

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی مالی

اندازه های ریسک مبتنی بر توزیع های زیان معیار

نگارنده: فاطمه سادات کمالی

استادان راهنما

دکتر علیرضا خدّامی
دکتر محمد میرباقری جم

بهمن ۱۳۹۹



فرم شماره (3) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم فاطمه السادات کمالی کچی با شماره دانشجویی 9713904 رشته ریاضی کاربردی گرایش ریاضی مالی تحت عنوان اندازه های ریسک مبتنی بر توزیع های زیان معیار که در تاریخ 1399/11/28 با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار شد به شرح ذیل اعلام می گردد:

الف) درجه عالی: نمره 19-20 ☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره 18-18/99 ☐ ج) درجه خوب: نمره 16-17/99 ☒ د) درجه متوسط: نمره 14-15/99 ☐ ه) کمتر از 14 غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐ نوع تحقیق: نظری ☒ عملی ☐			
عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
1- استاد راهنمای اول	دکتر علیرضا خدای	استادیار	
2- استاد راهنمای دوم	دکتر محمد میرباقری جم	استادیار	
3- استاد مشاور	----	----	----
4- استاد داور اول	دکتر محمدرضا ربیعی	استادیار	
5- استاد داور دوم	دکتر علی اکبر حسینی	استادیار	
6- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر میثم علیشاهی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



این مجموعه را تقدیم می‌کنم به
– محضر عظیم الشأن آقا امام زمان (عج)
که عالم به یمن وجود ایشان برپاست.
– محضر ارزشمند پدر و مادر عزیزم به
خاطر همه‌ی تلاش‌های محبت‌آمیزشان
در دوران مختلف زندگی‌ام.
– به همسر و برادر مهربانم که در تمام
سختی‌های این راه همواره در کنارم بوده
اند.

– و به محضر تمام شهدا ...

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیقِ راهم ساخت تا این پایان نامه را به پایان برسانم. از اساتید فاضل و اندیشمند جناب آقای دکتر علیرضا خدّامی و دکتر محمد میرباقری جم به عنوان اساتید راهنما که همواره نگارنده را مورد لطف و محبت خود قرار داده اند و بدون شک انجام این پایان نامه بدون کمک و راهنمایی های ارزنده ایشان امکان پذیر نبوده است، سپاسگزاری می نمایم.

همچنین از پدر بزرگوارم که اگر حمایت های ایشان نبود هرگز این مهم تحقق نمی یافت، کمال تقدیر و تشکر را دارم.

فاطمه سادات کمالی

بهمن ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب فاطمه سادات کمالی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان اندازه های ریسک مبتنی بر توزیع های زیان معیار، تحت راهنمایی دکتر علیرضا خدّامی و دکتر محمد میرباقری جم متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه سادات کمالی

بهمن ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این تحقیق یک رده از اندازه های ریسک مبتنی بر چندک که ارزش در معرض ریسک (VaR) و همچنین ریزش مورد انتظار (ES) را تعمیم می دهد با در نظر گیری تکرار و شدت زیان ها معرفی می شود. تحت VaR ، یک سطح اطمینان صرف نظر از اندازه زیان های بالقوه اختصاص داده می شود. محدوده ای از سطوح اطمینان که به اندازه زیان بستگی دارند در نظر می گیریم؛ موضوع اصلی تحقیق کاربرد توزیع زیان معیار (BLD) در بیمه است، یعنی تابعی که یک احتمال رویداد قابل قبول ماکزیمم را به هر زیان بالقوه مرتبط می کند. اندازه ریسک متناظر زیان VaR ، که ($LVaR$) نامیده می شود، تزریق سرمایه حداقلی را تعیین می کند که برای هم تراز کردن توزیع زیان های یک موقعیت ریسک دار با معیار BLD مورد نیاز است. با استفاده از این طرح، تصمیم گیرنده دارای انعطاف پذیری کامل در انتخاب طرح BLD و نیز در محدوده چندک های مرتبط است. در این تحقیق همچنین توابع ثابت تکه ای و توزیع های دنباله زیان های تصادفی معیار به طور خاص مورد توجه قرار گرفته اند. کاربردهای نظری $LVaR$ با تمرکز بر مقایسه آنها با VaR و ES در تعیین کفایت سرمایه، مدیریت ریسک پرتفوی و ریسک فاجعه بار مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. همچنین برای اعتبار سنجی تحقیق از داده های واقعی خسارت های پرداخت شده و حق بیمه در رشته فعالیت بیمه تکمیلی درمان شرکت بیمه ای استفاده شده است. توزیع احتمال و تجمعی خسارت پرداختی به بیمه گذاران و نیز توزیع احتمال و تجمعی سود و زیان شرکت بیمه از هر بیمه گذار با استفاده از نرم افزار $Easyfit$ و نرم افزار R تعیین شد. سرانجام اندازه ریسک های رشته فعالیت بیمه تکمیلی درمان با سنجه های ریسک VaR ، ES ، $LVaR$ و $RVaR$ برآورد و محاسبه شده است.

کلمات کلیدی: اندازه های ریسک، BLD ، $LVaR$ ، $RVaR$ ، بیمه تکمیلی درمان، توزیع های زیان، ریسک دنباله، کفایت سرمایه.

فهرست مطالب

ک	فهرست تصاویر
م	فهرست جداول
س	پیشگفتار
۱	۱ کلیات و مفاهیم
۱	۱.۱ مفاهیم مالی
۱	۱.۱.۱ مقدمه
۲	۲.۱ مفهوم ریسک و تعریف آن
۳	۳.۱ انواع ریسک
۵	۴.۱ اندازه گیری (سنجش) ریسک
۷	۵.۱ اندازه (سنجه) های ریسک
۷	۱.۵.۱ ویژگی های مطلوب اندازه های ریسک
۸	۲.۵.۱ انواع اندازه های ریسک
۱۲	۶.۱ اهمیت سنجش و اندازه های ریسک در بیمه
۱۴	۷.۱ خلاصه فصل
۱۵	۲ توزیع های زیان و اندازه های ریسک مبتنی بر آن
۱۵	۱.۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۲۲	۲.۲ اندازه های ریسک مبتنی بر توزیع زیان معیار
۳۰	۳.۲ ویژگی های اندازه های ریسک مبتنی بر توزیع های زیان معیار
۳۹	۴.۲ ویژگی های آماری
۴۷	۵.۲ کاربردهای اندازه ریسک های مبتنی بر توزیع های زیان معیار
۵۵	۶.۲ نتیجه گیری

۵۷	۳ اعتبارسنجی تحقیق
۵۷	۱.۳ مقدمه
۵۷	۲.۳ بیمه تکمیلی درمان
۵۷	۱.۲.۳ اهمیت بیمه تکمیلی درمان و وضعیت آن در ایران
۵۸	۲.۲.۳ معرفی داده های مورد استفاده در تحقیق
۶۰	۳.۲.۳ توزیع متغیرهای تصادفی بیمه ای
۶۳	۴.۲.۳ اندازه ریسک های محاسبه شده
۶۶	۳.۳ خلاصه فصل
۶۷	مراجع
۷۳	آ ضمیمه
۷۷	واژه نامه فارسی به انگلیسی
۸۱	واژه نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۱	تکامل مدیریت ریسک سازمانی	۶
۱.۱	اندازه های ریسک	۹
۲.۱	اندازه های ریسک و خصوصیات اساسی	۹
۱.۳	نسبت سود و زیان بیمه گر از هر بیمه گذار به حق بیمه دریافتی از هر بیمه گذار	۵۹
۲.۳	فراوانی دفعات پرداخت خسارت بر اساس تعداد بیمه گذاران	۶۰
۳.۳	فراوانی دفعات پرداخت خسارت به هر بیمه گذار بر حسب مبلغ خسارت	۶۰
۴.۳	توزیع دفعات پرداخت خسارت	۶۱
۵.۳	توزیع مبلغ خسارت پرداختی به هر فرد بیمه شده	۶۱
۶.۳	توزیع احتمال سود و زیان شرکت بیمه از پوشش بیمه ای هر فرد بیمه گذار	۶۲
۷.۳	توزیع تجمعی سود و زیان شرکت بیمه از پوشش بیمه ای هر فرد بیمه گذار	۶۲
۸.۳	توزیع تجمعی تجربی سود و زیان شرکت بیمه از پوشش بیمه ای هر فرد بیمه شده	۶۳

فهرست جداول

۵۹		مشخصات داده ها	۱.۳
۶۳		سطوح مختلف حق بیمه	۲.۳
۶۴	..	محاسبه اندازه ریسک VaR به ازای سطوح مختلف حق بیمه مفروض	۳.۳
۶۴	...	محاسبه اندازه ریسک ES به ازای سطوح مختلف حق بیمه مفروض	۴.۳
۶۴	.	محاسبه اندازه ریسک RVaR به ازای سطوح مختلف حق بیمه مفروض	۵.۳
۶۴	.	محاسبه اندازه ریسک LVaR به ازای سطوح مختلف حق بیمه مفروض	۶.۳
۷۵		توزیع دفعات دریافت خسارت	۱.آ
۷۶		توزیع دفعات دریافت خسارت	۲.آ

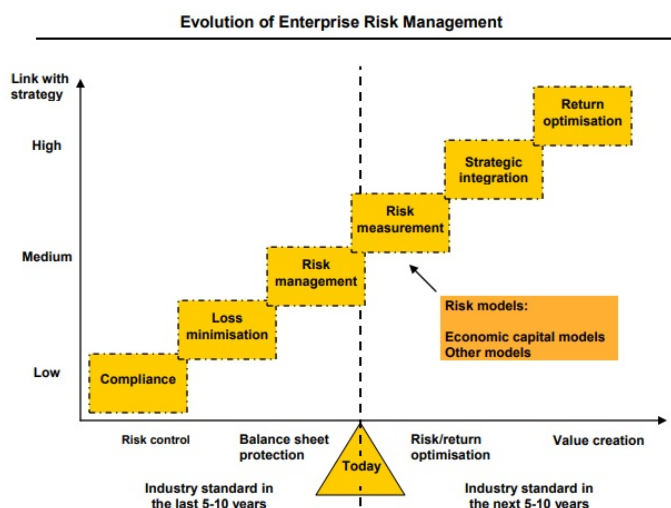
پیشگفتار

تلاش‌ها برای طراحی ابزار اندازه‌گیری ریسک از نیمه اول قرن بیستم آغاز شد. مکالی در سال ۱۹۸۳، دیرش را به عنوان سنج ریسک معرفی کرد که ابزاری ساده و در عین حال کارآمد برای سنجش ریسک اوراق بهادار با درآمد ثابت است. ادامه بررسی‌های مکالی به شناسایی رابطه غیرخطی ارزش اوراق بهادار با درآمد ثابت و نرخ بهره بازار منتهی شد و معیار تحذب به عنوان شاخصی مکمل برای محاسبه ریسک این اوراق معرفی گردید. در سال ۱۹۵۲، مارکویتز با ارائه مدلی کمی جهت انتخاب سبد دارایی‌ها، برای اولین بار مقوله ریسک را در کنار بازده مدنظر قرار داد. وی انحراف معیار را به عنوان سنج ریسک در نظر گرفت. شاگرد او ویلیام شارپ، شاخص بتا را برای اندازه‌گیری تغییرات نسبی ارزش هر سهم در قبال تغییرات نسبی ارزش بازار با معرفی خط مشخصات ارائه کرد. وی با طراحی مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای، مدیریت علمی سبد دارایی را پایه‌گذاری نمود. بعد از دهه ۱۹۷۰ و افزایش روزافزون ریسک در جنبه‌های مختلف تصمیمات مالی، توجه مدیران بیش از پیش به اندازه‌گیری و مدیریت ریسک جلب شد. در این دوران، کنترل ریسک به عنوان عاملی برای ایجاد ارزش بیشتر مورد توجه قرار گرفت و نرخ‌های بازدهی تعدیل شده بر اساس ریسک، ملاک ارزیابی قرار گرفت. برخی نظریه‌های قدیمی که به علت زمان‌بر بودن و پیچیدگی‌های محاسباتی کنار گذاشته شده بود، همزمان با پیدایش ابررایانه‌ها مجدداً مطرح شد. ریسک نامطلوب از جمله این نظریه‌ها بود که قبلاً توسط پیشگامان علم مالی مطرح شده بود و در سال ۱۹۹۶ جانی دوباره یافت و تحقیقات مفصلی در آن مورد انجام گرفت که چالش‌های آن هنوز ادامه دارد. در سال ۱۹۹۳، موسسه جی. پی. مورگان مدل ارزش در معرض خطر را معرفی کرد. این معیار که تمامی انواع ریسک را در یک عدد خلاصه می‌کرد، برای استفاده‌کنندگان بسیار جذاب به نظر آمد و هر روز به کاربردهای آن افزوده شد. به دنبال آن، روش‌های محاسباتی پیچیده‌ای همانند فرآیندهای تصادفی و شبیه‌سازی برای افزایش دقت مدل‌های این سنج توسعه یافت. همچنین در جدول صفحه بعد مهم‌ترین ابزارهای ۷۰ سال گذشته برای مدیریت ریسک ارائه شده است:

سال	ابزار مدیریت ریسک
۱۹۳۸	دیرش اوراق قرضه
۱۹۵۲	مدل میانگین- واریانس مارکوویتز
۱۹۶۳	مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای
۱۹۶۶	مدل های چند عاملی
۱۹۷۳	مدل قیمت گذاری اختبار معامله بلک شولز
۱۹۸۸	دارایی های ریسک موزون برای بانک ها
۱۹۹۲	آزمون استرس
۱۹۹۳	ارزش در معرض ریسک
۱۹۹۴	ریسک متریک
۱۹۹۷	کردیت متریک
۲۰۰۰	مدیریت جامع ریسک بنگاه اقتصادی

همانطور که می دانید، VaR به عنوان بخشی از جعبه ابزار مدیریت ریسک بازار توسعه یافته توسط Morgan JP معرفی شد و تحت نام ریسک متریک در سال ۱۹۹۴ ایجاد شد. یک بازننگری فردی مربوط به ایجاد VaR در Guldman (۲۰۰۰) فراهم شده است. اندازه گیری ریسک جدید خیلی سریع به استاندارد صنعت تبدیل شد و سرانجام در یک سطح تنظیمی زمانی که کمیته بازل در نظارت بانکداری (BCBS) آنرا به عنوان یکی از عناصر کلیدی دومین پیمان بازل در سال ۲۰۰۴ که معمولاً به عنوان بازل ۲ شناخته می شود، معرفی شد. مرکزیت VaR توسط بازل ۳ در سال ۲۰۱۰-۲۰۱۱ تایید شد. انتقال به یک چارچوب توانایی حساس به ریسک در صنعت بیمه که به اجرای توانایی ۲ در اتحادیه اروپا در سال ۲۰۰۹ منجر شد، یک نقش مرکزی نیز به VaR در جهان تنظیمی بیمه اختصاص داده است.

شکل ۱: تکامل مدیریت ریسک سازمانی



فصل ۱

کلیات و مفاهیم

به منظور فهم بهتر مطالبی که در این پایان نامه ارائه می‌شود، لازم است که ابتدا مفاهیم مقدماتی مورد نیاز مطرح شود. بدین منظور مجموعه‌ای از تعاریف در دو بخش مجزا مفاهیم مالی و مفاهیم ریاضی ارائه می‌شود.

۱.۱ مفاهیم مالی

۱.۱.۱ مقدمه

در صنعت بیمه، توزیع ریسک بسیاری از رشته‌های فعالیت‌های بیمه‌گری ممکن است متقارن و نرمال نباشد و توزیع آنها غیرنرمال و دارای چولگی باشد. به عنوان مثال توزیع ریسک بیمه‌های آتش‌سوزی، نوعی توزیع دنباله‌دار چوله به راست است. شکل توزیع ریسک این نوع رشته فعالیت‌ها حاکی از این واقعیت است که خسارت وارده به هنگام آتش‌سوزی با وجود احتمال وقوع کم آن بسیار سنگین و زیاد خواهد بود. برعکس بیمه‌های آتش‌سوزی، رشته فعالیت بیمه‌ای (مانند بیمه درمان) را در نظر بگیرید که مقدار خسارت ایجاد شده اندک باشد ولی فراوانی این نوع خسارت‌ها بسیار زیاد باشد؛ در این صورت نیز ممکن است متوسط زیان تحمیل شده به شرکت بیمه‌گر بسیار بیشتر از حد مطلوب شرکت باشد. با این توصیف معرفی کلاسی از اندازه‌های ریسک (سنجه‌های ریسک) که تعدد (فراوانی) و شدت

زیان همزمان در آن لحاظ شود موضوع و مسئله بسیار مهم و کاربردی در ادبیات مالی و به ویژه در مدیریت ریسک بیمه است. موسسات بیمه میتوانند با صدور بیمهنامه‌ها، فروش و حق بیمه تولیدی خود را گسترش دهند. ولی با گسترش سطح فروش سطح ریسک شرکت بیمه نیز افزایش می‌یابد؛ لذا ممکن است سرمایه واقعی شرکت کمتر از میزان سرمایه لازم جهت پوشش ریسک‌های آن باشد و موسسه بیمه نتواند با پرداخت خسارت (به هنگام وقوع حادثه) تعهدات بیمه‌ای خود را انجام دهد. لذا این مسئله ایجاب می‌نماید تا نهاد ناظر (بیمه مرکزی) نظارت موثر بر شرکت بیمه داشته باشد و با تعیین حدونصاب کفایت سرمایه، شرکت بیمه را الزام به رعایت حدود آن نماید تا از وضعیت توانگری مالی شرکت در ایفای تعهدات بیمه‌ای اطمینان حاصل کند. نظارت موثر نهاد ناظر بدون استفاده از اندازه ریسک مناسب در برآورد دقیق و درست سطح ریسک شرکت امکان پذیر نیست. موضوع برآورد صحیح سطح ریسک پرتفوی شرکت بیمه نه تنها از منظر نهاد ناظر جهت نظارت موثر مهم است، بلکه از منظر خود بنگاه و موسسه بیمه جهت قیمت‌گذاری صحیح و منصفانه بیمهنامه‌ها نیز حائز اهمیت است. با توجه به اینکه شدت زیان و فراوانی (تعدد) آن در اندازه‌های ریسک ریزش مورد انتظار (ES)^۱، ارزش در معرض خطر (Var)^۲، و سایر اندازه‌های ریسک، لحاظ نمی‌شود، لذا استفاده از این اندازه‌های ریسک تخمین و برآورد درست و دقیقی از سطح ریسک واقعی را نخواهد داد. بنابراین در این تحقیق اندازه‌های ریسک نوین $RVaR$ ^۳، و $LVaR$ ^۴ که مبتنی بر توزیع‌های زیان معیار (BLD)^۵ است ارائه و معرفی می‌شود. همچنین از اندازه‌های ریسک معرفی شده در تحقیق، در صورت امکان دسترسی به داده‌های واقعی پرتفوی بیمه شرکت‌های بیمه، سطح ریسک رشته فعالیت بیمه درمان عملاً محاسبه و برآورد خواهد شد. نتایج تحقیق برای شرکت‌های بیمه، برای بیمه مرکزی به عنوان نهاد ناظر موسسات بیمه و برای بیمه گذاران و سایر ذینفعان صنعت بیمه قابل استفاده است.

۲.۱ مفهوم ریسک و تعریف آن

برای ریسک در منابع مختلف، تعاریف گوناگون ارائه شده است که البته همگی دربردارنده مفهومی واحد هستند. در زیر به برخی از این تعاریف اشاره می‌شود:

امکان وقوع حوادث یا ترکیبی از رویدادها که تأثیر نامطلوبی بر ارزش اقتصادی شرکت و همچنین عدم اطمینان از نتیجه رویدادهای گذشته دارند.

بنابراین، هر سیستم طبقه بندی ریسک باید با در نظر گرفتن ارزش اقتصادی یک شرکت شروع شود. گروه کار تعریف زیر را از ارزش اقتصادی در نظر گرفت:

^۱Expected shortfall

^۲Value at risk

^۳Range Value at risk

^۴Loss value at risk

^۵Benchmark loss distributions

● مقدار تعبیه شده شامل:

- دارایی های خالص سهامداران (دارایی های کمتر از بدهی ها)
- ارزش در نیرو^۱ - ارزش مشاغل موجود در رابطه با درآمد آتی و بدون هزینه، از جمله هزینه سرمایه (شامل سایر مقررات نظارتی و سایر الزامات سرمایه و همچنین سرمایه اقتصادی) و تأثیر مالیات ها.
- به علاوه سر قفلی مربوط به (a) ارزش تجارت جدید در آینده، به علاوه (b) اقدامات آینده در مورد:

- کاهش هزینه ها
 - بهبود پایداری
 - بهبود ریسک : نمایه پاداش و ...
- به علاوه / منهای موارد اصطلاحی و ساختاری دیگر مانند هزینه های نمایندگی.
- تمام این موارد با توجه به مرجع [۴۶] بیان شده است.

۳.۱ انواع ریسک

ریسک سیستماتیک

این نوع ریسک، مربوط به شرایط سیاسی و اقتصادی کلان جامعه است که قابل حذف نیست. ریسک سیستماتیک بر کل بازار اثر می گذارد و محدود به صنعت خاص نیست.

ریسک غیرسیستماتیک

برخلاف ریسک سیستماتیک، این نوع ریسک قابل کنترل و کاهش است. ما می توانیم شرکتی را که در اثر تصمیم گیری های نادرست یا شرایط بحرانی با افت قیمتی مواجه شده را خریداری نکنیم و از این ریسک جلوگیری کنیم.

ریسک بازار

ریسک بازار ریسکی است که ارزش در سرمایه گذاری به دلیل تغییر در عوامل بازار کاهش می یابد. این عوامل بر عملکرد کلی بازارهای مالی تأثیر می گذارند و تنها با تنوع بخشیدن به دارایی ها کاهش می یابند که با بازار ارتباط برقرار نمی کنند، مانند برخی از طبقات خاص دارایی. ریسک بازار گاهی اوقات ریسک سیستماتیک نامیده می شود زیرا مربوط به عواملی مانند رکود اقتصادی است که بر کل بازار تأثیر می گذارد [۲۷].

این ریسک که در نتیجه حرکات بازار، یک شرکت ممکن است در معرض نوساناتی در ارزش دارایی های خود، میزان بدهی های خود یا درآمد حاصل از دارایی هایش باشد.

¹ Value In-Force (VIF)

نظریه مدرن نمونه کارها تمایز بین ریسک منحصر به فرد مربوط به سهام یا بخش های مختلف را که می تواند تا حد زیادی متنوع شود و ریسک سیستماتیک مربوط به جنبش های کل بازار را تشخیص می دهد. این تمایز در زیر مجموعه های ریسک بازار منعکس شده است [۴۶].

چندین عامل مختلف ریسک وجود دارد که ریسک بازار را تشکیل می دهند، به عنوان مثال:

- **ریسک نرخ ارز**^۱: ریسک بالا رفتن یا احتمالاً کاهش نرخ ارز.
- **ریسک حقوق صاحبان سهام**: ریسک افزایش یا کاهش قیمت سهام.
- **ریسک تورم**: احتمال تورم برای افزایش قیمت تمام کالا ها و خدمات به گونه ای که ارزش پول را تضعیف کند.
- **ریسک کالا**: احتمال تغییر قیمت کالا ها مانند فلزات که به طور چشم گیری تغییر می کند.
- **ریسک نرخ بهره**: ریسکی که از افزایش یا کاهش نرخ بهره ناشی می شود [۲۷].

ریسک اعتباری

ریسک اعتباری ریسکی است که طرفین از تعهدات خود کوتاهی می کنند، یعنی ریسکی که بدهکار نمی تواند تعهدات بازپرداخت خود را انجام دهد [۲۷].

در صورت عدم اجرای تعهدات قراردادی طرف مقابل (از جمله عدم اجرای به موقع آن ها)، ریسک زیان یک شرکت در معرض ریسک قرار دارد، از جمله ضررهای ناشی از افت رتبه و سایر تغییرات نامطلوب در احتمال شکست طرف مقابل [۴۶].

رویدادهای اعتباری شامل زیان اصل پول، پیش فرض بهره، برخی از اختلالات جریان های نقدی یا تشدید هزینه است. خسارات مربوط به رویدادهای اعتباری از نظر مبلغ و علل متفاوت است. به عنوان مثال، شرکتی که اگر کارمندان در تاریخ سر رسید به دلایل خاص، از نظر مکانیکی به عنوان پیش فرض در نظر گرفته شود، نتواند حقوقی دریافت کند. بنابراین وقوع یک رویداد اعتباری لزوماً شاهدهی بر ریسک سرمایه گذاری نیست. به منظور کاهش ریسک زیان پول قرض گرفته شده به وام گیرندگان، حاکمیت ها، شرکت ها و غیره، یک بانک بررسی های مختلفی را انجام می دهد و زیان احتمالی ناشی از حوادث احتمالی اعتباری را ارزیابی می کند [۲۷].

ریسک بیمه و جمعیت

ریسک تغییرات نامطلوب زندگی و تجربه مطالبات بیمه گر عمومی و صندوق بازنشستگی و همچنین قرار گرفتن بیشتر در معرض ماندگاری نامطلوب و سایر تجربیات جمعیت شناختی و از جمله تغییرات نامطلوب فرضیات مربوط به تجربه آینده [۴۶].

¹ currency risk

ریسک عملیاتی

کمیت بازل، ریسک عملیاتی را ریسک زیان ناشی از فرآیندهای داخلی، افراد و سیستم‌های غیر دقیق (ناکافی) یا معیوب یا ریسک زیان ناشی از حوادث خارجی تعریف کرده است. با این حال، کمیت بازل تشخیص می‌دهد که ریسک عملیاتی اصطلاحی است که معانی مختلفی دارد و بنابراین، برای اهداف داخلی به بانک‌ها اجازه داده می‌شود تعاریف خود را از ریسک عملیاتی اتخاذ کنند، مشروط بر این که حداقل عناصر تعریف کمیت در آن گنجانده شده باشد. از نقطه نظر محاسبه سرمایه نظارتی، و یک بار دیگر با فرض این که محاسبات سرمایه به نوعی یک روش اندازه‌گیری ریسک است، در حال حاضر ریسک عملیاتی دارای چهار راه محاسبه سرمایه از جمله رویکرد اندازه‌گیری استاندارد شده آینده است [۲۷].

ریسک نقدینگی

برای تعریف آن چه که ریسک نقدینگی را تشکیل می‌دهد، لازم است عواقب نامطلوب نقدینگی ناکافی را در نظر بگیریم. گذشته از عدم توانایی پرداخت بدهی‌ها به دلیل سررسید، ریسک نقدینگی می‌تواند موجب خسارات مربوط به موارد زیر شود:

- دارایی‌های کمتر از ارزش ترازنامه برای تأمین بدهی‌ها، احتمالاً با قیمت فروش آتش سوزی تحقق یافته است و
- بهره وام برای جبران کمبود نقدینگی.

این سوال وجود دارد که با توجه به این که وام گرفتن سررسید پرداخت را به تعویق می‌اندازد، هزینه وام گرفتن تا چه اندازه باید زیان نقدینگی را تشکیل دهد و این سود، منفعت زمانی خواهد داشت. گروه کار استدلال می‌کند که فقط سود اضافی بیش از نرخ پایه وام (خالص از تخفیف مالیاتی) باید به عنوان زیان نقدینگی محسوب شود [۴۶].

۴.۱ اندازه‌گیری (سنجش) ریسک

با توجه به مرجع [۱۳]، معیار اندازه‌گیری ریسک را به عنوان یک قانون نیاز سرمایه در نظر می‌گیریم. به طور دقیق‌تر، ریسک را به عنوان حداقل سرمایه‌ای که باید در یک ابزار مالی از پیش تعیین شده (که معمولاً بدون ریسک در نظر گرفته می‌شود) جمع‌آوری و سرمایه‌گذاری کنیم، کمی می‌کنیم تا خسارات آینده را در سطح قابل قبولی از امنیت مشخص کنیم. ارزش در معرض ریسک (VaR) و ریزش مورد انتظار (ES) برجسته‌ترین نمونه‌های اندازه‌گیری ریسک به معنای فوق هستند. از اندازه‌گیری ریسک برای پشتیبانی از تصمیم‌گیری و فرایندهای شرکت (از جمله مدیریت سرمایه و اندازه‌گیری عملکرد) با ارائه اطلاعات کمی مهم در رابطه با ریسک‌هایی که شرکت با آن روبرو است، استفاده می‌شود. ماهیت، مقیاس و پیچیدگی ریسک‌های مورد بحث معمولاً روش‌هایی را برای اندازه‌گیری ریسک با اهمیت

و متناسب بودن (یعنی این که آیا میزان تلاش متناسب با اندازه ریسک یا زیان های احتمالی است) دیکته می کنند نیز از موارد مهم هستند. این بخش طیف وسیعی از اقدامات را شامل می شود اما باید پذیرفت که برخی از ملاحظات مدل سازی دقیق برای سازمان های کوچک تر و پیچیده تر قابل استفاده نخواهد بود.

این بخش بر اقدامات ریسک متمرکز است که حاصل تولید مدل های ریسک است. این به تعدادی از زیرمجموعه ها با زیرمجموعه های اصلی متشکل از

- اجتناب کردن

- پذیرفتن

- کاهش

- اشتراک گذاری

تقسیم می شود. پاسخ هیئت مدیره به خطرات می تواند در میزان اشتباهی آن، تحمل ریسک و محدودیت های آن منعکس شود. یکی از عواملی که باید در نظر گرفته شود این است که گزینه های کاهش یا اشتراک گذاری ریسک اغلب اشکال جدیدی از ریسک را ایجاد می کنند که ممکن است به نوبه خود نیاز به نظارت داشته باشند. هنگام تصمیم گیری در مورد پذیرش، اجتناب یا کاهش، تقسیم ریسک، شرکت ممکن است مشخصات بازده ریسک و تأثیر آن را بر مشخصات کلی بازده ریسک شرکت در نظر بگیرد. از دیدگاه اصول انصاف مشتری، درخت تصمیم برای گرفتن یا پذیرش ریسک می تواند با این سوال شروع شود که آیا با پذیرش این ریسک نیاز مشتری تأمین می شود یا خیر. در بسیاری از موارد، مشتریان با ارائه محصولاتی که خطر را از آنها به یک شرکت بیمه منتقل می کنند، خدمات ارائه می دهند. به عنوان مثال، ریسک مرگ و میر، ریسک طول عمر و ریسک انصاف از طریق حداقل ضمانت بازگشت. نیازهای مشتری همچنین می تواند با پذیرفتن ریسک تأمین شود تا مشتریان به بازدهی جذاب که می تواند در طراحی محصولات پس انداز استفاده شود دسترسی داشته باشند. به عنوان مثال، اعتبار یا ریسک سهام از طریق ارائه محصولات پس انداز که در صندوق های سرمایه گذاری، سرمایه گذاری می کنند.

قیمت گذاری در رابطه با مشاغل جدید و رزرو برای ریسک های خاص مورد بحث، از دیگر جنبه های پاسخ به ریسک است. اگر شرکت تصمیم بگیرد که می خواهد از ریسک مورد بحث جلوگیری کند، قیمت گذاری برای تجارت جدید، به طور معمول با آن تصمیم مطابقت دارد. تجزیه و تحلیل ریسک ممکن است اطلاعاتی را فراهم کند که هنگام رزرو برای ریسک خاص مفید باشد. پس از تصمیم گیری برای کاهش یا تقسیم ریسک، شرکت می تواند مراحل زیر را انجام دهد:

- شناسایی گزینه های کاهش یا اشتراک گذاری ریسک ها.

- گزینه ها را از طریق تجزیه و تحلیل هزینه و سود ارزیابی کردن.

- برنامه ای برای اجرای پاسخ تهیه کردن.

تمام این موارد با توجه به مرجع [۱۲] بیان شده است.

۵.۱ اندازه (سنجه) های ریسک

در حالی که ریسک مفهومی با معنای شهودی روشن است، اما مشخص نیست که چگونه باید ریسک را کمی تعیین کرد. رویه فعلی در بانک ها معمولاً شامل تلاش برای شناسایی روش های انجام این کار است. روش فعلی در بانکها معمولاً شامل تلاش برای شناسایی روشهای توصیف توزیع ضرر و زیان کل (یعنی فراتر رفتن از برآورد لحظه های منتخب توزیع ضرر، مانند میانگین و انحراف معیار)، و در نتیجه طیف گسترده ای از معیارهای خطر بالقوه است که ممکن است مورد استفاده قرار گیرد. انتخاب معیار سنجش ریسک پیامدهای مهمی در ارزیابی ریسک دارد. به عنوان مثال، انتخاب میزان سنجش ریسک می تواند بر روی سطح ریسک نسبی طبقات دارایی و در نتیجه بر استراتژی بانک تأثیر بگذارد.

۱.۵.۱ ویژگی های مطلوب اندازه های ریسک

یک معیار ریسک ایده آل باید بصری، پایدار، محاسبه آسان، قابل فهم، منسجم و از نظر اقتصادی قابل تفسیر باشد. علاوه بر این، تحلیل ریسک بر اساس اندازه گیری ریسک باید ساده و معنی دار باشد.

شهودی: اندازه گیری ریسک باید به طور معنی داری با برخی مفهوم شهودی ریسک مانند زیان های غیرمنتظره همسو باشد.

پایدار: تغییرات کوچک در پارامترهای مدل نباید تغییرات زیادی در توزیع زیان تخمین زده شده و اندازه گیری ریسک ایجاد کند. به همین ترتیب، اجرای دیگر یک مدل شبیه سازی به منظور تولید توزیع ضرر، نباید تغییر چشمگیری در اندازه گیری ریسک ایجاد کند. همچنین، استواری اندازه گیری ریسک با توجه به تغییر در فرضیات مدل اساسی مطلوب است.

محاسبه آسان: محاسبه اندازه گیری ریسک باید تا حد ممکن آسان باشد. به طور خاص، انتخاب اندازه های ریسک پیچیده تر باید توسط شواهدی پشتیبانی شود که نشان می دهد افزایش تدریجی دقت بیش از هزینه پیچیدگی اضافی است.

درک آسان: اندازه گیری ریسک باید توسط مدیریت ارشد بانک به راحتی قابل درک باشد. باید پیوندی با سایر معیارهای شناخته شده ریسک وجود داشته باشد که بر مدیریت ریسک بانک تأثیر می گذارد. اگر توسط مدیریت ارشد درک نشود، احتمالاً اندازه گیری ریسک

تأثیر زیادی در مدیریت ریسک روزانه و تصمیمات تجاری نخواهد داشت که مناسب بودن آن را محدود می‌کند.

تجزیه ریسک ساده و معنی دار (مشارکت در ریسک یا تخصیص سرمایه): برای اینکه برای مدیریت ریسک روزانه مفید باشد، ریسک اندازه‌گیری شده برای کل نمونه کارها باید بتواند در واحدهای کوچک‌تر تجزیه شود (به عنوان مثال خطوط تجاری یا مواجهه های فردی). اگر توزیع زیان شامل اثرات متنوع سازی باشد، این تأثیرات باید به طور معناداری در خطوط تجاری جداگانه توزیع شود.

موارد مطرح شده در بالا برگرفته از مرجع [۲۳] می‌باشد.

۲.۵.۱ انواع اندازه های ریسک

در کاربردهای عملی، طیف وسیعی از اندازه های ریسک استفاده می‌شود. حال به بیان متداول ترین اندازه های ریسک می‌پردازیم که عبارت اند از: ارزش در معرض ریسک (VaR)، ارزش در معرض ریسک مشروط ($CVaR$)^۱، ارزش در معرض ریسک دنباله ای ($TVaR$)^۲، میانگین ارزش در معرض ریسک ($AVaR$)^۳ و ریزش مورد انتظار (ES).

تمام اندازه های ریسک دارای نقاط قوت و ضعف هستند، از آنجا که هیچ اندازه گیری واحدی نمی‌تواند تمام عناصر پیچیده اندازه گیری ریسک را به خود اختصاص دهد. به همین ترتیب، هیچ اندازه گیری ریسک ایده آل وجود ندارد.

با توجه به مراجع [۱۷] و [۳۵]، جداول (۱.۱) و (۲.۱) (با درجه ای از قضاوت ذهنی) مشخصات اصلی ترین اندازه های ریسک را ارائه می‌دهد.

¹Conditional value at risk

²Tail value at risk

³Average value at risk

شکل ۱.۱: اندازه های ریسک

اندازه های ریسک طبقه بندی و تحریف شده	ریزش مورد انتظار	ارزش در معرض ریسک	انحراف معیار	
خیر(شامل انتخاب طیف یا عملکرد اعوجاج است)	به اندازه کافی شهودی	بله	بله	شهودی
به توزیع زیان بستگی دارد	به توزیع زیان بستگی دارد	خیر، به فرضیات مربوط به توزیع زیان بستگی دارد	خیر، به فرضیات مربوط به توزیع زیان بستگی دارد	پایدار
به اندازه کافی آسان(وزن دهی توزیع زیان توسط تابع طیف/اعوجاج)	به اندازه کافی آسان(نیاز به تخمین توزیع زیان دارد)	به اندازه کافی آسان(نیاز به تخمین توزیع زیان دارد)	بله	محاسبه آسان
بلا فاصله قابل درک نیست	به اندازه کافی	بله	بله	قابل درک
بله	بله	زیر جمع پذیری را نقض می کند(برای توزیع زیان غیر ضروری بیضوی)	بله	منسجم
نسبتا ساده و معنی دار	نسبتا ساده و معنی دار	ساده نیست، ممکن است گزینه های تحریف شده را القا کند	ساده، اما خیلی معنی دار نیست	تجزیه ریسک ساده و معنی دار

شکل ۲.۱: اندازه های ریسک و خصوصیات اساسی

استواری	قابل استناد	قانون پایا	زیر جمع پذیر هم یکنوا	محدب	انسجام	اندازه های ریسک
توپولوژی ضعیف	✓	✓	✓	×	×	VaR
wasserstein	×	✓	✓	✓	✓	ES
توپولوژی ضعیف	✓	✓	✓	×	×	MS
wasserstein	✓	✓	×	✓	✓	ExVaR
C-استوار	✓	✓	×	×	×	LVaR
C-استوار	×	✓	×	×	×	RMBLD
C-استوار	×	✓	✓	×	×	RVaR
	×	✓	✓	✓	✓	Wang
wasserstein	×	✓	✓	×	×	GlueVaR
	×	✓	✓	✓	✓	EVaR

ارزش در معرض ریسک (VaR)

ارزش در معرض ریسک (VaR) آماری است که سطح ریسک مالی را در یک شرکت، پرتفوی یا موقعیت در یک بازه زمانی خاص اندازه گیری و کمی می کند. ارزش در معرض ریسک (VaR) معیاری برای ارزیابی ریسک زیان سرمایه گذاری ها است. این برآورد می کند که یک مجموعه از سرمایه گذاری ها، با توجه به شرایط عادی بازار، در یک بازه زمانی مشخص مانند یک روز، چه مقدار ممکن است از دست بدهد (با یک احتمال معین). VaR معمولاً توسط شرکت ها و نهاد های نظارتی در صنعت مالی برای سنجش میزان دارایی های مورد نیاز برای پوشش زیان های احتمالی مورد استفاده قرار می گیرد. VaR چهار کاربرد اصلی در امور مالی دارد: مدیریت ریسک، کنترل مالی، گزارش مالی و محاسبه سرمایه نظارتی. بیشترین سود VaR در تحمیل یک روش ساختاری برای تفکر انتقادی درباره ریسک نهفته است. یک مزیت اساسی VaR نسبت به سایر اندازه های ریسک مانند ریزش مورد انتظار، در دسترس بودن چندین روش بازآزمایی برای اعتبار بخشی به مجموعه ای از پیش بینی های VaR است [۹].

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال و X یک متغیر تصادفی که نمایش دهنده یک زیان مالی در یک نقطه زمانی آینده است، باشد. مقادیر مثبت X به عنوان زیان ها و مقادیر منفی آن به عنوان سودها در نظر گرفته می شوند. در این صورت ارزش در معرض ریسک X در یک سطح $p \in (0, 1]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$VaR_p(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq m) \geq p\}.$$

$VaR_p(X)$ به عنوان مینیمم مقدار سرمایه ای است که مجبور به افزایش و نگهداری به صورت نقدی هستیم تا بتوانیم زیان های آینده را در حداقل سطح p درصد حالات، جذب کنیم [۱۳].

ریزش مورد انتظار (ES)

ریزش مورد انتظار (ES) معیار سنجش ریسک است – مفهومی که در زمینه سنجش ریسک مالی برای ارزیابی ریسک بازار یا ریسک اعتباری پرتفوی استفاده می شود. ”ریزش مورد انتظار در سطح $q\%$ در بدترین موارد $q\%$ بازده مورد انتظار برای پرتفوی است. ES جایگزینی برای مقدار در معرض خطر است که نسبت به شکل دم توزیع زیان حساسیت بیشتری دارد. ریزش مورد انتظار را ارزش شرطی در معرض ریسک (CVaR) [۵۷]، ارزش متوسط در معرض ریسک (AVaR)، ریزش دم مورد انتظار (ETL) و ابرشکلی نیز می نامند [۵۶]. ES با تمرکز بر نتایج کم سود، خطر سرمایه گذاری را به روشی محافظه کارانه تخمین می زند. برای مقادیر زیاد q ، از سودآورترین اما بعیدترین احتمالات چشم پوشی می کند از طرف دیگر، در حالی که برای مقادیر کوچک q ، بیشترین زیان را دارد. از طرف دیگر، برخلاف حداکثر زیان با تخفیف، حتی برای مقادیر پایین تر q ، ریزش مورد انتظار تنها فاجعه بارترین نتیجه را در نظر نمی گیرد. مقدار q اغلب در عمل ۵٪ استفاده می شود. ریزش مورد انتظار معیار سنجش ریسک مفیدتری نسبت

به VaR در نظر گرفته می‌شود زیرا یک معیار منسجم و علاوه بر آن طیفی از ریسک پرتفوی مالی است. برای یک سطح چندک مشخص q محاسبه می‌شود، و به عنوان میانگین زیان ارزش پرتفوی تعریف می‌شود با توجه به این که زیان در یا زیر q - چندک در حال وقوع است [۱۳].

اگر X یک ریسک و $p \in (0, 1)$ آن گاه ریزش مورد انتظار X در سطح $p \in (0, 1)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$ES_p(X) = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_q(X) dq.$$

مقایسه (ES) و (VaR)

در عمل، VaR و ES دو معیار پرکاربرد ریسک هستند. اگرچه VaR با سهولت بیشتری تبیین و قابل فهم است، اما ممکن است همیشه شرایط تعدیل پذیری خرد را برآورده نکند و این (عدم انسجام) می‌تواند در تخصیص سرمایه داخلی بانک‌ها و تنظیم محدودیت برای زیرمجموعه‌ها مشکلی ایجاد کند. از طرف دیگر، ES اندازه گیری ریسک از نظر روش شناختی برتر است که بیشتر به دلیل انسجام آن است، که باعث می‌شود تخصیص سرمایه و تعیین محدودیت داخلی با اندازه گیری پورتفوی کل ریسک سازگار باشد. با این حال، ES خود را به راحتی تفسیر نمی‌کند و پیوند روشنی با رتبه بندی مورد نظر یک بانک ندارد. یک کلاس جدیدتر از معیارهای ریسک، که به عنوان معیارهای ریسک طیفی و تحریف شده شناخته می‌شود، اجازه می‌دهد تا وزن‌های مختلف به مقادیر توزیع زیان اختصاص داده شود، نه اینکه برای همه مشاهدات برابر باشد، همانطور که در مورد ES وجود دارد. [۵۷]. در عمل، VaR و ES دو معیار پرکاربرد ریسک هستند. اگرچه VaR با سهولت بیشتری تبیین و درک می‌شود، اما ممکن است همیشه شرایط زیر جمع پذیری شرطی را برآورده نکند و این (عدم انسجام) می‌تواند در تخصیص سرمایه داخلی بانک‌ها و تنظیم حد برای پرتفوی‌های فرعی مشکل ایجاد کند. از طرف دیگر، ES اندازه گیری ریسک از نظر روش شناختی برتر است، که بیشتر به دلیل انسجام آن است، که باعث می‌شود تخصیص سرمایه و تعیین محدودیت داخلی با اندازه گیری کل نمونه کارها از ریسک سازگار باشد. با این حال، ES به راحتی تفسیر نمی‌شود و پیوند روشنی با رتبه بندی مورد نظر یک بانک ندارد. یک کلاس جدیدتر از معیارهای ریسک، که به عنوان معیارهای ریسک طیفی و تحریف شده شناخته می‌شود، اجازه می‌دهد تا وزن‌های مختلفی به تعداد توزیع ضرر اختصاص داده شود، نه اینکه برای همه مشاهدات برابر باشد، همانطور که در مورد ES وجود دارد [۵۶]. بانک‌ها معمولاً از چندین معیار ریسک فوق‌الذکر و بعضی اوقات اندازه‌های متفاوتی برای اهداف مختلف استفاده می‌کنند. با این حال، VaR پرکاربردترین معیار ریسک است. برخی از بانک‌ها از VaR برای اندازه گیری سطح ریسک مطلق استفاده می‌کنند، اما به طور فزاینده‌ای از ES (در سطح اطمینان مطابق با VaR به طور کلی) برای تخصیص سرمایه در بانک استفاده می‌شود. این استدلال اغلب مطرح می‌شود که ارتباط VaR به عنوان معیار ریسک مطلق یا حد زیان به دلیل ارتباط با رتبه بندی هدف

بانک هنوز هم آسان تر برای مدیریت ارشد است. از طرف دیگر، برخلاف ES ، VaR - به دلیل خاصیت انسجام آن - می تواند برای مشارکت های سرمایه ای که به طور مداوم و مناسب مزایای متنوع سازی را در نظر می گیرند، استفاده شود. لازم به ذکر است، اگرچه ممکن است یک بانک از معیارهای مختلف زیان استفاده کند، اما این اقدامات معمولاً بر اساس همان توزیع زیان تخمین زده شده است. [۵۷].

محاسبه اندازه های ریسک

یک شاخص ریسک معمولاً سعی در تحقق حداقل یکی از اهداف زیر دارد.

- ریسک را به طور دقیق توصیف نماید
- میزان ریسک را اعلام نماید
- از بین ریسک های مختلف مقایسه نماید
- جدی ترین ریسک را شناسایی نماید
- تفسیر نماید که چگونه ریسک با گذشت زمان تغییر می کند
- اثربخشی استراتژی های کاهش ریسک را اندازه گیری نماید
- اقداماتی را برای سطح معینی از ریسک توصیه نماید

تمامی موارد بالا با توجه به مرجع [۵۸]، بیان شده است.

۶.۱ اهمیت سنجش و اندازه های ریسک در بیمه

مؤسسات بیمه در فعالیت خود با ریسک های بسیار مختلفی مواجه اند و لذا دسته بندی های متفاوتی از آنها می توان داشت [۱]. با توجه به مرجع [۵۴] ریسک های بیمه به ریسک دارایی ها (یا ریسک سرمایه گذاری)، ریسک بدهی ها (یا ریسک بیمه گری) و ریسک های عملیاتی دسته بندی شده اند. منظور از ریسک بیمه گری، ریسک هایی است که موسسه بیمه به دلیل صدور بیمه نامه یا قبول اتکایی با آن مواجه است. مؤسسات بیمه با صدور بیمه نامه و در قبال دریافت حق بیمه از مشتریان متعهد می شوند که به هنگام وقوع خطرات تحت پوشش بیمه، زیان وارده به مشتریان و بیمه گران خود را جبران نمایند و به آنها خسارت پرداخت کنند. دلایل متعددی برای وجود ریسک بیمه گری در مؤسسات بیمه (یا بیمه اتکایی) قابل طرح است که برخی از آنها تحت کنترل بیمه گر بوده و برخی دیگر هم تحت کنترل موسسه بیمه نیست. بلایای طبیعی و حوادث غیرمترقبه، پیشرفت تکنولوژی، نوآوری های پزشکی، تغییرات آب و هوایی، چرخه های کسب و کار، تورم و نرخ دستمزد، تغییر مقررات قانونی و غیره از جمله عواملی هستند که ریسک بیمه گری مؤسسات بیمه را تحت تاثیر قرار

می‌دهند ولی این عوامل در کنترل آن‌ها نیست. عواملی مانند نوع مدل‌های استفاده شده در قیمت‌گذاری حق بیمه، ارزیابی مقدار نگهداری ذخایر و غیره را می‌توان کنترل کرد. ارزیابی نادرست ریسک‌ها قبل از صدور بیمه‌نامه و قیمت‌گذاری کمتر از حد واقع بیمه‌نامه‌ها دو منبع عمده ریسک بیمه‌گری در موسسات بیمه است. ریسک بیمه‌گری هر رشته فعالیت بیمه ناشی از عوامل مختلفی است؛ مثلاً در رشته فعالیت‌های بیمه زندگی ریسک حق بیمه، ناشی از مجموعه ریسک‌های مانند ریسک مرگ و میر، ریسک طول عمر، ریسک معلولیت یا نقص و ابطال قرارداد و غیره است. در رشته فعالیت‌های بیمه غیرزندگی، ریسک بیمه‌گری تحت تاثیر ریسک خطرات فاجعه آمیز و ریسک فسخ قرارداد و غیره است. با توجه به اینکه موسسات بیمه در چندین رشته مختلف فعالیت دارند و در هر رشته فعالیت ریسک بیمه‌گری تحت تاثیر مجموعه ریسک‌های مختلفی است، لذا تجمیع ریسک‌های بیمه‌گری همه رشته فعالیت‌های یک موسسه بیمه فرضی با روش مناسب در تعیین حداقل سرمایه مورد نیاز موسسه و ارزیابی توانگری مالی آن بسیار حائز اهمیت است [۳].

در سالیان اخیر صنعت بیمه بسیار مورد توجه قرار گرفته است چرا که از عوامل مهم توسعه کشورها به حساب می‌آید و توسعه بیمه، شاخصی برای توسعه اقتصادی کشورها تلقی می‌شود. بیمه نقش به سزایی در شکوفایی و پیشبرد اهداف اقتصادی دارد و علاوه بر این ساختار بیمه به گونه ایست که ارتباط بسیار نزدیکی با اجزای نظام مالی دارد، این دلیل باعث شده است تا سلامت مالی این صنعت تأثیر انکارناپذیری بر ثبات مالی و اقتصادی کشورها داشته باشد. با توجه به جایگاه نظام بیمه در ثبات مالی، نظارت بر این صنعت و پایش مستمر سلامت مالی شرکت‌های بیمه و اتخاذ سیاست‌های احتیاطی برای پیشگیری از بروز ریسک‌های سیستماتیک از اهمیت بالایی برخوردار است. در حال حاضر طبق قانون، شورای عالی بیمه مقام ناظر خرد در صنعت بیمه کشور است. توجه به بحث نظارت کلان در کنار نظارت خرد بر بازارهای مالی در کشور برای نیل به هدف تامین ثبات مالی در اقتصاد ضرورت دارد. علاوه بر این، وجود برخی چالش‌ها باعث شده تا نظارت خرد بر بازار بیمه کشور نیز با سطح مطلوب فاصله قابل توجهی داشته باشد. بررسی شاخص‌های سلامت مالی شرکت‌های بیمه حکایت از عدم رعایت استاندارد‌های جهانی در خصوص شاخص‌های کفایت سرمایه، کیفیت دارایی‌ها، سودآوری و توانگری مالی دارد. همچنین درجه تمرکز بالا در بازار بیمه در کنار اجرای نادرست سیاست‌های خصوصی سازی باعث شده تا این صنعت در معرض ریسک ناتوانی مالی شرکت‌های بزرگ بیمه‌ای قرار داشته باشد. سهم بالای چند شرکت بیمه‌ای در بازار و وجود انحصار چندجانبه در این بازار، اهمیت رفع خلاءهای نظارتی را دوچندان می‌کند. به عبارت دیگر، آسیب‌شناسی وضع موجود و ارائه راهکارهایی برای حل مشکلات پیش روی نظارت کارا بر صنعت بیمه نقش بسزایی در رسیدن به جایگاه اصلی نظارت و تامین ثبات مالی در اقتصاد ایران دارد [۴].

همچنین سنجش و اندازه ریسک‌های بیمه‌گری و سایر ریسک‌های مرتبط با موسسات بیمه در مدیریت ریسک، تعیین حداقل سرمایه لازم و نظارت موثر ریسک، موثر می‌باشد.

۷.۱ خلاصه فصل

در این فصل به بیان مفاهیم مالی، تعریف ریسک و اهمیت آن، انواع ریسک، انواع اندازه های ریسک و ویژگی های آنان و اهمیت اندازه گیری ریسک در صنعت بیمه که این صنعت در سالیان اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است، پرداختیم. همچنین سنجش و اندازه ریسک های بیمه گری و سایر ریسک های مرتبط با موسسات بیمه را مورد کنکاش و بررسی قرار داده و به بیان لزوم اندازه گیری ریسک در این زمینه، پرداختیم.

فصل ۲

توزیع های زیان و اندازه های ریسک مبتنی بر آن

۱.۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید Ω یک مجموعه ناتهی و $\mathcal{F}$ یک σ - جبر روی Ω در نظر گرفته شود. در این صورت تابع $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ یک اندازه احتمال نامیده می شود هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند.

$$(1) \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

(۲) به ازای هر دنباله از پیشامدهای دو به دو مجزا مانند $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ از $\mathcal{F}$ ،

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد. در این صورت $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ را یک فضای احتمال بدون اتم می نامیم هرگاه برای هر $A \in \mathcal{F}$ که $\mathbb{P}(A) > 0$ ، $B \in \mathcal{F}$ ، $B \subseteq A$ و $0 < \mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(A)$ باشد.

نشانه گذاری ۱.۱.۲. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد. در این صورت χ را

مجموعه تمام متغیرهای تصادفی از Ω به $\mathbb{R}$ در نظر می گیریم. به عبارت دیگر

$$\mathcal{X} = \{X \mid \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{است تصادفی}\}.$$

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد و $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ دو متغیر تصادفی در نظر گرفته شوند. در این صورت گوییم X, Y ، $\mathbb{P}$ - قریب به یقین^۱ برابر هستند و می نویسیم $X = Y \quad \mathbb{P}.a.s.$ هرگاه

$$\mathbb{P}\left(\left\{w \in \Omega \mid X(w) \neq Y(w)\right\}\right) = 0.$$

مثال ۱.۱.۲. فرض کنید $\Omega = [0, 1]$ و $F = 2^\Omega$ مجموعه توانی Ω باشد. همچنین فرض کنید $\mathbb{P}$ اندازه لبک روی F در نظر گرفته شود.

$$\mathbb{P} : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$$

$$\mathbb{P}(A) = \text{طول مجموعه } A$$

$$X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad X(w) = \begin{cases} 2 & 0 \leq w < 1 \\ 4 & w = 1 \end{cases}$$

$$Y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad Y(w) = \begin{cases} 2 & 0 \leq w < 1 \\ \sqrt{5} & w = 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}\left(\left\{w \in [0, 1] \mid X(w) \neq Y(w)\right\}\right) = \mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}([1, 1]) = 1 - 0 = 0$$

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد و $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی در نظر گرفته شود. تابع توزیع متغیر تصادفی X با F_X نمایش داده می شود و عبارت است از

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

F_X تابعی صعودی و پیوسته از راست است. به ویژه مینیمم تابع F_X صفر و سوپریمم آن برابر یک است.

ملاحظه ۱.۱.۲. هرگاه $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال بدون اتم باشد و $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ تابعی صعودی و از راست پیوسته باشد به طوری که مینیمم و سوپریمم آن به ترتیب ۰ و ۱ باشند آنگاه متغیر تصادفی چون X موجود است به طوری که $F = F_X$.

^۱ $\mathbb{P}$ - almost surely

تعریف ۵.۱.۲. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد و χ فضای برداری متغیرهای تصادفی روی Ω در نظر گرفته شود. به ازای هر $X \in \chi$ ، F_X را تابع توزیع تجمعی X در نظر می گیریم. به ازای هر $X, Y \in \chi$ روابط $\sim$ ، $\leq$ و $\leq_{st}$ روی χ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$X \sim Y \iff F_X = F_Y$$

$$X \leq Y \iff \mathbb{P}(X \leq Y) = 1$$

$$X \leq_{st} Y \iff F_X(x) \geq F_Y(x).$$

نشانه گذاری ۲.۱.۲. هرگاه $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد، مجموعه تمام متغیرهای تصادفی حقیقی مقدار روی Ω را مجموعه ریسک ها می نامیم و آن را با χ نمایش می دهیم. مجموعه های L_- و L_{--} به صورت زیر تعریف می شوند.

$$L_- = \left\{ X \in \chi \mid X(\omega) \leq 0 \quad \omega \in \Omega \text{ برای هر } \right\}$$

$$L_{--} = \left\{ X \in \chi \mid X(\omega) < 0 \quad \omega \in \Omega \text{ برای هر } \right\}.$$

تعریف ۶.۱.۲. فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی باشد. زیرمجموعه C از V یک مخروط نامیده می شود هرگاه، به ازای هر $v \in V$ و هر $\lambda \geq 0$ ، $\lambda v \in V$. مخروط C یک مخروط محدب نامیده می شود هرگاه برای هر $v_1, v_2 \in C$ و هر $\lambda, \mu \geq 0$ ، $\lambda v_1 + \mu v_2 \in C$.

مثال ۲.۱.۲. هرگاه $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد و χ مجموعه ریسک در نظر گرفته شود آنگاه $\chi_+ = \{X \in \chi \mid X \geq 0\}$ یک مخروط محدب است.

تعریف ۷.۱.۲. اگر V یک فضای برداری حقیقی باشد آنگاه گروه خطی اصلی V که با نماد $GL(V)$ یا $Aut(V)$ نمایش داده می شود، گروه همه خودریختی های V است. یعنی مجموعه همه تبدیلات خطی دوسویی از V به V که در آن عمل ترکیب توابع همان عمل گروه می باشد.

تعریف ۸.۱.۲. هرگاه V یک فضای برداری و C مخروط محدب باشد آنگاه گروه خودریختی های C به صورت زیر تعریف می شود.

$$AutC = \{g \in GL(V) \mid g.C = C\}$$

C همگن نامیده می شود هرگاه $AutC$ روی C به طور انتقالی عمل کند.^۱ به این معنی که برای هر $c_1, c_2 \in C$ ، عضوی چون $g \in AutC$ موجود باشد به طوری که $g.c_1 = c_2$.

تعریف ۹.۱.۲. فرض کنید $A \subseteq \chi$ یک مجموعه ناتهی باشد که در اصول زیر صدق می کند. در این صورت A را یک مجموعه پذیرش می نامیم.

¹ acts transitively

$$.L_+ \subseteq \mathcal{A} \quad ۱.$$

$$.\mathcal{A} \cap L_{--} = \{\} \quad ۲.$$

۳. $\mathcal{A}$ یک مجموعه محدب است.

۴. $\mathcal{A}$ مخروط همگن مثبت است.

تعریف ۱۰.۱.۲. فرض کنید r نرخ کل بازده در یک قرارداد مرجع باشد و $\rho : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ یک اندازه ریسک (تابع حقیقی مقدار) در نظر گرفته شود

(الف) ρ انتقال پایا نامیده می شود هرگاه برای هر $X \in \chi$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ $\rho(X + \alpha r) = \rho(X) - \alpha$.

(ب) ρ زیر جمع پذیر است هرگاه برای هر $X_1, X_2 \in \chi$ $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$.

(ج) ρ خاصیت یکنوایی دارد هرگاه برای هر $X, Y \in \chi$ ، با شرط $X \leq Y$ $\rho(Y) \leq \rho(X)$.

(د) ρ همگن مثبت است هرگاه برای هر $\lambda \geq 0$ و هر $X \in \chi$ $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.

تعریف ۱۱.۱.۲. اندازه ریسک $\rho : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ منسجم نامیده می شود هرگاه دارای چهار خاصیت انتقال پایایی، زیر جمع پذیری، همگنی مثبت و یکنوایی باشد.

با الهام گرفتن از تعاریف مربوط به آرتزرنر (Artzner) در مرجع [۱۳] پس از مشخص نمودن یک مجموعه پذیرش $\mathcal{A} \subseteq \chi$ ، که نمایش دهنده مجموعه موقعیت هایی (متغیرهایی) است که از نقطه نظر ترتیب داخلی و یا خارجی موردپذیرش واقع می شود و اندازه ریسک وابسته به $\mathcal{A}$ را تعریف می کنیم.

تعریف ۱۲.۱.۲. فرض کنید $\mathcal{A} \subset \chi$ یک مجموعه پذیرش باشد. در این صورت اندازه ریسک متناظر شده به $\mathcal{A}$ نگاشت $\rho_{\mathcal{A}} : \chi \rightarrow [-\infty, +\infty]$ با ضابطه

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \mid X - m \in \mathcal{A}\}$$

است.

برای هر متغیر X ، کمیت $\rho_{\mathcal{A}}(X)$ در حالت متناهی بودن مینیمال مقدار از سرمایه را نشان می دهد که باید جمع شود و نگهداری گردد تا X با محدودیت مقبولیت اعمال شده توسط $\mathcal{A}$ همسو شود. از این نظر $\rho_{\mathcal{A}}(X)$ می تواند به عنوان یک نیاز سرمایه ای تفسیر شود. البته اگر X قبلاً در نوع اول قابل قبول باشد، آنگاه $\rho_{\mathcal{A}}(X)$ منفی است و می تواند به عنوان مبلغ سرمایه ای تفسیر شود که می تواند با استخراج پول نقد از X بدون از دست دادن مقبولیت به دست آید. با توجه به تفسیر عملیاتی روشن آنها، اندازه های ریسک فوق الذکر به طور خاص مورد مطالعه قرار می گیرند تا در یک چهارچوب کفایت سرمایه استفاده شوند.

گزاره ۱.۱.۲. $\rho_{\mathcal{A}}$ از خاصیت جمع پذیری نقدینگی برخوردار است بدین معنی که برای هر $X \in \chi$ و هر $m \in \mathbb{R}$ تساوی $\rho_{\mathcal{A}}(X + m) = \rho_{\mathcal{A}}(X) + m$ برقرار است.

برهان. فرض کنید $m \in \mathbb{R}$ ثابت و $n \in \mathbb{R}$ به گونه ای باشد که $(X + m) - n \in \mathcal{A}$. در این صورت $X - (n - m) \in \mathcal{A}$ و لذا با توجه به تعریف $\rho_A(X)$ می توان نتیجه گرفت که $\rho_A(X) \leq n - m$. این نشان می دهد که $\rho_A(X) + m \leq n$ و لذا

$$\rho_A(X) + m \leq \inf \{n \in \mathbb{R} \mid (X + m) - n \in \mathcal{A}\} = \rho_A(X + m).$$

بنابراین

$$\rho_A(X) + m \leq \rho_A(X + m) \quad (۱.۲)$$

از طرفی

$$\rho_A(X) = \rho_A(X + m - m) = \rho_A(X + m - (m)) \geq \rho_A(X + m) - m$$

این نشان می دهد که

$$\rho_A(X) + m \geq \rho_A(X + m) \quad (۲.۲)$$

مقایسه روابط (۱.۲) و (۲.۲) نشان می دهد که

$$\rho_A(X + m) = \rho_A(X) + m.$$

□

تعریف ۱۳.۱.۲. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال و X یک متغیر تصادفی که نمایش دهنده یک زیان مالی در یک نقطه زمانی آینده است، باشد. مقادیر مثبت X به عنوان زیان ها و مقادیر منفی آن به عنوان سودها در نظر گرفته می شوند. در این صورت ارزش در معرض ریسک X در یک سطح $p \in (0, 1]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$VaR_p(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq m) \geq p\}.$$

$VaR_p(X)$ به عنوان مینیمم مقدار سرمایه ای است که مجبور به افزایش و نگهداری به صورت نقدی هستیم تا بتوانیم زیان های آینده را در حداقل سطح p درصد حالات، جذب کنیم. $VaR_p(X)$ تعیین کننده قابل قبول بودن ریسک X است. در این حالت گوییم ریسک X قابل قبول است هرگاه:

$$X \text{ is acceptable} \iff VaR_p(X) \leq 0 \iff \mathbb{P}(X > 0) \leq 1 - p.$$

در این حالت می توان گفت که $VaR_p(X)$ ، میزان زیان را کمی می سازد. این مقدار و میزان زیان در تعیین سطح ریسک قابل پذیرش شرکت بیمه استفاده می شود.

گزاره ۲.۱.۲. اگر $p \in (0, 1]$ و مجموعه پذیرش متناظر به VaR در سطح p به صورت

$$\mathcal{A}_{VaR}(p) = \{X \in \mathcal{X} | VaR_p(X) \leq \circ\} = \{X \in \mathcal{X} | \mathbb{P}(X \leq \circ) \geq p\}$$

اختیار شود آنگاه VaR حالت خاصی از اندازه های ریسک به فرم $\rho_{\mathcal{A}}$ خواهد بود به عبارت دیگر

$$VaR_p = \rho_{\mathcal{A}_{VaR}(p)}.$$

برهان.

$$\begin{aligned} m \in \{m \in \mathbb{R} | X - m \in \mathcal{A}_{VaR}(p)\} &\iff \mathbb{P}((X - m) \leq \circ) \geq P \\ &\iff \mathbb{P}(X \leq m) \geq P \\ &\iff m \in \{m \in \mathbb{R} | \mathbb{P}(X \leq m) \geq P\} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\{m \in \mathbb{R} | X - m \in \mathcal{A}_{VaR}(p)\} = \{m \in \mathbb{R} | \mathbb{P}(X \leq m) \geq P\}$$

و لذا

$$\rho_{\mathcal{A}_{VaR}(p)} = \inf \{m \in \mathbb{R} | X - m \in \mathcal{A}_{VaR}(p)\} = \inf \{m \in \mathbb{R} | \mathbb{P}(X \leq m) \geq P\} = VaR_p(X).$$

□

علیرغم این که VaR یکی از پرکاربردترین معیار سنجش ریسک در عمل است اما به دو دلیل عمده زیر به شدت مورد انتقاد قرار گرفته است.

از یک طرف VaR تنها به فراوانی زیان ها وابسته است و نه به شدت آنها و از این رو، ممکن است در محاسبه زیان دم (دنباله) به روش مناسب ناکام باشد.

از طرف دیگر VaR نه محدب است و نه زیرجمع پذیر و بنابراین نمی تواند یک اندازه ریسک منسجم باشد. نقص محدب و زیرجمع پذیر نبودن اندازه ریسک VaR ممکن است تنوع بخشی و عدم تمرکز ریسک را محدود نماید و این مطلب به این علت اتفاق می افتد که اجازه کنترل ریسک کلی با لحاظ نمودن ریسک اجزای جداگانه آن داده نمی شود.

تعریف ۱۴.۱.۲. اگر X یک ریسک و $p \in (0, 1)$ آن گاه ریزش مورد انتظار X در سطح $p \in (0, 1)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$ES_p(X) = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_q(X) dq.$$

کاملاً واضح است که تا یک حالت اصلاح که یک ناپیوستگی را در توزیع X نشان می دهد، کمیت $ES_p(X)$ را می توان به عنوان امید ریاضی شرطی X فراتر از چندک p چپ بیان کرد. با توجه به اینکه همیشه می توان نوشت

$$ES_p(X) = \inf \{m \in \mathbb{R} | ES_p(X - m) \leq \circ\}.$$

کمیت $ES_p(X)$ را همچنین می توان به عنوان مقدار حداقل سرمایه در نظر گرفت که آنرا باید به منظور اطمینان حاصل کردن از اینکه به طور میانگین X باعث ایجاد تلفات در بدترین خروجی های $\% (1-p) \times 100$ نمی شود، افزایش داد یا به صورت نقدی حفظ کرد. در نتیجه، $ES_p(X)$ ریسک موقعیت X را به عنوان بهای ایجاد طرح ریسک قابل قبول X در حالت زیر تعیین می کند (F_X تابع توزیع X است)

$$X \text{ is acceptable} \iff ES_p(X) \leq 0 \quad F_X \text{ continuous} \iff \mathbb{E}[X|X \geq VaR_p(X)] \leq 0.$$

در واقع یک موقعیت تحت ES قابل قبول است اگر به طور میانگین باعث ایجاد یک تلفات در ریسک دنباله فراتر از یک چندک از پیش تعیین شده مشخص نشود.

همچنین ES مورد خاص دیگه ای از اندازه ریسک را نشان می دهد که $RVaR$ ^۱ نامیده می شود.

$RVaR$ موقعیتی از X است که بین سطوح $0 < p < q \leq 1$ تعریف می شود.

$$RVaR_{p,q}(X) = \frac{1}{q-p} \int_p^q VaR_r(X) dr.$$

تعریف ۱۵.۱.۲. فرض کنید $X \in \chi$ یک متغیر تصادفی باشد. در این صورت قسمت های مثبت و منفی X به صورت زیر تعریف می شوند.

$$X^+ = \max(X, 0) \quad \text{و} \quad X^- = \max(-X, 0).$$

X^+ و X^- به ترتیب نمایه مثبت و منفی متغیر X نامیده می شوند.

تعریف ۱۶.۱.۲. متغیر تصادفی X را کراندار می نامیم هرگاه عددی چون $c \geq 0$ موجود باشد به طوری که $\mathbb{P}(|X| \leq c) = 1$. به عبارت دیگر X کراندار است اگر و فقط اگر

$$X \leq c \quad \mathbb{P}.a.s.$$

تعریف ۱۷.۱.۲. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد. در این صورت دو متغیر تصادفی X, Y را هم یکنوا می نامند هرگاه متغیر تصادفی Z و توابع صعودی $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ موجود باشند به طوری که $X = f(Z)$ و $Y = g(Z)$.

تعریف ۱۸.۱.۲. فرض کنید $\alpha : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ یک تابع صعودی و پیوسته از راست باشد به طوری که به هر $u \geq 0$ یک وزن احتمال خاص مانند $\alpha(u) \in (0, 1]$ را نظیر می کند. در این صورت α یک توزیع زیان معیار نامیده می شود. هرگاه α یک توزیع زیان معیار باشد آنگاه به طور مخفف BLD^۲ نامیده می شود.

^۱ Range Value at Risk

^۲ Benchmark loss distributions

ملاحظه ۲.۱.۲. اگرچه در تعریف فوق لفظ توزیع برای تابع α به کار برده می شود ولی حتی با تعریف $\alpha(u) = 0$ به ازای هر $u \in (-\infty, 0)$ ، بازهم α در ویژگی های یک تابع توزیع احتمال صدق نمی کند. زیرا ممکن است شرط $\sup\{\alpha(u) | u \in \mathbb{R}\} = 1$ یا به طور معادل تساوی $\lim_{u \rightarrow \infty} \alpha(u) = 1$ برقرار نباشد.

۲.۲ اندازه های ریسک مبتنی بر توزیع زیان معیار

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید $\alpha : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ یک توزیع زیان معیار (BLD) باشد. در این صورت مجموعه پذیرش مبتنی بر α به صورت زیر تعریف می شود.

$$\mathcal{A}_\alpha = \{X \in \chi | F_X(u) \geq \alpha(u) \quad u \geq 0 \text{ هر } u \geq 0\}.$$

نشانه گذاری ۱.۲.۲. فرض کنید $\alpha : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ یک توزیع زیان معیار (BLD) باشد. در این صورت توابع $\alpha_-^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ و $\alpha_+^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\alpha_-^{-1}(p) = \inf \{u \geq 0 | \alpha(u) \geq p\},$$

$$\alpha_+^{-1}(p) = \inf \{u \geq 0 | \alpha(u) > p\}.$$

علاوه بر این $\underline{\alpha}$ و $\bar{\alpha}$ به صورت زیر نمادگذاری می شوند.

$$\underline{\alpha} = \inf_{u \geq 0} \alpha(u) = \alpha(0),$$

$$\bar{\alpha} = \sup_{u \geq 0} \alpha(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \alpha(u).$$

قضیه ۱.۲.۲. برای هر توزیع زیان معیار α مجموعه پذیرش $\mathcal{A}_\alpha$ نتایج زیر را به دست می دهد:

$$1. \mathcal{A}_\alpha = \{X \in \chi | X - u \in \mathcal{A}_{VaR}(\alpha(u)), \quad u \geq 0 \text{ هر } u \geq 0\}.$$

$$2. \mathcal{A}_\alpha = \{X \in \chi | VaR_{\alpha(u)}(X) \leq u, \quad u \geq 0 \text{ هر } u \geq 0\}.$$

به طور خاص داریم:

$$\mathcal{A}_{VaR}(\bar{\alpha}) \subseteq \mathcal{A}_{VaR} \alpha \subseteq \mathcal{A}_{VaR}(\underline{\alpha}).$$

برهان قسمت ۱. برای هر $u \geq 0$ داریم $F_X(u) \geq \alpha(u)$ ، اگر و تنها اگر $F_{X-u}(0) \geq \alpha(u)$. که با $X - u \in \mathcal{A}_{VaR}(\alpha(u))$ هم ارز است.

قسمت ۲. هم ارزی بین قسمت ۱ و ۲ مستقیماً از ویژگی نقد جمع پذیری VaR پیروی می کند.

برهان سمت چپ: $X \in \mathcal{A}_\alpha$ را در نظر می گیریم. برای هر $u \geq 0$ داریم

$$F_X(u) \geq F_X(\circ)\bar{\alpha} \geq \alpha(u).$$

برهان سمت راست: با توجه به قسمت ۱ اثبات می شود. فقط یادآوری می کنیم که $\underline{\alpha} = \alpha(\circ)$.

□

قضیه ۲.۲.۲. برای هر توزیع زیان معیار α با $\bar{\alpha} = 1$ ، مجموعه پذیرش $\mathcal{A}_\alpha$ نتیجه زیر را به دست می دهد:

$$\mathcal{A}_\alpha = \{X \in \chi \mid X \leq_{st} L\}.$$

جایی که $L \in \chi$ ، هر متغیر تصادفی مثبتی است که برای هر $u \geq \circ$ در $F_L(u) = \alpha(u)$ صدق می کند.

برهان. از آنجا که α صعودی و از راست پیوسته است، فرض کنیم $\bar{\alpha} = 1$ ، توسط غیر اتمی بودن، وجود یک متغیر تصادفی $L \in \chi$ به طوری که برای هر $u \in (-\infty, \circ)$ ، $F_L(\circ) = \circ$ و برای هر $u \in [\circ, \infty)$ ، $F_X(u) = \alpha(u)$ نتیجه مربوطه به سرعت اثبات می شود.

□

شرط مقبولیت داده شده توسط $\mathcal{A}_\alpha$ ریسک دم را با اعمال کران بالا روی احتمال زیان حداکثری تصرف می کند. این محدوده هر چه سطح ضرر بالا تر باشد، محکم تر است. همانطور که در مقدمه ذکر شد، هیچ یک از VaR یا ES به ما اجازه نمی دهد کنترل یکسانی را در مورد ریسک دم انجام دهیم. این موضوع در گزاره زیر مشخص شده است، که در آن به ما نشان می دهد، برای هر سطح زیان u ، احتمال زیان $\mathbb{P}(X > u)$ می تواند به طور یکنواخت روی X از پایین کراندار باشد که تحت هر یک از VaR یا ES در سطح p توسط مقدار ثابت $1 - p$ قابل قبول هستند.

قضیه ۳.۲.۲. نشان دهید برای هر $p \in (\circ, 1)$ و هر $u \geq \circ$ داریم:

$$\sup_{X \in \mathcal{A}_{VaR}(p)} \mathbb{P}(X > u) = \sup_{X \in \mathcal{A}_{ES}(p)} \mathbb{P}(X > u) = 1 - p.$$

برهان. $u \geq \circ$ در نظر می گیریم و می نویسیم

$$\begin{aligned} 1 - p &\geq \sup \{ \mathbb{P}(X > \circ) \mid X \in \mathcal{A}_{VaR}(p) \} \\ &\geq \sup \{ \mathbb{P}(X > u) \mid X \in \mathcal{A}_{VaR}(p) \} \\ &\geq \sup \{ \mathbb{P}(X > u) \mid X \in \mathcal{A}_{ES}(p) \}. \end{aligned}$$

حال برای هر $n \in \mathbb{N}$ موقعیت $X_n \in \chi$ را در نظر بگیرید به طوری که

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(1 - p)$$

9

$$\mathbb{P}(X_n = n - n^2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)(1 - p).$$

توجه داشته باشید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$ES_p(X_n) = \frac{1}{1-p} \left(\left(\frac{1-p}{n} \right) (n - n^2) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(1-p)n \right) = 0.$$

از آنجا که $\mathbb{P}(X_n > u) = \mathbb{P}(X_n = u)$ برای هر $n > u$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n > u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)(1-p) = 1-p.$$

این ادعای مورد نظر را اثبات می کند.

□

ملاحظه ۱.۲.۲. هرگاه $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی باشد و به ازای هر $w \in \omega$ ، $X(w) \geq 0$ ، آنگاه X یک متغیر زیان نامیده می شود.

و به طور مشابه هرگاه به ازای هر $w \in \omega$ آنگاه X متغیر تصادفی سود نامیده می شود.

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید $\alpha : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ یک تابع صعودی و از راست پیوسته باشد که به هر سطح زیان u احتمال ماکزیممی را متناظر می کند تا زیان های فراتر از u را متحمل شود. تعبیر این است که یک زیان فراتر از u حداکثر در سطح $(1 - \alpha(u))$ درصد تحمل می شود.

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنید α یک توزیع زیان معیار باشد. در این صورت اندازه ریسک متناظر شده بر α به صورت زیر تعریف می گردد

$$LVaR_\alpha(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X - m \leq u) \geq \alpha(u) \quad u \geq 0\}.$$

$LVaR_\alpha(X)$ را ارزش در معرض ریسک زیان با تابع معیار α می نامند.

در این راستا شرط قابل قبول بودن ریسک X به صورت زیر قابل بیان است

$$X \text{ is acceptable} \iff LVaR_\alpha(X) \leq 0 \iff \mathbb{P}(X > u) \leq 1 - \alpha(u) \quad \forall u \geq 0.$$

تعریف ۴.۲.۲. فرض کنید $LVaR_\alpha : \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ با ضابطه

$$LVaR_\alpha(X) = \rho_{A_\alpha}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \mid X - m \in A_\alpha\}$$

تعریف شود. در این صورت $LVaR_\alpha$ ، ارزش در معرض ریسک زیان با توزیع زیان معیار α نامیده می شود.

ملاحظه ۲.۲.۲. به سرعت می توان دریافت که مجموعه پذیرش به صورت شعاعی در طول ۱ بسته می شود به این معنا که، برای هر $X \in \chi$ و هر توالی $(m_n) \subset \mathbb{R}$ همگرا به $m \in \mathbb{R}$ ، داریم $X - m \in A_\alpha$ هر وقت برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $X - m \in A_\alpha$. این به وضوح دلالت می کند که:

$$A_\alpha = \{X \in \chi \mid LVaR_\alpha(X) \leq 0\}.$$

این حقیقت در ادامه مکرراً بدون مرجع صریح استفاده خواهد شد.

قضیه ۴.۲.۲. برای هر توزیع زیان معیار α ، اندازه ریسک $LVaR_\alpha$ در نتایج زیر صدق می کند

$$LVaR_\alpha(X) = \sup_{u \geq 0} (VaR_{\alpha(u)}(X) - u) = \sup_{p \in [\alpha, \bar{\alpha}]} (VaR_\alpha(X) - \alpha^{-1}(p)). \quad (۱.۲)$$

به طور خاص داریم

$$VaR_{\underline{\alpha}}(X) \leq LVaR_\alpha(X) \leq VaR_{\bar{\alpha}}(X). \quad (۲.۲)$$

برهان. یک $X \in \chi$ دلخواه در نظر می گیریم. برای نشان دادن نتیجه اول توجه داشته باشید که

$$\begin{aligned} LVaR_\alpha(X) &= \inf\{m \in \mathbb{R} \mid X - m \in A_\alpha\} \\ &= \inf\{m \in \mathbb{R} \mid VaR_{\alpha(u)}(X - m) \leq u, \quad u \geq 0\} \\ &= \inf\{m \in \mathbb{R} \mid VaR_{\alpha(u)}(X) - u \leq m, \quad u \geq 0\} \\ &= \sup_{u \geq 0} (VaR_{\alpha(u)}(X) - u). \end{aligned}$$

که از نتیجه ۲ قضیه ۱.۲.۲ در تساوی دوم و از خاصیت جمع پذیری نقدینگی VaR در سومین تساوی استفاده کرده ایم.

برای اثبات نتیجه دوم، $u \geq 0$ در نظر می گیریم و قرار می دهیم $p = \alpha(u)$. از آنجا که $\alpha^{-1}(p) \leq u$ ، استنباط می کنیم

$$VaR_{\alpha(u)}(X) - u \leq VaR_p(X) - \alpha^{-1}(p).$$

این، نابرابری " $\leq$ " در دومین نتیجه (۱.۲) را حاصل می کند. متقابلاً، $p \in [\alpha, \bar{\alpha}]$ در نظر می گیریم و فرض می کنیم که $\alpha^{-1}(p) < \infty$. سپس قرار می دهیم $u = \alpha^{-1}(p)$ و با توجه به از راست پیوسته بودن α داریم $\alpha(u) \geq p$. به عنوان یک نتیجه حاصل می شود

$$VaR_{\alpha(u)}(X) - u \geq VaR_p(X) - \alpha^{-1}(p).$$

نا برابری قبلی به طور پیش فرض برای هر $u \geq 0$ اگر $\alpha^{-1}(p) = \infty$ برقرار می باشد. این، نابرابری " $\geq$ " در دومین نتیجه (۱.۲) را نشان می دهد.

نابرابری های (۲.۲) مستقیماً از موارد قضیه ۱.۲.۲ پیروی می کنند.

□

در صورتی که α به عنوان دم راست یک تابع توزیع اصلی واجد شرایط باشد، در زیر اصلاح مجدد $LVaR_\alpha$ را بدست می آوریم.

نتیجه ۱.۲.۲. برای هر توزیع زیان معیار α ، با $\bar{\alpha} = 1$ ، اندازه ریسک $LVaR_\alpha$ مورد زیر را بیان می کند

$$LVaR_\alpha(X) = \sup_{p \in [\alpha, 1]} (VaR_p(X) - VaR_p(L))$$

که در آن $L \in \chi$ هر متغیر تصادفی مثبت است که برای $u \geq 0$ در $F_L(u) = \alpha(u)$ صدق می کند.

ملاحظه ۳.۲.۲. اصلاحات فوق از $LVaR$ از نظر محاسباتی جذاب هستند. از آنجا که آنها نشان می دهند $LVaR$ را می توان به عنوان مقدار مطلوب یک مسئله حداکثر سازی ساده تعیین کرد. توجه داشته باشید که، از مؤلفه VaR و مؤلفه ضرر در (۱.۲) نمایش یکنواختی مخالف به عنوان توابع سطح ضرر u ، راه حل مسئله حداکثر سازی فوق از نظر انتقادی به متغیر تصادفی مورد بررسی بستگی دارد.

گزاره زیر فرمولی ساده برای $LVaR$ ارائه می دهد هنگامی که توزیع ضرر معیار ارزش بسیاری دارد. نتیجه مستقیماً از اولین نمایش از $LVaR$ در قضیه ۴.۲.۲ برقرار گردید.

قضیه ۵.۲.۲. (BLD قطعه وار ثابت). یک توزیع زیان معیار α در نظر بگیرید و فرض کنید که

$$\alpha(u) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{if } u_1 \leq u < u_2 \\ \alpha_2 & \text{if } u_2 \leq u < u_3 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \text{if } u \geq u_n \end{cases}$$

برای بعضی از $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_n \leq 1$ و $0 = u_1 < \dots < u_n$. سپس برای هر $X \in \chi$ داریم

$$LVaR_\alpha(X) = \max_{k=1, \dots, n} (VaR_{\alpha_k}(X) - u_k).$$

در عمل اغلب با متغیرهای تصادفی گسسته به دست آمده از طریق توزیع های تجربی کار می شود. نتیجه بعدی نشان می دهد که اندازه ریسک $LVaR$ در قضیه چگونه محاسبه می شود.

قضیه ۶.۲.۲. (متغیرهای تصادفی گسسته). فرض کنید که $X \in \chi$ به مقادیر $x_1 < \dots < x_n$ می رسد. علاوه بر این برای تمام $k = 1, \dots, n$ ، قرار دهید $p_0 = 0$ و $p_k = F_X(x_k)$. سپس برای هر توزیع زیان معیار α داریم

$$LVaR_\alpha(X) = \max_{k=1, \dots, n} (x_k - \alpha_+^{-1}(p_{k-1})).$$

برهان. ابتدا هر $k \in 1, \dots, n$ در نظر می گیریم و توجه داشته باشید که برای تمام $p \in (p_{k-1}, p_k]$ داریم $VaR_p(X) = x_k$. از این رو از قضیه ۴.۲.۲ نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} LVaR_\alpha(X) &= \max_{k=1, \dots, n} \sup_{p_{k-1} < p \leq p_k} (VaR_p(X) - \alpha_-^{-1}(p)) \\ &= \max_{k=1, \dots, n} \sup_{p_{k-1} < p \leq p_k} (x_k - \alpha_-^{-1}(p)) \\ &= \max_{k=1, \dots, n} \left(x_k - \inf_{p_{k-1} < p \leq p_k} \alpha_-^{-1}(p) \right) \\ &= \max_{k=1, \dots, n} \left(x_k - \alpha_+^{-1}(p_{k-1}) \right). \end{aligned}$$

این فرمول مورد نظر را تعیین می کند.

□

با تعریف کمیت $LVaR_\alpha(X)$ نیازی به محدود کردن موقعیت دلخواه X نیست و از این رو، طبیعی است که بپرسیم تحت کدام شرایط $LVaR_\alpha$ کاملاً ارزش گذاری شده است. توجه داشته باشید که از دیدگاه مالی، $LVaR_\alpha(X) = \infty$ به این معنی که امکان ایجاد موقعیت برای پذیرفتن موقعیت X به هر قیمت محدود وجود ندارد. از طرف دیگر $LVaR_\alpha(X) = -\infty$ به این معنی است که X قابل قبول است و می توان بدون از دست دادن مقبولیت، مقدار دلخواه وجهی از X استخراج کرد.

قضیه ۷.۲.۲. برای هر توزیع زیان معیار α و هر $X \in \chi$ داریم $LVaR_\alpha(X) > -\infty$. علاوه بر این، موارد زیر را در نظر بگیرید

$$(۳.۲) \quad \text{تابع } \alpha \text{ در شرط } ۱ \text{ صدق می کند.}$$

$$(۴.۲) \quad \text{برای تمام } u \geq u_0, u_0 > 0 \text{ وجود دارد به طوری که } F_X(u) \geq \alpha(u).$$

$$(۵.۲) \quad \text{تابع توزیع } F_X \text{ در شرط } (z - u) < \infty \text{ صدق می کند.} \\ \sup_{\substack{u \geq 0 \\ F_X(u) < \alpha(u)}} \inf_{\substack{z \geq u \\ F_X(z) \geq \alpha(z)}} (z - u) < \infty$$

$$(۶.۲) \quad \text{برای تمام } u \geq 0, m > 0 \text{ وجود دارد به طوری که } F_X(u + m) \geq \alpha(u).$$

$$(۷.۲) \quad LVaR_\alpha(X) < \infty.$$

سپس،

$$(۳.۲) \Rightarrow (۴.۲) \Rightarrow (۵.۲) \Rightarrow (۶.۲) \Leftrightarrow (۷.۲).$$

برهان. $X \in \chi$ را دلخواه در نظر می گیریم. برای اثبات اولین ادعا، به یاد بیاورید که $\alpha > 0$ و توجه داشته باشید که با استفاده از قضیه (۴.۲.۲)

$$LVaR_{\alpha}(X) \geq VaR_{\alpha}(X) > -\infty.$$

حال، فرض کنید که (۳.۲) برقرار باشد. در این مورد، u_0 را به اندازه کافی بزرگ در نظر می گیریم تا داشته باشیم $F_X(u_0) > \bar{\alpha}$. سپس برای هر $u \geq u_0$ به راحتی به دست می آوریم

$$F_X(u) \geq F_X(u_0) > \bar{\alpha} \geq \alpha(u),$$

نشان می دهد که (۴.۲) برقرار است. اگر (۴.۲) برای بعضی از $u_0 > 0$ صدق کند، سپس $F_X(u_0) \geq \alpha(u_0)$ و هر $u \geq 0$ با $F_X(u) < \alpha(u)$ باید $u < u_0$ را برآورده کند. این نتیجه می دهد

$$\sup_{\substack{u \geq 0 \\ F_X(u) < \alpha(u)}} \inf_{\substack{z > u \\ F_X(z) \geq \alpha(z)}} (z - u) \leq u_0,$$

که (۵.۲) را نشان می دهد. بعد، فرض کنید که (۵.۲) صدق کند و $m > 0$ را بزرگتر از سوپریمم (۵.۲) در نظر بگیرید. برای هر $u \geq 0$ ما در یکی از موارد زیر قرار داریم. اگر $F_X(u) \geq \alpha(u)$ ، سپس

$$F_X(u + m) = F_X(u) \geq \alpha(u).$$

در غیر این صورت $F_X(u) < \alpha(u)$ ، سپس باید $u > z$ را با $F_X(z) < \alpha(z)$ پیدا کنیم که در شرط $z - u < m$ صدق کند، که نشان می دهد

$$F_X(u + m) \geq F_X(z) \geq \alpha(z) \geq \alpha(u).$$

از این رو نتیجه می گیریم که (۶.۲) برقرار است. برای ایجاد هم ارزی بین (۶.۲) و (۷.۲)، کافی است که نشان دهیم $LVaR_{\alpha}(X) < \infty$ برقرار است اگر و فقط اگر پیدا کنیم $m > 0$ به طوری که برای تمام $u \geq 0$

$$F_X(u + m) = F_{X-m}(u) \geq \alpha(u).$$

این نتیجه اثبات گزاره است.

□

ملاحظه ۴.۲.۲. مفهوم (۷.۲) $\Rightarrow$ (۵.۲) نشان می دهد هر زمان که فاصله بین هر سطح از زیان که در آن تابع توزیع F_X کاملاً در زیر توزیع ضرر معیار α قرار دارد، متناهی است و اولین سطح ضرر جایی که F_X از α عبور می کند، بصورت یکنواخت محدود می شود.

نتیجه گیری زیر نتیجه مستقیم قضیه (۷.۲.۲) است و مطابق با نتایج کلی مربوط به تناهی از

نتیجه ۲.۲.۲. برای هر توزیع زیان معیار α و هر $X \in \chi$ کراندار داریم $LVaR_\alpha(X) < \infty$.

این بخش را با برجسته کردن رابطه بین $LVaR$ و اندازه ریسک ΛVaR که در مرجع [۳۹] معرفی شد به پایان می‌رسانیم. و برای مطالعه بیشتر به مرجع [۲۲] رجوع شود. برای یک تابع صعودی از راست پیوسته $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ با شرط $\Lambda(0) \geq 0$ ، تابع احتمال زیان نامیده می‌شود. ΛVaR از یک موقعیت X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Lambda VaR(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \mid F_X(u) \geq \Lambda(u) \quad u \geq m\}.$$

در اینجا، تعریف اصلی را با علامت قرارداد مقاله خود مطابقت داده ایم. هدف مرجع [۳۹] به دنبال منطقی مبنی بر اینکه زیان های بالاتر باید با احتمال کمتری پذیرفته شوند، دنباله ای از ”درجات مقبولیت” را بر اساس Λ معرفی کرد. به این معنا، بین توزیع ضرر معیار α و تابع احتمال زیان وابستگی وجود دارد. با این وجود، علیرغم شباهت رسمی آنها، تفاوت مالی مهمی بین $LVaR$ و ΛVaR وجود دارد. در حالی که ضریب ریسک $LVaR_\alpha(X)$ در مرجع [۱۳] تعیین می‌شود. با ترجمه توزیع X تا رسیدن به یک پیکربندی قابل قبول، ضریب ریسک $\Lambda VaR(X)$ با مشاهده حداکثر بازه $[m, \infty)$ به صورت ”آماري” محاسبه می‌شود که در آن توزیع زیان X بالاتر از تابع احتمال زیان است. به طور خاص، بر خلاف $LVaR$ فرمول ”آماري” ΛVaR تفسیر عملیاتی روشنی از منظر کفایت سرمایه ندارد. از این نظر، به نظر می‌رسد $LVaR$ جایگزینی معتبر برای ΛVaR در چارچوب کفایت سرمایه است. نتیجه بعدی رابطه بین $LVaR$ و ΛVaR را برجسته می‌کند زمانی که تابع معیار α از نظر تابع احتمال زیان Λ ارائه می‌شود.

قضیه ۸.۲.۲. $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ را یک تابع صعودی از راست پیوسته با $\Lambda(0) > 0$ و مجموعه $\alpha(u) = \Lambda(u)$ برای تمام $u \geq 0$ در نظر بگیرید. سپس، α یک توزیع زیان معیار و برای هر $X \in \chi$ موارد زیر برقرار است

$$LVaR_\alpha(X) \leq 0 \iff \Lambda VaR(X) \leq 0. \quad (۸.۲)$$

$$|LVaR_\alpha(X)| \leq |\Lambda VaR(X)|. \quad (۹.۲)$$

برهان (۸.۲). ابتدا فرض کنید $\Lambda VaR(X) \leq 0$ و توجه داشته باشید که برای تمام $u \geq 0$ ، $F_X(u) \geq \alpha$ از راست پیوسته است. این بازده $LVaR_\alpha(X)$ است. متقابلاً، فرض کنید که $\Lambda VaR(X) > 0$. در این حالت، طبق تعریف، $u \geq 0$ وجود دارد به طوری که $F_X(u) < \alpha(u)$. این به معنی $X \notin \mathcal{A}_\alpha$ و بنابراین $LVaR_\alpha(X) > 0$ است.

برهان (۹.۲). ابتدا فرض کنید $\Delta VaR(X) \leq \circ$. در این مورد، طبق قضیه (۷.۲.۲) داریم $\Delta VaR(X) \leq \circ$ و بنابراین $LVaR_\alpha(X) \in \mathbb{R}$. به طور خاص، نتیجه می شود که $X - LVaR_\alpha(X) \in \mathcal{A}_\alpha$ به طوری که برای تمام $u \geq \circ$ داریم $F_X(u + LVaR_\alpha(X)) = F_{X - LVaR_\alpha(X)}(u) \geq \alpha(u)$ در نتیجه برای تمام $z \geq LVaR_\alpha(X)$ داریم $F_X(z) \geq \alpha(z - LVaR_\alpha(X)) \geq \alpha(z)$. که نتیجه می دهد $\Delta VaR(X) \leq LVaR_\alpha(X)$. بعد، فرض کنید که $\circ < \Delta VaR(X) < \infty$ و در این مورد به یاد بیاورید که $LVaR_\alpha(X) > \circ$ سپس، یک $\varepsilon > \circ$ دلخواه در نظر بگیرید و می بینیم که

$$F_{X - \Delta VaR(X) - \varepsilon}(u) = F_X(\Delta VaR(X) + \varepsilon + u) \geq \Lambda(\Delta VaR(X) + \varepsilon + u) \geq \alpha(u)$$

برای هر $u \geq \circ$ ، نشان می دهد که $LVaR_\alpha(X) \leq \Delta VaR(X) + \varepsilon$. از آنجا که ε دلخواه بود، نتیجه می گیریم که $LVaR_\alpha(X) \leq \Delta VaR(X)$.

□

ملاحظه ۵.۲.۲. توجه داشته باشید که نابرابری در (۹.۲) می تواند اکید باشد. برای دیدن این مورد $X \in \chi$ با توزیع F_X اکیدا صعودی و برای یک داده $m > \circ$ برای هر $u \geq \circ$ تعریف می کنیم $\alpha(u) = \Lambda(u) = F_X(u + m)$. به آسانی می بینیم که $LVaR_\alpha(X) = m$ اما $\Delta VaR(X) = \infty$. اتفاقاً، این مثال نشان می دهد که مفهوم (۵.۲) $\implies$ (۷.۲) در قضیه (۷.۲.۲) به طور کلی برقرار نیست.

تعریف ۵.۲.۲. فرض کنید $A \subset \chi$ در این صورت A را یک مجموعه پذیرش می نامند هرگاه A ناتهی، سره، محدب و یکنوا باشد. بدین معنی که $A - \chi_+ \subset A$ که در آن $\chi_+ = \{X \in \chi \mid X \geq \circ\}$.

در ادامه به بیان و تعریف تعدادی از ویژگی های استاندارد اندازه های ریسک می پردازیم و تعیین می کنیم که آیا اندازه های ریسک مبتنی بر توزیع های زیان معیار در این شرایط صدق می کند یا خیر. تمرکز اصلی بر روی ویژگی های نظری مالی است.

۳.۲ ویژگی های اندازه های ریسک مبتنی بر توزیع های زیان معیار

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید $\rho: \chi \rightarrow [-\infty, +\infty]$ یک تابع باشد:

۱. ρ یکنواست هرگاه برای هر $X, Y \in \chi$ با شرط $X \leq Y$ ، $\rho(X) \leq \rho(Y)$.

۲. ρ یکنوای تصادفی است هرگاه به ازای هر $X, Y \in \chi$ با شرط $X \leq_{st} Y$ ، $\rho(X) \leq \rho(Y)$.

۳. ρ محدب نامیده می شود هرگاه برای هر $X, Y \in \chi$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$.

۴. ρ زیر جمع پذیر نامیده می شود هرگاه به ازای هر $X, Y \in \chi$ $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

۵. ρ همگن مثبت نامیده می شود هرگاه به ازای $X \in \chi$ و هر $\lambda \in [0, \infty)$ $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.

۶. ρ هم یکنوا نامیده می شود هرگاه برای هر دو متغیر هم یکنوای $X, Y \in \chi$ $\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$.

۷. ρ محدب هم یکنوا نامیده می شود هرگاه برای هر دو متغیر هم یکنوای $X, Y \in \chi$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$.

۸. ρ زیر جمع پذیر هم یکنوا نامیده می شود هرگاه برای هر دو متغیر هم یکنوای $X, Y \in \chi$ $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

۹. ρ قانون پایا نامیده می شود هرگاه به ازای هر $X, Y \in \chi$ با شرط $X \sim Y$ $\rho(X) = \rho(Y)$.

۱۰. ρ پایایی مازاد به شرط مثبت بودن دارد هرگاه برای هر $X, Y \in \chi$ با شرط $\rho(X) \geq 0$ $\rho(X) = \rho(X^+)$.

۱۱. ρ دارای خاصیت p - دنباله است هرگاه به ازای هر $X, Y \in \chi$ که برای هر $q \in [p, 1)$ $VaR_q(X) = VaR_q(Y)$ برقرار باشد داشته باشیم $\rho(X) = \rho(Y)$.

ملاحظه ۱.۳.۲. کاملاً مشهود است که VaR تمام خصوصیات فوق به جز محدب بودن و زیر جمع پذیری را برآورده می کند. از طرف دیگر، ES کلیه خصوصیات فوق به جز پایایی مازاد به شرط مثبت بودن را برآورده می کند.

قضیه ۱.۳.۲. برای هر توزیع زیان معیار α اندازه ریسک $LVaR_\alpha$ ، برای تمام $p \in (0, \alpha]$ یکنوا، یکنوای تصادفی، محدب هم یکنوا، قانون پایا، پایایی مازاد به شرط مثبت بودن و یک اندازه ریسک p - دنباله است.

برهان. با توجه به قضیه (۴.۲.۲)، یکنوایی، یکنوای تصادفی و قانون پایایی از خواص مربوط به VaR پیروی می کنند. برای ایجاد محدب هم یکنوای دو متغیر هم یکنوای $X, Y \in \chi$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ را در نظر بگیرید. با یادآوری اینکه VaR هم یکنوا و همگن مثبت است، دوباره با استفاده از قضیه (۴.۲.۲) داریم

$$\begin{aligned}
 LVaR_\alpha(\lambda X + (1 - \lambda)Y) &= \sup_{u \geq \circ} (VaR_{\alpha(u)}(\lambda X + (1 - \lambda)Y) - u) \\
 &= \sup_{u \geq \circ} (\lambda VaR_{\alpha(u)}(X) + (1 - \lambda) VaR_{\alpha(u)}(Y) - (1 - \lambda)u) \\
 &\leq \lambda \sup_{u \geq \circ} (VaR_{\alpha(u)}(X) - u) + (1 - \lambda) \sup_{u \geq \circ} (VaR_{\alpha(u)}(Y) - u) \\
 &= \lambda LVaR_\alpha(X) + (1 - \lambda) LVaR_\alpha(Y).
 \end{aligned}$$

برای اثبات پایایی مازاد به شرط مثبت بودن، فرض کنید که $X \in \mathcal{A}_\alpha$ و برای هر $Y \in \chi$ که در $Y^+ = X^+$ صدق کند. سپس به آسانی می بینیم که به ازای هر $u \geq \circ$

$$F_Y(u) = F_{Y^+}(u) = F_{X^+}(u) = F_X(u) \geq \alpha(u)$$

این نتیجه می دهد $Y \in \mathcal{A}_\alpha$. در نتیجه، از تعریف $LVaR_\alpha$ نتیجه می شود که پایایی مازاد به شرط مثبت بودن دارد. در آخر، یک $p \in (\circ, \alpha]$ دلخواه در نظر بگیرید و فرض کنید که $X \in \mathcal{A}_\alpha$. علاوه بر این، برای هر $Y \in \chi$ و به ازای هر $q \in [p, 1)$ که در $VaR_q(Y) = VaR_q(X)$ صدق کند. به طور خاص توجه داشته باشید که برای هر $u \in [VaR_p(X), \infty)$ داریم $F_Y(u) = F_X(u)$. این فاصله شامل تمام اعداد حقیقی مثبت است زیرا $VaR_p(X) \leq VaR_\alpha(X) \leq LVaR_\alpha(X) \leq \circ$. از این رو، نتیجه می شود که به ازای هر $u \geq \circ$

$$F_Y(u) = F_X(u) \geq \alpha(u)$$

که نتیجه می دهد $Y \in \mathcal{A}_\alpha$. در نتیجه، می توانیم از تعریف (۱.۲.۲) در مرجع [۵۱] استفاده کنیم تا نتیجه بگیریم که $LVaR_\alpha$ یک اندازه ریسک p -دنباله است.

ملاحظه ۲.۳.۲. از قضیه (۲.۲.۲) نتیجه می شود که هر تابع $\rho : \chi \rightarrow [-\infty, +\infty]$ یکنوا، یکنوای تصادفی، جمع پذیری نقدینگی است و در $\rho(\circ) = \circ$ صدق کند، می تواند برای هر $X \in \chi$ به صورت زیر بیان شود

$$\rho(X) = \inf_{\alpha \in D} LVaR_\alpha(X)$$

جایی که D یک کلاس مناسب BLD است.

برای دیدن این، برای هر $Y \in \chi$ ، $\mathcal{A} = \{X \in \chi \mid \rho(X) \leq \circ\}$ و همچنین $\mathcal{A}_Y = \{X \in \chi \mid X \leq_{st} Y\}$ را در نظر بگیرید. و توجه داریم که

$$\mathcal{A} = \bigcup_{Y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}_Y.$$

زیرا برای رابطه شمول بالا داریم،

$$\begin{aligned} X \in \bigcup_{Y \in \mathcal{A}} \mathcal{A}_Y &\implies \exists Y \in \mathcal{A}, \quad X \in \mathcal{A}_Y \\ &\implies X \leq_{st} Y \implies \rho(X) \subseteq \rho(Y) \leq \circ \\ &\implies \rho(X) \leq \circ \implies X \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

سپس برای هر $X \in \chi$ ، داریم

$$\rho(X) = \rho_{\mathcal{A}}(X) = \inf_{Y \in \mathcal{A}} \rho_{\mathcal{A}_Y}(X) = \inf_{Y \in \mathcal{A}, \varepsilon > \circ} \rho_{\mathcal{A}_{Y-\varepsilon}}(X)$$

توجه داشته باشید که برای هر $Y \in \mathcal{A}$ و هر $\varepsilon > \circ$ داریم

$$F_{Y-\varepsilon}(\circ) > \circ \text{ و } Y - \varepsilon \in \mathcal{A}$$

(به عبارت دیگر $Y \geq \varepsilon$ و بدین ترتیب از طریق یکنوایی و جمع پذیری نقدینگی، $(\rho(Y) \geq \rho(\varepsilon) = \varepsilon)$. نمایش مورد نظر با موقعیت $\{ \alpha_{Y,\varepsilon} \mid Y \in \mathcal{A}, \varepsilon > \circ \}$ ، برای $u \geq \circ$ جایی که $\alpha_{Y,\varepsilon}(u) = F_{Y-\varepsilon}(u)$ از قضیه (۲.۲.۲) پیروی می کند.

قضیه ۲.۳.۲. برای هر توزیع زیان معیار α و هر $X \in \chi$ اندازه ریسک $LVaR_{\alpha}$ در موارد زیر صدق می کند

$$1. \text{ برای هر } 0 < \lambda < 1, \quad LVaR_{\alpha}(\lambda X) \leq \lambda LVaR_{\alpha}(X),$$

$$2. \text{ برای هر } \lambda > 1, \quad LVaR_{\alpha}(\lambda X) \geq \lambda LVaR_{\alpha}(X).$$

برهان. کافیت حکم (۱) را اثبات کنیم. به این منظور $X \in \chi$ را دلخواه و $0 < \lambda < 1$ در نظر می گیریم و توجه کنید که با همگنی مثبت VaR

$$LVaR_{\alpha}(\lambda X) = \sup_{u \geq \circ} (VaR_{\alpha(u)}(\lambda X) - u) \leq \sup_{u \geq \circ} (\lambda VaR_{\alpha(u)}(X) - \lambda u) = \lambda LVaR_{\alpha}(X).$$

این حکم (۲) را اثبات می کند.

□

قضیه بعدی نشان می دهد که VaR محدب یا فرعی نیست، مگر اینکه با

قضیه ۳.۳.۲. برای هر توزیع زیان معیار α عبارات زیر برقرار است

۱. ادعاهای زیر برابر است

$$(a) \quad LVaR_{\alpha} \text{ محدب است.}$$

$$(b) \quad LVaR_{\alpha} \text{ زیر جمع پذیر است.}$$

$$(c) \quad \alpha \text{ ثابت است با } \underline{\alpha} = 1.$$

در این مورد برای هر $X \in \chi$ ، $LVaR_{\alpha}(X) = \text{ess sup}(X)$

۲. ادعاهای زیر برابر است

- (a) $LVaR_\alpha$ همگن مثبت است.
- (b) $LVaR_\alpha$ هم یکنوا است.
- (c) $LVaR_\alpha$ هم یکنوای زیر جمع پذیر است.
- (d) α ثابت است.

در این مورد برای هر $X \in \mathcal{X}$ ، $LVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X)$

برهان قسمت ۱. نشان می دهیم (b) از (c) نتیجه می شود زیرا اگر α ثابت باشد و $\underline{\alpha} = 1$ آنگاه $\alpha(u) = 1$ به ازای هر $u \in [0, \infty)$. بنابراین

$$LVaR_1(X) = \inf \left\{ m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X - m \leq u) \geq 1 \quad u \geq 0 \right\}$$

هرگاه $\mathbb{P}(X - m \leq u) \geq 1$ ، آنگاه $\mathbb{P}(X - m \leq u) = 1$ و لذا به ازای هر $u \geq 0$

$$X - m \leq u \quad a.s.$$

با توجه به ویژگی مشخصه اینفیمم و تعریف $LVaR_1$ برای $\varepsilon > 0$ و برای هر $u \geq 0$

$$\exists m_1 \in \mathbb{R} \quad s.t. \quad LVaR_1(X) + \frac{\varepsilon}{4} > m_1, \quad X - m_1 \leq u \quad a.s.$$

$$\exists m_2 \in \mathbb{R} \quad s.t. \quad LVaR_1(Y) + \frac{\varepsilon}{4} > m_2, \quad Y - m_2 \leq u \quad a.s.$$

بنابراین با فرض $u = 0$ داریم

$$LVaR_1(X) + \frac{\varepsilon}{4} > m_1, \quad X - m_1 \leq 0 \quad a.s.$$

$$LVaR_1(Y) + \frac{\varepsilon}{4} > m_2, \quad Y - m_2 \leq 0 \quad a.s.$$

لذا

$$LVaR_1(X) + LVaR_1(Y) + \varepsilon > m_1 + m_2, \quad X + Y - m_1 - m_2 \leq 0 \quad a.s.$$

این نشان می دهد که $\mathbb{P}(X + Y - m_1 - m_2 \leq u) \geq 1$. حال با توجه به تعریف $LVaR_1$ نتیجه می گیریم که

$$LVaR_1(X + Y) \leq (m_1 + m_2).$$

حال می توان نتیجه گرفت که

$$LVaR_1(X + Y) \leq m_1 + m_2 < LVaR_1(X) + LVaR_1(Y) + \varepsilon.$$

اگر $\circ \rightarrow \varepsilon$ آنگاه

$$LVaR_1(X + Y) \leq LVaR_1(X) + LVaR_1(Y).$$

حال از (c) می توان (a) را نتیجه گرفت زیرا اگر (c) برقرار باشد آنگاه (b) برقرار است و در نتیجه به ازای هر $1 \leq \lambda \leq \circ$ داریم

$$\begin{aligned} LVaR_1(\lambda X + (1 - \lambda)Y) &\leq LVaR_1(\lambda X) + LVaR_1((1 - \lambda)Y) \\ &= \lambda LVaR_1(X) + (1 - \lambda) LVaR_1(Y) \end{aligned}$$

برای اثبات اینکه (c) از (a) نتیجه می شود، فرض کنید که $1 < \alpha$ و یک ε دلخواه در نظر بگیرید به طوریکه

$$\circ < \varepsilon < \min\left(\frac{1 - \alpha}{3}, \alpha\right).$$

چون $\mathbb{P}$ بدون اتم است، همواره پیشامدهای $E, F \in \mathcal{F}$ چنان موجود هستند که

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F) = \alpha + \varepsilon$$

و

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \alpha - \varepsilon.$$

علاوه بر این، از آنجا که α از راست پیوسته است، $z > \circ$ وجود دارد که در رابطه $\alpha(z) < \alpha + \varepsilon$ صدق می کند. به راحتی می توان نشان داد که برای متغیرهای تصادفی $X = z\chi_{E^c}$ و $Y = z\chi_{F^c}$ داریم

$$F_X(u) = F_Y(u) = \begin{cases} \alpha + \varepsilon & \text{اگر } u < z, \\ \alpha(u) & \text{اگر } u \geq z. \end{cases}$$

این نشان می دهد که هر دو متغیر X, Y متعلق به $\mathcal{A}_\alpha$ هستند. چون

$$F_{\frac{1}{\alpha}X + \frac{1}{\alpha}Y}(\circ) = \mathbb{P}(E \cap F) = \alpha - \varepsilon < \alpha$$

می توان نتیجه گرفت که $\frac{1}{\alpha}X + \frac{1}{\alpha}Y$ در $\mathcal{A}_\alpha$ قرار ندارد. بنابراین به عنوان یک نتیجه، رابطه

$$\frac{1}{\alpha} LVaR_\alpha(X) + \frac{1}{\alpha} LVaR_\alpha(Y) \leq \circ < LVaR_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}X + \frac{1}{\alpha}Y\right)$$

برقرار است که نشان می دهد $LVaR_\alpha$ محدب نیست. بنابراین، (a) ایجاب می کند که $\alpha = 1$. در این حالت، α باید ثابت باشد.

برهان قسمت ۲. در ابتدا ثابت می کنیم که هرگاه α ثابت باشد آنگاه به ازای هر $X \in \chi$ ،
 $VaR_{\underline{\alpha}}(X) = LVaR_{\alpha}(X)$

$$\begin{aligned} m_{\circ} &\in \left\{ m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X - m \leq u) \geq c \quad u \geq \circ \text{ به ازای هر } \right\} \\ &\implies \mathbb{P}(X - m_{\circ} \leq u) \geq c \quad u \geq \circ \text{ به ازای هر } \\ &\stackrel{u=\circ}{\implies} \mathbb{P}(X - m_{\circ} \leq \circ) \geq c \\ &\implies \mathbb{P}(X \leq m_{\circ}) \geq c \\ &\implies m_{\circ} \in \left\{ m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq m) \geq c \right\} \end{aligned}$$

این نشان می دهد که

$$\left\{ m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X - m \leq u) \geq c \quad u \geq \circ \text{ به ازای هر } \right\} \subseteq \left\{ m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq m) \geq c \right\}.$$

لذا

$$\inf \left\{ m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X - m \leq u) \geq c \quad u \geq \circ \text{ به ازای هر } \right\} \geq \inf \left\{ m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq m) \geq c \right\}.$$

در نتیجه

$$LVaR_{\alpha}(X) \geq VaR_{\underline{\alpha}}(X). \quad (۱.۲)$$

همچنین با توجه به این که به ازای هر $u \geq \circ$ ، رابطه

$$(X \leq m) \subseteq (X \leq m + u)$$

برقرار است، بنابراین

$$\mathbb{P}(X \leq m) \leq \mathbb{P}(X - m \leq u).$$

لذا هرگاه $\mathbb{P}(X \leq m) \geq c$ آنگاه $\mathbb{P}(X - m \leq u) \geq c$. این نشان می دهد که

$$\left\{ m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq m) \geq c \right\} \subseteq \left\{ m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X - m \leq u) \geq c \quad u \geq \circ \text{ به ازای هر } \right\}.$$

بنابراین

$$\inf \left\{ m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq m) \geq c \right\} \geq \inf \left\{ m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X - m \leq u) \geq c \quad u \geq \circ \text{ به ازای هر } \right\}.$$

لذا

$$VaR_{\underline{\alpha}}(X) \geq LVaR_{\alpha}(X) \quad (۲.۲)$$

روابط (۱.۲) و (۲.۲) نشان می دهند که به ازای هر $X \in \chi$ ،

$$VaR_{\alpha}(X) = LVaR_{\alpha}(X).$$

حال چون VaR_{α} دارای تمام ویژگی های همگنی مثبت، هم یکنوایی و زیر جمع پذیری هم یکنوا است بنابراین از (d) احکام (c) و (b) و (a) نتیجه می شوند.

حال نشان می دهیم از (a) و (b) و (c)، (d) نتیجه می شود.

برهان خلف. فرض کنید (d) برقرار نباشد یعنی، α ثابت نباشد. در این صورت $\circ < y < z$ موجود است بطوری که $\alpha(y) < \alpha(z)$. حال متغیر تصادفی $X \in \chi$ را که برای $p \in (\alpha(y), \alpha(z))$ و $x > z$ در شرط

$$F_X(u) = \begin{cases} \circ & \text{اگر } u < \circ, \\ p & \circ \leq u < x, \\ 1 & \text{اگر } u \geq x, \end{cases}$$

صدق می کند را در نظر می گیریم. در واقع اگر A و B دو مجموعه از هم جدا باشند که $\Omega = A \cup B$ و $\mathbb{P}(A) = p$ و $\mathbb{P}(B) = 1 - p$ ، آنگاه $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$X(\omega) = \begin{cases} \circ & \text{اگر } \omega \in A, \\ x & \text{اگر } \omega \in B \end{cases}$$

متغیر تصادفی مطلوب است.

به وضوح $\circ < y \leq \alpha_+^{-1}(p) \leq z < x$ حال با به کار بردن قضیه (۶.۲.۲) داریم

$$LVaR_{\alpha}(X) = \max(\circ, x - \alpha_+^{-1}(p)) = x - \alpha_+^{-1}(p)$$

و

$$LVaR_{\alpha}(\gamma X) = \max(\circ, \gamma x - \alpha_+^{-1}(p)) = \gamma x - \alpha_+^{-1}(p).$$

از آنجا که $\alpha_+^{-1}(p) > \circ$ ، آنگاه $LVaR_{\alpha}(\gamma X) > \gamma LVaR_{\alpha}(X)$ ، که نشان می دهد $LVaR_{\alpha}$ همگن مثبت، هم یکنوا و زیر جمع پذیر هم یکنوا نیست. که ناقض فرض های (a)، (b) و (c) است. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

ملاحظه ۳.۳.۲. فقدان زیرجمع پذیری نشان می دهد که $LVaR$ آربیتراژی نظارتی را ارائه می دهد که توسط وانگ در مرجع [۶۲] معرفی شده است. در حضور آربیتراژ نظارتی، یک مؤسسه مالی می تواند با تقسیم نمونه کارها به چند زیر پرتفلیو، حداقل در سطح نظری، نیاز سرمایه را کاهش دهد. همانطور که در ملاحظه (۱.۲) در مرجع [۶۲] نشان داده شده است،

یک اندازه ریسک بدون هیچگونه آربیتراژ نظارتی اگر و تنها اگر زیر جمع پذیر باشد. برای زیر جمع پذیر نبودن اندازه ریسک سوال این است که آیا آربیتراژ محدود است یا خیر، به این معنی که، وقتی تعداد زیرمجموعه ها به بی نهایت می رود، کاهش سرمایه مورد نیاز محدود است یا خیر. این پایان نامه مستلزم بررسی این موضوع است که آیا برای برخی از $X \in \chi$ های موجود ممکن است داشته باشیم

$$LVaR_\alpha(X) - \Psi_{LVaR_\alpha}(X) = \infty, \quad (3.2)$$

جایی که از وانگ تبعیت می کند، داریم

$$\Psi_{LVaR_\alpha}(X) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^n LVaR_\alpha(X_i) \mid X_1, \dots, X_n \in \chi : \sum_{i=1}^n (X_i) = X \right\}.$$

می توان نشان داد که، در مرجع [۶۲]، دارای آربیتراژ نظارتی نامحدود است، به عنوان مثال ما همیشه می توانیم موقعیت های محدود $X \in \chi$ را پیدا کنیم که در (۳.۲) صدق کند. به شرطی که برای $u_0 \in (0, \infty)$ داشته باشیم $\alpha(u_0) < 1$. این بلافاصله از قضیه (۶.۲) از مرجع [۶۲] اگر توزیع ضرر معیار $\bar{\alpha} < 1$ را برآورده کند، در این حالت $LVaR_\alpha$ از بالا به برخی از VaR محدود می شود، نتیجه می شود. در غیر این صورت، متغیر تصادفی مثبت $L \in \chi$ را در نظر بگیرید به طوری که برای هر $u \in [0, \infty)$ و مجموعه $p = \mathbb{P}(L > u_0) = 1 - \alpha(u_0) > 0$ داریم $F_L(u) = \alpha(u)$. $n \in \mathbb{N}$ را در نظر بگیرید به طوری که $np > 1$ و $\{A_1, \dots, A_n\}$ یک افراز اندازه پذیر از Ω باشد که در $\mathbb{P}(A_1) = \dots = \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$ صدق کند. تعریف می کنیم $L_1 = u_0 \chi_{A_1}, \dots, L_n = u_0 \chi_{A_n}$. طبق تعریف، این متغیر های تصادفی تا u_0 جمع می شوند و در

$$\mathbb{P}(L_1 \leq u) = \dots = \mathbb{P}(L_n \leq u) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} > \alpha(u_0) \geq \alpha(u) & \text{اگر } u \in [0, u_0), \\ 1 & \text{اگر } u \in [u_0, \infty). \end{cases}$$

صدق می کنند.

برای هر $u \in [0, \infty)$ نشان می دهیم که $L_1, \dots, L_n$ تحت $LVaR_\alpha$ ، همه قابل قبول هستند. این نشان می دهد که $\Psi_{LVaR_\alpha}(u_0) \leq 0$. برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، با استفاده از بردارهای تصادفی k با همان توزیع مشترک $L_1, \dots, L_n$ ، می توان ku_0 را به مجموع متغیر تصادفی kn تقسیم کرد که همه تحت $LVaR_\alpha$ قابل قبول هستند، به طوری که توسط زیر جمع پذیری نقدینگی داریم

$$LVaR_\alpha(0) - \Psi_{LVaR_\alpha}(0) = -\Psi_{LVaR_\alpha}(0) = ku_0 - \Psi_{LVaR_\alpha}(ku_0) \geq ku_0.$$

این (۳.۲) را نتیجه می دهد. یک روش برای محدود کردن آربیتراژ نظارتی برای $LVaR$ این است که بین $LVaR$ و مثلاً میانگین، ماکزیمم گرفته شود. این ممکن است در عمل یک محدودیت ملایم باشد زیرا به طور معمول، تنظیم کنندگان قوانین، سرمایه را که محافظه

کارانه تر از حد متوسط نیست، اجرا نمی کنند. ما این بخش را با برجسته کردن این نکته که $LVaR$ تا حدی تحذب را از VaR ”به ارث می برد“ هنگامی که به ترکیب متغیرهای تصادفی که VaR محذب است اعمال می کنیم، به پایان می رسانیم.

قضیه ۴.۳.۲. $X, Y \in \mathcal{X}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که به ازای هر $p \in [\alpha, 1]$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داریم

$$VaR_p(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda VaR_p(X) + (1 - \lambda)VaR_p(Y). \quad (4.2)$$

سپس به ازای هر $\lambda \in [0, 1]$ داریم

$$LVaR_\alpha(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda LVaR_\alpha(X) + (1 - \lambda)LVaR_\alpha(Y).$$

برهان. برای هر $\lambda \in [0, 1]$ طبق قضیه (۴.۲.۲) داریم

$$\begin{aligned} LVaR_\alpha(\lambda X + (1 - \lambda)Y) &= \sup_{u \geq 0} (VaR_{\alpha(u)}(\lambda X + (1 - \lambda)Y) - \lambda u - (1 - \lambda)u) \\ &\leq \sup_{u \geq 0} (\lambda (VaR_{\alpha(u)}(X) - u) + (1 - \lambda)(VaR_{\alpha(u)}(Y) - u)) \\ &\leq \lambda LVaR_\alpha(X) + (1 - \lambda)LVaR_\alpha(Y). \end{aligned}$$

□

این نتیجه اثبات گزاره است.

۴.۲ ویژگی های آماری

همانطور که در مقدمه ذکر شد، ادبیات اخیر در بین اندازه های ریسک، توجه زیادی را به بررسی خواص آماری VaR و ES اختصاص داده است. هدف اصلی این حوزه تحقیق جدید، ارزیابی قابلیت آماری روش اندازه گیری ریسک متناظر با یک معیار ریسک معین است. همانطور که در مرجع [۲۵] توصیف شده است، روش اندازه گیری ریسک شامل دو مرحله اساسی است. اول، توزیع برخی از موقعیت های مالی باید از مجموعه داده های موجود مانند شبیه سازی یا مشاهدات تاریخی تخمین زده شود. دوم، توزیع برآورد شده برای محاسبه نیاز سرمایه یا شاخص ریسک با استفاده از معیار ریسک از پیش تعیین شده (قانون پایا) استفاده می شود. در این بخش ما روی روش اندازه گیری ریسک شامل $LVaR$ با تمرکز ویژه بر استواری، قابلیت استخراج و آزمایش مجدد تمرکز می کنیم.

همانطور که در ادبیات آماری مرسوم است، به جای استفاده از یک اندازه ریسک قانون پایا

$\rho: \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ، از تابع آماری متناظر با آن یعنی $\rho: \mathcal{P} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ، با ضابطه

$$\rho(F) := \rho(X_F)$$

استفاده خواهیم کرد. که در آن $\mathcal{P}$ مجموعه ی توابع توزیع احتمال تجمعی روی $\mathbb{R}$ و X_F متغیر تصادفی با توزیع احتمال F است.

متذکر می شویم که نماد تابع آماری متناظر را همان نماد اندازه ریسک قانون پایا در نظر می گیریم.

استواری نتیجه یک روش اندازه گیری ریسک با توجه به اغتشاشات موجود در مجموعه داده ها و با توجه به روش های مختلف تخمین برای توزیع اساسی از دید عملیاتی بسیار مطلوب است. در این پایان نامه بر استواری آماری به معنای موجود در مرجع [۲۵] تمرکز می شود. برای بحث در مورد مفاهیم جایگزین استواری و مرور بر این مفاهیم به مرجع [۴۹] و [۳۲] ارجاع داده می شود.

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنید $F, G \in \mathcal{P}$. در این صورت فاصله لوی بین F, G به صورت زیر تعریف می شود

$$d_L(F, G) = \inf \{ \varepsilon > 0 \mid G(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F(x) \leq G(x + \varepsilon) + \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R} \}.$$

تعریف ۲.۴.۲. فرض کنید $\rho: \mathcal{P} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ یک تابع آماری باشد. در این صورت متناظر با ρ ، تخمین گر ریسک $\hat{\rho}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ که در آن $\mathbb{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ است معرفی می شود. هر $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ به عنوان یک گردایه از داده های تولید شده به وسیله عضوی چون $F \in \mathcal{P}$ تعبیر می شود و مقدار $\hat{\rho}(\mathbf{x})$ به عنوان تخمین برای $\rho(F)$ در نظر گرفته می شود.

مثال ۱.۴.۲. تخمین گر تاریخی

$$\hat{\rho}_h(\mathbf{x}) = \rho \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{[x_k, \infty)} \right)$$

برای هر $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ تعریف شده است. به شرطی که $\hat{\rho}$ با توجه به یک ساختار قابل اندازه گیری مناسب در $\mathbb{X}$ قابل اندازه گیری باشد، فرض را که در کل بخش ایجاد می کنیم، می توانیم برای هر $F \in \mathcal{P}$ و متغیر تصادفی $n \in \mathbb{N}$ تعریف کنیم

$$\hat{\rho}_n(F) = \hat{\rho}(\mathbf{X}_F^{(n)}),$$

جایی که $\mathbf{X}_F^{(n)}$ هر بردار n بعدی از $i.i.d$ است. متغیرهای تصادفی با توزیع مشترک F .

تعریف ۳.۴.۲. فرض کنید $\rho: \mathcal{P} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ یک تابع آماری باشد. می توان گفت ρ روی $F \in \mathcal{P}$ پیوسته است هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ وجود داشته باشد به شرط:

$$G \in \mathcal{P}, d_L(F, G) < \delta \implies |\rho(F) - \rho(G)| < \varepsilon.$$

حال $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ در نظر بگیرید. اگر $\hat{\rho}$ یک تخمین گر ریسک باشد، آنگاه $\hat{\rho}$ را $\mathcal{D}$ - مقاوم در $F \in \mathcal{P}$ می نامیم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ وجود داشته باشد و $n_0 \in \mathbb{N}$ به شرط

$$G \in \mathcal{D}, d_L(F, G) < \delta \implies \sup_{n \geq n_0} d_L(F_{\hat{\rho}_n(F)}, F_{\hat{\rho}_n(G)}) < \varepsilon.$$

به طور مستقیم، اگر یک تخمین گر ریسک قوی است، یک اغتشاش جزئی در یک کلاس خاص از توزیع $\mathcal{D}$ ، یک تغییر کوچک در اندازه گیری ریسک تخمین زده می شود. هرچه مجموعه $\mathcal{D}$ بزرگتر باشد، تخمین ریسک در انواع مختلف اغتشاش پایدارتر خواهد بود. (برای $\mathcal{D}$ یکی از استواری کیفی صحبت می کند، نگاه کنید به [۴۳]). نتیجه زیر رابطه بین تداوم و قدرت را برجسته می کند.

قضیه ۱.۴.۲. (نتیجه ۳.۳ در مرجع [۲۵]). $\rho : \mathcal{P} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ جملات زیر با هم برابرند

$$(a) \quad \rho \text{ بر } \mathcal{D} \text{ پیوسته است.}$$

$$(b) \quad \mathcal{D}, D_{\rho} \text{ بر } \hat{\rho}_h - \text{استوار است.}$$

در مراجع [۶۴] و [۲۵] مشاهده می شود که VaR به داده های کمتری نسبت به ES احتیاج دارد تا با دقت تخمین زده شود و از ES قوی تر است زیرا هرگونه تغییر در داده های فراتر از آستانه VaR را نادیده می گیرد. در مرجع [۲۵] به عنوان یک معامله بین کوری دم VaR و عدم استواری ES ، اندازه گیری ریسک جدید $RVaR$ را معرفی کرد. به بخش اول رجوع شود. $RVaR$ که به طور متوسط مقادیر کمی بین دو آستانه VaR است، اطلاعات دم بیشتری را نسبت به VaR ضبط می کند، اما در عین حال، به تخمین کل دنباله احتیاج ندارد و بنابراین از ES قوی تر است. ما شروع می کنیم با نشان دادن اینکه $LVaR$ همیشه نسبت به توابع توزیع اکیدا صعودی است، به شرطی که α یک تابع معیار گام به گام باشد. البته، این شامل، یک تابع معیار ثابت است. در آنچه در زیر می آید، ما با $\mathcal{D}_{\uparrow}$ مجموعه توابع توزیع اکیدا صعودی و با $\mathcal{D}_{\uparrow}^c$ زیرمجموعه آن متشکل از توابع پیوسته را نشان می دهیم.

قضیه ۲.۴.۲. یک قطعه ثابت تابع توزیع معیار α در قضیه (۵.۲.۲) را در نظر بگیرید. سپس $LVaR_{\alpha}$ بر روی $\mathcal{D}_{\uparrow}$ پیوسته است.

برهان. F, G را دلخواه در نظر بگیرید و توجه داشته باشید که

$$LVaR_{\alpha}(F) = \max_{k=1, \dots, n} (VaR_{\alpha_k}(F) - u_k),$$

جایی که $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ و $u_1 < \dots < u_n$ مانند قضیه (۵.۲.۲) هستند. از آنجا که در قضیه (۴.۳) در مرجع [۲۵] به ازای هر $p \in (0, 1)$ VaR_p است، به این ترتیب که برای هر $k \in \{1, \dots, n\}$ و هر $\varepsilon > 0$ ، هر زمان که $d_L(F, G) < \delta$ ، وجود داشته باشد $\delta_k > 0$ به طوریکه $|VaR_{\alpha_k}(F) - VaR_{\alpha_k}(G)| < \varepsilon$. قرار دهید $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$ که به ازای هر $k \in \{1, \dots, n\}$ به شرطی که $d_L(F, G) < \delta$ ، داریم

$$VaR_{\alpha_k}(G) - u_k - \varepsilon \leq VaR_{\alpha_k}(F) - u_k \leq VaR_{\alpha_k}(G) - u_k + \varepsilon.$$

با در نظر گرفتن مقدار حداکثر بیش از k نتیجه می گیریم که $|LVaR_\alpha(F) - VaR_\alpha(G)| < \varepsilon$ از $d_L(F, G) < \delta$ ، اثبات پیوستگی روی $\mathcal{D}_\uparrow$ نتیجه می شود.

□

اگر تابع معیار پیوسته باشد، سپس قدرت توابع توزیع، اکیدا صعودی است که علاوه بر این پیوسته نیز فرض می شوند. قبل از اثبات این، ما به نتیجه اولیه زیر نیاز داریم.

لم ۱.۴.۲. $F \in \mathcal{D}_\uparrow$ و تابع توزیع معیار α را پیوسته در نظر بگیرید. سپس، عبارات زیر برقرار است

(a) اگر $\bar{\alpha} < 1$ آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\xi \in (0, 1 - \bar{\alpha})$ وجود دارد، به طوری که

$$\sup_{u \geq 0} (VaR_{\alpha(u)+\xi}(F) - VaR_{\alpha(u)}(F)) \leq \varepsilon.$$

(b) برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\xi \in (0, \underline{\alpha})$ وجود دارد، به طوری که

$$\sup_{u \geq 0} (VaR_{\alpha(u)}(F) - VaR_{\alpha(u)-\xi}(F)) \leq \varepsilon.$$

برهان. $\varepsilon > 0$ را در نظر بگیرید و برای هر $u \geq 0$ تعریف می کنیم

$$\xi(u) = F(F^{-1}(\alpha(u)) + \varepsilon) - \alpha(u).$$

علاوه بر این، فرض کنید

$$\xi = \min \left(\inf_{u \geq 0} \xi(u), \frac{1 - \bar{\alpha}}{2} \right).$$

واضح است که $\xi(u) > 0$ از آنجا که F اکیدا صعودی است و چون $\underline{\alpha} < 1$ داریم $\lim_{u \rightarrow \infty} \xi(u) > 0$. در نتیجه پیوستگی F و α ، نتیجه می گیریم که $\xi > 0$. کفایت نشان دهیم برای هر $u \geq 0$ داریم

$$VaR_{\alpha(u)+\xi}(F) \leq VaR_{\alpha(u)+\xi(u)}(F) = F^{-1}(\alpha(u)) + \varepsilon = VaR_{\alpha(u)}(F) + \varepsilon.$$

(a) اثبات شد.

(b) نیز به طریق مشابه اثبات می شود.

□

قضیه ۳.۴.۲. تابع توزیع معیار α را پیوسته در نظر بگیرید به طوری که $\bar{\alpha} < 1$. آنگاه $LVaR_\alpha$ بر روی $\mathcal{D}_+^c$ پیوسته است.

برهان. قرار می‌دهیم $F \in \mathcal{P}$ و $\varepsilon > 0$ و $\xi \in (0, 1 - \bar{\alpha})$ به طوری که

$$\sup_{u \geq 0} (VaR_{\alpha(u)+\xi}(F) - VaR_{\alpha(u)}(F)) \leq \varepsilon. \quad (1.2)$$

این با توجه به (۱.۴.۲) امکان پذیر است. حال $\delta \in (0, \min\{\xi, \varepsilon\})$ و $G \in \mathcal{P}$ را که در $d_L(F, G) < \delta$ صدق می‌کند را در نظر بگیرید. از طریق تعریف فاصله لوی برای هر $m \in \mathbb{R}$ و $u \geq 0$ داریم

$$F(u+m) - \delta \geq \alpha(u) \implies G(u+m+\delta) \geq \alpha(u).$$

این نتیجه می‌دهد که $LVaR_\alpha(G) \leq \rho_{\alpha+\delta}(F) + \delta$. در نتیجه، با توجه به (۱.۲) استنباط می‌کنیم که

$$\begin{aligned} LVaR_\alpha(G) &\leq \sup_{u \geq 0} (VaR_{\alpha(u)+\delta}(F) - u) + \varepsilon \\ &\leq \sup_{u \geq 0} (VaR_{\alpha(u)+\xi}(F) - u) + \varepsilon \\ &\leq \sup_{u \geq 0} (VaR_{\alpha(u)}(F) - u) + 2\varepsilon \\ &= LVaR_\alpha(F) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

به طریق مشابه می‌توان با استفاده از (۱.۴.۲) ثابت کرد که

$$LVaR_\alpha(G) \geq LVaR_\alpha(F) - 2\varepsilon$$

این نشان می‌دهد که $LVaR_\alpha$ بر F پیوسته است و قضیه اثبات می‌شود.

□

ما بخش قدرت را با تأکید بر اینکه $LVaR$ ”استوار” است با توجه به تغییرات در توزیع زیان معیار به پایان می‌رسانیم. این نتیجه مستقیم لم (۱.۴.۲) است.

قضیه ۴.۴.۲. $F \in \mathcal{D}_+^c$ و دو تابع توزیع معیار α و β با $\underline{\alpha} < 1$ و $\underline{\beta} < 1$ را در نظر بگیرید. آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ وجود دارد، به طوری که

$$\sup_{u \geq 0} |\alpha(u) - \beta(u)| < \delta \implies |LVaR_\alpha(F) - LVaR_\beta(F)| < \varepsilon.$$

همانطور که در مقدمه ذکر شد، قابلیت آزمایش مجدد یکی دیگر از ویژگی های مهم آماری اندازه گیری ریسک است. به طور تقریبی، اگر معیار اندازه گیری ریسک بتواند صحت روش برآورد مربوط به فرآیند اندازه گیری ریسک را آزمایش کند، قابل آزمایش است. مفهوم بازگشت

پذیری نزدیک به مفهوم قابل قبول بودن است، که در سالهای اخیر درگیر بحث علمی شدیدی بوده است. پس از یادآوری مفهوم استخراج، نشان می دهیم که اقدامات ریسک مبتنی بر توزیع زیان معیار به طور کلی قابل قبول نیست. با این وجود، ما در مورد برخی مراحل ممکن برای انجام آزمایش مجدد بحث می کنیم.

تعریف ۴.۴.۲. تابع آماری $\rho: \mathcal{P} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ یک انتخاب کننده نامیده می شود، اگر تابع قابل اندازه گیری $L: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $F \in \mathcal{P}$ داشته باشیم:

$$\rho(F) = \arg \min_{z \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} L(z, x) dF(x).$$

به عنوان مثال در مرجع [۱۹] و منابع موجود در آن، تحت فرضیات ضعیف، ”تابع زیان“ L اجازه می دهد تا برآورد های مختلف اندازه گیری ریسک را بر اساس میانگین از دست دادن تجربی آنها طبقه بندی کند. علاوه بر این، همانطور که در مرجع [۲۱] بحث شد تابع L می توان برای بررسی اینکه آیا یک برآورد واحد برای $\rho(F)$ به اندازه کافی دقیق است به این معنا، که نزدیک است تا حداقل ضرر مورد انتظار تجربی را به حداقل برساند. همانطور که در مرجع [۴۱] اشاره شد، استطاعت پذیری توسط VaR (در مجموعه ای از توزیع های اکیدا صعودی) تأمین می شود اما توسط ES ، که فقط به طور مشترک با VaR قابل استخراج است، قابل قبول نیست (رجوع شود به [۳۶] و منابع موجود در آن). ما برای جزئیات بیشتر در مورد استناد و بازآزمایی به مراجع [۱۹]، [۶۵]، [۹]، [۲۰]، و [۵۵] مراجعه می کنیم.

یک شرط لازم برای استخراج، با توجه به مرجع [۲۸]، ویژگی مجموعه سطح محدب $(CxLS)$ ^۱ است که برای هر $\lambda \in [0, 1]$ و $F, G \in \mathcal{P}$ به طوریکه $\rho(F) = \rho(G)$

$$\rho(\lambda F + (1 - \lambda)G) = \rho(F) = \rho(G)$$

به آن احتیاج دارد. واضح است که VaR در $CxLS$ صدق می کند. لذا برای هر توزیع $F, G \in \mathcal{P}$ و هر $u \geq 0$ به طوری که $VaR_{\alpha(u)}(F) = VaR_{\alpha(u)}(G)$ در $LVaR$ صدق $CxLS$ کند. با این حال، $LVaR_{\alpha}$ نتواند $CxLS$ را برای توزیع های عمومی راضی کند و بنابراین، قابل استخراج نیست.

تعریف ۵.۴.۲. $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ در نظر بگیرید. یک تابع آماری $\rho: \mathcal{P} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ – شناخته شده است اگر یک تابع اندازه گیری $B: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $F \in \mathcal{D}$ دنشته باشیم

$$\int_{\mathbb{R}} B(z, x) dF(x) = 0 \iff z = \rho(F)$$

می گوئیم ρ ، $\mathcal{D}$ – قابل آزمایش، علاوه بر این برای هر $F \in \mathcal{D}$ ، B در

^۱Convex Level Sets

$$z_1 < z_2 \implies \int_{\mathbb{R}} B(z_1, x) dF(x) < \int_{\mathbb{R}} B(z_2, x) dF(x) \quad (2.2)$$

صدق می کند. بحث ما در مورد آزمایش مجدد با توجه به [۹] است، اگرچه تحلیل متفاوتی برای پرونده ما لازم است. در حقیقت، $LVaR$ به مفهوم فوق نمی تواند قابل آزمایش باشد زیرا قابلیت آزمایش مجدد، مستلزم قابلیت استناد به قضیه (۴.۲.۲) در [۹] است و می دانیم که $LVaR$ به طور کلی قابل استخراج نیست. به عنوان یک مشاهده اولیه، از قضیه (۲.۳) در [۹] یادآوری کنید که، برای هر $D_{\dagger}^c, VaR_p, p \in (0, 1)$ - قابل آزمایش است، با تابع آزمایش مجدد $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت زیر داده شده است

$$B_p(z, x) = \begin{cases} 1 - p & \text{اگر } z \geq x, \\ -p & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

به طور خاص، توجه داشته باشید که برای هر $F \in D_{\dagger}^c$ و $z \in \mathbb{R}$ داریم

$$\int_{\mathbb{R}} B_p(z, x) dF(x) = F(z) - p.$$

حال فرض کنید که $z \in \mathbb{R}$ یک تخمین از $LVaR_{\alpha}(F)$ برای یک توزیع داده شده $F \in D_{\dagger}^c$ باشد. با توجه به قضیه (۴.۲.۲) می دانیم که باید به ازای هر $u \geq 0$ داشته باشیم $LVaR_{\alpha}(F) + u \geq VaR_{\alpha(u)}(F)$. در نتیجه، بازآزمایی پذیری عملکرد VaR حاصل می شود

$$\inf_{u \geq 0} \int_{\mathbb{R}} B_{\alpha(u)}(LVaR_{\alpha}(F) + u, x) dF(x) \geq 0.$$

این بدان معنی است که $LVaR_{\alpha}$ را دست کم نمی گیرد به شرطی که

$$\inf_{u \geq 0} \int_{\mathbb{R}} B_{\alpha(u)}(z + u, x) dF(x) \geq 0.$$

حتی اگر ما نمی توانیم $LVaR_{\alpha}(F)$ را به معنای تعریف (۵.۴.۲) "شناسایی" کنیم، آزمون فوق امکان می دهد نتیجه گیری کنیم که آیا (به شدت) ریسک را دست کم می گیریم یا نه. در وضعیت مشترکی که برتری در قضیه (۴.۲.۲) در برخی از $u \geq 0$ حاصل می شود، همانطور که اگر α ارزشهای زیادی را بدست آورد، اتفاق می افتد، پس $LVaR_{\alpha}(F) + u = LVaR_{\alpha(u)}(F)$ لذا

$$\inf_{u \geq 0} \int_{\mathbb{R}} B_{\alpha(u)}(LVaR_{\alpha}(F) + u, x) dF(x) = 0.$$

در این حالت، انتظار می رود یک تخمین خوب z برای $LVaR_{\alpha}(F)$ باشد که در

$$\inf_{u \geq 0} \int_{\mathbb{R}} B_{\alpha(u)}(z + u, x) dF(x) = 0.$$

صدق کند.

ملاحظات فوق گزینه های مختلفی را برای انتخاب مدل و اعتبارسنجی مدل بر اساس $LVaR$ پیشنهاد می کنند. با توجه به مرجع [۹] از اصطلاح انتخاب مدل برای اشاره به انتخاب بهترین روش اندازه گیری ریسک در میان گروهی از روش های رقابتی استفاده شده است، به عنوان مثال، بر اساس توزیع های تجربی یا توزیع های پارامتریک برآورد شده از طریق حداکثر احتمال. شایان تأکید است که انتخاب مدل مقایسه ای را بین روشهای مختلف تخمین ارائه می دهد اما دقت آنها را از نظر نزدیکی به مقدار واقعی $LVaR_\alpha(F)$ مشخص نمی کند. از سوی دیگر، اعتبارسنجی مدل به آزمایش صحت یک روش تخمین خاص با توجه به مقدار واقعی اندازه گیری ریسک اشاره دارد. با توجه به موارد مطرح شده در زیر، $X \in \mathbb{R}^n$ دنباله ای از تحقق $i.i.d.$ را نشان خواهد داد.

انتخاب مدل

فرض کنید ابتدا می خواهیم از میان M تخمین های مختلف $LVaR_\alpha(F)$ را که با $z^1, \dots, z^M \in \mathbb{R}$ و با استفاده از توابع توزیع $F^1, \dots, F^M \in \mathcal{D}_F^c$ برای هر $u \geq 0$ تولید می شود، انتخاب کنیم. میانگین تحقق یافته برای $k = 1, \dots, M$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\mu_u^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n B_{\alpha(u)}(z^{(k)} + u, x_j).$$

اگر تخمین $z^{(k)}$ با مقدار دقیق $LVaR_\alpha(F)$ مطابقت داشته باشد، پس برای هر $u \geq 0$ ،

$$LVaR_\alpha(F)$$

باید مثبت باشد و نزدیک به صفر برای هر u به

$$\bar{u}^{(k)} = \arg \max_{u \geq 0} (VaR_{\alpha(u)}(F^{(k)}) - u).$$

میل کند.

روش انتخاب مدل را می توان به روش های مختلفی انجام داد

- (الف) میانگین محقق شده $\mu_u^{(k)}$ را فقط برای به حداقل رساندن $u = \bar{u}^{(k)}$ محاسبه کرده و تخمین را با کمترین رتبه انتخاب کنید.
- (ب) میانگین $\mu_u^{(k)}$ را برای مجموعه ای از u نزدیک به $\bar{u}^{(k)}$ محاسبه کنید: بهترین تخمین باید برای هر یک از آن ها میانگین نزدیک به صفر باشد.
- (ج) محاسبه میانگین $\mu_u^{(k)}$ را برای مجموعه بزرگی از u محاسبه کنید: بهترین تخمین باید میانگین غیر منفی را برای همه u داشته باشد و برای $u = \bar{u}^{(k)}$ نزدیک به صفر باشد.

اعتبارسنجی مدل

در همین راستا می توان روشهای مختلفی را برای اعتبارسنجی مدل پیشنهاد داد. البته، رویه های توضیح داده شده در بالا را می توان در یک تنظیم اعتبار مدل نیز به کار برد. علاوه

بر این، ممکن است از این واقعیت قابل توجه که VaR برای توصیف روش اعتبارسنجی مدل دیگر برای $LVaR$ به هیچ شرطی در فرآیند تولید داده نیاز ندارد. مشاهده کلیدی این است که، برای هر $z \in \mathbb{R}$ و هر متغیر تصادفی X_F با توزیع $F \in \mathcal{D}_+^c$ برای هر $u \geq 0$

$$B_{\alpha(u)}(z+u, X_F) = (1 - \alpha(u))\chi_{\{z+u \geq X_F\}} - \alpha(u)\chi_{\{z+u < X_F\}}$$

هویت $P - almostsurely$ دارد. بنابر این $B_{\alpha(u)}(z+u, X_F) + \alpha(u)$ یک متغیر تصادفی برنولی با میانگین $F(z+u)$ است که باید برای هر $u \geq 0$ بزرگتر یا مساوی با $\alpha(u)$ به شرطی که z تخمین مناسبی از $LVaR_{\alpha}(F)$ باشد. به طور خاص برای

$$\bar{u} = \arg \max_{u \geq 0} (VaR_{\alpha}(u)(F) - u),$$

$$F(z + \bar{u}) = \alpha(\bar{u})$$

به طور مشابه با انتخاب مدل، می توان آزمون های مختلف اعتبار سنجی مدل را انجام داد. با استفاده از روش های کلاسیک، می توان آزمایش کرد:

- (الف) تحقق $B_{\alpha(u)}(z+u, x_1) + \alpha(u), \dots, B_{\alpha(u)}(z+u, x_n) + \alpha(u)$ اگر فقط برای $u = \bar{u}$ آزمایش کنیم با توزیع برنولی با پارامتر $\alpha(\bar{u})$ سازگار هستند.
- (ب) تحقق $B_{\alpha(u)}(z+u, x_1) + \alpha(u), \dots, B_{\alpha(u)}(z+u, x_n) + \alpha(u)$ اگر برای کلاس $u \geq 0$ آزمایش کنیم با توزیع برنولی با پارامتر بزرگتر یا مساوی $\alpha(u)$ سازگار هستند.

۵.۲ کاربردهای اندازه ریسک های مبتنی بر توزیع های زیان معیار

در این بخش، ما برخی از کاربردهای $LVaR$ را با تمرکز ویژه ای بر مقایسه نیاز سرمایه مورد نیاز با آنهایی که توسط ES ، VaR و $RVaR$ القا می شوند، مورد بحث قرار می دهیم.

انتخاب توزیع زیان معیار

همانطور که در مقدمه مشخص شد، تعریف $LVaR$ امکان انعطاف پذیری کامل در انتخاب توزیع ضرر معیار را فراهم می کند. در حالی که انتخاب خاص به وضوح به زمینه خاص بستگی دارد، ما در اینجا دو کلاس کلی از توزیع زیان معیار را توصیف می کنیم که در انواع برنامه های مالی مناسب هستند.

یک انتخاب طبیعی برای تابع معیار α در نظر گرفتن یک تابع مرحله ای برای برخی از سطوح ضروری بحرانی $u_1 < \dots < u_n = 0$ و برخی از اوزان احتمال $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n \leq 1$ فرم

$$\alpha(u) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{اگر } u_1 \leq u < u_2 \\ \alpha_2 & \text{اگر } u_2 \leq u < u_3 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \text{اگر } u \geq u_n \end{cases}$$

است. در این صورت، می دانیم

$$LVaR_\alpha(X) = \max_{k=1, \dots, n} (VaR_{\alpha_k}(X) - u_k).$$

این کلاس از توابع معیار دارای کاربردهای طبیعی در زمینه کفایت سرمایه و تنظیم بدهی است، جایی که X نشان دهنده ارزش (منفی) ارزش سهام یک ترازنامه خاص است. در این زمینه، می توان α_1 را یک سطح اطمینان نظارتی استاندارد، مثلاً ۰.۹۹، دانست و با انتخاب سطح اطمینان محافظه کارانه بیشتری مطابق با آستانه های زیان حیاتی u_2 بافر سرمایه را در بالای VaR_{α_1} اضافه کرد، که ممکن است به عنوان مثال، به عنوان افزایش کسری از سطح سرمایه هدف از پیش تعیین شده تعیین شود، به عنوان مثال سطح سرمایه موجود. از آنجا که $LVaR_\alpha$ سرمایه مورد نیاز بیشتری نسبت به VaR_{α_1} تولید می کند، در اصل می توان حتی یک سطح معیار پایین تر α_1 ، مثلاً ۰.۹۵ را پذیرفت و استاندارد نظارتی را فقط فراتر از یک آستانه ضرر بحرانی خاص در نظر گرفت، که باید توسط رگولاتورها تأیید شود و می تواند مخصوص شرکت باشد.

عملکرد مرحله فوق در مدیریت نمونه کارها نیز طبیعی است، جایی که X بازده (منفی) بازده یک نمونه کارها را نشان می دهد. در این حالت، ممکن است میزان ضرر و زیان حیاتی $u_2 < \dots < u_n$ به عنوان افزایش کسری از سرمایه سرمایه گذاری شده در ابتدا تعیین شود و سطح α نشان دهنده اشتباهات ریسک سرمایه گذار است، به عنوان مثال، در نتیجه پرسشنامه فرم

(Q_1) من ضرر بیش از ... قبول نمی کنم. روز از ۱۰۰.

(Q_2) من زیان بیشتر از u_2 را در بیش از ... قبول نمی کنم. روز از ۱۰.

⋮

(Q_n) من زیان بیشتر از u_n در بیش از ... قبول نمی کنم. روز از ۱۰۰.

یکی دیگر از گزینه های طبیعی تعیین α به عنوان توزیع دم برخی از زیان های تصادفی معیار L و قرار دهید

$$\alpha(u) = \mathbb{P}(L \leq u), \quad u \geq 0.$$

در این حالت، شرط مقبولیت تحمیل شده توسط $LVaR_\alpha$ برابر است با الزام اینکه توزیع زیان X در مرتبه اول تصادفی بر L غلبه داشته باشد و $LVaR_\alpha(X)$ به راحتی بیان شود

$$LVaR_\alpha(X) = \sup_{p \in [\alpha(\circ), 1)} (VaR_p(X) - VaR_p(L)).$$

بسته به برنامه خاص، شخص ممکن است یک نمایه ضرر را انتخاب کند که کم و بیش سنگین باشد. به عنوان مثال، انتهای ضرر L ممکن است یک توزیع (عمومی) پارتو با میانگین احتمالاً بی نهایت در زمینه مطالبات بیمه بزرگ یا ریسک عملیاتی اما توزیع گاوسی یا دانشجویی در زمینه ریسک بازار را نشان دهد. در حالت دوم، α می تواند با توزیع ضرر نمونه کارها مشخص شود. نکاتی را که در بالا در مورد آنها بحث شد در برخی از مثالهای مشخص نشان می دهیم.

کفایت سرمایه

یک موسسه مالی را با سرمایه موجود $C_0 > 0$ در نظر بگیرید. سرمایه در پایان یک دوره زمانی مشخص با یک متغیر تصادفی مثبت $C_1 \in \mathcal{X}$ نشان داده می شود. در اینجا، سرمایه به ارزش سهام دفتری شرکت، یعنی ارزش دارایی های خالص از بدهی ها اشاره دارد. مطابق با قرارداد ما، تمرکز بر موقعیت طبیعی است

$$X = -C_1$$

ما فرض می کنیم که $C_0 = 100$ و به طور جداگانه توزیع زیان معیار

$$\alpha(u) = \begin{cases} 0.995 & \text{اگر } 0 \leq u < \frac{1}{4}C_0, \\ 0.999 & \text{اگر } \frac{1}{4}C_0 \leq u < \frac{1}{3}C_0, \\ 0.9995 & \text{اگر } u \geq \frac{1}{3}C_0. \end{cases}$$

را در نظر می گیریم. موقعیت X با توجه به α ارائه می شود و قابل قبول است

$$\mathbb{P}(X \leq 0) \geq 99.5\%, \quad \mathbb{P}(X \leq \frac{1}{4}C_0) \geq 99.9\%, \quad \mathbb{P}(X \leq \frac{1}{3}C_0) \geq 99.95\%.$$

شرط اول به ما می گوید، مطابق با استانداردهای تسویه شونگی ۲، پیش فرض در بیشتر از ۵٪ موارد قابل تحمل نیست. شرایط دیگر یک سطح احتمال حداکثر را برای پیش فرض های اندازه های مختلف تجویز می کند. به طور خاص، تنظیم کننده ها برای احتمال ایجاد پیش فرض بیش از ۵٪، به ترتیب حد بالایی ۱٪، ۰.۵٪ برای احتمال بروز پیش فرض که به ترتیب بالاتر از ۵٪ باشد و ۱۰٪ از سرمایه اولیه، را تعیین می کنند.

در آنچه در زیر می آید فرض می کنیم که $p = \mathbb{P}(x > 0) > 0.5\%$ به طوری که X با توجه به α قابل قبول نیست و بنابراین $LVaR_\alpha(X) = LVaR_\alpha(X^+)$ با پایایی مازاد به شرط مثبت بودن، به قضیه (۱.۳.۲) رجوع شود. تمرکز ما بر توزیع ضررهای زیر است $F_{X^+}(0) = 1 - p$ و برای $\lambda > 0$ و $\mu \in \mathbb{R}$ و $\sigma > 0$ و جایی که Φ یک توزیع استاندارد است، داریم

- (a) $F_{X^+}(u) = 1 - pe^{-\lambda u}$ برای $u > 0$
 (b) $F_{X^+}(u) = 1 - p\left(1 - \Phi\left(\frac{\log(u)-\mu}{\sigma}\right)\right)$ برای $u > 0$

نتایج موارد بالا

- (a) $\mathbb{P}(X \leq u | X > 0) = 1 - e^{-\lambda u}$ برای $u > 0$, $(\mathbb{E}[X | X > 0] = \frac{1}{\lambda})$ به طور خاص $\frac{1}{\lambda}$,
 (b) $\mathbb{P}(X \leq u | X > 0) = \Phi\left(\frac{\log(u)-\mu}{\sigma}\right)$ برای $u > 0$, $(\mathbb{E}[X | X > 0] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}})$ به طور خاص $e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$.

حال $1 - p < s < t < 1$ را در نظر بگیرید و مشاهده کنید که $Var_{1-p}(X) > 0$ دلالت دارد بر $ES_s(X) = ES_s(X^+)$ و همچنین $RVaR_{s,t}(X) = RVaR_{s,t}(X^+)$ در حالت نمایی (a)، محاسبات استاندارد این را نشان می دهد

- (a) $Var_s(X) = -\frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{1-s}{p}\right)$,
 (b) $RVaR_{s,t}(X) = \frac{1}{\lambda(t-s)} \left((1-t) \left(\log\left(\frac{1-t}{p}\right) - 1 \right) - (1-s) \left(\log\left(\frac{1-s}{p}\right) - 1 \right) \right)$,
 (c) $Var_s(X) = -\frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{1-s}{p} - 1\right)$.

به طور مشابه، در حالت غیر عادی (b) برای هر $s \in (0, 1)$ جایی که $f_\sigma(s) = \Phi(\Phi^{-1}(s) - \sigma)$ داریم

- (a) $Var_s(X) = e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1-s}{p}\right)}$,
 (b) $RVaR_{s,t}(X) = \frac{p}{t-s} e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \left(f_\sigma\left(1 - \frac{1-t}{p}\right) - f_\sigma\left(\frac{1-s}{p}\right) \right)$,
 (c) $ES_s(X) = \frac{p}{1-s} e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \left(1 - f_\sigma\left(\frac{1-s}{p}\right) \right)$.

احتمال پیش فرض $p = \mathbb{P}(X > 0)$ در ۲٪ تنظیم شده است. در حالت نمایی اجازه می دهیم شدت متفاوت باشد و در حالت غیر طبیعی ما μ را ثابت می کنیم و اجازه می دهیم نوسانات ورود به سیستم وجود داشته باشد. اول از همه، مشاهده می کنیم که $LVaR_\alpha$ همیشه محافظه کارتر از Var_α است. این با قضیه (۴.۲.۲) مطابقت دارد. در هر دو حالت می بینیم که $LVaR_\alpha(X)$ با افزایش نوسانات X بیشتر و بیشتر از $Var_\alpha(X)$ فاصله می گیرد. واضح است که هیچ نظم ساختاری بین $LVaR_\alpha$ و $RVaR_{\alpha,\bar{\alpha}}$ و همچنین بین $LVaR_\alpha$ و ES_α وجود ندارد. مقایسه با $RVaR_{\alpha,\bar{\alpha}}$ خصوصاً جالب توجه است زیرا هر دو معیار ریسک با یک مقدار مشابه محدود می شوند. محاسبات نشان می دهد، هنگامی که نوسانات X بیش از یک آستانه خاص باشد، $LVaR_\alpha(X)$ بزرگتر از $RVaR_{\alpha,\bar{\alpha}}$ می شود. از این رو، به نظر می رسد $LVaR_\alpha$ نسبت به $RVaR_{\alpha,\bar{\alpha}}$ واکنش بیشتری نسبت به ریسک دم نشان می دهد. هنگام مقایسه $LVaR_\alpha$ با ES_α باید در نظر داشت که $LVaR_\alpha(X)$ تمام نتایج X را فراتر از Var_α محدود می کند در حالی که ES_α کل $\bar{\alpha}$ - دم X را در نظر می گیرد. علی رغم این، می بینیم که

$$LVaR_\alpha(X) > ES_\alpha(X) \quad (۱.۲)$$

به محض این که نوسان X از یک آستانه خاص فراتر رود. این خصوصاً جالب است زیرا (۱.۲) نشان می دهد که نیاز سرمایه ES_α برای پذیرفتن X با توجه به اعتبار کافی نیست. این اتفاق می افتد، به عنوان مثال، در حالت نمایی (a) با $\lambda = 1\%$ ، که مربوط به پیش فرض پیش بینی شده $\mathbb{E}[X|X > 0]$ برابر با 1% سرمایه اولیه، یا در حالت معمولی (b) با $\sigma = 2$ که مربوط به پیش فرض پیش بینی شده $\mathbb{E}[X|X > 0]$ برابر با 7% سرمایه اولیه است.

مدیریت ریسک نمونه کارها

سرمایه گذاری را در نظر بگیرید که می خواهد ”ریسک” برخی سرمایه گذاری ها را ارزیابی کند، به عنوان مثال در سبد دارایی های مالی، با نگاهی به سود و زیان مربوطه $V_1 - V_0$ که در آن V_0 ثروت سرمایه گذاری شده در آغاز کار است و $V_1 \in \mathcal{X}$ ثروت در پایان یک دوره زمانی از پیش تعیین شده است. مطابق با قرارداد ما، تمرکز بر موقعیت طبیعی است.

$$X = V_0 - V_1.$$

بازده سرمایه گذاری (نسبی) می تواند بر حسب X بیان شود مانند

$$R = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = -\frac{X}{V_0}.$$

فرض می کنیم که $V_0 = 100$ و به طور جداگانه توزیع زیان معیار را در نظر بگیریم

$$\alpha(u) = \begin{cases} 0.9 & \text{اگر } 0 \leq u < \frac{1}{100} V_0, \\ 0.95 & \text{اگر } \frac{1}{100} V_0 \leq u < \frac{1}{40} V_0, \\ 0.99 & \text{اگر } \frac{1}{40} V_0 \leq u < \frac{1}{10} V_0, \\ 0.999 & \text{اگر } u \geq \frac{1}{10} V_0. \end{cases}$$

موقعیت X با توجه به α قابل قبول است که

$$\mathbb{P}(X \leq 0) \geq 90\%, \mathbb{P}(X \leq \frac{1}{100} V_0) \geq 95\%, \mathbb{P}(X \leq \frac{1}{40} V_0) \geq 99\%, \mathbb{P}(X \leq \frac{1}{10} V_0) \geq 99.9\%.$$

شرط اول به ما می گوید که ضرر و زیان بیش از 1% موارد تحمل نمی شود. شرایط دیگر یک سطح احتمال حداکثر را برای زیان های با اندازه های مختلف تجویز می کند. به طور خاص، عامل برای از دست دادن بیش از 1% (به ترتیب 5% و 10%) ثروت اولیه، حد بالایی 5% (به ترتیب 1% و 0.1%) را تعیین می کند. شرایط فوق را می توان به طور معادل بر حسب بازده بیان کرد

$$\mathbb{P}(R \geq 0) \geq 90\%, \mathbb{P}(R \geq -1) \geq 95\%, \mathbb{P}(R \geq -5) \geq 99\%, \mathbb{P}(R \geq -10) \geq 99.9\%.$$

طبق شرط اول، بازده منفی در بیش از 1% موارد پذیرفته نمی شود. شرایط دیگر یک سطح احتمال حداکثر را برای بازدهی منفی با اندازه های مختلف تجویز می کند. بنابراین توزیع زیان

معیار α برای انعکاس نگرش ریسک نماینده با توجه به کمبود سرمایه گذاری انتخاب شده است. هدف ما محاسبه $LVaR_\alpha(X)$ و مقایسه آن با سایر معیارهای ریسک است. در دنباله، ما بر روی دو مورد ساده، تمرکز می کنیم یعنی برای $\mu \in \mathbb{R}$ و $\sigma > 0$ و جایی که $N(0, 1)$ طبقه ای از توزیع های استاندارد و $t(\nu)$ از t - توزیع دانشجویی با ν درجه از آزادی را نشان می دهد

$$(a) X = \mu + \sigma Z \quad Z \sim N(0, 1) \text{ با}$$

$$(b) X = \mu + \sigma T \quad T \sim t(\nu) \text{ با}$$

در هر دو حالت، عبارات صریحی برای VaR و $RVaR$ در دسترس هستند. در واقع، Φ را در نظر بگیرید، به ترتیب Ψ_ν ، تابع توزیع یک توزیع نرمال استاندارد و t - توزیع دانشجویی باشد. علاوه بر این $\phi = \Phi'$ و $\psi = \Psi'_\nu$ توابع چگالی مربوطه باشد. محاسبات آسان نشان می دهد که، برای $0 < s < t < 1$ داریم

$$\begin{aligned} (a) VaR_s(X) &= \mu + \sigma \Phi^{-1}(s) \\ (b) RVaR_{s,t}(X) &= \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(s)) - \phi(\Phi^{-1}(t))}{t-s} \\ (c) ES_s(X) &= \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(s))}{1-s} \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

در حالت عادی (a) و

$$\begin{aligned} (a) VaR_s(X) &= \mu + \sigma \Psi_\nu^{-1}(s) \\ (b) RVaR_{s,t}(X) &= \mu + \frac{\sigma}{\nu-1} \frac{g_\nu(s) - g_\nu(t)}{t-s} \\ (c) ES_s(X) &= \mu + \frac{\sigma}{\nu-1} \frac{g_\nu(s)}{1-s} \end{aligned}$$

در مورد دانشجو (b) جایی که برای هر $s \in (0, 1)$ ، $g_\nu(s) = \psi(\Psi_\nu^{-1}(s))(\nu + (\Psi_\nu^{-1}(s))^2)$ ، محاسبه با توجه به سطوح مختلف بازده مورد انتظار به دلیل جمع پذیری نقدینگی ساده است. مشاهده می کنیم، همانطور که انتظار می رفت، $LVaR_\alpha$ همیشه به اندازه VaR_α محافظه کار است. اگر سطح نوسان کم باشد، دو معیار ریسک بر هم منطبق می شوند اما با افزایش سطح نوسان، بیشتر و بیشتر دور می شوند. این پدیده در مورد (b) به دلیل این واقعیت که t - توزیع دانشجویی دارای دم سنگین تر از یک توزیع طبیعی است، بارزتر است. از جدول ۲ در پیوست آ، مشخص است که نه $LVaR_\alpha$ و نه $RVaR_{\alpha, \bar{\alpha}}$ به روشی سیستماتیک بر یکدیگر مسلط نیستند. در این مثال، $LVaR_\alpha(X)$ سخت تر از $RVaR_{\alpha, \bar{\alpha}}$ است وقتی X خفیف خطرناک است و با فراتر رفتن سطح نوسان از یک آستانه خاص، محافظه کارتر می شود. یک بار دیگر، این را می توان در شکل (b) به شکل بارزتر ارزیابی کرد. همانطور که در مثال قبلی در مورد کفایت سرمایه وجود دارد، بنابراین محاسبات فوق نشان می دهد که $LVaR_\alpha$ نسبت به $RVaR_{\alpha, \bar{\alpha}}$ حساسیت بیشتری نسبت به ریسک دم نشان می دهد. جالب است بدانید که $LVaR_\alpha$ نیز محافظه کارانه تر از ES_α است. در این حالت، تنظیم ذخیره سرمایه برابر با ES_α اجازه نمی دهد که شرایط قابل قبول تحمیل شده توسط α بر توزیع ضرر را برآورده کند.

ریسک فاجعه بار

با توجه به تعدادی از زیان های بیمه ای اخیر که توسط بلایای طبیعی همچون سونامی ها، طوفان ها و زمین لرزه ها اتفاق افتاده است، ریسک های فاجعه بار از اهمیت ویژه ای برای کمپانی های بیمه و بیمه تکمیلی برخوردار شده است. به منظور انتخاب مدلی شایسته در ارتباط با زیان های ملاحظه شده به واسطه بلایای طبیعی، به مدل هایی با میانگین نامتناهی که در آن از توزیع های پارتو (pareto) استفاده شده است نیازمند هستیم.

بدین منظور از تابع معیار دنباله دار پارتو که به صورت زیر تعریف می شود استفاده می کنیم:

$$\alpha(u) = 1 - \frac{q}{(1+u)^\eta} \quad (u \geq 0).$$

که در آن $\eta > 0$ و $q \in (0, 1)$ پارامتر η دنباله توزیع پارتو نامیده می شود و $q = 1 - \underline{\alpha} = 1 - \inf_{u \geq 0} \alpha(u)$ احتمال زیان متحمل شده ماکسیمال نامیده می شود. توجه داشته باشید که موقعیت X با توجه به α هر زمان قابل قبول است و برای

$$\mathbb{P}(X \leq u) \geq 1 - \frac{q}{(1+u)^\eta} \quad u \geq 0 \text{ برای.}$$

مخصوصاً باید داشته باشیم $\mathbb{P}(X \leq u) \geq 1 - q$ و دم X باید توسط دم پارتو با پارامتر η کنترل شود. ما بر روی تلفات تصادفی X با توزیع تمرکز می کنیم

$$F_X(u) = \begin{cases} 1 - \frac{p}{(1+u)^\theta} & u \geq 0, \text{ اگر} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن $\theta > 0$ یک پارامتر دم داده شده است و $p = \mathbb{P}(X > 0)$ احتمال زیان زمینه ای است. به طور خاص، توجه داشته باشید که

$$\mathbb{P}(X \leq u | X > 0) = 1 - \frac{1}{(1+u)^\theta} \quad u > 0 \text{ برای,}$$

نشان می دهد که توزیع شرطی X با توجه به اینکه تلفاتی رخ خواهد داد، دقیقاً توزیع پارتو با پارامتر θ است. با توجه به آنچه در بالا بیان شد، متغیر تصادفی X ممکن است زیان زیادی به دلیل ریسک فاجعه بار یا عملیاتی نشان دهد. در آنچه در زیر می آید فرض می کنیم $p > q$ ، به این معنی که X احتمال از دست دادن بالاتر از حد قابل قبول را نشان می دهد.

تعیین ES و VaR برای از دست دادن X آسان است. به ویژه، برای هر $1 - p < s < 1$ طبق قضیه (۴.۲.۲)، داریم

$$VaR_s(X) = \left(\frac{1-s}{p} \right)^{-\frac{1}{\theta}} - 1$$

$$ES_s(X) = \begin{cases} \frac{\theta}{\theta-1} \left(\frac{1-s}{p} \right)^{-\frac{1}{\theta}} - 1 & \text{اگر } \theta > 1, \\ +\infty & \text{اگر } \theta \leq 1. \end{cases}$$

بنابراین می توان $LVaR_\alpha(X)$ را برای هر $u \geq 0$ و با استفاده از $1-p > 1-q \geq \alpha(u)$ بیان کرد

$$LVaR_\alpha(X) = \sup_{u \geq 0} (VaR_{\alpha(u)}(X) - u) = \sup_{u \geq 0} \left(\left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{\theta}} (1+u)^{\frac{\eta}{\theta}} - (1+u) \right),$$

به راحتی می توان فهمید که عملکرد هدف در مسئله بهینه سازی فوق محدب است و برای $\theta \leq \eta$ اکیدا صعودی است و در غیر این صورت کاملاً مقعر است. در حالت دوم، به حداکثر می رسد

$$u^* = \max \left(0, \left(\frac{\eta}{\theta} \right)^{\frac{\theta}{\theta-\eta}} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{\theta-\eta}} - 1 \right).$$

جدول ۳ در پیوست آ، الزامات سرمایه مبتنی بر VaR و ES را با نیازهای $LVaR$ برای گزینه های مختلف پارامتر دم X مقایسه می کند. احتمال از دست دادن X ، ۱٪ در نظر گرفته می شود در حالی که حداکثر احتمال تلفات تحمل شده برابر با ۰/۱٪ مطابق با استاندارد خطر عملیاتی $Solvency_2$ است. در راستای قضیه (۴.۲.۲)، می بینیم که $LVaR$ همیشه محافظه کارتر از VaR_α است و با کاهش پارامتر دم در فاصله بین $LVaR_\alpha$ و VaR_α افزایش می یابد. به عبارت دیگر $LVaR_\alpha(X)$ سخت تر از $VaR_\alpha(X)$ می شود زیرا X دارای دم سنگین تر می شود. این بدان دلیل است که $LVaR_\alpha(X)$ به میزان تلفات نیز بستگی دارد، نه تنها به فرکانس آنها. مقایسه بین نتایج

و ES_α به ویژه جالب توجه است زیرا هر دو معیار ریسک کل توزیع دنباله فراتر از α - مقدار را در نظر می گیرند. به طور کلی، می بینیم که هیچ یک از دو معیارهای ریسک به طور سیستماتیک محافظه کارانه تر از دیگری نیست. تا جایی که به ظرافت مربوط می شود، ممکن است اتفاق بیفتد که هر دو محدود نباشند یا فقط یکی از آنها این کار را انجام دهد. به طور خاص، ورودی های مربوط به $\theta \in \{0/5, 0/75, 1\}$ و $\eta \in \{0/1, 0/25, 0/5, 0/75\}$ نمونه ای از توزیع متوسط بینهایت را نشان می دهد که $LVaR_\alpha$ ممکن است بر خلاف یک سرمایه محدود ES_α ، به آن مرتبط شود. از آنجا که ما این آزادی را داریم که پارامتر دم را بسته به ضرر تصادفی زمینه ای تغییر دهیم بدون تغییر در سطح اطمینان "نظارتی" α . مثال نشان می دهد که ما می توانیم η به اندازه کافی کوچک، نسبت به θ در نظر بگیریم، هر زمان که X میانگین نامحدود داشته باشد

$$VaR_\alpha(X) < LVaR_\alpha(X) < \infty = ES_\alpha(X).$$

در این حالت، از میزان ریسک $LVaR_\alpha$ می توان به عنوان یک گزینه عملی برای ES_α استفاده کرد.

۶.۲ نتیجه گیری

در این پایان نامه گروهی از اندازه گیری های ریسک مبتنی بر چندک را که ارزش در معرض ریسک نامیده می شود، معرفی کردیم که با ایجاد یک کران در احتمال گسترش سطوح تلفات از پیش تعیین شده مشخص، ریسک دنباله را در اختیار می گیرند. این کران از نظر ریاضی توسط یک مفهوم توزیع زیان معیار توصیف شده است. مفهوم راهنمای اساسی این است که زیان بالاتر را باید با احتمال پایین تر تحمل کرد. همانطور که در مقدمه بحث شد و توسط نتایج ما نشان داده شد، VaR و مهمتر از آن ES ، هیچکدام امکان کنترل ریسک دنباله را به روش توضیح داده شده در قسمت بالا فراهم نمی کنند. بنابراین $LVaR$ را می توان به طور پیوسته با VaR و ES به منظور شناسایی این که این دو اندازه گیری ریسک استاندارد تا چه حد آن جنبه ریسک دنباله را تخمین می زنند، بکار گرفت. در زمان مشابه، از دید تعریف آن به عنوان قوانین نیازمندی سرمایه گذاری، $LVaR$ یک جایگزین طبیعی برای VaR و ES تشکیل می دهد. این موضوع به طور خاصی در حضور ریسک های سنگین با میانگین نامتناهی صدق می کند. در این حالت، VaR به طور معمول ریسک را تخمین می زند در حالیکه ES که نامتناهی است را به سادگی نمی توان به عنوان یک ابزار کفایت سرمایه عملیاتی مورد استفاده قرار داد. ویژگی منحصر به فرد دیگر $LVaR$ این است که توزیع تلفات شاخص را می توان به طرح زیان های منبع گروه ریسک معیار پیوند زد. با این حال، تعداد زیادی سوال همچنان مطرح هستند و به بررسی های بیشتری احتیاج دارند. در ادامه ما سه مسیر پژوهش آینده را مشخص می کنیم و مورد توجه قرار می دهیم. از یک زاویه دید کاربردی، تجمیع مطالعه صورت گرفته در بخش (۵.۲) با یک تجزیه و تحلیل تجربی گسترده اندازه گیری های ریسک بر اساس توزیعات زیان معیار، ضروری است. به طور خاص، ارزیابی چگونگی تاثیر روش های ارزیابی گوناگون برای VaR بر سطح نیازمندی های سرمایه گذاری، حائز اهمیت است. از یک زاویه دید نظری، در ادبیات مسئله تخصیص ریسک بهینه در میان تعداد مشخصی از موارد به طور خاصی مورد توجه قرار گرفته است. از یک زاویه دید ریاضی، این مسئله را می توان به کمک جزئیات بررسی کرد.

بنابراین مطالعه جزئیات اندازه گیری های ریسک مبتنی بر توزیعات زیان معیار ممکن است جالب باشد. در نهایت، هدف ما توجه به این نکته است که توزیعات زیان معیار را می توان برای تعریف گروه های دیگر اندازه گیری های ریسک بکار گرفت. یک امکان که امیدوار کننده به نظر می رسد، زمانی است که شرط قابلیت پذیرش و قبولی ایجاد شده توسط $LVaR$ که برای هر $u \geq 0$ به صورت زیر نشان داده می شود

$$VaR_{\alpha(u)}(X) - u \leq 0$$

برای حالت میانگین مورد نیاز است. این ایده که در طول فرایند دوره به ما پیشنهاد شده است، شامل یک حالت آرامش از شرایط قابلیت پذیرش ایجاد شده توسط $LVaR$ است که

ممکن است در عمل مفید باشد زیرا یک مدیر ریسک ممکن است قصد نادیده گرفتن تلاطم هایی را که در بازه زمانی کوتاه تلفات رخ می دهند، داشته باشد (به خاطر داشته باشید که تلاطم همیشه در یک بازه زمانی کامل تلفات رخ می دهد). در مفاهیم، در زمان میانگین گیری، حتی می توان وزن های مختلفی را به سطوح تلفات گوناگون به منظور توجه بیشتر به تلفات متعلق به یک محدوده از پیش تعیین شده، اختصاص داد.

فصل ۳

اعتبار سنجی تحقیق

۱.۳ مقدمه

در این فصل اعتبارسنجی تحقیق با استفاده از داده های واقعی حق بیمه دریافتی و خسارت پرداختی به بیمه گذاران در رشته فعالیت بیمه تکمیلی درمان بررسی می شود. بدین منظور ابتدا اهمیت بیمه تکمیلی درمان و وضعیت آن در صنعت بیمه خلاصه تشریح می شود، سپس تابع توزیع احتمال و تجمعی خسارت پرداختی به بیمه گذاران با استفاده از نرم افزار *Easyfit* و نرم افزار R تعیین می شود. سپس اندازه ریسک های ES ، Var ، $RVaR$ و $LVaR$ در سطوح مختلف اطمینان بر اساس یافته های فصل دوم تحقیق محاسبه می شوند. در پایان حداقل سرمایه لازم برای موسسه بیمه گر بر اساس اندازه ریسک $LVaR$ در سطوح مختلف اطمینان مشخص می شود.

۲.۳ بیمه تکمیلی درمان

۱.۲.۳ اهمیت بیمه تکمیلی درمان و وضعیت آن در ایران

بیمه تکمیلی درمان در کنار بیمه های پایه درمان نقش مهمی در سیستم سلامت ایران ایفا می کند. این بخش سهم نزدیک ۱۸ درصدی از پرتفوی صنعت بیمه ایران را در اختیار دارد.

بررسی روند عملکرد صنعت و شرکت های بیمه طی سال های اخیر در رشته بیمه درمان تکمیلی نشان می دهد این رشته طی سال های اخیر زیان ده بوده و در اکثر سال های اخیر ضریب خسارت صنعت بیمه در این رشته بالای ۱۰۰ درصد بوده است [۸]. بیمه درمان شامل ۶ نوع بیمه نامه درمان تکمیلی خانواده، درمان تکمیلی سازمان ها، درمان تکمیلی بازنشستگان، درمان مسافران عازم خارج، درمان مسافران ورودی به کشور و درمان حجاج و زوار است که سه مورد اول جزء بیمه درمان تکمیلی و موضوع بحث این پایان نامه است و سه مورد دوم تحت عنوان بیمه های مسافرتی طبقه بندی می شوند که در این پایان نامه مد نظر نخواهد بود [۴].

گذشته از ارزیابی دقیق ریسک در زمان ارائه پوشش بیمه ای به بیمه گذاران، فقدان مدیریت بهینه در فرآیند ارزیابی و پرداخت خسارت های بیمه و جبران هزینه های تشخیصی و درمانی می تواند لطمات سنگین و جبران ناپذیری بر ساختار و وضعیت مالی و محبوبیت شرکت های بیمه ای وارد نماید. مکانیزم ارزیابی و پرداخت خسارت بیمه های درمان تکمیلی یکی از موضوعات چالش برانگیز در تمامی کشور ها بوده و مسائل گوناگون آن از جنبه های ساختار تشکیلاتی بیمه های درمانی، نحوه تأمین منابع مالی، گسترش پوشش جمعیتی و بهبود نحوه ارائه خدمات و تعیین شیوه های پرداخت به عرضه کنندگان خدمات درمانی قابل بررسی است. ضریب خسارت بیمه های درمان در سال های اخیر با نوسانات مختلفی مواجه بوده و از ۱۰۰/۴۹ درصد در سال ۱۳۹۰ به ۱۱۷/۴ درصد در سال ۱۳۹۲ افزایش یافته است. همزمان با اجرایی شدن طرح تحول سلامت نیز، این متغیر در ابتدا روند کاهشی و سپس روندی افزایشی را تجربه کرده است. ضریب خسارت در سال ۱۳۹۶، رقمی معادل ۹۴/۳۰ و در سال ۱۳۹۷، ۹۸/۵ درصد بوده است. تعداد خسارات پرداختی در رشته بیمه درمان در صنعت بیمه کشور نیز طی بازه زمانی ۱۳۹۷-۱۳۹۰ از ۶۱۳۶۲۸۶ در سال پایه به ۵۵۱۷۲۲۴۳ در سال ۱۳۹۷ افزایش یافته؛ به عبارت دیگر این متغیر برای بازه زمانی مذکور ۱۱/۷۹۹ درصد رشد داشته است. لذا این حجم از تعداد خسارت که البته پیش بینی می شود برای سال های آتی نیز افزایش آن همچنان ادامه داشته باشد، مستلزم انجام بررسی های دقیق است. با توجه به اهمیت جایگاه ارزیابی خسارت بیمه های درمان تکمیلی در کنترل ضریب خسارت این رشته و نبود وحدت رویه و فرآیند روشن و بهینه در این زمینه و افزایش چشم گیر تعداد خسارات پرداختی، راهکار بهینه، توجه به فرآیند ارزیابی خسارات و کنترل و مدیریت آن است [۵].

۲.۲.۳ معرفی داده های مورد استفاده در تحقیق

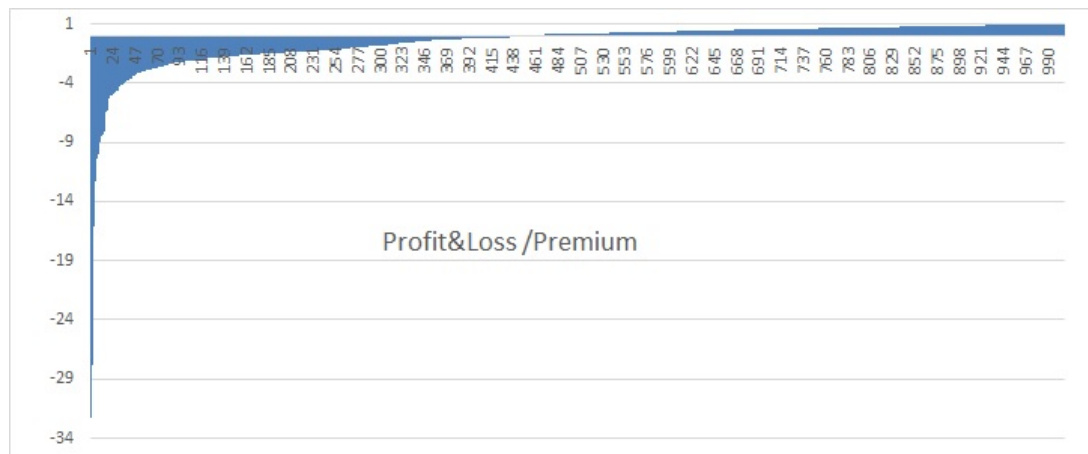
داده های واقعی بیمه تکمیلی درمان در این پایان نامه مربوط به سازمان X در استان X به صورت غیر رسمی از شرکت بیمه X اخذ شده است. تعداد مشاهدات ۱۷۰۶۱ مشاهده است و دوره قرارداد بیمه از ۹۷.۴.۱ تا ۹۸.۴.۱ است. حق بیمه سالیانه هر فرد ۱۶،۱۹۲،۸۳۱ ریال می باشد. تعداد افراد تحت پوشش بیمه ۱۰۰۵ نفر است، کل حق بیمه پرداختی بابت این

قرارداد بیمه تکمیلی ۱۸۰،۸۰۰،۲۷۳ و کل خسارت این شرکت ۱۸۵،۲۵۰،۰۶۴ که بیشتر از حق بیمه دریافتی است. لذا به طور خالص شرکت بیمه مفروض زیان بیمه گری به اندازه ی ۷،۷۹۰،۴۵۰،۰۰۵ بابت پوشش ریسک بیمه تکمیلی سازمان X استان X متحمل شده است.

جدول ۱.۳: مشخصات داده ها

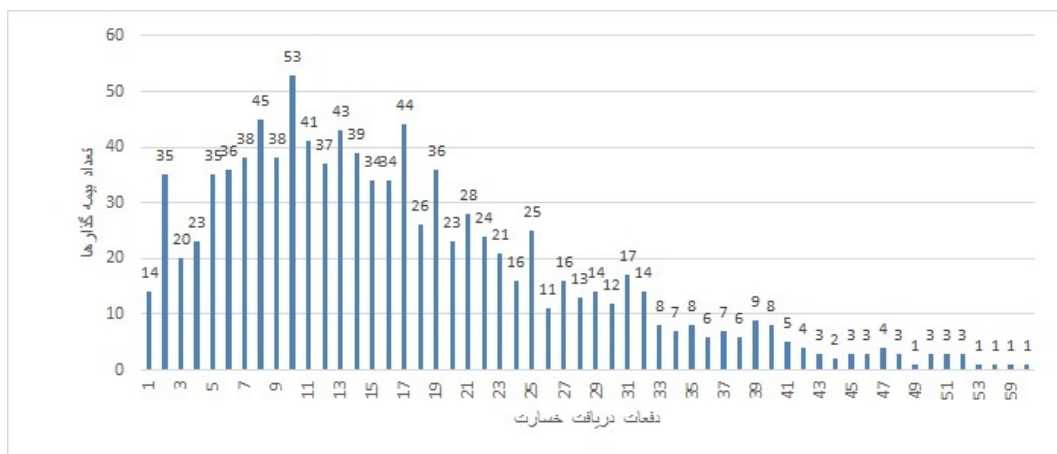
۱۳۹۷/۰۴/۰۱	تاریخ شروع بیمه
۱۳۹۸/۰۴/۰۱	تاریخ پایان بیمه
۱۰۰۵	تعداد افراد تحت پوشش بیمه
۱۶۱۹۲۸۳۶	حق بیمه هر نفر
۱۶۲۷۳۸۰۰۱۸۰	کل حق بیمه دریافتی
۱۰۰۵	تعداد افرادی که خسارت دریافت کرده اند
۱۷۰۶۱	دفعات پرداخت خسارت
۲۴۰۶۴۲۵۰۱۸۵	کل خسارت پرداختی
۷۷۹۰۴۵۰۰۰۵	سود و زیان خالص شرکت از فعالیت بیمه گری

شکل ۱.۳: نسبت سود و زیان بیمه گر از هر بیمه گذار به حق بیمه دریافتی از هر بیمه گذار



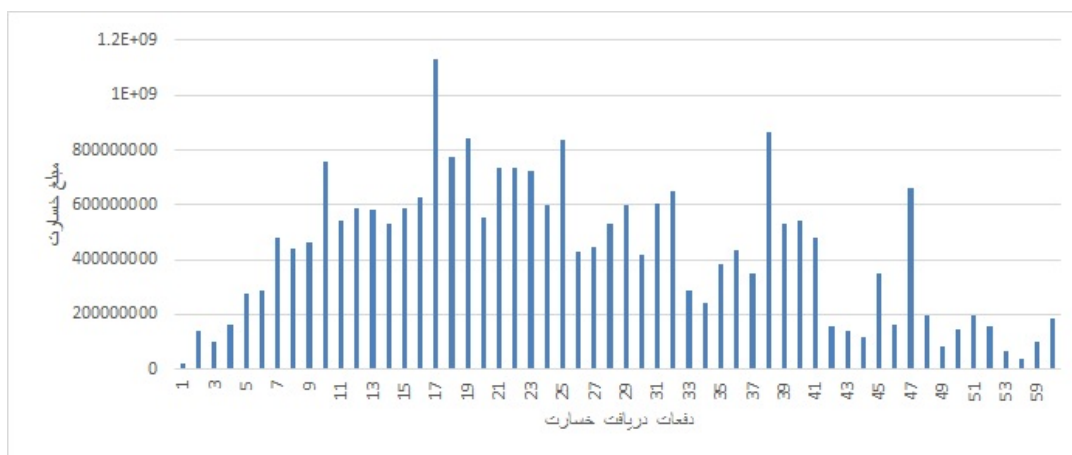
در نمودار فوق قسمت رنگی زیر محور افقی بیانگر زیان و قسمت رنگی بالای محور افقی بیانگر سود است. همانطور که در نمودار مشاهده می شود حداکثر منفعت شرکت بیمه از هر بیمه گذار به اندازه حق بیمه دریافتی است ولی حداکثر زیان بیمه گر از بیمه گذار ممکن است چندین برابر حق بیمه دریافتی از بیمه گذار باشد. معمولاً این رقم گاهی به اندازه سقف پوشش خسارت هر بیمه گذار در هر قرارداد بیمه است. در داده های مورد بررسی حداکثر زیان بیمه گر از هر بیمه گذار حدود ۳۲ برابر حق بیمه دریافتی است که این در جدول (۱.۳) روی محور عمودی قابل رویت است.

شکل ۲.۳: فراوانی دفعات پرداخت خسارت بر اساس تعداد بیمه گذاران



این نمودار نشان می‌دهد که فراوانی دفعات پرداخت خسارت برای بیمه گذاران چگونه است. فراوانی تعداد بیمه گذاران برای ۱۰ بار پرداخت خسارت بیشتر از سایر دفعات پرداخت است. این نمودار در مدیریت پرداخت خسارت حائز اهمیت است.

شکل ۳.۳: فراوانی دفعات پرداخت خسارت به هر بیمه گذار بر حسب مبلغ خسارت



این نمودار اهمیت ویژه ای در مدیریت جریان وجوه شرکت بیمه دارد.

۳.۲.۳ توزیع متغیرهای تصادفی بیمه ای

حال با استفاده از نرم افزار *EasyFit* و R نمودارهای توزیع های احتمال و تجمعی متغیرهای تصادفی زیر را برای شرکت بیمه X شبیه سازی می‌کنیم.

۱. توزیع احتمال دفعات پرداخت خسارت به هر بیمه گذار

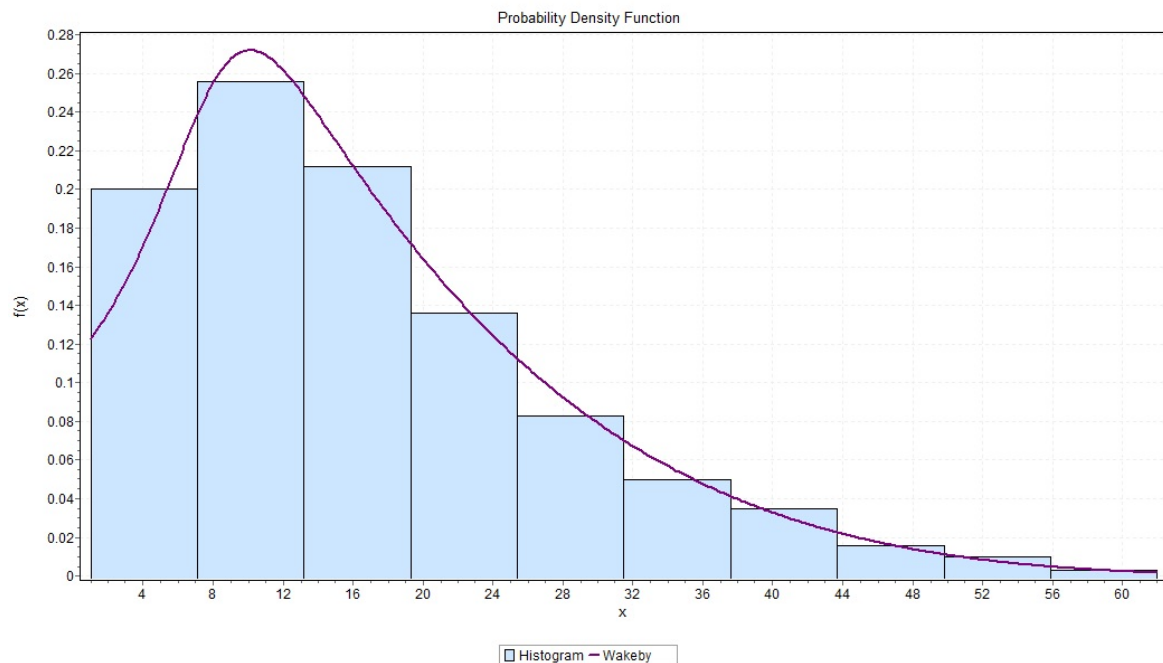
۲. توزیع احتمال مبلغ خسارت پرداخت شده به هر فرد بیمه شده

۳. توزیع احتمال سود و زیان شرکت بیمه از پوشش بیمه ای هر فرد بیمه گذار

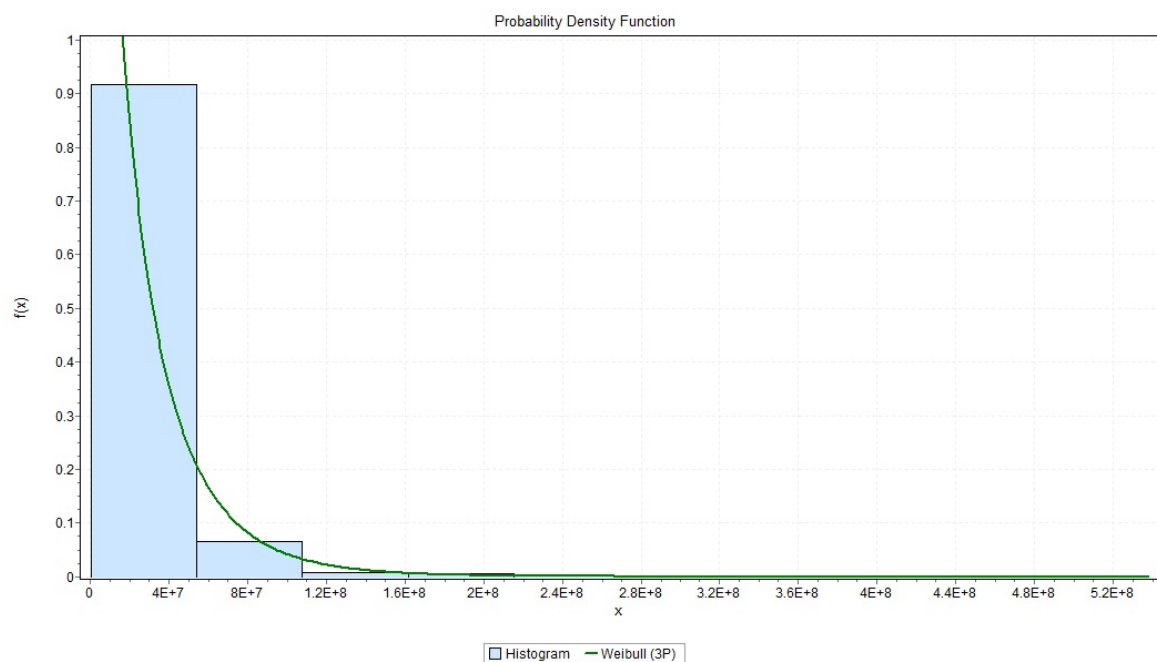
۴. توزیع تجمعی سود و زیان شرکت بیمه از پوشش بیمه ای هر فرد بیمه گذار

۵. توزیع تجمعی تجربی سود و زیان شرکت بیمه از پوشش بیمه ای هر فرد بیمه شده

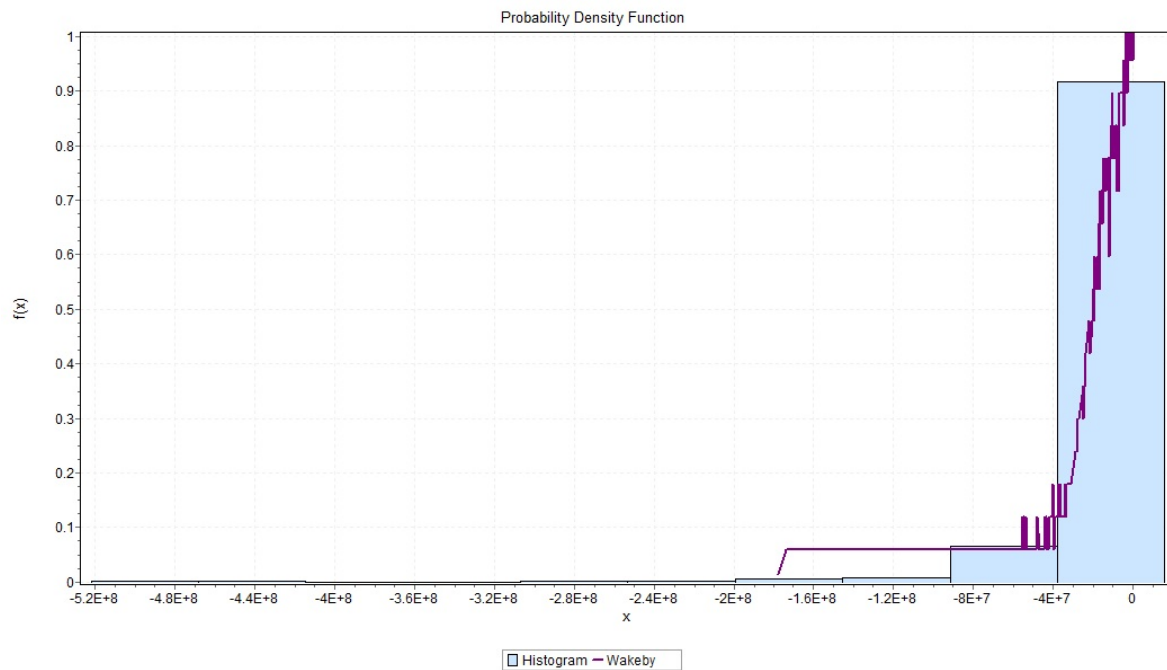
شکل ۴.۳: توزیع دفعات پرداخت خسارت



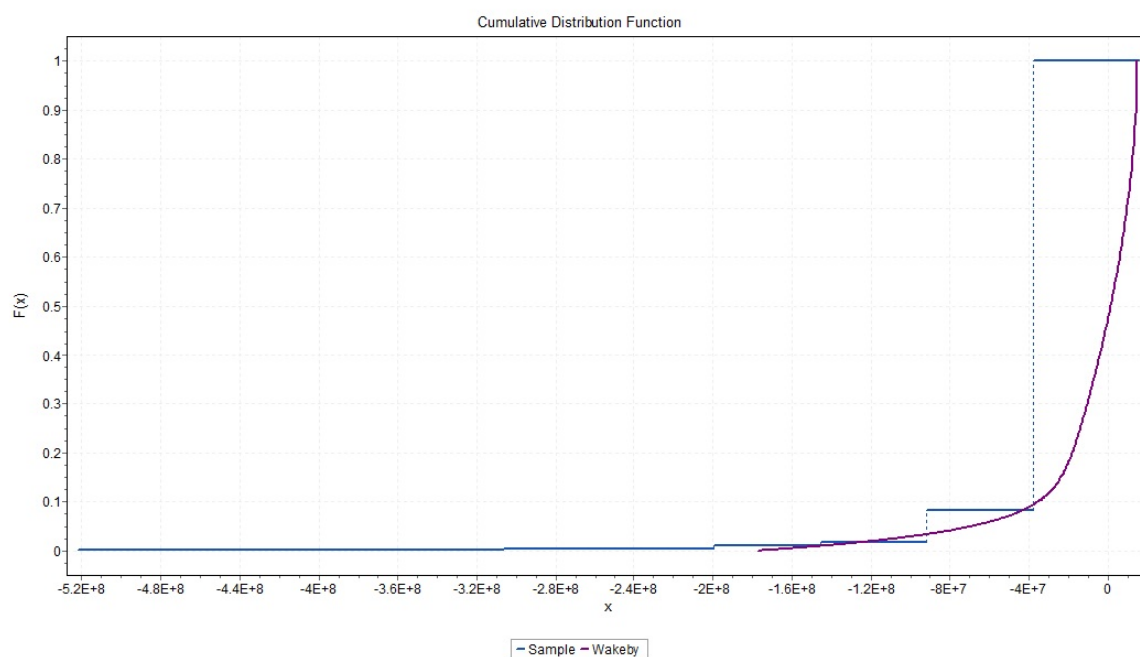
شکل ۵.۳: توزیع مبلغ خسارت پرداختی به هر فرد بیمه شده



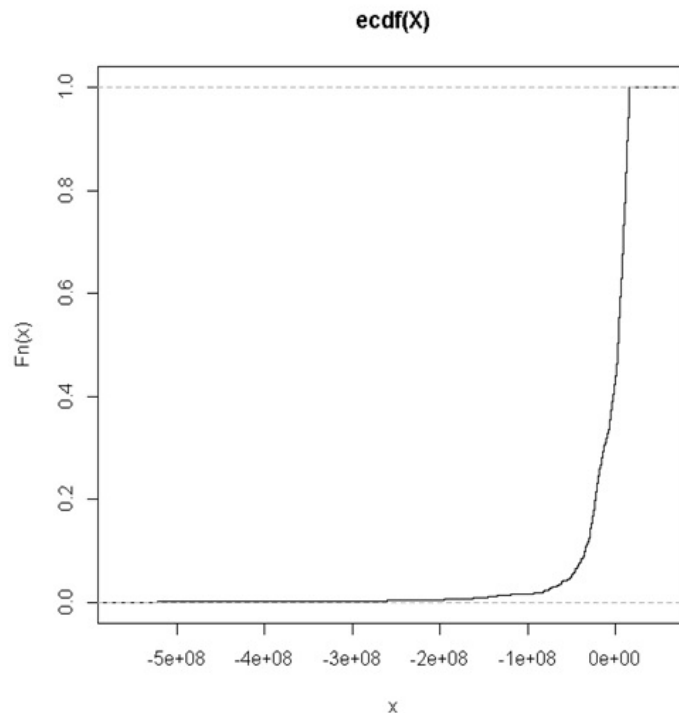
شکل ۶.۳: توزیع احتمال سود و زیان شرکت بیمه از پوشش بیمه ای هر فرد بیمه گذار



شکل ۷.۳: توزیع تجمعی سود و زیان شرکت بیمه از پوشش بیمه ای هر فرد بیمه گذار



شکل ۸.۳: توزیع تجمعی تجربی سود و زیان شرکت بیمه از پوشش بیمه ای هر فرد بیمه شده



در قسمت بعدی برای محاسبه اندازه ریسک $LVaR$ از نمودار (۸.۳)، استفاده شده است. با این وجود جهت فهم بهتر بحث سایر نمودار ها نیز ارائه شده است.

۴.۲.۳ اندازه ریسک های محاسبه شده

اندازه ریسک های ES ، VaR ، $RVaR$ و $LVaR$ به ازای سطوح مختلف حق بیمه مطابق جداول (۳.۳)، (۴.۳)، (۵.۳) و (۶.۳) محاسبه شده است.

جدول ۲.۳: سطوح مختلف حق بیمه

	حق بیمه
A	۱۶۱۹۲۸۳۶
B	۰
C	۱۰۰۰۰۰۰۰
D	۲۳۹۴۴۵۲۸
E	۲۵۰۰۰۰۰۰

حالت حق بیمه A در قراردادهای بیمه ای عقد شده است. حالت حق بیمه D حالتی است که اگر شرکت بیمه از افراد دریافت می کرد، سود و زیان ناشی از فعالیت بیمه گری شرکت بیمه صفر می شد (یعنی کل خسارت پرداختی برابر با حق بیمه دریافتی می شد).

جدول ۳.۳: محاسبه اندازه ریسک VaR به ازای سطوح مختلف حق بیمه مفروض

سطح اطمینان	مشاهده چندم	VaR-A	VaR-B	VaR-C	VaR-D	VaR-E
۰/۹۰	۹۰۴	۱۳۸۳۸۲۰۵	۲۳۵۴۶۳۱	۷۶۴۵۳۶۹	۲۱۵۸۹۸۹۷	۲۲۶۴۵۳۶۹
۰/۹۵	۹۵۴	۱۵۱۷۹۱۸۶	۱۰۱۳۶۵۰	۸۹۸۶۳۵۰	۲۲۹۳۰۸۷۸	۲۳۹۸۶۳۵۰
۰/۹۹	۹۹۴	۱۵۸۰۲۲۳۶	۳۹۰۶۰۰	۹۶۰۹۴۰۰	۲۳۵۳۳۹۲۸	۲۴۶۰۹۴۰۰
۰/۹۹۹	۱۰۰۳	۱۵۹۸۸۲۶۶	۲۰۴۵۷۰	۹۷۹۵۴۳۰	۲۳۷۳۹۹۵۸	۲۴۷۹۵۴۳۰

جدول ۴.۳: محاسبه اندازه ریسک ES به ازای سطوح مختلف حق بیمه مفروض

سطح اطمینان	ES-A	ES-B	ES-C	ES-D	ES-E
۰/۹۰	۱۵۰۷۸۳۹۰	۲۲۸۳۰۰۸۱	۱۱۱۴۴۴۶	۱۰۸۸۵۵۵۴	۲۸۸۸۵۵۵۴
۰/۹۵	۱۵۵۹۸۱۸۵	۲۳۳۴۹۸۷۷	۵۹۴۶۵۱	۱۱۴۰۵۳۴۹	۲۹۴۰۵۳۴۹
۰/۹۹	۱۵۹۲۳۸۶۹	۲۳۶۷۵۵۶۱	۲۶۸۹۶۷	۱۱۷۳۱۰۳۳	۲۹۷۳۱۰۳۳
۰/۹۹۹	۱۵۹۸۸۸۰۱	۲۳۷۴۰۴۹۳	۲۰۴۰۳۵	۱۱۷۹۵۹۶۵	۲۹۷۹۵۹۶۵

حال با توجه به تعریف (۱۴.۱.۲)، اندازه ریسک $RVaR$ را به ازای سطوح مختلف حق بیمه به دست می‌آوریم

جدول ۵.۳: محاسبه اندازه ریسک $RVaR$ به ازای سطوح مختلف حق بیمه مفروض

	$RVaR(A)$	$RVaR(B)$	$RVaR(C)$	$RVaR(D)$	$RVaR(E)$
$RVaR_{0.90, 0.95}$	۱۴۵۳۳۹۹۲	۲۲۲۸۵۶۸۳	۱۶۵۸۸۴۴	۱۰۳۴۱۱۵۶	۲۸۳۴۱۱۵۶

حال با توجه به قضیه (۶.۲.۲)، اندازه ریسک $LVaR$ را به دست می‌آوریم

جدول ۶.۳: محاسبه اندازه ریسک $LVaR$ به ازای سطوح مختلف حق بیمه مفروض

$LVaR(A)$	$LVaR(B)$	$LVaR(C)$	$LVaR(D)$	$LVaR(E)$
۱۴۳۶۰۷۹۶	۱۵۹۸۹۳۳۶	۱۴۷۸۷۰۲۶	۱۳۹۷۳۲۱۲	۱۳۹۲۹۴۳۸
۱۴۴۳۲۶۰۰۱۸۱	۱۶۰۶۹۲۸۲۶۸۰	۱۴۸۶۰۹۶۱۱۳۰	۱۴۰۴۳۰۷۷۶۵۸	۱۳۹۹۰۰۴۰۱۹۰

ردیف دوم جدول (۶.۳) حداقل سرمایه لازم برای پوشش ریسک هر فرد بیمه گذار است. ردیف سوم حداقل سرمایه لازم برای پوشش ریسک همه بیمه گذاران (۱۰۰۵) نفر است. توضیح این که حداقل سرمایه لازم توسط نهاد ناظر- بیمه مرکزی- تعیین می‌شود و هدف از آن این است که نهاد ناظر با سطح اطمینان معینی از انجام شدن تعهدات قانونی شرکت بیمه اطمینان حاصل نماید. لذا توصیه می‌شود که نهاد ناظر حداقل سرمایه قانونی را مطابق نتایج جدول (۶.۳) تعیین نماید.

تمامی مراحل محاسبه این مقادیر در فایل اکسل قابل مشاهده است.

مقایسه ی نتایج محاسبه اندازه ریسک ها در جداول فوق نشان می دهد که:

۱. با افزایش سطح اطمینان، مقدار اندازه VaR و ES افزایش می یابد. به عبارتی اگر حداقل سرمایه قانونی را برای این شرکت بیمه گر بر مبنای اندازه ریسک های مذکور بخواهیم در سطح اطمینان بالاتری تعیین کنیم بایستی سرمایه ی قانونی بالاتری را شرکت در پوشش ریسک های بیمه گری خود لحاظ کند.

۲. با افزایش مقدار حق بیمه دریافتی به ازای یک سطح اطمینان مشخص، مقدار اندازه های ریسک افزایش می یابد. این موضوع حاکی از آن است که با افزایش حق بیمه، بیمه گذاران انتظار پوشش بیمه ای بیشتر و مناسب تری را دارند و لذا اندازه ریسک شرکت بیمه گر افزایش می یابد.

بیمه گری را در نظر بگیرید که می خواهد ”ریسک” برخی از فعالیت بیمه گری خود را ارزیابی کند، به عنوان مثال سود و زیان بیمه گر طی دوره فعالیت $T_0 - T_1$ ، که در آن T_0 سرمایه شرکت در ابتدای دوره آغاز فعالیت و $T_1 \in X$ سرمایه در پایان یک دوره فعالیت است.

$$X = T_0 - T_1$$

مقدار تغییر سرمایه شرکت طی دوره فعالیت است. فرض می کنیم که $T_0 = ۱۶۱۹۲۸۳۶$ و هرگاه تابع BLD به صورت

$$\alpha(u) = \begin{cases} ۰/۹ & ۰ \leq u < \frac{1}{4}T_0, \text{ اگر}, \\ ۰/۹۵ & \frac{1}{4}T_0 \leq u < \frac{1}{3}T_0, \text{ اگر}, \\ ۰/۹۹ & \frac{1}{3}T_0 \leq u < \frac{1}{2}T_0, \text{ اگر}, \\ ۰/۹۹۹۹ & u \geq \frac{1}{2}T_0, \text{ اگر}. \end{cases}$$

تعریف شود و موقعیت x_k مقادیر مربوط به متغیر X لحاظ شوند در این صورت

$$\alpha_+^{-1}(p_0) = ۰$$

$$\alpha_+^{-1}(۰/۹) = \frac{1}{4}T_0 = ۸۰۹۶۴۱/۸$$

$$\alpha_+^{-1}(۰/۹۵) = \frac{1}{3}T_0 = ۱۶۱۹۲۸۳/۶$$

$$\alpha_+^{-1}(۰/۹۹) = \frac{1}{2}T_0 = ۳۲۳۸۵۶۷/۲$$

$$\alpha_+^{-1}(۰/۹۹۹۰۰۴۹) = \frac{1}{2}T_0 = ۳۲۳۸۵۶۷/۲.$$

به عنوان مثال

$$\alpha_+^{-1}(۰/۹۹) = \inf\{u \geq ۰ \mid \alpha(u) > ۰/۹۹\} = \frac{1}{2}T_0.$$

و همچنین

$$\alpha_+^{-1}(۰/۹۷) = \inf\{u \geq ۰ \mid \alpha(u) > ۰/۹۷\} = \inf\{u \geq ۰ \mid ۰/۹۹\} = \frac{1}{3}T_0.$$

۳.۳ خلاصه فصل

در این فصل برای اعتبار سنجی تحقیق از داده های واقعی خسارت های پرداخت شده و حق بیمه پرداختی در رشته فعالیت بیمه تکمیلی درمان شرکت بیمه X استفاده شده است و توزیع احتمال و تجمعی خسارت پرداختی به بیمه گذاران و نیز توزیع احتمال و تجمعی سود و زیان شرکت بیمه از هر بیمه گذار با استفاده از نرم افزار *Easyfit* و نرم افزار *R* تعیین شد. سرانجام اندازه ریسک های مختلفی از جمله ES ، Var ، $LVaR$ و $RVaR$ برآورد و محاسبه شده است. حداقل سرمایه لازم برای شرکت بیمه گذار در رشته فعالیت مفروض در سطح اطمینان بیش از ۹۰٪ به ازای سطوح مختلف حق بیمه بر مبنای اندازه ریسک $LVaR$ محاسبه شد. در سطح حق بیمه منعقد شده (هر نفر ۱۶۱۹۲۸۳۶ ریال سالیانه)، حداقل سرمایه لازم برای هر بیمه گذار مبلغ ۱۴۳۶۰۷۹۶ و برای همه بیمه گذاران مبلغ ۱۴۴۳۲۶۰۰۱۸۱ ریال تعیین شد.

مراجع

- [۱] بیمه، شورای عالی. آیین نامه شماره ۶۹ - آیین نامه نحوه محاسبه و نظارت بر توانگری مالی موسسات بیمه. تهران: بیمه مرکزی جمهوری اسلامی ایران، ۱۳۹۰.
- [۲] رادپور، میثم و عبده تبریزی، حسین، "اندازه گیری و مدیریت ریسک بازار"، تهران: انتشارات آگاه (۱۳۸۸).
- [۳] حسینی فرد، سیده منیره و اسدی، مرتضی، "بررسی عوامل موثر بر عملکرد درآمدی شرکت های بیمه ای در ایران مورد مطالعه بیمه ایران و بیمه سینا"، دومین کنفرانس بین المللی مدیریت و حسابداری، تهران (۱۳۹۶).
- [۴] حضارمقدم، نسرین، "آثار شیوع ویروس کرونا بر رشته بیمه درمان"، پژوهشکده بیمه، بهار (۱۳۹۹).
- [۵] رامندی، سجاد، رنجپور، فراز، خلیقی، فرامرز، عباسی، محیا و پویانا، سارا، "آسیب شناسی ارزیابی و پرداخت خسارت در بیمه های درمان تکمیلی"، پژوهشکده بیمه، شماره ۱۳۷.
- [۶] میرباقری جم، محمد، شهیکی تاش، محمدنبی و زمانیان، غلامرضا، "تجمیع ریسک های بیمه گری صنعت بیمه ایران با توابع مفصل بیضوی و ارشمیدسی"، مجموعه مقالات بیست و دومین همایش ملی و هشتمین همایش بین المللی بیمه و توسعه، (۱۳۹۲)، ۲۹۹-۳۳۲.
- [۷] نیاکان، لیلی و نورالدینی، سید صدرالدین، "راه کار های مدیریت خسارات بیمه درمان تکمیلی"، پژوهشکده بیمه، شماره ۴۷.
- [۸] همتی، مریم و ابراهیمی، ایلناز، "ارزیابی شرکت های بیمه (با تاکید بر چالش های نظارتی)"، تهران: مرکز همایش های بین المللی صدا و سیما (۱۳۹۷).

[9] Acerbi, C. and Szekely, B. (2017). **General properties of backtestable statistics**, Preprint, SSRN.2905109.

-
- [10] Acerbi, C. and Tasche, D. (2002). **On the coherence of expected shortfall**, Journal of Banking and Finance, 26(7):1487–1503.
- [11] Albanese, C. and Lawi, S. (2004). **Spectral risk measures for credit portfolios**, Risk Measures for the 21st Century, ed. Giorgio Szegö, pages 209–226.
- [12] Arulampalam, P., et al. (2016). **Actuarial Aspects of ERM for Insurance Companies**, Enterprise and Financial Risk Committee of the IAA, pages 4-75.
- [13] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D. (1999). **Coherent measures of risk**, Mathematical Finance, 9(3):203–228.
- [14] Artzner, P., Delbaen, F., and Koch-Medina, P. (2009). **Risk measures and efficient use of capital**, ASTIN Bulletin, 39(1):101–116.
- [15] Barrieu, P. and El Karoui, N. (2005). **Inf-convolution of risk measures and optimal risk transfer**, Finance and Stochastics, 9(2):269–298.
- [16] BCBS (2012). Consultative Document May 2012. **Fundamental review of the trading book**, Basel Committee on Banking Supervision. Basel: Bank for International Settlements.
- [17] BCBS (2008). **Range of practices and issues in economic capital modelling**, Basel Committee on Banking Supervision. Basel: Bank for International Settlements.
- [18] BCBS (2016). **Standards: Minimum capital requirements for market risk**, Basel Committee on Banking Supervision. Basel: Bank for International Settlements.
- [19] Bellini, F. and Bignozzi, V. (2015). **On elicitable risk measures**, Quantitative Finance, 15(5):725–733.
- [20] Bellini, F. and Di Bernardino, E. (2017). **Risk management with expectiles**, The European Journal of Finance, 23(6):487–506.
- [21] Bellini, F., Negri, I., and Pyatkova, M. (2018). **Backtesting VaR and Expectiles with realized scores**, Statistical Methods and Applications, to appear.
- [22] Burzoni, M., Peri, I., and Ruffo, C. M. (2017). **On the properties of the Lambda value at risk: robustness, elicibility and consistency**, Quantitative Finance, 17(11):1735–1743.
- [23] Coleman, T. S., John Wiley & Sons (2012). **Quantitative risk management: a practical guide to financial risk** (Vol. 669).

- [24] Cont, R., Deguest, R., and He, X. (2013). **Loss-based risk measures**, Statistics and Risk Modeling with Applications in Finance and Insurance, 30(2):133–167.
- [25] Cont, R., Deguest, R., and Scandolo, G. (2010). **Robustness and sensitivity analysis of risk measurement procedures**, Quantitative Finance, 10(6):593–606.
- [26] Daníelsson, J., Embrechts, P., Goodhart, C., Keating, C., Muennich, F., Renault, O., and Shin, H. S. (2001). **An academic response to Basel II**, Special Paper 130, London School of Economics Financial Markets Group.
- [27] Guégan, D., Hassani, B. k. (2019). **Risk Measurement : From Quantitative Measures to Management Decisions**, University Paris1 Panthéon-Sorbonne LabEx ReFi and IPAG Paris, France.
- [28] Delbaen, F., Bellini, F., Bignozzi, V., and Ziegel, J. F. (2016). **Risk measures with the CxLS property**, Finance and Stochastics, 20:433–453.
- [29] Embrechts, P., Liu, H., and Wang, R. (2018). **Quantile-based risk sharing**, Operations Research, 66(4):936–949.
- [30] Embrechts, P., McNeil, A., and Straumann, D. (1999). **Correlation: pitfalls and alternatives**, Risk-London-Risk magazine Limited-, 12: 69-71.
- [31] Embrechts, P., Puccetti, G., Rüschendorf, L., Wang, R., and Beleraj, A. (2014). **An Academic Response to Basel 3.5**, Risks, 2:25–48.
- [32] Farkas, W., Koch-Medina, P., and Munari, C. (2014a). **Beyond cash-additive risk measures: when changing the numéraire fails**, Finance and Stochastics, 18(1):145–173.
- [33] Farkas, W., Koch-Medina, P., and Munari, C. (2014b). **Capital requirements with defaultable securities**, Insurance: Mathematics and Economics, 55:58–67.
- [34] Filipović, D. and Svindland, G. (2008). **Optimal capital and risk allocations for law-and cash-invariant convex functions**, Finance and Stochastics, 12(3):423–439.
- [35] Fischer, M., Moser, T., and Pfeuffer, M. (2018). **A Discussion on Recent Risk Measures with Application to Credit Risk: Calculating Risk Contributions and Identifying Risk Concentrations**, Risks, 6(142).
- [36] Fissler, T., Ziegel, J. F., and Gneiting, T. (2016). **Expected Shortfall is jointly elicitable with Value at Risk-Implications for backtesting**, Risk, pages 58–61.

-
- [37] Föllmer, H. and Schied, A. (2011). *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*, 3rd ed. Berlin: Walter de Gruyter.
- [38] Föllmer, H. and Schied, A. (2016). **Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time**, De Gruyter, Berlin, 4th edition.
- [39] Frittelli, M., Maggis, M., and Peri, I. (2014). **Risk measures on $\mathcal{P}(R)$ and Value at Risk with probability/loss function**, *Mathematical Finance*, 24(3):442–463.
- [40] Galichon, A. (2010). **The var at risk**, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 13(04):503–506.
- [41] Gneiting, T. (2011). **Making and evaluating point forecasts**, *Journal of the American Statistical Association*, 106(494):746–762.
- [42] Guldemann, T. (2000). **The story of risk metrics**, *Risk*, 13(1):56–58.
- [43] Huber, P. (1981). **Robust Statistics**. Wiley, New York.
- [44] IAIS (2014). Consultation Document December 2014. **Risk-based global insurance capital standard**, International Association of Insurance Supervisors.
- [45] Jarrow, R. (2013). **Capital adequacy rules, catastrophic firm failure, and systemic risk**, *Review of Derivatives Research*, 16(3):219–231.
- [46] Kelliher, P.O.J., wilmot, D., vij, J., And klumpes, P.J.M. (2011). **A common risk classification system for the actuarial profession**, Presented to the Actuarial Profession, London, on 31 October 2011 and Edinburgh on 7 November 2011.
- [47] Koch-Medina, P., Moreno-Bromberg, S., and Munari, C. (2015). **Capital adequacy tests and limited liability of financial institutions**, *Journal of Banking and Finance*, 51:93–102.
- [48] Koch-Medina, P., Munari, C., and Sikić, M. (2017). **Diversification, protection of liability holders and regulatory arbitrage**, *Mathematics and Financial Economics*, 11(1):63–83.
- [49] Krättschmer, V., Schied, A., and Zähle, H. (2014). **Comparative and qualitative robustness for lawinvariant risk measures**, *Finance and Stochastics*, 18(2):271–295.
- [50] Law, S.H., Saini, N.W., (2012). **Institutional quality, governance, and financial development**, *Economics of Governance*, 13(3): 217-236.
- [51] Liu, F. and Wang, R. (2016). **A theory for measures of tail risk**, Preprint, SSRN.2841909.

- [52] Mao, T. and Wang, R. (2016). **Risk aversion in regulatory capital calculation**, Preprint, SSRN.2658669.
- [53] McNeil, A. J., Frey, R., and Embrechts, P. (2015). **Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, Tools**, Princeton University Press, Princeton, NJ, Revised edition.
- [54] Nakada, P., Shah, H., Koyluoglu, H. U., and Collignon, O. (1999). **P&C RAROC: A catalyst for improved capital management in the property and casualty insurance industry** *Journal of Risk Finance*, The, 1(1): 52-69.
- [55] Nolde, N. and Ziegel, J. F. (2017). **Elicitability and backtesting: Perspectives for banking regulation**, *Annals of Applied Statistics*, 11(4), 1833–1874.
- [56] Rockafellar, R. T., Royset, J. (2010). **On Buffered Failure Probability in Design and Optimization of Structures**, *Reliability Engineering and System Safety*, 95(5): 499–510.
- [57] Rockafellar, R., T., Uryasev, S. (2000). **Optimization of conditional value-at-risk**, *Journal of Risk*, 2(3): 21–42.
- [58] Roe, M. and Siegel, J., (2011). **Political instability: effects on financial development, roots in the severity of economic inequality**, *Journal of Comparative Economics*, 39(3): 279–309.
- [59] Song, Y. and Yan, J.-A. (2009). **Risk measures with comonotonic subadditivity or convexity and respecting stochastic orders**, *Insurance: Mathematics and Economics*, 45(3):459–465.
- [60] Staum, J. (2013). **Excess invariance and shortfall risk measures**, *Operations Research Letters*, 41(1):47–53.
- [61] Tsanakas, A. (2009). **To split or not to split: Capital allocation with convex risk measures**, *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2):268–277.
- [62] Wang, R. (2016). **Regulatory arbitrage of risk measures**, *Quantitative Finance*, 16(3):337–347.
- [63] Weber, S. (2018). **Solvency II, or how to swipe the downside risk under the carpet**, *Insurance: Mathematics and economics*, 82:191–200.
- [64] Yamai, Y. and Yoshida, T. (2005). **Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective**, *Journal of Banking and Finance*, 29(4):997–1015.

- [65] Ziegel, J. F. (2016). **Coherence and elicibility**, Mathematical Finance, 26(4):901–918.

پیوست آ

ضمیمه

	X	$\text{VaR}_{\underline{\alpha}}(X)$	$\text{LVaR}_{\alpha}(X)$	$\text{RVaR}_{\underline{\alpha}, \bar{\alpha}}(X)$	$\text{ES}_{\underline{\alpha}}(X)$	$\text{VaR}_{\bar{\alpha}}(X)$
(a)	$\lambda = 1.0$	1.39	1.39	2.13	2.39	3.69
	$\lambda = 0.5$	2.77	2.77	4.26	4.77	7.38
	$\lambda = 0.2$	6.93	9.98	10.65	11.93	18.44
	$\lambda = 0.1$	13.86	26.89	21.30	23.86	36.89
(b)	$\sigma = 0.5$	1.40	1.40	1.81	1.95	2.66
	$\sigma = 1.0$	1.96	1.96	3.36	4.14	7.10
	$\sigma = 1.5$	2.75	8.91	6.47	9.80	18.92
	$\sigma = 2.0$	3.85	40.40	12.86	26.82	50.40

Table 1: Capital requirements for $p = 2\%$ and $\mu = 0$.

X	σ	$\text{VaR}_{\underline{\alpha}}(X)$	$\text{LVaR}_{\underline{\alpha}}(X)$	$\text{RVaR}_{\underline{\alpha}, \bar{\alpha}}(X)$	$\text{ES}_{\underline{\alpha}}(X)$	$\text{VaR}_{\bar{\alpha}}(X)$
(a)	1	-0.72	-0.72	-0.26	-0.25	1.09
	2.5	1.20	1.20	2.35	2.39	5.73
	5	4.41	5.22	6.69	6.77	13.45
	7.5	7.61	11.18	11.04	11.16	21.18
	10	10.82	18.90	15.39	15.55	28.90
(b)	1	-0.52	-0.52	0.25	0.30	3.89
	2.5	1.69	2.73	3.62	3.76	12.73
	5	5.38	17.47	9.25	9.51	27.47
	7.5	9.07	32.20	14.87	15.27	42.20
	10	12.76	46.93	20.50	21.02	56.93

Table 2: Risk measures for $\mu = -2$ and $\nu = 5$.

θ	$\text{VaR}_{\underline{\alpha}}(X)$	$\text{LVaR}_{\underline{\alpha}}(X)$						$\text{ES}_{\underline{\alpha}}(X)$
		$\eta = 0.1$	$\eta = 0.25$	$\eta = 0.5$	$\eta = 0.75$	$\eta = 1$	$\eta = 1.5$	
0.5	99	169.18	2500	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
0.75	20.54	21.96	38.49	1481.48	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
1	9	9	10.18	25	1054.69	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
1.5	3.64	3.64	3.64	3.85	5.39	14.81	$+\infty$	12.92
2	2.16	2.16	2.16	2.16	2.19	2.50	10.55	5.32
2.5	1.51	1.51	1.51	1.51	1.51	1.51	1.86	3.19
3	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15	1.16	2.23

Table 3: Capital requirements for $p = 1\%$ and $q = 1 - \underline{\alpha} = 0.1\%$.

جدول ۱.آ: توزیع دفعات دریافت خسارت

تعداد بیمه گذارها	جمع مبلغ خسارت	دفعات دریافت خسارت
۱۴	۲۰۵۶۲۶۱۸	۱
۳۵	۱۳۷۱۹۴۷۲۵	۲
۲۰	۱۰۲۴۴۴۴۸۲	۳
۲۳	۱۶۰۷۲۲۲۵۷	۴
۳۵	۲۷۵۵۴۵۹۹۸	۵
۳۶	۲۸۷۶۶۴۰۰۴	۶
۳۸	۴۸۲۰۲۳۱۰۱	۷
۴۵	۴۴۱۲۹۸۴۵۳	۸
۳۸	۴۶۰۵۴۵۲۵۹	۹
۵۳	۷۵۸۳۰۴۶۹۳	۱۰
۴۱	۵۴۴۰۹۸۹۲۷	۱۱
۳۷	۵۹۰۱۷۳۹۰۲	۱۲
۴۳	۵۸۲۷۸۷۶۴۵	۱۳
۳۹	۵۲۹۸۰۴۷۰۵	۱۴
۳۴	۵۸۸۵۰۷۵۷۲	۱۵
۳۴	۶۲۷۵۷۳۶۳۰	۱۶
۴۴	۱۱۳۳۴۰۹۳۹۵	۱۷
۲۶	۷۷۶۵۳۸۱۲۹	۱۸
۳۶	۸۴۳۹۸۶۱۵۲	۱۹
۲۳	۵۵۲۹۸۶۵۲۰	۲۰
۲۸	۷۳۳۴۹۵۴۳۵	۲۱
۲۴	۷۳۵۷۳۹۹۱۳	۲۲
۲۱	۷۲۴۹۷۰۹۷۱	۲۳
۱۶	۵۹۷۴۹۰۴۹۶	۲۴
۲۵	۸۳۶۱۷۲۲۹۹	۲۵
۱۱	۴۲۹۱۲۵۰۱۵	۲۶
۱۶	۴۴۸۲۲۴۱۲۶	۲۷
۱۳	۵۲۸۳۲۶۴۳۹	۲۸
۱۴	۵۹۹۳۷۴۱۰۳	۲۹
۱۲	۴۲۰۰۸۶۲۷۰	۳۰
۱۷	۶۰۲۴۴۲۱۸۷	۳۱
۱۴	۶۵۰۰۷۵۱۴۶	۳۲
۸	۲۸۷۱۸۴۲۴۲	۳۳
۷	۲۴۱۴۴۴۷۶۷	۳۴
۸	۳۸۳۴۸۴۲۲۸	۳۵
۶	۴۳۲۶۰۶۵۱۳	۳۶
۹	۳۴۹۰۴۳۶۲۴	۳۷
۸	۸۶۵۴۲۱۸۹۷	۳۸
۵	۵۳۲۹۹۳۱۹۹	۳۹

جدول آ.۲: توزیع دفعات دریافت خسارت

تعداد بیمه گذارها	جمع مبلغ خسارت	دفعات دریافت خسارت
۸	۵۴۲۸۵۰۲۸۴	۴۰
۵	۴۷۸۶۷۱۱۰۷	۴۱
۴	۱۵۹۴۲۰۹۲۵	۴۲
۳	۱۳۷۶۱۲۵۸۵	۴۳
۲	۱۱۶۲۶۲۷۵۶	۴۴
۳	۳۵۱۷۰۸۰۳۷	۴۵
۳	۱۶۱۲۳۶۳۶۷	۴۶
۴	۶۶۲۴۵۴۷۹۷	۴۷
۳	۱۹۴۷۸۶۱۸۰	۴۸
۱	۸۰۷۸۰۵۲۵	۴۹
۳	۱۴۶۷۰۵۳۸۴	۵۰
۳	۱۹۷۸۸۷۶۷۱	۵۱
۳	۱۵۶۶۲۵۶۷۸	۵۲
۱	۶۳۴۹۴۳۹۲	۵۳
۱	۳۷۵۱۲۶۸۰	۵۸
۱	۹۸۰۲۸۶۸۹	۵۹
۱	۱۸۴۳۳۹۰۹۱	۶۰

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Probability	احتمال
Probabilistic	احتمالی
Arbitrage	آربیتراژ
Value at Risk	ارزش در معرض ریسک
Loss Value at Risk	ارزش در معرض ریسک زیان
Conditional Value at Risk	ارزش در معرض ریسک شرطی
Valuation	ارزیابی
Fundamental	اساسی
Robustness	استواری
Creditors	اعتبار دهندگان
Perturbation	اغتشاش
Strict	اکید
Strictly increasing	اکیدا صعودی
Statistical	آماري
Conditional expectation	امید ریاضی شرطی
Measure	اندازه
Risk measure	اندازه ریسک
Coherent risk measure	اندازه ریسک منسجم
Capital market and money	بازار سرمایه و پول
Return	بازده
Nonatomic	بدون اتم
Elliptical	بیضوی
Surplus-invariant	پایایی مازاد
Stable	پایدار
Continuous	پیوسته
Right-continuous	پیوستگی راست

Cummulative distribution function	تابع توزیع تجمعی
Increasing function	تابع صعودی
Historical estimator	تخمین گر تاریخی
Risk estimator	تخمین گر ریسک
Frequency	تناوب
Distribution	توزیع
Tail distribution	توزیع دنباله (دم)
Benchmark loss distribution	توزیع زیان معیار
Cash-additivity	جمع پذیری نقدینگی
Quantile	چندک
Expected Shortfall	ریزش مورد انتظار
Risk	ریسک
Internal risk	ریسک داخلی
Tail Risk	ریسک دنباله (دم)
Tail Value at Risk	ارزش در معرض ریسک دنباله
Pareto-tailed risk	ریسک دنباله پارتو
Catastrophic Risk	ریسک فاجعه بار
Loss	زیان
Potential loss	زیان بالقوه
Subadditivity	زیر جمع پذیری
Portfolio	سبد دارایی
Capital requirement	سرمایه مورد نیاز
Backtestability	قابلیت آزمایش مجدد
Law-invariant	قانون پایا
Almost surely	قریب به یقین
Piecewise constant	قطعه وار ثابت
Upper bound	کران بالا
Capital adequacy	کفایت سرمایه
Deficiency	کمبود
Financial	مالی
Random variable	متغیر تصادفی
Convex	محدب
Portfolio management	مدیریت سبد دارایی
Benchmark	معیار

Acceptability	مقبولیت
Average Value at Risk	میانگین ارزش در معرض ریسک
Discontinuity	ناپیوستگی
Positive homogeneity	همگن مثبت
Comonotonicity	هم یکنوا
Comonotonic subadditivity	زیر جمع پذیر هم یکنوا
Comonotonic convexity	محدب هم یکنوا
Monotonicity	یکنوایی
Stochastic monotonicity	یکنوایی تصادفی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Acceptability	مقبولیت
Almost surely	قریب به یقین
Arbitrage	آربیتراژ
Average Value at Risk	میانگین ارزش در معرض ریسک
Backtestability	قابلیت آزمایش مجدد
Benchmark	معیار
Benchmark loss distribution	توزیع زیان معیار
Capital adequacy	کفایت سرمایه
Capital market and money	بازار سرمایه و پول
Capital requirement	سرمایه مورد نیاز
Cash-additivity	جمع پذیری نقدینگی
Catastrophic Risk	ریسک فاجعه بار
Coherent risk measure	اندازه ریسک منسجم
Comonotonicity	هم یکنوا
Comonotonic convexity	محدب هم یکنوا
Comonotonic subadditivity	زیر جمع پذیر هم یکنوا
Conditional expectation	امید ریاضی شرطی
Conditional Value at Risk	ارزش در معرض ریسک شرطی
Continuous	پیوسته
Convex	محدب
Creditors	اعتبار دهندگان
Cummulative distribution function	تابع توزیع تجمعی
Deficiency	کمبود
Discontinuity	ناپیوستگی
Distribution	توزیع
Elliptical	بیضوی

Expected Shortfall	ریزش مورد انتظار
Financial	مالی
Frequency	تناوب
Fundamental	اساسی
Historical estimator	تخمین گر تاریخی
Increasing function	تابع صعودی
Internal risk	ریسک داخلی
Loss	زیان
Loss Value at Risk	ارزش در معرض ریسک زیان
Law-invariant	قانون پایا
Measure	اندازه
Monotonicity	یکنوایی
Nonatomic	بدون اتم
Pareto-tailed risk	ریسک دنباله پارتو
Perturbation	اغتشاش
Piecewise constant	قطعه وار ثابت
Probabilistic	احتمالی
Probability	احتمال
Portfolio	سبد دارایی
Portfolio management	مدیریت سبد دارایی
Positive homogeneity	همگن مثبت
Potential loss	زیان بالقوه
Quantile	چندک
Random variable	متغیر تصادفی
Return	بازده
Right-continuous	پیوستگی راست
Risk	ریسک
Risk estimator	تخمین گر ریسک
Risk measure	اندازه ریسک
Robustness	استواری
Stable	پایدار
Statistical	آماري
Stochastic monotonicity	یکنوایی تصادفی
Strict	اکید

Strictly increasing	اکیدا صعودی
Subadditivity	زیر جمع پذیری
Surplus-invariant	پایایی مازاد
Tail distribution	توزیع دنباله (دم)
Tail risk	ریسک دنباله (دم)
Tail Value at Risk	ارزش در معرض ریسک دنباله
Upper bound	کران بالا
Valuation	ارزیابی
Value at Risk	ارزش در معرض ریسک

Aabstract

In this study, a class of quantile-based risk measures that generalize the value of VaR risk exposure as well as the expected loss is introduced by considering both the frequency and the severity of losses. Under VaR a single confidence level is assigned regardless of the size of potential losses. We allow for a range of confidence levels that depend on the loss magnitude. The main topic of research is the application of a benchmark loss distribution (BLD) in insurance, i.e. a function that links a maximum probable probability of event to any potential loss. The corresponding risk measure, called Loss VaR (LVaR), determines the minimal capital injection that is required to align the loss distribution of a risky position to the target BLD. By design, one has full flexibility in the choice of the BLD profile and, therefore, in the range of relevant quantiles. Special attention is given to piecewise constant functions and to tail distributions of benchmark random losses. Furthermore, in this research the main theoretical properties of LVaR with a focus on their comparison with VaR and ES and discuss applications to capital adequacy, portfolio risk management, and catastrophic risk. Also, for the validation of the research, the actual data of claims paid and premiums received in the field of supplementary insurance activity of the insurance company have been used. The probability and cumulative distribution of claims paid to insurers as well as the probability and cumulative distribution of profits and losses of the insurance company from each insurer is determined by using EasyFit software and R software. Finally, the size of risks in the field of supplementary health insurance activity has been estimated and calculated by VaR, ES, LVaR and RVaR risk measures.

Keywords: *BLD*, capital adequacy, loss distributions, *LVaR*, portfolio management, risk measures, *RVaR*, supplementary health insurance, tail risk.



Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in Financial Mathematics

Risk measures based on benchmark loss distributions

By: Fatemeh sadat Kamali

Supervisors:

Dr. Ali Reza Khoddami

Dr. Mohammad Mirbagherijam

February 2021