بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی ثابت

نگارش
نفیسه رجبی

استاد راهنما
دکتر حمید رضا سلیمی مقدم

استاد مشاور
آقای خسرو حسین زاده

شهریور ماه ۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

فرم صورتجلسه دفاع پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم **نفیسه رجبی** رشته ریاضی محض گرایش هندسه تحت عنوان **طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی ثابت** که در تاریخ **۱۳۹۰/۰۶/۲۰** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح زیر است :

قبول (با درجه : عالی امتیاز (۱۹) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	دکتر حمیدرضا سلیمی مقدم	استادیار	
۲ـ استاد مشاور	آقای خسرو حسین زاده	مربی	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی ایرانمنش	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر احمد زیره	استادیار	
۵ ـ استاد ممتحن	دکتر مهدی نجفی خواه	دانشیار	نجفی خواه

تأیید رئیس دانشکده :

دانشکده ریاضی

دانشگاه صنعتی شاهرود

الهی

هرچه بیش میدانم، بدانم که هیچ ندانم

مرا مدد کن تا این دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی غرور و تکبر

نه حلقه ای برای اسارت ، نه دستمایه ای برای تجارت

بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

تقدیم به

مادرم

که وجودش برایم همه مهر است و وجودم برایش همه رنج

و همه آنهایی که دعایشان را برایم احساس می کنم.

تشکر و قدردانی...

قبل از هر چیز خدا را شاکرم که بر من منت نهاد و این موهبت را نصیب من نمود تا در وادی علم و دانش قدمی هر چند ناچیز بردارم.

بر خود می دانم که از راهنمایی های بی دریغ استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر سلیمی مقدم صمیمانه تشکر نمایم. همچنین مراتب قدردانی خود را از استاد مشاورم جناب آقای حسین زاده ابراز می دارم.

از خداوند منان برای این دو بزرگوار سلامتی و توفیقات روز افزون را خواستارم.

مقاله مستخرج از پایان نامه

رجبی. ن، " طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی ثابت" ، ششمین سمینار هندسه و توپولوژی ایران، بناب، ۱۳۹۰

تعهد نامه

اینجانب نفیسه رجبی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش هندسه دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی ثابت تحت راهنمائی دکتر حمید رضا سلیمی مقدم متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۱۳۹۰/۰۶/۲۰

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

*** متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .**

چکیده

در این پایان‌نامه ،به بیان یک طبقه بندی سرتاسری برای یک رده از منیفلد های راندرز با انحنای پرچمی ثابت مثبت می پردازیم . مدل برای این طبقه بندی ،کره ی واحد S^{2n+1} دارای یک ساختار فرم فضای ساساکی از انحنای φ-برشی $c \in (-3, 1)$ است.

واژه‌های کلیدی: ایزومتری فینسلری، منیفلد های راندرز،کره های راندرز، انحنای پرچمی ثابت، فرم های فضای ساساکی .

فهرست مطالب

فصل ۱
مقدمه

مسئله طبقه بندی منیفلدهای راندرز با انحنای پرچمی‌ثابت، توسط اینگاردن نیم قرن پیش مطرح شد. [۱۱] سهم عمده رادر کار روی این مسئله یاسودا و شیمادا [۱۷] دارند. بعد از آن بائو و رابلس [۳] اثبات کردند که قضیه یاسودا- شیمادا فقط برای یک رده خاص از منیفلدهای راندرز با انحنای ثابت، صحیح است. سپس بائو و شن [۵] مترهای راندرز با انحنای پرچمی‌ثابت مثبت را بر کره S^3 ایجاد کردند و شن [۱۳] مترهای راندرز تخت تصویری با انحنای پرچمی‌ثابت راموردمطالعه قرار داد. با استفاده از ساختارهای فرم فضای ساساکی بر کره های فرد- بعدی، بژانکو و فاران [۶] مترهای راندرز از انحنای ثابت مثبت را بر کره $S^{2n+1}(n \geq 2)$ ایجاد کردند. این نتیجه، در این پایان نامه برای بیان اولین قضیه طبقه بندی برای یک رده از منیفلدهای راندرز با انحنای پرچمی ثابت مثبت استفاده می شود. بعد از آن بائو ، رابلس و شن [۴] یک قضیه طبقه بندی موضعی از منیفلدهای راندرز با انحنای پرچمی‌ثابت را به دست آورند.

حال محتوای پایان نامه را بصورت زیر طرح ریزی می‌کنیم:

در فصل بعد،برخی نتایج نظریه منیفلدهای راندرز با انحنای پرچمی‌ثابت مثبت را، بیان می‌کنیم. سپس در فصل ۳ برخی مفاهیم و نتایج نظریه فرم های فضای ساساکی را یادآوری می‌کنیم. ارتباط شگفت انگیز بین منیفلدهای راندرز با انحنای پرچمی‌ثابت مثبت و فرم های فضای ساساکی را مطرح می‌کنیم. این رابطه متقابل را در دو بخش زیر ارائه می‌دهیم:

اولاً در فصل۴، یک خانواده از مترهای راندرز با انحنای پرچمی‌ثابت بر کره واحد را عنوان می‌کنیم. بعلاوه نشان می‌دهیم که این مترهای راندرز تخت تصویری نیستند. بعدازآن، مفهوم (c, K)- کره راندرز را معرفی می‌کنیم که کره ای دارای فرم فضای ساساکی با انحنای φ - برشی ثابت و با یک خانواده از مترهای راندرز با انحنای پرچمی‌ثابت مثبت Kاست. سپس درفصل ۵ ، ثابت می‌کنیم که (c, K) - کره های راندرز مدل هایی برای یک رده از منیفلدهای راندرز سره با انحنای پرچمی‌ثابت مثبت هستند. به عبات دقیق تر، ثابت می‌کنیم که هر منیفلد راندرز از این رده، ایزومتریک فینسلری با یک (c, K)- کره است. (قضیه طبقه بندی سرتاسری)

فصل ۲
مفاهیم مقدماتی

۱.۲ نمادها و قراردادها

نمادها و قراردادهایی که در این پایان نامه استفاده می شود، از این قرار است:

۱- در سراسر پایان نامه ، فرض می کنیم که M یک منیفلد C^∞ و m -بعدی(متناهی البعد) است.

۲- جبر توابع C^∞ روی M را با $\mathcal{F}(M)$ و $\mathcal{F}(M)$ -مدول برشهای C^∞ کلاف برداری E روی M را با $\Gamma(E)$ نمایش می دهیم.

۳- از نماد جمع بندی اینشتین استفاده می کنیم. یعنی اگر اندیسی یکبار در بالا و یکبار در پایین تکرار شود، جمع روی آن مقدار را نمایش می دهد و از نوشتن علامت Σ خودداری می کنیم.

۴- $TM^\circ = TM \setminus \{\circ\}$ کلاف مماس حفره دار است.

در این فصل، چنانچه مطلبی ارجاع داده نشده بود، از مرجع [۲] می باشد.

حال تعاریف و مفاهیم مقدماتی راکه برای طبقه بندی مترهای راندرز با انحنای پرچمی ثابت مورد نیاز است، بیان می کنیم.

۱.۱.۲ منیفلدهای فینسلری

تعریف ۱.۱.۲ (منیفلد فینسلری). یک ساختار فینسلری روی منیفلد M، یک تابع به صورت زیر است:

$$F : TM \to [\circ , \infty)$$

که در شرایط زیر صدق می کند:

i) منظم بودن: F روی TM° ، C^{∞} است.

ii) همگن مثبت: برای هر $\lambda > \circ$ داریم: $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$.

iii) تحدب قوی: ماتریس $m \times m$

$$(g_{ij}) := ([\frac{۱}{۲} F^{۲}]_{y^i y^j}) \qquad i, j \in \{۱, ..., m\}$$

در هر نقطه از TM° ، معین مثبت است. $\mathbb{F}^m = (M, F)$ ،که در آن M یک منیفلد و F یک ساختار فینسلری بر TM است، منیفلد فینسلری با متر فینسلری F نامیده می شود.

قضیه ۲.۱.۲ (اولر). [۱] فرض کنید تابع حقیقی مقدار H بر R^n ، روی $R^n \setminus \{\circ\}$ C^{∞} باشد. آنگاه دو جمله زیر معادل هستند:

- H به طور مثبت همگن از درجه r است، یعنی:

$$H(\lambda y) = \lambda^{r} H(y) \qquad \forall \lambda > \circ$$

- مشتق سویی H ، r برابر H است، یعنی:

$$y^i H_{y^i}(y) = r H(y)$$

[۱] Euler

نتیجه ۳.۱.۲ (نتایج قضیه اولر). :

۱) اگرFبه طور مثبت همگن از درجه یک باشد، آنگاه داریم:

$$y^i F_{y^i}(y) = F(y) \tag{۱.۲}$$

به طور معادل:

$$\frac{y^i}{F} F_{y^i} = ۱$$

همچنین:

$$y^j F_{y^i y^j}(y) = ۰ \tag{۲.۲}$$

۲)

$$g_{ij}(x,y) := (\frac{۱}{۲}F^۲)_{y^i y^j}(x,y) = [F F_{y^i y^j} + F_{y^i} F_{y^j}](x,y)$$

۳)

$$g_{ij}(x,y) y^i y^j = F^۲(x,y) \tag{۳.۲}$$

به طور معادل:

$$g_{ij} \frac{y^i}{F} \frac{y^j}{F} = ۱$$

تعریف ۴.۱.۲ (منیفلدهای ریمانی). متر ریمانی C^∞ , a بر M ، خانواده $\{a_x\}_{x \in M}$ از ضرب های داخلی است که برای هر فضای مماس T_xM ، $a_{ij}(x) := a_x(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ ، C^∞ هستند. از اینکه هر a_x یک ضرب داخلی است، ماتریس (a_{ij}) در هر $x \in M$ ، معین مثبت است. می توان نوشت:

$$a = a_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j$$

a ، یک ساختار فینسلری متقارن روی TM با ساختار زیر تعریف می کند:

$$F(x,y) := \sqrt{a_x(y,y)}$$

بنابراین هر منیفلد ریمانی (M,a) , منیفلد فینسلری است.

ساختار فینسلری F را ریمانی گوییم، هرگاه از متر ریمانی a به روش شرح داده شده فوق، به وجود آید.

تعریف ۵.۱.۲ (فضای راندرز). متر راندرز، ساختار فینسلری F بر TM است، که فرم زیر رادارد:

$$F(x,y) := \alpha(x,y) + \beta(x,y) \tag{۴.۲}$$

که در آن

$$\alpha(x,y) := \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j} \tag{۵.۲}$$

$$\beta(x,y) := b_i(x)y^i \tag{۶.۲}$$

* a_{ij} مولفه های متر ریمانی روی M و b_i ها،مولفه های ۱-فرمی b روی M هستند.

* (a^{ij}) ماتریس معکوس (a_{ij}) می باشند.

* از اینکه $\beta(x,y)$ در y خطی است، علامت ثابتی ندارد. بنابراین به منظور اینکه F بر TM° مثبت باشد، اندازه مولفه های (b_i) باید به طور مناسب ،کنترل شود.

F مثبت است، اگر و تنها اگر :

$$||b|| := \sqrt{b_ib^i} < ۱$$

که در آن

$$b^i := a^{ij}b_j$$

تعریف ۶.۱.۲. [۹] اگر b بر M هیچ جا صفر باشد، گوییم که F متر راندرز سره و $\mathbb{F}^m$ منیفلد راندرز سره است.

تعریف ۷.۱.۲ (تانسور اساسی و تانسور کارتان). اگر F متر فینسلری باشد، دو تابع بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$g_{ij} := (\frac{1}{2}F^2)_{y^iy^j} = FF_{y^iy^j} + F_{y^i}F_{y^j}$$

$$A_{ijk}(y) := \frac{F}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{F}{4}(F^2)_{y^iy^jy^k}$$

که متقارن در اندیسهای i,j,k و هر دو توابع همگن از درجه صفرند(تحت تغییر متغیر $y \to \lambda y$ پایا هستند). g_{ij} و A_{ijk} به ترتیب مولفه های دو تانسور مهم،که تانسور اساسی و تانسور کارتان نامیده می شوند، هستند.

۲.۱.۲ الصاق چرن

در سال ۱۹۴۳، چرن الصاقی را برای مترهای فینسلری معرفی کرد، که تعمیمی طبیعی است از الصاق لوی-چویتا در حالت ریمان. این الصاق، الصاق چرن نامیده می شود.

الصاق چرن بر یک منیفلد فینسلری، یک الصاق خطی است که روی کلاف برداری متمایز π^*TM که بر منیفلد TM° قرار می گیرد، عمل می کند.

فرض کنیم (E,π,N) کلاف برداری و $f: M \longrightarrow N$ نگاشتی C^∞ بین دو منیفلد M و N باشد. می توان یک کلاف برداری روی M با همان تار کلاف برداری (E,π,N) را به صورت زیر تعریف کرد. این ساختار جدید را کلاف پول بک می نامیم.

تعریف ۸.۱.۲ (کلاف پول بک). [۱۵] اگر (E,π,N) یک کلاف برداری و $f: M \longrightarrow N$ نگاشت C^∞ باشد، کلاف پول بک E توسط f را، با نماد f^*E نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^*E = \{(x,\nu) \in M \times E | f(x) = \pi(\nu)\}.$$

تارهای کلاف پول بک f^*E یک کپی از تارهای E می باشند. f^*E با نگاشت تصویر مولفه اول $pr_1 : f^*E \longrightarrow M$ که به صورت $(x,\nu) \in M \times E \longmapsto x \in M$ تعریف می شود، یک کلاف برداری روی M است. اگر نگاشت

تصویر مولفه دوم E که $pr_2 : f^*E \longrightarrow E$ به صورت $(x,\nu) \longmapsto \nu$ تعریف شود، آنگاه نگاشت بین کلاف ها در نمودار زیر جابجایی است:

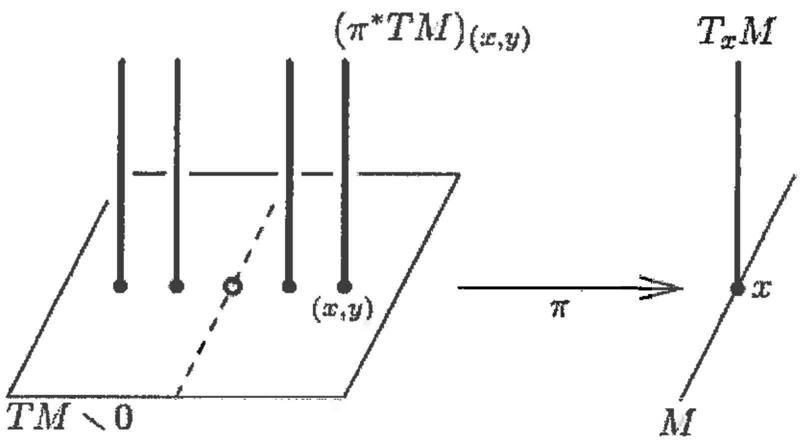
$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{pr_2} & E \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

و $f^*E \cong E$. اگر $\pi : TM \longrightarrow M$ نگاشت تصویر متعارف باشد، با توجه به تعریف فوق کلاف پول بک π^*TM قابل تعریف بوده و تارهای آن در هر نقطه $(x,y) \in TM^\circ$ به صورت زیر است:

$$\pi^*TM|_{(x,y)} := \{(x,y,v)|v \in T_xM\} \cong T_xM.$$

به عبارت دیگر تار روی یک نقطه (x,y) یک کپی از T_xM است.

π^*TM ، کلاف مماس پول بک(کلاف برداری روی کلاف مماس TM°) نامیده می شود.



شکل ۱.۲: قسمت نقطه چین، تصویر برش صفر حذف شده است.

تعریف ۹.۱.۲. برش متمایز ℓ از π^*TM وجود دارد، که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\ell = \ell_{(x,y)} := \frac{y^i}{F(y)}\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{y^i}{F}\frac{\partial}{\partial x^i} =: \ell^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

و دوگان طبیعی اش فرم هیلبرت ω است، که برشی است از π^*T^*M . پس داریم:

$$\omega = \omega(x, y) := F_{y^i}(x, y)dx^i = F_{y^i}dx^i$$

هم ℓ و هم ω روی منیفلد TM° تعریف می شود.

با به کار بردن نتیجه ۳ قضیه اولر۳.۲، داریم:

$$g(\ell, \ell) = g_{ij}(x, y)\ell^i\ell^j = ۱$$

تعریف ۱۰.۱.۲. اگر (x^i, y^i) نمایش دهنده مختصهای موضعی بر TM° و $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\}, i \in \{۱, ..., m\}$ میدان کنج طبیعی روی TM° باشد، آنگاه کلاف مماس عمودی M را، که زیر کلافی از $T(TM^\circ)$ است، با VTM نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$VTM := span\{F\frac{\partial}{\partial y^i}\}$$

که F همان متر فینسلری است.

تعریف ۱۱.۱.۲. مولفه های g_{ij} تانسور اساسی، توابعی بر TM° هستند .ضرایب کریستوفل نوع دوم را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\gamma^i_{jk} := g^{is}\frac{۱}{۴}(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j})$$

که در آن (g^{is}) معکوس ماتریس (g_{is}) است.

همچنین مقادیر N^i_j را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$N^i_j := \gamma^i_{jk}y^k - \frac{A^i_{jk}}{F}\gamma^k_{rs}y^r y^s$$

تعریف ۱۲.۱.۲ (کلاف مماس افقی). کلاف مماس افقی، زیر کلافی از $T(TM^\circ)$ است و بصورت زیر تعریف می شود:

$$HTM := span\{\frac{\delta}{\delta x^s}\}$$

که در آن

$$\frac{\delta}{\delta x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} - N^i_j \frac{\partial}{\partial y^i}$$

$$\delta y^i := dy^i + N^i_j dx^j$$

و دوگان های آن به صورت زیر است:

$$\frac{\delta}{\delta x^j} \longrightarrow dx^j$$

$$F\frac{\partial}{\partial y^i} \longrightarrow \frac{\delta y^i}{F}$$

تعریف ۱۳.۱.۲. حال دو پایه طبیعی جدید را که دوگان یکدیگر هستند ،معرفی می کنیم:

* $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, F\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ پایه برای کلاف مماس TM° (TTM°)

* $\{dx^i, \frac{\delta y^i}{F}\}$ پایه برای کلاف هم مماس TM° (T^*TM°)

پس $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, F\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ یک پایه موضعی برای کلاف مماس TM° است.

و داریم:

$$T(TM^\circ) = HTM \oplus VTM$$

تعریف ۱۴.۱.۲ (الصاق خطی). [۲۰] فرض کنید $\pi : E \to M$ کلاف برداری روی منیفلد M و $\Gamma(E)$ نمایش فضای برش های C^∞ E باشد. الصاق خطی در E نگاشت زیر است:

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

$$(X,Y) \to \nabla_X Y$$

که در شرایط زیر صدق می کند:

$$i)\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \qquad \forall f,g \in \mathcal{F}(M)$$

$$ii)\nabla_X(aY+bZ)=\nabla_XY+\nabla_YZ \qquad \forall a,b\in R$$

$$iii)\nabla_X(fY)=f\nabla_XY+X(f)Y \qquad \forall f\in\mathcal{F}(M)$$

تعریف ۱۵.۱.۲ (الصاق لوی-چویتا[۲]). [۱۸] فرض کنید M منیفلد ریمانی باشد. الصاق خطی ∇ روی M یک الصاق لوی-چویتا می باشد، اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف) ∇ متقارن باشد.

ب) ∇ سازگار بامتر ریمانی باشد.

تذکر ۱۶.۱.۲. با فرض وجود الصاق خطی، می توان ۱-فرمی های الصاق ω^i_j ها ،را برای کلاف π^*TM به صورت زیر تعریف کرد:

$$\nabla_v\frac{\partial}{\partial x^j}=\omega^i_j(v)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\nabla_v dx^i=-\omega^i_j(v)dx^j$$

که در آن $v\in T(TM^\circ)$ است.

توضیح ۱۷.۱.۲. در تانسور اساسی

$$g:=(FF_{y^iy^j}+F_{y^i}F_{y^j})dx^i\otimes dx^j=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$$

داریم:

$$\nabla_vg=(dg_{ij})(v)dx^i\otimes dx^j+g_{ij}(\nabla_vdx^i)\otimes dx^j+g_{ij}dx^i\otimes(\nabla_vdx^j)$$

بنابراین، با استفاده از تذکر ۱۶.۱.۲ داریم:

$$\nabla g=(dg_{ij}-g_{kj}\omega^k_i-g_{ik}\omega^k_j)\otimes dx^i\otimes dx^j$$

[۲] Levi- Civita

تذکر ۱۸.۱.۲. هر الصاق خطی، بوسیله ω^i_j ها توصیف می شود.

حال قضیه زیر که معادلات ساختاری الصاق چرن را بیان می کند، مطرح می کنیم:

قضیه ۱۹.۱.۲. [چرن] [۳] فرض کنید (M,F) یک منیفلد فینسلری باشد. کلاف پول بک π^*TM یک الصاق خطی منحصر بفرد می پذیرد که الصاق چرن نامیده می شود. فرم های الصاق با معادلات ساختاری زیر توصیف می شود:

مستقل از تاب

$$d(dx^i) - dx^j \wedge \omega^i_j = -dx^j \wedge \omega^i_j = \circ.$$

تقریبا g سازگار

$$dg_{ij} - g_{kj}\omega^k_i - g_{ik}\omega^k_j = ۲\, A_{ijs}\frac{\delta y^s}{F}.$$

در واقع:

- مستقل از تاب، معادل است با نبودن جملات dy^k در ω^i_j .یعنی:

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk} dx^k$$

و متقارن بودن

$$\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}$$

[۳] Chern Theorem

• تقریبا g –سازگاری ایجاب می کند :

$$\Gamma^l_{jk} = \gamma^l_{jk} - g^{li}(A_{ijs}\frac{N^s_k}{F} - A_{jks}\frac{N^s_i}{F} + A_{kis}\frac{N^s_j}{F}).$$

به طور معادل:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{g^{is}}{۴}(\frac{\delta g_{sj}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^s} + \frac{\delta g_{ks}}{\delta x^j}).$$

Γ^i_{jk} ضرایب کریستوفل الصاق چرن نامیده می شود. N^i_j الصاق غیر خطی روی کلاف مماس TM° است.

تعریف ۲۰.۱.۲ (مشتق کوواریانت). اگر $T := T^j_i \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i$ یک برش موضعی هموار دلخواه $\pi^*TM \otimes \pi^*T^*M$ ، که یک میدان تانسوری از رتبه $(۱,۱)$ روی منیفلد TM° است، باشد، آنگاه مشتق کوواریانت آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\nabla T := (\nabla T)^j_i \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i$$

که

$$(\nabla T)^j_i := dT^j_i + T^k_i \omega^j_k - T^j_k \omega^k_i$$

تعریف ۲۱.۱.۲. $(\nabla T)^j_i$ ، ۱–فرمی روی TM° هستند. آنها می توانند بر حسب پایه طبیعی $\{dx^s, \frac{\delta y^s}{F}\}$ تعمیم یابند:

$$(\nabla T^j_i) = T^j_{i|s} dx^s + T^j_{i;s}\frac{\delta y^s}{F}$$

$$T^j_{i|s} = (\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^s}} T)^j_i = \frac{\delta T^j_i}{\delta x^s} + T^k_i \Gamma^j_{ks} - T^j_k \Gamma^k_{is}$$

$$T^j_{i;s} = (\nabla_{F\frac{\partial}{\partial y^s}} T)^j_i = F\frac{\partial T^j_i}{\partial y^s}$$

یادآوری می کنیم :

$$\frac{\delta T^j_i}{\delta x^s} := \frac{\partial T^j_i}{\partial x^s} - N^r_s \frac{\partial T^j_i}{\partial y^r}$$

که $T^j_{i|s}$ مشتق کوواریانت افقی و $T^j_{i;s}$ مشتق کوواریانت عمودی نامیده می شود.

۳.۱.۲ مشتقات تانسور اساسی g

با توجه به اینکه الصاق چرن، تقریبا g -سازگار است، داریم:

$$(\nabla g)_{ij} = dg_{ij} - g_{kj}\omega_i^k - g_{ik}\omega_j^k = ۲A_{ijs}\frac{\delta y^s}{F}$$

پس

$$g_{ij|s} = ۰ \tag{۷.۲}$$

$$g_{ij;s} = ۲A_{ijs} \tag{۸.۲}$$

همچنین داریم:

$$\delta^j_{i|s} = ۰, \delta^j_{i;s} = ۰ \tag{۹.۲}$$

بنابراین $(g^{ij}g_{jk})_{|s} = ۰$ و $(g^{ij}g_{jk})_{;s} = ۰$. پس داریم:

$$g^{ij}_{|s} = ۰ \tag{۱۰.۲}$$

$$g^{ij}_{;s} = -۲A^{ij}_s \tag{۱۱.۲}$$

جملات فوق، بیانگر آن است که تانسور اساسی(با همه ترتیب اندیس های ممکن) بطور کوواریانت در طول مشتقات افقی ثابت و مشتقات عمودی اش، متناسب با تانسور کارتان هستند.

۴.۱.۲ مشتقات ضرایب اسپری ژئودزیک G^i

مقادیر معین G^i را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$G^i := \gamma^i_{jk}y^jy^k \tag{۱۲.۲}$$

که γ^i_{jk} ضرایب کریستوفل نوع دوم تانسور اساسی هستند.لذا داریم:

$$G^i = \frac{1}{4} g^{jh}\left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^h \partial x^k} - \frac{\partial F^2}{\partial x^h}\right)$$

که در آن (g^{jh}) ماتریس معکوس (g_{jh}) می باشد. در نتیجه داریم:

$$\frac{\partial G^i}{\partial y^j} = N^i_j \tag{۱۳.۲}$$

که N^i_j همان الصاق غیر خطی است.

ژئودزیک های فینسلری سرعت ثابت، خم هایی در M هستند، که از دستگاه مرتبه دوم نیمه خطی ODE,

$\ddot{x}^i + 2G^i = 0$ بدست می آیند که در G^i قرار می دهیم $y^i := \dot{x}^i$ (یعنی $\frac{dx^i}{dt}$). میدان برداری

$$y^k \frac{\delta}{\delta x^k} = y^k\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - N^i_k \frac{\partial}{\partial y^i}\right) = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

روی TM° ، اسپری ژئودزیک نامیده می شود.

با توجه به قضیه اولر واینکه G^iهمگن از درجه دو نسبت به yاست ، داریم : $y^j \frac{\partial G^i}{\partial y^j} = 2G^i$ که سمت راست

معادله فوق، بدست می آید.

۵.۱.۲ $hh-$ و $hv-$ و $vv-$ انحناها

تعریف ۲۲.۱.۲. ۲-فرمی انحنای الصاق چرن بصورت زیر است:

$$\Omega^i_j := d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k$$

ضرب گوه ای دو ۱-فرمی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\theta \wedge \zeta := \theta \otimes \zeta - \zeta \otimes \theta$$

از اینکه Ω^i_j ها، ۲-فرمی روی منیفلد TM° هستند، می توان آنها را به صورت زیر بسط داد:

$$\Omega^i_j := \frac{1}{2} R^i_{jkl} dx^k \wedge dx^l + P^i_{jkl} dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} + \frac{1}{2} Q^i_{jkl} \frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F}$$

R و P و Q به ترتیب $hh-$ و $hv-$ و $vv-$ تانسورهای انحنای الصاق چرن هستند.

داریم:

$$R^i_{jk\ell} = \frac{\delta\Gamma^i_{j\ell}}{\delta x^k} - \frac{\delta\Gamma^i_{jk}}{\delta x^\ell} + \Gamma^i_{hk}\Gamma^h_{j\ell} - \Gamma^i_{h\ell}\Gamma^h_{jk}$$

تعریف می کنیم:

$$R^i_k := \ell^j R^i_{jk\ell}\ell^\ell$$

لذا داریم:

$$R^i_k = \ell^j\Big(\frac{\delta}{\delta x^k}\frac{N^i_j}{F} - \frac{\delta}{\delta x^j}\frac{N^i_k}{F}\Big)$$

همچنین تعریف می کنیم:

$$R_{ik} := l^j R_{jikl} l^l \qquad (۱۴.۲)$$

لذا داریم:

$$R_{ik} = g_{ij}R^j_k$$

۶.۱.۲ انحنای پرچمی

برای تعریف مفهوم انحنای پرچمی، ابتدا مفهوم پرچم بر منیفلد M را تعریف می کنیم. منظور از یک پرچم در نقطه $x \in M$ ،زیر فضای دو بعدی تولید شده توسط $y \wedge v$ در T_xM است، که در آن y میله پرچم و $y \wedge v$ قسمت پارچه پرچم می باشد. پرچم کاملا در فضای مماس T_xM قرار می گیرد.

اگر $v := v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ باشد، می توان $K(y,v)$ را ، در نقطه $(x,y) \in TM^\circ$ تعریف کرد:

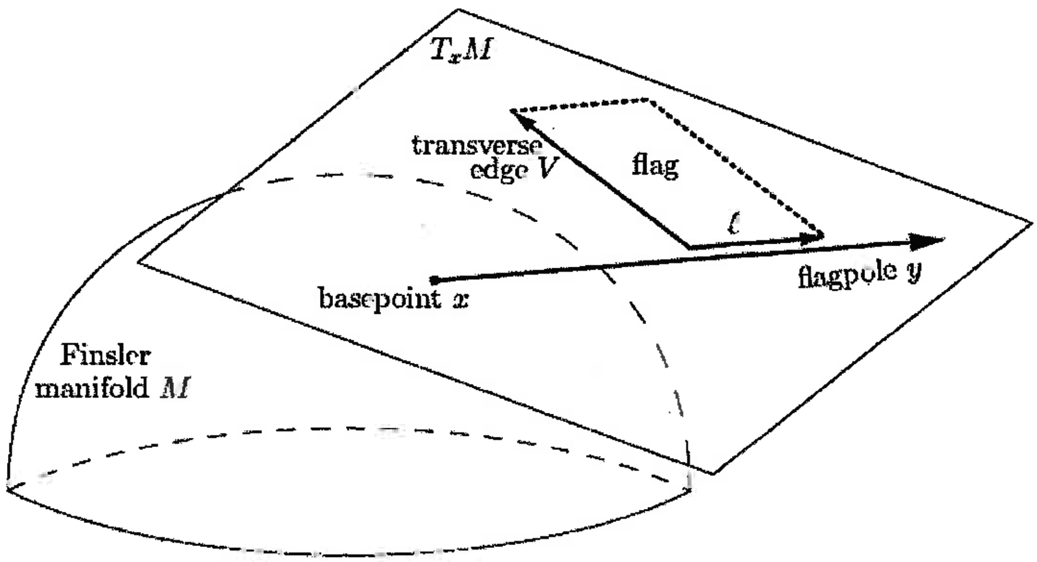
$$K(y,v) := \frac{v^i(y^j R_{jik\ell}y^\ell)v^k}{g(y,y)g(v,v) - [g(y,v)]^۲}$$

که در آن y و v برش هایی از کلاف پول-بک π^*TM هستند.

یادآوری می کنیم که:

$$g := g_{ij}(x,y)dx^i \otimes dx^j := (\frac{۱}{۲}F^۲)_{y^iy^j}dx^idx^j$$

یک متر ریمانی بر کلاف پول-بک π^*TM است. اگر صورت و مخرج عبارت سمت راست را بر $F^۲(x,y)$



شکل ۲.۲:

تقسیم کنیم، داریم:

$$K(\ell,v) := \frac{v^i(\ell^j R_{jik\ell}\ell^\ell)v^k}{g(\ell,\ell)g(v,v) - [g(\ell,v)]^۲}$$

باتوجه به ۱۴.۲ داریم:

$$K(\ell,v) = \frac{v^i R_{ik} v^k}{g(v,v) - [g(\ell,v)]^۲}$$

پس:

$$K(y,v) = K(\ell,v)$$

از این حقیقت که $g(\ell,\ell) = ۱$ استفاده کرده ایم.

تعریف ۲۳.۱.۲. عدد $K(y,v)$ در $(x,y) \in TM^{\circ}$ ، انحنای پرچمی پرچم $y \wedge v$ در نقطه (x,y) نامیده می شود.

اگر $K(y,v)$ وابستگی به $(x^i, y^i.v^i)$ ، $i \in \{1, ..., m\}$ نداشته باشد، یعنی $K(y.v)$ تابع ثابت باشد، گوییم انحنای پرچمی، ثابت است.

تعریف ۲۴.۱.۲. در حالت ریمانی $R_{jik\ell}$ و g فقط به x وابسته هستند. در نتیجه انحنای پرچمی $K(y,v)$ ، فقط تابعی است از مکان x و پرچم $y \wedge v$ و به میله پرچم y بستگی ندارد. این عدد، انحنای برشی در نقطه x و زیر فضای دو بعدی $y \wedge v$ برای متر ریمانی نامیده می شود.

تذکر ۲۵.۱.۲. هرگاه منیفلد فینسلری، ریمانی باشد، انحنای پرچمی، همان انحنای برشی است.

تعریف ۲۶.۱.۲. برای رویه های ریمانی، فقط یک انحنای برشی $K = K(x)$ در هر نقطه x وجود دارد. این تابع K ، تابع انحنای گاوسی نامیده می شود.

تعریف ۲۷.۱.۲ (میدان برداری کیلینگ[۴]). [۷] فرض کنید M یک منیفلد ریمانی باشد. گوییم $X \in \Gamma(TM)$ یک میدان برداری کیلینگ روی M است، اگر:

$$a(\nabla_\xi X, \eta) + a(\nabla_\eta X, \xi) = 0 \qquad \forall \xi, \eta \in \Gamma((TM))$$

که در آن a متر ریمانی است.

تعریف ۲۸.۱.۲. [۹] میدان تانسوری انحنای R از ∇ را انحنای ریمانی گوییم که بصورت زیر است:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \quad \forall X,Y,Z \in \Gamma(TM) \qquad (۱۵.۲)$$

و بطور موضعی داریم:

$$R_{hijk} = a(R(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j}), \frac{\partial}{\partial x^h}, \frac{\partial}{\partial x^i}) \qquad (۱۶.۲)$$

[۴] Killing

که در آن a متر ریمانی است.

تعریف ۲۹.۱.۲. مقادیر R^i_{jkl} ،مؤلفه های تانسور انحنا هستند. در مختصهای طبیعی، از فرمول زیر بدست می آیند:

$$R^i_{jkl} = \frac{\delta\Gamma^i_{jl}}{\delta x^k} - \frac{\delta\Gamma^i_{jk}}{\delta x^l} + \Gamma^i_{hk}\Gamma^h_{jl} - \Gamma^i_{hl}\Gamma^h_{jk} \qquad (۱۷.۲)$$

با پایین بردن اندیس i بر R ،تانسور ریمان بصورت زیر بدست می آید:

$$R_{jikl} := g_{is}R^s_{jkl}$$

تانسورانحنا، ویژگیهای متقارن زیر را دارد:

$$\begin{aligned} R_{jilk} &= -R_{jikl} \\ R_{ijkl} &= -R_{jikl} \\ R_{klji} &= +R_{jikl}. \end{aligned} \qquad (۱۸.۲)$$

تعریف ۳۰.۱.۲ (اتحادهای بیانچی). اولین اتحاد بیانچی بصورت زیر است:

$$R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = ۰ \qquad (۱۹.۲)$$

واتحاد دوم بیانچی :

$$R^i_{jkl|m} + R^i_{jlm|k} + R^i_{jmk|l} = ۰$$

که در آن

$$R^p_{qrs|t} := \frac{\partial R^p_{qrs}}{\partial x^t} - R^p_{vrs}\gamma^v_{qt} + R^p_{qrs}\gamma^p_{vt} - R^p_{qvs}\gamma^v_{re} - R^p_{qrv}\gamma^v_{st}$$

تعریف ۳۱.۱.۲. (انحنای ریچی و انحنای اسکالر) تانسور ریچی بصورت زیر تعریف می شود:

$$Ric_{ij} := R^s_{isj} \qquad (۲۰.۲)$$

بوسیله ۱۸.۲ Ric_{ij} در اندیس های i،j متقارن است. اثر آن انحنای اسکالر S است:

$$S := g^{ij} Ric_{ij}$$

تعریف ۳۲.۱.۲. [۹] بااستفاده از aوb (که در تعریف متر راندرز آورده شده)،میدان برداری B و۱-فرمی θ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$B = b^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{۲۱.۲}$$

که در آن

$$b^i = a^{ij} b_j$$

و $[a^{ij}]$ ماتریس معکوس $[a_{ij}]$ است.

$$\theta = b^i (b_{i|j} - b_{j|i}) dx^j \tag{۲۲.۲}$$

فصل ۳
فرم های فضای ساساکی

۱.۳ مقدمه

در این فصل ، مطالب ارجاع داده نشده ، از مرجع [۸] می باشد.

تعریف ۱.۱.۳ (منیفلد تماسی). اگر M منیفلد C^{∞} ،$2n+1$ بعدی همراه با یک ۱-فرمی η باشد، طوریکه $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ دراینصورت M را یک منیفلد تماسی گوییم. $d\eta$ ، رتبه $2n$ بر جبر گراسمان $\wedge T_m^* M$ در هر نقطه $m \in M$ دارد و بنابراین اگر $\eta \neq 0$ باشد، آنگاه یک زیر فضای ۱- بعدی $\{X \in T_m M | d\eta(X, T_m M) = 0\}$ داریم ،که متمم زیر فضای $\eta = 0$ است. بنابراین با انتخاب ξ_m در این زیر فضای نرمال شده با $\eta(\xi_m) = 1$ یک میدان برداری سرتاسری ξ داریم، که در شرایط زیر صدق می کند:

$$d\eta(\xi, X) = 0 \ , \ \eta(\xi) = 1$$

ξ ، میدان برداری مشخصه ساختار تماسی η نامیده می شود.

تعریف ۲.۱.۳. توزیع تولید شده توسط زیر فضاهای $\mathcal{D}_m = \{X \in T_m M : \eta(X) = 0\}$ را با $\mathcal{D}$ نمایش داده وتوزیع تماسی یا زیرکلاف تماسی می نامیم.

تعریف ۳.۱.۳ (ساختار تقریباً تماسی). گوییم M^{2n+1} ، یک ساختار تقریباً تماسی یا (φ, ξ, η) -ساختار دارد، اگر یک میدان تانسوری φ از نوع (۱و۱) و یک میدان برداری ξ و یک ۱-فرمی η بپذیرد، طوریکه در شرایط

زیر صدق کند:

$$\varphi^{۲} = -I + \eta \otimes \xi , \eta(\xi) = ۱$$

قضیه ۴.۱.۳. فرض کنید $M^{۲n+۱}$ یک (φ, ξ, η) - ساختار دارد. آنگاه

$$\eta \circ \varphi = ۰ , \varphi\xi = ۰$$

اثبات. اولاً با استفاده از $\eta(\xi) = ۱, \varphi^{۲} = -I + \eta \otimes \xi$ ، داریم:

$$\varphi^{۲}\xi = -\xi + \eta(\xi)\xi = ۰$$

و بنابراین یا $\varphi\xi = ۰$ یا $\varphi\xi$ یک بردار ویژه غیر بدیهی φ ، متناظر با مقدار ویژه صفراست. همچنین با استفاده از $\varphi^{۲} = -I + \eta \otimes \xi$ ، داریم:

$$۰ = \varphi^{۲}\varphi\xi = -\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi$$

یا

$$\varphi\xi = \eta(\varphi\xi)\xi$$

حال اگر $\varphi\xi$ ، بردار ویژه غیر بدیهی مقدار ویژه صفر باشد، آنگاه $\eta(\varphi\xi) \neq ۰$ و بنابراین:

$$۰ = \varphi^{۲}\xi = \eta(\varphi\xi)\varphi\xi = (\eta(\varphi\xi)^{۲})\xi \neq ۰$$

که یک تناقض است. پس $\varphi\xi = ۰$.

حال از اینکه $\varphi\xi = ۰$ وبا توجه به اینکه، برای هر میدان برداری X داریم:

$$\eta(\varphi X)\xi = \varphi^{۳}X + \varphi X = -\varphi X + \varphi(\eta(X)\xi) + \varphi X = ۰$$

نتیجه می شود:

$$\eta \circ \varphi = ۰$$

■

تعریف ۵.۱.۳. اگر M یک منیفلد $(2n+1)$ -بعدی با یک ساختار (φ,ξ,η) - ساختار یک متر ریمانی a طوری بپذیرد که :

$$a(\varphi X,\varphi Y)=a(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$

آنگاه گوییم، M یک ساختار متریک تقریباً تماسی دارد و a ، متریک سازگار نامیده می شود. با قرار دادن $Y=\xi$ ، نتیجه می گیریم که :

$$\eta(X)=a(X,\xi) \tag{۱.۳}$$

تعریف ۶.۱.۳. یک ساختار تقریباً مختلط، میدان تانسوری J از نوع(۱و۱) است بطوریکه:

$$J^2=-I$$

تعریف ۷.۱.۳ (قطبی سازی). تجزیه ماتریس غیر منفرد A به حاصلضرب یک ماتریس متعامد F و یک ماتریس متقارن معین مثبت G را، قطبی سازی گوییم.

تعریف ۸.۱.۳. منیفلد C^∞ زوج بعدی M را، با ۲ فرمی Ω ،که بسته و ماکزیمال(یعنی $\Omega^n\neq 0$,$d\Omega=0$) است ، منیفلد سیمپلکتیک می نامیم.

قضیه ۹.۱.۳. فرض کنید (M^{2n},Ω) منیفلد سیمپلکتیک باشد. آنگاه متر ریمانی a و ساختار تقریبا مختلط J وجود دارد، طوریکه:

$$a(X,JY)=\Omega(X,Y).$$

قضیه ۱۰.۱.۳. : فرض کنید (M^{2n+1},η) منیفلد تماسی و ξ میدان برداری باشد. آنگاه ساختار متریک تقریباًتماسی وجود دارد، بطوریکه:

$$a(X,\varphi Y)=d\eta(X,Y)$$

اثبات . اثبات از دو مرحله تشکیل شده است. اولاً فرض کنید $\acute{K}$ یک متر ریمانی باشد و متر جدید K را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$K(X,Y) = \acute{K}(-X+\eta(X)\xi, -Y+\eta(Y)\xi) + \eta(X)\eta(Y)$$

آنگاه $K(X,\xi) = \eta(X)$.

حال $d\eta$ را، روی زیر کلاف تماسی $\mathcal{D}$ ،قطبی می کنیم که متر $\acute{a}$ و ساختار تقریباً مختلط $\acute{\varphi}$ را روی $\mathcal{D}$ می دهد، طوریکه $\acute{a}(X,\acute{\varphi}Y) = d\eta(X,Y)$.

با گسترش $\acute{a}$ به متر a منطبق با K در امتداد ξ و گسترش $\acute{\varphi}$ به میدان ایندومورفیسم های φ طوریکه $\varphi\xi = 0$ شود، یک ساختار متریک تقریباً تماسی (φ,ξ,η,a) را داریم، که

$$a(X,\varphi Y) = d\eta(X,Y) \tag{۲.۳}$$

■

تعریف ۱۱.۱.۳. متر ریمانی a را متر وابسته نامیم، اگر ساختارتقریباً تماسی چنان موجود باشد طوریکه :

$$a(X,\varphi Y) = d\eta(X,Y)$$

در این حالت آن را ساختار متریک تماسی می نامیم.

قضیه ۱۲.۱.۳ (نیولاندر[۱] - نیرنبرگ[۲]). هر ساختار تقریباً مختلط J از رده C^∞ با تاب نیجنهس[۳] صفر، انتگرال پذیر است. یعنی، این ساختار تقریباً مختلط ،متناظر با ساختار تقریبا مختلط حاصل از یک ساختار مختلط است.

تاب نیجنهس $[T,T]$ میدان تانسوری T از نوع(۱و۱)، میدان تانسوری از نوع (۲و۱) داده شده به صورت زیر

[۱] Newlander
[۲] Nirenberg
[۳] Nijenhuis

است:

$$[T,T](X,Y) = T^{2}[X,Y] + [TX,TY] - T[TX,Y] - T[X,TY]$$

تعریف ۱۳.۱.۳ (ساختار تقریباًتماسی نرمال). فرض کنید M یک منیفلد تماسی، $2n+1$ بعدی با تانسورهای ساختاری (φ,ξ,η) باشد ومنیفلد $M \times R$ رادر نظر بگیرید. میدان برداری بر $M \times R$ را با $(X, f\frac{d}{dt})$ که X مماس بر t,M مختصات بر fR یک تابع C^∞ بر M است، نمایش می دهیم. یک ساختار تقریباً مختلط J را بر $M \times R$ بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi \,,\, \eta(X)\frac{d}{dt})$$

که درآن $J^{2} = -I$

اگر J انتگرال پذیر باشد، گوییم که ساختار تقریباًتماسی (φ,ξ,η) ،نرمال است.

از آنجا که صفر بودن تاب نیجنهس J ، شرط لازم وکافی برای انتگرال پذیر بودن است، به دنبال بیان کردن شرط نرمال بودن برحسب تاب نیجنهس φ هستیم.

از آنجا که $[J,J]$ میدان تانسوری از نوع(۲و۱) است، کافی است که $[J,J]((X,0),(Y,0))$ و $[J,J]((X,0),(0,\frac{d}{dt}))$ را برای میدان های برداری Y,X روی M^{2n+1} محاسبه کنیم.

$$[J,J]((X,0),(Y,0)) = -([X,Y],0) + [(\varphi X,\eta(X)\tfrac{d}{dt}),(\varphi Y,\eta(Y)\tfrac{d}{dt})] - J[(\varphi X,\eta(X)\tfrac{d}{dt}),(Y,0)] -$$

$$J[(X,0),(\varphi Y,\eta(Y)\tfrac{d}{dt})] = (\varphi^{2}[X,Y]-\eta([X,Y])\xi,\xi,0)+([\varphi X,\varphi Y],(\varphi X\eta(Y)-\varphi Y\eta(X))\tfrac{d}{dt})-(\varphi[\varphi X,Y]+$$

$$(Y\eta(X))\xi,\eta([\varphi X,Y])\tfrac{d}{dt}) = ([\varphi,\varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi,((\mathcal{L}_{\varphi X}\eta)(Y) - (\mathcal{L}_{\varphi Y}\eta(X))\tfrac{d}{dt})$$

$$[J,J]((X,0),(0,\tfrac{d}{dt})) = [(\varphi X,\eta(X)\tfrac{d}{dt}),(-\xi,0)] - J[(\varphi X,\eta(X)\tfrac{d}{dt}),(0,\tfrac{d}{dt})] - J[(X,0),(-\xi,0)] =$$

$$(-[\varphi X,\xi],(\xi\eta(X))\tfrac{d}{dt}) + (\varphi[X,\xi],\eta([X,\xi])\tfrac{d}{dt}) = ((\mathcal{L}_\xi\varphi)X,(\mathcal{L}_\xi\eta)(X))$$

تعریف ۱۴.۱.۳. تانسورهای $N^{(1)}$ و $N^{(2)}$ و $N^{(3)}$ و $N^{(4)}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$N^{(1)}(X,Y) = [\varphi,\varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi$$

$$N^{(2)}(X,Y) = (\mathcal{L}_{\varphi X}\eta)(Y) - (\mathcal{L}_{\varphi Y}\eta)X$$

$$N^{(3)} = (\mathcal{L}_\xi \varphi)X$$

$$N^{(4)} = (\mathcal{L}_\xi \eta)(X)$$

که در آن $\mathcal{L}$ مشتق لی را نشان می دهد.

تذکر ۱۵.۱.۳. به وضوح ساختار تقریباً تماسی (φ,ξ,η) نرمال است، اگروتنهااگر چهار تانسور فوق صفر شوند.

قضیه ۱۶.۱.۳. برای ساختار تقریباً تماسی (φ,ξ,η) صفر شدن $N^{(1)}$ ایجاب می کندکه $N^{(4)}, N^{(3)}, N^{(2)}$ صفر شوند.

اثبات. با قرار دادن $Y = \xi$ ویادآوری $d\eta(X,\xi) = 0$ داریم:

$$0 = [\varphi,\varphi](X,\xi) = \varphi^2[X,\xi] - \varphi[\varphi X,\xi] = \varphi((\mathcal{L}_\xi \varphi)X)$$

با به کارگیری φ و توجه به اینکه $d\eta(\xi,\varphi X) = 0$ ایجاب می کند که $\eta([\xi,\varphi X]) = 0$ ، داریم: $N^{(3)} = 0$. بعلاوه $(\mathcal{L}_\xi\eta)(\varphi X) = 0$ ، اما $(\mathcal{L}_\xi\eta)(\xi) = 0$ فوراً نتیجه می شود و بنابراین $N^{(4)} = 0$. سرانجام با به کارگیری η در

$$0 = [\varphi,\varphi](\varphi X, Y) + 2d\eta(\varphi X, Y)\xi$$

داریم:

$$\eta(\varphi^2 X, \varphi Y) + \varphi X\eta(Y) - \eta([\varphi X, Y]) = 0$$

که با ساده کردن ، بدست می آید: $N^{(2)} = 0$. ■

نتیجه ۱۷.۱.۳. ساختار تقریباً مختلط (φ,ξ,η) نرمال است، اگر وتنهااگر $[\varphi,\varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi = 0$.

لم ۱۸.۱.۳. برای ساختار متریک تقریباً تماسی (φ,ξ,η,a) ، مشتق کوواریانت φ بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}2a((\nabla_X\varphi)Y,Z) &= 3d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z) - 3d\Phi(X,Y,Z)\\ &+a(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X) + N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)\\ &+2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y).\end{aligned}$$

اثبات. یادآوری می کنیم که الصاق لوی-چویتای ∇ از a بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}2a(\nabla_X Y,Z) &= Xa(Y,Z) + Ya(X,Z) - Za(X,Y)\\ &+ a([X,Y],Z) + a([Z,X],Y) - a([Y,Z],X)\end{aligned}$$

واینکه فرمول دوگان - مرز برای d روی یک ۲- فرمی Φ بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}d\Phi(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}\{X\Phi(Y,Z) + Y\Phi(Z,X) + Z\Phi(X,Y)\\ &- \Phi([X,Y],Z) - \Phi([Z,X],Y) - \Phi([Y,Z],X)\}.\end{aligned}$$

بنابراین:

$$
\begin{aligned}
۲a((\nabla_X\varphi)Y,Z) &= ۲a(\nabla_X\varphi Y,Z)+۲a(\nabla_X Y,\varphi Z)\\
&= Xa(\varphi Y,Z)+\varphi Ya(X,Z)-Za(X,\varphi Y)\\
&+ a([X,\varphi Y],Z)+a([Z,X],\varphi Y)-a([\varphi Y,Z],X)\\
&+ Xa(Y,\varphi Z)+Ya(X,\varphi Z)-\varphi Za(X,Y)\\
&+ a([X,Y],\varphi Z)+a([\varphi Z,X],Y)-a([Y,\varphi Z],X)\\
&= X\Phi(Y,Z)+(\Phi(\varphi Z,X))+\eta(Z)\eta(X)-Z\Phi(X,Y)\\
&- ([X,\varphi Y],\varphi Z)+\eta([X,\varphi Y])\eta(Z)\\
&+ \Phi([Z,X],Y)-a(\varphi[\varphi Y,Z],\varphi X)+\eta(X)\eta([Z,])\\
&+ X\Phi(\varphi Y,\varphi Z)-Y\Phi(Z,X)-\varphi Z(\Phi(\varphi Y,X)+\eta(Y)\eta(X))\\
&- a(\varphi[Y,\varphi Z],\varphi X)+\eta(X)\eta([\varphi Z,Y])\\
&+ \{\Phi([Y,Z],X)-a([Y,Z]),\varphi X\}\\
&- \{\Phi([\varphi Y,\varphi Z,X])-a([\varphi Y,\varphi Z]),\varphi X\}\\
&+ \{a(۲d\eta(Y,Z)\xi,\varphi X)\}\\
&= ۳d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z)-۳d\Phi(X,Y,Z)+a(N^{(۱)}(Y,Z),\varphi X)\\
&+ N^{(۲)}(Y,Z)\eta(X)+۲d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z)-۲d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y).
\end{aligned}
$$

■

نتیجه ۱۹.۱.۳. برای ساختار متریک تماسی، فرمول لم ۱۸.۱.۳ بصورت زیر در می آید:

$$
۲a((\nabla_X\varphi)Y,Z)=a(N^{(۱)}(Y,Z),\varphi X)+۲d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z)-۲d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y)
$$

با قرار دادن $X = \xi$ می بینیم که برای هر ساختار متریک تماسی، $\nabla_\xi \varphi = 0$ است.

تعریف ۲۰.۱.۳. منیفلد متریک تماسی نرمال را، منیفلد ساساکی می نامیم.

قضیه ۲۱.۱.۳. ساختار متریک تقریباً تماسی (φ, ξ, η, a) ساساکی است، اگروتنهااگر:

$$(\nabla_X \varphi)Y = a(X, Y)\xi - \eta(Y)X$$

اثبات . اگر (φ, ξ, η, a) ساختار متریک تماسی، نرمال باشد، $\Phi = d\eta$ ،$N^{(1)} = 0$ ،$N^{(2)} = 0$ و با توجه به لم ۱۸.۱.۳ داریم:

$$\begin{aligned} 2a((\nabla_x \varphi)Y, Z) &= 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \\ &= 2((a(Y, X) - \eta(Y)\eta(X))\eta(Z) - 2a(Z, X) - \eta(Z)\eta(X))\eta(Y) \\ &= 2a(a(X, Y)\xi - \eta(Y)X, Z). \end{aligned}$$

بالعکس، با فرض

$$(\nabla_X \varphi)Y = a(X, Y)\xi - \eta(Y)X$$

وقراردادن $Y = \xi$ بدست می آوریم :

$$-\varphi \nabla_X \xi = \eta(X)\xi - X$$

وبنابراین $\nabla_X \xi = -\varphi X$.

لذا داریم:

$$d\eta(X, Y) = \frac{1}{2}(a(\nabla_X \xi, Y) - a(\nabla_Y \xi, X)) = a(X, \varphi Y)$$

پس، (φ, ξ, η, a) یک ساختار متریک تماسی است. حال داریم:

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = (\varphi \nabla_Y \varphi - \nabla_{\varphi Y} \varphi)X - (\varphi \nabla_X \varphi - \nabla_{\varphi X} \varphi)Y$$

که یک تعویض عبارت آن را بصورت زیر ساده می کند:

$$[\varphi,\varphi](X,Y)=-2d\eta(X,Y)\xi$$

با توجه به نتیجه ۱۷.۱.۳ ساختار متریک تماسی، نرمال است. ■

تعریف ۲۲.۱.۳. ساختار متریک تماسی $(\varphi,\xi,\eta,\varphi)$ را، K -تماسی گوییم، اگر ξ میدان برداری کیلینگ باشد.

ازاینکه دراثبات فوق $\nabla_X\xi=-\varphi X$ و اینکه Φ پادمتقارن است، نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۲۳.۱.۳. هر منیفلد ساساکی، K - تماسی است.

قضیه ۲۴.۱.۳. اگر (M^{2n+1},a) منیفلد ریمانی پذیرنده میدان برداری کیلینگ واحد ξ باشد، طوریکه برای X متعامد بر ξ،

$$R_{X\xi}\xi=X$$

آنگاه M^{2n+1} منیفلد K - تماسی است.

(که در آن $R_{X\xi}\xi=R(X,\xi)\xi$ است.)

اثبات . فرض کنید $\eta(X)=a(X,\xi)$ ، $\varphi X=-\nabla_X\xi$ باشد. از اینکه ξ میدان برداری کیلینگ واحد است $\nabla_\xi\xi=0$ و

$$\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla_XY}\xi=R_{X\xi}Y \qquad (۳.۳)$$

بنابراین برای X متعامد به ξ داریم:

$$\varphi^2X=\nabla_{\nabla_X\xi}\xi=R_{\xi X}\xi=-X$$

و $\varphi\xi=0$. بنابراین:

$$\varphi^2=-I+\eta\otimes\xi$$

بعلاوه:

$$d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}(a(\nabla_X\xi, Y) - a(\nabla_Y\xi, X)) = -a(\nabla_Y\xi, X) = a(X, \varphi Y)$$

بنابراین (φ, ξ, η, a) یک ساختار متریک تماسی روی M^{2n+1} است. ■

قضیه ۲۵.۱.۳. اگر در قضیه ۲۴.۱.۳

$$R(X,Y)\xi = a(\xi, Y)X - a(X,\xi)Y \tag{۴.۳}$$

باشد، آنگاه M^{2n+1} ساساکی است.

اثبات. معادله زیر که در اثبات قضیه ۲۴.۱.۳ آمده را در نظر بگیرید:

$$\nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi = R_{X\xi}Y$$

داریم:

$$(\nabla_X\varphi)Y = R_{\xi X}Y$$

وبنابراین:

$$\begin{aligned} a((\nabla_X\varphi)Y, Z) &= a(R_{\xi X}Y, Z) = a(R_{YZ}\xi, X) = a(\eta(Z)Y - \eta(Y)Z, X) \\ &= \eta(Z)a(Y,X) - \eta(Y)a(Z,X) \\ &= a(\xi, Z)a(X,Y) - \eta(Y)a(X,Z) \\ &= a(a(X,Y)\xi - \eta(Y)X, Z). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$(\nabla_X\varphi)Y = a(X,Y)\xi - \eta(Y)X$$

پس با توجه به قضیه ۲۱.۱.۳ M^{2n+1} ساساکی است. ■

توضیح ۲۶.۱.۳. اگر (φ,ξ,η,a) ساختار فضای ساساکی روی M باشد،در روند اثبات های فوق نتایج زیر بدست می آید:

نتیجه ۲۷.۱.۳.

$$\nabla_X\xi = -\varphi X$$

با توجه به قضیه ۲۱.۱.۳ و قرار دادن $Y=\xi$ داریم:

$$\begin{aligned}(\nabla_X\varphi)\xi &= g(X,\xi)\xi - \eta(\xi)X\\ -\varphi\nabla_X\xi &= \eta(X)\xi - X\\ -\varphi^{۲}\nabla_X\xi &= \eta(X)\varphi\xi - \varphi X\\ \nabla_X\xi &= -\varphi X.\end{aligned}$$

نتیجه ۲۸.۱.۳.

$$(\nabla_X\eta)Y = a(X,\varphi Y)$$

نتیجه ۲۹.۱.۳.

$$(\nabla_X\eta)Y + (\nabla_Y\eta)X = ۰$$

زیرا با توجه به نتیجه ۲۸.۱.۳ داریم:

$$(\nabla_X\eta)Y + (\nabla_Y\eta)X = a(X,\varphi Y) + a(Y,\varphi X) = d\eta(X,Y) + d\eta(Y,X) = ۰$$

نتیجه ۳۰.۱.۳.

$$(\nabla_Z\nabla_X\eta)Y = a(Y,Z)\eta(X) - a(X,Z)\eta(Y)$$

۲.۳ انحنای φ- برشی

تعریف ۱.۲.۳. یک برش صفحه در T_mM (M یک منیفلد ۱ + $2n$ - بعدی) یک φ -برش نامیده می شود، اگر یک بردار $X \in T_mM$ متعامدبه ξ وجود داشته باشدبطوریکه $(X,\varphi X)$ برش را تولید کنند.انحنای برشی $K(X,\varphi X)$ را با $H(X)$ نمایش می دهیم و آن را انحنای φ - برشی می نامیم.

قضیه ۲.۲.۳. اگر انحنای φ - برشی در هر نقطه از یک منیفلد ساساکی از بعد $\leq$ ۵ مستقل از انتخاب φ - برش در نقطه باشد، آنگاه ثابت بر منیفلد است و تانسور انحنا بصورت زیر نمایش داده می شود:

$$\begin{aligned} a(R(X,Y)Z,W) &= \frac{c+3}{4}\{a(Y,Z)a(X,W)-a(X,Z)a(Y,W)\}+\frac{1-c}{4}(\{\eta(Y)\eta(Z)a(X,W) \\ &+ \eta(X)\eta(W)a(Y,Z)-\eta(X)\eta(Z)a(Y,W)-\eta(Y)\eta(W)a(X,Z) \qquad (5.3) \\ &+ (\nabla_X\eta)(Z)(\nabla_Y\eta XW)-(\nabla_Y\eta)(Z)(\nabla_X\eta)(W)+2(\nabla_x\eta)(Y)(\nabla_Z\eta)(W). \end{aligned}$$

جائیکه c انحنای φ - برشی ثابت است.

تعریف ۳.۲.۳. یک منیفلد ساساکی با انحنای φ - برشی ثابت c ، فرم فضای ساساکی نامیده می شود و با $M[c]$ نمایش داده می شود.

تعریف ۴.۲.۳ (تغییر شکل $\mathcal{D}$ -متجانس). فرض کنید $(\varphi_0,\xi_0,\eta_0,a_0)$ یک ساختار متریک تماسی باشد. ساختار تغییرشکل یافته زیر را در نظر بگیرید:

$$\eta=\epsilon\eta_0 \qquad \xi=\frac{1}{\epsilon}\xi_0 \qquad \varphi=\varphi_0$$

$$a=\epsilon a_0+\epsilon(\epsilon-1)\eta_0\otimes\eta_0 \qquad (6.3)$$

که ϵ یک ثابت مثبت است. چنین تغییر شکلی، یک تغییر شکل $\mathcal{D}$ - متجانس نامیده می شود، زیرا مترهای

محدود شده به زیر کلاف تماسی $\mathcal{D}$ متجانس هستند. این تغییر شکل توسط تانو در۱۹۶۸ معرفی شده و کاربرد های فراوانی دارد.

با به کار بردن یک تغییر شکل $\mathcal{D}$ - متجانس بر ساختار (φ,ξ,η,a) روی کره استاندارد S^{2n+1} ، یک ساختار ساساکی روی S^{2n+1} با انحنای φ - برشی ثابت

$$c = \frac{4}{\epsilon} - 3 \tag{۷.۳}$$

بدست می آید.

۳.۳ فرم های فضای ساساکی با انحنای φ - برشی $c > -3$

فرض کنید $(\varphi_0,\xi_0,\eta_0,a_0)$ یک ساختار متریک تماسی باشد و ساختار تغییر شکل یافته $\mathcal{D}$ - متجانس (φ,ξ,η,a) نیز، یک ساختار متریک تماسی است و از بسیاری از ویژگیهای ساختار اصلی برخوردار است .به خصوص اگر $(\varphi_0,\xi_0,\eta_0,a_0)$ ساساکی باشد آنگاه (φ,ξ,η,a) نیز ساساکی است ؛اگر $M[c_0]$ یک فرم فضای ساساکی باشد، آنگاه با تغییر شکل، ساختار فرم فضای ساساکی $M[c]$ را به دست می آوریم که درآن $c = \frac{c_0+3}{\epsilon} - 3$.

تعریف ۱.۳.۳. فرض کنیم که $M[c]$, $\tilde{M}[\tilde{c}]$ دو فرم فضای ساساکی به ترتیب با ساختارهای (φ,ξ,η,a,c) و $(\tilde{\varphi},\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{a},\tilde{c})$ باشند آنگاه گوییم که $M[c],\tilde{M}[\tilde{c}]$ ایزومورفیک هستند، اگر $c=\tilde{c}$ و یک دیفئومورفیسم $f : M[c] \longrightarrow \tilde{M}[\tilde{c}]$, c^∞ وجود داشته باشد که فرم میدان های تانسوری (φ,ξ,η,a,c) را به میدان های تانسوری متناظر $(\tilde{\varphi},\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{a},\tilde{c})$ بنگارد.

بویژه دو فرم فضای ساساکی ایزومورفیک، منیفلدهای ریمانی ایزومتریک هستند.

تعریف ۲.۳.۳ (تابع نمایی). [۱۸] فرض کنیم (M,a) یک منیفلد ریمانی، $p \in M$ و $\Omega \subset TM$ بصورت زیر تعریف شود $\Omega_p = \{\nu \in T_pM | \gamma_\nu$ در فاصله ای شامل $[۰, ۱]$ تعریف شود$\}$. (که در آن γ_ν ژئودزیک در جهت بردار ν می باشد.) نگاشت نمایی در نقطه p رابه صورت زیر تعریف می کنیم:

$$exp_p : \Omega_p \longrightarrow M,$$

$$\nu \mapsto exp\nu = \gamma_\nu(۱).$$

تعریف ۳.۳.۳ (منیفلد کامل ریمانی). [۱۸] اگر برای هر $p \in M$ نگاشت نمایی exp_p برای همه $v \in T_pM$ تعریف شود، آنگاه Mیک منیفلد ریمانی کامل گفته می شود.به عبارت دیگر برای هر $p \in M$ هر ژئودزیک $\gamma(t)$ با نقطه آغازین p برای همه مقادیر پارامتر $t \in R$ تعریف شود.

قضیه زیر را از تانو بیان می کنیم (برای اثبات به ۱۹۶۹ تانو[۱۶]مراجعه شود.):

قضیه ۴.۳.۳. (تانو [۱۶])فرض کنید $M[c]$ یک فرم فضای ساساکی کامل و همبند ساده با انحنای φ - برشی $c > -۳$ باشد. آنگاه $M[c]$ با $S^{۲n+۱}[c]$ ایزومورفیک است.

تذکر ۵.۳.۳. بخصوص $M[c]$ و $S^{۲n+۱}[c]$ ایزومتریک هستند. اما باید دقت کرد که روی $S^{۲n+۱}$ متر ریمانی a داده شده با تغییر شکل D - متجانس را، در نظر بگیریم.

از آنجا که می خواهیم، قضیه فرم های فضای ساساکی را در هندسه فینسلری بکار ببریم، باید بعضی از فرمول های فوق را در مختصاتهای موضعی بیان کنیم. اگر قرار دهیم:

$$a_{ij} = a(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \quad \eta_i = \eta(\frac{\partial}{\partial x^i}) \quad \varphi(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \varphi_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\eta_{i|j} = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \eta)(\frac{\partial}{\partial x^i}) \quad \eta_{i|j|k} = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \eta)(\frac{\partial}{\partial x^i})$$

فصل ۴

مترهای راندرز با انحنای پرچمی ثابت مثبت روی S^{2n+1}

۱.۴ مقدمه

در ۱۹۷۷، یاسودا و شیمادا[۱۷] شرایطی را برای منیفلدهای راندرز برای داشتن انحنای پرچمی ثابت مثبت، مطرح کردند که توسط ماتسوموتو در ۱۹۸۹ ، کامل تر شد. در ۲۰۰۱، بائو مثالی را یافت که در این قضیه صدق نمی کرد. بعد از آن بائو و رابلس[۳] شرط اضافی $\theta = 0$ را بر آن اضافه کرده و قضیه یاسودا-شیمادا را به صورت زیر تصحیح کردند:

قضیه ۱.۱.۴ (قضیه تصحیح شده یاسودا-شیمادا). [۶] اگر $\mathbb{F}^m = (M, F, a_{ij}, b_i)$ یک منیفلد راندرز باشد. آنگاه $\mathbb{F}^m$ با انحنای پرچمی ثابت مثبت و $\theta = 0$ روی M است،(θ, B در ۲۱.۲،۲۲.۲ تعریف شده اند.) اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند:

i) طول $||b||$ از b روی M ثابت است و B نسبت به ∇ موازی نیست.

ii) مشتق کوواریانت b نسبت به ∇ در معادله زیر صدق می کند

$$b_{i|j} + b_{j|i} = 0 \qquad (1.4)$$

iii) میدان تانسوری انحنای الصاق لوی چویتای ∇ بصورت زیر داده می شود:

$$R_{hijk} = K(1-\|b\|^2)\{a_{hj}a_{ik}-a_{hk}a_{ij}\}+K\{b_ib_ka_{hj}+b_hb_ja_{ik}-b_ib_ja_{hk}-b_hb_ka_{i|j}\}+b_{h|k}b_{i|j}-b_{h|j}b_{i|k}+2b_{h|i}b_{k|j}. \tag{۲.۴}$$

تذکر ۲.۱.۴. a)به وضوح، شرط (ii) معادل است با:

ii) B (داده شده در ۲۱.۲) میدان برداری کیلینگ بر (M, a) است.

b)با استفاده از iii ،iii ثابت می شود که

$$b_{i|j|k} = K(b_ja_{ik} - b_ia_{jk}) \tag{۳.۴}$$

اثبات. b)چون B یک میدان برداری کیلینگ بر M است، از [۱۹]داریم:

$$R(X,B)Y = \nabla_X\nabla_Y B - \nabla_{\nabla_X Y}B \quad \forall X,Y \in \Gamma(TM) \tag{۴.۴}$$

که در مختصات های موضعی بصورت زیر بیان می شود:

$$R_{hijk}b^j = b_{i|h|k} \tag{۵.۴}$$

در ادامه، از اینکه $1 > \| b \|^2 = b_i(x)b^i(x)$ و در نظر گرفتن (i) نتیجه می گیریم که

$$b_{i|j}b^i = 0 \tag{۶.۴}$$

سپس با انقباض R_{hijk} بوسیله b^j و در نظرگرفتن ۱.۴ و ۶.۴ داریم:

$$R_{hijk}b^j = K(b_ha_{ik} - b_ia_{hk}) \tag{۷.۴}$$

بنابراین از ۵.۴ و ۷.۴ ، ۳.۴ رانتیجه می گیریم. ■

تعریف ۳.۱.۴. متر زاویه ای روی $\mathbb{F}^m$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$h_{ij} := g_{ij} - \ell_i \ell_j$$

که

$$\ell_i = g_{ik}\ell^k$$

که در آن l^i و l^j برش های تعریف شده در ۹.۱.۲ و g_{ij} ها ، مولفه های تانسور اساسی کارتان هستند.

قضیه ۴.۱.۴. $\mathbb{F}^m$ از انحنای پرچمی ثابت K است اگروتنهااگر

$$R_{ij} = K h_{ij}$$

حال، قضیه زیر را ثابت می کنیم:

قضیه ۵.۱.۴. [۹] : فرض کنید $F^m = (M, F, a_{ij}, b_i)$ یک منیفلد راندرز از انحنای پرچمی ثابت مثبت K باشد. آنگاه برای هر $K^* > 0$ مثبت بر M یک متر راندرز $F^* = (a^*_{ij}, b^*_i)$ از انحنای پرچمی K^* وجود دارد.

اثبات. ابتدا، بر M متر ریمانی a^* و ۱-فرمی b^* را بصورت زیر تعریف می کنیم: $a^*_{ij} = \frac{K}{K^*} a_{ij}$, $b^*_i = \sqrt{\frac{K}{K^*}} b_i$

بررسی شرط ۳.۲ برای (a^*_{ij}, b^*_i) ساده است.

بنابراین تابع

$$F^*(x,y) = \sqrt{a^*_{ij} y^i y^j} + b^*_i\, y^i = \sqrt{\frac{K}{K^*}} F(x,y) \qquad (۸.۴)$$

یک متر راندرز را بر M تعریف می کند. با استفاده از ۱.۱.۲ برای F و F^* و در نظرگرفتن ۸.۴ نتیجه می گیریم:

$$(a)\ g_{ij}(x,y) = \frac{K^*}{K} g^*_{ij}(x,y) \qquad (۹.۴)$$

$$(b)\ g^{ij}(x,y) = \frac{K}{K^*} g^{ij*}(x,y) \tag{۱۰.۴}$$

سپس، بااستفاده از ۸.۴ و ۱۰.۴ و ۱۳.۲ نتیجه می گیریم که F^* ، F همان الصاق غیر خطی متعارف را تعریف می کند یعنی داریم:

$$N_i^j = N^j{}_i^*$$

بنابراین، ۱۳.۲ و ۸.۴ و ۱۰.۴ ایجاب می کند:

$$R_{ij} = R_{ij}^* \tag{۱۱.۴}$$

بعبارت دیگر، با ۳.۱.۴ و ۹.۴ نتیجه می گیریم که مترهای زاویه ای مطابق F،F^* مرتبط می شوند:

$$h_{ij} = \frac{K^*}{K} h_{ij}^* \tag{۱۲.۴}$$

سرانجام با در نظرگرفتن متر راندرز F با انحنای ثابت K (ببینید ۱۳.۴) از ۱۱.۴ و ۱۲.۴ نتیجه می گیریم :

$$R_{ij}^* = K^* h_{ij}^*$$

یعنی F^* یک متر راندرز با انحنای ثابت K^* است. ■

تعریف ۶.۱.۴. فرض کنید $S^{2n+1}[C]$ کره $(2n+1)$ - بعدی واحد، دارای ساختار فرم فضای ساساکی $(\varphi, \xi, \eta, a, c)$ شرح داده شده در فصل قبل باشد. یادآوری می کنیم که a ، متر استاندارد روی S^{2n+1} القا شده بوسیله متر اقلیدسی $\mathbb{R}^{2n+2}$ نیست، بلکه a یک متر بر S^{2n+1} تعریف شده با تغییر شکل $\mathcal{D}$ - متجانس ۶.۳ است. در سراسر این فصل، فرض می کنیم که $c \in (-3, 1)$ است، که با استفاده از ۷.۳ با $\varepsilon \in (1, \infty)$ معادل است. حال می توانیم برای هر $-1 < \varepsilon$ فرمی جدید روی S^{2n+1} را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$b = \alpha\eta \tag{۱۳.۴}$$

که در آن:

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon}}$$

سپس بر کلاف مماس S^{2n+1} تابع زیر را در نظر می گیریم:

$$F(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j} + b_i(x) y^j \qquad (14.4)$$

که $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ به ترتیب مؤلفه های موضعی متر ریمانی a و ۱- فرمی b هستند.

اگر ξ ، یک میدان برداری واحد باشد، با استفاده از ۱.۳ بدست می آوریم $\| \eta \| = 1$.

بنابراین از ۱۳.۴ نتیجه می گیریم :

$$\| b \| = \alpha < 1 \qquad (15.4)$$

پس، F داده شده با ۱۴.۴ یک متر راندرز را بر S^{2n+1} تعریف می کند.

تعریف ۷.۱.۴ (متر فینسلری تخت تصویری). متر فینسلری $F = F(x,y)$ روی زیر مجموعه باز $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ تخت تصویری نامیده می شود، اگر همه ژئودزیک های آن در $\mathcal{U}$ ، خط های راست باشند.

تعریف ۸.۱.۴ (انحنای بروالد و انحنای داگلاس). [۱۲] فرض کنید $G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i_{(y)} \frac{\partial}{\partial y^i}$ یک اسپری بر منیفلد M باشد. برای هر بردار $y \in T_xM \setminus \{0\}$ ، انحنای بروالد $B_y : T_xM \times T_xM \times T_xM \longrightarrow T_xM$ یک فرم سه خطی بصورت زیر است:

$$B_y(u,v,w) = B^i_{jkl}(y) u^j v^k w^l \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$$

که در آن:

$$B^i_{jkl}(y) := \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}(y) \qquad (16.4)$$

انحنای بروالد میانگین $E_y : T_xM \times T_xM \longrightarrow R$ فرم دو خطی است بصورت:

$$E_y(u,v) = E_{ij}(y)u^i v^j$$

که در آن تعریف می شود:

$$E_{ij}(y) = \frac{1}{2} B^m_{ijm}(y) \tag{17.4}$$

و بر انحنای بروالد پایه گذاری می شود.

داگلاس یک کمیت جدید $D_y : T_xM \times T_xM \times T_xM \longrightarrow T_xM$ را معرفی کرد، که یک فرم سه خطی :

$$D_y(u,v,w) = D^i_{jkl}(y)u^j v^k w^l \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$$

است، که در آن تعریف می شود:

$$D^i_{jkl} := B^i_{jkl} - \frac{2}{n+1}[E_{jk}\delta^i_l - E_{jl}\delta^i_k + E_{kl}\delta^i_j + \frac{\partial E_{jk}}{\partial y^l} y^i] \tag{18.4}$$

$D := \{D_y\}_{y \in TM}$ را انحنای داگلاس می نامیم.

تعریف ۹.۱.۴ (انحنای ویل). [۱۲] فرض کنید $G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}$ یک اسپری روی منیفلد M باشد.

فرض کنید $R_y(u) = R^i_k(y)u^k \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ انحنای ریمانی G را نمایش دهد.

انحنای ریچی $Ric(y) = (n-1)R(y)$. اثر R_y بیان شده بصورت زیر است:

$$R(y) := \frac{1}{n-1} R^m_m(y) \tag{19.4}$$

برای هر بردار $y \in T_xM \setminus \{0\}$ ، تعریف می کنیم:

$$W_y(u) = W^i_k(y)u^k \frac{\partial}{\partial x^i}|x$$

که در آن:

$$W^i_k(y) := A^i_k - \frac{1}{n+1}\frac{\partial A^m_k}{\partial y^m}y^i \qquad (۲۰.۴)$$

که

$$A^i_k := R^i_k - R\delta^i_k$$

$W_y : T_xM \longrightarrow T_xM$ یک تبدیل خطی است، که در شرایط زیر صدق می کند:

$$W_y(y) = 0 \qquad ,trW_y = 0$$

که $trW_y := W^m_m(y)$.

$W := \{W_y\}_{y\in TM}$ را انحنای ویل می نامیم.

قضیه ۱۰.۱.۴. [۱۹] یک منیفلد فینسلری، تخت تصویری است، اگر وتنها اگر تانسور های داگلاس و ویل آن صفر شود .

قضیه ۱۱.۱.۴ (ماتسموتو-باسکو). [۱] تانسور داگلاس منیفلد راندرز، صفر می شود، اگر و تنها اگر ۱-فرمی b ، بسته باشد.

۲.۴ برخی خواص مترهای راندرز روی S^{2n+1}

قضیه ۱.۲.۴. کره $S^{2n+1}, n \geq 1$ دارای متر راندرز داده شده با ۱۴.۴ ، یک منیفلد راندرز سره با انحنای پرچمی ثابت $k = 1$ است. بعلاوه $\mathbb{F} = (S^{2n+1}, F)$ منیفلد فینسلری تخت تصویری نیست.

اثبات . اولا، از ۱۳.۴ داریم که

$$b^i = \alpha\xi^i \qquad (۲۱.۴)$$

که در آن

$$b^i = a^{ij}b_j$$

آنگاه با استفاده از ۲۱.۴ و ۱۳.۴ و ۱۱.۳ نتیجه می گیریم که θ داده شده در ۲۲.۲ روی S^{2n+1} ، صفر می شود.

همچنین از ۱۵.۴ داریم که ۱-فرمی b با طول ثابت است و با استفاده از ۲۸.۱.۳ و ۱۳.۴ بدست می آوریم:

$$(\nabla_{\varphi Y} b)Y = a(\varphi Y, \varphi Y) > 0$$

برای هر میدان برداری نا صفر $Y \in \Gamma(\mathcal{D})$.

بنابراین شرط (i) از قضیه ۱.۱.۴ برقرار می شود.

شرط (ii) از همان قضیه ،نتیجه مستقیم ۸.۳ و ۱۳.۴ است.

حال با استفاده از ۱۵.۴ و ۱۳.۴ و ۷.۳ نتیجه می گیریم:

$$\frac{1-c}{4}\eta_i\eta_k = (1-\frac{1}{\varepsilon})\eta_i\eta_k = \alpha^2\eta_i\eta_k = b_i b_k, \qquad \frac{c+3}{4} = \frac{1}{4} = 1-\alpha^2 = 1-\|b\|^2$$

$$\frac{1-c}{4}\eta_{h|k}\eta_{i|j} = \alpha^2\eta_{h|k}\eta_{i|j} = b_{h|k}b_{i|j} \tag{22.4}$$

آنگاه با استفاده از جایگزینی ۲۲.۴ در ۱۲.۳ نتیجه می گیریم که ۲.۴ برای $K = 1$ درست است.

بنابراین شرط (iii) از قضیه ۱.۱.۴ برقرار می شود. پس F داده شده در ۱۴.۴ روی S^{2n+1} متر راندرز با انحنای پرچمی ثابت $K = 1$ است. برای اثبات قسمت بعدی قضیه،با توجه به دو قضیه ۱۰.۱.۴ و ۱۱.۱.۴ وبا استفاده از ۱۳.۴ و ۲.۳ بدست می آوریم:

$$db(X,Y) = \eta(X,Y) = \alpha a(X, \varphi Y).$$

سپس یک میدان برداری $Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ رادر نظر گرفته و نتیجه می گیریم:

$$db(\varphi Y, Y) = \alpha a(\varphi Y, \varphi Y) > 0.$$

بنابراین b بسته نیست. پس هر متر راندرز داده شده با ۱۴.۴ روی S^{2n+1} تخت تصویری نیست. این، اثبات قضیه را کامل می کند. ■

قضیه ۲.۲.۴. برای هر ثابت $K > 0$ روی S^{2n+1} یک خانواده از متر های راندرز سره وجود دارد که با انحنای پرچمی K هستند و تخت تصویری نیستند.

اثبات . با استفاده از قضیه ۱.۲.۴ می دانیم ،برای هر $\epsilon < 1$ یک متر راندرز F^* با انحنای پرچمی ثابت $K^* = 1$ وجود دارد . حال قضیه ۵.۱.۴ را به کار می بریم و متر راندرز $F = (\frac{1}{\sqrt{K}})F^*$ با انحنای پرچمی ثابت K بدست می آوریم. پس از اثبات قضیه ۵.۱.۴ می دانیم که $b = (\frac{1}{\sqrt{K}})b^*$
با توجه به اینکه b^* بسته نیست، نتیجه می گیریم که b نیز بسته نیست. بنابراین، با توجه به دو قضیه ۱۰.۱.۴ و ۱۱.۱.۴ ، F تخت تصویری نیست. ■

حال توضیح می دهیم به ازای چه متر ریمان و ۱- فرمی روی S^{2n+1} متر راندرز F با انحنای پرچمی ثابت K بدست می آید.

با توجه به ساختار ساساکی استاندارد $(\varphi_0, \xi_0, \eta_0, a_0)$ روی S^{2n+1} در فصل ۲ و اینکه S^{2n+1} با انحنای برشی ثابت ۱ نسبت به متر ریمانی a_0 است ، $\epsilon < 1$ را داریم و از ۷.۳ نتیجه می گیریم :

$$\epsilon = \frac{4}{c+3} \qquad c \in (-3, 1) \tag{۲۳.۴}$$

با جایگزینی ϵ از ۲۳.۴ در ۶.۳ ، روی S^{2n+1} ساختار فرم فضای ساساکی $(\bar{\varphi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{a}, c)$ را بصورت زیر بدست می آوریم:

$$(a) \quad \bar{\varphi} = \varphi_0 \qquad (b) \quad \bar{\xi} = \frac{c+3}{4}\xi_0 \qquad (c) \quad \bar{\eta} = \frac{4}{c+3}\eta_0$$

$$(d) \quad \bar{a} = \frac{4}{c+3}\{a_0 + \frac{1-c}{c+3}\eta_0 \otimes \eta_0\} \tag{۲۴.۴}$$

تعریف ۳.۲.۴. با استفاده از قضیه ۱.۲.۴ تابع

$$(a) \quad \bar{F}(x,y) = \sqrt{\bar{a}_{ij}y^iy^j} + \bar{b}_i(x)y^i$$

$$(b) \quad \bar{b}_i = \frac{\sqrt{1-c}}{2}\bar{\eta}_i \qquad (۲۵.۴)$$

روی S^{2n+1} یک متر راندرز با انحنای پرچمی ثابت $\bar{K} = 1$ را تعریف می کند.

تعریف ۴.۲.۴. متر ریمانی $\tilde{a}$ و ۱- فرمی $\tilde{b}$ که بصورت زیر تعریف می شود :

$$(a) \quad \tilde{a} = \frac{1}{K}\bar{a} \qquad (b) \quad \tilde{b} = \frac{1}{\sqrt{K}}\bar{b} \qquad (۲۶.۴)$$

برای هر $c \in (-3, 1)$ تابع :

$$\tilde{F}(x,y) = \sqrt{\tilde{a}_{ij}y^iy^j} + \tilde{b}_i(x)y^i = \frac{1}{\sqrt{K}}\bar{b} \qquad (۲۷.۴)$$

روی $S^{2n+1}[C]$ یک متر راندرز با انحنای پرچمی ثابت K تعریف می کند . منیفلد راندرز $(S^{2n+1}[c], \tilde{F}) = \tilde{\mathbb{F}}^{2n+1}$ را، (c, K)- کره راندرز می نامیم.

چنانکه در فصل بعدی خواهیم دید ، (c, K)- کره راندرز، مدل استاندارد برای منیفلد های راندرز با انحنای پرچمی ثابت مثبت K، $\theta = 0$ خواهد بود .

فصل ۵
قضیه طبقه بندی

۱.۵ مقدمه

در این فصل هر مطلب ارجاع داده نشده، از مرجع [۹] می باشد.

فرض می کنیم $m \geq ۲, \mathbb{F}^m = (M, F, a_{ij}, b_i)$ یک منیفلد راندرز سره m- بعدی که ۱- فرمی θ داده شده با ۲۲.۲ روی M صفراست، باشد.همچنین فرض می کنیم که $\mathbb{F}^m$ باانحنای پرچمی ثابت $K = ۱$ است.

ابتدایک رابطه متقابل جالب توجه بین هندسه منیفلدراندرز سره $\mathbb{F}^m$ و ساختار فرم فضای ساساکی طبیعی روی M را نشان می دهیم .

آنگاه از این رابطه ،برای بدست آوردن قضیه طبقه بندی سرتاسری برای منیفلد های راندرز سره با انحنای پرچمی ثابت مثبت K با $\theta = ۰$ روی M استفاده می کنیم .

تعریف ۱.۱.۵. ۱-فرمی واحد η روی M را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\eta = \frac{۱}{\| b \|} b \qquad (۱.۵)$$

بنابراین داریم :

$$a^{ij} \eta_i \eta_j = ۱ \qquad (۲.۵)$$

حال می توان قضیه ۱.۱.۴ را در $\mathbb{F}^m$ فوق به کاربرد.بنابراین با استفاده از ۱.۵ در ۱.۴ و ۲.۴ و ۳.۴ وبا توجه به اینکه $\| b \|$ ثابت و $K = ۱$ است، به ترتیب بدست می آوریم :

$$\eta_{i|j} + \eta_{j|i} = ۰ \tag{۳.۵}$$

و $$R_{hijk} = (۱ - \| b \|^{۲})\{a_{hj}a_{ik} - a_{hk}a_{ij}\} + \| b \|^{۲}\{\eta_i\eta_k a_{hj} + \eta_h\eta_j a_{ik} - \eta_i\eta_j a_{hk} - \eta_h\eta_k a_{ij}$$

$$+\eta_{h|k}\eta_{i|j} - \eta_{h|j}\eta_{i|k} + ۲\eta_{h|i}\eta_{k|j}\}. \tag{۴.۵}$$

و

$$\eta_{i|j|k} = \eta_j a_{ik} - \eta_i a_{jk} \tag{۵.۵}$$

تعریف ۲.۱.۵. روی M میدان برداری واحد $\xi = \xi^i(\frac{\partial}{\partial x^i})$ را تعریف می کنیم :

$$\xi^i = a^{ij}\eta_j \tag{۶.۵}$$

آنگاه با استفاده از محاسبات مستقیم ۵.۵ و ۳.۵ و ۶.۵ نتیجه می گیریم :

$$a_{ik}\xi^k_{|j} + a_{jk}\xi^k_{|i} = ۰ \tag{۷.۵}$$

$$a_{ik}\xi^h_{|j|k} = (a_{ik}a_{jh} - a_{jk}a_{ih})\xi^h \tag{۸.۵}$$

تعریف ۳.۱.۵. روی M یک میدان تانسوری φ از نوع (۱.۱) را که مولفه های موضعی آن بصورت زیر است، تعریف می کنیم :

$$\varphi^i_j = -\xi^i_{|j} \tag{۹.۵}$$

وداریم:

$$c = ۱ - ۴\| b \|^۲ \tag{۱۰.۵}$$

و با در نظر گرفتن $۱ >\| b \|> ۰$ نتیجه می گیریم :

$$-۳ < c < ۱ \tag{۱۱.۵}$$

قضیه ۴.۱.۵. [۱۰] هر منیفلد تقریبا مختلط، از بعد زوج است .

۲.۵ قضیه طبقه بندی

به منظور طبقه بندی منیفلدهای راندرز سره با انحنای پرچمی ثابت مثبت و $\theta = ۰$ نیاز به بیان و اثبات چند قضیه است که در ادامه، آورده شده است. با استفاده از c, η, ξ, φ تعریف شده به ترتیب در ۱۰.۵ و ۱.۵ و ۶.۵ و ۹.۵ $a = (a_{ij})$ متر ریمانی روی M می توانیم ساختار $(\varphi, \xi, \eta, a, c)$ را روی M ایجاد کنیم .

حال، قضیه زیر را اثبات می کنیم:

قضیه ۱.۲.۵. فرض کنید $m \geq ۲, \mathbb{F}^m = (M, F, a_{ij}, b_i)$ یک منیفلد راندرز سره $m-$ بعدی با انحنای پرچمی ثابت $K = ۱$ $\theta = ۰,$ روی M باشد . آنگاه m باید یک عدد فرد $۲n + ۱$ بوده و $(\varphi, \xi, \eta, a, c)$ ساختار فرم فضای ساساکی بر M است .

اثبات. ابتدا ،با استفاده از ۳.۵ و ۶.۵ و ۹.۵ بدست می آوریم :

$$\varphi^i_j \varphi^j_k = -a^{ih} a^{js} \eta_{j|h} \eta_{s|k} \tag{۱۲.۵}$$

سپس ،از ۲.۵ نتیجه می گیریم که :

$$a^{is}\eta_{j|h}\eta_s = 0 \qquad (۱۳.۵)$$

در ادامه ،از ۱۳.۵ مشتق کوواریانت می گیریم و با استفاده از ۲.۵ و ۵.۵ داریم :

$$a^{js}\eta_{j|h}\eta_{s|k} = a_{hk} - \eta_h\eta_k$$

بنابراین ۱۲.۵ می شود :

$$\varphi^i_j\varphi^j_k = -\delta^i_k + \xi^i\eta_k \qquad (۱۴.۵)$$

حال با استفاده از ۶.۵ و ۱۲.۵ بدست می آوریم:

$$\varphi^i_j\varphi^j_k X^k = -X^i$$

برای هر $X = X^i(\frac{\partial}{\partial x^i})$ که در $\Gamma(\mathcal{D})$ قرار می گیرد.

بنابراین تحدید φ به $\mathcal{D}$ یک ساختار تقریبا مختلط است.

پس طبق قضیه ۴.۱.۵ تارهای $\mathcal{D}$ باید از بعد زوج باشد و بنابراین $m = 2n+1$.$(n \geq 1)$ در ادامه ، از ۷.۵ و ۶.۵ و ۲.۵ نتیجه می گیریم که روی منیفلد ریمانی (M, a_{ij}) یک میدان برداری کیلینگ واحد ξ وجود دارد . همچنین از ۸.۵ نتیجه می گیریم :

$$\xi^i_{|j|k} = \delta^i_k\eta_j - a_{jk}\xi^i$$

که ۳.۳ را ایجاب می کند.

بنابراین با استفاده از قضیه ۴.۳ داریم . (φ, ξ, η, a) یک ساختار ساساکی روی M است .

سر انجام برای c تعریف شده در ۱۰.۵ بدست می آوریم :

$$\frac{c+3}{4} = 1 - \| b \|^2 \qquad , \frac{1-c}{4} = \| b \|^2$$

بنابراین از ۴.۵ ، ۱۲.۳ را نتیجه می گیریم ،یعنی ، $(\varphi, \xi, \eta, a, c)$ یک ساختار فرم فضای ساساکی روی M است و این اثبات قضیه را کامل می کند . ∎

تعریف ۲.۲.۵. منیفلد راندرز سره $(m \geq 2)\mathbb{F}^m = (M, F, a_{ij}, b_i)$ با انحنای پرچمی ثابت $\theta = 0, K > 0$ را روی M در نظر بگیرید. روی M متر ریمانی a^* و ۱-فرمی b^* را با مولفه های موضعی اش بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$(a) \quad a^*_{ij} = K a_{ij} \quad , \quad (b) \quad b^*_i = \sqrt{K} b_i \tag{۱۵.۵}$$

بر طبق قضیه ۵.۱.۴ متر راندرز

$$F^*(x,y) = \sqrt{K} F(x,y) \tag{۱۶.۵}$$

با انحنای پرچمی $K^* = 1$ است. با استفاده از قضیه ۱.۲.۵ نتیجه می گیریم که $m = 2n+1$ و $(\varphi^*, \xi^*, \eta^*, a^*, c^*)$ ساختار فرم فضای ساساکی است، که در آن a^* متر ریمانی داده شده در ۱۵.۵a است و بقیه بصورت زیر تعریف می شوند :

$$(a) \quad \eta^*_i = \frac{1}{\| b^* \|} b^*_i \qquad (b) \quad \xi^{i*} = a^{ij*} \eta^*_j (c) \quad \varphi^{i*}_j = -\xi^{i*}_{|*j} \qquad (d) \quad c^* = 1 - 4\| b^* \|^2 \tag{۱۷.۵}$$

حال نسبت به متر ریمانی a^* نرم می گیریم و نسبت به الصاق لوی-چویتا تعریف شده با a^* مشتق کوواریانت می گیریم .

با استفاده از ۱۵.۵ عبارت راست فرمولهای ۱۷.۵ برحسب b_i, a_{ij} بازنویسی می کنیم . با استفاده از ۱۵.۵b

بدست می آوریم:

$$\| b^* \|^2 = a^{ij*}b_i^*b_j^* = \frac{1}{K}a^{ij}\sqrt{K}b_i - a^{ij}b_ib_j = \| b \|^2$$

بنابراین داریم :

$$(a)\eta_i^* = \frac{\sqrt{K}}{\| b \|}b_i \qquad (b)\xi^{i*} = \frac{1}{\sqrt{K}\| b \|}a^{ik}b_k$$

$$(c)\varphi_j^{i*} = -\frac{1}{\sqrt{K}\| b \|}a^{ik}b_{k|j} \qquad (d)c^* = 1 - 4\| b \|^2 \tag{۱۸.۵}$$

در ۱۸.۵c از این حقیقت که الصاق های لوی- چویتا a^*, a منطبق هستند، استفاده کردیم.

در مجموع نتایج فوق ، میتوان قضیه زیر را بیان کرد :

قضیه ۳.۲.۵. فرض کنیم $(m \geq 2)\mathbb{F}^m = (M, F, a_{ij}, b_i)$ یک منیفلد راندرز سره $m-$ بعدی با انحنای پرچمی ثابت $\theta = 0, K > 0$ روی M باشد. آنگاه m باید عدد فرد باشد و M یک ساختار فرم فضای ساساکی $(\varphi^*, \xi^*, \eta^*, a^*, c^*)$ تعریف شده در ۱۸.۵ a, ۱۵.۵ می پذیرد.

تعریف ۴.۲.۵. دو منیفلد فینسلری $m-$ بعدی $\mathbb{F}^m = (M, F), \tilde{\mathbb{F}}^m = (\tilde{M}, \tilde{F})$ را ایزومتریک فینسلری گوییم اگر یک دیفئومورفیسم $f : M \longrightarrow \tilde{M}, c^\infty$ وجود داشته باشد طوریکه :

$$F = \tilde{F} \circ df \tag{۱۹.۵}$$

که $df : TM \longrightarrow T\tilde{M}$ نگاشت مشتق f است.

قضیه ۵.۲.۵. (قضیه طبقه بندی سرتاسری) فرض کنید $m \geq 2, \mathbb{F}^m = (M, F, a_{ij}, b_i)$ یک منیفلد راندرز سره $m-$ بعدی باشد که $(M, a = a_{ij})$ منیفلد ریمانی کامل و همبند ساده است .

اگر $\mathbb{F}^m$ با انحنای پرچمی ثابت مثبت $\theta = 0, K$ روی M باشد، آنگاه m باید یک عدد فرد $2n + 1$ بوده

و $(M, F, a_{ij}, b_i) = \mathbb{F}^{2n+1}$ با (c, K)–کره راندرز $c = 1 - 4\| b \|^2$ و $\tilde{F}$ تعریف شده در ۲۷.۴ ایزومتریک فینسلری است .

اثبات . با استفاده از قضیه ۱.۲.۵ می دانیم که m باید یک عدد فرد $2n + 1$ باشد و M یک ساختار فرم فضای ساساکی $(\varphi^*, \xi^*, \eta^*, a^*, c)$ می پذیرد که با توجه به $18.5d$ داریم: $c = 1 - 4\| b \|^2$.

همچنین از همان قضیه نتیجه می گیریم که متر راندرز F بصورت زیر بیان می شود :(ببینید ۱۶.۵)

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{k}}\{\sqrt{a^*_{ij}y^iy^j} + b^*_i(x)y^i\} \tag{۲۰.۵}$$

که b^*_i, a^*_{ij} مولفه های موضعی متر ریمانی a^* از فرم فضای ساساکی $M[c]$ و ۱-فرمی b^* روی M هستند. (ببینید ۱۵.۵) در ادامه ،با استفاده از قضیه ۴.۳.۳ می دانیم که یک دیفئومورفیسم $f : M[c] \longrightarrow S^{2n+1}[c]$ وجود دارد که ساختار فرم فضای ساساکی $(\varphi^*, \xi^*, \eta^*, a^*, c)$ از $M[c]$ را به توی ساختار فرم فضای ساساکی $(\bar{\varphi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{a}, c)$ از $S^{2n+1}[c]$ تعریف شده در ۲۴.۴ می نگارد . بعلاوه متر راندرز $\tilde{F}$ با انحنای پرچمی ثابت K با ۲۷.۴ تعریف می شود:

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{\sqrt{k}}(\sqrt{\bar{a_{ij}}\tilde{y^i}\tilde{y^j}} + \bar{b_i}(\tilde{x})\tilde{y^i} \tag{۲۱.۵}$$

که $(\tilde{x}, \tilde{y})df(x, y)$ برای $(x, y) \in TM$ وحال برطبق ویژگی های f نتیجه می گیریم :

$$a_{ij}(x)y^iy^j = \bar{a}_{ij}(\tilde{x})\tilde{y}^i\tilde{y}^j \tag{۲۲.۵}$$

همچنین با استفاده از $17.5a$ و ۲۵.۴ و در نظر گرفتن اینکه η^* توسط دیفئومورفیسم f تبدیل به $\bar{\eta}$ می شود ، بدست می آوریم :

$$b^*_i(x)y^i = \| b \| \eta^*_i(x)y^i = \| b \| \bar{\eta}_i(\tilde{x})\tilde{y}^i =$$

$$\| b \| \frac{۲}{\sqrt{۱-c}} \bar{b}_i(\tilde{x})\tilde{y}^i = \bar{b}_i(\tilde{x})\tilde{y}^i \qquad (۲۳.۵)$$

از اینکه

$$\| b \| = \frac{\sqrt{۱-c}}{۲}$$

با در نظر گرفتن ۲۰.۵ و ۲۳.۵ نتیجه می گیریم :

$$F(x,y) = \tilde{F}(\tilde{x},\tilde{y}) \qquad \forall (x,y) \in TM$$

یعنی $F^{۲n+۱}$ با $\tilde{F}^{۲n+۱}$ ایزومتریک است . این، اثبات قضیه را کامل می کند .

■

مراجع

[1] S. Bacs'o and M. Matsumoto, On Finsler spaces of Douglas type, a generalization of the notion
of Berwald space, Publ. Math. Debrecen, 51, 1997, 385–406.
[2] D. Bao, S.S. Chern and Z. Shen, An Introduction to Riemann-Finsler Geometry, Graduate Text in Math., 200, Springer, Berlin, 2000.
[3] D. Bao and C. Robles, On Randers spaces of constant flag curvature, Rep. Math. Phys., 51, 2003, 9–42.
[4] D. Bao, C. Robles and Z. Shen, Zermelo navigation on Riemannian manifolds, J. Diff. Geometry,66, 2004, 377–435.
[5] D. Bao and Z. Shen, Finsler metrics of constant positive curvature on the Lie group S3, J. London Math. Soc., 66, 2002, 453–467.
[6] A. Bejancu and H.R. Farran, Randers manifolds of positive constant curvature, Int. J. Math. & Math. Sc., 18, 2003, 1155–1165.
[7] Peter B. Gilkey, The Geometry of Curvature Homogeneous Pseudo-Riemannian Manifolds Vol. 2, Imperial College Press, 2007.
.[8] D.E. Blair, Riemannian Geometry of Contact and sy mplecticManifolds,prodress in Mathematics., 203, Birkhauser, Berlin, 1976.
[9] A. Bejancu and Hani R. Farran,On the Classification of Randers Manifolds of Constant Curvature, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome 52(100) No. 3, 2009, 227–239
[10] K. Nomizu. Invariant affine connec tions on homogeneous spaces. Amer. J. Math [11] R.S. Ingarden, On the geometrically absolute optical representation in the electron microscope, Trav. Soc. Sci. Lettr. Wroclaw, 45, 1957, 3–60.
[12] Z.Shen,Differential Geometry of Spray and finsler Spacees,Department of mathematical sciences,1999.
[13] Z. Shen, Projectively flat Randers metrics with constant flag curvature, Math. Ann., 325, 2003, 19–30.
[14] H. Shimada, Short review of Yasuda-Shimada theorem and related topics, Periodica Math. Hungarica, 48, 2004, 17–24.
[15] Peter W.Michor,Topics in differential geometry, Graduant studies in Mathematics, Vol 93 American Mathematical society, Providence, 2008.
[16] S. Tanno, Sasakian manifolds with constant φ-holomorphic sectional curvature, T˘ohoku Math. J., 21, 1969, 501–507.
[17] H. Yasuda and H. Shimada, On Randers spaces of scalar curvature, Rep. Math. Phys., 11, 1977, 347–360.
[18] J. Douglas, The general geometry of paths, Ann. Math., (2), 29, 1928, 143–168.
[19] K. Yano and M. Kon, Structures on Manifolds, Series in Pure Mathematics, vol. 3, World Scientific Publishing, Singapore, 1984.
[20] John M. Lee, Riemannian ManifoldsAn Introduction to Curvature, Springer, Mathematics Subject Classification (1991): 53-01, 53C20.

فهرست الفبایی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اتحاد بیانچی .... *Bianchi identity*
الصاق لوی-چویتا .... *Levi-Civita connection*
انحنای بروالد .... *Berwald curvature*
انحنای پرچمی ثابت .... *constant flag curvature*
انحنای داگلاس .... *Douglas curvature*
انحنای گاوسی .... *Gauss curvature*
انحنای ریچی .... *Ricci curvature*
انحنای ریمانی .... *Rimannian curvature*
انحنای ویل .... *Weyl curvature*
انحنای φ - برشی .... *φ-sectional curvature*
ایزومتریک فینسلری .... *Finsler isometric*
تانسور اساسی .... *fundamental tensor*
تانسور کارتان .... *Cartan tensor*
تخت تصویری .... *projective flat*
ژئودزیک .... *geodesic*
ساختار تقریبا تماسی .... *almost contact structure*
ساختار تقریبا تماسی نرمال .... *normal almost contact structure,*
ساختار تقریبا مختلط .... *almost complex structure*
ساختار متریک تقریبا مختلط .... *almost contact metric structure*
ضرایب کریستوفل .... *Christoffel cofficient*
فرم فضای ساساکی .... *Sasakian space form*
قضیه چرن .... *Chern's Theorem*
کلاف پول بک .... *pull back bundle*
متر ریمان .... *Rimannian metric*
متر وابسته .... *associated metric*
مشتق کوواریانت .... *covariant derivative*
معادلات ساختاری .... *structure equation*
منیفلد ساساکی .... *Sasakian manifold,*
منیفلد تماسی .... *contact manifold*
منیفلد راندرز سره .... *proper Randers manifold*
منیفلد ریمانی کامل .... *complete Riemannian manifold*
منیفلد فینسلری .... *Finsler manifold*

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

almost complex structure	ساختار تقریبا مختلط
almost contact metric structure	ساختار متریک تقریبا مختلط
almost contact structure	ساختار تقریبا تماسی
associated metric	متر وابسته
Berwald curvature	انحنای بروالد
Bianchi identity	اتحاد بیانچی
Cartan tensor	تانسور کارتان
characteristic vector field	میدان برداری مشخصه
Chern's Theorem	قضیه چرن
Christoffel cofficient	ضرایب کریستوفل
complete Riemannian manifold	منیفلد ریمانی کامل
constant flag curvature	انحنای پرچمی ثابت
contact manifold	منیفلد تماسی
covariant derivative	مشتق کوواریانت
Douglas curvature	انحنای داگلاس
exponential map	نگاشت نمایی
Finsler manifold	منیفلد فینسلری
Finsler isometric	ایزومتریک فینسلری
fundamental tensor	تانسور اساسی
Gauss curvature	انحنای گاوسی
geodesic	ژئودزیک
Levi-Civita connection	الصاق لوی-چویتا
normal almost contact structure	ساختار تقریبا تماسی نرمال
projective flat	تخت تصویری
proper Randers manifold	منیفلد راندرز سره
pull back bundle	کلاف پول بک
Randers (c, K)*-sphere*	(c,K)کره راندرز
Ricci curvature	انحنای ریچی
Rimannian curvature	انحنای ریمانی
Rimannian metric	متر ریمان
Sasakian manifold	منیفلد ساساکی
Sasakian space form	فرم فضای ساساکی

معادلات ساختاری .... *structure equation*
انحنای ویل .... *Weyl curvature*
انحنای φ-برشی .... φ *-sectional curvature*

Abstract

In this thesis,We proceed to state a global classification theorem for a class of proper Randers manifolds of positive constant flag curvature. The model for the classification is the unit sphere $S^{2n+1} endowedwithaSasakianspaceformstructureofconstant$ *φ-sectional curvature c* $\in (-3,1)$.

Keywords: *constant flag curvature, Finsler isometry, Randers manifolds, Randers spheres, Sasakian space forms.*

Shahrood University of thechnology
Faculty of Methematics
Department of pure Mathematics

M.Sc. Thesis

Classification of Randers metrics of constant flag curvature

By:

Nafise Rajabi

Supervisor:
Dr. Hamid-reza Salimi-moghaddam

Advisor:
Mr.Kh. Hosein Zadeh

Desember 2011