
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی مالی

مسأله بهینه‌سازی شانس برای انتخاب بهینه پرتفوی

نگارنده: زهرا مجیدی

استادان راهنما

دکتر علیرضا ناظمی
دکتر سیدمجتبی میرلوحی

بهمن ۱۳۹۹

شماره: ۲۲-۲۰۲-۳۱۴۰
تاریخ: ۱۴۰۰/۲/۷
ویرایش:

باسمه تعالی

فرمهای ارزشیابی پایان نامه کارشناسی ارشد
مربوط به ورودی‌های ۹۴ به بعد

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد **خانم زهرا مجیدی** با شماره دانشجویی **۹۷۱۴۴۹۴** رشته **ریاضی کاربردی** گرایش **ریاضی مالی** تحت عنوان **مساله بهینه سازی شانس برای انتخاب بهینه پرتفوی** که در تاریخ **۱۳۹۹/۱۱/۲۷** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار شد به شرح ذیل اعلام می گردد:

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹ — ۱۸ ☑
ج) درجه خوب: نمره۱۷/۹۹— ۱۶☐ د) درجه متوسط: نمره ۱۵/۹۹-۱۴ ☐
ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐

نوع تحقیق: **نظری** ■ **عملی** ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنمای اول	دکتر علیرضا ناظمی	استاد	
۲- استاد راهنمای دوم	دکتر سیدمجتبی میرلوحی	استادیار	
۳- استاد مشاور	----	----	----
۴- استاد داور اول	دکتر محمدرضا ربیعی	استادیار	
۵- استاد داور دوم	دکتر عبدالمجید عبدالباقی عطاآبادی	استادیار	
۶- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمدهادی نوری اسکندری	استادیار	نوری اسکندری

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تقدیم به پدر بزرگوار و مادر مهربانم آن دو فرشته‌ای که از خواسته‌هایشان گذشتند، سختی‌ها را به جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده‌ام برسم.

سپاس گزاری

نخست خداوند بزرگ و علیم را شاکرم که به من قدرت تفکر و نوشتن داد و تلاش را در وجودم برای یافتن معماهایی هرچند کوچک از علم قرار داد.

بر خود لازم می دانم از استادان فرهیخته و گرامی خویش، آقایان دکتر ناظمی و دکتر میرلوحی که همواره نگارنده را مورد لطف و محبت خود قرار داده اند، کمال تشکر و قدردانی را بجا آورم؛ و از همه عزیزانی که مرا در نوشتن این پایان نامه یاری نمودند، خانواده عزیزم و همچنین جناب آقای گودرزی کمال تشکر را دارم.

زهرا مجیدی
بهمن ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب **زهرا مجیدی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **مسأله بهینه‌سازی شانس برای انتخاب بهینه پرتفوی** ، تحت راهنمایی **علیرضا ناظمی** و **سیدمجتبی میرلوحی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود’’ یا “ Shahrood University of Technology ” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهرا مجیدی
بهمن ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه یک مدل شبکه عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم محدب و سپس حل مسائل بهینه‌سازی سبدسهام در فضای احتمال_اعتبار ارائه می‌شود.
در ابتدا در فصل اول به مرور مقدمات و مفاهیم اولیه ریاضی و مالی و در فصل دوم مفاهیم فازی و نظریه اعتبار پرداخته شده است. در فصل سوم نیز مقدمه‌ای بر شبکه‌های عصبی بازگشتی ارائه شده است. در فصل چهارم شرایط بهینگی را برای مسأله بهینه‌سازی مورد نظر بررسی کرده و سپس یک مدل شبکه عصبی متناظر با آن طراحی شده است. نشان می‌دهیم نقطه تعادل شبکه عصبی معادل جواب بهینه مسأله اصلی است، همچنین مدل شبکه عصبی پیشنهادی پایدار لیاپانوف است و به‌صورت سراسری به جواب بهینه همگراست. در فصل آخر با معرفی فضای احتمال_اعتبار به حل مسأله بهینه‌سازی سبدسهام توسط مقدار ریسک موازنه(ERV) می‌پردازیم. مسأله سبدسهام به‌صورت یک مدل مقدار موردانتظار (EV) فازی_تصادفی در معرض محدودیت ERV ساخته می‌شود. آن را مدل EV − ERV می‌نامیم. مدل EV − ERV یک مسأله برنامه‌ریزی محدب است.
نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که روش بهینه‌سازی موازنه در مقایسه با روش بهینه‌سازی تصادفی از منظر تنوع بهتر است.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی سبدسهام، مسائل مخروط مرتبه دوم محدب، فازی، فازی_تصادفی، شبکه‌های عصبی بازگشتی، مقدار ریسک موازنه(ERV)

فهرست مطالب

فهرست تصاویر س

فهرست جداول ف

۱ مقدمات و مفاهیم اولیه ۱

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ مروری بر برخی از مفاهیم ریاضی ۱

۳.۱ تحدب ۳

۱.۳.۱ شرایط لازم و کافی برای مسائل مقید ۳

۴.۱ احتمال و متغیرتصادفی ۵

۵.۱ مفاهیم مالی ۶

۱.۵.۱ سبدسهام ۶

۲.۵.۱ بازده ۸

۳.۵.۱ ریسک و مفهوم‌آن ۱۱

۴.۵.۱ فرآیند تشکیل سبدسهام ۱۲

۵.۵.۱ بهینه‌سازی سبدسهام ۱۳

۶.۱ انتخاب سبدسهام بهینه ۱۴

۷.۱ مسأله بهینه‌سازی سبدسهام ۱۵

۱.۷.۱ مدل‌های جایگزین ۱۷

۲ نظریه اعتبار و فازی ۱۹

۱.۲ مقدمه ۱۹

۲.۲ مفاهیم فازی ۲۰

۳.۲ اصول نظریه اعتبار ۲۲

۱.۳.۲ تابع عضویت و قضیه اعتبار معکوس ۲۲

۴.۲ امید ریاضی در محیط فازی ۲۵

۵.۲ ارزش در معرض ریسک در محیط فازی ۲۸
۶.۲ استقلال متغیرهای فازی ۳۰
۷.۲ یکنوایی متغیرهای فازی ۳۰

۳ مقدمه‌ای بر شبکه‌های عصبی بازگشتی ۳۱
۱.۳ مروری بر شبکه‌های عصبی ۳۱
۱.۱.۳ شبکه‌های عصبی طبیعی ۳۲
۲.۱.۳ شبکه‌های عصبی مصنوعی ۳۳
۳.۱.۳ تاریخچه‌ای از حل مسائل بهینه سازی با استفاده از شبکه‌های عصبی ۳۵
۴.۱.۳ شبکه‌عصبی بازگشتی ۳۶

۴ یک مدل شبکه عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم محدب ۴۱
۱.۴ مقدمه ۴۱
۲.۴ مدل شبکه عصبی ۴۳
۳.۴ تحلیل پایداری و همگرایی ۴۶
۴.۴ مثال‌های عددی ۵۰

۵ مدل‌سازی مسأله بهینه‌سازی سبدسهام... ۵۵
۱.۵ مقدمه ۵۵
۲.۵ مسأله انتخاب سبدسهام موازنه ۵۹
۱.۲.۵ متغیر فازی_تصادفی ۵۹
۲.۲.۵ تدوین مدل بهینه‌سازی موازنه ۶۰
۳.۵ تحلیل مدل سبدسهام موازنه ۶۲
۱.۳.۵ محاسبه نرخ بازده موردانتظار ۶۲
۲.۳.۵ پردازش مقدار ریسک موازنه ۶۳
۳.۳.۵ محدب بودن ناحیه‌شدنی ۶۴
۴.۵ مدل‌های برنامه‌ریزی محدب معادل ۶۶
۵.۵ مثال‌های عددی و انجام مقایسه ۶۸
۱.۵.۵ توضیح مسأله ۶۸
۲.۵.۵ نتایج محاسباتی ۷۲
۳.۵.۵ مقایسه با روش بهینه‌سازی تصادفی ۷۴
۴.۵.۵ نتیجه‌گیری ۷۸

مراجع ۷۹

فهرست تصاویر

۱.۳ ساختار نرون ۳۲
۲.۳ مدل ریاضی نرون عصبی مصنوعی ۳۴
۳.۳ انواع تابع فعال‌سازی ۳۵

۱.۴ بلوک دیاگرام شبکه عصبی (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴). ۴۶
۲.۴ رفتار پایدار $x_۱(t)$ و $x_۲(t)$ با نقطه شروع $(۱,-۱,۱,-۱,۱)^T = x_\circ$ در مثال ۱.۴.۴ . . . . ۵۱
۳.۴ رفتار پایدار $x_۳(t)$ و $x_۴(t)$ و $x_۵(t)$ با نقطه شروع $x_\circ = (-۱,۱,-۱,۱,-۱)^T$ در مثال ۱.۴.۴ . . . . ۵۱
۴.۴ رفتار همگرایی $\|x(t) - x^*\|^۲$ با نقطه شروع $x_\circ = (-۱,۱,-۱,۱,-۱)^T$ در مثال ۱.۴.۴ . . . . ۵۱
۵.۴ رفتار پایدار $x_۱(t), x_۲(t), x_۳(t), x_۴(t), x_۵(t)$ و $x_۶(t)$ با ۲۰ نقطه شروع مختلف در مثال ۲.۴.۴ . . . . ۵۳
۶.۴ رفتار همگرایی $\|x(t) - x^*\|^۲$ با نقطه شروع $x_\circ = (۱,-۱,۱,-۱,۱)^T$ در مثال ۲.۴.۴ . . . . ۵۳
۷.۴ رفتار پایدار $x_۱(t), x_۲(t)$ و $x_۳(t)$ با نقطه شروع $x_\circ = (\circ,\circ,\circ)^T$ در مثال ۳.۴.۴ . . . . ۵۴
۸.۴ رفتار همگرایی $\|x(t) - x^*\|^۲$ با ۱۰ نقطه شروع مختلف در مثال ۳.۴.۴ . . ۵۴

۱.۵ رابطه بین ERV و EV تحت $\alpha = ۰/۷$ و $\beta = ۰/۸$ ۷۴

فهرست جداول

۱.۱ محاسبه ریسک و بازده با استفاده از داده‌های موردانتظار ۱۰

۱.۵ [توزیع‌های پارامترهای فازی ذوزنقه‌ایμ_i] ۷۱

۲.۵ [نتایج محاسباتی با $\alpha = ۰/۸, \beta = ۰/۸, \kappa = ۰/۰۰۶$] ۷۲

۳.۵ جواب‌های بهینه مدل بهینه‌سازی موازنه تحت مقادیر مختلف پارامترها . ۷۳

۴.۵ [نتایج محاسباتی با $\alpha = ۰/۸, \kappa = ۰/۰۰۶$] ۷۶

۵.۵ جواب‌های بهینه مدل تصادفی تحت مقادیر مختلف پارامترها ۷۷

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف مورد نیاز در فصل‌های بعدی به‌طور مختصر آورده شده است. ابتدا برخی از مفاهیم ریاضی به‌صورت مختصر ارائه شده، سپس تعاریف و قضایای مرتبط با تحدب را بیان کرده و در خصوص مسائل بهینه‌سازی مقید به ذکر شرایط لازم و کافی بهینگی می‌پردازیم و همچنین مروری بر احتمال و متغیر تصادفی داریم و در پایان نیز برخی از مفاهیم مالی را بیان خواهیم کرد.

۲.۱ مروری بر برخی از مفاهیم ریاضی

تعریف ۱.۲.۱. برای تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ و مجموعه $X\subseteq\mathbb{R}^n$، اگر $\bar{x}\in X$ و $\varepsilon-$ همسایگی از $\bar{x}$ مثل $N_\varepsilon(\bar{x})$ موجود باشد که به ازای هر $x\in X\cap N_\varepsilon(\bar{x})$ داشته باشیم $f(\bar{x})\leq f(x)$ آنگاه $\bar{x}$ یک کمینه موضعی برای f در مجموعه X است.

تعریف ۲.۲.۱. تابع $\|.\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ را تابع نرم گوییم هرگاه

$$\begin{cases}\|X\|\geqslant 0 \quad \forall\, X\in\mathbb{R}^n\\ \|X\|=0\Leftrightarrow X=0\\ \|\alpha X\|=|\alpha|\|X\|\\ \|X+Y\|\leqslant\|X\|+\|Y\|\end{cases}$$

برخی نرم‌ها برای بردار $X\in\mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\|X\|_1=|x_1|+\cdots+|x_n|$$
$$\|X\|_2=\sqrt{x^Tx}=\sqrt{{x_1}^2+\cdots+{x_n}^2}$$
$$\|X\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1\leq p<\infty$$

تعریف ۳.۲.۱. ماتریس $M(X)$ در اندازه $n\times n$ که عناصر آن $m_{i,j}\ (i,j=1,...,n)$ تابعی روی $E\subset\mathbb{R}^n$ می‌باشد،

۱. نیمه معین مثبت[1] روی E نامیده می‌شود، اگر

$$\forall\, V\in\mathbb{R}^n\ \ X\in E \qquad V^TM(X)V\geq 0$$

۲. معین مثبت[2] روی E نامیده می‌شود، اگر

$$\forall\, V\in\mathbb{R}^n\ \ V\neq 0\ \ X\in E \qquad V^TM(X)V>0$$

۳. معین مثبت قوی روی E نامیم، اگر عددی مثبت مانند α وجود داشته باشد به‌طوریکه

$$\forall\, V\in\mathbb{R}^n\ \ X\in E \qquad V^TM(X)V\geq\alpha\|V\|^2$$

تعاریف فوق را می‌توان بر اساس مفهوم مقدار ویژه نیز ارائه داد. اگر γ کوچکترین مقدار ویژه ماتریس $M(X)_{n\times n}$ باشد آنگاه:

۱. $M(X)_{n\times n}$ روی E نیمه معین مثبت است اگر و فقط اگر به ازای هر $X\in E$، $\gamma\geq 0$.

۲. $M(X)_{n\times n}$ روی E معین مثبت است اگر و فقط اگر به ازای هر $X\in E$، $\gamma>0$.

۳. $M(X)_{n\times n}$ روی E معین مثبت قوی است اگر و فقط اگر عدد مثبت α وجود داشته باشد که به ازای هر $X\in E$، $\gamma\geq\alpha>0$.

---
[1] Positive Semidefinite
[2] Positive Ddefinite

۳.۱ تحدب

در توسعه برنامه‌ریزی غیرخطی، تابع محدب[1] همواره به‌عنوان یک مفهوم اصلی ریاضی مورد نیاز است.

تعریف ۱.۳.۱. مجموعه $E \subset \mathbb{R}^n$ را محدب می‌گوییم اگر:

$$\forall x, y \in E \ \ \lambda \in (0, 1) \qquad \lambda x + (1 - \lambda) y \in E$$

تعریف ۲.۳.۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ بر روی یک مجموعه نقاط واقع در یک مجموعه محدب $E \subset \mathbb{R}^n$ یک تابع محدب نامیده می‌شود اگر:

$$\forall\ x, y \in E \ \ \lambda \in (0, 1) \qquad f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

تابع f را روی E مقعر گوییم هر گاه $-f$ محدب باشد.

قضیه ۱.۳.۱. ([۴]): فرض کنید S یک مجموعه محدب[2] باز ناتهی در $\mathbb{R}^n$ و $f : S \to \mathbb{R}$ روی S مشتق‌پذیر باشد. در این صورت f محدب است، اگر و تنها اگر $\forall \bar{x} \in S$ داشته باشیم:

$$f(x) \ge f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

قضیه ۲.۳.۱. ([۴]): فرض کنید S یک مجموعه محدب باز ناتهی در $\mathbb{R}^n$ و $f : S \to \mathbb{R}$ روی S دو بار مشتق‌پذیر باشد. در این صورت f محدب است، اگر و تنها اگر ماتریس هسین[3] f در هر نقطه $x \in S$ نیمه معین مثبت باشد.

۱.۳.۱ شرایط لازم و کافی برای مسائل مقید

قضیه ۳.۳.۱. (شرایط لازم کروش‌ـ کان‌ـ تاکر[4] (K.K.T)،[۴]): فرض کنید X یک مجموعه باز ناتهی در $\mathbb{R}^n$ باشد. مسأله کمینه‌سازی مقید زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g_k(x) \le 0 \quad k = 1, ..., m \\ & x \in X \end{cases} \tag{۱.۱}$$

که در آن توابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. فرض کنید x^* یک جواب شدنی مسأله (۱.۱) باشد و $K = \{k : g_k(x^*) = 0\}$. همچنین فرض کنید f و g_k برای $k \in K$ در x^* مشتق‌پذیر و g_k برای $k \notin K$ در x^* پیوسته باشند. بعلاوه فرض کنید $\nabla g_k(x^*)$ برای $k \in K$ مستقل خطی

[1] Convex Function
[2] Convex Set
[3] Hessian Matrix
[4] Krvsh-Kuhn-Tucker

باشند. اگر x^* کمینه موضعی برای (۱.۱) باشد، آنگاه اسکالر یکتای u_k برای $k \in K$ وجود دارد به‌طوریکه:

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{k\in K} u_k \nabla g_k(x^*) = 0 \\ u_k \geq 0 \quad k \in K \end{cases} \tag{۲.۱}$$

علاوه بر فرض‌های بالا اگر g_k برای $k \notin K$ در x^* مشتق‌پذیر باشد، آنگاه شرایط K.K.T می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{k=1}^{m} u_k \nabla g_k(x^*) = 0 \\ u_k g_k(x^*) = 0 \quad k = 1, ..., m \\ u_k \geq 0 \quad k = 1, ..., m \end{cases} \tag{۳.۱}$$

همچنین شرایط K.K.T (۳.۱) می‌تواند به‌فرم ماتریسی به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)^T u = 0 \\ u \geq 0, \quad u^T g(x^*) = 0 \end{cases} \tag{۴.۱}$$

که در آن $\nabla g(x^*)$ ماتریس ژاکوبی $m \times n$ و u یک بردار m تایی است. $({u^*}^T)^T$ بردار ضرایب لاگرانژ[1] نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۳.۱. x^* را نقطه K.K.T گویند اگر در شرایط زیر صدق کند.

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)^T u = 0 \\ u^T g(x^*) = 0 \\ u \geq 0 \\ g(x^*) \leq 0 \end{cases} \tag{۵.۱}$$

تعریف ۴.۳.۱. در مسأله (۱.۱) اگر f و g_k، $(k = 1, ..., m)$ محدب باشند آنگاه مسأله (۱.۱) را یک مسأله بهینه‌سازی محدب گویند.

ملاحظه ۱.۳.۱. ([۴]): قضیه (۳.۳.۱) شرط لازم است به این معنی که اگر (x^*, u) در (۵.۱) صدق کند، لزوما x^* جواب بهینه نیست.

ملاحظه ۲.۳.۱. ([۴]): قضیه (۳.۳.۱) برای مسائل بهینه‌سازی محدب شرط لازم و کافی بهینگی می‌باشد، یعنی با حل کردن (۵.۱)، x^* به‌دست آمده جواب بهینه مسأله (۱.۱) و u به‌دست آمده جواب بهینه مسأله دوگان نظیر آن است.

[1] Lagrange Multipliers

۴.۱ احتمال و متغیرتصادفی

مطالب این بخش از [۲۸] گرفته شده است، برای اطلاعات بیشتر می‌توانید به منبع ذکر شده مراجعه نمایید.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید Ω یک مجموعه ناتهی از همه نتایج یک آزمایش تصادفی باشد. $\mathcal{A}$ مجموعه ناتهی از زیر مجموعه‌های Ω باشد، یک $\sigma-$جبر نامیده می‌شود اگر دارای سه ویژگی زیر باشد: (i) $\Omega \in \mathcal{A}$؛ (ii) اگر $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ آنگاه $\mathrm{A^C} \in \mathcal{A}$؛ (iii) اگر $\mathrm{A_n} \in \mathcal{A}$ و $\mathrm{A_n}$ یک دنباله شمارا باشد، آنگاه $\bigcup_n \mathrm{A_n} \in \mathcal{A}$.
هر عنصر از $\mathcal{A}$ یک پیشامد نامیده می‌شود. تابع Pr، ($\mathrm{Pr} : \mathcal{A} \to [۰,۱]$) یک اندازه احتمال نامیده می‌شود اگر

- اصل ۱(نرمال بودن): $\mathrm{Pr}(\Omega) = ۱$
- اصل۲(نامنفی بودن): برای هر $A \in \mathcal{A}$، $\mathrm{Pr}\{\mathcal{A}\} \geq ۰$
- اصل۳(اصل جمع‌پذیری شمارا): برای هر دنباله شمارا از پیشامدهای دوبه‌دو مجزا $\{A_i\}_{i=۱}^{\infty}$ در A داریم: $\mathrm{Pr}\{\bigcup_i A_i\} = \sum_i \mathrm{Pr}\{A_i\}$

مقدار $\mathrm{Pr}\{A\}$ مقدار احتمالی پیشامد A را نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۴.۱. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ناتهی، $\mathcal{A}$ یک $\sigma-$جبر از زیرمجموعه‌های Ω و Pr اندازه احتمال باشد. آنگاه داریم:

۱. $\mathrm{Pr}\{\emptyset\} = ۰$

۲. $۰ \leq \mathrm{Pr}\{A\} \leq ۱$ برای هر $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$

۳. Pr صعودی است، اگر $A \subset B$ آنگاه $\mathrm{Pr}\{A\} \leq \mathrm{Pr}\{B\}$

۴. Pr خود دوگان است، برای هر $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ داریم: $\mathrm{Pr}\{A\} + \mathrm{Pr}\{A^c\} = ۱$

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ناتهی، $\mathcal{A}$ یک $\sigma-$جبر از زیرمجموعه‌های Ω و Pr اندازه احتمال باشد. آنگاه سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ فضای احتمال نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۴.۱. متغیر تصادفی یک تابع اندازه‌پذیر از فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ به اعداد حقیقی تعریف می‌شود.

ملاحظه ۱.۴.۱. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{A}$ یک $\sigma-$جبر از زیرمجموعه‌های Ω باشد. آنگاه $(\Omega, \mathcal{A})$ را فضای اندازه‌پذیر و مجوعه $\mathcal{A}$ نیز مجموعه اندازه‌پذیر نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۴.۱. ([۳]): برای هر بردار $\mu \in \mathbb{R}^p$ و ماتریس متقارن نیمه معین مثبت ψ از $p \times p$، یک توزیع نرمال چندمتغیره منحصربفرد با بردار میانگین μ و ماتریس کواریانس ψ وجود دارد.

قضیه ۳.۴.۱. (تجزیه چولسکی [۳]): فرض کنید A متقارن معین مثبت $p \times p$ باشد. آنگاه ماتریس پایین مثلثی منحصربفرد C با ورودی‌های قطری مثبت وجود دارد به‌طوریکه $\mathrm{A} = \mathrm{CC}^T$، این تجزیه چولسکی (یا فاکتورسازی) یک ماتریس متقارن معین مثبت است. (هر ماتریس نیمه معین مثبت را می‌توان به‌صورت حاصلضرب یک ماتریس غیرمنفرد و پایین مثلثی در ترانهاده‌اش نوشت.)

حال به بیان برخی مفاهیم مالی می‌پردازیم که برای اطلاعات بیشتر می‌توانید به [۲] مراجعه نمایید.

۵.۱ مفاهیم مالی

سرمایه‌گذاری[۱] عبارت است از تبدیل وجوه مالی به یک یا چند نوع دارایی که برای مدتی در زمان آتی نگهداری خواهد شد. در علم مالی، سرمایه‌گذاری به این معنی است که فرد یک دارایی مالی نظیر سهام را میخرد و پیش‌بینی می‌کند که آن دارایی مالی در آینده سودآور خواهد بود و قیمتش افزایش خواهد یافت لذا با فروش به قیمت بالاتر سود به‌دست خواهد آورد. در این پایان‌نامه منظور از ''سرمایه‌گذاری'' سرمایه‌گذاری در دارایی‌های مالی به‌خصوص اوراق‌بهادار قابل معامله است. در سرمایه‌گذاری دو ویژگي متفاوت و مهم وجود دارد که عبارتند از زمان و ریسک. اهمیت دو موضوع یاد شده به این علت است که در سرمایه‌گذاری صرف پول در زمان حال صورت می‌گیرد و مقدار آن معین است، در حالیکه پاداش حاصل از آن در آینده به‌دست می‌آید و معمولاً با عدم اطمینان همراه است. در بعضی مواقع، ویژگی زمان غالب می‌شود (مانند اوراق قرضه دولتی) و در بعضی مواقع ریسک از نظر اهمیت مقدم است (مانند برگه اختیار خرید سهام عادی) و در مواقع دیگر هر دو دارای اهمیت هستند (مانند سهام عادی).

۱.۵.۱ سبدسهام

تعریف ۱.۵.۱. **سبدسهام** یا **پُرتفُوی**[۲] به ترکیبی از سهام یا سایر دارایی‌ها گفته می‌شود که توسط یک سرمایه‌گذار برای سرمایه‌گذاری تشکیل می‌شود. هدف از تشکیل سبدسهام، تقسیم کردن ریسک سرمایه‌گذاری بین چند سهم است؛ تشکیل سبدسهام به‌طورکلی به کاهش ریسک و افزایش بازدهی سرمایه‌گذاری شما کمک می‌کند. بدین ترتیب تنوع‌بخشی در سرمایه‌گذاری کار هوشمندانه‌ای محسوب می‌شود چون سود یک سهم می‌تواند ضرر سهام دیگر را جبران کند. یک ضرب‌المثل معروف می‌گوید: «همه تخم‌مرغ‌ها را در یک سبد نگذارید.»، چرا که ریسک شکستن سبد، باعث نابودی همه تخم‌مرغ‌ها خواهد شد.

[1] Investment
[2] Portfolio

تعریف ۱.۵.۲. دارایی[1]، عبارت است از کلیه اموال و اوراقی که دارای ارزش پولی هستند. دارایی‌های یک واحد، ممکن است پدیده‌های عینی و مشهود مثل زمین، ساختمان، موجودی نقد و طلا و نقره و مواردی ازاین قبیل باشد که به آن دارایی‌های واقعی[2] می‌گویند؛ و یا به‌صورت دارایی‌های مالی و امتیازات غیرقابل روئیت مثل سرقفلی و مطالبات از اشخاص باشد. دارایی‌های مالی[3] به‌صورت اوراقی است که توسط دولت‌ها و شرکت‌ها منتشر می‌شود. به عبارتی دیگر به منابعی که دارای ارزش اقتصادی هستند و افراد، شرکت‌ها یا دولت‌ها مالکیت آن را در اختیار می‌گیرند و انتظار دارند آن منابع در آینده منافعی را برای آن‌ها ایجاد کنند، دارایی گفته می‌شود. دو نوع دارایی داریم:

۱. **دارایی ریسکی**[4]: به دارایی گویند که در مورد بازده آن اطمینان نداریم. این عدم اطمینان را به‌وسیله واریانس (انحراف معیار و ...) بازدهی‌های موردانتظار نشان می‌دهیم، مانند سهام، اوراق قرضه غیر دولتی، ارز و طلا و ... .

۲. **دارایی بدون ریسک**[5]: دارایی که دارای یک بازدهی آتی است، دراین حالت ریسک سرمایه‌گذاری صفر است و بازده آن به‌حدی امن است که بسیار نزدیک به نرخ بهره فعلی است، مانند سپرده بانکی.

تعریف ۱.۵.۳. تخصیص دارایی[6]، فرآیندی که در آن تقسیم منابعی مالی بین گروه‌های مختلف دارایی مانند سهام، اوراق مشارکت، صندوق‌های سرمایه‌گذاری، املاک و مستغلات، سپرده‌گذاری و دیگر مکان‌های سرمایه‌گذاری انجام می‌گیرد. هر کدام از گروه‌های سرمایه گذاری نیز بهتر است به تنهایی، به زیرشاخه‌های متنوعی تقسیم شود. مثلا اگر ۴۰ درصد سرمایه را به سهام بورسی اختصاص داده‌اید، توصیه می‌شود این ''تخصیص دارایی'' را جهت خرید سهام گوناگون به‌کار گیرید. هدف تخصیص دارایی، کاهش ریسک بوسیله متنوع‌سازی سبد سرمایه می‌باشد.

تعریف ۱.۵.۴. افق سرمایه‌گذاری[7]، چارچوب زمانی و عامل کلیدی برای اتخاذ استراتژی سرمایه‌گذاری به‌حساب می‌آید. میزان زمانی که باید پس‌انداز و سرمایه‌گذاری کرد را مشخص می‌کند و بر تصمیمات تخصیص دارایی موثر است.

تعریف ۱.۵.۵. هزینه معامله[8]، آن دسته از هزینه‌هایی است که افراد در فرآیند مبادله اقتصادی متحمل می‌شوند تا حقوق مالکیت خود را مشخص، تعریف و تضمین کنند. مانند هزینه‌های کسب اطلاعات درباره‌ی فروشنده، خریدار و کیفیت کالا یا خدمتی که مبادله می‌شود، هزینه‌های عقد قرارداد و نظارت بر عملکرد طرف مقابل و از همه مهم‌تر هزینه‌های مربوط به تعریف حقوق مالکیت و تضمین اعمال این حقوق می‌باشد.

[1] Asset
[2] Real Asset
[3] Financial Asset
[4] Risky Asset
[5] Riskless Asset
[6] Asset Allocation
[7] Investment horizon
[8] Transaction Cost

در مسأله‌ی سبدسهام تک دوره‌ای، فرض می‌شود که سرمایه‌گذار تصمیم به تخصیص دارایی‌ها برای یک بار و برای n دارایی موجود، در ابتدای دوره‌ی موردنظر قرار می‌گیرد. تصمیم‌گیری فقط یک بار انجام می‌شود و اجازه‌ی بازنگری تا انتهای دوره وجود ندارد و اثر تصمیمات بر دوره‌های بعدی مورد توجه قرار نمی‌گیرد. مسائل تک دوره‌ای بر پایه سه فرض محدود کننده بنا شده‌اند:

- افق سرمایه‌گذاری کوتاه مدت است.
- هزینه معاملات در بازار در نظر گرفته نشده است.
- پارامترهای مسأله به‌صورت قطعی و از قبل معلوم هستند.

درحالیکه مسائل سبدسهام چند دوره‌ای[۱] کلی‌تر هستند به‌طوریکه سرمایه‌گذار یک رشته تصمیم‌گیری انجام می‌دهد که هر تصمیم بر روی تصمیمات بعدی اثر گذار است. هدف پیدا کردن تصمیم‌گیری برای تخصیص در هر دوره با در نظر گرفتن یک مجموعه از فرصت‌های تغییر در آینده افق سرمایه‌گذاری باقی‌مانده، هزینه‌های معاملات نهایی و دیگر محدودیت‌ها است.

تعریف ۶.۵.۱. سبد خودتأمین[۲]، سبد مالی است که تأمین‌مالی و برداشت ندارد. یعنی اگر از محتوای سبد دارایی فروخته شود می‌توان دارایی جدیدی خرید. در واقع به سبد خودتأمین پولی تزریق نمی‌شود و همچنین پولی از آن برداشت نمی‌شود و تنها تغییر در ارزش سبدسهام است.

چرا سرمایه گذارای می کنیم؟ در یک عبارت ساده می‌توان گفت که سرمایه‌گذاران می‌خواهند از پول خود سودی کسب نمایند. وجه‌نقد دارای یک هزینه فرصت از دست رفته است، در صورتی که یک وجه نقد را نگهداری کنید فرصت کسب سود از طریق آن وجه نقد را از دست خواهید داد. بعلاوه، در یک فضای تورمی قدرت خرید پول کاهش می‌یابد، به عبارت دیگر وقتی نرخ تورم بالا باشد قدرت خرید به سرعت کاهش می‌یابد.

۲.۵.۱ بازده

بازده در فرآیند سرمایه‌گذاری نیروی محرکی است که ایجاد انگیزه می‌کند و پاداشی برای سرمایه‌گذاران محسوب می‌شود. بازده ناشی از سرمایه‌گذاری برای سرمایه‌گذاران حائز اهمیت است، برای اینکه تمامی روند سرمایه‌گذاری به منظور کسب بازده صورت می‌گیرد. **بازده** [۳] در واقع عواید سرمایه‌گذاری است که به‌صورت درصدی از سرمایه‌گذاری اولیه بیان می‌شود. عواید سرمایه‌ای درعلم اقتصاد و حسابداری به میزان سودی اطلاق می‌شود، که با فروش یک

[1] Multi-period portfolio
[2] Self-financing
[3] Return

قلم دارایی(مانند برگه سهام،اوراق قرضه یا املاک و مستغلات) به قیمتی بالاتر از قیمت خرید دارایی مذکور، به‌دست می‌آید. در مورد دارایی‌ها و مخصوصاً سهام، بازده از دوجزء تشکیل شده‌است:

۱. بازده ناشی از تغییر قیمت[1]، این جزءاز اختلاف بین قیمت خرید دارایی و فروش دارایی حاصل می‌شود.

۲. بازده ناشی از دریافت سود[2]، این بازده ناشی از صورت جریانات نقدی دریافتی به دلیل تملک دارایی در طول سرمایه‌گذاری است (همانند سود تقسیمی).

از طرف دیگر تعیین تفاوت میان بازده تحقق یافته و بازده موردانتظار از اهمیت بالایی برخوردار است. **بازده تحقق یافته**[3] بازده‌ای است که مربوط به گذشته بوده و واقع شده است، یا بازده‌ای است که کسب شده است، در واقع بازده تحقق یافته بازده‌ای است که به وقوع پیوسته است. **بازده موردانتظار**[4] عبارت است از بازده تخمینی یک دارایی که سرمایه‌گذاران انتظار دارند در یک دوره‌ی آینده به‌دست آورند. بازده‌ی موردانتظار با عدم اطمینان همراه است و احتمال برآورده نشدن آن نیز وجود دارد.

مثال ۱.۵.۱. فرض کنید مدتی قبل ۱۰۰۰ سهم شرکتی را خریده‌اید. در پایان سال مالی در مجمع عمومی سالیانه شرکت به هرسهم ۵۰ تومان سودنقدی تعلق می‌گیرد. همین‌طور شما سهم را در قیمت ۲۲۰ تومان خریده‌اید و حالا ۲۶۰ تومان شده است. بازده نقدی شما عبارت است از:

$$۱۰۰۰ \times \{(۲۶۰ - ۲۲۰) + ۵۰\} = ۹۰۰۰۰$$

اما معمولاً وقتی صحبت از بازده می‌شود، منظور نرخ بازده است که به‌صورت درصدی بیان می‌شود. چنانچه بخواهیم بازده درصدی یا نرخ بازده سرمایه‌گذاری را به‌دست آوریم لازم است بازده نقدی را بر سرمایه‌گذاری اولیه تقسیم کنیم. نرخ بازده مثال فوق عبارت است از:

$$\frac{(۲۶۰ - ۲۲۰) + ۵۰}{۲۲۰} = \frac{۹۰}{۲۲۰} = ۴۱\%$$

تعریف ۷.۵.۱. نرخ بهره[5] عبارت است از نرخی که بابت جلوگیری از کاهش ارزش پول پرداختی در امروز و دریافتی در آینده (به‌دلیل ارزش زمانی و نرخ تورم) از وام‌گیرنده دریافت می‌شود. به‌بیان ساده‌تر، وقتی شما از بانک مبلغی به‌عنوان وام قرض می‌گیرید، آن را به‌صورت تدریجی بازپرداخت می‌کنید. ولی از آنجایی که ارزش پول به مرور زمان تغییر می‌کند، به‌منظور کاهش ارزش پول و لحاظ تورم، شما باید علاوه بر وام دریافتی، مبلغ اضافه‌ای را تحت عنوان بهره به بانک بپردازید. هرگاه تورم قیمت‌ها در اقتصاد وجود داشته باشد، ارزش واقعی مبلغ وام تا زمان سررسید به‌نسبت میزان تورم کاهش خواهد یافت. بدین ترتیب برای جبران خطر کاهش قدرت خرید پول وام‌دهنده، وجود نرخ بهره ضرورت می‌یابد.

[1] Capital Gain
[2] Dividend Yeild
[3] Realized Return
[4] Expected Return
[5] Interest Rate

مثال ۲.۵.۱. ارزش یک سرمایه‌گذاری ۱۰۰ دلاری در یکم ژانویه ۱۹۹۳ با نرخ بهره‌ی سالانه $۵\frac{۱}{۴}$ درصد در سال بعد ۱۰۵/۲۵ دلار خواهد بود، بازده‌ی تحقق یافته یا واقعی سالانه نیز ۵/۲۵ درصد می‌باشد.

بازده موردانتظار هر سهم

با معلوم بودن توزیع احتمال برای بازده سهام، بازده موردانتظار برای سهام iام با $\mathrm{E}(R_i)$ نشان داده شده و به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathrm{E}(R_i) = \sum_{k=۱}^{m} x_k P(x_k)$$

که در آن، x_k بازده سهم iام و $P(x_k)$ احتمال وقوع آن است.

بازده موردانتظار سبد سرمایه

در صورتی که سبد سرمایه با n دارایی داشته باشیم که وزن دارایی iام در آن w_i باشد، بازده موردانتظار سبد سرمایه با $\mathrm{E}(R_p)$ نشان داده می‌شود و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathrm{E}(R_p) = \sum_{i=۱}^{n} w_i \mathrm{E}(R_i)$$

مثال ۳.۵.۱. نرخ بازده ممکن حاصل از۵ میلیون ریال سرمایه گذاری در سهام شرکت A عبارتست از:

جدول ۱.۱: محاسبه ریسک و بازده با استفاده از داده‌های موردانتظار

بازده (x_k)	احتمال $(P(x_k))$	$x_k P(x_k)$	$(x_k - E(R_i))$	$(x_k - E(R_i))^۲ P(x_k)$	$w_i \mathrm{E}(R_i)$
−۵	۰/۲	−۱	−۲۴	۱۱۵/۲	−۹۵
۲۰	۰/۶	۱۲	۱	۰/۶	۳۸۰
۴۰	۰/۲	۸	۲۱	۸۸/۲	۷۶۰

با توجه به اطلاعات فوق، نرخ بازده موردانتظار $E(R_i)$ سهم A به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(R_i) = \sum_{k=۱}^{m} x_k P(x_k) = (-۵ \times ۰/۲) + (۲۰ \times ۰/۶) + (۴۰ \times ۰/۲۰) = ۱۹$$

محاسبه ریسک به‌صورت زیراست:

$$S = \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} (x_k - E(R_i))^۲ P(x_k)} = \sqrt{۲۰۴} = ۱۴/۲۸$$

و محاسبه بازده موردانتظار سبد سرمایه به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{E}(R_p) = \sum_{i=۱}^{n} w_i \mathrm{E}(R_i) = ۱۰۴۵$$

۳.۵.۱ ریسک و مفهوم‌آن

ریسک[۱] وضعیتی می‌باشد که تعداد برآوردهای ممکن بیش از یک وضعیت باشد و به‌طور ساده می‌توان ریسک را عدم اطمینان به نتایج آتی تعریف کرد. شرایط ریسکی نیز وضعیتی است که در سرمایه‌گذاری ارزش پایانی دوره بیش از یک وضعیت باشد. ریسک در بازارهای مالی مفهوم کلیدی است، از این رو می‌بایست آن را شناخت، اندازه‌گیری کرد و برای حذف ریسک‌های غیرضروری برنامه‌ریزی و ریسک‌های همراه با فرصت را مدیریت نمود. ریسک پدیده‌ای مربوط به آینده است که نمی‌توان آن را به‌طور دقیق پیش‌بینی کرد، زیرا با عدم اطمینان همراه است. هرچه عدم اطمینان[۲] بیشتر باشد، ریسک نیز بیشتر خواهد بود. در بازارهای مالی به‌همراه هر فرصتی ریسکی هم وجود دارد و اصولا نمی‌توان از همه ریسک‌ها چشم‌پوشی کرد زیرا کلیه فرصت‌ها از بین می‌روند. در گام نخست هر سرمایه‌گذاری می‌داند که برای کسب بازدهی بیشتر می‌بایست سطح ریسک پذیری خود را افزایش دهد. ریسک در یک طبقه‌بندی کلی، به دو دسته تقسیم می‌شود:

ریسک سیستماتیک ریسک غیرقابل حذف و غیرقابل اجتناب است که ناشی از تحولات کلی بازار و اقتصاد بوده و مختص یک شرکت خاص نمی‌باشد، بر یک سرمایه‌گذاری (مثلاً قیمت سهام شرکت‌ها) تأثیر دارد و مدیریت آن از دست مدیران شرکت‌ها خارج است مثل جنگ، تحریم‌های سیاسی_اقتصادی، نرخ بهره، تورم و...

ریسک غیر سیستماتیک ریسکی قابل کنترل و حذف است که ناشی از عوامل کلان حاکم بر یک بازار نیست و به ساختار یک شرکت یا بنگاه اقتصادی مربوط می‌شود. برای مثال ساختار سرمایه شرکت، نوع محصول (کالا یا خدمات)، تصمیم‌گیری در شرایط مختلف و ... که این ریسک را می‌توان از طریق تنوع‌بخشی در سبدسهام کاهش داد.

از مهم‌ترین عوامل مؤثر در انتخاب گزینه‌های سرمایه‌گذاری، میزان پذیرش ریسک سرمایه‌گذار است. به‌طور کلی می‌توان سرمایه‌گذاران را به دو گروه **ریسک‌پذیر**[۳] و **ریسک‌گریز**[۴] تقسیم کرد. سرمایه‌گذار ریسک‌پذیر، سرمایه‌گذاری است که مقدار بازده معینی را انتظار دارد و هدفش کمینه‌کردن[۵] ریسک است و ریسک‌گریز کسی است که با هدف بیشترین بازده، برای یک سطح مشخص از ریسک سرمایه‌گذاری می‌کند. مهمترین مسأله در ریسک، محاسبه سنجش آن است. تاکنون معیارهای مختلفی برای تعیین ریسک معرفی شده است.

[1] Risk
[2] Unreliability
[3] Risk Taker
[4] Risk Avers
[5] Minimum

تعریف ۱.۵.۸. انحراف معیار[1] برای تخمین ریسک کل بازده موردانتظار، از انحراف معیار استفاده می‌شود.

$$S = \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} (x_k - E(R_i))^۲ P(x_k)}$$

که در آن، x_k بازده سهم iام و $P(x_k)$ احتمال وقوع آن و $E(R_i)$ بازده موردانتظار هرسهم است.

تعریف ۱.۵.۹. ارزش در معرض ریسک[2] یک معیار برای اندازه‌گیری و تعیین میزان ریسک مالی، در یک شرکت و یا سبدسهام سرمایه‌گذاری در یک دوره زمانی مشخص است. به‌طور کلی می‌توان گفت ارزش در معرض ریسک بیشترین مقدار زیان موردانتظار را در یک افق زمانی (یک روز، یک هفته، یک ماه و...) مشخص در سطح اطمینانی معین اندازه‌گیری می‌نماید.

مثال ۱.۵.۴. سبد شرکتی متشکل از ۵ میلیون دلار سهام فولاد مبارکه است. نوسان‌پذیری روزانه سهام فولاد مبارکه، یک درصد است. می‌توان نشان داد که انحراف معیار ارزش سبد در یک روز عبارت است از:

$$۵۰۰۰۰۰۰ \times ۰/۰۱ = ۵۰۰۰۰$$

با فرض اینکه این تغییر دارای توزیع نرمال است، VaR یک روزه با سطح اطمینان ۰/۹۹ عبارت است از:

$$\mathrm{VaR} = ۵۰۰۰۰ \times ۲/۳۳ = ۱۱۶۵۰۰$$

و VaR ده روزه با سطح اطمینان ۰/۹۹ نیز به شرح ذیل خواهد بود:

$$۱۱۶۵۰۰ \times \sqrt{۱۰} = ۳۶۸۴۰۵$$

درجه تنوع

تنوع [3]، یک تکنیک مدیریت ریسک، آمیزه‌ای از سرمایه‌گذاری‌های مختلف در یک سبدسهام است. منطق پشت این تکنیک معتقد است که یک سبدسهام ساخته شده از انواع مختلف سرمایه‌گذاری، به‌طور متوسط بازده بالاتر و ریسک پایین‌تری نسبت به هر سرمایه‌گذاری تکی دارد. تنوع، تلاش می‌کند که حوادث ریسک غیر سیستماتیک در یک سبدسهام را کنترل کند به‌نحوی که عملکرد مثبت برخی از سرمایه‌گذاری‌ها را با عملکرد منفی سرمایه‌گذاران دیگر خنثی کند.

۱.۵.۴ فرآیند تشکیل سبدسهام

اولین مرحله در انتخاب و ایجاد سبدسهام، تجزیه و تحلیل اوراق بهادار است. تجزیه و تحلیل اوراق بهادار، دربرگیرنده تخمین مزایا و ریسک تک‌تک سهم‌ها است. سرمایه‌گذاران این مرحله

[1] Standard Deviation
[2] Value At Risk
[3] Diversification

را به تصمیم‌گیران و کارشناسان خبره واگذار می‌کنند. از آنجا که مجموعه سهم‌های هر سرمایه‌گذار با توجه به شرایطی چون ریسک، میزان نقدینگی و افق زمانی متفاوت خواهد بود، لذا تصمیم‌گیران در هر دوره، اهمیت معیارهای ریسک و بازده را در سهم‌ها ارزیابی نموده و میزان ریسک و بازده موردانتظار هر یک را می‌سنجند. مرحله دوم، مدیریت سبدسهام است که شامل تجزیه و تحلیل ترکیب سرمایه‌گذاری‌ها، مدیریت و نگه‌داری مجموعه‌ای از سهم‌هاست. در این مرحله، پس از بررسی اوراق بهادار باید سبدی از سهم‌ها انتخاب شود. سرمایه‌گذاران به‌منظور مدیریت نیز، نیازمند تصمیم‌گیران یا افراد خبره می‌باشند تا آنان را در امر انتخاب یاری رسانند.

چون هدف سرمایه‌گذاری کسب سود است، لذا سرمایه‌گذاران سعی دارند سهم‌های خود را به‌طور مناسب مدیریت کنند تا بیش‌ترین بازده را کسب نمایند. طبیعتاً افزایش بازده موردانتظار، ریسک را نیز افزایش می‌دهد. چنانچه سرمایه‌گذاران تمام منابع موجود خود را در یک نوع سهام سرمایه‌گذاری کنند، متحمل ریسک بزرگی خواهند شد که همان حکایت گذاشتن همه تخم‌مرغ‌ها در یک سبد است. لذا تصمیم‌گیران سعی دارند با اولویت‌بندی سهم‌ها براساس نرخ بازده و ریسک، مناسب‌ترین گزینه‌ها را جهت سرمایه‌گذاری و تشکیل سبدسهام انتخاب نمایند، تا بازده موردانتظار کل سبد را نیز افزایش دهند. در واقع با ایجاد تنوع در سهام، میزان ریسک نیز کاهش می‌یابد.

از طرفی، ممکن است میزان بازده و ریسک پیش‌بینی شده در سرمایه‌گذاری با آنچه در واقعیت رخ می‌دهد متفاوت باشد و برآوردها و تخمین‌ها، نادقیق و مبهم و حتی نادرست باشند. همین امر باعث می‌شود سرمایه‌گذاران در شرایط عدم اطمینان قرار گیرند. در واقع آینده همیشه با عدم اطمینان همراه است، اما اکثر سرمایه‌گذاران اطمینان خاطر را به عدم اطمینان ترجیح می‌دهند و این اطمینان خاطر تنها از طریق تنوع‌بخشی و ایجاد سبدسهام امکان‌پذیر خواهد بود. پس به دلیل وجود عدم اطمینان و ریسک موجود، مسأله تنوع‌سازی و انتخاب مناسب مجموعه سهام‌ها اهمیت بسیاری دارد که این کار با مدیریت سبدسهام مسیر خواهد شد. موضوع مهم دیگری که سرمایه‌گذاران باید در تشکیل سبدسهام به آن توجه نمایند، درنظر گرفتن محدودیت تعداد سهام موجود در سبد و حد پایین و بالای سرمایه‌گذاری در سهام هر شرکت است.

۵.۵.۱ بهینه‌سازی سبدسهام

بهینه‌سازی سبدسهام[1] عبارت است از تعیین نسبت سرمایه‌گذاری در دارایی‌هایی که قرار است در سبد نگه‌داری شود؛ به‌شکلی که سبد انتخابی بهتر از هر سبد دیگری باشد. این بهتر بودن براساس معیارهایی مشخص می‌شود. معیارهایی که به‌صورت مستقیم یا غیرمستقیم ترکیبی از ملاحظات بازده موردانتظار سبد، پراکندگی بازده‌ها و سایر پارامترهای ریسک مالی است. به‌عبارت دیگر سبدسهام بهینه، سبدی است که موجب بیشترین بازدهی و کمترین زیان شود.

[1] Optimization Portfolio

در بسیاری از رویکردهای بهینه‌سازی، این کار به‌صورت یک دوره‌ای انجام می‌گیرد اما از آنجا که سرمایه‌گذاری مفهومی بلندمدت و آینده‌نگر است، یک دوره‌ای در نظر گرفتن بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با این مفهوم همخوانی نخواهد داشت. سرمایه‌گذار به‌دنبال بهینه‌کردن تخصیص دارایی در هر دوره‌ی زمانی است به‌گونه‌ای که امید مطلوبیت ثروت در آخرین دوره‌ی زمانی بیشینه شود. در موضوعات مالی، انتخاب سبدسهام به‌منظور حداکثرسازی سود یکی از اصلی‌ترین دغدغه‌های سرمایه‌گذاران در بازارهای مالی است. مسأله‌ی بهینه‌سازی مارکوویتز[۱] و تعیین مرز کارا، زمانی توسط مدل‌های ریاضی قابل حل است که تعداد دارایی‌های سرمایه گذاری و محدودیت‌های موجود در بازار اندک است اما هنگامی که شرایط و محدودیت‌های دنیای واقعی در نظر گرفته شود، مسأله‌ی بهینه‌سازی سبدسهام به‌راحتی با استفاده از شیوه‌های ریاضی قابل حل نیست.

۶.۱ انتخاب سبدسهام بهینه

مسأله انتخاب مجموعه بهینه‌ای از دارایی‌ها، یکی از مسائل بازار سرمایه است که از اهمیت زیادی برخوردار است. در حوزه اقتصاد خرد، اهمیت تصمیمات سرمایه‌گذاری، ناشی از این مسأله است که در واقع فرد سرمایه‌گذار، مصرف و بازده امروز را به امید بازده بیشتر به زمانی در آینده موکول می‌کند. در واقع تصمیم بهینه سرمایه‌گذاری، میزان مطلوبیت هر فرد است که با توجه به ترجیحات شخصی وی تعیین می‌گردد و لزوما با سایر افراد یکسان نخواهد بود، ولی می‌توان با معیارهایی، مطلوبیت فرد را از انتخاب مجموعه‌ای از دارایی‌های سرمایه‌ای، مشخص کرد. از جمله مهمترین این معیارها، ریسک و بازده کل مجموعه انتخاب شده است. هدف مدیریت مجموعه دارایی‌ها به‌طور عام و مجموعه سهام (سبد سهام) به‌طور خاص، تعیین دارایی‌های درون سبد به‌گونه‌ای که ریسک حداقل و بازده حداکثر شود.

مسأله تنوع‌بخشی در دارایی‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. طبقات مختلف دارایی شامل انواع اوراق بهادار، پول نقد، زمین، طلا و... می‌باشد. نظریه‌های سرمایه‌گذاری در چند دهه اخیر از پیشرفت‌های زیادی برخوردار بودند و در سیر تاریخی تکاملی خود به فرمول‌های کاربردی زیادی دست یافتند. حجم تجارت و سرمایه‌گذاری طی قرن بیستم و اوایل بیست‌ویکم گسترش فراوانی داشته است. این گسترش و تغییرات حاصل از آن موجب شده است که معیارهای متفاوتی برای اخذ تصمیم سرمایه‌گذار در مقایسه با دوره‌های گذشته به‌کار گرفته شود. از عوامل موثر در انتخاب و انجام سرمایه‌گذاری دو مفهوم ریسک و بازده و رابطه این دو با یکدیگر است. در قرن ۱۸ میلادی برنولی[۲] و کرامر[۳] به این نتیجه رسیدند که تصمیمات تحت شرایط عدم اطمینان نباید صرفا بر اساس بازده موردانتظار صورت پذیرد.

تا اوایل قرن بیستم میلادی، سرمایه‌گذاران جهت اخذ تصمیم در فرآیند سرمایه‌گذاری

[1] Markowitz
[2] Bernoulli
[3] Cramer

از نسبت‌های بازده سرمایه‌گذاری استفاده می‌کردند و توجهی به مفاهیم ارزش زمانی پول و ریسک سرمایه‌گذاری نداشتند. از دهه ۱۹۲۰ مفهوم ارزش زمانی پول با روش‌های تنزیلی وارد حوزه ادبیات مالی و سرمایه‌گذاری شد. این روش‌ها، تحولی قابل توجه در انتخاب طرح‌های سرمایه‌گذاری به‌وجود آوردند. لیکن همچنان رفتار متفاوت سرمایه‌گذاران در مواجه با ریسک نادیده گرفته می‌شد. در واقع با وجود اینکه نظریه مطلوبیت پول تا حدودی به تکامل معیارهای انتخاب کمک نموده بود، لیکن هنوز از جامعیت کافی برخوردار نبود. تا دهه ۱۹۵۰ ریسک یک عامل کیفی به‌شمار می‌رفت تا اینکه هری مارکوویتز برای نخستین بار ریسک را کمیت‌پذیر نمود و انحراف معیار جریانات نقدی طرح‌های سرمایه‌گذاری را به‌عنوان کمیت سنجش ریسک معرفی کرد. چندی بعد ویلیام شارپ در [۷] با تبیین ضریب حساسیت β به‌عنوان معیار ریسک، مدل ساده‌تر و کاربردی‌تری را به دنیای تئوری‌های سرمایه‌گذاری عرضه کرد. این روش امروز به‌عنوان مدل تک شاخصی معروف است. در ادامه این روند و در اواسط دهه ۶۰ شارپ و لینتر [۸] بر پایه نظریه بازار سرمایه، مدلی را توسعه دادند که امروزه تحت عنوان مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای[۱] شناخته می‌شود. این مدل ریسک سیستماتیک و غیر سیستماتیک را به‌عنوان اجزای اصلی ریسک از یکدیگر تفکیک می‌کند. در دهه ۷۰، پروفسور راس[۲]، مدل آربیتراژ[۳] را در [۹] پایه‌گذاری کرد. (برای توضیحات بیشتر به [۱۰] و [۱۱] مراجعه شود).

۷.۱ مسأله بهینه‌سازی سبدسهام

در سال ۱۹۵۲ میلادی، هری مارکوویتز مدل بنیادی سبدسهام را ارائه داد که مبنایی بر تئوری مدرن سبد سرمایه گردید. پیش از ارائه این تئوری سرمایه‌گذاران علیرغم آشنایی با مفاهیم ریسک و بازده، قادر به اندازه‌گیری آن به روش کمّی نبودند. مارکوویتز نخستین کسی بود که مفهوم تنوع‌بخشی در سبد سرمایه‌گذاری به‌طور عام و سبدسهام به‌طور خاص را بسط و گسترش داد. او این موضوع که چگونه متنوع‌سازی سبد سرمایه می‌تواند منجر به کاهش ریسک سرمایه‌گذاری یک سرمایه‌گذار شود را، به‌صورت کمّی بیان نمود.

نظریه مدرن سبد سرمایه[۴] MPT براساس رابطه بازدهی و ریسک محاسبه شده از طریق واریانس و انحراف معیار بازدهی تعیین می‌شود. نظریه فرامدرن سبد سرمایه[۵] PMPT بر اساس رابطه‌ی ریسک نامطلوب به تبیین رفتار سرمایه‌گذار و معیار انتخاب سبد سرمایه بهینه می‌پردازد(برای توضیحات بیشتر، مراجع [۱۲] و [۱۳] را ببینید.) مارکوویتز در فرمول‌بندی مدل میانگین‌ـ‌واریانس[۶] MV خود، به هدف سرمایه‌گذاری توجه خاصی داشت. به نظر وی، سرمایه‌گذار عاقل به دنبال سرمایه‌گذاری درطرح‌هایی است که بازدهی بیشتر و ریسک کمتر داشته باشد. وی ریسک یک سرمایه‌گذاری را تنها در انحراف معیار آن طرح جستجو نمی‌کرد،

[1] Capital Asset Pricing Model (CAPM)
[2] Ross
[3] Arbitrage Pricing Theory
[4] Modern Portfolio Theory
[5] Post-modern Portfolio Theory
[6] Mean-Variance

بلکه به رابطه بین دارایی‌های مختلف در سبد سرمایه و تاثیر این رابطه بر ریسک کل هم توجه داشت.

یکی دیگر از مفاهیمی که مارکوویتز مطرح نمود، سبد سرمایه کارا (سبد سهام کارا) بود، که به معنای ترکیب مطلوب اوراق بهادار است به‌نحوی که ریسک آن سبد سرمایه در ازای بازده معینی حداقل شود یا بازده سبد سرمایه در ازای ریسک معین حداکثر شود. او فرض کرد که هرسرمایه‌گذار در هرسطح ریسکی خواهان بیشترین بازده است. در اینجا معیار اندازه‌گیری ریسک، انحراف معیار بازده موردانتظار است. درسبدهای کارا برای به‌دست آوردن بازده بیشتر باید ریسک بیشتری تحمل کرد بنابراین سرمایه‌گذاران با یک رابطه‌ی جایگزینی بین ریسک و بازده مواجه می‌شوند. رابطه‌ی بین ریسک و بازده با یک منحنی به نام مرز کارا نشان داده می‌شوند. هر سبد کارا که به خوبی متنوع شده باشد، یک نقطه از این منحنی است. مدل مارکوویتز بر اساس مفروضاتی شکل گرفته است، این مفروضات عبارتند از:

۱. سرمایه‌گذار دارای رفتار عقلایی است.

۲. سرمایه‌گذاران، ریسک‌گریزند و دارای مطلوبیت مورد انتظار افزایشی هستند.

۳. سرمایه‌گذاران، سبد سرمایه خود را بر مبنای میانگین و واریانس بازده مورد انتظار انتخاب می‌کنند.

۴. هر گزینه سرمایه‌گذاری تا بی‌نهایت قابل تقسیم است.

۵. سرمایه‌گذاران یک افق زمانی معین داشته و این برای همه مشابه است.

۶. سرمایه‌گذاران، در یک سطح مشخص از ریسک، بازده بالاتری را ترجیح می‌دهند و بالعکس برای سطح معینی از بازدهی خواهان، کمترین ریسک هستند.

۷. بازارها کامل هستند(هزینه مالیات و معاملات وجود ندارد).

در رویکرد مارکوویتز بازده دارایی‌ها به‌صورت متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شود که احتمال آن‌ها از تابع توزیع نرمال به‌دست می‌آید. میانگین به‌عنوان معیار کارایی سبد سرمایه و انحراف معیار هم به‌عنوان شاخص ریسک سبد سرمایه در نظر گرفته می‌شود. ورودی‌های اصلی مدل مارکوویتز عبارتند از بازده موردانتظار، ماتریس واریانس_ کواریانس بازدهی دارایی‌ها و ضریب همبستگی بین بازدهی‌ها. [۱۴] مدل کلاسیک MV به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{2} X^T \Sigma X \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases} \mu^T X = R \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0 \, , \, i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}
\end{aligned}
\tag{۶.۱}
$$

که در آن

$$\mu^T X = E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i$$

$$X^T \Sigma X = V[X] = \sum_{i,j} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j x_i x_j$$

و x_i نسبت سرمایه‌گذاری در سهم iام، ρ_{ij} ضریب همبستگی بین سهم iام و jام و σ_i ریسک سهم iام هستند و قید اول نشان‌دهنده سطح مشخصی از بازدهی موردانتظار یعنی R است. قید دوم این اطمینان را می‌دهد که تمام بودجه سرمایه‌گذاری شود و قید آخر هم نشان‌دهنده این است که سرمایه‌گذار اجازه فروش استقراضی را ندارد.

متاسفانه مدل مارکوویتز یک سری معایب و فرضیات غیر واقعی دارد که از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. با افزایش تعداد دارایی، حجم محاسبات ماتریس کواریانس بیش از اندازه بزرگ می‌شود.

۲. محدودیت‌هایی که در دنیای واقعی وجود دارد، در مدل مارکوویتز در نظر گرفته نشده است، همانند محدود کردن تعداد گزینه‌های سرمایه‌گذاری[1]، هزینه‌های معاملاتی[2] که اکثر این محدودیت‌ها از توابع غیرخطی پیروی می‌کنند که مدل‌ها را برای حل دچار پیچیدگی می‌نماید.

۳. فرض نرمال بودن تابع توزیع بازده دارایی‌ها فرض قابل قبولی نیست.

۴. معیار عمومی ریسک، واریانس و یا انحراف معیار است که این معیار زمانی پاسخگوست که یک دارایی با توزیع نرمال باشد.

۱.۷.۱ مدل‌های جایگزین

در سال ۱۹۵۹ مارکوویتز [۱۵] به مزایای ریسک نامطلوب اشاره کرد. او به این نتیجه رسید که سرمایه‌گذاران به دو علت مایل به حداقل ساختن ریسک نامطلوب هستند، نخست اینکه سرمایه‌گذاران ابتدا به امنیت اصل سرمایه می‌اندیشند و دوم وقتی که توزیع متغیرهای تصادفی (نرخ بازدهی) از نوع نرمال نباشد، آن‌گاه معیار ریسک نامطلوب مفید خواهد بود. بعدها در سال ۱۹۹۱ وی هنگام دریافت جایزه نوبل اقتصاد برای ارائه نظریه مدرن سبد سرمایه و مدل مارکوویتز نیز به این مسأله اشاره داشت.

در سال ۱۹۷۳ لی و لرو[3] [۱۶]، مدلی به‌منظور بهینه‌سازی سبد سرمایه با به‌کارگیری برنامه‌ریزی آرمانی ارائه نمودند. چندی بعد در سال ۱۹۸۰ لی و چیسیر[4] [۱۷]، نگرش برنامه‌ریزی آرمانی چند معیاره[5] را مطرح کردند. کونو و یامازاکی در سال ۱۹۹۱، مدلی از طریق برنامه‌ریزی

[1] Cardinality Constraint
[2] Transaction Cost
[3] Lee and Lerro
[4] Lee and Chesser
[5] Multi-Ceriteria Goal Programming

خطی برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری ارائه کردند. پس از آن در سال ۱۹۹۷، اسپرانزا و مانسینی[1] [۱۸]، مدلی از برنامه‌ریزی صحیح آمیخته[2] را با خصوصیات واقعی مثل هزینه‌های معاملات و حداقل واحدهای معاملات ارائه داد و برای حل آن از الگوریتم‌های ابتکاری کمک گرفتند و مدل را برای بازار سهام میلان آزمایش کردند.

سال ۱۹۹۸ یونگ[3] [۱۹]، مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه قابل حل توسط برنامه‌ریزی خطی را ارائه کرد که در آن ریسک بر مبنای بدترین حالت تعریف شده و آن را رویکرد ''مینیماکس''[4] نامید. سال ۱۹۹۹ ژیا[5] و همکاران [۲۰] مدلی خاص را معرفی کردند. در فوریه همین سال چانگ[6] و همکاران [۲۱]، به ارائه مدلی پارامتریک و غیرخطی جهت بهینه‌سازی سهام پرداختند. در ادامه در نوامبر همین سال، جوناس پالمکویست[7] و همکارانش [۲۲] به معرفی بهینه‌سازی سبد سرمایه با محدودیت‌ها و تابع هدف ارزش در معرض ریسک شرطی، مدلی از نوع برنامه‌ریزی خطی ارائه دادند. در سال ۲۰۰۲ لوبو[8] و همکاران [۲۳] به بهینه‌سازی سبد با اعمال هزینه‌های معاملات خطی و ثابت پرداختند. در همین سال، کریستوس پاپاریستودولو[9] [۲۴] به ارائه مدل‌هایی در این زمینه پرداخت و سپس با طرح مسأله‌ای متشکل از ۵ سهام در دوره زمانی ۱۲ ماهه به مقایسه سبدهای به‌دست آمده در هر مدل پرداخت. در سال ۲۰۰۳ آلکسی چخلاو[10] و همکاران در مقاله‌ای تحت عنوان «بهینه‌سازی سبد سرمایه با محدودیت‌های کاهش‌دهنده» به ارائه مدلی در این زمینه پرداخت سپس در همان سال مانسینی[11] و همکارانش [۲۵] به معرفی مدل‌های برنامه‌ریزی خطی پرداخته اند. در سال ۲۰۰۴ گاندریو[12] و همکاران برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی سبد سرمایه، روش نقطه درونی اولیه–دوگان را معرفی کردند.

[1]Mansini and Speranza
[2]Mixed Integer Programming
[3]young
[4]Minimax
[5]Xia
[6]Chang
[7]Palmquist
[8]Lobo
[9]Papahristodoulou
[10]Alexi Chekhlov
[11]Mansini
[12]Gandryv

فصل ۲

نظریه اعتبار و فازی

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم فازی و نظریه اعتبار را بیان نموده و سپس امید ریاضی، ارزش در معرض ریسک را در محیط فازی تعریف کرده و در حالات خاص متغیرهای فازی مثلثی، ذوزنقه‌ای و نرمال آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. برای اطلاعات بیشتر در این بخش می‌توانید به [۲۸] مراجعه نمایید.

عمده ابزارهای مهم برای مدل‌سازی، استدلال و محاسبات از نوع قطعی[1]، معین[2] و کاملا مشخص هستند. منظور از قطعی بودن، دو بخشی بودن است: بله یا خیر، به‌جای بیشتر یا کمتر. در منطق دوگان مرسوم، یک عبارت می‌تواند درست یا غلط باشد. در تئوری مجموعه، یک عنصر به مجموعه تعلق دارد یا ندارد. اگر قدرت یک زبان زنده را با یک زبان منطقی[3] مقایسه کنیم، زبان منطقی فقیرتر خواهد بود. چرا که افکار و احساسات بشری دربر گیرنده مفاهیم یا دریافت‌هایی است که کلمات مورد استفاده ما برای بیان آن‌ها کافی نیست. بنابراین، یک نگاشت یک به یک از مسائل و سیستم‌ها با استفاده از زبان حسابی یا منطقی امکان‌پذیر نیست. پس از آنجا که ذهن ما با منطق دیگری کارهایش را انجام می‌دهد و تصمیماتش را اتخاذ می‌کند، ایجاد منطق‌های تازه و چند ارزشی مورد نیاز است، که منطق فازی[4] یکی از آن‌ها می‌باشد. واژه‌ی فازی به معنای نادقیق، ناواضح و مبهم (شناور) است.

[1] Crisp
[2] Deterministic
[3] Logical Language
[4] Fuzzy Logic

منطق فازی اولین بار در پی تنظیم نظریه مجموعه فازی در سال ۱۹۶۵ به‌وسیله پروفسور زاده[1] در صحنه‌ی محاسبات نو ظاهر شد [۲۹]. سپس، بر اساس این مفهوم، نظریه حل فازی توسط بلمن[2] و زاده در[۳۰] ارائه شد. دانش مورد نیاز برای بسیاری از مسائل مورد مطالعه به دو صورت متمایز ظاهر می‌شود:

۱. دانش عینی[3]، مثل مدل‌ها و معادلات و فرمول‌های ریاضی که از پیش تنظیم شده و برای حل و فصل مسائل معمولی فیزیک، شیمی، یا مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲. دانش شخصی[4]، مثل دانستنی‌هایی که تا حدودی قابل توصیف و بیان زبان‌شناختی بوده، ولی امکان کمّی کردن آن‌ها با کمک ریاضیات سنتی معمولاً وجود ندارد. به این نوع دانش، دانش ضمنی یا دانش تلویحی[5] گفته می‌شود.

از آن جا که در عمل هر دو نوع دانش مورد نیاز است منطق فازی می‌کوشد آن‌ها را به‌صورتی منظم، منطقی و ریاضیاتی بایکدیگر هماهنگ کند. منطق فازی بر نظریه مجموعه‌های فازی تکیه می‌کند. مجموعه‌های فازی خود از تعمیم و گسترش مجموعه‌های قطعی به‌صورتی طبیعی حاصل می‌آیند.

۲.۲ مفاهیم فازی

تعریف ۱.۲.۲. معیار عضویت هر عنصر دریک مجموعه، صفت مشخص کننده مجموعه است. هر عنصری که دارای آن صفت باشد، عضو مجموعه و در غیر این صورت خارج از مجموعه است. این معیار عضویت را تابع مشخصه می‌نامند و به‌صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

که در آن $x \in X$ (X مجموعه مرجع)، برد آن مجموعه دو عضوی $\{۰,۱\}$ و دامنه آن X است. حال اگر برد تابع مشخصه از مجموعه دو عضوی $\{۰,۱\}$ به بازه $[۰,۱]$ توسعه یابد، تابعی خواهیم داشت که به هر $\chi_A(x)$ عددی را از بازه $[۰,۱]$ نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت A می‌گویند، اکنون یک مجموعه قطعی به‌شمار نمی‌آید(مجموعه‌های قطعی[6] در واقع همان مجموعه‌های عادی و معمولی هستند) و به چنین مجموعه‌هایی که با یک تابع عضویت نشان داده می‌شوند، مجموعه‌های فازی گفته می‌شود.

تعریف ۲.۲.۲. مجموعه فازی[7] $\tilde{A}$ به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

[1] Zadeh
[2] zadeh2
[3] Objective Knowledge
[4] Personal Knowledge
[5] Tacit Knowledge
[6] Crisp Sets
[7] Fuzzy Set

تعریف می‌شود، که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به هر عنصر از X، یک عدد را از بازه $[0,1]$ به‌عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی $\tilde{A}$ نسبت می‌دهد و $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۲. برای هر عدد حقیقی $\alpha \in (0,1]$ مجموعه $\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ را مجموعه $\alpha-$ برش از مجموعه فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۲. مجموعه $\text{supp}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ را پشتیبان مجموعه فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۲. مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر برای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$$

یا به عبارت دیگر یک مجموعه فازی محدب است اگر کلیه مجموعه‌های $\alpha-$ برش آن محدب باشند.

تعریف ۶.۲.۲. مجموعه فازی $\tilde{A}$ را نرمال گوییم هر گاه $\exists\, x \in X$ به‌طوریکه $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

تعریف ۷.۲.۲. عدد فازی[1] $\tilde{M}$ یک مجموعه فازی از خط حقیقی $\mathbb{R}$ با شرایط سه گانه زیر است:

۱. مجموعه فازی $\tilde{M}$ محدب باشد.

۲. نرمال باشد.

۳. شکل تابع عضویت $\mu_{\tilde{M}}(x)$ به‌صورت تکه خطوط پیوسته باشد.

مجموعه کامل اعداد فازی روی $\mathbb{R}$ را با $\text{FN}(\mathbb{R})$ نشان می‌دهند.

[1] Fuzzy Number

۳.۲ اصول نظریه اعتبار

اعتبار و فضای اعتبار

فرض کنید Θ یک مجموعه ناتهی، $P(\Theta)$ مجموعه توانی از Θ باشد هر عضو $P(\Theta)$ یک پیشامد نامیده می‌شود. تابع Cr یک اندازه اعتبار نامیده می‌شود اگر در اصول زیر صدق کند:

۱. اصل اول(نرمال بودن) : $\mathrm{Cr}\{\Theta\} = ۱$

۲. اصل دوم(اصل یکنوایی): اگر $A \subset B$ آنگاه $\mathrm{Cr}\{A\} \leq \mathrm{Cr}\{B\}$

۳. اصل سوم(اصل خوددوگان): برای هر پیشامد A، $\mathrm{Cr}\{A\} + \mathrm{Cr}\{A^c\} = ۱$

۴. اصل چهارم(اصل بیشینگی): برای هرپیشامد $\{A_i\}$ با $\sup_i \mathrm{Cr}\{A_i\} < ۰/۵$ داریم:

$$\mathrm{Cr}\{\cup A_i\} = \sup_i \mathrm{Cr}\{A_i\}$$

مقدار $\mathrm{Cr}\{A\}$ سطحی که پیشامد A اتفاق خواهد افتاد را بیان می‌کند. از اصل اول و سوم نتیجه می‌شود که $\mathrm{Cr}\{\emptyset\} = ۰$. و از اصل دوم نیز می‌دانیم که برای هر $A \in P$، $۰ \leq \mathrm{Cr}\{A\} \leq ۱$ زیرا $\emptyset \subset A \subset \Theta$. یعنی اندازه اعتبار یک پیشامد فازی در بازه [۰ ، ۱] است.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید Θ مجموعه ناتهی و $P(\Theta)$ نیز مجموعه توانی از Θ و Cr یک اندازه اعتبار باشد، سپس سه تایی $(\Theta, P(\Theta), \mathrm{Cr})$ یک فضای اعتبار نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۳.۲. متغیر فازی[1] یک ابزار ریاضی اساسی و بنیادی برای توصیف عدم اطمینان فازی است که به‌صورت تابعی از فضای اعتبار $(\Theta, P(\Theta), \mathrm{Cr})$ به مجموعه‌ای از اعداد حقیقی تعریف می‌شود. مانند: متغیر فازی مثلثی، متغیر فازی ذوزنقه‌ای و متغیر فازی نرمال.

$$\xi\colon (\Theta, P(\Theta), \mathrm{Cr}) \to \mathbb{R} \qquad ۰ \leq \mathrm{Cr} \leq ۱$$

تعریف ۳.۳.۲. فرض کنید $\xi_۱$ و $\xi_۲$ دو متغیر فازی باشند که در فضای اعتبار $(\Theta, P(\Theta), \mathrm{Cr})$ تعریف شده‌اند، می‌گوییم $\xi_۱ = \xi_۲$ اگر برای هر $\theta \in \Theta$ داشته باشیم $\xi_۱(\theta) = \xi_۲(\theta)$.

۱.۳.۲ تابع عضویت و قضیه اعتبار معکوس

تعریف ۴.۳.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی باشد که روی فضای اعتبار $(\Theta, P(\Theta), \mathrm{Cr})$ تعریف می‌شود. سپس تابع عضویت که برمبنای اندازه اعتبار تعریف می‌شود به‌صورت زیر است:

$$\mu(t) = \big(۲\mathrm{cr}\{\xi = t\}\big) \wedge ۱, \quad t \in \mathbb{R}$$

[1]Fuzzy Variable

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنید که ξ یک متغیر فازی باشد با تابع عضویت μ، سپس برای هر مجموعه A از اعداد حقیقی داریم:

$$\mathrm{Cr}\{\xi \in A\} = \frac{1}{2}\left[\sup_{t\in A}\mu(t) + 1 - \sup_{t\in A^c}\mu(t)\right] \tag{۱.۲}$$

برهان. اگر $\mathrm{Cr}\{\xi \in A\} \le 0/5$، از اصل دوم داریم: $\mathrm{Cr}\{\xi = t\} \le 0/5$ برای $t \in A$. براساس اصل چهارم نیز داریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cr}\{\xi \in A\} &= \mathrm{Cr}\{\bigcup_{t\in A}\{\xi \in t\}\} \\
&= \sup_{t\in A}\mathrm{Cr}\{\xi = t\} \\
&= \frac{1}{2}(2\sup_{t\in A}\mathrm{Cr}\{\xi = t\}) \\
&= \frac{1}{2}(2\sup_{t\in A}\mathrm{Cr}\{\xi = t\} \wedge 1) \\
&= \frac{1}{2}\sup_{t\in A}(2\,\mathrm{Cr}\{\xi = t\} \wedge 1) \\
&= \frac{1}{2}\sup_{t\in A}\mu(t)
\end{aligned} \tag{۲.۲}$$

چون اندازه اعتبار خود دوگان است داریم: $\mathrm{Cr}\{\xi \in A^c\} \ge 0/5$ و $\sup_{t\in A^c}\mathrm{Cr}\{\xi = t\} \ge 0/5$ بنابراین

$$\sup_{t\in A^c}\mu(t) = \sup_{t\in A^c}\{2\,\mathrm{Cr}\{\xi = t\} \wedge 1\} = 1 \tag{۳.۲}$$

از (۲.۲) و (۳.۲) نتیجه می‌گیریم که (۱.۲) برقرار است.
حال اگر $\mathrm{Cr}\{\xi \in A\} > 0/5$، داریم: $\mathrm{Cr}\{\xi \in A^c\} \le 0/5$، زیرا اندازه اعتبار خود دوگان است. از نتیجه حالت قبلی داریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cr}\{\xi \in A\} &= 1 - \mathrm{Cr}\{\xi \in A^c\} \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left[\sup_{t\in A^c}\mu(t) + 1 - \sup_{t\in A}\mu(t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sup_{t\in A}\mu(t) + 1 - \sup_{t\in A^c}\mu(t)\right]
\end{aligned}$$

در هردو حالت قضیه اثبات شده است. □

ملاحظه ۱.۳.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی با تابع عضویت μ باشد. سپس از قضیه بالا نتیجه می‌شود که معادلات زیر برقرار است:

$$\mathrm{Cr}\{\xi = t\} = \frac{۱}{۲}\left[\mu(t) + ۱ - \sup_{x \neq t} \mu(x)\right], \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\mathrm{Cr}\{\xi \leq t\} = \frac{۱}{۲}\left[\sup_{x \leq t} \mu(x) + ۱ - \sup_{x > t} \mu(x)\right], \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\mathrm{Cr}\{\xi \geq t\} = \frac{۱}{۲}\left[\sup_{x \geq t} \mu(x) + ۱ - \sup_{x < t} \mu(x)\right], \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

تعریف ۵.۳.۲. توزیع اعتبار[۱] $\Phi : \mathbb{R} \to [۰, ۱]$ از متغیر فازی ξ توسط لیو[۲] در [۳۲] به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\Phi(r) = \mathrm{Cr}\{\theta \in \Theta \mid \xi(\theta) \leq r\} \tag{۴.۲}$$

به‌خصوص، داریم:

$$\Phi(r) = \mathrm{Cr}\{\xi \leq r\} \tag{۵.۲}$$

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنید که ξ یک متغیر فازی باشد که دارای تابع عضویت پیوسته μ است و نقطه‌ی $x_۰$ موجود باشد به‌طوریکه $\mu(x)$ در بازه $(-\infty, x_۰)$ صعودی و در بازه $(x_۰, \infty)$ نزولی باشد در این صورت داریم:

$$\Phi(r) = \mathrm{Cr}\{\xi \leq r\} = \begin{cases} \dfrac{\mu(r)}{۲} & r \leq x_۰ \\ ۱ - \dfrac{\mu(r)}{۲} & r > x_۰ \end{cases} \tag{۶.۲}$$

$$\mathrm{Cr}\{\xi \geq r\} = \begin{cases} ۱ - \dfrac{\mu(r)}{۲} & r \leq x_۰ \\ \dfrac{\mu(r)}{۲} & r > x_۰ \end{cases} \tag{۷.۲}$$

برهان.

$$\begin{aligned} \mathrm{Cr}\{\xi \leq r\} = \frac{۱}{۲}\left[\sup_{x \leq r} \mu(x) + ۱ - \sup_{x > r} \mu(x)\right] &= \begin{cases} \dfrac{۱}{۲}(\mu(r) + ۱ - ۱) & r \leq x_۰ \\ \dfrac{۱}{۲}(۱ + ۱ - \mu(r)) & r > x_۰ \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{\mu(r)}{۲} & r \leq x_۰ \\ ۱ - \dfrac{\mu(r)}{۲} & r > x_۰ \end{cases} \end{aligned}$$

اثبات رابطه (۷.۲) نیز به‌صورت مشابه می‌باشد. □

[1] Credibility Distribution

[2] Liu

- متغیر فازی مثلثی[1] به‌صورت سه‌تایی $\xi = (a,b,c)$ نمایش داده می‌شود. که در آن $a<b<c$ بوده و a,b,c اعداد قطعی می‌باشند. همچنین تابع عضویت آن به‌صورت زیر است:

$$\mu(r) = \begin{cases} 0 & r \le a \\ \dfrac{r-a}{b-a} & a \le r \le b \\ \dfrac{r-c}{b-c} & b \le r \le c \\ 0 & r \ge c \end{cases} \tag{۸.۲}$$

- متغیر فازی ذوزنقه‌ای[2] به‌صورت چهارتایی $\xi = (a,b,c,d)$ نمایش داده می‌شود. که در آن $a<b<c<d$ بوده و a,b,c,d اعداد قطعی می‌باشند و تابع عضویت آن به‌صورت زیر است:

$$\mu(r) = \begin{cases} 0 & r \le a \\ \dfrac{r-a}{b-a} & a \le r \le b \\ 1 & b \le r \le c \\ \dfrac{r-d}{c-d} & c \le r \le d \\ 0 & r \ge d \end{cases} \tag{۹.۲}$$

- متغیر فازی نرمال[3] به‌صورت $\xi = N(a,\sigma)$ نمایش داده می‌شود و تابع عضویت آن به‌صورت زیر است:

$$\mu(r) = \mathrm{Exp}\left[-\frac{(r-a)^2}{\sigma^2}\right] \tag{۱۰.۲}$$

۴.۲ امید ریاضی در محیط فازی

تعریف ۱.۴.۲. امید ریاضی[4] متغیر فازی ξ توسط لیو در [۳۱] به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} \mathrm{Cr}\{\xi \ge r\}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{Cr}\{\xi \le r\}\mathrm{d}r \tag{۱۱.۲}$$

قضیه ۱.۴.۲. فرض کنید که ξ یک متغیر فازی باشد که دارای تابع عضویت پیوسته μ است. اگر امید ریاضی آن وجود داشته باشد و نقطه‌ی x_0 موجود باشد به‌طوریکه $\mu(x)$ در بازه $(-\infty, x_0)$ صعودی و در بازه (x_0, ∞) نزولی باشد در این صورت می‌توان امید ریاضی آن را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$E[\xi] = x_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{2}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^{x_0} \frac{\mu(r)}{2}\mathrm{d}r \tag{۱۲.۲}$$

[1] Triangular Fuzzy Variable
[2] Trapezoidal Fuzzy Variable
[3] Normal Fuzzy Variable
[4] Expected Value

برهان. بدون کاستن از کلیت مسأله فرض کنید که $x_\circ \geq \circ$ باشد در این صورت

$$\begin{aligned}
E[\xi] &= \int_\circ^{+\infty} \mathrm{Cr}\{\xi \geq r\}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^\circ \mathrm{Cr}\{\xi \leq r\}\mathrm{d}r \\
&= \int_\circ^{x_\circ} \mathrm{Cr}\{\xi \geq r\}\mathrm{d}r + \int_{x_\circ}^{+\infty} \mathrm{Cr}\{\xi \geq r\}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^\circ \mathrm{Cr}\{\xi \leq r\}\mathrm{d}r \\
&= \int_\circ^{x_\circ} \left(۱ - \frac{\mu(r)}{۲}\right)\mathrm{d}r + \int_{x_\circ}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^\circ \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r \\
&= x_\circ - \int_\circ^{x_\circ} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r + \int_{x_\circ}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^\circ \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r \\
&= x_\circ + \int_{x_\circ}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^{x_\circ} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۱.۴.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی مثلثی باشد در این صورت

$$\mathrm{E}[\xi] = \frac{a + ۲b + c}{۴} \qquad (۱۳.۲)$$

برهان. با توجه به رابطه (۸.۲) μ یک تابع پیوسته است و در بازه $(-\infty, b)$ صعودی و در بازه (b, ∞) نزولی می‌باشد. پس با استفاده از قضیه (۱.۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
E[\xi] &= b + \int_b^{+\infty} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^b \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r \\
&= b + \frac{۱}{۲}\int_b^c \frac{r-c}{b-c}\mathrm{d}r - \frac{۱}{۲}\int_a^b \frac{r-a}{b-a}\mathrm{d}r \\
&= b + \frac{c-b}{۴} - \frac{b-a}{۴} \\
&= \frac{a + ۲b + c}{۴}
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۲.۴.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی ذوزنقه‌ای باشد در این صورت

$$\mathrm{E}[\xi] = \frac{a + b + c + d}{۴} \qquad (۱۴.۲)$$

برهان. باتوجه به رابطه (۹.۲) μ یک تابع پیوسته است و در بازه $(-\infty, c)$ صعودی و در بازه (c, ∞) نزولی می‌باشد. پس با استفاده از قضیه (۱.۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
E[\xi] &= c + \int_c^{+\infty} \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^c \frac{\mu(r)}{۲}\mathrm{d}r \\
&= c + \frac{۱}{۲}\int_c^d \frac{r-d}{c-d}\mathrm{d}r - \frac{۱}{۲}\int_a^b \frac{r-a}{b-a}\mathrm{d}r - \frac{۱}{۲}\int_b^c \mathrm{d}r \\
&= b + \frac{d-c}{۴} - \frac{b-a}{۴} - \frac{c-b}{۲} \\
&= \frac{a+b+c+d}{۴}
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۳.۴.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی نرمال باشد در این صورت

$$\mathrm{E}[\xi] = a \tag{۱۵.۲}$$

برهان. باتوجه به رابطه (۱۰.۲) μ یک تابع پیوسته است و داریم:

$$\frac{\partial \mu}{\partial r} = \frac{-۲}{\sigma^۲}(r-a)\mathrm{Exp}\left[-\frac{(r-a)^۲}{\sigma^۲}\right]$$

که برای

$$\begin{aligned} r \le a &\quad\rightarrow\quad \frac{\partial \mu}{\partial r} \ge ۰ \\ r \ge a &\quad\rightarrow\quad \frac{\partial \mu}{\partial r} \le ۰ \end{aligned}$$

پس μ در بازه $(-\infty, a)$ صعودی و در بازه (a, ∞) نزولی می‌باشد. با استفاده از قضیه (۱.۴.۲) داریم:

$$E[\xi] = a + \int_a^{+\infty} \mathrm{Exp}\left[-\frac{(r-a)^۲}{\sigma^۲}\right] \mathrm{d}r - \int_{-\infty}^{a} \mathrm{Exp}\left[-\frac{(r-a)^۲}{\sigma^۲}\right] \mathrm{d}r$$

با توجه به این که به ازای $f(r) = \mathrm{Exp}\left[-\frac{(r-a)^۲}{\sigma^۲}\right]$

$$f(a+r) = \mathrm{Exp}\left[-\frac{(a+r-a)^۲}{\sigma^۲}\right] = \mathrm{Exp}\left[-\frac{r^۲}{\sigma^۲}\right]$$

$$f(a-r) = \mathrm{Exp}\left[-\frac{(a-r-a)^۲}{\sigma^۲}\right] = \mathrm{Exp}\left[-\frac{r^۲}{\sigma^۲}\right]$$

می‌توان نتیجه گرفت $f(r)$ نسبت به $r = a$ متقارن است. پس داریم:

$$E[\xi] = a$$

□

تعریف ۲.۴.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی با $E[\xi]$ متناهی باشد. واریانس ξ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V[\xi] = E[(\xi - E[\xi])^۲] \tag{۱۶.۲}$$

۵.۲ ارزش در معرض ریسک در محیط فازی

با توجه به مطالب گفته شده در فصل ۱ ارزش در معرض ریسک می‌تواند به‌عنوان یک اندازه ریسک در انتخاب سبدسهام استفاده شود، بنابراین برآوردی از آن در محیط فازی ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۵.۲. فرض کنید که ξ یک متغیر فازی و $\beta \in (0,1]$ ضریب اطمینان باشد. در این صورت ارزش در معرض ریسک از ξ تابع $\mathrm{VaR} : (0,1] \to \mathbb{R}$ است به‌طوریکه

$$\mathrm{VaR}(\beta) = -\sup\{x \mid \mathrm{Cr}\{\xi \leq x\} \leq \beta\} \tag{۱۷.۲}$$

قضیه ۱.۵.۲. برای هر ضریب اطمینان $\beta \in (0,1]$ داریم:

$$\mathrm{VaR}(\beta) = -\Phi^{-1}(\beta) \tag{۱۸.۲}$$

برهان.

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}(\beta) &= -\sup\{x \mid \mathrm{Cr}\{\xi \leq x\} \leq \beta\} \\
&= \inf\{-x \mid \Phi(x) \leq \beta\} \\
&= \inf\{-x \mid x \leq \Phi^{-1}(\beta)\} \\
&= \inf\{-x \mid -x \geq -\Phi^{-1}(\beta)\} \\
&= -\Phi^{-1}(\beta)
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۱.۵.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی مثلثی باشد در این صورت

$$\mathrm{VaR}(\beta) = \begin{cases} 2\beta(a-b) - a & 0 < \beta \leq \frac{1}{2} \\ 2\beta(b-c) + c - 2b & \frac{1}{2} \leq \beta < 1 \end{cases} \tag{۱۹.۲}$$

برهان. با استفاده از (۸.۲) و قضیه (۲.۳.۲) داریم:

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \dfrac{r-a}{2(b-a)} & a \leq r \leq b \\ \dfrac{2b-r-c}{2(b-c)} & b \leq r \leq c \\ 1 & r \geq c \end{cases} \tag{۲۰.۲}$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(r) = \begin{cases} 2r(b-a) + a & 0 < r \leq \frac{1}{2} \\ 2r(c-b) + 2b - c & \frac{1}{2} \leq r < 1 \end{cases} \tag{۲۱.۲}$$

که با استفاده از قضیه (۱.۵.۲) اثبات کامل است. □

نتیجه ۲.۵.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی ذوزنقه‌ای باشد در این صورت

$$\mathrm{VaR}(\beta)=\begin{cases}2\beta(a-b)-a & 0<\beta\le\frac{1}{2}\\ 2\beta(c-d)+d-2c & \frac{1}{2}\le\beta<1\end{cases} \tag{۲۲.۲}$$

برهان. با استفاده از (۹.۲) و قضیه (۲.۳.۲) داریم:

$$\Phi(r)=\begin{cases}0 & r\le a\\ \dfrac{r-a}{2(b-a)} & a\le r\le b\\ \frac{1}{2} & b\le r\le c\\ \dfrac{2c-d-r}{2(c-d)} & c\le r\le d\\ 1 & r\ge d\end{cases} \tag{۲۳.۲}$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(r)=\begin{cases}2r(b-a)+a & 0<r\le\frac{1}{2}\\ 2r(d-c)+2c-d & \frac{1}{2}\le r<1\end{cases} \tag{۲۴.۲}$$

که با استفاده از قضیه (۱.۵.۲) اثبات کامل است. $\square$

نتیجه ۳.۵.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی نرمال باشد در این صورت

$$\mathrm{VaR}(\beta)=\begin{cases}-a+\sigma\sqrt{\ln(\frac{1}{2\beta})} & 0<\beta\le\frac{1}{2}\\ -a-\sigma\sqrt{\ln(\frac{1}{2-2\beta})} & \frac{1}{2}\le\beta<1\end{cases} \tag{۲۵.۲}$$

برهان. با استفاده از (۱۰.۲) و قضیه (۲.۳.۲) داریم:

$$\Phi(r)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{Exp}\left[-\frac{(r-a)^2}{\sigma^2}\right] & r\le a\\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{Exp}\left[-\frac{(r-a)^2}{\sigma^2}\right] & r>a\end{cases} \tag{۲۶.۲}$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(r)=\begin{cases}a-\sigma\sqrt{\ln(\frac{1}{2r})} & 0<r\le\frac{1}{2}\\ a+\sigma\sqrt{\ln(\frac{1}{2-2r})} & \frac{1}{2}\le r<1\end{cases} \tag{۲۷.۲}$$

که با استفاده از قضیه (۱.۵.۲) اثبات کامل است. $\square$

۶.۲ استقلال متغیرهای فازی

متغیرهای فازی $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ مستقل نامیده می‌شوند اگر برای هر مجموعه $B_1, B_2, \ldots, B_n$ از $\mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$\mathrm{Cr}\{\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_i \in B_i\}\} = \min_{1\le i\le n} \mathrm{Cr}\{\xi_i \in B_i\}$$

قضیه ۱.۶.۲. متغیرهای فازی $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ مستقل‌اند اگر و فقط اگر

$$\mathrm{Cr}\{\bigcup_{i=1}^{n}\{\xi_i \in B_i\}\} = \max_{1\le i\le n} \mathrm{Cr}\{\xi_i \in B_i\}$$

برهان. از آنجا که اندازه اعتبار خود دوگان است، متغیرهای فازی $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ مستقل‌اند اگر و فقط اگر

$$\begin{aligned}\mathrm{Cr}\{\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_i \in B_i\}\} &= 1 - \mathrm{Cr}\{\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_i \in B_i^c\}\} \\ &= 1 - \min_{1\le i\le n} \mathrm{Cr}\{\xi_i \in B_i^c\} \\ &= \max_{1\le i\le n} \mathrm{Cr}\{\xi_i \in B_i\}\end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۶.۲. فرض کنید ξ_1 و ξ_2 متغیرهای فازی مستقل با امیدهای متناهی باشند. سپس برای اعداد a و b داریم: $E(a\xi_1 + b\xi_2) = aE(\xi_1) + bE(\xi_2)$

۷.۲ یکنوایی متغیرهای فازی

فرض کنید f و g توابع حقیقی مقدار تعریف شده روی $\mathbb{R}^m$ باشند، گوییم f و g یکنوا هستند اگر برای هر $u, u' \in \mathbb{R}^m$ داشته باشیم: $\mathrm{f}(u) < \mathrm{f}(u') \Rightarrow g(u) \le g(u')$. بعلاوه اگر $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ یک بردار فازی باشد آنگاه، $\mathrm{g}(\xi)$ و $\mathrm{f}(\xi)$ متغیرهای فازی هستند. قضیه زیر برخی ویژگی‌های مربوط به مقادیر مورد انتظار آن‌ها را ارائه می‌دهد.

قضیه ۱.۷.۲. فرض کنید ξ یک بردار فازی عملگر مقدار مورد انتظار دارای خصوصیات زیر است:

۱. اگر $\mathrm{f} \le \mathrm{g}$ آنگاه $\mathrm{E}(\mathrm{f}(\xi)) \le \mathrm{E}(\mathrm{g}(\xi))$

۲. $\mathrm{E}(-\mathrm{f}(\xi)) = -\mathrm{E}(\mathrm{f}(\xi))$

۳. اگر توابع f و g یکنوا باشند، آنگاه برای هر عدد حقیقی نامنفی a و b داریم:

$$\mathrm{E}(\mathrm{af}(\xi) + \mathrm{bg}(\xi)) = \mathrm{aE}(\mathrm{f}(\xi)) + \mathrm{bE}(\mathrm{g}(\xi))$$

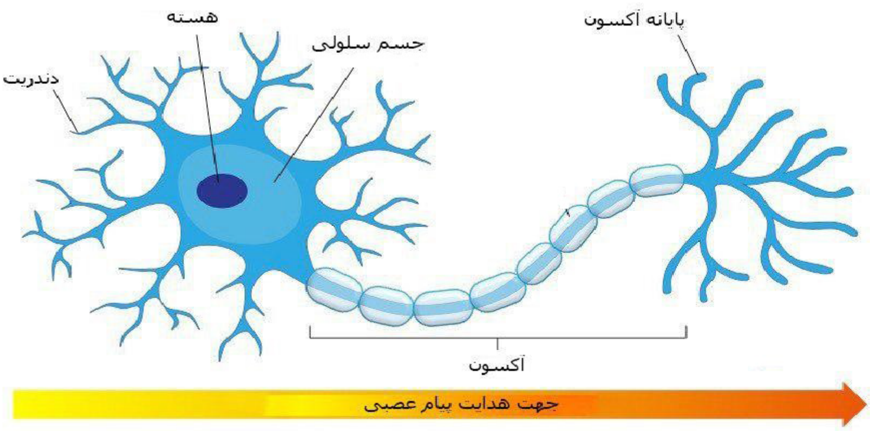
فصل ۳

مقدمه‌ای بر شبکه‌های عصبی بازگشتی

۱.۳ مروری بر شبکه‌های عصبی

در این فصل ابتدا ساختار کلی از شبکه‌های عصبی موجود در مغز انسان را معرفی می‌کنیم، در واقع خواهیم دید که عملکرد سیستمی مغز به‌صورت شماتیک چگونه است. سپس با الگو برداری از رفتار سیستمی مغز، در می‌یابیم که می‌توانیم برخی از محاسبات را برحسب عملکرد مغز انجام دهیم که به آن هوش محاسباتی یا هوش مصنوعی می‌گویند. یکی از روش‌های کارا برای حل مسائل پیچیده، شکستن آن به زیر مسأله‌های ساده‌تر است که هر کدام از این زیر مسأله‌ها به نحو ساده‌تری قابل درک و توصیف هستند. در حقیقت یک شبکه مجموعه‌ای از این ساختارهای ساده است که در کنار یکدیگر سیستم پیچیده نهایی را توصیف می‌کنند.

در ابتدا نرون‌های شبکه‌های عصبی طبیعی معرفی شده و طرز کار آن‌ها نشان داده شده است سپس مدل مصنوعی این نرون‌ها و ساختار آن‌ها، مدل ریاضی آن‌ها، شبکه‌های عصبی مصنوعی و نحوه آموزش و بکارگیری این شبکه‌ها نشان داده شده‌است. در این پایان‌نامه تمرکز بیشتر بر نوعی از این شبکه‌ها به نام شبکه‌های عصبی مصنوعی بازگشتی می‌باشد و مطالب این فصل غالباً از [۱] گرفته شده‌است.



شکل ۱.۳: ساختار نرون

۱.۱.۳ شبکه‌های عصبی طبیعی

مغز انسان درصد کمی از وزن بدن را تشکیل می‌دهد اما از لحاظ مصرف انرژی، بیست درصد انرژی بدن را مصرف می‌کند. ساده‌ترین واحد ساختاری شبکه عصبی مغز نرون‌ها[1] یا عصب‌ها هستند. مغز از ۱۰۰ تریلیون (10^{11}) نرون به هم مرتبط با تعداد 10^{16} پیوند تشکیل شده‌است و این ساختار، امکان پردازش موازی اطلاعات را موجب می‌شود. در این شبکه‌ها اگر یک سلول آسیب ببیند بقیه‌ی سلول‌ها می‌توانند نبود آن را جبران کرده و نیز در بازسازی آن سهیم باشند. این شبکه‌ها قادر به یادگیری‌اند. مثلاً با اعمال سوزش به سلول‌های عصبی لامسه، سلول‌های یاد می‌گیرند که به طرف جسم داغ نروند و با این الگوریتم سیستم می‌آموزد که خطای خود را اصلاح کند. یادگیری در این سیستم‌ها به‌صورت تطبیقی صورت می‌گیرد، یعنی با استفاده از مثال‌ها وزن سیناپس‌ها به‌گونه ای تغییر می‌کند که در صورت دادن ورودی‌های جدید سیستم پاسخ درستی تولید کند. نرون‌ها با وجود تفاوت‌های زیاد از نظر اندازه و شکل ظاهری، مشخصه‌های مشترکی دارند. همان‌طور که در شکل ۱.۳ نشان داده شده است از تنه سلولی نرون تعدادی شاخک کوتاه خارج می‌شود که دندریت[2] نام دارد. دندریت‌ها و تنه سلولی، سیگنال‌ها را از نرون‌های مجاور دریافت می‌کنند و از طریق یک لوله باریک به نام آکسون[3] به نرون‌های دیگر منتقل می‌کنند. آکسون در انتهای خود به تعدادی رشته جانبی باریک تقسیم می‌شود که پایانه آکسونی نام دارد و با دندریت‌های سایر نرون‌ها مرتبط است. ارتباط بین آکسون یک نرون و دندریت نرون دیگر را سیناپس[4] می‌نامند. همه سیگنال‌های جمع‌بندی شده در تنه نرون ترکیب می‌شوند و اگر وسعت سیگنال‌های ترکیب شده به آستانه نرون برسد، مرحله تحریک[5] شدن فعال می‌شود و یک سیگنال خروجی تولید می‌شود. این سیگنال به‌صورت یک پالس منفرد یا بخشی از پالس‌ها در یک میزان خاص به موازات آکسون

[1] Neuron
[2] Dendrite
[3] Axon
[4] Synapse
[5] Firing

به پایانه‌های سیناپسی انتقال می‌یابد و موجب ترشح موادی به‌نام عصب_رسانه[1] می‌شود. عصب_رسانه در داخل شکاف سیناپسی پخش می‌شود و نرون بعدی را تحریک می‌کند و به‌این ترتیب یک سیگنال از یک نرون به دیگری انتقال می‌یابد. تعداد بسیار زیادی آکسون از نرون‌های مختلف با دندریت‌های یک نرون به این صورت ارتباط برقرار می‌کنند. ابتدا تصور می‌شد یک پیام عصبی ماهیت الکتریکی دارد اما بعدها ثابت شد که این پیام‌ها ماهیت الکتروشیمیایی دارند. لذا حفظ اطلاعات و ذخیره سازی آن‌ها در مغز چیزی جز فعالیت‌های شیمیایی در بدنه سلول و پیوندهای آن نیست.

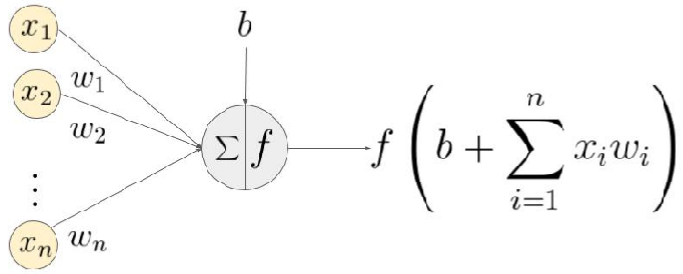
۲.۱.۳ شبکه‌های عصبی مصنوعی

شبکه عصبی مصنوعی[2] ایده‌ای است برای پردازش اطلاعات که از سیستم عصبی طبیعی الهام گرفته شده و مانند مغز به پردازش اطلاعات می‌پردازد. شبکه‌های عصبی شاخه‌ای از هوش مصنوعی است و در واقع تلاشی برای پیاده‌سازی نرون‌های عصبی مغز انسان به‌صورت مصنوعی است. عنصر کلیدی این ایده، ساختار جدید سیستم پردازش اطلاعات است. این سیستم از شمار زیادی عناصر پردازشی به هم پیوسته تشکیل شده که برای حل یک مسأله با هم هماهنگ عمل می‌کنند، در این شبکه‌ها به کمک دانش برنامه‌نویسی، ساختار داده‌ای طراحی می‌شود که می‌تواند همانند نرون عمل کند. مهم‌ترین ویژگی شبکه‌های عصبی مصنوعی قابلیت یادگیری در آن‌ها است. به این مفهوم که این شبکه بر مبنای یک قاعده مشخص و ثابت برنامه‌ریزی نشده و با گذشت زمان و یا در هر تکرار شبکه وضعیت آن تغییر می‌کند یا به اصطلاح آموزش می‌بیند. مبحث شبکه‌های عصبی مصنوعی مربوط به الگو برداری از قوه یادگیری در انسان و پیاده سازی آن به‌صورت الگوریتم‌های کامپیوتری است.

بنابراین شبکه‌های عصبی این قابلیت را دارند که کارهای پیچیده‌ای که برای سیستم‌های مبتنی بر قاعده مشکل هستند را فرا گیرند. هر چند شروع تحقیقات در زمینه شبکه‌های عصبی مصنوعی به دهه ۱۹۴۰ میلادی بر می‌گردد اما گسترش آن در دهه ۱۹۸۰ صورت پذیرفت سال‌های ۱۹۸۲ تا ۱۹۸۶ را می‌توان تولد دوباره شبکه عصبی دانست. در این سال‌ها دو اتفاق مهم در این زمینه رخ داد. اول ارائه شبکه عصبی بازگشتی و مفهوم تابع انرژی توسط جان هاپفیلد[3] بود که در سال ۱۹۸۲ منتشر شد دومین اتفاق، حل مسأله فروشنده دوره‌گرد[4] توسط شبکه هاپفیلد بود [۳۵]. هاپفیلد نشان داد که از این شبکه بازگشتی می‌توان برای حل مسائل بهینه‌سازی استفاده کرد و افق جدیدی را در شبکه‌های عصبی مصنوعی ارائه نمود.

---

1 Neuro-transmitter
2 Artificial neural network
3 John Hopfield
4 Travelling salesman problem



شکل ۲.۳: مدل ریاضی نرون عصبی مصنوعی

توپولوژی شبکه‌های عصبی مصنوعی

وضعیت نسبی نرون‌ها در شبکه (تعداد و گروه‌بندی و نوع اتصالات آن‌ها) را توپولوژی شبکه گویند. توپولوژی در واقع سیستم اتصال سخت افزار نرون‌ها به یکدیگر است که توأم با نرم‌افزار مربوطه نوع عملکرد شبکه عصبی را تعیین می‌کند. در این توپولوژی یک لایه‌ی ورودی وجود دارد که اطلاعات را دریافت می‌کند، تعدادی لایه‌ی مخفی وجود دارد که اطلاعات را از لایه‌های قبلی می‌گیرند و در نهایت یک لایه‌ی خروجی وجود دارد که نتیجه محاسبات به آنجا می‌رود و جواب‌ها در آن قرار می‌گیرند.

در یک نگاه ساده مدل یک نرون باید شامل n ورودی x_i، $(i = ۱,۲,...,n)$ باشد. این ورودی‌ها در وزن‌های سیناپسی w_i، $(i = ۱,۲,\ldots,n)$ که روی آکسون‌ها واقع هستند و نقش ساختار سیناپسی را ایفا می‌کنند ضرب می‌شوند. حاصلضرب ورودی‌ها در وزن‌های متناظرشان با عددی مانند b موسوم به بایاس[1] جمع می‌شوند. این حاصل جمع را خروجی خطی نرون نامیده و با z نشان می‌دهیم. نهایتاً تابعی به نام تابع فعال‌ساز[2] به z اثر کرده و بدین ترتیب خروجی نرون حاصل می‌گردد. معادلات ریاضی چنین نرونی به‌صورت زیر است.

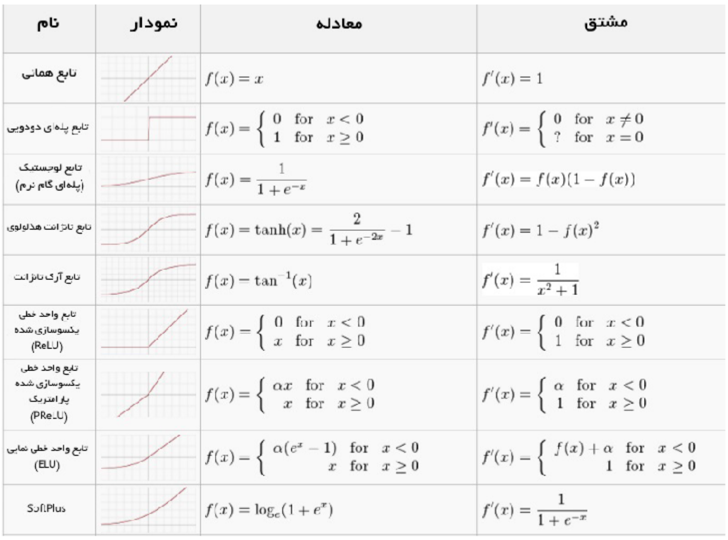
$$f(z) = f(\sum_{i=۱}^{n} w_i x_i + b) \tag{۱.۳}$$

بنابراین شبکه عصبی مصنوعی با استفاده از مدل ساده شده نرون واقعی به پردازش اطلاعات می‌پردازد. با توجه به این توضیحات می‌توان مدل ساده‌ای برای توصیف یک نرون (یک گره در شبکه عصبی مصنوعی) پیشنهاد کرد. این مدل در شکل ۲.۳ نشان داده شده است. مشخصه‌های اصلی یک شبکه عصبی که در طراحی آن باید مدنظر قرار گیرند عبارت است از:

الف. **معماری شبکه عصبی:** نحوه اتصالات بین نرون‌ها، تعداد آن‌ها و تعداد لایه‌های تشکیل دهنده بخش نرون‌های ارتباطی را معماری شبکه عصبی گویند.

ب. **تابع فعال‌ساز:** نوع تابعی که انتخاب می‌شود تا روی نرون قرار گیرد و خروجی نرون را تولید کند تابع فعال‌ساز آن نرون گویند. در مورد ماهیت تابع f باید این نکته مورد توجه

[1] Bias
[2] Activation function



نام	نمودار	معادله	مشتق
تابع همانی		$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
تابع پله‌ی دودویی		$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$	$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \neq 0 \\ ? & \text{for } x = 0 \end{cases}$
تابع لوجستیک (پله‌ای گام نرم)		$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$	$f'(x) = f(x)(1-f(x))$
تابع تانژانت هذلولوی		$f(x) = \tanh(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}} - 1$	$f'(x) = 1 - f(x)^2$
تابع آرک تانژانت		$f(x) = \tan^{-1}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$
تابع واحد خطی یکسوسازی شده (ReLU)		$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$	$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$
تابع واحد خطی یکسوسازی شده پارامتریک (PReLU)		$f(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$	$f'(x) = \begin{cases} \alpha & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$
تابع واحد خطی نمایی (ELU)		$f(x) = \begin{cases} \alpha(e^x - 1) & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$	$f'(x) = \begin{cases} f(x) + \alpha & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$
SoftPlus		$f(x) = \log_e(1+e^x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

شکل ۳.۳: انواع تابع فعال‌سازی

قرار بگیرد که ضابطه این تابع بستگی به نوع خروجی‌هایی که انتظار داریم شبکه آن‌ها را حاصل کند مشخص می‌شود. در شکل ۳.۳ انواع توابع فعال‌سازی مشاهده می‌شود.

ج. **یادگیری شبکه عصبی:** یادگیری عبارت است از یافتن وزن‌ها، بایاس‌ها و توابع فعالیت به‌طوریکه در یک دامنه کاری از هر ورودی، خروجی مطلوب حاصل گردد.

۳.۱.۳ تاریخچه‌ای از حل مسائل بهینه سازی با استفاده از شبکه‌های عصبی

در سال ۱۹۸۶ تانک[1] و هاپفیلد[2] [۳۴] و [۳۶] اولین شبکه عصبی را برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی معرفی کردند. نشان دادند که وضعیت شبکه در هر تکرار به‌گونه‌ای تغییر می‌کند که تابع انرژی متناظر با آن به‌طور یکنواخت کاهش می‌یابد تا جایی که به نقطه کمینه خود می‌رسد که این نقطه کمینه متناظر با نقطه تعادل شبکه عصبی است. آن‌ها این شبکه عصبی را توسط یک مدار الکتریکی پیاده سازی کردند. همچنین از این شبکه برای حل مسأله فروشنده دوره‌گرد با ۳۰ شهر استفاده نمودند. این شبکه دارای نقص‌هایی بود به‌خصوص این‌که نقطه تعادل شبکه در شرایط بهینگی صدق نمی‌کرد و لذا جواب مطلوبی از مسأله حاصل نمی‌شد. با این وجود کارهای هاپفیلد انگیزه بسیار خوبی را برای محققین به‌وجود آورد تا در این زمینه فعالیت کنند. کندی[3] و چوآ[4] [۳۷] با افزودن یک پارامتر جریمه متناهی به شبکه هاپفیلد

[1] Tank
[2] Hopfield
[3] Kennedy
[4] Chua

آن را توسعه دادند و از آن برای حل مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی محدب استفاده کردند. با پارامترهای جریمه این شبکه در یافتن نقطه بهینه دقیق ناتوان است به‌خصوص اگر پارامتر جریمه بزرگ باشد این شبکه به‌سختی عمل می‌کند.

برای جلوگیری از به‌کار بردن پارامتر جریمه یک شبکه عصبی سوئیچ_خازن[1] توسط رودریگز_وازکِز[2] و همکاران معرفی شد. از آن زمان شبکه‌های عصبی برای مسأله‌های بهینه سازی مختلف از جمله برنامه نویسی خطی، برنامه نویسی غیرخطی، نامساوی‌های تغییر، مسأله‌های مکمل خطی و غیرخطی، مسأله‌های مینیمم و ماکزیمم، مسأله‌های بهینه سازی غیرهموار به‌کار رفته است. ایده اصلی روش شبکه عصبی برای بهینه‌سازی، ساخت یک تابع انرژی غیرمنفی و ایجاد سیستم دینامیکی است که یک شبکه عصبی مصنوعی را نشان می‌دهد. ما[3] و شانبلات[4] یک شبکه عصبی دو فازی ارائه کردند که فاز اول شبکه مشابه شبکه کندی و چوآ بود و در فاز دوم مسیر شبکه به جواب دقیق مسأله همگرا می‌شد. بنابراین، این روش جواب‌های دقیق‌تری نسبت به شبکه کندی و چوآ ارائه داد. مشکل این شبکه در این بود که پایداری فاز دوم شبکه بستگی به انتخاب یک مقدار بزرگ از پارامتر جریمه داشت و لذا اگرچه تأثیر پارامتر جریمه در این روش کاهش یافته بود و جواب‌های حاصل دقیق‌تر بودند اما هنوز مستقل از پارامتر نبود.

ژانگ و همکاران [۲۶] برمبنای روش لاگرانژ یک شبکه عصبی ارائه کردند که کاملاً مستقل از پارامتر جریمه و قادر به حل مسائل غیرخطی بود. نقطه تعادل این شبکه عصبی در شرایط بهینگی مرتبه اول و دوم صدق می‌کرد و همچنین شبکه حاصل همگرا بود. در سال ۱۹۹۳ بوزردوم[5] و پتیسن[6] شبکه‌ای را برمبنای گرادیان و روش تصویر و مستقل از پارامتر جریمه ابداع کردند که تنها قادر به حل مسائل درجه دوم با متغیرهای کران‌دار بود. این روش در عمل روش کارایی بود اما نمی‌توانست حالت کلی مسائل برنامه‌ریزی خطی و درجه دوم را حل کند. چندین مدل شبکه عصبی برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی توسط عفتی و همکاران [۲۷] ارائه شده است.

۴.۱.۳ شبکه‌عصبی بازگشتی

شبکه‌های بازگشتی[7] دسته‌ای از شبکه‌ها هستند که رفتاری شبیه یک سیستم دینامیکی دارند، لذا به آن‌ها شبکه‌های دینامیکی نیز می‌گویند. بازگشتی بودن آن‌ها به این علت است که خروجی نرون‌ها به ورودی تمام نرون‌های دیگر بازگشت داده می‌شوند. پیش از معرفی شبکه عصبی بازگشتی لازم است به مرور برخی تعاریف و گزاره‌ها در سیستم‌های دینامیکی بپردازیم.

[1] Switched-Capacitor
[2] Rodriguez-Vazquez
[3] Maa
[4] Shanblatt
[5] Bouzerdoum
[6] Pattison
[7] Recurrent networks

مروری بر سیستم‌های دینامیکی

در این بخش سیستم‌های دینامیکی[۱] را معرفی نموده و قضیه‌ی اساسی وجود و یگانگی وجود جواب مسأله مقدار اولیه و قضایای مربوط به پایداری را ارائه می‌دهیم.

دستگاه معادله دیفرانسیل به شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}(t), t) \tag{۲.۳}$$

که در آن $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ و $t \geq 0$. $\mathbf{x}(t) = [x_i(t)]^\top$ بردار وضعیت یا حالت[۲] نامیده می‌شود. چنین دستگاهی یک دستگاه وابسته به زمان یا غیرخودگردان[۳] است. به این معنی که متغیر t به‌طور آشکار در ضابطه f ظاهر می‌شود. اگر f به‌طور صریح به t وابسته نباشد به عبارتی

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}(t)) \tag{۳.۳}$$

در این صورت سیستم را خودگردان[۴] یا مستقل از زمان نامند. به چنین دستگاه معادله دیفرانسیلی که بردار وضعیت آن با تغییر زمان تغییر می‌کند، یک سیستم دینامیکی گفته می‌شود. در ادامه از نماد $\dot{\mathbf{x}}(t)$ برای نمایش مشتق $\mathbf{x}$ نسبت به زمان استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۳. (قضیه‌ی اساسی وجود و یگانگی جواب مسأله مقدار اولیه[۵]): فرض کنید D زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ و شامل نقطه $\mathbf{x}_0$ باشد و f_i تابعی به‌طور پیوسته روی $\mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر است یا به عبارتی $f_i \in C^1(\mathbb{R})$، در این صورت به ازای هر $a > 0$ که $a \in \mathbb{R}$، مسأله مقدار اولیه زیر روی بازه $[-a, a]$ جواب یگانه $\mathbf{x}(t)$ دارد:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

تعریف ۱.۱.۳. (نقطه‌ی تعادل[۵] [۵]): جواب سیستم دینامیکی (۴.۱.۳) را نقطه‌ی تعادل می‌نامیم و با $\mathbf{x}^e$ نشان می‌دهیم، هرگاه $f(\mathbf{x}^e) = 0$. لذا نقطه تعادل جوابی از سیستم $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$ است که مستقل از زمان می‌باشد.

تعریف ۲.۱.۳. (پایداری[۶] [۵]): نقطه تعادل $\mathbf{x}^e$، نقطه پایدار نامیده می‌شود هرگاه

$$\forall \varepsilon \geq 0 \quad \exists \delta > 0 \quad s.t \quad \|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^e\| < \delta \Longrightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^e\| < \varepsilon \quad \forall\, t \geq t_0$$

تعریف ۳.۱.۳. (پایداری مجانبی[۷][۵]): نقطه تعادل $\mathbf{x}^e$ به‌طور مجانبی پایدار است هرگاه پایدار باشد و $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^e$.

---
[1] Dynamical systems
[2] State vector
[3] Non-autonomous
[4] Autonomous
[5] Equilibrium Point
[6] Stability
[7] Asymptotic

تعریف ۴.۱.۳. مجموعه$M \subseteq \mathbb{R}^n$، یک مجموعه پایدار نسبت به سیستم گفته می‌شود اگر $x(t_\circ) \in M$ و $t_\circ \geq \circ$، آنگاه به ازای هر $t \geq t_\circ$، $x(t) \in M$ باشد.

یکی از بهترین روش‌ها برای تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی روش لیاپانف[۱] است. این روش برای سیستم‌های خطی و غیرخطی از هر مرتبه‌ای قابل استفاده است. این روش شرط کافی برای پایداری مجانبی نقطه تعادل یک سیستم دینامیکی غیرخطی را می‌دهد. به عبارتی بدون حل معادلات وضعیت سیستم، می‌توان پایداری نقطه تعادل سیستم غیرخطی را بررسی کرد. در واقع لیاپانف پیشنهاد کرد که ممکن است توابعی وابسته به مسیر وجود داشته باشند که خواص آن‌ها تعیین می‌کند که آیا مسیر به یک نقطه‌ی ساکن همگرا می‌شود یا خیر. چنین تابعی به‌عنوان تابع انرژی برای سیستم دینامیکی در نظر گرفته می‌شود که به تابع لیاپانف نیز معروف است.
قضیه‌ی لیاپانف به‌طور مختصر بیان می‌کند که نقطه‌ی تعادل یک سیستم دینامیکی به‌طور مجانبی پایدار است هرگاه یک تابع لیاپانف در همسایگی این نقطه وجود داشته باشد.

تعریف ۵.۱.۳. ([۵]): تابع لیاپانف تابعی مانند $E(\mathbf{x}(t))$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. $E(\mathbf{x}(t))$ و مشتقات جزئی مرتبه اول آن همگی پیوسته باشند، به عبارت دیگر $E(\mathbf{x}(t)) \in C^1$

۲. $E(\mathbf{x}(t)) \geqslant \circ$، به ویژه در همسایگی باز نقطه‌ی ساکن $\mathbf{x}^e$ ، $E(\mathbf{x}(t)) > \circ$ و $E(\mathbf{x}^e) = \circ$

۳. مشتق تابع $E(\mathbf{x}(t))$ نسبت به زمان منفی است، به عبارت دیگر:

$$\frac{dE(\mathbf{x}(t))}{dt} = \left[\nabla_{\mathbf{x}(t)} E(\mathbf{x}(t))\right]^\top \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \left[\nabla_{\mathbf{x}(t)} E(\mathbf{x}(t))\right]^\top \cdot f(\mathbf{x}(t)) < \circ, x \in \Omega - \{\mathbf{x}^e\}$$

و در نقطه‌ی تعادل $\mathbf{x}^e$ داریم $\frac{dE(\mathbf{x}^e)}{dt} = \circ$

قضیه ۲.۱.۳. ([۵]): فرض کنید که $x = \circ$ یک نقطهٔ تعادل برای سیستم $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$ و تابع $E : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ به‌طور پیوسته مشتق پذیر باشد. اگر

۱. $E(\circ) = \circ$

۲. به ازای هر $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\circ\}$ ، $E(x) > \circ$

۳. به ازای هر $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\circ\}$، $\dot{E}(x) \leq \circ$

آنگاه $x = \circ$ نقطه‌ی پایداری سیستم خواهد بود و $E(x)$ را« تابع لیاپانوف» یا «تابع انرژی» برای سیستم ذکرشده نامیم.

قضیه ۳.۱.۳. ([۵]): نقطه‌ی تعادل سیستم $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$ به‌طور سراسری پایدار است اگر یک تابع لیاپانف متناظر با این سیستم وجود داشته باشد و در یک همسایگی نقطه‌ی تعادل $\mathbf{x}^e$، $\frac{dE(\mathbf{x}(t))}{dt} < \circ$.

[1] Lyapunov

ملاحظه می‌شود که اگر $\frac{dE(\mathbf{x}(t))}{dt} \leq \circ$ باشد، آن‌گاه $\mathbf{x}^e$ پایدار است ولی الزاماً به‌طور مجانبی پایدار نیست.

تعریف ۶.۱.۳. نگاشت $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ در شرط لیپ‌شیتز[1] صدق می‌کند اگر عدد ثابت L وجود داشته باشد، به‌طوریکه برای هر دو نقطه $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$\| F(x) - F(y) \| \leq L \| x - y \|$$

F را لیپ‌شیتز محلی روی $\mathbb{R}^n$ نامیم اگر به ازای هر نقطه از $\mathbb{R}$، یک همسایگی مانند $D_\circ \subset \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد، به‌طوری که عدد ثابت $L_{D_\circ}$ وجود داشته باشد که در نامساوی بالا برای هر دو نقطه $x, y \in D_\circ$ صدق کند.

تعریف ۷.۱.۳. تابع $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را یکنواخت[2] گوییم هرگاه

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})) \geq \circ, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \tag{۴.۳}$$

و اکیداً یکنواخت گوییم هرگاه نامساوی (۴.۳) به‌طور اکید برای $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ برقرار باشد.

لم ۱.۱.۳. ([۴۲]): اگر نگاشت F روی مجموعه محدب باز D که شامل Ω است، به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، آنگاه F یکنواخت (اکیداً یکنواخت) روی Ω است، اگر و تنها اگر ماتریس ژاکوبین $\nabla F(\mathbf{x})$ برای تمام $\mathbf{x} \in \Omega$ نیمه معین مثبت (معین مثبت) باشد.

قضیه ۴.۱.۳. ([۶]): در سیستم دینامیکی (۴.۱.۳) فرض می‌کنیم که $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع پیوسته، آنگاه برای هر $t_\circ > \circ$ و $x_\circ \in \mathbb{R}^n$، یک جواب محلی $x(t)$ به ازای $t \in [t_\circ, \tau)$ که $\tau > t_\circ$ وجود دارد. علاوه بر این اگر f در$x_\circ$ در شرط لیپ‌شیتز محلی صدق کند آنگاه جواب یکتا خواهد بود و اگر f در $\mathbb{R}^n$ در شرط لیپ‌شیتز صدق کند آنگاه τ می‌تواند تا $+\infty$ توسعه داده شود.

[1] Lipschitz [2] Monotone

فصل ۴

یک مدل شبکه عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم محدب

۱.۴ مقدمه

در این فصل یک مدل شبکه عصبی بر اساس نظریه دوگانگی، نظریه بهینه‌سازی، نظریه تحلیل محدب، نظریه لیاپانوف و اصل لاسال برای حل مسائل برنامه ریزی مخروط مرتبه دوم محدب[۱] بررسی می‌شود. مطابق قضیه نقطه زینی نشان داده می‌شود که، نقطه تعادل شبکه عصبی پیشنهادی معادل جواب بهینه مسأله مخروطی مرتبه دوم محدب است. با بکارگیری روش تابع لیاپانوف، نشان داده می‌شود مدل شبکه عصبی پیشنهادی به مفهوم لیاپانوف پایدار است و به‌صورت سراسری به جواب بهینه دقیق مسأله بهینه سازی اصلی همگرا می‌شود. نتایج شبیه سازی نشان می‌دهد شبکه عصبی پیشنهادی کارا است.

[1]Convex Second Order Cone Programming (CSOCP)

صورت کلی مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم محدب را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\text{minimize} \quad f(x) \tag{۱.۴}$$

$$\text{s.t.}$$

$$Ax + b \succeq \kappa \tag{۲.۴}$$

$$x \geq 0 \tag{۳.۴}$$

که درآن $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ یک تابع سره بسته‌ی محدب است، A یک ماتریس $m \times n$ است که $m \geq n$ و b برداری در $\mathbb{R}^m$ است، $x \succeq \kappa$ به این معنی است که $x \in \kappa$ و κ حاصلضرب دکارتی از مخروط‌های مرتبه دوم است، که مخروط لورنتس نامیده می‌شوند [۴۴]. به عبارت دیگر

$$\kappa = \kappa^{n_1} \times \kappa^{n_2} \times \cdots \times \kappa^{n_r}$$

که در آن $r, n, ..., n \geq 1$ با $n_1 + \cdots + n_r = n$ و

$$\kappa^{n_i} \colon = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_i - 1} | x_1 \geq \|x_2\|\} \tag{۴.۴}$$

که $\|.\|$ نرم اقلیدسی $(\|.\|_2)$ و κ^1 مجموعه‌ای از $\mathbb{R}_+$ حقیقی نامنفی است. وقتی f به تابعی خطی کاهش می‌یابد، مثلا $f(x) = c^T x$ برای $c \in \mathbb{R}^n$، (۳.۴)_(۱.۴) تبدیل به برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم استاندارد می‌شود.

برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم گستره وسیعی از کاربردها را در رشته‌هایی مانند مهندسی، کنترل و دارایی برای بهینه‌سازی دقیق و بهینه‌سازی ترکیبی در بردارد. در [۴۵] روش‌های مختلفی برای حل این مسأله پیشنهاد شده که شامل روش‌های نقطه داخلی [۴۶] و روش‌های هموارسازی نیوتن [۴۷] است. این روش‌ها همگی با فرمول‌بندی مجدد شرایط بهینگی KKT [۱] به عنوان سیستمی از معادلات یا یک مسأله مینیمم‌سازی بدون محدودیت طراحی می‌شوند. در هر حال بسیاری از سیستم‌های دینامیک مهندسی مانند بهینه‌سازی نیرو در ربات‌های چندانگشتی [۴۵] و کاربردهای کنترل [۴۸] به جواب‌های زمان واقعی نیاز دارند. مطالعات انجام شده در [۴۹] نشان می‌دهد شبکه‌های عصبی می‌توانند برای حل مسأله‌های بهینه‌سازی مختلف به کار روند. بعلاوه شبکه‌های عصبی بر اساس اجرای مداری توانایی پردازش زمان واقعی را نشان می‌دهند.

روش‌های شبکه عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند و نتایج خوبی به‌دست آمده است. در میان آن‌ها می‌توان به مو [۲] و همکاران [۵۰] و زیا [۳] و همکاران [۵۱] اشاره کرد. هرچند مدل‌های پیشنهادی به وسیله آن‌ها به متغیرهای حالت زیادی نیاز دارند که منجر به پیچیدگی زیاد این مدل‌ها می‌شوند. بنابراین انگیزه‌ای برای توسعه شبکه‌های عصبی ساده‌تر ایجاد می‌کند. کو [۴] و همکاران [۴۰] دو شبکه

[1] Karush-Kuhn-Tucker (KKT)
[2] Mu
[3] Xia
[4] Ko

عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم پیشنهاد کردند. یکی از آن‌ها بر اساس گرادیان تابع شایسته هموار است که از تابع فیشر_برمیستر استفاده می‌کند. دیگری یک شبکه عصبی با تابع تصویر است، که لیو[1] و همکاران [۵۲] و وانگ[2] و همکاران [۵۳] نشان داده‌اند این شبکه‌های عصبی با متغیرهای ثابت کمتری نسبت به موارد قبلی [۵۰] و [۵۱] پیشنهاد شده برای حل مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم همراه هستند. بعلاوه مدل آن‌ها پایدار بوده و به‌صورت سراسری به جواب همگرا می‌شود. اگر از شبکه‌های مقاله [۴۰] برای حل مسأله (۳.۴)_(۱.۴) استفاده کنیم، بعد شبکه بالاتر می‌رود. در مقایسه مسأله (۳.۴)_(۱.۴) می‌توانیم به خوبی مشاهده کنیم دامنه مسأله (۳.۴)_(۱.۴) وسیع‌تر از دامنه مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم در [۴۰] است. نقص دیگر این است که ساختارهای مدل پیشنهاد شده در [۴۰] پیچیده‌تر بوده و ساده‌سازی بیشتری می‌تواند به‌دست آید. بنابراین براساس تحلیل بالا، پیشنهاد یک شبکه عصبی موثر برای حل مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم با ساختاری ساده، پایداری خوب و نتایج همگرایی، ضروری و مهم است.

با توجه به بحث‌های گفته شده، در فصل پیش رو یک شبکه عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی مخروطی محدب مرتبه دوم پیشنهاد خواهد شد. مسأله (۳.۴)_(۱.۴)ابتدا به یک مسأله برنامه‌ریزی محدب غیرخطی[3] با محدودیت‌های مساوی و نامساوی تبدیل می‌شود، که درآن با تکنیک هموارسازی، محدودیت‌های مخروط مرتبه دوم غیرهموار به محدودیت‌های مخروط مرتبه دوم هموار تبدیل می‌شوند. بر اساس شرایط بهینگی برنامه‌ریزی محدب، یک مدل شبکه عصبی برای حل مسأله محدب غیرخطی پیشنهاد خواهد شد. نقطه تعادل شبکه عصبی پیشنهادی معادل نقطه KKT در مسأله اصلی خواهد بود. وجود و یکتایی نقطه تعادل شبکه عصبی پیشنهادی نیز تحلیل خواهد شد. با ساختن یک تابع لیاپانوف مناسب، یک شرط کافی برای اطمینان از وجود و پایداری مجانبی سراسری برای نقطه تعادل منحصربه‌فرد شبکه عصبی پیشنهادی به‌دست خواهد آمد. مدل شبکه عصبی پیشنهادی برای حل مسائل مینیمم_ماکزیمم [۴۲] و مسأله ماکزیمم جریان [۵۴] نیز با موفقیت استفاده شده است.

۲.۴ مدل شبکه عصبی

در این بخش یک روش هموارسازی برای محدودیت‌های مخروطی مرتبه دوم و یک تکنیک فرمول‌بندی مجدد برای بیان محدودیت‌های نیمه معین به‌صورت هموار، محدب و نامساوی معرفی می‌کنیم.

واضح است که محدودیت‌های استاندارد مخروط مرتبه دوم (۴.۴) ناهموار است و ناهموار بودن ممکن است مشکلاتی ایجاد کند، از این رو از تکنیک هموارسازی برای به‌دست آوردن فرمول‌های مختلف در بیان مسأله (۳.۴)_(۱.۴) با محدودیت‌های مخروط مرتبه دوم به

[1] Liao
[2] Wang
[3] Convex Non-Linear Programming

صورت هموار و محدب استفاده می‌کنیم. یک روش کارا یک تکنیک اختلال است که در آن محدودیت‌های به‌دست آمده مخروط مرتبه دوم، هموار و محدب هستند. یک راه برای اجتناب از شکل مشتق‌ناپذیر بودن این است که به‌سادگی یک محدودیت مثبت در نرم اقلیدسی داشته باشیم، یعنی محدودیت‌های ناهموار مخروط مرتبه دوم $x \succeq \kappa^{n_i}(i = ۱,\dots,r)$ را با محدودیت‌های هموار [۳۹] جایگزین می‌کنیم:

$$\sqrt{\epsilon^۲ + \|x_۲\|^۲} \leq x_۱ \tag{۵.۴}$$

که درآن ϵ ثابت کوچکی است که معمولا حدود $۱۰^{-۶}$ انتخاب می‌شود. اختلال به‌دست آمده در محدودیت مخروط مرتبه دوم، باعث می‌شود قیود مسأله (۳.۴)ـ(۱.۴) محدب و هموار شود. با توجه به تحلیل بالا مشاهده می‌شود مسأله مخروطی مرتبه دوم محدب ناهموار (۳.۴)ـ(۱.۴) می‌تواند به مسأله بهینه‌سازی محدب هموار معادل زیر تبدیل شود:

$$\min \quad f(x) \tag{۶.۴}$$

$$\text{s.t.}$$

$$g(x) \leq ۰ \tag{۷.۴}$$

که در آن $g(x) \in \mathbb{R}^m$ یک هموارسازی از $Ax + b \succeq \kappa$ بر اساس تکنیک اختلال $-\epsilon$ (۵.۴) است. واضح است که تابع برداری $g(x)$ هموار، محدب و دوبرابر مشتق‌پذیر است.
با توجه به [۳۸] مشاهده می‌کنیم $x^* \in \mathbb{R}^n$ یک جواب بهینه از (۷.۴)ـ(۶.۴) است اگر و تنها اگر $u^* \in \mathbb{R}^m$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $(x^{*T}, u^{*T})^T$ در سیستم KKT زیر صدق کند:

$$\begin{cases} u^* \geq ۰, \quad g(x^*) \leq ۰, \quad {u^*}^T g(x^*) = ۰ \\ \nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)^T u^* = ۰ \end{cases} \tag{۸.۴}$$

در این صورت x^* را نقطه KKT از (۷.۴)ـ(۶.۴) و u^* بردار ضریب لاگرانژ متناظر با x^* می‌نامیم. علاوه براین، اگر توابع $f(x), g_۱(x), g_۲(x), \dots, g_m(x)$ محدب باشند بنابراین x^* جواب بهینه از (۷.۴)ـ(۶.۴) است، اگر و تنها اگر x^* نقطه KKT از (۷.۴)ـ(۶.۴) باشد.
اکنون فرض کنید $x(\cdot)$ و $u(\cdot)$ دو متغیر وابسته به زمان باشند. آنگاه ما مدل شبکه عصبی بازگشتی زیر با نقطه‌ی شروع $y_۰ = (x_۰, u_۰)$ را معرفی می‌کنیم:

$$\frac{dx}{dt} = -\Big(\nabla f(x) + \nabla g(x)^T (u + g(x))^+\Big) \tag{۹.۴}$$

$$\frac{du}{dt} = (u + g(x))^+ - u \tag{۱۰.۴}$$

که در آن

$$(u + g(x))^+ = \Big([u_۱ + g_۱(x)]^+, [u_۲ + g_۲(x)]^+, \dots, [u_m + g_m(x)]^+\Big)$$

$$[u_k + g_k(x)]^+ = \max\{u_k + g_k(x), ۰\}, k = ۱, ۲, \dots, m$$

برای سادگی ابتدا تعریف می‌کنیم $y=(x^T,u^T)^T\in\mathbb{R}^{n+m}$ و D^* مجموعه نقاط بهینه از (۷.۴)ـ(۶.۴) باشند، سپس $\Psi(y)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Psi(y)=\begin{bmatrix}-\left(\nabla f(x)+\nabla g^T\left(u+g(x)\right)^+\right)\\ \left(u+g(x)\right)^+-u\end{bmatrix} \tag{۱۱.۴}$$

بنابراین شبکه عصبی (۱۰.۴)ـ(۹.۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{dy}{dt}=\eta\Psi(y) \tag{۱۲.۴}$$

$$\begin{aligned}y(t_\circ)&=y_\circ \\ &=(x(t_\circ)^T,u(t_\circ)^T)^T\end{aligned} \tag{۱۳.۴}$$

که در آن η نشان‌دهنده سرعت همگرایی شبکه عصبی (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴) است.(برای سادگی، $\eta=۱$ در نظر می‌گیریم.)

لم ۱.۲.۴. $\mathbf{u}=(\mathbf{u}+\mathbf{g}(\mathbf{x}))^+$ اگر و تنها اگر

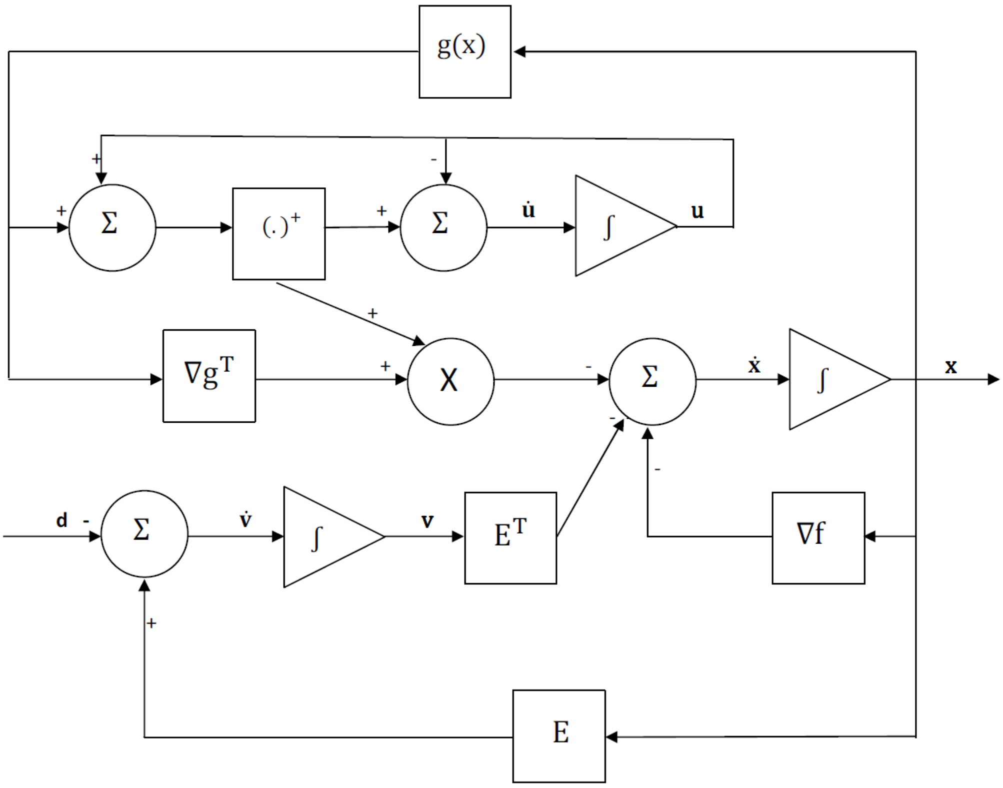
$$\mathbf{u}\geq\circ,\quad \mathbf{g}(\mathbf{x})\leq\circ,\quad \mathbf{u}^T(\mathbf{g}(\mathbf{x}))=\circ$$

برهان. اگر $\mathbf{u}=(\mathbf{u}+\mathbf{g}(\mathbf{x}))^+$ بنابراین $\mathbf{u}=\circ$ یا $\mathbf{u}>\circ$. پس حالت‌های زیر را داریم:

آ) اگر $\mathbf{u}=\circ$، پس $\left(\mathbf{u}+\mathbf{g}(\mathbf{x})\right)^+=\left(\mathbf{g}(\mathbf{x})\right)^+=\circ$؛ و در نتیجه $\mathbf{g}(\mathbf{x})\leq\circ$ و $\mathbf{u}^T(\mathbf{g}(\mathbf{x}))=\circ$.

ب) اگر $\mathbf{u}>\circ$، پس $\left(\mathbf{u}+\mathbf{g}(\mathbf{x})\right)^+=\mathbf{u}+\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{u}$؛ و در نتیجه $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\circ$ و $\mathbf{u}^T(\mathbf{g}(\mathbf{x}))=\circ$.

اثبات حالت برعکس سر راست است. □



شکل ۱.۴: بلوک دیاگرام شبکه عصبی (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴).

شکل ۱.۴ بیانگر این است که شبکه عصبی (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴) روی سخت افزار چگونه اجرا می‌شود.

۳.۴ تحلیل پایداری و همگرایی

در این بخش پایداری و همگرایی شبکه عصبی پیشنهاد شده (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴) بررسی می‌شود.

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنید $y^* = ({x^*}^T, {u^*}^T)^T$، نقطه تعادل از شبکه عصبی (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴) باشد. آنگاه y^* نقطه KKT از مسأله (۷.۴)ـ(۶.۴) است. برعکس، اگر $x^* \in \mathbb{R}^n$ جواب بهینه مسأله (۷.۴)ـ(۶.۴) باشد، آنگاه $u^* \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $y^* = ({x^*}^T, {u^*}^T)^T$ نقطه تعادل شبکه عصبی (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴) است.

برهان. فرض کنید $y^* = ({x^*}^T, {u^*}^T)^T$ نقطه تعادل شبکه عصبی (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴) باشد. آنگاه

$\frac{dx^*}{dt} = \circ$ و $\frac{du^*}{dt} = \circ$. در نتیجه

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)^T (u^* + g(x^*))^+ = \circ \tag{۱۴.۴}$$

$$\left(u^* + g(x^*)\right)^+ = u^* \tag{۱۵.۴}$$

همچنین از لم (۱.۲.۴) داریم: $u^* = (u^* + g(x^*))^+$ اگر و تنها اگر

$$u^* \geq \circ,\ g(x^*) \leq \circ,\ {u^*}^T g(x^*) = \circ \tag{۱۶.۴}$$

بنابراین، با جایگذاری (۱۵.۴) در (۱۴.۴) داریم:

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)^T u^* = \circ \tag{۱۷.۴}$$

از (۱۷.۴) و (۱۶.۴)، نتیجه می‌شود که $y^* = ({x^*}^T, {u^*}^T)^T$ در شرایط KKT صدق می‌کند و این اثبات را کامل می‌کند.

اثبات حالت برگشت سرراست است. □

لم ۱.۳.۴. ماتریس ژاکوبی $\nabla\Psi(y)$ از نگاشت Ψ تعریف شده در (۱۱.۴) یک ماتریس نیمه معین منفی است.

برهان. بدون کاستن ازکلیت مسأله، فرض می‌کنیم $\circ < p < m$ وجود دارد به‌طوریکه

$$(u + g(x))^+ = \left(u_۱ + g_۱(x), u_۲ + g_۲(x), \ldots, u_p + g_p(x), \underbrace{\circ, \circ, \ldots, \circ}_{m-p}\right) \geq \circ$$

با محاسبات ساده می‌توان نشان داد که

$$\nabla\Psi(y) = \begin{bmatrix} -\left(\nabla^۲ f(x) + \sum_{k=۱}^{p} \left((u_k + g_k)\nabla^۲ g_k^p(x)\right) + \nabla g^p(x)^T \nabla g^p(x)\right) & -\nabla g^p(x)^T \\ \nabla g^p(x) & \tau_{m\times m} \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\nabla g^p(x) = \begin{bmatrix} U_{p\times n} \\ O_{(m-p)\times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_۱}{\partial x_۱} & \cdots & \frac{\partial g_۱}{\partial x_{p-۱}} & \frac{\partial g_۱}{\partial x_p} & \frac{\partial g_۱}{\partial x_{p+۱}} & \cdots & \frac{\partial g_۱}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_۲}{\partial x_۱} & \cdots & \frac{\partial g_۲}{\partial x_{p-۱}} & \frac{\partial g_۲}{\partial x_p} & \frac{\partial g_۲}{\partial x_{p+۱}} & \cdots & \frac{\partial g_۲}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_۱} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_{p-۱}} & \frac{\partial g_p}{\partial x_p} & \frac{\partial g_p}{\partial x_{p+۱}} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \\ \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ \end{bmatrix}$$

و $\nabla^۲ g_k^p(x)$ برای $k = ۱,۲,\ldots,p$ برابر است با

$$\nabla^۲ g_k^p(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^۲ g_k}{\partial x_۱^۲} & \cdots & \frac{\partial^۲ g_k}{\partial x_۱ \partial x_{p-۱}} & \frac{\partial^۲ g_k}{\partial x_۱ \partial x_p} & \frac{\partial^۲ g_k}{\partial x_۱ \partial x_{p+۱}} & \cdots & \frac{\partial^۲ g_k}{\partial x_۱ \partial x_n} \\ \frac{\partial^۲ g_k}{\partial x_۲ \partial x_۱} & \cdots & \frac{\partial^۲ g_k}{\partial x_۲ \partial x_{p-۱}} & \frac{\partial^۲ g_k}{\partial x_۲ \partial x_p} & \frac{\partial^۲ g_k}{\partial x_۲ \partial x_{p+۱}} & \cdots & \frac{\partial^۲ g_k}{\partial x_۲ \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^۲ g_k}{\partial x_p \partial x_۱} & \cdots & \frac{\partial^۲ g_k}{\partial x_p \partial x_{p-۱}} & \frac{\partial^۲ g_k}{\partial x_p} & \frac{\partial^۲ g_k}{\partial x_p \partial x_{p+۱}} & \cdots & \frac{\partial^۲ g_k}{\partial x_p \partial x_n} \\ ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \end{bmatrix}$$

و

$$\tau_{m\times m} = \begin{bmatrix} O_{p\times p} & O_{p\times(m-p)} \\ O_{(m-p)\times p} & -I_{(m-p)\times(m-p)} \end{bmatrix}$$

که در آن O ماتریس صفر است. از [۴۳] دیده می‌شود که $\nabla g^p(x)^T \nabla g^P(x)$ یک ماتریس نیمه معین مثبت است. چون توابع $f, g_۱(x), g_۲(x), \ldots, g_m(x)$ محدب و دو برابر مشتق پذیر فرض شده‌اند، بنابراین ماتریس‌های هسین $\nabla^۲ f(x)$ و $\nabla^۲ g_k(x)$ برای $k = ۱,۲,\ldots,p$ ماتریس‌های نیمه معین مثبت هستند. بعلاوه از نیمه معین مثبت $\nabla^۲ g_k(x)$ می‌توان گفت که ماتریس‌های $\nabla^۲ g_k^P(x)$ نیمه معین مثبت هستند. همچنین واضح است که ماتریس $\tau_{m\times m}$ یک ماتریس نیمه معین منفی است. طبق توضیحات گفته شده ما می‌توانیم نتیجه بگیریم ماتریس ژاکوبی $\nabla\Psi(y)$ یک ماتریس نیمه معین منفی است.

اگر $p = m$ آنگاه $(u + g(x))^+ = \Big(u_۱ + g_۱(x), u_۲ + g_۲(x), \ldots, u_m + g_m(x)\Big)$، بنابراین

$$\nabla\Psi(y) = \begin{bmatrix} -\Big(\nabla^۲ f(x) + \sum_{k=۱}^m \Big((u_k + g_k)\nabla^۲ g_k(x)\Big) + \nabla g(x)^T \nabla g(x)\Big) & -\nabla g(x)^T \\ \nabla g^m(x) & O_{m\times m} \end{bmatrix}$$

مشابه حالت قبلی، می‌توان به‌سادگی نشان داد که $\nabla\Psi(y)$ یک ماتریس نیمه معین منفی است.

در آخر، اگر $p = ۰$ آنگاه $(u + g(x))^+ = \underbrace{(۰,۰,\ldots,۰)}_{m}$ بنابراین داریم:

$$\nabla\Psi(y) = \begin{bmatrix} -\nabla^۲ f(x) & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & -I_{m\times m} \end{bmatrix}$$

در این حالت هم، می‌توان نشان داد که $\nabla\Psi(y)$ یک ماتریس نیمه معین منفی است. این اثبات را کامل می کند. $\square$

قضیه ۲.۳.۴. مدل شبکه عصبی پیشنهاد شده در (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴) پایدار مجانبی سراسری لیاپانوف است.

برهان. تابع لیاپونوف $V:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$V(y) = \|\Psi(y)\|^۲ + \frac{۱}{۲}\|y - y^*\|^۲ \qquad (۱۸.۴)$$

از [۳۳] می‌دانیم که $\|\Psi(y)\|^۲$ یک تابع مشتق‌پذیر است. از (۱۱.۴) داریم:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \nabla\Psi(y)\Psi(y)$$

با محاسبه مشتق $V(t)$ در نقطه $y(t)$ از مدل شبکه عصبی (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴) داریم:

$$\begin{aligned}\frac{dV(y(t))}{dt} &= (\frac{d\Psi}{dt})^T\Psi + \Psi^T(\frac{d\Psi}{dt}) + (y-y^*)^T\frac{dy(t)}{dt} \\ &= \Psi^T(\nabla\Psi(y)^T + \nabla\Psi(y))\Psi + (y-y^*)^T\Psi(y)\end{aligned} \qquad (۱۹.۴)$$

با به‌کار بردن لم ۱.۳.۴ داریم:

$$\Psi^T(y)(\nabla\Psi(y)^T + \nabla\Psi(y))\Psi(y) \leq ۰, \quad \forall y \neq y^* \qquad (۲۰.۴)$$

با استفاده از تعریف (۷.۱.۳) و لم (۱.۱.۳) داریم:

$$(y-y^*)^T\big(\Psi(y) - \Psi(y^*)\big) = (y-y^*)^T\Psi(y) \leq ۰, \quad \forall y \neq y^*$$

بنابراین

$$\frac{dV\big(y(t)\big)}{dt} \leq ۰ \qquad (۲۱.۴)$$

واین بدان معنی است که شبکه عصبی (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴)، پایدار لیاپانوف است. □

لم ۲.۳.۴. نقطه تعادل شبکه عصبی پیشنهادشده (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴) یکتاست.

برهان. نشان می‌دهیم برای هر نقطه اولیه $y(t_۰) = (x(t_۰)^T, u(t_۰)^T)^T$ یک جواب پیوسته یکتا $y(t) = (x(t)^T, u(t)^T)^T$ برای سیستم (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴) وجود دارد .
از آنجا که $\nabla f(x)$ و $\nabla g_k(x)$ برای $(k = ۱, ۲, \ldots, m)$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر روی مجوعه باز $D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ هستند، بنابراین $\{\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)^T(u^* + g(x^*))^+\}$ و $\{(u^* + g(x^*))^+\}$ پیوسته لیپ‌شیتز محلی روی D هستند. باتوجه به قضیه (۱.۱.۳) درفصل دو شبکه عصبی (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴) یک جواب پیوسته یکتا $y(t), t \in [t_۰, \tau)$ برای بعضی $\tau > t_۰$ دارد. از اثبات قضیه (۲.۳.۴) می‌دانیم که V روی t یک تابع غیرصعودی است بنابراین

$$\frac{۱}{۲}\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\|^۲ \leq V(\mathbf{y}(t)) \leq V(\mathbf{y}(t_۰)), \quad \forall t \geq t_۰ \qquad (۲۲.۴)$$

این نشان می‌دهد که مسیر شبکه عصبی (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴) کراندار است. بنابراین $\tau \to +\infty$.
□

۴.۴ مثال‌های عددی

در این بخش برای روشن شدن مطالب شرح داده شده و به‌منظور نشان دادن کارایی و تأثیر شبکه عصبی پیشنهاد شده (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴)، چند مثال از مسائل برنامه‌ریزی کسری آورده شده است. همچنین برای برخی مثال‌ها، عملکرد عددی از شبکه عصبی پیشنهادی را با مقادیر گوناگون از حالت اولیه $x(0)$ مقایسه کردیم. برای شبیه‌سازی از نرم‌افزار $Matlab$ و برای به‌دست آوردن جواب واقعی مسائل از نرم‌افزار $Lingo$ استفاده شده است.

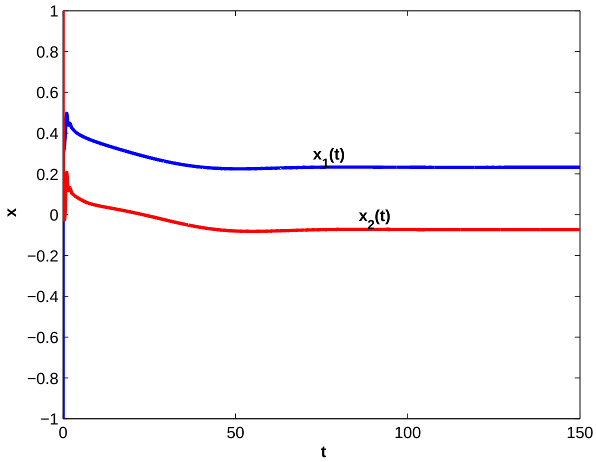
مثال ۱.۴.۴. ([۴۰]): مسأله مینیمم‌سازی زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \exp(x_1 - x_3) + 3(2X_1 - x_2)^4 + \sqrt{1 + (3x_2 + 5x_3)^2} \\ \text{s.t.} \quad & Ex = d, \quad x \in \kappa^3 \times \kappa^2 \end{aligned}$$

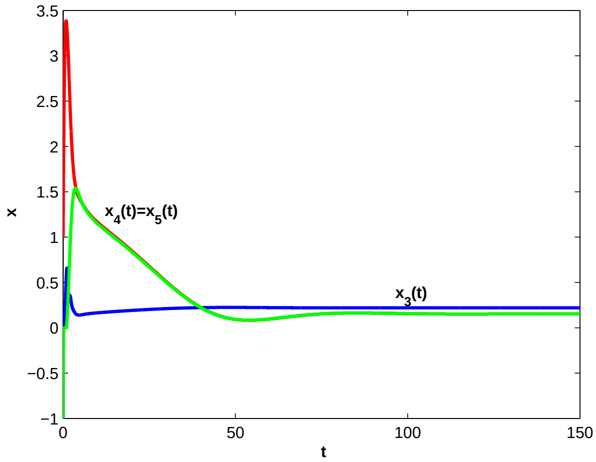
که در آن

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & -5 & 0 & -1 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

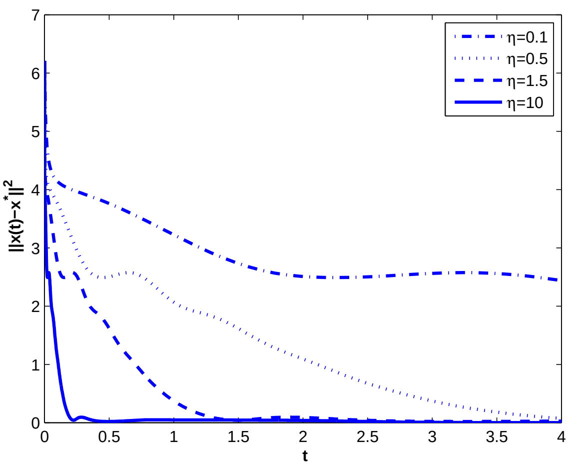
جواب بهینه برای مسأله بالا $x^* = (0/2324, -0/07309, 0/2206, 0/153, 0/153)^T$ است. شکل ۲.۴و۳.۴ نشان می‌دهد مسیر خروجی $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t))^T$ مدل پیشنهاد شده به جواب بهینه این مسأله با $\epsilon = 10^{-6}$و نقطه اولیه $x_0 = (-1, 1, -1, 1, -1)^T$ همگرا می‌شود. همچنین تأثیر پارامتر η در شبکه عصبی (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴) را بر ارزش $\|x(t) - x^*\|^2$ آزمایش می‌کنیم. با توجه به‌شکل ۴.۴ مشاهده می‌کنیم η بزرگتر، نرخ همگرایی بهتری از خطای $\|x(t) - x^*\|^2$ ارائه می‌دهد.



شکل ۲.۴: رفتار پایدار $x_1(t)$ و $x_2(t)$ با نقطه شروع $x_0 = (1,-1,1,-1,1)^T$ در مثال ۱.۴.۴



شکل ۳.۴: رفتار پایدار $x_3(t)$ و $x_4(t)$ و $x_5(t)$ با نقطه شروع $x_0 = (-1,1,-1,1,-1)^T$ در مثال ۱.۴.۴



شکل ۴.۴: رفتار همگرایی $\|x(t) - x^*\|^2$ با نقطه شروع $x_0 = (-1,1,-1,1,-1)^T$ در مثال ۱.۴.۴

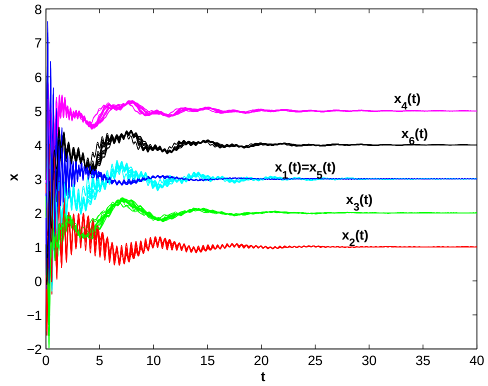
مثال ۲.۴.۴. ([۴۰]): مسأله مینیمم‌سازی زیر را داریم:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ \text{s.t.} & Ex = d, \quad x \in \kappa^3 \times \kappa^2 \end{array}$$

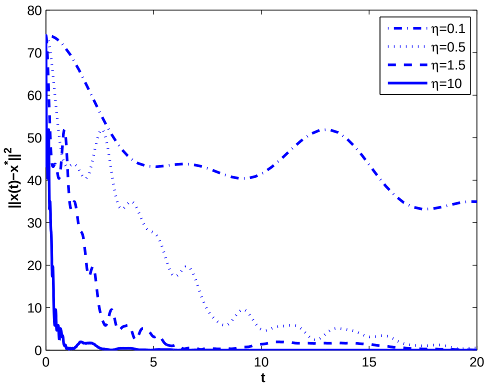
که در آن

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \\ 6 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

جواب بهینه برای این مسأله $x^* = (3,1,2,5,3,4)^T$ است. با استفاده از قضیه (۲.۳.۴) نتیجه می‌شود مدل گفته شده در (۱۳.۴)ـ(۱۲.۴) به‌طور سراسری به جواب بهینه منحصربه‌فرد x^* همگرا می‌شود. مثلا در شکل ۵.۴ رفتار پایدار مسیر خروجی را بر اساس مدل دینامیک پیشنهادی با۲۰ نقطه اولیه تصادفی و $\epsilon = 10^{-6}$ نشان می‌دهد. می‌توان به سادگی بررسی کرد اگر نقطه اولیه داخل یا خارج ناحیه شدنی باشد شبکه پیشنهادی همیشه به جواب بهینه x^* همگرا می‌شود. شکل ۶.۴ رفتار همگرایی مکانی خطای $\|x(t) - x^*\|^2$ را با مقادیر مختلف η و حالت اولیه $x_0 = (1, -1, 1, -1, 1)^T$ نشان می‌دهد. می‌توان بررسی کرد η بزرگتر منجر به همگرایی بهتر می‌شود.



شکل ۵.۴: رفتار پایدار $x_۱(t), x_۲(t), x_۳(t), x_۴(t), x_۵(t)$ و $x_۶(t)$ با ۲۰ نقطه شروع مختلف در مثال ۲.۴.۴



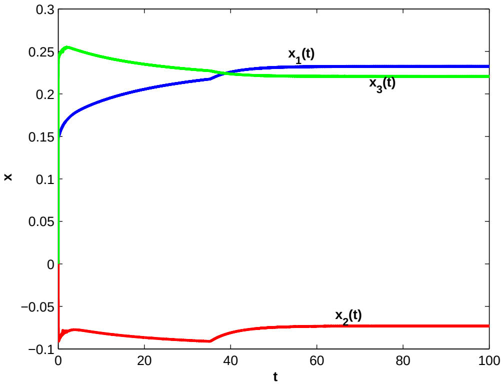
شکل ۶.۴: رفتار همگرایی $\|x(t) - x^*\|^۲$ با نقطه شروع $x_۰ = (۱, -۱, ۱, -۱, ۱)^T$ در مثال ۲.۴.۴

مثال ۳.۴.۴. ([۴۱]): مسأله مینیمم‌سازی زیر را داریم:

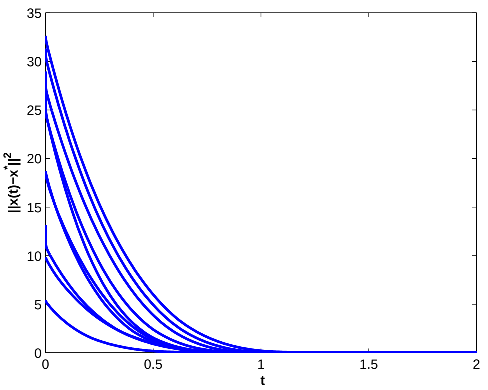
$$\min \quad \exp(x_۱ - x_۳) + ۳(۲x_۱ - x_۲)^۴ + \sqrt{۱ + (۳x_۲ + ۵x_۳)^۲}$$

$$\begin{bmatrix} ۴x_۱ + ۶x_۲ + ۳x_۳ - ۱ \\ -x_۱ + ۷x_۲ - ۵x_۳ + ۲ \\ x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} \in \kappa^۲ \times \kappa^۳$$

جواب بهینه این مسأله $x^* = (۰/۲۳۲۳, -۰/۰۷۳۱, ۰/۲۲۰۶)^T$ است. شبکه عصبی پیشنهاد شده در (۱۲.۴)_(۱۳.۴) را برای حل این مسأله به‌کار می‌بریم. نتایج شبیه‌سازی در شکل ۷.۴ مسیر (۱۲.۴)_(۱۳.۴) را با نقطه شروع $x_۰ = (۰, ۰, ۰)^T$ با $\epsilon = ۱۰^{-۶}$ نشان می‌دهد. $l_۲$ خطای نرم بین x و x^* با ۱۰ نقطه شروع مختلف نیز در شکل ۸.۴ نشان داده می‌شود.



شکل ۷.۴: رفتار پایدار $x_۱(t), x_۲(t)$ و $x_۳(t)$ با نقطه شروع $x_\circ = (\circ, \circ, \circ)^T$ در مثال ۳.۴.۴



شکل ۸.۴: رفتار همگرایی $\|x(t) - x^*\|^۲$ با ۱۰ نقطه شروع مختلف در مثال ۳.۴.۴

فصل ۵

مدل‌سازی مسأله بهینه‌سازی سبدسهام توسط معیار موازنه احتمال_اعتبار

۱.۵ مقدمه

در این فصل، مسأله انتخاب سبدسهام در سیستم‌های تصمیم‌گیری نامطمئن هیبرید را بررسی می‌کنیم. ابتدا نرخ‌های بازده با متغیرهای فازی تصادفی تعریف می‌شوند. هدف ماکزیمم کردن نرخ بازده کل موردانتظار است. برای یک متغیر فازی تصادفی یک مقدار ریسک موازنه[1] (ERV) جدید با بتا سطح اعتبار و آلفا سطح احتمال تعریف می‌کنیم. درنتیجه مسأله سبدسهام ما به‌صورت یک مدل مقدار موردانتظار[2] (EV) فازی تصادفی جدید در معرض محدودیت مقدار ریسک موازنه ساخته می‌شود که آن را مدل EV-ERV می‌نامیم.

تحت فرضیات بیان شده، مدل EV-ERV پیشنهادی یک مسأله برنامه‌ریزی محدب است. بعلاوه هنگامی که توزیع‌های احتمال به‌صورت مثلثی، ذوزنقه‌ای و نرمال است، مدل EV-ERV می‌تواند به مدل‌های برنامه‌ریزی محدب قطعی معادل خود تبدیل شود. برای اثبات کارایی شیوه بهینه‌سازی موازنه پیشنهادی، بعضی مثال‌های عددی بیان می‌شود. نتایج محاسباتی

[1] Equilibrium Risk Value(ERV)

[2] Expected Value(EV)

و مقایسه نشان می‌دهد روش بهینه‌سازی موازنه برای مدلسازی مسأله بهینه‌سازی انتخاب سبدسهام با نرخ‌های بازده نامطمئن قابل اعتماد است. براساس معیار میانگین–واریانس، مارکویتز[1] [۷۵] ابتدا نظریه سبدسهام را مطرح کرد. در مدل میانگین–واریانس مارکویتز، بازده‌های اوراق مجزا به‌عنوان متغیرهای تصادفی درنظر گرفته شد و مقدار موردانتظار و واریانس بازده تصادفی به‌ترتیب بازده سرمایه و ریسک درنظر گرفته شدند. نظریه میانگین–واریانس به‌صورت گسترده به‌عنوان ابزاری برای ساخت مسائل بهینه‌سازی سبدسهام پذیرفته شده است و کارهای بعدی، شیوه میانگین–واریانس را توسعه داده‌اند. مارکویتز [۷۶] واریانس را با نیمه‌واریانس به‌عنوان اندازه‌گیری ریسک جایگزین کرد. نیمه واریانس یک بهبود واریانس است که به ما امکان می‌دهد نرخ بازده موردانتظار بالاتری تحت همان سطح از ریسک به‌دست آوردیم. کانو و یامازاکی[2] [۷۷] از مدل میانگین–انحراف قطعی در بازار سهام توکیو استفاده کردند. سیمان[3] [۷۸] نشان داد خطای تخمین در مدل میانگین واریانس و مدل میانگین انحراف قطعی بزرگ است و در نمونه‌های کوچک و برای سرمایه‌گذارانی با تحمل ریسک بالا، شدید است.

به‌منظور تشریح نوسانات عادی در بازار، مفهوم ارزش درمعرض ریسک[4] (VaR) به‌عنوان سنجش ریسک به کار رفت. VaR حداکثر زیان احتمالی یک دارایی مالی یا سبدسهام اوراق بهادار است. در سال‌های اخیر VaR به تدریج به‌عنوان یک ابزار مثبت مدیریت ریسک پیشرفت کرده و نقش مهمی در مسائل بهینه‌سازی سبدسهام ایفا می‌کند. جورین[5] [۷۹] VaR را به‌عنوان معیار ریسک مطالعه کرد و مدل میانگین–VaR را در مهندسی مالی به‌کار برد. مدل‌های میانگین–واریانس–انحراف در [۸۰] نیز برای مطالعه مسأله انتخاب سبدسهام پیشنهاد شد. بعلاوه روش‌های دیگری نیز برای مشخص کردن ریسک وجود دارد. هنگامی که این محدودیت که یک دارایی نمی‌تواند برای فواصل زمانی نامشخص معامله شود، منجر به ریسک می‌شود، یک مدل از تخصیص بهینه به دارایی‌های نقد و غیرنقد توسط آنگ[6] و همکاران [۵۶] پیشنهاد شد. شن[7] و همکاران [۵۷] در مورد مسأله انتخاب سبدسهام میانگین–واریانس تحت مدل واریانس کشش ثابت[8] بحث کرده و عبارت‌های صریح استراتژی سبدسهام بهینه، تابع ارزش و مرز کارآیی مسأله میانگین–واریانس را بیان کردند.

روش‌های متداول سبدسهام فرض می‌کند که بازده‌های اوراق متغیرهای تصادفی هستند. توزیع‌های احتمال متغیرهای تصادفی معمولا از داده‌های تاریخی حاصل می‌شوند. هرچند، درمحیط سرمایه‌گذاری واقعی، بازده‌های اوراق اغلب با ابهام همراه است. از زمان کار اولیه زاده[9] [۸۱] موفقیت‌های بسیاری براساس نظریه فازی به‌دست آمده است. واتادا[10] [۵۸] درباره انتخاب سبدسهام با استفاده از نظریه تصمیم فازی بحث می‌کند. تاناکا و گو[11] [۵۹] از توزیع‌های احتمال برای مدل‌سازی بازده‌های نامطمئن استفاده کردند. انوگوچی و رامیک[12]

---
[1] Markowitz
[2] Konno and Yamazaki
[3] Simaan
[4] Value-at-Risk
[5] Jorion
[6] Ang
[7] Shen
[8] constant elasticity of variance model
[9] Zadeh
[10] Watada
[11] Tanaka and Guo
[12] Inuiguchi and Ramik

[۶۰] معایب و مزایا روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی فازی را در تنظیم مسأله انتخاب سبدسهام بهینه ارائه کردند. هنگامی که بازده‌های سهام به عنوان اعداد فازی ذوذنقه‌ای در نظر گرفته می‌شوند، یک روش احتمال برای انتخاب سبدسهام‌هایی با بیشترین مقدار سودمندی توسط کارلسون[1] و همکاران [۶۱] ارائه شد. با توجه به هزینه‌های معامله، فانگ[2] و همکاران [۶۲] یک مدل متعادل سازی مجدد سبدسهام براساس نظریه تصمیم فازی پیشنهاد دادند.

مدل‌های میانگین‌ـواریانس برای مسائل انتخاب سبدسهام فازی توسط چن[3] و همکاران [۶۳] و ژانگ[4] و همکاران [۶۴] ساخته شد. کین[5] و همکاران [۶۵] درباره مدل حداقل رسانی آنتروپی‌ـمتقاطع کاپور برای مسأله انتخاب سبدسهام در محیط فازی بحث کرده‌اند. داستخان[6] و همکاران [۶۶] یک مدل انتخاب سبدسهام توسط عامل وزنی حداکثرـحداقل را مطالعه کرده‌اند. وو و لیو[7] [۶۷] یک شیوه دقیق برای شرح بازده‌های فازی با بکارگیری توزیع‌های احتمال پارامتری ایجادکردند. چن[8] و همکاران [۶۸] نیمه انحراف مطلق را به‌عنوان اندازه ریسک جدید به‌کاربرده و سه‌گروه مدل‌های بهینه‌سازی سبدسهام را ایجاد کرده‌اند.

کامدم[9] و همکاران [۶۹] مفاهیم گشتاور و نیمه‌گشتاورها را برای مسائل سبدسهام اعتبار محور معرفی کردند تا کشیدگی[10] بازده سبدسهام اعتباری را اندازه‌گیری کرده و یک مدل میانگین‌ـواریانس‌ـانحراف‌ـنیمه‌کشیدگی[11] معرفی کردند. مهلاوات و گوپتا[12] [۷۰] مسأله انتخاب سبدسهام فازی را از لحاظ شانس بررسی کردند و برنامه‌ریزی چندهدفی را محدود ساختند. دنگ و لی[13] [۷۱] مدل انتخاب سبدسهام غیرخطی دوهدفی را پیشنهاد دادند که قصد داشت بازده موردانتظار آینده را به حداکثر رسانده و ریسک موردانتظار آینده را به حداقل برساند. همچنین یک روش محدودیت مقاوم تدریجی را برای حل این مدل پیشنهاد دادند. لی[14] و همکاران [۷۲] یک مدل انتخاب سبدسهام فازی را با ریسک پیش زمینه توسعه دادند. چن و وانگ[15] [۷۳] با درنظر گرفتن هزینه معامله، یک مدل فازی دومرحله‌ای را برای مسأله انتخاب سبدسهام را پیشنهاد کردند. برای مسائل انتخاب سبدسهام فازی، شیوه‌های بهینه‌سازی مختلف دیگری نیز وجود دارد.

در بازارهای مالی مدرن، نه تنها تصادفی بودن وجود دارد بلکه فازی بودن نیز برفرآیند تصمیم‌گیری کل تأثیر می‌گذارد. براساس کارهای انجام شده در بالا در این فصل مسأله انتخاب سبدسهام با تصادفی و فازی بودن همزمان در نظر گرفته می‌شوند و مدل‌سازی می کند. هانگ[16] [۷۴] انتخاب سبدسهام را در محیط فازی تصادفی مطالعه کرد و دو مدل انتخاب سبدسهام را با بازده‌های فازی تصادفی پیشنهاد کرد. ما شیوه بهینه‌سازی موازنه [۸۲] را برای مدل‌سازی مسائل انتخاب سبدسهام به‌کار می‌گیریم. به‌منظور یکی کردن عدم قطعیت‌های ناشی از آگاهی ذهنی[17] و عوامل عینی[18]، متغیرهای فازی تصادفی [۸۳] برای مشخص کردن

---

[1] Carlsson
[2] Fang
[3] Chen
[4] Zhang
[5] Qin
[6] Dastkhan
[7] Wu and Liu
[8] Chen
[9] Kamdem
[10] leptokurtocity
[11] semikurtosis
[12] Mehlawat and Gupta
[13] Deng and Li
[14] Li
[15] Chen and Wang
[16] Huang
[17] subjective consciousness
[18] objective factors

نرخ‌های بازده به‌کار می‌رود. دراین حالت، نرخ‌های بازده سهام، متغیرهای تصادفی با اطلاعات فازی فرض می‌شوند. در این فصل مقدار موردانتظار [۸۴] (EV) را برای معرفی بازده سرمایه بکار گرفته و یک شاخص جدید به نام مقدار ریسک موازنه (ERV) نرخ بازده فازی تصادفی برای اندازه‌گیری ریسک سرمایه‌گذاری معرفی می‌شود. سپس یک مدل فازی تصادفی EV-ERV برای مسأله انتخاب سبدسهام پیشنهاد می‌شود. از آنجا که چنین مدل‌های بهینه‌سازی که هم فازی باشد و هم تصادفی به سختی حل می‌شوند، الگوریتم‌های ابتکاری[1] اغلب برای حل مدل‌های بهینه‌سازی پیشنهادی طراحی می‌شوند. مزایای چارچوب بهینه‌سازی موازنه پیشنهادی، تبدیل مسائل بهینه‌سازی سبدسهام موازنه اصلی به مسأله قابل ردیابی محاسباتی است. ابتدا مدل پیشنهادی به یک مدل بهینه‌سازی اعتبارمحور معادل تبدیل می‌شود. سپس مدل اعتبارمحور به یک مدل برنامه‌ریزی محدب معادل تحت فرضیات ساده در پارامترهای فازی تبدیل می‌شود.

ابتدا در این فصل یک مقدار ریسک موازنه جدید با بتا سطح اعتماد و آلفا سطح احتمال تعریف می‌شود تا ریسک سرمایه‌گذاری را اندازه بگیرد. اندازه ریسک به‌کار رفته، عدم‌قطعیت تصادفی بودن و فازی بودن را همزمان تعیین کند. این روش تحلیل کیفی و کمی درباره عدم‌قطعیت نرخ بازده را نشان می‌دهد. مدل پیشنهادی EV-ERV یک روش بهینه‌سازی سودمند برای سرمایه‌گذار عملی است. همچنین، جواب بهینه سراسری از مدل پیشنهادی EV-ERV به‌دست می‌آید. در موردی که تصادفی بودن نرخ‌های بازده نامطمئن، توزیع‌های نرمال با ماتریس کواریانس قطعی را دنبال می‌کند و فازی بودن با متغیرهای فازی ذوذنقه‌ای، مثلثی یا نرمال مشخص می‌شود، مدل پیشنهادی EV-ERV به مدل‌های برنامه‌ریزی محدب آن تبدیل می‌شود. بعلاوه، وقتی تصادفی بودن بردار نرخ بازده نامشخص، توزیع نرمال چندمتغیری را دنبال می‌کند، ماتریس کواریانس می‌تواند تعاملات و درجات همبستگی بین اوراق بهادار را منعکس کند.
پس از معرفی شاخص جدیدی به نام ERV برای متغیر فازی تصادفی، مدل فازی تصادفی EV-ERV برای مسائل انتخاب سبدسهام معرفی می‌شود. سپس تحت مفروضاتی درباره توزیع‌های احتمال و امکان، ثابت می‌شود مدل بهینه‌سازی موازنه EV-ERV یک برنامه‌ریزی محدب است و به مدل‌های برنامه‌ریزی محدب معادل تحت سه حالت می‌پردازد. در نهایت مقایسه‌هایی از طریق آزمایش‌های عددی انجام می‌دهیم. تحلیل حساسیت درباره پارامترهای مدل ارائه کرده و رابطه بین ERV و EV را نشان می‌دهیم.

[1] heuristic

۲.۵ مسأله انتخاب سبدسهام موازنه

۱.۲.۵ متغیر فازی_ تصادفی

تعریف ۱.۲.۵. ([۸۳]): فرض کنید $(\Gamma, \mathscr{P}(\Gamma), Cr)$ فضای اعتبار و (Ω, Σ, Pr) فضای احتمال باشد. اگر ξ نگاشتی باشد که روی $\Gamma \times \Omega$ تعریف شده، به گونه‌ای که برای هر $\gamma \in \Gamma$، $\xi(\gamma, \omega)$ به‌عنوان تابعی از ω، یک متغیرتصادفی در فضای احتمال (Ω, Σ, Pr) تعریف شود، آنگاه می‌توان ξ را یک متغیر فازی_ تصادفی نامید.

اگر $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ متغیرهای فازی_ تصادفی باشند که در فضای Γ تعریف می‌شوند، آنگاه $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ یک بردار فازی_ تصادفی است که در فضای Γ تعریف می‌شود.
توزیع نرمال چندمتغیری $\mathscr{N}(\mu, \Sigma)$ با میانگین نامشخص μ و کواریانس Σ مثالی از بردار فازی تصادفی است. در این مورد، اجزای μ و Σ به‌صورت متغیرهای فازی تعریف می‌شوند که توزیع‌های امکان مشخص دارند.

تعریف ۲.۲.۵. ([۸۴]): فرض کنید ξ یک متغیر فازی_ تصادفی باشد. مقدار موردانتظار $E[\xi]$ از ξ به‌صورت انتگرال فازی زیر تعریف می‌شود:

$$E[\xi] = \int_{0}^{+\infty} Cr\Big\{\gamma \in \Gamma \Big| E[\xi_\gamma] \geq r\Big\}dr - \int_{-\infty}^{0} Cr\Big\{\gamma \in \Gamma \Big| E[\xi_\gamma] \leq r\Big\}dr \qquad (۱.۵)$$

که درآن $E[\xi_\gamma]$ مقدار موردانتظار از متغیر تصادفی ξ_γ برای هر $\gamma \in \Gamma$ معلوم است.

تعریف ۳.۲.۵. ([۸۲]): فرض کنید $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ بردار فازی_ تصادفی باشد و $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابع پیوسته برای $j = 1, 2, \ldots, m$ است. آنگاه شانس توازن Ch از رویداد فازی تصادفی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &Ch\Big\{f_j(\xi) \leq 0, j = 1, 2, \ldots, m\Big\} = \\ &\sup_{(\alpha,\beta)\in[0,1]^2} \Bigg\{\alpha \wedge \beta \Big| Cr\Big\{\gamma \in \Gamma \Big| \Pr\{f_j(\xi(\gamma)) \leq 0, j = 1, 2, \ldots, m\} \geq \alpha\Big\} \geq \beta\Bigg\} \end{aligned} \qquad (۲.۵)$$

معادله (۲.۵) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$\begin{aligned} &Ch\Big\{f_j(\xi) \leq 0, j = 1, 2, \ldots, m\Big\} = \\ &\sup_{\alpha\in[0,1]} \Bigg\{\alpha \wedge Cr\Big\{\gamma \in \Gamma \Big| \Pr\{f_j(\xi(\gamma)) \leq 0, j = 1, 2, \ldots, m\} \geq \alpha\Big\}\Bigg\} \end{aligned} \qquad (۳.۵)$$

با توجه به‌ویژگی شانس موازنه [۵۵]، در مورد $\alpha = \beta$ داریم:

$$Cr\Big\{\gamma \Big| \Pr\{\xi_\gamma \geq z\} \geq \alpha\Big\} \geq \alpha \Longleftrightarrow Ch\{\xi \geq z\} \geq \alpha \qquad (۴.۵)$$

سپس مقدار ریسک موازنه برای متغیر فازی تصادفی را معرفی می‌کنم.

تعریف ۴.۲.۵. ([۵۵]): فرض کنید ξ یک متغیر فازی_ تصادفی باشد. مقدار ریسک موازنه ξ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$VaR_{(\alpha,\beta)}(\xi) = \sup\Big\{z\big|\, Cr\Big\{\gamma\big|\ \Pr\left\{\omega|\xi_\gamma(\omega) \geq z\right\} \geq \alpha\Big\} \geq \beta\Big\} \tag{۵.۵}$$

که درآن α و β سطوح اطمینان معلوم هستند و مقادیرشان در بازه $[0,1]$ است.

در (۵.۵) معانی پارامترهای α و β متفاوت است:
اگر متغیرفازی_ تصادفی ξ به یک متغیرتصادفی کاهش یابد، آنگاه مقدار ریسک موازنه تعریف شده در (۵.۵) به معادله زیر کاهش می‌یابد:

$$\xi_{\sup}(\alpha) = \sup\Big\{z\big|\Pr\left\{\omega|\xi(\omega) \geq z\right\} \geq \alpha\Big\} \tag{۶.۵}$$

که α مقدار خوش‌بینانه از متغیر تصادفی ξ است. از سوی دیگر، اگر متغیر فازی_ تصادفی ξ به متغیر فازی کاهش یابد، آنگاه مقدار ریسک موزانه در (۵.۵) به معادله زیر تغییر می‌یابد:

$$\xi_{\sup}(\beta) = \sup\Big\{z|Cr\{\gamma|\xi(\gamma) \geq z\} \geq \beta\Big\} \tag{۷.۵}$$

که β مقدار خوش‌بینانه از متغیر فازی ξ است. بنابراین مقدار ریسک موازنه متغیر فازی تصادفی، یک بسط[1] از مقدار خوش‌بینانه متغیرتصادفی و مقدار خوش‌بینانه متغیر فازی است.

۲.۲.۵ تدوین مدل بهینه‌سازی موازنه

با توسعه سریع جامعه و اقتصاد، سرمایه‌گذاران بیشتری متوجه اهمیت مسأله بهینه‌سازی سبدسهام تحت عدم‌قطعیت می‌شوند. آن‌ها امیدوارند از سرمایه‌های محدود برای کسب حداکثر سود استفاده کنند و همزمان ریسک سرمایه‌گذاری را تا حد ممکن به حداقل برسانند. درهرحال تحت اقتصاد بازار، عوامل نامطمئن زیادی بر بازارسرمایه اثر می‌گذارند. بنابراین عدم‌قطعیت‌ها باید درطول فرآیند مدل‌سازی درنظر گرفته شود.

یک سرمایه‌گذار منطقی باید حداکثر سود را با حداقل ریسک در نظر بگیرد. در فرآیند سرمایه‌گذاری واقعی، سرمایه‌گذاران برای افزایش بازده سرمایه خود باید ریسک بیشتری را تحمل کنند؛ ریسک کمتر متناظر با بازده سرمایه کمتر است. یعنی سرمایه‌گذاران باید یک رابطه جایگزینی بین بازده سرمایه و ریسک بسازند. فرض کنید سرمایه‌گذار مجموعه‌ای از n دارایی ریسکی انتخابی دارد. نرخ بازده سرمایه به نتیجه تقسیم درآمد خالص بر سرمایه‌های اولیه اشاره دارد. از متغیر فازی_ تصادفی η_i برای نشان دادن نرخ بازده دارایی ریسکی iام که $i = 1,2,\ldots,n$ استفاده می‌کنیم. آنگاه $\eta = (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$ بردار نرخ بازده است. وقتی نرخ‌های بازده دارایی‌ها با توزیع نرمال مشترک $\mathcal{N}(\mu,\Sigma)$ مشخص شود، پارامترهای فازی μ

[1] extension

و Σ به‌ترتیب به‌عنوان میانگین بردار نرخ بازده و همبستگی‌های میان نرخ‌های بازده دارایی‌ها درنظر گرفته می‌شوند.

فرض کنید x_i نسبت سرمایه‌گذاری برای دارایی ریسکی iام باشد و $x = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ بردار نسبت سرمایه‌گذاری است به‌گونه‌ای که $\sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱$، که در آن $x_i \geq ۰$ و $i = ۱, ۲, \ldots, n$. بردار $x = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ یک سبدسهام نامیده می‌شود. بنابراین $\eta^T x$ نرخ بازده سرمایه در طول دوره نگهداری است، $E[\eta^T x]$ تابع هدف[1] می‌گیریم. سپس براساس تعریف ۲.۲.۵، تابع هدف به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E[\eta^T x] = \int_{۰}^{+\infty} Cr\Big\{\gamma \in \Gamma \Big| E[\eta_\gamma^T x] \geq r\Big\} dr - \int_{-\infty}^{۰} Cr\Big\{\gamma \in \Gamma \Big| E[\eta_\gamma^T x] \leq r\Big\} dr \qquad (۸.۵)$$

ERV را شاخص ریسک برای اندازه‌گیری ریسک سرمایه می‌گیریم. براساس تعریف ۴.۲.۵، ریسک سبدسهام x به‌صورت زیر است:

$$VaR_{(\alpha,\beta)}(\eta^T x) = \sup\Bigg\{ z \Big| Cr\Big\{\gamma \Big| \Pr\{\omega | \eta_\gamma^T(\omega) x \geq z\} \geq \alpha\Big\} \geq \beta \Bigg\} \qquad (۹.۵)$$

که در آن $\alpha, \beta \in [۰, ۱]$ سطوح اطمینان تعیین شده است.

براساس مفاهیم بالا، اگر سرمایه‌گذار بخواهد نرخ بازده موردانتظار را به حداکثر برساند، مسأله بهینه‌سازی سبدسهام موازنه در سیستم‌های تصمیم‌گیری نامطمئن هیبرید به‌صورت مدل EV-ERV زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & E[\eta^T x] \\ \text{s.t.} \quad & VaR_{(\alpha,\beta)}(\eta^T x) \geq k \\ & \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱ \\ & x_i \geq ۰, i = ۱, ۲, \ldots, n \end{aligned} \qquad (۱۰.۵)$$

که درآن پارامتر k سطح تعیین شده ERV است.

با معرفی متغیراضافی z مدل اولیه EV-ERV در (۱۰.۵) می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & E[\eta^T x] \\ \text{s.t.} \quad & Cr\Big\{\gamma \Big| \Pr\{\eta_\gamma^T x \geq z\} \geq \alpha\Big\} \geq \beta \\ & z \geq k \\ & \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱ \\ & x_i \geq ۰, i = ۱, ۲, \ldots, n \end{aligned} \qquad (۱۱.۵)$$

[1] objective function

۳.۵ تحلیل مدل سبدسهام موازنه

در این بخش ویژگی‌های تابع هدف و محدودیت‌ها در مدل بهینه‌سازی سبدسهام موازنه (۱۱.۵) را شرح می‌دهیم که یافتن الگوریتم مناسب برای حل مدل را آسان می‌کند.

۱.۳.۵ محاسبه نرخ بازده موردانتظار

از آنجا که نرخ‌های بازده با بردار فازی تصادفی η نشان داده می‌شود، برای هر η_γ که $\gamma \in \Gamma$، بردار تصادفی $\left(\eta_{1,\gamma}, \eta_{2,\gamma}, \dots, \eta_{n,\gamma}\right)$ را داریم. بنابراین نرخ بازده موردانتظار با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$E[\eta^T x] = E_\gamma\left[E_\omega\left[\eta_\gamma^T x\right]\right] = E_\gamma\left[\sum_{i=1}^{n} x_i E_\omega\left[\eta_{i,\gamma}\right]\right] \tag{۱۲.۵}$$

اولین تساوی برابری در (۱۲.۵) به دلیل تعریف عملگر امید متغیر فازی_تصادفی درست است [۸۴] و دومین تساوی در (۱۲.۵) براساس خطی بودن عملگر امید متغیر تصادفی است. توجه کنید $\sum_{i=1}^{n} x_i E[\eta_{i,\gamma}]$ ترکیب خطی متغیرهای فازی $E[\eta_{i,\gamma}]$، $i = 1, 2, \dots, n$ است. برای محاسبه $E_\gamma\left[\sum_{i=1}^{n} x_i E_\omega[\eta_{i,\gamma}]\right]$ شرط استقلال یا شرط یکنوایی برای متغیرهای فازی نیاز است. اکنون این دو حالت را به‌ترتیب بحث می‌کنیم.

حالت اول (شرط استقلال). مطابق [۸۶]، عملگر امید متغیر فازی، دارای ویژگی خطی‌بودن استقلال است. براساس این ویژگی، اگر $E[\eta_{1,\gamma}], E[\eta_{2,\gamma}], \dots, E[\eta_{n,\gamma}]$ به‌صورت دوطرفه مستقل باشند، داریم:

$$\begin{aligned} E_\gamma\left[\sum_{i=1}^{n} x_i E_\omega[\eta_{i,\gamma}]\right] &= \sum_{i=1}^{n} x_i E_\gamma\left[E_\omega[\eta_{i,\gamma}]\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i E[\xi_i] \end{aligned} \tag{۱۳.۵}$$

باتوجه به خاصیت امید ریاضی برای عدد حقیقی a، $\mathrm{E}(\Sigma a_i x_i) = \Sigma \mathrm{a}_i \mathrm{E}(\mathrm{x}_i)$ و باتوجه به خاصیت استقلال روابط بالا برقرار است.

حالت دوم (شرط یکنوایی). مطابق [۸۵]، عملگر امید متغیر فازی، دارای ویژگی خطی یکنوا است. براساس این ویژگی، اگر $E[\eta_{1,\gamma}], E[\eta_{2,\gamma}], \dots, E[\eta_{n,\gamma}]$ یکنوا باشند، داریم:

$$\begin{aligned} E_\gamma\left[\sum_{i=1}^{n} x_i E_\omega[\eta_{i,\gamma}]\right] &= \sum_{i=1}^{n} x_i E_\gamma\left[E_\omega[\eta_{i,\gamma}]\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i E[\xi_i] \end{aligned} \tag{۱۴.۵}$$

با توجه به ویژگی امید ریاضی و همچنین ویژگی‌های یکنوایی گفته شده در فصل دو روابط بالا برقرار است.

در دو مورد بالا عملگر امید متغیر فازی دارای ویژگی خطی است، $E[\eta^T x] = \sum_{i=1}^{n} x_i E[\eta_i]$. در حالت کلی ممکن است $E_\gamma\left[\sum_{i=1}^{n} x_i E_\omega[\eta_{i,\gamma}]\right]$ را با استفاده از شبیه‌سازی فازی یا روش تقریب براساس توزیع‌های امکان متغیرهای فازی $E_\omega[\eta_{i,\gamma}]$، $i = 1, 2, \ldots, n$ محاسبه کنیم.

۲.۳.۵ پردازش مقدار ریسک موازنه

در این بخش به حد احتمال در مدل (۱۱.۵) به‌صورت زیر می‌پردازیم:

$$\Pr\{\eta_\gamma^T x \geq z\} \geq \alpha \tag{۱۵.۵}$$

که درآن پارامتر فازی $\gamma \in \Gamma$ از قبل مشخص است.

فرض می‌کنیم بردار تصادفی η_γ دارای توزیع نرمال چندمتغیری $\mathcal{N}(\mu_\gamma, \sum_\gamma)$ است. ماتریس کواریانس $\sum_\gamma$ یک ماتریس نیمه معین مثبت متقارن است. بنابراین یک ماتریس غیرمنفرد و پایین مثلثی $D_\gamma, \mu_\gamma \in \mathbb{R}^n$ و بردار تصادفی ξ وجود دارد که اجزای آن متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد مستقل هستند که $\eta_\gamma = D_\gamma \xi + \mu_\gamma$. بنابراین داریم: $E[\eta_\gamma] = \mu_\gamma$ و $\sum_\gamma = D_\gamma D_\gamma^T$. اگر $\sum_\gamma$ معین مثبت باشد، آنگاه توزیع نرمال چندمتغیری غیرمنفرد است. این حالت اگر و فقط اگر D_γ دارای رتبه کامل باشد برقرار است.(برای بررسی غیرمنفرد بودن رتبه ماتریس مربعی را بررسی می‌کنیم، اگر رتبه کامل بود ماتریس غیرمنفرد است). در غیر این صورت توزیع، منفرد است. توزیع نرمال چندمتغیری به‌صورت منحصربه‌فرد با بردار مقدار موردانتظار μ_γ و ماتریس کواریانس $\sum_\gamma$ تعیین می‌شود.

اگر توزیع نرمال چندمتغیری، غیرمنفرد باشد، آنگاه مطلقا پیوسته است. بنابراین داریم: $\eta_\gamma^T x \sim \mathcal{N}(\mu_\gamma^T x, x^T D_\gamma D_\gamma^T x)$ فرض کنید $G(x) = \Pr\{\eta_\gamma^T x \geq z\}$. اگر $\sqrt{x^T D_\gamma D_\gamma^T x} > 0$، با استاندارد سازی داریم:

$$\begin{aligned}
\Pr\{\eta_\gamma^T x \geq z\} &= \Pr\left\{\frac{\eta_\gamma^T x - \mu_\gamma^T x}{\sqrt{x^T D_\gamma D_\gamma^T x}} \geq \frac{z - \mu_\gamma^T x}{\sqrt{x^T D_\gamma D_\gamma^T x}}\right\} \\
&= \Phi\left(\frac{\mu_\gamma^T x - z}{\sqrt{x^T D_\gamma D_\gamma^T x}}\right)
\end{aligned} \tag{۱۶.۵}$$

اکنون تعریف می‌کنیم:

$$G(x) = \begin{cases} 1, & if\; x^T D_\gamma D_\gamma^T x = 0,\; \mu_\gamma^T x \geq z \\ 0, & if\; x^T D_\gamma D_\gamma^T x = 0,\; \mu_\gamma^T x < z \\ \Phi\left(\frac{\mu_\gamma^T x - z}{\sqrt{x^T D_\gamma D_\gamma^T x}}\right), & if\; x^T D_\gamma D_\gamma^T x = 0,\; \mu_\gamma^T x \neq z \end{cases} \tag{۱۷.۵}$$

برای هر $\gamma \in \Gamma$، اگر $x^T D_\gamma D_\gamma^T x \neq ۰$، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} G(x) \geq \alpha &\iff \\ \Phi\left(\frac{\mu_\gamma^T x - z}{\sqrt{x^T D_\gamma D_\gamma^T x}}\right) \geq \alpha &\iff \\ \frac{\mu_\gamma^T x - z}{\sqrt{x^T D_\gamma D_\gamma^T x}} \geq \Phi^{-۱}(\alpha) &\iff \\ \mu_\gamma^T x \geq \Phi^{-۱}(\alpha)\sqrt{x^T D_\gamma D_\gamma^T x} + z & \end{aligned} \tag{۱۸.۵}$$

از تحلیل بالا، اگر $E[\eta_{۱,\gamma}], E[\eta_{۲,\gamma}], \ldots, E[\eta_{n,\gamma}]$ مستقل دوطرفه یا یکنوا باشد، آنگاه مدل (۱۱.۵) می‌تواند به مسأله برنامه‌ریزی اعتباری به‌شکل زیر درآید:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=۱}^{n} x_i E[\mu_i] \\ \text{s.t.} \quad & Cr\Big\{\gamma \mid \eta_\gamma^T x \geq \Phi^{-۱}(\alpha)\sqrt{x^T D_\gamma D_\gamma^T x} + z\Big\} \geq \beta \\ & z \geq k \\ & \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱ \\ & x_i \geq ۰, i = ۱, ۲, \ldots, n \end{aligned} \tag{۱۹.۵}$$

۳.۳.۵ محدب بودن ناحیه‌شدنی

در این بخش به نمایش معادل حد اعتباری پرداخته و محدب بودن ناحیه شدنی را بحث می‌کنیم.

فرض کنید $\mathscr{C} = \Big\{x | Cr\{\mu^T x \geq \Phi^{-۱}(\alpha)\sqrt{x^T D D^T x} + z\} \geq \beta\Big\}$ در مسائل انتخاب سبدسهام در شرایط واقعی، سطوح اطمینان کوچک بی معنی هستند. بنابراین موردی را در نظر می‌گیریم که در آن α و β در بازه‌ی $[۰/۵, ۱]$ هستند.

قضیه ۱.۳.۵. فرض کنید $\eta \sim \mathscr{N}(\mu, \Sigma)$ که در آن Σ ماتریس قطعی است، که μ_i، $i = ۱, ۲, \ldots, n$ متغیرهای فازی مستقل دوطرفه هستند و $\mu^T x$ پیوسته است. با فرض $\alpha, \beta \geq ۰/۵$ نتایج زیر به‌دست می‌آید.

(الف) $Cr\{\mu^T x \geq \Phi^{-۱}(\alpha)\sqrt{x^T D D^T x} + z\} \geq \beta \Leftrightarrow \Phi^{-۱}(\alpha)\sqrt{x^T D D^T x} + z - (\mu^T x)_{\sup}(\beta) \leq ۰$

(ب) $\mathscr{C} = \Big\{x | Cr\{\mu^T x \geq \Phi^{-۱}(\alpha)\sqrt{x^T D D^T x} + z\} \geq \beta\Big\}$ مجموعه محدب است.

برهان. ابتدا لازم بودن (الف) را اثبات می‌کنیم. با تعریف مقدار خوش‌بینانه متغیر فازی $\mu^T x$، داریم:

$$(\mu^T x)_{\sup}(\beta) \geq \Phi^{-۱}(\alpha)\sqrt{x^T D D^T x} + z \tag{۲۰.۵}$$

که نشان می‌دهد

$$\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^T DD^T x} + z - (\mu^T x)_{\sup}(\beta) \leq 0 \qquad (۲۱.۵)$$

اکنون کافی بودن (الف) را اثبات می‌کنیم. مطابق تعریف مقدار خوش‌بینانه، می‌دانیم $Cr\{\mu^T x \geq (\mu^T x)_{\sup}(\beta)\} \geq \beta$ چون

$$(\mu^T x)_{\sup}(\beta) \geq \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^T DD^T x} + z \qquad (۲۲.۵)$$

معادل رابطه زیر است:

$$\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^T DD^T x} + z - (\mu^T x)_{\sup}(\beta) \leq 0 \qquad (۲۳.۵)$$

داریم:

$$Cr\left\{\mu^T x \geq \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^T DD^T x} + z\right\} \geq \beta \qquad (۲۴.۵)$$

به دلیل پیوستگی $\mu^T x$ کافی بودن (الف) ثابت می‌شود. در ادامه (ب) را اثبات می‌کنیم.
مطابق ویژگی مقدار خوش‌بینانه، داریم: $(\mu^T x)_{\sup}(\beta) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_{i,\sup}(\beta)$ مطابق (الف)، مجموعه $\mathscr{C}$ معادل فرمول زیر است:

$$\left\{x \middle| \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^T DD^T x} + z - \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_{i,\sup}(\beta) \leq 0\right\}. \qquad (۲۵.۵)$$

می‌دانیم $\Phi^{-1}(\alpha) \geq 0$ برای $\alpha \geq 0/5$ و تابع $\sqrt{x^T DD^T x}$ نسبت به x محدب است و $\sum_{i=1}^{n} x_i \mu_{i,\sup}(\beta)$ یک تابع خطی از x_i است.
مطابق ویژگی‌های تابع محدب، $\{x \,|\, \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^T DD^T x} + z - \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_{i,\sup}(\beta) \geq 0\}$ یک مجموعه محدب است. اثبات (ب) کامل است. □

بر اساس تحلیل نظری بالا، قضیه زیر یک مدل معادل جبری از مدل (۱۹.۵) را ارائه می‌کند.

قضیه ۲.۳.۵. فرض کنید $\eta \sim \mathscr{N}(\mu, \Sigma)$، که درآن Σ ماتریس قطعی است، μ_i که $i = 1, 2, \ldots, n$ متغیرهای فازی مستقل دوطرفه هستند و $\mu^T x$ پیوسته است. سپس درمورد $\alpha, \beta \geq 0/5$ مدل EV-ERV (۱۹.۵) معادل مسأله برنامه‌ریزی زیر است:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i E[\mu_i] \\
\text{s.t.} \quad & \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^T DD^T x} + z - \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_{i,\sup}(\beta) \leq 0 \\
& z \geq k \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned} \qquad (۲۶.۵)$$

بر اساس قضیه ۱.۳.۵ و ۲.۳.۵ به‌نتیجه زیر می‌رسیم.

قضیه ۳.۳.۵. فرض کنید $\eta \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$، که درآن Σ ماتریس قطعی است، μ_i که $i = ۱,۲,\dots,n$ متغیرهای فازی مستقل دوطرفه هستند و $\mu^T x$ پیوسته است. سپس در مورد $\alpha, \beta \geq ۰/۵$ مدل (۲۶.۵)، یک مدل برنامه‌ریزی محدب است.

برهان. در مورد $\alpha, \beta \geq ۰/۵$ با توجه به قضیه (۱.۳.۵)،

$$\mathscr{C} = \{x | Cr\{\mu^T x \geq \Phi^{-۱}(\alpha)\sqrt{x^T D D^T x} + z\} \geq \beta\}$$

یک مجموعه محدب است. سپس ناحیه‌شدنی، محدب است. با توجه به خطی بودن تابع هدف و محدب بودن ناحیه‌شدنی، مدل (۲۶.۵) یک مسأله برنامه‌ریزی محدب است. □

۴.۵ مدل‌های برنامه‌ریزی محدب معادل

در این بخش، توزیع‌های احتمال پارامترهای فازی $\mu_i, i = ۱۲,\dots,n$ را مشخص می‌کنیم تا $E[\mu_i]$ و $\mu_{i,\sup}(\beta)$ معلوم شوند. مواردی را در نظر می‌گیریم که پارامترهای فازی μ_i و $i = ۱,۲,\dots,n$ به‌ترتیب با متغیرهای فازی ذوذنقه‌ای، مثلثی و نرمال مشخص می‌شوند.

متغیرهای فازی ذوذنقه‌ای فرض کنید $\eta \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ و $\mu_i = (r_i^{(۱)}, r_i^{(۲)}, r_i^{(۳)}, r_i^{(۴)})$ که $i = ۱,۲,\dots,n$ متغیرهای فازی ذوذنقه‌ای مستقل دوسویه باشند. مطابق [۸۵]، بازده سرمایه $\mu^T x$ به‌صورت زیر است:

$$E[\mu^T x] = \frac{۱}{۴}\Big(\sum_{i=۱}^{n} r_i^{(۱)} x_i + \sum_{i=۱}^{n} r_i^{(۲)} x_i + \sum_{i=۱}^{n} r_i^{(۳)} x_i + \sum_{i=۱}^{n} r_i^{(۴)} x_i\Big) \qquad (۲۷.۵)$$

در نتیجه مقدار خوش‌بینانه $\mu^T x$ به‌صورت زیر است:

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i \mu_{i,\sup}(\beta) = ۲(۱-\beta)\sum_{i=۱}^{n} r_i^{(۲)} x_i + (۲\beta - ۱)\sum_{i=۱}^{n} r_i^{(۱)} x_i \qquad (۲۸.۵)$$

که در آن $\beta \geq ۰/۵$

برای هر پارامتر مشخص، $\alpha, \beta \geq ۰/۵$، از قضیه ۲.۳.۵، مدل (۲۶.۵) معادل مدل

برنامه‌ریزی محدب زیر است:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \frac{1}{4}\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i^{(1)}x_i + \sum_{i=1}^{n} r_i^{(2)}x_i + \sum_{i=1}^{n} r_i^{(3)}x_i + \sum_{i=1}^{n} r_i^{(4)}x_i\Big) \\
\text{s.t.} \quad & \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^T D D^T x} + z - 2(1-\beta)\sum_{i=1}^{n} r_i^{(2)}x_i - (2\beta-1)\sum_{i=1}^{n} r_i^{(1)}x_i \le 0 \\
& z \ge k \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
& x_i \ge 0, i = 1,2,\dots,n
\end{aligned} \tag{29.5}$$

متغیرهای فازی مثلثی توضیح زیر درباره نتیجه مربوط به توزیع‌های احتمال مثلثی است.

تعریف ۱.۴.۵. فرض کنید $\eta \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ و $\mu_i = (r_i^{(1)}, r_i^{(2)}, r_i^{(3)})$ که $i = 1,2,\dots,n$ متغیرهای فازی مثلثی مستقل دوسویه باشند. مطابق مدل (۲۹.۵)، برای هر پارامتر مشخص $\alpha, \beta \ge 0/5$، مدل برنامه‌ریزی محدب معادل از مدل (۲۶.۵) به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \frac{1}{4}\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i^{(1)}x_i + 2\sum_{i=1}^{n} r_i^{(2)}x_i + \sum_{i=1}^{n} r_i^{(3)}x_i\Big) \\
\text{s.t.} \quad & \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^T D D^T x} + z - 2(1-\beta)\sum_{i=1}^{n} r_i^{(2)}x_i - (2\beta-1)\sum_{i=1}^{n} r_i^{(1)}x_i \le 0 \\
& z \ge k \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
& x_i \ge 0, i = 1,2,\dots,n
\end{aligned} \tag{30.5}$$

متغیرهای فازی نرمال فرض کنید $\eta \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ و $\mu_i = n(m_i, \sigma_i)$ که $i = 1,2,\dots,n$ متغیرهای فازی نرمال مستقل دوسویه باشد. مطابق [۸۵]، بازده موردانتظار $\mu^T x$ به‌صورت $E[\mu^T x] = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ است. مقدار خوش‌بینانه $\mu^T x$ به‌صورت زیراست:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mu_{i,\sup}(\beta) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i + \sqrt{-2\ln 2(1-\beta)}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i \tag{31.5}$$

که در آن $\beta \ge 0/5$ است.

بنابراین مطابق قضیه ۲.۳.۵، برای هر پارامتر مشخص $\alpha, \beta \ge 0/5$، مدل برنامه‌ریزی

محدب معادل از مدل (۲۶.۵) به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \\
\text{s.t.} \quad & \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^T D D^T x} + z - \sum_{i=1}^{n} m_i x_i - \sqrt{-2\ln 2(1-\beta)}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i \leq 0 \\
& z \geq k \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
& x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,n
\end{aligned} \tag{32.5}$$

۵.۵ مثال‌های عددی و انجام مقایسه

در این بخش برخی آزمایش‌های عددی را برای اثبات کارآیی و امکان‌پذیری شیوه بهینه‌سازی موازنه ارائه شده انجام می‌دهیم. ابتدا توضیحاتی درباره مسأله انتخاب سبدسهام می‌دهیم.

۱.۵.۵ توضیح مسأله

فرض کنید ۲۰ دارایی ریسکی برای سرمایه گذار وجود دارد. دراین مسأله انتخاب سبدسهام، نرخ‌های بازده سرمایه نامطمئن‌تر است و با متغیرهای فازی_تصادفی نشان داده می‌شوند. بنا به ضرورت نمایش مسأله، فرض می‌کنیم سطوح اطمینان معلوم α و β مقادیر خود را از بازه $[0/5, 1]$ می‌گیرند.

فرض کنید $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{20}) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ و $\mu_i = (r_i^{(1)}, r_i^{(2)}, r_i^{(3)}, r_i^{(4)})$ که $i = 1,2,\ldots,n$ متغیرهای فازی_ذوذنقه‌ای مستقل دوسویه باشند. توزیع‌های امکان μ_i برای $i = 1,2,\ldots,n$ در جدول ۱.۵ آمده است و ماتریس کوواریانس $\Sigma = (\sigma_{ij})_{20\times 20}$ به‌صورت

$(\Sigma_۱\Sigma_۲)^{-۲}$۱۰ بیان شده است، که در آن ماتریس‌های $\Sigma_۱$ و $\Sigma_۲$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Sigma_۱ = \begin{bmatrix}
۰/۶۱۹۸ & ۰/۱۱۵۵ & ۰/۱۰۹۶ & -۰/۰۶۸۵ & ۰/۰۰۳۸ & ۰/۱۲۲۲ & ۰/۰۰۴۹ & -۰/۰۷۷۰ & ۰/۰۳۱۹ & -۰/۰۳۶۸ \\
۰/۱۱۵۵ & ۰/۵۹۸۹ & -۰/۰۹۳۷ & ۰/۰۷۵۷ & ۰/۰۵۳۱ & ۰/۱۰۸۶ & -۰/۰۰۴۱ & ۰/۰۵۹۸ & ۰/۱۰۶۷ & ۰/۰۳۵۱ \\
۰/۱۰۹۶ & -۰/۰۹۳۷ & ۰/۶۸۲۴ & ۰/۰۲۱۵ & ۰/۰۳۸۹ & -۰/۰۵۳۹ & -۰/۰۰۰۴ & ۰/۰۹۱۲ & -۰/۰۵۵۰ & -۰/۰۰۱۰ \\
-۰/۰۶۸۵ & ۰/۰۷۵۷ & ۰/۰۲۱۵ & ۰/۶۴۸۱ & ۰/۰۷۱۸ & ۰/۰۱۳۰ & ۰/۱۰۴۷ & -۰/۰۶۵۱ & -۰/۰۴۹۴ & -۰/۰۶۷۳ \\
۰/۰۰۳۸ & ۰/۰۵۳۱ & ۰/۰۳۸۹ & ۰/۰۷۱۸ & ۰/۶۵۸۳ & -۰/۱۰۱۱ & -۰/۰۶۰۴ & -۰/۰۵۲۴ & -۰/۰۰۹۷ & ۰/۰۴۴۱ \\
۰/۱۲۲۲ & ۰/۱۰۸۶ & -۰/۰۵۳۹ & ۰/۰۱۳۰ & -۰/۱۰۱۱ & ۰/۵۰۶۲ & ۰/۰۰۱۴ & -۰/۰۵۷۶ & -۰/۰۷۸۵ & -۰/۰۱۸۲ \\
۰/۰۰۴۹ & -۰/۰۰۴۱ & -۰/۰۰۰۴ & ۰/۱۰۴۷ & -۰/۰۶۰۴ & ۰/۰۰۱۴ & ۰/۵۳۷۶ & -۰/۰۹۵۹ & -۰/۰۹۹۷ & -۰/۰۲۰۲ \\
-۰/۰۷۷۰ & ۰/۰۵۹۸ & ۰/۰۹۱۲ & -۰/۰۶۵۱ & -۰/۰۵۲۴ & -۰/۰۵۷۶ & -۰/۰۹۵۹ & ۰/۷۵۶۲ & ۰/۰۳۱۷ & -۰/۰۸۶۲ \\
۰/۰۳۱۹ & ۰/۱۰۶۷ & -۰/۰۵۵۰ & -۰/۰۴۹۴ & -۰/۰۰۹۷ & -۰/۰۷۸۵ & -۰/۰۹۹۷ & ۰/۰۳۱۷ & ۰/۵۲۴۳ & -۰/۰۰۹۶ \\
-۰/۰۳۶۸ & ۰/۰۳۵۱ & -۰/۰۰۱۰ & -۰/۰۶۷۳ & ۰/۰۴۴۱ & -۰/۰۱۸۲ & -۰/۰۲۰۲ & -۰/۰۸۶۲ & -۰/۰۰۹۶ & ۰/۸۱۹۹ \\
۰/۰۵۳۶ & -۰/۰۵۶۶ & ۰/۰۰۵۸ & -۰/۰۰۵۵ & -۰/۰۹۲۶ & ۰/۱۳۲۹ & -۰/۱۲۵۸ & -۰/۰۲۰۰ & -۰/۱۱۴۵ & ۰/۱۲۶۴ \\
۰/۰۵۹۶ & -۰/۰۷۶۷ & ۰/۰۷۴۴ & -۰/۰۱۱۸ & -۰/۰۲۳۰ & -۰/۰۶۶۸ & -۰/۱۰۲۲ & -۰/۱۷۴۲ & ۰/۰۳۶۰ & -۰/۰۶۴۷ \\
۰/۰۵۰۶ & -۰/۱۴۱۶ & -۰/۱۵۲۱ & ۰/۰۵۰۶ & ۰/۰۷۱۸ & -۰/۰۵۹۷ & -۰/۰۲۷۹ & -۰/۰۵۹۹ & ۰/۱۷۱۰ & ۰/۰۰۲۶ \\
۰/۰۲۷۸ & ۰/۰۳۹۹ & -۰/۱۱۹۰ & ۰/۱۰۹۱ & -۰/۰۹۳۳ & -۰/۰۴۹۱ & -۰/۰۰۴۵ & ۰/۰۷۵۲ & -۰/۰۹۸۱ & ۰/۰۲۳۰ \\
۰/۱۵۰۵ & -۰/۰۳۵۳ & ۰/۰۳۳۲ & -۰/۰۷۴۲ & -۰/۰۰۸۰ & -۰/۰۳۷۹ & ۰/۰۷۴۳ & ۰/۰۶۳۰ & ۰/۰۵۴۷ & ۰/۱۱۸۶ \\
۰/۰۳۵۶ & -۰/۰۱۰۵ & ۰/۰۳۷۱ & -۰/۰۲۱۴ & ۰/۰۰۳۲ & -۰/۱۴۶۰ & -۰/۰۶۹۶ & -۰/۰۵۱۴ & ۰/۰۰۸ & -۰/۰۶۵۵ \\
۰/۰۹۶۹ & -۰/۰۳۳۱ & -۰/۱۴۵۲ & ۰/۰۱۲۳ & ۰/۰۲۰۵ & -۰/۰۹۵۸ & ۰/۰۵۶۷ & ۰/۰۴۸۳ & -۰/۰۴۹۱ & -۰/۰۴۷۹ \\
-۰/۰۰۳۹ & -۰/۰۶۷۰ & -۰/۰۰۷۷ & -۰/۰۶۹۸ & -۰/۰۴۲۱ & -۰/۰۵۱۴ & ۰/۱۰۳۴ & ۰/۰۳۴۵ & ۰/۰۲۴۱ & ۰/۰۲۱۵ \\
-۰/۰۲۸۹ & -۰/۰۶۱۹ & ۰/۰۳۳۲ & -۰/۰۹۰۰ & -۰/۰۱۴۵ & -۰/۰۶۹۹ & -۰/۱۰۳۲ & -۰/۰۷۰۳ & -۰/۰۶۱۲ & ۰/۰۳۲۶ \\
۰/۰۸۲۵ & ۰/۰۱۹۳ & ۰/۰۱۴۵ & ۰/۰۴۶۶ & ۰/۱۱۶۱ & ۰/۱۲۳۱ & -۰/۰۷۲۱ & ۰/۰۲۱۴ & ۰/۰۴۳۲ & ۰/۰۵۲۷
\end{bmatrix}$$

$$\Sigma_۲ = \begin{bmatrix}
۰/۶۱۹۸ & ۰/۱۱۵۵ & ۰/۱۰۹۶ & -۰/۰۶۸۵ & ۰/۰۰۳۸ & ۰/۱۲۲۲ & ۰/۰۰۴۹ & -۰/۰۷۷۰ & ۰/۰۳۱۹ & -۰/۰۳۶۸ \\
۰/۱۱۵۵ & ۰/۵۹۸۹ & -۰/۰۹۳۷ & ۰/۰۷۵۷ & ۰/۰۵۳۱ & ۰/۱۰۸۶ & -۰/۰۰۴۱ & ۰/۰۵۹۸ & ۰/۱۰۶۷ & ۰/۰۳۵۱ \\
۰/۱۰۹۶ & -۰/۰۹۳۷ & ۰/۶۸۲۴ & ۰/۰۲۱۵ & ۰/۰۳۸۹ & -۰/۰۵۳۹ & -۰/۰۰۰۴ & ۰/۰۹۱۲ & -۰/۰۵۵۰ & -۰/۰۰۱۰ \\
-۰/۰۶۸۵ & ۰/۰۷۵۷ & ۰/۰۲۱۵ & ۰/۶۴۸۱ & ۰/۰۷۱۸ & ۰/۰۱۳۰ & ۰/۱۰۴۷ & -۰/۰۶۵۱ & -۰/۰۴۹۴ & -۰/۰۶۷۳ \\
۰/۰۰۳۸ & ۰/۰۵۳۱ & ۰/۰۳۸۹ & ۰/۰۷۱۸ & ۰/۶۵۸۳ & -۰/۱۰۱۱ & -۰/۰۶۰۴ & -۰/۰۵۲۴ & -۰/۰۰۹۷ & ۰/۰۴۴۱ \\
۰/۱۲۲۲ & ۰/۱۰۸۶ & -۰/۰۵۳۹ & ۰/۰۱۳۰ & -۰/۱۰۱۱ & ۰/۵۰۶۲ & ۰/۰۰۱۴ & -۰/۰۵۷۶ & -۰/۰۷۸۵ & -۰/۰۱۸۲ \\
۰/۰۰۴۹ & -۰/۰۰۴۱ & -۰/۰۰۰۴ & ۰/۱۰۴۷ & -۰/۰۶۰۴ & ۰/۰۰۱۴ & ۰/۵۳۷۶ & -۰/۰۹۵۹ & -۰/۰۹۹۷ & -۰/۰۲۰۲ \\
-۰/۰۷۷۰ & ۰/۰۵۹۸ & ۰/۰۹۱۲ & -۰/۰۶۵۱ & -۰/۰۵۲۴ & -۰/۰۵۷۶ & -۰/۰۹۵۹ & ۰/۷۵۶۲ & ۰/۰۳۱۷ & -۰/۰۸۶۲ \\
۰/۰۳۱۹ & ۰/۱۰۶۷ & -۰/۰۵۵۰ & -۰/۰۴۹۴ & -۰/۰۰۹۷ & -۰/۰۷۸۵ & -۰/۰۹۹۷ & ۰/۰۳۱۷ & ۰/۵۲۴۳ & -۰/۰۰۹۶ \\
-۰/۰۳۶۸ & ۰/۰۳۵۱ & -۰/۰۰۱۰ & -۰/۰۶۷۳ & ۰/۰۴۴۱ & -۰/۰۱۸۲ & -۰/۰۲۰۲ & -۰/۰۸۶۲ & -۰/۰۰۹۶ & ۰/۸۱۹۹ \\
۰/۰۵۳۶ & -۰/۰۵۶۶ & ۰/۰۰۵۸ & -۰/۰۰۵۵ & -۰/۰۹۲۶ & ۰/۱۳۲۹ & -۰/۱۲۵۸ & -۰/۰۲۰۰ & -۰/۱۱۴۵ & ۰/۱۲۶۴ \\
۰/۰۵۹۶ & -۰/۰۷۶۷ & ۰/۰۷۴۴ & -۰/۰۱۱۸ & -۰/۰۲۳۰ & -۰/۰۶۶۸ & -۰/۱۰۲۲ & -۰/۱۷۴۲ & ۰/۰۳۶۰ & -۰/۰۶۴۷ \\
۰/۰۵۰۶ & -۰/۱۴۱۶ & -۰/۱۵۲۱ & ۰/۰۵۰۶ & ۰/۰۷۱۸ & -۰/۰۵۹۷ & -۰/۰۲۷۹ & -۰/۰۵۹۹ & ۰/۱۷۱۰ & ۰/۰۰۲۶ \\
۰/۰۲۷۸ & ۰/۰۳۹۹ & -۰/۱۱۹۰ & ۰/۱۰۹۱ & -۰/۰۹۳۳ & -۰/۰۴۹۱ & -۰/۰۰۴۵ & ۰/۰۷۵۲ & -۰/۰۹۸۱ & ۰/۰۲۳۰ \\
۰/۱۵۰۵ & -۰/۰۳۵۳ & ۰/۰۳۳۲ & -۰/۰۷۴۲ & -۰/۰۰۸۰ & -۰/۰۳۷۹ & ۰/۰۷۴۳ & ۰/۰۶۳۰ & ۰/۰۵۴۷ & ۰/۱۱۸۶ \\
۰/۰۳۵۶ & -۰/۰۱۰۵ & ۰/۰۳۷۱ & -۰/۰۲۱۴ & ۰/۰۰۳۲ & -۰/۱۴۶۰ & -۰/۰۶۹۶ & -۰/۰۵۱۴ & ۰/۰۰۸ & -۰/۰۶۵۵ \\
۰/۰۹۶۹ & -۰/۰۳۳۱ & -۰/۱۴۵۲ & ۰/۰۱۲۳ & ۰/۰۲۰۵ & -۰/۰۹۵۸ & ۰/۰۵۶۷ & ۰/۰۴۸۳ & -۰/۰۴۹۱ & -۰/۰۴۷۹ \\
-۰/۰۰۳۹ & -۰/۰۶۷۰ & -۰/۰۰۷۷ & -۰/۰۶۹۸ & -۰/۰۴۲۱ & -۰/۰۵۱۴ & ۰/۱۰۳۴ & ۰/۰۳۴۵ & ۰/۰۲۴۱ & ۰/۰۲۱۵ \\
-۰/۰۲۸۹ & -۰/۰۶۱۹ & ۰/۰۳۳۲ & -۰/۰۹۰۰ & -۰/۰۱۴۵ & -۰/۰۶۹۹ & -۰/۱۰۳۲ & -۰/۰۷۰۳ & -۰/۰۶۱۲ & ۰/۰۳۲۶ \\
۰/۰۸۲۵ & ۰/۰۱۹۳ & ۰/۰۱۴۵ & ۰/۰۴۶۶ & ۰/۱۱۶۱ & ۰/۱۲۳۱ & -۰/۰۷۲۱ & ۰/۰۲۱۴ & ۰/۰۴۳۲ & ۰/۰۵۲۷
\end{bmatrix}$$

در این مورد، مدل (۲۹.۵) مدل برنامه‌ریزی محدب زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}
\max \quad & ۰/۰۳۱۷۵x_۱ + ۰/۰۳۱۵x_۲ + ۰/۰۳۳۲۵x_۳ + ۰/۰۳۳۲۵x_۴ + ۰/۰۳۱۵x_۵ + ۰/۰۳۴۵x_۶ + ۰/۰۳۱۷۵x_۷ + \\
& ۰/۰۳۱۷۵x_۸ + ۰/۰۳۲۵x_۹ + ۰/۰۳۲۲۵x_{۱۰} + ۰/۰۳۱۵x_{۱۱} + ۰/۰۳۱۲۵x_{۱۲} + ۰/۰۳۳x_{۱۳} + ۰/۰۳۳۲۵x_{۱۴} + \\
& ۰/۰۳۱۲۵x_{۱۵} + ۰/۰۳۴۲۵x_{۱۶} + ۰/۰۳۱۷۵x_{۱۷} + ۰/۰۳۱۵x_{۱۸} + ۰/۰۳۲۲۵x_{۱۹} + ۰/۰۳۱۹۷۵x_{۲۰} \\
\text{s.t.} \quad & ۱۰^{-۱}\Phi^{-۱}(\alpha)\Big(\sum_{i=۱}^{۲۰}\sum_{j=۱}^{۲۰}\sigma_{ij}x_ix_j\Big)^{\frac{۱}{۲}} + z - ۲(۱-\beta)V_۲(x) - (۲\beta - ۱)V_۱(x) \leq ۰ \\
& z \geq k \\
& \sum_{i=۱}^{۲۰} x_i = ۱ \\
& x_i \geq ۰, i = ۱, ۲, \ldots, ۲۰
\end{aligned} \tag{۳۳.۵}$$

که در آن ضریب x_i در تابع هدف، مقدار موردانتظار متغیر فازی ذوذنقه‌ای و توابع $V_۱(x)$ و

$V_2(x)$ در ERV به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
V_1(x) = \sum_{i=1}^{20} r_i^{(1)} x_i & \\
&= 0/005x_1 + 0/006x_2 + 0/007x_3 + 0/004x_4 + 0/005x_5 + 0/006x_6 + 0/004x_7 \\
&+ 0/005x_8 + 0/006x_9 + 0/005x_{10} + 0/004x_{11} + 0/005x_{12} + 0/006x_{13} + \\
&0/004x_{14} + 0/004x_{15} + 0/005x_{16} + 0/004_{17} + 0/004x_{18} + 0/005x_{19} + 0/004x_{20}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_2(x) = \sum_{i=1}^{20} r_i^{(2)} x_i & \\
&= 0/036x_1 + 0/037x_2 + 0/039x_3 + 0/038x_4 + 0/037x_5 + 0/041x_6 + 0/036x_7 \\
&+ 0/038x_8 + 0/038x_9 + 0/038x_{10} + 0/036x_{11} + 0/037x_{12} + 0/039x_{13} + \\
&0/038x_{14} + 0/037x_{15} + 0/041x_{16} + 0/036x_{17} + 0/038_{18} + 0/038x_{19} + 0/038x_{20}
\end{aligned}
$$

جدول ۱.۵: [توزیع‌های پارامترهای فازی ذوزنقه‌ایμ_i]

دارایی‌های ریسکی انتخابی	توزیع‌های امکان
۱	$\mu_۱ = (۰/۰۰۵, ۰/۰۳۶, ۰/۰۳۸, ۰/۰۴۸)$
۲	$\mu_۲ = (۰/۰۰۶, ۰/۰۳۷, ۰/۰۳۸, ۰/۰۴۵)$
۳	$\mu_۳ = (۰/۰۰۷, ۰/۰۳۹, ۰/۰۴۰, ۰/۰۴۷)$
۴	$\mu_۴ = (۰/۰۰۴, ۰/۰۳۸, ۰/۰۴۰, ۰/۰۵۱)$
۵	$\mu_۵ = (۰/۰۰۵, ۰/۰۳۷, ۰/۰۳۹, ۰/۰۴۵)$
۶	$\mu_۶ = (۰/۰۰۶, ۰/۰۴۱, ۰/۰۴۲, ۰/۰۴۹)$
۷	$\mu_۷ = (۰/۰۰۴, ۰/۰۳۶, ۰/۰۳۹, ۰/۰۴۸)$
۸	$\mu_۸ = (۰/۰۰۵, ۰/۰۳۸, ۰/۰۳۹, ۰/۰۴۵)$
۹	$\mu_۹ = (۰/۰۰۶, ۰/۰۳۸, ۰/۰۴۰, ۰/۰۴۶)$
۱۰	$\mu_{۱۰} = (۰/۰۰۵, ۰/۰۳۸, ۰/۰۴۰, ۰/۰۴۶)$
۱۱	$\mu_{۱۱} = (۰/۰۰۴, ۰/۰۳۶, ۰/۰۳۹, ۰/۰۴۷)$
۱۲	$\mu_{۱۲} = (۰/۰۰۵, ۰/۰۳۷, ۰/۰۳۸۵, ۰/۰۴۴۵)$
۱۳	$\mu_{۱۳} = (۰/۰۰۶, ۰/۰۳۹, ۰/۰۴۰۵, ۰/۰۴۶۵)$
۱۴	$\mu_{۱۴} = (۰/۰۰۴, ۰/۰۳۸, ۰/۰۴۱, ۰/۰۵۰)$
۱۵	$\mu_{۱۵} = (۰/۰۰۴, ۰/۰۳۷, ۰/۰۳۹۲, ۰/۰۴۴۸)$
۱۶	$\mu_{۱۶} = (۰/۰۰۵, ۰/۰۴۱, ۰/۰۴۲۵, ۰/۰۴۸۵)$
۱۷	$\mu_{۱۷} = (۰/۰۰۴, ۰/۰۳۶, ۰/۰۴۰, ۰/۰۴۷)$
۱۸	$\mu_{۱۸} = (۰/۰۰۴, ۰/۰۳۸, ۰/۰۳۸۵, ۰/۰۴۵۵)$
۱۹	$\mu_{۱۹} = (۰/۰۰۵, ۰/۰۳۸, ۰/۰۳۹۵, ۰/۰۴۶۵)$
۲۰	$\mu_{۲۰} = (۰/۰۰۴, ۰/۰۳۸, ۰/۰۳۹۵, ۰/۰۴۶۴)$

جدول ۲.۵: [نتایج محاسباتی با $\alpha = ۰/۸, \beta = ۰/۸, \kappa = ۰/۰۰۶$]

نسبت‌های سرمایه‌گذاری	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$
	$x_۶$	$x_۷$	$x_۸$	$x_۹$	$x_{۱۰}$
	$x_{۱۱}$	$x_{۱۲}$	$x_{۱۳}$	$x_{۱۴}$	$x_{۱۵}$
	$x_{۱۶}$	$x_{۱۷}$	$x_{۱۸}$	$x_{۱۹}$	$x_{۲۰}$
مقادیر	۰	۰	۰/۰۶۵۹۹	۰/۰۳۹۸۱	۰/۰۳۵۰۸
	۰/۱۹۴۱۲	۰/۰۷۱۰۷	۰/۰۶۱۸۸	۰/۰۷۵۹۴	۰/۰۴۲۷۳
	۰	۰/۰۵۹۷۴	۰/۰۷۲۱۴	۰/۰۲۸۲۷	۰
	۰/۱۱۱۳۶	۰/۰۴۵۲۵	۰/۰۰۹۱۷	۰/۰۸۷۴۸	۰

۲.۵.۵ نتایج محاسباتی

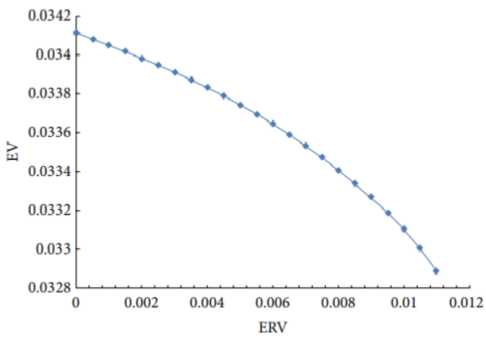
ابتدا، سطوح اطمینان $\alpha = ۰/۸$ و $\beta = ۰/۸$ را تنظیم کرده و مقدار معلوم ERV به میزان $\kappa = ۰/۰۰۶$ را درنظر می‌گیریم و مدل (۳۳.۵) را با نرم‌افزار LINGO حل می‌کنیم. پس از ۳۱ تکرار، نسبت‌های سرمایه‌گذاری توضیعی(سرمایه‌گذاری با تنوع بیشتر و ریسک کمتر) را میان ۲۰ دارایی ریسکی می‌یابیم که در جدول ۲.۵ گزارش شد. با توجه به محدب بودن مدل (۳۳.۵) از طرح سرمایه‌گذاری به‌دست آمده، جواب بهینه سراسری است و مقدار بهینه متناظر آن ۰/۰۳۲۹۳ است.

همچنین، با توجه به اینکه سرمایه‌گذاران ممکن است دیدگاه‌های مختلفی درباره ریسک داشته باشند، مدل (۳۳.۵) تحت مقادیر مختلف پارامترهای α، β و κ حل می‌شود. نتایج محاسباتی به‌دست آمده در جدول ۳.۵ ارائه شده است، که درآن تاثیر پارامترهای مدل بر کیفیت جواب مدل EV-ERV را مشاهده می‌کنیم. نتایج محاسبه نشان می‌دهد وقتی پارامترهای α, β و κ تغییر می کنند، نسبت‌های سرمایه‌گذاری و مقادیر تابع هدف نیز مطابق آن تغییر می‌کنند. اگر دو پارامتر α, β, κ را ثابت بگیریم، مقدار تابع هدف با توجه به پارامتر باقی مانده کاهش می‌یابد. مثلا وقتی $\alpha = ۰/۸$ و$\kappa = ۰/۰۰۶$، مقادیر تابع هدف ۰/۰۳۳۲۹ و ۰/۰۳۳۰۲ و۰/۰۳۲۶۱ است، که به‌ترتیب متناظر با $\beta = ۰/۷۵, ۰/۷۹, ۰/۸۲$ است. بعلاوه مقدار z همیشه برابر با مقدار κ است؛ یعنی EVR قابل دستیابی و برابر با κ است .

بعلاوه، رابطه بین ERV و EV را در مدل بهینه‌سازی موازنه از طریق آزمایش‌های عددی اثبات می‌کنیم. برای این منظور، سطوح اعتماد $\alpha = ۰/۷$ و $\beta = ۰/۸$ را درنظر می‌گیریم. نتایج محاسباتی در شکل ۱.۵ ترسیم شده است، مشاهده می‌کنیم همه نقاط بالای این خط، قیدهای مسأله مارا مشخص می‌کند و جواب‌های شدنی نامیده می‌شوند. نقاط روی خط، جواب‌های بهینه برای α و β است .

جدول ۳.۵: جواب‌های بهینه مدل بهینه‌سازی موازنه تحت مقادیر مختلف پارامترها

پارامترها			نسبت‌های سرمایه گذاری					مقادیر تابع هدف
α	β	κ	x_1 x_6 x_{11} x_{16}	x_2 x_7 x_{12} x_{17}	x_3 x_8 x_{13} x_{18}	x_4 x_9 x_{14} x_{19}	x_5 x_{10} x_{15} x_{20}	EV
۰٫۷۸	۰٫۸	۰٫۰۰۶	۰ ۰٫۲۱۵۴۰ ۰ ۰٫۱۲۰۲۰	۰ ۰٫۰۵۴۷۳ ۰۴۱۴۸ ۰٫۰۵۱۸۷	۰٫۰۸۳۳۲ ۰٫۰۴۶۹۳ ۰٫۰۷۸۴۸ ۰٫۰۰۴۰۲	۰٫۰۴۱۲۷ ۰٫۰۷۹۳۱ ۰٫۰۴۰۷۴ ۰٫۰۷۷۳۱	۰٫۰۲۵۳۹ ۰٫۰۳۹۵۵ ۰ ۰	۰٫۰۳۳۰۸
۰٫۸	۰٫۸	۰٫۰۰۶	۰ ۰٫۱۹۴۱۲ ۰ ۰٫۱۱۱۳۶	۰ ۰٫۰۷۱۰۷ ۰٫۰۵۹۷۴ ۰٫۰۴۵۲۵	۰٫۰۶۵۹۹ ۰٫۰۶۱۸۸ ۰٫۰۷۲۱۴ ۰٫۰۰۹۱۷	۰٫۰۳۹۸۱ ۰٫۰۷۵۹۴ ۰٫۰۲۸۲۷ ۰٫۰۸۷۴۸	۰٫۰۳۵۰۸ ۰٫۰۴۲۷۳ ۰ ۰	۰٫۰۳۲۹۳
۰٫۸۲	۰٫۸	۰٫۰۰۶	۰ ۰٫۱۶۰۳۳ ۰٫۰۰۱۰۸ ۰٫۰۹۷۵۳	۰٫۰۱۰۳۹ ۰٫۰۹۳۰۹ ۰٫۰۸۶۱۶ ۰٫۰۳۶۱۳	۰٫۰۴۳۴۳ ۰٫۰۸۱۷۶ ۰٫۰۶۷۵۳ ۰٫۰۱۶۶۸	۰٫۰۳۵۶۴ ۰٫۰۶۶۷۳ ۰٫۰۰۹۱۶ ۰٫۱۰۱۵۳	۰٫۰۴۶۷۱ ۰٫۰۴۶۱۲ ۰ ۰	۰٫۰۳۲۷۱
۰٫۸	۰٫۷۵	۰٫۰۰۶	۰ ۰٫۲۴۷۳۸ ۰ ۰٫۱۳۳۹۱	۰ ۰٫۰۲۹۱۶ ۰٫۰۱۳۳۴ ۰٫۰۶۱۵۳	۰٫۱۰۸۰۲ ۰٫۰۲۴۰۲ ۰٫۰۸۶۷۴ ۰	۰٫۰۴۴۹۱ ۰٫۰۸۳۶۰ ۰٫۰۵۹۸۳ ۰٫۰۶۲۴۰	۰٫۰۱۰۶۱ ۰٫۰۳۴۵۷ ۰ ۰	۰٫۰۳۳۲۹
۰٫۸	۰٫۷۹	۰٫۰۰۶	۰ ۰٫۲۰۷۰۳ ۰ ۰٫۱۱۶۸۵	۰ ۰٫۰۶۱۲۰ ۰٫۰۴۸۵۷ ۰٫۰۴۹۳۱	۰٫۰۷۶۲۶ ۰٫۰۵۲۷۶ ۰٫۰۷۵۷۸ ۰٫۰۶۱۳۱	۰٫۰۴۰۹۵ ۰٫۰۷۷۹۰ ۰٫۰۳۵۹۹ ۰٫۰۸۱۳۱	۰٫۰۲۹۱۶ ۰٫۰۴۰۸۱ ۰ ۰	۰٫۰۳۳۰۲
۰٫۸	۰٫۸۲	۰٫۰۰۶	۰ ۰٫۱۴۴۵۶ ۰٫۰۱۸۱۸ ۰٫۰۸۹۷۱	۰٫۰۱۷۶۲ ۰٫۰۹۹۸۰ ۰٫۰۹۱۷۵ ۰٫۰۳۱۲۵	۰٫۰۳۷۹۶ ۰٫۰۸۳۷۳ ۰٫۰۶۵۴۰ ۰٫۰۱۶۲۰	۰٫۰۳۲۴۷ ۰٫۰۶۵۳۶ ۰٫۰۰۵۶۲ ۰٫۱۰۲۲۴	۰٫۰۵۰۳۳ ۰٫۰۴۱۷۰ ۰٫۰۰۶۱۳ ۰	۰٫۰۳۲۶۱
۰٫۷۸	۰٫۷۸	۰٫۰۰۶	۰ ۰٫۲۳۷۴۸ ۰ ۰٫۱۲۹۵۷	۰ ۰٫۰۳۷۴۱ ۰٫۰۲۲۳۴ ۰٫۰۵۸۵۹	۰٫۱۰۰۷۶ ۰٫۰۳۱۳۱ ۰٫۰۸۴۶۱ ۰	۰٫۰۴۳۳۰ ۰٫۰۸۲۴۹ ۰٫۰۵۳۷۵ ۰٫۰۶۶۹۳	۰٫۰۱۵۲۶ ۰٫۰۳۶۱۹ ۰ ۰	۰٫۰۳۳۲۳
۰٫۷۸	۰٫۷۸	۰٫۰۰۸	۰ ۰٫۲۰۲۹۱ ۰ ۰٫۱۱۵۲۰	۰ ۰٫۰۶۴۲۶ ۰٫۰۵۲۵۳ ۰٫۰۴۷۶۲	۰٫۰۷۲۷۵ ۰٫۰۵۶۰۶ ۰٫۰۷۴۷۴ ۰٫۰۰۷۲۷	۰٫۰۴۰۴۴ ۰٫۰۷۷۰۵ ۰٫۰۳۳۰۰ ۰٫۰۸۳۵۵	۰٫۰۳۱۱۲ ۰٫۰۴۱۴۸ ۰ ۰	۰٫۰۳۲۹۹
۰٫۷۸	۰٫۷۸	۰٫۰۰۹	۰ ۰٫۱۷۷۶۶ ۰ ۰٫۱۰۴۶۲	۰ ۰٫۰۸۳۵۴ ۰٫۰۷۴۵۷ ۰٫۰۳۹۴۸	۰٫۰۵۲۳۱ ۰٫۰۷۴۱۱ ۰٫۰۶۷۵۳ ۰٫۰۱۳۳۹	۰٫۰۳۸۳۳ ۰٫۰۷۲۹۹ ۰٫۰۱۷۶۸ ۰٫۰۹۵۷۹	۰٫۰۴۲۷۲ ۰٫۰۴۵۲۸ ۰ ۰	۰٫۰۳۲۸۲



شکل ۱.۵: رابطه بین ERV و EV تحت $\alpha = ۰/۷$ و $\beta = ۰/۸$

۳.۵.۵ مقایسه با روش بهینه‌سازی تصادفی

در این بخش شیوه بهینه‌سازی موازنه پیشنهادی را با شیوه بهینه‌سازی تصادفی کلاسیک مقایسه می‌کنیم. به دلیل مقایسه، داده‌های بخش ۱.۵.۵ را نیز به‌کار می‌گیریم و متغیرهای فازی ذوذنقه‌ای جدول ۱.۵ را با مقادیر موردانتظار آن‌ها جایگزین می‌کنیم. در نتیجه نرخ بازده سرمایه هر دارایی با متغیر تصادفی مشخص می‌شود. دراین حالت، بردار بازده فازی‌ـ تصادفی η به بردار بازده تصادفی $\eta \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ تغییر می‌کند که در آن μ و Σ ماتریس و بردار قطعی هستند. یعنی نرخ‌های بازده‌ها متغیرهای تصادفی درنظر گرفته می‌شوند و وابستگی آن‌ها با ماتریس کواریانس Σ مشخص می‌شود.

طبق محاسبه، بردار نرخ بازده موردانتظار به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\mu =&(۰/۰۳۱۷۵, ۰/۰۳۱۵, ۰/۰۳۳۲۵, ۰/۳۳۲۵, ۰/۳۱۵, ۰/۰۳۴۵, ۰/۰۳۱۷۵, ۰/۰۳۱۷۵, ۰/۰۳۲۵,\\ &۰/۰۳۲۲۵, ۰/۰۳۱۵, ۰/۰۳۱۲۵, ۰/۰۳۳, ۰/۰۳۳۲۵, ۰/۰۳۱۲۵, ۰/۰۳۴۲۵, ۰/۰۳۱۷۵, ۰/۰۳۱۵,\\ &۰/۰۳۲۲۵, ۰/۰۳۱۹۷۵)^T\end{aligned}$$

تابع هدف $E[\eta^T x] = \sum_{i=۱}^{n} x_i \mu_i$ است و حد ERV به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Phi^{-۱}(\alpha)\sqrt{x^T \Sigma x} + z - \mu^T x \leq ۰ \qquad (۳۴.۵)$$

در نتیجه مسأله بهینه‌سازی سبدسهام موازنه به مدل برنامه‌ریزی محدب زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\max \quad & 0/03175x_1 + 0/0315x_2 + 0/03325x_3 + 0/03325x_4 + 0/0315x_5 + 0/0345x_6 + \\
& 0/03175x_7 + 0/03175x_8 + 0/0325x_9 + 0/03225x_{10} + 0/0315x_{11} + 0/03125x_{12} \\
& + 0/033x_{13} + 0/03325x_{14} + 0/03125x_{15} + 0/03425x_{16} + 0/03175x_{17} + \\
& 0/0315x_{18} + 0/03225x_{19} + 0/031975x_{20} \\
\text{s.t.} \quad & 10^{-1}\Phi^{-1}(\alpha)\Big(\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{20}\sigma_{ij}x_ix_j\Big)^{\frac{1}{2}} + z - \Big(0/03175x_1 + 0/0315x_2 + 0/03325x_3 + \\
& 0/03325x_4 + 0/0315x_5 + 0/0345x_6 + 0/03175x_7 + 0/03175x_8 + 0/0325x_9 + \\
& 0/03225x_{10} + 0/0315x_{11} + 0/03125x_{12} + 0/033x_{13} + 0/03325x_{14} + 0/03125x_{15} \\
& + 0/03425x_{16} + 0/03175x_{17} + 0/0315x_{18} + 0/03225x_{19} + 0/031975x_{20}\Big) \leq 0 \\
& z \geq k \\
& \sum_{i=1}^{20} x_i = 1 \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 20
\end{aligned} \tag{5.35}$$

برای حل مدل (۵.۳۵) با نرم‌افزار LINGO، سطح اطمینان $\alpha = 0/8$ و مقدار معلوم ERV، $\kappa = 0/006$ را درنظر می‌گیریم. سبدسهام بهینه به‌دست آمده در جدول ۵.۴ ارائه شده است و مقدار بهینه تابع هدف ۰/۰۳۳۹۸ است.

برای شناسایی تأثیرات پارامترهای مدل بر کیفیت جواب، مدل تصادفی (۵.۳۵) نیز با مقادیر مختلف پارامترهای α و κ حل می‌شود. جواب بهینه سرمایه‌گذاری در جدول ۵.۵ نشان داده شده است. واضح است نتایج جواب با مقادیر مختلف α و κ متفاوت هستند. اگر پارامتر $\kappa = 0/006$ را تنظیم کنیم، تابع هدف با توجه به سطح اطمینان α کاهش می‌یابد. با توجه به پارامتر α تابع هدف نیز با توجه به پارامتر κ کاهش می‌یابد.

جدول ۴.۵: [نتایج محاسباتی با $\alpha = ۰/۸, \kappa = ۰/۰۰۶$]

نسبت‌های سرمایه‌گذاری	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$x_۵$
	$x_۶$	$x_۷$	$x_۸$	$x_۹$	$x_{۱۰}$
	$x_{۱۱}$	$x_{۱۲}$	$x_{۱۳}$	$x_{۱۴}$	$x_{۱۵}$
	$x_{۱۶}$	$x_{۱۷}$	$x_{۱۸}$	$x_{۱۹}$	$x_{۲۰}$
مقادیر	۰	۰	۰/۱۱۶۸۹	۰/۰۴۵۹۶	۰
	۰/۴۱۵۳۹	۰	۰	۰/۰۱۸۰۶	۰
	۰	۰	۰/۰۸۵۳۸	۰/۰۷۶۳۴	۰
	۰/۲۴۱۹۸	۰	۰	۰	۰

اکنون نتایج محاسباتی گزارش شده در جدول ۲.۵ و ۴.۵ را به‌عنوان مقادیر بهینه آن‌ها گزارش می‌کنیم. وقتی پارامترهای مدل با مقادیر یکسان تنظیم می‌شوند، روش بهینه‌سازی موازنه ما و روش بهینه‌سازی تصادفی، طرح‌های سرمایه‌گذاری مختلفی ارائه می‌کنند. روش موازنه، ۱۵ دارایی ریسکی را انتخاب می‌کند درحالیکه روش تصادفی، ۷ دارایی ریسکی را انتخاب می‌کند. بعلاوه، دو روش بهینه‌سازی، نسبت‌های سرمایه‌گذاری مختلفی برای دارایی ریسکی یکسان نشان می‌دهند. برای مثال روش موازنه، نسبت سرمایه‌گذاری ۰/۰۶۵۹۹ را برای دارایی ریسکی سوم ارائه می‌کند درحالیکه روش تصادفی، نسبت سرمایه‌گذاری $x_۳ = ۰/۱۱۶۸۹$ را ارائه می‌دهد. از منظر تنوع، نتیجه می‌گیریم روش موازنه ما نسبت به روش تصادفی کلاسیک بهتر است. با مقایسه نتایج محاسباتی جدول‌های ۳.۵ و ۵.۵ مشاهده می‌شود روش موازنه و روش تصادفی، ترکیبات مختلفی از دارایی‌های ریسکی و نرخ‌های مختلف بازده بهینه را ارائه می‌کنند. برای مثال وقتی سطح احتمال $\alpha = ۰/۸۲$، سطح اعتبار $\beta = ۰/۸$ و $\kappa = ۰/۰۰۶$ را تنظیم می‌کنیم، روش موازنه سرمایه‌گذاری بهینه زیر را برای ۱۷ دارایی ارئه می‌دهد:

$$x = \Big(۰, ۰/۰۱۰۳۹, ۰/۰۴۳۴۳, ۰/۰۳۵۶۴, ۰/۰۴۶۷۱, ۰/۱۶۰۳۳, ۰/۰۹۳۰۹, ۰/۰۸۱۷۶, ۰/۰۶۶۷۳, ۰/۰۴۶۱۲,$$
$$۰/۰۰۱۰۸, ۰/۰۸۶۱۶, ۰/۰۶۷۵۳, ۰/۰۰۹۱۶, ۰, ۰/۰۹۷۵۳, ۰/۰۳۶۱۳, ۰/۰۱۶۶۸, ۰/۱۰۱۵۳, ۰\Big)^T$$

که مقدار تابع هدف متناظر آن ۰/۰۳۲۷۱ است.
روش تصادفی سرمایه‌گذاری بهینه زیر را برای ۹ دارایی ریسکی انتخاب می‌کند.

$$x = \Big(۰, ۰, ۰/۱۲۲۸۶, ۰/۰۴۹۵۵, ۰, ۰/۳۷۹۰۲, ۰, ۰, ۰/۰۴۱۵۷, ۰, ۰, ۰, ۰/۰۸۸۶۷, ۰/۰۸۱۳۱, ۰, ۰/۲۱۶۱۴,$$
$$۰/۰۱۱۶۱, ۰, ۰/۰۰۹۲۷, ۰\Big)^T$$

نرخ بازده سرمایه بهینه که توسط روش تصادفی ارئه می‌شود ۰/۰۳۳۸۶ است.

ازسوی دیگر با همان مقادیر پارامترهای مدل، مشاهده می‌کنیم مقادیر تابع هدف بهینه در جدول ۵.۵ بزرگتر از مقادیر ارائه شده در جدول ۳.۵ است. مثلا وقتی $\alpha = ۰/۷۸, \beta = ۰/۸$ و $\kappa = ۰/۰۰۶$ روش موازنه مقدار بهینه ۰/۰۳۳۰۸ را ارائه می‌دهد، درحالیکه روش تصادفی،

جدول ۵.۵: جواب‌های بهینه مدل تصادفی تحت مقادیر مختلف پارامترها

پارامترها		نسبت‌های سرمایه گذاری					مقادیر تابع هدف
α	κ	$x_{۱}$ $x_{۶}$ $x_{۱۱}$ $x_{۱۶}$	$x_{۲}$ $x_{۷}$ $x_{۱۲}$ $x_{۱۷}$	$x_{۳}$ $x_{۸}$ $x_{۱۳}$ $x_{۱۸}$	$x_{۴}$ $x_{۹}$ $x_{۱۴}$ $x_{۱۹}$	$x_{۵}$ $x_{۱۰}$ $x_{۱۵}$ $x_{۲۰}$	EV
۰/۷۸	۰/۰۰۶	۰	۰	۰/۰۹۹۰۶	۰/۰۳۶۵۸	۰	۰/۰۳۴۰۸
		۰/۴۶۰۹۹	۰	۰	۰	۰	
		۰	۰	۰/۰۶۷۰۰	۰/۰۶۲۱۲	۰	
		۰/۲۷۴۲۴	۰	۰	۰	۰	
۰/۸	۰/۰۰۶	۰	۰	۰/۱۱۶۸۹	۰/۰۴۵۹۶	۰	۰/۰۳۳۹۸
		۰/۴۱۵۳۹	۰	۰	۰/۰۱۸۰۶	۰	
		۰	۰	۰/۰۸۵۳۸	۰/۰۷۶۳۴	۰	
		۰/۲۴۱۹۸	۰	۰	۰	۰	
۰/۸۲	۰/۰۰۶	۰	۰	۰/۱۲۲۸۶	۰/۰۴۹۵۵	۰	۰/۰۳۳۸۶
		۰/۳۷۹۰۲	۰	۰	۰/۰۴۱۵۷	۰	
		۰	۰	۰/۰۸۸۶۷	۰/۰۸۱۳۱	۰	
		۰/۲۱۶۱۴	۰/۰۱۱۶۱	۰	۰/۰۰۹۲۷	۰	
۰/۷۸	۰/۰۰۸	۰	۰	۰/۱۱۵۱۹	۰/۰۴۴۸۸	۰	۰/۰۳۳۹۹
		۰/۴۲۱۵۴	۰	۰	۰/۰۱۲۸۴	۰	
		۰	۰	۰/۰۸۴۵۹	۰/۰۷۴۵۵	۰	
		۰/۲۴۶۴۱	۰	۰	۰	۰	
۰/۷۸	۰/۰۰۹	۰	۰	۰/۱۲۰۴۴	۰/۰۴۸۲۲	۰	۰/۰۳۳۹۴
		۰/۴۰۲۵۶	۰	۰	۰/۰۲۸۹۳	۰	
		۰	۰	۰/۰۸۷۰۱	۰/۰۸۰۱۰	۰	
		۰/۲۳۲۷۴	۰	۰	۰	۰	

مقدار بهینه ۰٫۰۳۴۰۸ را ارائه می‌کند، زیرا وقتی نرخ های بازده فازی_تصادفی به نرخ‌های تصادفی کاهش می‌یابد، حدهای اعتباری مناسب می‌شوند. بنابراین ممکن است نرخ بازده مورد انتظار بالاتری به‌دست آوریم. با این‌حال برتری روش موازنه ما بر حسب متنوع‌سازی منعکس می‌شود.

در آخر، می‌خواهیم اشاره کنیم سرمایه‌گذار ممکن است اغلب با محیط نامطئن هیبرید در بازارهای مالی مدرن مواجه شود. دراین شرایط، سرمایه‌گذار نمی‌تواند تأثیر عدم قطعیت فازی بر کیفیت جواب را نادیده بگیرد. نتایج محاسباتی، بحث ما را پشتیبانی می‌کند. مثلا وقتی سطح احتمال $\alpha = 0.78, \kappa = 0.006$ باشد، مدل تصادفی (۳۵.۵) طرح سرمایه‌گذاری بهینه

$$x^* = (0, 0, 0.09906, 0.03658, 0, 0.46099, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.0670, 0.06212, 0, 0.27424, 0, 0, 0, 0)^T$$

را پیشنهاد دهد.

در هر حال، x^* جواب شدنی برای مدل بهینه‌سازی موازنه (۳۳.۵) نیست و سطح احتمال $\alpha = 0.78$ و سطح اعتبار $\beta = 0.78, \kappa = 0.006$ دارد. به‌منظور قابل قبول بودن x^* برای مدل (۳۳.۵)، باید پارامتر κ را از ۰٫۰۰۶ به ۰٫۰۰۷۱۷− کاهش دهیم. با تعریف κ، جواب بهینه متناظر با ۰٫۰۰۷۱۷− از لحاظ عملی بی‌معنی است. در نتیجه، نتایج محاسبه واضح است که روش بهینه‌سازی موازنه ما در مدل‌سازی مسأله انتخاب سبدسهام در محیط نامطمئن هیبرید موثر است و درآن تصادفی و فازی بودن واضح است.

۴.۵.۵ نتیجه‌گیری

پس از مقایسه شیوه بهینه‌سازی موازنه پیشنهادی با شیوه بهینه‌سازی تصادفی کلاسیک دریافتیم که وقتی پارامترهای مدل با مقادیر یکسان تنظیم می‌شوند، روش بهینه‌سازی موازنه و روش بهینه‌سازی تصادفی طرح‌های سرمایه‌گذاری مختلفی ارائه می‌دهند. روش موازنه ۱۵ دارایی ریسکی و روش تصادفی ۷ دارایی ریسکی را انتخاب می‌کند. از منظر تنوع نتیجه می‌گیریم روش موازنه پیشنهادی نسبت به روش تصادفی کلاسیک بهتر است، در واقع هرچه سرمایه‌مان را بین گزینه‌های بیشتری توزیع کنیم ریسک غیرسیستماتیک تقلیل پیدا می‌کند و این برتری را روش بهینه‌سازی موازنه نسبت به روش بهینه‌سازی تصادفی دارد.

مراجع

[۱] سلیمانپورباکفایت ا. (۱۹۹۳)، ’’ مفاهیم و کاربردهای شبکه های عصبی مصنوعی درعلوم پایه قابل استفاه برای دانشجویان و محققین علوم پایه و فنی و مهندسی‘‘، چاپ اول، انتشارات ارومیه

[۲] جونز چ پ ،(۱۹۳۳)،’’ مدیریت سرمایه گذاری’’ ،چاپ سوم، انتشارات نگاه دانش

[3] B.Flury. (2010), ” A First Course in Multivariate Statistics”, pp. 178,690.

[4] M.S. Bazaraa. H.D. Sherali and C.M. Shetty. (1993), ”Nonlinear Programming: Theory and Algorithms” John Wiley and Sons, New York.

[5] G.F. Simmons. (2016), ”Differential Equations with Applications and Historical Notes”.

[6] S. Effati, A.R. Nazemi, (2006), ”Neural Network Models and its Application for Solving Linear and Quadratic Programming Problems”, Applied Mathematics and Computation, Vol. 172, pp. 305-331.

[7] W.F. Sharpe, (1964), ”Capital Asset Price: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk”, Journal of Finance, Vol. 19, No. 3, pp. 16-18.

[8] Lntner J. (1965), ”The VCaluation of Risk Asset and the Selection of Risky Investments in Stock: Portfolio and Capital Budgets, Reviwe of Economics and Statistics”, Vol. 47, pp. 22-26.

[9] S.A. Ross, (1976), ”The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, Journal of Economic Theory”, Vol. 13, PP. 341-360.

[10] Black F. and Litterman R. (1990), ”Asset Allocation: Combing Investor Views with Market Equilibrium, Goldman Sachs Fixed Income Research”.

[11] J. Mossin, (1966), ”Equilibrium in a Capital Asset Market, Econometrica”, Vol. 34,pp. 14-16.

[12] Hull J.C. (2006), ”Options,Futures,and Other Derivatives”, 6th Edition, Perntice Hall, New Jersey.

[13] Jones C.P. (2001), ”Investments: Analysis and Management”, John Wiley and Sons, New York.

[14] Markovitz H. (1952), ”Portfolio Selection, Journal of Finance”, Vol. 7,pp. 77-91.

[15] Markovitz H. (1959), ”Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment”, John Wiley and Sons, New York.

[16] S.M. Lee, A.J. Lerro, (1973), ”Optimization the Portfolio Selection for Mutual Funds, The Journal of finance”, Vol. 28, pp. 1087-1099.

[17] S.M. Lee, D.L. Chesser (1980), ”Goal Programming for Portfolio, The Journal of Portfolio Managment”, pp. 22-26.

[18] R. Mansini, M.G. Spreranza, (1997) ”Heuristic Algorithms for the Portfolio Selection Problem with Minimum Transaction lots”, European Journal of Opeartional Resarch, Vol. 114, pp. 219-233.

[19] M.R. Young, A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution, Management Science, Vol. 44, pp. 673-683, 1998.

[20] Y. Xia, B. Liu, W. Shoayang, and K. Lai, A Model for Portfoilo Selection with Order of Expected Returns, Computers and Opeartionals Resarch, Vol. 27, pp. 409-424, 1999.

[21] T. Chang, T. Meade, j.E. Beasley and Y.M. Sharaihan, Heuristics for Cardinay Constrained Portfoilo Optimization, Computers and Opeartionals Resarch, Vol. 27, pp. 1271-1302, 2000.

[22] J. Palmquist, S. Uryaser, and P. Krokhmal, Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints, Journal of Risk, 1999.

[23] S.M. Lobo, M. Fazel, and S. Boyd, Portfolio Optimization with Linear and Fixed Transaction Costs, California Institue of Technology, 2002.

[24] C. Papahristodoulou and E. Dotzauer, Optimal Portfolios Using Linear Programming Models, Journal of Operations Research Society, Vol. 55, pp. 1169-1177, 2004.

[25] R. Mansini, W. Oyryczak and M.G. Speranza, LP Solvable Models for Portfolio Optimization: A Classification and Computational Comparison, IMA Journal of Management Mathematics, Vol. 14, pp. 187-220, 2003.

[26] Zhang, S. and Constantinides, A.G. (1992), Lagrange programming neural networks" IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, 39,7, pp 441–452.

[27] Effati, S. and Baymani, M. (2005), " A new nonlinear neural network for solving convex nonlinear programming problems" Applied Mathematics and Computation, 168,2, pp 1370–1379.

[28] X.Huang (2010), "Portfolio Analysis from probabilistic to Credibilistic and Uncertain Approaches " ,School of Economics and Management,University of Science and Technology Beijing,Beijing,China.

[29] L.D. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, Vol. 8, pp. 338–353, 1965.

[30] R.E. Bellman, L.A. Zadeh, Decision-Making in a Fuzzy Environment, Management Science, Vol. 17, pp. 141-164, 1970.

[31] B. Liu, Theory and Practice of Uncertain Programming, Heidelberg, Germany: Physica-Verlag, 2008.

[32] B. Liu, Uncertainty Theory, Springer, 2004.

[33] Fukushima, M. (1992), " Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems" Mathematical Programming, 53,1-3, pp 99–110.

[34] Hopfield J.J. and Tank D.W. (1985), " Neural computation of decisions in optimizatioc problems", Biological Cybernetics, 533-541.

[35] Hopfield J.J. and Tank D.W. (1985), " Neural computation of decisions in optimizatioc problems", Biological Cybernetics, 141-152.

[36] Tank D. and Hopfield J.J. (1986), Simple'neural'optimization networks: An A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 33(5), 533-541.

[37] Kennedy M.P. and Chua L.O. (1988), neural networks for nonlinear programming. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 35(5), 554-562.

[38] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. M. Shetty, Nonlinear Programming- Theory and Algorithms, 2nd ed. New York: Wiley, 1993.

[39] H. Y. Benson, R. J. Vanderbei Solving Problems with Semidefinite and Related Constraints Using Interior-Point Methods for Nonlinear Programming, Mathematical Programming, Series B, 95 (2003) 279-302.

[40] C-H. Ko, J.-S. Chen, C-Y Yang, Recurrent neural networks for solving second-order cone programs, Neurocomputing 74 (2011) 3646-3653.

[41] J. Sun, J-S. Chen, C.-H. Ko, Neural networks for solving second-order cone constrained variational inequality problem, Computational Optimization and Applications, (First online).

[42] A. R. Nazemi, A dynamic system model for solving convex nonlinear optimization problems, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 17 (2012) 1696–1705.

[43] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. Numerical mathematics, volume 37 of Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2007

[44] J. Faraut, A. Kornyi, Analysis on Symmetric Cones, in: Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York, 1994.

[45] F. Alizadeh, D. Goldfarb, Second-order cone programming, Mathematical Programming 95 (2003) 3-51.

[46] E.D. Andersen, C. Roos, T. Terlaky, On implementing a primal–dual interior-point method for conic quadratic optimization, Mathematical Programming 95 (2003) 249–277.

[47] X.-D. Chen, D. Sun, J. Sun, Complementarity functions and numerical experiments for second-order cone complementarity problems,Computational Optimization and Applications 25 (2003) 39–56

[48] S. Boyd, C. Crusius, A. Hansson, Control applications of nonlinear convex programming, Journal of Control Process 8 (5) (1998) 313-324.

[49] K. Z. Chen, Y. Leung, K. S. Leung, X. B. Gao, A neural network for nonlinear programming problems, Neural Computing Application 11 (2002) 103–111.

[50] X. Mu, S. Liu, Y. Zhang, A neural network algorithm for second-order conic programming, in: Proceedings of the Second International Symposiumon Neural Networks, Chongqing, China, PartII, 2005, pp.718724.

[51] Y. Xia, J. Wang, L. M. Fok, Grasping-force optimization formultifingered robotic hands using a recurrent neural network, IEEE Transactions on Robotics and Automation, 20(3) (2004) 549-554.

[52] [63] L. Z. Liao, H. D. Qi, A neural network for the linear complementarity problem, Mathematical and Computer Modeling 29 (3) (1999) 9-18.

[53] Y. Xia, J. Wang, A recurrent neural network for solving nonlinear convex programs subject to linear constraints, IEEE Transactions on Neural Networks 16 (2005) 379-386.

[54] A. R. Nazemi, F. Omidi, A capable neural network model for solving the maximum flow problem, Journal of Computational and Applied Mathematics, In Press.

[55] Y.Wang, Y.Chen, and Y.Liu " Modeling Portfolio Optimization Problem by Probability-Credibility Equilibrium Risk Criterion" (February 2016)

[56] A. Ang, D. Papanikolaou, and M. M. Westerfield, "Portfolio choice with illiquid assets," Management Science, vol. 60, no. 11, pp. 2737–2761, 2014.

[57] Y. Shen, X. Zhang, and T. K. Siu, "Mean-variance portfolio selection under a constant elasticity of variance model," Operations Research Letters, vol. 42, no. 5, pp. 337–342, 2014.

[58] J. Watada, "Fuzzy portfolio selection and its application to decision making," Tatra Mountains Mathematical Publication, vol. 13, pp. 219–248, 1997

[59] H. Tanaka and P. Guo, "Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions," European Journal of Operational Research, vol. 114, no. 1, pp. 115–126, 1999.

[60] M. Inuiguchi and J. Ram´ık, "Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming

in portfolio selection problem," Fuzzy Sets and Systems, vol. 111, no. 1, pp. 3–28, 2000

[61] C. Carlsson, R. Fuller, and P. Majlender, "A possibilistic ´ approach to selecting portfolios with highest utility score," Fuzzy Sets and Systems, vol. 131, no. 1, pp. 13–21, 2002.

[62] Y. Fang, K. K. Lai, and S.-Y. Wang, "Portfolio rebalancing model with transaction costs based on fuzzy decision theory," European Journal of Operational Research, vol. 175, no. 2, pp. 879–893, 2006.

[63] Y. Chen, Y. Liu, and J. Chen, "Fuzzy portfolio selection problems based on credibility theory," in Advances in Machine Learning and Cybernetics, vol. 3930 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 377–386, Springer, 2006

[64] [19] X. Zhang, W.-G. Zhang, and R. Cai, "Portfolio adjusting optimization under credibility measures," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 234, no. 5, pp. 1458–1465, 2010.

[65]] Z. Qin, X. Li, and X. Ji, "Portfolio selection based on fuzzy crossentropy," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 228, no. 1, pp. 139–149, 2009.

[66] H. Dastkhan, N. S. Gharneh, and H. Golmakani, "A linguisticbased portfolio selection model using weighted max-min operator and hybrid genetic algorithm," Expert Systems with Applications, vol. 38, no. 9, pp. 11735–11743, 2011

[67] X.-L. Wu and Y.-K. Liu, "Optimizing fuzzy portfolio selection problems by parametric quadratic programming," Fuzzy Optimization and Decision Making, vol. 11, no. 4, pp. 411–449, 2012.

[68]] Y. Chen, Y. Liu, and X. Wu, "A new risk criterion in fuzzy environment and its application," Applied Mathematical Modelling, vol. 36, no. 7, pp. 3007–3028, 2012.

[69] J. S. Kamdem, C. T. Deffo, and L. A. Fono, "Moments and semimoments for fuzzy portfolio selection," Insurance: Mathematics and Economics, vol. 51, no. 3, pp. 517–530, 2012.

[70] M. K. Mehlawat and P. Gupta, "Fuzzy chance-constrained multiobjective portfolio selection model," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 22, no. 3, pp. 653–671, 2014

[71] X. Deng and R. Li, “Gradually tolerant constraint method for fuzzy portfolio based on possibility theory,” Information Sciences, vol. 259, pp. 16–24, 2014.

[72] T. Li, W. Zhang, and W. Xu, “A fuzzy portfolio selection model with background risk,” Applied Mathematics and Computation, vol. 256, pp. 505–513, 2015.

[73] Y. Chen and Y. Wang, “Two-stage fuzzy portfolio selection problem with transaction costs,” Mathematical Problems in Engineering, vol. 2015, Article ID 675157, 12 pages, 2015.

[74]] X. Huang, “Two new models for portfolio selection with stochastic returns taking fuzzy information,” European Journal of Operational Research, vol. 180, no. 1, pp. 396–405, 2007.

[75] H. Markowitz, “Portfolio selection,” Journal of Finance, vol. 7, no. 1, pp. 77–91, 1952.

[76] H. M. Markowitz, Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, John Wiley and Sons, 1959.

[77] H. Konno and H. Yamazaki, “Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market,” Management Science, vol. 37, no. 5, pp. 519–531, 1991.

[78] Y. Simaan, “Estimation risk in portfolio selection: the mean variance model versus the mean absolute deviation model,” Management Science, vol. 43, no. 10, pp. 1437–1446, 1997.

[79] P. Jorion, Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk, Irwin Professional Publishing, Willowbrook, Ill, USA, 1997.

[80] S. Y. Wang and Y. S. Xia, Portfolio Selection and Asset Pricing, Springer, Berlin, Germany, 2002.

[81] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility,” Fuzzy Sets and Systems, vol. 1, no. 1, pp. 3–28, 1978.

[82] Y.-K. Liu and B. Liu, “Random fuzzy programming with chance measures defined by fuzzy integrals,” Mathematical and Computer Modelling, vol. 36, no. 4-5, pp. 509–524, 2002.

[83] B. Liu, Theory and Practice of Uncertain Programming, Physica, Heidelberg, Germany, 2002.

[84] Y.-K. Liu and B. Liu, "Expected value operator of random fuzzy variable and random fuzzy expected value models," International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, vol. 11, no. 2, pp. 195–215, 2003.

[85] B. Liu and Y.-K. Liu, "Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 10, no. 4, pp. 445–450, 2002.

[86] Y.-K. Liu and J. Gao, "The independence of fuzzy variables with applications to fuzzy random optimization," International Journal of Uncert

Aabstract

In this thesis, a neural network model is presented for solving convex second-order cone programming problems and then to solve portfolio optimization problems in the probability-credibility space.

To begin with, in the first chapter reviews the basic mathematical and financial concepts, and in the second chapter fuzzy concepts and credibility theory. in the third chapter, the introduction of recurrent neural networks has been proposed. In the fourth chapter, the optimal conditions for the optimization problem are considered And then a corresponding neural network model is designed. We show that the neural network equilibrium point is equivalent to the optimal solution of the main problem. Also, the proposed neural network model is Lyapunov stable and converges globally to the optimal answer. In the last chapter, by introducing the probability-credibility space, we will solve the portfolio optimization problem by the equilibrium risk value (ERV).The portfolio problem is constructed as a expected value model (EV) of a random fuzzy subject to ERV constraint. It is called the ERV-EV model. The ERV-EV model is a convex programming problem.

Computational results show that the equilibrium optimization method is better than the random optimization method in perspective of diversity.

Keywords: Portfolio Optimization, Convex Second-Order Cone Problems, Fuzzy, Random Fuzzy, Recurrent Neural Networks, Equilibrium risk value

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in Financial Math

The chance optimization problem for optimal portfolio selection

By: Zahra Majidi

Supervisors:

Dr. Alireza Nazemi
Dr. Seyed Mojtaba Mirlohi

February 2021