow a$ نمایش الحاقی از G نامیده می شود.

تعریف ۴۲.۲.۱. یک منیفلد هموار همراه با عمل هموار تعدی روی گروه لی را یک منیفلد همگن می نامیم.

تعریف ۴۳.۲.۱. فضای راندرز همگن: فضای راندرز (M, F) همگن نامیده می شود، اگر گروه ایزومتری های $I(M, F)$ از (M, F) بطور تعدی روی M عمل کند[۱۳] .(یعنی برای هر x، y در M یک ایزومتری مانند f وجود داشته باشد که $f(x) = y$(.

هر عمل گروه، تعدی [۲۱] نامیده می شود موقعی که یک مدار دارد.

در واقع عمل G روی X تعدی نامیده می شود اگر و تنها اگر برای هر $x,y \in X$ وجود دارد $g \in G$ بطوریکه $y = gx$.

نتیجه ۴۴.۲.۱. هر گروه لی G همگن می باشد. $G = \frac{G}{\{e\}}$

تعریف ۴۵.۲.۱. منیفلد ریمانی (M,g) متقارن نامیده می شود، اگر برای هر x در M ایزومتری f_x از (M,g) موجود باشد بطوریکه

$$f_x(x) = x \qquad T_x(f_x) = -Id_{T_xM}.$$

ایزومتری f_x، تقارن حول x نامیده می شود.

مثال . هر گروه لی G، همراه با متر ناوردا فضای متقارنی به صورت $g \longrightarrow g^{-۱}$ می باشد که تقارن مورد نظر اطراف عنصر همانی می باشد.

نتیجه ۴۶.۲.۱. هر فضای متقارن، همگن می باشد.

طرح اثبات. اگر دو نقطه به وسیله یک ژئودزیک بهم وصل شوند سپس تقارن در نقطه میانی این دو نقطه و روی ژئودزیک، یک ایزومتری می باشد که این نقاط را به یکدیگر می نگارد. بنابراین هر دو نقطه که بوسیله ژئودزیک های قطعه ای می توانندبه یکدیگر وصل شوند، بوسیله یک ایزومتری هم به یکدیگر نگاشته می شوند. این نشان می دهد که فضا همگن می باشد.

اما هر فضای همگن لازم نیست متقارن باشد، چون فضای همگن منبع خوبی از ایزومتری ها دارد. بنابراین منبع خوبی از میدان های برداری کیلینگ می باشد.

تعریف ۴۷.۲.۱. فضای همگن تحویلی: فضای همگن $\frac{G}{H}$ را تحویلی نامیم، اگر جبر لی $\mathfrak{g}$ از G به جمع مستقیم

[۲۱] Transitive

فضای برداری از جبر لی $\hbar$ از H و زیر فضای $ad(H)$ ناوردای $\mathfrak{m}$ تجزیه شود،

$$\mathfrak{g} = \hbar + \mathfrak{m}$$

بطوریکه:

$$\forall h \in H \quad ad(h)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$$

لازم نیست $\mathfrak{m}$ تحت عمل براکت همانند $\mathfrak{h}$ بسته باشد. ناوردایی $\mathfrak{m}$ تحت $Ad(H)$ نتیجه می دهد که $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$

تعریف ۴۸.۲.۱. الصاق چرن بر یک منیفلد فینسلری یک الصاق خطی است که روی کلاف برداری متمایز π^*TM که بر منیفلد $TM_\circ$قرار می گیرد، عمل می کند.

فرض کنیم (E, π, N) کلاف برداری و $f : M \longrightarrow N$ نگاشتی C^∞ بین دو منیفلدM و N باشد. می توان یک کلاف برداری روی M با همان تار کلاف برداری (E, π, N)را به صورت زیر تعریف کرد. این ساختار جدید را کلاف پول بک می نامیم.

تعریف ۴۹.۲.۱. اگر (E, π, N) یک کلاف برداری و $f : M \longrightarrow N$ نگاشت C^∞ باشد. کلاف پول بک E توسط f را با نماد f^*E نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^*E = \{(x, \nu) \in M \times E | f(x) = \pi(\nu)\}.$$

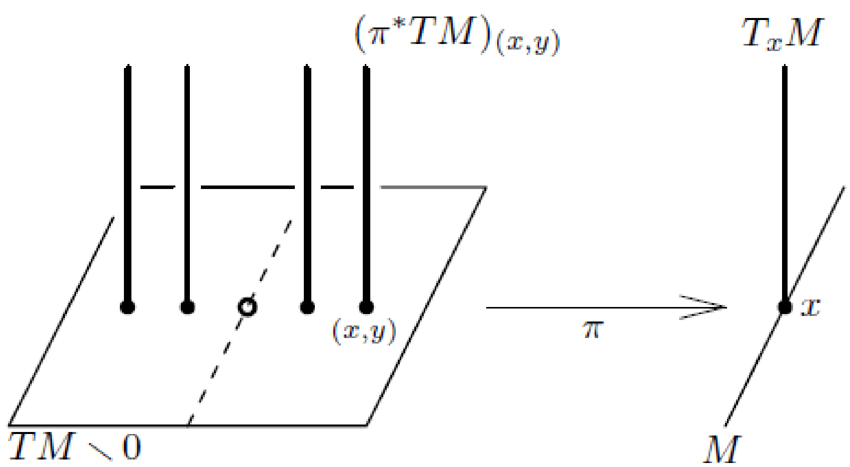
تارهای کلاف پول بک f^*Eیک کپی از تارهایE می باشند.f^*E با نگاشت تصویر مولفه اول$pr_۱ : f^*E \longrightarrow M$ که به صورت $(x, \nu) \in M \times E \longmapsto x \in M$ تعریف می شود، یک کلاف برداری روی M است. اگر نگاشت تصویر مولفه دوم $pr_۲ : f^*E \longrightarrow E$ که به صورت $(x, \nu) \longmapsto \nu$تعریف شود؛ آنگاه نگاشت بین کلاف ها در نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{pr_۲} & E \\ pr_۱ \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

و$f^*E \cong E$. اگر $\pi : TM \longrightarrow M$ نگاشت تصویر متعارف باشد، با توجه به تعریف فوق کلاف پول بک π^*TM قابل تعریف بوده و تارهای آن در هر نقطه $(x,y) \in TM^\circ$ به صورت زیر است:

$$\pi^*TM|_{(x,y)} := \{(x,y,\nu) | \nu \in T_xM\} \cong T_xM.$$

به عبارت دیگر تار روی یک نقطه(x,y)یک کپی ازT_xM است.π^*TM کلاف مماس پول بک(کلاف برداری روی کلاف مماس TM°) نامیده می شود.



شکل ۱.۱: قسمت نقطه چین، تصویر برش صفر حذف شده است.

تعریف ۵۰.۲.۱. فرض کنید $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ کنج موضعی طبیعی برای $T(TM_\circ)$ باشد. آنگاه $VTM := span\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ زیرکلاف $T(TM_\circ)$ می باشد که کلاف مماس عمودی M نامیده می شود.

فرض کنید $\partial_i := (x, y\frac{\partial}{\partial x^i}|_x)$.در این صورت $\{\partial_i\}$ یک کنج موضعی برای π^*TM می باشد.

کلاف برداری π^*TM برش متعارف $\mathcal{Y}$ را دارد که به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\mathcal{Y}_{(x,y)} := (x,y,y)$$

به ازای $y = y^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x \in T_xM$، $\mathcal{Y}$ به شکل زیر می تواند بیان شود: $\mathcal{Y} = y^i\partial_i$.

حال به بیان دو تانسور مهم در هندسه فینسلری می پردازیم.

تعریف ۵۱.۲.۱. فرض کنید F متر فینسلری روی M باشد و

$$g_{ij} := \frac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j}(x,y), \qquad C_{ijk} := \frac{1}{4}[F^2]_{y^i y^j y^k}(x,y).$$

$\mathcal{G}$ و $\mathcal{C}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{G} := g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \qquad \mathcal{C} := C_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k.$$

$\mathcal{G}$ و $\mathcal{C}$ تانسور هایی روی TM_0 می باشند که به ترتیب تانسور اساسی وتانسور کارتان نامیده می شوند.

حال به بیان قضیه زیر می پردازیم:

قضیه ۵۲.۲.۱. (چرن) فرض کنید (M,F) منیفلد فینسلری n-بعدی باشد. برای کنج موضعی دلخواه π^*TM یعنی $\{e_i\}$ و هم کنج دوگان آن برای π^*T^*M یعنی $\{w^i\}$، مجموعه یکتایی از ۱-فرمی های موضعی $\{w_j^i\}$ روی وجود دارد به طوری که :

$$dw^i = w^j \wedge w_j^i \tag{۲.۱}$$

$$dg_{ij} = g_{kj} w_i^k + g_{ik} w_j^k + 2 C_{ijk} w^{n+k} \tag{۳.۱}$$

که درآن:

$$w^{n+i} := dy^i + y^j w_j^i$$

و $y := y^i e_i$. بنابراین $g_{ij} := g(e_i,e_j)$ و $C_{ijk} := C(e_i,e_j,e_k)$. در حقیقت ۲.۱معادل با تقارن

$$\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}$$

و نبودن جملات dy^k در w_j^i است، یعنی:

$$w_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k$$

۳.۱ نتیجه می دهد:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} \} - g^{kl} \{ C_{jml} N_i^m + C_{jml} N_i^m - C_{jml} N_i^m \}$$

که در آن:

$$N_j^i := y^m \Gamma_{mj}^i .$$

در نتیجه:

$$N_j^k = \frac{1}{2} g^{kl} \{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \} y^i - 2 g^{kl} C_{jml} G^m , \tag{۴.۱}$$

که

$$G^i := \frac{1}{2} N_j^i y^j = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i y^j y^k .$$

پس:

$$G^i = \frac{1}{4} g^{il} \{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \} y^j y^k$$

و g^{ij} وارون ماتریس g_{ij} می باشد.

تعریف ۵۳.۲.۱. با فرم های الصاق چرن یعنی $\{w_j^i\}$ نسبت به کنج موضعی $\{e_i\}$ برای $\pi^* TM$ الصاق خطی ∇ روی $\pi^* TM$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla_Y X := \{ dX^i(Y) + X^j w_j^i(Y) \} \otimes e_i .$$

به طور ساده تر :

$$\nabla X := \{ dX^i + X^j w_j^i \} \otimes e_i .$$

∇ الصاق چرن [۲۲] نامیده می شود.

تعریف ۵۴.۲.۱. متریک فینسلر F روی منیفلد M متر بروالد [۲۳] نامیده می شود اگر در دستگاه مختصات طبیعی (x^i, y^i) برای $TM_\circ$، علائم کریستوفل $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x)$ توابعی برحسب $x \in M$ باشند.

در این حالت ، $G^i = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)y^j y^k$ همگن از درجه دوم می باشد.

فرض کنید $G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}$ اسپری روی منیفلد M باشد. به ازای هر $y \in TM\backslash\{0\}$، انحنای بروالد $B_y : T_xM \times T_xM \times T_xM \longrightarrow T_xM$ فرمی سه خطی به صورت :

$$B_y(u, v, w) = B^i_{jkl}(y)u^j v^k w^l \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$$

که

$$B^i_{jkl}(y) := \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}(y).$$

و انحنای بروالد میانه $E_y : T_xM \times T_xM \longrightarrow R$ فرمی دو خطی می باشد که به شکل زیر تعریف می شود:

$$E_y(u, v) = E_{ij}(y)u^i v^j \qquad\qquad E_{ij}(y) := \frac{1}{2}B^m_{ijm}(y).$$

بر اساس انحنای بروالد، داگلاس مفهوم جدید $D_y : T_xM \times T_xM \times T_xM \longrightarrow T_xM$ را معرفی نمود که فرمی سه خطی می باشد و به صورت $D_y(u, v, w) = D^i_{jkl}(y)u^j v^k w^l \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ تعریف می شود که

$$D^i_{jkl} := B^i_{jkl} - \frac{2}{n+1}[E_{jk}\delta^i_l + E_{jl}\delta^i_k + E_{kl}\delta^i_j + \frac{\partial E_{jk}}{\partial y^i}y^i].$$

$D := \{D_y\}_{y \in TM\backslash\{0\}}$ انحنای داگلاس نامیده می شود.

تعریف ۵۵.۲.۱. اگر $D = 0$ آنگاه اسپری، آفین تصویری می باشد.

تعریف ۵۶.۲.۱. هرمتر فینسلر، متر داگلاس [۲۴] نامیده می شود، اگر اسپری آن آفین تصویری باشد.

[۲۲] Chern cannection
[۲۳] Berwald Metric
[۲۴] Douglas Metric

فصل ۲

الصاق لوی چویتای منیفلد های ریمانی همگن

۱.۲ مقدمه

همان طور که اشاره شد، مفهوم الصاق در سال [۱۹۱۷] توسط لوی چویتا مورد مطالعه قرار گرفت.

اکنون در نظر داریم بنا به فرمول کوزول [۶] ومیدان های برداری کیلینگ، [۵] فرمولی برای الصاق لوی چویتا در دستگاه مختصات موضعی بدست آورده و چند نتیجه مربوط به آن را روی فضای رده ای بیان نموده [۱] که در فصل بعد برای محاسبه S-انحنای فضای راندرز همگن استفاده می شوند.

۲.۲ الصاق لوی چویتا در حالت موضعی

در ابتدا نشان می دهیم با استفاده از گرو های ۱-پارامتری می توان میدان برداری ساخت [۶]. فرض کنیم $\varphi : M \times R \longrightarrow M$ یک گروه یک پارامتری از دیفئومورفیسم های M باشد. همچنین فرض کنیم $f \in C^\infty(M)$ و $a \in M$ را دلخواه و ثابت در نظر می گیریم، در این صورت داریم:

$$M \times R \longrightarrow^{\varphi} M \longrightarrow^{f} R$$

$$(a, t) \longrightarrow \varphi_t(a) \longrightarrow f(\varphi_t(a))$$

اکنون تابع $f(\varphi_t(a))$، تابعی با برد ودامنه اعداد حقیقی است، یعنی:

$$f(\varphi_t(a)) : R \longrightarrow R$$

$$t \longrightarrow f(\varphi_t(a)).$$

اکنون X_a را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$X_a : C^\infty(M) \longrightarrow R$$

$$X_a(f) = \frac{\partial}{\partial t} f(\varphi_t(a))|_{t=0}$$

به سادگی می توان نشان دادکه X_a خطی ولایب نیتز می باشد:

$$\forall f, g \in C^\infty(M) \qquad \lambda, \mu \in R$$

$$X_a(\lambda f + \mu g) = \frac{\partial}{\partial t}((\lambda f + \mu g))(\varphi_t(a))|_{t=0}$$

$$= \lambda \frac{\partial}{\partial t} f(\varphi_t(a)) + \mu \frac{\partial}{\partial t} g(\varphi_t(a))|_{t=0}$$

$$= \lambda(X_a f) + \lambda(X_a g)$$

بنابراین X_a خطی است.

$$X_a(fg) = \frac{\partial}{\partial t}((fg)(\varphi_t(a))|_{t=0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} f(\varphi_t(a))|_{t=0}\, g(\varphi_0(a)) + f(\varphi_0(a)) \frac{\partial}{\partial t} g(\varphi_t(a))|_{t=0}$$

$$= X_a(f)g(a) + f(a)X_a(g)$$

بنابراین X_a در شرط لایب نیتز صدق می کند. بنابراین: $X_a \in T_a M$

اکنون با فرض متغیر بودن $a \in M$ به یک میدان برداری روی M می رسیم.

$$\begin{cases} X : M \longrightarrow TM \\ \forall a \in M \quad X(a) \in T_a M \end{cases}.$$

عکس عمل فوق را می توان انجام داد یعنی از یک میدان برداری به یک گروه ۱-پارامتری برسیم.

فرض کنید $(\frac{G}{H}, \alpha)$ منیفلد ریمانی همگن باشد، که $\frac{G}{H}$ منیفلد همگن تحویلی باشد. $\mathfrak{m}$ را فضای مماس $T_0(\frac{G}{H}$ و $<,>$ ضرب داخلی متناظر روی $\mathfrak{m}$ تعریف می کنیم [۸] .

چون علاقه مند به مشتق گیری از میدان های برداری ناوردا روی $\frac{G}{H}$ میباشیم. لذا گروه تبدیل یک پارامتری

$\{\phi_t\ ;\ t\in R\}$ از $\frac{G}{H}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\phi_t(gH) = (exp(tv)g)H \quad g \in G$$

که ϕ_t میدان برداری روی $\frac{G}{H}$ تولید می کند که میدان های برداری کیلینگ نامیده می شوند [۵] . این میدان برداری را با $\hat{v}$ نمایش می دهیم. حال قضیه زیر را بیان می کنیم :

قضیه ۱.۲.۲. [۱۲]، [۸] فرض کنید $M = \frac{G}{H}$ فضای همگن تحویلی با یک ترکیب $ad(H)$-ناوردای $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ باشد. فرض کنید g متر G-ناوردا روی M باشد، در این صورت الصاق ریمانی برای g به صورت زیر می باشد:

$$\Lambda_m(X)Y = \frac{۱}{۲}[X,Y]_m + U(X,Y)$$

که $U(X,Y)$ نگاشت دو خطی متقارن از $\mathfrak{m}\times\mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}$ می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$< U(X,Y), Z >= \frac{۱}{۲}(< X, [Z,Y]_m > + < [Z,X]_m, Y >), \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{m}.$$

و $\Lambda_m(X)$ یک تبدیل خطی از $\mathfrak{m}$ می باشد.

اثبات . با مشخص کردن $\mathfrak{m}$ و $T_\circ M$ داریم $\Lambda_\mathfrak{m}(X) = -(A_X)_\circ$ چون A_X نسبت به $\mathfrak{g}$ پادمتقارن می باشد لذا $\Lambda_\mathfrak{m}(X)$ نسبت به B پاد متقارن می باشد، بنابراین: $B(\Lambda_\mathfrak{m}(X)Y,Z) + B(Y,\Lambda_\mathfrak{m}(X)Z) = ۰$ برای هر $Y,Z\in\mathfrak{m}$.

همچنین داریم:

$$\Lambda_\mathfrak{m}(X)Y - \Lambda_\mathfrak{m}(Y)X = [X,Y]_\mathfrak{m}.$$

اگر قرار دهیم:

$$U(X,Y) = \Lambda_\mathfrak{m}(X)Y - (\frac{۱}{۲})[X,Y]_m,$$

سپس $U(X,Y)$ در X,Y متقارن می باشد و در رابطه زیر صدق می کند:

$$B(U(X,Y),Z) + B(Y,U(X,Z)) = (\frac{۱}{۲})\{B([X,Y]_m,Z) + B(Y,[Z,X]_\mathfrak{m})\}(*)$$

از $(*)$ و جایگشت X,Y,Z وهمچنین تقارن U بدست می آوریم:

$$۲B(U(X,Y),Z) = B(X,[Z,Y]_{\mathfrak{m}}) + B(Y,[Z,X]_{\mathfrak{m}})$$

■

در این صورت:

$$< \Lambda_m(X)Y, Z >= \frac{۱}{۲}(< [X,Y]_m, Z > + < X, [Z,Y]_m > + < [Z,X]_m, Y >).$$

چون $\Lambda_m(X)Y = \nabla_Y X$ بنابر این داریم:

$$< \nabla_X Y, Z >= \frac{۱}{۲}(< [Y,X]_{\mathfrak{m}}, Z > + < [Z,X]_{\mathfrak{m}}, Y > + < [Z,Y]_{\mathfrak{m}}, X >), \quad (۱.۲)$$

که $H = ۰$ مبدا فضای رده ای می باشد و $[V_۱, V_۲]_m$ تصویر $[V_۱, V_۲]$ نسبت به $\mathfrak{m}$ می باشد. حال فرمولی برای الصاق در دستگاه مختصات موضعی نتیجه می گیریم .

فرض کنید $u_۱,...u_n$ پایه متعامد از $\mathfrak{m}$ نسبت به $<,>$ باشد. سپس بنا به [۴] همسایگی U از صفر در $\frac{G}{H}$وجود دارد بطوریکه نگاشت:

$$(expx^۱u_۱ expx^۲u_۲...expx^nu_n)H \longmapsto (x^۱, x^۲, ..., x^n) \quad (۲.۲)$$

یک دستگاه مختصات موضعی روی U می باشد. اکنون میدان برداری $\frac{\partial}{\partial x^i}$ را محاسبه می کنیم.

فرض کنید $gH = (x^۱, x^۲, ...x^n) \in U$. سپس:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_{gH} = \frac{d}{dt}(expx^۱u_۱...expx^{i-۱}u_{i-۱}exp(t+x^i)u_i expx^{i+۱}u_{i+۱}...expx^nu_n)|_{t=۰}$$

$$= \frac{d}{dt}(expx^۱u_۱...expx^{i-۱}u_{i-۱}exptu_i exp - x^{i-۱}u_{i-۱}...exp - x^۱u_۱.gH)|_{t=۰}$$

$$= \frac{d}{dt}expt(e^{x^۱adu_۱}...e^{x^{i-۱}adu_{i-۱}}(u_i)).gH|_{t=۰}.$$

حال v_i را به صورت $v_i = e^{x^i adu_1}...e^{x^{i-1} adu_{i-1}}(u_i)$ نمایش می دهیم [۱]. داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_{gH} = \hat{v}_i|_{gH}. \qquad (۳.۲)$$

اکنون الصاق لوی چویتا از α تحت دستگاه مختصاتی بالاروی U، را محاسبه می کنیم. فرض کنید $u_{n+1},...,u_m$ پایه ای از$\mathfrak{h}$ باشد. v_i را می توانیم به صورت $v_i = \sum_{j=1}^m f_{ij} u_j$ بنویسیم که $f_{ij}, j = 1, 2, ..., n$ توابعی از $x^1, ..., x^{i-1}$ می باشند. بنابراین $\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j^m f_{ij}\hat{u_j}$. حال داریم:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (\sum_{l=1}^m f_{jl}\hat{u}_l) \\
&= \sum_{l=1}^m (\frac{\partial f_{jl}}{\partial x^i})\hat{u}_l + \sum_{l=1}^m f_{jl} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \hat{u}_l \\
&= \sum_{l=1}^m (\frac{\partial f_{jl}}{\partial x^i})\hat{u}_l + \sum_{k,l=1}^m f_{ik} f_{jl} \nabla_{\hat{u_k}} \hat{u}_l.
\end{aligned}$$

با استفاده ازتقارن الصاق لوی چویتادر دستگاه مختصات موضعی داریم:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = [\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

پس تنها کافی است $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$ را برای هر $i \geqslant j$ محاسبه کنیم [۱] .

چون f_{jl}توابعی از $x^1 ... x^{j-1}$ هستند، داریم: $\frac{\partial f_{jl}}{\partial x^i} = 0 \quad \forall i \geq j$

بنابراین:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k,l=1}^m f_{ik} f_{jl} \nabla_{\hat{u_k}} \hat{u}_l \quad i \geq j$$

بنا به تعریف f_{ij} می بینیم که $f_{ij}(0, 0, ..., 0) = \delta_{ij}$ بنابراین:

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j})|_0 = (\nabla_{\hat{u}_i} \hat{u}_j)|_0 \quad i \geq j$$

فرض کنید Γ_{ij}^k علائم کریستوفل از الصاق تحت دستگاه مختصاتی باشد یعنی $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ سپس داریم:

$$\Gamma_{ij}^k(۰)\frac{\partial}{\partial x^k}|_۰ = (\nabla_{\hat{u_i}}\hat{u_j})|_۰ \quad i \geq j \tag{۴.۲}$$

با استفاده از ۳.۲ می بینیم که $\frac{\partial}{\partial x^k}|_۰ = \hat{v_k}|_۰ = \hat{u_k}$ بنابراین:

$$\Gamma_{ij}^l(۰) =< \Gamma_{ij}^k(۰)\hat{u_k}, \hat{u_l} >=< \nabla_{\hat{u_i}}\hat{u_j}, \hat{u_l} > |_۰, \qquad i \geq j \tag{۵.۲}$$

با استفاده از ۲.۲ داریم:

$$\Gamma_{ij}^l(۰) = \frac{۱}{۲}(- < [u_i, u_j]_m, u_l > + < [u_l, u_i]_m, u_j > + < [u_l, u_j]_m, u_i >), \quad i \geq j \tag{۶.۲}$$

گاهی فرمول بالا را با استفاده از ثابت های ساختاری جبر لی نشان می دهیم. برای $۱ \leq i, j \leq m$، در نظر بگیرید:

$$[u_i, u_j] = \sum_{k=۱}^{m} C_{ij}^k u_k.$$

ثابت های C_{ij}^k ثابت های ساختاری از جبر $\mathfrak{g}$ نسبت به پایه $(u_۱, ..., u_n, u_{n+۱}, ..., u_m)$ نامیده می شوند. با استفاده از ثابت های ساختاری، فرمول ۲.۶ را می توانیم به صورتی دیگر بنویسیم.

هرگاه $\Gamma_{ij}^l(۰) =< \Gamma_{ij}^k(۰)u_k, u_l >$، آنگاه :

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{۱}{۲}(- < \sum_{k=۱}^{m} C_{ij}^k u_k, u_l > + < \sum_{k=۱}^{m} C_{li}^k u_k, u_j > + < \sum_{k=۱}^{m} C_{ij}^k u_k, u_i >) =$$
$$\frac{۱}{۲}(- \sum_{k=۱}^{m} C_{ij}^k \delta_{kl} + \sum_{k=۱}^{m} C_{li}^k \delta_{kj} + \sum_{k=۱}^{m} C_{lj}^k \delta_{ki})$$

$$\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l = \frac{۱}{۲}(-C_{ij}^l + C_{il}^j + C_{jl}^i) \quad i \geq j \tag{۷.۲}$$

اکنون چند کاربرد از فرمول های ۲.۲-۶.۲ را برای فضای راندرز بیان می کنیم.

فرض کنید M یک منیفلد n-بعدی باشد. متر راندرز F روی M شامل متر ریمانی $\tilde{a}=\tilde{a}_{ij}dx^i\otimes dx^j$ روی M و ۱-فرمی $\tilde{b}=\tilde{b}_i dx^i$ می باشد. بوسیله $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ تابع F روی TM رابصورت:

$$F(x,y)=\alpha(x,y)+\beta(x,y) \qquad x\in M, \qquad y\in T_xM$$

در نظر می گیریم که $\alpha(x,y)=\sqrt{\widetilde{a}_{ij}y^iy^j}, \beta(x,y)=\widetilde{b_i}(x)y^i$. حال فرض می کنیم $x\in M$. متر ریمانی بر روی فضای کتانژانت $T^*_x(M)$ یک ضرب داخلی القا می کندکه $<dx_i,dx_j>=\widetilde{a}^{ij}(x)$

این ضرب داخلی یک ایزومورفیسم خطی بین $T_x(M)$ و $T^*_x(M)$ تعریف می کند.

در این صورت هر ۱-فرمی $\widetilde{b}$ با یک میدان برداری هموار $\widetilde{b}^\sharp$ روی M متناظر می باشد. فرض کنید:

$$\widetilde{b}^\sharp=(\widetilde{b}^\sharp)^i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

سپس:

$$(\widetilde{b}^\sharp)^i=\sum_{j=۱}^{n}\widetilde{a}^{ij}\widetilde{b}_j=\widetilde{b}^i.$$

برای هر $y\in T_x(M)$ داریم:

$$<y,\widetilde{b}^\sharp>=<y,(\widetilde{b}^\sharp)^i\frac{\partial}{\partial x_i}>=<y,(\sum_{j=۱}^{n}\widetilde{a}^{ij}(x)\widetilde{b}_j)\frac{\partial}{\partial x_i}>=\widetilde{b}_i(x)y^i=\beta(x,y)$$

واضح است که: $\|\widetilde{b}^\sharp\|=\|\widetilde{b}\|$. بنابراین: $۱<\sqrt{\widetilde{b}_i\widetilde{b}^i}=\|\widetilde{b}\|$ برقرار است اگر وتنها اگر $۱<\|\widetilde{b}^\sharp\|$.

لم ۲.۲.۲. [۱۵] متر راندرز تعریف شده با متر ریمانی $\widetilde{a}$ و ۱-فرمی $\widetilde{b}$ از نوع بروالد می باشد اگر وتنها اگر $\widetilde{b}$ نسبت به $\widetilde{a}$ موازی باشد.

لم ۳.۲.۲. [۱۵] متر راندرز روی یک منیفلد شامل متر ریمانی $\widetilde{a}=\widetilde{a}_{ij}dx^i\otimes dx^j$ همراه با میدان برداری هموار $\widetilde{b}^\sharp$ با

$$\widetilde{a}(x)(\widetilde{b}^\sharp,\widetilde{b}^\sharp)<۱ \qquad \forall x\in M$$

به صورت زیر تعریف می شود:

$$F(x,y)=\sqrt{\widetilde{a}(x)(y,y)}+\widetilde{a}(x)(\widetilde{b}^{\sharp},y) \qquad x\in M, \quad y\in T_xM.$$

واضح است که $\widetilde{b}$ موازی می باشد اگر وتنها اگر میدان برداری متناظر $\widetilde{b}^{\sharp}$ نسبت به $\widetilde{a}$ موازی باشد.

نتیجه ۴.۲.۲. متر راندرز Fروی M با متر ریمانی $\widetilde{a}$ و میدان برداری $\widetilde{b}^{\sharp}$ تعریف می شود. (M,F) از نوع بروالد می باشد اگر وتنها اگر $\widetilde{b}^{\sharp}$ نسبت به $\widetilde{a}$ موازی باشد.

حال در نظر داریم ۱-فرمی متناظر با هر میدان برداری را تعریف کنیم.

گزاره ۵.۲.۲. [۱۴] تناظر یک به یکی بین مجموعه ی میدان های برداری ناوردا روی $\frac{G}{H}$ و زیر فضای زیر وجود دارد

$$V=\{X\in\mathfrak{m}|Ad(h)X=X,\ \forall h\in H\}.$$

اثبات. فرض کنید $\pi\ :G\longrightarrow\frac{G}{H}$ نگاشت تصویر طبیعی و R_g,L_g به ترتیب انتقال های چپ وراست از G باشند. مشتق $d\pi$ ، $\mathfrak{g}$ را به روی فضای مماس $T_\circ(\frac{G}{H})$ در $\circ=\{H\}$ می نگارد. کرنل $d\pi$ ، $\mathfrak{h}$ می باشد.

انتقال $\tau(g):xH\longrightarrow gxH$ در رابطه $\pi oL_g=\tau(g)o\pi$ صدق می کند و چون برای هر

$$h\in H, \quad \pi oR_h=\pi, \quad Ad(g)X=dR_{g^{-1}}odL_g(X)$$

حال با مشتق گیری داریم:

$$d\pi oAd(h)X=d\tau(h)_\circ od\pi(X) \qquad X\in\mathfrak{g}.$$

بنابراین تحت ایزومورفیسم $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}\cong T_\circ(\frac{G}{H})$ تبدیل خطی $Ad(h)$ از $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ متناظر با تبدیل خطی $d\tau(h)_\circ$ از $T_\circ(\frac{G}{H})$ می باشند. اکنون ترکیب $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ یک ایزومورفیسم طبیعی به صورت $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}\simeq\mathfrak{m}$ می دهد. تحت این ایزومورفیسم، تبدیل خطی $d\tau(h)_\circ$ از $T_\circ(\frac{G}{H})$ متناظر باتبدیل خطی $Ad(h)$ از $\mathfrak{m}$ می باشد.

حال در نظر می گیریم $X\in V$ و $\widetilde{X}_\circ$ تصویرش تحت ایزومورفیسم $\mathfrak{m}\simeq T_\circ(\frac{G}{H})$ باشد.

فرض کنید $g \in G$ بردار مماس در gH را به صورت $\widetilde{X}_{gh} = d(\tau(g))_{\circ}(\widetilde{X}_{\circ})$ تعریف می کنیم. اگر $g_1 H = gH$

سپس $g^{-1}g_1 \in H$. چون $\forall\ h \in X \quad Ad(h)X = X$ بحث بالا نشان می دهد که $d\tau(g^{-1}g_1)_{\circ}\widetilde{X}_{\circ} = \widetilde{X}_{\circ}$

بنابراین: $d\tau(g)_{\circ}\widetilde{X}_{\circ} = d\tau(g_1)_{\circ}\widetilde{X}_{\circ}$ بنابراین $\widetilde{X}$ میدان برداری خوشتعریف روی $\frac{G}{H}$ می باشد وتحت عمل G

ناوردا می باشد، بنابراین تناظر $\widetilde{X} \longrightarrow X$ دو سویی می باشد. ■

نتیجه ۶.۲.۲. [۱۴] فرض کنید $\frac{G}{H}$ منیفلد همگن تحویلی باشد. متر ریمانی ناوردای $\widetilde{a}$ را روی $\frac{G}{H}$ فرض می کنیم ومتر های راندرز ناوردا را روی $\frac{G}{H}$ تحت متر ریمانی $\widetilde{a}$ در نظر می گیریم. متر ریمانی ناوردا $\widetilde{a}$ یک ضرب داخلی روی $\mathfrak{g}$ القا می کند که دررابطه زیر صدق می کند.

$$< Ad(h)X, Ad(h)Y >=< X, Y > \qquad\qquad X, Y \in \mathfrak{g}, h \in H$$

قضیه ۷.۲.۲. [۱۴] فرض کنید $\widetilde{a}$ متر ریمانی ناوردا روی $\frac{G}{H}$ باشدو $\mathfrak{m}$ مولفه متعامد از $\mathfrak{h}$ در $\mathfrak{g}$ نسبت به ضرب داخلی القایی روی $\mathfrak{g}$ بوسیله $\widetilde{a}$ باشد. سپس تناظر یک به یکی بین مجموعه ی همه ی متر های راندرز ناوردا روی $\frac{G}{H}$ تحت متر ریمانی $\widetilde{a}$ و مجموعه

$$V_1 = \{X \in \mathfrak{m} | Ad(h)X = X, < X, X >< 1, \ \forall h \in H\}$$

وجود دارد.

اثبات . فرض کنید $X \in V_1$. بنا به گزاره ۵.۲.۲، X با یک میدان برداری ناوردای $\widetilde{X}$ روی $\frac{G}{H}$ متناظر می باشد.چون $\widetilde{X}$ تحت عمل G ناوردا می باشد، لذا داریم:

$$\widetilde{a}(gH)(\widetilde{X}, \widetilde{X}) = \widetilde{a}(H)(\widetilde{X}, \widetilde{X}) =< X, X >< 1.$$

بوسیله لم ۳.۲.۲ متر راندرز F_X را روی $\frac{G}{H}$ بصورت:

$$F_X(gH, y) = \sqrt{\widetilde{a}(gH)(y, y)} + \widetilde{a}(gH)(\widetilde{X}, y), \qquad y \in T_{gH}(\frac{G}{H})$$

تعریف می کنیم. بوضوح F_X تحت عمل G ناوردا می باشد و تناظر $F_X \longrightarrow X$ دو سویی می باشد. ■

برای هر $X \in V_1$، متر راندرز متناظر از نوع بروالد می باشد، زیرا برای هر $X \in V_1$، G به طور تعدی روی $\frac{G}{H}$ همانند ایزومتری های متر راندرز متناظر عمل می کند.

بنابه گزاره ۵.۲.۲، میدان های برداری G-ناوردا روی $\frac{G}{H}$به طور یک به یک با مجموعه

$$V = \{X \in m | Ad(h)X = X, \forall \ \ h \in H\}$$

متناظر هستند . بنابراین متر های راندرز ناوردا بطور یک به یک با مجموعه $V_1 = \{u \in V, | \ < u, u >< 1\}$ متناظر می باشند . حال فرض کنید u یک عنصر غیر صفر در V_1 باشد، سپس u بوسیله ۱-فرمی β و متر ریمانی α بصورت $\beta(y) =< y, u >$ و متر راندرز متناظر بصورت $F = \alpha + \beta$ تعریف می شود. پایه متعامد $u_1 \ , ..., \ u_n$ از $\mathfrak{m}$ بطوریکه $u_n = \frac{u}{|u|}$ و دستگاه مختصات موضعی در۳.۲ را درنظر می گیریم. چون u تحت عمل G ناوردا می باشد، لذا داریم:

$$\tilde{u}|_{gH} = d\tau_g(u)$$

که τ_g دیفئومورفیسمی از $\frac{G}{H}$ می باشد که به صورت $g_1 H \longrightarrow gg_1 H$ تعریف می شود. بنابراین

$$\tilde{u}|_{gH} = \frac{d}{dt}(\tau_g(exp(tu)H))|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}(expx^1 u_1 \ expx^2 u_2 \ ... \ exp(x^n + ct)u_n)H|_{t=0}$$

$$= c\frac{\partial}{\partial x^n}|_{gH}$$

که $c = |u| < 1$.

اولین کاربرد آن در زیر بیان شده است.

گزاره ۸.۲.۲. متر راندرز $F = \alpha + \beta$ از نوع بروالد می باشد اگر و تنها اگر:

$$< [u, v]_m, v >= 0, \qquad < [v, w]_m, u >= 0, \quad \forall v, w \in m$$

اثبات. بنا به [۱۵] F از نوع بروالد است اگر وتنها اگر β نسبت به α موازی باشد یا به طور معادل میدان برداری ناوردای u نسبت به α موازی باشد، یعنی : $\Gamma^l_{ni} = \Gamma^l_{in} = ۰ \quad \forall i, l = ۱, ۲, ..., n$

به خاطر ناوردا بودن u کافی است فقط در مبدا بررسی کنیم که $\Gamma^l_{in}(۰) = ۰$. با استفاده از ۶.۲ این معادل است با اینکه:

$$-[u_n, u_i]_m, u_i > + < [u_i, u_i]_m, u_n > + < [u_i, u_n]_m, u_i >= ۰ \qquad i, l = ۱, ..., n \tag{۸.۲}$$

با قرار دادن $i = l$ در ۸.۲ بدست می آوریم:

$$- < [u_n, u_i]_m, u_i > + < [u_i, u_n], u_i >= ۰$$

$$\Longrightarrow \qquad < [u_n, u_i]_m, u_i >= ۰ \qquad i, l = ۱, ۲, ..., n. \tag{۹.۲}$$

براحتی نشان می دهیم که رابطه معادل است با:

$$< [u_n, u_i]_m, u_l > + < [u_n, u_l]_m, u_i >= ۰, \qquad i, l = ۱, ۲, ..., n. \tag{۱۰.۲}$$

از ترکیب ۸.۲ و ۹.۲ و ۱۰.۲ داریم:

$$< [u_l, u_i]_m, u_n >= ۰$$

بنابراین اثبات کامل می شود. ■

فصل ۳

S-انحنای فضای راندرزهمگن

۱.۳ مقدمه

محاسبه کمیت های هندسی یکی از مسئله های مهم می باشد و در حالت خاص محاسبه انحنای فضاهای همگن.

میلنور [۱] با استفاده از انحنای برشی متر های ریمانی ناوردای چپ، روی گروه های لی خصوصیات انحنای چندفضا را مطالعه نمود و نتایج جالبی را بدست بدست آورد[۷]. فرمول انحنای برشی منیفلد های ریمانی همگن برای کلاسبندی منیفلد های ریمانی همگن با انحنای مثبت [۳] یا انحنای منفی [۱۲] بکار برده شده است .

حال می خواهیم فرمولی برای S-انحنای فضای راندرز همگن بیان کنیم . فرمول صریحی برای S-انحنا در دستگاه مختصات موضعی بوسیله شن معرفی شده است [۱۶].

هدف اصلی ما اینست که برای فضای راندرز همگن فرمولی ارائه دهیم که به دستگاه مختصات موضعی وابسته نباشد.

۲.۳ فرم حجمی فضای راندرز

فرم حجمی بیان شده در تعریف ۲۸.۲.۱ را در نظر می گیریم.

[۱] J.Milnor

به طور کلی $\sigma_F(x)$ نمی تواند بر حسب توابع مقدماتی به شکل $F=F(x,y)$ بیان شود، اما برای متر راندرز القا شده توسط متر ریمانی قابل محاسبه می باشد. متر ریمانی α و منیفلد n بعدی M را در نظر بگیرید.

فرض کنید:

$$\alpha=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j},\quad y=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x\in T_xM$$

و A یک ماتریس باشد بطوریکه $A^TA=(a_{ij})$. سپس تبدیل خطی $x=Ay \quad : R^n\longrightarrow R^n$ دامنه محدب $U_x=\{(y^i)\in R^n|\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}<۱\}$ را به گوی واحد $B^n(۱)$ می برد. لذا داریم:

$$det(A)=\sqrt{det(a_{ij}(x))} \tag{۱.۳}$$

مشاهده می کنیم که:

$$Vol(B^n(۱))=\int_{B^n(۱)}dx^۱\ ...\ dx^n=\int_{U_n}det(A)\ dy^۱...dy^n=\sqrt{det(a_{ij}(x))}Vol(U_x)$$

این نتیجه می دهد:

$$Vol(U_x)=\frac{Vol(B^n(۱))}{\sqrt{det(a_{ij}(x))}}.$$

سپس $\sigma_\alpha(x)$ در فرمول $dV_\alpha=\sigma_\alpha(x)dx^۱\ ...\ dx^n$ به صورت زیر بدست می آید:

$$\sigma_\alpha(x)=\sqrt{det(a_{ij}(x))}.$$

اکنون متر راندرز $F=\alpha+\beta$ را در نظر بگیرید که $\alpha=\sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ متر ریمانی است و $\beta=b_i(x)y^i$ یک ۱ -فرمی روی منیفلد n-بعدی M می باشد. فرض کنید:

$$\Omega_x=\{(y^i)\in R^n\ |F(x,y^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x)<۱\}.$$

با استفاده از جبر خطی بدست می آوریم:

$$Vol(\Omega_x)=\frac{Vol(B^n(۱))}{(۱-\|\beta_x\|_\alpha^۲)^{\frac{n+۱}{۲}}\sqrt{det(a_{ij}(x))}},$$

که $\|\beta_x\|_\alpha$ نرم β از x نسبت بهα_x می باشد. با قرار دادن فرمول بالا در

$$\sigma_F(x) = \frac{Vol(B^n(1))}{Vol((y^i \in R^n \ |F(x, y^i b_i) < 1)}$$

نتیجه می دهد:

$$\sigma_F(x) = (1 - \|\beta_x\|_\alpha^2)^{\frac{n+1}{2}} \sigma_\alpha(x)$$

بنابراین:

$$dV_F = (1 - \|\beta_x\|_\alpha^2)^{\frac{n+1}{2}} dV_\alpha \tag{۲.۳}$$

توجه کنید که برای هر زیر مجموعه باز $\Omega \subset M$,

$$\int_\Omega dV_F \leq \int_\Omega dV_\alpha.$$

تساوی بر قرار است اگر وتنهااگر$F = \alpha$.

مثال. فرض کنید متر راندرز $F = \alpha + \beta$ روی گوی واحد $B^n(1) \subset R^n$ بصورت زیر باشد،

$$\alpha = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2 |y|^2 - < x, y >^2)}}{1 - |x|^2}$$

$$\beta = \frac{< x, y >}{1 - |x|^2} + \frac{< a, y >}{1 + < a, x >},$$

که $y \in T_x R^n \cong R^n, \ a \in B^n(1)$ و $| \ . \ |$,$<,>$ بترتیب نرم افلیدسی استاندارد وضرب داخلی می باشد. حال برای بدست آوردن فرم حجمی، ابتدا لم زیر را داریم:

لم ۱.۲.۳. فرض کنید $G = (g_{ij})$ و $H = (h_{ij})$ ماتریس متقارن $n \times n$ و $c = (c_i)$ یک بردار n-بعدی باشد فرض می کنیم H معکوس پذیر باشدبا معکوس $H^{-1} = (h^{ij})$ و $g_{ij} = h_{ij} + \delta c_i c_j$ سپس:

$$det(g_{ij}) = (1 - \delta c^2) det(h_{ij})$$

که $c=\sqrt{h^{ij}c_ic_j}$. اگر $\delta c^{2}+1\neq 0$ سپس G معکوس پذیر است. ماتریس معکوس $G^{-1}=(g^{ij})$ با $g^{ij}=h^{ij}-\frac{\delta c^ic^j}{1+\delta c^2}$ که $c^i=hijc_j$بدست می آید.

بنا به لم بالا برای ماتریس

$$a_{ij}=\frac{1}{1-|x|^2}\{\delta_{ij}+\frac{x^ix^j}{1-|x|^2}\}$$

بدست می آوریم:

$$det(a_{ij})=\frac{1}{(1-|x|^2)^{n+1}}$$

سپس،

$$dV_\alpha=(1-|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}dx^1\ ...\ dx^n.$$

بنا به لم ۱.۲.۳ داریم:

$$a^{ij}=(1-|x|^2)\{\delta^{ij}-x^ix^j\}$$

سپس نرم بصورت زیر می باشد:

$$\parallel\beta_x\parallel_\alpha=\sqrt{a^{ij}(x)b_i(x)b_j(x)}=1-\frac{(1-|x|^2)(1-|a|^2)}{(1+<a,x>)^2}.$$

با قرار دادن فرمول بالادر ۲.۳بدست می آوریم:

$$dV_F=[\frac{1-|a|^2}{(1+<a,x>)^2}]^{\frac{n+1}{2}}dx^1\ ...\ dx^n$$

حال کمیت تغییر شکل [2] را به صورتی که در فصل اول تعریف نمودیم، در نظر می گیریم:

$$\tau=\frac{\sqrt{det(g_{ij}(y))}}{\sigma_F}$$

که σ_F و $\sqrt{det(g_{ij}(y))}$ همراه با تغییر پایه $\{b_i\}$ به طور یکسان تغییر می کنند، بنابراین تغییر شکل وابسته به پایه نمی باشد. تغییر شکل به صورت زیر همگن می باشد:

$$\tau(x,\lambda y)=\tau(x,y)\qquad\qquad \lambda>0,\ y\in T_xM$$

[2] Distortion

اکنون F رامتر فینسلر روی منیفلد M درنظر می گیریم. چون تغییر شکل برای نرم مینکوفسکی F_x روی هر فضای مماس T_xM تعریف می شود، بنابراین می توانیم تابع اسکالر $\tau=\tau(x,y)$ را روی $TM\setminus\{0\}$ بدست آوریم. بوسیله قضیه ی دیک [۳]، F ریمانی می باشد اگر وتنهااگر $\tau=0$ بنابراین تغییر شکل متر های ریمانی را در میان متر های فینسلری مشخص می کند. حال به مطالعه سرعت جابجایی تغییر شکل در طول ژئودزیک ها می پردازیم.

۳.۳ S-انحنا

در هندسه فینسلری، مفهوم S-انحنا در ابتدا در قضیه مقایسه حجمی [۴] [۱۰] تولید شد. فرمول S-انحنا ی تعریف شده در تعریف ۳۰.۲.۱ را در نظر می گیریم:

$$S(x,y)=\frac{d}{dt}[\tau(\sigma(t),\sigma'(t))]|_{t=0}$$

در دستگاه مختصات مو ضعی (x^i,y^i) فرض کنید $dV_F=\sigma_F(x)dx^1\Lambda\ ...\ \Lambda dx^n$ فرم حجمی و $G^i=G^i(x,y)$ ضرایب اسپری از F را نشان دهند. از فرمول ۴.۱ نتیجه می شود:

$$\frac{\partial G^m}{\partial y^m}=\frac{1}{2}g^{ml}\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i}-2g^{ml}C_{iml}G^i.$$

از طرفی مشاهده می شود که:

$$\tau_{y^i}=\frac{\partial}{\partial y^i}[ln\sqrt{det(g_{jk}(x,y))}]=\frac{1}{2}g^{jk}\frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i}=g^{jk}C_{ijk}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}S&=y^i\frac{\partial\tau}{\partial x^i}-2\frac{\partial\tau}{\partial y^i}G^i\\&=\frac{1}{2}g^{ml}\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^i}y^i-2I_iG^i-y^m\frac{\partial}{\partial x^m}(Ln\sigma_F(x)).\end{aligned}$$

[۳] Deick

[۴] Volume comparison theorem

پس در مختصات موضعی، S-انحنا به شکل زیر خواهد بود:

$$S = \frac{\partial G^m}{\partial y^m}(x,y) - y^m \frac{\partial}{\partial x^m}(Ln\sigma_F(x)).$$

اکنون می توانیم ثابت کنیم هر متر متر برowالد از S-انحنای صفر می باشد. ابتدا لم زیر را بیان می کنیم.

لم ۱.۳.۳. فرض کنید $\sigma = \sigma(t)$ یک ژئودزیک در منیفلد فینسلر (M,F) باشد و فرض کنید $U = U(t)$ و $V = V(t)$ میدان های برداری بطور خطی موازی در طول σ باشد، سپس برای هرخانواده از ضرب های داخلی القایی $g_{\sigma'(t)}$ در طول σ

$$g_{\sigma'(t)}(U(t),V(t)) = canstant.$$

بنابراین طول های $U = U(t)$ و $V = V(t)$ و زاویه بین آنها با تحدید به $g_{\sigma'(t)}$ در طول σ ثابت هستند.

لم ۲.۳.۳. فرض کنید $C = C(t)$ یک منحنی C^∞ قطعه ای در یک منیفلد فینسلری (M,F) باشد و فرض کنید $U = U^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{C(t)}$ میدان برداری موازی در طول C باشد، سپس

$$F(C(t),U(t)) = canstant$$

گزاره ۳.۳.۳. برای هر متر برowالد S-انحنا صفر می شود.

اثبات . نقطه دلخواه $(x,y) \in T_\circ M$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\sigma = \sigma(t)$ ژئودزیک دلخواه با $\sigma(\circ) = x$ و $\sigma'(\circ) = y$ باشد و $\{b_i(t)\}$ فرم های خطی موازی در طول σ باشند، یعنی هر $b_i(t)$ بطور خطی در طول σموازی باشد. فرض کنید:

$$g_{ij}(t) = g_{\sigma'(t)}(b_i(t),b_j(t))$$

بنا به لم ۱.۳.۳ ثابت= $g_{ij}(t)$.بنابراین دترمینان

$$det(g_{ij}(t)) = canstant$$

از طرف دیگر برای هر $(y^i) \in R^n$ میدان برداری $U = y^i b_i(t)$ بطور خطی موازی در طول σ می باشد. بنا به لم ۲.۳.۳ داریم:

$$F(\sigma(t), y^i b_i(t)) = canstant$$

بنابراین هر زیر مجموعه محدب $U_t \subset R^n$ به صورت زیر مستقل از t می باشد.

$$U_t = \{(y^i) \in R^n \quad |F(\sigma(t), y^i b_i(t)) < ۱\}.$$

این نتیجه می دهد که ضرایب فرم حجمی dV_F ثابت می باشند، یعنی:

$$\sigma_F(\sigma(t)) = \frac{Vol(B^n(۱))}{Vol(U_t)} = canstant.$$

بنابراین تغییر حجم در طول σ باید ثابت باشد، یعنی:

$$\tau(\sigma(t), \sigma'(t)) = Ln \frac{\sqrt{det(g_{ij}(t))}}{\sigma_F(\sigma(t))} = canstant$$

حال بنا به فرمول

$$S(x, y) = \frac{d}{dt}[\tau(\sigma(t), \sigma'(t))]|_{t=۰}$$

داریم: $S = ۰$ ■

۴.۳ متر های راندرز از S-انحنای ایزوتروپیک

ارلی [۵] درسال ۲۰۰۱، اولین نویسنده ای بود که ثابت نمود برخی از متر های راندرز از انحنای تخت ثابت، S-انحنای ثابت دارد ودر ادامه بائو رابل [۶] نشان داد که هر متر راندرز از انحنای تخت ثابت ، S-انحنای ثابت دارد.

در این قسمت متر های راندرز با S-انحنای ثابت یا ایزوتروپیک را مطالعه می کنیم.

[۵] Early
[۶] Bao-Roble

فرض کنید $F=\alpha+\beta$ متر راندرز روی منیفلد n-بعدی M باشد و

$$\rho := Ln\sqrt{1-\parallel \beta_x \parallel_\alpha^2}.$$

با استفاده از ۲.۳ فرم های حجمی متر راندرز dV_F ومتر ریمانی dV_α به صورت زیر با هم مرتبط هستند:

$$dV_F = e^{(n+1)\rho(x)}dV_\alpha$$

ضرایب اسپری $G^i=G^i(x,y)$ از F و ضرایب اسپری $G^i_\alpha=G^i_\alpha(x,y)$ به صورت $G^i=G^i_\alpha+Py^i+Q^i$ مرتبط هستند که:

$$P=\frac{e_{00}}{2F}-s_0, \qquad Q^i=\alpha s^i_0$$

و

$$e_{00}=e_{ij}y^iy^j, \quad s_0=s_iy^i, \quad s^i_0=s^i_jy^j$$

چون $s_{ij}+s_{ji}=0$ داریم:

$$s_{00}=s_{ij}y^iy^j=0$$

و $s^i_i=a^{ij}s_[ij=0$. با استفاده از همگنی P وپادمتقارن بودن s_{ij} داریم:

$$\frac{\partial(Py^m)}{\partial y^m}=\frac{\partial P}{\partial y^m}y^m+nP=(n+1)P$$

$$\frac{\partial Q^m}{\partial y^m}=\alpha^{-1}s_{00}+\alpha s^m_m=0$$

چون ریمانی می باشد تساوی زیر برقرار است:

$$\frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^m}=\Gamma^m_{im}y^i=y^m\frac{\partial}{\partial x^m}(\sqrt{det(a_{ij})})=y^m\frac{\partial}{\partial x^m}(Ln\sigma_\alpha)$$

که Γ^i_{jk} علائم کریستوفل از α می باشند از تساوی بالا بدست می آوریم:

$S=\frac{\partial G^m}{\partial y^m}-y^m\frac{\partial}{\partial x^m}(Ln\sigma_F)$

$$= \frac{\partial G^m_\alpha}{\partial y^m} - \frac{\partial (Py^m)}{\partial y^m} + \frac{\partial Q^m}{\partial y^m} - (n+1) y^m \frac{\partial \rho}{\partial x^m} - y^m \frac{\partial}{\partial x^m}(Ln\sigma_\alpha)$$

$$= (n+1)\{P - \rho_0\}$$

$$= (n+1)\{\frac{e_{00}}{2F} - (s_0 + \rho_0)\}$$

که $\rho_0 = \rho_{x^i}(x) y^i$

اکنون S-انحنای ایزوتروپیک متر راندرز را در یک فضای همگن محاسبه می کنیم. هر فضای همگنی، متقارن نیز می باشد. بنابراین کافی است ما انحنا را فقط در مبدا $H = 0$ محاسبه کنیم.

حال فرض کنید $(U, (x^1, x^2, ..., x^n))$ دستگاه مختصات موضعی تعریف شده در قبل باشد. مطابق فرمول S-انحنای بدست آمده در بالا ما نیاز داریم که کمیت های زیر را در مبدا محاسبه کنیم :۱- $e_{00} = e_{ij} y^i y^j$ که $e_{ij} = r_{ij} + b_i s_j + b_j s_i$ ، $r_{ij} = \frac{1}{2}(b_{i;j} + b_{j;i})$ و b_iها بوسیله $\beta = b_i dx^i$ تعریف می شود. همچنین $s_i = b_j s^j_i$ و s^i_j با $s^i_j = a^{ih} s_{hj}$ تعریف می شودکه $s_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial b_i}{\partial x^j} - \frac{\partial b_j}{\partial x^i})$ و (a^{kl}) ماتریس معکوس (a_{ij}) می باشد. ۲- $s_0 = s_i y^i$ ۳- $\rho_0 = \rho_{x^i} y^i$،که $\rho = ln\sqrt{1 - ||\beta||}$ و $||\beta||$ طول فرم β نسبت به α باشد.

مقدار ρ_0 در ۳ را براحتی می توانیم محاسبه کنیم. در حقیقت برای هر i، $\rho_{x^i} = 0$.چون β،بعنوان یک فرم ناوردا روی $\frac{G}{H}$، طول ثابت دارد. بنابراین $\rho_0 = 0$. اکنون e_{00} و s_0 رامحاسبه می کنیم. ابتدا، چون:

$$b_i = \beta(\frac{\partial}{\partial x^i}) = <\hat{u}, \frac{\partial}{\partial x^i}> = c < \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x^i} >,$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\partial b_i}{\partial x^j} = c\frac{\partial}{\partial x^j} < \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x^i} >$$

$$= c(< \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x^i} > + < \frac{\partial}{\partial x^n}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} >). \quad (۳.۳)$$

با استفاده از تقارن الصاق ($\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = [\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}] = 0$)، s_{ij} را در مبدا محاسبه می کنیم.

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial b_i}{\partial x^j} - \frac{\partial b_j}{\partial x^i})$$

$$= \frac{1}{2}\{c(< \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x^i} > + < \frac{\partial}{\partial x^n}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} > - < \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} > - < \frac{\partial}{\partial x^n}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} >)\}$$

$$= \frac{۱}{۲} c(< \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^n}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i} > - < \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^n}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} >)$$

$$s_{ij}(۰) = \frac{۱}{۲} c(< \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^n}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i} > - < \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^n}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} >)|_۰$$

بوسیله(۲.۲)-(۶.۲)، داریم:

$$= \tfrac{۱}{۲} c(\Gamma^i_{nj}(۰) - \Gamma^j_{ni}(۰))$$

$$= \tfrac{۱}{۲}(- < [u_n, u_j]_m, u_i > + < [u_i, u_n]_m, u_j > + < [u_n, n_j]_m, u_i >)$$

$$-\tfrac{۱}{۲} < [u_n, u_i]_m, u_j > + < [u_j, u_n]_m, u_i > + < [u_n, u_j]_m, u_i >)$$

$$= \frac{۱}{۲} c < [u_i, u_j]_m, u_n >$$

$$\Rightarrow s_{ij}(۰) = \frac{۱}{۲} c < [u_i, u_j]_m, u_n > \tag{۴.۳}$$

چون در مبدا $(a_{ij}) = I_n$ می باشد لذا داریم:

$$s^i_j(۰) = a^{ik}(۰) s_{kj}(۰) = \sum_{k=۱}^{n} \delta_{ik} s_{kj}(۰) = s_{ij}(۰)$$

بنابراین:

$$s_i(۰) = b_l(۰) s^l_i(۰) = c s^n_i(۰) = c s_{ni}(۰)$$

حال برای $y = y^i u_i \in M$ داریم:

$$s_۰(y) = y^l s_l(۰) = c y^l s_{nl}(۰) = c y^l . \tfrac{۱}{۲} c < [u_n, u_l]_m, u_n >= \tfrac{۱}{۲} < [c u_n, y^l u_l]_m, c u_n >$$

$$= \frac{۱}{۲} < [u, y]_m, u > \tag{۵.۳}$$

اکنون r_{ij} را محاسبه می کنیم. فرض کنید $i \geq j$. لذا داریم:

$$r_{ij}(۰) = \tfrac{۱}{۲}(b_{i;j} + b_{j;i})|_۰$$

$$= \frac{۱}{۲}(\frac{\partial b_i}{\partial x^j} - b_l\Gamma^l_{ji} + \frac{\partial b_j}{\partial x^i} - b_l\Gamma^l_{ij})|_۰$$

$$= \frac{۱}{۲}(\frac{\partial b_i}{\partial x^j} + \frac{\partial b_j}{\partial x^i})|_۰ - (۲b_l)\Gamma^l_{ij}$$

باقرار دادن $c = ۲b$ بدست می آوریم:

$$r_{ij}(۰) = \frac{۱}{۲}(\frac{\partial b_i}{\partial x^j} + \frac{\partial b_i}{\partial x^i})|_۰ - c\Gamma^n_{ij}(۰)$$

حال از فرمول ۱.۳ و ۲.۲ - ۶.۲داریم:

$$\frac{۱}{۲}(\frac{\partial b_i}{\partial x^j} + \frac{\partial b_j}{\partial x^i})|_۰ = \frac{۱}{۲}c[(< \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x^i} > + < \frac{\partial}{\partial x^n}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i} >)|_۰ + (< \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x^j} >$$

$$+ < \frac{\partial}{\partial x^n}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} >)|_۰] = \frac{۱}{۲}c(< \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x^i} > + < \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x^j} >)|_۰$$

$$= \frac{۱}{۲}c(\Gamma^i_{jn}(۰) + \Gamma^j_{in}(۰)) = -\frac{۱}{۲}c(< [u_i, u_j]_m, u_n > \tag{۶.۳}$$

از ترکیب فرمول ۶.۲ با ۴.۳بدست می آوریم:

$$r_{ij}(۰) = -\frac{۱}{۲}c([u_i, u_j]_m, u_n > -c\Gamma^n_{ij}(۰)$$

$$r_{ij}(۰) = -\frac{۱}{۲}c(< [u_n, u_i]_m, u_j > + < [u_n, u_j]_m, u_i >) \tag{۷.۳}$$

توجه کنید که r_{ij} نسبت به اندیس i ، j متقارن می باشد و طرف راست معادله ۵.۳نسبت به j و i متقارن می باشد. با محاسبه نشان می دهیم که برای $i \leq j$ فرمول ۵.۳ همچنین موجود می باشد.

$$(b_is_j + b_js_i)|_۰ = [b_i(b_is^i_j) + b_j(b_js^j_i)]|_۰ = (b_i^۲s^i_j + b_j^۲s^j_i)|_۰ = (b_i^۲a^{in}s_{nj} + b_j^۲a^{jn}s_{ni})|_۰$$

$$= b_i^۲a^{in}(\frac{۱}{۲}c < [u_n, u_j]_mu_i >) + b_j^۲a^{in}(\frac{۱}{۲}c < [u_nu_i]_m, u_j >)$$

داریم:

$$(b_is_j+b_js_i)|_\circ=\circ \qquad \forall \circ\le i,j\le n-1,$$

$$(b_is_j+b_js_i)|_\circ=\frac{1}{2}c^3<[u_n,u_i]_{\mathfrak{m}},u_n> \qquad \forall 1\le i\le n-1, j=n,$$

$$(b_is_j+b_js_i)|_\circ=\frac{1}{2}c^3<[u_n,u_i]_{\mathfrak{m}},u_n> \qquad \forall i=n,\ 1\le j\le n-1$$

$$(b_is_j+b_js_i)|_\circ=\circ \qquad \forall i=j=n$$

در نتیجه:

$$e_{\circ\circ}(y)=r_{ij}(\circ)y^iy^j+(b_is_j+b_js_i)|_\circ y^iy^j$$

$$=-\frac{1}{2}c(<[u_n,u_i]_j>+<[u_n,u_j]_m,u_i>)y^iy^j+\Sigma_{j=1}^{n-1}<[cu_n,u_j]_mu_n>y^jy^n$$

$$=-\frac{1}{2}(<[cu_n,y^iu_i]_m,y^ju_j>+<[cu_n,y^ju_j]_m,y^iu_i>)+\Sigma_{j=1}^{n}<[cu_n,u_jy^j]_m,cu_n>cy^n$$

$$=-<[u,y]_m,y>+<[u,y]_m,u\rangle<y,u>$$

$$=<[u,y]_m,<y,u>u-y>,$$

که در محاسبات بالا از پاد متقارن بودن براکت لی: $[u_n,u_n]=\circ$ و روابط $cu_n=u,\ y^n=<y,u_n>$ استفاده کرده ایم.

سرانجام فرمول S-انحنا را بدست می آوریم:

$$S(\circ,y)=(n+1)\{\frac{e_{\circ\circ}(y)}{2F(y)}-(s_\circ(y)-\rho_\circ(y))\}=\frac{n+1}{2}\{\frac{<[u,y]_m,<y,u>u-y>}{F(y)}-<[u,y]_m,u>\}$$

محاسبات بالا را در قضیه زیرخلاصه می کنیم.

قضیه ۱.۴.۳. فرض کنید $(\frac{G}{H},\alpha)$ منیفلد ریمانی همگن باشدو فرض کنید جبرلی $\mathfrak{g}$ از G تجزیه ای به صورت $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ با $Ad(h)\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}$ دارد. تناظر یک به یکی بین متر های راندرز G-ناورداروی $\frac{G}{H}$ تحت متر ریمانی α و مجموعه ی

$$V_1=\{u\in\mathfrak{m}|\alpha(u)<1, Ad(h)(u)=u,\ \forall h\in H\}$$

وجود دارد. برای هر $u \in V_1$، متر راندرز متناظر S-انحنایی به صورت:

$$S(0, y) = \frac{n+1}{2}\{\frac{<[u,y]_m, <y,u> u - y>}{F(y)} - <[u,y]_m, u>\}$$

دارد که $H = 0$ مبدا $\frac{G}{H}$ و $\mathfrak{m}$ را فضای مماس $T_0(\frac{G}{H})$ تعریف می کنیم.

۵.۳ کاربرد نتایج بدست آمده

در این بخش چند کاربرد از نتایج بدست آمده در قسمت قبل را بیان می کنیم.

آقایان شن [۷] و زینگ [۸] اثبات کردند که متر راندرز از S-انحنای ایزوتروپیک تقریبی می باشد اگر وتنها اگر از S-انحنای ایزوتروپیک باشد.آنها همچنین متر های راندرز با S-انحنای ایزوتروپیک را مشخص کردند([۱۱]). قضیه زیر نشان می دهد که S-انحنای فضای راندرز همگن خصوصیات بیشتری را دارا می باشد.

قضیه ۱.۵.۳. فرض کنید $(\frac{G}{H}, F)$ فضای راندرز همگن باشد بطوریکه F بوسیله متر ریمانی G-ناوردای α تعریف شودو $0 \neq u \in V_1$ در قضیه باشد سپس$(\frac{G}{H}, F)$ ، S-انحنای ایروتروپیک دارد اگر و تنها اگر S-انحنای صفر داشته باشد.

اثبات . فرض کنیدF، S-انحنای ایروتروپیک دارد. سپس ۱-فرمی بسته η و تابع $C(x)$ روی $\frac{G}{H}$ وجود دارد بطوریکه:

$$S(x, y) = (n+1)(C(x)F(y) + \eta(y)), \qquad y \in T(\frac{G}{H})$$

در حالت خاص در $x = 0$ داریم:

$$\frac{n+1}{2}\{\frac{<[u,y]_m, <y,u> u - y>}{F(y)} - <[u,y]_m, u>\} = (n+1)(C(0)F(y) + \eta(y)) \quad y \in \mathfrak{m} \qquad (۸.۳)$$

با فرض $y = u$ و $y = -u$ بدست می آوریم:

$$C(0)F(u) + \eta(u) = 0, \qquad C(0)F(-u) - \eta(u) = 0.$$

[۷] Shen
[۸] Xing

$$C(0)(F(-u)+F(-u))=0 \qquad \Longrightarrow C(0)=0.$$

بنابراین:

$$\{\frac{<[u,y]_m, <y,u>u-y>}{F(y)} - <[u,y]_m, u>\} = 2\eta(y) \tag{۹.۳}$$

در نظر می گیریم، $y=y^iu_i$ که u_i پایه متعامد از $\mathfrak{m}$ می باشد. حال فرمول ۹.۳ را می توانیم دوباره به صورت زیر بنویسیم:

$$2\eta(y)+<[u,y]_m,u> \ (\sqrt{\sum_{i=1}^n (y^i)^2} + <u,y>) = <[u,y]_m, <y,u>u-y>$$

$$(2\eta(y)+<[u,y]_m,u>)\sqrt{\sum_{i=1}^n (y^i)^2} = <[u,y]_m, <y,u>u-y>$$

$$-(2\eta(y)+<[u,y]_m,u>)\times <u,y>$$

توجه کنید که طرف راست معادله بالاچند جمله ای از y^i ها هستند. تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$2\eta(y)+<[u,y]_m,u>=0$$

بنابراین داریم:

$$\Longrightarrow <[u,y]_m, <y,u>u-y>=0 \qquad \forall y\in\mathfrak{m} \tag{۱۰.۳}$$

اکنون زیر فضای $\mathfrak{m}$ تجزیه ای به صورت زیر دارد:

$$\mathfrak{m}=L(u)+L(u)^\perp,$$

که $L(u)$ از u تولید می شود. در واقع $L(u)$ فضای تولید شده توسط بردار u می باشد. بوسیله ۱۰.۳، برای هر $y_2\in L(u)^\perp$ داریم:

$$<[u,y_2],y_2>=0$$

درنتیجه برای هر $y=y_1+y_2$ ، $y_1\in L(u)$، $y_2\in L(u)^\perp$ داریم:

$$\circ =< [u,y]_m, < y,u > u - y >=< [u,y_۲]_m, < y_۱,u > u - y_۱ >$$

$$=< [u,y_۲]_m, < y_۱,u > u - \frac{<y_۱,u>}{<u,u>} u >=< y_۱,u > \times (۱ - \frac{۱}{<u,u>}) \times < [u,y_۲]_m, u >$$

چون $< u,u > < ۱$، معادله بالا نتیجه می دهد که:

$$< [u,y_۲]_m, u >= \circ \qquad \forall y_۲ \in L(u)^{\perp},$$

یابه طور معادل:

$$< [u,y]_m, u >= \circ \qquad \forall y \in \mathfrak{m} \tag{۱۱.۳}$$

بنا به (۸.۳) و (۹.۳) S-انحنای F صفر می شود. چون $(\frac{G}{H}, F)$ همگن می باشد، لذا S-انحنا همه جا صفر می باشد. ■

برای هر $y \in \mathfrak{m}$ ،تبدیل خطی $ad_{\mathfrak{m}}$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$ad_{\mathfrak{m}}(y)(u) = [y,u]_{\mathfrak{m}}$$

نتیجه ۲.۵.۳. فضای راندرز همگن در قضیه (۱.۴.۳)، S -انحنای ایزوتروپیک تقریبی دارداگر و فقط اگر $ad_{\mathfrak{m}}(u)$ نسبت به ضرب داخلی $<,>$ پاد متقارن باشد. در حالت خاص این فضا S-انحنای صفر دارد اگر وفقط اگر $ad_{\mathfrak{m}}(u)$ نسبت به ضرب داخلی $<,>$ پاد متقارن باشد.

اثبات. اگر $ad_{\mathfrak{m}}(u)$ نسبت به ضرب داخلی $<,>$ پاد متقارن باشد.سپس برای هر$y \in \mathfrak{m}$ ، داریم :

$$< [u,y]_m, y >= \circ$$

و

$$< [u,y]_{\mathfrak{m}}, u >= - < y, [u,u]_{\mathfrak{m}} >= \circ .$$

بنا به فرمول S-انحنا در قضیه ۱.۳.۳، $S(\circ, y) = \frac{n+۱}{۲} \{ \frac{<[u,y]_m, <y,u>u-y>}{F(y)} - < [u,y]_m, u > \}$

بنابراین F ، S-انحنای صفر دارد.

از طرف دیگراگر F، S -انحنای ایزوتروپیک تقریبی داشته باشد. سپس بنابه اثبات قضیه قبل، روابط ۸.۳ و ۹.۳ برقرار می باشند.

$$< [u,y]_{\mathfrak{m}}, < y,u > u_y >= 0 \qquad \forall\, y \in \mathfrak{m}$$

$$< [u,y]_{\mathfrak{m}}, u >= 0 \qquad \forall\, y \in \mathfrak{m}$$

بنابراین: $< [u,y]_{\mathfrak{m}}, y >= 0$

و بنابراین $ad_m(u)$ نسبت به $<,>$ پاد متقارن می باشد. ■

حال یک کاربرد دیگر از فرمول S-انحنا بیان می کنیم.

گزاره ۳.۵.۳. فرض کنید $(\frac{G}{H},F)$ فضای راندرزهمگن باشد که توسط α و $u \neq 0$ تعریف شده در قضیه ۱.۴.۳ تعریف می شود، بنابراین F از نوع داگلاس است اگر وفقط اگر

$$< [v_1,v_2]_m, u >= 0 \qquad \forall v_1, v_2 \in \mathfrak{m}$$

بنابراین اگر F از نوع داگلاس باشد وS-انحنای ایزوتروپیک تقریبی داشته باشد سپس F از نوع بروالد می باشد.

اثبات. Fاز نوع داگلاس می باشد اگر و فقط اگر ۱-فرمی متناظر βبسته باشدیعنی $d\beta = 0$ چون β،G ناوردا می باشد، تنها نیاز داریم که اثبات کنیم $d\beta|_0 = 0$

مطابق مختصات موضعی ۲.۲ می بینیم که این معادل است با:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial b_i}{\partial x^j} - \frac{\partial b_j}{\partial x^i}) = 0 \qquad \forall i,j$$

مطابق معادله ۱.۴.۳ این نیز معادل است با:

$$S_{ij}(0) = \frac{1}{2}C([u_i,u_j]_m, u_n > \qquad \forall i,j$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}C < [u_i,u_j]_m, u_n >= 0 \qquad \forall i,j$$

بنابراین:

$$< [v_1, v_2]_m, u >= 0 \qquad \forall v_1, v_2 \in m$$

قسمت اول حکم اثبات شد.

حال اگر F،S- انحنای ایزوتروپیک داشته باشد پس بنا لم ۲.۵.۳، داریم: $\quad < [u, v]_m, v >= 0$

اگر F از نوع داگلاس هم باشد، با استفاده از قضیه ۸.۲.۲، سپس F از نوع بروالد می باشد.

■

مراجع

[1] *Shaoqiang Deng. The s-curvature of homogenous randers spaces.* Elsevier*, 27:75–84, 2009. 31, 35*

[2] *Manfredo Perdigao do Carmo.* Riemannian Geometry. *Mathematics: THEORY and Applications. 1992. 2*

[3] *E. Heintze. On homogenous manifolds of negative curvature.* Math. Ann.*, 211:23–34, 1974. 42*

[4] *S. Helgason.* Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, second ed.,. *Academic Press. 23, 24, 34*

[5] *K. Nomizu S. Kobayashi.* Foundations of Differential Geometry, vol 1. *Interscience Publishers, 1963. 31, 33*

[6] *K. Nomizu S. Kobayashi.* Foundations of Differential Geometry, vol 2. *Interscience Publishers, 1969. 31*

[7] *J. Milnor. Curvature of left invariant riemennian metric on lie groups.* Adv. Math.*, 21:293–329, 1976. 42*

[8] *K. Nomizu. Invariant affine connec tions on homogeneous spaces.* Amer. J. Math.*, 76:33–65, 1954. 32, 33*

[9] *G. Randers. On an assymmetric metric in the four-space of general relativity.* Phys. Rev. Math.*, 128:195–199, 1997. □, 2*

[10] *Z. She. Volume comparison and its applications in riemann-finsler geometry.* Adv. Math.*, 128:306–328, 1997. 46*

[11] *Z. Shen. On randers metrics of isotropic s-curvature.* Acta Math. Sinica*, 24:789–796, 2008. 54*

[12] *N. Wallach. compact homogeneous riemannian manifolds with strictly positive curvature.* Acta Math.*, 96:277–295, 1972. 33, 42*

[13] *S. Deng Z. Hou. The group of isometries of a finsler space.* Pacific J. Math*, 207:149–155, 2002. 24*

[14] *S. Deng Z. Hou. Invariant randers metric on homogenous riemannian manifold.* J. Phys. A:Math. Gen.*, 37:4353–4360, 2004. 38, 39*

[15] *D. Bao Z. Shen, S.S. Chern.* An Introduction to Riemann-Finsler Geometry. *Springer-Verlag, New York. 37, 41*

[16] *S.S. Chern Z. Shen.* Riemann-Finsler Geometry. *World Scientific Publishers. 2, 42*

فهرست الفبایی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

S-انحنای ایزوتروپیک تقریبی	*Almost isotropic S-curvature*
S-انحنای صفر	*Vanishing S-curvature*
الصاق	*Connection*
الصاق لوی چویتا	*Levi-Civita connection*
انحنا	*Curvature*
از نوع بروالد	*Berwald type*
براکت لی	*Lie bracket*
بسته	*Closed*
پاد متقارن	*Skew-symmetry*
پایه متعامد	*Orthonormal basis*
تابع هموار	*Smoote function*
تجزیه	*Decomposition*
تغییر شکل	*distortion*
تناظر یک به یک	*One-to-one corresponding*
جبر لی	*Lie algebra*
جمع مستقیم	*Direct consequence*
چندجمله ای	*Polynomial*
حجم	*Volume*
دستگاه مختصات موضعی	*Local coordinate system*
ژئودزیک	*Geodesic*
شعاع	*Radius*
ضرایب	*Coefficients*
علائم کریستوفل	*Christoffel symbols*
عمل	*Action*
فضای داگلاس	*Douglas space*
فضای رده ای	*Coset space*
فضای مماس	*Tangent space*
کلاف مماس سوراخ دار	*Slit tangent bundle*
گروه تبدیل یک پارامتری	*One- parameter transformation group*
مبدا	*Origin*
مسیر	*Trajectory*
معادله	*Equation*

منیفلد .... *Manifold*
منیفلد همگن تحویلی .... *Reductive homogenous manifold*
موازی .... *Parallel*
میدان برداری کیلینگ .... *Killing vectore field*
میدان برداری بنیادی .... *Fundamental vector field*
ناوردا .... *Invariant*
نرم مینکوفسکی .... *Minkowski norm*
نقاط صفر .... *Zero point*
نگاشت .... *Mapping*
همسایگی .... *Neighborhood*
همگن .... *Homogeneous*
یک فرمی *1-Form*

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Action	عمل
Almost isotropic S-curvature	S-انحنای ایزوتروپیک تقریبی
Berwald type	از نوع بروالد
Christoffel symbols	علائم کریستوفل
Closed	بسته
Curvature	انحنا
Coefficients	ضرایب
Connection	الصاق
Coset space	فضای رده ای
Decomposition	تجزیه
Direct consequence	جمع مستقیم
Distortion	تغییر شکل
Douglas space	فضای داگلاس
Equation	معادله
Fundamental vector field	میدان برداری بنیادی
Geodesic	ژئودزیک
Homogeneous	همگن
Invariant	ناوردا
Killing vectore field	میدان برداری کیلینگ
Levi-Civita connection	الصاق لوی چویتا
Lie algebra	جبر لی
Lie bracket	براکت لی
Local coordinate system	دستگاه مختصات موضعی
Manifold	منیفلد
Mapping	نگاشت
Minkowski norm	نرم مینکوفسکی
Neighborhood	همسایگی
One-Form	یک فرمی
One-to-one corresponding	تناظر یک به یک
One- parameter transformation group	گروه تبدیل یک پارامتری
Origin	مبدا
Orthonormal basis	پایه متعامد

موازی . . . *Parallel*
چندجمله ای . . . *Polynomial*
شعاع . . . *Radius*
منیفلد همگن تحویلی . . . *Reductive homogenous manifold*
تابع هموار . . . *Smoote function*
کلاف مماس سوراخ دار . . . *Slit tangent bundle*
پاد متقارن . . . *Skew-symmetry*
فضای مماس . . . *Tangent space*
مسیر . . . *Trajectory*
S-انحنای صفر . . . *Vanishing S-curvature*
حجم . . . *Volume*
نقاط صفر . . . *Zero point*

Abstract

In this thesis, we give an explicit formula of the S-curvature of homogenous Randers spaces by compute of the Levi-Civita connection homogenous Riemannian manifolds and prove that a homogenous Randers space with almost isotropic S-cuerature must have vanishing S-curvature .

Keywords: *Randers space, S-curvature, Berwald space,reductive Homobenous space, Levi-Civita connection, Killing vector field, isotropic S-curvature*

Shahrood University of Technology

Department of Mathematics

MS Thesis

Compute the S-curvature of homogenous Randers space

By:

Samira Delavar

Supervisor:
Dr. Hamid-reza Salimi-Moghadam

Advisor:
Mr. S. Reza Mosavi

Sep 2011