دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده:**علوم پایه**

گروه: ریاضی کاربردی

عنوان پایان نامه ارشد

انتشار احاطه گر در گراف ها

دانشجو:

فاطمه خسروی

استاد راهنما:

آقای دکترنادرجعفری راد

استاد مشاور:

آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف

پایان نامه تحصیلی جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

۲۳ شهریور ۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد **خانم فاطمه خسروی** رشته **ریاضی** گرایش **ریاضی کاربردی** تحت عنوان: **انتشار احاطه گر در گراف** که در تاریخ ۹۰/۶/۲۳ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی-شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : عالی امتیاز ۱۹/۵) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	دکتر نادر جعفری راد	استادیار	
۲ـ استاد مشاور	دکتر صادق رحیمی شعرباف	استادیار	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر احمد زیره	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر علیرضا ناظمی	استادیار	
۵ ـ استاد ممتحن	دکتر بهزاد صالحیان	استادیار	

رئیس دانشکده :

دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی شاهرود

سهو تایپی

عنوان اصلی پایان نامه عنوان روی جلد است که در فرم صورتجلسه دفاع تیک «ها» جا افتاده است

جعفری راد - استاد راهنما

۱۸/ /۹۰

الهی

در عرصه پهناور گیتی،

هرچه بیش می دانم، بدانم که هیچ ندانم

مرا مدد کن تا این دانش اندکم نه نردبانی باشد

برای فزونی غرور و تکبر،

نه حلقه ای برای اسارت، نه دستمایه ای برای تجارت،

بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن

زندگی خود و دیگران.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان

برایم همه مهر

تشکر و قدردانی

اکنون که به یاری خداوند متعال این دوره از تحصیلاتم را به پایان رسانده ام، بر خود واجب می دانم، از زحمات فراوان استاد فرهیخته و توانمندم جناب آقای دکتر نادر جعفری راد که راهنمایی ها و نظرات ارزنده، صبر و حوصله فراوان ایشان نقش مهمی در به ثمر رساندن این پایان نامه داشت، صمیمانه تشکر کنم و از استاد مشاورم جناب آقای صادق رحیمی شعرباف کمال تشکر را دارم. از اساتید داور جناب آقای علیرضا ناظمی و جناب آقای بهزاد صالحیان که زحمت حضور در جلسه دفاع را تقبل نمودند تشکر می کنم.

همچنین لازم می دانم تلاش های خستگی ناپذیر پدر و مادر دلسوزم، برادران مهربانم و خواهر عزیزم که همواره ره گشای مشکلاتم در تمامی مراحل زندگی بوده، ارج نهاده و مراتب قدردانی و تشکر قلبی خویش را از الطاف و مهربانی های آنها ابراز دارم.

تعهد نامه

اینجانب **فاطمه خسروی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** دانشکده **علوم** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **انتشار احاطه گر در گراف ها** تحت راهنمائی **دکتر نادر جعفری راد** متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۹۰/۶/۲۳

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

این پایان نامه شامل پنج فصل است. فصل اول شامل تعاریف اولیه گراف است. در فصل دوم انتشار در گراف و انواع آن را تعریف کرده و با مثال آنها را با هم مقایسه می کنیم. فصل سوم شامل انتشارهای احاطه گر در گراف ها است و چند نوع از آنها را بررسی می کنیم. در فصل چهارم احاطه گری انتشار گراف های حاصلضربی مورد بررسی قرار می گیرند و در نتیجه در فصل پنجم انتشار احاطه گر محدود را که یکی از مسائل بازی است که توسط دونبار و همکارانش بیان شده بود، مطرح می کنیم.

واژه‌های کلیدی: انتشار، انتشار احاطه گر، انتشار احاطه گر مستقل، انتشار انباشته، انتشار مؤثر، انتشار احاطه گر متراکم و انتشار احاطه گر محدود.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

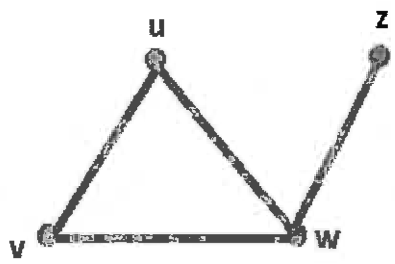
فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

۱.۱ تعریف‌ها و نمادهای مقدماتی

[۱۵]

تعریف ۱.۱.۱ (گراف). گراف G یک سه تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$، متشکل از مجموعه ناتهی $V(G)$ی رأس ها، مجموعهٔ $E(G)$ی یال ها مجزا از $V(G)$، و تابع وقوع ψ_G است که با هر یال G، یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از رأس های G را همراه می کند. اگر e یک یال و u, v رأس هایی باشند، به قسمی که $\psi_G(e) = uv$، آنگاه می گویند e، u را به v وصل می کند، رأس های u, v را دو انتهای e می نامند. از این پس گراف را به صورت دو مؤلفه $(V(G), E(G))$ نمایش می دهیم. مثلاً، شکل (۱.۱) گراف ساده G را نشان می دهد که مجموعه رئوس، $V(G)$ عبارت است از $\{u, v, w, z\}$ و مجموعه یال ها، برابر $\{\{w, z\}, \{u, w\}, \{u, v\}\}$ است. در یک گراف G، یال $\{v, w\}$ که رئوس v و w را به هم وصل می کند، معمولاً به صورت خلاصه vw نوشته می شود.



شکل ۱.۱: گراف

تعریف ۲.۱.۱ (زیرگراف). یک زیرگراف گراف G، گرافی است مانند H به طوری که $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. زیرگراف H از G را یک زیرگراف القایی نامیم، هرگاه هر یال G که دو سر آن در $V(H)$ قرار دارد متعلق به $E(H)$ باشد. در صورتی که زیرگراف H از G در شرط $V(H) = V(G)$ صدق کند، آن را یک زیرگراف فراگیر از G خواهیم نامید.

تعریف ۳.۱.۱ (مجموعه مستقل). یک مجموعه مستقل در گراف G، زیرمجموعه ای از رأس ها مانند S است به طوری که زیرگراف القایی $< S >$ هیچ یالی نداشته باشد.

تعریف ۴.۱.۱ (مسیر). یک گشت[1]، اساساً، دنباله ای از رأس ها و یال هاست که به دنبال یکدیگر می آیند و ابتدا و انتهای آنها دو رأس می باشند. گشتی که در آن هیچ رأسی بیش از یک بار ظاهر نشود یک مسیر نام دارد. برای مثال، در شکل (۱.۱)، $z \to w \to u$ یک راه برای رفتن از z به u است. این را یک گشت به طول ۲ می گویند. همچنین $z \to w \to u \to v \to w$ یک گشت به طول ۴ است. مثلاً $z \to w \to u \to v$ یک مسیر است. به دلایل روشن، مسیری مانند $w \to u \to v \to w$ را یک مدار گویند.

تعریف ۵.۱.۱ (گراف همبند). گرافی که در آن بین هر دو رأس مسیری وجود دارد یک گراف همبند نام دارد. در غیر این صورت گراف ناهمبند است. بدیهی است که هر گراف ناهمبند را می توان به صورت اجتماع تعداد متناهی از گراف های همبند در نظر گرفت، در این صورت هر یک از گراف های همبند را یک مؤلفه گراف G می نامند.

تعریف ۶.۱.۱ (جنگل). یک گراف بدون دور را جنگل گویند.

تعریف ۷.۱.۱ (درخت). گراف همبندی که در آن هر دو رأس فقط با یک مسیر به هم وصل هستند را درخت نامند. درخت فراگیر یک زیرگراف فراگیری است که درخت باشد.

تعریف ۸.۱.۱ (مرتبه). مرتبه گراف G، که با $n(G)$ نشان داده می شود تعداد رأس های گراف G است.

تعریف ۹.۱.۱ (درجه رأس). تعداد یال هایی که از رأس v می گذرند را درجه آن رأس گویند و آن را با $deg(v)$ یا $d(v)$ نشان می دهند. ماکسیمم و مینیمم درجه در بین درجات رأس های G را به ترتیب با

[1] Walk

$\triangle(G)$ و $\delta(G)$ نشان می دهند.

تعریف ۱۰.۱.۱ (برگ). یک برگ (یا رأس آویخته) رأسی از درجه یک می باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱ (رأس های مجاور). در گراف G، دو رأس v و w را مجاور گویند، هرگاه یک یال بین آن دو وجود داشته باشد (یعنی، یک یال به صورت vw وجود داشته باشد). در این صورت می گویند که رئوس v و w بر آن یال واقع هستند. هم چنین دو یال متمایز از G را مجاور گویند، هرگاه یک رأس مشترک داشته باشند.

تعریف ۱۲.۱.۱ (رأس پشتیبان). یک رأس غیر برگ است که مجاور برگ باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱ (فاصله). اگر G دارای یک $u-v$ مسیر باشد، آنگاه فاصله u تا v، که آن را به صورت $d_G(u,v)$ و یا به سادگی $d(u,v)$ می نویسند کوچکترین طول یک $u-v$ مسیر است. اگر G دارای چنین مسیری نباشد، آنگاه تعریف می کنند $d(u,v)=\infty$.

تعریف ۱۴.۱.۱ (گریز از مرکز). گریز از مرکز رأس یک رأس u که آن را به صورت $e(u)$ می نویسند عبارت است از $max\{d(u,v) : v \in V(G)\}$.

تعریف ۱۵.۱.۱ (قطر). قطر یک گراف G عبارت است از $max\{e(u) : u \in V(G)\}$ و آن را با $diam(G)$ نشان می دهند.

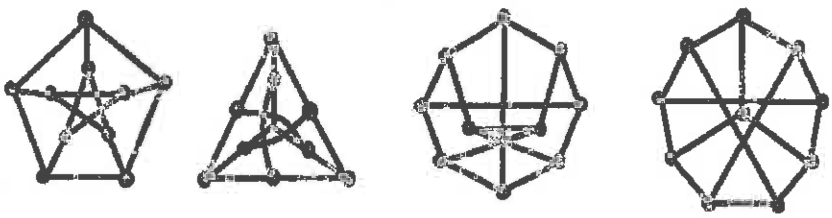
تعریف ۱۶.۱.۱ (شعاع). شعاع یک گراف G عبارت است از $min\{e(u) : u \in V(G)\}$ و آن را با $rad(G)$ نشان می دهند.

تعریف ۱۷.۱.۱ (همسایگی). فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف باشد. برای یک رأس $v \in V$، همسایگی باز v مجموعه $N(v)=\{u \in V \mid uv \in E\}$ و همسایگی بسته رأس v مجموعه $N[v]=N(v)\cup\{v\}$ می باشد.

تعریف ۱۸.۱.۱ (یکریختی). یک یکریختی از گراف G به گراف H یک نگاشت دو سویی $f: V(G) \longrightarrow V(H)$ است به طوری که $uv \in E(G)$ اگر و فقط اگر، $f(u)f(v) \in E(H)$. گوییم $G \cong H$، اگر یک یکریختی از G به H وجود داشته باشد.

مثال ۱۹.۱.۱. (گراف پترسن) گراف پترسن عموماً به صورت گراف سمت چپ شکل (۲.۱) رسم می شود. دیگر گراف های زیر نیز با گراف پترسن یکریخت هستند.

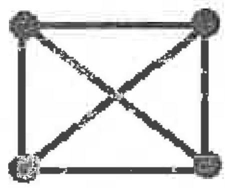
گراف پترسن دارای توصیف ساده ای با استفاده از مجموعه S است که از زیرمجموعه های ۲-عنصری از یک مجموعه ۵-عنصری تشکیل شده است. فرض کنید G گرافی با مجموعه رأس های S باشد که در آن دو جفت تشکیل یک یال می دهند اگر و فقط اگر، به صورت مجموعه های مجزا باشند. گراف G با هر گراف زیر یکریخت است. این مطلب از نشاندار کردن رأس های هر گراف با اعضای S به طوری که رابطه مجاورت مجزا بودن باشد نتیجه می شود.



شکل ۲.۱: گراف پترسن

تعریف ۲۰.۱.۱ (گراف تهی). گرافی را که مجموعه یال آن تهی است یک گراف تهی می نامند. گراف تهی با n رأس را با N_n نشان می دهند.

تعریف ۲۱.۱.۱ (گراف کامل). یک گراف ساده را که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشند، یک گراف کامل می نامند (شکل (۳.۱)). گراف کامل با n رأس را معمولاً به صورت K_n، نشان می دهند. به راحتی می توان دید که K_n دارای $\frac{1}{2}n(n-1)$ یال است.



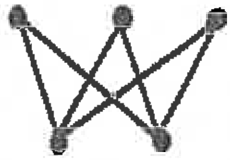
شکل ۳.۱: گراف کامل K_4

تعریف ۲۲.۱.۱ (گراف منتظم). گراف G را منتظم[۲] نامند هرگاه درجه تمام رئوس آن با هم برابر باشند. اگر درجه هر رأس r باشد آنگاه گراف را r-منتظم می نامند. گراف پترسن یک گراف ۳-منتظم است.

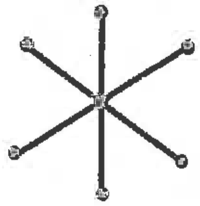
گراف تهی منتظم از درجه صفر و هر گراف کامل K_n، منتظم از درجه $n-1$ است. همچنین اگر گراف G، n رأس داشته باشد و منتظم از درجه r باشد، آنگاه می توان دید G دارای $\frac{1}{2}rn$ یال است.

تعریف ۲۳.۱.۱ (گراف دوبخشی). فرض کنید مجموعه رئوس یک گراف را بتوان به دو مجموعه مجزای V_1 و V_2 افراز کرد، به طوری که هر یال G یک رأس از V_1 را به یک رأس از V_2 وصل کند. در این صورت G را یک گراف دوبخشی می نامند. در صورتی که بخواهیم دو مجموعه مربوط را مشخص کنیم آن را به صورت $G(V_1, V_2)$ نشان می دهیم. تأکید می شود که در یک گراف دوبخشی، لزوماً هر رأس V_1 به هر رأس V_2 وصل نیست. اما اگر چنین باشد و اگر G ساده باشد، آنگاه G را یک گراف دوبخشی کامل می نامند و معمولاً به صورت $K_{r,s}$ نشان داده می شود که در آن r,s به ترتیب تعداد رئوس در V_1 و V_2 است. توجه کنید که $K_{r,s}$، $r+s$ رأس و rs یال دارد (شکل (۴.۱)). یک گراف دوبخشی کامل به صورت $K_{1,s}$، یک ستاره نامیده می شود (شکل (۵.۱)).

[۲] Regular

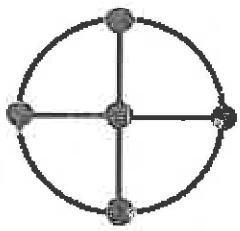


شکل ۴.۱: گراف کامل $K_{3,2}$



شکل ۵.۱: ستاره

تعریف ۲۴.۱.۱ (چرخ). گرافی که از اتصال هر یک از رئوس یک دور C_{n-1} به یک رأس جدید v بدست می آید را یک چرخ[۳] n رأسی می نامند و با W_n نشان می دهند (شکل (۶.۱)).

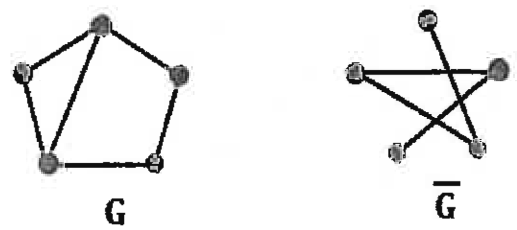


شکل ۶.۱: چرخ

تعریف ۲۵.۱.۱ (مکمل یک گراف ساده). فرض کنید G یک گراف ساده، با مجموعه رأس های $V(G)$ است. مکمل[۴] G که با نماد $\overline{G}$ نشان داده می شود، گراف ساده ای است که مجموعه رأس های آن $V(G)$ است و در آن هر دو رأسی که در G مجاور نیستند، مجاور هستند. در نتیجه اگر G، n رأس

[۳] Wheel
[۴] Complement

داشته باشد، آنگاه $\overline{G}$ را می توان با حذف تمام یال های G، از K_n بدست آورد (شکل (۷.۱)). توجه کنید که مکمل یک گراف کامل، گراف تهی است و مکمل یک گراف دوبخشی کامل عبارت است از اجتماع دو گراف کامل.



شکل ۷.۱: گراف G و مکمل آن

فصل ۲

انتشار در گراف ها

۱.۲ مقدمه

گراف ها اغلب به صورت مدل هایی از شبکه های ارتباطی مورد استفاده قرار می گیرند. فرض کنید یک ایستگاه رادیویی می خواهد امواج با ظرفیت های محدود را به شهرهایی مختلف منتشر کند. مدل این وضعیت را با یک گراف نمایش می دهند به طوری که رأس ها ایستگاه های مخابره کننده هستند و مجاورت دو رأس نشان می دهد که این رأس ها هر کدام در دامنه دیگری قرار دارند. هنگامی که مخابره کننده ها فرکانس مشابه منتشر می کنند تداخل ایجاد می شود. مخابره کننده ها معمولاً برای فواصل دور فرکانس مشابه به کار می برند. اروین[۱] در سال ۲۰۰۴ مدلی را تعریف کرد که در آن مخابره کننده ها پیام را به ایستگاه هایی به فاصله بیشتر از ۱ می فرستند. بنابراین، فرض کنید هر رأس v به ازای یک عدد k می تواند پیام ها را به همه رأس های با فاصله کمتر یا مساوی k از v انتشار دهد. این موضوع در خصوص ایستگاه های رادیویی، بیمارستان ها، راکتورهای هسته ای و تخلیه زباله می تواند مطرح شود و با استفاده از مدل سازی نظریه گراف می توان چنین مسائلی را به منظور یافتن جواب بهینه بررسی کرد.

۲.۲ اصطلاحات علمی و نمادگذاری

تعریف ۱.۲.۲ (مجموعه احاطه گر). مجموعه $S \subseteq V$ یک مجموعه احاطه گر[۲] است اگر $N[S] = V$ باشد.

تعریف ۲.۲.۲ (عدد احاطه گری). مینیمم مقدار یک مجموعه احاطه گر مینیمال می باشد و آن را با $\gamma(G)$ نشان می دهیم. همچنین عدد احاطه گری بالایی گراف G ماکسیمم مقدار یک مجموعه احاطه گر مینیمال می باشد و آن را با $\Gamma(G)$ نشان می دهیم (شکل (۱.۲)).

[۱] Erwin
[۲] Dominating set

شکل ۱.۲: گراف $P_۶$، $\Gamma(P_۶) = ۳, \gamma(P_۶) = ۲$

تعریف ۳.۲.۲ (عدد احاطه گری مستقل). مینیمم مقدار یک مجموعه مستقل ماکسیمال در G است و آن را با $i(G)$ نشان می دهیم (شکل (۲.۲)).

تعریف ۴.۲.۲ (عدد استقلال رأسی). ماکسیمم مقدار یک مجموعه مستقل ماکسیمال در G است و آن را با $\beta_۰(G)$ نشان می دهیم (شکل (۲.۲)).

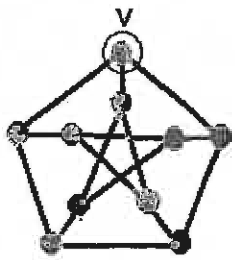
شکل ۲.۲: گراف $P_۶$، $\beta_۰(P_۶) = ۳, i(P_۶) = ۲$

تعریف ۵.۲.۲ (مجموعه انباشته). مجموعه S انباشته[۳] است اگر برای هر رأس $v \in V$، $|N[v] \cap S| \leq ۱$. ماکسیمم مقدار یک انباشتگی در G عدد انباشتگی است و آن را با $P(G)$ نشان می دهیم. مینیمم مقدار یک انباشتگی ماکسیمال در G عدد انباشتگی پائینی است و آن را با $p(G)$ نشان می دهیم. در شکل (۳.۲) مجموعه $S = \{v\}$ یک مجموعه انباشته است.

در [۹] نامساوی زیر در خصوص پارامترهای فوق ارائه شده است.

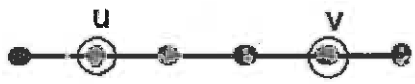
$$p(G) \leq P(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_۰(G) \leq \Gamma(G).$$

[۳] Packing



شکل ۳.۲: گراف پترسن، $p(PG) = P(PG) = 1$

تعریف ۶.۲.۲ (مجموعه مؤثر). مجموعه احاطه گر S مؤثر[۴] نامیده می شود هرگاه برای هر رأس $v \in V$ داشته باشیم $|N[v] \cap S| = 1$. در شکل (۴.۲) مجموعه $S = \{u, v\}$ مؤثر است.



شکل ۴.۲: مجموعه مؤثر

توجه داشته باشید که هر گرافی لزوماً یک مجموعه احاطه گر مؤثر ندارد. برای مثال یک دور با پنج رأس هیچ مجموعه احاطه گر مؤثری ندارد.

همچنین اگر گراف G مجموعه احاطه گر مؤثر داشته باشد، آنگاه مجموعه های احاطه گر مؤثر در G هم اندازه هستند که این اندازه مشترک را با $\gamma(G)$ نشان می دهیم.

در بخش بعدی نشان خواهیم داد مفهوم انتشار در گراف ها، تعمیمی طبیعی و بی واسطه از مفاهیم استقلال، احاطه گری و انباشتگی در گراف ها فراهم می کند.

[۴] Efficient

۳.۲ انتشارها در گراف ها

تابع $f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, ..., diam(G)\}$ یک انتشار نامیده می شود هرگاه برای هر رأس $v \in V$، $f(v) \leq e(v)$، که در آن $diam(G)$ قطر G و $e(v)$ گریز از مرکز رأس v است که در آن $1 \leq diam(G) < \infty$.

فرض کنید انتشار f داده شده است، همسایگی انتشار رأس u را به صورت

$$N_f[u] = \{v \mid d(u, v) \leq f(u)\}$$

تعریف می کنیم. همچنین تعریف می کنیم $V_f^\circ = \{v \mid f(v) = 0\}$ و

$$V_f^+ = V - V^\circ = \{u \mid f(u) > 0\}.$$

فرض کنید $V^+ = V_f^+$ و $V^\circ = V_f^\circ$. در این صورت هر رأس در V^+ یک رأس انتشار است و همسایگی انتشار f را به صورت $N_f[V^+] = \bigcup_{v \in V^+} N_f[v]$ تعریف می کنیم. اگر $u \in V^+$ یک رأس انتشار باشد، $v \in V$ و $d(u, v) \leq f(u)$، آنگاه رأس v می تواند یک انتشار را از رأس u بپذیرد. مجموعه ای از رأس ها که یک رأس $v \in V$ از آنها انتشار را می پذیرد به صورت $H(v) = \{u \in V^+ \mid d(u, v) \leq f(u)\}$ تعریف می شود. برای یک رأس $v \in V$، همسایگی ویژه f که با $pn_f[v]$ نشان داده می شود مجموعه $\{u \in V \mid H(u) = \{v\}\}$ است. اگر $v \in pn_f[v]$ باشد، آنگاه گوئیم v، در همسایگی ویژه f است.

تعریف ۱.۳.۲ (وزن انتشار). وزن یک انتشار f را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(V) = \sum_{v \in V} f(v) = \sum_{v \in V^+} f(v).$$

انتشار f مینیمال (ماکسیمال) نامیده می شود اگر انتشار $g \neq f$ وجود نداشته باشد به طوری که برای هر $u \in V$، $g(u) \leq f(u)$ ($g(u) \geq f(u)$). فرض کنید دو انتشار متفاوت f و g داده شده است، گوییم $f \leq g$ ($f \geq g$) اگر و فقط اگر برای هر رأس $u \in V$، $f(u) \leq g(u)$ ($f(u) \geq g(u)$).

فرض کنید $f_S : V(G) \longrightarrow \{0, 1\}$ تابع مشخصه یک مجموعه $S \subseteq V$ از گراف G باشد. اگر $u \in S$، آنگاه $f_S(u) = 1$ و در غیر این صورت $f_S(u) = 0$.

۴.۲ انتشارهای احاطه گر

تعریف ۱.۴.۲ (انتشار احاطه گر). انتشار f احاطه گر است هرگاه $N_f[V^+] = V(G)$ باشد، یا به طور معادل، هرگاه برای هر $v \in V$، $|H(v)| \geq 1$. مینیمم مقدار $f(V)$ در میان انتشارهای احاطه گر f روی گراف G را عدد احاطه گری انتشار G نامیده و با $\gamma_b(G)$ نشان می دهیم. گوییم یک انتشار احاطه گر با وزن $\gamma_b(G)$ یک γ_b-انتشار است و نمادگذاری مشابهی برای انواع دیگر انتشارها به کار می بریم. همچنین ماکسیمم مقدار یک انتشار احاطه گر مینیمال را عدد احاطه گری انتشار بالا نامیده و با $\Gamma_b(G)$ نشان می دهیم.

موضوع انتشار در گراف ها ابتدا در رساله دکتری اروین [۶] در سال ۲۰۰۱ با عنوان هزینه احاطه گری مطرح شده است. در این رساله، اروین بعضی از کران های بالا و پائین روی عدد انتشار یک گراف را پیدا کرد و گراف های با عدد انتشار حداکثر ۳ را دسته بندی کرد. او همچنین چندین نوع دیگر از انتشارها از قبیل انتشارهای مینیمال و مستقل را بررسی کرد. نتایج اروین را همچنین می توان در [۷] دید. کران بالای زیر ابتدا توسط اروین مطرح شده است.

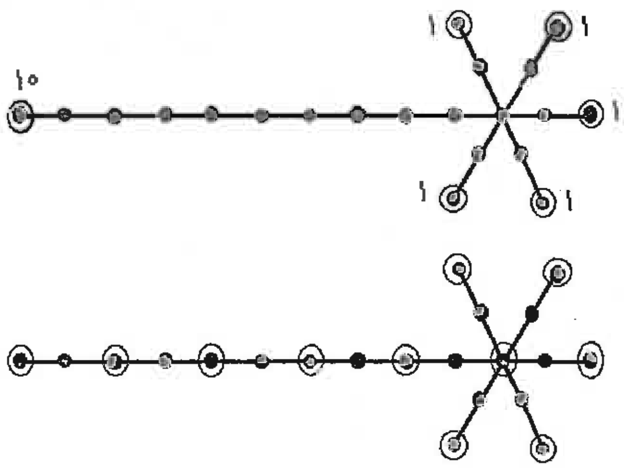
گزاره ۲.۴.۲. [۶] برای هر گراف همبند نابدیهی G،

$$\lceil\frac{diam(G)+1}{3}\rceil \leq \gamma_b(G) \leq min\{rad(G), \gamma(G)\}.$$

تابع مشخصه f_S برای هر مجموعه احاطه گر مینیمال S در گراف G یک انتشار احاطه گر مینیمال است. فرض کنید $u \in V$ رأسی در گراف G باشد و $f_u : V(G) \longrightarrow \{0, 1, ..., diam(G)\}$ به صورت $f_u(u) = e(u)$ تعریف شده باشد. اگر u یک رأس در مرکز G باشد ($e(u) = rad(G)$)، آنگاه انتشار f_u

$$f(x) = \begin{cases} ۲k+۲ & x = v \\ ۱ & x \in M - v \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

چون یکی از برگ های $S(K_{۱,۲+k})$ به یکی از دو برگ $P_{۲k}$ متصل است پس H_k دارای $k+۱$ برگ غیر از v می باشد چون به رأس v مقدار $۲k+۲$ را نسبت دادیم پس یک انتشار احاطه گر مینیمال در H_k با مقدار $۳k+۳$ داریم. بنابراین، $\Gamma_b(H_k) \geq ۳k+۳$ در نتیجه، نامساوی زیر را بدست می آوریم (شکل (۶.۲)).



شکل ۶.۲: گراف $H_۴$، $\Gamma(H_۴) = ۱۱, \gamma_b(H_۴) = ۱۵$

مشاهده ۴.۴.۲. [۶] برای هر عدد صحیح و مثبت k،

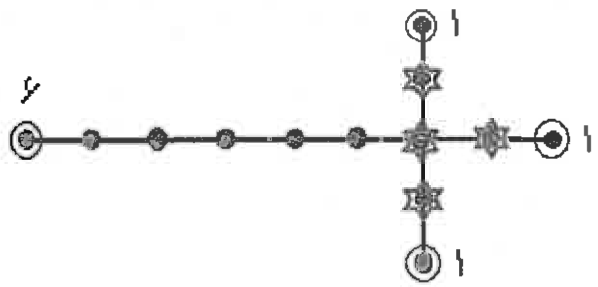
$$\Gamma_b(H_k) - max\{\Gamma(H_k), diam(H_k)\} \geq k - ۱.$$

با توجه به اینکه $\Gamma_b(H_k) \geq ۳k+۳$ و $max\{\Gamma(H_k), diam(H_k)\} = ۲k+۴$ را داریم پس نتیجه مورد نظر بدست می آید.

قضیه ۵.۴.۲. [۶] فرض کنید f یک انتشار احاطه گر در گراف G باشد. در این صورت f مینیمال است اگر و فقط اگر در شرایط زیر صدق کند.

(۱) هر رأس v با $f(v) \geq ۲$ یک f-همسایگی ویژه دارد که در فاصله $f(v)$ از v است.

(۲) هر رأس v با $f(v) = ۱$ یک f-همسایگی ویژه در $N[v]$ دارد (شکل (۷.۲)).



شکل ۷.۲: همسایگی های ویژه گراف $H_۲$

لم ۶.۴.۲. [۶] فرض کنید f یک انتشار احاطه گر در گراف G باشد، $u, v \in V^+$، $u \neq v$ و u_p, v_p به ترتیب، f-همسایگی ویژه u, v باشد. برای هر جفت x, y از رأس های G، اگر x روی یک کوتاهترین مسیر بین u, u_p و y روی یک کوتاهترین مسیر بین v, v_p قرار داشته باشد آنگاه $x \neq y$.

قضیه ۷.۴.۲. اگر G یک گراف با اندازه m باشد، آنگاه $\Gamma_b(G) \leq m$. تساوی برقرار است اگر و فقط اگر G یک ستاره یا یک مسیر نابدیهی باشد.

اثبات. فرض کنید f یک Γ_b-انتشار از G باشد. طبق قضیه ۵.۴.۲، اگر $v \in V^+$، آنگاه v یک f-همسایگی ویژه (نشان داده شده v_p) دارد به طوری که

۱. $f(v) = d(v, v_p)$،

۲. $v = v_p$, $f(v) = 1$.

تابع ε را روی V^+ به صورت زیر تعریف می کنیم:

اگر $v \in V^+$ و در ۱ صدق کند، آنگاه $\varepsilon(v)$ مجموعه همه یال هایی است که بین v و v_p قرار دارند (بنابراین $f(v) \geq |\varepsilon(v)|$)، اگر v در ۲ صدق کند، آنگاه $\varepsilon(v) = \{e_v\}$، به طوری که e_v یالی است که با v هم وقوع است. توجه کنید که e_v وجود دارد و با یک رأس در V° برخورد کرده است زیرا G همبند شده است و v، f- همسایگی ویژه خودش است. همچنین توجه کنید که $f(v) \leq \sum_{v \in V^+} |\varepsilon(v)|$. به منظور اثبات کران بالا کافی است برای هر جفت u, v از رأس های متمایز V^+، نشان دهیم $\varepsilon(u) \cap \varepsilon(v) = \emptyset$. دو حالت را در نظر می گیریم:

حالت ۱: u, v هر دو در ۱ صدق می کنند. از لم ۶.۴.۲، اگر x روی مسیر بین u, u_p قرار داشته باشد و y روی مسیر بین v, v_p، آنگاه $x \neq y$. بنابراین یالی وجود ندارد که هم بین u, u_p و هم بین v, v_p قرار داشته باشد، در نتیجه $\varepsilon(u) \cap \varepsilon(v) = \emptyset$.

حالت ۲: حداقل یکی از u, v (مثلاً v) در ۲ صدق می کند. وقتی v، f- همسایگی ویژه خودش باشد، رأس v' با e_v به v متصل شده است که $f(v') = 0$، به طوری که برای $x \neq v$ امکان ندارد که $u = v'$ یا $e_v = e_x$ باشد. اگر v' روی کوتاهترین مسیر بین u, u_p قرار داشته باشد، آنگاه v توسط u احاطه شده است که با این مسأله که v، f- همسایگی ویژه خودش است، متناقض می باشد. بنابراین، رأس v' روی کوتاهترین مسیر بین u, u_p قرار نداشته، همچنین e_v روی کوتاهترین مسیر بین u, u_p قرار نداشته است. بنابراین، $\varepsilon(u) \cap \varepsilon(v) = \emptyset$. در نتیجه، $\Gamma_b(G) = \sum_{v \in V^+} |\varepsilon(v)| \leq m$.

برای اثبات قسمت دیگر، ابتدا نشان می دهیم که $\Gamma_b(P_n) \geq diam(P_n) = n - 1 = m$ و با توجه به تعریف $\Gamma_b(G)$ برای گراف P_n در صورتی انتشار احاطه گر مینیمال، ماکسیمم است که به یکی از برگ

های آن مقداری برابر با قطر P_n و به بقیه رأس ها عدد ۰ نسبت دهیم و همچنین چون قطر P_n برابر $(n-1)$ است در نتیجه $\Gamma_b(P_n) = n-1 = m$. برای یک ستاره $K_{1,m}$، فرض کنید f تابعی باشد که به هر برگ عدد ۱ و به مرکز عدد ۰ (صفر) را تخصیص دهد. در این صورت f یک انتشار احاطه گر مینیمال است، و $\Gamma_b(K_{1,m}) \geq m$ و داریم $\Gamma_b(K_{1,m}) = m$.

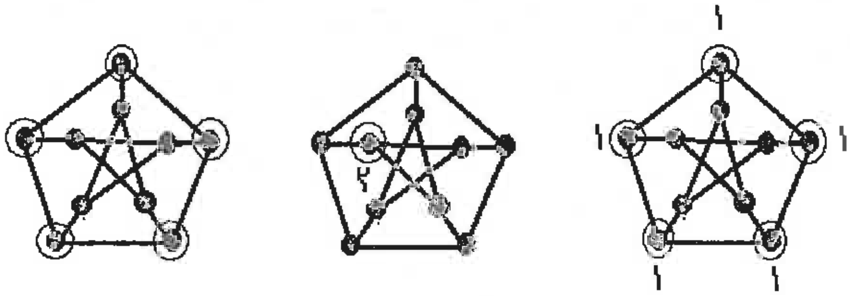
برعکس، فرض کنید برای گراف G با اندازه m داشته باشیم $\Gamma_b(G) = m$. در سراسر فرایند اثبات نامساوی، تساوی برقرار است. لذا $f(V) = \sum_{v\in V^+} |\varepsilon(v)| = m$. به خصوص برای هر $v \in V^+$، $|\varepsilon(v)| = f(v)$ و هر یال $E(G)$ برای $v \in V^+$ در مجموعه $\varepsilon(v)$ قرار دارد. چون هر یال در $\varepsilon(v)$ برای هر $v \in V^+$ به حداقل یک رأس در V° برخورد می کند، نتیجه می گیریم V^+ یک مجموعه مستقل است.

فرض کنید $v \in V^+$ و v در ۱ صدق کند. چون $|\varepsilon(v)| = f(v)$، کوتاهترین مسیر منحصر به فرد بین v, v_p وجود دارد. فرض کنید x بین v, v_p قرار داشته باشد و x یک همسایه مانند y دارد که در کوتاهترین مسیر بین v, v_p قرار ندارد. در این صورت برای $u \neq v$، $xy \in \varepsilon(u)$ که x بین u, u_p قرار دارد و با لم قبل متناقض است. بنابراین بنا به حالت ۲، رأسی از V^+ که در ۲ صدق کند، وجود ندارد که همسایه ای روی هر کوتاهترین مسیر بین v, v_p داشته باشد. بنابراین همبندی G نتیجه می دهد که $V^+ = \{v\}$ و $V(G)$ مسیر بین $v - v_p$ است.

بنابراین می توان فرض کرد که هر رأس در V^+ در ۲ صدق می کند که برای هر $v \in V^+$، $\varepsilon(v) = \{e_v\}$. اما همبندی G نتیجه می دهد که G یک ستاره است. □

در بخش بعدی، رابطه بین $\Gamma_b(G), \gamma_b(G)$ و ثابت های دیگر انتشار را بررسی خواهیم کرد. این بخش را با مثال هایی از تساوی بدست آمده در $\Gamma_b(G) \geq max\{diam(G), \Gamma(G)\}$ به پایان می بریم. طبق مشاهده ۳.۴.۲ و قضیه ۷.۴.۲، برای مسیر P_n، $diam(P_n) = n-1 \leq \Gamma_b(P_n) \leq m = n-1$ و بنابراین $\Gamma_b(P_n) = n-1$.

گراف پترسن PG را در نظر بگیرید. فرض کنید S مجموعه ای از رأس های زیرگراف C_5 از PG باشد. در این صورت S یک Γ-مجموعه از PG است و $\Gamma_b(PG) \geq \Gamma(PG) = ۵$. فرض کنید f یک Γ_b-انتشار از PG باشد. اگر برای هر $u \in V^+$، $f(u) \geq ۲$ باشد، آنگاه مینیمم سازی f نتیجه می دهد برای هر $v \neq u$، $f(v) = ۰$. اگر به یکی از رأس های $u \in V(PG) - C_5$ عدد ۲ را تخصیص دهیم آنگاه کل گراف احاطه می شود. بنابراین $f(V) = ۲$. در نتیجه می توان فرض کرد برای هر $u \in V^+$، $f(u) = ۱$. لذا $\Gamma_b(PG) = \Gamma(PG) = ۵$ (شکل (۸.۲)).



شکل ۸.۲: گراف پترسن، $\Gamma(PG) = ۵, \gamma_b(PG) = ۲ < \Gamma_b(PG) = ۵$

۵.۲ انتشارهای مستقل

تعریف ۱.۵.۲ (انتشار مستقل). انتشار f مستقل نامیده می شود هرگاه برای هر رأس $v \in V^+$، $N_f[v] \cap V^+ = \{v\}$، یا به طور معادل، $|H(v)| = ۱$. اگر f یک انتشار مستقل باشد، آنگاه رأس منتشر کننده ای وجود ندارد که بتواند یک انتشار را از هر رأس منتشر کننده دیگر بپذیرد. ماکسیمم مقدار یک انتشار مستقل از G عدد استقلال انتشار نامیده می شود و با $\beta_b(G)$ نشان داده می شود. همچنین مینیمم مقدار یک انتشار مستقل ماکسیمال از G را عدد استقلال انتشار پائین نامیده و با $i_b(G)$ نشان داده می شود (شکل (۹.۲)).

شکل ۲.۹: گراف P_4 و P_6، $i_b(P_6) = ۳, \beta_b(P_4) = ۴$

مشاهده ۲.۵.۲. برای هر گراف G،

$$i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \beta_b(G).$$

اثبات. می دانیم $rad(G) \leq diam(G)$ و همچنین طبق تعریف قبل $i_b(G) \leq \beta_b(G)$. چون در انتشار های شعاعی و قطری $|V^+| = ۱$ در نتیجه هر دو انتشار مستقل ماکسیمال می باشند. پس نتیجه حاصل می شود. □

فرض کنید M زیر مجموعه ای از رأس های G باشد به طوری که برای هر جفت رأس u, v در M، $d(u,v) = diam(G)$، و فرض کنید $\mu(G)$ ماکسیمم تعداد این زیر مجموعه ها را روی G نشان دهد. گزاره بعدی کران پائین $\beta_b(G)$ را بهبود می بخشد.

گزاره ۳.۵.۲. برای هر گراف G داریم،

$$\beta_b(G) \geq \mu(G)(diam(G) - ۱) \geq ۲(diam(G) - ۱)$$

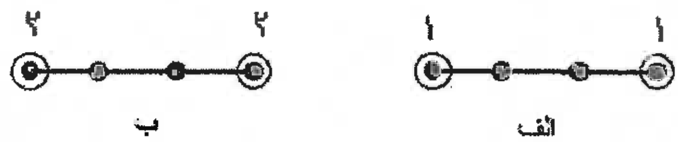
و کران در دسترس است.

اثبات. برای هر رأس $v \in M$، فرض کنید $f(v) = diam(G) - ۱$ و برای هر رأس $u \in V - M$، فرض کنید $f(u) = ۰$. چون هیچ دو رأس متعلق به V^+ همدیگر را نمی پوشانند در نتیجه f یک انتشار مستقل است. بنابراین $\beta_b(G) \geq \mu(G)(diam(G) - ۱)$. نشان خواهیم داد که ستاره تقسیم شده $T = S(K_{۱,t})$ با $t \geq ۲$، کران را بدست می آورد. ابتدا توجه کنید $diam(T) = ۴$. چون گراف $T = S(K_{۱,t})$ یک

ستاره با t شاخه است که وسط هر یال آن یک رأس اضافه شده است بنابراین فاصله هر برگ آن با رأس مرکزی برابر ۲ می باشد. در نتیجه قطر گراف (حداکثر فاصله بین هر دو رأس که در این گراف هر دو آنها برگ می باشند) برابر ۴ است و $\mu(T) = t$. این نتیجه می دهد که $\beta_b(T) \geq ۳t$. برای دیدن اینکه $\beta_b(T) \leq ۳t$، فرض کنید f یک β_b انتشار از T باشد. اگر برای رأسی مانند $v \in V^+$ داشته باشیم $f(v) = ۴$، آنگاه $f(V) = ۴ < ۳t$ و $V^+ = \{v\}$. بنابراین فرض کنید برای هر $v \in V^+$ داریم $f(v) \leq ۳$. فرض کنید x در مرکز T باشد. توجه داریم که $f(x) \leq e(x) = ۲$ و $e(x)$ گریز از مرکز رأس x است. اگر $f(x) = ۱$ باشد چون رأس x خودش و همسایه های مجاورش را می پوشاند، آنگاه برای هر $u \in N(x)$، $f(u) = ۰$ و برای هر $v \in V - N[x]$، $f(v) \leq ۱$. در حالت دیگر، $f(V) < ۳t$. بنابراین $f(x) = ۰$. زمانی که بیشتر از یک برگ متعلق به V^+ باشد، چون حداکثر t برگ داریم نتیجه می شود $|V^+| \leq t$ و چون $diam(T) - ۱ = ۳$ بنابراین $f(V) \leq ۳t$. □

تابع مشخصه f_S هر مجموعه مستقل ماکسیمال S در یک گراف G یک انتشار مستقل است و بنابراین $i(G) \leq \beta_۰(G) \leq \beta_b(G)$، اما f_S الزاماً یک انتشار مستقل ماکسیمال نیست. برای مثال، مسیر $P_۴ : v_۱, v_۲, v_۳, v_۴$ را در شکل (۱۰.۲) در نظر بگیرید. اگر $f(v_۱) = f(v_۴) = ۱$ و $f(v_۲) = f(v_۳) = ۰$ (شکل الف (۱۰.۲))، آنگاه f تابع مشخصه یک مجموعه مستقل ماکسیمال است و یک انتشار مستقل و انتشار احاطه گر مینیمال می باشد. اما این تابع یک انتشار مستقل ماکسیمال نیست چون می توانیم $f(v_۱)$ و $f(v_۴)$ را به ۲ افزایش دهیم. تابع جدید g تعریف شده در زیر یک انتشار مستقل ماکسیمال است. $g(v_۱) = g(v_۴) = ۲$ و $g(v_۲) = g(v_۳) = ۰$ (شکل ب (۱۰.۲)).

برای دو پارامتر a و b از گراف، منظور از نماد $a \lozenge b$ آن است که a و b قابل مقایسه نیستند. یعنی در حالت کلی در گراف G، $a \leq b$ نمی باشد و $a \geq b$ نیز نمی باشد.



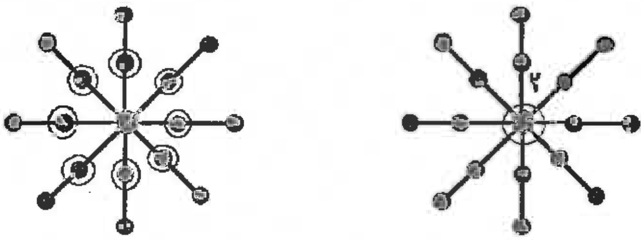
شکل ۲.۱۰: الف: انتشار مستقل ماکسیمال، ب: انتشار مستقل و احاطه گر مینیمال

می توان دید که $i(G)$ و $\gamma(G)$ با $i_b(G)$ قابل مقایسه نیستند، (که به صورت $i_b(G) \Diamond \gamma(G)$ و $i(G) \Diamond i_b(G)$ نشان می دهیم). برای مثال، برای گراف $P_۶$ داریم $\gamma(P_۶) = i(P_۶) = ۲ < ۳ = i_b(P_۶)$ (شکل (۲.۱۱)).

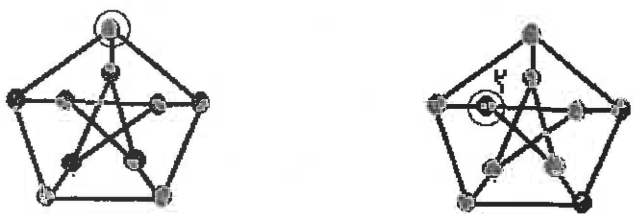
شکل ۲.۱۱: گراف $P_۶$، $\gamma(P_۶) = i(P_۶) = ۲ < ۳ = i_b(P_۶)$

برای گرافی که قبلاً تعریف شده، $S(K_{۱,t})$، $\gamma(S(K_{۱,t})) = i(S(K_{۱,t})) = t > ۲ = i_b(S(K_{۱,t}))$ (شکل (۲.۱۲)). همچنین ملاحظه می کنید که در حالت کلی $P(G)$ و $p(G)$ با $i_b(G)$ قابل مقایسه نیستند. برای مثال، برای گراف پترسن PG داریم $p(PG) = P(PG) = ۱ < ۲ = \gamma_b(PG) = i_b(PG)$ (شکل (۲.۱۳)) و اگر G گرافی تشکیل شده از اجتماع سه کپی مجزا از $P_۵$ با اضافه کردن سه یال به شکل یک مثلث باشد که مراکز گراف های $P_۵$ را به هم متصل می کند، آنگاه

$\gamma_b(G) = i_b(G) = ۳ < ۵ = p(G) < P(G)$ (شکل (۲.۱۴)).



شکل ۱۲.۲: گراف $S(K_{۱,۸})$، $\gamma(S(K_{۱,۸})) = i(S(K_{۱,۸})) = ۸ > ۲ = i_b(S(K_{۱,۸}))$



شکل ۱۳.۲: گراف پترسن، $p(PG) = P(PG) = ۱ < ۲ = \gamma_b(PG) = i_b(PG)$

مشاهده ۴.۵.۲. برای هر گراف G،

(i) $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_\circ(G) \leq \beta_b(G)$

(ii) $\{\gamma(G), i(G)\} \lozenge i_b(G)$

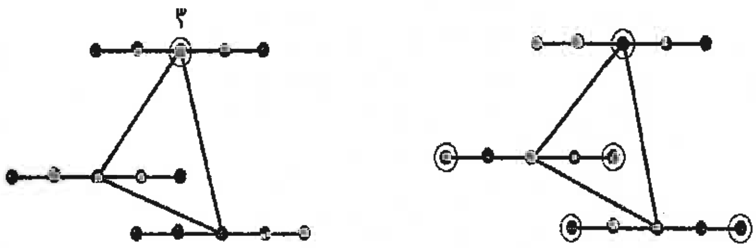
(iii) $\{p(G), P(G)\} \lozenge \{\gamma_b(G), i_b(G)\}$.

رابطه زیر را از قبل داریم:

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_\circ(G) \leq \Gamma(G).$$

برای یک رأس $v \in V^+$، فرض کنید $d^+(v) = min\{d(u,v) \mid u \in V^+ - \{v\}\}$.

قضیه ۵.۵.۲. [۷] فرض کنید f یک انتشار مستقل در گراف G باشد. اگر $V^+ = \{v\}$، آنگاه f ماکسیمال است اگر و تنها اگر $f(v) = e(v)$. به عبارت دیگر، اگر $|V^+| \geq ۲$، آنگاه f ماکسیمال است



شکل ۱۴.۲: گراف پترسن، $\gamma_b(PG) = i_b(PG) = ۳ < ۵ = p(PG) = P(PG)$

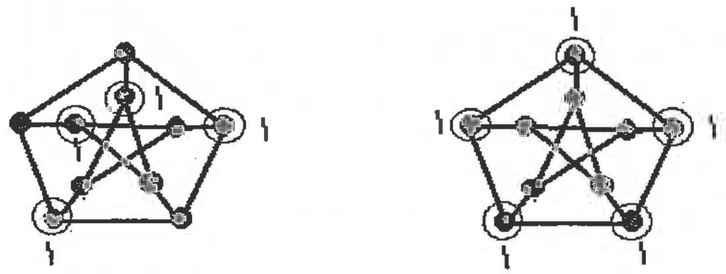
اگر و تنها اگر در دو شرط زیر صدق کند:

۱. f احاطه گر باشد،

۲. برای هر $v \in V^+$، $f(v) = d^+(v) - ۱$.

بنابراین، $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$. یک انتشار مستقل ماکسیمال انتشاری احاطه گر است ولی الزاماً انتشار احاطه گر مینیمال نمی باشد. برای مثال، شکل الف (۱۰.۲) یک انتشار را نشان می دهد که مستقل ماکسیمال است اما احاطه گر مینیمال نیست.

$\Gamma_b(G)$ و $\beta_b(G)$ مقایسه ناپذیرند. زیرا برای مسیر $P_۴$ داریم $\Gamma_b(P_۴) = ۳ < ۴ = \beta_b(P_۴)$ (شکل (۱۶.۲)). اما برای گراف پترسن داریم $\beta_b(PG) = ۴ < ۵ = \Gamma_b(PG)$ (شکل (۱۵.۲)). برای نشان دادن این که $\Gamma(G)$ و $\beta_b(G)$ مقایسه ناپذیرند داریم $\beta_b(P_۴) = ۴ > ۲ = \gamma(P_۴)$ (شکل (۱۷.۲)) در حالی که $\Gamma(PG) = ۵ > ۴ = \beta_b(PG)$ (شکل (۱۸.۲)).



شکل ۱۵.۲: گراف پترسن، $\beta_b(PG) = ۴ < ۵ = \Gamma_b(PG)$

شکل ۱۶.۲: گراف $P_۴$، $\Gamma_b(P_۴) = ۳ < ۴ = \beta_b(P_۴)$

نتیجه ۶.۵.۲. برای هر گراف G،

(i) $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$

(ii) $\beta_b(G) \diamond \Gamma_b(G)$

(iii) $\beta_b(G) \diamond \Gamma(G)$.

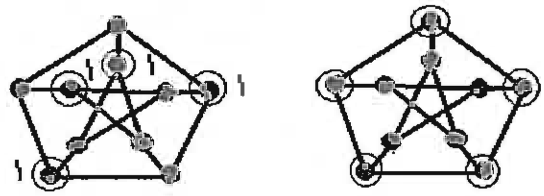
گزاره ۷.۵.۲. [۴] برای هر گراف G،

$$i_b(G) \leq rad(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G).$$

اثبات. کران بالا از این حقیقت نتیجه می شود که تابع مشخصه یک مجموعه مستقل یک انتشار مستقل است. بقیه نتیجه مستقیماً از مشاهده ۲.۵.۲ و رابطه $rad(G) \leq \beta_0(G)$ بدست می آید. □

اگر $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$، آنگاه نتیجه زیر را داریم.

شکل ۱۷.۲: گراف $P_۴$، $\beta_b(P_۴) = ۴ > ۲ = \Gamma(P_۴)$



شکل ۱۸.۲: گراف پترسن، $\beta_b(PG) = ۴ < ۵ = \Gamma(PG)$

نتیجه ۸.۵.۲. برای هر گراف G، ۱ اگر $\gamma_b(G) = rad(G)$ باشد آنگاه $i_b(G) = rad(G)$.

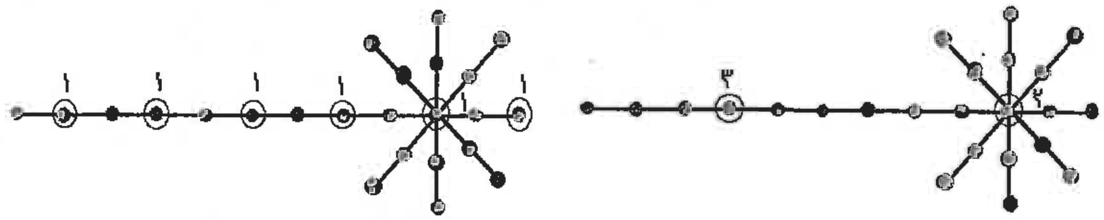
اثبات. طبق نتیجه ۶.۵.۲ داریم $\gamma_b(G) \le i_b(G)$. همچنین فرض کنید $\gamma_b(G) = rad(G)$. چون طبق گزاره ۷.۵.۲ داریم $i_b(G) \le rad(G)$، نتیجه مورد نظر حاصل می شود. □

عکس نتیجه بالا برقرار نیست. اگر گراف T را از یک زیر تقسیم ستاره $S(K_{۱,t})$ برای $t \ge ۳$ و یک مسیر $P_۹$ با اضافه کردن یک یال که مرکز $S(K_{۱,t})$ را به یک رأس انتهایی $P_۹$ متصل می کند، تشکیل دهیم آنگاه به وضوح $\gamma_b(T) = ۵ < ۶ = i_b(T) = rad(T)$ (شکل (۱۹.۲)). توجه کنید که نامساوی $i_b(G) \le rad(G)$ می تواند به طور اکید برقرار باشد. برای مثال، $i_b(P_{۱۰}) = ۴ < ۵ = rad(P_{۱۰})$. برای دیدن یک i_b-انتشار از $P_{۱۰}$، f را به صورتی در نظر می گیریم که اعداد ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰ را به رأس های $P_{۱۰}$ تخصیص دهد (شکل (۲۰.۲)). (نکته: زمانی که هر رأس در V^+ به فاصله ۲ از رأس های دیگر در V^+ باشد، f یک انتشار مستقل ماکسیمال است. بنابراین، $۴ \le i_b(P_{۱۰})$، چون هر $v \in V^+$ باید در فاصله $f(v) + ۱$ از رأس های دیگر در V^+ باشد، از ماکسیمال بودن f نتیجه می شود

که $i_b(P_{10}) \ge 4$).

نتیجه بالا و نامساوی زیر رابطه بین این هشت پارامتر را توصیف می کند.

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma(G) & \le & i(G) & \le & \beta_\circ(G) & \le & \Gamma(G) \\ \vee\!\!/ & & \Diamond & & /\!\!\wedge & & /\!\!\wedge \\ \gamma_b(G) & \le & i_b(G) & \le & \beta_b(G) & \Diamond & \Gamma_b(G) \end{array}$$



شکل ۱۹.۲: درخت T، $rad(T) = i_b(T) = 6 > 5 = \gamma_b(T)$

شکل ۲۰.۲: گراف P_{10}، $i_b(P_{10}) = 4$

۶.۲ انتشارهای احاطه گر مستقل

تعریف ۱.۶.۲ (انتشار احاطه گر مستقل). یک انتشار f انتشار احاطه گر مستقل نامیده می شود هرگاه f هم انتشار احاطه گر و هم انتشار مستقل باشد. مقدار ماکسیمم یک انتشار احاطه گر مستقل مینیمال G عدد احاطه گری مستقل انتشار بالا نامیده می شود و با $\Gamma_{ib}(G)$ نشان داده می شود و همچنین

مقدار مینیمم یک انتشار احاطه گر مستقل G عدد احاطه گری مستقل انتشار می باشد و با $\gamma_{ib}(G)$ نشان داده می شود.

چون تابع مشخصه هر مجموعه مستقل ماکسیمال، انتشار احاطه گر مستقل مینیمال است به وضوح،

$$\Gamma_{ib}(G) \geq \beta_{\circ}(G) \text{ و } \gamma_{ib}(G) \leq i(G).$$

نکته ۲.۶.۲. اگر f یک انتشار احاطه گر مستقل مینیمال باشد، آنگاه برای هر انتشار $g \neq f$ که $g \leq f$، g مستقل است ولی یک انتشار احاطه گر نیست.

در نظریه احاطه گری نامساوی اکید $\gamma(G) < i(G)$ اغلب برقرار است.

قضیه ۳.۶.۲. [۶] اگر f یک انتشار در گراف G باشد که احاطه گر باشد اما مستقل نباشد، آنگاه یک انتشار g در گراف G به صورت $V_g^+ \subset V_f^+$ و $g(V) \leq f(V)$ وجود دارد که مستقل و احاطه گر است.

نتیجه ۴.۶.۲. [۶] هر گراف G یک γ_b-انتشار دارد که مستقل است و برای هر گراف G داریم

$$\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G).$$

گزاره ۵.۶.۲. [۴] برای هر گراف G داریم

$$\gamma_{ib}(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{ib}(G).$$

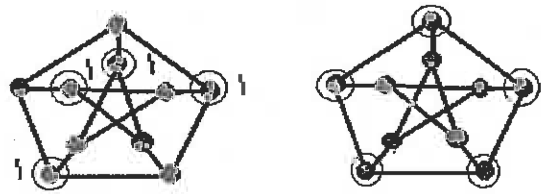
گزاره ۶.۶.۲. برای هر گراف G، داریم

$$\beta_{\circ}(G) \leq \Gamma_{ib}(G) \leq min\{\Gamma_b(G), \beta_b(G)\}.$$

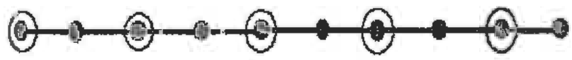
اثبات. کران پائین از این حقیقت بدست می آید که تابع مشخصه یک مجموعه مستقل ماکسیمال یک انتشار احاطه گر مستقل مینیمال است. حال فرض کنید f انتشار احاطه گر مستقل مینیمال باشد. باید

نشان دهیم که f یک انتشار احاطه گر مینیمال است. اگر f مستقل باشد، آنگاه هر انتشار g که $g \neq f$ و $g \leq f$، مستقل است اما لزوماً احاطه گر نیست. بنابراین، f یک انتشار احاطه گر مینیمال است و در نتیجه $\Gamma_{ib}(G) \leq \Gamma_b(G)$. در واقع نامساوی $\Gamma_{ib}(G) \leq \beta_b(G)$ بلافاصله از این حقیقت بدست می آید که هر انتشار احاطه گر مستقل مینیمال، انتشاری مستقل است. □

توجه کنید که با در نظر گرفتن گراف پترسن PG و مسیر P_{10}، می توان دید که $\Gamma_{ib}(G)$ و $\Gamma(G)$ غیر قابل مقایسه اند. چون $\Gamma_{ib}(PG) = 4 < 5 = \Gamma(PG)$ (شکل (۲۱.۲)) و $\Gamma(P_{10}) = 5 < 9 = diam(P_{10}) \leq \Gamma_{ib}(P_{10})$ (شکل (۲۲.۲)).



شکل ۲۱.۲: گراف پترسن، $\Gamma_{ib}(PG) = 4 < 5 = \Gamma(PG)$



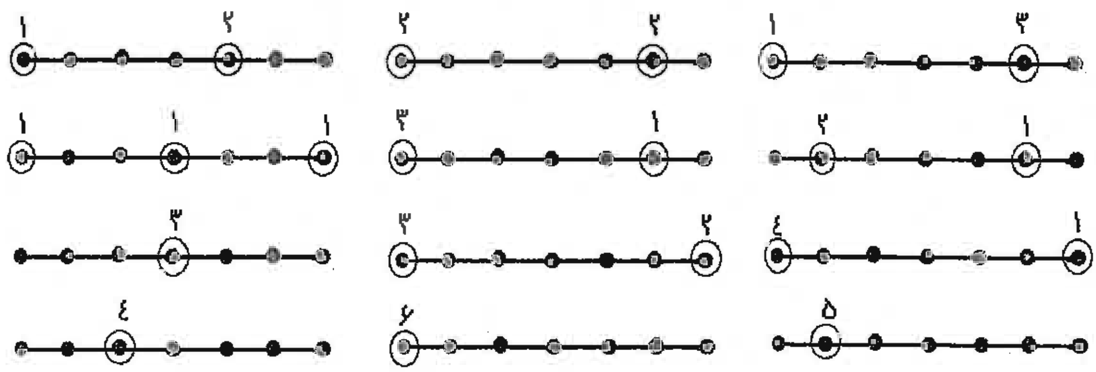
شکل ۲۲.۲: گراف P_{10}، $\Gamma(P_{10}) = 5 < 9 = diam(P_{10}) \leq \Gamma_{ib}(P_{10})$

۷.۲ انتشارهای مؤثر

تعریف ۱.۷.۲ (انتشار مؤثر). انتشار f مؤثر نامیده می شود هرگاه هر رأس در گراف G دقیقاً یک انتشار را بپذیرد، یا به عبارت دیگر برای هر رأس $v \in V$، $|H(v)| = 1$. ماکسیمم مقدار یک انتشار

مؤثر عدد انتشار مؤثر بالا نامیده شده و با $\Gamma_{eb}(G)$ نشان داده می شود. همچنین مینیمم مقدار یک انتشار مؤثر عدد انتشار مؤثر آن بوده و با $\gamma_{eb}(G)$ نشان داده می شود.

شکل (۲.۲۳) دوازده انتشار مؤثر متفاوت در مسیر $P_۷$ را نشان می دهد که $\Gamma_{eb}(P_۷)=۶$ و $\gamma_{eb}(P_۷)=۳$.



شکل ۲.۲۳: گراف $P_۷$، $\gamma_{eb}(P_۷)=۳, \Gamma_{eb}(P_۷)=۶$

قضیه ۲.۷.۲. هر گراف G یک γ_b-انتشار دارد که مؤثر است.

اثبات. فرض کنید f یک γ_b-انتشار گراف G باشد که در آن $|V^+|$ مینیمم است. بنا به قضیه ۲.۶.۳، f مستقل است. بنابراین فرض کنید f مؤثر نیست، در این صورت، یک رأس $v \in V$ با خاصیت $|H(v)| \geq ۲$ وجود دارد. چون f انتشاری مستقل است و $v \in V^\circ$ دو رأس در V^+ مانند u, w وجود دارند، به طوری که $d(u,v) \leq f(u)$ و $d(v,w) \leq f(w)$. لذا رأس v توسط دو رأس u, w پوشیده می شود. پس یک مسیر P از u به w به طول $f(u)+f(w)$ وجود دارد. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید $f(u) \geq f(w)$. در این صورت رأس x را در مسیر P به فاصله $f(w)$ از u در نظر می گیریم.

حال می توانیم انتشار g را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$g(x) = f(u) + f(w)$$

$$g(u) = g(w) = 0$$

$$g(y) = f(y) \quad \text{برای} \quad y \notin \{x, u, w\}$$

توجه کنید که g یک انتشار احاطه گر با مقدار $g(V) = f(V) = \gamma_b(G)$ می باشد. بنابراین، g یک γ_b-انتشار با خاصیت $|V_f^+| < |V_g^+|$ است که نتیجه می شود انتخاب f نادرست است. □

لازم به ذکر است که انتشار احاطه گر مؤثر، مستقل است زیرا با توجه به تعریف انتشار مستقل هیچ دو رأس متعلق به V^+ همدیگر را نمی پوشانند.

نتیجه ۳.۷.۲. هر گراف G یک γ_b-انتشار بین هر دو رأس انتشار u, v دارد که بزرگتر از $f(u) + f(v)$ است.

طبق تعریف داریم $\gamma_b(G) \le \gamma_{eb}(G)$. از قضیه ۲.۷.۲ نتیجه می شود $\gamma_b(G) = \gamma_{eb}(G)$. می دانیم برای هر گراف G، $\Gamma_{eb}(G) \le min\{\beta_b(G), \Gamma_b(G), \Gamma_{ib}(G)\}$. هر انتشار احاطه گر مؤثر، مستقل و احاطه گر مینیمال است. همچنین، مشاهده می کنیم که هر انتشار قطری یک انتشار احاطه گر مؤثر است. زیرا در انتشار قطری $|V^+| = ۱$ و در نتیجه هر رأس از $V(G)$ فقط توسط یک رأس پوشانده می شود. بنابراین نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۴.۷.۲. برای هر گراف G داریم

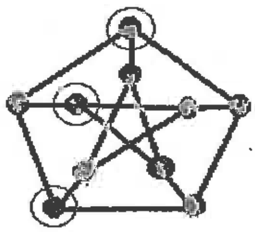
$$\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_{eb}(G) \le i_b(G) \le rad(G) \le diam(G) \le \Gamma_{eb}(G) \le \Gamma_{ib}(G).$$

نشان می دهیم $p(G)$ و $P(G)$ با $\Gamma_{eb}(G)$ قابل مقایسه نیستند.

برای مثال، برای گراف پترسن PG، داریم $p(PG) = P(PG) = ۱ < ۲ = \Gamma_{eb}(PG)$ با توجه به شکل (۲۴.۲) سمت راست، وقتی به یکی از رأس های داخلی PG مقدار ۲ را تخصیص دهیم، انتشار

حاصل همه گراف را می پوشاند و مستقل نیز می باشد. در نتیجه $\Gamma_{eb}(PG) = ۲$. همچنین با توجه به گراف سمت چپ شکل (۲۴.۲) چون نمی توان دو رأس از گراف PG را یافت که متعلق به مجموعه S باشند و برای هر رأس $v \in V(PG)$ داریم $|N[v] \cap S| \leq ۱$ لذا $p(PG) = ۱$. برای درخت دودویی کامل T به ارتفاع ۶ که ۶۳ رأس دارد، می توانیم نشان دهیم که $\Gamma_{eb}(T) = ۱۰ < ۱۳ = p(T)$. همچنین، $\gamma(PG) = ۳ > ۲ = \Gamma_{eb}(PG)$، همچنین برای $n \geq ۳$ داریم $\Gamma_{eb}(P_n) = n - ۱ > \Gamma(P_n)$ بنابراین مشاهده زیر را بدست می آوریم.

شکل ۲۴.۲: گراف پترسن، $p(PG) = P(PG) = ۱ < ۲ = \Gamma_{eb}(PG)$



شکل ۲۵.۲: گراف پترسن، $\gamma(PG) = ۳$

مشاهده ۵.۷.۲. برای گراف های G، داریم

$$\Gamma_{eb}(G) \lozenge \{p(G), P(G), \gamma(G), i(G), \beta_\circ(G), \Gamma(G)\}.$$

۸.۲ انتشارهای انباشته

تعریف ۱.۸.۲ (انتشار انباشته). انتشار f یک انتشار انباشته نامیده می شود اگر هر رأس در گراف G حداکثر یک انتشار را بپذیرد، یا به عبارت دیگر برای هر $v \in V$ داشته باشیم $|H(v)| \leq 1$. ماکسیمم مقدار یک انتشار انباشته روی گراف G عدد انباشتگی انتشار است و آن را با $P_b(G)$ نشان می دهیم و مینیمم مقدار یک انتشار انباشته ماکسیمال عدد انباشتگی انتشار پائین می باشد و آن را با $p_b(G)$ نشان می دهیم.

تابع مشخصه f_S یک انباشتگی ماکسیمال لزوماً یک انتشار انباشته ماکسیمال نمی باشد. این موضوع را می توان با نشان دادن مقدارهای تخصیص داده شده به رأس های مسیر P_5 در شکل الف (۲۶.۲) مشاهده کرد. رأس مرکزی در شکل الف (۲۶.۲) یک انباشتگی ماکسیمال است، اما یک انتشار انباشته ماکسیمال نیست، زیرا تمام رأس های گراف توسط رأس مرکزی پوشیده نمی شود. وقتی مقدار ۱ به ۲ افزایش پیدا کند، آنگاه در شکل ب (۲۶.۲) یک انتشار انباشته ماکسیمال داریم.

شکل ۲۶.۲: الف: انباشتگی ماکسیمال، ب: انتشار انباشته ماکسیمال

در حقیقت، $p(G)$ و $p_b(G)$ غیر قابل مقایسه اند. در P_5 حالتی را می بینیم که $p_b(G) < p(G)$. عکس نامساوی برای درخت دودویی کامل T به ارتفاع ۵ که ۳۱ رأس دارد برقرار است. می توانیم

بررسی کنیم که یک انتشار شعاعی درخت، یک انتشار انباشته ماکسیمال با مقدار ۴ است. همچنین برای گراف پترسن PG، $P_b(PG) = p_b(PG) = 2 > 1 = p(PG) = P(PG)$ (شکل (۲۷.۲)). بنابراین، هر انتشار شعاعی یا قطری یک انتشار انباشته است و هر انتشار انباشته یک انتشار مستقل است. در نتیجه، مشاهده زیر را داریم.

شکل ۲۷.۲: گراف پترسن، $p(PG) = P(PG) = 1 < 2 = P_b(PG) = p_b(PG)$

مشاهده ۲.۸.۲. برای هر گراف G، داریم

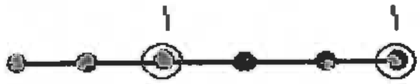
$(i)\ p_b(G) \diamond P(G)$

$(ii)\ p_b(G) \diamond p(G) \le P(G) \le P_b(G)$ و

$(iii)\ p_b(G) \le rad(G) \le diam(G) \le P_b(G) \le \beta_b(G).$

ممکن است یک انتشار انباشته ماکسیمال داشته باشیم که انتشار احاطه گر نباشد. برای مثال، مقادیر $0, 0, 1, 0, 0, 1$ را به رأس های گراف P_6 تخصیص می دهیم (شکل (۲۸.۲)). در نتیجه برای هر گراف G داریم $p(G) \le P(G) \le \gamma(G)$.

از این رو، به طور طبیعی این سؤال مطرح می شود که آیا نامساوی های مشابهی بین ثابت های انتشار متناظر داریم؟ اما جواب "منفی" است. برای مثال، $P_b(P_6) \ge diam(P_6) = 5$، اما $\gamma_b(P_6) = 2$



شکل ۲.۲۸: انتشار انباشته ماکسیمال

(شکل (۲.۲۹)). جواب کامل این سؤال را بعداً بدست می آوریم.

شکل ۲.۲۹: گراف P_6، $\gamma_b(P_6) = 2$

گزاره ۲.۸.۳. هر انتشار مؤثر

۱. یک انتشار انباشته ماکسیمال است،

۲. یک انتشار احاطه گر مینیمال است،

۳. یک انتشار احاطه گر مستقل مینیمال است.

اثبات. (۱): فرض کنید f یک انتشار مؤثر باشد. در این صورت، طبق تعریف، f یک انتشار انباشته است. باید نشان دهیم f انتشار انباشته ماکسیمال است. فرض کنید یک انتشار انباشته g، به طوری که $g \neq f$ و $g \geq f$ وجود داشته باشد. پس باید حداقل یک رأس w وجود داشته باشد به طوری که $g(w) > f(w)$. اما طبق تعریف، $g(w) \leq e(w)$. لذا حداقل یک رأس مانند x وجود دارد، که انتشاری را از w در g قبول می کند ولی انتشار را از w در f نمی پذیرد. چون f یک انتشار مؤثر است، x باید یک انتشار را از یک رأس در g بپذیرد. این بدان معنی است که x حداقل دو انتشار در g را می پذیرد. اما این

با فرضمان که g یک انتشار انباشته است، متناقض می باشد. بنابراین، f یک انتشار انباشته ماکسیمال است.

(۲): طبق تعریف هر انتشار مؤثر f یک انتشار احاطه گر است. نشان می دهیم که f یک انتشار احاطه گر مینیمال است. فرض کنید $v \in V^+$ و f مؤثر است. هر رأس $N_f[v]$ یک f-همسایگی ویژه v می باشد. یک رأس u وجود دارد به طوری که $d(u,v) = f(v) = e(v)$، در این صورت، u یک f-همسایگی ویژه v است که در شرط مینیمم سازی قضیه ۵.۴.۲ صدق می کند. بنابراین، اگر مقدار $f(v)$ کاهش پیدا کرده باشد، آنگاه انتشار به اندازه ای بزرگ نخواهد بود که رأس u را بپوشاند.

(۳): طبق تعریف هر انتشار مؤثر f یک انتشار احاطه گر مستقل است. نشان می دهیم که f یک انتشار احاطه گر مستقل مینیمال است. اگر f مستقل باشد آنگاه هر انتشار g به طوری که $g \neq f$ و $g \leq f$، باید مستقل باشد. بنابراین، فقط باید نشان دهیم که f یک انتشار احاطه گر مینیمال است. اما طبق (۲) چون f مؤثر و احاطه گر است، لذا احاطه گر مینیمال می باشد. □

نتیجه زیر بلافاصله از نتیجه ۴.۷.۲ و گزاره ۳.۸.۲ بدست می آید.

نتیجه ۴.۸.۲. برای هر گراف G داریم

$$p_b(G) \leq \gamma_{eb}(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq min\{P_b(G), \Gamma_b(G), \Gamma_{ib}(G)\}.$$

برای گراف پترسن PG، به سادگی می توان دید،

$$۲ = P_b(PG) < ۳ = \gamma(PG) \leq i(PG) \leq \beta_\circ(PG) \leq \Gamma_{ib}(PG) \leq \Gamma_b(PG) = \Gamma(PG) = ۵.$$

همچنین، برای مسیر P_n،

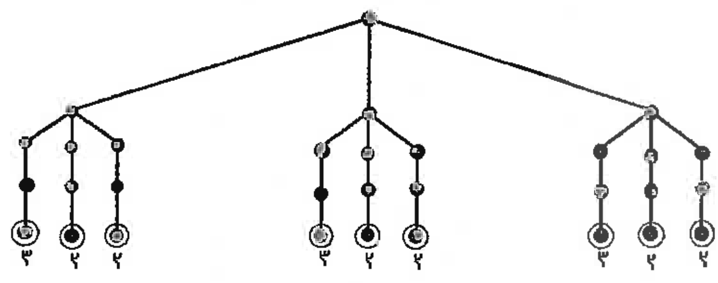
$$\gamma(P_n) = i(P_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil < \lceil \frac{n}{۲} \rceil = \beta_\circ(P_n) = \Gamma(P_n) < diam(P_n) = n - ۱ \leq P_b(P_n).$$

بنابراین،

$$P_b(G) \lozenge \{\gamma(G), i(G), \beta_\circ(G), \Gamma(G)\}.$$

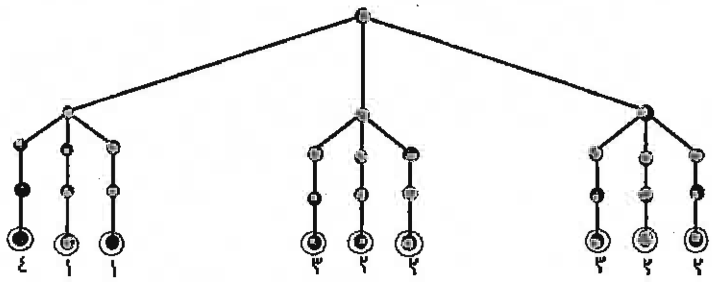
همچنین، $\Gamma_{ib}(G)$ و $\Gamma_b(G)$ قابل مقایسه با $P_b(G)$ نیستند. برای اثبات آن باید نشان دهیم که برای گراف G رابطه $P_b(G) > \Gamma_b(G) \geq \Gamma_{ib}(G)$ برقرار است. فرض کنید $S_۳$ درخت بدست آمده از ستاره $K_{۱,۳}$ با اضافه کردن دو رأس بر روی هر یال باشد و درخت T از سه کپی متمایز $S_۳$ با اضافه کردن یک رأس x که با مرکز هر $S_۳$ مجاور است، تشکیل شده باشد.

نشان خواهیم داد که $\Gamma_{eb}(T) = \Gamma_{ib}(T) = \Gamma_b(T) = ۲۰ < ۲۱ \leq P_b(T)$. فرض کنید f انتشاری باشد که مقادیر ۳ ,۲ ,۲ را به ترتیب به برگ های هر کپی $S_۳$ نسبت دهد و مقدار ۰ را به همه رأس های دیگر آن نسبت دهد که در شکل (۳۰.۲) نشان داده شده است. چون نمی توان مقدار f را افزایش داد به طوری که f همچنان انباشته باقی بماند، پس نتیجه می گیریم f یک انتشار انباشته ماکسیمال است. بنابراین، $P_b(T) \geq f(V) = ۲۱$. انتشار f احاطه گر نیست، اما یک انتشار احاطه گر g را با تغییر مقادیر برگ های یک کپی $S_۳$ به ۴ ,۱ ,۱ می توانیم بدست آوریم (شکل (۳۱.۲)).



شکل ۳۰.۲: انتشار انباشته ماکسیمال برای T

g یک انتشار احاطه گر مؤثر است، بنابراین g طبق گزاره ۳.۸.۲ یک انتشار احاطه گر مینیمال است. برای دیدن این که g یک Γ_b-انتشار از T است، نشان می دهیم $\Gamma_b(T) \leq ۲۰$. به برهان خلف فرض



شکل ۲.۳۱: یک Γ_b انتشار برای T

کنید یک انتشار احاطه گر مینیمال h با $h(V) \geq 21$ وجود داشته باشد. فرض کنید x ریشه T باشد و $N(x) = \{x_1, x_2, x_3\}$. چون انتشار شعاعی یا قطری انتشاری احاطه گر است و $diam(T) = 8$ لذا برای هر $v \in V^+$، $h(v) < e(v) \leq 7$. چون $rad(T) = 4$ بنابراین، $h(x) \leq 3$. اگر $h(x) \geq 1$، آنگاه مینیمم سازی h نتیجه می دهد $h(V) \leq 19$. در نتیجه می توان فرض کرد $h(x) = 0$. فرض کنید h_i وزن h در زیر درختی با ریشه x_i برای $1 \leq i \leq 3$ باشد. چون $h(V) \geq 21$، بدون کاستن از کلیت مسأله، فرض کنید $h_1 \geq 8$ یا $h_1 = h_2 = h_3 = 7$. چون برای هر $v \in V^+$، $h(v) < 8$، مینیمم بودن h نتیجه می دهد $h_1 < 8$. بنابراین، می توان فرض کرد $h_1 = h_2 = h_3 = 7$. به برگ های هر کپی از S_3، $7, 0, 0$ و $5, 1, 1$ یا $3, 2, 2$ را تخصیص می دهیم. اما چون h مینیمم است لذا به هر یک از کپی ها می توان $2, 2, 3$ تخصیص داد، که یک تناقض است چون x توسط h احاطه نشده است. بنابراین مشاهده زیر را داریم.

مشاهده ۲.۸.۵. برای گراف های G داریم،

$$P_b(G) \diamond \{\gamma(G), i(G), \beta_\circ(G), \Gamma(G), \Gamma_{ib}(G), \Gamma_b(G)\}.$$

g روی $G_{۲,n}$ با $g(V(G_{۲,n})) \leq f(V(G_{۳,n}))$ وجود دارد. چون، $rad(G_{۲,n}) = rad(G_{۳,n})$، در نتیجه $\gamma_b(G_{۲,n}) < rad(G_{۲,n})$. این با لم ۱.۹.۲ در تناقض است، لذا چنین انتشار f وجود ندارد و نتیجه بدست می آید. □

قضیه ۴.۹.۲. برای هر جفت m, n از اعداد صحیح با $۲ \leq m \leq n$ داریم $\gamma_b(G_{m,n}) = rad(G_{m,n})$.

اثبات. اثبات را به استقراء روی m انجام می دهیم. لم های ۱.۹.۲ و ۳.۹.۲ مراحل پایه ای استقراء را فراهم می کنند. فرض کنید $m > ۳$ و برای هر گراف $G_{k,n}$ با $۲ \leq k < m$ نتیجه درست است. به وضوح می دانیم برای $G = G_{m,n}$، $rad(G) = \lfloor\frac{m}{۲}\rfloor + \lfloor\frac{n}{۲}\rfloor$. در نتیجه، برای هر گراف G، $\gamma_b(G) \leq rad(G)$.

بنابراین فرض کنید $\gamma_b(G) < rad(G)$. آنگاه رابطه زیر برقرار است.

$$\gamma_b(G) \leq \lfloor\frac{m}{۲}\rfloor + \lfloor\frac{n}{۲}\rfloor - ۱ = \lfloor\frac{m-۲}{۲}\rfloor + \lfloor\frac{n}{۲}\rfloor.$$

کران بالای $\gamma_b(G)$ شعاع شبکه گراف $G_{m-۲,n}$ است. بنابراین فرض کنید H زیر گراف القاء شده در G توسط $m - ۲$ سطر اول G باشد. بنا به فرض استقراء، می دانیم $rad(H) = \gamma_b(H)$. بنابراین،

$\gamma_b(G) \leq rad(H) = \gamma_b(H)$.

به سادگی می توان دید $\gamma_b(G) = \gamma_b(H)$. زیرا اگر این طور نباشد می توان یک γ_b-انتشار f از G در نظر گرفت. پس برای هر رأس $v_{k,i}$ با $k \in \{m-۱, m\}$ و برای هر $i = ۱, ۲, ..., n$، مقدار $f(v_{k,i})$ را به مقدار $f(v_{m-۲,i})$ می افزاییم و یک انتشار احاطه گر H با مقداری کمتر از $\gamma_b(H)$ ایجاد می کنیم، که به تناقض می رسیم.

حالت ۱: یک γ_b-انتشار f روی G وجود دارد که مقداری مثبت به رأسی مانند $v_{k,i}$ واقع در یکی از دو سطر آخر تخصیص داده است. در این صورت انتشار g روی H را به صورت زیر تعریف می کنیم. مقدار $f(v_{m-۲,i}) + f(v_{m-۱,i}) + f(v_{m,i}) - ۱$ را به $g(v_{m-۲,i})$ اختصاص می دهیم. برای هر $j \neq i$ که $۱ \leq j \leq n$، فرض کنید $g(v_{m-۲,j}) = f(v_{m-۲,j}) + f(v_{m-۱,j}) + f(v_{m,j})$ و برای هر رأس در

$m-۳$ سطر اول، فرض کنید $g(v)=f(v)$ باشد. به وضوح تابع g یک انتشار احاطه گر از H با مقدار $\gamma_b(G)-۱<\gamma_b(H)$ است، که یک تناقض است.

حالت ۲ : γ_b-انتشاری از G وجود ندارد که رأس هایی از دو سطر اخیر G در V^+ داشته باشد. فرض کنید f یک γ_b-انتشار روی G باشد و j ماکسیمم مقداری باشد که $v_{j,i}\in V^+$ است. در این صورت $j\leq m-۲$ و تابع g را با تخصیص مقدار $f(v_{j,i})+f(v_{j-۱,i})-۱$ به $g(v_{j-۱,i})$ و $g(v_{j,i})=۰$ در نظر می گیریم، و برای همه رأس های دیگر قرار می دهیم $g(v)=f(v)$. اگر g یک انتشار احاطه گر برای H باشد، آنگاه مقدار آن $\gamma_b(H)-۱$ است که تناقض می باشد. بنابراین، باید یک رأس $v_{k,l}$ با $j\leq k\leq m-۲$ وجود داشته باشد که توسط f احاطه شده باشد اما بوسیله g احاطه نشده باشد. بنابراین، داریم $d(v_{j,i},v_{k,l})\in\{f(v_{j,i}),f(v_{j,i})-۱\}$ و $v_{k,l}$ یک f-همسایگی ویژه از $v_{j,i}$ است. اما $v_{m,l}$ نمی تواند برای هر $v\in V_f^+$ در $N_f[v]$ باشد که تناقض است. بنابراین $\gamma_b(G)=rad(G)$. □

فصل ۳
انتشار احاطه گر در گراف ها

۱.۳ مقدمه

یک مجموعه احاطه گر می تواند به صورت مجموعه S از رأس هایی که هر رأس G به فاصله حداکثر ۱ از برخی از رأس های S باشد، تعریف شده باشد. چند نوع احاطه گری بر حسب فاصله بررسی شده اند. برای مثال، زیر مجموعه S از $V(G)$ یک مجموعه احاطه گر k-فاصله است هرگاه هر رأس به فاصله حداکثر k از برخی از رأس های S باشد.

مسأله قرار گرفتن مخابره کننده ها را برای پوشاندن یک منطقه، طوری در نظر می گیریم که هر محل درون منطقه ای باشد که در دامنه انتشار حداقل یک مخابره کننده قرار داشته باشد. فرض کنید G گرافی باشد که هر رأس آن نشان دهنده یک محل درون منطقه باشد (یک محل ممکن برای مخابره کننده) و یال ها به رأس ها براساس مکان هایی که به یکدیگر متصل می شوند وصل می شوند. اگر همه مخابره کننده ها یکسان باشند و هر محلی در منطقه (درون فاصله ۱ در G) به یک یا بیشتر از یک مخابره کننده متصل شده باشد، آنگاه یک مجموعه از ایستگاه های مخابره کننده در منطقه که هر ناحیه ای را می پوشانند با یک مجموعه احاطه گر G متناظر می باشد (اگر هر مکان در منطقه به فاصله حداکثر k از مخابره کننده باشد، آنگاه یک مجموعه از ایستگاه های مخابره کننده متناظر با یک مجموعه احاطه گر k-فاصله است). کمترین تعداد ممکن مخابره کننده ها، عدد احاطه گری $\gamma(G)$ می باشد.

فرض کنید G گرافی همبند باشد. مجموعه اعداد صحیح نامنفی را با N نشان می دهیم. برای دو عدد صحیح a,b، اگر $a \leq b$ برای فاصله صحیح $\{a, a+۱, ..., b\}$ می نویسیم $[a...b]$، یا آن را تهی می گیریم هرگاه $a > b$. هر تابع $f : V(G) \longrightarrow [۰, ..., diam(G)]$ برای هر رأس v از G، که $f(v) \leq e(v)$، یک انتشار روی G می باشد.

رأس v که $f(v) > ۰$ یک رأس f-احاطه گر است و مجموعه $V_f^+(G) = \{v \in V(G) : f(v) > ۰\}$ از رأس های f-احاطه گر، مجموعه f-احاطه گر است. به جای $V_f^+(G)$، V_f^+ را به کار می بریم. رأس

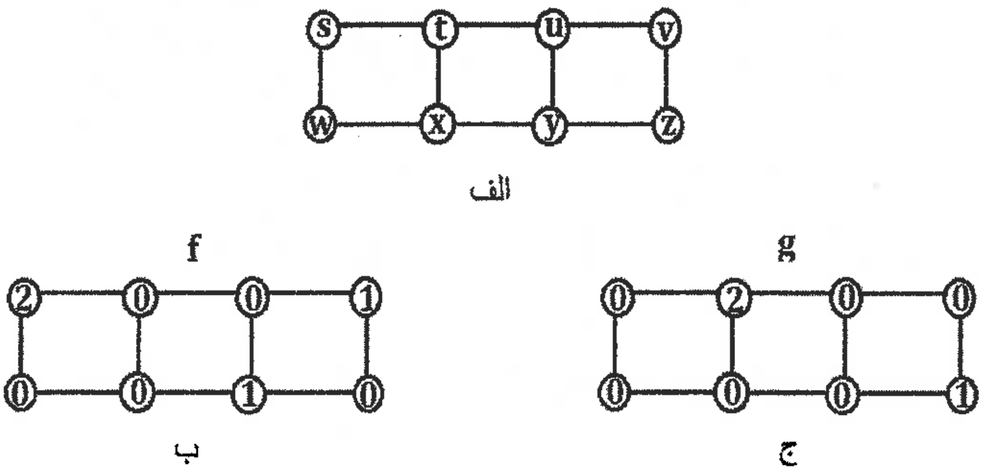
f-احاطه گر v را در صورتی که $d(u,v) \leq f(v)$، f-احاطه کننده هر رأس u گوییم به طوری که رأس های $V(G) - V_f^+$ هر رأس از G را f-احاطه نکنند. یک انتشار احاطه گر روی G یک f انتشار است در صورتی که هر رأس توسط تعدادی رأس در مجموعه f-احاطه گر، f-احاطه شده باشد.

با روشی که انتشار احاطه گر را تعریف کردیم، واضح است که شرط $f(v) \leq e(v)$ برای هر رأس v برقرار است، زیرا اگر رأسی مانند v وجود داشته باشد به طوری که $f(v) > e(v)$ باشد آنگاه باید مقدار بیشتری را به v اختصاص داد تا رأس های اضافی را f-احاطه کند. این شرط همچنین در بیان مفهوم استقلال انتشار کمک می کند [۵].

توجه دارید که اگر $G = K_۱$ باشد، آنگاه $diam(G) = ۰$ و انتشار یکتایی تعریف شده روی G احاطه گر نیست. بنابراین فرض کنید که گراف مورد بررسی همبند و نابدیهی است.

برای یک انتشار f روی گراف همبند G، فرض کنید $\sigma(f) = \sum_{v\in V(G)} f(v)$. عدد احاطه گری انتشار $\gamma_b(G)$، مینیمم مقدار $\sigma(f)$ روی انتشارهای احاطه گر f روی G می باشد. یک انتشار احاطه گر f روی G که $\sigma(f) = \gamma_b(G)$ انتشار احاطه گر مینیمم روی G نامیده شده است. بنابراین اگر f انتشار احاطه گر مینیمم روی G باشد، آنگاه $\gamma_b(G) \geq |V_f^+|$. اگر f یک انتشار روی G باشد، آنگاه برای $۰ < i \leq diam(G)$ فرض کنید $V_f^i(G) = \{v \in V(G) : f(v) = i\}$ که $V_f^i(G) = V_f^i$. بنابراین، $\gamma_b(G) = min_f \sum_{i=۱}^{diam(G)} i|V_f^i|$، که مینیمم کل انتشارهای احاطه گر f روی G می باشد. اگر برای عدد صحیح نامنفی k داشته باشیم $\sigma(f) \leq k$، آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت $t > k$ داریم، $|V_f^t| = ۰$. برای یک انتشار f، تابع $\overrightarrow{f} : V(G) \longrightarrow N \cup \{۰\}$ را به صورت $\overrightarrow{f}(v) = |\{u \in V_f^+ : d(u,v) \leq f(u)\}|$ تعریف می کنیم که $\overrightarrow{f}(v)$ تعداد رأس هایی است که v را f-احاطه می کنند. بنابراین f یک انتشار احاطه گر است اگر و فقط اگر برای هر $v \in V(G)$ داشته باشیم $\overrightarrow{f}(v) \geq ۱$. رأس u که توسط رأس v، f-احاطه شده باشد را f-همسایه v می نامیم. توجه به این نکته لازم است که u یک همسایه v می باشد اگر و فقط اگر v یک همسایه u باشد، اما ممکن است u، f-همسایه v باشد اما v، f-همسایه u نباشد.

برای هر $v \in V_f^+$، مجموعه f-همسایه های v، f-همسایگی بسته v نامیده شده و با $N_f[v]$ نشان داده می شود. اگر $v \in V_f^1$، آنگاه $N_f[v] = N[v]$. اگر $S \subseteq V_f^+$، آنگاه $N_f[S] = \bigcup_{v\in S} N_f[v]$ یک انتشار f احاطه گر است اگر و فقط اگر $N_f[V_f^+] = V(G)$.



شکل ۱.۳: انتشارهای احاطه گر روی $P_2 \times P_4$

برای نشان دادن این مفاهیم، گراف $P_2 \times P_4$ به قطر ۴ را که در شکل الف (۱.۳) نشان داده شده است، در نظر می گیریم. شکل ب (۱.۳) و ج (۱.۳) دو انتشار احاطه گر f, g را نشان می دهند که مجموعه f-احاطه گر، $V_f^+ = \{s, v, y\}$ و مجموعه g-احاطه گر، $V_g^+ = \{t, z\}$ می باشد. رأس s رئوس s, t, u, w, x را f-احاطه می کند و f-همسایگی بسته s به صورت $N_f[s] = \{s, t, u, w, x\}$ می باشد، اما s هیچ رأسی را g-احاطه نمی کند. در این گراف، $V_f^1 = \{v, y\}$، $V_f^2 = \{s\}$ و $V_f^3 = V_f^4 = \emptyset$. همچنین، $\vec{f}(u) = 3$، $\vec{f}(x) = \vec{f}(z) = 2$ و برای هر رأس $r \in \{s, t, v, w, y\}$ داریم $\vec{f}(r) = 1$. برای تابع f، $\sigma(f) = 4$ در صورتی که $\sigma(g) = 3$. در حقیقت، $\gamma_b(P_2 \times P_4) = 3$ و g انتشار احاطه گر مینیمم روی $P_2 \times P_4$ است.

۲.۳ نتایج اولیه

اگر S زیر مجموعه S' باشد، تابع مشخصه S تابع $\chi_S : S' \longrightarrow \{۰, ۱\}$ می باشد که با ضابطه زیر تعریف می شود.

$$\chi_S(x) = \begin{cases} ۱ & x \in S, \\ ۰ & x \notin S \end{cases}$$

در حالتی که $S = \{y\}$، به جای $\chi_{\{y\}}$ می نویسیم χ_y. برای یک گراف همبند نابدیهی G و عدد صحیح k با شرط $۱ \leq k \leq rad(G)$ عدد احاطه گری k- فاصله $\gamma_k(G)$ کوچکترین مجموعه S از رأس های G می باشد به طوری که هر رأس G درون فاصله k از حداقل یک رأس S باشد. اگر S یک مجموعه احاطه گر k- فاصله باشد، آنگاه تابع $f : V(G) \longrightarrow \{۰, k\}$ با ضابطه $f(x) = k\chi_S(X)$ یک انتشار احاطه گر روی G است. بنابراین کران بالای زیر را برای عدد احاطه گری انتشار داریم.

گزاره ۱.۲.۳. [۷] برای هر گراف همبند نابدیهی G داریم

$$\gamma_b(G) \leq min\{k\gamma_k(G) : ۱ \leq k \leq rad(G)\}.$$

به خصوص، هنگامی که $k = ۱$، داریم $\gamma_b(G) \leq \gamma(G)$ و هنگامی که $k = rad(G)$ داریم $\gamma_b(G) \leq rad(G)$.

نتیجه ۲.۲.۳. [۷] برای هر گراف همبند نابدیهی G داریم

$$\gamma_b(G) \leq min\{rad(G), \gamma(G)\}.$$

اگر G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq ۲$ باشد، آنگاه $\gamma(G) \leq \frac{n}{۲}$. یعنی $\gamma(G)$ زمانی بیشترین مقدار ممکن را دارد که رأس ها را به صورت یکی در میان به عنوان رأس های احاطه کننده در نظر بگیریم. بنابراین اگر f یک انتشار احاطه گر مینیمم روی G باشد از نتیجه ۲.۲.۳ خواهیم داشت

$$|V_f^+| \leq \gamma_b(G) \leq \gamma(G) \leq \frac{n}{۲}.$$

وقتی که یک انتشار f روی G چند مقدار در دامنه $[rad(G)+۱, ..., diam(G)]$ به رأس های G تخصیص می دهد، اگر f یک انتشار احاطه گر مینیمم باشد آنگاه نتیجه ۲.۲.۳ برقرار نمی باشد. بنابراین، چون یک انتشار احاطه گر مینیمم f را در نظر می گیریم، فرض می کنید $f : V(G) \longrightarrow [۰, ..., rad(G)]$ در این صورت می توان نشان داد $min\{k\gamma_k(G) : ۱ \leq k \leq rad(G)\} - \gamma_b(G)$ می تواند به طور دلخواه بزرگ باشد. برای $t \geq ۲$ فرض کنید $S(K_{۱,t})$ گراف زیر تقسیم ستاره $K_{۱,t}$ باشد. برای عدد صحیح مثبت k، فرض کنید H_k گراف بدست آمده از اتصال رأس انتهایی $S(K_{۱,۲+k})$ به یک رأس انتهایی $P_{۲k}$ باشد. برای مثال، گراف $H_۴$ در شکل (۲.۳) نشان داده شده است.

شکل ۲.۳: گراف $H_۴$

قضیه ۳.۲.۳. برای هر عدد صحیح مثبت k داریم

$$min\{t\gamma_t(H_k) : ۱ \leq t \leq rad(H_k)\} - \gamma_b(H_k) \geq \frac{۲k}{۱۵} - ۱.$$

اثبات. فرض کنید S یک مجموعه احاطه گر مینیمم برای $P_{۲k}$ و v رأس مرکزی $S(K_{۱,۲+k})$ باشد. تابع $f : V(H_k) \longrightarrow \{۰, ۱, ۲\}$ با ضابطه $f(x) = ۲\chi_v(x) + \chi_S(x)$ یک انتشار احاطه گر روی H_k می باشد و $\sigma(f) = ۲ + \lceil\frac{۲k}{۳}\rceil$ و $\gamma_b(H_k) \leq ۳ + \frac{۲k}{۳}$. برحسب اینکه $t = ۱$ یا $t \geq ۲$، دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

• اگر $t=1$، آنگاه $\gamma_1(H_k)=\gamma(H_k)$. می دانیم $\gamma(P_n)=\lceil\frac{n}{3}\rceil$. گراف H_k را به دو گراف P_{2k+2} و $S(K_{1,k+1})$ تبدیل می کنیم. در این صورت $\gamma(P_{2k+2})=\lceil\frac{2k+2}{3}\rceil$ و $\gamma(S(K_{1,k+1}))=k+1$ پس نتیجه می گیریم $\gamma_1(H_k)=1+k+\lceil\frac{2k+2}{3}\rceil$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}\gamma_1(H_k)-\gamma_b(H_k)&\geq 1+k+\lceil\frac{2k+2}{3}\rceil-(3+\lceil\frac{2k}{3}\rceil)\\&=k-2+\lceil\frac{2k+2}{3}\rceil-\lceil\frac{2k}{3}\rceil\\&=k+\lceil\frac{2k+2}{3}\rceil-\lceil\frac{2k+6}{3}\rceil\\&=k-\frac{4}{3}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

درنتیجه $\gamma_1(H_k)-\gamma_b(H_k)\geq k-\frac{4}{3}$.

• اگر $t\geq 2$، آنگاه $t\gamma_t(H_k)=t\lceil\frac{2k+5}{2t+1}\rceil\geq t\frac{2k+5}{2t+1}$.

توجه کنید که تعداد کل رأس هایی که در گراف H_k روی بزرگترین مسیر قرار دارند، برابر $2k+5$ است و همچنین هر رأس t احاطه کننده حداکثر $2t+1$ رأس را می پوشاند.

$$\begin{aligned}t\gamma_t(H_k)-\gamma_b(H_k)&\geq\frac{t}{2t+1}(2k+5)-3-\frac{2k}{3}\\&=\frac{1}{2t+1}[t(2k+5)+(-3-\frac{2}{3}k)(2t+1)]\\&=\frac{1}{2t+1}[\frac{2}{3}k(t-1)-t-3]\\&\geq\frac{1}{2t+1}[\frac{2}{3}k(t-1)-(2t+1)].\end{aligned}\tag{2.3}$$

اگر $t = ۲$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} t\gamma_t(H_k) - \gamma_b(H_k) &\geq \frac{۱}{۲t+۱}[\frac{۲}{۳}k(t-۱) - (۲t+۱)] \\ &\geq \frac{۱}{۵}[\frac{۲}{۳}k - ۵] \\ &\geq \frac{۲k}{۱۵} - ۱. \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

مرحله آخر با در نظر گرفتن تابع $f(t) = \frac{t-۱}{۲t+۱}$ که برای هر $t \geq ۲$ در رابطه $f(t) \geq f(۲) = \frac{۱}{۵}$ صدق می کند، نتیجه می شود. □

اگر G یک گراف باشد و $S \subseteq V(G)$. آنگاه زیر گراف تولید شده توسط S روی G را با $< S >$ نشان می دهیم.

گزاره ۴.۲.۳. فرض کنید f انتشار احاطه گر مینیمم روی گراف همبند G باشد. در این صورت $V_f^+ = \{v\}$ اگر و فقط اگر $f(v) = e(v) = rad(G)$.

اثبات. فرض کنید f یک انتشار احاطه گر مینیمال باشد. اگر $V_f^+ = \{v\}$ آنگاه چون تمام رأس های گراف باید توسط این یک رأس پوشیده شود و انتشار f مینیمال است پس این رأس باید در مرکز گراف قرار گیرد. در این صورت $f(v) = e(v) = rad(G)$.

برعکس، فرض کنید f یک انتشار احاطه گر مینیمال باشد. اگر $f(v) = e(v) = rad(G)$ چون انتشار مینیمال است فقط کافی است برای یک رأس v، $f(v)$ برابر $e(v) = rad(G)$ باشد و به بقیه رأس ها عدد صفر را نسبت دهیم تا کل گراف احاطه شود. □

گزاره ۵.۲.۳. [۷] فرض کنید G گرافی همبند و f انتشار احاطه گر مینیمم روی G باشد. اگر $v \in V_f^+$، آنگاه $f(v) = \gamma_b(< N_f[v] >) = rad(< N_f[v] >)$.

با توجه به گزاره ۱.۲.۳، گزاره زیر را داریم.

گزاره ۶.۲.۳. [۷] فرض کنید G گرافی همبند باشد در این صورت $\gamma_b(G) = rad(G)$ اگر و فقط اگر

$$min\{k\gamma_k(G) : 1 \leq k \leq rad(G)\} = rad(G).$$

توجه کنید که رابطه ای بین عدد احاطه گری انتشار گراف G و عدد احاطه گری انتشار زیر گراف G وجود ندارد، حتی اگر زیر گراف القایی باشد. مثال های بیشماری از گراف های G و H وجود دارد که $H \subseteq G$ و $\gamma_b(H) \leq \gamma_b(G)$. برای دیدن آن که این حالت همیشه برقرار نیست، فرض کنید G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq 4$ بوده و ماکسیمم درجه آن حداکثر $n - 2$ باشد. اگر هر رأس G با هر رأس دیگر آن مجاور نباشد آنگاه $\gamma_b(G) \geq 2$. حال اگر گراف جدید H را با وارد کردن رأس جدید v به G تشکیل دهیم و v را به هر رأس از G متصل کنیم، آنگاه $\gamma_b(H) = 1$. بنابراین در این حالت، $G \subseteq H$ در صورتی که $\gamma_b(G) > \gamma_b(H)$.

اما رابطه ای بین عدد احاطه گری انتشار یک گراف و عدد احاطه گری انتشار زیر تقسیمی از آن گراف وجود دارد.

قضیه ۷.۲.۳. اگر H یک زیر تقسیم گراف همبند G باشد، آنگاه $\gamma_b(G) \leq \gamma_b(H)$.

اثبات. چون هر زیر تقسیم G به صورت دنباله ای از زیر تقسیم های مقدماتی بدست آمده است، کافی است حالتی را در نظر بگیریم که H زیر تقسیمی مقدماتی از G باشد. فرض کنید h انتشار احاطه گر مینیمم روی H باشد. اگر $V_h^+ \subseteq V(G)$، آنگاه تحدید h روی $V(G)$ یک انتشار احاطه گر روی G می باشد. فرض کنید V_h^+ شامل رأسی مثل u باشد که توسط زیر تقسیمی از G معرفی شده است، در این صورت v را یکی از دو همسایه u در H می گیریم. تابع $g : V(G) \longrightarrow [0, ..., rad(G)]$ را با ضابطه $g(x) = h(x) + \chi_v(x)h(u)$ تعریف می کنیم. فرض کنید $w \in V(G)$ و همچنین P کوتاهترین مسیر بین u, w در H باشد. اگر P شامل v باشد، آنگاه $d_G(v, w) = d_H(u, w) - 1$؛ بنابراین اگر w توسط u، h-احاطه شده باشد، آنگاه w توسط v، g-احاطه شده خواهد بود. اگر P شامل v نباشد، آنگاه چون

دو همسایه u در H، در G مجاور می باشند، $d_G(v,w) \leq d_H(u,w)$ و مجدداً w، g-احاطه شده توسط v است اگر h-احاطه شده توسط u باشد. تابع g انتشار احاطه گر روی G می باشد که $\sigma(g) = \gamma_b(H)$.
بنابراین $\gamma_b(G) \leq \gamma_b(H)$. □

۳.۳ کران های پائین برای عدد احاطه گری انتشار

اگر G گرافی همبند باشد، آنگاه به راحتی می توان دید $\gamma(G) \geq \lceil \frac{diam(G)+۱}{۳} \rceil$.

قضیه ۱.۳.۳. اگر G یک گراف همبند نابدیهی باشد، آنگاه $\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{diam(G)+۱}{۳} \rceil$.

اثبات. فرض کنید u, v دو رأس G باشند به طوری که $d(u,v) = diam(G)$، و فرض کنید

$$P : u = x_۰, x_۱, ..., x_{diam(G)} = v$$

کوتاهترین مسیر بین u, v باشد. فرض کنید f انتشار احاطه گر مینیمم روی G باشد. نشان می دهیم هر رأس f-احاطه گر مانند x، حداکثر به اندازه $۲f(x)+۱$ رأس از P را f-احاطه می کند. به برهان خلف، فرض کنید رأس $w \in V_f^+$ وجود دارد به طوری که $N_f[w]$ شامل حداقل $۲f(w)+۲$ رأس از P است. فرض کنید s و t به ترتیب کوچکترین و بزرگترین عدد حقیقی باشند به طوری که $x_s, x_t \in N_f[w] \cap V(P)$. با فرض اینکه $t - s \geq ۲f(w)+۱$ داریم

$$s + ۲f(w) + ۱ - t \leq ۰$$

در نتیجه

$$s + ۲f(w) + ۱ - t + diam(G) \leq diam(G).$$

پس طول P حداقل برابر $s + ۲f(w) + ۱ - t + diam(G)$ می باشد. فرض کنید P_s کوتاهترین مسیر بین x_s و w در G، و P_t کوتاهترین مسیر بین x_t و w در G باشد. چون w، x_s و x_t را f-احاطه می کند، P_s

و P_t حداکثر طولی برابر $f(w)$ دارند. حال، $u-v$ مسیر با دنبال کردن P از u به x_s، P_s از x_s به w، P_t از w به x_t و بالاخره P از x_t به v بدست می آید که طولی حداکثر به اندازه $s+۲f(w)-t+diam(G)$ دارد. این با انتخاب P تناقض دارد، زیرا فرض کرده بودیم طول P حداکثر برابر $diam(G)$ است. بنابراین چنین رأس w وجود ندارد. در نتیجه رأس f-احاطه گر x، حداکثر $۲f(x)+۱$ رأس از P را f-احاطه می کند. علاوه بر این چون f یک انتشار احاطه گر است هر رأس از P، f-احاطه شده می باشد. بنابراین، $diam(G)+۱ \leq \sum_{x\in V_f^+}[۲f(x)+۱] = ۲\gamma_b(G)+|V_f^+| \leq ۳\gamma_b(G)$. □

از نتیجه ۲.۲.۳ داریم $\gamma_b(P_n) \leq \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$. همچنین با توجه به قضیه ۱.۳.۳ داریم $\gamma_b(P_n) \geq \lceil \frac{diam(P_n)+۱}{۳} \rceil$ و چون $diam(P_n)=n-۱$ در نتیجه $\gamma_b(P_n) \geq \lceil \frac{n}{۳} \rceil$. بنابراین نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۲.۳.۳. [۷] برای هر عدد حقیقی $n \geq ۲$، $\gamma_b(P_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$.

چون شعاع یک گراف از بالا توسط قطر آن محدود شده است، قضیه ۱.۳.۳ کران بالایی برای شعاع یک گراف با عدد احاطه گری انتشار معلوم در اختیار ما قرار می دهد.

لم ۳.۳.۳. فرض کنید G یک گراف همبند باشد، f انتشار احاطه گر مینیمم روی G و $M=max\{f(x): x\in V_f^+\}$. در این صورت $rad(G) \leq ۲\gamma_b(G)+|V_f^+|-M-۱$.

اثبات. فرض کنید $u\in V_f^+$ بوده و v رأسی خارج از مرکز u باشد. کوتاهترین مسیر بین u,v، مانند P را در نظر می گیریم. رأس u، $f(u)+۱$ رأس از P را f-احاطه می کند. با استفاده از اثبات قضیه ۱.۳.۳، هر رأس f-احاطه گر x علاوه بر u حداکثر $۲f(x)+۱$ رأس از P را f-احاطه می کند. چون هر رأس از P، f-احاطه شده است، در نتیجه سمت چپ رابطه (۴.۳) از اینجا نتیجه می شود که بیشترین مقدار گریز از مرکز رأس u وقتی حاصل می شود که گراف مورد نظر را مسیر P_n در نظر بگیریم به طوری که u رأس ابتدا باشد. پس گریز از مرکز رأس u برابر بیشترین فاصله آن تا رأس انتهایی می باشد. در این صورت،

تعداد کل رأس های این مسیر (گریز از مرکز رأس u)، حداکثر برابر $f(u) + \sum_{x\in V_f^+-\{u\}}[۲f(x)+۱]$ می باشد. بنابراین

$$e(u)+۱ \leq f(u)+۱+\sum_{x\in V_f^+-\{u\}}[۲f(x)+۱] = ۲\gamma_b(G) - f(u) + |V_f^+| \qquad (۴.۳)$$

چون این رابطه برای هر رأس در مجموعه f-احاطه گر درست است و

$$rad(G) = min\{e(u) : u \in V(G)\}$$

لذا نتیجه بدست می آید. □

کران بالای حاصل شده در لم ۳.۳.۳ برای هر گراف G با $\gamma_b(G) = rad(G)$ برقرار است.

۴.۳ گراف هایی با عدد احاطه گری انتشار کوچک

برای یک گراف همبند نابدیهی G کاملاً مشخص است که $\gamma(G) = ۱$ اگر و فقط اگر $rad(G) = ۱$. نتیجه زیر بلافاصله بدست می آید و از اثبات آن صرفه نظر می کنیم.

گزاره ۱.۴.۳. فرض کنید G یک گراف همبند نابدیهی باشد. در این صورت $\gamma_b(G) = ۱$ اگر و فقط اگر $rad(G) = ۱$.

گراف هایی با عدد احاطه گری انتشار ۲ تقریباً دسته بندی ساده تری نسبت به گراف هایی با عدد احاطه گری انتشار ۱ دارند.

قضیه ۲.۴.۳. فرض کنید G گرافی همبند باشد. در این صورت $\gamma_b(G) = ۲$ اگر و فقط اگر

$$min\{rad(G), \gamma(G)\} = ۲.$$

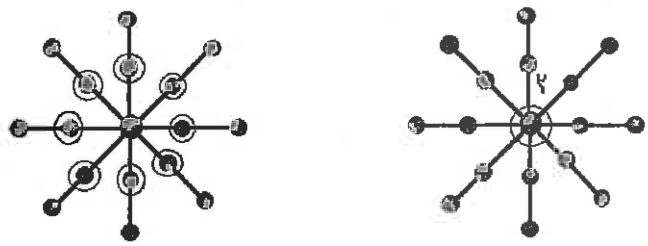
اثبات. به وضوح اگر $\gamma(G) = ۲$ یا $rad(G) = ۲$، آنگاه از نتیجه ۲.۲.۳ و گزاره ۱.۴.۳ نتیجه می گیریم $\gamma_b(G) = ۲$. فرض کنید $\gamma_b(G) = ۲$ و $rad(G) \neq ۲$. از گزاره ۱.۴.۳ داریم $rad(G) \geq ۳$. فرض کنید f انتشار احاطه گر مینیمم روی G باشد. چون $\gamma_b(G) < rad(G)$، یک رأس تنها نمی تواند $V(G)$ را f-احاطه کند. بنابراین برای دو رأس u, v از G داریم $V_f^+ = \{u, v\}$ و $f(u) = f(v) = ۱$ بنابراین $\{u, v\}$ یک مجموعه احاطه گر G می باشد و دوباره از گزاره ۱.۴.۳ داریم $\gamma(G) = ۲$. □

اگر G گرافی همبند نابدیهی باشد، آنگاه $\gamma(G) = ۱$ اگر و تنها اگر $rad(G) = ۱$. تعداد نامحدودی گراف G به صورت زیر وجود دارد.

(i) $\gamma_b(G) = ۲ = rad(G) < \gamma(G)$

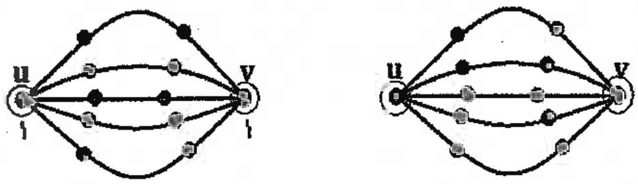
(ii) $\gamma_b(G) = ۲ = \gamma(G) < rad(G)$

(iii) $\gamma_b(G) = ۲ = \gamma(G) = rad(G)$.



شکل ۳.۳: گراف $S(K_{۱,۸})$، $\gamma(S(K_{۱,۸})) = ۸ > ۲ = \gamma_b(S(K_{۱,۸})) = rad(S(K_{۱,۸}))$

برای هر عدد صحیح مثبت $n > ۳$، گراف $S(K_{۱,n})$ در (i) صدق می کند (شکل (۳.۳)). به عبارت دیگر، برای هر عدد صحیح $n > ۲$، فرض کنید M_n گراف چندگانه ای شامل دو رأس u, v باشد، که با n یال موازی به هم متصل شده اند و فرض کنید G_n گرافی باشد که با اضافه کردن دو رأس جدید درون هر یال M_n بدست آمده باشد. در این صورت گراف G_n در (ii) صدق می کند (شکل (۴.۳)).



شکل ۴.۳: گراف G_5، $\gamma_b(G_5) = 2 = \gamma(G_5) < rad(G_5)$

بالاخره، اگر $t \geq 2$ و $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$ آنگاه گراف چند بخشی کامل $K_{n_1,n_2,\dots,n_t}$ در (iii) صدق می کند (شکل (۵.۳)).

شکل ۵.۳: گراف K_{n_1,n_2}، $\gamma_b(K_{n_1,n_2}) = 2 = \gamma(K_{n_1,n_2}) = rad(K_{n_1,n_2})$

قبلاً نشان دادیم که برای گراف $S(K_{1,n})$ داریم $\gamma_b(S(K_{1,n})) = 2$ در حالی که $\gamma(G) = n$. بنابراین یک گراف با عدد احاطه گری انتشار ۲ می تواند عدد احاطه گری به طور دلخواه بزرگی داشته باشد. به عبارت دیگر، برای هر عدد صحیح $n \geq 2$، گراف G_n با $\gamma_b(G_n) = 2$ شعاعی برابر ۳ دارد. سؤالی که اینجا مطرح می شود این است که، شعاع گرافی که عدد احاطه گری انتشار ۲ دارد تا چه اندازه می تواند بزرگ باشد؟

گزاره ۳.۴.۳. اگر G یک گراف همبند با $\gamma_b(G) = ۲$ باشد، آنگاه

۱. $rad(G) = ۲$، یا،

۲. $rad(G) = ۳$ و $\gamma(G) = ۲$.

اثبات. فرض کنید G گراف همبندی با عدد احاطه گری انتشار ۲ و شعاع حداقل ۳ باشد. اگر f انتشار احاطه گر مینیمم روی G باشد، آنگاه از قضیه ۲.۴.۳ نتیجه می شود، مجموعه f-احاطه گر یک مجموعه احاطه گر مینیمم شامل دو رأس می باشد که u, v نامیده می شوند. پس $|V_f^+| = ۲$ و چون فرض کرده ایم $\gamma_b(G) = ۲$ لذا $M = ۱$. طبق لم ۳.۳.۳، داریم $rad(G) \leq ۴$. بنابراین $rad(G) = ۳$ یا $rad(G) = ۴$. در حقیقت، $rad(G) = ۳$. فرض کنید (فرض خلف) $rad(G) = ۴$. بنابراین با توجه به تعریف شعاع، $e(u) \geq ۴$ و $e(v) \geq ۴$. برای $۱ \leq i \leq e(u)$، فرض کنید D_i مجموعه ای از رأس های G باشد که به فاصله i از u قرار دارند. رأس u خودش و رأس هایی از $D_۱$ را که به فاصله ۱ از آن قرار دارند، احاطه می کند. همانطوری که در اثبات لم ۳.۳.۳ نشان داده شد، v رأس هایی را در مجموعه های D_i برای حداکثر سه مقدار i، احاطه می کند. این نتیجه می دهد $e(u) = ۴$ و به طور مشابه، $e(v) = ۴$؛ که در آن u, v رأس های مرکزی می باشند. علاوه بر این، چون $\{u, v\}$ یک مجموعه احاطه گر برای G است، داریم $N[v] = D_۲ \cup D_۳ \cup D_۴$. فرض کنید w رأسی در $D_۲$ باشد. در این صورت w به فاصله حداکثر ۲ از هر رأس در $D_۲ \cup D_۳ \cup D_۴$، به فاصله ۲ از u، و به فاصله حداکثر ۳ از هر رأس در $D_۱$ می باشد. در نتیجه، $e(w) < ۴ = rad(G)$، که یک تناقض ایجاد می شود. چون شعاع یک گراف برابر مینیمم گریز از مرکز هر رأس آن می باشد. پس چنین گراف G وجود ندارد. حال از قضیه ۲.۴.۳ نتیجه حاصل می شود. □

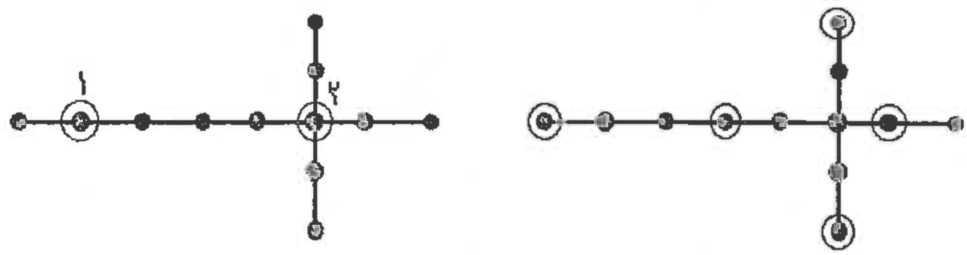
نتیجه دیگر قضیه ۲.۴.۳ در زیر آمده است.

گزاره ۴.۴.۳. اگر G گرافی همبند باشد و $min\{rad(G), \gamma(G)\} = ۳$، آنگاه $\gamma_b(G) = ۳$.

اثبات. اگر $\gamma(G) = 3$ آنگاه عدد احاطه گری انتشار در صورتی مینیمم مقدار خود را دارد که به هر یک از ۳ رأسی که گراف را می پوشانند، مقدار ۱ را دهیم. در نتیجه $\gamma_b(G) = 3$. حال اگر $rad(G) = 3$ در این صورت باید به رأس مرکزی گراف مقداری برابر با شعاع گراف نسبت دهیم تا کل گراف احاطه شود و همچنین $\gamma_b(G)$ مینیمم شود. پس $\gamma_b(G) = 3$. □

بخش هایی از گزاره ۱.۴.۳، قضیه ۲.۴.۳ و گزاره ۴.۴.۳ را خلاصه می کنیم، اگر G یک گراف همبند با $min\{rad(G), \gamma(G)\} \in \{1, 2, 3\}$، آنگاه $\gamma_b(G) = min\{rad(G), \gamma(G)\}$.

طبیعتاً این سؤال مطرح می شود که آیا این شرایط برای وقتی که $min\{rad(G), \gamma(G)\} = 4$، هم برقرار است؟ همان طوری که در پائین می بینیم، این سؤال جواب منفی دارد. گراف G شکل (۶.۳) از اتصال یک رأس انتهایی $S(K_{1,4})$ به رأس انتهایی P_4 تشکیل شده است.



شکل ۶.۳: $\gamma_b(G) = 3 < 5 = \gamma(G)$

در گراف G، شعاع ۴ و عدد احاطه گری برابر ۵ است. به عبارت دیگر، اگر u و v به ترتیب رأس های مرکزی $S(K_{1,4})$ و P_4 باشند، آنگاه انتشار $f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ با ضابطه

$$f(x) = 2\chi_u(x) + \chi_v(x)$$

یک انتشار احاطه گر روی G است. با توجه به قضیه ۲.۴.۳ داریم $\gamma_b(G) = 3$.

با توجه به نتایجی که در ابتدای این فصل بدست آوردیم، برای گراف G داریم

$$\gamma_b(G) < min\{k\gamma_k(G) : ۱ \leq k \leq ۴\}.$$

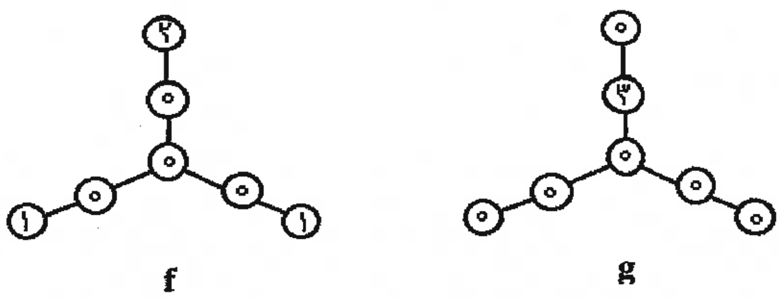
اگر فرض کنید $k \notin \{۱, rad(G)\}$، آنگاه نتیجه می گیریم $k \geq ۲$ و چون نمی توان برای این گراف یک رأس را پیدا کرد که همه رأس های گراف به فاصله ۲ یا ۳ از آن قرار داشته باشند، در نتیجه $\gamma_k(G) \geq ۲$، بنابراین $k\gamma_k(G) \geq ۴$.

۵.۳ انتشارهای احاطه گر مینیمال

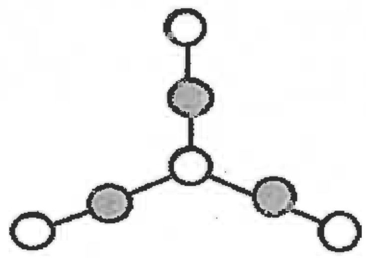
مجموعه احاطه گر S از گراف G مینیمال است اگر زیر مجموعه سره (حقیقی) از S، $V(G)$ را احاطه نکند. به طور مشابه، انتشار احاطه گر f روی گراف همبند نابدیهی G مینیمال نامیده می شود اگر انتشار احاطه گر f' وجود نداشته باشد که در شرط زیر صدق کند.

$$f'(v) \leq f(v) \quad \forall v \in V(G)$$

برای مثال، دو انتشار احاطه گر مینیمال متفاوت f, g روی گراف $S(K_{۱,۳})$ در شکل (۷.۳) نشان داده شده اند. همچنین با توجه به شکل (۸.۳)، $\gamma(S(K_{۱,۳})) = ۳$ و به وضوح $rad(S(K_{۱,۳})) = ۲$.



شکل ۷.۳: دو انتشار احاطه گر مینیمال روی $S(K_{۱,۳})$



شکل ۸.۳: گراف $S(K_{1,3})$، $\gamma(S(K_{1,3})) = 3$

چون $min\{rad(S(K_{1,3})), \gamma(S(K_{1,3}))\} = 2$، از قضیه ۲.۴.۳ داریم $\gamma_b(S(K_{1,3})) = 2$ بنابراین f, g انتشارهای احاطه گر مینیمالند اما انتشارهای احاطه گر مینیمم نیستند. هر انتشار احاطه گر مینیمم ضرورتاً مینیمال است اما، به طوری که در مثال قبلی نشان داده شد، هر انتشار احاطه گر مینیمال لزوماً مینیمم نیست. همچنین در مثال دیگری، تابع مشخصه هر مجموعه احاطه گر مینیمال یک انتشار احاطه گر مینیمال است.

اگر G گراف همبند نابدیهی باشد و $v \in V(G)$، آنگاه تابع $f : V(G) \longrightarrow \{0, e(v)\}$ با ضابطه $f(x) = \chi_v(x)e(x)$ یک انتشار احاطه گر مینیمال روی G است. بنابراین، نتیجه زیر را بدست می آوریم.

گزاره ۱.۵.۳. اگر f انتشار احاطه گر مینیمال روی گراف همبند G باشد و $|V_f^+| \geq 2$، آنگاه برای هر رأس v، $f(v) < e(v)$.

هر رأس v در مجموعه احاطه گر مینیمال S همسایگی ویژه u را دارد که در آن رأس u فقط توسط v احاطه شده است. فرض کنید f یک انتشار روی G باشد و همچنین $v \in V_f^+(G)$. یک f-همسایگی ویژه v، رأسی است که f-همسایگی v باشد اما f-همسایگی رأسی غیر از v نباشد. در اینصورت، رأس u یک f-همسایگی ویژه v است اگر u فقط توسط v، f-احاطه شده باشد یا، به طور معادل، اگر $u \in N_f[v] - N_f[V_f^+ - \{v\}]$. توجه کنید که رأس u که f-همسایگی رأس v است، f-همسایگی ویژه

v می باشد اگر و فقط اگر ۱ $= \overrightarrow{f}(u)$، یعنی u فقط توسط یک رأس احاطه شده باشد.

نتایج زیر در احاطه گری [۱۴] و احاطه گری فاصله ای [۱۰] بیان شده اند.

قضیه ۲.۵.۳. فرض کنید G گرافی همبند و f انتشاری احاطه گر روی G باشد. در این صورت f مینیمال است اگر و فقط اگر در دو شرط زیر صدق کند.

۱. برای هر رأس v با ۲ $\geq f(v)$، رأس u وجود دارد که f-همسایگی ویژه رأس v می باشد و به فاصله $f(v)$ از v قرار دارد.

۲. اگر ۱ $= f(v)$، آنگاه $u \in N[v]$ یک f-همسایگی ویژه v می باشد.

اثبات. با فرض اینکه f مینیمال است، اثبات را شروع می کنیم و شرط های (۱) و (۲) را اثبات می کنیم. ابتدا (۱) را بررسی می کنیم.

فرض کنید $v \in V_f^+ - V_f^1$ و $S_v = \{u \in V(G) : d(u,v) = f(v)\}$. چون f مینیمال است، پس باید $S_v \neq \emptyset$. اگر برای هر $u \in S_v$، ۲ $\geq \overrightarrow{f}(u)$ آنگاه تابع $g : V(G) \longrightarrow [0...rad(G)]$ با ضابطه $g(x) = f(x) - \chi_v(x)$ یک انتشار است. در این صورت برای هر $u \in S_v$، $(i)\ \overrightarrow{g}(u) = \overrightarrow{f}(u) - 1 \geq 1$ و برای هر $u \in V(G) - S_v$، $(ii)\ \overrightarrow{g}(u) = \overrightarrow{f}(u) \geq 1$. بنابراین g یک انتشار احاطه گر است. در این صورت برای هر $u \in V(G)$ داریم $g(x) \leq f(x)$ و $g(v) < f(v)$، که با شرط مینیمال بودن f تناقض دارد.

حال (۲) را بررسی می کنیم. فرض کنید $v \in V_f^1$. اگر برای هر $u \in N[v]$ داشته باشیم ۲ $\geq \overrightarrow{f}(u)$، آنگاه تابع $h : V(G) \longrightarrow [0...rad(G)]$ با ضابطه $h(x) = [1 - \chi_v(x)]f(x)$ یک انتشار احاطه گر با شرط $\sigma(h) < \sigma(f)$ می باشد، که با مینیمال بودن f تناقض دارد. این بخش اول اثبات را نتیجه می دهد.

برای اثبات اینکه یک انتشار احاطه گر که در شرط های (۱) و (۲) صدق کند باید مینیمال باشد، فرض کنید (فرض خلف) f انتشاری احاطه گر است که در شرط های (۱) و (۲) صدق می کند اما

مینیمال نیست. بنابراین رأس $v \in V_f^+$ وجود دارد به طوری که انتشار $g : V(G) \longrightarrow [0...diam(G)]$ با ضابطه $g(x) = f(x) - \chi_v(x)$ انتشار احاطه گر است. اگر ۲ $\geq f(v)$، آنگاه طبق (۱) رأس y وجود دارد که f-همسایگی ویژه v است و $d(v,y) = f(v)$؛ بنابراین رأس y، g-احاطه شده نمی باشد. به طور مشابه، اگر ۱ $= f(v)$، آنگاه چون g انتشار احاطه گر است، هر رأس در $N[v]$، g-احاطه شده است. در نتیجه، هر رأس در $N[v]$، توسط چند رأس مخالف v، f-احاطه شده است. این با شرط (۲) متناقض است. در هر یک از این دو حالت تناقض ایجاد می شود و در نتیجه چنین تابع f وجود ندارد. $\square$

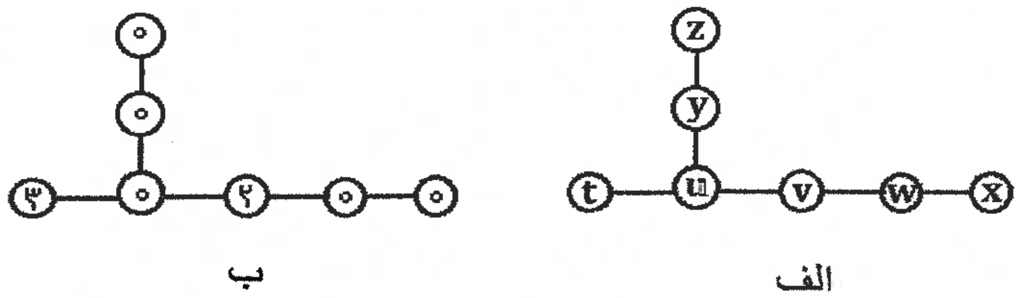
نتیجه زیر پیامد فوری قضیه ۲.۵.۳ است.

نتیجه ۳.۵.۳. اگر G گرافی همبند باشد و f انتشار احاطه گر مینیمال روی G باشد، آنگاه برای هر جفت از رأس های متمایز u, v از V_f^+، داریم $|f(u) - f(v)| < d(u,v)$.

اثبات. فرض کنید (فرض خلف) یک انتشار احاطه گر مینیمال f روی G وجود دارد و دو رأس متمایز u, v با شرایط $f(u) \leq f(v)$ و $d(u,v) \leq f(v) - f(u)$ داشته باشیم. فرض کنید x رأسی باشد که $d(x,u) \leq f(u)$. با جمع دو نامساوی بالا، سمت راست نامساوی $d(x,v) \leq d(x,u) + d(u,v) \leq f(v)$ بدست می آید. همچنین سمت چپ این نامساوی از نامساوی مثلث حاصل می شود. در نتیجه، هر رأس که توسط u، f-احاطه شده باشد همچنین توسط v نیز، f-احاطه شده است، که با قضیه ۲.۵.۳ متناقض است. $\square$

فرض کنید f یک انتشار احاطه گر روی G باشد و فرض کنید $v \in V_f^+(G)$. رأس x برای v، f-ضروری نامیده می شود اگر u، f-همسایگی ویژه v باشد و کوتاهترین مسیر بین u, v، شامل x باشد. اگر f مینیمال باشد، آنگاه از قضیه ۲.۵.۳ هر رأس f-احاطه کننده حداقل یک f-همسایگی ویژه دارد. در نتیجه، رأس v برای v، f-ضروری است. زیرا هر رأس v، f- همسایگی ویژه خودش است.

برای مثال، گراف G شکل (۹.۳) را در نظر می گیریم. در شکل ب (۹.۳)، f انتشار احاطه گر مینیمال روی G است. هر دو رأس f-احاطه کننده v, t فقط یک f-همسایگی ویژه دارند.



شکل ۹.۳: انتشار احاطه گر f

f-همسایگی ویژه t رأس z و f-همسایگی ویژه v رأس x است. رأس های z, y, u, t همه برای t، f-ضروری هستند به طوری که آنها کوتاهترین $z - t$ مسیر یکتا روی G را تشکیل می دهند و به طور مشابه، رأس های v, w, x برای v، f-ضروری هستند.

لم ۴.۵.۳. فرض کنید f انتشاری احاطه گر روی G باشد، $x, x' \in V(G)$ و $v, v' \in V_f^+(G)$ به طوری که $v \neq v'$. اگر x، f-ضروری برای v باشد و x'، f-ضروری برای v' باشد، آنگاه $x \neq x'$.

اثبات. فرض کنید u، f-همسایگی ویژه v باشد و P کوتاهترین مسیر بین u, v باشد. به طوری که x روی P قرار دارد. به طور مشابه، فرض کنید u'، f-همسایگی ویژه v' و P' کوتاهترین مسیر بین u', v' باشد به طوری که x' روی P' قرار دارد. فرض کنید (فرض خلف) که $x = x'$. چون u, u'، f-همسایگی ویژه v, v' است، $x \neq u$ و $x \neq u'$. پس x ضرورتاً بین u, v و x' بین u', v' است. در نتیجه سمت چپ دو رابطه زیر را داریم. همچنین سمت راست دو رابطه از نامساوی مثلث بدست می آید. زیرا P کوتاهترین مسیر بین u, v است و u'، f-همسایگی ویژه v' می باشد،

$$d(v,u) = d(v,x) + d(x,u) \le f(v) < d(v,u') \le d(v,x) + d(x,u').$$

و

$$d(v',u') = d(v',x) + d(x,u') \le f(v') < d(v',u) \le d(v',x) + d(x,u).$$

با جمع این دو نامساوی داریم:

$$d(v,x) + d(x,u) + d(v',x) + d(x,u') < d(v,x) + d(x,u') + d(v',x) + d(x,u)$$

که غیر ممکن است. □

قضیه ۳.۵.۵. فرض کنید f انتشار احاطه گر مینیمال روی گراف همبند G باشد. برای هر رأس $v \in V_f^+$ و هر v' که f-همسایگی ویژه v است، رأس f-احاطه کننده ای غیر از v که روی کوتاهترین مسیر بین v, v' قرار داشته باشد، وجود ندارد.

اثبات. چون f مینیمال است، هر رأس f-احاطه کننده، f-ضروری برای خودش است. لذا نتیجه مستقیماً از لم ۳.۵.۴ بدست می آید. □

۶.۳ انتشارهای احاطه گر مینیمم

در بخش قبلی انتشارهای احاطه گر مینیمال را توصیف کردیم. حال انتشارهای احاطه گر مینیمم را بررسی می کنیم. نتایجی مشابه با قضیه های معروف بولوباس[۱] و کوکائین[۲] [۲] در احاطه گری و هنینگ[۳]، اولرمن[۴] و اسوارت[۵] [۱۱] در احاطه گری فاصله ای ارائه می دهیم.

۱ Bollobas
۲ Cockayne
۳ Henning
۴ Oellerman
۵ Swart

قضیه ۳.۶.۱. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه حداقل ۲ باشد. آنگاه یک انتشار احاطه گر f روی G مینیمم است. هرگاه برای هر رأس $v \in V_f^+$، f-همسایگی ویژه u برای v وجود داشته باشد که فاصله آن تا v برابر $f(v)$ باشد.

اثبات. در میان همه انتشارهای احاطه گر مینیمم روی G، فرض کنید f انتشاری باشد که برای آن $|V_f^+|$ مینیمم است. ادعا می کنیم که f خصوصیت لازم را دارد. فرض کنید $v \in V_f^+$. از قضیه ۳.۵.۲، کافی است نتیجه بگیریم که $f(v) = ۱$. ادعا می کنیم رأسی مجاور به v وجود دارد که فقط توسط v، f-احاطه شده باشد. فرض کنید (فرض خلف)، هر رأس مجاور به v توسط رأس های متفاوت با v، f-احاطه شده باشد. طبق قضیه ۳.۵.۲، v، f-همسایگی ویژه خودش است. فرض کنید v' یکی از همسایه های v باشد و فرض کنید w رأسی متمایز با v باشد که v' را f-احاطه می کند. چون w، v را f-احاطه نمی کند، نتیجه می گیریم $f(w) = d(w, v') = d(w, v) - ۱$. انتشار $g : V(G) \longrightarrow [\circ ... rad(G)]$ را با ضابطه $g(x) = [۱ - \chi_v(x)]f(x) + \chi_w(x)$ در نظر می گیریم. رأس v فقط f-همسایه ویژه v است، و v توسط w، g-احاطه شده است. در نتیجه، g یک انتشار احاطه گر روی G با خاصیت $\sigma(g) = \sigma(f) = \gamma_b(G)$ و $V_g^+ = V_f^+ - \{v\}$ است، که با انتخاب f تناقض دارد. بنابراین چنین رأس v وجود ندارد و تابع f خصوصیات لازم را دارد. □

اگر f یک انتشار روی گراف همبند G باشد و $S \subseteq V_f^+$، آنگاه مجموعه همسایگی ویژه S برابر با $PN_f[S] = N_f[S] - N_f[V_f^+ - S]$ است. اگر f مینیمال باشد، آنگاه برای هر مجموعه ناتهی $S \subseteq V_f^+$، مجموعه $PN_f[S]$ ناتهی می باشد.

قضیه ۳.۶.۲. اگر f انتشار احاطه گر مینیمم روی گراف همبند G باشد، آنگاه برای هر مجموعه ناتهی $S \subseteq V_f^+$،

$$\sum_{u \in S} f(u) \leq min_{v \in V(G)} max_{u \in PN_f[S]} d(u, v).$$

اثبات. فرض کنید (فرض خلف)، مجموعه ناتهی $S \subseteq V_f^+$ و رأس v وجود دارد که

$$\sum_{u\in S} f(u) > M \text{ و } M = max_{u\in PN_f[S]} d(u,v).$$

فرض کنید $T = V_f^+ - (S \cup \{v\})$، و انتشار $g : V(G) \longrightarrow [0...diam(G)]$ را با ضابطه $g(x) = M\chi_v(x) + \chi_T(x)f(x)$ تعریف کنید. آنگاه $PN_f[S]$ توسط v، f-احاطه شده می باشد، g انتشاری احاطه گر روی G است، و $\sigma(g) = \sigma(f) - \sum_{u\in S-\{v\}} f(u) - f(v) + M < \sigma(f)$، اما این با فرض این که $\sigma(f) = \gamma_b(G)$ در تناقض است. در نتیجه چنین رأس v وجود ندارد و نتیجه بدست می آید. □

اگر در قضیه ۲.۶.۳ فرض شود $S = V_f^+$، به نتیجه آشنای $\gamma_b(G) \leq rad(G)$ می رسیم.

شرط قضیه ۲.۶.۳ لازم است اما برای یک انتشار احاطه گر که مینیمم باشد، کافی نیست: اگر v رأس مرکزی P_{2n+1} و $n \geq 4$ باشد، آنگاه تابع $n\chi_v$ یک انتشار احاطه گر مینیمال است که در شرط داده شده توسط قضیه ۲.۶.۳ صدق می کند. اما $n\chi_v$ انتشار احاطه گر مینیمم نیست چون با توجه به نتیجه ۲.۳.۳ داریم $\gamma_b(P_{2n+1}) = \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil < n$.

نتیجه ۳.۶.۳. فرض کنید G یک گراف همبند باشد و f انتشار احاطه گر مینیمم روی G باشد. در این صورت برای هر جفت رأس های متمایز u,v با شرط $0 < f(u) \leq f(v)$، داریم $f(u) \leq \lceil \frac{d(u,v)}{2} \rceil$ و $f(v) \leq d(u,v)$.

اثبات. فرض کنید $d = d(u,v)$ و $P : u = v_0, v_1, ..., v_d = v$ کوتاهترین $u - v$ مسیر باشد، و فرض کنید $x = v_{\lceil \frac{d}{2} \rceil}$. از قضیه ۲.۶.۳، با قرار دادن $S = \{u,v\}$، داریم

$$f(u) + f(v) \leq max\{d(x,y) : y \in PN_f[S]\} \leq \lceil \frac{d}{2} \rceil + f(v).$$

که نتیجه می شود، $f(u) \leq \lceil \frac{d(u,v)}{2} \rceil$. همچنین

$$f(u) + f(v) \leq max\{d(x,y) : y \in PN_f[S]\} \leq f(u) + d(u,v).$$

که این نامساوی از نتیجه ۳.۵.۳ بدست می آید. در نتیجه داریم $f(v) \leq d(u,v)$. □

برای یک رأس v و مجموعه $S \subseteq V(G)$، اگر S ناتهی باشد آنگاه فرض کنید $d(v,s) = min\{d(v,s) : s \in S\}$ و اگر $S = \emptyset$، آنگاه $d(v,s) = \infty$. فرض کنید f انتشار احاطه گر مینیمم روی گراف همبند G باشد. اگر برای هر رأس v مجموعه های زیر را تعریف کنیم،

$$V_f^{\leq}(v) = \{u \in V_f^+ - \{v\} : f(u) \leq f(v)\}$$

و

$$V_f^{\geq}(v) = \{u \in V_f^+ - \{v\} : f(u) \geq f(v)\}$$

آنگاه از نتیجه ۳.۶.۳ داریم

$$f(v) \leq min\{d(v, V_f^{\leq}(v), \lceil \frac{d(v, V_f^{\geq}(v))}{۲} \rceil\}.$$

فصل ۴

احاطه گری انتشار گراف های حاصلضربی

۱.۴ مقدمه

با توجه به فصل قبل داریم، $\gamma_b(G) \leq \{radG, \gamma(G)\}$ در بخش بعدی ثابت می کنیم برای هر گراف همبند G، $\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{۲rad(G)}{۳} \rceil$. سپس مفهوم انتشار احاطه گر متراکم را معرفی می کنیم و نشان می دهیم هر گراف یك انتشار احاطه گر متراکم به وزن $\gamma_b(G)$ دارد که از نتایج قبلي درباره انتشار احاطه گر مؤثر بدست می آید [۴] . در بخش ۴.۳ احاطه گری انتشار را در حاصلضرب های گراف بررسی می کنیم. فرض کنید G و H دو گراف باشند. فاصله $d_G(u, v)$ (یا $d(u, v)$ زماني که گراف G مشخص باشد) بین رأس های u و v از گراف G طول کوتاهترین مسیر بین u و v می باشد. بازه $I(u, v)$ مجموعه رأس هایی است که در کوتاهترین مسیر بین رأس های u و v قرار دارند. برای سه حاصلضرب گراف های G و H که تعریف خواهیم کرد، مجموعه رئوس $V(G) \times V(H)$ می باشد و مجموعه یال های آنها به صورت زیر تعریف شده است. در ضرب دکارتی $G\Box H$ دو رأس (x, y) و (u, w) مجاورند اگر وفقط اگر $x = v$ و $yw \in E(H)$ یا $y = w$ و $xv \in E(G)$. در ضرب مستقیم $G \times H$ دو رأس (x, y) و (v, w) مجاورند اگر و فقط اگر $xv \in E(G)$ و $yw \in E(H)$. بالاخره، مجموعه یال $E(G \boxtimes H)$ در ضرب قوی $G \boxtimes H$ اجتماع $E(G\Box H)$ و $E(G \times H)$ است. برای $v \in V(H)$ فرض کنید $G_v = \{(u, v) \in G\Box H \mid u \in V(G)\}$ و برای $u \in V(G)$ فرض کنید $H_u = \{(u, v) \in G\Box H \mid v \in V(H)\}$. توجه کنید زیر گراف القاء شده توسط G_v در $G\Box H$ متناظر با G می باشد و زیرگراف القاء شده توسط H_u در $G\Box H$ متناظر با H می باشد.

اگر به [۱۳] مراجعه کنیم مفاهیم احاطه گری در حاصلضرب گراف ها به طور مختصر بیان شده است. کران های بالا را برای احاطه گری انتشار هر سه ضرب استاندارد گراف اثبات می کنیم. برای ضرب دکارتی و ضرب قوی به ترتیب نشان می دهیم:

$$\gamma_b(G\Box H) \leq \frac{۳}{۲}(\gamma_b(G) + \gamma_b(H)) \text{ و } \gamma_b(G \boxtimes H) \leq \frac{۳}{۲}max\{\gamma_b(G), \gamma_b(H)\}.$$

برای ضرب مستقیم بدست می آوریم:

$$\gamma_b(G\times H)\leq\begin{cases}۳max\{\gamma_b(G),\gamma_b(H)\} & if\ rad(G)\neq rad(H)\\ ۳\gamma_b(G)+۱ & if\ rad(G)=rad(H)\end{cases}$$

بالاخره، در بخش آخر مقادیر دقیقی برای اعداد احاطه گری انتشار دو رده از ضرب دکارتی گراف ها، گراف های همینگ (حاصلضرب دکارتی گراف های کامل) و ضرب دکارتی دورها بدست می آوریم.

۲.۴ دو نکته در مورد انتشارهای احاطه گر

ابتدا کران پائینی برای عدد احاطه گری انتشار نسبت به شعاع بدست می آوریم و سپس نوعی از انتشارهای احاطه گر را که متراکم می نامیم، معرفی می کنیم.

۱.۲.۴ عدد احاطه گری انتشار نسبت به شعاع

در [۷] برای عدد احاطه گری انتشار یك گراف همبند دلخواه نامساوی زیر حاصل شده است.

$$\gamma_b(G)\geq\lceil\frac{diam(G)+۱}{۳}\rceil \qquad (۱.۴)$$

عبارت سمت راست به عنوان کران پائین متداول برای عدد احاطه گری شناخته شده است.

می دانیم طبق گزاره ۱.۲.۳، $\gamma_b(G)\geq rad(G)$ به نظرمی رسد پیدا کردن کران پائین مطرح شده برحسب شعاع برای عدد احاطه گری انتشار جالب باشد. چون $diam(G)\geq rad(G)$ از رابطه (۱.۴) به کران زیر می رسیم که برای گراف های همبند دلخواه G برقرار است.

$$\gamma_b(G)\geq\lceil\frac{rad(G)+۱}{۳}\rceil.$$

توجه کنید که در برخی از گراف ها $diam(G)=rad(G)$ (مثلاً برای گراف $C_۴$ داریم: $diam(C_۴)=rad(C_۴)=۲$).

لم ۱.۲.۴. فرض کنید G یك گراف و H زیر گرافی فراگیر از G باشد. در این صورت $\gamma_b(G) \leq \gamma_b(H)$ و $rad(G) \leq rad(H)$.

اثبات. به راحتی می توانیم G را از H با اضافه کردن چند یال بدست آوریم. با اضافه کردن تعدادی یال به یك گراف، γ_b آن ممکن است کمتر شود ولی بیشتر نمی شود. بنابراین هر انتشار احاطه گر در H یك انتشار احاطه گر در G است، درنتیجه اولین نامساوی بدست می آید. همچنین برای هر دو رأس u, v، $d_H(u,v) \geq d_G(u,v)$، لذا واضح است برای هر رأس u، $e_H(u) \geq e_G(u)$. بنابراین شعاع H، که مینیمم مرکز گریزی در H است، نمی تواند کوچکتر از شعاع G باشد. □

انتشار احاطه گر f، انتشار احاطه گر مؤثر نامیده شده است اگر برای هر رأس $x \in V(G)$ دقیقاً یك رأس $u \in V^+$ وجود داشته باشد به طوری که $d(x,u) \leq f(u)$. در لم زیر از این واقعیت استفاده می کنیم که برای هر گراف یك انتشار احاطه گر مؤثر f وجود دارد به طوری که $\gamma_b(G) = \sigma(f)$ [۴].

لم ۲.۲.۴. فرض کنید G گرافی همبند باشد. در این صورت درخت فراگیر T در G وجود دارد به طوری که $\gamma_b(G) = \gamma_b(T)$.

اثبات. فرض کنید G گرافی همبند و f یك انتشار احاطه گر مؤثر برای G با $\gamma_b(G) = \sigma(f)$ باشد. چون f مؤثر است، پس هر رأس $x \in V(G)$ فقط توسط یك رأس از V^+ احاطه می شود. بنابراین همسایه های $N_{f(u)}[u]$ رأس هایی از V^+ می باشد که دو به دو مجزا بوده، و اجتماعشان $V(G)$ است. T را به صورت زیر بدست می آوریم.

یك همسایه $N_{f(u)}[u]$ که u رأس دلخواهی از V^+ است را در نظر می گیریم. فرض کنید $T(u)$ درخت فراگیر زیر گراف G باشد که توسط $N_{f(u)}[u]$ القاء شده است. برای هر رأس $x \in N_{f(u)}[u]$ داریم، $d_{T(u)}(x,u) = d_G(x,u)$. بنابراین هر رأس $T(u)$ توسط u در $T(u)$، $f-$ احاطه شده می باشد. درخت های $T(u)$ برای $u \in V^+$، دو به دو مجزا بوده و اجتماع مجزای آنها یك زیر گراف غیر از G می باشد

(مگر اینکه $|V^+| = 1$). حال، یال های $E(G)$ بین درخت های متفاوت $T(u)$ اضافه می شوند به گونه ای که گراف حاصل همبند باشد (چون G همبند است، این ممکن است). به وضوح، در این روش می توانیم از دور ها اجتناب کنیم، و بنابراین گراف حاصل یك درخت فراگیر است که آن را با T نشان می دهیم.

همچنین f یك انتشار احاطه گر T است، بنابراین $\gamma_b(T) \leq \gamma_b(G)$. چون T زیر گراف فراگیر G است، طبق لم ۱.۲.۴ داریم $\gamma_b(G) \leq \gamma_b(T)$. □

قضیه ۳.۲.۴. فرض کنید G گرافی همبند باشد. در این صورت

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{2rad(G)}{3} \rceil$$

و این کران قابل دسترسی است.

اثبات. ابتدا کران را برای درخت ها اثبات می کنیم. اگر $G = K_2$ آنگاه به وضوح کران قابل قبول است. فرض کنید $T \neq K_2$ یك درخت دلخواه باشد، و $v \in T$ رأس مرکزی T باشد. در این صورت یك رأس x به فاصله $rad(T)$ از v وجود دارد. ادعا می کنیم رأس y از یک مؤلفه همبند $T - v$ که شامل x نیست وجود دارد، به طوری که $d(v,y) \geq rad(T) - 1$. فرض کنید چنین رأس y وجود ندارد. فرض کنید u همسایه v روی مسیر بین v و x باشد. در این صورت $d(u,x) = rad(T) - 1$، و برای هر $z \in T$، $d(u,z) \leq rad(T) - 1$، که یك تناقض است. بنابراین رأس y وجود دارد به طوری که مسیر بین y, x حداقل $2rad(T)$ رأس دارد. این مسیر را با Pنمایش می دهیم. فرض کنید f انتشار احاطه گری روی گراف T باشد به طوری که $\sigma(f) = \gamma_b(T)$ است. برای هر $x \in T$ نزدیك ترین رأس به x در P را با x' نشان می دهیم. فرض کنید f' انتشاری از P باشد که به صورت $f'(x) = max\{f(y) \mid y' = x\}$ تعریف شده است. چون f انتشار احاطه گر T می باشد، f' انتشار احاطه گر P بوده، و $\sigma(f) \geq \sigma(f')$.

به وضوح $\sigma(f') \geq \gamma(P)$. اما در [۷] نشان داده شده است که $\gamma_b(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. بنابراین

$$\gamma_b(T) = \sigma(f) \geq \sigma(f') \geq \lceil \frac{۲rad(T)}{۳} \rceil.$$

حال فرض کنید G یك گراف همبند دلخواه باشد. طبق لم ۲.۲.۴ درخت فراگیر T از G وجود دارد، به طوری که $\gamma_b(G) = \gamma_b(T)$. با استفاده از آن، داریم:

$$\gamma_b(G) = \gamma_b(T) \geq \lceil \frac{۲rad(T)}{۳} \rceil \geq \lceil \frac{۲rad(G)}{۳} \rceil.$$

توجه کنید که نامساوی اخیر برقرار می باشد، زیرا $rad(T) \geq rad(G)$ (لم۱.۲.۴).

برای مثال، برای مسیرهای زوج $P_{۲n}$ کران بدست می آید. □

۲.۲.۴ انتشارهای احاطه گر متراکم

فرض کنید G یك گراف و f انتشار احاطه گر G باشد. گوییم انتشار احاطه گر f متراکم است اگر برای هر رأس $x \in V(G)$ و هر زیر مجموعه $V' \subseteq V^+$، به طوری که $|V'| \geq ۲$، رأس $y \in V'$ وجود داشته باشد به طوری که

$$d(x, y) > \sum_{u \in V', u \neq y} f(u).$$

اگر f یك انتشار احاطه گر با رأس های $x, y \in V^+$، $x \neq y$ باشد به طوری که $d(x, y) \leq f(x)$، آنگاه f به وضوح متراکم نیست. (براساس [۴]، یك انتشار احاطه گر متراکم همچنین یك انتشار احاطه گر مستقل است.)

در این حالت می توانیم انتشار احاطه گر $f_۱$ را به صورت

$$f_۱(v) = \begin{cases} f(x) + f(y) & v = x, \\ ۰ & v = y, \\ f(v) & otherwise \end{cases}$$

تعریف کنیم. به وضوح $\sigma(f_۱) = \sigma(f)$ و $|V^+| > |V^+_{f_۱}|$.

لم ۴.۲.۴. اگر f یك انتشار احاطه گر متراکم در گراف G باشد، آنگاه f یك انتشار احاطه گر مؤثر در G می باشد.

اثبات. فرض کنید f یك انتشار احاطه گر متراکم باشد. ادعا می کنیم همسایگی های بسته $N_{f(u)}[u]$ که $u \in V^+$ دو به دو مجزا باشد. یعنی هر رأس در همسایگی بسته u فقط توسط u احاطه می شود. فرض کنید (فرض خلف) f انتشار احاطه گر مؤثر نباشد. برای f، یك رأس $z \in N_{f(u)}[u] \cap N_{f(v)}[v]$ براي $u \neq v$ در V^+ وجود دارد. در این صورت به وضوح $d(u,v) \leq f(u) + f(v)$. حال فرض کنید x رأسی روی کوتاهترین مسیر بین u و v باشد، به طوری که $d(x,u) = f(v)$ و $V' = \{u,v\}$. چون $d(x,u) = f(v)$ و $d(u,v) = d(u,x) + d(x,v)$ و همچنین داشتیم $d(u,v) = f(u) + f(v)$، پس

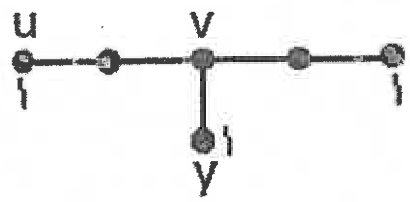
$$d(u,v) = d(u,x) + d(x,v) = f(v) + d(x,v) \leq f(u) + f(v).$$

در نتیجه $d(x,v) \leq f(u)$ و بنابراین f متراکم نیست و به تناقض می رسیم، پس f یك انتشار احاطه گر مؤثر است.

عکس استنباط بالا درست نیست. برای مثال، فرض کنید G از مسیر P_5 بدست آمده باشد به طوری که به v که رأس مرکزی P_5 می باشد، یك برگ متصل شده باشد. در این صورت برگ های G به فرم یك کد کامل است که یك انتشار احاطه گر مؤثر را نتیجه می دهد (وزن برگ ها برابر ۱، و وزن بقیه رئوس برابر ۰). اگر $V' = \{u,y\}$ آنگاه مثلاً برای رأس v، $d(v,y) = f(u)$ که با تعریف انتشار احاطه گر متراکم در تناقض است. در نتیجه انتشار متراکم نیست، چون v به فاصله حداکثر ۲ از هر برگ می باشد (شکل (۱.۴)).

□

لم ۵.۲.۴. فرض کنید G یك گراف و f انتشار احاطه گر روی G باشد. در این صورت یك انتشار احاطه گر متراکم g روی G وجود دارد، به طوری که $\sigma(g) \leq \sigma(f)$.



شکل ۴.۱: انتشار احاطه گر مؤثر

اثبات. اگر f یك انتشار احاطه گر متراکم روی G باشد، حکم تمام است. در ادامه فرض کنید f متراکم نباشد. در این صورت یك رأس $x \in V(G)$ و یك زیر مجموعه $V' \subseteq V^+$ وجود دارد، به طوری که $|V'| \geq ۲$ و برای هر $y \in V'$

$$d(x,y) \leq \sum_{u \in V', u \neq y} f(u). \qquad (۴.۲)$$

$f_۱$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f_۱(u) = \begin{cases} f(u) & if\ u \in V^+ \setminus V', \\ \sum_{z \in V'} f(z) & if\ u = x, \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

ادعا می کنیم $f_۱$ یك انتشار احاطه گر روی G می باشد. فرض کنید $y \in V(G)$ یك رأس دلخواه باشد. چون f انتشار احاطه گر است، y توسط رأس $v \in V^+$، f−احاطه می شود. اگر $v \notin V'$ آنگاه y نیز توسط v، $f_۱$−احاطه می شود. در غیر این صورت $v \in V'$. چون f انتشار احاطه گر است، $d(y,v) \leq f(v)$ و همچنین از نامساوی مثلث و رابطه (۴.۲) داریم:

$$d(y,x) \leq d(y,v) + d(v,x) \leq f(v) + \sum_{u \in V', u \neq v} f(u) = f_۱(x).$$

بنابراین y توسط x، $f_۱$−احاطه شده است. به وضوح وزن $f_۱$ برابر با وزن f است و $|V_{f_۱}^+| = |V_f^+|$. اگر $f_۱$ متراکم شده باشد آنگاه $g = f_۱$ و اثبات تمام است. اگر $f_۱$ متراکم نباشد، آنگاه می توانیم انتشار احاطه گر $f_۲$ را مانند $f_۱$ به صورتی تعریف کنیم که $|V_{f_۲}^+| < |V_{f_۱}^+|$. به طور کلی، اگر $f_{n-۱}$ متراکم نباشد،

آنگاه می توانیم انتشار احاطه گر f_n را با وزن مساوی تعریف کنیم به طوری که $|V^+_{f_n}| < |V^+_{f_{n-1}}|$. توجه کنید که $|V^+|$ را متناهی در نظر می گیریم و $|V^+_{f_n}| < |V^+_{f_{n-1}}|$. بنابراین اگر $f, f_1, ..., f_{m-1}$ متراکم نباشند و $m \in N$ به طوری که f_m انتشار احاطه گری با شرط $|V^+_{f_m}| = 1$ باشد، آنگاه به وضوح f_m متراکم است و بعلاوه وزن f_m برابر با وزن f است. نتیجه زیر بلافاصله از لم ۵.۲.۴ بدست می آید. □

قضیه ۶.۲.۴. فرض کنید G یك گراف باشد. یك انتشار احاطه گر متراکم f روی G وجود دارد به طوری که $\sigma(f) = \gamma_b(G)$.

۳.۴ کران هایی برای گراف های حاصلضرب

۱.۳.۴ ضرب دکارتی

این قسمت را با یك کران بالا برای ضرب دکارتی $X = G\Box H$ از گراف های G, H آغاز می کنیم. به آسانی می توان دید $d_X((u,x),(v,y)) = d_G(u,v) + d_H(x,y)$ و $rad(G\Box H) = rad(G) + rad(H)$. حال،

$$\gamma_b(G\Box H) \leq rad(G\Box H) = rad(G) + rad(H) \leq \frac{3}{2}(\gamma_b(G) + \gamma_b(H)).$$

که نامساوی اخیر از قضیه ۳.۲.۴ نتیجه می شود، و $\gamma_b(G) \geq \lceil\frac{2rad(G)}{3}\rceil \geq \frac{2rad(G)}{3}$.

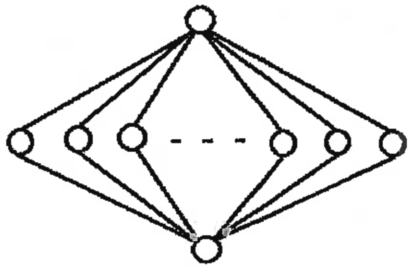
گزاره ۱.۳.۴. فرض کنید گراف های G و H همبند باشند. در این صورت

$$\gamma_b(G\Box H) \leq \frac{3}{2}(\gamma_b(G) + \gamma_b(H))$$

و کران قابل دسترس است.

حال یك کران پائین را برای $\gamma_b(G\Box H)$ بدست می آوریم. همچنین رده گراف هایی را مشخص خواهیم کرد (به اصطلاح رده χ)، که کران فوق برای آنها قابل دسترس باشد. برای $n \geq 2$، فرض کنید

X_n گراف $K_{۲,n}$ باشد (شکل (۲.۴)). فرض کنید گراف G در رده χ است هرگاه X_n زیر گراف فراگیر G برای $n \geq ۲$ باشد و $\gamma(G) > ۱$. برای هر گراف G در رده χ، داریم $\gamma(G) = ۲$.



شکل ۲.۴: گراف های X_n

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنید $X = G\Box H$ ضرب دکارتی دو گراف همبند نابدیهی باشد. در این صورت $\gamma_b(X) \geq \gamma_b(G)$ اگر و فقط اگر $H = K_۲$ و G گرافی از رده χ باشد. در این حالت $\gamma_b(X) = \gamma(X) = \gamma_b(G) = \gamma(G) = ۲$.

اثبات. فرض کنید f انتشار احاطه گر مینیمم $X = G\Box H$ باشد. تابع $M : V(G) \times V(H) \longrightarrow N$ را با ضابطه زیر

$$M(u,v) = max\{f(u,z) - d_H(v,z) | z \in V(H), z \neq v\}$$

تعریف می کنیم. ادعا می کنیم برای هر $v \in V(H)$ تابع

$$f_v(u,v) = \begin{cases} max\{f(u,v), M(u,v)\} & if\ max\{f(u,v), M(u,v)\} > ۰ \\ ۱ & if\ f(u,v) = M(u,v) = ۰ \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

انتشار احاطه گر G_v است. برای هر رأس $(u,z) \in X$ و هر $v \in H$ داریم:

$$N_{f(u,z)}[u,z] \cap G_v = N_{f(u,z)-d_H(v,z)}[u,v] \cap G_v.$$

بنابراین اگر وزن $f(u,z)$ روی رأس (u,z) را با $f(u,z)-d_H(v,z)$ جایگزین کنیم، مجموعه رأس های احاطه گر در G_v ثابت می ماند، اگر فقط $f(u,z)-d_H(v,z)>0$.

در حالت خاص که $f(u,z)=d_H(v,z)$ می توانیم وزن $f(u,z)$ روی (u,z) را با وزن ۱ روی رأس (u,v) جایگزین کنیم. بنابراین تابع f_v تعریف شده در بالا واقعاً انتشار احاطه گر G_v می باشد. چون $f_v(u,v)\leq max\{f(u,z)|z\in V(H)\}$، خواهیم داشت $\sigma(f_v)\leq\sigma(f)$ و بنابراین $\gamma_b(G)\leq\gamma_b(X)$.

حال فرض کنید $\gamma_b(G)=\gamma_b(X)$. فرض کنید f یك انتشار احاطه گر مینیمم X باشد، و بعلاوه، فرض کنید f متراکم باشد (این فرض طبق قضیه ۴.۲.۵ معتبر است). ادعا می کنیم برای هر $(u,z)\in X$، $f(u,z)\leq 1$. فرض کنید چنین نباشد. فرض کنید $(u,z)\in V(X)$ به طوری که $f(u,z)>1$، و $v\in V(H)$ یك همسایه z باشد. تابع f_v را در نظر می گیریم. توجه کنید $M(u,v)\geq 1$، بنابراین برای $f_v(u,v)$ سطر اول را در تعریف f_v به کار می بریم. این نتیجه می دهد $\sigma(f_v)<\sigma(f)$ که یك تناقض است. بنابراین در واقع برای هر $(u,z)\in X$ داریم، $f(u,z)=1$. فرض کنید $(u,v)\in X$ رأسی باشد به طوری که $f(u,v)=1$. ادعا می کنیم $N[v]=V(H)$. در غیر این صورت، فرض کنید $v'\in V(H)$ رأسی باشد که مجاور v نیست. انتشار احاطه گر $f_{v'}$ را در نظر می گیریم به طوری که v و v' مجاور نیستند. در این صورت $f_{v'}(u,v')<\sum_{z\in V(H)}f(u,z)$ و بنابراین $\sigma(f_{v'})<\sigma(f)$، که یك تناقض است.

حال ادعا می کنیم که H یك گراف کامل است. اگر برای هر $x\in V(G)$، رأس $y\in V(H)$ وجود داشته باشد، به طوری که $f(x,y)=1$، آنگاه $\sigma(f)\geq|G|\geq rad(G)+1\geq\gamma_b(G)+1$، که یك تناقض است. بنابراین $x\in V(G)$ وجود دارد به طوری که برای هر $y\in V(H)$، $f(x,y)=0$. چون f احاطه گر است، برای هر $y\in V(H)$، یك همسایه x_y برای x وجود دارد به طوری که $f(x_y,y)=1$. با ادعایی که در پاراگراف قبل کردیم، برای هر $y\in V(H)$ داریم $N[y]=V(H)$. بنابراین H یك گراف کامل است. حال فرض کنید $|H|\geq 3$. ادعا می کنیم f متراکم نیست. فرض کنید $x\in V(G)$ به طوری که برای هر $y\in V(H)$، $f(x,y)=0$ و برای هر $y\in V(H)$، $f(x_y,y)=1$، جایی که x_y یك همسایه

x است. فرض کنید $V' = \{(x_y, y) | y \in H\}$ و $v \in H$ یك رأس ثابت دلخواه باشد. در این صورت برای هر $(x_y, y) \in V'$ داریم

$$d_x((x,v),(x_y,y)) \leq ۲ \leq \sum_{(a,b)\in V',(a,b)\neq(x_y,y)} f(u)$$

بنابراین f متراکم نیست، که یك تناقض است. در نتیجه $H = K_۲$.

چون $H = K_۲$ و برد f، $\{۱, ۰\}$ است، V^+ متناظر با یك مجموعه احاطه گر عادی می باشد، و $|V^+| = \gamma_b(X)$. بنابراین $\gamma_b(G\Box K_۲) = \gamma(G\Box K_۲) = \gamma_b(G) = \gamma(G)$، که تساوی اخیر از $\gamma_b(G) \leq \gamma(G) \leq \gamma(G\Box K_۲)$ نتیجه می شود. فرض کنید $V(H) = \{u, v\}$. واضح است که $V^+ \cap G_u \neq \emptyset$ و $V^+ \cap G_v \neq \emptyset$ زیرا در غیر این صورت $|V^+| = |G| \geq rad(G) + ۱$. فرض کنید $V_۱ = V^+ \cap G_u$ و $V_۲ = V^+ \cap G_v$. ادعا می کنیم برای هر رأس $(w,u) \in V_۱$ و $(z,v) \in V_۲$، رأس های z, w در G مجاور نیستند. اگر w, z مجاور باشند آنگاه f متراکم نیست (برای $x = (w,v)$ و $V' = \{(w,u),(z,v)\}$ ممکن است داشته باشیم $d((w,u),(w,v)) = d((z,v),(w,v))$).

حال ادعا می کنیم که برای هر $(w,u) \in V_۱$ دقیقاً یك $(z,v) \in V_۲$ وجود دارد به طوری که $w \neq z$ و $N(w) = N(z)$. فرض کنید $(w,u) \in V_۱$ یك رأس دلخواه باشد و $deg_G(w) = ۱$. رأس (t,v) را در نظر می گیریم، که t فقط همسایه w در G می باشد. چون (t,v) توسط (t,u) احاطه نشده است (یادآوری می کنیم که f متراکم است)، رأس $s \in V(G)$ وجود دارد به طوری که (t,v)، (s,v) را احاطه می کند. بنابراین $N(w) \subseteq N(s)$. اگر $N(w) \neq N(s)$، آنگاه رأس $t' \in N(s)$ و یك رأس s' وجود دارد، به طوری که (s',u)، (t',u) را احاطه می کند. توجه کنید که $x = (s,u)$ رأسی است که $d((s,u),(w,u)), d((s,u),(s,v)), d((s,u),(s',u)) \leq ۲$ و باجایگذاری

$$V' = \{(w,u),(s,v),(s',u)\}$$

نتیجه می شود که f متراکم نیست این یك تناقض است. بنابراین $N(w) = N(s)$ و $s = z$.

فرض کنید $deg_G(w) > 1$ و (t_1, v) و (t_2, v) رأس هایی باشند به طوری که $t_1, t_2 \in N(w)$. چون f متراکم است، $(t_1, u), (t_2, u)$، f–احاطه نشده اند، و همچنین رأس های $(s_1, v), (s_2, v)$ از V^+ وجود دارند، به طوری که $(t_i, v), (s_i, v)$ را احاطه می کند. ادعا می کنیم $s_1 = s_2 = z$. فرض کنید $s_1 \neq s_2$، $x = (w, v)$ و $V' = \{(s_1, v), (s_2, v), (w, u)\}$. چون $d((s_1, v), (w, v)) = d((s_2, v), (w, v)) = 2$ و $d((w, u), (w, v)) = 1$، به این نتیجه می رسیم که f متراکم نیست، که یك تناقض می باشد. پس نتیجه می گیریم $N(w) \subseteq N(z)$. به طور مشابه به رابطه $N(z) \subseteq N(w)$ می رسیم. بنابراین $N(w) = N(z)$ و w, z مجاور نیستند.

حال ثابت می کنیم $|V_1| = |V_2| = 1$. فرض کنید $V_1 = \{(w_1, u), ..., (w_n, u)\}$ و $V_2 = \{(z_1, v), ..., (z_n, u)\}$ به طوری که برای هر $i = 1, ..., n$، $N(w_i) = N(z_i)$. گراف G_1 را که توسط $\{w_1, z_1\} \cup N(w_1)$ القاء شده را در نظر بگیرید. واضح است که این گراف از مجموعه χ است. بعلاوه، چون G همبند است، گراف G_i وجود دارد که توسط $\{w_i, z_i\} \cup N(w_i)$ القاء شده باشد به طوری که برخی از رأس های G_1 با رأسی از G_i مجاور است. فرض کنید رأس $t_1 \in N(w_1)$ مجاور با رأس $t_i \in N(w_i)$ وجود دارد. با جایگذاری $x = (t_1, u)$ و $V' = \{(w_1, u), (w_i, u), (z_1, v)\}$ به این نتیجه می رسیم که f متراکم نیست، که یك تناقض می باشد. بنابراین $n = 1$، $|V^+| = 2$ و G از رده χ می باشد. این اثبات را کامل می کند. □

قضیه ۴.۳.۲. برای یك گراف همبند G، $\gamma(G \square K_2) = \gamma(G)$ اگر و فقط اگر G یك γ–مجموعه V داشته باشد که بتواند به صورت $V_1 \cup V_2$ افراز شود به طوری که

$$V(G) \setminus N[V_2] = V_1, \quad V(G) \setminus N[V_1] = V_2.$$

۲.۳.۴ حاصلضرب قوی

گزاره ۴.۳.۴. فرض کنید $X = G \boxtimes H$ حاصلضرب قوی گراف های G و H باشد، آنگاه

$$\gamma_b(G \boxtimes H) \leq \frac{۳}{۲} max\{\gamma_b(G), \gamma_b(H)\}.$$

اثبات. برای هر دو رأس $(u,v),(x,y) \in V(G) \times V(H)$ که فاصله آنها توسط

$$d_X((u,v),(x,y)) = max\{d_G(u,x), d_H(v,y)\}$$

داده شده است داریم $e_X(u,v) = max\{e_G(u), e_H(v)\}$،

و بنابراین $rad(G \boxtimes H) = max\{rad(G), rad(H)\}$. در نتیجه

$$\gamma_b(G \boxtimes H) \leq rad(G \boxtimes H) = max\{rad(G), rad(H)\} \leq max\{\frac{۳}{۲}\gamma_b(G), \frac{۳}{۲}\gamma_b(H)\}$$

که نامساوی اخیر از قضیه ۳.۲.۴ نتیجه می شود. □

گزاره ۵.۳.۴. فرض کنید $V_۱$ و $V_۲$ مجموعه های k-احاطه گر فاصله ای به ترتیب برای G و H باشند. در این صورت $V_۱ \times V_۲$ مجموعه k-احاطه گر فاصله ای برای $G \boxtimes H$ می باشد بعلاوه

$$f(u,v) = \begin{cases} k & if\ (u,v) \in V_۱ \times V_۲ \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

یك انتشار احاطه گر برای $G \boxtimes H$ می باشد.

اثبات. فرض کنید (x,y) رأس دلخواهي از $G \boxtimes H$ باشد. چون $V_۱$ و $V_۲$ مجموعه های k-احاطه گر فاصله ای G و H هستند، رأس های $u \in V_۱$ و $v \in V_۲$ وجود دارند به طوری که $d(x,u) \leq k$ و $d(y,v) \leq k$. در نتیجه $d_{G \boxtimes H}((x,y),(u,v)) = max\{d(x,u), d(y,v)\} \leq k$. بنابراین $V_۱ \times V_۲$ مجموعه k-احاطه گر فاصله ای برای $G \boxtimes H$ است و f یك انتشار احاطه گر است. □

نتیجه زیر به راحتی اثبات می شود.

نتیجه ۶.۳.۴. برای هر دو گراف G و H، $\gamma_b(G\boxtimes H)\leq min\{k\gamma_k(G)\gamma_k(H)\mid k\in N\}$.

اثبات. فرض کنید $\gamma_k(G)$ عدد احاطه گری $k-$فاصله ای باشد. طبق گزاره ۱.۲.۳ داریم

$$\gamma_b(G)\leq min\{k\gamma_k(G):\ 1\leq k\leq rad(G)\}.$$

همچنین

$$\gamma_b(H)\leq min\{k\gamma_k(H):\ 1\leq k\leq rad(H)\}.$$

حال طبق گزاره ۵.۳.۴ نتیجه می گیریم،

$$\gamma_b(G\boxtimes H)\leq min\{k\gamma_k(G)\gamma_k(H)\mid k\in N\}.$$

□

۴.۴ احاطه گری انتشار رده هایی از گراف

۱.۴.۴ گراف های همینگ

فرض کنید $G=K_{n_1}\Box K_{n_2}\Box...\Box K_{n_p}$ ضرب دکارتی p گراف کامل باشد. اگر برای هر i، $n_i=2$ باشد آنگاه گراف مکعب های متداخل یا $p-$مکعب نامیده می شود و معمولاً با Q_p نمایش داده می شود.

ابتدا حالت مکعب های متداخل را در نظر می گیریم. در این حالت

$$\gamma_b(Q_1)=1,\gamma_b(Q_2)=2=\gamma_b(Q_3)$$

و در حالت اخیر انتشار احاطه گر منحصر به فرد است. فرض کنید رأس های دو سر قطر Q_3، v,u می باشند ($d(u,v)=rad(Q_3)=3$). در این صورت f به صورت

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=u,x=v\\ 0 & otherwise.\end{cases}$$

تعریف می شود. بعلاوه، توجه کنید که انتشارهای احاطه گر مشابه می تواند برای Q_n های دلخواه به صورت زیر بدست آمده باشند،

$$f(x) = \begin{cases} k & x = u, \\ n-k-1 & x = v, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

به طوری که $n \geq 3$ و $1 \leq k \leq n-2$. بنابراین برای $n \geq 3$، داریم $\gamma_b(Q_n) \leq n-1$. همانطوری که می دانیم $\gamma_b(Q_3) = 3 - 1 = 2$. طبق قضیه ۲.۳.۴، $\gamma_b(Q_n) = \gamma_b(Q_{n-1} \Box K_2)$ دقیقاً از $\gamma_b(Q_{n-1})$ بزرگتر است، اگر Q_{n-1} در رده χ نباشد. چون تنها مکعب متداخل در رده χ، Q_2 است، برای هر $n \geq 4$ استنباط می کنیم $\gamma_b(Q_n) > \gamma_b(Q_{n-1})$، و بنابراین طبق استقراء $\gamma_b(Q_n) \geq n-1$. از ترکیب این رابطه با رابطه قبلی، برای $n \geq 3$، داریم $\gamma_b(Q_n) = n-1$.

فرض کنید $G = K_{n_1} \Box K_{n_2} \Box ... \Box K_{n_p}$ یك گراف همینگ باشد به طوری که حداقل یك n_i بزرگتر از ۲ باشد. چون ضرب دکارتی جابجایی پذیر و شرکت پذیر می باشد می توانیم بنویسیم:

$$G = K_{n_1} \Box (...(K_{n_2} \Box ... \Box (K_{n_{p-2}} \Box (K_{n_{p-1}} \Box K_{n_p}))...).$$

که $n_p > 2$. چون برای هر $i \geq 2$ گراف $K_{n_i} \Box ... \Box K_{n_p}$ در رده χ نیست به رابطه زیر می رسیم.

$$\gamma_b(K_{n_{i-1}} \Box (K_{n_i} \Box ... \Box K_{n_p})) > \gamma_b(K_{n_i} \Box ... \Box K_{n_p}).$$

توسط استقراء بدست می آوریم، $\gamma_b(G) \geq p$ و از اینرو، چون $p = rad(G), \gamma_b(G) = p$. ملاحظاتمان را در قضیه زیر خلاصه می کنیم.

قضیه ۱.۴.۴. فرض کنید $X = K_{n_1} \Box K_{n_2} \Box ... \Box K_{n_p}$ یك گراف همینگ باشد. آنگاه

$$\gamma_b(X) = \begin{cases} p-1 & if\ \forall\, i:\ n_i = 2, p \geq 3 \\ p & otherwise. \end{cases}$$

بنابراین $\gamma_b(X) = rad(X)$ برای هر گراف همینگ به استثنای مکعب های متداخلی که $n \geq 3$ باشد، برقرار است.

۲.۴.۴ ضرب دکارتی دورها

ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که دورها طول زوج دارند. در حقیقت باید نتیجه ای درباره رده های تا حدی عمومی تر گراف ها بدست آوریم. گراف G را شعاعی قطری می نامیم اگر رأس های شعاعی u و v وجود داشته باشند (رأس هایی با $d(u,v) = rad(G)$) به طوری که $I(u,v) = V(G)$. لذا هر رأس $x \in V(G)$ روی یك کوتاهترین مسیر بین u و v قرار دارد بنابراین داریم $d(u,v) = d(u,x) + d(x,v)$. (در گراف های شعاعی قطری ملاحظه می کنیم $diam(G) = rad(G)$.)

لم ۲.۴.۴. فرض کنید G یك گراف شعاعی قطری با $diam(G) \geq ۳$ باشد. در این صورت

$$\gamma_b(G) < rad(G).$$

اثبات. فرض کنید u و v دو رأس شعاعی به صورت $I(u,v) = V(G)$ باشند. تابع $f : V(G) \longrightarrow N_۰$ را به صورت

$$f(x) = \begin{cases} diam(G) - k - ۱ & if\ x = v, \\ k & if\ x = u, \\ ۰ & otherwise. \end{cases}$$

که $۰ < k < diam(G) - ۱$ تعریف می کنیم. در این صورت واضح است که f یك انتشار احاطه گر برای G است و

$$\sigma(f) = rad(G) - ۱.$$

□

مکعب های متداخل و دورهای زوج گراف های شعاعی قطری هستند.

لم ۳.۴.۴. فرض کنید G و H گراف های شعاعی قطری باشند. در این صورت $X = G \square H$ نیز شعاعی قطری است.

اثبات. توجه داریم که $rad(G\Box H) = rad(G) + rad(H)$. فرض کنید $u, v \in V(G)$ رأس های شعاعی G به صورت $I(u, v) = V(G)$ باشند، و $x, y \in V(H)$ رأس های شعاعی H به صورت $I(x, y) = V(H)$ باشند. در این صورت $d_X((u, x), (v, y)) = d_G(u, v) + d_H(x, y) = rad(X)$، بنابراین (u, x) و (v, y) رأس های دو سر قطر در X می باشند. فرض کنید (a, b) رأسی دلخواه در X باشد. در این صورت

$$d_X((u, x), (v, y)) = d_G(u, v) + d_H(x, y) = d_G(u, a) + d_G(a, v) + d_H(x, b) + d_H(b, y) =$$

$$d_X((u, x), (a, b)) + d_X((a, b), (v, y))$$

بنابراین $I_X((u, v), (x, y)) = V(X)$. $\Box$

نتیجه ۴.۴.۴. فرض کنید $X = C_{n_1}\Box C_{n_2}\Box ... \Box C_{n_k}$ ضرب دورهای زوج باشد (یعنی n_i برای همه iها زوج است). در این صورت $\gamma_b(X) < rad(X)$.

در ادامه عدد احاطه گری انتشار دقیق ضرب دکارتی دورها را تعیین می کنیم. رأس های دور C_m را با اعداد صحیح $m, ..., ۲, ۱$ نشان می دهیم. چون داریم $rad(G\Box H) = rad(G) + rad(H)$ و همچنین $rad(C_n) = \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$، پس

$$rad(C_m\Box C_n) = \begin{cases} \frac{m+n}{۲} & \text{اگر } m, n \text{ هر دو زوج} \\ \frac{m+n-۲}{۲} & \text{اگر } m, n \text{ هر دو فرد} \\ \frac{m+n-۲}{۲} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در اثبات قضیه ۶.۴.۴ نتیجه ای را درباره انتشارهای احاطه گر شبکه گراف ها استفاده می کنیم:

قضیه ۵.۴.۴. [۴] برای هر جفت اعداد صحیح m, n به صورت $m, n \geq ۲$

$$\gamma_b(P_m\Box P_n) = rad(P_m\Box P_n) = \lfloor \frac{m}{۲} \rfloor + \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor.$$

قضیه زیر مقدار $\gamma_b(X)$ را بیان می کند که X حاصلضرب دکارتی دو دور است.

قضیه ۶.۴.۴. [۳] فرض کنید $X = C_m \Box C_n$. در این صورت

$$\gamma_b(X) = \begin{cases} rad(X) & \text{اگر } m \text{ یا } n \text{ فرد}, \\ rad(X) - ۱ & \text{در غیر این صورت}. \end{cases}$$

فصل ۵

انتشار احاطه گر محدود در گراف ها

۱.۵ مقدمه

دونبار[۱] و همکارانش در [۴] چند مسأله باز را مطرح نمودند که یکی از آنها انتشار محدود بوده است. انتشار f را محدود نامیم هرگاه f مقادیر $\{۰, ۱, ..., k\}$ را بپذیرد که در آن k عددی طبیعی کوچکتر از $diam(G)$ است. در این فصل مسأله فوق را برای حالتی که $k = ۲$ مورد بررسی قرار داده و سعی می کنیم مطالعه نسبتاً جامعی از پارامتر فوق داشته باشیم.

تعریف ۱.۱.۵ (عدد احاطه گری انتشار k- محدود). مینیمم مقدار یک انتشار احاطه گر k- محدود می باشد و آن را با $\gamma_{kb}(G)$ نشان می دهیم.

۲.۵ نتایج کلی

با لم زیر که بدیهی می باشد شروع می کنیم.

لم ۱.۲.۵. برای هر گراف همبند نابدیهی G، $\gamma_{۱b}(G) = \gamma(G)$.

لم ۲.۲.۵. فرض کنید G گراف همبند نابدیهی باشد. برای هر عدد صحیح $k \geq ۱$، $\gamma_{kb}(G) \leq \gamma(G)$.

اثبات. فرض کنید S یک γ-مجموعه باشد. به رأس های S عدد ۱ و به رأس های خارج S عدد ۰ را تخصیص می دهیم. در نتیجه یک انتشار احاطه گر k-محدود داریم. $\square$

لم ۳.۲.۵. برای هر گراف همبند نابدیهی G، $\gamma_{۲b}(G) \leq \gamma_{۱b}(G)$.

اثبات. اگر f انتشار احاطه گر ۱-محدود باشد، آنگاه f انتشار احاطه گر ۲-محدود نیز است. بنابراین نتیجه می گیریم $\gamma_{۲b}(G) \leq \gamma_{۱b}(G)$. $\square$

---

[۱] Dunbar

برای هر گراف همبند نابدیهی G و عدد صحیح و ثابت k به طوری که $۱ \leq k \leq rad(G)$، عدد احاطه گری k-فاصله که با $\gamma_k(G)$ نشان می دهیم، کوچکترین اندازه از مجموعه S از رأس های G می باشد به طوری که هر رأس G درون فاصله k از حداقل یك رأس S است. اگر S یك مجموعه احاطه گر k-فاصله باشد، آنگاه تابع $f : V(G) \longrightarrow \{۰, k\}$ با ضابطه $f(x) = k\chi_S(x)$ یك انتشار احاطه گر روی G است. بنابراین کران بالای زیر را برای عدد احاطه گری انتشار محدود داریم.

گزاره ۴.۲.۵. برای هر گراف همبند نابدیهی G، $\gamma_{۲b}(G) \leq min\{k\gamma_k(G) : ۱ \leq k \leq rad(G)\}$.
به خصوص، هنگامی که $k = ۱$ داریم $\gamma_{۲b}(G) \leq \gamma(G)$ و هنگامی که $k = rad(G)$ داریم

$$\gamma_{۲b}(G) \leq rad(G).$$

نتیجه ۵.۲.۵. برای هر گراف همبند نابدیهی G، $\gamma_{۲b}(G) \leq min\{rad(G), \gamma(G)\}$.

برای گراف G و عدد صحیح و مثبت k گراف k-تقسیم شده G که با $S_k(G)$ نشان داده می شود گرافی است که با اضافه کردن k رأس بر هر یال G بوجود می آید. برای اعداد صحیح و مثبت k و t، فرض کنید $S_{k,t} = S_k(K_{۱,t})$، که $K_{۱,t}$ یك ستاره شامل یك رأس مرکزی است که با k برگ مجاور می باشد. بنابراین $\gamma_b(S_{k,t}) = rad(S_{k,t}) = k + ۱$. می توان دید $\gamma_{kb}(S_{k,t}) \neq rad(S_{k,t}) = k + ۱$.

برای عدد صحیح و مثبت k، فرض کنید H_k گراف حاصل از اتصال یك رأس انتهایی $S(K_{۱,۲+k})$ با یك رأس انتهایی $P_{۲k}$ باشد.

قضیه ۶.۲.۵. برای هر عدد صحیح مثبت k داریم:

$$min\{t\gamma_t(H_k) : ۱ \leq t \leq rad(H_k)\} - \gamma_b(H_k) \geq \frac{۲k}{۱۵} - ۱.$$

اثبات. فرض کنید S یك مجموعه احاطه گر مینیمم $P_{۲k}$ و v رأس مرکزی $S(K_{۱,۲+k})$ باشد.

در این صورت تابع $f : V(H_k) \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ با ضابطه $f(x) = 2\chi_v(x) + \chi_s(x)$ یک انتشار احاطه گر روی H_k می باشد و $\sigma(f) = 2 + \lceil \frac{2k}{3} \rceil$ به طوری که $\gamma_b(H_k) \leq 3 + \frac{2k}{3}$. حال بر حسب اینکه $t = 1$ یا $t \geq 2$ دو حالت را در نظر می گیریم:

- اگر $t = 1$، آنگاه $\gamma_1(H_k) = \gamma(H_k)$. همچنین می دانیم $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ گراف H_k را به دو گراف P_{2k+2} و $S(K_{1,k+1})$ تبدیل می کنیم. در این صورت $\gamma(P_{2k+2}) = \lceil \frac{2k+2}{3} \rceil$ و $\gamma(S(K_{1,k+1})) = k + 1$ پس نتیجه می گیریم $\gamma_1(H_k) = 1 + k + \lceil \frac{2k+2}{3} \rceil$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(H_k) - \gamma_b(H_k) &\geq 1 + k + \lceil \frac{2k+2}{3} \rceil - (3 + \lceil \frac{2k}{3} \rceil) \\
&= k - 2 + \lceil \frac{2k+2}{3} \rceil - \lceil \frac{2k}{3} \rceil \\
&= k + \lceil \frac{2k+2}{3} \rceil - \lceil \frac{2k+6}{3} \rceil \\
&= k - \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

در نتیجه $\gamma_1(H_k) - \gamma_b(H_k) \geq k - \frac{4}{3}$.

- اگر $t \geq 2$، آنگاه $t\gamma_t(H_k) = t\lceil \frac{(2k+5)}{(2t+1)} \rceil \geq t\frac{(2k+5)}{(2t+1)}$.

توجه کنید که تعداد کل رأس هایی که در گراف H_k روی بزرگترین مسیر قرار دارند، برابر $2k + 5$ می باشد و همچنین هر رأس t احاطه کننده حداکثر $2t + 1$ رأس را می پوشاند.

$$\begin{aligned}
t\gamma_t(H_k) - \gamma_b(H_k) &\geq \frac{t}{2t+1}(2k+5) - 3 - \frac{2k}{3} \\
&= \frac{1}{2t+1}[t(2k+5) + (-3 - \frac{2k}{3})(2t+1)] \\
&= \frac{1}{2t+1}[\frac{2}{3}k(t-1) - t - 3] \\
&\geq \frac{1}{2t+1}[\frac{2}{3}k(t-1) - (2t+1)]
\end{aligned}$$

اگر $t = ۲$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} t\gamma_t(H_k) - \gamma_b(H_k) &\geq \frac{۱}{۲t+۱}[\frac{۲}{۳}k(t-۱) - (۲t+۱)] \\ &\geq \frac{۱}{۵}[\frac{۲}{۳}k - ۵] \\ &\geq \frac{۲k}{۱۵} - ۱ \end{aligned}$$

مرحله آخر با در نظر گرفتن تابع $f(t) = \frac{(t-۱)}{(۲t+۱)}$ که برای هر $t \geq ۲$ در $f(t) \geq f(۲) = \frac{۱}{۵}$ صدق می کند، نتیجه می شود. □

قضیه ۰۷.۲.۵ اگر G یك گراف همبند نابدیهی باشد، آنگاه $\gamma_{۲b}(G) \geq \lceil \frac{diam(G)+۱}{۳} \rceil$.

اثبات. فرض کنید u و v دو رأس G باشند به طوری که $d(u,v) = diam(G)$، و فرض کنید $P: \ u = x_۰, x_۱, ..., x_{diamG} = v$ کوتاهترین مسیر بین u و v به طول قطر G باشد. فرض کنید f انتشار احاطه گر مینیمم محدود روی G باشد. نشان می دهیم هر رأس f−احاطه گر مانند x، حداکثر به اندازه $۲f(x) + ۱$ رأس از P را f−احاطه می کند. فرض کنید (فرض خلف)، یك رأس $w \in V_f^+$ وجود دارد به طوری که $N_f[w]$ شامل حداقل $۲f(w) + ۲$ رأس از P می باشد. فرض کنید s و t به ترتیب کوچکترین و بزرگترین عدد حقیقی باشند، به طوری که $x_s, x_t \in N_f[w] \cap V(P)$. در این صورت با فرض اینکه $t - s \geq ۲f(w) + ۱$. داریم:

$$s + ۲f(w) + ۱ - t \leq ۰$$

در نتیجه

$$s + ۲f(w) + ۱ - t + diam(G) \leq diam(G)$$

پس طول P حداقل برابر $s + ۲f(w) + ۱ - t + diam(G)$ می باشد. فرض کنید P_s کوتاهترین مسیر بین x_s, w در G و P_t کوتاهترین مسیر بین w, x_t در G باشد. چون w، x_t و x_s را f−احاطه می

کند، P_s و P_t حداکثر طولی برابر $f(w)$ دارند. به هر حال، مسیر $v-u$ با دنبال کردن P از u به x_s، سپس P_s از x_s به w، در ادامه P_t از w به x_t و بالاخره P از x_t به v به دست می آید که طولی حداکثر به اندازه $s + ۲f(w) + diam(G) - t$ دارد. این با انتخاب P تناقض دارد، زیرا فرض کرده بودیم طول P حداکثر برابر $diam(G)$ می باشد. بنابراین چنین رأس w وجود ندارد. درنتیجه رأس f–احاطه گر x حداکثر $۲f(x) + ۱$ رأس از P را f–احاطه می کند. علاوه بر این چون f یك انتشار احاطه گر است. هر رأس از P، f–احاطه شده می باشد. بنابراین،

$$diam(G) + ۱ \leq \sum_{x\in V_f^+}[۲f(x) + ۱] = ۲\gamma_b(G) + |V_f^+| \leq ۳\gamma_b(G).$$

$\square$

فرض کنید $P_n^k(x)$ رأس های y متعلق به G می باشند که به فاصله k از x قرار دارند و y فقط توسط x پوشیده می شود.

قضیه ۸.۲.۵. $\gamma_{۲b}(G) = \gamma_{۱b}(G)$ اگر و تنها اگر یك انتشار احاطه گر ۲-محدود f را داشته باشیم که به ازای هر رأس $x \in V^۲$، $|P_n^۲(x)| \leq ۲$ و اگر $|P_n^۲(x)| = ۲$ آنگاه $|P_n^۱(x)| = ۲$.

اثبات. $\Leftarrow$: فرض کنید f را با این شرایط داریم و $x \in V^۲$.

حالت ۱ : اگر $|P_n^۲(x)| = ۱$ باشد آنگاه فرض کنید $P_n^۲(x) = \{y\}$. در این صورت x را به ۱ و رأس مجاور با y که مجاور x هم است را به ۱ تغییر می دهیم.

حالت ۲ : اگر $|P_n^۲(x)| = ۲$ و $P_n^۲(x) = \{y, z\}$، آنگاه x را به ۰ و رأس های مجاور با y و z که مجاور x هم هستند را به ۱ تغییر می دهیم.

در این صورت f یك انتشار احاطه گر ۱-محدود است در نتیجه $\gamma_{۱b}(G) \leq \gamma_{۲b}(G)$. حال طبق لم ۳.۲.۵، داریم $\gamma_{۱b}(G) = \gamma_{۲b}(G)$.

$\Rightarrow$: فرض کنید $\gamma_{۱b}(G) = \gamma_{۲b}(G)$. لذا یک انتشار احاطه گر ۱-محدود f وجود دارد که

$\sigma(f) = \gamma_{\text{۲}b}(G)$. اما به وضوح f یک انتشار احاطه گر ۲-محدود نیز بوده و حالات ۱ و ۲ برقرارند زیرا $V^{\text{۲}} = \emptyset$. □

می دانیم که برای یک گراف همبند نابدیهی G، ۱ $= \gamma(G)$ اگر و تنها اگر ۱ $= rad(G)$.

گزاره ۹.۲.۵. اگر G یک گراف همبند نابدیهی باشد، آنگاه ۱ $= \gamma_{\text{۲}b}(G)$ اگر و تنها اگر ۱ $= rad(G)$.

اثبات. فرض کنید (فرض خلف) ۱ $< rad(G)$ باشد. تنها حالتی که می توان در نظر گرفت تا $\gamma_{\text{۲}b}(G)$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد آن است که ۱ $= |V^{+}|$ باشد و این در صورتی است که آن رأس در مرکز گراف قرار داشته باشد. در نتیجه چون فرض کردیم ۱ $< rad(G)$ پس حتماً ۱ $< \gamma_{\text{۲}b}(G)$. که خلاف فرض است. حال فرض کنید ۱ $= rad(G)$. چون حداکثر فاصله هر رأس از مرکز گراف برابر ۱ است، پس می توان با اختصاص دادن عدد ۱ به رأس مرکزی کل گراف را پوشاند. پس نتیجه می گیریم ۱ $= \gamma_{\text{۲}b}(G)$. □

قضیه ۱۰.۲.۵. فرض کنید G گرافی همبند باشد، در این صورت ۲ $= \gamma_{\text{۲}b}(G)$ اگر و تنها اگر

$$min\{rad(G), \gamma(G)\} = \text{۲}.$$

اثبات. اگر ۲ $= \gamma(G)$ یا ۲ $= rad(G)$ آنگاه گزاره های ۲.۲.۵ و ۵.۲.۵ نتیجه می دهند که ۲ $= \gamma_{\text{۲}b}(G)$. فرض کنید ۲ $= \gamma_{\text{۲}b}(G)$ و ۲ $\neq rad(G)$. طبق گزاره ۲.۲.۵، داریم ۳ $\geq rad(G)$. فرض کنید f یک انتشار احاطه گر ۲-محدود روی G باشد. چون $\gamma_{\text{۲}b}(G) < rad(G)$، رأسی از G نداریم که بتواند $V(G)$ را f-احاطه کند. بنابراین می توان فرض کرد $V_f^{+} = \{u, v\}$ که در آن u و v دو رأس مجاور بوده و ۱ $= f(u) = f(v)$. در نتیجه $\{u, v\}$ یک مجموعه احاطه گر برای G است و دوباره از گزاره ۲.۲.۵ داریم، ۲ $= \gamma(G)$. □

قضیه ۱۱.۲.۵. فرض کنید G یک گراف همبند با $\gamma_{۲b}(G) = ۲$ باشد در این صورت

۱. $rad(G) = ۲$ ، یا،

۲. $rad(G) = ۳$ ، $\gamma(G) = ۲$.

اثبات. فرض کنید f یک انتشار احاطه گر ۲-محدود روی گراف G باشد و $\gamma_{۲b}(G) = ۲$. در این صورت دو حالت داریم:

حالت ۱: $|V_f^+| = ۱$. رأس $v \in V_f^+$ وجود دارد که $f(v) = ۲$. چون رأس v باید تمام گراف را احاطه کند و همچنین f مینیمم است پس v باید در مرکز گراف قرار گیرد. در این صورت چون $f(v) = ۲$ پس رأسی که بیشترین فاصله را از v دارد به فاصله ۲ از آن قرار دارد. بنابراین $rad(G) = ۲$.

حالت ۲: $|V_f^+| = ۲$. دو رأس $\{u, v\} \in V_f^+$ موجودند که $f(u) = f(v) = ۱$. چون این دو رأس متعلق به V_f^+ می باشند در نتیجه $\gamma(G) = ۲$. اگر G را یک مسیر و u و v را روی آن در نظر بگیریم چون هر رأس متعلق به V_f^+ حداکثر $۲f(x) + ۱$ رأس را f-احاطه می کند، پس این دو رأس با هم حداکثر ۶ رأس را f-احاطه می کنند. که در این صورت چون روی یک مسیر قرار دارند پس شعاع برابر با ۳ می باشد. □

شکل ۱.۵: $P_۵$

گزاره ۱۲.۲.۵. برای هر عدد صحیح $n \geq ۲$، $\gamma_{۲b}(P_n) = \gamma_{۲b}(C_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$.

اثبات. فرض کنید f یک انتشار احاطه گر ۲-محدود باشد. اگر $w \in P_n$ وجود داشته باشد که $f(w) = ۲$، آنگاه حداکثر ۵ رأس x موجودند که $d(x, w) \leq f(w)$. اگر این ۵ رأس به صورت شکل

(۱.۵) باشند، آنگاه $g_۱$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$g_۱(x) = \begin{cases} ۱ & x = v, x = z, \\ ۰ & otherwise. \end{cases}$$

در این صورت $g_۱$ یک انتشار احاطه گر ۲-محدود برای P_n است. با ادامه روند فوق به تابع g_k می رسیم که برای هر x، $g_k(x) \neq ۲$ و $\sigma(g_k) = \gamma_{۲b}(P_n)$. در این صورت $\{x \mid g_k(x) = ۱\}$ یک مجموعه احاطه گر برای P_n است. در نتیجه $\gamma(P_n) \leq \gamma_{۲b}(P_n)$. حال بنا به لم ۲.۲.۵ داریم، $\gamma(P_n) = \gamma_{۲b}(P_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$. به صورت مشابه ثابت می شود $\gamma(C_n) = \gamma_{۲b}(C_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$. □

گزاره ۱۳.۲.۵ . اگر T یک درخت با زیر درخت T' باشد، $\gamma_{۲b}(T') \leq \gamma_{۲b}(T)$.

اثبات. چون در درخت ها دو رأس فقط توسط یک یال با هم مجاور می باشند. پس اگر بخواهیم زیر درختی از یک درخت را در نظر بگیریم، با حذف هر یال رأس مربوط به آن نیز حذف می شود. در نتیجه می توانیم با اختصاص دادن اعداد کمتری به رأس ها نسبت به کل گراف زیر گراف را احاطه کرد. پس $\gamma_{۲b}(T') \leq \gamma_{۲b}(T)$. □

لم ۱۴.۲.۵ . اگر T یک درخت باشد و درخت T' با اتصال یک برگ جدید به رأس پشتیبان T بدست آمده باشد، آنگاه $\gamma_{۲b}(T') = \gamma_{۲b}(T)$.

اثبات. از گزاره ۱۳.۲.۵، داریم $\gamma_{۲b}(T') \geq \gamma_{۲b}(T)$. در میان همه انتشارهای احاطه گر ۲-محدود روی T، فرض کنید f انتشاری باشد که V_f^+ کمترین تعداد برگ ها را داشته باشد. فرض کنید v یک برگ T باشد و $v \in V_f^+$. فرض کنید u رأس پشتیبان v باشد. انتشار زیر را روی T تعریف می کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} ۰ & if\ x = v, \\ f(u) + f(v) & if\ x = u, \\ f(x) & otherwise. \end{cases}$$

در این صورت g یک $\gamma_{۲b}$ انتشار با برگ های کمتری نسبت به انتشار f می باشد، که یک تناقض است. بنابراین V_f^+ شامل هیچ برگی از T نیست، پس V_f^+ شامل همه رأس های پشتیبان است. در نتیجه f همه رأس های T' را به خوبی می پوشاند، و $\gamma_{۲b}(T') \leq \gamma_{۲b}(T)$. □

مراجع

[1] Abay-Asmerom G. and Hammack R. (2005) "Centers of tensor products of graphs" *Ars Combin. 74, 201-211.*

[2] Bollobus B. and Cocakayne E.J. (1979) "Graph-theoretice parameters domination" *independence and irredundance. J. Graph theory, 3:241-249.* 64

[3] Bresar B. and Spacapan S. (2006) "Broadcast domination of products of graph" *Smetanova 17, 2000 Maribor, Slovenia.* 86

[4] Dunbar J.E, Erwin D.J, Haynes T.W, Hedetniemi S.M. and Hedetniemi S.T. (2006) "Broadcasts in graphs" *Discrete Appl. Math 154,59-75.* 26, 29, 69, 71, 73, 85, 88

[5] Erwin D.J. "Broadcast domination and broadcast independence" *Preprint.* 45

[6] Erwin D.J. (2001) "Cost domination in graphs" *Ph.D. Dissertation, Western Michigan University.* 14, 15, 16, 17, 29

[7] Erwin D.J. (2004) "Dominating broadcasts in graphs" *Bull. Inst. Combin. Appl. 42, 89-105.* 14, 15, 24, 47, 50, 51, 53, 70, 72

[8] Hartnell B. and Rall D.F. (2004) "On dominating the Cartesian product of of a graph and K_2" *Discuss. Math. Graph Theory 24, 389-402.*

[9] Heynes T. W, Hedetniemi S.T. and Slater P.J. (1998) "Fundamentals of domination in graphs" *Marcel Dekker, New York.* 11

[10] Henning M.A, Oellermann O.R. and Swart H.C. (1991) "Bounds on distance domination parameters" *J. Combin, Inform. System. Sci. 16:11-18.* 61

[11] Henning M.A, Oellermann O.R. and Swart H.C. (1995) "Relating pairs of distance domination parameters" *J. Combin. Math. Combin. Comput. 18:233-244.* 64

[12] Jacobson M.S. and Kinch L.F. (1984) "On the domination number of products of graphs" *I, Ars Combin. 18, 33-44.* 40

[13] Nowakowski R. and Rall D.F. (1996) "Associative graph products and their independence, domination and coloring number" *Discuss. Math. Graph Theory 16, 53-79.* 69

[14] Ore O. (1962) "Theory of graphs" *Amer. Math. Soc. Publ, Proridence.* 61

[15] West, Douglas B. (2006). *Introduction to graph theory.* Second Edition. University of Illinois-Urbana. 2

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

f - ضروری	f-essential
f - همسایگی ویژه	private f-neighbor
احاطه گری	domination
احاطه گری فاصله ای	distance domination
القاء شدن	induce
انباشتگی	packing
انتشار	broadcast
انتشار احاطه گر	dominating broadcast
انتشار احاطه گر متراکم	condensed dominating broadcast
انتشار احاطه گر محدود	limited dominating broadcast
انتشار احاطه گر مستقل	independent dominating broadcast
انتشار انباشته	packing broadcast
انتشار مستقل	independent broadcast
انتشار مؤثر	efficient broadcast
برگ	leaf
چرخ	wheel
درجه	degree
درخت	tree
دور	cycle
رأس	vertex
رأس پشتیبان	support vertex
رده	class
زیر گراف	subgraph
ستاره	star
شعاع	radius
ضرب	product
ضرب دکارتی	cartesian product
ضرب قوی	strong product
ضرب مستقیم	direct product
عدد احاطه گری	domination number
فاصله	distance

diameter .... قطر
upper bound .... کران بالا
lower bound .... کران پائین
graph .... گراف
grid graph .... گراف شبکه ای
connected graph .... گراف همبند
complete graph .... گراف کامل
hamming graph .... گراف همینگ
eccentricity .... گریز از مرکز
walk .... گشت
condensed .... متراکم
adjacent .... مجاور
distinct .... مجزا
dominating set .... مجموعه احاطه‌گر
independent set .... مجموعه مستقل
limited .... محدود
periphery .... محیط
order .... مرتبه
path .... مسیر
complement .... مکمل
regular .... منتظم
efficient .... مؤثر
weight .... وزن
neighborhood .... همسایگی
open neighborhood .... همسایگی باز
closed neighborhood .... همسایگی بسته
edge .... یال

واژه نامه انگلیسی به فارسی

adjacent .... مجاور
broadcast .... انتشار
cartesian product .... ضرب دکارتی
class .... رده
closed neighborhood .... همسایگی بسته
complement .... مکمل
complete graph .... گراف کامل
condensed .... متراکم
condensed dominating broadcast .... انتشار احاطه گر متراکم
connected graph .... گراف همبند
cycle .... دور
degree .... درجه
diameter .... قطر
direct product .... ضرب مستقیم
distance .... فاصله
distance domination .... احاطه گری فاصله ای
distinct .... مجزا
dominating broadcast .... انتشار احاطه گر
dominating set .... مجموعه احاطه‌گر
domination .... احاطه گری
domination number .... عدد احاطه گری
eccentricity .... گریز از مرکز
edge .... یال
efficient .... مؤثر
efficient broadcast .... انتشار مؤثر
f-essential .... f - ضروری
graph .... گراف
grid graph .... گراف شبکه ای
hamming graph .... گراف همینگ
independent broadcast .... انتشار مستقل
independent dominating broadcast .... انتشار احاطه گر مستقل

independent set .... مجموعه مستقل
induce .... القاء شدن
leaf .... برگ
limited .... محدود
limited dominating broadcast .... انتشار احاطه گر محدود
lower bound .... کران پائین
neighborhood .... همسایگی
open neighborhood .... همسایگی باز
order .... مرتبه
packing .... انباشتگی
packing broadcast .... انتشار انباشته
path .... مسیر
periphery .... محیط
private f-neighbor .... f - همسایگی ویژه
product .... ضرب
radius .... شعاع
regular .... منتظم
star .... ستاره
strong product .... ضرب قوی
subgraph .... زیر گراف
support vertex .... رأس پشتیبان
tree .... درخت
upper bound .... کران بالا
vertex .... رأس
walk .... گشت
weight .... وزن
wheel .... چرخ