

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری آنالیز عددی

# روش‌های بدون شبکه برای حل عددی رده‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی قطعی و تصادفی

نگارنده: کمیل ایزدپناه

استاد راهنما  
دکتر علی مس فروش

استاد مشاور  
دکتر علیرضا ناظمی

مهر ۱۴۰۰



پیوست شماره ۲  
دانشکده : علوم ریاضی  
گروه : ریاضی کاربردی

رساله دکتری آقای کمیل ایزدپناه

به شماره دانشجویی: ۹۲۱۵۶۶۵

تحت عنوان: روش‌های بدون شبکه برای حل عددی رده‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی قطعی و تصادفی

در تاریخ ۱۴۰۰/۷/۲۷ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک رساله دکتری ارزیابی گردید و با درجه خوب مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی: دکتر علیرضا ناظمی		نام و نام خانوادگی: دکتر علی مس فروش

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی: دکتر سعید حیدر جعفری		نام و نام خانوادگی: دکتر مهدی قوتمند
			نام و نام خانوادگی: دکتر حجت احسنی طهرانی
			نام و نام خانوادگی: دکتر رضا پورقلی

تقدیم به:

پدر و مادرم، همسر عزیزم و فرزند دلبندم

## سپاس‌گزاری...

سپاس خداوند مهربان را که همیشه در تمام زندگی یاری‌گر من بوده و با نعمت‌های فراوان خودش بر من منت نهاده است. در آغاز از زحمات استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر علی مس‌فروش و استاد مشاور، جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از پدر و مادرم و به خصوص همسر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که بهترین پشتیبان من بوده‌اند سپاسگزارم و صمیمانه با تمام وجود دوستشان دارم.

از تمامی عزیزانی که به هر نحوی در این راه دشوار یاری‌گر من بوده‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم.

کمیل ایزدپناه

مهر ۱۴۰۰

## تعهد نامه

اینجانب کمیل ایزدپناه دانشجوی دکتری روزانه رشته ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان روش‌های بدون شبکه برای حل عددی رده‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی قطعی و تصادفی، تحت راهنمایی علی مس فروش متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

کمیل ایزدپناه

مهر ۱۴۰۰

### مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

در رساله موجود معادله تصادفی موج غیرخطی با استفاده از روش توابع پایه‌ای شعاعی حل شده است. ابتدا معادله تصادفی موج را با استفاده از درونیایی توابع پایه‌ای شعاعی گسسته سازی مکانی کرده و از روش انتگرال گیر زمانی برای گسسته سازی زمانی معادله بهره می‌بریم تا روش تکراری صریحی را برای حل عددی معادله تصادفی موج معرفی کنیم. با ارائه چند مثال به بررسی روش تکراری معرفی شده پرداخته شده است. همچنین معادله تصادفی بیضوی با استفاده از روش بدون المان گالرکین مبتنی بر کمترین مربعات متحرک درونیاب حل شده است. ابتدا فرم ضعیف گالرکین معادله تصادفی بیضوی را نوشته و از توابع شکل تقریب کمترین مربعات متحرک درونیاب استفاده شده است. آنالیز خطای روش ارائه شده را انجام داده و با ارائه چند مثال درستی آنالیز خطا را بررسی می‌کنیم. در نهایت یک ایده جدید برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روش بدون المان گالرکین را معرفی کرده و آنالیز خطای آن را با ارائه چند مثال، مورد بررسی قرار داده‌ایم. در این ایده جدید شرایط مرزی اساسی در تقریب کمترین مربعات متحرک اعمال شده و سپس از تقریب حاصل در روش بدون المان گالرکین استفاده شده است.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی قطعی و تصادفی، روش توابع پایه‌ای شعاعی، روش کمترین مربعات متحرک، روش کمترین مربعات متحرک درونیاب و روش بدون المان گالرکین

## لیست مقالات مستخرج از رساله

1. Mesforoush, Ali and Izadpanah, Komeil, (1396). RBF MESHLESS METHOD FOR LINEAR STOCHASTIC WAVE EQUATION. The second national conference Math: Advanced Engineering Mathematics with techniques, Urmia, <https://civilica.com/doc/621903>

2. Izadpanah, K., Mesforoush, A., Nazemi, A. (2019). Stabilized IMLS based element free Galerkin method for stochastic elliptic partial differential equations. Journal of Mathematical Modeling, 7(4), 469-496. doi: 10.22124/jmm.2019.14278.1314

3. Izadpanah, K., Mesforoush, A. (2021). A new approach to apply the essential boundary conditions in element free Galerkin method for elliptic partial differential equations. Journal of New Researches in Mathematics, Article in press

# فهرست مطالب

ک	فهرست تصاویر
م	فهرست جداول
س	پیشگفتار
۱	۱ تعاریف و مفاهیم اولیه
۱	۱.۱ فضاها و نرم‌های توابع
۲	۱.۱.۱ تقریب در فضاهاى پیش- هیلبرت (تقریب در نرم دو)
۳	۲.۱.۱ معادلات نرمال
۳	۳.۱.۱ دستگاه متعامد یکه
۴	۲.۱ فضای هار و قضیه مایرهوربر- کورتیس
۵	۳.۱ چند جمله‌ای‌های چند متغیره
۶	۴.۱ حسابان تصادفی
۶	۱.۴.۱ مقدمات احتمال
۹	۲.۴.۱ فرآیندهای تصادفی
۹	۵.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
۱۰	۶.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی
۱۵	۲ تقریب با روش‌های بدون شبکه
۱۵	۱.۲ مقدمه
۱۷	۲.۲ توابع پایه‌ای شعاعی
۱۹	۳.۲ روش تقریب کمترین مربعات متحرک
۲۲	۱.۳.۲ انتخاب تابع وزن
۲۵	۴.۲ روش تقریب کمترین مربعات متحرک درونیاب

۳۱	حل عددی معادله تصادفی موج غیر خطی با استفاده از روش توابع پایه‌ای شعاعی	۳
۳۱	..... مقدمه	۱.۳
۳۲	..... شرح روش پیشنهادی	۲.۳
۳۳	..... گسسته سازی مکانی معادله با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی	۱.۲.۳
۳۴	..... گسسته‌سازی زمانی به روش انتگرال گیر زمانی نمایی	۲.۲.۳
۳۶	..... نتایج عددی	۳.۳
۴۲	..... نتیجه گیری	۴.۳
۴۳	حل معادله دیفرانسیل تصادفی بیضوی با روش بدون المان گالرکین	۴
۴۳	..... مقدمه	۱.۴
۴۴	..... تقریب طیفی و آنالیز خطا	۲.۴
	..... آنالیز خطای روش بدون المان گالرکین درونیاب برای معادله تصادفی بیضوی	۳.۴
۴۶	.....	
۵۰	..... حل معادله بیضوی تصادفی با روش بدون المان گالرکین درونیاب	۴.۴
۵۲	..... نتایج عددی	۵.۴
۶۱	..... نتیجه گیری	۶.۴
۶۵	یک ایده جدید برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روش بدون المان گالرکین	۵
۶۵	..... مقدمه	۱.۵
	..... اعمال شرایط مرزی اساسی در روش بدون المان گالرکین برای حل معادلات	۲.۵
۶۶	..... با مشتقات جزئی تصادفی	
۶۸	..... آنالیز خطا	۳.۵
۷۲	..... نتایج عددی	۴.۵
۷۸	..... نتیجه گیری	۵.۵
۸۳		مراجع

# فهرست تصاویر

۱۲	نمودار جواب دقیق برای معادله موج یک‌بعدی در زمان $t = 1$ . . . . .	۱.۱
۱۲	نمودار جواب برای معادله موج یک‌بعدی تصادفی در زمان $t = 1$ . . . . .	۲.۱
	تفاوت روش بدون شبکه با روش عناصر متناهی در نحوه پخش نقاط و ایجاد	۱.۲
۱۶	شبکه . . . . .	
۱۶	دامنه‌های محلی . . . . .	۲.۲
۳۲	طول موج‌های مختلف و کاربردهای آن . . . . .	۱.۳
۳۷	خطای میانگین مربعات مکانی برای مدل خطی. . . . .	۲.۳
۳۸	خطای میانگین مربعات زمانی برای مدل خطی. . . . .	۳.۳
۳۹	خطای کمترین مربعات مکانی مدل اندرسون . . . . .	۴.۳
۴۰	خطای کمترین مربعات زمانی مدل اندرسون. . . . .	۵.۳
۴۰	خطای کمترین مربعات مکانی برای معادله ساین-گوردن. . . . .	۶.۳
۴۱	خطای کمترین مربعات زمانی برای معادله ساین-گوردن. . . . .	۷.۳
	میانگین ، خطای مطلق، انحراف معیار و خطای لگاریتمی مثال ۱.۵.۴ با	۱.۴
۵۵	. . . . . $q_x = 0.313$	
	میانگین، انحراف معیار، خطای مطلق و لگاریتمی جواب مثال ۲.۵.۴ با	۲.۴
۵۶	. . . . . $q_x = 0.313$	
	میانگین، انحراف معیار، خطای مطلق و لگاریتمی جواب مثال ۳.۵.۴ با	۳.۴
۶۰	. . . . . $q_x = 0.313$	
۶۱	میانگین، انحراف معیار و خطای مطلق جواب مثال ۴.۵.۴ با $q_x = 0.625$	۴.۴
۶۲	خطای لگاریتمی جواب مثال ۴.۵.۴ . . . . .	۵.۴
۶۲	میانگین، انحراف معیار و خطای مطلق مثال ۵.۵.۴ با $q_x = 0.625$ . . . . .	۶.۴
۶۳	خطای لگاریتمی مثال ۵.۵.۴ . . . . .	۷.۴
۷۳	نمودار نرم سوپرف خطا برای مثال ۱.۴.۵ . . . . .	۱.۵

۲.۵	جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا برای مثال ۱.۴.۵ با $q_x =$	۰/۰۰۱۹۵۳۱۲۵
۷۴	.....	
۳.۵	نمودار نرم سوبولف خطا برای مثال ۲.۴.۵	
۷۵	.....	
۴.۵	جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا برای مثال ۲.۴.۵ با $q_x =$	۰/۰۰۱۹۵۳۱۲۵
۷۶	.....	
۵.۵	نمودار نرم سوبولف خطا برای مثال ۳.۴.۵	
۷۸	.....	
۶.۵	جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا برای مثال ۳.۴.۵ با $q_x = ۰/۰۱۵۶$	
۷۹	.....	
۷.۵	نمودار نرم سوبولف خطا برای مثال ۴.۴.۵	
۸۱	.....	
۸.۵	جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا برای مثال ۴.۴.۵ با $q_x = ۰/۰۱۵۶$	
۸۲	.....	

# فهرست جداول

۱۸	.....	برخی از معروفترین توابع شعاعی	۱.۲
۳۳	.....	توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده وندلند	۱.۳
		مقادیر جواب روش $FDMSTM$ و روش $RBF$ با $\Delta t = 2^{-9}, \Delta x = 2^{-9}$	۲.۳
۳۷	.....	برای مثال ۱.۳.۳	۳.۳
		مقادیر جواب روش $FDMSTM$ و روش $RBF$ با $\Delta t = 2^{-9}, \Delta x = 2^{-9}$	۴.۳
۳۹	.....	برای مثال ۲.۳.۳	۴.۳
		مقادیر جواب روش $FDMSTM$ و روش $RBF$ با $\Delta t = 2^{-9}, \Delta x = 2^{-9}$	۴.۳
۴۱	.....	برای مثال ۳.۳.۳	
		جدول مقادیر میانگین تقریبی و دقیق جواب برای مثال ۱.۵.۴ با $q_x =$	۱.۴
۵۴	.....	.....	۰/۰۳۱۳
۵۴	.....	تخمین خطای بدست آمده روش ارائه شده برای مثال ۱.۵.۴	۲.۴
		جدول مقادیر میانگین تقریبی و دقیق جواب برای مثال ۲.۵.۴ با $q_x =$	۳.۴
۵۵	.....	.....	۰/۰۳۱۳
۵۶	.....	تخمین خطای بدست آمده روش ارائه شده برای مثال ۲.۵.۴	۴.۴
		جدول مقادیر میانگین تقریبی و دقیق جواب برای مثال ۳.۵.۴ با $q_x =$	۵.۴
۵۷	.....	.....	۰/۰۶۲۵
۵۷	.....	تخمین خطای بدست آمده روش ارائه شده برای مثال ۳.۵.۴	۶.۴
		جدول مقادیر میانگین تقریبی و دقیق جواب برای مثال ۴.۵.۴ با $q_x =$	۷.۴
۵۸	.....	.....	۰/۰۶۲۵
۵۹	.....	تخمین خطای بدست آمده روش ارائه شده برای مثال ۴.۵.۴	۸.۴
		جدول مقادیر میانگین تقریبی و دقیق جواب برای مثال ۴.۵.۴ با $q_x =$	۹.۴
۵۹	.....	.....	۰/۰۶۲۵
۶۰	.....	تخمین خطای بدست آمده روش ارائه شده برای مثال ۵.۵.۴	۱۰.۴
۷۲	.....	جدول مقادیر جواب تقریبی و دقیق برای مثال ۱.۴.۵ با $q_x = 0/001953125$	۱.۵

---

---

۷۵	جدول مقادیر جواب تقریبی و دقیق برای مثال ۲.۴.۵ با $q_x = 1953125/100000$	۲.۵
	جدول مقادیر میانگین تقریبی و دقیق جواب برای مثال ۳.۴.۵ با $q_x =$	۳.۵
۷۷	..... $15625/100000$ .....	
	جدول مقادیر میانگین تقریبی و دقیق جواب برای مثال ۴.۴.۵ با $q_x =$	۴.۵
۸۰	..... $15625/100000$ .....	

# پیشگفتار

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی قطعی و تصادفی در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌ها مانند صوت، گرما، جریان سیال و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرند، به همین دلیل در بسیاری از زمینه‌های علمی گوناگون مانند فیزیک، مکانیک و رشته‌های مختلف مهندسی گرفته تا زیست‌شناسی و پزشکی و یا زمینه‌های اقتصادی مانند ریاضیات مالی، اقتصاد، بورس و غیره مورد استفاده هستند. بنابراین به حل این نوع معادلات نیازمند هستیم. به طور کلی این نوع معادلات یا جواب تحلیلی دارند یا باید از روش‌های نیمه‌تحلیلی یا روش‌های عددی برای حل آنها بهره ببریم. از جمله روش‌های عددی برای حل این نوع معادلات می‌توان به روش‌های تفاضلات متناهی<sup>۱</sup>، عناصر متناهی<sup>۲</sup>، حجم محدود<sup>۳</sup>، روش‌های طیفی<sup>۴</sup>، روش‌های بدون شبکه<sup>۵</sup> و غیره اشاره کرد.

مفهوم تقریب، نقش بسیار مهمی در ریاضیات کاربردی بازی می‌کند. این طبیعی است که دنبال بهترین تقریب برای جواب این نوع معادلات باشیم. برای بدست آوردن جواب تقریبی، روش‌های بدون شبکه متفاوتی تا کنون معرفی شده‌اند از جمله روش‌های توابع پایه‌ای شعاعی<sup>۶</sup>، روش بدون المان گالرکین<sup>۷</sup>، تقریب کمترین مربعات متحرک<sup>۸</sup> و غیره. در این روش‌ها از شبکه‌بندی ناحیه به‌عنوان المان‌های متناهی استفاده نمی‌شود و به‌جای آن تقریب بر اساس مجموعه‌ای از نقاط که با کیفیت مناسب درون ناحیه پراکنده شده‌اند مشخص می‌شود. در این رساله، روش بدون شبکه از جمله توابع پایه‌ای شعاعی، روش بدون المان گالرکین و کمترین مربعات متحرک درونیاب را برای حل عددی رده‌ای از معادلات با مشتقات جزئی قطعی و تصادفی، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

این رساله شامل پنج فصل است. در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی از جمله فضاها و نرم‌های توابع، حسابان تصادفی و معادله‌های دیفرانسیل با مشتقات جزئی آورده شده است. در فصل دوم چگونگی تقریب با روش‌های بدون شبکه و به‌طور خاص روش توابع پایه‌ای شعاعی،

<sup>1</sup>Finite Difference Method

<sup>2</sup>Finite Element Method

<sup>3</sup>Finite Volume Method

<sup>4</sup>Spectral Methods

<sup>5</sup>Meshfree Methods

<sup>6</sup>Radial basis functions

<sup>7</sup>Element free Galekin method

<sup>8</sup>Moving least square

روش کمترین مربعات متحرک و کمترین مربعات متحرک درونیاب را بیان کرده‌ایم. در فصل سوم معادله موج تصادفی با روش توابع پایه‌ای شعاعی حل شده است. در فصل چهارم معادله بیضوی تصادفی با روش بدون المان گالرکین مبتنی بر کمترین مربعات متحرک درونیاب حل شده است. در فصل پنجم نیز یک ایده جدید برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روش بدون المان گالرکین را معرفی شده است.

# فصل ۱

## تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف اولیه و برخی مفاهیم مورد نیاز را به اختصار توضیح می‌دهیم. تعاریف این فصل از مراجع [۱، ۱۲، ۱۳، ۲۵] بیان شده است.

### ۱.۱ فضاها و نرم‌های توابع

همواره جواب‌های معادلات دیفرانسیل را در فضاهاى نرم‌دار در نظر گرفته می‌شود، زیرا برای اینکه بتوان همگرایی تقریب بدست آمده را بررسی کرد به چنین فضاهایی نیاز است. در این بخش به معرفی فضاها و نرم‌های مورد نیاز پرداخته شده است.

**تعریف ۱.۱.۱.**  $C^m[a, b]$  مجموعه‌ی توابعی است که مشتق مرتبه  $m$  آنها روی بازه  $[a, b]$  پیوسته باشد.

$C[a, b]$  یک فضای خطی است با بعد بی‌نهایت است. یکی از شناخته شده ترین نرم‌ها روی این فضا، نرم بینهایت است که به ازای هر  $f \in C[a, b]$  به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\|f\|_{\infty} := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

دوتایی  $(C[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$  یک فضای خطی نرم‌دار است.

**تعریف ۲.۱.۱.** فضای  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$  را باناخ گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

می‌توان ثابت کرد که  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  یک فضای باناخ است.

**تعریف ۳.۱.۱.** تابع پیوسته  $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  تابع وزن نامیده می‌شود اگر برای هر  $x \in (a, b)$  داشته باشیم،  $w(x) > 0$  و  $0 < \int_a^b w(x) dx < \infty$ .

**تعریف ۴.۱.۱.** نگاشت  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$  یک ضرب داخلی است اگر برای هر  $f, g, h \in \mathcal{V}$  و هر  $\alpha \in \mathbb{C}$  داشته باشیم

$$1. \langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$$

$$2. \langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$$

$$3. \langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$$

۴. برای هر  $f \neq 0$  داشته باشیم  $\langle f, f \rangle > 0$ .

می‌توان یک نرم روی  $\mathcal{V}$  به صورت زیر تعریف نمود،

$$\|f\| := \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

**لم ۱.۱.۱ (نامساوی کوشی-شوارتز).** برای هر  $f, g \in \mathcal{V}$  داریم،

$$(1.1) \quad |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

برهان. به [۱] رجوع کنید. □

**تعریف ۵.۱.۱.** فضای خطی نرم‌داری که نرم آن توسط ضرب داخلی القا شود، فضای پیش-هیلبرت<sup>۱</sup> نامیده می‌شود و اگر یک فضای باناخ باشد، به آن فضای هیلبرت گویند.

**مثال ۱.۱.۱.** فضای  $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_2)$  یک فضای پیش-هیلبرت است، زیرا  $\|\cdot\|_2$  توسط ضرب داخلی  $\langle x, y \rangle := \sum x_k \overline{y_k}$  که روی دو بردار  $x, y \in \mathbb{C}^d$  تعریف می‌شود، القا می‌شود. همچنین می‌توان ثابت نمود این فضا، یک فضای کامل است. بنابراین  $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_2)$  یک فضای هیلبرت است.

## ۱.۱.۱ تقریب در فضاهای پیش-هیلبرت (تقریب در نرم دو)

در این بخش به دنبال بهترین تقریب در یک زیر فضای خطی با بعد متناهی خواهیم بود. از این به بعد  $\mathcal{V}$  را یک فضای پیش-هیلبرت و  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  را یک زیر فضای خطی با بعد متناهی از آن در نظر گرفته و درصدد یافتن بهترین تقریب برای  $v \in \mathcal{V}$  در  $\mathcal{U}$  نسبت به  $\|v\|_2 := \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$  خواهیم بود.

<sup>1</sup>pre-Hilbert

**قضیه ۱.۱.۱.** فرض کنید  $\mathcal{V}$  یک فضای پیش-هیلبرت و  $\mathcal{U}$  یک زیرفضای با بعد متناهی از آن باشد.  $u^*$  بهترین تقریب  $v \in \mathcal{V}$  در  $\mathcal{U}$  نسبت به نرم دو است اگر و فقط اگر برای هر  $u \in \mathcal{U}$  داشته باشیم،

$$\langle v - u^*, u \rangle = 0.$$

□

برهان. به [۱] رجوع کنید.

## ۲.۱.۱ معادلات نرمال

فرض کنید  $\mathcal{U} := \text{span}\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$  و  $u^* = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$  بهترین تقریب  $v \in \mathcal{V}$  باشد. یافتن بهترین تقریب  $u^*$  معادل یافتن بردار بهینه  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$  است. طبق قضیه ۱.۱.۱ داریم،

$$\left\langle v - \sum_{j=0}^n \alpha_j u_j, u \right\rangle = 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}.$$

بنابراین

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \langle u_j, u_k \rangle = \langle v, u_k \rangle; \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

رابطه (۲.۱) یک دستگاه معادلات خطی تشکیل می‌دهد که به آن دستگاه معادلات نرمال گفته می‌شود. با توجه به اینکه بهترین تقریب موجود و یکتا می‌باشد، این دستگاه دارای جواب یکتا است. خطای تقریب با استفاده از قضیه ۱.۱.۱ بدست می‌آید.

**نتیجه ۱.۱.۱.** اگر  $u^*$  بهترین تقریب  $v$  باشد آنگاه

$$\|v - u^*\|_{\mathcal{V}} = \|v\|_{\mathcal{V}} - \|u^*\|_{\mathcal{V}} = \|v\|_{\mathcal{V}} - \sum_{j=0}^n \alpha_j \langle v, u_j \rangle. \quad (3.1)$$

□

برهان. به [۱] رجوع کنید.

## ۳.۱.۱ دستگاه متعامد یکه

اگر اعضای پایه  $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$  در خاصیت دلتای کرونکر صدق کنند یعنی

$$\langle u_k, u_j \rangle = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

آنگاه جواب دستگاه معادلات نرمال (۲.۱) به شکل

$$\alpha_k = \langle v, u_k \rangle, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

به دست می آید.

اگر برای هر  $k$  و  $j$  داشته باشیم،

$$\langle u_k, u_j \rangle = \begin{cases} c_k \neq 0, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

که  $c_k = \|u_k\|_V^2$ ، گوییم دستگاه متعامد است. اگر پایه متعامد باشد، ضرایب بهترین تقریب از رابطه،

$$\alpha_k = \frac{\langle v, u_k \rangle}{\|u_k\|_V^2}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

به دست می آیند. اگر هر  $u_k$  را بر  $\sqrt{c_k}$  تقسیم کنیم دستگاه متعامد یکه ایجاد می شود.

**تعریف ۶.۱.۱.** دستگاه متعامد یکه  $\{u_0, u_1, \dots\}$  را در  $V$  کامل گویند اگر برای هر  $v \in V$  یک دنباله  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  با  $v_n \in \text{span}\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$  وجود داشته باشد بطوریکه،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - v_n\|_V = 0.$$

کامل بودن یک دستگاه متعامد یکه، شرط لازم برای یافتن بهترین تقریب با دقت مورد نظر است.

**ملاحظه ۱.۱.۱.** گاهی کامل بودن دستگاه متعامد یکه به صورت دیگری نیز تعریف می شود، یک دستگاه متعامد یکه کامل است اگر عضو صفر تنها عضوی باشد که بر تمام اعضای دستگاه عمود است.

## ۲.۱ فضای هار و قضیه مایر هوبر - کورتیس

**تعریف ۱.۲.۱.** فرض کنیم  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ناحیه ای شامل حداقل  $n$  نقطه باشد. اگر  $V \subset C(\Omega)$  فضای برداری  $n$ -بعدی روی  $\Omega$  باشد،  $V$  یک فضای هار  $n$ -بعدی روی  $\Omega$  نامیده می شود، هرگاه برای هر مجموعه از نقاط متمایز دلخواه  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega$  و مقادیر دلخواه  $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbb{R}$  یک و تنها یک تابع  $s \in V$  وجود داشته باشد به طوریکه برای هر  $k = 1, 2, \dots, n$  رابطه  $s(x_k) = f_k$  برقرار باشد. به تابع  $s$  یک تابع درونیاب گفته می شود.

**قضیه ۱.۲.۱.** گزاره های زیر هم ارزند [۱۳].

۱.  $V$  یک فضای هار  $n$ -بعدی است.

۲. هر  $u \in V \setminus \{0\}$  حداکثر  $(n-1)$  ریشه دارد.

۳. برای هر مجموعه از نقاط  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega$  و هر پایه  $u_1, u_2, \dots, u_n$  از  $\mathcal{V}$  داریم:  
 $\det [u_j(x_k)] \neq 0$  که  $[u_j(x_k)]$  ماتریس واندرموند مبتنی بر پایه انتخاب شده روی نقاط فرض شده می‌باشد.

قضیه ۲.۲.۱ (مایر-هوربر-کورتیس). فرض کنید برای  $d \geq 2$ ، مجموعه  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  شامل حداقل یک نقطه درونی باشد آنگاه هیچ فضای هار  $n \geq 2$  بعدی روی  $\Omega$  وجود ندارد [۱۳].

## ۳.۱ چند جمله‌ای‌های چند متغیره

فضای چند جمله‌ای‌هایی از درجه حداکثر  $q$  روی  $\mathbb{R}^d$  را با نماد  $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$  نشان می‌دهیم. فرض کنیم،  $x \in \mathbb{R}^d$  یعنی  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  که در آن،  $x_j \in \mathbb{R}$  و  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$  یک چند اندیسه باشد در این صورت  $x^\alpha$  به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d, \quad \alpha! = \alpha_1! \times \alpha_2! \times \dots \times \alpha_d!,$$

و برای چند اندیسه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  گوئیم،  $\alpha < \beta$ ، اگر برای هر  $1 \leq i \leq d$  داشته باشیم،  $\alpha_i < \beta_i$  (رابطه  $\leq$ ، به همین شکل تعریف می‌شود). برای تابع به اندازه کافی هموار  $f$  نماد  $D^\alpha f$  نشان دهنده مشتقات جزئی  $f$  است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

بنابر قضیه مایر-هوربر-کورتیس فضای چند جمله‌ای‌های چند متغیره، نمی‌تواند یک فضای هار تشکیل دهند در حالی که در چند جمله‌ای‌های یک متغیره این امکان وجود دارد. بنابراین درونیایی روی هر مجموعه دلخواه از نقاط  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  که  $m = \dim \mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$  با چند جمله‌ای‌های فضای  $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$  امکان پذیر نیست. با این وجود درونیاب چند جمله‌ای نقش مهمی در ابعاد بالاتر دارد، اگر چه خود را محدود به مجموعه‌ای از نقاط کنیم که برای آنها درونیایی امکان پذیر باشد.

قضیه ۱.۳.۱. [۱۳]:

۱. تک جمله‌ای‌های  $x^\alpha$  که  $x \in \mathbb{R}^d$  و  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$  مستقل خطی اند.

$$\dim \mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d) = \binom{d+q}{d}. \quad ۲.$$

تعریف ۱.۳.۱. مجموعه  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$  با  $n \geq \dim \mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$  را  $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ -یکتا حل کننده<sup>۱</sup> گوئیم، اگر چند جمله‌ای صفر، تنها چند جمله‌ای  $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$  باشد که روی تمام  $x_j$  ها صفر است.

<sup>۱</sup>Unisolvent

اگر مجموعه نقاط توزیع شده در فضای جواب یکتا حل کننده باشند آنگاه درونیابی با استفاده از چندجمله‌ای‌ها امکان پذیر و یکتا می باشد.

**تعریف ۲.۳.۱.** ماتریس متقارن  $A$  معین مثبت نامیده می شود، هرگاه برای هر  $x \in \mathbb{R}^d$  نامساوی  $x^T A x > 0$  برقرار باشد و نیمه معین مثبت نامیده می شود هرگاه برای  $x \in \mathbb{R}^d$  نامساوی  $x^T A x \geq 0$  برقرار باشد.

**تعریف ۳.۳.۱.** ماتریس مربعی  $A$  را نامنفرد<sup>۱</sup> (غیرتکین) گوییم، اگر یک ماتریس  $B$  هم مرتبه با آن موجود باشد به طوری که،  $AB = BA = I$ . ماتریس مربعی  $A$  غیرتکین است اگر و فقط اگر  $\det A \neq 0$ .

## ۴.۱ حسابان تصادفی

در این بخش به تبیین مفاهیم احتمال و فرآیندهای تصادفی که برای شناخت معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی به آنها نیاز داریم، می پردازیم.

### ۱.۴.۱ مقدمات احتمال

**تعریف ۱.۴.۱.**  $M$  مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های فضای نمونه  $\Omega$  را یک  $\sigma$ -جبر گویند هرگاه:

$$1. \Omega \in M,$$

$$2. \text{ اگر } A \in M \text{ آنگاه } A^c \in M \text{ (متمم } A \text{ است)},$$

$$3. \text{ اگر } A_1, A_2, \dots \in M \text{ آنگاه } (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \in M.$$

**تعریف ۲.۴.۱.** فرض  $M$  یک  $\sigma$ -جبر روی فضای نمونه  $\Omega$  باشد،  $\mathcal{P}$  را یک تابع اندازه احتمال می گوئیم هرگاه

$$1. \mathcal{P} : M \rightarrow [0, 1],$$

$$2. \mathcal{P}(\Omega) = 1,$$

$$3. \mathcal{P}(A^c) = 1 - \mathcal{P}(A),$$

۴. اگر  $A_1, A_2, \dots$  پیشامدهای دو به دو مجزا باشند آنگاه:

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i).$$

<sup>1</sup>Nonsingular

**تعریف ۳.۴.۱.** سه تایی مرتب  $(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{P})$  را که در آن فضای نمونه،  $\mathcal{M}$  - $\sigma$  جبری شامل زیرمجموعه‌های  $\Omega$  و  $\mathcal{P}$  تابع اندازه احتمال است را یک فضای احتمال می‌نامیم.

**تعریف ۴.۴.۱.** فرض  $(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{P})$  یک فضای احتمال باشد تابع  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  را  $\mathcal{M}$ -اندازه‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر زیرمجموعه باز  $\mathbb{R}$  مثل  $O$  داشته باشیم؛

$$F^{-1}(O) = \{\omega \in \Omega : F(\omega) \in O\} \in \mathcal{M}.$$

**تعریف ۵.۴.۱.** فرض  $(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{P})$  یک فضای احتمال باشد، تابع  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  را یک متغیر تصادفی می‌نامیم هرگاه برای هر  $r \in \mathbb{R}$  داشته باشیم،

$$X^{-1}((-\infty, r]) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq r\} \in \mathcal{M}.$$

**تعریف ۶.۴.۱.** اگر  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  یک متغیر تصادفی باشد تابع  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  را تابع توزیع متناظر با متغیر تصادفی  $X$  می‌نامیم هرگاه،

$$F_X(x) = P((-\infty, x]) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**تعریف ۷.۴.۱.** فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{P})$  و متغیرهای تصادفی  $X_1, X_2, \dots, X_n$  روی این فضا را در نظر بگیرید، تابع  $F_{X_1, X_2, \dots, X_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  را که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, X_2(\omega) \leq x_2, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\},$$

را تابع توزیع توأم می‌نامیم و متغیرهای تصادفی را مستقل می‌نامیم هرگاه؛

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_n}(x_n).$$

**تعریف ۸.۴.۱.** تابع  $f_X$  را تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی  $X$  می‌نامیم هرگاه  $f_X$  تابعی نامنفی باشد و داشته باشیم،

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx,$$

بنابراین  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$  و اگر  $f_x$  تابعی پیوسته باشد داریم،

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

**تعریف ۹.۴.۱.** امید ریاضی متغیر تصادفی  $X$  در فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{P})$  به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathcal{P}\omega,$$

و اگر  $X$  تابعی پیوسته روی  $\mathbb{R}$  باشد،

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx,$$

که در آن  $f_X$  تابع چگالی احتمال است.

**تعریف ۱۰.۴.۱.**  $\sigma_X^2$  را واریانس متغیر تصادفی  $X$  نامیده که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\sigma_X^2 = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

اگر امید ریاضی را با  $E(X) = \mu$  نشان دهیم داریم،

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

و جذر واریانس را انحراف معیار متغیر تصادفی می‌نامیم،

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}.$$

**تعریف ۱۱.۴.۱.** برای دو متغیر تصادفی  $X_1, X_2$  کواریانس را با نماد  $Cov(X_1, X_2)$  نمایش می‌دهند که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$Cov(X_1, X_2) = E[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))] = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2).$$

**تعریف ۱۲.۴.۱.** متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  است یا به اختصار  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد،

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

**تعریف ۱۳.۴.۱.** (همگرایی با احتمال یک)

یک دنباله از متغیرهای تصادفی مانند  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  را با احتمال یک همگرا به  $X$  می‌نامیم هرگاه

$$\mathcal{P}\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0\right\} = 1.$$

**تعریف ۱۴.۴.۱.** (همگرایی در میانگین مربع)

فرض  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  دنباله متغیرهای تصادفی باشد که  $E(X_n^2)$  و  $E(X^2)$  متناهی هستند در این صورت دنباله  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  در میانگین مربع به  $X$  همگرا است هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[|X_n - X|^2\right] = 0.$$

**تعریف ۱۵.۴.۱.** (همگرایی در احتمال)

هرگاه برای هر  $\epsilon > 0$  داشته باشیم،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\} = 0,$$

می‌گوییم دنباله  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  همگرا به  $X$  در احتمال می‌باشد.

## ۲.۴.۱ فرآیندهای تصادفی

تعریف ۱۶.۴.۱. (فرآیند تصادفی)

مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی  $X(t, \omega)$  روی فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{P})$  را یک فرآیند تصادفی می‌نامیم که در آن  $t$  متغیر زمان است. برای هر  $t$  ثابت  $X(t, \cdot)$  یک متغیر تصادفی است و برای هر  $\omega$  ثابت  $X(\cdot, \omega)$  یک مسیر نمونه‌ای است.

تعریف ۱۷.۴.۱. (فرآیند وینر)

فرآیند تصادفی  $\{W(t) : t \geq 0\}$  را یک فرآیند وینر می‌نامیم هرگاه دارای شرایط زیر باشد:

$$1. W(0) = 0.$$

۲. نمونه‌های  $W(t) : t \geq 0$  مستقل از هم باشند. به عبارت دیگر برای هر افراز از بازه  $[0, T]$  مانند  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$  نمونه‌های

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}),$$

مستقل از هم باشند.

۳. نمونه‌های آن دارای توزیع گاوسی باشند یعنی برای هر  $t \geq s$ ،  $W(t) - W(s)$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $t - s$  باشد.

تعریف ۱۸.۴.۱. (اختلال سفید)

مشتق فرآیند وینر نسبت به زمان را اختلال سفید می‌نامیم،

$$\frac{dW(t)}{dt} = \xi(t) \rightarrow dW(t) = \xi(t) dt.$$

## ۵.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

تعریف ۱.۵.۱. فرض  $k$  یک عدد صحیح و  $\Omega$  فضای جواب باشد. عبارتی به شکل زیر

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad (x \in \Omega), \quad (5.1)$$

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه  $k$  نامیده می‌شود که،

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

داده شده و  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  تابع مجهول است [۱۲].

تعریف ۲.۵.۱. (شرایط اولیه)

شرایطی که مقادیر تابع یا مشتقات جزئی آن را در زمان شروع ( $t = 0$ ) مشخص می‌کند، یک شرط اولیه نامیده می‌شود.

### تعریف ۳.۵.۱. (شرایط مرزی)

شرایطی که مقادیر تابع یا مشتقات جزئی آن را در مرز ناحیه جواب مشخص می کند، شرط مرزی نامیده می شود.

**تعریف ۴.۵.۱.** معادله‌ای را خطی گویند که معادله نسبت به متغیر وابسته، متغیر مجهول و مشتقات آن خطی باشد. در غیر این صورت آن را غیرخطی گویند.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از نظر وابسته بودن یا نبودن به متغیر زمان تقسیم‌بندی می شوند. همچنین این معادله‌ها از نظر مرتبه مشتق موجود در آنها نیز به مرتبه اول، دوم، سوم و غیره تقسیم‌بندی می شوند. برای مثال معادلات پواسون و لاپلاس معادلات غیر وابسته به زمان هستند درحالی که معادلات گرما و موج معادلات وابسته به زمان هستند. البته تمام آنها از مرتبه دوم می باشند زیرا مشتقات حداکثر از مرتبه دو دارند.

### تعریف ۵.۵.۱. معادله مرتبه دوم

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \quad (6.1)$$

که در آن  $a, b, c, d, e, f$  ضرایب ثابت و  $g$  ممکن است تابعی از متغیر مستقل یا وابسته باشد را در نظر بگیرید. اگر علامت  $b^2 - 4ac$  منفی باشد معادله را بیضوی، اگر صفر باشد سهموی و اگر مثبت باشد هذلولوی می نامیم.

**مثال ۱.۵.۱.** معادله پواسون و لاپلاس از نوع معادلات بیضوی هستند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (7.1)$$

معادله گرما از نوع سهموی است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (8.1)$$

معادله موج از نوع هذلولوی می باشد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (9.1)$$

## ۶.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی

در این بخش می خواهیم به معرفی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی بپردازیم. این نوع معادلات از اضافه شدن یک عامل تصادفی به معادله دیفرانسیل قطعی<sup>۱</sup> به وجود می آید. برای معرفی و حل این نوع معادلات نیازمند معرفی انتگرال‌های تصادفی به خصوص انتگرال ایتو هستیم.

<sup>1</sup>deterministic

**تعریف ۱.۶.۱.** (انتگرال ایتو)

اگر  $X(t)$  یک فرآیند تصادفی باشد انتگرال  $\int_0^T X(t) dW(t)$  را یک انتگرال ایتو می‌نامند و به شکل زیر تعریف می‌کنند،

$$\int_0^T X(t) dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)).$$

انتگرال ایتو دارای خواص زیر است:

۱. (خطی بودن):

برای فرآیندهای تصادفی  $X(t), Y(t)$  و ثابت‌های  $a, b$  داریم؛

$$\int_0^T (aX(t) + bY(t)) dW(t) = a \int_0^T X(t) dW(t) + b \int_0^T Y(t) dW(t).$$

۲. (میانگین صفر)

امید ریاضی انتگرال ایتو برابر صفر است.

$$E \left( \int_0^T X(t) dW(t) \right) = 0.$$

۳. (ایزومتري)

$$E \left( \int_0^T X(t) dW(t) \right)^2 = \int_0^T E(X(t))^2 dW(t).$$

**تعریف ۲.۶.۱.** (معادله دیفرانسیل تصادفی)

معادله به شکل

$$dX(t) = a(t, X(t)) dt + b(t, X(t)) dW(t),$$

را یک معادله دیفرانسیل تصادفی می‌نامند. جواب این معادله یعنی  $X(t)$  یک فرآیند تصادفی می‌باشد. فرم انتگرالی این معادله به شکل زیر است،

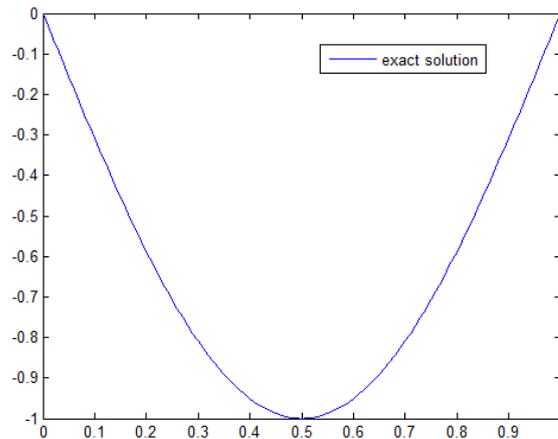
$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t b(s, X(s)) dW(s).$$

**تعریف ۳.۶.۱.** (معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی)

در بخش قبل با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی قطعی آشنا شدیم، اگر به یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی قطعی یک عامل تصادفی مانند اختلال سفید اضافه کنیم یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی حاصل می‌شود. گاهی عامل تصادفی به صورت ضرب با تابع مجهول یا مشتقات آن و گاهی به صورت جمع ظاهر می‌شود که در این رساله به دنبال حل معادلاتی هستیم که عامل تصادفی به صورت جمعی در معادله ظاهر شده باشد. برای مثال معادله موج یک‌بعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (10.1)$$

که در آن تابع مجهول است و نمودار یک جواب برای آن در زمان  $t = 1$  و  $0 \leq x \leq 1$  به شکل ۱.۱ است.

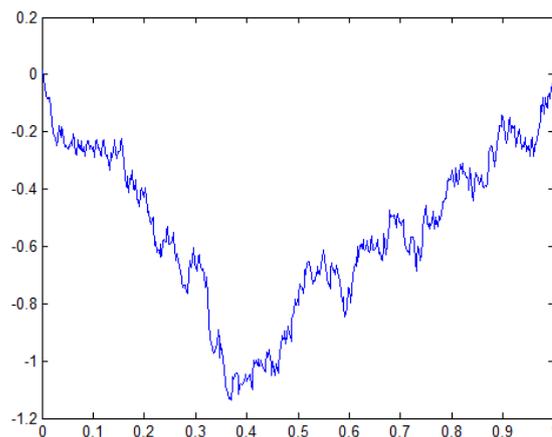


شکل ۱.۱: نمودار جواب دقیق برای معادله موج یک‌بعدی در زمان  $t = 1$ .

حال اگر در معادله (۱۰.۱) یک عامل تصادفی وجود داشته باشد معادله حاصل، معادله موج تصادفی است. برای مثال اگر یک اختلال سفید به معادله اضافه شود معادله به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \quad (11.1)$$

برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی، با هر بار محاسبه، جواب جدیدی به دست می‌آید. نمودار یکی از این جواب‌ها در  $t = 1$  و  $0 \leq x \leq 1$  به شکل (۲.۱) است.



شکل ۲.۱: نمودار جواب برای معادله موج یک‌بعدی تصادفی در زمان  $t = 1$ .

مشاهده می‌شود که نمودار جواب این نوع معادله بسیار نوسانی است و نمودار همواری ندارد که به علت تصادفی بودن آن است. در حالی که نمودار جواب معادله در حالت قطعی هموار می‌باشد. همچنین در حالت قطعی با هر بار حل معادله جواب یکسانی به دست می‌آید در حالی که در حالت تصادفی جواب‌های متفاوتی حاصل می‌شود. البته این به معنای یکتا نبودن جواب نیست بلکه

### معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی ۱۳

---

به خاطر ماهیت تصادفی آن است و اگر در هر بار حل معادله، یک نمونه تصادفی اعمال شود جواب به دست آمده یکسان خواهد بود.



## فصل ۲

# تقریب با روش‌های بدون شبکه

### ۱.۲ مقدمه

روش بدون شبکه، روشی برای ایجاد یک دستگاه معادلات جبری برای تمام دامنه جواب مساله بدون هیچ شبکه از پیش تعریف شده برای گسسته‌سازی دامنه می‌باشد. در این روش به‌جای ایجاد شبکه روی دامنه جواب مساله، نقاطی را درون و روی مرز دامنه جواب پخش می‌کنیم. این نقاط نیازی نیست که ارتباطی با یکدیگر داشته باشند [۳۲].  
**روند محاسبه جواب روش‌های بدون شبکه،**

۱. در نظر گرفتن ناحیه جواب،

۲. ایجاد نقاط (پخش کردن نقاط)،

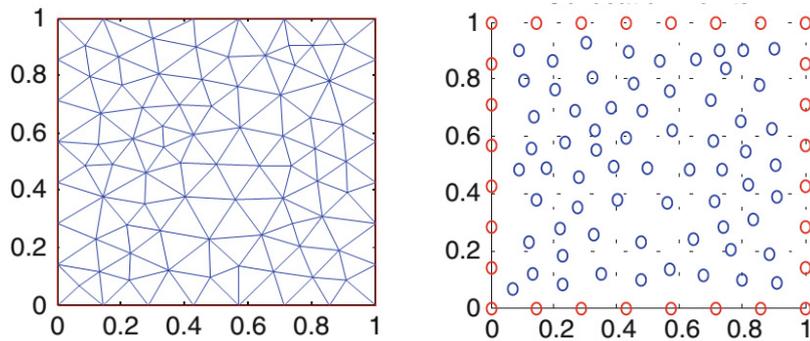
۳. ساختن توابع شکل،

۴. گسسته‌سازی معادله و ایجاد دستگاه معادلات،

۵. حل دستگاه،

۶. محاسبه جواب تقریبی.

در شکل‌های ۱.۲(ب) و ۱.۲(آ) می‌توانید تفاوت روش بدون شبکه با روش عناصر متناهی در نحوه پخش نقاط و ایجاد شبکه را مشاهده کنید.

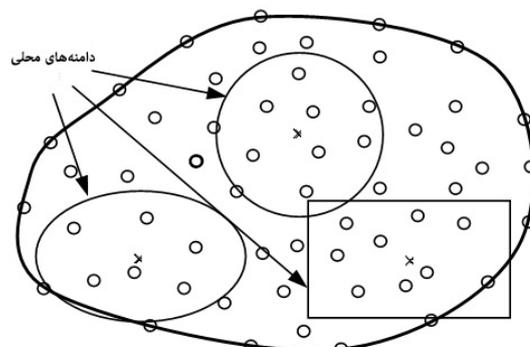


شکل ۱.۲: تفاوت روش بدون شبکه با روش عناصر متناهی در نحوه پخش نقاط و ایجاد شبکه (آ) نقاط پخش شده روش بدون شبکه (ب) شبکه روش عناصر متناهی

بعد از پخش نقاط باید درونیابی یا تقریب تابع جواب را انجام داد. تابع جواب را به صورت ترکیب خطی از توابع شکل می‌نویسیم. توابع شکل با توجه به روش انتخاب شده متفاوت خواهند بود. توابع شکل می‌توانند محلی<sup>۱</sup> یا سراسری<sup>۲</sup> باشند که در شکل ۲.۲ می‌توانید چند نمونه دامنه محلی را مشاهده کنید. با فرض محلی بودن تابع شکل، ترکیب خطی زیر را داریم:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i(x) = \Phi^T(x) U_s,$$

که در آن  $n$  تعداد نقاط درون دامنه محلی نقطه  $x$  است و  $u_i$  مقادیر تابع در نقطه  $x_i$  که مجهول هستند و  $U_s$  برداری شامل تمام  $u_i$  ها است. همچنین  $\phi_i(x)$  ها توابع شکل هستند که چون محلی فرض شده‌اند در خارج از دامنه محلی نقطه  $x$  صفر هستند. اکنون باید با اعمال درونیابی یا تقریب فوق در مساله یک دستگاه معادلات به دست آورد و با حل دستگاه ضرایب مجهول را محاسبه کرده و در نهایت جواب تقریبی را به دست آورد.



شکل ۲.۲: دامنه‌های محلی

<sup>1</sup>Local

<sup>2</sup>Global

روش‌های بدون شبکه را از جنبه‌های مختلف تقسیم‌بندی می‌کنند که بعضی از آنها عبارت‌اند از: تقسیم‌بندی بر اساس روند فرمول بندی (فرم ضعیف، هم‌محلی یا ترکیب هر دو)، تقسیم‌بندی بر اساس روش تقریب تابع (کمترین مربعات متحرک، نمایش انتگرالی، درونیابی نقطه‌ای و درونیابی‌های دیگر) و تقسیم‌بندی بر اساس نمایش دامنه. روش‌های بدون شبکه، تابع مفروض را برحسب مقادیر تابع در نقاط پراکنده تقریب می‌زنند. توزیع این نقاط می‌تواند دلخواه باشد، اما با توجه به قضیه مایر هوبر-کورتیس گاهی باید شرایطی روی نقاط حاکم باشد که تقریب یکتا شود. برتری روش‌های بدون شبکه نسبت به روش‌های عناصر متناهی این است که به شکل هندسی دامنه وابسته نیستند و تعمیم ساده‌تر و کم هزینه‌تری به ابعاد بالاتر دارند.

## ۲.۲ توابع پایه‌ای شعاعی

اگر  $S_f$  درونیاب تابع  $f$  باشد بطوریکه ترکیب خطی از توابع پایه‌ای  $B_k$  در نظر گرفته شود، یعنی:

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^n c_k B_k(x), \quad (1.2)$$

آنگاه مساله درونیابی به حل یک دستگاه معادلات خطی  $AC = F$  تبدیل می‌شود، که در آن  $F = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ ،  $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$  و  $A_{i,k} = B_k(x_i)$  دستگاه دارای جواب یکتا است اگر و فقط اگر ماتریس  $A$  معکوس پذیر باشد. اگر فضای جواب یک فضای هار باشد، ماتریس  $A$  معکوس پذیر است. در فضای یک بعدی وجود درونیاب تضمین شده است اما با توجه به قضیه ۲.۲.۱ می‌دانیم که در ابعاد بالاتر همیشه این ماتریس معکوس پذیر نیست اما توابع پایه‌ای شعاعی می‌توانند معکوس پذیری این ماتریس را تضمین کنند.

### تعریف ۱.۲.۲. (تابع شعاعی):

تابع  $\phi: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع شعاعی است هرگاه تابعی مانند  $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  موجود باشد بطوریکه  $\phi(x) = \varphi(\|x\|)$  که در آن  $\|\cdot\|$  یک نرم در فضای  $\mathbb{R}^s$  است.

### تعریف ۲.۲.۲. (توابع پایه‌ای شعاعی):

فرض کنید  $\varphi$  یک تابع شعاعی باشد آنگاه توابع شعاعی  $\{\phi_i\}_{i=1}^m$  که به صورت  $\phi_i(x) = \varphi(\|x - x_i\|)$  تعریف می‌شوند را توابع پایه‌ای شعاعی می‌نامند.  $\|\cdot\|$  نرم اقلیدسی است.

توابع شعاعی زیادی وجود دارند. برخی از آن‌ها در جدول ۱.۲ آورده شده‌اند [۴، ۲، ۶].  $r = \|x - x_k\|$  و  $c$  پارامتر شکل است.

جدول ۱.۲: برخی از معروف‌ترین توابع شعاعی

تعریف	نام تابع
$\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$	چندربعی
$\varphi(r) = (\sqrt{r^2 + c^2})^{-1}$	چندربعی معکوس
$\varphi(r) = (-1)^{k+1} r^{2k} \log(r)$	اسپلاین صفحه باریک
$\varphi(r) = r^{2k+1}$	اسپلاین مخروطی
$\varphi(r) = \exp(-cr^2)$	گاوسی

اگر در درونیابی (۱.۲) توابع پایه‌ای را از نوع توابع پایه‌ای شعاعی در نظر بگیریم داریم،

$$S_f(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi(\|x - x_j\|), \quad (2.2)$$

که با اعمال شرایط درونیابی یعنی  $S_f(x_i) = f(x_i), 1 \leq i \leq N$  خواهیم داشت  $A\lambda = F$  که در آن درایه‌های ماتریس درونیاب به شکل زیر تعریف می‌شوند،

$$A_{i,j} = \varphi(\|x_i - x_j\|), 1 \leq i, j \leq N,$$

$$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]^T, F = [f_1, f_2, \dots, f_N]^T.$$

اگر ماتریس درونیاب، یعنی ماتریس  $A$ ، معکوس‌پذیر باشد آنگاه درونیاب  $S_f$  موجود و یکتا خواهد بود. اگر ماتریس درونیاب معین مثبت باشد، شرایط عددی بهتری داریم، چون تمامی مقادیر ویژه آن مثبت هستند. همچنین ماتریس‌های معین مثبت معکوس‌پذیر هستند. بنابراین می‌توان توابع شعاعی را در نظر گرفت که منجر به ماتریس درونیاب معین مثبت می‌شوند.

**تعریف ۳.۲.۲.** تابع پیوسته  $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  را نیمه معین مثبت گویند هرگاه برای هر  $N \in \mathbb{N}$  و هر  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$  داشته باشیم،

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \bar{\lambda}_j \phi(x_i - x_j) \geq 0.$$

همچنین تابع  $\phi$  معین مثبت است هرگاه برای هر  $\lambda \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$  داشته باشیم،

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \bar{\lambda}_j \phi(x_i - x_j) > 0.$$

قضیه ۱.۲.۲. [۱۳] تابع پیوسته  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  معین مثبت است اگر و فقط اگر تابع  $\phi$  زوج باشد و برای هر  $N \in \mathbb{N}$  و هر  $\lambda \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  و نقاط دو به دو متمایز  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  داشته باشیم،

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \phi(x_i - x_j) > 0.$$

تعریف ۴.۲.۲. تابع  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  روی  $\mathbb{R}^d$  معین مثبت است هر گاه تابع نظیر آن یعنی  $\phi(x) = \varphi(\|x\|)$  برای هر  $x \in \mathbb{R}^d$  معین مثبت باشد.

لازم به ذکر است که یک تابع معین مثبت نامیده می‌شود اگر ماتریس‌های درونیاب نظیرش معین مثبت باشند و به همین ترتیب یک تابع نیمه معین مثبت نامیده می‌شود هرگاه ماتریس‌های درونیاب نظیر به آن نیمه معین مثبت باشند. بنابراین اگر تابع شعاعی مورد استفاده در درونیاب، یک تابع معین مثبت باشد، ماتریس درونیاب ایجاد شده معین مثبت خواهد بود که هم از جهت محاسبات عددی مناسب است و هم معکوس‌پذیری و در نتیجه وجود و یکتایی درونیاب تضمین می‌شود.

## ۳.۲ روش تقریب کمترین مربعات متحرک

روش تقریب کمترین مربعات متحرک و به اختصار <sup>۱</sup>MLS برای اولین بار در سال ۱۹۸۱ توسط سالکائوسکاس<sup>۲</sup> و لنکستر<sup>۳</sup> و با الهام از مقاله شپارد<sup>۴</sup> در سال ۱۹۶۸ [۱۴]، برای رویه‌های چندبعدی معرفی شد [۱۵]، پس از آن به‌طور گسترده برای حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال مورد استفاده قرار گرفت.

روش کمترین مربعات متحرک روی دسته‌ای از نقاط پراکنده روی دامنه مساله، بنا می‌شود. فرض کنیم  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  باشد، مجموعه‌ای از نقاط پراکنده مانند  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset \Omega$  را در نظر بگیرید، این نقاط می‌توانند به‌طور منظم یا تصادفی در دامنه مساله، پراکنده شوند. روش MLS برای تقریب مقدار تابع در هر نقطه  $x \in \Omega$ ، یک مساله کمترین مربعات گسسته وزن دار موضعی را حل می‌کند که همان مساله بهترین تقریبات در نرم دو است. در روش MLS برای هر نقطه گره، وزن  $w_j$  در نظر گرفته می‌شود که این وزن وابسته به نقطه‌ای است که می‌خواهیم مقدار تابع را در آن تقریب بزنیم. برای مثال، برای  $x_j \in \Omega$ ، وزن مرتبط با گره  $x_j$  در نقطه  $x$  را به‌صورت  $w_j(x)$  نمایش داده می‌شود (یعنی همان وزن متحرک). حال فرض می‌کنیم  $\{u_j\}_{j=1}^N$  مقادیر تابع  $u$  در نقاط  $x_j$  داده شده باشد. می‌خواهیم  $u(x)$  را در فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه  $q$  ( $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ ) تقریب بزنیم ( $q \ll N$ ).

مجموعه  $\mathcal{P} = \{p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)\}$  به‌عنوان پایه‌ای برای فضای  $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$  در نظر بگیرید.

<sup>۱</sup>Moving Least Square

<sup>۲</sup>Salkauskas

<sup>۳</sup>Lancaster

<sup>۴</sup>Shepard

تقریب به روش کمترین مربعات متحرک  $u$  را در هر نقطه دلخواه  $\mathbf{x} \in \Omega$ ، با نماد  $u^h(\mathbf{x})$  نشان می‌دهند و تقریب  $u^h(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$  از تابع  $u$  به صورت رابطه (۳.۲) در نظر گرفته می‌شود،

$$u^h(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^m a_k(\mathbf{x}) p_k(\mathbf{x}), \quad (3.2)$$

شکل ماتریسی رابطه (۳.۲) برای هر  $\mathbf{x} \in \Omega$  به صورت (۴.۲) بیان می‌شود،

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (4.2)$$

که در آن، بردار ضرایب بوده و به صورت زیر نمایش داده می‌شود،

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}) \quad a_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad a_m(\mathbf{x})]^T,$$

و  $\mathbf{P}^T(\mathbf{x})$ ، بردار پایه به شکل زیر می‌باشد،

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}) \quad p_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad p_m(\mathbf{x})].$$

بردار ضرایب  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  باید به گونه‌ای مشخص شود که  $u^h(\mathbf{x})$  بهترین تقریب تابع  $u(\mathbf{x})$  نسبت به نرم مربعی گسسته وزن دار از بین اعضای  $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$  باشد. به این منظور کافی است ضرایب  $a_j(\mathbf{x})$  را طوری بیابیم که به ازای آن تابع  $J(\mathbf{x})$  که به شکل (۵.۲) تعریف شده است، کمینه شود.

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n w_j(\mathbf{x}) (\mathbf{P}^T(\mathbf{x}_j) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_j)^2, \quad (5.2)$$

که در آن وزن مرتبط با گره  $j$ ام و  $n$  تعداد گره‌هایی در  $\Omega$  است به طوری که  $w_j(\mathbf{x}) > 0$ . رابطه (۵.۲) را می‌توان به شکل ماتریسی (۶.۲) نوشت.

$$J(\mathbf{x}) = [\mathbf{P}\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}]^T \mathbf{W} [\mathbf{P}\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}], \quad (6.2)$$

که در آن،

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{n \times m}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2(\mathbf{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix},$$

برای تعیین ضرایب  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  که به ازای آن  $J(\mathbf{x})$  کمینه شود باید  $\nabla_{\mathbf{a}} J = 0$  باشد، به این معنا که

$$P^T \mathbf{W} (\mathbf{P}\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}) = 0,$$

و این منجر به رابطه (۷.۲) می‌گردد.

$$P^T \mathbf{W} \mathbf{P} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = P^T \mathbf{W} \mathbf{U}. \quad (7.2)$$

با فرض

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) := \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} = \sum_{j=1}^n w_j(\mathbf{x}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_j) \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_j),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) := \mathbf{P}^T \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{x}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_1) & w_2(\mathbf{x}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_2) & \cdots & w_n(\mathbf{x}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix},$$

رابطه (۷.۲) به صورت (۸.۲) نوشته می‌شود که در آن ماتریس  $\mathbf{A}_{m \times m}$  ماتریس لحظه نامیده می‌شود.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}. \quad (۸.۲)$$

تقریب MLS زمانی خوش تعریف است که ماتریس  $\mathbf{A}$  نامنفرد باشد یا به طور معادل ماتریس  $\mathbf{P}$  دارای رتبه کامل ستونی از مرتبه  $m$  باشد. بنابر رابطه (۸.۲) داریم،

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}, \quad (۹.۲)$$

با جایگذاری (۹.۲) در (۴.۲) برای هر  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  داریم،

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x}) \mathbf{U} = \sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{x}) u_j, \quad (۱۰.۲)$$

که در آن،

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad (۱۱.۲)$$

که در آن،  $\Phi^T(\mathbf{x}) = [\phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \phi_n(\mathbf{x})]$  با توجه به (۱۱.۲) و تعریف  $\Phi^T(\mathbf{x})$  هر عنصر  $\Phi^T(\mathbf{x})$  به صورت (۱۲.۲) قابل نمایش است.

$$\phi_j(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) \left[ \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right]_{kj}, \quad (۱۲.۲)$$

که  $\phi_j(\mathbf{x})$  ها، توابع شکل<sup>۱</sup> تقریب MLS متناظر با گره  $\mathbf{x}_j$  نامیده می‌شوند. اگر برای  $j = 1, 2, \dots, n$  داشته باشیم،  $w_j(\mathbf{x}) \in C^r(\Omega)$  و برای  $k = 1, 2, \dots, m$  داشته باشیم،  $p_k(\mathbf{x}) \in C^s(\Omega)$  آنگاه می‌توان ثابت کرد که،  $\phi_j(\mathbf{x}) \in C^t$  که در آن  $t$  مینیمم  $r$  و  $s$  است. [۲۶]. مشتق جزئی توابع شکل  $\phi_j(\mathbf{x})$  به صورت زیر به دست می‌آید [۲۷].

$$\phi_{j,k}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \left[ p_{i,k} \left( \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right)_{ij} + p_i \left( \mathbf{A}_{,k}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_{,k}(\mathbf{x}) \right)_{ij} \right], \quad (۱۳.۲)$$

که در آن،  $\mathbf{A}_{,k}^{-1} = \left( \mathbf{A}^{-1} \right)_{,k}$  مشتق معکوس  $\mathbf{A}$  نسبت به  $x_k$  می‌باشد که به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\mathbf{A}_{,k}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,k} \mathbf{A}^{-1}, \quad (۱۴.۲)$$

<sup>۱</sup>Shape Functions

که نماد کاما،  $((\cdot), k)$  بیانگر،  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k}$  است. یک نوع از توابع وزنی که در تقریب MLS مورد استفاده قرار می‌گیرد، تابع وزنی گاوس<sup>۱</sup> می‌باشد که به شکل زیر تعریف می‌شود،

$$w_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-\left(\frac{d_j}{\alpha}\right)^2\right) - \exp\left(-\left(\frac{h_j}{\alpha}\right)^2\right)}{1 - \exp\left(-\left(\frac{h_j}{\alpha}\right)^2\right)}, & 0 \leq d_j \leq h_j, \\ 0, & d_j > h_j, \end{cases} \quad (15.2)$$

که در آن،  $d_j = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$  (فاصله اقلیدسی بین  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{x}_j$ )،  $\alpha$  یک پارامتر آزاد است که ثابت کنترل ساختار تابع وزن  $w_j$  بوده و  $h_j$  اندازه دامنه پشتیبان<sup>۲</sup> متناظر با گره  $\mathbf{x}_j$  می‌باشد. این تابع در رده‌ی  $C^\infty$  است.

### ۱.۳.۲ انتخاب تابع وزن

هموار بودن  $\phi_j(\mathbf{x})$ ها که توابع شکل MLS می‌باشند و پیرو آن همواری  $u^h(\mathbf{x})$ ، به هموار بودن توابع پایه و تابع وزن وابسته هستند. بنابراین توابع وزن نقش مهمی در تقریب کمترین مربعات متحرک دارند. از این رو تابع وزن طوری انتخاب می‌شود که هر چه از نقطه  $\mathbf{x}$  (نقطه تقریب) دورتر شویم، وزن نقاط کمتر و کمتر شوند و وزن نقاطی که از یک فاصله معین دورتر هستند، صفر شود و برای تقریب تابع در نقطه  $\mathbf{x}$  بکار گرفته نشوند. به این منظور، فرض می‌کنیم  $\Omega$  ناحیه باز کراندار در  $\mathbb{R}^d$  و  $\bar{\Omega} \subset X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$  مجموعه نقاط پراکنده‌ای باشد. حال برای هر یک از نقاط پراکنده  $\mathbf{x}_j$ ، گوی  $\Lambda_j$  به مرکز  $\mathbf{x}_j$  را در نظر بگیرید بطوریکه،

$$\bar{\Omega} \subset \bigcup_{j=1}^N \Lambda_j,$$

و شعاع  $\Lambda_j$  به شکل  $h_j = \max_{\mathbf{x} \in \partial \Lambda_j} \{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|\}$  تعریف می‌شود. در این صورت  $\mathcal{I}_N := \{\Lambda_j\}_{j=1}^N$  یک پوشش باز متناهی از  $\bar{\Omega}$  نامیده می‌شود.

**تعریف ۱.۳.۲.** رده‌ای از توابع  $\mathcal{W} := \{w_j\}_{j=1}^N$  یک افزاز از توابع واحد<sup>۳</sup> برای پوشش باز  $\mathcal{I}_N$  نامیده می‌شود، هرگاه دارای خواص زیر باشد،

$$s = \infty \text{ یا } s > 0, w_j \in C^s(\mathbb{R}^d) \quad .1$$

$$\text{supp}(w_j) \subseteq \bar{\Lambda}_j \quad .2$$

<sup>1</sup>Gaussian Weight Function

<sup>2</sup>Support Domain

<sup>3</sup>Partition Of Unity Subordinated

$$w_j(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Lambda_j \quad ۳.$$

$$\sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \quad ۴.$$

برای ساخت یک افراز از توابع واحد، روش‌های گوناگونی وجود دارد، یک روش معمول استفاده از تابع وزن انتقال - پایا<sup>۱</sup> می‌باشد یعنی برای تابع یک‌متغیره،  $\phi: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  می‌توان قرار داد،

$$w(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) = \phi(r), \quad r = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_2}{\delta},$$

که  $\delta$  پارامتر مقیاس و  $\phi$  تابع نزولی پیوسته‌ای است که روی بازه  $[0, 1]$  مثبت و خارج آن صفر می‌باشد. بنابراین برای نقاط  $\mathbf{x}$  که فاصله اقلیدسی آنها از  $\mathbf{x}_j$  بیشتر از  $\delta$  باشد مقدار  $w(\mathbf{x}_j, \mathbf{x})$  برابر صفر است. از این رو برای هر نقطه  $\mathbf{x}$ ، فقط اندیس‌های  $I(\mathbf{x}) = \{j : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_2 \leq \delta\}$  برای تقریب تابع در  $\mathbf{x}$ ، فعال هستند.

از جمله توابع وزنی که در تقریب MLS مورد استفاده هستند، توابع وزن گاوسی (۱۵.۲) و توابع اسپلاینی می‌باشند که به صورت (۱۶.۲) نمایش داده می‌شوند [۳۲].

$$w_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{d_j}{\delta}\right)^2 + 8 \left(\frac{d_j}{\delta}\right)^3 - 3 \left(\frac{d_j}{\delta}\right)^4, & 0 \leq d_j \leq \delta, \\ 0, & d_j > \delta, \end{cases} \quad (۱۶.۲)$$

که این توابع در رده همواری  $C^2$  هستند.

لم ۱.۳.۲. اگر  $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  یک مجموعه  $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$  - یکتا حل کننده باشد و

$$\{p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})\}$$

پایه‌ای برای  $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$  باشد آنگاه ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix},$$

از رتبه کامل<sup>۲</sup> است [۱۳].

با توجه به روند تقریب کمترین مربعات متحرک، شرط خوش تعریف بودن روش MLS این است که ماتریس لحظه، یعنی  $A(\mathbf{x})$ ، معکوس پذیر باشد.

<sup>۱</sup>Translation-Invariant Weight Function

<sup>۲</sup>Full Rank

**قضیه ۱.۳.۲.** شرط لازم و کافی برای معکوس‌پذیری  $A(\mathbf{x})$  این است که مجموعه

$$\{\mathbf{x}_j \in X : j \in I(\mathbf{x})\},$$

$\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$  – یکتا حل‌کننده باشد [۱۳].

برای اینکه  $\{\mathbf{x}_j \in X : j \in I(\mathbf{x})\}$  یک مجموعه  $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$  – یکتا حل‌کننده باشد لازم است حداقل شامل  $m$  نقطه باشد (به اندازه بعد  $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ ). اما این تنها یک شرط لازم است و کافی نیست. بنابراین برای هر  $\mathbf{x}$  باید  $\delta$  را آنقدر بزرگ اختیار کرد که این تعداد نقطه لازم در محل تابع وزن قرار گیرد. به همین خاطر معمولاً  $\delta$  ضریبی از ماکزیمم فاصله نقاط در نظر گرفته می‌شود. فرض کنیم  $h = h_{X,\Omega}$  شعاع بزرگترین گویی باشد که بتوان آن را طوری درون ناحیه قرار داد که شامل هیچ نقطه  $\mathbf{x}_j$  نباشد. به عبارتی،

$$h = h_{X,\Omega} := \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \min_{1 \leq j \leq N} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_2,$$

و آن را اندازه تراکم  $X$  می‌گوییم. در این صورت معمولاً قرار می‌دهیم  $\delta = ch$  و ضریب  $c$  را طوری تعیین می‌کنیم که حداقل  $m$  نقطه در محل  $\omega$  (تابع وزن) قرار گیرد.

**تعریف ۲.۳.۲.** برای مجموعه نقاط پراکنده  $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ ، فاصله انفصال<sup>۲</sup> را با نماد  $q_X$  نشان می‌دهند که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$q_X := \frac{1}{N} \min_{i \neq j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2.$$

همچنین مجموعه  $X$  را شبه-یکنواخت<sup>۳</sup> نسبت به ثابت  $c$  می‌نامیم اگر،

$$q_X \leq h_{X,\Omega} \leq cq_X.$$

**ملاحظه ۱.۳.۲.** مرتبه همگرایی تقریب MLS به کیفیت پراکندگی نقاط  $\mathbf{x}_j$  و همچنین به درجه چندجمله‌ای‌های پایه، یعنی  $q$  بستگی دارد. اگر چه لزومی ندارد نقاط  $X$  یکنواخت باشند، اما بهتر است حداقل شبه-یکنواخت باشند.

در بحث نظری، به دست آوردن شرط یکتا حل‌کنندگی برای یک ناحیه کلی  $\Omega$  دور از دسترس است، از این رو باید خود را به ناحیه‌هایی که در شرط مخروط داخلی صدق کنند، محدود کرد.

**تعریف ۳.۳.۲.** مجموعه  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  دارای شرایط مخروط داخلی<sup>۴</sup> نامیده می‌شود، اگر زاویه  $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$  و شعاع  $r > 0$  یافت شود که برای هر  $\mathbf{x} \in \Omega$ ، بردار واحد  $\xi(\mathbf{x})$  موجود باشد به طوری که مخروط،

$$C(\mathbf{x}, \xi(\mathbf{x}), \theta, r) = \left\{ \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \|\mathbf{y}\|_2 = 1, \mathbf{y}^T \xi(\mathbf{x}) \geq \cos(\theta), \lambda \in [0, r] \right\},$$

<sup>1</sup>Fill Distance

<sup>2</sup>Separation Distance

<sup>3</sup>Quasi-Uniform

<sup>4</sup>Interior Cone Condition

در  $\Omega$  محاط شده باشد.

در حقیقت شرط یکتا حل کنندگی را روی مخروط به دست آورده و به یکتا حل کنندگی روی  $\Omega$  می‌رسیم. در این بین از این خاصیت استفاده می‌شود که خط واصل بین مرکز و هر نقطه دیگر درون مخروط، کاملاً درون آن قرار دارد. سپس چند جمله‌ای‌های چند متغیره را به چند جمله‌ای یک متغیره روی این خط کاهش داده و به کمک نامساوی مارکوف<sup>۱</sup> شرط یکتا حل کنندگی را بررسی می‌شود.

**قضیه ۲.۳.۲.** فرض کنید  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  مجموعه‌ای فشرده با شرایط مخروط داخلی با زاویه  $\theta$  و شعاع  $r$  باشد. همچنین فرض کنید که  $\Omega^*$  بستر  $\bigcup_{x \in \Omega} B(x, \tau h_0)$  و  $X$  یک مجموعه شبه-یکنواخت با اندازه تراکم  $h_{X, \Omega} \leq h_0$  باشد که در آن،

$$h_0 = \frac{r}{\tau}, \tau = \frac{16(1 + \sin \theta)^2 q^2}{3 \sin^2 \theta},$$

آنگاه ثابت  $c \geq 0$  وجود دارد به طوری که برای هر  $u \in C^{q+1}(\Omega^*)$  داریم،

$$\|u - u^h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ch_{X, \Omega}^{q+1} \max_{x \in \Omega^*} \|D^\alpha u(x)\|_{L^\infty(\Omega^*)}, \quad |\alpha| = q + 1,$$

یعنی اگر  $u$  به اندازه کافی هموار باشد مرتبه همگرایی  $O(h^{q+1})$  خواهد بود [۱۳].

به یاد داشته باشید که برای تقریب  $u$  در هر نقطه  $x$  باید یک دستگاه جداگانه حل شود که کاری پر هزینه است، اما بعد ماتریس  $A(x)$  برابر  $m$  که با تعداد اعضای پایه  $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$  برابر است. معمولاً در تقریب MLS یک پایه از چند جمله‌ای‌های از درجه پایین را استفاده می‌شود. یعنی بعد ماتریس  $A$  کوچک است و در تقریب MLS بجای حل یک دستگاه معادلات بزرگ (مانند روش توابع پایه شعاعی)، چندین دستگاه معادلات با بعد کوچک حل می‌شود که از لحاظ محاسباتی کاراتر است.

**ملاحظه ۲.۳.۲.** در تقریب به روش کمترین مربعات متحرک معمولاً، پایه  $\{x^\beta\}_{0 \leq \beta \leq q}$  برای  $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$  استفاده می‌شود. اما اگر از پایه انتقال یافته و مقیاس شده  $\left\{ \frac{(x-y)^\beta}{h^{|\beta|}} \right\}_{0 \leq \beta \leq q}$  استفاده شود، تقریب MLS پایدارتر است. لازم به ذکر است که این پایه در تشکیل ماتریس  $P$  کار می‌رود. بنابر این  $x_j$  بجای  $x$  و نقطه‌ای که قرار است در آن تقریب صورت پذیرد، بجای  $y$ ، قرار می‌گیرد. در [۳۳] تاثیر انتخاب این نوع پایه در ضریب وضعیت ماتریس  $A(x)$  و پایداری الگوریتم با جزئیات کامل بررسی شده است.

## ۴.۲ روش تقریب کمترین مربعات متحرک درونیاب

روش کمترین مربعات متحرک درونیاب توسط لنکستر و سالکائوسکاس ارائه شد [۱۵]. توابع شکل روش کمترین مربعات متحرک درونیاب بر خلاف روش کمترین مربعات متحرک در

<sup>۱</sup>Markov inequality

خاصیت دلتای کرونکر صدق می‌کنند، بنابراین با استفاده از این ویژگی می‌توان شرایط مرزی اساسی را در حل معادلات دیفرانسیل به صورت مستقیم اعمال کرد. فرض  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$  مجموعه‌ای از نقاط در دامنه کراندار  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  باشد که  $N$  تعداد نقاط است. پارامتر  $\rho_I$  شعاع دامنه تاثیر نقطه  $\mathbf{x}_I$ ، و  $\|\cdot\|$  نرم اقلیدسی را نشان می‌دهد. دامنه تاثیر نقطه  $\mathbf{x}_I$  به شکل  $\Omega_I = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| \leq \rho_I, \mathbf{x} \in \Omega\}$  تعریف می‌شود. فرض کنید  $\rho = \max_{\mathbf{x}_I \in \mathbf{X}} \{\rho_I\}$  باشد. برای نقطه داده شده  $\mathbf{x} \in \Omega$ ، مجموعه اندیس  $\tau_{\mathbf{x}}$  به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\tau_{\mathbf{x}} = \{I \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| \leq \rho_I, \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}.$$

فرض کنید  $u(\mathbf{x})$  تابعی از متغیر میدان در  $\Omega$  باشد. تابع تقریب  $u(\mathbf{x})$  با نماد  $u^h(\mathbf{x})$  نمایش داده می‌شود. به منظور اینکه تقریب  $u^h(\mathbf{x})$  در روش کمترین مربعات متحرک درونیاب در خاصیت درونیابی صدق کند، تابع وزن منفردی به شکل زیر را در نظر بگیرید،

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = \begin{cases} \left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_I}{\rho_I} \right\|^{-\alpha}, & \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| \leq \rho_I, \\ 0, & \text{سایر}, \end{cases} \quad (17.2)$$

که پارامتر  $\alpha$  یک عدد صحیح زوج است. ضرب داخلی را به صورت،

$$\langle f, g \rangle_{\mathbf{x}} = \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) f(\mathbf{x}_I) g(\mathbf{x}_I), \quad \forall f, g \in C^0(\Omega), \quad (18.2)$$

تعریف می‌کنیم که  $\mathbf{x}$  یک نقطه در  $\Omega$  را مشخص می‌کند. نرم متناظر در  $\mathbf{x}$  نیز به شکل زیر است،

$$\|f\|_{\mathbf{x}} = \left[ \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) f^2(\mathbf{x}_I) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (19.2)$$

فرض  $p_0(\mathbf{x}) \equiv 1, p_1(\mathbf{x}), \dots, p_{\bar{m}}(\mathbf{x})$  توابع پایه‌ای باشند که  $\bar{m} + 1$  تعداد توابع پایه‌ای را مشخص می‌کند. توابع پایه‌ای جدیدی را با استفاده از این توابع پایه‌ای می‌سازیم. ابتدا  $p_0(\mathbf{x})$  به شکل زیر نرمال می‌شود،

$$\tilde{p}_0(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\left[ \sum_{I \in \tau_{\bar{\mathbf{x}}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (20.2)$$

سپس توابع پایه‌ای جدید عمود بر  $\tilde{p}_0(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}})$  به صورت زیر ساخته می‌شوند،

$$\tilde{p}_i(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}) = p_i(\bar{\mathbf{x}}) - S p_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, \bar{m}. \quad (21.2)$$

که  $S p_i$  یک اپراتور خطی است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$S p_i(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) p_i(\mathbf{x}_I), \quad (22.2)$$

و

$$v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = \frac{w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)}{\sum_{J \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J)}. \quad (23.2)$$

تابع  $v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)$  دارای خاصیت‌های زیر است. [۱۵].

لم ۱.۴.۲. اگر از تابع وزن (۱۷.۲) استفاده شود، آنگاه  $v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) \in C^\infty(\bar{\Omega})$  و

$$v(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J) = \delta_{IJ}, \quad \forall I, J \in \tau_{\mathbf{x}}, \quad 1.$$

$$\sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad 2.$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) \leq 1, \quad \text{و} \quad v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_J, \quad J \neq I, \quad 3.$$

$$\frac{\partial v(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J)}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad \forall I, J \in \tau_{\mathbf{x}}. \quad 4.$$

برای بدست آوردن فرم تابع تقریب  $u^h(\mathbf{x})$  که در خاصیت درونیابی صدق کند، لنکستر و سالکائوسکاس [۱۵] تقریب محلی را به صورت زیر تعریف کردند،

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \tilde{p}_0(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}})a_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \tilde{p}_i(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}})a_i(\mathbf{x}), \quad (24.2)$$

که  $\bar{\mathbf{x}}$  یک نقطه در دامنه تاثیر  $\mathbf{x}$  است و  $a_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, \bar{m}$  ضرایب مجهول توابع پایه‌ای هستند. برای یک  $\mathbf{x}$  داده شده، تفاضل بین تابع تقریب محلی  $u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$  و تابع  $u(\bar{\mathbf{x}})$  با روش کمترین مربعات وزنی کمینه‌سازی می‌شود. به این منظور نرم  $L_2$  گسسته وزنی به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) \left[ u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) - u_I \right]^2, \quad (25.2)$$

که  $w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)$  تابع وزنی با محمل فشرده است که در (۱۷.۲) نمایش داده شده و  $\mathbf{x}_I$  برای هر  $I \in \tau_{\mathbf{x}}$  نقاطی هستند که  $\mathbf{x}$  در دامنه تاثیر آنها قرار دارد و  $u_I = u(\mathbf{x}_I)$  می‌باشد. با کمینه‌سازی نرم  $L_2$  گسسته وزنی نمایش داده شده در (۲۵.۲) داریم،

$$\langle u(\cdot) - u^h(\mathbf{x}, \cdot), \tilde{p}_0 \rangle_{\mathbf{x}} = 0, \quad (26.2)$$

$$\langle u(\cdot) - u^h(\mathbf{x}, \cdot), \tilde{p}_i \rangle_{\mathbf{x}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \bar{m}. \quad (27.2)$$

به دلیل تعامد، (۲۶.۲) و (۲۷.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$a_0(\mathbf{x}) = \langle u, \tilde{p}_0 \rangle_{\mathbf{x}}, \quad (28.2)$$

$$a_0(\mathbf{x}) \langle \tilde{p}_0, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^{\bar{m}} a_i(\mathbf{x}) \langle \tilde{p}_i, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}} = \langle u, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}}, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{m}. \quad (29.2)$$

با توجه به (۲۰.۲) و تعریف ضرب داخلی، داریم،

$$\tilde{p}_0(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}})a_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{[\sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)]^{\frac{1}{r}}} \langle u, \tilde{p}_0 \rangle_{\mathbf{x}} = \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) u_I = \mathcal{S}u. \quad (30.2)$$

بنابراین (۲۹.۲) به شکل زیر نوشته می‌شود،

$$\sum_{i=1}^{\bar{m}} a_i(\mathbf{x}) \langle \tilde{p}_i, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}} = \langle u - \mathcal{S}u, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}}, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{m}. \quad (31.2)$$

با توجه به لم زیر، (۳۱.۲) را می‌توان ساده کرد.

لم ۲.۴.۲. اگر از تابع وزن (۱۷.۲) استفاده شود، برای هر  $\mathbf{x} \in \Omega$  داریم،

$$\langle \mathcal{S}u, \tilde{p}_i \rangle_{\mathbf{x}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \bar{m}. \quad (32.2)$$

□

برهان. برای مشاهده اثبات به [۳۷] رجوع کنید.

با توجه به لم (۲.۴.۲)، (۳۱.۲) را می‌توان به شکل زیر ساده کرد،

$$\sum_{i=1}^{\bar{m}} a_i(\mathbf{x}) \langle \tilde{p}_i, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}} = \langle u, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}}, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{m}. \quad (33.2)$$

(۳۳.۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت،

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_w(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (34.2)$$

که

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots, a_{\bar{m}}(\mathbf{x})), \quad (35.2)$$

$$\mathbf{u}^T = (u_1, u_2, \dots, u_N), \quad (36.2)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_w(\mathbf{x})\mathbf{F}^T(\mathbf{x}), \quad (37.2)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{p}_1(\mathbf{x}; \mathbf{x}_1) & \tilde{p}_1(\mathbf{x}; \mathbf{x}_2) & \dots & \tilde{p}_1(\mathbf{x}; \mathbf{x}_N) \\ \tilde{p}_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_1) & \tilde{p}_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_2) & \dots & \tilde{p}_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{p}_{\bar{m}}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_1) & \tilde{p}_{\bar{m}}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_2) & \dots & \tilde{p}_{\bar{m}}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_N) \end{bmatrix}, \quad (38.2)$$

و  $\mathbf{F}_w(\mathbf{x}) = \bar{\omega}_{k,J}(\mathbf{x})_{\bar{m} \times N}$  یک ماتریس  $\bar{m} \times N$  است و

$$\bar{\omega}_{k,J}(\mathbf{x}) = \begin{cases} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J) \tilde{p}_k(\mathbf{x}; \mathbf{x}_J), & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_J, \\ \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}, I \neq J} w(\mathbf{x}_J, \mathbf{x}_I) [p_k(\mathbf{x}_J) - p_k(\mathbf{x}_I)], & \mathbf{x} = \mathbf{x}_J. \end{cases} \quad (39.2)$$

پس می‌توانیم ضرایب مجهول را به شکل زیر محاسبه کنیم،

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_w(\mathbf{x}) \mathbf{u}. \quad (40.2)$$

آنگاه تابع تقریب محلی را می‌توان به شکل زیر بدست آورد،

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathcal{S}u + \sum_{i=1}^{\bar{m}} a_i(\mathbf{x}) \tilde{p}_i(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}). \quad (41.2)$$

بنابراین تابع تقریب درونیاب سراسری تابع  $u(\mathbf{x})$  به صورت زیر بدست می‌آید،

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathcal{S}u + \sum_{i=1}^{\bar{m}} a_i(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}) \equiv \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}_I), \quad (42.2)$$

که  $\Phi(\mathbf{x})$  ماتریسی از توابع شکل است.

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_N(\mathbf{x})) = \mathbf{v}^T + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_w(\mathbf{x}), \quad (43.2)$$

که در آن

$$\mathbf{v}^T = (v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1), v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2), \dots, v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_N)), \quad (44.2)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_{\bar{m}}(\mathbf{x})), \quad (45.2)$$

$$g_i(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x}) - \mathcal{S}p_i(\mathbf{x}). \quad (46.2)$$

آنگاه مشتق جزئی مرتبه اول توابع شکل روش کمترین مربعات متحرک درونیاب به شکل زیر قابل محاسبه هستند،

$$\phi_{,i}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{,i}^T + \mathbf{p}_{,i}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_w(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_{w,i}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}_{,i}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_w(\mathbf{x}), \quad (47.2)$$

که

$$\mathbf{F}_{w,i}(\mathbf{x}) = \bar{\omega}_{k,J,i}(\mathbf{x})_{\bar{m} \times N}, \quad (48.2)$$

$$\bar{\omega}_{k,j,i}(\mathbf{x}) = \begin{cases} w_{,i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) \tilde{p}_k(\mathbf{x}; \mathbf{x}_j) + w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) \tilde{p}_{k,i}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_j)(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_j, \\ \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}, I \neq j} w_{,i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) [p_k(\mathbf{x}_j) - p_k(\mathbf{x}_I)], & \mathbf{x} = \mathbf{x}_j, \end{cases} \quad (49.2)$$

$$\mathbf{A}_{,i}^{-1}(\mathbf{x}) = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{A}_{,i}(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}). \quad (50.2)$$

بنابراین توابع شکل و مشتق آنها و سپس تابع تقریب و مشتق آن در روش کمترین مربعات متحرک درونیاب به شکل بالا محاسبه می‌شوند.

در روش کمترین مربعات متحرک درونیاب، ماتریس  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  یک ماتریس از مرتبه  $\bar{m} \times \bar{m}$  می‌باشد که نقش مهمی را ایفا می‌کند. اگر رتبه ماتریس  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  برابر  $\bar{m}$  باشد، رابطه (34.2) جواب یکتا دارد.

بنابر این در بکارگیری روش کمترین مربعات متحرک درونیاب، فرض می‌کنیم برای هر  $\mathbf{x} \in \Omega$  ماتریس  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  وارون پذیر است به بیان دیگر، مجموعه  $\{\mathbf{x}_I \in \mathbf{X}, I \in \tau_{\mathbf{x}}\}$  یک مجموعه  $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$  – یکتا حل کننده باشد.

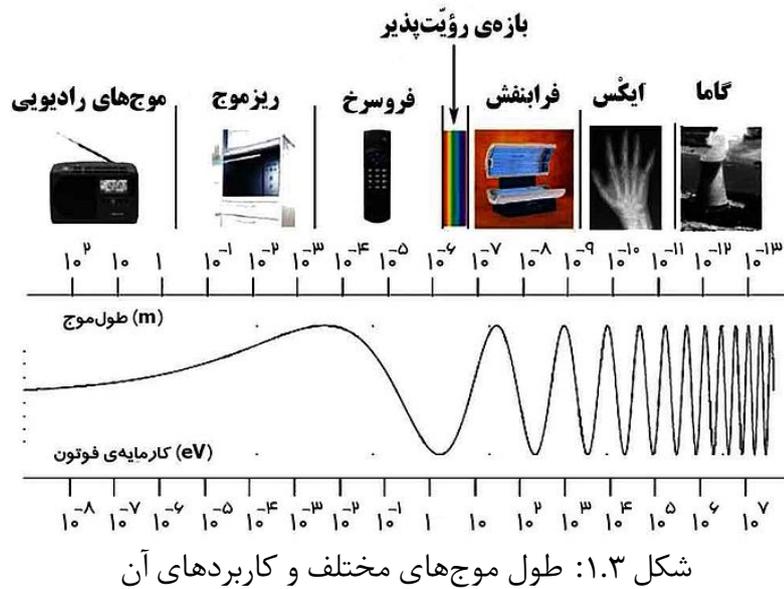
## فصل ۳

# حل عددی معادله تصادفی موج غیر خطی با استفاده از روش توابع پایه‌ای شعاعی

### ۱.۳ مقدمه

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کاربردهای فراوانی دارند. برای نمونه، امواج رادیویی که امروزه کاربردهای فراوانی در رسانه‌های صوتی و تصویری مانند رادیو و تلویزیون دارند، ریزموج‌ها که امروزه مهمان آشپزخانه‌های بسیاری از ما با دستگاه‌های مایکروفر هستند، امواج فرسرخ که در دستگاه‌های کنترل از راه دور مورد استفاده هستند، از امواج فرابنفش برای ضد عفونی کردن آب، مواد خوراکی، تجهیزات پزشکی و لوازم صنعتی و غیره استفاده می‌شود، از اشعه ایکس برای گرفتن عکس‌های رادیولوژی که در تشخیص پزشکی مورد استفاده قرار می‌گیرند، استفاده می‌شود، امواج گاما که در صنعت هسته‌ای مورد استفاده هستند و بسیاری از کاربردهای دیگر را می‌توان برای آن نام برد.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی نیز کاربردهای فراوانی دارند. از آن جمله می‌توان به کاربرد آنها در ریاضیات مالی، مهندسی مکانیک، هواشناسی، بورس و غیره اشاره کرد. برای مثال می‌توان به کاربرد معادله موج تصادفی در مدلسازی حرکت یک رشته DNA



در یک مایع، حرکت یک سیم آویخته شده تحت تأثیر حرکت باد یا حرکت امواج شوک در سطح خورشید اشاره کرد.

در این فصل می‌خواهیم معادله موج تصادفی یک بعدی را با استفاده از روش بدون شبکه توابع پایه‌ای شعاعی حل کنیم.

## ۲.۳ شرح روش پیشنهادی

معادله موج یک بعدی زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f + \sigma \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}(x, t) & (x, t) \in (0, 1) \times [0, T], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0 & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (1.3)$$

که  $T > 0$  زمان نهایی و  $f, \sigma$  توابعی از  $x, t, u(x, t)$  هستند و  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}(x, t)$  یک اختلال سفید روی فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{P})$  است. همچنین  $u_0 \in H^\alpha[0, 1]$  و  $v_0 \in H^\beta[0, 1]$  برای  $\alpha > \frac{1}{4}$  و  $\beta > -\frac{1}{4}$  می‌باشند. وجود و یکتایی جواب معادله (۱.۳) در مراجع [۳، ۷، ۸] مورد بررسی قرار گرفته است.

### ۱.۲.۳ گسسته سازی مکانی معادله با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی

اکنون می‌خواهیم از توابع پایه‌ای شعاعی برای تقریب جواب معادله دیفرانسیل (۱.۳) استفاده کنیم. از آنجا که توابع شعاعی اغلب منجر به یک دستگاه با ماتریس چگال<sup>۱</sup> و بدوضع<sup>۲</sup> می‌شوند، از توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده و ندلند<sup>۳</sup> به‌عنوان تابع شکل استفاده شده است. لیست بعضی از این توابع را می‌توانید در جدول ۱.۳ مشاهده کنید. شایان ذکر است که  $0 \leq r < 1$  در  $(1-r)_+$  برابر  $(1-r)^l$  است و در خارج این بازه صفر است.

جدول ۱.۳: توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده و ندلند

$C^0$	$\varphi(r) = (1-r)_+$
$C^2$	$\varphi(r) = (1-r)_+^3(3r+1)$
$C^4$	$\varphi(r) = (1-r)_+^5(8r^2+5r+1)$

در اینجا از توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده مقیاس شده و ندلند که به‌شکل زیر است

$$\varphi^{[\alpha]}(r) = \varphi(r/\alpha), \quad \alpha > 0,$$

استفاده شده‌است. این توابع به دلیل داشتن محمل فشرده منجر به دستگاهی با ماتریس نواری می‌شوند که تا حدی مشکل چگال بودن و بدوضعی ماتریس دستگاه حاصل را کاهش می‌دهد.

اکنون می‌خواهیم با استفاده از درونیاب به شکل (۲.۲) معادله (۱.۳) را گسسته‌سازی مکانی کنیم. بنابراین با در نظر گرفتن  $0 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$  به‌عنوان نقاط پخش شده روی دامنه و  $\varphi(r)$  به‌عنوان تابع شعاعی با محمل فشرده و ندلند، تقریب زیر را خواهیم داشت:

$$u(x, t) \approx \sum_{j=1}^N \lambda_j(t) \varphi^{[\alpha]}(r_j), \quad (2.3)$$

که در آن  $r_j = \|x - x_j\| = \sqrt{(x - x_j)^2}$  با در نظر گرفتن (۲.۳) در نقاط  $x_i, 1 \leq i \leq N$  داریم:

$$u(x_i, t) \approx \sum_{j=1}^N \lambda_j(t) \varphi^{[\alpha]}(r_{ij}), \quad (3.3)$$

که  $r_{ij} = \|x_i - x_j\| = \sqrt{(x_i - x_j)^2}$  با تبدیل به فرم ماتریسی داریم:

$$u(t) = A\lambda(t), \quad (4.3)$$

<sup>1</sup>dense matrix

<sup>2</sup>ill-conditioned

<sup>3</sup>Wendland's Compactly Supported RBF

### ۳۴ حل عددی معادله تصادفی موج غیر خطی با استفاده از روش توابع پایه‌ای شعاعی

که  $u(t) = [u(x_1, t), \dots, u(x_N, t)]^T$ ,  $A_{ij} = \varphi^{[\alpha]}(r_{ij})$ ,  $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)]^T$  همچنین ماتریس  $A_d$  را به صورت  $A_d = (A_d)_{ij}$ ,  $2 \leq i \leq N-1$  و برای باقی سطرها صفر تعریف می‌شود. با جایگذاری (۲.۳) در (۱.۳) داریم:

$$\sum_{j=1}^N \ddot{\lambda}_j(t) \varphi^{[\alpha]}(r_j) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(t) \nabla^2 \varphi^{[\alpha]}(r_j) + f(x, t, u) + \sigma(x, t, u) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}. \quad (۵.۳)$$

با محاسبه (۵.۳) در تمام نقاط و تقریب  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}$  در هر  $x_i$  با  $\frac{\partial W(x_{i+1}, t) - W(x_i, t)}{x_{i+1} - x_i}$  خواهیم داشت:

$$A \ddot{\lambda}(t) = \nabla^2 A_d \lambda(t) + F(t) + B_\sigma(t) \frac{dW(t)}{dt}, \quad (۶.۳)$$

که

$$\delta x_i = x_{i+1} - x_i,$$

$$F(t) = [\circ, f(x_1, t, u(x_1, t)), \dots, f(x_{N-1}, t, u(x_{N-1}, t)), \circ].$$

همچنین  $B_\sigma(t)$  یک ماتریس قطری با درایه‌های  $\frac{\sigma(x_i, t, u(x_i, t))}{\sqrt{\delta x_i}}$  و  $W(t) = [\circ, W_1(t), \dots, W_{N-1}(t), \circ]^T$  می‌باشد که  $W_i(t)$  یک فرآیند وینر استاندارد است.

با تعریف  $C_1(t) = \dot{C}_1(t) = \dot{\lambda}(t)$  و  $C_2(t) = \dot{C}_2(t)$  می‌توانیم معادله (۶.۳) را به شکل (۷.۳) بازنویسی کنیم:

$$\begin{cases} dC_1(t) = C_2(t) dt, \\ dC_2(t) = A^{-1} \nabla^2 A_d C_1(t) dt + A^{-1} F(t) dt + A^{-1} B_\sigma(t) dW(t). \end{cases} \quad (۷.۳)$$

همچنین با تعریف  $C(t) = [C_1(t), C_2(t)]^T$  می‌توان معادله (۷.۳) را به شکل زیر نوشت:

$$dC(t) = MC(t) dt + \mathcal{F}(t) dt + L(t) \begin{pmatrix} \circ \\ dW(t) \end{pmatrix}, \quad (۸.۳)$$

که  $\mathcal{F}(t) = [\circ, F(t)] \in \mathbb{R}^{2N}$  و

$$M = \begin{pmatrix} \circ & I \\ A^{-1} \nabla^2 A_d & \circ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad L(t) = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & A^{-1} B_\sigma(t) \end{pmatrix}.$$

با استفاده از فرمول ایتو [۲۵] می‌توان نشان داد که جواب (۸.۳) در معادله زیر صدق می‌کند،

$$C(t) = e^{tM} C(\circ) + \int_0^t e^{(t-s)M} \mathcal{F}(s) ds + \int_0^t e^{(t-s)M} L(s) \begin{pmatrix} \circ \\ dW(s) \end{pmatrix}. \quad (۹.۳)$$

### ۲.۲.۳ گسسته‌سازی زمانی به روش انتگرال گیر زمانی نمایی

در اینجا سعی می‌کنیم معادله نیمه گسسته (۹.۳) را گسسته‌سازی زمانی کنیم. فرض  $\Delta t = T/N_t$  گام زمانی انتگرال گیر زمانی باشد و  $t_n = n\Delta t, n = 1, 2, \dots, N_t$  زمان‌های گسسته شده باشند. با نگاه به جواب خفیف<sup>۱</sup> (۹.۳) برای معادله (۸.۳) روی بازه  $[t_n, t_{n+1}]$  و گسسته‌سازی انتگرال‌ها (با ثابت کردن انتگرال‌ده‌ها در ابتدای بازه‌ها) می‌توان روش تکراری صریح زیر را (مشابه [۹، ۱۰]) تعریف کرد. در ادامه چگونگی بدست آوردن آن را توضیح داده‌ایم.

$$\begin{aligned} C(t_n) &= e^{t_n M} C(\circ) + \int_{\circ}^{t_n} e^{(t_n-s)M} \mathcal{F}(s) ds + \int_{\circ}^{t_n} e^{(t_n-s)M} L(s) \begin{pmatrix} \circ \\ dW(s) \end{pmatrix}, \\ &\approx e^{t_n M} C(\circ) + \int_{\circ}^{t_n} e^{(t_n-t_n)M} \mathcal{F}(t_n) ds + \int_{\circ}^{t_n} e^{(t_n-t_n)M} L(t_n) \begin{pmatrix} \circ \\ dW(s) \end{pmatrix}, \\ &= e^{t_n M} C(\circ) + \mathcal{F}(t_n)t_n + L(t_n) \begin{pmatrix} \circ \\ W(t_n) - W(\circ) \end{pmatrix}, \\ &= e^{t_n M} C(\circ) + \mathcal{F}(t_n)t_n + L(t_n) \begin{pmatrix} \circ \\ W(t_n) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10.3)$$

و

$$\begin{aligned} C(t_{n+1}) &= e^{t_{n+1} M} C(\circ) + \int_{\circ}^{t_{n+1}} e^{(t_{n+1}-s)M} \mathcal{F}(s) ds + \int_{\circ}^{t_{n+1}} e^{(t_{n+1}-s)M} L(s) \begin{pmatrix} \circ \\ dW(s) \end{pmatrix}, \\ &\approx e^{t_{n+1} M} C(\circ) + \int_{\circ}^{t_{n+1}} e^{(t_{n+1}-t_n)M} \mathcal{F}(t_n) ds + \int_{\circ}^{t_{n+1}} e^{(t_{n+1}-t_n)M} L(t_n) \begin{pmatrix} \circ \\ dW(s) \end{pmatrix}, \\ &= e^{t_{n+1} M} C(\circ) + e^{\Delta t M} \mathcal{F}(t_n)t_{n+1} + e^{\Delta t M} L(t_n) \begin{pmatrix} \circ \\ W(t_{n+1}) - W(\circ) \end{pmatrix}, \\ &= e^{t_{n+1} M} C(\circ) + e^{\Delta t M} \mathcal{F}(t_n)t_{n+1} + e^{\Delta t M} L(t_n) \begin{pmatrix} \circ \\ W(t_{n+1}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

با ضرب کردن (۱۰.۳) در  $e^{\Delta t M}$  و کم کردن عبارت حاصل از (۱۱.۳) داریم

$$\begin{cases} \mathcal{C}^\circ := C(\circ), \\ \mathcal{C}^{n+1} := e^{\Delta t M} \mathcal{C}^n + \Delta t e^{\Delta t M} \mathcal{F}(t_n) + e^{\Delta t M} L(t_n) \begin{pmatrix} \circ \\ \Delta W^n \end{pmatrix}. \end{cases}$$

در اینجا  $\mathcal{C}^n =: [\lambda^n; \dot{\lambda}^n]^T$  و هر مولفه یک بردار  $N$  بعدی است و  $\Delta W^n = W(t_{n+1}) - W(t_n)$  نموهای وینر هستند. بنابراین تقریب عددی  $\lambda^n \approx \lambda(t_n)$  ( $\dot{\lambda}^n \approx \dot{\lambda}(t_n)$ ) از جواب دقیق (مشتق

<sup>1</sup>mild solution

## ۳۶ حل عددی معادله تصادفی موج غیر خطی با استفاده از روش توابع پایه‌ای شعاعی

جواب) معادله گسسته مکانی (۶.۳) در زمان‌های گسسته  $t_n = n\Delta t$  بدست می‌آید. پس تقریب جواب دقیق معادله (۱.۳) در زمان‌های گسسته  $t_n = n\Delta t$  و نقاط پراکنده  $x_i, 1 \leq i \leq N$  را با استفاده از  $u(t_n) = A\lambda(t_n) \approx A\lambda^n$  (۴.۳) بدست می‌آوریم.

## ۳.۳ نتایج عددی

ابتدا معادله خطی با نویز سفید زیر را در نظر بگیرید:

### مثال ۱.۳.۳

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}, & (x, t) \in (0, 1) \times [0, T], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (12.3)$$

جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی بالا را با استفاده از تقریب عددی شرح داده شده بدست آورده‌ایم. برای مقایسه، جواب‌های بدست آمده توسط یک روش دیگر گسسته‌سازی زمانی یعنی روش کرانک-نیکلسون-مارویاما نیز به نمایش در آمده است [۱۱].

$$C^{n+1} = C^n + \frac{\Delta t}{4} M(C^{n+1} + C^n) + \Delta t F(t_n) + L(t_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta W^n \end{pmatrix}.$$

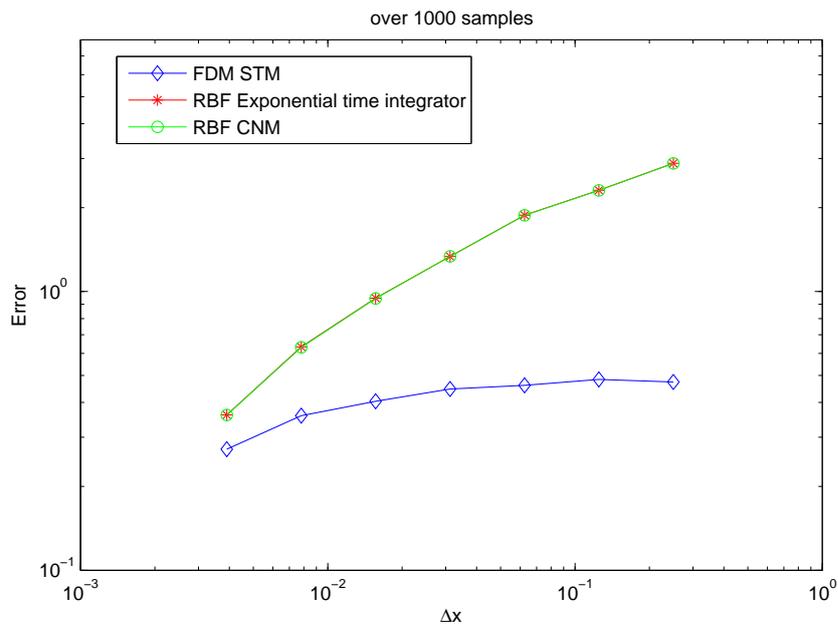
در اینجا جواب دقیق مساله را با روش مرجع [۹] (FDM STM) با گام‌های زمانی و مکانی خیلی کوچک یعنی  $\Delta t_{\text{exact}} = 2^{-9}$ ,  $\Delta x_{\text{exact}} = 2^{-9}$  محاسبه کرده‌ایم. زیرا همگرایی روش در مرجع [۹] اثبات شده است. همچنین امید ریاضی روی ۱۰۰۰ نمونه تصادفی و در نرم افزار متلب محاسبه شده‌اند. همچنین توابع ماتریسی متلب از جمله `funm`, `sqrtm` و `expm` در محاسبات عددی استفاده شده‌اند. برای خطای مکانی از خطای میانگین مربعات در زمان  $T_{\text{end}} = 1$  استفاده کرده‌ایم.

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} \sqrt{\mathbb{E}[|u_{\text{approximate}}(x, T_{\text{end}}) - u_{\text{exact}}(x, T_{\text{end}})|^2]}.$$

در جدول ۲.۳ مقادیر یک نمونه جواب با روش *FDMSTM* و *RBF* با  $\Delta t = 2^{-9}$ ,  $\Delta x = 2^{-9}$  نمایش داده شده است. در شکل ۲.۳ خطای میانگین مربعات مکانی را برای مقادیر متفاوت  $\Delta x$  نمایش داده‌ایم. می‌توان دید که مرتبه همگرایی مکانی روش توابع پایه‌ای شعاعی مورد استفاده از مرتبه همگرایی مکانی روش *FDM STM* بیشتر است. اما خطای روش *FDM STM* کمتر از روش توابع پایه‌ای شعاعی است. البته برای  $\Delta x$  به اندازه کافی کوچک تقریباً خطای مکانی یکسانی دارند. توجه کنید که برای همه موارد  $\Delta t = 2^{-9}$  اختیار شده است.

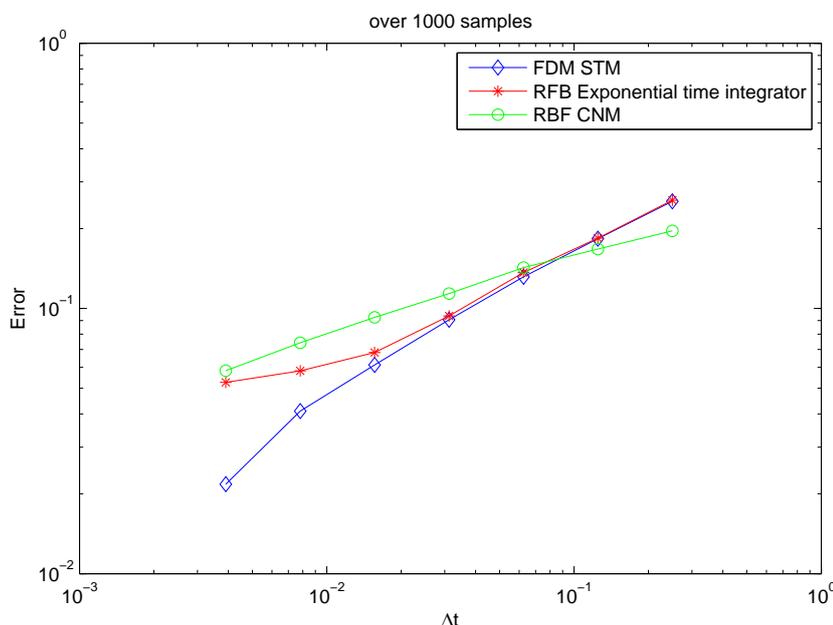
جدول ۲.۳: مقادیر جواب روش  $FDMSTM$  و روش  $RBF$  با  $\Delta t = 2^{-9}$ ,  $\Delta x = 2^{-9}$  برای مثال ۱.۳.۳.

$RBF$	$FDMSTM$	$x$
-۰/۰۰۱۳۲۶۸۴۷۹۷۴۶۹۴۴۵	-۰/۰۱۲۶۹۴۰۶۸۵۲۲۱۰۶۴	۰/۰۰۱۹۵۳۱۲۵
-۰/۲۷۰۲۳۱۴۲۶۴۶۴۹۶۳	-۰/۲۷۳۴۱۹۹۴۹۹۴۶۰۳۷	۰/۱۰۱۵۶۲۵
-۰/۴۳۵۱۸۴۴۶۰۳۰۳۷۴۰	-۰/۴۵۱۴۷۱۷۳۰۸۱۸۹۲۷	۰/۲۰۱۱۷۱۸۷۵
-۰/۵۵۹۲۳۶۹۲۰۵۳۲۷۰۷	-۰/۵۶۶۱۸۵۱۹۸۰۶۷۲۱۱	۰/۳۰۰۷۸۱۲۵
-۰/۶۶۱۲۵۱۹۲۴۰۲۹۹۱۸	-۰/۶۵۵۳۴۳۲۷۶۳۸۱۵۲۰	۰/۴۰۰۳۹۰۶۲
-۱/۰۱۹۱۹۰۳۰۴۲۳۰۵۷	-۱/۰۵۳۷۱۳۴۱۹۲۶۶۶۴	۰/۵
-۰/۹۳۲۹۰۲۱۴۳۴۳۱۴۷۷	-۰/۹۲۰۵۱۳۶۲۴۳۵۲۶۵۲	۰/۵۹۹۶۰۹۳۷۵
-۰/۷۶۱۴۰۵۹۳۱۳۴۳۹۱۶	-۰/۷۶۵۲۵۱۴۵۲۲۳۰۵۸۴	۰/۶۹۹۲۱۸۷۵
-۰/۹۱۵۴۰۸۲۶۸۴۹۳۱۳۸	-۰/۹۰۳۴۰۰۸۰۴۰۶۰۵۳۴	۰/۷۹۸۸۲۸۱۲۵
-۰/۴۵۴۹۲۴۴۰۳۱۸۰۴۸۵	-۰/۴۷۲۴۵۱۴۷۹۲۶۵۴۸۳	۰/۸۹۸۴۳۷۵
-۰/۰۳۵۶۴۵۸۸۴۰۸۵۱۷۰۱	-۰/۰۶۱۰۹۲۶۷۶۳۹۳۶۳۳۶	۰/۹۹۸۰۴۶۸۷۵



شکل ۲.۳: خطای میانگین مربعات مکانی برای مدل خطی.

برای خطای زمانی نیز از خطای کمترین مربعات استفاده کرده‌ایم. در شکل ۳.۳ خطای زمانی را برای سه روش مختلف نمایش داده‌ایم. می‌توان دید که روش FDM STM و روش مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی تقریباً خطای زمانی یکسانی دارند. توجه کنید که در هر سه مورد  $\Delta x = 2^{-9}$  اختیار شده‌است.



شکل ۳.۳: خطای میانگین مربعات زمانی برای مدل خطی.

حال معادله موج تصادفی یک بعدی اندرسون را در نظر می‌گیریم [۹].

### مثال ۲.۳.۳

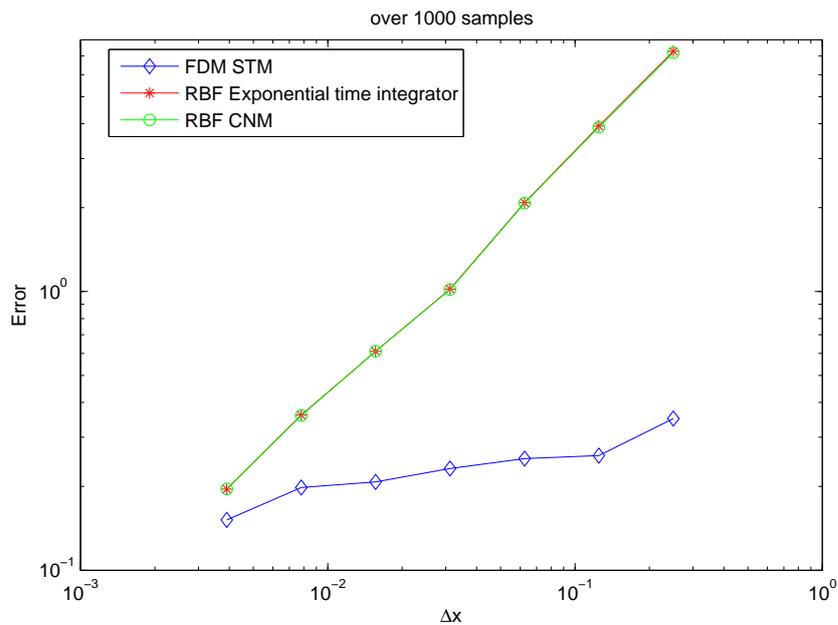
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(x, t) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}, & (x, t) \in (0, 1) \times [0, T], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(3\pi x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (13.3)$$

در جدول ۳.۳ مقادیر یک نمونه جواب با روش FDMSTM و RBF با  $\Delta t = 2^{-9}$ ,  $\Delta x = 2^{-9}$  نمایش داده شده است. در شکل ۴.۳ خطای کمترین مربعات مکانی برای  $\Delta x$  در مدل اندرسون به نمایش در آمده است. مشابه مثال اول می‌توان دید که برای مقادیر کوچک  $\Delta x$  روش توابع پایه‌ای شعاعی خطایی نزدیک به خطای روش FDM STM دارد. توجه کنید که  $\Delta t = 2^{-9}$  انتخاب شده است.

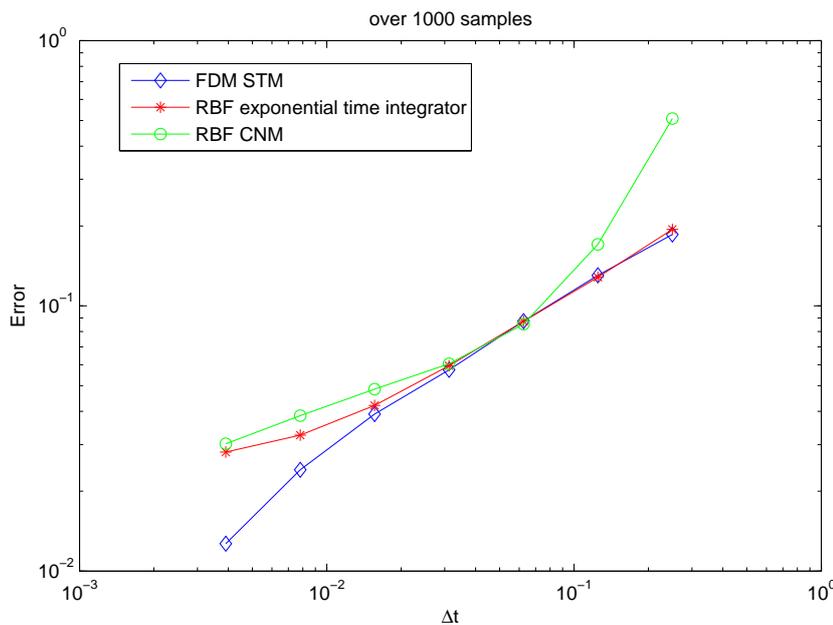
همچنین خطای زمانی مدل اندرسون در شکل ۵.۳ نمایش داده شده است. مشابه مثال اول روش توابع پایه‌ای شعاعی خطای زمانی مشابهی با روش FDM STM دارد. در هر سه مورد  $\Delta x = 2^{-9}$  است.

جدول ۳.۳: مقادیر جواب روش  $FDMSTM$  و روش  $RBF$  با  $\Delta x = 2^{-9}$ ,  $\Delta t = 2^{-9}$  برای مثال ۲.۳.۳.

$RBF$	$FDMSTM$	$x$
۰/۰۰۱۶۴۲۳۷۵۹۸۸۵۹۸۳۲	۰/۰۰۸۹۲۰۳۳۶۳۰۶۴۱۸۲۹	۰/۰۰۱۹۵۳۱۲۵
۰/۵۶۶۹۶۱۵۰۷۵۱۳۴۳۶	۰/۵۶۳۴۸۸۳۲۶۷۳۷۱۹۶	۰/۱۰۱۵۶۲۵
۰/۷۴۱۲۸۸۹۰۶۰۲۸۴۶۵	۰/۷۳۱۴۵۶۵۱۶۲۲۵۴۳۸	۰/۲۰۱۱۷۱۸۷۵
۰/۷۷۱۹۳۵۱۳۳۰۲۲۳۷۶	۰/۷۷۰۰۹۸۵۵۰۱۸۰۴۶۰	۰/۳۰۰۷۸۱۲۵
۰/۴۰۷۹۰۸۸۷۳۶۱۵۶۶۲	۰/۴۰۷۴۷۹۸۲۷۸۸۱۶۵۳	۰/۴۰۰۳۹۰۶۲
-۰/۵۶۸۵۰۸۹۵۶۹۰۱۳۲۱	-۰/۶۴۶۲۴۹۱۴۷۷۳۶۹۰۶	۰/۵
-۰/۷۳۵۷۲۷۷۸۰۳۷۳۵۲۳	-۰/۷۴۰۸۱۵۷۱۴۴۳۳۲۷۱	۰/۵۹۹۶۰۹۳۷۵
-۰/۹۱۶۸۲۳۴۲۶۸۶۲۳۷۹	-۰/۹۱۱۴۳۶۸۵۴۱۱۳۳۳۱	۰/۶۹۹۲۱۸۷۵
-۰/۸۹۵۴۷۷۴۱۱۴۹۲۰۳۸	-۰/۸۹۹۵۵۱۳۱۹۷۰۰۳۶۲	۰/۷۹۸۸۲۸۱۲۵
-۰/۵۸۳۹۳۱۱۰۲۵۴۷۰۱۲	-۰/۵۹۱۹۱۶۵۳۷۳۳۵۴۱۴	۰/۸۹۸۴۳۷۵
-۰/۰۰۲۸۳۱۶۲۲۰۶۷۳۳۳۲۳	-۰/۰۰۰۹۶۴۸۱۶۹۴۲۲۵۸۳۹۷	۰/۹۹۸۰۴۶۸۷۵



شکل ۴.۳: خطای کمترین مربعات مکانی مدل اندرسون .



شکل ۵.۳: خطای کمترین مربعات زمانی مدل اندرسون.

مثال ۳.۳.۳. به عنوان سومین مثال معادله ساین-گوردن تصادفی آورده شده است [۹].

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin(u(x, t)) - \sin(u(x, t)) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}, & (x, t) \in (0, 1) \times [0, T], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(3\pi x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (14.3)$$

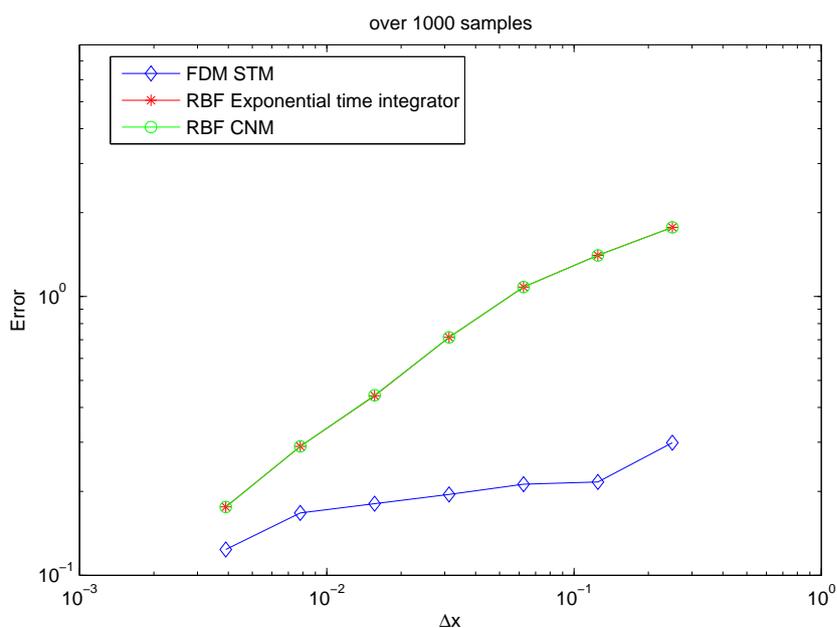
در جدول ۴.۳ مقادیر یک نمونه جواب با روش *FDMSTM* و *RBF* با  $\Delta t = 2^{-9}$ ,  $\Delta x = 2^{-9}$  نمایش داده شده است. در شکل ۶.۳ خطای کمترین مربعات مکانی معادله ساین-گوردن برای مقادیر مختلف  $\Delta x$  نمایش داده شده است. که نتایج مشابه دو مثال قبلی می‌باشد. همچنین خطای زمانی در شکل ۷.۳ نشان داده شده است. که کاملاً مشابه دو مثال قبل است. باز هم  $\Delta x = 2^{-9}$  انتخاب شده است.

## ۴.۳ نتیجه‌گیری

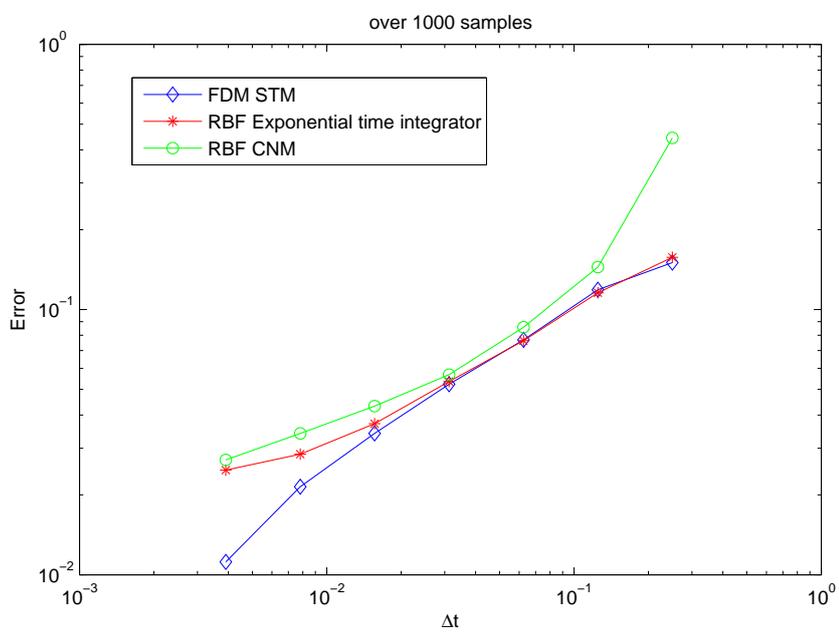
در این فصل از روش توابع پایه‌ای شعاعی برای گسسته‌سازی مکانی معادله موج تصادفی استفاده کردیم. نشان دادیم برای  $\Delta x$  به اندازه کافی کوچک خطای مکانی تقریباً با روش مرجع [۹] یکسان است. اما از آنجا که در روش توابع پایه‌ای شعاعی، پایه‌ها توابع شعاعی هستند، مستقل از بعد معادله و ناحیه جواب می‌باشند بنابراین تعمیم معادله به ابعاد بالاتر را ساده‌تر می‌توان انجام داد چرا که نیازی به شبکه‌بندی ناحیه جواب نداریم و این برای مطالعات آتی مورد توجه خواهد بود.

جدول ۴.۳: مقادیر جواب روش  $FDMSTM$  و روش  $RBF$  با  $\Delta x = 2^{-9}$ ,  $\Delta t = 2^{-9}$  برای مثال ۳.۳.۳.

$RBF$	$FDMSTM$	$x$
۰/۰۱۲۱۹۷۳۲۶۰۱۴۲۳۰۳	۰/۰۱۱۷۸۱۵۲۸۴۶۹۱۵۵۹	۰/۰۰۱۹۵۳۱۲۵
۰/۵۰۵۶۶۵۵۷۱۷۴۲۶۳۶	۰/۵۱۲۷۹۵۶۱۴۸۵۰۸۶۸	۰/۱۰۱۵۶۲۵
۰/۷۶۳۶۱۵۳۰۲۰۱۹۵۴۲	۰/۷۵۶۰۵۹۳۹۵۸۵۸۱۷۸۶	۰/۲۰۱۱۷۱۸۷۵
۰/۹۷۸۴۳۵۸۳۷۴۱۹۲۹۱	۰/۹۷۷۲۶۶۹۸۱۷۹۵۹۸۹۸	۰/۳۰۰۷۸۱۲۵
۰/۵۴۹۴۰۷۴۱۷۹۷۰۸۵۹	۰/۵۵۲۱۷۴۸۰۳۶۴۷۳۸۹	۰/۴۰۰۳۹۰۶۲
۰/۰۱۴۲۷۶۸۸۲۹۲۴۸۴۰۲	۰/۰۰۸۵۸۳۹۱۸۹۰۸۸۹۳۵۰	۰/۵
-۰/۶۶۶۳۹۶۳۴۶۷۶۲۸۳۸	-۰/۶۷۴۴۱۸۶۱۶۷۳۵۰۲۲	۰/۵۹۹۶۰۹۳۷۵
-۰/۹۱۰۲۸۸۹۳۳۵۷۹۹۷۷	-۰/۹۰۱۸۶۳۸۶۹۸۳۳۶۶۹	۰/۶۹۹۲۱۸۷۵
-۰/۹۷۶۰۱۳۵۲۹۳۵۹۹۸۹	-۰/۹۶۹۲۶۵۶۱۹۰۹۷۵۲۱	۰/۷۹۸۸۲۸۱۲۵
-۰/۵۸۴۸۷۰۷۳۸۷۳۹۴۸۳	-۰/۵۸۷۰۳۴۹۱۳۲۷۵۲۱۱	۰/۸۹۸۴۳۷۵
-۰/۰۳۵۸۶۱۹۴۷۷۰۸۳۲۶۶	-۰/۰۲۶۶۱۳۹۹۶۲۴۳۰۶۹۳	۰/۹۹۸۰۴۶۸۷۵



شکل ۶.۳: خطای کمترین مربعات مکانی برای معادله ساین-گوردن.



شکل ۷.۳: خطای کمترین مربعات زمانی برای معادله سین-گوردن.

## فصل ۴

# حل معادله دیفرانسیل تصادفی بیضوی با روش بدون المان گالرکین

### ۱.۴ مقدمه

لنکستر و سالکائوسکاس روش کمترین مربعات متحرک (MLS) را مورد استفاده قرار دادند [۱۵]. برتری تقریب کمترین مربعات متحرک درونیاب بدست آوردن توابع شکل با مرتبه همواری بالا و سازگاری در استفاده از پایه‌های مرتبه پایین است. توابع شکل تقریب (MLS) می‌توانند جوابی با دقت بالا تولید کنند [۳۸]. بر پایه تقریب (MLS)، بلیچکو<sup>۱</sup> و همکارانش روش بدون المان گالرکین<sup>۲</sup> را معرفی کردند [۲۷]. چنگ<sup>۳</sup> آنالیز خطا و همگرایی روش بدون المان گالرکین را انجام داد [۲۸]. موکرجی<sup>۴</sup> روش بدون المان گالرکین را برای اعمال شرایط مرزی بهبود بخشید [۳۱]. چنگ با متعامد کردن پایه‌ها روش کمترین مربعات متحرک را بهبود داد و بر پایه آن روش بدون المان مرزی<sup>۵</sup> را معرفی کرد [۲۹، ۳۰]. چون توابع شکل (MLS) در خاصیت دلتای کرونکر صدق نمی‌کنند، روش‌های بدون شبکه مبتنی بر این توابع

---

<sup>1</sup>Belytschko

<sup>2</sup>element-free Galerkin method

<sup>3</sup>Cheng

<sup>4</sup>Mukherjee

<sup>5</sup>boundary element-free method

شکل باید از روش‌های دیگری برای اعمال شرایط مرزی مانند روش پنالتی<sup>۱</sup> یا روش ضرایب لاگرانژ<sup>۲</sup> استفاده کنند.

لنکستر بر پایه روش (MLS) روش کمترین مربعات متحرک درونیاب (IMLS) را معرفی کرد [۱۵]. کالویچ<sup>۳</sup> با استفاده از روش IMLS روش بدون المان گالرکین بهبود یافته‌ای را معرفی کرد که در آن شرایط مرزی اساسی به صورت مستقیم قابل اعمال بود [۱۶]. رن<sup>۴</sup> و همکارانش با بهبود روش کمترین مربعات متحرک درونیاب، روش بدون المان گالرکین درونیاب و روش بهبود یافته بدون المان مرزی را معرفی کردند [۱۸، ۱۹، ۱۷، ۲۰]. میرزایی و همکارانش با معرفی پایه‌های انتقال یافته و مقیاس شده، روش (MLS) را پایدارسازی کردند [۲۱، ۲۲]. در [۲۲] رابطه بین عدد حالت و دترمینان ماتریس ضرایب در روش MLS و روش MLS پایدار شده (SMLS) اثبات شده است. همچنین در [۲۱] اثبات شده که اگر از پایه‌های انتقال یافته و مقیاس شده استفاده شود، کوچکترین مقدار ویژه ماتریس ضرایب کراندار و مستقل از اندازه تراکم می‌باشد و این نشان می‌دهد که روش SMLS از جنبه نظری پایدار است. لی<sup>۵</sup> روش SMLS را بهبود بخشید و روش SMLS درونیاب (SIMLS) را معرفی کرد و نشان داد که عدد حالت و دترمینان ماتریس ضرایب مستقل از فاصله انفصال است [۲۳]. در این فصل ما روش بدون المان گالرکین مبتنی بر درونیاب کمترین مربعات متحرک پایدار شده را برای حل عددی معادلات با مشتقات جزئی تصادفی بیضوی به کار می‌بریم.

## ۲.۴ تقریب طیفی و آنالیز خطا

با توجه به [۲۴] تقریب طیفی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی تصادفی و آنالیز خطای آن به شکل زیر است.

$$-\Delta u(x, \xi) = f(u(x, \xi)) + \dot{W}^Q(x, \xi) \quad x \in \mathcal{D}, \xi \in \Omega, \quad (1.4)$$

$$u(x, \xi) = \bar{u}(x, \xi), \quad x \in \partial\mathcal{D}, \xi \in \Omega, \quad (2.4)$$

که  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  و  $\partial\mathcal{D}$  با قاعده مرز با کراندار دامنه  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$  فضای احتمال است و  $\dot{W}^Q$  یک تابع پیوسته لیپ شیتس است. همچنین  $\dot{W}^Q$  یک اختلال گاوسی با عملگر کوواریانس  $Q$  است.

برای  $r \in \mathbb{N}$  از نماد  $(\mathbb{H}^r, \|\cdot\|_r)$  برای نمایش فضای سوبولف استفاده می‌کنیم.

$$\mathbb{H}^r := \left\{ v : \|v\|_{\mathbb{H}^r} := \left( \sum_{|k| \leq r} \|D^k v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

<sup>1</sup>penalty method

<sup>2</sup>Lagrange multiplier

<sup>3</sup>Kaljević

<sup>4</sup>Ren

<sup>5</sup>Li

که  $r = 0$  و  $\mathbb{H}^0 := \mathbb{H}$  فضای توابع مربعی انتگرال پذیر روی  $\mathcal{D}$  باشد که ضرب داخلی و نرم آن به ترتیب  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  و  $\|\cdot\|$  هستند. همچنین  $\mathbb{H}_0^1$  یک زیرفضای  $\mathbb{H}^1$  است که عناصر آن روی  $\partial\mathcal{D}$  صفر هستند. برای  $s \in \mathbb{R}$  از نماد  $(\mathbb{H}^s, \|\cdot\|_s)$  برای نمایش فضای درونیابی استفاده می‌کنیم.

$$\mathbb{H}^s := \left\{ v : \|v\|_s := \left( \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \lambda_k^s \langle v, \varphi_k \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

که  $\{(\lambda_k, \varphi_k)\}_{k \in \mathbb{N}^+}$  یک ویژه سیستم<sup>۱</sup> لاپلاسی دیریکله نامنفی تعریف می‌شود.  $u$  یک جواب معادله (۱.۴) است هرگاه

$$u = A^{-1}f(u) + A^{-1}\dot{W}^Q, \quad (3.4)$$

که  $A^{-1} = (-\Delta)^{-1}$  وارون لاپلاسی دیریکله نامنفی است. اختلال گاوسی  $\dot{W}^Q$  به صورت یکتا توسط عملگر کوواریانس  $Q$  مشخص می‌شود. فرض  $Q$  دارای منظومه ویژه  $\{(\sigma_k, \psi_k)\}_{k=1}^\infty$  باشد یعنی

$$Q\psi_m = \sigma_m\psi_m, \quad m \in \mathbb{N}^+,$$

که  $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$  یک پایه متعامد یکه کامل در  $\mathbb{H}$  تشکیل دهد. بنابراین بسط اختلال نامتناهی بعد  $\dot{W}^Q$  را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\dot{W}^Q(\omega) = \sum_{m=1}^\infty Q^{\frac{1}{2}}\psi_m\eta_m(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (4.4)$$

که  $\{\eta_m\}_{m=1}^\infty$  متغیرهای تصادفی نرمال و مستقل هستند [۲۵]. فرض‌های زیر را در نظر بگیرید:

**فرض ۱.۲.۴.**  $f$  پیوسته لیپ شیتس است یعنی

$$\|f\|_{\text{Lip}} := \sup_{u, v \in \mathbb{R}, u \neq v} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|} < \infty.$$

همچنین  $\|f\|_{\text{Lip}}$  از ثابت مثبت  $\gamma$  در نامساوی پوانکاره زیر کوچکتر است.

$$\|\nabla v\|^2 \geq \gamma\|v\|^2, \quad \forall v \in \mathbb{H}_0^1.$$

توجه کنید که خوش تعریفی معادله (۱.۴) تحت فرض‌های کلی روی  $f$  که احتمال دارد به متغیر مکان وابسته باشد نیز معتبر است، که در [۵] در نظر گرفته شده است، یعنی دو ثابت مثبت  $\gamma < L_1$  و  $L_2$  موجودند بطوریکه برای هر  $x \in \mathcal{D}$  و هر  $u, v \in \mathbb{R}$  داریم،

$$\langle f(x, u) - f(x, v), u - v \rangle \geq -L_1|u - v|^2,$$

و

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq L_2(1 + |u - v|).$$

در این حالت مرتبه همگرایی نصف می‌شود.

<sup>۱</sup>eigensystem

فرض ۲.۲.۴. یک پارامتر  $\beta \in [0, 2]$  وجود دارد بطوریکه

$$\|A^{\frac{\beta-2}{\gamma}}\|_{\mathcal{L}_\gamma^0} < \infty,$$

که  $\mathcal{L}_\gamma^0 := \text{HS}(Q^{\frac{1}{\gamma}}(\mathbb{H}), \mathbb{H})$  فضای عملگرهای هیلبرت-اشمیت از  $Q^{\frac{1}{\gamma}}(\mathbb{H})$  به  $\mathbb{H}$  هستند و  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_\gamma^0}$  نرم متناظر آن است.

فرض  $\mathbb{P}_N : \mathbb{H} \rightarrow V_N = \text{span}\{\varphi_m\}_{m=1}^N$  عملگر تصویر از  $\mathbb{H}$  به  $V_N$  باشد که  $(\mathbb{P}_N u, v) = (u, v)$  برای هر  $u \in \mathbb{H}, v \in V_N$  باشد، و  $u_N$  جواب معادله (۳.۴) باشد که با تصویر طیفی آن جایگزین شده است:

$$u_N = A^{-1}f(u_N) + A^{-1}\mathbb{P}_N \dot{W}^Q, \quad N \in \mathbb{N}^+. \quad (5.4)$$

قضیه ۱.۲.۴. فرض  $p \geq 1$  و فرض‌های ۱.۲.۴ و ۲.۲.۴ برقرار باشند. معادله (۱.۴) دارای جواب یکتای  $u \in L^p(\Omega; \mathbb{H}^\beta)$  است.

برهان. به [۲۴] مراجعه کنید.  $\square$

قضیه ۲.۲.۴. فرض  $P \geq 1$  و فرض‌های ۱.۲.۴ و ۲.۲.۴ برقرار باشند و  $u, N \in \mathbb{N}^+$  به ترتیب جواب‌های معادله (۳.۴) و (۵.۴) باشند، آنگاه  $u_N \in L^p(\Omega; \mathbb{H}^\beta)$  و ثابت  $C$  مستقل از  $N$  موجود هستند بطوریکه

$$\mathbb{E} \left[ \|u_N\|_{\mathcal{L}_\gamma^0}^p \right] \leq C \lambda_N^{\frac{(\gamma-\beta)p}{\gamma}} \left( 1 + \|A^{\frac{\beta-2}{\gamma}}\|_{\mathcal{L}_\gamma^0}^p \right). \quad (6.4)$$

که  $\mathbb{E}[\cdot]$  امید ریاضی است. همچنین فرض کنید  $f$  دارای مشتق‌های کراندار تا مرتبه  $r-1$  باشد که  $r \geq 2$  و مشتق اول آن توسط  $\gamma$  کراندار شده است، آنگاه  $u_N \in L^p(\Omega; \mathbb{H}^{r+1})$  و

$$\mathbb{E} \left[ \|u_N\|_{r+1}^p \right] \leq C \lambda_N^{\frac{(r+1-\beta)p}{\gamma}} \left( 1 + \|A^{\frac{\beta-2}{\gamma}}\|_{\mathcal{L}_\gamma^0}^p \right). \quad (7.4)$$

بعلاوه

$$\left( \mathbb{E} [\|u - u_N\|^p] \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \lambda_{N+1}^{-\frac{\beta}{\gamma}} \left( 1 + \|A^{\frac{\beta-2}{\gamma}}\|_{\mathcal{L}_\gamma^0}^p \right). \quad (8.4)$$

برهان. به [۲۴] مراجعه کنید.  $\square$

## ۳.۴ آنالیز خطای روش بدون گالرکین درونیاب برای معادله تصادفی بیضوی

فرض

$$V_\rho = \{v | v \in \text{Span}\{\phi_I\}, \quad \partial \mathcal{D} \text{ روی } v = 0\},$$

و  $\phi_I$  ها توابع شکل روش بدون المان گالرکین باشند، مساله تغییراتی معادله (۵.۴) پیدا کردن یک  $u_N \in \mathbb{H}^1$  است بطوریکه،

$$a(u_N, v) = (f, v) + (\mathbb{P}_N \dot{W}^Q, v), \quad \forall v \in \mathbb{H}_0^1, \quad (9.4)$$

که در آن

$$a(u, v) = \int_{\mathcal{D}} \nabla u \times \nabla v d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} uv d\mathcal{D},$$

$$(f, v) = \int_{\mathcal{D}} f v d\mathcal{D},$$

$$(\mathbb{P}_N \dot{W}^Q, v) = \int_{\mathcal{D}} \mathbb{P}_N \dot{W}^Q v d\mathcal{D}.$$

می توان ثابت کرد که فرم دوخطی<sup>۱</sup>  $a(\cdot, \cdot)$  روی فضای سوبولف  $\mathbb{H}_0^1$  کراندار و کورسیو<sup>۲</sup> است، یعنی ثابت های  $\bar{\alpha} > 0, \bar{M} < \infty$  موجود هستند به گونه ای که

$$|a(u, v)| \leq \bar{M} \|u\|_{\mathbb{H}_0^1} \|v\|_{\mathbb{H}_0^1}, \quad \forall u, v \in \mathbb{H}_0^1, \quad (10.4)$$

$$a(u, v) \geq \bar{\alpha} \|v\|_{\mathbb{H}_0^1}^2, \quad \forall v \in \mathbb{H}_0^1. \quad (11.4)$$

روش بدون المان گالرکین درونیاب (IEFG) برای معادله (۱.۴) پیدا کردن جواب  $u_N^\rho \in V_\rho$  است بطوریکه

$$a(u_N^\rho, v) = (f, v) + (\mathbb{P}_N \dot{W}^Q, v), \quad \forall v \in V_\rho. \quad (12.4)$$

**قضیه ۱.۳.۴.** فرض کنید  $u_N, u_N^\rho$  به ترتیب جواب های مساله تغییراتی (۹.۴) و روش IEFG (۱۲.۴) باشند، آنگاه داریم:

$$a(u_N - u_N^\rho, v) = 0 \quad \forall v \in V_\rho, \quad 1.$$

$$a(u_N - u_N^\rho, u_N - u_N^\rho) = \inf_{v \in V_\rho} a(u_N - v, u_N - v), \quad 2.$$

$$\|u_N - u_N^\rho\|_{\mathbb{H}_0^1} \leq C \inf_{v \in V_\rho} \|u_N - v\|_{\mathbb{H}_0^1}. \quad 3.$$

برهان. با تفاضل (۹.۴) و (۱۲.۴) برای هر  $v \in V_\rho$  داریم

$$a(u_N - u_N^\rho, v) = a(u_N, v) - a(u_N^\rho, v) = 0,$$

حال نرم انرژی  $\|u\|_E = \sqrt{a(u, u)}$  را در نظر بگیرید، داریم

$$\|u_N - u_N^\rho\|_E^2 = a(u_N - u_N^\rho, u_N - u_N^\rho),$$

$$= a(u_N - u_N^\rho, u_N - v) + a(u_N - u_N^\rho, v - u_N^\rho),$$

$$= a(u_N - u_N^\rho, u_N - v), \quad (v - u_N^\rho \in V_\rho),$$

$$\leq \|u_N - u_N^\rho\|_E \|u_N - v\|_E. \quad (\text{نامساوی شوارتز})$$

<sup>1</sup>bilinear form

<sup>2</sup>coercive

اگر  $\circ \neq \|u_N - u_N^\rho\|_E$  باشد با تقسیم آن، نامساوی  $\|u_N - u_N^\rho\|_E \leq \|u_N - v\|_E$  برای هر  $v \in V_\rho$  بدست می‌آید. اگر  $\|u_N - u_N^\rho\|_E = \circ$ ، این نامساوی بدیهی است. با اینفیمم گرفتن روی  $v \in V_\rho$  داریم

$$\|u_N - u_N^\rho\|_E \leq \inf_{v \in V_\rho} \|u_N - v\|_E.$$

چون  $v \in V_\rho$  پس

$$\inf_{v \in V_\rho} \|u_N - v\|_E \leq \|u_N - u_N^\rho\|_E.$$

بنابراین

$$\|u_N - u_N^\rho\|_E = \inf_{v \in V_\rho} \|u_N - v\|_E,$$

یعنی

$$a(u_N - u_N^\rho, u_N - u_N^\rho) = \inf_{v \in V_\rho} a(u_N - v, u_N - v).$$

برای مورد سوم داریم

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \|u_N - u_N^\rho\|_{\mathbb{H}^1}^2 &\leq a(u_N - u_N^\rho, u_N - u_N^\rho), \quad (11.4) \\ &= a(u_N - u_N^\rho, u_N - v) + a(u_N - u_N^\rho, v - u_N^\rho), \\ &= a(u_N - u_N^\rho, u_N - v), \quad (v - u_N^\rho \in V_\rho), \\ &\leq \bar{M} \|u_N - u_N^\rho\|_{\mathbb{H}^1} \|u_N - v\|_{\mathbb{H}^1}. \quad (10.4) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|u_N - u_N^\rho\|_{\mathbb{H}^1} \leq \frac{\bar{M}}{\bar{\alpha}} \|u_N - v\|_{\mathbb{H}^1}.$$

با اینفیمم گرفتن روی تمام  $v \in V_\rho$  داریم

$$\|u_N - u_N^\rho\|_{\mathbb{H}^1} \leq \frac{\bar{M}}{\bar{\alpha}} \inf_{v \in V_\rho} \|u_N - v\|_{\mathbb{H}^1}.$$

□

که این اثبات را کامل می‌کند.

عملگر درونیاب روش IMLS به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{I}u = \mathcal{S}u + \sum_{i=1}^m a_i(x)g_i(x) = \Phi^T u.$$

در [۲۴، ۲۵] داریم اگر  $u \in \mathbb{H}^{m+1}$  باشد، آنگاه تابع کراندار  $C'_k(x)$  و ثابت  $C_k$  وجود دارند به گونه‌ای که

$$\frac{\partial^{|k|}}{\partial k_1 \partial k_2 \dots \partial k_n} \Phi_I(x) = C'_k(x) \rho_x^{-|k|}, \quad \|\mathcal{I}u - u\|_{\mathbb{H}^k} \leq C_k \rho^{m+1-|k|} \|u\|_{\mathbb{H}^{m+1}}, \quad (13.4)$$

که در آن  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ ،  $0 \leq |k| \leq m$

با فرض  $\|u_N - u_N^\rho\|_E^2 = a(u_N - u_N^\rho, u_N - u_N^\rho)$ ، تخمین خطای نرم انرژی و نرم  $\mathbb{H}^1$  را به صورت زیر داریم.

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنید که  $u \in \mathbb{H}^{m+1}$  و  $u_N$  و  $u_N^\rho$  به ترتیب جواب‌های (۹.۴) و (۱۲.۴) باشند، آنگاه ثابت‌های  $C_1$  و  $C_2$  مستقل از  $\rho$  وجود دارند بطوریکه،

$$\|u_N - u_N^\rho\|_E \leq C_1 \rho^m \|u\|_{\mathbb{H}^{m+1}},$$

$$\|u_N - u_N^\rho\|_{\mathbb{H}^1} \leq C_2 \rho^m \|u\|_{\mathbb{H}^{m+1}}.$$

برهان. با توجه به قضیه ۱.۳.۴ و معادله (۱۳.۴) داریم،

$$\begin{aligned} \|u_N - u_N^\rho\|_E &= a(u_N - u_N^\rho, u_N - u_N^\rho), \\ &= \inf_{v \in V_\rho} a(u_N - v, u_N - v), \\ &\leq a(u_N - \mathcal{I}u_N, u_N - \mathcal{I}u_N), \\ &\leq \bar{M} \|u_N - \mathcal{I}u_N\|_{\mathbb{H}^1}^2 \leq C_1 \rho^{2m} \|u_N\|_{\mathbb{H}^{m+1}}^2, \\ \|u_N - u_N^\rho\|_{\mathbb{H}^1} &\leq C \inf_{v \in V_\rho} \|u_N - v\|_{\mathbb{H}^1}, \\ &\leq C \|u_N - \mathcal{I}u_N\|_{\mathbb{H}^1}, \\ &\leq C_2 \rho^m \|u_N\|_{\mathbb{H}^{m+1}}. \end{aligned}$$

□

قضیه ۳.۳.۴. فرض کنید که  $u \in \mathbb{H}^{m+1}$  باشد و  $u_N$  و  $u_N^\rho$  به ترتیب جواب‌های (۹.۴) و (۱۲.۴) باشند، آنگاه ثابت  $C$  مستقل از  $\rho$  موجود است بطوریکه،

$$\|u_N - u_N^\rho\|_{L^2} \leq C \rho^{m+1} \|u_N\|_{\mathbb{H}^{m+1}}.$$

برهان. برای هر  $g \in L^2$  فرض  $\varphi \in \mathbb{H}_0^1 \cap \mathbb{H}^2$ ، جواب معادله زیر باشد

$$a(\varphi, v) = (g, v) \quad \forall v \in \mathbb{H}_0^1,$$

آنگاه تخمین زیر را خواهیم داشت،

$$\|\varphi\|_{\mathbb{H}^2} \leq \|g\|_{L^2}. \quad (۱۴.۴)$$

اگر  $v = u_N - u_N^\rho$  داریم،

$$a(\varphi, u_N - u_N^\rho) = (g, u_N - u_N^\rho), \quad (۱۵.۴)$$

و برای هر  $v_\rho \in V_\rho$  با توجه به قضیه ۱.۳.۴ داریم،

$$a(v_\rho, u_N - u_N^\rho) = 0. \quad (۱۶.۴)$$

با توجه به معادله (۱۵.۴) و (۱۶.۴) نتیجه می‌شود که،

$$a(\varphi - v_\rho, u_N - u_N^\rho) = (g, u_N - u_N^\rho). \quad (۱۷.۴)$$

اگر  $v_\rho = \mathcal{I}\varphi$  و  $g = u_N - u_N^\rho$  اختیار شوند آنگاه،

$$\begin{aligned} \|u_N - u_N^\rho\|_{L^2}^2 &= (u_N - u_N^\rho, u_N - u_N^\rho), \\ &= a(\varphi - \mathcal{I}\varphi, u_N - u_N^\rho), \quad \text{با توجه به (۱۷.۴)} \\ &\leq \bar{M}\|\varphi - \mathcal{I}\varphi\|_{\mathbb{H}^1} \|u_N - u_N^\rho\|_{\mathbb{H}^1}, \quad \text{با توجه به (۱۰.۴)} \\ &\leq \bar{M}C_1\rho\|\varphi\|_{\mathbb{H}^2} C_2\rho^m \|u_N\|_{\mathbb{H}^{m+1}}. \quad \text{با توجه به (۱۳.۴) و قضیه ۲.۳.۴} \end{aligned}$$

با توجه به معادله (۱۴.۴) و (۱۸.۴) خواهیم داشت،

$$\|u_N - u_N^\rho\|_{L^2} \leq C\rho^{m+1} \|u_N\|_{\mathbb{H}^{m+1}}.$$

□ که این اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۴.۳.۴. اگر  $p \geq 1$  و فرض‌های ۱.۲.۴ و ۲.۲.۴ برقرار باشند و  $u_N$  و  $u_N^\rho$  به ترتیب جواب‌های (۹.۴) و (۱۲.۴) باشند، آنگاه ثابت  $C$  مستقل از  $\rho$  و  $\lambda_N$  وجود دارند بطوریکه،

$$(\mathbb{E}\|u_N - u_N^\rho\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C\rho^\gamma \lambda_N^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma}} (1 + \|A^{\frac{\beta-\gamma}{\gamma}}\|_{\mathcal{L}_\gamma^c}). \quad (۱۹.۴)$$

بعلاوه فرض کنید که  $f$  دارای مشتقات کراندار تا مرتبه  $m-1$  برای  $m \geq 2$  باشد، که مشتق اول آن کراندار به  $\gamma$  باشد آنگاه،

$$(\mathbb{E}\|u_N - u_N^\rho\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C\rho^{m+1} \lambda_N^{\frac{m+1-\beta}{\gamma}} (1 + \|A^{\frac{\beta-\gamma}{\gamma}}\|_{\mathcal{L}_\gamma^c}). \quad (۲۰.۴)$$

برهان. با توجه به قضیه ۳.۳.۴ می‌دانیم که،

$$\|u_N - u_N^\rho\|_{L^2} \leq C\rho^\gamma \|u_N\|_{\mathbb{H}^2}, \quad (۲۱.۴)$$

و

$$\|u_N - u_N^\rho\|_{L^2} \leq C\rho^{m+1} \|u_N\|_{\mathbb{H}^{m+1}}. \quad (۲۲.۴)$$

بنابراین با توجه به معادله (۶.۴) و (۲۱.۴) می‌توان دید که (۱۹.۴) صحیح است و همچنین با توجه به (۷.۴) و (۲۲.۴) می‌توان دید که (۲۰.۴) برقرار است. □

## ۴.۴ حل معادله بیضوی تصادفی با روش بدون المان گالرکین درونیاب

در این بخش معادله دیفرانسیل تصادفی بیضوی، با استفاده از روش بدون المان گالرکین درونیاب حل شده است. یکی از برتری‌های روش IIEFG این است که شرایط مرزی اساسی را می‌توان به صورت مستقیم اعمال کرد.

معادله

$$-\nabla^2 u(\mathbf{x}) + bu(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \dot{W}^Q(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \quad (23.4)$$

و شرایط مرزی از نوع دیریکه یعنی،

$$u(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}, \quad (24.4)$$

را در نظر بگیرید که  $u(\mathbf{x})$  یک تابع مجهول است و  $g \in L^2(\mathcal{D})$  یک تابع پیوسته لیب شیتس،  $b$  یک ثابت مثبت،  $\bar{u}$  معلوم و  $\dot{W}^Q$  اختلال گاوسی با میانگین صفر و عملگر کوواریانس  $Q$  است. فرم ضعیف گالرکین معادله (23.4) و (24.4) به شکل زیر است،

$$\int_{\mathcal{D}} \delta(\nabla u)^T \cdot \nabla u d\mathcal{D} + b \int_{\mathcal{D}} \delta u^T \cdot u d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \delta u^T \cdot g(\mathbf{x}) d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \delta u^T \cdot \dot{W}^Q(\mathbf{x}) d\mathcal{D}. \quad (25.4)$$

با توجه به روش SIMLS تابع مجهول  $u(\mathbf{x})$  در نقطه اختیاری  $\mathbf{x}$  را به شکل زیر می توان نمایش داد،

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \Phi^s(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_{I=1}^N \phi_I^s(\mathbf{x})u_I, \quad (26.4)$$

که  $N$  تعداد نقاطی است که در دامنه فشرده نقطه  $\mathbf{x}$  قرار دارند. با جایگذاری (26.4) در معادله (25.4) خواهیم داشت،

$$\int_{\mathcal{D}} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T) \mathbf{u} d\mathcal{D} + b \int_{\mathcal{D}} \delta \mathbf{u}^T (\Phi^s)^T(\mathbf{x}) \cdot \Phi^s(\mathbf{x}) \mathbf{u} d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \delta \mathbf{u}^T (\Phi^s)^T(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \delta \mathbf{u}^T (\Phi^s)^T(\mathbf{x}) \cdot \dot{W}^Q(\mathbf{x}) d\mathcal{D}.$$

که

$$\mathbf{B}^T = \left[ \nabla \phi_1^s(\mathbf{x}) \quad \nabla \phi_2^s(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \nabla \phi_N^s(\mathbf{x}) \right],$$

چون تابع آزمون  $\delta \mathbf{u}$  اختیاری است، داریم

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (27.4)$$

که

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\mathcal{D}} \nabla \phi_I^s \cdot \nabla \phi_J^s d\mathcal{D} + b \int_{\mathcal{D}} \phi_I^s \cdot \phi_J^s d\mathcal{D}, \quad (28.4)$$

$$\mathbf{F}_I = \int_{\mathcal{D}} \Phi_I^s(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \Phi_I^s(\mathbf{x}) \cdot \dot{W}^Q(\mathbf{x}) d\mathcal{D}. \quad (29.4)$$

با توجه به تعریف، ماتریس  $\mathbf{K}$  یک ماتریس متقارن است و همچنین معکوس پذیر است زیرا

$$\mathbf{K} = \int_{\mathcal{D}} (\nabla \phi^s)^T \cdot \nabla \phi^s d\mathcal{D} + b \int_{\mathcal{D}} (\phi^s)^T \cdot \phi^s d\mathcal{D},$$

و برای هر بردار اختیاری  $z$  داریم

$$\begin{aligned} z^T \mathbf{K} z &= z^T \left( \int_{\mathcal{D}} (\nabla \phi^s)^T \cdot \nabla \phi^s d\mathcal{D} + b \int_{\mathcal{D}} (\phi^s)^T \cdot \phi^s d\mathcal{D} \right) z, \\ &= \int_{\mathcal{D}} z^T (\nabla \phi^s)^T \cdot \nabla \phi^s z d\mathcal{D} + b \int_{\mathcal{D}} z^T (\phi^s)^T \cdot \phi^s z d\mathcal{D}, \\ &= \int_{\mathcal{D}} (\nabla \phi^s z)^T \cdot \nabla \phi^s z d\mathcal{D} + b \int_{\mathcal{D}} (\phi^s z)^T \cdot \phi^s z d\mathcal{D}, \\ &= \int_{\mathcal{D}} \|\nabla \phi^s z\|_2^2 d\mathcal{D} + b \int_{\mathcal{D}} \|\phi^s z\|_2^2 d\mathcal{D}, \end{aligned}$$

بنابراین به خاطر مثبت بودن ثابت  $b$  داریم  $z^T \mathbf{K} z > 0$ ، پس ماتریس  $\mathbf{K}$  معین مثبت است و در نتیجه معکوس پذیر است. به همین دلیل جواب دستگاه (۲۷.۴) موجود و یکتا است.

اگرچه تابع وزن در نقاط پراکنده تکین است اما توابع شکل روش SIMLS در هیچ نقطه‌ای تکین نیستند. انتگرال گیری‌های عددی را می‌توان توسط روش گاوس لژاندر محاسبه کرد. چون توابع شکل روش SIMLS دارای خاصیت دلتای کرونکر هستند، شرایط مرزی اساسی را می‌توان به صورت مستقیم در دستگاه (۲۷.۴) اعمال کرد.

**الگوریتم ۱.۴.۴.** این الگوریتم جواب (۲۳.۴) را به وسیله روش ارائه شده در نقاط دلخواه دامنه جواب محاسبه می‌کند.

۱. ایجاد نقاط پراکنده.

۲. محاسبه  $\phi_i, \nabla \phi_i, i = 1, 2, \dots, N$  در نقاط پراکنده با استفاده از معادله (۴۳.۲) و (۴۷.۲).

۳. محاسبه ماتریس‌های  $K, F$  توسط معادله‌های (۲۸.۴) و (۲۹.۴).

۴. اعمال شرایط مرزی در دستگاه (۲۷.۴).

۵. حل دستگاه اصلاح شده  $Ku = F$ .

۶. محاسبه جواب در نقطه دلخواه با استفاده از معادله (۴۲.۲).

## ۵.۴ نتایج عددی

قبل از شروع بخش نتایج عددی به صورت خلاصه توضیح می‌دهیم که چگونه اختلال موجود در معادله دیفرانسیل تصادفی را تقریب می‌زنیم. با توجه به معادله (۴.۴) می‌توان نوشت،

$$\dot{W}^Q(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{\frac{1}{2}} \psi_j(\mathbf{x}) \eta_j(\omega), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \omega \in \Omega,$$

پس داریم،

$$\int_{\mathcal{D}} \Phi_I^s(\mathbf{x}) \cdot \dot{W}^Q(\mathbf{x}, \omega) d\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{\frac{1}{2}} \eta_j(\omega) \int_{\mathcal{D}} \Phi_I^s(\mathbf{x}) \cdot \psi_j(\mathbf{x}) d\mathcal{D}.$$

که بسط فوق را می‌توان به شکل زیر تقریب زد،

$$\int_{\mathcal{D}} \Phi_I^s(\mathbf{x}) \cdot \dot{W}^Q(\mathbf{x}, \omega) d\mathcal{D} \approx \sum_{j=1}^J \sigma_j^{\frac{1}{2}} \eta_j(\omega) \int_{\mathcal{D}} \Phi_I^s(\mathbf{x}) \cdot \psi_j(\mathbf{x}) d\mathcal{D}.$$

در مثال‌های عددی زیر دو مدل اختلال در نظر گرفته می‌شود: اختلال گاوسی با عملگر کواریانس  $Q = I$  و مدل همبسته<sup>۱</sup>. در مدل همبسته عملگر کواریانس را  $Q = \Lambda^{-s}$  با  $s \in \mathbb{R}$  که  $\Lambda = -\nabla^2$  است اختیار می‌کنیم.

فرض  $\mathbb{E}u$  و  $Dev(u)$  نماد میانگین و انحراف معیار باشند. برای محاسبه  $\mathbb{E}u$  و  $Dev(u)$  می‌توان از روش مونته-کارلو<sup>۲</sup> استفاده کرد.

$$\mathbb{E}(u) \approx \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \hat{u}(w_k), \quad Dev(u) \approx \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \left( \hat{u}(w_l) - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \hat{u}(w_k) \right)^2}. \quad (30.4)$$

معادله‌های (۲۳.۴) و (۲۴.۴) را در نظر بگیرید. چون  $\mathbb{E}\dot{W}^Q = 0$  به راحتی می‌توان دید که  $\mathbb{E}u$  جواب دقیق معادله قطعی نظیر یعنی معادله زیر است.

$$\begin{cases} -\nabla^2 \mathbb{E}u(\mathbf{x}) + b\mathbb{E}u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \\ \mathbb{E}u(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}. \end{cases} \quad (31.4)$$

برای نشان دادن همگرایی روش ارائه شده از خطاهای زیر استفاده کرده‌ایم:

$$L_{\infty} - error = \|\mathbb{E}u - \mathbb{E}(u)\|_{\infty}, \quad RMS - error = \frac{1}{\sqrt{N}} \|\mathbb{E}u - \mathbb{E}(u)\|_2. \quad (32.4)$$

توجه کنید که  $\mathbb{E}u$  جواب دقیق در غیاب اختلال گاوسی است یعنی جواب معادله (۳۱.۴)، اما  $\mathbb{E}(u)$  که در معادله (۳۲.۴) ظاهر شده است میانگینی است که در معادله (۳۰.۴) تعریف شده است.

در مثال‌های زیر نشان دادیم که  $\mathbb{E}(u)$  با افزایش نقاط همگرا به  $\mathbb{E}u$  است. شرایط مرزی و تابع  $g$  نیز از روی جواب دقیق محاسبه شده‌اند. همچنین

$$q_{\mathbf{x}} = \max_{1 \leq i \leq N} \min_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2.$$

**مثال ۱.۵.۴.** معادله یک بعدی (۲۳.۴) با  $b = 0$  را روی  $\mathcal{D} = [0, 1]$  در نظر بگیرید.  $\hat{m} = 1$  و  $Q = \Lambda^{-1}$  اختیار می‌کنیم. جواب دقیق این مثال در غیاب اختلال گاوسی  $\bar{u} = \sin(\pi x)$  است. جدول مقادیر میانگین دقیق و تقریبی جواب در جدول ۱.۴ آورده شده است. خطاهای محاسبه شده برای این مثال در جدول ۲.۴ مشخص شده است.

از جدول ۲.۴ و نمودار خطای ۱.۴ می‌توان فهمید که روش ارائه شده همگراست. همچنین تقریب میانگین جواب، خطای مطلق و انحراف معیار جواب این مثال در شکل ۱.۴ به نمایش درآمده است.

<sup>1</sup>correlated

<sup>2</sup>Monte-Carlo

## ۵۴ حل معادله دیفرانسیل تصادفی بیضوی با روش بدون المان گالرکین

جدول ۱.۴: جدول مقادیر میانگین تقریبی و دقیق جواب برای مثال ۱.۵.۴ با  $q_x = 0.313$ .

میانگین تقریبی	میانگین دقیق	x
0/0980335836175440	0/0980171403295606	0/03125
0/1951204904798117	0/195090322016128	0/0625
0/471439142129948	0/471396736825998	0/15625
0/707140700477721	0/707106781186548	0/25
0/881926626721554	0/881921264348355	0/34375
0/980786908034691	0/980785280403230	0/4375
0/995212346782712	0/995184726672197	0/53125
0/923963459006184	0/923879532511287	0/625
0/773139664863138	0/773010453362737	0/71875
0/555723789595910	0/555570233019602	0/8125
0/290397275632129	0/290284677254462	0/90625
0/0980556223681373	0/0980171403295608	0/96875

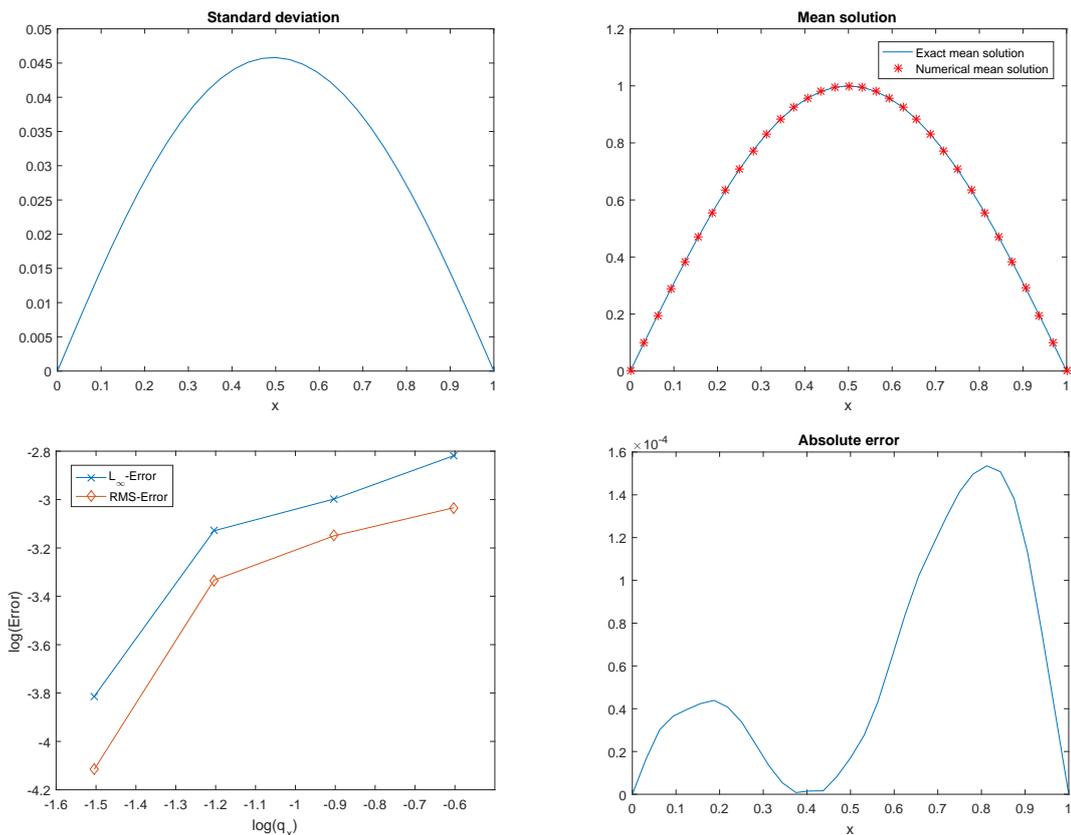
جدول ۲.۴: تخمین خطای بدست آمده روش ارائه شده برای مثال ۱.۵.۴.

RMS - error	$L_\infty$ - error	$q_x$
9/2583e-04	1/5198e-03	0/25
7/0809e-04	1/0052e-03	0/125
4/6395e-04	7/4290e-04	0/0625
7/6647e-05	1/5356e-04	0/0313

مثال ۲.۵.۴. به عنوان مثالی دیگر از معادله یک بعدی فرض کنید که  $\bar{u} = (1 - x^2)$  جواب معادله (۲۳.۴) در غیاب اختلال گاوسی روی  $\mathcal{D} = [0, 1]$  باشد. همچنین  $b = 1$  و  $\hat{m} = 3$  و  $Q = \Lambda^{-1/2}$  اختیار می کنیم. مقادیر میانگین دقیق و تقریبی جواب در جدول ۳.۴ مشخص شده است.

جدول ۴.۴ و نمودار خطای لگاریتمی ۲.۴ همگرایی روش را نشان می دهند. همچنین میانگین، انحراف معیار و خطای مطلق در شکل ۲.۴ به نمایش در آمده اند.

مثال ۳.۵.۴. معادله (۲۳.۴) را روی  $\mathcal{D} = [-1, 1]$  در نظر بگیرید. فرض  $b = 1$  و جواب دقیق مسئله  $\bar{u} = (1 - x^2) \cos(\pi x)$  باشد. همچنین  $\hat{m} = 4$  و  $Q = I$  باشد. مقادیر میانگین دقیق و تقریبی جواب در جدول ۵.۴ مشخص شده است.



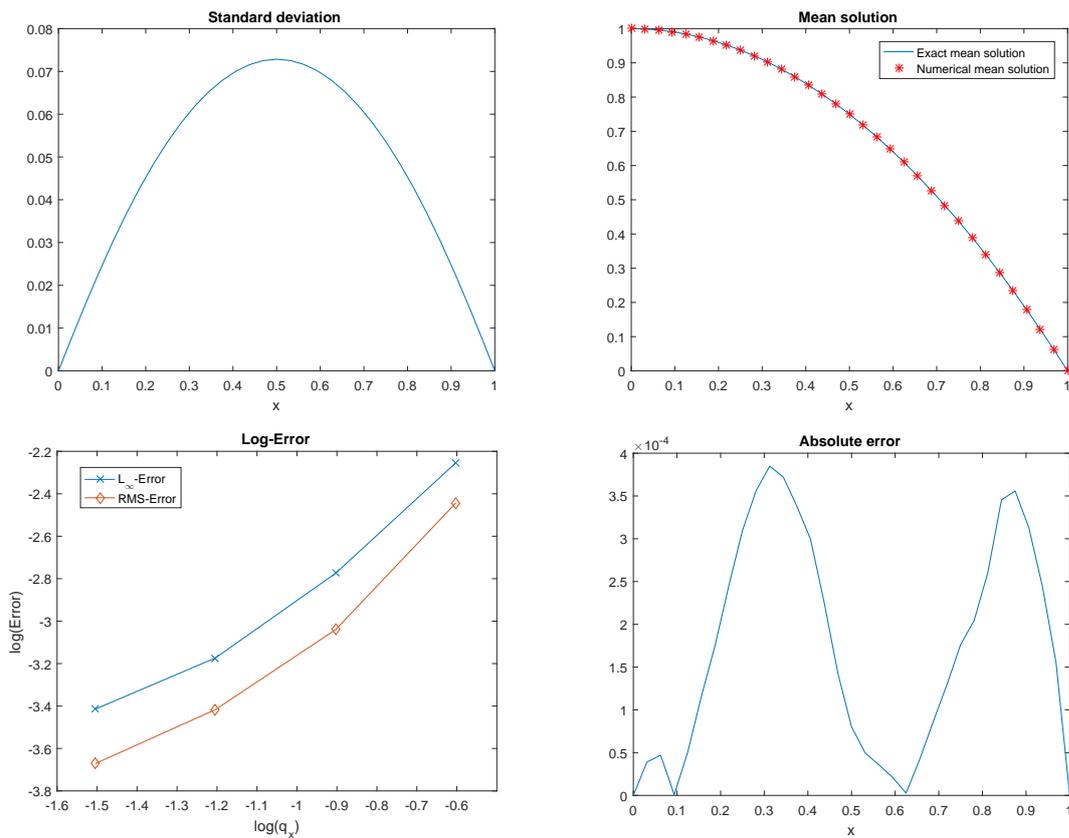
شکل ۱.۴: میانگین، خطای مطلق، انحراف معیار و خطای لگاریتمی مثال ۱.۵.۴ با  $q_x = 0.313\%$ .

جدول ۳.۴: جدول مقادیر میانگین تقریبی و دقیق جواب برای مثال ۲.۵.۴ با  $q_x = 0.313\%$ .

میانگین تقریبی	میانگین دقیق	$x$
۰/۹۹۹۰۶۲۴۹۹۹۵۹۴۶۶	۰/۹۹۹۰۲۳۴۳۷۵۰۰۰۰۰	۰/۰۳۱۲۵
۰/۹۹۶۱۴۰۷۷۴۳۲۹۹۲۶	۰/۹۹۶۰۹۳۷۵۰۰۰۰۰۰	۰/۰۶۲۵
۰/۹۷۵۴۶۹۴۴۱۶۸۲۷۷۷	۰/۹۷۵۵۸۵۹۳۷۵۰۰۰۰۰	۰/۱۵۶۲۵
۰/۹۳۷۱۹۰۴۵۸۰۴۶۹۱۴	۰/۹۳۷۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۲۵
۰/۸۸۱۴۶۳۸۷۷۷۰۱۹۵۴	۰/۸۸۱۸۳۵۹۳۷۵۰۰۰۰۰	۰/۳۴۳۷۵
۰/۸۰۸۳۶۸۶۸۹۹۱۶۳۰۷	۰/۸۰۸۵۹۳۷۵۰۰۰۰۰۰	۰/۴۳۷۵
۰/۷۱۷۷۲۳۷۱۴۳۷۶۲۱۸	۰/۷۱۷۷۳۴۳۷۵۰۰۰۰۰	۰/۵۳۱۲۵
۰/۶۰۹۳۷۷۷۳۸۲۰۹۶۲۰	۰/۶۰۹۳۷۵۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۶۲۵
۰/۴۸۳۵۲۸۱۲۴۹۳۰۶۹۰	۰/۴۸۳۳۹۸۴۳۷۵۰۰۰۰۰	۰/۷۱۸۷۵
۰/۳۴۰۱۰۴۴۸۲۰۱۱۳۵۳	۰/۳۳۹۸۴۳۷۵۰۰۰۰۰۰	۰/۸۱۲۵
۰/۱۷۹۰۲۴۲۲۶۷۲۷۸۴۴	۰/۱۷۸۷۱۰۹۳۷۵۰۰۰۰۰	۰/۹۰۶۲۵
۰/۰۶۱۶۷۸۵۹۴۰۶۶۵۰۸۰	۰/۰۶۱۵۲۳۴۳۷۵۰۰۰۰۰	۰/۹۶۸۷۵

جدول ۴.۴: تخمین خطای بدست آمده روش ارائه شده برای مثال ۲.۵.۴

$RMS - error$	$L_{\infty} - error$	$q_x$
$3/6095e-03$	$5/5110e-03$	$0/25$
$9/1262e-04$	$1/6822e-03$	$0/125$
$3/8281e-04$	$6/7063e-04$	$0/625$
$2/1324e-04$	$3/8489e-04$	$0/313$



شکل ۲.۴: میانگین، انحراف معیار، خطای مطلق و لگاریتمی جواب مثال ۲.۵.۴ با  $q_x = 0/313$ .

جدول ۵.۴: جدول مقادیر میانگین تقریبی و دقیق جواب برای مثال ۳.۵.۴ با  $q_x = 0.625$ .

میانگین تقریبی	میانگین دقیق	x
$-0.119494663120170$	$-0.118766967548829$	$-0.9375$
$-0.217566579182185$	$-0.216534265432333$	$-0.875$
$-0.292840393180929$	$-0.292976490068931$	$-0.8125$
$0.000161723839493350$	$4/59242549680257e-17$	$-0.75$
$0.501432246402861$	$0.501315327451282$	$-0.6875$
$0.910118818984149$	$0.909443914815798$	$-0.625$
$0.977799438543760$	$0.976954087901655$	$0.5625$
$0.663310246412271$	$0.662912607362388$	$0.50$
$0.157922729326877$	$0.157748815067729$	$0.4375$
$-0.233054551215858$	$-0.233197716597477$	$0.375$
$-0.283352730615289$	$-0.282569751055943$	$0.3125$
$-0.119494663120166$	$-0.118766967548829$	$0.25$

جدول ۶.۴: تخمین خطای بدست آمده روش ارائه شده برای مثال ۳.۵.۴.

$RMS - error$	$L_{\infty} - error$	$q_x$
$1/0.271e-01$	$1/5318e-01$	$0.5$
$2/9.091e-02$	$4/4953e-02$	$0.25$
$2/2389e-03$	$3/9.99e-03$	$0.125$
$5/3623e-04$	$1/1241e-03$	$0.625$
$1/2292e-04$	$2/6423e-04$	$0.3125$

جدول ۷.۴: جدول مقادیر میانگین تقریبی و دقیق جواب برای مثال ۴.۵.۴ با  $q_x = 0/0625$ .

میانگین تقریبی	میانگین دقیق	(x, y)
0/00961484442393659	0/00960735979838478	(0/03125, 0/03125)
0/0544978290439133	0/0544554054928090	(0/03125, 0/1875)
0/0865107441653600	0/0864434003272562	(0/03125, 0/34375)
0/0980935007041512	0/0980171403295606	(0/03125, 0/5)
0/0865107441653588	0/0864434003272562	(0/03125, 0/65625)
0/0544978290439091	0/0544554054928090	(0/03125, 0/8125)
0/00961484442393637	0/00960735979838480	(0/03125, 0/96875)
0/0758273014512522	0/0757682740834730	(0/28125, 0/03125)
0/429796170290990	0/429461597701324	(0/28125, 0/1875)
0/682265462378960	0/681734356384160	(0/28125, 0/34375)
0/773612668113963	0/773010453362737	(0/28125, 0/5)
0/682265462378958	0/681734356384160	(0/28125, 0/65625)
0/429796170290962	0/429461597701324	(0/28125, 0/8125)
0/0758273014512515	0/0757682740834728	(0/28125, 0/96875)
0/0976211536865781	0/0975451610080641	(0/53125, 0/03125)
0/553325744037622	0/552895010494822	(0/53125, 0/1875)
0/878358325869716	0/877674572406916	(0/53125, 0/34375)
0/995960026566250	0/995184726672197	(0/53125, 0/5)
0/878358325869714	0/877674572406916	(0/53125, 0/65625)
0/553325744037584	0/552895010494822	(0/53125, 0/8125)
0/0976211536865766	0/0975451610080644	(0/53125, 0/96875)
0/0622298580668099	0/0621814155579989	(0/78125, 0/03125)
0/352724601337174	0/352450024708867	(0/78125, 0/1875)
0/559920794689285	0/559484927263708	(0/78125, 0/34375)
0/634887509037452	0/634393284163646	(0/78125, 0/5)
0/559920794689282	0/559484927263708	(0/78125, 0/65625)
0/352724601337160	0/352450024708867	(0/78125, 0/8125)
0/0622298580668098	0/0621814155579990	(0/78125, 0/96875)

جدول ۸.۴: تخمین خطای بدست آمده روش ارائه شده برای مثال ۴.۵.۴.

$RMS - error$	$L_{\infty} - error$	$q_x$
$1/7323e-02$	$5/1970e-02$	$0/5$
$3/6959e-03$	$9/2556e-03$	$0/25$
$2/9699e-04$	$6/1659e-04$	$0/125$
$8/1140e-05$	$1/8609e-04$	$0/625$

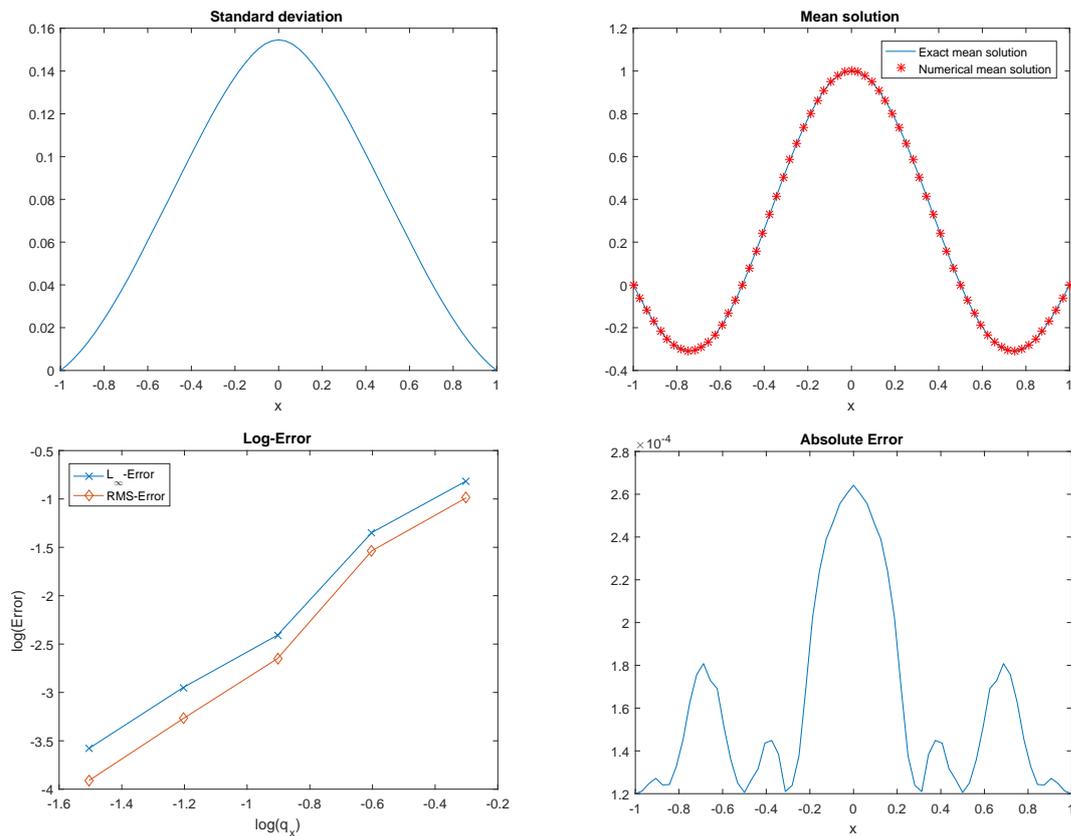
جدول ۹.۴: جدول مقادیر میانگین تقریبی و دقیق جواب برای مثال ۴.۵.۴ با  $q_x = 0/625$ .

میانگین تقریبی	میانگین دقیق	(x, y)
$0/413848657732714$	$0/413818359375000$	$(-0/875, -0/875)$
$0/267410383654351$	$0/267333984375000$	$(-0/875, -0/375)$
$0/238126247920794$	$0/238037109375000$	$(-0/875, 0/125)$
$0/326006929961970$	$0/325927734375000$	$(-0/875, 0/625)$
$1/51741038365436$	$1/51733398437500$	$(-0/375, -0/875)$
$0/980470641478242$	$0/980224609375000$	$(-0/375, -0/375)$
$0/873169004725039$	$0/872802734375000$	$(-0/375, 0/125)$
$1/19533637436809$	$1/19506835937500$	$(-0/375, 0/625)$
$1/76570609717343$	$1/765625000000000$	$(0, -0/875)$
$1/14101246614481$	$1/140625000000000$	$(0, -0/375)$
$1/01601883944128$	$1/015625000000000$	$(0, 0/125)$
$1/39081271968804$	$1/390625000000000$	$(0, 0/625)$
$1/32428925201702$	$1/324218750000000$	$(0/5, -0/875)$
$0/855730680348712$	$0/855468750000000$	$(0/5, -0/375)$
$0/762008591350820$	$0/761718750000000$	$(0/5, 0/125)$
$1/04316042791787$	$1/042968750000000$	$(0/5, 0/625)$
$0/413848657732712$	$0/413818359375000$	$(0/875, -0/875)$
$0/267410383654352$	$0/267333984375000$	$(0/875, -0/375)$
$0/238126247920793$	$0/238037109375000$	$(0/875, 0/125)$
$0/326006929961968$	$0/325927734375000$	$(0/875, 0/625)$

جدول ۱۰.۴: تخمین خطای بدست آمده روش ارائه شده برای مثال ۵.۵.۴.

$RMS - error$	$L_{\infty} - error$	$q_x$
$6/4901e-03$	$1/9470e-02$	$0/5$
$3/7409e-03$	$6/6476e-03$	$0/25$
$6/4659e-04$	$1/9912e-03$	$0/125$
$2/0494e-04$	$4/1162e-04$	$0/0625$

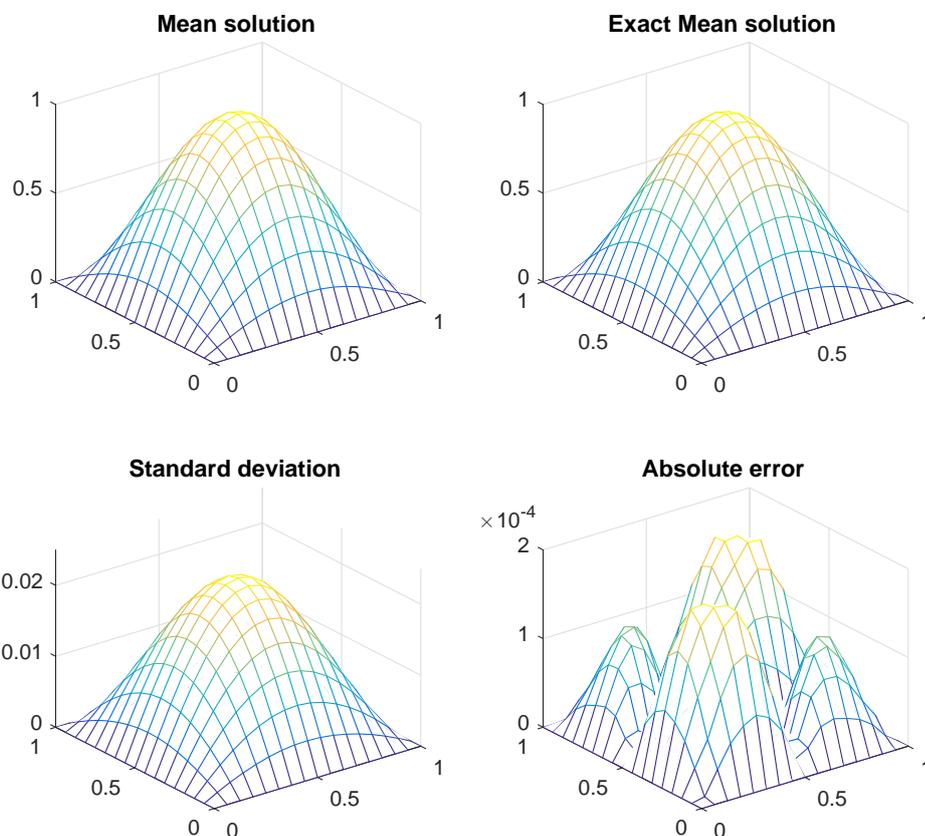
همگرایی روش در جدول ۶.۴ و نمودار لگاریتمی ۳.۴ به خوبی قابل مشاهده است. همچنین میانگین، انحراف معیار، خطای مطلق و لگاریتمی روش ارائه شده برای این مثال در نمودار ۳.۴ رسم شده است.



شکل ۳.۴: میانگین، انحراف معیار، خطای مطلق و لگاریتمی جواب مثال ۳.۵.۴ با  $q_x = 0/0313$ .

مثال ۴.۵.۴. معادله دوبعدی (۲۳.۴) روی  $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 1]$  را در نظر بگیرید. همچنین  $b = 0$  و جواب دقیق را  $\bar{u} = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$  در نظر بگیرید. بعلاوه  $\hat{m} = 1$  و  $Q = \Lambda^{-1}$ . میانگین دقیق و تقریبی جواب در جدول ۷.۴ مشخص شده است. همگرایی روش در جدول

۸.۴ و نمودار ۵.۴ قابل مشاهده است. در شکل ۴.۴ نمودار میانگین، انحراف استاندارد و خطای مطلق جواب رسم شده است.

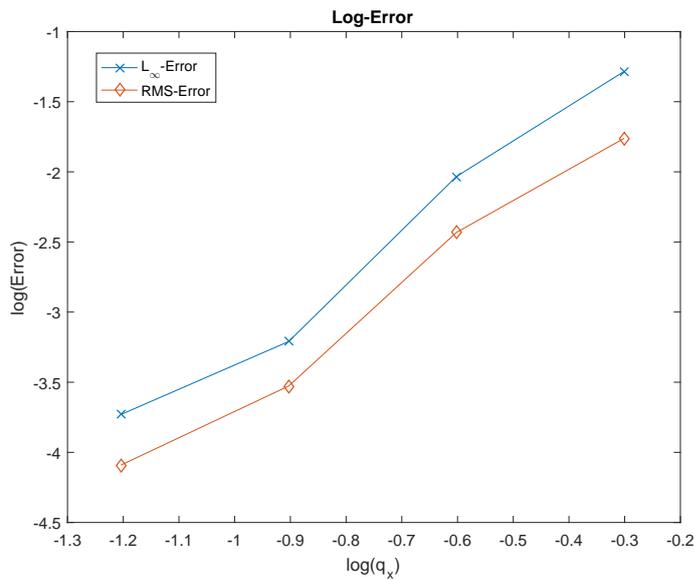


شکل ۴.۴: میانگین، انحراف معیار و خطای مطلق جواب مثال ۴.۵.۴ با  $q_x = 0.625$ .

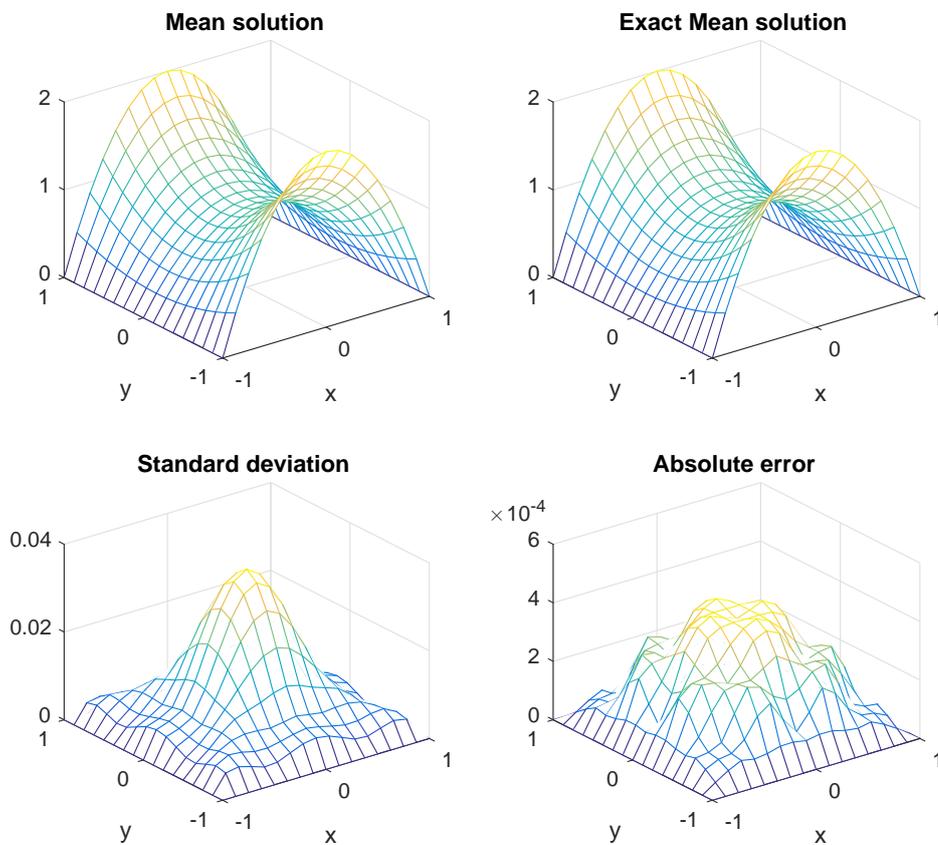
**مثال ۵.۵.۴.** معادله دوبعدی (۲۳.۴) روی  $\mathcal{D} = [-1, 1] \times [-1, 1]$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $b = 0$  و جواب دقیق معادله در غیاب اختلال گاوسی  $\bar{u} = (1 - x^2)(1 + y^2)$  باشد و  $\hat{m} = 1$  و  $Q = \Lambda^{-1/2}$  اختیار شوند. مقادیر میانگین دقیق و تقریبی جواب در جدول ۹.۴ مشخص شده است. جدول ۱۰.۴ و خطای لگاریتمی ۷.۴ نشان می‌دهند که روش ارائه شده همگراست. نمودار میانگین، انحراف معیار و خطای مطلق در شکل ۶.۴ قابل مشاهده هستند.

## ۶.۴ نتیجه گیری

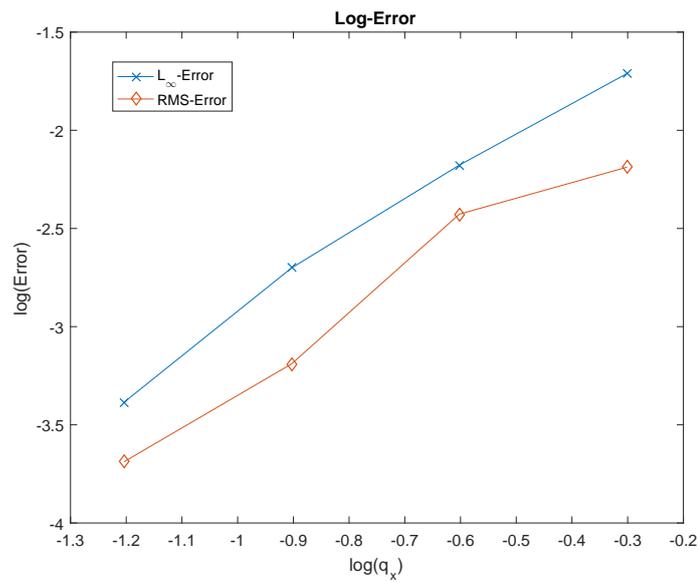
در این فصل روش بدون المان گالرکین درونیاب پایدار شده برای حل عددی معادله دیفرانسیل تصادفی بیضوی معرفی شد. روش معرفی شده از نقاط پراکنده در دامنه جواب بهره می‌برد و تقریب جواب را با استفاده از روش کمترین مربعات متحرک درونیاب پایدار شده بدست می‌آورد.



شکل ۵.۴: خطای لگاریتمی جواب مثال ۴.۵.۴.



شکل ۶.۴: میانگین، انحراف معیار و خطای مطلق مثال ۵.۵.۴ با  $q_x = 0.0625$



شکل ۷.۴: خطای لگاریتمی مثال ۵.۵.۴.

مثال‌های عددی دقت روش ارائه شده را نشان می‌دهند. یکی از برتری‌های این روش بدون شبکه بودن آن است که نیازی به شبکه بندی دامنه جواب نداریم و برتری دیگر آن درونیاب بودن تقریب کمترین مربعات متحرک آن است که باعث می‌شود شرایط مرزی اساسی به صورت مستقیم اعمال شوند.



## فصل ۵

# یک ایده جدید برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روش بدون المان گالرکین

### ۱.۵ مقدمه

روش بدون المان گالرکین یک روش بدون شبکه شناخته شده برای حل معادلات با مشتقات جزئی است [۲۷]. چون توابع شکل تقریب کمترین مربعات متحرک در خاصیت دلتای کرونگر صدق نمی‌کنند، اعمال شرایط مرزی اساسی به سادگی روش عناصر متناهی نیست. ایده‌هایی برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روش بدون المان گالرکین بر پایه اصلاح فرم ضعیف مانند روش ضرایب لاگرانژ، روش جریمه و روش نیچه وجود دارند. روش ضرایب لاگرانژ به علت راحتی اعمال آن در مساله‌های گوناگون، یکی از پرکاربردترین روش‌هاست. در این روش یک تابع مجهول جدید به نام ضریب لاگرانژ تعریف می‌شود. فضای درونیایی ضریب لاگرانژ باید به دقت انتخاب شود، زیرا برای رسیدن به جواب قابل قبول به فضای با درجه بالاتری نیاز داریم و از طرفی هر چه درجه آزادی بیشتر شود دستگاه حاصل از گسسته‌سازی به سمت منفرد شدن پیش می‌رود. از طرف دیگر روش جریمه و نیچه نیاز به انتخاب یک پارامتر عددی دارند. در روش جریمه برای اینکه شرایط مرزی اساسی به شکل مناسبی اعمال شوند باید

مقادیر بزرگی از پارامتر را استفاده کرد. در عمل این به یک دستگاه بدوضع منتهی می‌شود که کاربردپذیری روش را کاهش می‌دهد. بر خلاف روش جریمه روش نیچه مشکل بدوضعی را ندارد گرچه اعمال روش نیچه به‌سادگی روش ضرایب لاگرانژ یا روش جریمه نیست چون اصلاح فرم ضعیف برای هر مساله متفاوت است [۳۶].

روش کمترین مربعات متحرک درونیاب توسط لنکستر و سالکائوسکاس ارائه شد [۱۵]. توابع شکل روش کمترین مربعات متحرک درونیاب بر خلاف روش کمترین مربعات متحرک دارای خاصیت دلتای کرونکر هستند، بنابراین با استفاده از این ویژگی می‌توان شرایط مرزی اساسی را به صورت مستقیم اعمال کرد. در این فصل یک ایده جدید برای اعمال شرایط مرزی اساسی ارائه خواهد شد. ابتدا شرایط مرزی در تقریب تابع مجهول اعمال می‌شود سپس تابع تقریب اصلاح شده در روش بدون المان گالرکین برای حل معادلات با مشتقات جزئی بیضوی به کار برده می‌شود. بنابراین شرایط مرزی به صورت مستقیم اعمال می‌شود.

## ۲.۵ اعمال شرایط مرزی اساسی در روش بدون المان گالرکین برای حل معادلات با مشتقات جزئی تصادفی

معادله با مشتق جزئی بیضوی

$$-\nabla^2 u(\mathbf{x}) + bu(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.5)$$

با شرایط مرزی دیریکله،

$$u(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2.5)$$

را در نظر بگیرید که  $u(\mathbf{x})$  تابع مجهول،  $g \in L^2(\Omega)$ ،  $b$  یک ثابت نامنفی و  $\bar{u}$  معلوم است.

فرم ضعیف گالرکین معادله (۱.۵) و (۲.۵) به شکل زیر می‌باشد،

$$\int_{\Omega} \delta(\nabla u)^T \cdot \nabla u d\Omega + b \int_{\Omega} \delta u^T \cdot u d\Omega = \int_{\Omega} \delta u^T \cdot g(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (3.5)$$

با توجه به روش کمترین مربعات متحرک درونیاب، تقریب تابع مجهول  $u(\mathbf{x})$  در نقطه دلخواه  $\mathbf{x}$  به شکل زیر است،

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x})u_I, \quad (4.5)$$

که  $N$  تعداد نقاطی است که دامنه محمل فشرده آنها نقطه  $\mathbf{x}$  را پوشش می‌دهند. می‌توانیم این نقاط را به دو دسته نقاط درونی و مرزی تقسیم کنیم. بنابراین داریم،

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N_i} \phi_I(\mathbf{x})u_I + \sum_{I=1}^{N_b} \phi_I(\mathbf{x})u_I, \quad (5.5)$$

که  $N_b$  و  $N_i$  به ترتیب تعداد نقاط درونی و مرزی هستند. با اعمال شرایط مرزی (۲.۵) در (۵.۵) داریم

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N_i} \phi_I(\mathbf{x})u_I + \sum_{I=1}^{N_b} \phi_I(\mathbf{x})\bar{u}_I = \Phi_i(\mathbf{x})\mathbf{u} + \Phi_b(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}, \quad (۶.۵)$$

که

$$\mathbf{u} = (u(\mathbf{x}_1), u(\mathbf{x}_2), \dots, u(\mathbf{x}_{N_i})),$$

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}(\mathbf{x}_1), \bar{u}(\mathbf{x}_2), \dots, \bar{u}(\mathbf{x}_{N_b})),$$

$$\Phi_i(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_{N_i}(\mathbf{x})),$$

$$\Phi_b(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_{N_b}(\mathbf{x})).$$

بنابراین شرایط مرزی اساسی در تقریب تابع مجهول اعمال می‌شود. با جایگزینی  $u$  و  $\delta u$  به ترتیب با  $\Phi_i(\mathbf{x})\mathbf{u} + \Phi_b(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}$  و  $\Phi_i(\mathbf{x})\mathbf{u}$  در فرم ضعیف (۳.۵) داریم،

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T (\nabla \Phi_i)^T(\mathbf{x}) (\nabla \Phi_i(\mathbf{x})\mathbf{u} + \nabla \Phi_b(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}) d\Omega + b \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T (\nabla \Phi_i)^T(\mathbf{x}) \cdot (\Phi_i(\mathbf{x})\mathbf{u} + \Phi_b(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T (\Phi_i)^T(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (۷.۵)$$

از آنجا که تابع آزمون  $\delta \mathbf{u}$  دلخواه است، معادله گسسته نهایی به شکل زیر بدست می‌آید،

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{u}}, \quad (۸.۵)$$

که در آن

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \Phi_i)^T(\mathbf{x}) (\nabla \Phi_i)(\mathbf{x}) d\Omega + b \int_{\Omega} (\Phi_i)^T(\mathbf{x}) (\Phi_i)(\mathbf{x}) d\Omega, \quad (۹.۵)$$

$$\mathbf{L} = \int_{\Omega} (\nabla \Phi_i)^T(\mathbf{x}) (\nabla \Phi_b)(\mathbf{x}) d\Omega + b \int_{\Omega} (\Phi_i)^T(\mathbf{x}) (\Phi_b)(\mathbf{x}) d\Omega, \quad (۱۰.۵)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} (\Phi_i)^T(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (۱۱.۵)$$

در حالت شرایط مرزی همگن (۸.۵) به دستگاه زیر تقلیل می‌یابد،

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}. \quad (۱۲.۵)$$

ماتریس  $\mathbf{K}$  یک ماتریس متقارن مثبت معین می‌باشد زیرا،

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \Phi_i)^T(\mathbf{x}) (\nabla \Phi_i)(\mathbf{x}) d\Omega + b \int_{\Omega} (\Phi_i)^T(\mathbf{x}) (\Phi_i)(\mathbf{x}) d\Omega,$$

و برای بردار دلخواه  $z$  داریم،

$$\begin{aligned} z^T \mathbf{K} z &= z^T \left( \int_{\Omega} (\nabla \Phi_i)^T(\mathbf{x})(\nabla \Phi_i)(\mathbf{x}) d\Omega + b \int_{\Omega} (\Phi_i)^T(\mathbf{x})(\Phi_i)(\mathbf{x}) d\Omega \right) z \\ &= \int_{\Omega} z^T (\nabla \Phi_i)^T(\mathbf{x})(\nabla \Phi_i)(\mathbf{x}) z d\Omega + b \int_{\Omega} z^T (\Phi_i)^T(\mathbf{x})(\Phi_i)(\mathbf{x}) z d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\nabla \Phi_i z)^T(\mathbf{x})(\nabla \Phi_i z)(\mathbf{x}) d\Omega + b \int_{\Omega} (\Phi_i z)^T(\mathbf{x})(\Phi_i z)(\mathbf{x}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \|\nabla \Phi_i z\|_2^2 d\Omega + b \int_{\Omega} \|\Phi_i z\|_2^2 d\Omega, \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به نامنفی بودن ثابت  $b$  داریم  $z^T \mathbf{K} z > 0$ ، پس ماتریس  $\mathbf{K}$  معین مثبت و معکوس پذیر است. در نتیجه جواب دستگاه (۸.۵) موجود و یکتاست. انتگرال گیری در روش بدون شبکه را می توان با انتگرال گیری عددی گاوسی انجام داد. با حل دستگاه (۸.۵) می توانیم جواب عددی را در نقاط مورد نظر بدست آوریم.

## ۳.۵ آنالیز خطا

برای  $r \in \mathbb{N}$  فضای  $(\mathbb{H}^r, \|\cdot\|_r)$  نماد فضای سوبولف معمولی به شکل زیر است،

$$\mathbb{H}^r := \left\{ v : \|v\|_{\mathbb{H}^r} := \left( \sum_{|k| \leq r} \|D^k v\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

اگر  $r = 0$  باشد،  $\mathbb{H}^0 := \mathbb{H}$  فضای توابع انتگرال پذیر از مرتبه ۲ روی  $\Omega$  است که ضرب داخلی و نرم آن را با نمادهای  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  و  $\|\cdot\|$  نمایش می دهیم. همچنین از نماد  $\mathbb{H}_0^1$  به عنوان زیرفضایی از  $\mathbb{H}^1$  استفاده می کنیم که عناصرش روی  $\partial\Omega$  صفر هستند. مساله تغییراتی متناسب با معادله (۱.۵) یافتن یک تابع  $u \in \mathbb{H}^1$  است به طوری که،

$$a(u, v) = (g, v), \quad \forall v \in \mathbb{H}_0^1, \quad (13.5)$$

و

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \times \nabla v d\Omega + b \int_{\Omega} u v d\Omega, \\ (g, v) &= \int_{\Omega} g v d\Omega. \end{aligned}$$

می توان نشان داد که فرم خطی  $a(\cdot, \cdot)$  روی فضای کراندار و کورسیو است زیرا ثابت های  $\bar{\alpha} > 0, \bar{M} < \infty$  موجودند به طوری که،

$$|a(u, v)| \leq \bar{M} \|u\|_{\mathbb{H}^1} \|v\|_{\mathbb{H}^1}, \quad \forall u, v \in \mathbb{H}_0^1, \quad (14.5)$$

$$a(u, v) \geq \bar{\alpha} \|v\|_{\mathbb{H}^1}^2, \quad \forall v \in \mathbb{H}_0^1. \quad (15.5)$$

همچنین فرض کنیم،

$$V_\rho = \{v | v \in \text{Span}\{\phi_I\}, \partial\Omega \text{ روی } v = 0\},$$

که  $\phi_I$  توابع شکل روش بدون المان گالرکین هستند. فرم ضعیف گالرکین متناسب با معادله (۱.۵) یافتن یک تابع  $u_\rho \in V_\rho$  است به طوری که

$$a(u_\rho, v) = (g, v), \quad \forall v \in V_\rho. \quad (۱۶.۵)$$

**قضیه ۱.۳.۵.** فرض  $u, u_\rho$  به ترتیب جواب‌های مساله تغییراتی (۱۳.۵) و روش بدون المان گالرکین (۱۶.۵) باشند، بنابراین داریم،

$$۱. \quad a(u - u_\rho, v) = 0 \quad \forall v \in V_\rho$$

$$۲. \quad a(u - u_\rho, u - u_\rho) = \inf_{v \in V_\rho} a(u - v, u - v)$$

$$۳. \quad \|u - u_\rho\|_{\mathbb{H}^1} \leq C \inf_{v \in V_\rho} \|u - v\|_{\mathbb{H}^1}$$

برهان. با تفاضل (۱۶.۵) از (۱۳.۵) برای هر  $v \in V_\rho$  داریم

$$a(u - u_\rho, v) = a(u, v) - a(u_\rho, v) = 0.$$

نرم انرژی به شکل  $\|u\|_E = \sqrt{a(u, u)}$  تعریف می‌شود. حال داریم،

$$\begin{aligned} \|u - u_\rho\|_E^2 &= a(u - u_\rho, u - u_\rho), \\ &= a(u - u_\rho, u - v) + a(u - u_\rho, v - u_\rho), \\ &= a(u - u_\rho, u - v), \quad (v - u_\rho \in V_\rho), \\ &\leq \|u - u_\rho\|_E \|u - v\|_E. \quad (\text{نامساوی شوارتز}) \end{aligned}$$

اگر  $\|u_N - u_N^\rho\|_E \neq 0$  باشد با تقسیم کردن بر آن برای هر  $v \in V_\rho$  داریم  $\|u_N - u_N^\rho\|_E \leq \|u_N - v\|_E$ . اگر  $\|u_N - u_N^\rho\|_E = 0$  باشد این نامساوی بدیهی است. با اینفیمم گرفتن از  $v \in V_\rho$  داریم،

$$\|u_N - u_N^\rho\|_E \leq \inf_{v \in V_\rho} \|u_N - v\|_E.$$

چون  $v \in V_\rho$  داریم،

$$\inf_{v \in V_\rho} \|u_N - v\|_E \leq \|u_N - u_N^\rho\|_E.$$

بنابراین،

$$\|u_N - u_N^\rho\|_E = \inf_{v \in V_\rho} \|u_N - v\|_E,$$

یعنی،

$$a(u_N - u_N^\rho, u_N - u_N^\rho) = \inf_{v \in V_\rho} a(u_N - v, u_N - v).$$

برای بند ۳ داریم،

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \|u - u^\rho\|_{\mathbb{H}^1}^2 &\leq a(u - u^\rho, u - u^\rho), \quad (15.5) \text{ با توجه به} \\ &= a(u - u_\rho, u - v) + a(u - u_\rho, v - u_\rho), \\ &= a(u - u_\rho, u - v), \quad (v - u_\rho \in V_\rho), \\ &\leq \bar{M} \|u - u_\rho\|_{\mathbb{H}^1} \|u - v\|_{\mathbb{H}^1}. \quad (14.5) \text{ با توجه به} \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\|u - u_\rho\|_{\mathbb{H}^1} \leq \frac{\bar{M}}{\bar{\alpha}} \|u - v\|_{\mathbb{H}^1}.$$

با اینفیمم گرفتن روی هر  $v \in V_\rho$  داریم،

$$\|u - u_\rho\|_{\mathbb{H}^1} \leq \frac{\bar{M}}{\bar{\alpha}} \inf_{v \in V_\rho} \|u - v\|_{\mathbb{H}^1}.$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود.  $\square$

عملگر درونیاب روش کمترین مربعات متحرک را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\mathcal{I}u = \mathcal{S}u + \sum_{i=1}^m a_i(x) g_i(x) = \Phi^T u.$$

از [۳۴، ۳۵] داریم اگر  $u \in \mathbb{H}^{m+1}$  آنگاه تابع کراندار  $C'_k(x)$  و ثابت  $C_k$  وجود دارند به طوری که،

$$\frac{\partial^{|k|}}{\partial^{k_1} \partial^{k_2} \dots \partial^{k_n}} \Phi_I(x) = C'_k(x) \rho_x^{-|k|}, \quad \|\mathcal{I}u - u\|_{\mathbb{H}^k} \leq C_k \rho^{m+1-|k|} \|u\|_{\mathbb{H}^{m+1}}, \quad (17.5)$$

که  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ ،  $0 \leq |k| \leq m$

قضیه ۲.۳.۵. فرض  $u_\rho, u$  به ترتیب جواب‌های (۱۳.۵) و (۱۶.۵) باشند، آنگاه  $C_1$  و  $C_2$  مستقل از  $\rho$  وجود دارند به طوری که،

$$\|u - u_\rho\|_E \leq C_1 \rho^m \|u\|_{\mathbb{H}^{m+1}},$$

$$\|u - u_\rho\|_{\mathbb{H}^1} \leq C_2 \rho^m \|u\|_{\mathbb{H}^{m+1}}.$$

برهان. با استفاده از قضیه ۱.۳.۵ و (۱۷.۵) داریم،

$$\begin{aligned} \|u - u_\rho\|_E^2 &= a(u - u_\rho, u - u_\rho), \\ &= \inf_{v \in V_\rho} a(u - v, u - v), \\ &\leq a(u - \mathcal{I}u, u - \mathcal{I}u), \\ &\leq \bar{M} \|u - \mathcal{I}u\|_{\mathbb{H}^1}^2 \leq C_1 \rho^m \|u\|_{\mathbb{H}^{m+1}}^2, \end{aligned}$$

$$\|u - u_\rho\|_{\mathbb{H}^1} \leq C \inf_{v \in V_\rho} \|u - v\|_{\mathbb{H}^1},$$

$$\leq C \|u - \mathcal{I}u\|_{\mathbb{H}^1},$$

$$\leq C_2 \rho^m \|u\|_{\mathbb{H}^{m+1}}.$$

□

**قضیه ۳.۳.۵.** فرض  $u_\rho, u$  به ترتیب جواب‌های (۱۳.۵) و (۱۶.۵) باشند، آنگاه ثابت  $C$  مستقل از  $\rho$  وجود دارد به طوری که،

$$\|u - u_\rho\|_{L^2} \leq C\rho^{m+1} \|u\|_{\mathbb{H}^{m+1}}.$$

برهان. برای هر  $f \in L^2$  فرض  $\varphi \in \mathbb{H}_0^1 \cap \mathbb{H}^2$  جواب

$$a(\varphi, v) = (g, v), \quad \forall v \in \mathbb{H}_0^1,$$

باشد، آنگاه داریم،

$$\|\varphi\|_{\mathbb{H}^2} \leq \|f\|_{L^2}. \quad (18.5)$$

اگر  $v = u - u_\rho$  داریم،

$$a(\varphi, u - u_\rho) = (f, u - u_\rho), \quad (19.5)$$

برای  $v_\rho \in V_\rho$  دلخواه با توجه به قضیه ۱.۳.۵ داریم

$$a(v_\rho, u - u_\rho) = 0. \quad (20.5)$$

با توجه به معادلات (۱۹.۵) و (۲۰.۵) به این نتیجه می‌رسیم که

$$a(\varphi - v_\rho, u - u_\rho) = (f, u - u_\rho). \quad (21.5)$$

حال اگر  $f = u - u_\rho$  و  $v_\rho = \mathcal{I}\varphi$  آنگاه داریم،

$$\|u - u_\rho\|_{L^2}^2 = (u - u_\rho, u - u_\rho),$$

$$= a(\varphi - \mathcal{I}\varphi, u - u_\rho), \quad \text{با توجه به (21.5)}$$

$$\leq \bar{M} \|\varphi - \mathcal{I}\varphi\|_{\mathbb{H}^1} \|u - u_\rho\|_{\mathbb{H}^1}, \quad \text{با توجه به (14.5)}$$

$$\leq \bar{M} C_\rho \|\varphi\|_{\mathbb{H}^2} C_\rho \rho^m \|u\|_{\mathbb{H}^{m+1}}. \quad (22.5) \quad \text{با توجه به (17.5) و قضیه 2.3.5}$$

با توجه به معادلات (۱۸.۵) و (۲۲.۵) داریم،

$$\|u - u_\rho\|_{L^2} \leq C\rho^{m+1} \|u\|_{\mathbb{H}^{m+1}}.$$

□

بنابراین این قضیه اثبات می‌شود.

جدول ۱.۵: جدول مقادیر جواب تقریبی و دقیق برای مثال ۱.۴.۵ با  $q_x = \circ/\circ\circ ۱۹۵۳۱۲۵$ .

جواب تقریبی	جواب دقیق	x
$\circ/\circ\circ ۶۱۳۶۵۲۹\circ ۴۳۱۴\circ\circ\circ$	$\circ/\circ\circ ۶۱۳۵۸۸۴۶۴۹۱۵۴\circ\circ$	$\circ/\circ\circ ۱۹۵۳۱۲۵$
$\circ/۳۱۳۶۸۱۷۳۷۴\circ ۷۷۵\circ$	$\circ/۳۱۳۶۸۱۷۴\circ ۳۹۸۸۹۲$	$\circ/۱\circ ۱۵۶۲۵$
$\circ/۵۹\circ ۷۵۹۶۹۶\circ ۵۳۹\circ ۳$	$\circ/۵۹\circ ۷۵۹۷\circ ۱۸۵۸۸۷۴$	$\circ/۲\circ ۱۱۷۱۸۷۵$
$\circ/۸۱\circ ۴۵۷۱۹\circ ۲۱۶۷۸۴$	$\circ/۸۱\circ ۴۵۷۱۹۸۲۵۲۵۹۵$	$\circ/۳\circ\circ ۷۸۱۲۵$
$\circ/۹۵۱۴۳۵\circ ۱۱۵\circ ۱۵۴۵$	$\circ/۹۵۱۴۳۵\circ ۲\circ ۹۶۹\circ\circ ۸$	$\circ/۴\circ\circ ۳۹\circ ۶۲۵$
$\circ/۹۹۹۹۹۹۹۹\circ\circ ۳۸۸۵۱$	۱	$\circ/۵$
$\circ/۹۵۱۴۳۵\circ ۱۱۵\circ\circ ۵۱۷$	$\circ/۹۵۱۴۳۵\circ ۲\circ ۹۶۹\circ\circ ۸$	$\circ/۵۹۹۶\circ ۹۳۷۵$
$\circ/۸۱\circ ۴۵۷۱۹\circ ۲۱۵۶۴۹$	$\circ/۸۱\circ ۴۵۷۱۹۸۲۵۲۵۹۵$	$\circ/۶۹۹۲۱۸۷۵$
$\circ/۵۹\circ ۷۵۹۶۹۶\circ ۵۳۱۸۳$	$\circ/۵۹\circ ۷۵۹۷\circ ۱۸۵۸۸۷۴$	$\circ/۷۹۸۸۲۸۱۲۵$
$\circ/۳۱۳۶۸۱۷۳۷۴\circ ۷۳۵۸$	$\circ/۳۱۳۶۸۱۷۴\circ ۳۹۸۸۹۱$	$\circ/۸۹۸۴۳۷۵$
$\circ/\circ\circ ۶۱۳۶۵۲۹\circ ۴۳۱۳۲۱۴$	$\circ/\circ\circ ۶۱۳۵۸۸۴۶۴۹۱۵۴۸\circ$	$\circ/۹۹۸\circ ۴۶۸۷۵$

## ۴.۵ نتایج عددی

در مثال‌های زیر شرایط مرزی و تابع  $g$  از روی جواب دقیق مساله بدست آمده‌اند و

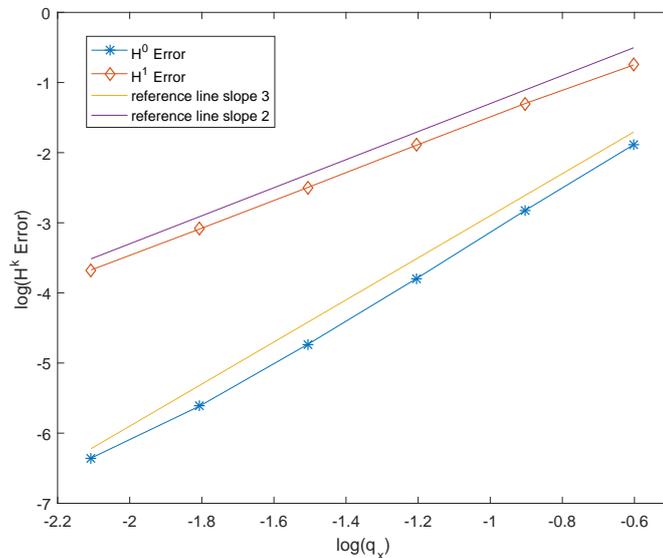
$$q_x = \max_{1 \leq i \leq N} \min_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \|x_i - x_j\|_2.$$

همچنین با محاسبه نرم سوبولف مرسوم خطای روش مثال‌های ارائه شده، مرتبه همگرایی تابع و مشتق را برای آنها مشخص می‌کنیم.

$$\|u - u^h\|_{\mathbb{H}^k} := \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^\alpha(u - u^h))^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (۲۳.۵)$$

**مثال ۱.۴.۵.** معادله (۱.۵) از درجه اول با  $b = \circ$  را روی  $\Omega = [0, 1]$  در نظر بگیرید. پایه‌ها را تا مرتبه دوم نظر می‌گیریم. جواب دقیق این مسئله  $u = \sin(\pi x)$  است. شرایط مرزی برای این مثال از نوع همگن می‌باشد. مقادیر جواب دقیق و تقریبی در جدول ۱.۵ مشخص شده است. تخمین خطای بدست آمده برای این مثال در شکل ۱.۵ نمایش داده شده است.

در شکل ۱.۵ همگرایی روش ارائه شده در این مقاله را می‌توان مشاهده کرد. همچنین نشان می‌دهد که مرتبه همگرایی جواب ۳ و مرتبه همگرایی مشتق آن ۲ می‌باشد. همچنین جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا در شکل ۲.۵ نمایش داده شده است.



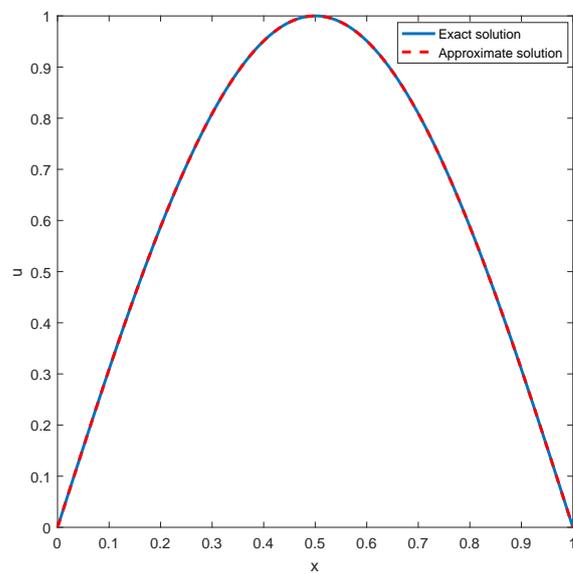
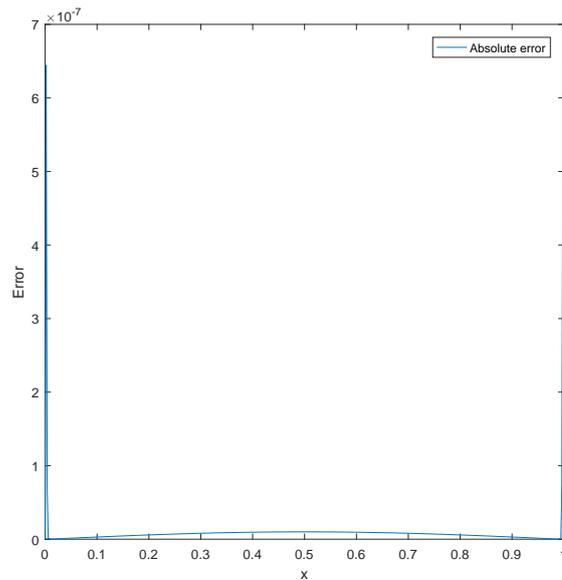
شکل ۱.۵: نمودار نرم سوبولف خطا برای مثال ۱.۴.۵

**مثال ۲.۴.۵.** در این مثال معادله (۱.۵) از درجه اول را با  $b = 1$  روی  $\Omega = [0, 1]$  در نظر بگیرید. پایه‌ها تا مرتبه دوم در نظر گرفته شده است. جواب دقیق این مثال  $u = \exp(x)$  است. شرایط مرزی این مثال ناهمگن فرض شده است. مقادیر جواب دقیق و تقریبی در جدول ۲.۵ مشخص شده است. در شکل ۳.۵ نمودار خطای سوبولف را گزارش شده است. همگرایی روش توسط شکل ۳.۵ نیز تایید می‌شود. می‌توان مشاهده کرد که مرتبه همگرایی جواب ۳ و مرتبه همگرایی مشتق آن ۲ است. همچنین جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا در شکل ۴.۵ نمایش داده شده است.

**مثال ۳.۴.۵.** اکنون معادله (۱.۵) از درجه دوم را روی  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  در نظر بگیرید. فرض  $b = 0$  و جواب دقیق این مساله به شکل  $u = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$  باشد. پایه‌ها را از مرتبه اول و شرایط مرزی برای این مساله را از نوع همگن در نظر بگیرید. مقادیر جواب دقیق و تقریبی در جدول ۳.۵ مشخص شده است. در شکل ۵.۵ نمودار نرم سوبولف خطای روش برای این مثال رسم شده است.

شکل ۵.۵ نیز نشان می‌دهد که این روش همگراست و مرتبه همگرایی برای جواب این مثال ۲ و برای مشتق جواب ۱ است. همچنین جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا در شکل ۶.۵ نمایش داده شده است.

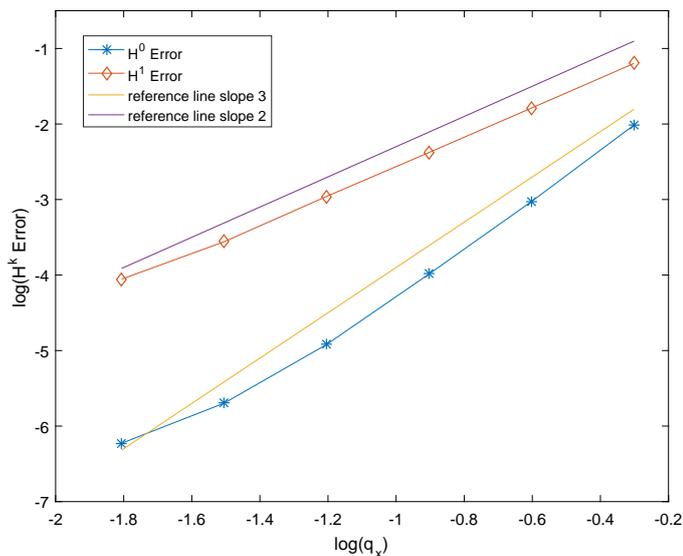
**مثال ۴.۴.۵.** اکنون معادله (۱.۵) از درجه دوم را روی  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$  در نظر بگیرید. فرض  $b = 0$  و جواب دقیق این مساله به شکل  $u = (1 - x^2)(1 + y^2)$  باشد. پایه‌ها را از مرتبه اول و شرایط مرزی برای این مساله را از نوع همگن در نظر بگیرید. مقادیر جواب دقیق و تقریبی در جدول ۴.۵ مشخص شده است. نمودار نرم سوبولف خطای روش برای این مثال در شکل ۷.۵ رسم شده است.



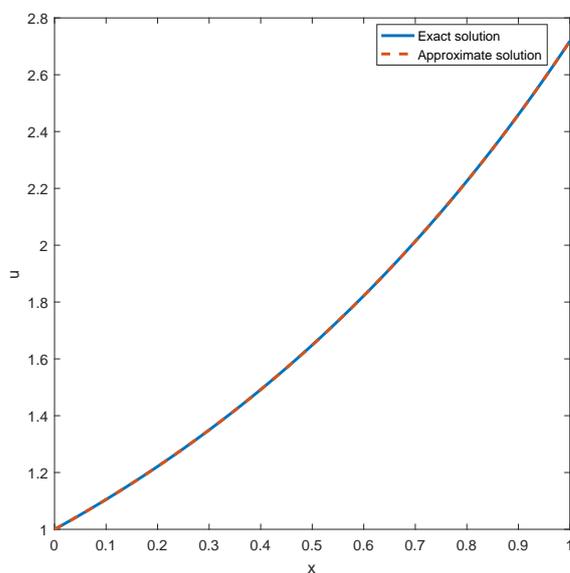
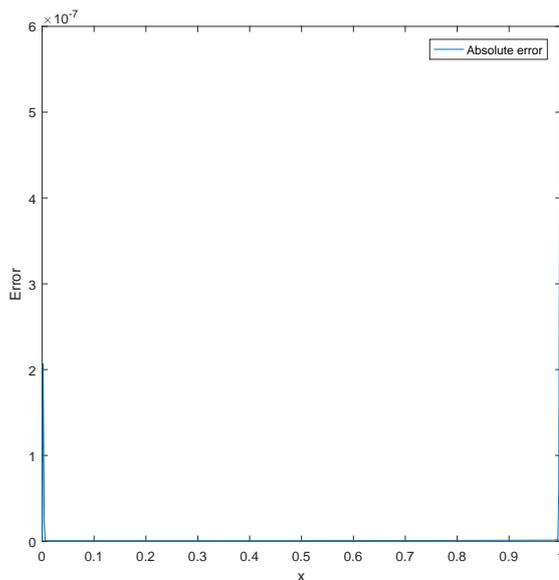
شکل ۲.۵: جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا برای مثال ۱.۴.۵ با  $q_x = 1953125 \times 10^{-7}$

جدول ۲.۵: جدول مقادیر جواب تقریبی و دقیق برای مثال ۲.۴.۵ با  $q_x = 0.001953125$ .

جواب تقریبی	جواب دقیق	x
۱/۰۰۱۹۵۵۲۴۰۲۱۸۵۹	۱/۰۰۱۹۵۵۰۳۳۵۹۱۰۰	۰/۰۰۱۹۵۳۱۲۵
۱/۱۰۶۸۹۹۰۹۷۹۶۱۸۴	۱/۱۰۶۸۹۹۰۹۷۴۲۳۶۶	۰/۱۰۱۵۶۲۵
۱/۲۲۲۸۳۴۹۲۹۰۴۶۱۷	۱/۲۲۲۸۳۴۹۲۸۵۱۵۸۱	۰/۲۰۱۱۷۱۸۷۵
۱/۳۵۰۹۱۳۷۹۷۳۵۸۰۱	۱/۳۵۰۹۱۳۷۹۶۸۲۰۹۴	۰/۳۰۰۷۸۱۲۵
۱/۴۹۲۴۰۷۵۵۶۰۵۶۴۲	۱/۴۹۲۴۰۷۵۵۵۴۹۵۸۰	۰/۴۰۰۳۹۰۶۲۵
۱/۶۴۸۷۲۱۲۷۱۳۰۳۰۶	۱/۶۴۸۷۲۱۲۷۰۷۰۰۱۳	۰/۵
۱/۸۲۱۴۰۷۱۷۴۹۰۱۳۹	۱/۸۲۱۴۰۷۱۷۴۲۳۲۶۴	۰/۵۹۹۶۰۹۳۷۵
۲/۰۱۲۱۸۰۰۷۸۳۱۹۳۷	۲/۰۱۲۱۸۰۰۷۷۵۵۶۳۱	۰/۶۹۹۲۱۸۷۵
۲/۲۲۲۹۳۴۴۰۱۱۶۶۹۶	۲/۲۲۲۹۳۴۴۰۰۲۷۷۸۱	۰/۷۹۸۸۲۸۱۲۵
۲/۴۵۵۷۶۲۹۸۳۲۲۸۶۱	۲/۴۵۵۷۶۲۹۸۲۱۷۷۸۱	۰/۸۹۸۴۳۷۵
۲/۷۱۲۹۷۷۳۰۷۵۰۰۵۹	۲/۷۱۲۹۷۷۸۶۵۶۰۰۱۵	۰/۹۹۸۰۴۶۸۷۵



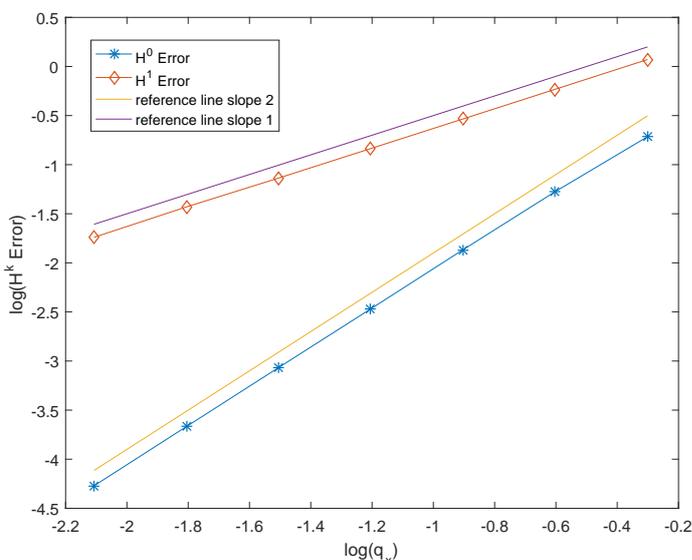
شکل ۳.۵: نمودار نرم سوپولف خطا برای مثال ۲.۴.۵



شکل ۴.۵: جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا برای مثال ۲.۴.۵ با  $q_x = 0/001953125$

جدول ۳.۵: جدول مقادیر میانگین تقریبی و دقیق جواب برای مثال ۳.۴.۵ با  $q_x = 0.15625$ .

میانگین تقریبی	میانگین دقیق	(x, y)
0/00240762439993900	0/00240763666390156	(0/015625, 0/015625)
0/0311280445027403	0/0311282030628429	(0/015625, 0/21875)
0/0475969351697890	0/0475971776191671	(0/015625, 0/421875)
0/0453323891048062	0/0453326200190310	(0/015625, 0/625)
0/0252256975281893	0/0252258260229049	(0/015625, 0/828125)
0/0311280445027402	0/0311282030628429	(0/21875, 0/015625)
0/402452788977005	0/402454838991936	(0/21875, 0/21875)
0/615378177840678	0/615381312455464	(0/21875, 0/421875)
0/586099985323986	0/586102970801409	(0/21875, 0/625)
0/326141666985111	0/326143328286281	(0/21875, 0/828125)
0/0475969351697885	0/0475971776191671	(0/421875, 0/015625)
0/615378177840673	0/615381312455464	(0/421875, 0/21875)
0/940955839131113	0/940960632174178	(0/421875, 0/421875)
0/896187455721014	0/896192020722713	(0/421875, 0/625)
0/498693188975987	0/498695729220505	(0/421875, 0/828125)
0/0453323891048054	0/0453326200190310	(0/625, 0/015625)
0/586099985323979	0/586102970801409	(0/625, 0/21875)
0/896187455721008	0/896192020722713	(0/625, 0/421875)
0/853549042783261	0/853553390593274	(0/625, 0/625)
0/474966583582156	0/474969002968003	(0/625, 0/828125)
0/0252256975281888	0/0252258260229049	(0/828125, 0/015625)
0/326141666985108	0/326143328286281	(0/828125, 0/21875)
0/498693188975982	0/498695729220505	(0/828125, 0/421875)
0/474966583582155	0/474969002968003	(0/828125, 0/625)
0/264300285293606	0/264301631587001	(0/828125, 0/828125)



شکل ۵.۵: نمودار نرم سوپولف خطا برای مثال ۳.۴.۵

با توجه به شکل ۷.۵ نیز می‌توان همگرایی روش را مشاهده کرد. همچنین مرتبه همگرایی برای جواب این مثال ۲ و برای مشتق جواب ۱ است. جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا در شکل ۸.۵ نمایش داده شده است.

## ۵.۵ نتیجه گیری

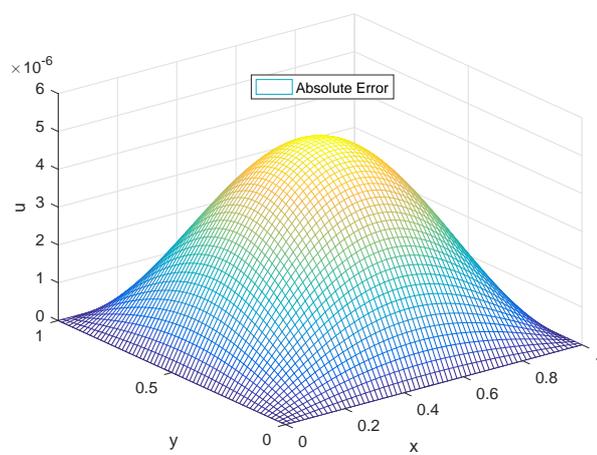
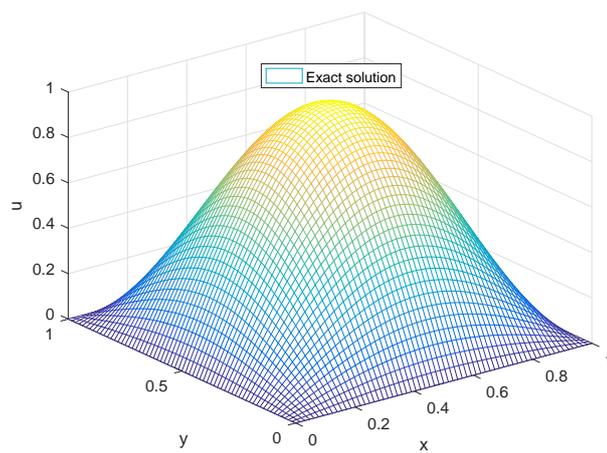
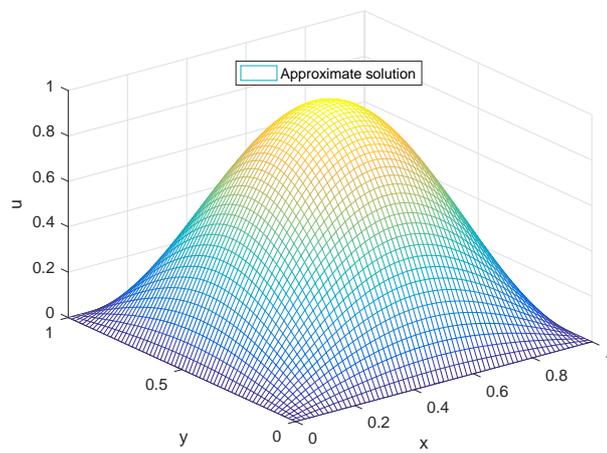
در این فصل یک ایده جدید برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روش بدون المان گالرکین برای حل معادلات با مشتقات جزئی بیضوی ارائه شد.

مهم ترین اشکال‌های روش ضرایب لاگرانژ از قرار زیر هستند:

۱. بعد دستگاه حاصل از گسسته‌سازی معادله افزایش می‌یابد.
۲. با اینکه ماتریس اصلی حاصل از گسسته‌سازی متقارن و نیمه معین مثبت است، ماتریس سراسری نیز متقارن است ولی دیگر معین مثبت نیست. بنابراین روش‌های استاندارد خطی برای ماتریس‌های متقارن و معین مثبت را نمی‌توان به کار برد.

۳. گسسته‌سازی ضریب  $\lambda$  باید دارای دقت کافی باشد تا جواب قابل قبولی بدست آید، اما دستگاه حاصل از معادله، زمانی که تعداد ضرایب لاگرانژ خیلی بزرگ شود، به سمت منفرد شدن پیش می‌رود. در حقیقت، فضای درونیابی برای ضریب لاگرانژ  $\lambda$  و مجهول اصلی یعنی  $u$  باید در شرط بابوشکا-برزی صدق کند تا همگرایی تقریب تضمین شود.

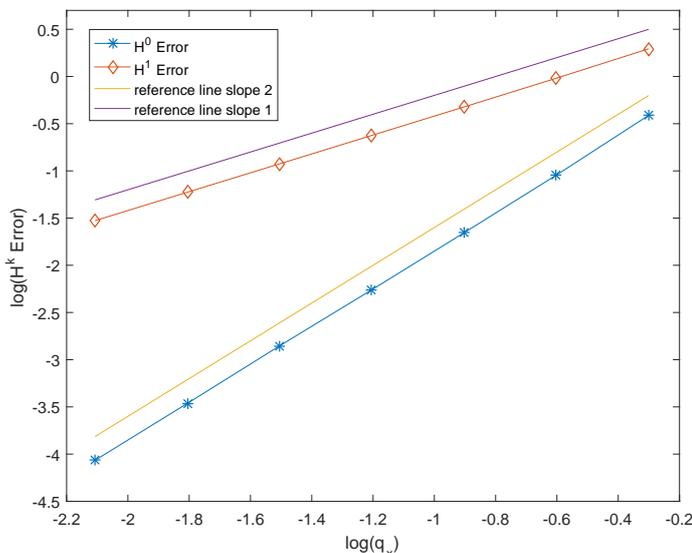
روش جریمه به راحتی قابل به کارگیری برای انواع مختلف معادلات است. روش جریمه دو برتری واضح دارد، یکی این که بعد دستگاه افزایش نمی‌یابد و دوم اینکه دستگاه حاصل متقارن



شکل ۶.۵: جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا برای مثال ۳.۴.۵ با  $q_x = 156\%$

جدول ۴.۵: جدول مقادیر میانگین تقریبی و دقیق جواب برای مثال ۴.۴.۵ با  $q_x = 0/015625$ .

میانگین تقریبی	میانگین دقیق	(x, y)
0/119261781573426	0/119261741638184	(-0/96875, -0/96875)
0/0809901016452545	0/0809898376464844	(-0/96875, -0/5625)
0/0630258079632998	0/0630254745483398	(-0/96875, -0/15625)
0/0653689773973904	0/0653686523437500	(-0/96875, 0/25)
0/0880196039263465	0/0880193710327148	(-0/96875, 0/65625)
1/32513072664526	1/32513046264648	(-0/5625, -0/96875)
0/899889629177320	0/899887084960938	(-0/5625, -0/5625)
0/700286450447189	0/700283050537109	(-0/5625, -0/15625)
0/726321654358364	0/726318359375000	(-0/5625, 0/25)
0/977995186560740	0/977993011474609	(-0/5625, 0/65625)
1/89115080796332	1/89115047454834	(-0/15625, -0/96875)
1/28427082544716	1/28426742553711	(-0/15625, -0/5625)
0/999408595075299	0/999403953552246	(-0/15625, -0/15625)
1/03656454542404	1/03656005859375	(-0/15625, 0/25)
1/39573861993628	1/39573574066162	(-0/15625, 0/65625)
1/81732210239740	1/81732177734375	(0/25, -0/96875)
1/23413415435834	1/23413085937500	(0/25, -0/5625)
0/960392670424046	0/960388183593750	(0/25, -0/15625)
0/996098088659375	0/996093750000000	(0/25, 0/25)
1/34125035198222	1/34124755859375	(0/25, 0/65625)
1/10364460392636	1/10364437103271	(0/65625, -0/96875)
0/749479561560744	0/749477386474609	(0/65625, -0/5625)
0/583238619936295	0/583235740661621	(0/65625, -0/15625)
0/604922226982243	0/604919433593750	(0/65625, 0/25)
0/814530333358667	0/814528465270996	(0/65625, 0/65625)

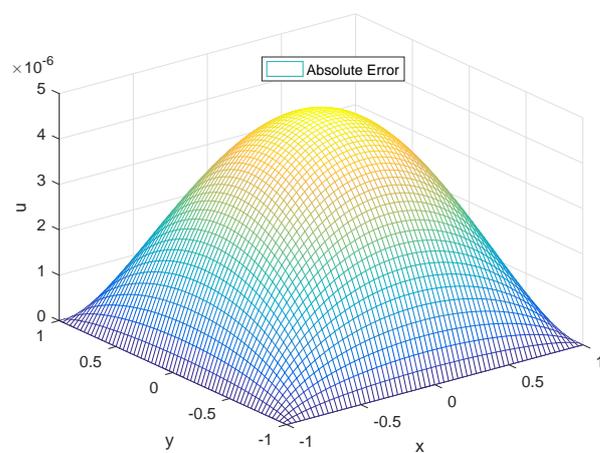
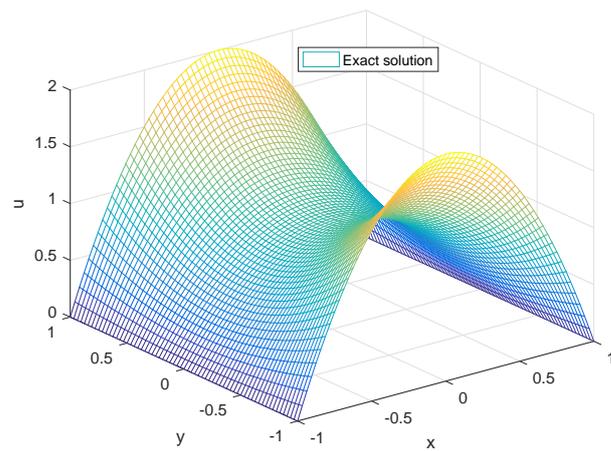
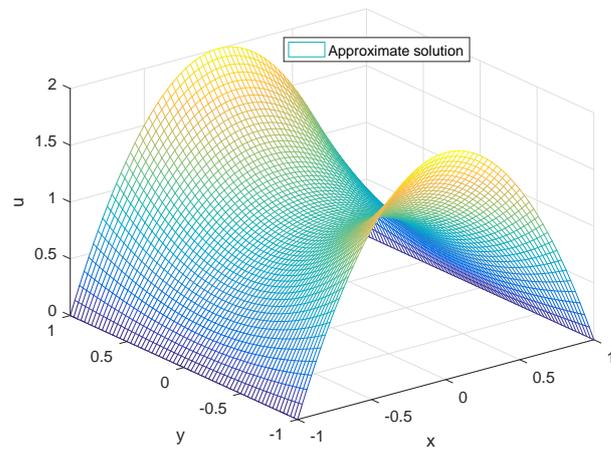


شکل ۷.۵: نمودار نرم سوبولف خطا برای مثال ۴.۴.۵

و معین مثبت است به شرط اینکه ماتریس اصلی متقارن و  $\alpha$  به اندازه کافی بزرگ باشد. گرچه روش جریمه دو اشکال مهم دارد: شرایط مرزی دیریکله به صورت ضعیف اعمال شده است (پارامتر  $\alpha$  چگونگی اعمال شرایط مرزی را کنترل می کند) و ماتریس حاصل به طور معمول بدوضع است (عدد حالت ماتریس با افزایش  $\alpha$  افزایش می یابد).

گسسته سازی فرم ضعیف روش نیچه به یک دستگاه هم بعد با ماتریس اصلی منجر می شود و ماتریس حاصل متقارن و معین مثبت است به شرطی که ماتریس اصلی متقارن و  $\alpha$  به اندازه کافی بزرگ باشد. گرچه همانند روش جریمه، عدد حالت ماتریس با افزایش  $\alpha$  افزایش می یابد، در عمل نیازی به مقادیر بزرگ  $\alpha$  به جهت تضمین همگرایی و اعمال مناسب شرایط مرزی نیست. عدد حالت ماتریس مشکل اصلی این روش نیست. مشکل اصلی روش نیچه وضع فرم ضعیف آن است.

در روش ارائه شده بعد ماتریس حاصل نسبت به ماتریس اصلی کاهش می یابد (به علت کاهش متغیرها) به خصوص در حالت های دو بعدی و بالاتر. نیازی به پارامتر اضافی نیست پس انتخاب پارامتر مساله ای نیست و عدد حالت ماتریس افزایش نمی یابد. ماتریس همچنان متقارن و معین مثبت باقی می ماند بنابراین روش های خطی برای حل ماتریس های متقارن و معین مثبت همچنان قابل استفاده هستند.



شکل ۸.۵: جواب عددی، جواب دقیق و قدر مطلق خطا برای مثال ۴.۴.۵ با  $q_x = 156^\circ$

# مراجع

- [۱] میرزایی د.، (۱۳۹۲)، ”آنالیز عددی پیشرفته” چاپ دوم، انتشارات دانشگاه دانشگاه اصفهان.
- [2] Fasshauer, G. E. (2007). ”**Meshfree approximation methods with MATLAB**”. (Vol. 6). World Scientific.
- [3] Carmona, R., Nualart, D. (1988).”**Random non-linear wave equations: smoothness of the solutions**”. Probability Theory and Related Fields, 79(4), 469-508.
- [4] Buhmann, M. D. (2003). ”**Radial basis functions: theory and implementations**”. (Vol. 12). Cambridge university press.
- [5] Cao, Y., Yang, H., Yin, L. (2007). ”**Finite element methods for semilinear elliptic stochastic partial differential equations**”. Numerische Mathematik, 106(2), 181-198.
- [6] Dehghan, M., Shokri, A. (2009).”**A meshless method for numerical solution of the one-dimensional wave equation with an integral condition using radial basis functions**”. Numerical Algorithms, 52(3), 461-477.
- [7] Walsh, J. B. (2006). ”**On numerical solutions of the stochastic wave equation**”. Illinois Journal of Mathematics, 50(1-4), 991-1018.
- [8] Quer-Sardanyons, L., Sanz-Solé, M. (2006). ”**Space semi-discretisations for a stochastic wave equation**”. Potential Analysis, 24(4), 303-332.
- [9] Cohen, D., Quer-Sardanyons, L. (2016).”**A fully discrete approximation of the one-dimensional stochastic wave equation**”. IMA Journal of Numerical Analysis, 36(1), 400-420.

- 
- [10] Lord, G. J., Tambue, A. (2013). "**Stochastic exponential integrators for the finite element discretization of SPDEs for multiplicative and additive noise**". IMA Journal of Numerical Analysis, 33(2), 515-543.
- [11] Hausenblas, E. (2003). "**Approximation for semilinear stochastic evolution equations**". Potential Analysis, 18(2), 141-186.
- [12] Evans, L. C. (1998). "**Partial differential equations**", Graduate studies in mathematics, 19(4), 7.
- [13] Wendland H. (2004), "**Scattered data approximation**", (Vol. 17), Cambridge university press.
- [14] Shepard, D. (1968). "**A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data**". In Proceedings of the 1968 23rd ACM national conference (517-524).
- [15] Lancaster, P., Salkauskas, K. (1981). "**Surfaces generated by moving least squares methods**". Mathematics of computation, 37(155), 141-158.
- [16] Kaljević, I., Saigal, S. (1997). "**An improved element free Galerkin formulation**". International Journal for numerical methods in engineering, 40(16), 2953-2974.
- [17] H.-P. Ren, Y.-M. Cheng. (2011), "**The interpolating element-free Galerkin (IEFG) method for two-dimensional elasticity problems**", Chinese Physics B, 3(4), 735-758.
- [18] H.-P. Ren, Y.-M. Cheng and W. Zhang. (2009), "**An improved boundary element-free method (IBEFM) for two-dimensional potential problems**", Chinese Physics B, 18(10), 4065-4073.
- [19] H.-P. Ren, Y.-M. Cheng and W. Zhang. (2010), "**An improved boundary element-free method (IBEFM) for two-dimensional elasticity problems**", Science China Physics, 53, 758-766.
- [20] H.-P. Ren, Y.-M. Cheng. (2012), "**The interpolating element-free Galerkin (IEFG) method for two-dimensional potential problems**", Engineering Analysis with Boundary Elements, 36(5), 873-880.

- [21] D. Mirzaei. (2015), "**Analysis of moving least squares approximation revisited**", Journal of Computational and Applied Mathematics, 282, 237-250.
- [22] D. Mirzaei, R. Schaback and M. Dehghan. (2012), "**On generalized moving least squares and diffuse derivatives**", IMA Journal of Numerical Analysis, 32(3), 983-1000.
- [23] Li, X., Wang, Q. (2016). "**Analysis of the inherent instability of the interpolating moving least squares method when using improper polynomial bases**". Engineering Analysis with Boundary Elements, 73, 21-34.
- [24] Cao, Y., Hong, J., Liu, Z. (2015). "**Well-posedness and finite element approximations for elliptic SPDEs with Gaussian noises**". arXiv preprint arXiv:1510.01873.
- [25] Da Prato, G., Zabczyk, J. (2014). "**Stochastic equations in infinite dimensions**". Cambridge university press.
- [26] Mirzaei D. and Dehghan M. (2010), "**Meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) approximation to the two dimensional sine-Gordon equation**" Journal of Computational and Applied Mathematics, 233(10), 2737-2754.
- [27] Belytschko T. , Yun Y.L. and Gu L. (1994), "**Element-free Galerkin methods**" International journal for numerical methods in engineering, 37(2), 229-256.
- [28] R. Cheng and Y. Cheng. (2008), "**Error estimates of element-free Galerkin method for potential problems**", Acta Physica Sinica, 57(10), 6037-6046.
- [29] R. Cheng and Y. Cheng. (2003), "**Boundary element-free method for elasticity problems**", Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2, 181-186.
- [30] K.M. Liew, Y. Cheng and S. Kitipornchai. (2006), "**Boundary element-free method (BEFM) and its application to two-dimensional elasticity problems**", International journal for numerical methods in engineering, 65(8), 1310-1332.
- [31] Y.X. Mukherjee and S. Mukherjee. (1997), "**On boundary conditions in the element-free Galerkin method**", Computational Mechanics, 19(4), 264-270.
- [32] Liu G.R. and Gu Y.T. (2005), "**An introduction to meshfree methods and their programming**", (Vol. 1), Springer Science & Business Media.

- 
- [33] Mirzaei D. , Schaback R. and Dehghan M. (2012), "**On generalized moving least squares and diffuse derivatives**" IMA Journal of Numerical Analysis, 32(3), 983-1000.
- [34] Wang, J. F., Hao, S. Y., Cheng, Y. M. (2014). "**The error estimates of the interpolating element-free Galerkin method for two-point boundary value problems**". Mathematical Problems in Engineering, 2014.
- [35] Li, X., Chen, H., Wang, Y. (2015). "**Error analysis in Sobolev spaces for the improved moving least-square approximation and the improved element-free Galerkin method**". Applied Mathematics and Computation, 262, 56-78.
- [36] Fernández-Méndez, Sonia and Huerta, Antonio. "**Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods**". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193(12):1257 – 1275.
- [37] Ju-Feng W. , Feng-Xin S. , Yu-Min C. and Huang A. (2014), "**Error estimates for the interpolating moving least-squares method**" Applied Mathematics and Computation, 245, 321-342.
- [38] R. Scitovski, Š. Ungar, and D. Jukić. (1998) , "**Approximating surfaces by moving total least squares method**, Appl. Math. Comput., 93(2), 219-232.

## **Aabstract**

In this thesis, the nonlinear stochastic wave equation is solved using the method of radial basis functions. First, we apply the stochastic wave equation to spatial discretization using interpolation of the radial basis functions and use the time integrator method for the temporal discretization of the equation to introduce an explicit iterative method for the numerical solution of the stochastic wave equation. The introduced repetitive method is examined by providing some examples. Also, the stochastic elliptic equation is solved using the element free Galerkin method based on the interpolating moving least squares. First, Galerkin's weak form of the stochastic elliptic equation is formed and the shape functions of the interpolating moving least squares are used. We perform the error analysis of the proposed method and check the error analysis by providing some examples. Finally, we introduce a new idea for applying essential boundary conditions in the element free Galerkin method and examine its error analysis with some examples. In this new idea, the essential boundary conditions are applied to the moving least squares approximation, and then the resulting approximation is used in the element free Galerkin method.

**Keywords:** Deterministic and stochastic partial differential equations, Radial basis functions method, Moving least squares method, Interpolating moving least squares method, Element free Galerkin method



Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Numerical Analysis

**Numerical solution for a class of  
deterministic and stochastic partial  
differential equations by meshfree methods**

By: Komeil Izadpanah

Supervisor:

**Ali Mesforush**

Advisor:

**Alireza Nazemi**

October 2021