بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی مالی

زیرجمع‌پذیری دنباله اندازه‌های ریسک اعوجاج، اندازه‌های ریسک اعوجاج دنباله چند متغیره و کاربرد ریسک MTD در تخصیص سرمایه

نگارنده: فرشته مهرپور

استادان راهنما

دکتر علیرضا خدّامی
دکتر عبدالمجید عبدالباقی عطاآبادی

دی ۱۳۹۸

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه‌تعالی

شماره:

تاریخ:

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم فرشته مهرپور با شماره دانشجویی ۹۶۱۴۶۱۴ رشته **ریاضی کاربردی** گرایش ریاضی مالی تحت عنوان **زیر جمع پذیری دنباله اندازه‌های ریسک اعوجاج، اندازه‌های ریسک اعوجاج دنباله چند متغیره و کاربرد ریسک MTD در تخصیص سرمایه** که در تاریخ **۱۳۹۸/۱۰/۳۰** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۸ ☑

ج) درجه خوب: نمره۱۷/۹۹ – ۱۶☐ د) درجه متوسط: نمره ۱۵/۹۹-۱۴ ☐

ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐

نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر علیرضا خدامی	استادیار	علیرضا خدامی
۲- استادراهنمای دوم	دکتر عبدالمجید عبدالباقی	استادیار	
۳- استاد مشاور	ـــــ	ـــــ	ـــــ
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر ابوالفضل پورعیدی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر نگار اقبال	استادیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر محمد میرباقری جم	استادیار	محمد میرباقری جم

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

۹۸/۱۱/۲۷

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشکده ریاضی

حاصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم به

آنان که گرمای امیدبخش وجودشان، بهترین پشتیبان در سردترین روزگاران است.

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید.

استوارترین تکیه گاهم، دستان پرمهر پدر

زیباترین نگاه زندگیم، چشمان مادر

امروز هستی‌ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما

ره آوری گران سنگ‌تر از این نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگیتان را بزداید.

بوسه بر دستان پرمهرتان

سپاس و قدردانی

حمد و سپاس خدای را سزد که دل را به نور معرفت روشن ساخت و مشعل دانش را فرا سوی انسان‌ها برافروخت تا در پرتو آن هدایت را از ضلالت باز شناسند.

اکنون که به یاری خداوند موفق به گذراندن این دوره از تحصیل خود گشته‌ام بنا بر وظیفه از کلیه کسانی که در این زمینه مرا یاری نمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از محضر یکایک اساتید محترمی که در مدت تحصیل از خرمن عمر پربرکتشان خوشه‌های معرفت چیده و از شمع پرفروغ وجودشان انوار دانش کسب کرده‌ایم، متواضعانه و صمیمانه تشکر نمایم.

صمیمانه‌ترین و خالصانه‌ترین سپاس خود را به خانواده عزیزم که همواره در سختی‌ها و دشواری‌های زندگی یاوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن برای این جانب بوده‌اند و مرا مورد لطف و عنایت خود قرار داده‌اند، تقدیم می‌دارم که این اندک پیشکشی به جهت بزرگواری‌های آن‌ها و دیگر عزیزانم می‌باشد.

تقدیر و قدردانی می‌کنم از استادان گرانمایه جناب آقای دکتر علیرضا خدّامی و جناب آقای دکتر عبدالمجید عبدالباقی عطاآبادی که تمام سعی خود را در انتقال اطلاعات و تجربیاتشان نمودند، همچنین از تمام کسانی که به هر طریقی در انجام این پژوهش مرا یاری نموده و از هیچ عملی دریغ ننموده‌اند، ولی در اینجا نامی از آن‌ها برده نشده است، ضمن پوزش خالصانه صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نمایم.

فرشته مهرپور
دی ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **فرشته مهرپور** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **زیرجمع‌پذیری دنباله اندازه‌های ریسک اعوجاج، اندازه‌های ریسک اعوجاج دنباله چند متغیره و کاربرد ریسک MTD در تخصیص سرمایه**، تحت راهنمایی **علیرضا خدّامی** و **عبدالمجید عبدالباقی عطاآبادی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود’’ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فرشته مهرپور
دی ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه مفهوم زیرجمع‌پذیری دنباله که توسط بلزسامپرا و همکارانش در سال ۲۰۱۴ برای اندازه‌های ریسک تعریف شد، گسترش داده می‌شود.
همچنین شرایط لازم و کافی برای این که یک اندازه ریسک اعوجاج، زیرجمع‌پذیر دنباله باشد ارائه می‌گردد. اندازه‌های ریسک GlueVaR تعمیم یافته که برای به‌دست آوردن هر اندازه ریسک اعوجاج منسجم مورد استفاده قرار می‌گیرد، معرفی می‌گردد.
برای توضیح بیشتر کاربردهای زیرجمع‌پذیری دنباله، اندازه‌های ریسک اعوجاج دنباله چند متغیره (MTD) پیشنهاد می‌گردد و اندازه ریسک امید شرطی دنباله چند متغیره (MTCE) که توسط لاندسمن و همکارانش در سال (۲۰۱۶) بیان شد توسیع داده می‌شود. ویژگی‌های اندازه‌های ریسک اعوجاج دنباله چند متغیره، از جمله همگن بودن، انتقال پایایی، یکنوا بودن و زیر جمع‌پذیری مورد بحث واقع می‌شود. علاوه بر این کاربردهای اندازه‌های ریسک اعوجاج دنباله چند متغیره در تخصیص‌های سرمایه برای یک سبد از ریسک‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین اثرات وابستگی بین ریسک‌ها در یک سبدسهام و پیشامدهای دنباله فرین یک سبد ریسک در تخصیص‌های سرمایه جستجو می‌گردد.

کلمات کلیدی: GlueVaR تعمیم یافته، زیرجمع‌پذیری، زیرجمع‌پذیری دنباله، اندازه ریسک اعوجاج، اندازه ریسک دنباله چند متغیره، اندازه ریسک منسجم، انتگرال شوکت، تخصیص سرمایه.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

مفاهیم پایه‌ای ریسک

۱.۱ مقدمه

در دنیای امروز، همه‌ی سرمایه‌گذاران در هنگام سرمایه‌گذاری با عدم‌اطمینان [۱] روبه‌رو هستند. نتیجهٔ این عدم‌اطمینان که ناشی از وقوع پیشامدی است که در آینده رخ می‌دهد را سرمایه‌گذاران به اصطلاح ریسک می‌گویند. عمده تلاش سرمایه‌گذاران بر این است که عدم‌اطمینان را کاهش و با اطمینان بیشتری به استقبال ریسک بروند. از آنجایی که عدم‌اطمینان همیشه وجود دارد پس دغدغه اصلی سرمایه‌گذاران یافتن راه حل مطلوبی است که بتوانند با کمک آن اندازه مشخصی از ریسک را به دست آورند.

هدف ما، معرفی یکی از معیارهای اندازه‌گیری ریسک[۲] است که به کمک آن می‌توان یک عدد معین را به سرمایه‌گذار ارائه داد. مقدار آن عدد، اطلاعاتی در مورد ریسک بدره یا سبد سرمایه‌گذاری را چه به طور فشرده یا تلخیص شده در اختیار سرمایه‌گذار قرار می‌دهد. این معیار اندازه‌گیری که به آن ارزش در معرض ریسک یا به اختصار VaR[۳] می‌گویند، سرمایه‌گذار را از انبوهی از محاسبات ریسک خلاص می‌کند. امروزه این معیار در سطح گسترده‌ای بین سرمایه‌گذاران و نهادهای مالی مورد استفاده قرار می‌گیرد. با استفاده از VaR می‌توان ریسک را هدف گذاری و برای آن، بودجه تعیین کرد.

[1] Uncertainty
[2] Risk measurement
[3] Value at Risk

باید توجه داشته باشیم هرچند که VaR به عنوان یکی از ساده‌ترین و کاربردی‌ترین معیارهای کمی‌سازی ریسک مورد استفاده قرار می‌گیرد اما این معیار دارای معایبی نیز می‌باشد. مهم ترین عیب VaR عدم سنجش ریسک در مواقع بحرانی بازار است. راکفلر [1] و همکارانش در سال ۲۰۰۲ برای رفع این نقص معیار ارزش در معرض ریسک شرطی [2] $(CVaR)$ را معرفی کردند. این معیار گاهی اوقات به دلیل داشتن رفتاری دنباله‌وار با نام ارزش در معرض ریسک دنباله [3] $(TVaR)$ نیز معرفی می‌شود. $TVaR$ به عنوان امید ریاضی [4] از ضرر و زیان با توجه به اینکه آن زیان‌ها بالاتر از ارزش VaR مرتبط است، در نظر گرفته می شود. برای تلفات فاجعه بار در کمترین مقدار از $TVaR$ استفاده می‌شود، زیرا این اندازه‌گیری ریسک، در اکثر موارد به محاسبه زیان‌های نامطلوب می‌پردازد. علاوه بر این، اندازه‌گیری ریسک $TVaR$ دارای ویژگی‌های تحدب [5] و زیرجمع‌پذیری [6] می‌باشد. از دیدگاه نظری، معیار $TVaR$ برای ارزیابی ریسک‌های که شرکت‌ها نسبت به ارزیابی ریسک VaR دارند، مناسب‌تر است [۲۲].

۲.۱ بازده

بازده [7]، در فرایند سرمایه‌گذاری نیروی محرکی می‌باشد که ایجاد انگیزه می کند و پاداشی برای سرمایه‌گذاران به حساب می‌آید. دو نوع بازده وجود دارد

- بازده تحقق یافته [8]
- بازده مورد انتظار [9]

بازده تحقق یافته بازده‌ای است که به وقوع پیوسته یا بازده‌ای می‌باشد که کسب شده است. بازده تخمینی یک دارایی که سرمایه‌گذار انتظار دارد در یک دوره آینده به دست آورد را بازده مورد انتظار می‌گویند. بازده مورد انتظار با عدم اطمینان همراه است و احتمال دارد بر آورد شود یا برآورد نشود. که با ضرب نتایج احتمالی توسط شانس وقوع آن‌ها و سپس جمع کردن این نتایج محاسبه می‌شود. سرمایه‌گذاران برای کسب بازده مورد انتظار باید یک نوع دارایی را خریداری کنند و باید توجه داشته باشند که این بازده ممکن است تحقق نیابد. از آنجا که یکی از وظایف مدیران حداکثر کردن سرمایه سهامداران می‌باشد، تأثیر روش‌های تأمین مالی بر بازده سهام و همچنین ارزیابی ریسک‌های قریب الوقوع برای آن‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است [۱۳].

[1] Rockafellar
[2] Conditional Value at Risk
[3] Tail Value at Risk
[4] Mathematical expectation
[5] Convexity
[6] Subadditivity
[7] Return
[8] Returns realized
[9] Expected return

۳.۱ مفهوم ریسک

هر یک از محققان و نظریه پردازان از واژه ریسک، تعریف خاص مورد نظر خود را با اقامهٔ دلایل و مباحث گسترده مطرح کرده‌اند. البته، در علوم انسانی و به خصوص علوم مدیریت، این تنوع نظر عادی به نظر می‌رسد. با این وجود، می‌توان ادعا کرد در همه‌ی این تعاریف موقعیت های توأم با ریسک سه عامل مشترک دارد:

- عمل یا اقدام بیش از یک نتیجه به بار می‌آورد.

- تا زمان مملوس شدن نتایج، از حصول هیچ یک از آن‌ها آگاهی قطعی در دست نیست.

- حداقل یکی از نتایج ممکن الوقوع، پیامدهای نسبتاً نامطلوبی به همراه دارد.

در نتیجه عدم‌اطمینان از نتایج اقدام ودر معرض قرار گرفتن این عدم‌اطمینان از مهم‌ترین مؤلفه‌های تشکیل دهنده‌ی انواع ریسک است. در برخی موارد، به طور کلی در مورد چگونگی نتایج آینده، اطلاعی در دست نداریم و در موارد دیگر با فرض آشنایی با گزینه‌های مختلف نتایج آتی، بر پایه‌ی تجربه و حدس، تقریب‌های در مورد امکان وقوع هر یک به دست می‌آوریم. در حالت‌های خاص نیز مشروط به حاضر بودن پیش فرض‌هایی که آن حالت خاص را ساخته است، می‌توان با استفاده از فنون آماری و قوانین احتمالات، با دقت نسبی، شناخت دقیق تری از احتمال وقوع این نتایج به دست آورد. بدیهی است با حرکت از سوی عدم‌اطمینان کامل نتایج به طرف عدم‌اطمینان نسبی آن‌ها، میزان ریسک نیز کمتر می‌شود. این واقعیت با ادراک متعارف ما نیز هم‌خوانی دارد، چرا که هر چه آینده برای ما روشن‌تر و عدم‌اطمینان‌های آن کمتر باشد خود را در معرض ریسک و خطر کمتری می‌بینیم و برعکس.
تمام مؤسسات انتفاعی و غیر انتفاعی، از کارگاه‌های کوچک گرفته تا شرکت‌های بزرگ، به نوعی با ریسک روبرویند. هر جا برای یک انتخاب گزینه‌های گوناگون وجود داشته باشد و آن گزینه‌ها با آثار و نتایج مختلف همراه باشد، ریسک وجود دارد. بخصوص اگر حداقل یکی از این نتایج اثرات نامطلوبی نسبت به سایر رویدادها داشته باشد. برای مؤسسات مالی، ریسک از مفهوم وسیع‌تری برخوردار است. محور فعالیت‌های بسیاری از بنگاه‌های مالی مانند مؤسسات بیمه و صندوق‌های بازنشستگی بر کنترل ریسک استوار است. برای چنین مؤسساتی، این مفهوم به قدری مهم است که در بسیاری از موارد، حتی دخالت‌های مستقیم قانونی از سوی قانون گذاران را به همراه دارد. نمونه بارز آن، تعیین حداقل میزان ذخیره‌ی قانونی بانک‌ها از سوی بانک مرکزی است که یکی از سه ابزار بسیار مهم برای کنترل سیستم بانکی است [۲].

۴.۱ مدیریت ریسک

ریسک به معنای انحراف در پیشامدهای ممکن آینده است. اگر تنها یک پیشامد ممکن باشد، انحراف و ریسک کمتر می‌شود. همه‌ی ما در زندگی با انواع ریسک و مخاطرات گوناگون روبه‌رو هستیم. در نتیجه باید ریسک‌ها را تحلیل و اگر با آن‌ها بر خورد داریم آن‌ها را شناسایی کنیم، در مجموع تمام ریسک‌ها و نتایج آن‌ها را باید ارزیابی کرد. مدیریت ریسک[1] عبارت است از فرایند مستندسازی تصمیمات نهایی اتخاذ شده و به کارگیری معیارهایی که می‌توان از آن‌ها جهت رساندن ریسک تا سطحی قابل قبول استفاده کرد. به عبارت دیگر فرآیند شناسائی، ارزیابی، انجام اقدامات کنترلی و اصلاح ریسک های اتفاقی بالقوه‌ای که مشخصاً پیشامدهای ممکن آن خسارت با عدم تغییر در وضع موجود می‌باشد. مدیریت ریسک مجموعه‌ای را قادر می‌سازد که به نحو بهتری ریسک‌های متداول در فعالیت‌های روزمره را مدیریت نموده و با خیالی آسوده از خسارات تصادفی، به‌طور جامع‌تر و مؤثرتر فعالیت‌های روزمره خود را ادامه دهد. هدف مدیریت ریسک کنترل پیامدهای نامطلوب ناشی از تحمل ریسک و همچنین اطمینان یافتن از دست‌یابی به فواید پذیرش ریسک است. این امر مستلزم آن است که ریسک را شناسایی و برای مدیریت آن تصمیمات هوشیارانه اتخاذ کرد. سهل انگاری در مدیریت ریسک، عواقب نامطلوب و مهمی به لحاظ مالی و اعتباری بر جای می‌گذارد. حتی اگر تأثیر پیامدهای عدم مدیریت ریسک جدّی هم نباشد، بی توجهی به آن می‌تواند باعث انحراف از مسیر اصلی امور شود و موجب شود تا به جای صرف وقت در مسائل اصلی تجارت عمده، انرژی و امکانات خود را صرف مقابله با تبعات عدم مدیریت ریسک کرد. توجه شایسته به مدیریت ریسک، نیازمند داشتن چارچوبی مطمئن برای آن است. این چارچوب نه تنها شامل فرآیندهای اندازه‌گیری و مدیریت ریسک می‌شود بلکه سازوکاری فراهم می‌آورد که به ما امکان می‌دهد در رابطه با تغییرات ریسک در طول زمان، رویه‌های مدیریت بحران و طرح‌های محدود کننده‌ی عوامل مسبب ریسک که قبلاً پیش بینی نشده است، بازخور دریافت کرد.

به بیانی دقیق‌تر می‌توان گفت مدیریت ریسک فرآیندی است که در آن مدیران به شناسایی، اندازه‌گیری و تصمیم‌گیری در مورد ریسک و نظارت بر انواع ریسک‌های مطرح برای بنگاه می‌پردازند. مثلاً، براي اينكه وضعيت مؤسسه در محدوده‌ای نگه داشته شود که پاسخ‌گوی معیارهای نقدینگی مورد نیاز یا مورد نظر مشتریان، اعتبار دهندگان[2] و مقام ناظر[3] باشد، مدیران ناچارند تخمین‌هایی از مقدار ضرر بالقوه ارائه کنند. در مرحله‌ی بعدی، باید سازکارهایی برای کنترل مقدار ریسک برقرار کنند و هم چنین مشوق‌هایی برای ریسک پذیری عاقلانه‌ی سرمایه‌گذاران عرضه نمایند.

مدیریت ریسک فرآیندی است برای رفع نیازهای یاد شده از طریق

[1] Risk management
[2] Creditors
[3] Regulator

- تعیین ریسک‌های عمده‌ای که مؤسسه در معرض آن‌ها قرار دارد.

- به دست آوردن معیارهای منسجم، قابل فهم و عملی برای تخمین ریسک.

- تصمیم‌گیری در مورد اینکه کدام یک از ریسک‌ها قابل تحمل است؛ کدامیک باید کاهش یابد؛ از کدامیک باید اجتناب شود و هم چنین تعیین ابزار مالی مورد نیاز.

- برقراری رویه‌های لازم جهت تعیین جایگاهی که مؤسسه از لحاظ ریسک[۱] باید به آن دست یابد.

یکی از مهم‌ترین اجزای مدیریت ریسک، اندازه‌گیری ریسک است. ریسک مفهومی کیفی است و به عدم اطمینان نسبت به انتظارات اشاره دارد. این عدم اطمینان، نگرانی‌هایی را نسبت به آینده برای سرمایه‌گذار ایجاد می‌نماید. تا زمانی که این عدم اطمینان کمّی نشود، قیمت گذاری دارایی‌های مالی ریسکی به‌صورت معمّا باقی می‌ماند، چرا که ریسک موجود در دارایی‌های مالی از عوامل تعیین کننده‌ی نرخ بازده مورد نظر سرمایه‌گذاران است و این نرخ در عین حال تعیین کننده‌ی قیمت دارایی‌هایی مالی است. اندازه‌گیری و کمّی کردن ریسک از دیرباز ذهن ریاضیدانان، مدیران و سیاست‌گذاران را به خود مشغول کرده است. سیاست‌گذاران برای وضع سیاست‌های منصفانه و کاملاً شفاف درباره‌ی ریسک و هم چنین جهت نظارت بر حسن اجرایی آن‌ها، به مقادیر کمّی ریسک نیازمندند. مدیران به دنبال ایجاد توازن بین ریسک و بازده سرمایه‌گذاری هستند. ریاضیدانان هم در صددند این نیازها را با تدوین ابزارهای قوی و در عین حال ساده‌ی ریاضی پاسخ دهند.

به منظور نیل به هدف اندازه‌گیری ریسک، ابزار مختلفی در حیطه‌ی ریاضیات و مهندسی مالی به ویژه در سال‌های اخیر تدوین شده است. اهمیت توسعه‌ی چنین ابزارهایی تا بدانجاست که برخی روش‌های اندازه‌گیری ریسک، از ساده‌ترین مدل‌های آماری گرفته تا پیچیده‌ترین معادلات، جایزه نوبل را نصیب مبدعان خود کرده است. افزایش پیچیدگی ابزار و بازارهای مالی در طی زمان، خلق سنجه‌های[۲] پیچیده‌تری را به دنبال داشته است. جدول ۱.۱ شامل فهرست مهم‌ترین ابزار تدوین شده در طی ۷۰ سال گذشته برای اندازه‌گیری ریسک است[۲].

---

[1] Risk position
[2] Measures

جدول ۱.۱: سیر تحول ابزارهای تحلیلی مدیریت ریسک

دیریش اوراق قرضه	۱۹۳۸
مدل میانگین– واریانس مارکویتز	۱۹۵۲
مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای	۱۹۶۳
مدل‌های چندعاملی	۱۹۶۶
مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معاملهٔ بلک–شولز	۱۹۷۳
دارایی‌های ریسک موزون برای بانک‌ها	۱۹۸۸
آزمون استرس	۱۹۹۲
ارزش در معرض ریسک	۱۹۹۳
ریسک متریکس	۱۹۹۴
کرِدیت متریکس	۱۹۹۷
مدیریت جامع ریسک بنگاه اقتصادی	۲۰۰۰

۵.۱ اهمیت مدیریت ریسک

امروزه اهمیت و جایگاه مدیریت در امر سرمایه‌گذاری به ویژه سرمایه‌گذاری‌های کلان بر کسی پوشیده نیست. طبعاً، با افزایش ریسک مؤسسات مالی، مدیریت ریسک مالی نیز اهمیت بیشتری می‌یابد. عدم ثبات سیاسی و اقتصادی در جهان کنونی و به دنبال آن ایجاد تغییرات سریع در محیط فعالیت شرکت‌های، ریسک مؤسسات مالی را دو چندان کرده است. به علاوه، تجربه‌های تلخ بعضی کشورها مانند کشورهای آسیایی جنوب شرقی در دهه‌ی قبل و به ویژه بروز بحران ۲۰۰۸ که نتیجه‌ی مستقیم عدم مدیریت ریسک بوده، توجه بیشتر مدیران و قانون‌گذاران را نسبت به مقوله‌ی ریسک برانگیخته است. بحران مالي سال ۲۰۰۸ و در پی آن بروز مشکلات گسترده‌ی اقتصادی و اجتماعی و ورشکستگی‌هاي پی‌درپی و ناتوانی مؤسسات مالی در ایفای تعهدات خود باعث شده است که اکنون اندازه‌گیری و کنترل ریسک، در کانون توجه مؤسسات مالی قرار گیرد. این وقایع بر اهمیت روز افزون مدیریت ریسک دلالت دارد که از نتایج واضح آن افزایش توجه مدیران به مطالعه در حوزه‌ی ریسک است. بدیهی است انجام شایسته‌ی هر یک از وظایف مدیریت ریسک، نیازمند استفاده از ابزار قدرتمند و مبتنی بر مبانی علمی است [۲]. جایگاه و وظایف مرتبط با آن در وظایف پنج‌گانه مدیران به شرح

- برنامه‌ریزی
- سازمان‌دهی

- ایجاد انگیزه
- تأمین نیرو
- کنترل

تقسیم می‌شود. بیشتر در شکل اجرای طرح و چارچوبی از پیش تعیین شده و قطعی در جهت رسیدن به اهداف و سطوح مورد نظر برنامه است و در حقیقت نقش عوامل ایجاد کننده نوسان و عدم اطمینان که جزء جدا نشدنی محیط‌اند کمتر به آن توجه شده است. در حقیقت می‌توان گفت که افزایش عدم‌اطمینان در فعالیت‌های تعریف شده در هر پروژه از دو طریق به کاهش ارزش پروژه منجر می‌شود.

۱. افزایش ریسک یا عدم‌اطمینان به معنی تغییرات غیر منتظره در هزینه‌ها و درآمدها است که نتیجه آن کاهش حاشیه اطمینان نسبت به افق نتایج مالی و افت انگیزه و تقاضای مراکز اعتباری برای اعطا یا ادامه حمایت‌های مالی نسبت به آن و نهایتاً افزایش هزینه‌های تأمین مالی است.

۲. افزایش ریسک با افزایش نرخ تنزیل[۱] زمانی و کاهش ارزش حال پروژه منجر می‌شود و این خود موقعیت نسبی طرح را در مقایسه با طرح‌های رقیب تضعیف می‌کند [۷].

۶.۱ انواع ریسک

هدف اصلی سرمایه‌گذاران از پذیرفتن ریسک به‌دست آوردن نتیجهٔ مطلوبی که در اصطلاح به آن بازده می‌گویند، می‌باشد. مفاهیم ریسک و بازده همیشه در کنار یکدیگر هستند و نمی‌توان آن‌ها را جدا از هم فرض کرد. با توجه به تعاریف ریسک، می‌توان گفت که اختلاف میان بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار با آنچه در واقعیت بدست می‌آورد را ریسک می‌گویند. هرچقدر بازده بدست آمده به بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار نزدیک باشد یعنی ریسک آن دارایی کمتر است. در اینجا ما با مفهوم کلی ریسک آشنا شدیم حال به طور کلی به انواع ریسک و عواملی که ریسک را تحت تأثیر قرار می‌دهد می‌پردازیم. ریسک کل را می‌توان به دو گروه ریسک سیستماتیک [۲] و ریسک غیرسیستماتیک [۳] تقسیم کرد. ریسک سیستماتیک که به آن ریسک بازار [۴] نیز می‌گویند، تحت تأثیر تغییرپذیری بازده کل بازار است. این تغییرات می‌تواند از عواملی هم‌چون

[۱] منظور از نرخ تنزیل نرخی است که برای تنزیل جریان‌های مالی دوره‌های بعد و محاسبه ارزش حال پروژه به آن استناد می‌شود.

[2] Systematic risk
[3] Nonsystematic risk
[4] Market risk

تورم [۱]، نوسانات نرخ بهره [۲] و بازار نشأت بگیرد. گروه دوم ریسک که تحت تأثیر عوامل درونی هم‌چون ریسک تجاری [۳] یا ریسک مالی [۴] شرکت می‌باشد را ریسک غیرسیستماتیک می گویند.

۱.۶.۱ ریسک بازار

سه دسته ریسک اصلی در بازارهای مالی وجود دارد که عبارتند از

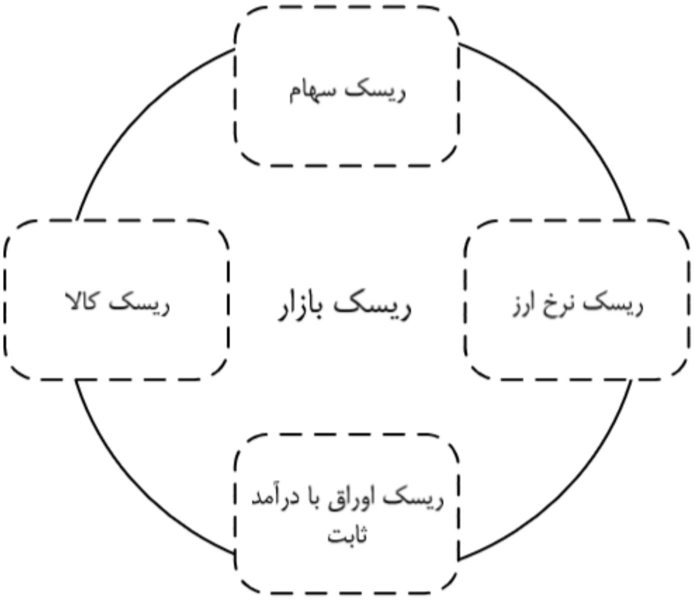
- ریسک بازار
- ریسک اعتباری [۵]
- ریسک عملیاتی [۶]

در بین انواع مختلف ریسک‌های موجود، تقریباً اکثر معاملات با ریسک بازار مواجه هستند و در میان ریسک‌های پیش روی مؤسسات مالی، سهم ریسک بازار در درماندگی مالی یک بنگاه اقتصادی بسیاری چشمگیر است. ریسک بازار، خطر مربوط به زیان‌های احتمالی یک سازمان، در اثر تغییرات نامطلوبی است که در قیمت‌های بازار اتفاق می‌افتد. ریسک بازار، ناشی از عواملی مانند تغییر نرخ بهره و نرخ تبادل ارز، تغییر نقدینگی بازار برای کالاهای خاص و ابزارهای مالی و همچنین حوادث سیاسی، اقتصادی محلی و جهانی است. لایه‌های مختلفی از ریسک بازار وجود دارد. در نمودار زیر لایه‌بندی‌ای از ریسک بازار ارائه شده است.

در این نمودار، خطوط نقطه چین گویایی تأثیرپذیری ریسک بازار از دیگر منابع ریسک است. انواع ریسک بازار عبارتند از

- **ریسک سهام** لایه‌ای از ریسک بازار است که به موقعیت‌های بازار سهام مربوط می‌شود.
- **ریسک اوراق بهادار با نرخ ثابت** ریسک‌های است که به موقعیت ابزار با درآمد ثابت، مانند اوراق قرضه و ابزار حساس به نرخ‌بهره [۷] مانند تاخت نرخ‌بهره [۸] مربوط می‌شود.
- **ریسک نرخ ارز** [۹] ریسک‌های مربوط به موقعیت‌های خارجی و نرخ‌های متقابل ارز است.
- **ریسک کالا** [۱۰]ریسک‌هایی است که به موقعیت‌های مؤسسه در ارتباط با کالاهایی چون فرآورده‌های کشاورزی، انرژی، فلزات و مشابه این‌ها مربوط می‌گردد [۲].

[1] Inflation
[2] Interest rate movements
[3] Business risk
[4] Financial risk
[5] Credit risk
[6] Operational risk
[7] Interest-sensitive instrument
[8] Interest rate swap
[9] Interest rate risk
[10] Commodity risk



شکل ۱.۱: لایه‌های ریسک بازار

۷.۱ ریسک‌های اساسی مؤسسات مالی

یکی از مهم‌ترین اهداف مؤسسات مالی افزایش بازدهی است، اما این مسأله غالباً به قیمت افزایش ریسک (به معنی عدم اطمینان در دستیابی به بازده مورد انتظار) برای مؤسسه تمام شود. بنابراین، مدیران ریسک در مؤسسات مالی به دنبال آن‌اند که بین ریسک و بازده توازن ایجاد کنند؛ توازنی که درآن نهایت به بیشینه‌سازی ثروث سهامداران بیانجامد. بدیهی است این هدف بدون شناخت اقسام ریسک‌های حاکم بر فعالیت‌های مؤسسات مالی ممکن نیست. در جدول ۲.۱ فهرستی از ریسک‌هایی را ملاحظه می‌کنید که اغلب مؤسسات مالی در خلال فعالیت‌های خود با آن دست و پنجه نرم می‌کنند [۲].

جدول ۲.۱: فهرست ریسک‌های مطرح برای مؤسسات مالی

نام	توصیف
ریسک اعتباری	ریسک عدم وصول تهسیلات اعطایی وعدم ایفای تعهدات از جانب طرف قرار داد
ریسک نقدینگی	ریسک نقدشوندگی مطالبات مشتریان به صورت آنی و نیاز بانک به تبدیل فوری دارایی‌ها به پول نقد
ریسک نرخ‌بهره	ریسک کاهش ارزش دارایی‌ها به علت نوسان نرخ بهره
ریسک بازار	ریسک کاهش ارزش دارایی‌ها و پرداخت‌ها به علت تغییر نرخ‌ها و قیمت‌های بازار
ریسک خارج ترازنامه	ریسک مؤسسه ناشی از نتایج فعالیت‌های مربوط به دارایی‌ها یا پرداخت‌های اقتضایی
ریسک نرخ ارز	ریسک ناشی از تغییر ارزش دارایی‌ها یا بدهی‌های ارزی به علّت تغییر نرخ ارز
ریسک حاکمیت	ریسک عدم بازپرداخت مشتریان خارجی به علّت دخالت دولت‌های خارجی
ریسک ناتوانی در پرداخت	ریسک ناشی از عدم وجود سرمایهٔ مکفی برای جبران کاهش ارزش دارایی‌ها

۸.۱ مؤلفه‌های ریسک

نگرانی ما نسبت به آنچه قرار است در آینده رخ دهد در دو صورت کاهش می‌یابد. ابتدا این که بدانیم عوامل ریسک به چه صورتی حرکت می‌کنند و ثانیاً بدانیم چه اندازه در معرض خطرات ناشی از تحرکات عوامل ریسک هستیم. درنتیجه، ریسک دارای دو مؤلفه است:

- عدم اطمینان
- در معرض بودن

در کل برای ارزیابی ریسک درک مفهوم این دو مؤلفه بسیار مؤثر است. برای مثال، سهامدار شرکت y در شرایط افت بازار با دو پیشامد اینکه آیا سهام شرکت مورد افت قرار می‌گیرد و اگر مورد افت قرار گرفت تا چه اندازه‌ای متحمل زیان می‌شود روبه‌رو می‌شود. پس بخشی از ریسک مربوط به این است که آیا سهام شرکت مورد افت قرار می‌گیرد و بخش دیگری از ریسک به

این‌که سهامدار چقدر متحمل زیان می‌شود بر می‌گردد. به عبارت دیگر، در این شرایط سهامدار نمی‌داند که آیا شرکت در معرض افت قرار می‌گیرد یا نه؛ اگر شرکت در شرایط افت قرار گرفت برای مواجه با آن باید چه اقدامی انجام دهد، روبه‌رو است.

۹.۱ سنجه‌های ریسک

تا کنون صاحب‌نظران سنجه‌های مختلفی برای اندازه‌گیری ریسک معرفی کرده‌اند که هر یک به جنبه‌ای از مقولهٔ عدم اطمینان اشاره دارد و بعضاً مکمل یکدیگرند. معیارهای اندازه‌گیری ریسک اول بار با مطالعهٔ شاخص‌های پراکندگی آماری تعیین شد و پس از آن سنجه‌های جدیدتری مانند دیرش [۱]، ضریب بتا و ارزش در معرض خطر توسعه یافت. تلاش‌ها برای طراحی ابزار اندازه‌گیری ریسک از نیمهٔ اول قرن بیستم آغاز شد. مکالی [۲] در سال ۱۹۳۸ دیرش را به عنوان سنجهٔ ریسک معرفی کرد که ابزاری ساده و در عین حال کارآمد برای سنجش ریسک اوراق بهادار با درآمد ثابت است. ادامهٔ بررسی‌های مکالی به شناسایی رابطهٔ غیرخطی ارزش اوراق بهادار با درآمد ثابت نرخ بهرهٔ بازار منتهی شد و معیار تحدب به عنوان شاخصی مکمل برای محاسبهٔ ریسک این اوراق معرفی گردید. در سال ۱۹۵۲ مارکویتز [۳] با ارائهٔ مدلی کمی جهت انتخاب سبد دارایی‌ها، برای اولین بار مقولهٔ ریسک را در کنار بازده مدنظر قرار داد. وی انحراف معیار را به‌عنوان سنجهٔ ریسک در نظر گرفت. ویلیام شارپ [۴]، شاخص بتا را برای اندازه‌گیری تغییرات نسبی ارزش هر سهم در قبال تغییرات نسبی ارزش بازار با معرفی خط مشخصات [۵] ارایه کرد. وی با طراحی مدل قیمت گذاری دارایی‌ها سرمایه‌ای، مدیریت علمی سبد دارایی را پایه‌گذاری نمود. بعد از دههٔ ۱۹۷۰ و افزایش روز افزون ریسک در جنبه‌های مختلف تصمیمات مالی، توجه مدیران بیش از پیش به اندازه‌گیری و مدیریت ریسک جلب شد. در این دوران، کنترل ریسک به عنوان عاملی برای ایجاد ارزش بیشتر مورد توجه قرار گرفت و نرخ‌های بازدهی تعدیل شده بر اساس ریسک [۶]، ملاک ارزیابی‌ها قرار گرفت. در سال ۱۹۹۳ مؤسسهٔ جی. پی. مورگان [۷] مدل ارزش در معرض ریسک را معرفی کرد. این معیار که تمامی انواع ریسک را در یک عدد خلاصه می‌کرد، برای استفاده کنندگان بسیار جذاب به نظر آمد و هر روز به کاربردهای آن افزوده شد. به دنبال آن، روش‌های محاسباتی پیچیده‌ای همانند فرآیندهای تصادفی [۸] و شبیه‌سازی برای افزایش دقت مدل‌های این سنجه توسعه یافت.

با توجه به تاریخچهٔ تحقیقات و تلاش‌های به عمل آمده در جهت اندازه‌گیری ریسک و

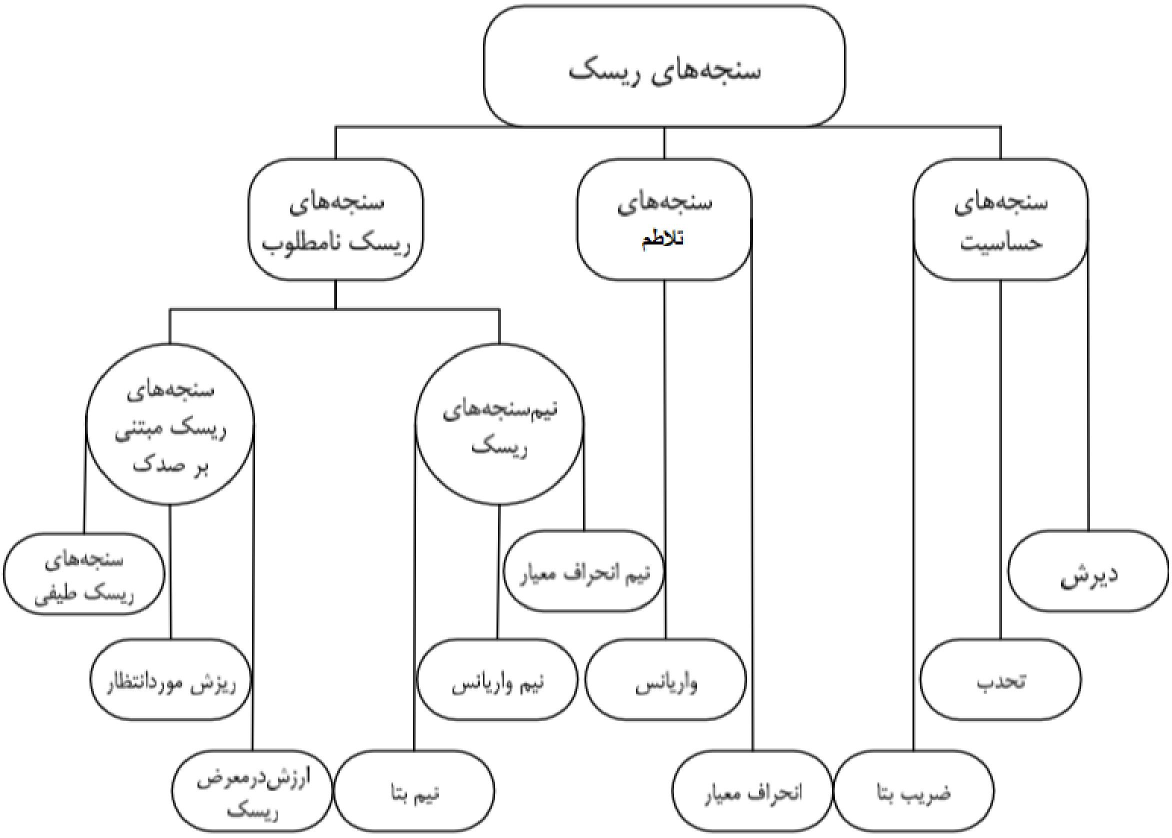
[1] Duration
[2] Macaulay
[3] Markowitz
[4] William Sharpe
[5] Characteristic line
[6] Risk-adjusted returns
[7] J. P. Morgan
[8] Stochastic processes

پیشرفت‌هایی که در هر دوره به وقوع پیوسته است، می‌توان گروه‌بندی‌ای از سنجه‌های ریسک ارایه داد که بر نحوهٔ اندازه‌گیری ریسک استوار است:

- **سنجه‌های تلاطم** [۱] این سنجه‌ها، پراکندگی یک متغیر را در اطراف میانگین و یا پارامتر تصادفی دیگر اندازه‌گیری می‌کند. واریانس و انحراف معیار دو نمونه از این سنجه‌هاست.

- **سنجه‌های حساسیت**[۲]، موضوع اندازه‌گیری این سنجه‌ها تغییرات متغیر وابسته بر اثر تغییرات متغیر مستقل است. دیرش و ضریب بتا دو نمونه از این سنجه‌هاست.

- **سنجه‌های ریسک نامطلوب** [۳]، این سنجه‌ها بر عکس سنجه‌های تلاطم، تنها بر بخش مخرب ریسک تمرکز دارد و تلاطم‌های زیر سطح میانگین و یا متغیر هدف را محاسبه می‌کند. نیم‌واریانس، نیم‌بتا و ارزش در معرض ریسک از این نوع سنجه‌هاست.
نمودار زیر گروه‌بندی یادشده را به نمایش می‌گذارد [۲].



شکل ۲.۱: گروه‌بندی سنجه‌های ریسک

[1]Volatility measures
[2]Sensitivity measure
[3]Downside risk measures

۱۰.۱ سنجه‌های تلاطم

همان‌طور که گفتیم، این سنجه‌ها تلاطم‌های متغیر تصادفی را اندازه‌گیری می‌کند. اغلب نقطه‌ای دلخواه مانند میانگین به عنوان مبنای محاسبهٔ تلاطم در نظر گرفته می‌شود. دامنهٔ تغییرات، متوسط قدر مطلق انحرافات، واریانس و انحراف معیار نمونه‌هایی از این سنجه‌هاست.

۱.۱۰.۱ انحراف معیار

طبق تعاریف آماری معیار مناسب برای محاسبهٔ ریسک، انحراف معیار [۱] است. همچنین انحراف معیار، یکی از متداول‌ترین معیار پراکندگی در طول چند دوره می‌باشد. لازم به ذکر است که پیش فرض استفاده از واریانس و انحراف معیار، وجود توزیع نرمال برای صفت متغیر است، چرا که در این توزیع، انحراف معیار به عنوان شاخص پراکندگی تعریف شده است. لذا اگر متغیر تصادفی از توزیع نرمال یا دست‌کم توزیع متقارن برخوردار نباشد، انحراف معیار شاخص مناسب پراکندگی نخواهد بود [۲].

۱۱.۱ سنجه‌های حساسیت

این سنجه‌ها، حساسیت متغیر تصادفی مورد نظر را در قبال تغییرات متغیر تصادفی دیگری اندازه‌گیری می‌کند. یعنی، تغییرات متغیر مورد نظر به عنوان تابعی از متغیری مستقل مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. دیرش، تحدب و ضریب بتا نمونه‌های از سنجه‌های حساسیت هستند [۲].

۱.۱۱.۱ دیرش

می‌دانیم که زمان‌بندی دریافت جریان‌های نقدی در اوراق بهادار با درآمد ثابت، بر ریسک و در نتیجه بر بازدهی این اوراق تأثیر گذار است. مفهوم دیرش نیز به زمان‌بندی جریان‌های نقدی اشاره دارد. این سنجه با ارائهٔ شاخصی برای دورهٔ بازیافت جریان‌های نقدی، ریسک تغییر قیمت اوراق‌قرضه را در قبال نوسان نرخ‌بهره اندازه‌گیری می‌کند [۲].

۲.۱۱.۱ تحدب

تحدب نیز مانند دیرش، سنجهٔ حساسیت قیمت اوراق‌بهادار با درآمد ثابت در مقابل نرخ‌بهره است. دیرش به تغییرات قیمت در قبال تغییرات نرخ‌بهره با فرض خطی بودن این ارتباط اشاره

[1] Standard deviation

دارد. اما تغییرات نرخ بهره و تغییرات قیمت رابطهٔ غیرخطی دارد. تحدب به اندازه‌گیری انحنای این رابطهٔ غیرخطی می‌پردازد [۲].

۳.۱۱.۱ ضریب بتا

ضریب بتا حساسیت بازدهٔ سهم را نسبت به بازدهٔ یک شاخص، مثلاً شاخص سهام، اندازه می‌گیرد و بر این اساس، نحوهٔ شکل گیری بازدهٔ قیمت‌ها را بر اساس تلاطم‌های شاخص توجیه می‌کند. ضریب بتا فرآیند محاسبهٔ مدل ریسک و بازدهٔ مارکویتز را تسهیل می‌کند، چرا که محاسبات این فرآیند به علت پیچیدگی و زمان‌بر بودن، تا قبل از رواج ابررایانه‌ها، مقرون به صرفه نبوده است [۲].

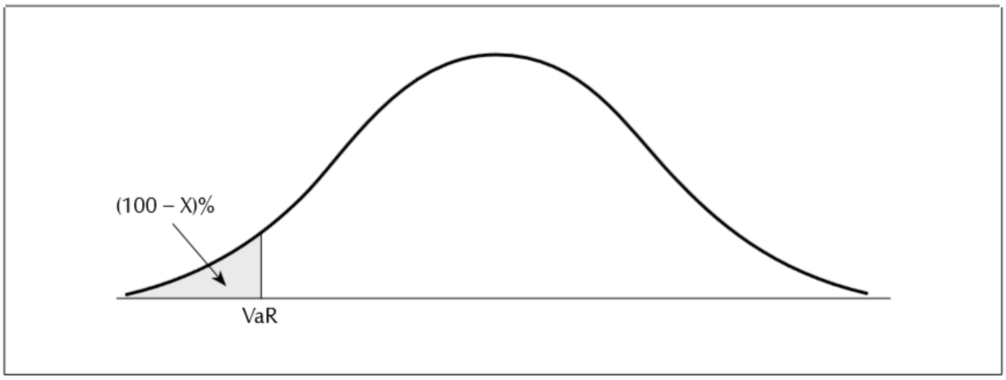
۱۲.۱ سنجه‌های ریسک نامطلوب

بنا به تعریف، ریسک نامطلوب احتمال این که ارزش یک دارایی یا سرمایه‌گذاری طی تلاطم‌های منفی بازار در آینده کاهش یابد را اندازه گیری می‌کند.
در این پایان نامه، بیشتر به سنجه‌های ریسک نامطلوب یعنی ارزش درمعرض ریسک و معیارهای تعمیم یافته آن می‌پردازیم.

۱.۱۲.۱ ارزش در معرض ریسک

ارزش در معرض ریسک یک معیار اندازه‌گیری ریسک است که حداکثر زیان مورد انتظار را در یک موقعیت سرمایه‌گذاری خاص و برای سطح اطمینان خاص تخمین می‌زند. این روش در اواخر دهه ۱۹۹۰ پس از آن که برخی از صندوق‌های مشترک سرمایه‌گذاری و صندوق‌های بازنشستگی زیان‌های ناگهانی بزرگی را متحمل شدند، مورد توجه زیادی قرار گرفت. هدف از روش ارزش در معرض ریسک، هشدار به سرمایه‌گذاران در مورد حداکثر زیان بالقوه‌ای است که می‌تواند اتفاق افتد. اگر سرمایه گذاران با زیان بالقوه‌ای که می‌تواند در یک روز یا یک هفته رخ دهد، مشکل دارند، می‌توانند سبد سرمایه‌گذاری خود را تعدیل کنند تا ریسک آن کاهش یابد. معیار ارزش در معرض ریسک بر قسمت بدبینانه احتمال توزیع سود از دیدگاه سرمایه‌گذار تأکید می‌کند. معمولاً از ارزش در معرض ریسک برای اندازه‌گیری ریسک یک سبد نیز استفاده می‌شود. هنگام ارزیابی تک تک سهام، ممکن است برخی از سهام پر ریسک، اما هنگام ارزیابی آن‌ها به عنوان بخشی از سبد سهام، کم ریسک تشخیص داده شوند. زیرا احتمال زیان بزرگ در سبد سهام، تحت تاثیر احتمال زیان‌های همزمان در همه سهام محتوی سبد در دوره مورد نظر است [۶].
VaR یا مبلغ تحت ریسک، بیانگر حداکثر زیان مورد انتظار روی بدره یا سبد دارایی‌ها یا مجموعه سرمایه‌گذاری در طول افق زمانی معین است (مثل یک روز یا یک ماه و یا یک هفته)

در شرایط عادی بازار و در سطح اطمینان معین می‌باشد. به عبارت ساده‌تر تفسیر این معیار به‌صورت ذیل است:
''سرمایه‌گذار X درصد اطمینان دارد که طی T روز آتی، قطعا بیشتر از مبلغ V متحمل زیان نخواهد شد.'' متغیر V همان ارزش در معرض ریسک، یا VaR بدره یا سبد سرمایه‌گذاری می‌باشد که در بردارندهٔ دو پارامتر T یعنی افق زمانی و X یعنی سطح اطمینان است. VaR



شکل ۳.۱: محاسبه VaR با استفاده از توزیع احتمال تغییرات در ارزش بدره، با سطح اطمینان $X\%$

معیار مناسبی به شمار می‌رود، زیرا که فهم و درک آن آسان می‌باشد. در واقع این معیار بیان می‌کند تا چقدر ممکن است ما دچار زیان و ضرر شویم یا به عبارت دیگر حداکثر مقدار زیان چقدر است؟ این همان سوالی است که همه مدیران به دنبال پاسخ آن هستند. بنابراین بسیار مطلوب خواهد بود اگر بتوانیم همه پارمترهای مختلف اندازه‌گیری ریسک در رابطه با متغیرهای بازار مربوط به بدره را تحت یک متغیر خلاصه نمود [۸].

۱۳.۱ توزیع بیضوی

توزیع‌های بیضوی [1]، توزیع‌های متقارنی هستند که معمولاً در مدیریت ریسک مالی مورد استفاده قرار می‌گیرند. یعنی چولگی آن‌ها صفر است، اما کشیدگی آن‌ها از توزیع نرمال بیشتر است. این توزیع‌ها روابط ساده‌ای برای محاسبهٔ ارزش در معرض ریسک ایجاد می‌کنند.

۱۴.۱ سنجه‌های منسجم

در حالت کلی سنجه‌های ریسک را می‌توان بر اساس ویژگی انسجام [2]، در قالب دو گروه منسجم و غیرمنسجم از یکدیگر جدا کرد. در اینجا به تشریح قواعد انسجام می‌پردازیم و ارزش در معرض ریسک را از لحاظ این ویژگی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

[1] Elliptical distributions
[2] Coherence

۱۵.۱ قواعد انسجام و کاربردهای آن

به رغم این که ما درکی شهودی از ریسک مالی داریم، ارائهٔ تخمین کمّی از ریسک مشکل است مگر این که دقیقاً منظور واقعی خود را از یک سنجهٔ ریسک مشخص کنیم. به‌عنوان مثال ما درک نامشخصی از دما داریم و بیان شفاف آن بدون توجه به دماسنج مشکل است، چرا که چگونگی دما را نشان می‌دهد. به همین ترتیب، بیان تصورمان از ریسک بدون داشتن درک روشنی از مفهومی که از یک سنجهٔ ریسک در نظر داریم، سخت است. بنابراین، لازم است جهت طراحی و توسعهٔ سنجه‌های ریسک ویژگی‌های آن‌ها را مشخص کنیم. بر این اساس، نظریهٔ سنجه‌های منسجم ریسک [۱]توسط آرتزنر [۲] و همکارانش پیشنهاد شد. این اولین نظریهٔ رسمی در زمینهٔ ریسک مالی است. این نظریه ساده به نظر می‌رسد، اما مفاهیم عمیقی را در خود جای داده است.

آرتزنر ویژگی‌های مطلوب سنجه‌های ریسک را در قالب قواعد انسجام[۳]به شرح زیر ارایه نمود: اگر V را به عنوان مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی حقیقی در نظر بگیریم، سنجهٔ ریسک $\rho(\cdot)$ به صورت تابع زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(\cdot): V \longrightarrow \mathbb{R}$$

این سنجهٔ ریسک زمانی منسجم است که ویژگی‌های زیر برقرار باشند

- یکنوایی [۴]

$$X, Y \in V,\ X \geq Y \Rightarrow \quad \rho(X) \leq \rho(Y).$$

به عبارتی دیگر، اگر مقادیر یک سبد دارایی Y در تمامی حالات ممکن اساساً کمتر از مقادیر سبد دارایی دیگر X باشد، باید ریسک بیشتری داشته باشد.

- زیرجمع‌پذیری [۵]

$$X, Y, X+Y \in V \quad \Rightarrow \quad \rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

به بیان دیگر، ریسک یک سبد دارایی باید از مجموع ریسک‌های مجزا کمتر و یا حداقل مساوی آن‌ها باشد. یعنی ادغام ریسک‌ها نباید باعث افزایش ریسک شود.

- همگنی مثبت[۶]

$$X \in V,\ h > 0,\ hX \in V \Rightarrow \quad \rho(hX) = h\rho(X).$$

[1] Theory of coherent risk measures
[2] Artzner
[3] Coherent axioms
[4] Monotonicity
[5] Subadditivity
[6] Positive homogeneity

یعنی تغییر اندازهٔ سبد دارایی با ضریب h باید سنجهٔ ریسک آن را معادل همین ضریب توزیع نماید.

- انتقال پایایی[۱]

$$X \in V,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \quad \rho(X+\alpha) = \rho(X) - \alpha.$$

یعنی افزایش یک مقدار ثابت به مقادیر سبد دارایی باید ریسک آن را به همان اندازه کاهش دهد.

مهم ترین ویژگی، زیر جمع پذیری است. این ویژگی به ما می‌گوید که اگر سبدی متشکل از چند سبد فرعی باشد، ریسک آن بیشتر از مجموع ریسک سبدهای سازنده آن نخواهد بود و در بیشتر مواقع ریسکی کمتر از آن‌ها خواهد داشت. در واقع، زیرجمع‌پذیری مهم‌ترین معیاری است که انتظار داریم توسط یک سنجهٔ ریسک منطقی برآورده گردد. این ویژگی می گوید وقتی ریسک‌های انفرادی را جمع کنیم، ریسک سبد حاصل در بدترین حالت بیشتر نمی‌شود و کوچک‌تر یا مساوی مجموع ریسک‌هاست. به عبارتی دیگر زیرجمع‌پذیری بدین معنی است که تجمیع ریسک‌ها، ریسک کل را افزایش نمی‌دهد. زیرجمع‌پذیری فراتر از یک مسئله نظری بوده و کاربردهای عملی فراوانی دارد. عدم وجود این ویژگی، ما را به این نتیجه رهنمون می‌سازد که قرار دادن تمامی تخم مرغ‌ها در یک سبد، در جهت مدیریت ریسک عمل مفیدی است. هم چنین، عدم ارضاء این ویژگی بدین معنی است که تجمیع ریسک‌ها منجر به تحمل ریسکی اضافی می‌شود که قبلاً وجود نداشته است. این مسأله پیامدهای نادرست زیر را به دنبال دارد؛ سنجه‌های ریسکی که از ویژگی‌های زیرجمع پذیری برخوردار نیست، موسسأت معامله‌گر در یک بورس سازمان یافته را به تفکیک حساب‌هایشان به حساب‌های مجزا جهت ایجاد ریسک‌های مجزا و کاهش الزامات وثیقه‌ای [۲] ترغیب می‌نماید. این مسأله باعث نگرانی بورس می‌شود، چرا که الزامات وثیقه‌ای حساب‌های منفک، دیگر پوشش دهندهٔ ریسک مجموع آن‌ها نیست و بدین ترتیب بورس در معرض زیان‌های احتمالی قرار می‌گیرد. اگر قانون‌گذاران جهت تعیین الزامات کفایت سرمایه از سنجه‌های ریسکی استفاده کنند که از ویژگی‌های زیرجمع پذیری برخوردار نیست، موسسات مالی به منظور کاهش الزامات کفایت سرمایه از طریق تفکیک خود به واحدهای مجزا دارای انگیزه می‌شوند، چراکه مجموع الزامات سرمایهٔ واحدهای کوچک‌تر از الزامات سرمایهٔ کل موسسه کمتر خواهد بود. در صورتی که ریسک‌ها زیرجمع‌پذیر باشند، جمع خطی آن‌ها تخمینی فراتر از ریسک‌های ترکیب شده[۳] به دستمان می‌دهد و این بدان معنی است که ما می‌توانیم از مجموع ریسک‌ها به عنوان برآوردی محتاطانه از ریسک ترکیب شده استفاده نماییم. در این حالت، ناظران همیشه مجموع ریسک‌های واحدها را به عنوان یک گزارش محافظه کارانه از ریسک تلقی می کنند. اما اگر سنجه ریسک زیرجمع‌پذیر نباشد، مجموع آن‌ها

[1] Translation invariance
[2] Margin requirements
[3] Combined risks

تخمینی کمتر از ریسک‌های ترکیب شده ایجاد می‌نماید، که این بدون شک، برآوردی نادرست بوده و ناکارآمدی این گونه سنجه‌های ریسک را گوش‌زد می‌کند. نتیجهٔ تمامی این گفته‌ها ما را به اهمیت ویژگی زیرجمع‌پذیری واقف می‌کند و این مسأله، مشکلات بیشتری را پیش روی ارزش در معرض ریسک قرار می‌دهد، چرا که این سنجه از ویژگی زیرجمع‌پذیری برخوردار نیست. یک سنجهٔ ریسک زمانی زیرجمع‌پذیر محسوب می‌شود که شرط زیرجمع‌پذیری برای تمام X و Yهای ممکن، برقرار باشد. بنابراین، با پیدا کردن یک مثال نقض می‌توان اثبات کرد که VaR زیرجمع‌پذیر نیست.

مثال ۱.۱۵.۱. دو ورقهٔ قرضهٔ A و B در اختیار داریم که شبیه به هم هستند. احتمال نکول [1] هرکدام ۴٪ است و با وقوع نکول زیانی معادل ۱۰۰ تومان نصیبمان می‌گردد. بدین ترتیب VaR در سطح اطمینان ۹۵٪ برای هر ورقه قرضه برابر صفر می‌باشد یعنی:

$$VaR(A) = VaR(B) = VaR(A) + VaR(B) = ۰$$

فرض کنید نکول‌ها مستقل از هم باشد. بدین ترتیب احتمال این که زیانی برابر صفر داشته باشیم برابر است با:

$$(۰/۹۶)^۲ = ۰/۹۲۱۶$$

و احتمال این که با زیانی برابر ۲۰۰ تومان مواجه شویم برابر است با:

$$(۰/۰۴)^۲ = ۰/۰۰۱۶$$

بنابراین احتمال این که با زیانی به اندازهٔ ۱۰۰ تومان مواجه شویم برابر است با:

$$۱ - ۰/۹۲۱۶ - ۰/۰۰۱۶ = ۰/۰۷۶۸$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$VaR(A+B) = ۱۰۰$$
$$VaR(A) + VaR(B) = ۰$$

در نتیجه

$$VaR(A+B) > VaR(A) + VaR(B).$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید، شرط زیر جمع‌پذیری نقض می‌گردد. بر این اساس VaR زیرجمع‌پذیر نیست. در واقع ما زمانی می‌توانیم از VaR به عنوان یک سنجهٔ زیرجمع‌پذیر یاد

[1] اگر طرف قرارداد نتواند در قبال قراردادی که بسته است به تمام یا بخشی از تعهدات‌اش، خواسته یا ناخواسته عمل کند، گویند «نُکول» انجام داده است.

کنیم که بازده دارای توزیع بیضوی باشد و این محدودیت قابل ملاحظه‌ای است، چرا که در دنیای واقعی توزیع‌های غیربیضوی [1] بیشتر از این که یک استثناء باشند، یک حالت عادی محسوب می‌شوند. ناکامی ارزش در معرض ریسک در تأمین شرط زیرجمع‌پذیری مشکلی اساسی است، چرا که دیگر نمی‌توانیم از آن به عنوان سنجهٔ منسجم ریسک یاد کنیم. VaR تنها یک صدک است و به‌عنوان یک صدک کاربردهای خود را دارد ولی به‌عنوان یک سنجهٔ ریسک راضی کننده نیست. با توجه به این مسائل به دنبال جایگزین‌هایی برای VaR هستیم که هم سنجه‌هایی منسجم باشند و هم مزیت‌های VaR را در خود جای دهند و در عین حال از معایب آن بر حذر باشند. اگر انتظار داریم که این سنجه‌های جایگزین، مزیت‌های VaR را حفظ کنند بدیهی است که باید سنجه‌هایی شبیه به VaR و منعکس کنندهٔ صدک توزیع بازده و یا توزیع زیان باشند [۲].

۱۶.۱ ارزش در معرض ریسک شرطی

یکی از رایج ترین معیارهای اندازه‌گیری ریسک نامطلوب، ارزش در معرض ریسک است. مفهوم ارزش در معرض ریسک عمدتاً با ریسک بازار مرتبط است و معیاری مهم برای اندازه‌گیری شاخص بورس در نظر گرفته می‌شود. به‌طور کلی با توجه به گسترش روز افزون بازارهای مالی و نیاز فراوان به ایجاد ساختاری پایدار برای این بازارها، نهادهایی که وظیفه نظارت و سازماندهی بازارهای گوناگون را بر عهده دارند، ارزش در معرض ریسک استانداردی برای مدیریت یکپارچه ریسک می‌دانند. از جمله نقاط قوت ارزش در معرض ریسک آن است که می‌تواند در یک عدد خلاصه شود، نوسان‌های منفی بازده را محاسبه می‌کند، تحت تأثیر بازده‌های بزرگ قرار نمی‌گیرد، قابل کاربرد برای محاسبه ریسک دارایی‌ها با توزیع بازده غیرخطی هم‌چون اختیار خریدها است و معیار ریسک استانداردی به حساب می‌آید. این معیار در کنار نقاط قوتش دارای ضعف‌هایی نیز است. ارزش در معرض ریسک محاسبه‌ی حداکثر زیان تنها چندک توزیع را برآورد کرده و از بررسی زیان‌های فراتر از آن در دنباله چشم پوشی می‌کند. همچنین این معیار از برخی قواعد انسجام مانند زیرجمع‌پذیری نیز تبعیت نمی‌کند. بنابراین معیار کامل‌تری نیاز است تا بتوان از بروز نتایج نامطلوب جلوگیری کرد. معیاری که می‌تواند انگیزه‌های بهتری برای معامله‌گران ایجاد کند" ریزش موردانتظار "(ES) [2] است که گاهی اوقات از آن به‌عنوان ارزش در معرض ریسک شرطی، انتظارات دنباله شرطی (CTE) [3] و زیان دنباله‌ای موردانتظار (TCE) [4] نیز یاد می‌شود. متغیر تصادفی زیان X برای یک موقعیت مالی با دوره زمانی ۱ و احتمال α را در نظر بگیرید. $f(X)$ و $F(X)$ به‌ترتیب تابع چگالی احتمال

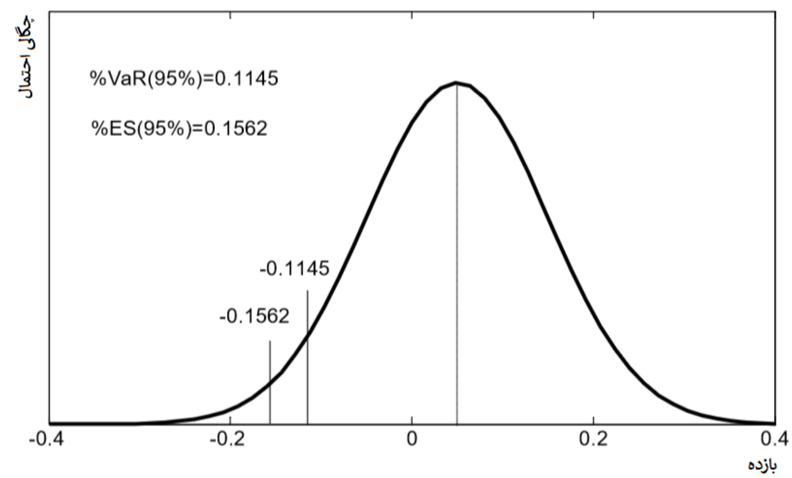
[1] Non-elliptic distributions
[2] Expected shortfall
[3] Conditional tail expectation
[4] Tail conditional expectation

[1] و تابع توزیع تجمعی X هستند، همچنین $VaR_{1-\alpha}$ ارزش در معرض ریسک با سطح اطمینان $1-\alpha$ برای X است. ریزش مورد انتظار برای X عبارت است از

$$ES_{1-\alpha} = \mathbb{E}\left(X \mid X > VaR\right) = \frac{\int_{VaR_{1-\alpha}}^{\infty} Xf(X)}{\mathbb{P}(X > VaR)}\, \mathrm{d}X.$$

بر اساس تعریف، ریزش موردانتظار، زیان موردانتظار X است، به شرطی که Xها بزرگ‌تر از VaR باشند. به همین دلیل ریزش موردانتظار "ارزش در معرض ریسک شرطی" نیز نامیده می‌شود. همچنین به دلیل اینکه بر رفتار دنباله بالایی در توزیع زیان تمرکز می‌کند "ارزش در مرض ریسک دنباله" نیز نامیده می‌شود [۱۵].

مثال ۱.۱۶.۱. اگر به‌جای داده‌های سود یا زیان از داده‌های مربوط به بازده دارایی استفاده کنیم، ریزش موردانتظار بر اساس درصد به‌دست می‌آید که به آن ریزش موردانتظار درصدی می‌گویند و آن را با ES٪ نمایش می‌دهند. در نمودار زیر، ES٪ و VaR٪ مقایسه شده است. در این نمودار مقدار VaR٪ برابر ۱۱/۴۹٪ و ES٪ برابر ۱۵/۲۶٪ است. هم VaR و هم ES به پارامترها و مفروضات توزیعی بستگی دارد و در این نمودار براساس سطح اطمینان ۹۵٪ و دوره نگهداری یک روزه و فرض توزیع نرمال با میانگین ۰/۰۵٪ و واریانس ۰/۰۱٪ است.



شکل ۴.۱: ارزش در معرض ریسک و ریزش موردانتظارنرمال

۱۷.۱ توانگری

توانگری [2]، توانایی یک شرکت در تأمین بدهی‌های طولانی مدت و تعهدات مالی خود است. توانگری در کسب و کار ضروری است زیرا توانایی‌های شرکت را برای ادامه فعالیت در آینده

[1] Probability density function
[2] Solvency

قابل پیش‌بینی نشان می‌دهد. در حالی که یک شرکت برای رونق و پرداخت تعهدات کوتاه مدت خود نیز به نقدینگی احتیاج دارد، اما نقدینگی کوتاه مدت را نباید با توانگری اشتباه گرفت. شرکتی که توانگری ندارد اغلب وارد ورشکستگی می‌شود. سرمایه‌های توانگری از اهداف زیر پیروی می‌کنند:

- برای کاهش ریسک این‌که بیمه‌گر [1] نتواند مطالبات خود را برآورده کند؛

- برای کاهش ضرر و زیان‌های بیمه‌گذاران در صورتی که یک شرکت نتواند تمام ادعاهایش را به‌طور کامل برآورده کند؛

- اخطار زود هنگام به ناظران [2] تا بتوانند در صورت افت سرمایه و کمتر بودن سرمایه از میزان مورد نیاز، فوراً مداخله کنند؛

- ارتقاء اطمینان در ثبات مالی بخش بیمه [۴۰].

[1] Insurer
[2] Supervisors

در این فصل به توضیح برخی از مفاهیم مالی و تعاریف آن‌ها پرداختیم. در فصل دوم به تعریف و توضیح برخی از مفاهیم ریاضی می‌پردازیم. همچنین در فصل سوم سنجه ریسک GlueVaR که توسط بلزسامپرا و همکارانش در سال ۲۰۱۴ بیان شده را بررسی و تعمیم یافته آن، که با نماد GGlueVaR نمایش داده می‌شود را مطالعه می‌کنیم. در ادامه اندازه ریسک MTD را معرفی و کاربرد آن را در تخصیص سرمایه بیان می‌کنیم و در فصل آخر، کاربرد سنجه ریسک GlueVaR در سهام شرکت‌های بورس اوراق بهادار، همراه با نتایج حاصل شده از آن را ارائه می‌دهیم.

فصل ۲

مفاهیم مقدماتی در اندازه‌گیری ریسک

در این فصل به بیان مفاهیم و تعاریف مقدماتی که در پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند می‌پردازیم.

۱.۲ تعاریف و مقدمات

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{F}$ یک σ ـجبر روی Ω باشد. در این صورت تابع $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ را یک اندازه احتمال می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

۲. به ازای هر دنباله دو به دو مجزا از اعضای $\mathcal{F}$ مانند $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$،
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

به سه تایی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ فضای احتمال می‌گوییم و اعضایی $\mathcal{F}$ را پیشامد یا رخداد می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد. در این‌صورت تابع $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ را $\mathcal{F}$ـاندازه‌پذیر می‌نامیم هرگاه به ازای هر مجموعه بورل مانند $B \in B(\mathbb{R})$ داشته باشیم $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد. در این‌صورت به هر تابع $\mathcal{F}$ـ اندازه پذیر مانند $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی گفته می‌شود.

تعریف ۴.۱.۲. اگر $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه پذیر باشد و X یک متغیر تصادفی در نظر گرفته شود، آنگاه $\Omega_X \subseteq \Omega$ را یک دامنه دنباله متغیر تصادفی می‌نامیم هرگاه $\Omega_X \in \mathcal{F}$.

تعریف ۵.۱.۲. فرض کنید χ مجموعه تمام متغیرهای تصادفی زیان یا ریسک‌های روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ در نظر گرفته شود. در این‌صورت یک اندازه ریسک هر تابع مانند $\rho : \chi \longrightarrow \mathbb{R}$ در نظر گرفته می‌شود.

- **نماد گذاری**

$$L^\circ = \left\{ X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{متغیر تصادفی است } X \right\}$$

$$L^\infty = \left\{ X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{متغیر تصادفی کراندار است } X \right\}$$

$$L^P = L^P(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{ X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow \mathbb{R} \mid \ ||X||_P < \infty \text{ متغیر تصادفی و } X \}$$

تعریف ۶.۱.۲. اگر $g : [\circ, ۱] \longrightarrow [\circ, ۱]$ یک تابع صعودی باشد و همچنین $g(\circ) = g(\circ+) = \circ$، $g(۱) = g(۱-) = ۱$ آنگاه g را تابع اعوجاج[1] (انحراف) می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۲. فرض کنید $\rho_g : \chi_g \longrightarrow \mathbb{R}$ و g یک تابع اعوجاج باشد. در این‌صورت یک اندازه ریسک اعوجاج به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho_g(X) = \int_{-\infty}^{\circ} [g(\mathbf{S}_X(x)) - ۱]dx + \int_{\circ}^{+\infty} g(\mathbf{S}_X(x))dx \qquad (۱.۲)$$

که در آن χ_g عبارت است از

$$\chi_g = \left\{ X \in L^\circ \mid \text{متناهی است } \rho_g(X) \right\}$$

و $\mathbf{S}_X(x) = \mathbb{P}(\{X > x\})$ تابع بقاء[2] متغیر تصادفی X است. اگر $X \in \chi_g$ آنگاه X را یک ریسک می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع F_X در نظر گرفته شود. توابع معکوس $F_X^{-۱}(\alpha)$ و $F_X^{-۱+}(\alpha)$ از تابع F_X را به ازای هر $\alpha \in [\circ, ۱]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$F_X^{-۱}(\alpha) = \inf \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq \alpha\} = \sup \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) < \alpha\},$$

$$F_X^{-۱+}(\alpha) = \inf \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > \alpha\} = \sup \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \leq \alpha\},$$

با این ملاحظه که $\inf \emptyset = \infty$ و $\sup \emptyset = -\infty$.

[1] Distortion function
[2] Survival function

تعریف ۹.۱.۲. اگر $\alpha \in [0,1]$ آنگاه $F_X^{-1}(\alpha)$ را کوانتیل[1] کوانتیل یا چندک مرتبه α–ام می‌نامیم. همچنین $F_X^{-1}(\alpha)$ را آستانه عبور متغیر تصادفی X با حداکثر احتمال $1-\alpha$ در نظر می‌گیریم.

گزاره ۱.۱.۲. هرگاه X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع F_X باشد، آنگاه برای هر عدد ثابت و مثبت c داریم

۱. برای هر $x \in \mathbb{R}$، $F_{cX}(x) = F_X(\frac{x}{c})$.

۲. برای هر $\alpha \in [0,1]$، $F_{cX}^{-1}(\alpha) = cF_X^{-1}(\alpha)$.

برهان. ۱.

$$\begin{aligned}
F_{cX}(x) =&\mathbb{P}\left((cX)^{-1}(-\infty, x]\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : cX(\omega) \le x\}\right)\\
=&\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le \frac{x}{c}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(-\infty, \frac{x}{c}\right]\right)\\
=&F_X(\frac{x}{c})
\end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned}
F_{cX}^{-1}(\alpha) =&\inf\{x \in \mathbb{R} | F_{cX}(x) \ge \alpha\} = \inf\left\{x \in \mathbb{R} | F_X(\frac{x}{c}) \ge \alpha\right\}\\
=&\inf\left\{c.\frac{x}{c} \in \mathbb{R} | F_X(\frac{x}{c}) \ge \alpha\right\} = c\inf\left\{\frac{x}{c}\ | F_X(\frac{x}{c}) \ge \alpha\right\}\\
=&c\inf\{z\ | F_X(z) \ge \alpha\} = cF_X^{-1}(\alpha).
\end{aligned}$$

□

تعریف ۱۰.۱.۲. گشتاور[2]، معیاری کمی برای توصیف شکل یک توزیع احتمال است. گشتاور اول همان میانگین است. برای گشتاورهای مراتب بالاتر معمولاً گشتاور را حول میانگین حساب می‌کنند و آن را گشتاور مرکزی می‌نامند. p – اُمین گشتاور مرکزی متغیر تصادفی X به‌صورت

$$\mu_p = \mathbb{E}[(X-\mu)^p]$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۲. دومین گشتاور مرکزی، واریانس نامیده می‌شود که برای سنجش پراکندگی داده‌ها حول مقدار میانگین استفاده می‌شود. به عبارت دیگر

$$\mu = \mathbb{E}(X)$$

[1] Quintiles
[2] Moments

امید ریاضی (میانگین) متغیر تصادفی X باشد، و واریانس X به‌صورت

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^{2}]$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۲. یکی از شاخص‌های پراکندگی انحراف معیار است که نشان می‌دهد داده‌ها چه مقدار از مقدار متوسط فاصله دارند.اگر انحراف معیار مجموعه‌ای از داده‌ها نزدیک به صفر باشد، نشانه آن است که داده‌ها نزدیک به میانگین هستند و پراکندگی اندکی دارند؛ در حالی که انحراف معیار بزرگ بیانگر پراکندگی قابل توجه داده‌ها می‌باشد. انحراف معیار برابر با ریشه دوم واریانس است.

تعریف ۱۳.۱.۲. اندازه تغییرات هماهنگ دو متغیر تصادفی را کوواریانس می‌گویند. کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y به‌صورت

$$COV(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

است. اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند آنگاه

$$COV(X,Y) = 0.$$

تعریف ۱۴.۱.۲. ضریب همبستگی ابزاری آماری برای تعیین نوع و درجهٔ رابطهٔ یک متغیر کمی با متغیر کمی دیگر است. ضریب همبستگی، یکی از معیارهای مورد استفاده در تعیین همبستگی دو متغیر است. ضریب همبستگی شدت رابطه و همچنین نوع رابطه (مستقیم یا معکوس) را نشان می‌دهد. این ضریب بین ۱ تا ۱− است و در صورت عدم وجود رابطه بین دو متغیر، برابر صفر است. همبستگی بین دو متغیر تصادفیXو Y به صورت

$$Corr(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \qquad (۲.۲)$$

تعریف می‌شود. که در آن σ_X و σ_Y به ترتیب انحراف معیارهای متغیرهای تصادفی X و Y می‌باشند.

۲.۲ توزیع شرطی و غیرشرطی

استقلال زمانی بازدهٔ دارایی‌ها همیشه ذهن فعالان ریسک را به خود مشغول ساخته است. اگر شکل‌گیری بازده‌ها در طی زمان از یکدیگر مستقل باشد، یا به عبارتی اگر بازدهٔ امروز بدون وابستگی به بازدهٔ روزهای قبل حاصل شود، می‌توانیم توزیعی غیرشرطی را به آن نسبت دهیم. در این صورت این توزیع برای تمامی بازده‌ها، مستقل از زمان شکل گیری آن‌ها صادق است. بنابراین، تا زمانی که حوادث اساسی مثل بروز بحران در بازارهای مالی، فرآیند زیربنایی

شکل‌گیری بازده‌ها را تحت تأثیر قرار ندهد، می‌توانیم پارامترهای تخمینی توزیع غیرشرطی را به آن نسبت دهیم و بر این اساس، به محاسبهٔ ریسک اقدام کنیم. یعنی اندازهٔ بازده و تلاطم‌های بازدهٔ امروز و روزهای قبل بازدهٔ دارای توزیع نرمال هستند. در حالی که تحقیقات روی بازدهٔ مالی، وجود همبستگی تلاطم‌ها را به اثبات رسانده است. بنابراین، استفاده از توزیع‌های غیرشرطی برای سری بازدهٔ مالی منطقی به نظر نمی‌رسد. بر این اساس، برای داده‌هایی که دارای وابستگی زمانی است، می‌توانیم از یک توزیع شرطی استفاده کنیم و بدین ترتیب برای هر دوره، مشروط بر اطلاعات موجود تا دورهٔ قبل توزیع را در نظر بگیریم. این توزیع‌های شرطی در واقع منعکس کنندهٔ بار اطلاعاتی موجود در اخبار جدید است. اخبار جدید باعث ایجاد تلاطم‌های جدید می‌شود و این تلاطم‌ها به شکل‌گیری توزیع‌های جدیدی می‌انجامد. بدیهی است که در این‌صورت با گذشت هر دوره، توزیع احتمال متغیر تصادفی، شکل جدیدی به خود می‌گیرد و تناسب توزیع هر دوره برای دوره‌های قبلی و بعدی زیر سؤال می‌رود [۲].

۳.۲ توزیع پارتو

متغیر تصادفی و توزیع پارتو کاربردهای زیادی در علوم مختلف از جمله علوم اقتصادی، بیمه‌ای، امور مالی و علوم طبیعی پیدا کرده‌اند. به همین علت دارای اهمیت زیادی هستند و توجه زیادی به آن‌ها شده است تا بتوان به رفتار پدیده‌هایی که از این توزیع پیروی می‌کنند پی برد. این توزیع به افتخار فعالیت‌های دانشمند و مهندس ایتالیایی ویلفردو پارتو [1] توزیع پارتو نامیده شده است. توزیع پارتو به علت هماهنگی با اصل ۸۰ـ۲۰ یا قانون پارتو [2]شهرت یافته است. اصل ۸۰ − ۲۰ یا قانون پارتو یکی از جالب‌ترین اصولی است که در مورد پدیده‌های طبیعی وجود دارد. به طور معمول گفته می‌شود که ٪۸۰ ثروت جهان در دست ٪۲۰ مردم است. در واقع این حقیقت برای پدیده‌هایی صحیح است که پارامتر توزیع پارتو α برایشان برابر با تقریبا ۱/۱۶۱ باشد. به این ترتیب براساس قواعد زیر می‌توان به اصل یا قانون ۸۰ − ۲۰ پی برد. درآمد افراد، دارای توزیع پارتو با پارامتر $\alpha > ۱$ است. برای عدد p که $۰ \leq p \leq ۰/۵$ باشد آنگاه $p \times ۱۰۰$ درصد از افراد دریافتی‌ای برابر با $(۱-p) \times ۱۰۰$ درصد از مجموع درآمدها را دارند. به همین ترتیب، برای مقدار حقیقی $n > ۰$، خواهیم داشت $p^n \times ۱۰۰$ درصد از افراد درآمدی برابر با $(۱-p)^۲ \times ۱۰۰$ از درآمد کل را دارند. این درصدها و قوانین فقط برای متغیر درآمد نخواهد بود بلکه برای هر متغیری تصادفی که دارای توزیع پارتو با پارامتر $\alpha > ۱$ باشد نیز صادق است.

تعریف ۱.۳.۲. تابع احتمال یکی از توزیع‌های مهم آماری توزیع پارتو است که تابع چگالی

[1] Vilfredo Pareto
[2] Pareto principle

احتمال آن به‌صورت زیر می‌باشد

$$f_X\left(x,\alpha,\beta\right)=\begin{cases}\frac{\alpha}{\beta\left(1+\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha+1}} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

که در آن $\alpha,\beta>0$ می‌باشند. β پارامتر مقیاس و α پارامتر شکل است. این توزیع را با

$$x\sim Pa\left(\alpha,\beta\right)$$

نمایش می‌دهند.

امید ریاضی و واریانس توزیع پارتو به صورت زیر است

$$E(X)=\begin{cases}\frac{\beta}{\alpha-1} & \alpha>1,\\ \infty & \alpha\leq 1,\end{cases}$$

و

$$Var(X)=\begin{cases}\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} & \alpha>2,\\ \infty & \alpha\leq 2.\end{cases}$$

۴.۲ ارزش فرین

مدیریت ریسک، مشکلات بسیاری در مواجهه با پیشامدهای (رویدادهای) فرین [1] دارد. این نوع پیشامدها، غیر متحمل‌اند ولی در صورت وقوع ممکن است بسیار پرهزینه باشند. به عبارتی دیگر احتمال رخداد این حوادث پایین است ولی اثرات بزرگی به همراه دارد. افت‌های شدید بازار، قصور مؤسسات بزرگ در ایفای تعهدات، بحران بازار مالی [2] و بلایای طبیعی مثال‌هایی از این حوادث است. با توجه به اهمیت این حوادث، ارائهٔ برآوردهایی از سنجه‌های ریسک‌های فرین، یکی از کلیدی‌ترین مسائل مربوط به مدیریت ریسک است.

چگونگی برآورد چنین ریسک‌هایی ما را با مسأله دشواری روبرو می‌سازد. طبق تعریف پیشامدهای فرین نادر می‌باشند بنابراین مشاهدات نسبتاً کمی در مورد آن‌ها در دست است و به راحتی نمی‌توان برآوردهایی قابل اتکا بر اساس این مشاهدات اندک تولید کرد. بدین ترتیب برآوردهای مربوط به ریسک‌های فرین از عدم اطمینان بالایی برخوردار خواهند بود. این عدم اطمینان خصوصاً زمانی محرز می‌گردد که در جستجوی ریسک‌های فرین نه فقط در محدودهٔ داده‌های مشاهده شده بلکه بسیار فراتر از آن باشد [۲].

[1] Extreme events
[2] Financial market crisis

۵.۲ نظریه ارزش فرین

نظریهٔ ارزش فرین روشی برای برآورد بهترین نتایج فرین پرتفوی است. نظریهٔ ارزش فرین شاخه‌ای از آمار است که با انحرافات فرین [۱] در توزیع احتمال ارتباط دارد. این نظریهٔ در تعدادی از رشته‌ها برای برآورد حوادث بسیار نادر و مشاهده نشده، به کار می‌رود. نظریهٔ ارزش فرین مربوط به تعیین حدهای مجانبی است که توزیع فرین‌ها را توصیف می‌کند. دو رویکرد توزیع تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین [۲] (GEV) و رویکرد فراتر از آستانه [۳] (POT) نسخه‌های مختلفی از یک نظریهٔ زیر بنایی به نام نظریهٔ ارزش فرین هستند. رویکرد نخست، پوشش دهندهٔ توزیع ارزش‌های فرین است و رویکرد دوم، با توزیع تخطی‌های فراتر از یک آستانه‌ی بزرگ سروکار دارد. نظریهٔ ارزش فرین چندمتغیره نیز وجود دارد که از آن می‌توان برای مدل‌سازی دنباله‌های توزیع‌های چندمتغیره استفاده کرد [۱۱].

۶.۲ اندازهٔ ریسک

اندازه‌های ریسک به طور گسترده در بیمه و مالی به عنوان یک ابزار در مدیریت ریسک به کار برده می‌شوند. یکی از عملکردهای مهم اندازه ریسک برای تعیین سرمایه‌های قانونی[۴] مورد نیاز برای قیمت‌گذاری بیمه نامه‌ها[۵] و بیمه اتکایی [۶] است.

نشان می‌دهیم برای $p \in (0, \infty)$، $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ به عنوان مجموعه همه متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ با $p-$ اُمین گشتاور متناهی تعریف می‌شود. به‌طور خاص $L^0(L^\infty)$ نشان دهنده مجموعه همه‌ی متغیرهای تصادفی (کراندار) تعریف شده روی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ است. برای هر متغیر تصادفی زیان $X \in L^0$، ارزش در معرض ریسک X در سطح اطمینان $\alpha \in (0,1)$ به‌صورت

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha)$$

تعریف می‌شود. که در آن $F_X^{-1}(x)$ معکوس پیوسته چپ توزیع $F_X(x)$ و

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - S_X(x)$$

است. زمانی سرمایه‌های قانونی بانک یا یک شرکت بیمه توسط VaR تعیین می‌شوند که احتمال توانگری [۷] شرکت در کمترین سطح اطمینان α است. با این حال اندازه ریسک VaR

[1] Extreme deviations
[2] Generalizes extreme value
[3] Peaks over Threshold
[4] Regulatory capitals
[5] Price insurance
[6] Reinsurance products
[7] Solvency probability

نمی‌تواند زیرجمع‌پذیری را برآورد نماید که یکی از ویژگی‌های مورد نظر ناظران در اندازه‌گیری سرمایه‌های قانونی است. یک اندازه ریسک زیرجمع‌پذیر وابسته به VaR، ارزش در معرض ریسک دنباله ($TVaR$) است. برای هر متغیر تصادفی زیان $X \in L^۱$، $TVaR(X)$ در سطح اطمینان $\alpha \in (۰,۱)$ به‌صورت

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{۱}{۱-\alpha}\int_\alpha^۱ VaR_q(X)dq$$

تعریف می‌شود. اندازه ریسک TVaR زیرجمع‌پذیر است و برای هر $X \in L^۱$ در نامساوی

$$TVaR_\alpha(X) \geq VaR_\alpha(X)$$

صدق می‌کند. همچنین دو مقدار VaR و $TVaR$ حالات خاصی از اندازه ریسک اعوجاج هستند.

جدول ۱.۲: توابع اعوجاج VaR و AVaR

تابع اعوجاج	اندازه ریسک
$\psi_\alpha(u) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq u < ۱-\alpha \\ ۱ & ۱-\alpha \leq u \leq ۱ \end{cases}$	VaR
$\gamma_\alpha(u) = \begin{cases} \frac{u}{۱-\alpha} & ۰ \leq u < ۱-\alpha \\ ۱ & ۱-\alpha \leq u \leq ۱ \end{cases}$	TVaR
برای سطح اطمینان $\alpha \in (۰,۱)$.	

۷.۲ اندازهٔ ریسک اعوجاج

همان‌طور که بیان شد اگر $g : [۰,۱] \longrightarrow [۰,۱]$ یک تابع صعودی باشد و همچنین $g(۰) = g(۰+) = ۰$ ، $g(۱) = g(۱-) = ۱$ آنگاه g را تابع اعوجاج می‌نامیم. " صعودی " به معنای " نا نزولی [1] " در حالی‌که "نزولی " به معنای " نا صعودی[2] " است. علاوه بر این، برای تابع اعوجاج g، مجموعه‌ی ریسک χ_g به‌صورت

$$\chi_g = \{X \in L^۰ \mid \text{کراندار است } \rho_g(X)\}. \tag{۱.۲}$$

تعریف می‌شود. دقت کنید که $g(۰+) = ۰$ و $g(۱-) = ۱$ برای انتگرال‌های رابطه (۱.۲) به جهت متناهی بودن ضروری است زمانی‌که X متغیر تصادفی بی‌کران باشد. ایده‌ی نهان اندازه ریسک اعوجاج در تحریف تابع بقاء یک ریسک با به کار بردن یک تابع اعوجاج به گونه‌ای

[1] Non-decreasing
[2] Non-increasing

انتظار می‌رود که بتواند انعطاف پذیری بیشتر و اندازه‌های معقول‌تری برای ریسک فراهم کند.
اندازه ریسک اعوجاج ρ_g انتگرال شوکت[۱] نسبت به یک تابع مجموعه‌ای است. به این معنا که

$$\rho_g(X) = \int_\Omega X \, \mathrm{d}\mu_g \stackrel{\text{def}}{=} \int X \, \mathrm{d}\mu_g \quad \forall \quad X \in \chi_g \tag{۲.۲}$$

جایی‌که μ_g یک تابع مجموعه‌ای یکنوا است و برای هر $A \in \mathcal{F}$ به‌صورت

$$\mu_g(A) = g(\mathbb{P}(A)). \tag{۳.۲}$$

تعریف می‌شود.
درگزاره بعد به بیان اثبات این مطلب می‌پردازیم.

گزاره ۱.۷.۲. هرگاه g یک تابع اعوجاج و به ازای هر $A \in 2^\Omega$، $\mu_g(A) = g(\mathbb{P}(A))$ آنگاه به ازای هر $X \in \chi_g$ ، $\rho_g(X) = \int_\Omega X \, \mathrm{d}\mu_g$.

برهان. می‌دانیم که

$$\mathbf{S}_{\mu_g, X}(x) = \mu_g\left(\{X > x\}\right) = g\left(\mathbb{P}\left(\{X > x\}\right)\right) = g\left(\mathbf{S}_X(x)\right)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int_\Omega X \, \mathrm{d}\mu_g &= \int_{-\infty}^{0} [\mathbf{S}_{\mu_g,X}(x) - \mu_g(\Omega)] \, \mathrm{d}x + \int_0^\infty \mathbf{S}_{\mu_g,X}(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} [g(\mathbf{S}_X(x)) - 1] \, \mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} g(\mathbf{S}_X(x)) \, \mathrm{d}x \\
&= \rho_g(X).
\end{aligned}$$

□

بررسی مختصری از انتگرال شوکت و خواص آن‌ها در بخش ۸.۲ ارائه شده است. به‌طور کلی اندازه ریسک اعوجاج یک ریسک مانند X " امید ریاضی آن[۲] " ریسک است که روی فضای احتمال تحت یک اندازه منحرف شده(معوج)[۳] حاصل شده است. با توجه به انتگرال شوکت، اندازه ریسک اعوجاج $\rho : \chi_g \longrightarrow \mathbb{R}$ روی χ_g زیرجمع‌پذیر گفته می‌شود اگر رابطه

$$\int_\Omega (X + Y) \, \mathrm{d}\mu_g \leq \int_\Omega X \, \mathrm{d}\mu_g + \int_\Omega Y \, \mathrm{d}\mu_g \tag{۴.۲}$$

برای هر دو متغیر تصادفی $X, Y \in \chi_g$ برقرار باشد. اخیراً بلزسامپرا[۴] و همکارانش در سال ۲۰۱۴ بیان کرده‌اند که زیرجمع‌پذیری یک نیاز ضروری برای برآورد حق بیمه و سرمایه‌های قانونی

[1] Choquet integrals
[2] Its expectation
[3] Distorted
[4] Belles-Sampera

می‌باشد. در واقع بیشتر اندازه‌های ریسک قابل اجراء و اصول حق بیمه [1] در زیرجمع‌پذیری صدق نمی‌کنند. به‌جای زیرجمع‌پذیری، بلزسامپرا و همکارانش در سال ۲۰۱۴ یک مفهوم ضعیف از زیرجمع‌پذیری دنباله معرفی و معادل آن را توصیف و بررسی کردند. توسط زیرجمع‌پذیری دنباله یک زیرکلاس [2] از اندازه‌های ریسک اعوجاج یعنی اندازه ریسک GlueVaR [3] را فراخواندند. آن‌ها یک دامنه‌ی دنباله مشترک [4] در سطح اطمینان $\alpha \in (0,1)$ برای هر دو متغیر تصادفی X و Y به‌صورت

$$\mathcal{D}_{\alpha,X,Y} = \{X > F_X^{-1}(\alpha), Y > F_Y^{-1}(\alpha), X+Y > F_{X+Y}^{-1}(\alpha)\}, \qquad (۵.۲)$$

تعریف کردند. جایی‌که F_X و F_X^{-1} به ترتیب تابع توزیع و معکوس پیوسته چپ تابع توزیع X هستند.
در این پایان نامه، اندازه ریسک اعوجاج ρ_g، زیرجمع‌پذیر دنباله برای هر دو متغیر تصادفی $X,Y \in \chi_g$ در سطح اطمینان $\alpha \in (0,1)$ است، اگر رابطه

$$\int_{\mathcal{D}_{\alpha,X,Y}} (X+Y)\,\mathrm{d}\mu_g \leq \int_{\mathcal{D}_{\alpha,X,Y}} X\,\mathrm{d}\mu_g + \int_{\mathcal{D}_{\alpha,X,Y}} Y\,\mathrm{d}\mu_g, \qquad (۶.۲)$$

برقرار باشد. لازم به ذکر است که دامنه دنباله‌ی $\mathcal{D}_{\alpha,X,Y}$ عموماً یک مجموعه غیر تهی نیست. همچنین بسیاری از دیگر دامنه‌های دنباله به شکل‌های مختلف وجود دارند که در واقعیت و کاربرد مفید می‌باشند. علاوه بر این در ادامه توصیف معادلی از اندازه ریسک GlueVaR که توسط بلزسامپرا و همکارانش در سال ۲۰۱۴ ارائه شده است، اشاره خواهد شد. کاربردهای جالبی از اندازه‌های ریسک GlueVaR در بیمه، امور مالی و موارد دیگر توسط بلزسامپرا و همکارانش در سال‌های ۲۰۱۴ و ۲۰۱۶ مورد بررسی قرار گرفته است. با الهام گرفتن از این، در این پایان نامه، مفهوم زیرجمع‌پذیری دنباله را برای اندازه‌های ریسک اعوجاج هر مجموعه از $\mathcal{F}$ تعمیم و در مورد کاربردهای آن در مدیریت ریسک سبدسهام بحث می‌کنیم. برای انجام این کار، ابتدا تعاریف عمومی دامنه‌های دنباله و دامنه‌های دنباله مشترک را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۷.۲. $\Omega_X \subset \Omega$ را یک دامنه دنباله از متغیر تصادفی X می‌نامیم اگر $\Omega_X \in \mathcal{F}$. علاوه بر این $\Omega_{\mathbb{X}} = \Omega_{X_1,\ldots,X_n} \subset \Omega$ را یک دامنه دنباله مشترک از یک بردار تصادفی $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ می‌نامیم، اگر $\Omega_{X_1,\ldots,X_n} \in \mathcal{F}$ باشد.

اشاره می‌کنیم که دامنه دنباله Ω_X یا دامنه دنباله مشترک $\Omega_{\mathbf{X}}$ را می‌توان هر مجموعه اندازه‌پذیر روی σـ‌میدان $\mathcal{F}$ انتخاب کرد. این‌ها را به عنوان دامنه‌های دنباله بسیاری از مثال‌های کاربردی در نظر می‌گیریم. زیرا Ω_X یا $\Omega_{\mathbf{X}}$ در مدیریت ریسک، مبنی بر دنباله‌های

[1] Premium principles
[2] Subclass
[3] GlueVaR risk measures
[4] Common tail region

متغیرهای تصادفی یا بردارها مانند موارد زیر، مورد بحث قرار گرفته‌اند. برای مثال، دامنه دنباله $\Omega_{\alpha,X}$ مکرراً در مدیریت ریسک توانگری استفاده می‌شود که به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\Omega_{\alpha,X} = \{\omega \in \Omega : X \geq VaR_\alpha(X)\} = \{X \geq VaR_\alpha(X)\},\ \alpha \in (0,1). \tag{۷.۲}$$

علاوه بر این، دامنه دنباله

$$\Omega^e_X = \{\omega \in \Omega \colon X \geq \mathbb{E}[X]\} = \{X \geq \mathbb{E}[X]\} \tag{۸.۲}$$

یک دامنه دنباله مهم در محاسبات حق بیمه [1] است. در واقع $VaR_\alpha(X)$ و $\mathbb{E}[X]$ معیارهای مهمی در تعیین سرمایه‌های توانگری ضروری [2] و محاسبات حق بیمه‌اند. به همین ترتیب دامنه‌های دنباله‌های مشترک

$$\Omega_{\alpha,S_n} = \{S_n \geq VaR_\alpha(S_n)\}, \tag{۹.۲}$$

$$\Omega^e_{S_n} = \{S_n \geq \mathbb{E}[S_n]\}, \tag{۱۰.۲}$$

خیلی اوقات در مدیریت ریسک سبدسهام، که در آن $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ریسک تجمعی ریسک‌های موجود $X_1, \ldots, X_n$ است، در نظر گرفته می‌شوند. دامنه‌های دنباله مشترک جالب دیگر عبارتند از

$$\Omega_{\alpha,X_1,\ldots,X_n} = \{X_1 \geq VaR_\alpha(X_1)\} \cup \cdots \cup \{X_n \geq VaR_\alpha(X_n)\}, \tag{۱۱.۲}$$

$$\Omega^e_{X_1,\ldots,X_n} = \{X_1 \geq \mathbb{E}[X_1]\} \cup \cdots \cup \{X_n \geq \mathbb{E}[X_n]\}, \tag{۱۲.۲}$$

$$\Omega^*_{\alpha,X_1,\ldots,X_n} = \{X_1 \geq VaR_\alpha(X_1)\} \cap \cdots \cap \{X_n \geq VaR_\alpha(X_n)\}, \tag{۱۳.۲}$$

$$\Omega^{e*}_{X_1,\ldots,X_n} = \{X_1 \geq \mathbb{E}[X_1]\} \cap \cdots \cap \{X_n \geq \mathbb{E}[X_n]\}. \tag{۱۴.۲}$$

برای مثال لاندسمن[3] و همکارانش در سال ۲۰۱۶ دامنه دنباله مشترک $\Omega^*_{\alpha,X_1,\ldots X_n}$ را برای تعریف اندازه ریسک امید شرطی دنباله چند متغیره(MTCE)[4] استفاده کرده‌اند. همه دامنه‌های دنباله مشترک بیان شده، پیشامدهای دنباله فرین[5] که توسط تصمیم‌گیران سبدسهام[6] در مدیریت ریسک مورد بررسی قرار گرفته‌اند را توصیف می‌کنند.

تعریف ۲.۷.۲. فرض کنید برای تابع اعوجاج g، $\rho_g\colon \chi_g \longrightarrow \mathbb{R}$ اندازه ریسک اعوجاج تعریف شده در رابطه (۱.۲) و μ_g تابع مجموعه‌ای تعریف شده توسط رابطه (۴.۲) باشد. در این‌صورت

[1] Premium calculations
[2] Required solvency capitals
[3] Landsman
[4] Multivariate tail conditional expectation
[5] Extreme tail events
[6] Decision makers in portfolio

اندازه ریسک اعوجاج ρ_g برای هر دو متغیر تصادفی $X,Y \in \chi_g$ روی دامنه دنباله مشترک $\Omega_{X,Y}$ زیرجمع‌پذیر دنباله گفته می‌شود، اگر رابطه

$$\int_{\Omega_{X,Y}} (X+Y)\ \mathrm{d}\mu_g \leq \int_{\Omega_{X,Y}} X\ \mathrm{d}\mu_g + \int_{\Omega_{X,Y}} Y\ \mathrm{d}\mu_g, \tag{۱۵.۲}$$

برقرار باشد. انتگرال‌های روی دامنه دنباله مشترک $\Omega_{X,Y}$ انتگرال‌های شوکت هستند.

به‌طور کلی، فرض کنید $\Omega_{\mathbf{X}}$ یک دامنه دنباله مشترک برای بردار تصادفی $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ باشد که برای هر $1 \leq i \leq n$، $X_i \in \chi_g$. در این‌صورت اندازه ریسک اعوجاج $\rho_g \colon \chi_g \longrightarrow \mathbb{R}$ روی دامنه دنباله مشترک $\Omega_{\mathbf{X}}$ زیرجمع‌پذیر دنباله گفته می‌شود، اگر رابطه

$$\int_{\Omega_X} \sum_{i=1}^{n} X_i d\mu_g \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_X} X_i d\mu_g. \tag{۱۶.۲}$$

برقرار باشد. مشخصات معادل زیرجمع‌پذیری دنباله اندازه ریسک اعوجاج ρ_g را برای هر شکل از دامنه دنباله بررسی خواهیم کرد. نتایج بدست آمده اصلاح ویژگی‌های زیرجمع‌پذیری دنباله GlueVaR از بلزسامپرا و همکارانش در سال ۲۰۱۴ است.

قضیه ۱.۷.۲. فرض کنید $\alpha \in [0,1]$ یک سطح اطمینان و X و Y دو ریسک روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ باشند. اگر

$$\Omega_{\alpha,X} \cap \Omega_{\alpha,Y} \cap \Omega_{\alpha,X+Y} \neq \emptyset$$

و g یک تابع اعوجاج مقعر روی $[0, 1-\alpha)$ باشد، آنگاه اندازه ریسک اعوجاج ρ_g زیرجمع‌پذیر دنباله است، به این معنی که

$$\begin{aligned}
\rho_g(X) &= \int_{0\wedge m_\alpha}^{0} [g(\mathbf{S}_{X+Y}(z)) - 1]dz + \int_{0\vee m_\alpha}^{+\infty} g(\mathbf{S}_{X+Y}(z))dz \\
&\leq \int_{0\wedge m_\alpha}^{0} [g(\mathbf{S}_{X}(z)) - 1]dz + \int_{0\vee m_\alpha}^{+\infty} g(\mathbf{S}_{X}(z))dz \\
&+ \int_{0\wedge m_\alpha}^{0} [g(\mathbf{S}_{Y}(z)) - 1]dz + \int_{0\vee m_\alpha}^{+\infty} g(\mathbf{S}_{Y}(z))dz.
\end{aligned}$$

که در آن $m_\alpha = \sup\{s_\alpha(X), s_\alpha(Y), s_\alpha(X+Y)\}$ و $s_\alpha(X) = \inf\{x|\mathbf{S}_X(x) \leq 1-\alpha\}$.

برهان. رجوع شود به [۳۶]. □

در ادامه به شرح برخی از تعاریف مورد نیاز درباره انتگرال‌های شوکت توابع محدب و مقعر که در بخش ۸.۲ آورده شده است، پرداخته می‌شود. همچنین شرایط لازم و کافی برای اندازه‌های ریسک اعوجاج در زیرجمع‌پذیری دنباله را بررسی و به عنوان کاربرد قضیه (۱.۴.۳) از بلزسامپرا و همکارانشان (۲۰۱۴) و قضیه (۱.۷.۲) از یوآن [1] و زو [2] که در سال ۲۰۱۶ درباره

[1] Yin
[2] Zhu

شرایط لازم و کافی برای اندازه‌های ریسک اعوجاج در زیرجمع‌پذیری دنباله می‌باشند اصلاح خواهد شد. همچنین اندازه ریسک GlueVaR که توسط بلزسامپرا و همکارانشان در سال ۲۰۱۴ معرفی شده است را تعمیم و اندازه ریسک GlueVaR تعمیم یافته که برای برآورد اندازه ریسک اعوجاج وابسته مورد استفاده قرار می‌گیرد بررسی خواهد شد. کاربرد زیرجمع‌پذیری دنباله در اندازه ریسک اعوجاج دنباله چند متغیره را پیشنهاد و اندازه ریسک امید شرطی دنباله چند متغیره (MTCE) که توسط لاندسمن و همکارانش در سال ۲۰۱۶ معرفی شده است، تعمیم داده می‌شود. ویژگی‌های اندازه ریسک اعوجاج دنباله چند متغیره مورد بحث واقع می‌شود و کاربردهای اندازه ریسک اعوجاج دنباله چند متغیره را با بحث کردن روی تخصیص سرمایه [۱] برای یک نمونه از ریسک‌ها در توزیع پارتو چند متغیره بیان می‌شود. اظهارات نهایی در فصل آخر آمده است.

۸.۲ انتگرال شوکت و تابع محدب

در این بخش برخی از مفاهیم و نتایج درباره انتگرال شوکت و تابع‌های محدب، که در پایان نامه استفاده خواهند شد را یاد آوری می‌کنیم.
فرض کنید Ω یک مجموعه پایه [۲] و ۲^{Ω} مجموع تمامی زیر مجموعه‌های Ω باشد. اگر $\mathbf{S} \subset ۲^{\Omega}$ یک σ ـ‌جبر باشد، آنگاه یک دستگاه مجموعه‌ای [۳] از Ω نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۸.۲. تابع مجموعه‌ای μ روی دستگاه مجموعه‌ای $\mathbf{S}$ یکنوا گفته می‌شود، اگر برای هر $A, B \in \mathbf{S}$ به‌طوری‌که $A \subset B$ داشته باشیم $\mu(A) \leq \mu(B)$ و به آن زیرمدولی [۴] می‌گوییم، اگر برای هر $A, B \in \mathbf{S}$

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

تعریف ۲.۸.۲. فرض کنید $\mu\colon \mathbf{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [۰, \infty]$ یک تابع مجموعه‌ای یکنوا با شرط $\mu(\Omega) < \infty$ باشد و $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع اندازه‌پذیر روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathbf{S})$ باشد. انتگرال شوکت تابع X نسبت به μ که با نمادهای $\int_\Omega X \, \mathrm{d}\mu$ یا $\int X \, \mathrm{d}\mu$ مشخص می‌شوند به‌صورت

$$\int_\Omega X \, \mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{۰} [\mathbf{S}_{\mu,X}(x) - \mu(\Omega)] \, \mathrm{d}x + \int_{۰}^{\infty} \mathbf{S}_{\mu,X}(x) \, \mathrm{d}x, \qquad (۱.۲)$$

تعریف می‌شود، که در آن $\mathbf{S}_{\mu,X}(x) = \mu(\{X > x\})$ تابع بقاء X را نسبت به μ نشان می‌دهد. علاوه بر این، برای $A \in \mathbf{S}$، انتگرال شوکت تابع روی مجموعه A نسبت به μ که با نماد $\int_A X \, \mathrm{d}\mu$

[۱] تعیین حداقل سرمایه لازم برای پوشش ریسک را تخصیص سرمایه می‌گویند.

[2] Basic set

[3] Set system

[4] Submodular

مشخص می‌شود به‌صورت

$$\int_A X \,\mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{0} [\mu(A \cap \{X > x\}) - \mu(A)] \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mu(A \cap \{X > x\}) \,\mathrm{d}x, \qquad (۲.۲)$$

تعریف می‌شود. توجه داشته باشید، اگر برای $B \in \mathbf{S}$ تابع مجموعه‌ای $\mu_A(B) = \mu(A \cap B)$ را در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان (۲.۲) را به‌صورت

$$\int_A X \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega X \,\mathrm{d}\mu_A. \qquad (۳.۲)$$

باز نویسی کرد.

گزاره ۱.۸.۲. فرض کنید $(\Omega, \mathbf{S})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $\mu : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ تابع مجموعه‌ای یکنوا در نظر گرفته شود. هرگاه $A \in \mathbf{S}$ و $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی باشد، در این‌صورت

$$\int_A X d\mu = \int_{-\infty}^{0} [\mu(A \cap \{X > x\}) - \mu(A)] dx + \int_{0}^{\infty} \mu(A \cap \{X > x\}) dx.$$

برهان. فرض کنید $x \in \mathbb{R}$ در این‌صورت می‌توان نتیجه گرفت که

$$\{X\chi_A > x\} = \begin{cases} A \cap \{X > x\} & x \geq 0 \\ (A \cap \{X > x\}) \cup A^c & x < 0. \end{cases}$$

حال،

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mu, X\chi_A}(x) &= \mu\Big(\{X\chi_A > x\}\Big) \\ &= \begin{cases} \mu(A \cap \{X > x\}) & x \geq 0 \\ \mu\Big((A \cap \{X > x\}) \cup A^c\Big) & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mu(A \cap \{X > x\}) & x \geq \\ \mu\Big(A \cap \{X > x\}\Big) + \mu(A^c) & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

با توجه به این‌که $\int_A X \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega X\chi_A \,\mathrm{d}\mu$ بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \int_A X \,\mathrm{d}\mu &= \int_{-\infty}^{0} \Big[\mathbf{S}_{\mu, X\chi_A}(x) - \mu(\Omega)\Big] \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathbf{S}_{\mu, X\chi_A}(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{0} \Big[\mu\big(A \cap \{X > x\}\big) + \mu(A^c) - \mu(\Omega)\Big] \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mu\big(A \cap \{X > x\}\big) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{0} \Big[\mu\big(A \cap \{X > x\}\big) - \mu(A)\Big] \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mu\big(A \cap \{X > x\}\big) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

□

ما ویژگی‌های انتگرال شوکت را از دنبرگ[1] در سال ۱۹۹۴ یادآوری و از آن‌ها پیروی می‌کنیم.
در تمام طول پایان نامه $\mathbb{I}_A$ تابع نشانگر[2] پیشامد A یا متغیر تصادفی برنولی [3] است. اگر A اتفاق افتد برابر ۱ و در غیر این‌صورت برابر صفر است.

تعریف ۲.۸.۳. فرض کنید $(\Omega, \mathbf{S})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $\mu : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ یک تابع مجموعه‌ای و همچنین فرض کنید $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد. گوییم تابع X، $\mu -$ اساساً از $-\infty$ بزرگ‌تر است و می‌نویسیم $\{X > -\infty \ \mu - essentially\}$ اگر و فقط اگر $\lim\limits_{x\to\infty} \mu(\{X > x\}) = 0$.

لم ۲.۸.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathbf{S})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. اگر $\mu : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ یک تابع مجموعه‌ای یکنوا باشد، به‌طوری‌که $\mu(\Omega) = 0$ و $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ توابع اندازه‌پذیر باشند. آنگاه

۱. برای هر $A, B \in \mathbf{S}$، $\int \mathbb{I}_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A)$ و $\int (\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B) \, \mathrm{d}\mu = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$.

۲. برای هر $b \in \mathbb{R}$ و هر $a \geq 0$، $\int (aX + b) \, \mathrm{d}\mu = a \int X \, \mathrm{d}\mu + b\mu(\Omega)$.

۳. اگر $X \leq Y$ آنگاه $\int X \, \mathrm{d}\mu \leq \int Y \, \mathrm{d}\mu$.

۴. هرگاه μ زیرمدولی و Y, X دو متغیر تصادفی باشند که $\{X > -\infty \ \mu - essentially\}$ و $\{Y > -\infty \ \mu - essentially\}$ آنگاه $\int (X + Y) \, \mathrm{d}\mu \leq \int X \, \mathrm{d}\mu + \int Y \, \mathrm{d}\mu$.

برهان. قسمت‌های ۱، ۲ و ۳ را اثبات می‌کنیم.
برای اثبات قسمت ۱، فرض کنید $x \in \mathbb{R}$ در این‌صورت

$$\{\mathbb{I}_A > x\} = \{\omega \in \Omega | \mathbb{I}_A(\omega) > x\} = \begin{cases} \emptyset & x \geq 1 \\ A & 0 \leq x < 1 \\ \Omega & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین

$$\mathbf{S}_{\mu,\mathbb{I}_A}(x) = \mu\big(\{\mathbb{I}_A > x\}\big) = \begin{cases} 0 & x \geq 1 \\ \mu(A) & 0 \leq x < 1 \\ \mu(\Omega) & x < 0. \end{cases}$$

این نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned} \int \mathbb{I}_A \, \mathrm{d}\mu &= \int_{-\infty}^{0} \Big[\mathbf{S}_{\mu,\mathbb{I}_A}(x) - \mu(\Omega)\Big] \, \mathrm{d}x + \int_0^\infty \mathbf{S}_{\mu,\mathbb{I}_A}(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{0} \Big[\mu(\Omega) - \mu(\Omega)\Big] + \int_0^1 \mu(A) \, \mathrm{d}x + \int_1^\infty 0 \, \mathrm{d}x \\ &= \mu(A). \end{aligned}$$

[1] Denneberg
[2] Indicator function
[3] Bernoulli random variable

حال نشان می‌دهیم که برای هر $A, B \in \mathbf{S}$ داریم

$$\int (\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B) d\mu = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

اگر $x \in \mathbb{R}$ آنگاه

$$\{\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B > x\} = \{\omega \in \Omega | \mathbb{I}_A(\omega) + \mathbb{I}_B(\omega) > x\} = \begin{cases} \emptyset & x \geq ۲ \\ A \cap B & ۱ \leq x < ۲ \\ A \cup B & ۰ \leq x < ۱ \\ \Omega & x < ۰ \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int (\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B) d\mu &= \int_{-\infty}^{۰} [\mathbf{S}_{\mu,X}(x) - \mu(\Omega)] dx + \int_{۰}^{\infty} \mathbf{S}_{\mu,X}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{۰} \Big[\mu(\Omega) - \mu(\Omega)\Big] + \int_{۰}^{۱} \mu(A \cup B)\ \mathrm{d}x + \int_{۱}^{۲} \mu(A \cap B)\ \mathrm{d}x + \int_{۲}^{\infty} \mu(\emptyset)\ \mathrm{d}x \\ &= \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) + ۰. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int (\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B) d\mu = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

اثبات قسمت ۲، اگر $a = ۰$ آنگاه برای تابع ثابت $Y = b \in \mathbb{R}$ نشان می‌دهیم که $\int b\ \mathrm{d}\mu = b\mu(\Omega)$.

$$\{Y > y\} = \{\omega \in \Omega | Y(\omega) > y\} = \{\omega \in \Omega | b > y\} = \begin{cases} \emptyset & y \geq b \\ \Omega & y < b \end{cases}$$

لذا

$$\mathbf{S}_{\mu,Y}(y) = \mu\Big(\{Y > y\}\Big) = \begin{cases} \mu(\emptyset) & y \geq b \\ \mu(\Omega) & y < b \end{cases}$$

بنابراین

$$\int b\ \mathrm{d}\mu = \int Y\ \mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{۰} [\mathbf{S}_{\mu,Y}(y) - \mu(\Omega)]\ \mathrm{d}y + \int_{۰}^{\infty} \mathbf{S}_{\mu,Y}(y)\ \mathrm{d}y,$$

حالت اول: اگر $b \geq ۰$ آنگاه

$$\begin{aligned} \int b\ \mathrm{d}\mu &= \int_{-\infty}^{۰} [\mu(\Omega)] - \mu(\Omega)]\ \mathrm{d}y + \int_{۰}^{b} \mathbf{S}_{\mu,Y}(y)\ \mathrm{d}y + \int_{b}^{\infty} \mathbf{S}_{\mu,Y}(y)\ \mathrm{d}y \\ &= ۰ + \int_{۰}^{b} \mu(\Omega)\ \mathrm{d}y + \int_{b}^{\infty} ۰\ \mathrm{d}y = \mu(\Omega)b + ۰ = b\mu(\Omega) \end{aligned}$$

حالت دوم: اگر $b<0$ آنگاه

$$\begin{aligned}\int b\ \mathrm{d}\mu &= \int Y\ \mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{0}[\mathbf{S}_{\mu,Y}(y)-\mu(\Omega)]\ \mathrm{d}y + \int_{0}^{\infty}\mathbf{S}_{\mu,Y}(y)\ \mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{b}[\mu(\Omega)-\mu(\Omega)]\ \mathrm{d}y + \int_{b}^{0}\mathbf{S}_{\mu,Y}(y)\ \mathrm{d}y + \int_{0}^{\infty}\mathbf{S}_{\mu,Y}(y)\ \mathrm{d}y\\ &= 0 + \int_{b}^{0}\Big[0-\mu(\Omega)\Big]\ \mathrm{d}y + \int_{0}^{\infty}\mu(\emptyset)\ \mathrm{d}y = b\mu(\Omega)\end{aligned}$$

بنابراین در حالت کلی $\int b\ \mathrm{d}\mu = b\mu(\Omega)$.

حال اگر $a>0$ آنگاه برای $aX+b$ داریم

$$\{aX+b>x\}=\{aX>x-b\}=\{X>\frac{x-b}{a}\}.$$

بنابراین برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم

$$\mathbf{S}_{\mu,aX+b}(x)=\mu(\{aX+b>x\})=\mu(\{X>\frac{x-b}{a}\})=\mathbf{S}_{\mu,X}(\frac{x-b}{a}).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int (aX+b)\ \mathrm{d}\mu &= \int_{-\infty}^{0}[\mathbf{S}_{\mu,aX+b}(x)-\mu(\Omega)]\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty}\mathbf{S}_{\mu,aX+b}(x)\ \mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{0}[\mathbf{S}_{\mu,X}(\frac{x-b}{a})-\mu(\Omega)]\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty}\mathbf{S}_{\mu,X}(\frac{x-b}{a})\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

حال فرض کنید $\frac{x-b}{a}=t$ در این‌صورت $x=at+b$ و لذا $\mathrm{d}x=a\ \mathrm{d}t$ در نتیجه

$$\int (aX+b)\ \mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{-\frac{b}{a}}[\mathbf{S}_{\mu,X}(t)-\mu(\Omega)]a\ \mathrm{d}t + \int_{-\frac{b}{a}}^{\infty}\mathbf{S}_{\mu,X}(t)a\ \mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases} a\int_{-\infty}^{-\frac{b}{a}}[\mathbf{S}_{\mu,X}(t)-\mu(\Omega)]\ \mathrm{d}t + a\int_{-\frac{b}{a}}^{0}\mathbf{S}_{\mu,X}(t)\ \mathrm{d}t + a\int_{0}^{\infty}\mathbf{S}_{\mu,X}(t)\ \mathrm{d}t & b\geq 0\\ a\int_{-\infty}^{0}[\mathbf{S}_{\mu,X}(t)-\mu(\Omega)]\ \mathrm{d}t + a\int_{0}^{-\frac{b}{a}}[\mathbf{S}_{\mu,X}(t)-\mu(\Omega)]\ \mathrm{d}t + a\int_{-\frac{b}{a}}^{\infty}\mathbf{S}_{\mu,X}(t)\ \mathrm{d}t & b<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases} a\int_{-\infty}^{0}[\mathbf{S}_{\mu,X}(t)-\mu(\Omega)]\ \mathrm{d}t + a\int_{-\frac{b}{a}}^{0}\mu(\Omega)\ \mathrm{d}t + a\int_{0}^{\infty}\mathbf{S}_{\mu,X}(t)\ \mathrm{d}t & b\geq 0\\ a\int_{-\infty}^{0}[\mathbf{S}_{\mu,X}(t)-\mu(\Omega)]\ \mathrm{d}t + a\int_{0}^{-\frac{b}{a}}\mathbf{S}_{\mu,X}(t)\ \mathrm{d}t - a\mu(\Omega)(-\frac{b}{a}) + a\int_{-\frac{b}{a}}^{\infty}\mathbf{S}_{\mu,X}(t)\ \mathrm{d}t & b<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases} a\int X\ \mathrm{d}\mu + a\mu(\Omega)(\frac{b}{a}) & b\geq 0\\ a\int_{-\infty}^{0}[\mathbf{S}_{\mu,X}(t)-\mu(\Omega)]\ \mathrm{d}t + a\int_{0}^{\infty}\mathbf{S}_{\mu,X}(t)\ \mathrm{d}t + b\mu(\Omega) & b<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases} a\int X\ \mathrm{d}\mu + b\mu(\Omega) & b\geq 0\\ a\int X\ \mathrm{d}\mu + b\mu(\Omega) & b<0\end{cases}$$

اثبات قسمت ۳، فرض کنید $X\leq Y$ و $x\in\mathbb{R}$. در این‌صورت $\{X>x\}\subseteq\{Y>x\}$. بنابراین $\mu(\{X>x\})\leq\mu(\{Y>x\})$. این نشان می‌دهد که

$$\mathbf{S}_{\mu,X}(x)=\mu(\{X>x\})\leq\mu(\{Y>x\})=\mathbf{S}_{\mu,Y}(x).$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت که

$$\mathbf{S}_{\mu,X}(x)-\mu(\Omega)\leq\mathbf{S}_{\mu,Y}(x)-\mu(\Omega).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int X\,\mathrm{d}\mu&=\int_{-\infty}^{0}\Big[\mathbf{S}_{\mu,X}(x)-\mu(\Omega)\Big]\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\mathbf{S}_{\mu,X}(x)\,\mathrm{d}x\\&\leq\int_{-\infty}^{0}\Big[\mathbf{S}_{\mu,Y}(x)-\mu(\Omega)\Big]\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\mathbf{S}_{\mu,Y}(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int Y\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

□

تبصره ۱.۸.۲. روی فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ برای تابع اعوجاج g، اگر μ_g توسط رابطه (۳.۲) تعریف شده باشد آنگاه تابع مجموعه‌ای یکنوا روی $\mathcal{F}$ است. بدیهی است هر متغیر تصادفی روی $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$،

μ – اساساً از $-\infty$ بزرگ‌تر است.

نتایج بدست آمده درباره توابع محدب و مقعر که توسط نیکلاس [1] و پارسون [2] در سال ۲۰۰۶ بیان شده‌اند را یادآوری می‌کنیم .

لم ۲.۸.۲. ۱. فرض کنید $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع کراندار از پایین روی هر زیر بازه فشرده از $[a,b]$ باشد. در این‌صورت f تابع مقعر است اگر تنها اگر f مقعر نقطه میانی باشد، به این معنا که برای هر $x,y\in[a,b]$،

$$f\left(\frac{x+y}{۲}\right)\geq\frac{f(x)+f(y)}{۲}.$$

۲. اگر $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع مقعر باشد، آنگاه

$$\frac{f(a)+f(b)}{۲}-f\left(\frac{a+b}{۲}\right)\leq\frac{f(c)+f(d)}{۲}-f\left(\frac{c+d}{۲}\right)$$

برای همه $a\leq c\leq d\leq b$.

برهان. رجوع شود به [۳۳]. □

[1] Niculescu
[2] Persson

فصل ۳

زیرجمع‌پذیری اندازه‌های ریسک اعوجاج

۱.۳ مقدمه

ریسک به معنایی انحراف در پیشامدهای ممکن آینده می‌باشد. همه‌ی ما در زندگی با انواع ریسک و مخاطرات گوناگون روبه رو هستیم. در نتیجه باید ریسک‌ها را تحلیل و اگر با آن‌ها برخورد داریم شناسایی کنیم، در مجموع تمام ریسک‌ها و نتایج آن‌ها را باید ارزیابی کرد. شناسایی و ارزیابی ریسک موجب می‌گردد تا بتوان فضای مدیریتی لازم را قبل از وقوع ریسک‌های احتمالی ایجاد کرد. برخی ریسک‌ها ناشی از نبود دانش و برخی ناشی از اقداماتی هستند که در آینده قرار است اتفاق افتند. در نتیجه باید ابزاری را طراحی کرد تا بتوان به کمک آن‌ها ریسک را مدیریت کرد. سنجه‌های ریسک اعوجاج، از جمله اندازه ریسک Glue-VaR، اندازه ریسک GlueVaR تعمیم یافته و اندازه‌های ریسک اعوجاج دنباله چند متغیره نمونه‌های از این ابزارها می‌باشند که به کمک آن‌ها می‌توان مقادیر قابل قبولی از ریسک را اندازه گرفت. با استفاده از این سنجه‌ها می‌توان ریسک یا پیشامدهای ممکن آینده را مدیریت کرد. مدیریت ریسک مجموعه‌ای را قادر می‌سازد که به نحو بهتری ریسک‌های متداول در فعالیت‌های روزمره را مدیریت و با خیالی آسوده از خسارات تصادفی، به‌طور جامع‌تر و مؤثرتر فعالیت‌های روزمره خود را ادامه دهد. ضمن این‌که سرمایه‌گذار را قادر می‌سازد به نتایج قابل

قبول با حداقل هزینه نایل گردد.

۲.۳ زیر جمع پذیری دنباله توسط اندازه‌های ریسک اعوجاج

در این بخش درباره شرایط لازم و کافی برای اندازه‌های ریسک اعوجاج در زیر جمع پذیری دنباله بحث می‌کنیم و همچنین زیر جمع پذیری دنباله را توسط اندازه‌های ریسک GlueVaR نشان داده و تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۳. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ را بدون‌اتم [1] می‌نامیم هرگاه برای هر $A \in \mathcal{F}$ با شرط $\mathbb{P}(A) > 0$، $B \in \mathcal{F}$ چنان موجود باشد که $B \subseteq A$ و $0 < \mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(A)$.

مثال ۱.۲.۳. فرض کنید $\Omega = [0, 1]$، $\mathcal{F} = B([0, 1])$، $\sigma -$ جبر مجموعه‌های بورل و $\mathbb{P}$ اندازه لبگ باشد. در این‌صورت $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال بدون اتم است.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال بدون‌اتم باشد. همچنین فرض کنید $A \in \mathcal{F}$ و $b \in \mathbb{R}$. در این‌صورت اگر $0 < b < \mathbb{P}(A)$ آنگاه مجموعه‌ای مانند $B \in \mathcal{F}$ موجود است به‌طوری‌که $B \subseteq A$ و $\mathbb{P}(B) = b$.

برهان. رجوع شود به [۳۹، فصل ۲، بخش ۱۳، تمرین ۷]. □

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید g یک تابع اعوجاج و همچنین $\rho_g \colon \chi_g \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع اعوجاج تعریف شده روی (۱.۲) و $\Omega_{X,Y}$ دامنه دنباله مشترک دو متغیر تصادفی Xو Y باشد در این‌صورت

۱. برای $X, Y \in \chi_g$، اگر g روی $[0, \mathbb{P}(\Omega_{X,Y})]$ مقعر باشد آنگاه ρ_g برای هر دو متغیر تصادفی X و Y زیرجمع‌پذیر دنباله است.

۲. فرض کنید که $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ بدون‌اتم باشد. اگر ρ_g زیرجمع‌پذیر دنباله در χ_g باشد، آنگاه g روی $[0, p]$ مقعر است، جایی‌که

$$p = \sup\{\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B})\colon A, B \in \mathcal{F}\}.$$

برهان. ۱. هرگاه $A \in \mathcal{F}$ آنگاه تابع $(\mu_g)_{\Omega_{X,Y}} \colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت

$$(\mu_g)_{\Omega_{X,Y}}(A) = \mu_g(A \cap \Omega_{X,Y}) = g\left(P\left(A \cap \Omega_{X,Y}\right)\right)$$

تعریف می‌کنیم. $(\mu_g)_{\Omega_{X,Y}}$ یک تابع مجموعه‌ای یکنوا است به‌طوری‌که $(\mu_g)_{\Omega_{X,Y}}(\emptyset) = 0$ زیرا

$$(\mu_g)_{\Omega_{X,Y}}(\emptyset) = g\left(P\left(\emptyset \cap \Omega_{X,Y}\right)\right) = g(0) = 0$$

[1] Atomless

همچنین اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cap \Omega_{X,Y} \subseteq B \cap \Omega_{X,Y}$ و لذا $\mathbb{P}\left(A \cap \Omega_{X,Y}\right) \leq \mathbb{P}\left(B \cap \Omega_{X,Y}\right)$.
حال چون g صعودی است داریم

$$(\mu_g)_{\Omega_{X,Y}}(A) = g\left(\mathbb{P}\left(A \cap \Omega_{X,Y}\right)\right) \leq g\left(\mathbb{P}\left(B \cap \Omega_{X,Y}\right)\right) = (\mu_g)_{\Omega_{X,Y}}(B).$$

فرض کنید g روی بازه $[0, \mathbb{P}\left(\Omega_{X,Y}\right)]$ مقعر باشد. هرگاه $A, B \in \mathcal{F}$ قرار می‌دهیم،
$u = \mathbb{P}((A \cap B) \cap \Omega_{X,Y})$، $v = \mathbb{P}((A \cup B) \cap \Omega_{X,Y})$، $a = \mathbb{P}(A \cap \Omega_{X,Y})$ و $b = \mathbb{P}(B \cap \Omega_{X,Y})$.
حال چون $A \cup B = A \cup (B - A)$ لذا

$$(A \cup B) \cap \Omega_{X,Y} = (A \cap \Omega_{X,Y}) \cup \left[(B - A) \cap \Omega_{X,Y}\right].$$

بنابراین

$$\begin{aligned} u + v =& \mathbb{P}((A \cup B) \cap \Omega_{X,Y}) + \mathbb{P}((A \cap B) \cap \Omega_{X,Y}) \\ =& \mathbb{P}(A \cap \Omega_{X,Y}) + \mathbb{P}((B - A) \cap \Omega_{X,Y}) + \mathbb{P}((A \cap B) \cap \Omega_{X,Y}) \\ =& \mathbb{P}(A \cap \Omega_{X,Y}) + \mathbb{P}\left(\left[(B - A) \cup (A \cap B)\right] \cap \Omega_{X,Y}\right) \\ =& \mathbb{P}(A \cap \Omega_{X,Y}) + \mathbb{P}\left(B \cap \Omega_{X,Y}\right) \\ =& a + b. \end{aligned}$$

علاوه بر این داریم

$$0 \leq \mathbb{P}((A \cap B) \cap \Omega_{X,Y}) \leq \mathbb{P}(A \cap \Omega_{X,Y}) \leq \mathbb{P}((A \cup B) \cap \Omega_{X,Y}) \leq \mathbb{P}(\Omega_{X,Y}),$$

و همچنین

$$0 \leq \mathbb{P}((A \cap B) \cap \Omega_{X,Y}) \leq \mathbb{P}(B \cap \Omega_{X,Y}) \leq \mathbb{P}((A \cup B) \cap \Omega_{X,Y}) \leq \mathbb{P}(\Omega_{X,Y}),$$

بنابراین داریم $0 \leq u \leq a$، $b \leq v \leq \mathbb{P}(\Omega_{X,Y})$ و $a + b = u + v$.
حال بدون آن‌که از کلیت مسئله کم شود فرض می‌کنیم $a \leq b$.
در این‌صورت $u \leq a \leq b \leq v$. با به کاربردن لم ۲.۸.۲ قسمت ۲ خواهیم داشت

$$\frac{f(u) + f(v)}{2} - f\left(\frac{u + v}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} - f\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

پس $\frac{f(u)+f(v)}{2} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ و لذا $f(a) + f(b) \geq f(u) + f(v)$. این نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned} & g(\mathbb{P}((A \cup B) \cap \Omega_{X,Y})) + g(\mathbb{P}((A \cap B) \cap \Omega_{X,Y})) \\ & \leq g(\mathbb{P}(A \cap \Omega_{X,Y})) + g(\mathbb{P}(B \cap \Omega_{X,Y})). \end{aligned}$$

بنابراین $(\mu_g)_{\Omega_{X,Y}}$ یک تابع مجموعه‌ای زیرمدولی روی $\mathcal{F}$ است.
حال نشان می‌دهیم که

$$\lim_{x \to \infty} \mathbb{P}\left(\{X > x\}\right) = 0.$$

واضح است که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\{X > ۱\} \supseteq \{X > ۲\} \supseteq \{X > ۳\} \supseteq \cdots \supseteq \{X > n\} \supseteq \{X > n + ۱\} \supseteq \ldots,$$

زیرا

$$w \in \{X > n + ۱\} \Rightarrow X(w) > n + ۱ \Rightarrow X(w) > n \Rightarrow w \in \{X > n\}$$

و لذا

$$\{X > n + ۱\} \subseteq \{X > n\},$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{X > n\}) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=۱}^{\infty} \{X > n\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = ۰.$$

فرض کنید $Z \in L^{۰}$ متغیر تصادفی باشد دراین‌صورت

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} (\mu_g)_{\Omega_{X,Y}} (\{Z > x\}) &= \lim_{x\to\infty} g\left(\mathbb{P}\left(\Omega_{X,Y} \cap \{Z > x\}\right)\right) \\ &= g\left(\lim_{x\to\infty} \mathbb{P}\left(\Omega_{X,Y} \cap \{Z > x\}\right)\right) \\ &= g\left(\mathbb{P}(\emptyset)\right) = g(۰) = ۰.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که Z، μ – اساساً از $-\infty$ بزرگتر است.
حال با به کار بردن لم ۱.۸.۲ قسمت ۲ می‌توان نوشت

$$\int (X + Y)\, \mathrm{d}(\mu_g)_{\Omega_{X,Y}} \le \int X\, \mathrm{d}(\mu_g)_{\Omega_{X,Y}} + \int Y\, \mathrm{d}(\mu_g)_{\Omega_{X,Y}}, \tag{۱.۳}$$

که معادل است با،

$$\int_{\Omega_{X,Y}} (X + Y)\, \mathrm{d}\mu_g \le \int_{\Omega_{X,Y}} X\, \mathrm{d}\mu_g + \int_{\Omega_{X,Y}} Y\, \mathrm{d}\mu_g, \tag{۲.۳}$$

برای مثال نشان می‌دهیم که

$$\int X\, \mathrm{d}(\mu_g)_{\Omega_{X,Y}} = \int_{\Omega_{X,Y}} X\, \mathrm{d}\mu_g.$$

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{X,Y}} X\, \mathrm{d}\mu_g \\ &= \int_{-\infty}^{۰} \left[\mu_g\left(\Omega_{X,Y} \cap \{X > x\}\right) - \mu_g\left(\Omega_{X,Y}\right)\right]\, \mathrm{d}x + \int_{۰}^{\infty} \mu_g\left(\Omega_{X,Y} \cap \{X > x\}\right)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{۰} \left[(\mu_g)_{\Omega_{X,Y}}(\{X > x\}) - (\mu_g)_{\Omega_{X,Y}}(\Omega_{X,Y})\right]\, \mathrm{d}x + \int_{۰}^{\infty} (\mu_g)_{\Omega_{X,Y}}(\{X > x\})\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{۰} \left[S_{(\mu_g)_{\Omega_{X,Y}},X}(x) - (\mu_g)_{\Omega_{X,Y}}(\Omega_{X,Y})\right]\, \mathrm{d}x + \int_{۰}^{+\infty} S_{(\mu_g)_{\Omega_{X,Y}},X}(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int X\, \mathrm{d}(\mu_g)_{\Omega_{X,Y}}.\end{aligned}$$

در نتیجه، رابطه (۱۵.۲) برقرار است. بنابراین اندازه ریسک اعوجاج ρ_g برای هر دو متغیر تصادفی $X,Y \in \chi_g$ زیرجمع‌پذیر دنباله می‌باشد.

۲. اگر اندازه ریسک اعوجاج ρ_g روی χ_g زیرجمع‌پذیر دنباله باشد، آنگاه رابطه (۱۵.۲) برای هر دو متغیر تصادفی $X,Y \in \chi_g$ برقرار است. بنابراین، برای زیر مجموعه‌های $A,B \in \mathcal{F}$ از رابطه (۱۵.۲) داریم

$$\int_{\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}} (\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B)\,\mathrm{d}\mu_g \leq \int_{\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}} \mathbb{I}_A\,\mathrm{d}\mu_g + \int_{\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}} \mathbb{I}_B\,\mathrm{d}\mu_g,$$

و این معادل است با،

$$\int (\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B)\,\mathrm{d}(\mu_g)_{\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}} \leq \int \mathbb{I}_A\,\mathrm{d}(\mu_g)_{\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}} + \int \mathbb{I}_B\,\mathrm{d}(\mu_g)_{\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}}. \tag{۳.۳}$$

حال با توجه به لم ۱.۸.۲ داریم،

$$\begin{aligned}(\mu_g)_{\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}}(A\cup B) + (\mu_g)_{\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}}(A\cap B)\\ \leq (\mu_g)_{\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}}(A) + (\mu_g)_{\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}}(B).\end{aligned} \tag{۴.۳}$$

این نشان می‌دهد که $(\mu_g)_{\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}}$ روی $\mathcal{F}$ زیر مدولی است.
بنابراین، اگر $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}) = ۰$ آنگاه g روی $[۰, \mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B})]$ مقعر است. در حالتی که $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}) > ۰$، آنگاه برای هر $۰ \leq u < v \leq \mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B})$، بدون‌اتم بودن $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ایجاب می‌کند که زیر مجموعه‌های $C,D \in \mathcal{F}$ موجود هستند به‌طوری‌که $C \subset D \subset \Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}$ و همچنین $\mathbb{P}(C) = u$ و $\mathbb{P}(D) = v$.

اگر $E = D - C$ آنگاه $\mathbb{P}(E) = v - u$. واضح است که $\frac{v-u}{۲} < v - u$، بنابراین وجود دارد $F \subset E$ به‌طوری‌که $\mathbb{P}(F) = \frac{v-u}{۲}$. حال تعریف می‌کنیم $A' = C \cup F$ و $B' = D - F$. به وضوح $\mathbb{P}(A') = \mathbb{P}(B') = \frac{u+v}{۲}$، $\mathbb{P}(A'\cap B') = \mathbb{P}(C) = u$ و $\mathbb{P}(A'\cup B') = \mathbb{P}(D) = v$.

چون $A',B' \subset \Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}$ و همچنین $(\mu_g)_{\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}}$ زیرمدولی روی $\mathcal{F}$ است، بنابراین داریم

$$\begin{aligned}g(\mathbb{P}((A'\cup B')\cap\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B})) + g(\mathbb{P}((A'\cap B')\cap\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B}))\\ \leq g(\mathbb{P}(A'\cap\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B})) + g(\mathbb{P}(B'\cap\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B})),\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $g(\frac{u+v}{۲}) \geq g(\frac{g(u)+g(v)}{۲})$.
بنابراین با توجه به لم ۲.۸.۲ قسمت ۱ می‌توان نتیجه گرفت که تابع اعوجاج g برای هر $A,B \in \mathcal{F}$ روی $[۰, \mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B})]$ مقعر است. لذا g روی $[۰, p]$ مقعر است.

□

نتیجه ۱.۲.۳. برای $\alpha \in (0,1)$ فرض کنید g یک تابع اعوجاج و ρ_g اندازه ریسک اعوجاج تعریف شده در رابطه (۱.۲) باشد. فرض کنید دامنه دنباله مشترک $\Omega_{X,Y}$ برای هر دو متغیر تصادفی X و Y به‌صورت $\Omega_{X,Y} = \mathcal{D}_{\alpha,X,Y}$ بیان شده در رابطه (۵.۲) یا در رابطه

$$\Omega_{X,Y} = \mathcal{D}_{\alpha,X+Y} = \{X+Y > F^{-1}_{X+Y}(\alpha)\}$$

تعریف شود. دراین‌صورت احکام زیر برقرار می‌باشند.

۱. اگر g روی $[0,1-\alpha]$ مقعر باشد، آنگاه $\rho_g\colon \chi_g \longrightarrow \mathbb{R}$ روی χ_g زیرجمع‌پذیر دنباله است.

۲. اگر $\rho_g\colon \chi_g \longrightarrow \mathbb{R}$ روی χ_g زیرجمع‌پذیر دنباله باشد و فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ بدون‌اتم در نظر گرفته شود، آنگاه g روی $[0,1-\alpha]$ مقعر است.

برهان. ۱. با توجه به مرجع [۲۸] برای هر $\alpha \in (0,1)$ و هر متغیر تصادفی X که دارای تابع توزیع $F_X(x)$ است، داریم

$$\mathbb{P}\{X < F^{-1}_X(\alpha)\} \leq \alpha \leq \mathbb{P}\{X \leq F^{-1}_X(\alpha)\} = F_X(F^{-1}_X(\alpha)). \qquad (۵.۳)$$

لذا

$$\mathbb{P}(\mathcal{D}_{\alpha,X,Y}) \leq \mathbb{P}(X+Y > F^{-1}_{X+Y}(\alpha)) = 1 - F_{X+Y}(F^{-1}_{X+Y}(\alpha)) \leq 1-\alpha$$

و همچنین

$$\mathbb{P}(\mathcal{D}_{\alpha,X+Y}) = \mathbb{P}(X+Y > F^{-1}_{X+Y}(\alpha)) \leq 1-\alpha.$$

بنابراین اگر g روی $[0,1-\alpha]$ مقعر باشد، آنگاه برای هر $X,Y \in \chi_g$، g روی $[0,\mathbb{P}(\Omega_{X,Y})]$ مقعر است. حال با توجه به قضیه ۲.۲.۳ برای هر $X,Y \in \chi_g$، ρ_g زیرجمع‌پذیر دنباله می‌باشد. بنابراین ρ_g روی χ_g زیرجمع‌پذیر دنباله است.

۲. اگر $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ بدون‌اتم باشد، آنگاه یک مجموعه مانند $A \in \mathcal{F}$ چنان موجود است که $\mathbb{P}(A) = 1-\alpha$. به راحتی می‌توان نشان داد که در هر یک از حالات $\Omega_{X,Y} = \mathcal{D}_{\alpha,X,Y}$ یا $\Omega_{X,Y} = \mathcal{D}_{\alpha,X+Y} = \{X+Y > F^{-1}_{X+Y}(\alpha)\}$، رابطه

$$\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_A} = \{\omega \in \Omega\colon \mathbb{I}_A(\omega) > F^{-1}_{\mathbb{I}_A}(\alpha)\} = A$$

برقرار است. به‌عنوان مثال در حالت $\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_A} = \mathcal{D}_{\alpha,\mathbb{I}_A+\mathbb{I}_A}$ داریم

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_A} =& \mathcal{D}_{\alpha,\mathbb{I}_A+\mathbb{I}_A} = \left\{۲\mathbb{I}_A > F^{-۱}_{۲\mathbb{I}_A}(\alpha)\right\} = \left\{\omega \in \Omega \mid ۲\mathbb{I}_A(\omega) > F^{-۱}_{۲\mathbb{I}_A}(\alpha)\right\} \\ =& \left\{\omega \in \Omega \mid \mathbb{I}_A(\omega) > \frac{۱}{۲} F^{-۱}_{۲\mathbb{I}_A}(\alpha)\right\} = \left\{\omega \in \Omega \mid \mathbb{I}_A(\omega) > \frac{۱}{۲}\left(۲F^{-۱}_{\mathbb{I}_A}(\alpha)\right)\right\} \\ =& \left\{\omega \in \Omega \mid \mathbb{I}_A(\omega) > F^{-۱}_{\mathbb{I}_A}(\alpha)\right\}.\end{aligned}$$

حال چون

$$F_{\mathbb{I}_A}(x) = \begin{cases} ۱ & x \geq ۱ \\ ۱ - \mathbb{P}(A) & ۰ \leq x < ۱ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$$

بنابراین، $\{x \in \mathbb{R} \mid F_{\mathbb{I}_A}(x) \geq \alpha\} = [۰, \infty)$ و لذا

$$F^{-۱}_{\mathbb{I}_A}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_{\mathbb{I}_A}(x) \geq \alpha\} = ۰.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_A} &= \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{I}_A(\omega) > F^{-۱}_{\mathbb{I}_A}(\alpha)\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{I}_A(\omega) > ۰\} \\ &= A.\end{aligned}$$

پس با توجه به قضیه ۲.۲.۳ قسمت ۲ و رابطه $\mathbb{P}(A) = ۱ - \alpha$، g روی $[۰, ۱ - \alpha]$ مقعر است.

□

تبصره ۱.۲.۳. ۱. نشان داد شد که اگر $X = Y$ و $F_X(x)$ یک تابع توزیع X باشد، آنگاه

$$\mathcal{D}_{\alpha,X} = \mathcal{D}_{\alpha,Y} = \{X > F^{-۱}_X(\alpha)\}$$

و همچنین

$$\mathcal{D}_{\alpha,X,Y} = \{X > F^{-۱}_X(\alpha),\ ۲X > F^{-۱}_{۲X}(\alpha)\} = \{X > F^{-۱}_X(\alpha)\}.$$

بنابراین، در این مورد $\mathcal{D}_{\alpha,X,Y} = \{X > F^{-۱}_X(\alpha)\}$ و همچنین

$$\mathbb{P}(\mathcal{D}_{\alpha,X,Y}) = ۱ - F_X(F^{-۱}_X(\alpha)) \leq ۱ - \alpha$$

به خصوص، اگر $F_X(x)$ در $(F^{-۱}_X(\alpha))$ پیوسته باشد، آنگاه $F_X(F^{-۱}_X(\alpha)) = \alpha$ بنابراین، واضح است که جمله'' بدلیل آنکه $\mathbb{P}(\mathcal{D}_{\alpha,X,Y}) < ۱ - \alpha$ ''در اثبات قضیه(۱.۴.۳) که توسط

بلزساميرا و همکارانش در سال ۲۰۱۴ بیان شده است باید به جمله ''زیرا $\mathbb{P}(\mathcal{D}_{\alpha,X,Y}) \leq 1-\alpha$ '' تغییر کند و نتیجه آن که عبارت است ''روی $(0,1-\alpha]$ مقعر است'' در اثبات قضیه (۱.۴.۳) که توسط بلزساميرا و همکارانش در سال ۲۰۱۴ بیان شده است باید به‌صورت '' روی $[0,1-\alpha]$ مقعر است'' تصحیح شود. در پایین یک مثال نقض برای '' ۲ '' مشاهده می‌کنید. مانند نظریه‌های که در قضیه ۱.۷.۲ توسط یوآن و زو در سال ۲۰۱۶ داده شده است. نتیجه ۱.۲.۳ نه تنها ارائه می‌دهد نسخه اصلاح شده قضیه ۱.۴.۳ از بلزساميرا و همکارانش (۲۰۱۴) و قضیه ۱.۷.۲ توسط یوآن و زو در سال ۲۰۱۶، بلکه بدست می‌آورد شرایط لازم برای اندازه ریسک اعوجاج که زیرجمع‌پذیری دنباله است، زمانی‌که دامنه دنباله مشترک توسط $\mathcal{D}_{\alpha,X,Y}$ و $\mathcal{D}_{\alpha,X+Y}$ تعریف شود.

۲. جالب است بدانیم که VaR_α روی L^0 کران بالا دامنه‌های دنباله مشترک $\mathcal{D}_{\alpha,X,Y}$ و

$$\mathcal{D}_{\alpha,X+Y} = \left\{X+Y > F^{-1}_{X+Y}(\alpha)\right\}$$

زیرجمع‌پذیر دنباله است. از آن‌جایی که $g_{\alpha,VaR}(x) = \mathbb{I}_{1-\alpha<x\leq 1}$، تابع اعوجاج است پس روی $[0,1-\alpha]$ مقعر می‌باشد. از طرفی دیگر، تابع اعوجاج $g^+_{\alpha,VaR}(x) = \mathbb{I}_{1-\alpha\leq x\leq 1}$ را بگیرید، آنگاه اندازه‌ی ریسک متناظر $\rho_{g^+_{\alpha,VaR}}(X) = F_X^{-1+}(\alpha)$ معکوس پیوسته راست F_X است جایی که F_X تابع توزیع X باشد. آن را با $VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$ که توسط دنویت [1] و همکارانش در سال ۲۰۰۵ معرفی شده است را مشاهده می‌کنیم. اگر چه $g^+_{\alpha,VaR}(x)$ روی $(0,1-\alpha]$ مقعر است، اما اندازه‌ی ریسک اعوجاج متناظر $F_X^{-1+}(\alpha)$ برای هر دو تا ریسک X و Y روی دامنه‌های دنباله مشترک $\mathcal{D}_{\alpha,X,Y}$، زیرجمع‌پذیر نیست.

نتیجه ۲.۲.۳. فرض کنید g یک تابع اعوجاج و همچنین $\mathbf{X} = (X_1,\dots,X_n)$ یک بردار تصادفی باشد به‌طوری‌که برای هر $i = 1,\dots,n$، $X_i \in \chi_g$.
هرگاه $\Omega_{\mathbf{X}} = \Omega_{X_1,X_2,\cdots,X_n}$ یک دامنه دنباله مشترک برای $\mathbf{X}$ در نظر گرفته شود و تابع اعوجاج g روی $[0,\mathbf{P}(\Omega_X)]$ مقعر باشد، آنگاه برای ریسک تجمعی $\mathbf{X}$ که با $S_n = X_1+\dots+X_n$ نمایش داده می‌شود داریم

$$\int_{\Omega_{\mathbf{X}}} S_n d\mu_g \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} X_i d\mu_g. \tag{۶.۳}$$

برهان. با توجه به تعریف ۱.۷.۲، $\Omega_{\mathbf{X}} \in \mathcal{F}$ می‌تواند به‌عنوان دامنه دنباله برای هر دو متغیر تصادفی از متغیرهای $(X_1,\dots,X_n)$ در نظر گرفته شود. بنابراین با توجه به قضیه ۲.۲.۳ قسمت

[1] Denuit

۱ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{\mathbf{X}}} S_n d\mu_g &= \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} (X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n)\ \mathrm{d}\mu_g \\ &= \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} [(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}) + X_n]\ \mathrm{d}\mu_g \\ &\leq \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} (X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1})\ \mathrm{d}\mu_g + \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} X_n\ \mathrm{d}\mu_g \\ &\leq \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} (X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-2})\ \mathrm{d}\mu_g + \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} X_{n-1}\ \mathrm{d}\mu_g + \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} X_n\ \mathrm{d}\mu_g\end{aligned}$$

با ادامه این روند داریم

$$\int_{\Omega_{\mathbf{X}}} S_n d\mu_g \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} X_i d\mu_g.$$

□

در ادامه(نتیجه ۳.۲.۳)، با استفاده از قضیه ۲.۲.۳ می‌توانیم نتایج معروف مربوط به دنویت و همکارانش در سال ۲۰۰۵ را که مرتبط با زیرجمع‌پذیری اندازه‌های ریسک اعوجاج است بهبود ببخشیم.

نتیجه ۳.۲.۳. اگر g یک تابع اعوجاج باشد، آنگاه احکام زیر برقرار هستند.

۱. اگر g روی $[0,1]$ مقعر باشد، آنگاه اندازه ریسک اعوجاج $\rho_g\colon \chi_g \longrightarrow \mathbb{R}$ روی χ_g زیرجمع‌پذیر است.

۲. اگر اندازه ریسک اعوجاج $\rho_g\colon \chi_g \longrightarrow \mathbb{R}$ روی χ_g زیرجمع‌پذیر و همچنین $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ بدون‌اتم باشد، آنگاه g روی $[0,1]$ مقعر است.

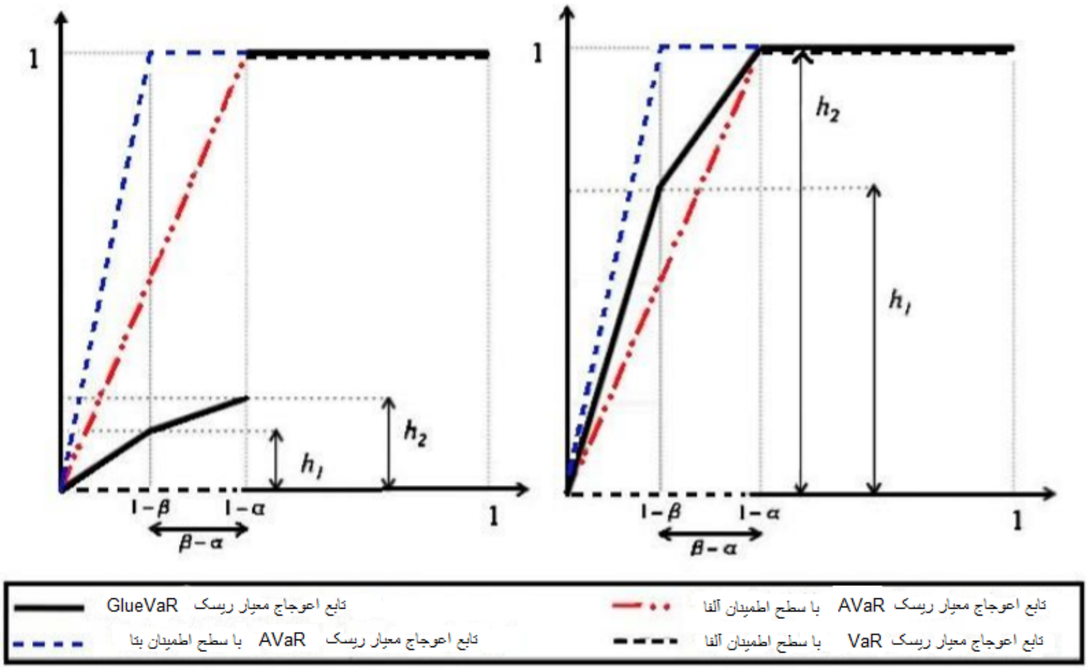
برهان. باتوجه به قضیه ۲.۲.۳ با قرار دادن $\Omega_{X,Y} = \Omega$ برای هر دو متغیر تصادفی X و Y اثبات هر دو قسمت واضح است. □

۳.۳ اندازهٔ ریسک GlueVaR

معیار اندازه‌گیری ریسک $GlueVaR$ توسط بلزسامپرا و همکارانش در سال ۲۰۱۴ برای رفع معایب دو معیار VaR و $TVaR$ معرفی شده است. تابع اعوجاج اندازه ریسک $GlueVaR$ با نماد $k_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(u)$ نشان داده می‌شود و در سطح اطمینان α، به‌صورت

$$k_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(u)=\begin{cases}\frac{h_1}{1-\beta}u, & 0\leq u<1-\beta,\\ h_1+\frac{h_2-h_1}{\beta-\alpha}[u-(1-\beta)], & 1-\beta\leq u<1-\alpha,\\ 1, & 1-\alpha\leq u\leq 1.\end{cases}$$

تعریف می‌شود. جایی‌که سطح‌های اطمینان $\alpha,\beta\in[0,1]$ با فرض $\alpha\leq\beta$، $h_1\in[0,1]$ و $h_2\in[h_1,1]$ مشخص شده باشند. پارامتر β یک سطح اطمینان اضافی در کنار α است و پارامترهای h_1 و h_2 ارتفاعات اندازه ریسک $GlueVaR$ هستند که با استفاده از آن‌ها می‌توان حالت‌های مختلفی برای این سنجهٔ ریسک در نظر گرفت. توجه داشته باشید برای متغیر تصادفی X، $VaR_\alpha(X)$ و $TVaR_\alpha(X)$ حالت‌های خاصی از اندازه ریسک اعوجاج هستند که $k_{\alpha,\alpha}^{0,0}(u)$ و $k_{\alpha,\alpha}^{1,1}(u)$ به ترتیب توابع اعوجاج تعریف شده روی آن‌ها می‌باشد.
با ایجاد شرایط مناسب روی ارتفاعات h_1 و h_2 اندازه ریسک $GlueVaR$ بسیار قابل انعطاف است. برای مثال، مدیران ریسک ممکن است مایل باشند که α، β، h_1 و h_2 را به گونه‌ای انتخاب کنند تا رابطه $VaR_\alpha(X)\leq GlueVaR_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(X)\leq TVaR_\alpha(X)$ برقرار باشد، برای این منظور کافی است $\frac{1-\beta}{1-\alpha}\leq h_1$. برای اطمینان از آن می‌توان با انتخاب کردن مجموعه‌ای از پارامترهای توابع اعوجاج متناظر برای هر $u\in[0,1]$ رابطهٔ $\psi_\alpha(u)\leq k_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(u)\leq\gamma_\alpha(u)$ باید برقرار باشد. همچنین اندازه ریسک $GlueVaR$ سرمایه‌گذار را قادر می‌سازد تا اندازه‌گیری ریسک بسیار محافظه کارانه را نیز در تحلیل مد نظر قرار دهد.
مثلاً برای برقراری رابطه $TVaR_\alpha(X)\leq GlueVaR_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(X)\leq TVaR_\beta(X)$ کافی است شرایط $h_1\leq\frac{1-\beta}{1-\alpha}$ و $h_2=1$ مد نظر قرار گرفته شوند. مثال‌های بیان شده در شکل ۱.۳ نشان داده شده‌اند [۱۹].



شکل ۱.۳: مقایسه توابع اعوجاج(انحراف)، معیارهای VaR، TVaR و GlueVaR تحت شرایط مختلف

۴.۳ ترکیب خطی اندازه‌های ریسک

متغیر تصادفی X برای سطح اطمینان ثابت α و β به‌طوری‌که $\alpha < \beta$ داده شده است، در نتیجه $GlueVaR_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(X)$ به‌عنوان یک ترکیب خطی از $TVaR_\beta(X)$، $TVaR_\alpha(X)$ و $VaR_\alpha(X)$ می‌تواند بیان شود. این نتیجه به ما اجازه می‌دهد که ساختار اولیه اندازه ریسک $GlueVaR$ مبتنی‌بر گرافیک را به یک ساختار جبری بر اساس معیارهای ریسک استاندارد بازنویسی کرد. اگر از وزن‌های

$$\begin{cases} \omega_1 = & h_1 - \frac{(h_2-h_1).(1-\beta)}{\beta-\alpha} \\ \omega_2 = & \frac{(h_2-h_1)}{\beta-\alpha}.(1-\alpha) \\ \omega_3 = & 1-\omega_1-\omega_2 = 1-h_2, \end{cases}$$

استفاده شود پس تابع اعوجاج $k_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(u)$ به‌صورت

$$k_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(u) = \omega_1.\gamma_\beta(u) + \omega_2.\gamma_\alpha(u) + \omega_3.\psi_\alpha(u)$$

باز نویسی می‌شود. جایی‌که γ_β، γ_α و ψ_α به ترتیب توابع اعوجاج از $TVaR$ در سطح اطمینان β و α و VaR در سطح اطمینان α هستند. بنابراین $GlueVaR$ یک اندازه ریسک است که می‌تواند به‌صورت ترکیب خطی از سه سنجهٔ ریسک بیان شود $TVaR$ در سطح اطمینان β و α

و VaR در سطح اطمینان α،

$$GlueVaR_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(X) = \omega_1.TVaR_\beta(X) + \omega_2.TVaR_\alpha(X) + \omega_3.VaR_\alpha(X).$$

برهان.

$$\begin{aligned} k_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(u) &= h_1.\gamma_\beta(u).\mathbb{I}_{[0,1-\beta)}(u) \\ &+ \left(h_1 + \frac{h_2 - h_1}{\beta - \alpha}.(1-\alpha).\gamma_\alpha(u) - \frac{h_2 - h_1}{\beta - \alpha}.(1-\beta)\right)\mathbb{I}_{[1-\beta,1-\alpha)}(u) \\ &+ \psi_\alpha(u), \end{aligned}$$

جایی‌که $\mathbb{I}_{[x_1,x_2]}$ یک تابع نشانگر است به‌طوری‌که اگر $u \in [x_1, x_2)$ باشد مقدار آن ۱ و در غیر این‌صورت صفر می‌شود.

$$\begin{aligned} \gamma_\beta(u).\mathbb{I}_{[0,1-\beta)}(u) &= \gamma_\beta(u) - \psi_{\beta(u)} \\ \mathbb{I}_{[1-\beta,1-\alpha)}(u) &= \psi_\beta(u) - \psi_\alpha(u) \\ \gamma_\alpha(u).\mathbb{I}_{[1-\beta,1-\alpha)}(u) &= \gamma_\alpha(u) - \psi_\alpha(u) - \left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right).\left[\gamma_\beta(u) - \psi_{\beta(u)}\right]. \end{aligned}$$

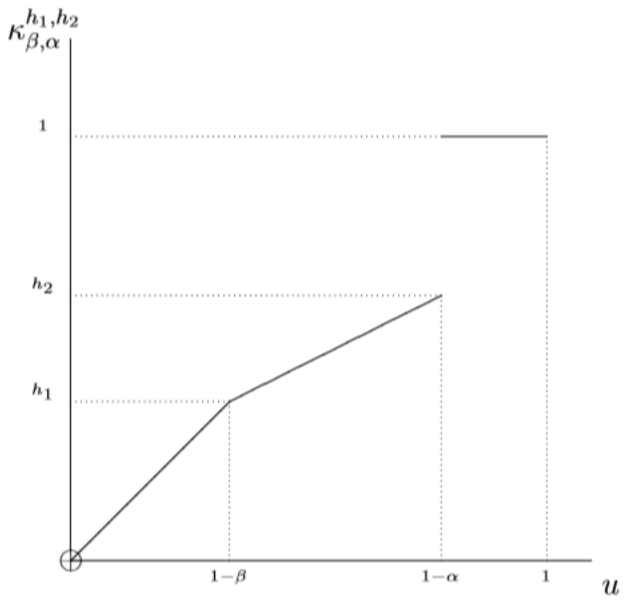
با توجه به عباراتی که در بالا بیان شده ممکن است به‌صورت زیر بازنویسی شود

$$\begin{aligned} k_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(u) = &\left[h_1 - \frac{(h_2-h_1).(1-\beta)}{\beta-\alpha}\right].\gamma_\beta(u) + \\ &\left[-h_1 + h_1 - \frac{(h_2-h_1).(1-\beta)}{\beta-\alpha} - \frac{(h_2-h_1).(1-\beta)}{\beta-\alpha}\right].\psi_\beta(u) + \\ &\frac{(h_2-h_1)}{\beta-\alpha}.(1-\alpha).\gamma_\alpha(u) + \left[1 - h_1 + \frac{(+h_2-h_1).(1-\beta)}{\beta-\alpha} - \frac{h_2-h_1}{\beta-\alpha}.(1-\alpha)\right].\psi_\alpha(u). \end{aligned}$$

با توجه به این $\omega_1 = h_1 - \frac{(h_2-h_1).(1-\beta)}{\beta-\alpha}$، $\omega_2 = \frac{h_2-h_1}{\beta-\alpha}.(1-\alpha)$ و $\omega_3 = 1 - h_2$[19]. □

قضیه ۱.۴.۳. فرض کنید $\alpha \in [0,1]$ یک سطح اطمینان و X و Y دو ریسک باشند به‌طوری‌که $\Omega_{\alpha,X,Y} \neq \emptyset$. در این‌صورت اندازه ریسک GlueVaR زیرجمع‌پذیر دنباله است هرگاه تابع اعوجاج متناظر شده به آن یعنی تابع $k_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(u)$ روی $[0, 1-\alpha)$ مقعر باشد.

برهان. رجوع شود به قضیه ۶.۱ از مرجع [۱۹]. □



شکل ۲.۳: نمونه‌ای از تابع اعوجاج GlueVaR

۵.۳ اندازهٔ ریسک GlueVaR تعمیم یافته

در ادامه به تشریح زیرجمع‌پذیری دنباله اندازه‌های ریسک اعوجاج با تعمیم دادن اندازه‌های ریسک $GlueVaR$ که توسط بلزسامپرا و همکارانش در سال ۲۰۱۴ معرفی شده است می‌پردازیم. و همچنین درباره ویژگی‌ها و کاربردهای اندازه‌های ریسک $GlueVaR$ تعمیم یافته بحث و گفتگو می‌کنیم.

تعریف ۱.۵.۳. فرض کنید $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ و $h_1, h_2, \ldots, h_n$ اعدادی باشند که در شرایط $1 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_n > 0$ و $0 \leq h_1 \leq \cdots \leq h_n \leq 1$ صدق کنند. تابع اعوجاج $g^{h_1,\ldots,h_n}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ را به‌صورت

$$g^{h_1,\ldots,h_n}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(u) = \begin{cases} \frac{h_1}{1-\alpha_1}u, & 0 \leq u \leq 1-\alpha_1, \\ h_1 + \frac{h_2-h_1}{\alpha_1-\alpha_2}[u-(1-\alpha_1)], & 1-\alpha_1 < u \leq 1-\alpha_2, \\ \ldots, & \ldots, \\ h_k + \frac{h_{k+1}-h_k}{\alpha_k-\alpha_{k+1}}[u-(1-\alpha_k)], & 1-\alpha_k < u \leq 1-\alpha_{k+1}, \\ \ldots, & \ldots, \\ h_{n-1} + \frac{h_n-h_{n-1}}{\alpha_{n-1}-\alpha_n}[u-(1-\alpha_{n-1})], & 1-\alpha_{n-1} < u \leq 1-\alpha_n, \\ 1, & 1-\alpha_n < u \leq 1. \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت اندازه ریسک اعوجاج متناظر با تابع اعوجاج $g^{h_1,\ldots,h_n}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ را $GlueVaR$ تعمیم یافته می‌نامیم و آن را به‌صورت $GGlueVaR^{h_1,\ldots,h_n}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ نمایش می‌دهیم.

از لحاظ هندسی، تابع اعوجاج $g_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{h_1,\dots,h_n}$ یک تابع قطعه‌وار خطی و صعودی روی بازه [۰،۱] است. جالب‌تر این‌که می‌توان نشان داد، اندازه ریسک $GGlueVaR_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{h_1,\dots,h_n}$ ترکیب خطی از n اندازه ریسک $TVaR$ و یک اندازه ریسک VaR است. علاوه بر این، هر اندازه ریسک اعوجاج وابسته می‌تواند به وسیله یک سری از اندازه‌های ریسک $GGlueVaR$ زیرجمع‌پذیری دنباله حاصل شود. این نتایج همراه با خواص دیگری از $GlueVaR$ تعمیم یافته در این بخش ارائه می‌شوند.

گزاره ۱.۵.۳. برای $X \in L^1$ اندازه‌ی ریسک $GlueVaR$ تعمیم یافته $GGlueVaR_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{h_1,\dots,h_n}$ از Xریسک به‌صورت

$$GGlueVaR_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{h_1,\dots,h_n}(X) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i TVaR_{\alpha_i}(X) + \omega_{n+1} VaR_{\alpha_n}(X), \qquad (۱.۳)$$

جایی‌که

$$\omega_1 = h_1 - \frac{h_2 - h_1}{\alpha_1 - \alpha_2}(1-\alpha_1), \qquad (۲.۳)$$

$$\omega_k = \left(\frac{h_k - h_{k-1}}{\alpha_{k-1} - \alpha_k} - \frac{h_{k+1} - h_k}{\alpha_k - \alpha_{k+1}}\right)(1-\alpha_k) \quad \text{برای} \quad k = 2,\dots,n-1, \qquad (۳.۳)$$

$$\omega_n = \frac{h_n - h_{n-1}}{\alpha_{n-1} - \alpha_n}(1-\alpha_n), \qquad (۴.۳)$$

$$\omega_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \omega_k = 1 - h_n. \qquad (۵.۳)$$

بیان می‌شود. علاوه بر این،

$$VaR_{\alpha_n}(X) \le GGlueVaR_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{h_1,\dots,h_n}(X) \le TVaR_{\alpha_1}(X) \qquad (۶.۳)$$

اگر

$$\frac{1}{1-\alpha_1} \ge \frac{h_1}{1-\alpha_1} \ge \frac{h_2 - h_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \ge \cdots \ge \frac{h_n - h_{n-1}}{\alpha_{n-1} - \alpha_n}. \qquad (۷.۳)$$

برهان. فرض کنید $g_{\alpha_{n,VaR}}$ و $g_{\alpha_{k,TVaR}}$ به‌ترتیب توابع اعوجاج $VaR_{\alpha_n}(X)$ و $TVaR_{\alpha_k}(X)$ باشند. در این‌صورت $g_{\alpha_{n,VaR}}(u) = \mathbb{I}_{(1-\alpha_n,1]}$ همچنین

$$\begin{aligned} g_{\alpha_{k,TVaR}}(u) &= \min\left\{\frac{u}{1-\alpha_k}, 1\right\} = \frac{u}{1-\alpha_k}\mathbb{I}_{[0,1-\alpha_k]} + \mathbb{I}_{(1-\alpha_k,1]} \\ &= \frac{u}{1-\alpha_k}\left(\mathbb{I}_{[0,1-\alpha_1]} + \sum_{i=2}^{k}\mathbb{I}_{(1-\alpha_{i-1},1-\alpha_i]}\right) + \sum_{i=k}^{n-1}\mathbb{I}_{(1-\alpha_i,1-\alpha_{i+1}]} + \mathbb{I}_{(1-\alpha_n,1]}. \end{aligned}$$

توجه کنید که تابع اعوجاج $g_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{h_1,\dots,h_n}(u)$ مربوط به $GlueVaR$ می‌تواند به‌صورت زیر هم نوشته شود.

$$\begin{aligned} g_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{h_1,\dots,h_n}(u) =& \frac{h_1}{1-\alpha_1}u\mathbb{I}_{[0,1-\alpha_1]} \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1}\left(h_k + \frac{h_{k+1}-h_k}{\alpha_k - \alpha_{k+1}}\left(u - (1-\alpha_k)\right)\right)\mathbb{I}_{(1-\alpha_k,1-\alpha_{k+1}]} + \mathbb{I}_{(1-\alpha_n,1]}. \end{aligned}$$

در نتیجه برای نشان دادن رابطه (۱.۳) کافی است نشان دهیم برای هر $[\circ,\text{۱}]$ معادله زیر برقرار است.

$$\begin{aligned}\sum_{k=\text{۱}}^{n}\omega_k g_{\alpha_k,TVaR}(u)+\omega_{n+\text{۱}}g_{\alpha_n,VaR}(u)&=\frac{h_\text{۱}}{\text{۱}-\alpha_\text{۱}}u\mathbb{I}_{[\circ,\text{۱}-\alpha_\text{۱}]}\\&+\sum_{k=\text{۱}}^{n-\text{۱}}\Big(h_k+\frac{h_{k+\text{۱}}-h_k}{\alpha_k-\alpha_{k+\text{۱}}}(u-(\text{۱}-\alpha_k))\Big)\mathbb{I}_{(\text{۱}-\alpha_k,\text{۱}-\alpha_{k+\text{۱}}]}+\mathbb{I}_{(\text{۱}-\alpha_n,\text{۱}]}.\end{aligned} \tag{۸.۳}$$

برای انجام این کار یا محاسبه ضرایب برای $\mathbb{I}_{[\circ,\text{۱}-\alpha_\text{۱}]}$ و $\mathbb{I}_{(\text{۱}-\alpha_k,\text{۱}-\alpha_{k+\text{۱}}]}$ که در آن $k=\text{۱},\text{۲},\dots,n-\text{۱}$ و همچنین $\mathbb{I}_{(\text{۱}-\alpha_n,\text{۱}]}$ در هر دو طرف رابطه (۸.۳) ملاحظه می‌کنیم برای $k=\text{۱},\text{۲},\dots,n,n+\text{۱},\ \omega_k$ باید در معادلات زیر صدق کنند:

$$\frac{h_\text{۱}}{\text{۱}-\alpha_\text{۱}}u=\frac{\omega_\text{۱}}{\text{۱}-\alpha_\text{۱}}u+\frac{\omega_\text{۲}}{\text{۱}-\alpha_\text{۲}}u+\cdots+\frac{\omega_n}{\text{۱}-\alpha_n}u+\circ, \tag{۹.۳}$$

$$h_\text{۱}+\frac{h_\text{۲}-h_\text{۱}}{\alpha_\text{۱}-\alpha_\text{۲}}(u-(\text{۱}-\alpha_\text{۱}))=\omega_\text{۱}+\frac{\omega_\text{۲}}{\text{۱}-\alpha_\text{۲}}u+\cdots+\frac{\omega_n}{\text{۱}-\alpha_n}u+\circ, \tag{۱۰.۳}$$

$$h_\text{۲}+\frac{h_\text{۳}-h_\text{۲}}{\alpha_\text{۲}-\alpha_\text{۳}}[u-(\text{۱}-\alpha_\text{۲})]=\omega_\text{۱}+\omega_\text{۲}+\frac{\omega_\text{۳}}{\text{۱}-\alpha_\text{۳}}u+\cdots+\frac{\omega_n}{\text{۱}-\alpha_n}u+\circ, \tag{۱۱.۳}$$

$$. \qquad \cdots$$

$$h_{j-\text{۲}}+\frac{h_{j-\text{۱}}-h_{j-\text{۲}}}{\alpha_{j-\text{۲}}-\alpha_{j-\text{۱}}}[u-(\text{۱}-\alpha_{j-\text{۲}})]=\omega_\text{۱}+\cdots+\omega_{j-\text{۲}}+\frac{\omega_{j-\text{۱}}}{\text{۱}-\alpha_{j-\text{۱}}}u+\cdots+\frac{\omega_n}{\text{۱}-\alpha_n}u+\circ, \tag{۱۲.۳}$$

$$h_{j-\text{۱}}+\frac{h_j-h_{j-\text{۱}}}{\alpha_{j-\text{۱}}-\alpha_j}[u-(\text{۱}-\alpha_{j-\text{۱}})]=\omega_\text{۱}+\cdots+\omega_{j-\text{۱}}+\frac{\omega_j}{\text{۱}-\alpha_j}u+\cdots+\frac{\omega_n}{\text{۱}-\alpha_n}u+\circ, \tag{۱۳.۳}$$

$$. \qquad \cdots$$

$$h_{n-\text{۲}}+\frac{h_{n-\text{۱}}-h_{n-\text{۲}}}{\alpha_{n-\text{۲}}-\alpha_{n-\text{۱}}}[u-(\text{۱}-\alpha_{n-\text{۲}})]=\sum_{i=\text{۱}}^{n-\text{۲}}\omega_i+\frac{\omega_{n-\text{۱}}}{\text{۱}-\alpha_{n-\text{۱}}}u+\frac{\omega_n}{\text{۱}-\alpha_n}u+\circ, \tag{۱۴.۳}$$

$$h_{n-\text{۱}}+\frac{h_n-h_{n-\text{۱}}}{\alpha_{n-\text{۱}}-\alpha_n}[u-(\text{۱}-\alpha_{n-\text{۱}})]=\sum_{i=\text{۱}}^{n-\text{۱}}\omega_i+\frac{\omega_n}{\text{۱}-\alpha}u+\circ, \tag{۱۵.۳}$$

$$۱ = \sum_{i=۱}^{n+۱} \omega_i. \tag{۱۶.۳}$$

حال با کم کردن رابطه (۱۰.۳) از رابطه (۹.۳) و همچنین رابطه (۱۱.۳) از رابطه (۱۰.۳) خواهیم داشت

$$\omega_۱ = h_۱ + \frac{h_۲ - h_۱}{\alpha_۱ - \alpha_۲}(۱-\alpha_۱) \quad \text{و} \quad \omega_۲ = \left(\frac{h_۲ - h_۱}{\alpha_۱ - \alpha_۲} - \frac{h_۳ - h_۲}{\alpha_۲ - \alpha_۳}\right)(۱-\alpha_۲).$$

به‌عنوان نمونه $\omega_۱$ را بدست می‌آوریم

$$\frac{h_۱}{۱-\alpha_۱}u - h_۱ - \frac{h_۲ - h_۱}{\alpha_۱ - \alpha_۲}(u - (۱-\alpha_۱)) = \frac{\omega_۱}{۱-\alpha_۱}u - \omega_۱,$$
$$h_۱\left(\frac{u}{۱-\alpha_۱} - ۱\right) - \frac{h_۲ - h_۱}{\alpha_۱ - \alpha_۲}(u - ۱ + \alpha_۱) = \omega_۱\left(\frac{u}{۱-\alpha_۱} - ۱\right),$$

طرفین را بر $\left(\frac{u}{۱-\alpha_۱} - ۱\right)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\omega_۱ = h_۱ - \frac{h_۲ - h_۱}{\alpha_۱ - \alpha_۲}(u - ۱ + \alpha_۱).\frac{۱}{\frac{u}{۱-\alpha_۱} - ۱},$$
$$\omega_۱ = h_۱ - \frac{h_۲ - h_۱}{\alpha_۱ - \alpha_۲}(u - ۱ + \alpha_۱).\frac{(۱-\alpha_۱)}{(u-۱+\alpha_۱)},$$
$$\omega_۱ = h_۱ - \frac{h_۲ - h_۱}{\alpha_۱ - \alpha_۲}(۱-\alpha_۱).$$

به همین ترتیب برای $k = ۳, \ldots, n-۱$، رابطه (۳.۳) را بدست می‌آوریم.

$$h_{j-۲} + \frac{h_{j-۱} - h_{j-۲}}{\alpha_{j-۲} - \alpha_{j-۱}}[u - (۱-\alpha_{j-۲})] - \left(h_{j-۱} + \frac{h_j - h_{j-۱}}{\alpha_{j-۱} - \alpha_j}[u - (۱-\alpha_{j-۱})]\right)$$
$$= \frac{\omega_{j-۱}}{۱-\alpha_{j-۱}}u - \omega_{j-۱}$$

در نتیجه

$$\omega_{j-۱}\left(\frac{u}{۱-\alpha_{j-۱}} - ۱\right) = (h_{j-۱} - h_{j-۲})\left(-۱ + \frac{u-۱+\alpha_{j-۲}}{\alpha_{j-۲} - \alpha_{j-۱}}\right) - \frac{h_j - h_{j-۱}}{\alpha_{j-۱} - \alpha_j}(u-۱+\alpha_{j-۱}),$$
$$\omega_{j-۱}\left(\frac{u-۱+\alpha_{j-۱}}{۱-\alpha_{j-۱}}\right) = (h_{j-۱} - h_{j-۲})\left(\frac{-\alpha_{j-۲} + \alpha_{j-۱} + u - ۱ + \alpha_{j-۲}}{\alpha_{j-۲} - \alpha_{j-۱}}\right) - \frac{h_j - h_{j-۱}}{\alpha_{j-۱} - \alpha_j}(u-۱+\alpha_{j-۱}),$$
$$\omega_{j-۱}\left(\frac{u-۱+\alpha_{j-۱}}{۱-\alpha_{j-۱}}\right) = (h_{j-۱} - h_{j-۲})\left(\frac{u-۱+\alpha_{j-۲}}{\alpha_{j-۲} - \alpha_{j-۱}}\right) - \frac{h_j - h_{j-۱}}{\alpha_{j-۱} - \alpha_j}(u-۱+\alpha_{j-۱}),$$

طرفین را بر $\left(\frac{u-۱+\alpha_{j-۱}}{۱-\alpha_{j-۱}}\right)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\omega_{j-۱} = \frac{h_{j-۱} - h_{j-۲}}{\alpha_{j-۲} - \alpha_{j-۱}}(u-۱+\alpha_{j-۱}).\frac{۱-\alpha_{j-۱}}{(u-۱+\alpha_{j-۱})} - \frac{h_j - h_{j-۱}}{\alpha_{j-۱} - \alpha_j}(u-۱+\alpha_{j-۱}).\frac{۱-\alpha_{j-۱}}{(u-۱+\alpha_{j-۱})},$$
$$\omega_{j-۱} = \left(\frac{h_{j-۱} - h_{j-۲}}{\alpha_{j-۲} - \alpha_{j-۱}} + \frac{h_j - h_{j-۱}}{\alpha_{j-۱} - \alpha_j}\right)(۱-\alpha_{j-۱}).$$

(۱۵.۳) از (۱۴.۳) بدست می‌آوریم

$$h_{n-1}+\frac{h_n-h_{n-1}}{\alpha_{n-1}-\alpha_n}(u-(1-\alpha_{n-1}))-1=\frac{\omega_n}{1-\alpha_n}u-\omega_n$$

به این معناست که رابطه (۴.۳) برقرار است. بنابراین برای ω_k، $k=1,2,\dots,n+1$ توسط روابط (۲.۳) تا (۴.۳) بیان شده است. به‌علاوه، به راحتی می‌توان تأیید کرد که برای $k=1,2,\dots,n-1$،

$$\sum_{j=1}^{k}\omega_j=h_k-\frac{h_{k+1}-h_k}{\alpha_k-\alpha_{k+1}}(1-\alpha_k)$$

برقرار است. بدین ترتیب

$$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=\sum_{j=1}^{n-1}\omega_j+\omega_n=h_n$$

و درنتیجه برای رابطه (۱۶.۳)، $\omega_{n+1}=1-h_n$ را بدست می‌آوریم. از این رو، رابطه (۱.۳) برقرار است وقتی که ω_k، $k=1,2,\dots,n,n+1$ توسط روابط (۲.۳) تا (۵.۳) داده می‌شود. علاوه بر این، رابطه (۶.۳) برقرار است زیرا برای $0\le u\le 1$ رابطه

$$g_{\alpha_n,VaR}(u)\le g_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{h_1,\dots,h_n}(u)\le g_{\alpha_1,TVaR}(u)$$

برقرار است هرگاه رابطه (۷.۳) برقرار باشد. □

نتیجه ۱.۵.۳. برای اندازه ریسک $GGlueVaR_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{h_1,\dots,h_n}$ اگر برای h_k و α_k $k=1,2,\dots,n,$ نامساوی‌های

$$\frac{h_1}{1-\alpha_1}\ge\frac{h_2-h_1}{\alpha_1-\alpha_2}\ge\dots\ge\frac{h_n-h_{n-1}}{\alpha_{n-1}-\alpha_n},\qquad(17.3)$$

برقرار باشند و همچنین دامنه دنباله مشترک $\Omega_{X,Y}$ برای هر دو متغیر تصادفی XوY به یکی از صورت‌های $\mathcal{D}_{\alpha_n,X,Y}$ یا $\mathcal{D}_{\alpha_n,X+Y}$ تعریف شود آنگاه اندازه ریسک $GGlueVaR_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{h_1,\dots,h_n}$ زیرجمع‌پذیر دنباله روی $\chi_{g_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{h_1,\dots,h_n}}$ است.

برهان. چون رابطه‌ی (۱۷.۳) برقرار است بنابراین واضح است که تابع اعوجاج $g_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{h_1,\dots,h_n}$ روی $[0,1-\alpha_n]$ مقعر است. حال با توجه به نتیجه ۱.۲.۳ اندازه ریسک $GGlueVaR_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{h_1,\dots,h_n}$ زیرجمع‌پذیر دنباله است. □

قضیه ۱.۵.۳ (همگرایی تسلطی). فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی اندازه‌پذیر روی X باشد به‌طوری‌که

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

به ازای هر $x \in X$ موجود باشد. اگر تابع $g \in L^1(\mu)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $|f_n(x)| \leq g(x)$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و $x \in X$، آنگاه $f \in L^1(\mu)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |\ f_n - f\ |\ \mathrm{d}\mu = 0$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ \mathrm{d}\mu = \int_X f\ \mathrm{d}\mu.$$

قضیه ۲.۵.۳ (استون_وایراشتراس)**.** هرگاه f تابع حقیقی پیوسته‌ای بر $[a,b]$ باشد، دنباله‌ای از چند جمله‌ای‌ها مانند P_n وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

به‌طور یکنواخت بر $[a,b]$.

گزاره ۲.۵.۳. فرض کنید برای هر $n = 1,2,\ldots$ $(\alpha_1^n,\ldots,\alpha_n^n)$ یک دنباله باشد که در شرایط زیر صدق نماید.

.۱

$$1 > \alpha_1^n > \cdots > \alpha_n^n > 0,$$

.۲

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_1^n = 1,$$

.۳

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^n = 0,$$

.۴

$$\lim_{n\to\infty} \max\left\{\alpha_i^n - \alpha_{i+1}^n \ |i = 1,\ldots,n-1\right\} = 0.$$

در این‌صورت برای هر اندازه ریسک اعوجاج منسجم $\rho_g : \chi_g \longrightarrow \mathbb{R}$ همراه با یک تابع اعوجاج مقعر g، به ازای هر $X \in \chi_g$ تساوی

$$\rho_g(X) = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^n\ TVaR_{\alpha_i^n}(X) + \omega_{n+1}^n\ VaR_{\alpha_n^n}(X)\Big), \tag{۱۸.۳}$$

برقرار است. جایی که

$$\omega_1^n = h_1^n - \frac{h_2^n - h_1^n}{\alpha_1^n - \alpha_2^n}(1 - \alpha_1^n),$$
$$\omega_k^n = \left(\frac{h_k^n - h_{k-1}^n}{\alpha_{k-1}^n - \alpha_k^n} - \frac{h_{k+1}^n - h_k^n}{\alpha_k^n - \alpha_{k+1}^n}\right)(1 - \alpha_k^n), \quad k = 2, \dots, n-1,$$
$$\omega_n^n = \frac{h_n^n - h_{n-1}^n}{\alpha_{n-1}^n - \alpha_n^n}(1 - \alpha_n^n),$$
$$\omega_{n+1}^n = 1 - \sum_{k=1}^n \omega_k^n = 1 - h_n^n,$$
$$h_k^n = g(1 - \alpha_k^n), \ \ k = 1, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots$$

برهان. چون تابع اعوجاج g روی $[0,1]$ مقعر است و همچنین $g(0+) = 0$، درنتیجه g روی $[0,1]$ پیوسته می‌باشد. بنابراین، تابع g حد دنباله‌ای از توابع اعوجاج مانند g_n است که در آن برای هر $n = 1, 2, \dots$، $g_n(u) = g_{\alpha_1^n, \dots, \alpha_n^n}^{h_1^n, \dots, h_n^n}(u)$ و ضرایب α_k^n و h_k^n، $1 \leq k \leq n$ و $n \geq 1$ در شرایط گزاره ۲.۵.۳ صدق می‌کنند. بنابراین برای هر $u \in [0,1]$،

$$g(u) = \lim_{n\to\infty} g_n(u) = \lim_{n\to\infty} g_{\alpha_1^n, \dots, \alpha_n^n}^{h_1^n, \dots, h_n^n}(u).$$

حال با توجه به تعاریف اندازه‌های ریسک اعوجاج و قضیه همگرایی تسلطی نتیجه می‌گیریم که

$$\rho_g(X) = \lim_{n\to\infty} \rho_{g_n}(X).$$

بنابراین، با در نظر گرفتن رابطه (۱.۳) رابطه (۱۸.۳) حاصل می‌شود. □

تبصره ۱.۵.۳. به آسانی مشاهده می‌کنیم که برای تابع اعوجاج مقعر g، توابع اعوجاج

$$g_n(u) = g_{\alpha_1^n, \dots, \alpha_n^n}^{h_1^n, \dots, h_n^n}(u)$$

تعریف شده در اثبات گزاره ۲.۵.۳ برای هر $n = 1, 2, \dots$ روی بازه $[0, 1 - \alpha_n^n]$ مقعر هستند. بنابراین طبق نتیجه ۱.۲.۳ اندازه ریسک $GGlueVaR_{\alpha_1^n, \dots, \alpha_n^n}^{h_1^n, \dots, h_n^n}$، که به‌صورت

$$GGlueVaR_{\alpha_1^n, \dots, \alpha_n^n}^{h_1^n, \dots, h_n^n}(X) = \sum_{i=1}^n \omega_i^n \ TVaR_{\alpha_i^n}(X) + \omega_{n+1}^n \ VaR_{\alpha_n^n}(X)$$

بیان می‌شود، برای هر $n = 1, 2, \dots$ زیرجمع‌پذیر دنباله است. بنابراین گزاره ۲.۵.۳ به این معناست که هر اندازه ریسک اعوجاج منسجم حد یک دنباله از اندازه‌های ریسک $GGlueVaR$ زیرجمع‌پذیر دنباله است.

۶.۳ اندازه‌های ریسک اعوجاج دنباله چند متغیره

در یک اندازه ریسک چند متغیره از سبدسهام ریسک‌ها یا بردار تصادفی، ابزار مفیدی برای اندازه‌گیری ریسک‌ها در سبدسهام هستند. لاندسمن و همکارانش در سال ۲۰۱۶ اندازه ریسک امید شرطی دنباله چند متغیره MTCE برای بردار تصادفی مبتنی بر دامنه دنباله مشترک بیان شده در رابطه (۱۳.۲) را معرفی کردند.
در این بخش، اندازه ریسک MTCE تعمیم داده می‌شود و همچنین اندازه‌های ریسک اعوجاج دنباله چند متغیره MTD مبتنی بر اندازه‌های ریسک اعوجاج و دامنه‌های دنباله مشترک ارائه می‌گردد. علاوه بر این، ویژگی‌های اندازه‌های ریسک MTD که با استفاده از نتایج بخش دوم بدست آمده را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۶.۳. فرض کنید $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ یک بردار از توابع اعوجاج باشد. همچنین فرض کنید $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ یک بردار تصادفی باشد که در آن برای هر $i = 1, \ldots, n$، $X_i \in \chi_{g_i}$. علاوه بر این، فرض کنید $\Omega_{\mathbf{X}}$ یک دامنه دنباله مشترک از $\mathbf{X}$ باشد به‌طوری‌که $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{X}}) > 0$. اگر برای هر تابع اعوجاج g_i و هر متغیر تصادفی $X_i \in \chi_{g_i}$، $H_{g_i,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_i)$ به‌صورت

$$H_{g_i,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_i) = \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{X}})} \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} X_i \, \mathrm{d}\mu_{g_i}, \tag{۱.۳}$$

تعریف شود آنگاه اندازه ریسک اعوجاج دنباله چند متغیره $\mathbf{X}$ به‌صورت

$$MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\mathbf{X}}}(\mathbf{X}) = (H_{g_1,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_1), \ldots, H_{g_n,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_n)), \tag{۲.۳}$$

تعریف می‌شود.
$H_{g_i,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_i)$ یک اندازه ریسک اعوجاج دنباله از متغیر تصادفی X_i روی دامنه دنباله مشترک $\Omega_{\mathbf{X}}$ نامیده می‌شود.

حال در گزاره ۱.۶.۳ به بیان ویژگی‌های اندازه ریسک اعوجاج دنباله چند متغیره می‌پردازیم.

گزاره ۱.۶.۳. فرض کنید $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ یک بردار از توابع اعوجاج باشد. همچنین فرض کنید $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ یک بردار تصادفی باشد که در آن برای هر $i = 1, \ldots, n$، $X_i \in \chi_{g_i}$. علاوه بر این، فرض کنید $\Omega_{\mathbf{X}}$ یک دامنه دنباله مشترک از $\mathbf{X}$ باشد به‌طوری‌که $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{X}}) > 0$. اندازه ریسک MTD و اندازه ریسک اعوجاج دنباله که توسط روابط (۲.۳) و (۱.۳) به‌ترتیب تعریف شده‌اند در خواص زیر صدق می‌کنند.

۱. همگنی مثبت: برای هر $\lambda > 0$ اگر $\Omega_{\lambda\mathbf{X}} = \Omega_{\mathbf{X}}$ آنگاه

$$MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\lambda\mathbf{X}}}(\lambda\mathbf{X}) = \lambda MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\mathbf{X}}}(\mathbf{X}). \tag{۳.۳}$$

۲. انتقال پایایی: برای هر بردار ثابت $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$، اگر $\Omega_{\mathbf{X}+\mathbf{c}} = \Omega_{\mathbf{X}}$ آنگاه

$$MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\mathbf{X}+\mathbf{c}}}(\mathbf{X}+\mathbf{c}) = MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\mathbf{X}}}(\mathbf{X}) + \mathbf{c}. \tag{۴.۳}$$

۳. یکنوایی: فرض کنید $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ یک بردار تصادفی nـ بعدی باشد به‌طوری‌که $\mathbf{Y} \geq \mathbf{X}$. در این‌صورت اگر $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{Y}-\mathbf{X}}) > 0$ آنگاه

$$MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\mathbf{Y}-\mathbf{X}}}(\mathbf{Y}-\mathbf{X}) \geq \mathbf{0}, \tag{۵.۳}$$

که در آن $\mathbf{0} = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n\text{بار}}$ بردار nـ بعدی صفر است.

۴. زیرجمع‌پذیری در یک بردار ریسک:[1] اگر تابع اعوجاج g روی $[0, \mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{X}})]$ مقعر باشد آنگاه برای هر $i, j \in \{1, \ldots, n\}$،

$$H_{g,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_i + X_j) \leq H_{g,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_i) + H_{g,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_j). \tag{۶.۳}$$

علاوه بر این

$$H_{g,\Omega_{\mathbf{X}}}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} H_{g,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_i). \tag{۷.۳}$$

۵. زیرجمع‌پذیری نسبت به بردارهای ریسک:[2] برای هر بردار تصادفی nـ بعدی $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$، فرض کنید $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ یک بردار nـ بعدی از توابع اعوجاج باشد. همچنین فرض کنید $\Omega_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}$ یک دامنه دنباله مشترک از $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$ با شرط $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}) > 0$ باشد. در این‌صورت اگر برای هر $i = 1, \ldots, n$، g_i روی $[0, \mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{X},\mathbf{Y}})]$ مقعر باشد، آنگاه

$$MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) \leq MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}}(\mathbf{X}) + MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}}(\mathbf{Y}). \tag{۸.۳}$$

برهان. ۱. اگر $\Omega_{\lambda\mathbf{X}} = \Omega_{\mathbf{X}}$ آنگاه با توجه به روابط (۱.۳)، (۳.۲) و همچنین لم ۱.۸.۲ برای هر $i = 1, \ldots, n$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
H_{g_i,\Omega_{\lambda\mathbf{X}}}(\lambda X_i) &= \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_{\lambda\mathbf{X}})} \int_{\Omega_{\lambda\mathbf{X}}} \lambda X_i \,\mathrm{d}\mu_{g_i} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{X}})} \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} \lambda X_i \,\mathrm{d}\mu_{g_i} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{X}})} \int_{\Omega} \lambda X_i \,\mathrm{d}(\mu_{g_i})_{\Omega_{\mathbf{X}}} \\
&= \lambda \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{X}})} \int_{\Omega} X_i \,\mathrm{d}(\mu_{g_i})_{\Omega_{\mathbf{X}}} \\
&= \lambda \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{X}})} \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} X_i \,\mathrm{d}\mu_{g_i} \\
&= \lambda H_{g_i,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_i).
\end{aligned}$$

---
[1] Subadditivity within a risk vector
[2] Subadditivity among risk vectors

بنابراین

$$\begin{aligned}
MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\lambda\mathbf{X}}}(\lambda\mathbf{X}) &= \left(H_{g_1,\Omega_{\lambda\mathbf{X}}}(\lambda X_1),\dots,H_{g_n,\Omega_{\lambda\mathbf{X}}}(\lambda X_n)\right)\\
&= \left(\lambda H_{g_1,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_1),\dots,\lambda H_{g_n,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_n)\right)\\
&= \lambda MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\mathbf{X}}}(\mathbf{X}).
\end{aligned}$$

۲. فرض کنید $\mathbf{c}=(c_1,\dots,c_n)$. در این‌صورت اگر $\Omega_{\mathbf{X}+\mathbf{c}}=\Omega_{\mathbf{X}}$ آنگاه به‌طور مشابه با توجه به روابط (۱.۳)، (۳.۲) و همچنین لم ۱.۸.۲ برای هر $i=1,\dots,n$ می‌توان نشان داد که

$$H_{g_i,\Omega_{\mathbf{X}+\mathbf{c}}}(X_i+c_i)=H_{g_i,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_i)+c_i.$$

لذا:

$$\begin{aligned}
MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\mathbf{X}+\mathbf{c}}}(\mathbf{X}+\mathbf{c}) &= \left(H_{g_1,\Omega_{\mathbf{X}+\mathbf{c}}}(X_1+c_1),\dots,H_{g_n,\Omega_{\mathbf{X}+\mathbf{c}}}(X_n+c_n)\right)\\
&= \left(H_{g_1,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_1)+c_1,\dots,H_{g_n,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_n)+c_n\right)\\
&= \left(H_{g_1,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_1),\dots,H_{g_n,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_n)\right)+(c_1,\dots,c_n)\\
&= MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\mathbf{X}}}(\mathbf{X})+\mathbf{c}.
\end{aligned}$$

۳. اگر $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{Y}-\mathbf{X}})>0$ و $\mathbf{Y}\geq\mathbf{X}$ آنگاه توسط روابط (۱.۳)، (۳.۲) و همچنین لم ۱.۸.۲ برای هر $i=1,\dots,n$ داریم

$$H_{g_i,\Omega_{\mathbf{Y}-\mathbf{X}}}(Y_i)\geq H_{g_i,\Omega_{\mathbf{Y}-\mathbf{X}}}(X_i)$$

پس رابطه (۵.۳) برقرار است.

۴. طبق تعریف ۱.۷.۲ می‌توان Ω_X را به‌عنوان دامنه دنباله مشترک برای هر دو متغیر تصادفی X_i و X_j برای $i,j=1,\dots,n$ در نظر گرفت. بنابراین با توجه به قضیه ۲.۲.۳ داریم

$$\int_{\Omega_{\mathbf{X}}}(X_i+X_j)d\mu_g\leq\int_{\Omega_{\mathbf{X}}}X_i d\mu_g+\int_{\Omega_{\mathbf{X}}}X_j d\mu_g.$$

حال با توجه به رابطه (۱.۳) رابطه (۶.۳) به‌دست می‌آید. علاوه بر این با به کار بردن نتیجه ۱.۵.۳ و رابطه (۱.۳) رابطه (۷.۳) به‌دست می‌آید.

۵. با توجه به قسمت ۴ برای هر $i=1,\dots,n$ داریم

$$H_{g_i,\Omega_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}}(X_i+Y_i) \leq H_{g_i,\Omega_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}}(X_i) + H_{g_i,\Omega_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}}(Y_i).$$

حال با توجه به رابطه (۲.۳) رابطه (۸.۳) بدست می‌آید.

□

تبصره ۱.۶.۳. شرایط $\Omega_{\lambda\mathbf{X}} = \Omega_{\mathbf{X}}$ و $\Omega_{\mathbf{X}+\mathbf{c}} = \Omega_{\mathbf{X}}$ روی دامنه‌های دنباله مشترک که در قسمت‌های (۱) و (۲) در گزاره ۱.۶.۳ بیان شده‌اند می‌توانند در مثال‌های جالبی همچون دامنه‌های دنباله مشترک

$$\begin{aligned}
&\Omega_{\alpha,S_n} = \{S_n \geq VaR_\alpha(S_n)\},\\
&\Omega^e_{S_n} = \{S_n \geq \mathbb{E}[S_n]\},\\
&\Omega_{\alpha,X_1,\dots,X_n} = \{X_1 \geq VaR_\alpha(X_1)\} \cup \dots \cup \{X_n \geq VaR_\alpha(X_n)\},\\
&\Omega^e_{X_1,\dots,X_n} = \{X_1 \geq \mathbb{E}[X_1]\} \cup \dots \cup \{X_n \geq \mathbb{E}[X_n]\},\\
&\Omega^*_{\alpha,X_1,\dots,X_n} = \{X_1 \geq VaR_\alpha(X_1)\} \cap \dots \cap \{X_n \geq VaR_\alpha(X_n)\},\\
&\Omega^{e*}_{X_1,\dots,X_n} = \{X_1 \geq \mathbb{E}[X_1]\} \cap \dots \cap \{X_n \geq \mathbb{E}[X_n]\},
\end{aligned}$$

تعریف شده توسط روابط (۹.۲) تا (۱۴.۲) صدق نمایند.
همچنین برای بردار تصادفی $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$ و یک بردار از توابع اعوجاج $\mathbf{g}=(g_1,\dots,g_n)$ و تابع اعوجاج h، هر یک از دامنه‌های دنباله مشترک زیر نیز در شرایط $\Omega_{\lambda\mathbf{X}} = \Omega_{\mathbf{X}}$ و $\Omega_{\mathbf{X}+\mathbf{c}} = \Omega_{\mathbf{X}}$ صدق می‌کنند.

$$\Omega^{all}_{\mathbf{g},\mathbf{X}} = \{X_1 \geq \rho_{g_1}(X_1),\dots,X_n \geq \rho_{g_n}(X_n)\}, \tag{۹.۳}$$

$$\Omega^{or}_{\mathbf{g},\mathbf{X}} = \{X_1 \geq \rho_{g_1}(X_1)\} \cup \dots \cup \{X_n \geq \rho_{g_n}(X_n)\}, \tag{۱۰.۳}$$

$$\Omega^{sum}_{h,\mathbf{X}} = \{X_1 + \dots + X_n \geq \rho_h(X_1+\dots+X_n)\}, \tag{۱۱.۳}$$

جایی‌که ρ_g یک اندازه ریسک اعوجاج تعریف شده توسط رابطه (۲.۲) برای تابع اعوجاج g می‌باشد. دلیل این امر همگنی مثبت و انتقال پایایی اندازه‌های ریسک اعوجاج است. به‌عنوان مثال تساوی‌های $\Omega^{all}_{\mathbf{g},\lambda\mathbf{X}} = \Omega^{all}_{\mathbf{g},\mathbf{X}}$ و $\Omega^{all}_{\mathbf{g},\mathbf{X}+\mathbf{c}} = \Omega^{all}_{\mathbf{g},\mathbf{X}}$ را اثبات می‌کنیم.

- $\Omega^{all}_{\mathbf{g},\lambda\mathbf{X}} = \Omega^{all}_{\mathbf{g},\mathbf{X}}$:

$$\begin{aligned}
\omega \in \Omega^{all}_{\mathbf{g},\lambda\mathbf{X}} &\iff \lambda X_1(\omega) \geq \rho_{g_1}(\lambda X_1),\dots,\lambda X_n(\omega) \geq \rho_{g_n}(\lambda X_n)\\
&\iff \lambda X_1(\omega) \geq \lambda\rho_{g_1}(X_1),\dots,\lambda X_n(\omega) \geq \lambda\rho_{g_n}(X_n)\\
&\iff X_1(\omega) \geq \rho_{g_1}(X_1),\dots,X_n(\omega) \geq \rho_{g_n}(X_n)\\
&\iff \omega \in \Omega^{all}_{\mathbf{g},\mathbf{X}}
\end{aligned}$$

- $\Omega^{all}_{\mathbf{g},\mathbf{X}+\mathbf{c}} = \Omega^{all}_{\mathbf{g},\mathbf{X}}$:

$$\begin{aligned}
\omega \in \Omega^{all}_{\mathbf{g},\mathbf{X}+\mathbf{c}} &\iff X_۱(\omega) + c_۱ \geq \rho_{g_۱}(X_۱ + c_۱), \dots, X_n(\omega) + c_n \geq \rho_{g_n}(X_n + c_n) \\
&\iff X_۱(\omega) + c_۱ \geq \rho_{g_۱}(X_۱) + c_۱, \dots, X_n(\omega) + c_n \geq \rho_{g_n}(X_n) + c_n \\
&\iff X_۱(\omega) \geq \rho_{g_۱}(X_۱), \dots, X_n(\omega) \geq \rho_{g_n}(X_n) \\
&\iff \omega \in \Omega^{all}_{\mathbf{g},\mathbf{X}}
\end{aligned}$$

مثال ۱.۶.۳. اگر $\mathbf{X} = (X_۱, \dots, X_n)$ یک بردار تصادفی، $\alpha \in (۰, ۱)$ و $\Omega_{\mathbf{X}}$ یکی از موارد Ω_{α,S_n}، $\Omega^e_{S_n}$، $\Omega_{\alpha,X_۱,\dots,X_n}$ یا $\Omega^e_{X_۱,\dots,X_n}$ انتخاب شود آنگاه $\mathbb{P}\{\Omega_{\mathbf{X}}\} > ۰$. زیرا برای هر بردار تصادفی X با توجه به رابطه (۵.۳) می‌توان نتیجه گرفت که

$$\mathbb{P}(\Omega_{\alpha,X}) = \mathbb{P}(X \geq F_X^{-۱}(\alpha)) \geq ۱ - \alpha > ۰.$$

بنابراین

$$\mathbb{P}(\Omega_{\alpha,S_n}) = \mathbb{P}(S_n \geq VaR_\alpha(S_n)) \geq ۱ - \alpha > ۰$$

و همچنین برای هر $i = ۱, \dots, n$ داریم

$$\mathbb{P}(\Omega_{\alpha,X_۱,\dots,X_n}) \geq \mathbb{P}(X_i \geq VaR_\alpha(X_i)) \geq ۱ - \alpha > ۰.$$

علاوه بر این، به راحتی می‌توان نشان داد که برای هر متغیر تصادفی X با میانگین کراندار داریم

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X]) > ۰. \tag{۱۲.۳}$$

زیرا اگر

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X]) = ۰. \tag{۱۳.۳}$$

آنگاه

$$X < \mathbb{E}[X],\ a.s.(Almost\ surely)$$

بنابراین

$$\mathbb{E}(X) - X > ۰,\ a.s.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\mathbb{E}(X) - X)\ \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_\Omega \mathbb{E}(X)\ \mathrm{d}\mathbb{P} - \int_\Omega X\ \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}(X)\mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{E}(X) \\
&= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = ۰
\end{aligned}$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت که $\mathbb{E}(X) - X = 0 \ a.s.$ یعنی $X = \mathbb{E}(X) \ a.s.$.
این نشان می‌دهد که $\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}(X)) = 1$. این یک تناقض است، در نتیجه $\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}((X)) > 0$.
بنابراین

$$\mathbb{P}(\Omega^e_{S_n}) = \mathbb{P}(S_n \geq \mathbb{E}[S_n]) > 0,$$

همچنین برای $i = 1, \ldots, n$ رابطه

$$\mathbb{P}(\Omega^e_{X_1,\ldots,X_n}) \geq \mathbb{P}(X_i \geq \mathbb{E}[X_i]) > 0$$

برقرار است. بنابراین، هر چهار دامنه دنباله مشترک Ω_{α,S_n}، $\Omega_{\alpha,X_1,\ldots,X_n}$، $\Omega^e_{S_n}$ و $\Omega^e_{X_1,\ldots,X_n}$ در همه‌ی شرایط روی دامنه‌های دنباله مشترک که در گزاره ۱.۶.۳ بیان شده است، صدق می‌کنند.

تبصره ۲.۶.۳. ۱. لازم به ذکر است که نامساوی‌های $\mathbb{P}(\Omega^*_{\alpha,X_1,\ldots,X_n}) > 0$ و $\mathbb{P}(\Omega^{e*}_{X_1,\ldots,X_n}) > 0$ در حالت کلی برای بردارهای تصادفی برقرار نیستند. علاوه بر این، اگر نامساوی‌ها در دامنه‌های دنباله مشترک روابط (۹.۲) تا (۱۲.۲) به نامساوی‌های اکید تبدیل شوند، ممکن است شرط $\mathbb{P}\{\Omega_{\mathbf{X}}\} > 0$ برای بردارهای تصادفی برقرار نباشد.

۲. اندازه‌ی ریسک اعوجاج دنباله H_{g,Ω_X}، که توسط رابطه (۱.۳) تعریف شد می‌تواند به‌عنوان ”امید شرطی“ یک ریسک مانند Y در یک سبدسهام به شرط یک دامنه دنباله مشترک مانند $\Omega_{\mathbf{X}}$ نسبت به اندازه منحرف شده(معوج) μ_g در نظر گرفته شود. این نوع از امیدهای شرطی توسط دنبرگ در سال ۱۹۹۴ و یانگ [1] در سال ۱۹۹۸ و همچنین زو و لی [2] در سال ۲۰۱۲ مورد بررسی قرار گرفته است. به هر حال، بیشتر دامنه‌های دنباله‌های مشترک بحث شده توسط دنبرگ و یانگ مجموعه‌های ثابتی هستند که مستقل از وابستگی ساختارهای بردارهای تصادفی می‌باشند. علاوه بر این، اندازه ریسک دنباله که توسط زو و لی در سال ۲۰۱۲ تعریف شده‌اند می‌تواند به‌عنوان یک حالت خاصی از اندازه ریسک اعوجاج دنباله که توسط رابطه (۱.۳) تعریف شده است ملاحظه گردد. همه‌ی دامنه‌های دنباله مشترک که توسط روابط (۹.۲) تا (۱۴.۲) تعریف شده‌اند توسط تصمیم‌گیران در مدیریت ریسک به‌عنوان پیشامدهای فرین مهم توصیف می‌شوند.
برای مثال، اگر اندوخته‌ها [3] یا منابع مالی توسط VaR_α مشخص شوند آنگاه Ω_{α,S_n} پیشامدی را نمایش می‌دهد که ریسک‌های تجمعی سبدسهام، از منابع مالی ریسک تجمعی بیشتر خواهد شد. در حالی‌که $\Omega_{\alpha,X_1,\ldots,X_n}$ به این معناست که حداقل یک زیرسبدسهام در حالت میل کردن به توانگری‌فنی [4] می‌باشد.

[1] Young
[2] Li
[3] Reserves
[4] Technicalin solvency

علاوه بر این $\Omega^*_{\alpha,X_1,\ldots,X_n}$ نشان دهنده‌ی زیرسبدسهام‌های خواهد بود که در حالت توانگری‌فنی خواهند بود. برای محاسبه کردن اندازه ریسک اعوجاج دنباله چنده متغیره در رابطه (۲.۳) گام اصلی محاسبه کردن اندازه ریسک اعوجاج دنباله‌ی رابطه (۱.۳) است. در ادامه، فرمول‌های برای اندازه ریسک اعوجاج دنباله از نوع رابطه (۱.۳) را برای دامنه‌های دنباله مشترک روابط (۹.۲) تا (۱۴.۲) بدست می‌آوریم.

گزاره ۲.۶.۳. فرض کنید g یک تابع اعوجاج و $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ یک بردار تصادفی در نظر گرفته شود و همچنین $\Omega^{or}_X(t_1,\ldots,t_n)=\{X_1\geq t_1\}\cup\cdots\cup\{X_n\geq t_n\}$. علاوه بر این فرض کنید $p_n(t_1,\ldots,t_n)=\mathbb{P}(\Omega^{or}_{\mathbf{X}}(t_1,\ldots,t_n))>0$، در این‌صورت برای هر $i=1,\ldots,n$

$$H_{g,\Omega^{or}_{\mathbf{X}}(t_1,\ldots,t_n)}(X_i)=t_i\frac{g(p_n(t_1,\ldots,t_n))}{p_n(t_1,\ldots,t_n)}+\int_{-\infty}^{t_i}\Big[\frac{g(S_{X_i}(x_i)-D_i(x_i|t_1,\ldots,t_n))}{p_n(t_1,\ldots,t_n)} -\frac{g(p_n(t_1,\ldots,t_n))}{p_n(t_1,\ldots,t_n)}\Big]dx_i+\frac{1}{p_n(t_1,\ldots,t_n)}\int_{t_i}^{\infty}g(S_{X_i}(x_i))dx_i \quad (۱۴.۳)$$

که در آن S_{X_i} تابع بقاء X_i است و برای $x_i<t_i$

$$\begin{aligned}&D_i(x_i|t_1,\ldots,t_n)\\&=\mathbb{P}(X_1<t_1,\ldots,X_i<t_i,\ldots,X_n<t_n)-\mathbb{P}(X_1<t_1,\ldots,X_i\leq x_i,\ldots,X_n<t_n)\\&=\mathbb{P}(\{X_1\geq t_1\}\cup\ldots\{X_i>x_i\}\cdots\cup\{X_n\geq t_n\})-p_n(t_1,\ldots,t_n).\end{aligned} \quad (۱۵.۳)$$

برهان. چون

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\{X_i>x_i\}\cap(\{X_1\geq t_1\}\cup\cdots\cup\{X_n\geq t_n\}))\\=&\mathbb{P}(\{X_i>x_i\})-\mathbb{P}(\{X_i>x_i\}\cap(\{X_1<t_1\}\cap\cdots\cap\{X_n<t_n\})).\end{aligned} \quad (۱۶.۳)$$

به آسانی مشاهده می‌کنیم که اگر $x_i\geq t_i$، $\mathbb{P}((X_i>x_i)\cap(X_1<t_1,\ldots,X_n<t_n))=0$ و اگر $x_i<t_i$،

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X_i>x_i)\cap(X_1<t_1,\ldots,X_n<t_n))&=\mathbb{P}(X_1<t_1,\ldots,x_i<X_i<t_i,\ldots,X_n<t_n)\\&=D_i(x_i|t_1,\ldots,t_n).\end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\mathbb{P}((X_i>x_i)\cap(\{X_1\geq t_1\}\cup\cdots\cup\{X_n\geq t_n\}))=\begin{cases}S_{X_i}(x_i)-D_i(x_i|t_1,\ldots,t_n), & x_i<t_i,\\ S_{X_i}(x_i), & x_i\geq t_i.\end{cases}$$

بنابراین اگر $t_i \geq 0$،

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_X^{or}(t_1,\dots,t_n)} X_i d\mu_g &= \int_{-\infty}^{0} \big[g(S_{X_i}(x_i) - D_i(x_i|t_1,\dots,t_n)) - g(p_n(t_1,\dots,t_n))\big]dx_i \\ &+ \int_0^{t_i} g(S_{X_i}(x_i) - D_i(x_i|t_1,\dots,t_n))dx_i + \int_{t_i}^{\infty} g(S_{X_i}(x_i)dx_i \\ = t_i g(p_n(t_1,\dots,t_n)) &+ \int_{-\infty}^{t_i} \big[g(S_{X_i}(x_i) - D_i(x_i|t_1,\dots,t_n)) - g(p_n(t_1,\dots,t_n))\big]dx_i \\ + \int_{t_i}^{\infty} g(S_{X_i}(x_i)dx_i.\end{aligned}$$

(۱۷.۳)

اگر $t_i < 0$،

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{\mathbf{X}}^{or}(t_1,\dots,t_n)} X_i d\mu_g &= \int_{-\infty}^{t_i} \big[g(S_{X_i}(x_i) - D_i(x_i|t_1,\dots,t_n)) - g(p_n(t_1,\dots,t_n))\big]dx_i \\ &+ \int_{t_i}^{0} \big[g(S_{X_i}(x_i)) - g(p_n(t_1,\dots,t_n))\big]dx_i + \int_0^{\infty} g(S_{X_i}(x_i)dx_i \\ = t_i g(p_n(t_1,\dots,t_n)) &+ \int_{-\infty}^{t_i} \big[g(S_{X_i}(x_i) - D_i(x_i|t_1,\dots,t_n)) - g(p_n(t_1,\dots,t_n))\big]dx_i \\ + \int_{t_i}^{\infty} g(S_{X_i}(x_i)dx_i.\end{aligned}$$

(۱۸.۳)

حال با توجه به روابط (۱۷.۳) و (۱.۳) رابطه (۱۴.۳) برقرار است. □

تبصره ۳.۶.۳. ۱. با قرار دادن $g(u) = u$ برای هر $u \in [0,1]$ در رابطه (۱۴.۳) برای هر $i = 1,\dots,n$ داریم

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_i|X_1 \geq t_1 or \dots or X_n \geq t_n] =& t_i + \int_{-\infty}^{t_i} \Big[\frac{S_{X_i}(x_i) - D_i(x_i|t_1,\dots,t_n)}{p_n(t_1,\dots,t_n)} - 1\Big]dx_i \\ &+ \frac{1}{p_n(t_1,\dots,t_n)} \int_{t_i}^{\infty} S_{X_i}(x_i)dx_i.\end{aligned}$$

۲. اگر $(X_1,\dots,X_n)$ یک بردار تصادفی نامنفی و $t_i \geq 0$، آنگاه

$$\mathbb{E}[X_i|\{X_1 \geq t_1\} \cup \dots \cup \{X_n \geq t_n\}] = \frac{\mathbb{E}[X_i]}{p_n} - \frac{1}{p_n}\int_0^{t_i} D_i(x_i|t_1,\dots,t_n)dx_i. \quad (۱۹.۳)$$

که در آن $p_n = p_n(t_1,\dots,t_n)$.

۳. اگر $(X_1,\dots,X_n)$ دارای توزیع توام پیوسته

$$F(x_1,\dots,x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1,\dots,X_n \leq x_n)$$

باشد آنگاه تابع $D_i(x_i|t_۱,\ldots,t_n)$ تعریف شده در رابطه (۱۵.۳) به

$$D_i(x_i|t_۱,\ldots,t_n)=F(t_۱,\ldots,t_i,\ldots,t_n)-F(t_۱,\ldots,x_i,\ldots,t_n).$$

تبدیل می‌شود.

گزاره ۳.۶.۳. فرض کنید g تابع اعوجاج و $\mathbf{X}=(X_۱,\ldots,X_n)$ یک بردار تصادفی و همچنین

$$\Omega^{all}_{\mathbf{X}}(t_۱,\ldots,t_n)=\{X_۱\geq t_۱,\ldots,X_n\geq t_n\}$$

تعریف شود. اگر

$$p^*_n(t_۱,\ldots,t_n)=\mathbb{P}(X_۱\geq t_۱,\ldots,X_n\geq t_n)>\circ.$$

آنگاه برای هر $i=۱,\ldots,n$،

$$H_{g,\Omega^*_{\mathbf{X}}(t_۱,\ldots,t_n)}(X_i)=t_i\times\frac{g(p^*_n(t_۱,\ldots,t_n))}{p^*_n(t_۱,\ldots,t_n)}+\frac{۱}{p^*_n(t_۱,\ldots,t_n)}\int_{t_i}^{\infty}g(G_i(x_i|t_۱,\ldots,t_n))dx_i \quad (۲۰.۳)$$

که در آن برای $x_i>t_i$،

$$G_i(x_i|t_۱,\ldots,t_n)=\mathbb{P}(X_۱\geq t_۱,\ldots,X_i>x_i,\ldots,X_n\geq t_n). \quad (۲۱.۳)$$

برهان. اگر $x_i<t_i$ آنگاه

$$\mathbb{P}((X_i>x_i)\cap(X_۱\geq t_۱,\ldots,X_n\geq t_n))=p^*_n(t_۱,\ldots,t_n)$$

و اگر $x_i\geq t_i$ آنگاه

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X_i>x_i)\cap(X_۱\geq t_۱,\ldots,X_n\geq t_n))=&\mathbb{P}(X_۱\geq t_۱,\ldots,X_i>x_i,\ldots,X_n\geq t_n)\\=&G_i(x_i|t_۱,\ldots,t_n).\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^{all}_{X_۱,\ldots,X_n}}X_i d\mu_g=&\int_{\circ}^{\infty}g(\mathbb{P}((X_i>x_i)\cap(X_۱\geq t_۱,\ldots,X_n\geq t_n)))dx_i\\&+\int_{-\infty}^{\circ}\Big[g(\mathbb{P}((X_i>x_i)\cap(X_۱\geq t_۱,\ldots,X_n\geq t_n)))-g(p^*_n(t_۱,\ldots,t_n))\Big]dx_i.\end{aligned}$$

بنابراین اگر $t_i\geq\circ$ داریم

$$\int_{\Omega^{all}_{\mathbf{X}}(t_۱,\ldots,t_n)}X_i d\mu_g=t_i g(p^*_n(t_۱,\ldots,t_n))+\int_{t_i}^{\infty}g(G_i(x_i|t_۱,\ldots,t_n))dx_i. \quad (۲۲.۳)$$

اگر $t_i<\circ$ آنگاه

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^{all}_{\mathbf{X}}(t_۱,\ldots,t_n)}X_i d\mu_g\\&=\int_{t_i}^{\circ}\Big[g(G_i(x_i|t_۱,\ldots,t_n))-g(p^*_n(t_۱,\ldots,t_n))\Big]dx_i+\int_{\circ}^{\infty}g(G_i(x_i|t_۱,\ldots,t_n))dx_i \quad (۲۳.۳)\\&=t_i g(p^*_n(t_۱,\ldots,t_n))+\int_{t_i}^{\infty}g(G_i(x_i|t_۱,\ldots,t_n))dx_i.\end{aligned}$$

حال با توجه به روابط (۲۲.۳) و (۱.۳) رابطه (۲۰.۳) نتیجه می‌شود. □

تبصره ۴.۶.۳. ۱. با قرار دادن $g(u) = u$ برای هر $u \in [0,1]$ در رابطه (۲۰.۳) داریم

$$\mathbb{E}[X_i|X_1 \geq t_1, \dots, X_n \geq t_n] = t_i + \frac{1}{p_n^*(t_1, \dots, t_n)} \int_{t_i}^{\infty} G_i(x_i|t_1, \dots, t_n) dx_i.$$

۲. اگر $X_1, \dots, X_n$ مستقل باشند، آنگاه $\mathbb{E}[X_i|X_1 \geq t_1, \dots, X_n \geq t_n] = \mathbb{E}[X_i|X_i \geq t_i]$.

۳. اگر $(X_1, \dots, X_n)$ دارای تابع بقاء توأم پیوسته

$$S(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n)$$

باشد، آنگاه تابع $G_i(x_i|t_1, \dots, t_n)$ تعریف شده در رابطه (۲۱.۳) به‌صورت

$$G_i(x_i|t_1, \dots, t_n) = S(t_1, \dots, x_i, \dots, t_n)$$

بیان می‌شود.

فصل ۴

کاربردهای اندازه‌های ریسک MTD در تخصیص سرمایه:

۱.۴ مقدمه

در مدیریت ریسک سبدسهام، ریسک‌ها در سبد خیلی اوقات وابسته هستند. برای اندازه‌گیری یک ریسک انفرادی در سبدسهام، از جمله تعیین کردن حق بیمه از یک ریسک انفرادی یا تخصیص سرمایه به ریسک انفرادی، فرد باید وابستگی بین ریسک و دیگر ریسک‌ها را در سبد سهام در نظر بگیرید و همچنین اثرات برخی پیشامدهای فرین روی اندازه‌های ریسک از ریسک‌ها را ملاحظه نماید.
امروزه در دنیا، بازارهای سرمایه کشورها با یکدیگر ترکیب می‌شوند و بازارهای سرمایه بین‌المللی را تشکیل می‌دهند. از این رو نه تنها فرایند رشد اقتصادی کشورها تسریع و تسهیل می‌گردد بلکه با جهانی شدن سرمایه، تخصیص بهینه سرمایه بین‌المللی نیز در حال انجام است. در ادبیات مالی، معیارهای مشخصی جهت اندازه‌گیری کارایی بازار تعریف شده است. بازار سهام افزون بر تأمین نقدینگی برای سهام صادر شده شرکت‌ها، وظیفه مهم‌تری نیز برعهده دارد و آن ارزیابی مداوم شرکت‌ها و تخصیص وجوه بین آن‌ها است.

۲.۴ بازارهای مالی

بازارهای مالی، منابع پولی را از بازارهای دارای وجوه اضافی به بازارهای نیازمند به این منابع انتقال می‌دهند. در بازارهای مالی (اوراق بهادار) از قبیل سهام و اوراق قرضه، خرید و فروش می‌شوند. در بازارهای مالی زمانی وجوه انتقال می‌یابند که یک طرف معامله، دارایی‌های مالی را خریداری می‌کند. بازارهای مالی جریان انتقال وجوه را تسهیل می‌کنند و بدین ترتیب امکان سرمایه‌گذاری خانواده‌ها، بانگاه‌های تجاری و نهادهای دولتی را فراهم می‌سازند [۶].

۳.۴ اهمیت بازارهای مالی

شرکت‌های بازرگانی و نهادهای دولتی برای تأمین مالی فعالیت‌های خود به حجم بالایی از سرمایه نیاز دارند. این شرکت‌های برای این‌که بتوانند رشد و توسعه کنند نیازمند سرمایه‌گذاری بالایی هستند. واضح است که تأمین این میزان سرمایه در زمان محدودی میسر نیست و بایستی از منبع دیگری تأمین مالی شود. دولت‌ها نیز به منظور ارائه بهتر خدمات و کالاها به مردم نیازمند این هستند که حجم بالایی پول وام بگیرند. بازارهای مالی این امکان را برای شرکت‌ها و دولت‌ها فراهم می‌سازند که آن‌ها بتوانند از طریق فروش اوراق بهادار، نیازهای خود را برطرف سازند. سرمایه‌گذاران نیز از طریق خرید این اوراق بهادار، بازده و رفاه خود را افزایش می‌دهند. بازارهای اولیه در صورتی که بتوانند به نحو صحیح عمل کنند می‌توانند برای اقتصاد سرمایه‌داری کاملاً مفید باشند چرا که این بازارها کانال مناسبی برای سرمایه‌گذاران و وام‌گیرندگان فراهم می‌سازند. به علاوه این بازارها باعث می‌شوند سرمایه‌ها به سمت کسانی سوق پیدا کند که توان استفاده کارآ از پول و سرمایه را دارند. در واقع وظیفه مهم یک بازار سرمایه، تخصیص بهینه منابع است. به بازارهای اوراق بهاداری که این ویژگی را داشته باشند کارایی تخصیصی گفته می‌شود. همچنین یک بازار کارآی عملیاتی بازاری است که در آن هزینه مبادله خدمات با حداقل قیمت صورت گیرد. بازارهای اولیه بدون وجود بازارهای ثانویه نمی‌توانند به خوبی فعالیت کنند. سرمایه‌گذاری که اوراق بهاداری را خریداری می‌کند در صورتی که تمایل نداشته باشد آن را تا موعد سر رسید نگهداری کند بتواند آن را به راحتی و با کمترین هزینه بفروشد. وجود بازارهای ثانویه فعال این اطمینان را برای خریداران اوراق بهادار اولیه فراهم می‌سازد که آن‌ها بتوانند در هر موقعی که بخواهند اوراق بهادار خود را در این بازارها بفروشند. البته چنین فروشی می‌تواند با زیان نیز همراه باشد. البته این میزان زیان بهتر از آن است که سرمایه‌گذار اصلاً نتواند اوراق بهادار خود را بفروشد [۱].

۴.۴ بازار سرمایه

بازار سرمایه شامل آن دسته از اوراق بهاداری است که موعد سررسید آن‌ها بیشتر از یک سال است. بازاری است که در آن دارایی‌های مالی و اوراق بهادار با سررسید بیش از یک سال مبادله می‌شود. به خاطر طولانی بودن موعد سررسید و ماهیت اوراق بهادار بازار سرمایه، میزان ریسک در این بازارها بیشتر از بازار پول است. در این نوع بازار، قابلیت فروش در برخی موارد ضعیف‌تر است. بازار سرمایه شامل اوراق بدهی و سهام است سهامی که در این بازار وجود دارد بدون تاریخ سررسید است. به‌طور کلی بازار سازوکاری است که به کمک آن مردم به خرید و فروش کالا و خدمات می‌پردازند. بازارها نیازمند بازیگران و زمان کار مشخص هستند. خریداران در بازار دارای قدرت انتخاب مناسب هستند و می‌توانند از بین کالاها و خدمات، بهترین آن‌ها را انتخاب نمایند. فروشندگان نیز به خریداران بسیاری دسترسی دارند و از این رو هزینه‌های ارتباطی کمتری می‌پردازند. بازار سرمایه نیز مشابه هر بازار دیگری است، اما مهم‌ترین کالای این بازار، سرمایه است. بازار سرمایه بخشی از بازارهای مالی است. بازار سرمایه در مقابل بازار پول، جایگاه تأمین بلند مدت سرمایه شرکت‌ها است. بازار سرمایه زیربنای فعالیت‌های تجاری، صنعتی، دولتی و خصوصی است. همچنین واسطه‌ای برای تخصیص وجوه بلندمدت به منظور تشکیل دارایی‌های سرمایه‌ای است. وجوه این بازار از سرمایه‌گذاران انفرادی، شرکت‌های سرمایه‌گذاری، صندوق‌ها، بانک‌ها و دیگر دارندگان وجوه بدست می‌آید. وجوه مذکور جهت تامین مالی طرح‌های کسب و کار و توسعه‌ای شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار مورد استفاده قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر بازار سرمایه، وجوه را از بخش‌های دارای مازاد جمع‌آوری می‌کند و آن را به سمت کسانی که نیازمند تامین مالی هستند هدایت می‌کند. کارایی بازار سرمایه، حاصل عملکرد بازیگران و نیروهای رقیب در آن است. در کشورهای پیشرفته، بازار سرمایه و به خصوص بورس اوراق بهادار مهم‌ترین جایگاه تأمین سرمایه واحدهای تجاری و صنعتی است [۱۳].

۵.۴ تخصیص سرمایه

تخصیص سرمایه مربوط می‌شود به تصمیم‌گیری مدیر اجرایی شرکت [۱] (CEO) در رابطه با سرمایه‌ای که شرکت به دست آورده را چگونه و در کجا سرمایه‌گذاری کند. در تخصیص سرمایه مدیر اجرایی شرکت باید به روش‌های منابع مالی شرکت را توزیع و سرمایه‌گذاری کند که باعث افزایش بهره‌وری و به حداکثر رساند سود آن‌ها شود. مدیریت بنگاه اقتصادی به دنبال تخصیص سرمایه خود به گونه‌ای است که برای سهامداران خود بیشترین سرمایه را بدست آورد. تخصیص سرمایه از اهمیت بالایی برخوردار است و موفقیت یا عدم موفقیت یک

[1] Chief executive officer

شرکت اغلب به تصمیمات مدیر عامل در خصوص تخصیص سرمایه وابسته است. مدیریت باید به گزینه‌های که باعث زنده ماندن سرمایه موجود شرکت در زمان سرمایه‌گذاری می‌شود توجه کند. همچنین تأثیرات احتمالی هرعامل را روی شرکت ارزیابی کند و وجوه اضافی را نیز به‌طور مناسب و به گونه‌ای اختصاص دهد که بهترین نتایج کلی را برای شرکت به وجود آورد. تکنیک‌های تخصیص سرمایه از اهمیت اساسی در مدیریت سبدسهام و اندازه‌گیری عملکرد مبتنی بر ریسک برخوردار است.

۶.۴ جمع‌پذیری ریسک MTD

در این بخش، کاربردهای اندازه‌های ریسک MTD در تخصیص سرمایه برای یک سبد سهام از ریسک‌ها بیان می‌شود. برای انجام دادن این کار ابتدا نشان می‌دهیم که هرگاه توابع اعوجاج در شرایط خاصی صدق کنند آنگاه اندازه‌های ریسک MTD جمع پذیر هستند.

لم ۱.۶.۴. برای تابع اعوجاج g و پیشامد $A \in \mathcal{F}$ با شرط $\mathbb{P}(A) > 0$، اگر برای هر $0 \leq x \leq \mathbb{P}(A)$، $g(x) = \theta x$ که در آن ضریب θ در شرط $0 < \theta \leq \frac{1}{\mathbb{P}(A)}$ صدق می‌کند داریم

$$H_{g,A}(X) = \theta \mathbb{E}(X|A). \tag{۱.۴}$$

برهان. فرض کنید μ_g توسط رابطه (۲.۳) تعریف شده باشد. دو تابع مجموعه‌ای $\mu_A, \mu_{g,A} \colon \mathcal{F} \to [0,1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu_A(B) = \mathbb{P}(A \cap B) \ \ \& \ \ \mu_{g,A}(B) = \mu_g(A \cap B), \quad B \in \mathcal{F}.$$

چون $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$، به راحتی می‌توان ثابت کرد که برای هر $B \in \mathcal{F}$،

$$\mu_{g,A}(B) = \theta \mathbb{P}(A \cap B) = \theta \mu_A(B)$$

است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned} H_{g,A}(X) &= \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_A X d\mu_g = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_\Omega X d\mu_{g,A} \\ &= \frac{\theta}{\mathbb{P}(A)} \int_\Omega X d\mu_A = \frac{\theta}{\mathbb{P}(A)} \int_A X d\mathbb{P} = \theta \mathbb{E}(X|A). \end{aligned}$$

لذا حکم برقرار است. □

تبصره ۱.۶.۴. با به کار بردن لم ۱.۶.۴، برای یک سبد سهام ریسک $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ و دامنه دنباله مشترک Ω_X با شرط $p_n = \mathbb{P}(\Omega_X) > 0$، اگر g یک تابع اعوجاج باشد که برای هر $0 \leq x \leq p_n$ داشته باشیم $g(x) = \theta x$ که در آن θ در شرط $0 < \theta \leq \frac{1}{p_n}$ صدق نماید آنگاه می‌توان نتیجه گرفت

$$H_{g,\Omega_{\mathbf{X}}}(S_n) = \theta \ \mathbb{E}(S_n|\Omega_{X_1,\ldots,X_n}) = \sum_{i=1}^n \theta \ \mathbb{E}(X_i|\Omega_{X_1,\ldots,X_n}) = \sum_{i=1}^n H_{g,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_i). \tag{۲.۴}$$

علاوه براین، برای بردار تصادفی nـ بعدی $\mathbf{Y}=(Y_1,\dots,Y_n)$ اگر $\mathbf{g}=(g_1,\dots,g_n)$ یک بردار n ـ بعدی از توابع اعوجاج باشد و همچنین $\Omega_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}$ دامنه دنباله مشترک از $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ با شرط $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{X},\mathbf{Y}})>0$ در نظر گرفته شود آنگاه از مفروضات

$$g_i(x)=\theta_i x,\quad 0\le x\le \mathbb{P}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$$
$$0<\theta_i\le\frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{X},\mathbf{Y}})},\ 1\le i\le n$$

نتیجه می‌شود که

$$MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}}(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}}(\mathbf{X})+MTD_{\mathbf{g},\Omega_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}}(\mathbf{Y}). \qquad (۳.۴)$$

با توجه به رابطه (۲.۴) می‌توانیم تخصیص سرمایه‌ها را برای سبدسهام ریسک بر اساس دامنه‌های دنباله مشترک مختلف از ریسک‌ها جمع آوری کنیم. دقیق‌تر این‌که برای یک سبدسهام ریسک $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$ و دامنه دنباله مشترک $\Omega_{X_1,\dots,X_n}$ با شرط

$$p_n=\mathbb{P}(\Omega_X)>0,$$

تمام سرمایه‌ها یا منابع مالی یا حق‌بیمه‌های سبدسهام ابتدا توسط $\theta\ \mathbb{E}(S_n|\Omega_{X_1,\dots,X_n})$ تعیین می‌شوند و سپس به زیرسبدسهام ریسک X_i به $\theta\ \mathbb{E}(X_i|\Omega_{X_1,\dots,X_n})$ اختصاص می‌یابد که در آن $i=1,\dots,n$ و $0<\theta\le\frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_X)}$ است. در نتیجه، تمام سرمایه‌ها یا منابع مالی یا حق‌بیمه‌ها می‌تواند به‌طور کامل به n ریسک اختصاص داده شود. به این معنا که

$$\theta\ \mathbb{E}(S_n|\Omega_{X_1,\dots,X_n})=\sum_{i=1}^{n}\theta\ \mathbb{E}(X_i|\Omega_{X_1,\dots,X_n}), \qquad (۴.۴)$$

که در آن $\theta\in(0,\frac{1}{p_n}]$ را می‌توان به‌عنوان ضریب تنظیم کننده برای اصل امید ریاضی دنباله شرطی (CTE)

$$\mathbb{E}(S_n|\Omega_{X_1,\dots,X_n})=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i|\Omega_{X_1,\dots,X_n}), \qquad (۵.۴)$$

لحاظ شود. در واقع، ضریب θ می‌تواند همان نقش مشابه عامل بار گذاری ایمنی را در اصل حق بیمه مورد انتظار ایفا نماید. سرمایه‌های کلی از جمله منابع‌مالی و حق‌بیمه‌ها برای سبد ریسک‌های $(X_1,\dots,X_n)$ می‌تواند توسط

$$K=\theta\ \mathbb{E}(S_n|\Omega_{X_1,\dots,X_n}). \qquad (۶.۴)$$

تعیین شود. جالب تر این‌که وقتی $\theta=\mathbb{P}(\Omega_X)$ آنگاه رابطه (۴.۴) به رابطه

$$\mathbb{E}(S_n\mathbb{I}_{\Omega_{X_1,\dots,X_n}})=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i\mathbb{I}_{\Omega_{X_1,\dots,X_n}}). \qquad (۷.۴)$$

تبدیل می‌شود، که می‌تواند به‌عنوان یک اصل برای تعیین کردن حق‌بیمه‌های خالص[1] در یک سبدسهام ریسک با کسورات فرانشیز [2] مانند

$$\Omega_{X_1,\ldots,X_n} = \{S_n \geq \delta\mathbb{E}(S_n)\},$$

که در آن $\delta > ۰$ است، لحاظ شود.

تبصره ۲.۶.۴. اگر دامنه دنباله مشترک Ω_X در گزاره ۱.۶.۳ به‌صورت زیر تعریف شود

$$\Omega_{\mathbf{X}} = \{X_۱ > VaR_\alpha(X_۱), \ldots, X_n > VaR_\alpha(X_n)\}, \tag{۸.۴}$$

برای هر $i = ۱, \ldots, n$ و $۰ \leq x \leq \mathbb{P}\{\Omega_{\mathbf{X}}\}$ توابع اعوجاج در رابطه $g_i(x) = x$ صدق کنند آنگاه، گزاره ۱.۶.۳ همراه با رابطه (۴.۲) که در لم ۱.۶.۴ اثبات خواهد شد، همگنی مثبت، انتقال پایایی و یکنوایی اندازه‌های ریسک $MTEC$ که توسط و همکارانش در سال ۲۰۱۶ بیان شده‌اند را بهبود می‌بخشد. علاوه بر این، قسمت ۵ گزاره ۱.۶.۳ زیرجمع‌پذیری اندازه‌های ریسک $MTEC$ را نتیجه می‌دهد.

رویکرد تخصیص سرمایه CTE رابطه (۵.۴) به شرط دامنه دنباله مشترک

$$\Omega_{\alpha,S_n} = \{S_n \geq VaR_\alpha(S_n)\}$$

بطور گسترده توسط کای [3] و لی در سال ۲۰۰۵، چیراگیو[4] و لاندسمن در سال ۲۰۰۷، کاست [5] و همکارانش در سال ۲۰۱۲، دونیه[6] و همکارانش در سال ۲۰۰۸. لاندسمن و والدز[7] در سال‌های ۲۰۰۳ و ۲۰۰۵، زو [8] و مآو [9] در سال ۲۰۱۳، آسیمیت [10] و همکارانش در سال ۲۰۱۱ و دیگران مورد مطالعه قرار گرفته است. اگر رویکرد تخصیص سرمایه مشروط بر دامنه‌های دنباله مشترک دیگری هم‌چون روابط (۱۰.۲) تا (۱۴.۲) محاسبه شود، می‌توان تأثیر وابستگی بین ریسک‌ها در یک سبدسهام و دامنه‌های دنباله مشترک در تخصیص سرمایه را بررسی کرد.

۷.۴ کاربردهای اندازه‌های ریسک MTD

در این بخش، برای تشریح کاربردهای اندازه‌های ریسک اعوجاج دنباله چندمتغیره MTD، رویکرد تخصیص سرمایه CTE، بیان شده توسط رابطه (۵.۴) را به شرط دامنه‌های دنباله

[1] Determining net premiums
[2] Franchise deductibles
[3] Cai
[4] Chiragiev
[5] Cossette
[6] Dhaene
[7] Valdez
[8] Xu
[9] Mao
[10] Asimit

مشترک (۹.۲) تا (۱۴.۲)، برای یک سبد سهام از ریسک‌ها با توزیع‌های پارتو چند متغیره مورد بررسی قرار می‌دهیم. از بردارهای تصادفی پارتو چند متغیره نوع دو استفاده می‌شود تا تأثیرات دامنه‌های دنباله مشترک روابط (۹.۲) تا (۱۴.۲) و وابستگی بین ریسک در یک سبد سهام روی تخصیص سرمایه بررسی شود.

تعریف ۱.۷.۴ فرض کنید $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ یک بردار تصادفی باشد در این‌صورت گوییم $\mathbf{X}$ دارای توزیع پارتو چند متغیره نوع دوم است هرگاه دارای تابع چگالی احتمال تعریف شده به‌صورت زیر باشد که در آن $\beta > 0$ و برای هر $i = 1, \ldots, n$، $\sigma_i > 0$

$$f(X_1 > x_1, \ldots, X_n > x_n) = \begin{cases} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}\left(1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sigma_i}\right)^{-\beta-n} & x_i > 0, \\ 0 & \text{در غیراین‌صورت} \end{cases} \tag{۱.۴}$$

تابع بقاء توام بردار تصادفی $\mathbf{X}$ را با $\mathbf{S}(x_1, \ldots, x_n)$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $1 \leq i \leq n$ و $x_i > 0$ آنگاه

$$\mathbf{S}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 > x_1, \ldots, X_n > x_n) = \left(1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sigma_i}\right)^{-\beta}. \tag{۲.۴}$$

تحت این توزیع اگر $i \neq j$ و $1 \leq i, j \leq n$ آنگاه ضریب همبستگی بین X_i و X_j عبارت است از $Corr(X_i, Y_j) = \frac{1}{\beta}$. توزیع X_i برای $i = 1, \ldots, n$ یک توزیع پارتو با تابع بقاء

$$\mathbf{S}_{X_i}(x_i) = \begin{cases} (1 + \frac{x_i}{\sigma_i})^{-\beta} & x_i > 0, \\ 1 & x_i \leq 0 \end{cases}$$

است که با توجه به تعریف ۱.۳.۲، امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی X_i به‌صورت زیر می‌باشد

$$E(X_i) = \begin{cases} \frac{\sigma_i}{\beta-1} & \beta > 1 \\ \infty & \beta \leq 1 \end{cases}$$

و

$$Var(X_i) = \begin{cases} \frac{\beta\sigma_i^2}{(\beta-1)^2(\beta-2)} & \beta > 2 \\ \infty & \beta \leq 2. \end{cases}$$

حال تخصیص سرمایه را با استفاده از اصل CTE رابطه (۵.۴) و دامنه‌های دنباله مشترک روابط (۹.۲) تا (۱۴.۲) تحت سه مدل زیر محاسبه می‌کنیم. به ازای $n = 3$ در توزیع پارتو چند متغیره نوع دوم اگر در مدل اول $\beta = 1/5$، $\sigma_1 = 320$، $\sigma_2 = 940$، $\sigma_3 = 160$ و در مدل

دوم $\beta = ۲/۵$، $\sigma_۱ = ۹۶۰$، $\sigma_۲ = ۲۸۲۰$، $\sigma_۳ = ۴۸۰$ و در مدل سوم $\beta = ۴/۵$، $\sigma_۱ = ۲۲۴۰$، $\sigma_۲ = ۶۵۲۰$، $\sigma_۳ = ۱۱۲۰$ آنگاه برای هر $i = ۱,۲,۳$، زیان مورد انتظار $\mathbb{E}[X_i]$، در هر سه مدل بیان شده یکسان هستند و عبارتند از $\mathbb{E}[X_۱] = ۶۴۰$، $\mathbb{E}[X_۲] = ۱۸۸۰$، $\mathbb{E}[X_۳] = ۳۲۰$ و $\mathbb{E}[S_۳] = ۲۸۴۰$.

قضیه ۱.۷.۴. فرض کنید $\mathbf{X} = (X_۱, X_۲, X_۳)$ یک بردار تصادفی با توزیع پارتو چند متغیره نوع دوم باشد. آنگاه تابع بقاء متغیر تصادفی $S_۳ = (X_۱, X_۲, X_۳)$ به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\mathbb{P}(S_۳ > s) = \begin{cases} \sum_{i=۱}^{۳} \frac{\sigma_i^۲ (۱+\frac{s}{\sigma_i})^{-\beta}}{\prod_{j=۱, j\neq i}^{۳} (\sigma_i - \sigma_j)} & s > ۰ \\ ۱ & s \leq ۰. \end{cases}$$

برهان. با توجه به روابط (۲.۲) و (۲.۴) از مرجع [۲۴] می‌توان تساوی را اثبات کرد. □

مثال ۱.۷.۴. (تخصیص‌های شرطی روی دامنه های دنباله مشترک مربوط به ریسک‌های تجمعی) هرگاه شرطی سازی روی دامنه دنباله مشترک Ω_{α,S_n} یا $\Omega^e_{S_n}$ یا هر پیشامدی که ریسک‌های تجمعی اتفاق می‌افتد انجام شود آنگاه اصل CTE رابطه‌ی (۵.۴) به صورت

$$\mathbb{E}(S_n | S_n \geq VaR_\alpha(S_n)) = \sum_{i=۱}^{n} \mathbb{E}(X_i | S_n \geq VaR_\alpha(S_n)), \tag{۳.۴}$$

$$\mathbb{E}(S_n | S_n \geq \mathbb{E}(S_n)) = \sum_{i=۱}^{n} \mathbb{E}(X_i | S_n \geq \mathbb{E}(S_n)). \tag{۴.۴}$$

کاهش می‌یابد.

در این مثال، از فرمول‌های روابط (۳.۴) و (۴.۴) برای محاسبه تخصیص سرمایه شرطی روی دنباله‌های ریسک‌های تجمعی استفاده می‌شود. با استفاده از تابع بقاء، می‌توان $VaR_{۰/۹۵}(S_۳)$ را با در نظر گرفتن دامنه دنباله مشترک $\Omega^e_{S_۳}$ و احتمال $\mathbb{P}(\Omega^e_{S_۳}) = \mathbb{P}\{S_۳ \geq \mathbb{E}(S_۳)\}$ به راحتی محاسبه نمود. برای $i = ۱,۲,۳$ مقادیر $\mathbb{E}[X_i | S_۳ \geq t]$ و $\mathbb{E}[S_۳ | S_۳ \geq t]$ بر اساس فرمول‌های حاصل شده در قضایای ۲ و ۳ که توسط چیراگیو و لاندسمن در سال ۲۰۰۷ بدست آمده‌اند، محاسبه می‌شوند. این نتایج عددی در جدول ۱.۴ بیان شده است. از جدول ۱.۴، می‌بینیم که هر چقدر وابستگی بین ریسک‌ها قوی‌تر باشد، به سرمایه‌های بیشتری نیاز داریم. شرطی سازی بر روی دامنه دنباله مشترک $\Omega_{۰/۹۵,S_n}$ نسبت به شرطی سازی روی دامنه دنباله مشترک $\Omega^e_{S_n}$ سرمایه‌های مورد نیاز بیشتری حاصل می‌کند. علاوه بر این، هرگاه وابستگی بین ریسک‌ها خیلی قوی باشد (در این مثال $\beta = ۱/۵$) شرطی سازی روی دامنه دنباله مشترک $\Omega^e_{S_۳}$ صورت پذیرد آنگاه $(\mathbb{E}(\Omega^e_{S_۳}) = ۱۰۵۹۱)$ و هرگاه سرمایه مورد نیاز کلی توسط $VaR_{۰/۹۵}$ محاسبه شود خواهیم داشت $VaR_{۰/۹۵}(S_۳) = ۸۶۰۱$. این بیان می‌کند که $(\mathbb{E}(\Omega^e_{S_۳}) > VaR_{۰/۹۵}(S_۳))$. لذا این نشان می‌دهد که دامنه دنباله مشترک تأثیر مهمی روی سرمایه‌های مورد نیاز دارند.

حال در مثال زیر تخصیص‌های سرمایه مشروط بر دامنه‌های دنباله مشترکی که لااقل یکی از پیش آمدهای دنباله اتفاق می‌افتد بررسی می‌شود.

مثال ۲.۷.۴. هرگاه شرطی سازی روی دامنه دنباله مشترک‌های $\Omega_{\alpha,X_1,\ldots,X_n}$، $\Omega^e_{X_1,\ldots,X_n}$ یا هر دامنه دنباله مشترکی که لااقل یکی از پیشامدهای دنباله اتفاق افتد، آنگاه اصل CTE بیان شده توسط رابطه (۵.۴) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big(S_n|X_1 \geq VaR_\alpha(X_1)\ or \ldots or\ X_n \geq VaR_\alpha(X_n)\big)\\ =&\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\big(X_i|X_1 \geq VaR_\alpha(X_1)\ or \ldots or\ X_n \geq VaR_\alpha(X_n)\big)\end{aligned} \tag{۵.۴}$$

و

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big(S_n|X_1 \geq \mathbb{E}[X_1]\ or \ldots or\ X_n \geq \mathbb{E}[X_n]\big)\\ =&\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\big(X_i|X_1 \geq \mathbb{E}[X_1]\ or \ldots or\ X_n \geq \mathbb{E}[X_n]\big).\end{aligned} \tag{۶.۴}$$

در این مثال، تخصیص‌های سرمایه بر اساس روابط (۵.۴) و (۶.۴) محاسبه خواهند شد. برای انجام این کار، با توجه رابطه (۱۹.۳) از تبصره ۳.۶.۳ قسمت ۲، نیاز به محاسبه $D_i(x_1|t_1,t_2,t_3)$ برای $i=1,2,3$ داریم. به‌عنوان مثال، برای $i=1$ با توجه به توزیع پارتو چند متغیره که در رابطه (۲.۴) بیان شده است می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}D_1(x_1|t_1,t_2,t_3) =&\mathbb{P}\left(x_1 < X_1 < t_1, X_2 < t_2, X_3 < t_3\right)\\ =&\int_{x_1}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2}\int_{-\infty}^{t_3} f(y_1,y_2,y_3)\ \mathrm{d}y_3\ \mathrm{d}y_2\ \mathrm{d}y_1\\ =&\int_{x_1}^{t_1}\int_{0}^{t_2}\int_{0}^{t_3}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}\left(1+\frac{y_1}{\sigma_1}+\frac{y_2}{\sigma_2}+\frac{y_3}{\sigma_3}\right)^{-\beta-3}\ \mathrm{d}y_3\ \mathrm{d}y_2\ \mathrm{d}y_1\\ =&\left(1+\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^{-\beta}-\left(1+\frac{t_1}{\sigma_1}\right)^{-\beta}-\left(1+\frac{x_1}{\sigma_1}+\frac{t_2}{\sigma_2}\right)^{-\beta}\\ &+\left(1+\frac{t_1}{\sigma_1}+\frac{t_2}{\sigma_2}\right)^{-\beta}-\left(1+\frac{x_1}{\sigma_1}+\frac{t_3}{\sigma_3}\right)^{-\beta}+\left(1+\frac{t_1}{\sigma_1}+\frac{t_3}{\sigma_3}\right)^{-\beta}\\ &+\left(1+\frac{x_1}{\sigma_1}+\frac{t_2}{\sigma_2}+\frac{t_3}{\sigma_3}\right)^{-\beta}-\left(1+\frac{t_1}{\sigma_1}+\frac{t_2}{\sigma_2}+\frac{t_3}{\sigma_3}\right)^{-\beta}.\end{aligned}$$

در نتیجه، با استفاده از فرمول داده شده در تبصره ۳.۶.۳، جدول ۲.۴ حاصل می‌شود که نتایج عددی تخصیص‌های سرمایه مبتنی بر روابط (۵.۴) و (۶.۴) می‌باشد. از جدول ۲.۴، می‌توان دریافت که سرمایه‌های مورد نیاز افزایش خواهد یافت هرگاه وابستگی بین ریسک‌ها افزایش یابد. علاوه بر این، شرطی سازی روی دامنه دنباله مشترک $\Omega_{0/95,X_1,X_2,X_3}$ سرمایه‌های مورد نیاز واقعاً بزرگ‌تری [1] را نسبت به شرطی سازی روی دامنه دنباله مشترک $\Omega^e_{X_1,X_2,X_3}$ تولید می‌کند. به ویژه شرطی سازی روی دنباله مشترک $\Omega_{0/95,X_1,X_2,X_3}$ سرمایه‌های مورد نیاز کم‌تری را نسبت به شرطی سازی روی دنباله مشترک $\Omega_{0/95,S_3}$ حاصل می‌کند.

[1] Significantly larger

حال مثالی را ارائه می‌کنیم که تخصیص‌ها مشروط بر دامنه دنباله مشترک‌هایی که همه‌ی پیشامدهای آن اتفاق می‌افتد محاسبه شده است.

مثال ۳.۷.۴. با شرطی سازی روی دامنه‌های دنباله مشترک $\Omega^{*}_{\alpha,X_1,\ldots,X_3}$ و $\Omega^{e*}_{X_1,\ldots,X_3}$ یا هر دامنه دنباله مشترکی که همه‌ی پیشامدهای دنباله آن اتفاق می‌افتد از اصل CTE بیان شده در رابطه (۵.۴) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big(S_n|X_1\geq VaR_\alpha(X_1)\,,\ldots,\ X_n\geq VaR_\alpha(X_n)\big)\\&=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\big(X_i|X_1\geq VaR_\alpha(X_1)\,,\ldots,\ X_n\geq VaR_\alpha(X_n)\big)\end{aligned}\tag{۷.۴}$$

و

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big(S_n|X_1\geq \mathbb{E}[X_1]\,,\ldots,\ X_n\geq \mathbb{E}[X_n]\big)\\&=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\big(X_i|X_1\geq \mathbb{E}[X_1]\,,\ldots,\ X_n\geq \mathbb{E}[X_n]\big).\end{aligned}\tag{۸.۴}$$

اصل تخصیص سرمایه رابطه (۷.۴) به طور جامع توسط لاندسمن و همکارانش در سال ۲۰۱۶ برای توزیع‌های بیضوی مورد مطالعه قرار گرفته است. با به کار بردن تبصره ۴.۶.۳، نتایج عددی تخصیص‌های سرمایه مبنی بر روی روابط (۷.۴) و (۸.۴) برای توزیع پارتو چند متغیره حاصل شده است. این نتایج در جدول ۳.۴ نشان داده شده‌اند. از این جدول، می‌توان دریافت که وابستگی بین ریسک‌های سبد سهام همان تأثیر بیان شده در مثال ۱.۷.۴ و ۲.۷.۴ را نتیجه می‌دهد. به ویژه، شرطی سازی روی دامنه دنباله مشترک $\Omega^{*}_{0/95,X_1,X_2,X_3}$ سرمایه‌های مورد نیاز خیلی بزرگ‌تری را نسبت به شرطی سازی روی دیگر تولید می‌کند. علاوه بر این، شرطی سازی روی دامنه دنباله مشترک $\Omega^{*}_{X_1,X_2,X_3}$ سرمایه‌های مورد نیاز کلی بزرگ‌تری را نسبت به سرمایه‌های مورد نیاز کلی که توسط اندازه ریسک $VaR_{0/95}(S_3)$ اتفاق می‌افتد، تولید می کند. اما از سرمایه‌های مورد نیاز کلی که توسط اندازه ریسک $TVaR_{0/95}(S_3)=\mathbb{E}(S_3|S_3\geq VaR_{0/95}(S_3))$ تولید می‌شود کمتر است.

ما مثال‌ها و کاربردهای اندازه ریسک MTD را در این بخش به وسیله بحث کردن در مورد اندازه ریسک CTE چند متغیره و تخصیص‌های سرمایه، نشان داده‌ایم. اصل تخصیص CTE با اشاره به جمع‌پذیری اندازه ریسک CTE چند متغیره کار خواهد کرد.

جدول ۱.۴: تخصیص‌های شرطی روی $\Omega_{۰/۹۵,S_۳}$ و $\Omega^e_{S_۳}$

	$\beta=۱/۵$	$\beta=۲/۵$	$\beta=۴/۵$
$\mathbb{E}(X_۱\|S_۳\geq VaR_{۰/۹۵}(S_۳))$	۵۷۷۵	۳۰۳۹	۱۹۱۸
$\mathbb{E}(X_۲\|S_۳\geq VaR_{۰/۹۵}(S_۳))$	۱۹۳۱۱	۱۲۲۱۸	۹۴۴۷
$\mathbb{E}(X_۳\|S_۳\geq VaR_{۰/۹۵}(S_۳))$	۲۷۵۴	۱۳۶۴	۸۱۴
$\mathbb{E}(S_۳\|S_۳\geq VaR_{۰/۹۵}(S_۳))$	۲۷۸۴۰	۱۶۶۲۱	۱۲۱۷۹
$\mathbb{E}(X_۱\|S_۳\geq \mathbb{E}(S_۳))$	۲۲۵۰	۱۳۶۹	۱۱۰۲
$\mathbb{E}(X_۲\|S_۳\geq \mathbb{E}(S_۳))$	۷۲۵۸	۴۷۴۲	۴۰۲۳
$\mathbb{E}(X_۳\|S_۳\geq \mathbb{E}(S_۳)$	۱۰۸۳	۶۳۶	۴۹۸
$\mathbb{E}(S_۳\|S_۳\geq \mathbb{E}(S_۳)$	۱۰۵۹۱	۶۷۴۷	۵۶۲۳
$VaR_{۰/۹۵}(S_۳)$	۸۶۰۱	۸۸۰۱	۷۹۸۹
$\mathbb{E}(S_۳)$	۲۸۴۰	۲۸۴۰	۲۸۴۰

جدول ۱.۴ تخصیص شرطی روی دامنه‌های

$$\Omega_{۰/۹۵,S_۳}=\{S_۳\geq VaR_{۰/۹۵}(S_۳)\}$$
$$\Omega^e_{S_۳}=\{S_۳\geq \mathbb{E}(X_۳)\}$$

را نشان می‌دهد.

جدول ۲.۴: تخصیص‌های شرطی روی $\Omega_{۰/۹۵,X_۱,X_۲,X_۳}$ و $\Omega^e_{X_۱,X_۲,X_۳}$

	$\beta=۱/۵$	$\beta=۲/۵$	$\beta=۴/۵$
$\mathbb{E}(X_۱\|\Omega_{۰/۹۵,X_۱,X_۲,X_۳})$	۳۶۸۴	۲۳۱۲	۱۷۴۰
$\mathbb{E}(X_۲\|\Omega_{۰/۹۵,X_۱,X_۲,X_۳})$	۱۰۸۲۱	۶۷۹۱	۵۱۱۲
$\mathbb{E}(X_۳\|\Omega_{۰/۹۵,X_۱,X_۲,X_۳})$	۱۸۴۲	۱۱۵۶	۸۷۰
$\mathbb{E}(S_۳\|\Omega_{۰/۹۵,X_۱,X_۲,X_۳})$	۱۶۳۴۷	۱۰۲۵۹	۷۷۲۲
$\mathbb{E}(X_۱\|\Omega^e_{X_۱,X_۲,X_۳})$	۱۴۷۴	۱۰۰۴	۸۶۹
$\mathbb{E}(X_۲\|\Omega^e_{X_۱,X_۲,X_۳})$	۴۳۲۹	۲۹۵۱	۲۵۵۳
$\mathbb{E}(X_۳\|\Omega^e_{X_۱,X_۲,X_۳})$	۷۳۷	۵۰۲	۴۳۴
$\mathbb{E}(S_۳\|\Omega^e_{X_۱,X_۲,X_۳})$	۶۵۴۰	۴۴۵۷	۳۸۵۶

جدول ۲.۴ تخصیص شرطی روی دامنه‌های

$$\Omega_{۰/۹۵,X_۱,X_۲,X_۳} = \{X_۱ \geq VaR_{۰/۹۵}(X_۱) \ or \ X_۲ \geq VaR_{۰/۹۵}(X_۲) \ or \ X_۳ \geq VaR_{۰/۹۵}(X_۱)\}$$
$$\Omega^{e}_{X_۱,X_۲,X_۳} = \{X_۱ \geq \mathbb{E}(X_۱) \ or \ X_۲ \geq \mathbb{E}(X_۲) \ or \ X_۳ \geq \mathbb{E}(X_۳)\}$$

را نشان می‌دهد.

جدول ۳.۴: تخصیص‌های شرطی روی $\Omega^{*}_{۰/۹۵,X_۱,X_۲,X_۳}$ و $\Omega^{e*}_{X_۱,X_۲,X_۳}$

	$\beta = ۱/۵$	$\beta = ۲/۵$	$\beta = ۴/۵$
$\mathbb{E}(X_۱ \vert \Omega^{*}_{۰/۹۵,X_۱,X_۲,X_۳})$	۱۴۸۹۷	۷۳۲۷	۴۵۲۷
$\mathbb{E}(X_۲ \vert \Omega^{*}_{۰/۹۵,X_۱,X_۲,X_۳})$	۴۳۷۶۰	۲۱۵۲۳	۱۳۲۹۹
$\mathbb{E}(X_۳ \vert \Omega^{*}_{۰/۹۵,X_۱,X_۲,X_۳})$	۷۴۴۸	۳۶۶۳	۲۲۶۴
$\mathbb{E}(S_۳ \vert \Omega^{*}_{۰/۹۵,X_۱,X_۲,X_۳})$	۶۶۱۰۵	۳۲۵۱۳	۲۰۰۹۰
$\mathbb{E}(X_۱ \vert \Omega^{e*}_{X_۱,X_۲,X_۳})$	۵۱۲۰	۲۵۵۸	۱۸۲۸
$\mathbb{E}(X_۲ \vert \Omega^{e*}_{X_۱,X_۲,X_۳})$	۱۵۰۳۹	۷۵۱۶	۵۳۷۱
$\mathbb{E}(X_۳ \vert \Omega^{e*}_{X_۱,X_۲,X_۳})$	۲۵۶۰	۱۲۷۹	۹۱۴
$\mathbb{E}(S_۳ \vert \Omega^{e*}_{X_۱,X_۲,X_۳})$	۲۲۷۱۹	۱۱۳۵۳	۸۱۱۳

جدول ۳.۴ تخصیص شرطی روی دامنه‌های

$$\Omega^{*}_{۰/۹۵,X_۱,X_۲,X_۳} = \{X_۱ \geq VaR_{۰/۹۵}(X_۱), X_۲ \geq VaR_{۰/۹۵}(X_۲), X_۳ \geq VaR_{۰/۹۵}(X_۱)\}$$
$$\Omega^{e*}_{X_۱,X_۲,X_۳} = \{X_۱ \geq \mathbb{E}(X_۱), X_۲ \geq \mathbb{E}(X_۲), X_۳ \geq \mathbb{E}(X_۳)\}$$

را نشان می‌دهد.

۸.۴ اصل اصلاح

اصلاح (برش) [۱] دارای دو معنی است. اصطلاح اصلاح بیشتر هنگام مراجعه به اختلاف درصد بین ارزش بازار دارایی و مبلغی که می‌تواند به عنوان وثیقه برای وام استفاده شود، به کار برده می‌شود. تفاوتی که بین این دو مقدار وجود دارد برای این است که با گذشت زمان قیمت‌های بازار تغییر می‌کنند، وام دهنده برای جبران به این اختلاف نیاز دارد. همچنین گاهی اوقات بازارگردان‌ها [۲] با شکاف(تفاوت نرخ)[۳] در بازار و کم کردن هزینه‌های معامله‌گری در طول

[1] Haircut
[2] Market makers
[3] Spread

روز به دنبال سود (زیان) هستند. زیان مورد انتظار حاصل از این سرمایه‌گذاری‌ها را اصلاح می‌گویند.

مثال ۱.۸.۴. فرض کنید شخصی به وام ۱۰ هزار دلاری نیاز داشته باشد در نتیجه از سبدسهام ۱۰/۰۰۰ دلاری خود به‌عنوان وثیقه استفاده می‌کند، احتمالاً این‌که بانک سبدسهام ۱۰/۰۰۰ دلار را به‌عنوان وثیقه فقط ۵ هزار دلار تشخیص دهد. ۵/۰۰۰ دلار یا ٪۵۰ کاهش ارزش دارایی، برای اهداف وثیقه را مدل اصلاح می‌گویند.

۹.۴ اصل اصلاح در اندازه ریسک MTD

در اینجا به توضیح مثال‌ها و کاربردهای اندازه ریسک MTD بر اساس اندازه ریسک CTE چند متغیره و تخصیص‌های سرمایه پرداخته شده است. اصل تخصیص CTE به دلیل جمع‌پذیری اندازه ریسک CTE چند متغیره مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مورد اندازه ریسک MTD دیگر که ویژگی جمع‌پذیری در آن‌ها وجود ندارد اصول تخصیص CTE قابل حصول نمی‌باشند. بنابراین می‌توان مثال‌های دیگری از اندازه‌های ریسک MTD که متفاوت با اندازه ریسک CTE چند متغیره هستند را مورد استفاده قرار داد. همچنین می‌توان انواع دیگری از تخصیص‌ها را که متفاوت با تخصیص‌های CTE هستند را بر مبنای اندازه‌های ریسک MTD دیگر پیشنهاد داده شوند.
برای مثال اگر $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ یک سبدسهام از ریسک‌ها با توزیع‌های چندمتغیره مانند توزیع‌های پارتو چند متغیره، توزیع‌های نرمال چندمتغیره و غیره باشند آنگاه می‌توان اندازه ریسک اعوجاج دنباله چندمتغیره $(H_{g,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_1), \dots, H_{g,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_n))$ را برای هر تابع اعوجاج g و هر دامنه دنباله مشترک $\Omega_{\mathbf{X}}$ که در روابط (۹.۳) تا (۱۱.۳) داده شده است را محاسبه کرد. اگر g روی $[0, \mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{X}})]$ مقعر باشد آنگاه اندازه ریسک MTD متناظر $(H_{g,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_1), \dots, H_{g,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_n))$ همچنان که در قسمت‌های ۴ و ۵ از گزاره ۱.۶.۳ نشان داده شد زیرجمع‌پذیری می‌باشد. حالت‌های متعددی از این واقعیت که g روی $[0, \mathbb{P}(\Omega_{\mathbf{X}})]$ مقعر باشد وجود دارند. علاوه بر این، اگر سرمایه کلی داده شده برای ریسک تجمعی $S_n = X_1 + \dots + X_n$، مقدار C باشد آنگاه، می‌توان اصل تخصیص اصلاح [1] مبنی بر VaR را به اصل تخصیص اصلاح مبنی بر MTD توسیع داد. به این معنی که برای هر $i = 1, \dots, n$، سرمایه C_i را که به‌صورت

$$C_i = C \times \frac{H_{g,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_i)}{H_{g,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_1) + \dots + H_{g,\Omega_{\mathbf{X}}}(X_n)}$$

تعریف می‌شود به ریسک X_i تخصیص داده شود.

[1] Haircut allocation principle

فصل ۵

نتایج تجربی

۱.۵ مقدمه

در دنیایی امروزی نه تنها شرکت‌ها و نهادهای مالی با مقوله ریسک سرکار دارند بلکه تمامی افراد نیز در کارهای روزمره خود با آن مواجه هستند.به همین دلیل از دیرباز تا کنون اشخاص به دنبال راهی بوده‌اند که بتوانند این ریسک را به صفر یا کمترین مقدار برسانند. به عبارتی دیگر می‌توان گفت که با گسترش و توسعه بازارهای سرمایه، سرمایه‌گذاران به دنبال راهی هستند که بیشترین بازده را در ازای سرمایه‌گذاری و پذیرش کم‌ترین مقدار ریسک بدست آورند، در نتیجه در پی سبد کارا می‌باشند. انتخاب سبد سهام بهینه به معنای انتخاب تعداد و نوع مناسب‌ترین سهام از میان انواع سهام موجود برای خریداری و نگهداری در مدت مشخص به‌گونه‌ای که درآمد حاصله سرمایه گذار حداکثر شود. در این انتخاب دو جنبه اساسی وجود دارد. اولین جنبه معیاری است که کارایی سبد سهام را اندازه می‌گیرد، کارایی با معیارهایی مثل میانگین، میانه یا مد سنجیده می‌شود. دومین جنبه معیاری است که ریسک را اندازه می‌گیرد، ریسک با معیارهایی مثل واریانس، دامنه تغییرات، میانگین انحراف خطی، نیم واریانس، ارزش در معرض ریسک، بتا و یا ارزش در معرض ریسک شرطی سنجیده می‌شود [۱۶].
در این پایان نامه به بررسی اندازه ریسک GlueVaR که توسط بلزسامپرا و همکارانش در سال ۲۰۱۴ معرفی شده است پرداخته شد. و همچنین درباره ویژگی‌ها و کاربردهای اندازه‌های ریسک GlueVaR تعمیم یافته بحث و گفتگو شده است. این معیار از ترکیب خطی دو سنجه

ریسک ارزش در معرض خطر (VaR) و متوسط ارزش در معرض خطر (AVaR) که گاهی اوقات به آن ارزش در معرض خطر شرطی (CVaR) نیز می‌گویند بدست می‌آید [۱۵].
VaR رایج‌ترین معیاری است که سرمایه‌گذاران هنگام سرمایه‌گذاری برای محاسبه ریسک از آن استفاده می‌کنند. این معیار، ریسک را براساس آخرین ترکیب دارایی های موجود در سبدسهام اندازه و پیش‌بینی می‌کند [۱۶]. هرچند معیار VaR رایج‌ترین و کاربردی‌ترین ابزار سنجش ریسک در دنیای اقتصاد است، اما این معیار در شرایط بحرانی بازار نمی‌تواند به درستی ریسک را اندازه بگیرد. راکفلر و یوریاسف در سال ۲۰۰۲ معیار AVaR را که از قواعد انسجام پیروی می‌کند معرفی کرداند. معیار AVaR به عنوان معیار منسجم و زیر جمع‌پذیر برای محاسبه، پیش‌بینی و مدیریت ریسک سرمایه‌گذاری در بازار، از کارایی بالاتری برخوردار است. اما این معیار در برخی موارد، بسیار محتاطانه عمل می‌کند واندازه ریسک را بیشتر از آنچه که هست اندازه‌گیری می‌کند. از این رو معیار GlueVaR می‌تواند معیار مناسبی برای سنجش ریسک که ترکیب خطی از دو معیار VaR و AVaR است باشد.

۲.۵ معیارهای ریسک به کار برده شده

به توضیح و بررسی مختصری از دو سنجه پر کاربرد در این پژوهش می‌پردازیم و همچنین معیار ریسک GlueVaR که برای اندازه‌گیری نهایی ریسک از آن استفاده شده است.

۱.۲.۵ ارزش در معرض ریسک

ارزش در معرض ریسک، به اختصار VaR گفته می‌شود یک معیار آماری است که حداکثر زیان مورد انتظار را در سرمایه‌گذاری یک دارایی در دوره زمانی مشخص با سطح اطمینان معین (احتمال) به صورت کمی محاسبه می‌کند. در نتیجه VaR دارای دو پارامتر است، یکی N که افق زمانی را به صورت تعداد روز نشان می‌دهد و دیگری X که فاصله اطمینان را نشان می‌دهد. فرض معمول این است که:

$$\text{VaR در طول دوره N روزه} = \text{VaR یک روزه} \times \sqrt{N} \qquad (۱.۵)$$

در مواردی که تغییرات در ارزش بدره در روزهای متوالی دارای توزیع نرمال یکسان مستقلی با میانگین صفر باشد، فرمول بالا دقیقاً درست است و در سایر شرایط این فرمول تقریباً درست است [۴۱]. یکی از روش‌های برآورد VaR استفاده از شبیه‌سازی تاریخی است که به وفور مورد استفاده قرار می‌گیرد. این تکنیک عبارت است از بکار گیری داده‌های قدیمی در روشی کاملاً مستقیم وتقریباً ساده به عنوان راهنمایی برای آنچه که ممکن است در آینده بوقوع بپیوندد. علاوه بر شبیه‌سازی تاریخی استفاده از روش مدل پارامتریک است که به روش واریانس– کواریانس نیز معروف می‌باشد. روش پارامتریک یکی از مهم‌ترین روش‌ها برای محاسبه VaR است [۸].

۲.۲.۵ متوسط ارزش در معرض ریسک

معیار متوسط ارزش در معرض خطر (AVaR) در شرایط بحرانی بازار یک جایگزین مناسب برای سنجه VaR است. روش‌های مختلفی برای محاسبه و برآورد AVaR وجود دارد که مسئله بهینه سازی سبدسهام امکان استفاده از آن‌ها را فراهم می‌کند. بدیهی است که از قواعد انسجام پیروی و اندازه ریسک منسجم را نشان می‌دهد همچنین نسبت به روابط ترجیحی سرمایه‌گذاران با ریسک سازگار است. AVaR یک حالت خاص از اندازه‌گیری ریسک طیفی است. AVaR را در حالت امید شرطی می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned} AVaR_\alpha(X) &= -\frac{۱}{\alpha}\int_۰^\alpha VaR_\gamma(X)\,\mathrm{d}\gamma \\ &= \mathbb{E}\left[-X|X \leq -VaR_\alpha(X)\right] \end{aligned}$$

تعریف می‌شود. AVaR در توزیع نرمال دارای ساختار همان VaR نرمال است که مقیاس مناسب ما بین انحراف معیار و امید ریاضی است. همچنین، خواص AVaR نرمال با انحراف معیار تعیین می‌شوند. برای یک نمونه از بازده سبدسهام که توزیع آن مشخص نیست می‌توان AVaR بازده سبدسهام را تخمین زد. اگر $r_۱, \ldots, r_n$ بازده سبدسهام داده شده و به ترتیب در بازه زمان‌های $t_۱, t_۲ \ldots, t_n$ در نظر گرفته شود. و همچنین $r_{(۱)} \leq r_{(۲)} \leq, \ldots, \leq r_{(n)}$ نمونه‌ای مرتب شده که $r_{(۱)}$ کم‌ترین بازده داده شده و $r_{(n)}$ بزرگ‌ترین مقدار بازده سبدسهام باشد، آنگاه AVaR بازده سبدسهام با سطح اطمینان α به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۴۲].

$$AVaR_\alpha(r) = -\frac{۱}{\alpha}\left(\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{[n\alpha]-۱} r_{(k)} + \left(\alpha - \frac{[n\alpha]-۱}{n}\right) r_{([n\alpha])}\right). \qquad (۲.۵)$$

۳.۲.۵ معیار GlueVaR

معیار ریسک GlueVaR که در انتقاد از دو معیار VaR و AVaR معرفی شده است و ترکیب خطی از این دو معیار است. معیار ریسک GlueVaR به دلیل انعطاف‌پذیری بالا می‌تواند جایگزین مناسبی برای این دو معیار سنجش ریسک باشد.

$$GlueVaR_{\beta,\alpha}^{h_۱,h_۲} = \omega_۱ AVaR_\beta(X) + \omega_۲ AVaR_\alpha(X) + \omega_۳ VaR_\alpha(X). \qquad (۳.۵)$$

که در آنXها متغیرهای تصادفی هستند که بر حسب تابع زیان بدست می‌آیند. یعنی بیشترین مقدار ضرر سرمایه‌گذار را در طول دوره زمانی معین نشان می‌دهند. و همچنین ωها وزن‌های معیارها هستند که با انتخاب مناسب آن‌ها بر اساس مقادیر α، β، $h_۱$ و $h_۲$ می‌توان معیار ریسک GlueVaR را با دقت بالاتری برآورد کرد. ما در طی این پژوهش از وزن‌های برابر استفاده کرده‌ایم. معیار ریسک GlueVaR در واقع یک معیار ریسک انحراف (اعوجاج) است [۱۶]. مؤلفه‌های اصلی در تعریف معیار ریسک اعوجاج، تابع اعوجاج و مفهوم انتگرال شوکت هستند

که در فصل دوم به آن‌ها اشاره شده است. این معیار از حاصل جمع $AVaR_\alpha$، $AVaR_\beta$ و VaR_α بدست می‌آید. که در آن α و β سطح اطمینان‌های تابع اعوجاج هستند.

۴.۲.۵ معیار مناسب

یکی از سوالات مهم در مورد این سه معیار ریسک این است که کدام یک از این معیارها برای سنجش ریسک مناسب‌تراند. آرتزنر و همکارانش در سال ۱۹۹۹ نظریهٔ سنجه‌های منسجم را ارائه کردند. بنا به دلایل اقتصادی، آن‌ها به این نتیجه رسیدند که هر اندازه ریسک باید در چهار اصل به نام قواعد انسجام صدق کند تا بتوان از آن به‌عنوان یک اندازه ریسک مناسب یاد کرد. این قواعد در فصل اول به‌طور کامل بیان شده‌اند. علاوه بر ویژگی انسجام، مدیران ریسک، کارگزاران و کارشناسان اقتصادی، ویژگی‌های دیگری نیز در انتخاب یک معیار به منظور سنجش ریسک، مد نظر قرار داده‌اند. از مهم‌ترین این ویژگی‌ها می‌توان به سادگی برآورد، انعطاف‌پذیری بالا، قابلیت سنجش مناسب در شرایط بحرانی بازار و نیز کارآمدی مناسب در شرایط عادی بازار اشاره کرد در جدول ۱.۵ ویژگی‌های بیان شده با یکدیگر مقایسه شده‌اند [۱۶].

جدول ۱.۵: مقایسه ویژگی‌های معیارهای ریسک VaR، AVaR و GlueVaR

ویژگی	VaR	$AVaR$	$GluVaR$
ویژگی انسجام	ندارد	دارد	دارد
سادگی برآورد	دارد	ندارد	ندارد
انعطاف‌پذیری بالا	ندارد	ندارد	دارد
قابلیت سنجش مناسب ریسک در شرایط بحرانی بازار	ندارد	دارد	دارد
کارآمدی مناسب در شرایط عادی بازار	دارد	ندارد	دارد

با توجه به مطالبی که در ابتدای فصل و جدول ۱.۵ و همچنین فصل‌های قبل بیان شده است می‌توان معیارهای سنجه ریسک را مورد بررسی قرار داد. یک سرمایه‌گذار عقلایی، ریسک گریز است در نتیجه برای اندازه‌گیری ریسک معیاری را مد نظر قرار می‌دهد که بتواند ریسک را باتوجه به شرایط بازار دقیق‌تر محاسبه کند. معیار VaR یکی از کارآمدترین معیارهای سنجش ریسک است و به سادگی برآورد می‌شود همچنین در شرایط عادی بازار نیز ریسک را با دقت مناسبی سنجش می کند. اما این معیار، در شرایط بحرانی بازار عملکرد مناسبی ندارد و نمی‌تواند ریسک را به درستی برآورد کند. از مهم‌ترین معایب این معیار می‌توان به عدم ویژگی انسجام اشاره کرد. در این حال معیار ریسک AVaR هرچند در قواعد انسجام صدق می‌کند، اما در زمانی که شرایط عادی بر بازار حاکم است، بسیار محتاطانه عمل می کند

و اندازه ریسک را بیشتر از اندازه واقعی آن برآورد می‌کند. در ضمن برآورد این معیار به سادگی VaR نیست. به‌عنوان مثال تحت شرایط خاص برای توابع با توزیع‌های معین باید از تقریب انتگرال‌ها استفاده کرد. ولی معیار GlueVaR نسب به معیارهای VaR و AVaR از ویژگی‌های مناسب‌تری برخوردار است. از مهم‌ترین مزایای این معیار، می‌توان به ویژگی انسجام و کارآمدی مناسب در شرایط عادی و بحرانی بازار اشاره کرد.

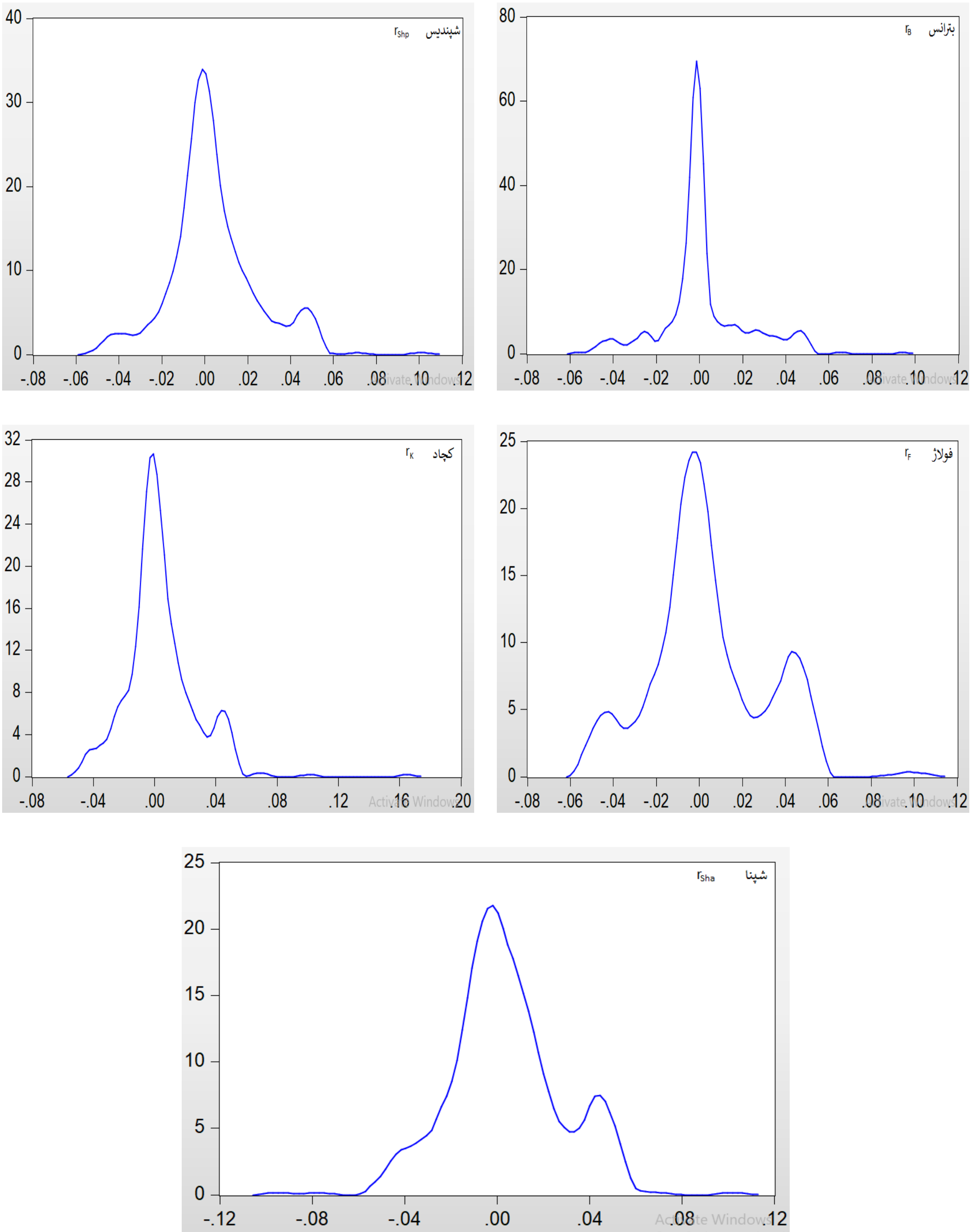
۳.۵ داده‌ها و تجزیه تحلیل اطلاعات

در این بخش به بیان و معرفی داده‌ها پرداخته می‌شود و با استفاده از اطلاعات گذشته و هر آن‌چه که در طی این پژوهش در مورد معیار ریسک GlueVaR بدست آورده می‌شود، نتیجه‌گیری خواهد شد. داده‌ها و اطلاعات در دسترس را در نرم‌افزارهای اکسل و ایویوز پیاده‌سازی شده‌اند. با کمک نرم‌افزار اکسل مقادیر را محاسبه و با استفاده از نرم‌افزار ایویوز نمودارهای مقادیر بدست آمده، نشان داده خواهند شد.

۱.۳.۵ داده‌های استفاده شده در اندازه‌گیری ریسک

در این پژوهش، برای برآورد معیارهای ریسک VaR، AVaR و GlueVaR از داده‌های بازده (درصد قیمت پایانی) قیمت سهام پنج شرکت بازار بورس ایران باتوجه به توزیع نرمال به کار برده شده است. این سهام‌ها دارای وزن یکسان و از پنج گروه متفاوت انتخاب شده‌اند. داده‌های استفاده شده ۵۰۰ روز کاری بازار، یعنی از تاریخ ۱۳۹۶/۰۶/۰۱ تا ۱۳۹۸/۰۶/۳۰ هستند. با استفاده از تعاریف فصل دوم ابتدا واریانس، انحراف معیار و ضریب‌همبستگی داده‌ها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. لازم به ذکر است با استفاده از رابطه (۲.۲) می‌توان گفت بازده سهام شرکت‌های انتخاب شده دارای ضریب همبستگی مثبت می‌باشد. شکل ۱.۵ نمودار تابع چگالی احتمال بازده‌ی شرکت‌های بترانس r_B، شپندیس r_{Shp}، شپنا r_{Sha}، فولاژ r_F و کچاد r_K، در طول دوره انتخاب شده را نمایش می‌دهد. همچنین جدول ۲.۵ آمار توصیفی [1] بازده سهام شرکت‌های که در پژوهش از آن‌ها استفاده کرده‌ایم را نشان می‌دهد.

[1] Descriptive Statistics



شکل ۱.۵: تابع چگالی احتمال بازده سهام‌های شرکت‌ها

شکل ۱.۵ نمودار تابع توزیع احتمال هر یک از پنج شرکت انتخاب شده در سبدسهام را نشان می‌دهد. این نمودارها بر حسب مقادیر بازده روزانه سهم‌ها با کمک نرم‌افزار ایویوز بدست آمده‌اند. با توجه به نمودارها می‌توان گفت که بازده شرکت‌ها دارای توزیع نرمال نمی‌باشد.

جدول ۲.۵: آمار توصیفی بازده شرکت‌ها و سبدسهام

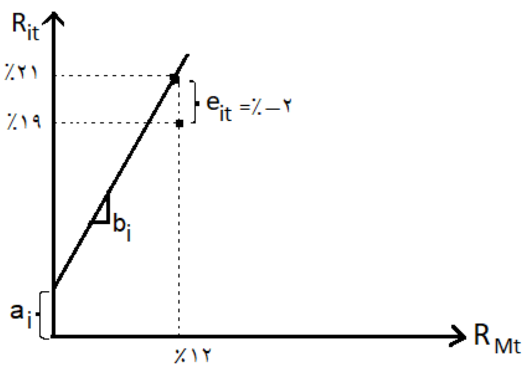
	r_B	r_{Sha}	r_F	r_K	r_{Shp}	r_P
میانگین	۰/۰۰۱۱۰۹	۰/۰۰۳۲۹۴	۰/۰۰۳۰۲۶	۰/۰۰۲۵۷۶	۰/۰۰۲۵۷۳	۰/۰۰۲۵۱۵
میانه	-۰/۰۰۰۹۰۱	۰/۰۰۰۷۹۲	-۰/۰۰۱۱۵۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۸۱۴
ماکزیمم	۰/۰۴۹۹۸۲	۰/۰۶۸۸۸۷	۰/۱۰۲۰۵۹	۰/۱۰۰۸۷۶	۰/۰۷۱۱۹۱	۰/۰۵۸۳۷۱
مینیمم	-۰/۰۵۶۳۴۲	-۰/۰۹۴۶۲۱	-۰/۰۴۹۴۳۵	-۰/۰۴۷۳۹۸	-۰/۰۵۰۵۴۷	-۰/۰۴۸۱۸۳
انحراف معیار	۰/۰۱۸۷۹۵	۰/۰۲۴۰۹۱	۰/۰۲۵۸۲۲	۰/۰۲۰۳۵۱	۰/۰۱۹۱۷۰	۰/۰۱۴۵۱۶
چولگی	۰/۳۳۴۰۶۰	۰/۰۱۴۱۰۸	۰/۴۱۹۲۸۳	۰/۶۰۹۳۱۴	۰/۳۸۵۵۱۱	۰/۱۷۳۱۴۵
کشیدگی	۴/۲۷۶۰۵۹	۳/۴۲۱۶۶۱	۳/۵۱۳۳۷۹	۴/۶۳۶۴۸۳	۴/۰۷۹۹۱۸	۴/۴۲۴۷۶۵
احتمال	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۲۰۰۴۱۹	۰/۰۰۰۱۶۶	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰

۲.۳.۵ برآورد معیارهای VaR و AVaR

مدل تک شاخص (تک عامل)، بازده هر اوراق بهادار را به بازده شاخص سهام عادی مرتبط می‌سازد. این مدل را ویلیام شارپ در پیگیری کارهای مارکوئیتز برای حل مسائل سبدسهام ارائه کرد.

$$R_{it} = a_i + b_i R_{Mt} + e_{it}$$

در این مدل R_{it} بازده تصادفی اوراق بهادار i در دوره t، R_{Mt} بازده تصادفی شاخص بازار در دوره t، a_i آن بخش از بازده اوراق بهادار i که مستقل از عملکرد بازار است(بازده ثابت)، b_i معیار حساسیت بازده سهام به بازده شاخص بازار و e_{it} خطای باقیمانده تصادفی در دوره t یا تفاوت میان بازده واقعی برای چند دوره و بازده مورد انتظار با توجه به بازده بازار است [۱]. هدف ما پیدا کردن e_{it} می‌باشد. مدل تک شاخص در شکل ۲.۵ نشان داده شده است.



شکل ۲.۵: مدل تک شاخص

همان‌طور که در ابتدای فصل بیان شد معیار ریسک GlueVaR ترکیب خطی از معیارهای VaR و AVaR است. در نتیجه داده‌ها را برای معیار VaR در سطح اطمینان α و معیار AVaR را در سطح‌های α و β با شرط $\alpha < \beta$ محاسبه می‌شوند. معیار VaR را در سطح اطمینان ۹۹٪ برای برای بازده روزانه سهم شرکت‌ها با فرض مدل مبتنی بر توزیع نرمال، محاسبه می‌شود. برای محاسبه VaR ابتدا انحراف معیار را به‌صورت

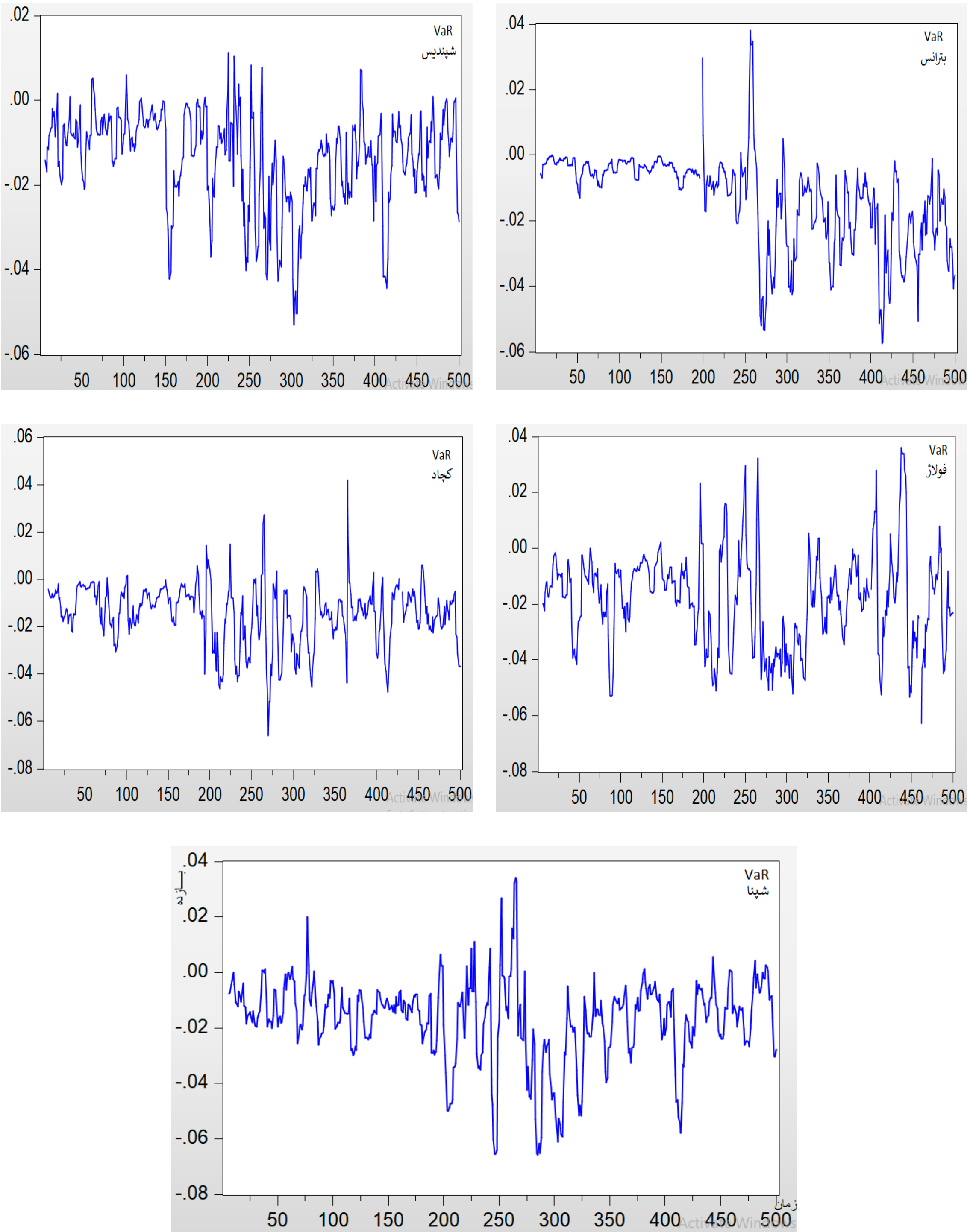
$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=۱}^{N} \mathbf{P}_i (x_i - \mu)^۲}$$

برآورد خواهیم کرد که در آن μ میانگین داده‌های موجود می‌باشد. در نهایت VaR به‌صورت

$$VaR_\alpha = \mu - ۲/۳۳ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{۵}}\right)$$

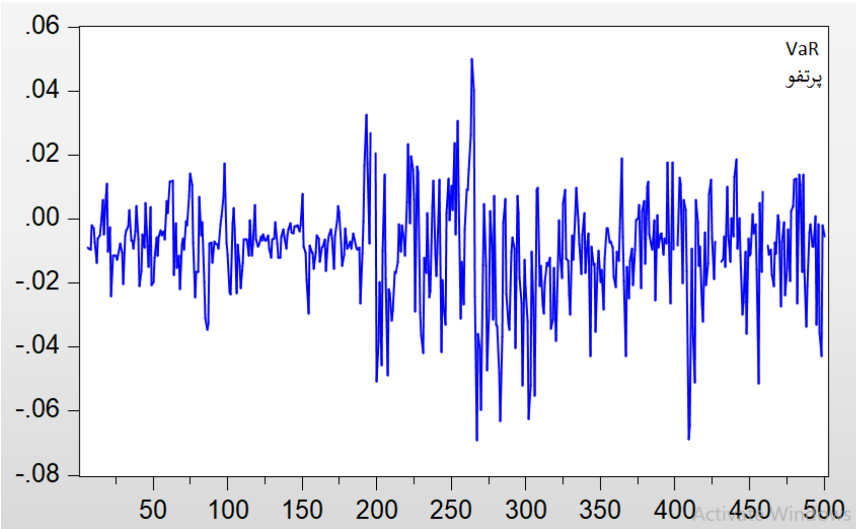
بدست می‌آید. همان‌طور که گفتیم با فرض اینکه تغییرات سهام دارای توزیع نرمال هستند. با

توجه به جدول مقادیر استاندارد $N(-۲/۳۳) = ۰/۰۱$ می‌شود، به این معناست که ۱٪ احتمال وجود دارد، یک متغیر با توزیع نرمال بیشتر از ۲/۳۳ انحراف معیار آن کاهش یابد. مفهوم دیگر این مطلب آن است که با سطح اطمینان ۹۹٪ می‌توان گفت که متغیر با توزیع نرمال دارای ارزش کمتر از ۲/۳۳ انحراف معیار نخواهد داشت.



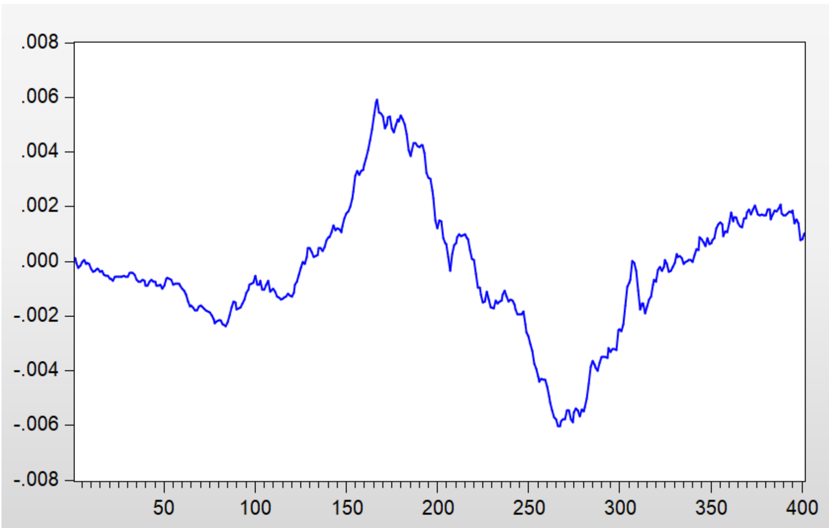
شکل ۳.۵: نوسانات VaR بدست آمده برای شرکت‌ها (روزانه)

شکل ۳.۵ نوسانات محاسبه شده سنجه VaR برای بازده هریک از سهام شرکت‌ها را در بازه زمانی مشخص نشان می‌دهد. این نوسانات تغییرات روزانه ریسک را برای هر سهم نشان می‌دهد.



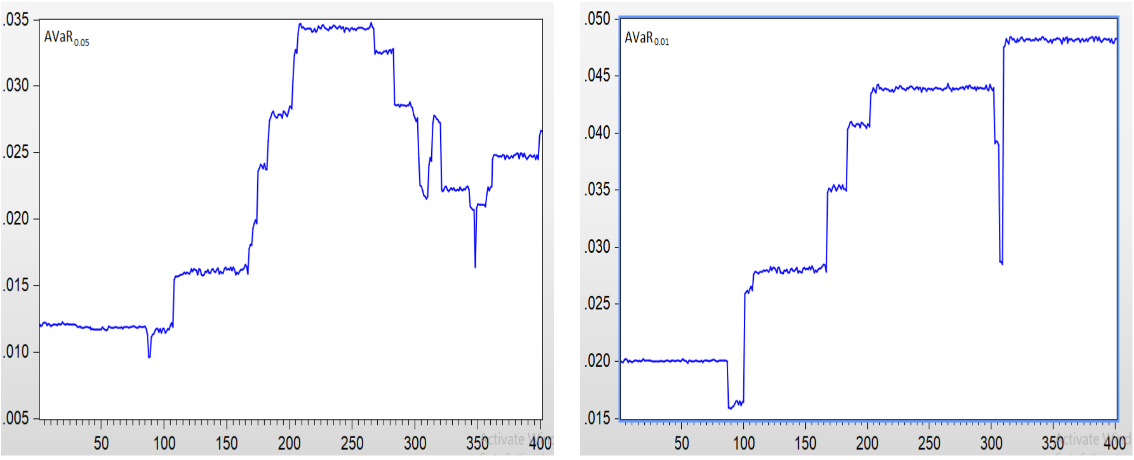
شکل ۴.۵: نوسانات VaR بدست آمده برای سبدسهام (روزانه)

همچنین در شکل ۴.۵ می‌توان نوسانات محاسبه شده سنجه VaR را برای سبدسهام مشاهده کرد.



شکل ۵.۵: مقادیر VaR محاسبه شده برای سبدسهام (روزانه)

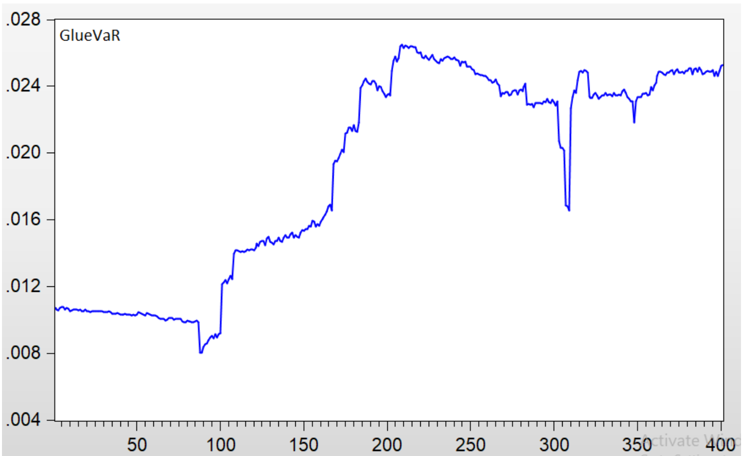
با محاسبه VaR سبدسهام، AVaR در سطح‌های اطمینان ۹۹٪ و ۹۵٪ طبق رابطه (۲.۵) برای بازده سبدسهام محاسبه خواهد شد. شکل ۶.۵ نوسانات بدست آمده را نشان می‌دهد.



شکل ۶.۵: مقادیر AVaR محاسبه شده در دو سطح اطمینان برای سبدسهام

۳.۳.۵ GlueVaR برآورده شده

همان‌طور که در بخش ۳.۲.۵ بیان شد معیار GlueVaR ترکیب خطی از دو معیار VaR و AVaR است. در پایان این پژوهش با توجه به رابطه (۳.۵) مقدار GlueVaR را در وزن‌های یکسان برای سبدسهام محاسبه کردیم. مقادیر بدست آمده در شکل ۷.۵ نشان داده شده است.

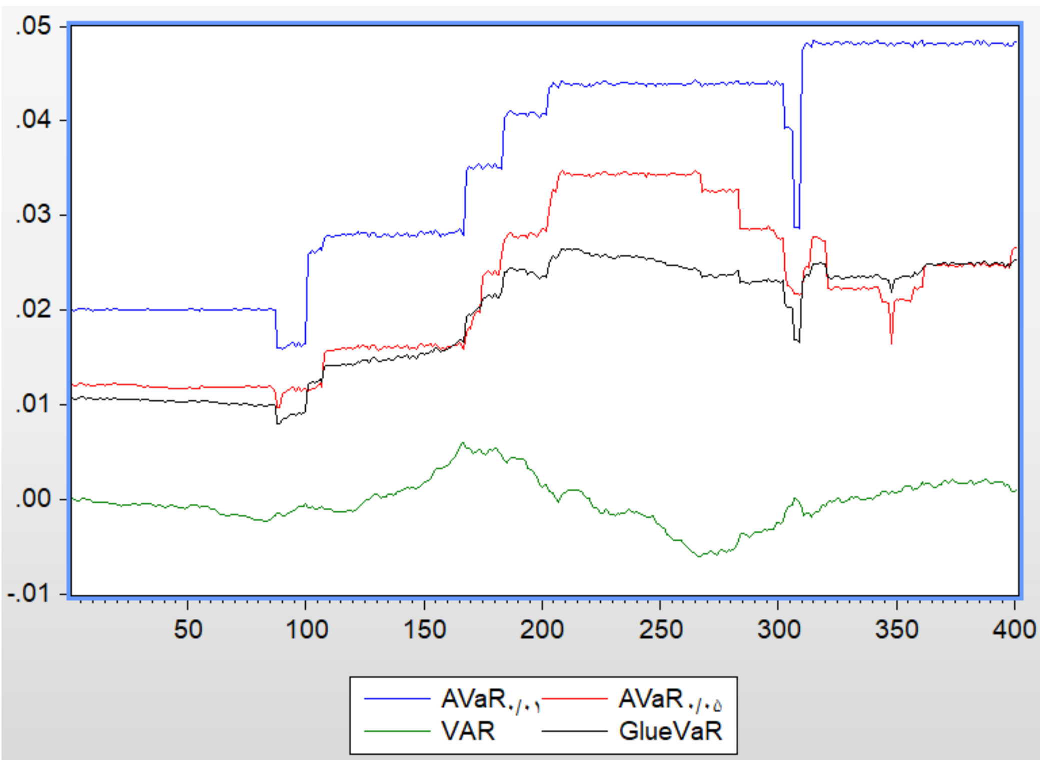


شکل ۷.۵: مقادیر GlueVaR محاسبه شده برای سبدسهام

۴.۵ نتیجه نهایی

هدف از این پژوهش مقایسه مقادیری است که معیارهای ریسک VaR، AVaR و GlueVaR در سطح اطمینان مشخص به سرمایه‌گذار می‌دهند. با توجه به شکل ۸.۵ می‌توان بیان کرد که سنجه VaR خیلی جسورانه عمل کرده و مقدار ریسک را در سطح پایین‌تری از برآورد واقعی آن اندازه گرفته است. لازم به ذکر است شاید این برآورد در شرایط عادی بازار خوب

باشد اما در شرایط بحرانی بازار سرمایه‌گذار را با زیان غیر قابل جبرانی مواجه می‌کند. در نتیجه سرمایه‌گذار هنگام سرمایه‌گذاری نمی‌تواند به این سنجه از ریسک اکتفا کند. سنجه‌ی دیگری که سرمایه‌گذار برای اندازه‌گیری ریسک سهام می‌تواند مورد استفاده قرار دهد AVaR می‌باشد. اگر نمودارهای $AVaR_{0/01}$ و $AVaR_{0/05}$ را مشاهده کنید متوجه می‌شوید که این سنجه در شرایط عادی بازار خیلی محتاطانه عمل کرده و اندازه ریسک را بیش‌تر از حد واقعی خود نشان داده است. این اندازه‌گیری باعث می‌شود سرمایه‌گذار نتواند هنگام سرمایه‌گذاری به درستی تصمیم بگیرد و دوچار اشتباه شود. در نتیجه می‌توان گفت سنجه AVaR هم نمی‌تواند در همه‌ی مواقع نیازهای یک سرمایه‌گذار را برای اندازه‌گیری ریسک برطرف کند. حال به نمودار سنجه ریسک GlueVaR دقت کنید. این سنجه سطح ریسک را میانگینی از اندازه‌های برآورده شده توسط دو معیار VaR و AVaR نشان داده است. همان‌طور که مشاهده می‌کنید در اندازه‌گیری ریسک نه خیلی محتاطانه عمل کرده است که سرمایه‌گذار را دوچاره اشتباه و نه خیلی جسورانه که سرمایه‌گذار را متحمل زیان کند. در نتیجه می‌توان بیان کرد سرمایه‌گذار برای برآورد ریسک، بهتر است از سنجه GlueVaR استفاده کند. این سنجه در شرایط مختلف بازار اندازه‌های منطقی‌تری از ریسک را برآورد می‌کند.



شکل ۸.۵: مقادیر برآورد شده معیارهای VaR، AVaR و GlueVaR در طول دوره مشخص شده برای بازده سهام شرکت‌ها

۵.۵ خلاصه و نتیجه گیری

در این پایان نامه، مفهوم زیرجمع‌پذیری دنباله برای اندازه‌گیری ریسک اعوجاج مورد بررسی قرار گرفته شد. همچنین شرایط کافی و لازم برای اندازه‌گیری ریسک اعوجاج در زیرجمع‌پذیری دنباله ارائه داده شد. همانطور که بلزساماپرا در سال ۲۰۱۴ ذکر کرده‌اند زیرجمع‌پذیری دنباله در بسیاری از مشکلات تصمیم گیری بیشترین ابزار عملی است. به عنوان کاربرد زیرجمع‌پذیری دنباله اندازه ریسک اعوجاج دامنه چند متغیره MTD پیشنهاد داده می‌شود که اندازه ریسک امید شرطی دنباله چند متغیره را که توسط لاندسمن و همکارانش در سال ۲۰۱۶ ارائه شده است را تعمیم می‌دهد. اندازه ریسک MTD را برای وابستگی بین ریسک سبدسهام و پیشامدهای گسترده یک سبدسهام برای تعیین سودهای مورد نیاز و حق بیمه برای سبدسهام ریسک‌ها پیشنهاد داده می‌شود. کاربرد اندازه‌گیری ریسک MTD در تخصیص سرمایه نشان داده شد. علاوه بر این، کاربردهای بیشتری از اندازه ریسک MTD در تحقیقات بعدی کشف خواهد شد.

مراجع

[۱] پی. جونز چ، (۱۳۹۲)، ترجمه: تهرانی ر. نوربخش ع، **''مدیریت سرمایه‌گذاری''** چاپ یازدهم، انتشارات نگاه دانش.

[۲] رادپور م، عبده‌تبریزی ح، (۱۳۸۸)، **''اندازه‌گیری و مدیریت ریسک بازار''** چاپ یکم، انتشارات آگاه و پیشبرد.

[۳] راس ش، (۱۳۹۱)، ترجمه: پارسیان ا. همدانی ع، **''مبانی احتمال''** چاپ دوم، انتشارات شیخ‌بهایی.

[۴] راعی ر. سعیدی ع، (۱۳۸۸)، **''مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک''** چاپ چهارم، انتشارات سمت.

[۵] فروند ج، (۱۳۹۴)، ترجمه: وحیدی اصل م. عمیدی ع، **''آمار ریاضی و کاربردهای آن''** چاپ ششم، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.

[۶] مادورا ج، (۱۳۸۸)، ترجمه: عباسی ا. آدوسی ع، **''بازارها و نهادهای مالی''** چاپ یکم، انتشارات بورس اوراق بهادار تهران.

[۷] نظری ا. فرصت‌کار ا. کیافر ب، (۱۳۸۷)، **''مدیریت ریسک در پروژه‌ها''** چاپ اول، انتشارات معاونت برنامه‌ريزي و نظارت راهبردي.

[۸] هال ج، (۱۳۸۴)، ترحمه: سیاح س و صالح آبادی ع، **''مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک''** چاپ یکم، انتشارات تدبیر پرداز.

[۹] آقامحمدی ع. سجودی م. سجودی م. طاووسی م. (۱۳۹۶)، ''معرفی معیار ریسک جدید GlueVaR و برآورد آن با استفاده از مدل رگرسیونی چندکی ترکیبی''، **''مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار''** شمارهٔسی و یکم، ص‌ص ۱ـ۱۷.

[۱۰] زمانی ش. اسلامی بیدگلی م. کاظمی م. (۱۳۹۲)، ''محاسبه ارزش در معرض ریسک شاخص بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از نظریه ارزش فرین''، **''فصلنامه بورس اوراق بهادار''** شمارهٔ بیست و یکم، ص‌ص ۱۱۵ـ۱۳۶.

[۱۱] سارنج ع. نوراحمدی م. (۱۳۹۵)، ''تخمین ارزش در معرض ریسک (VaR) و ریزش مورد انتظار (ES) با استفاده از رویکرد ارزش فرین شرطي در بورس اوراق بهادار تهران''، '' **تحقیقات مالی دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران**'' شمارهٔ سوم، ص‌ص ۴۳۷ـ ۴۶۰.

[۱۲] سجادی ز. فتحی س. (۱۳۹۲)، ''تبیین فرایند چهار گامی محاسبه ارزش در معرض خطر به‌عنوان معیاری برای اندازه‌گیری ریسک و پیاده‌سازی آن در یک مدل بهینه‌سازی سرمایه‌گذاری''، ''**فصلنامه علمی پژوهشی دانش مالی تحلیل اوراق بهادار**'' شمارهٔ بیستم، ص‌ص ۱ ـ ۱۳.

[۱۳] سعادت جوی اوردکلو م. علی رحیمی م. (۱۳۹۳)، ''مدیریت ریسک و کاربرد آن در بازار سرمایه با استفاده از مدل ریسک سنجی ارزش در معرض خطر(VaR)''، ''**فصلنامه مدیریت صنعتی دانشکده علوم انسانی، دانشگاه آزاد اسلامی** '' شمارهٔ دوم، ص‌ص ۵۹ـ ۷۳.

[۱۴] صادقی ح. بهبودی س. (۱۳۹۵)، ''تخمین ارزش در معرض ریسک با استفاده از نظریه ارزش فرین (مطالعه‌ای در نرخ ارز)''، ''**فصلنامه علمی ـ پژوهشی مدیریت دارایی و تأمین مالی**'' شمارهٔ دوم، ص‌ص ۷۷ ـ ۹۴.

[۱۵] صدرالدین‌کرمی م. بت‌شکن م. پیمانی م. (۱۳۹۷)، ''برآورد و ارزیابی ارزش درمعرض ریسک و ریزش مورد انتظار ناپارامتریک برمبنای تحلیل مؤلفه‌های اساسی در بورس اوراق بهادار تهران''، '' **چشم‌انداز مدیریت مالی**'' شمارهٔ بیست و چهارم، ص‌ص ۷۹ـ ۱۰۲.

[۱۶] عباسی ا. تیمورپور ب. مولائی ع. اسماعیلی ز. (۱۳۹۶)، ''کاربرد معیار ریسک ارزش در معرض ریسک شرطی در بهینه‌سازی پرتفوی با رویکرد شکست ساختاری در بازار بورس اوراق بهادار تهران ''، ''**چشم‌انداز مدیریت مالی** '' شمارهٔ هجدهم، ص‌ص ۸۵ـ ۱۰۳.

[۱۷] میرمحمدی صدرآبادی م. ساعتی قره موسی ا. شاکریان ح. (۱۳۹۶)، ''بررسی ارتباط بین اهرم مالی و اندازه بازار با بازدهی سهام شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران''، ''**مجله علمی تخصصی رویکردهای پژوهشی نوین در مدیریت و حسابداری** '' شمارهٔ دوم، ص‌ص ۱ ـ ۱۵.

[18] Asimit, A.V., Furman, E., Tang, Q. and Vernic, R. (2011), " Asymptotics for risk capital allocations based on conditional tail expectation." **Mathematics and Economics**, 49, 310 - 324.

[19] Belles-Sampera, J., Guillen M. and Santolino, M. (2014a), " Beyond Value-at-Risk: GlueVaR distortion risk measure." **Risk Analysis**, 34 (1), 121 - 134.

[20] Belles-Sampera, J., Guillen M. and Santolino M. (2014b), " GlueVaR risk measures in capital allocation applications." **Mathematics and Economics**, 58(2014), 132 - 137.

[21] Belles-Sampera, J., Guillen M. and Santolino, M. (2016), " What attitudes to risk underlie distortion risk measure choices?" **Mathematics and Economics**, 68, 101 - 109.

[22] Belles-Sampera, J., Guillen M. and Santolino, M. (2016), " The use of flexible quantile-based measures in risk assessment" **Communications in Statistics - Theory and Methods** , 45 (2016) 1-15.

[23] Cai, J. and Li, H. (2005), " Conditional tail expectations for multivariate phase type distributions." **Journal of Applied Probability**, 42 (2005), 810–825.

[24] Chiragiev, A. and Landsman, Z. (2007), " Multivariate Pareto portfolios: TCE-based capital allocation and divided differences." **Scandinavian Actuarial Journal**, 2007 (4), 261-280.

[25] Cossette, H., Mailhot, M. and Marceau, E. (2012), " TVaR-based capital allocation for multivariate compound distributions with positive continuous claim amounts." **Insurance: Mathematics and Economics**, 50 (2012), 247-256.

[26] Denneberg, D. (1994a), " Non-additive measure and integral." **Kluwer Academic Publishers**, Dordrecht.

[27] Denneberg, D. (1994b), " Conditioning (updating) non-additive measures." **Annals of Operations Research**, 52(1994), 21–42.

[28] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R. (2005), " Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures" **Orders and Models. John Wiley and Sons Ltd**, Chichester.

[29] Dhaene, J., Henrard, L., Landsman, Z., Vandendorpe, A. and Vanduffel, S. (2008), " Some results on the CTE-based capital allocation rule." **Insurance: Mathematics and Economics**, 42(2), 855–863.

[30] Landsman, Z., Makov, U. and Shushi, T. (2016), " Multivariate tail conditional expectation for elliptical distributions." **Insurance: Mathematics and Economics**, 70, 216-223.

[31] Landsman, Z. and Valdez, E.A. (2003), " Tail conditional expectations for elliptical distributions." **North American Actuarial Journal**, 7 (4), 55-71.

[32] Landsman, Z. and Valdez, E.A. (2005), " Tail conditional expectations for exponential dispersion models." **ASTIN Bulletin**, 35 (1), 189–209.

[33] Niculescu, C. and Persson, L. E. (2006), " Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach." **Springer**, New York.

[34] Wang, Y., Cai, J. and Mao, T. (2017), " Tail subadditivity of distortion risk measures and multivariate tail distortion risk measures . " **Insurance: Mathematics and Economics**, 75 (2017), 105–116.

[35] Xu, M. and Mao, T. (2013), " Optimal capital allocation based on the Tail Mean–Variance model." **Insurance: Mathematics and Economics**, 53 (2013), 533-543.

[36] Yin, C. C. and Zhu, D. (2016), " New class of distortion risk measures and their tail asymptotics with emphasis on VaR." **arXiv: 1503.08586v2**.

[37] Young, V.R. (1998), "Families update rules for non-additive measures: Applications in pricing risks. " **Insurance: Mathematics and Economics**, 23 (1998), 1–14.

[38] Zhu, L. and Li, H. (2012), "Tail distortion risk and its asymptotic analysis." **Insurance: Mathematics and Economics**, 51 (1), 115–121.

[39] Bruckner A. M., Bruckner J. B. and Thomson B. S. (2007), "**Real Analysis**", Vol. 1, Prentice (Pearson)., pp. 672.

[40] Guégan D. and Hassani B. K. (2019), "**Risk Measurement From Quantitative Measures to Management Decisions**", Vol. 1, pp. 215.

[41] Hull J. C. (2008), "**Fundamentals of Futures and Options Markets** ", Pearson Education, Inc., pp. 607.

[42] Rachev S. T., Stoyanov S. V. and Fabozzi F. J. (2008) (1971), "**Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization: The Ideal Risk, Uncertainty, and Performance Measures** ", John Wiley and Sons, Inc., pp. 382.

[43] Wang Y.,(2016), PhD thesis, "Risk Measures and Capital Allocation Principles for Risk Management ", Math. Dept. University of Waterloo.

پیوست آ

نتایج تجربی

مقادیر VaR بدست آمده برای شرکت‌ها و سبدسهام

VaR B	VaR Shp	VaR Sha	VaR F	VaR K	VaR P
-0/00568	-0/014068	-0/0075347	-0/0199715	0/0324658	-0/00885408
-0/005988	-0/014617	-0/0073809	-0/0200611	0/0321249	-0/00913216
-0/006878	-0/016817	-0/0043985	-0/0221752	0/0348508	-0/00953903
-0/002837	-0/011058	-0/0029028	-0/0158697	0/0259183	-0/00181884
-0/002896	-0/011636	-8/338E-05	-0/0125298	0/0175585	-0/00292354
-0/002673	-0/008346	-0/004371	-0/012089	0/0198215	-0/00743236
-0/0026	-0/007332	-0/0105885	-0/0172666	0/0328995	-0/01353024
-0/002476	-0/00673	-0/0110892	-0/0173512	0/0336985	-0/00615679
-0/001154	-0/006331	-0/0121689	-0/0146153	0/0277228	-0/00498373
-0/001196	-0/002069	-0/0069456	-0/0136773	0/0297996	-0/00186654
-0/000684	-0/003751	-0/009094	-0/0137024	0/0281754	0/0061462
-0/000394	-0/002801	-0/0107478	-0/0138175	0/0293936	-0/00487507
-0/000305	-0/008445	-0/0058828	-0/0057933	0/0050534	0/00713745
-0/000305	-0/005746	-0/0037843	-0/003249	0/0018244	0/01109259
7/339E-05	-0/003584	-0/0119497	-0/0025046	0/0022516	-0/01000047
-0/00039	0/0015751	-0/0125048	-0/0017941	0/0057555	-0/00262572
-0/001325	-0/015501	-0/018633	-0/0028331	-0/008899	-0/02394335
-0/002626	-0/014524	-0/0154125	-0/0075764	0/0031286	-0/01152232
-0/002627	-0/017497	-0/0152007	-0/0111336	0/0084438	-0/01153024
-0/00281	-0/019201	-0/0142915	-0/0093859	0/0026682	-0/01156727
-0/002217	-0/019842	-0/0157099	-0/009314	0/0018602	-0/0127366
-0/002217	-0/01836	-0/017902	-0/0095025	0/0037813	-0/00941869
-0/001854	-0/006015	-0/0138558	-0/0102832	0/0179447	-0/00754357
-0/000836	-0/00568	-0/0181173	-0/0090457	0/0153964	-0/01050968
-0/00153	-0/00864	-0/0192509	-0/017329	0/0317365	-0/02024078
-0/001529	-0/010488	-0/0196034	-0/0175425	0/0303861	-0/00495831
-0/00161	-0/010673	-0/0163996	-0/0176634	0/0304827	-0/00354865
-0/001689	-0/007545	-0/0144908	-0/0175841	0/0334265	-0/00212982
-0/001058	-0/006075	-0/0139913	-0/0168686	0/0332291	0/00281465
-0/001075	-0/003849	-0/0065503	-0/0165479	0/0347078	-0/00651714
-0/000618	0/000926	0/00066172	-0/0051213	0/0128586	-0/0068157
-0/000708	-0/007637	0/00090377	-0/004243	0/0022496	-0/00907161
-0/000848	-0/008123	-0/0001743	-0/0085851	0/0118805	-0/00385147
-0/003	-0/008257	0/00120593	-0/0121572	0/0200694	0/00415974
-0/003	-0/007767	-0/0105354	-0/0108419	0/0174951	-0/00647645
-0/003045	-0/008652	-0/0196645	-0/0251049	0/0498423	-0/02102423
-0/003087	-0/009108	-0/0169128	-0/0392911	0/0824399	-0/01618277
-0/00296	-0/00461	-0/0175708	-0/038097	0/0841564	-0/00472484
-0/002994	-0/005177	-0/0177985	-0/0361687	0/0790962	-0/00900254
-0/000727	-0/011088	-0/0201868	-0/0388182	0/0793582	0/00518385
-0/000919	-0/009204	-0/015604	-0/0401549	0/0843566	-0/0086907
-0/000797	-0/006568	-0/0061363	-0/0416631	0/0905068	-0/01483134
-0/005694	-0/001161	-0/0065436	-0/0287854	0/0659092	0/00373381
-0/008112	-0/012513	-0/0113835	-0/0262554	0/0486623	-0/0205358
-0/009003	-0/017284	-0/0196274	-0/025947	0/0431727	-0/01970111

-0/011245	-0/018636	-0/0166627	-0/0248798	0/0393342	-0/01190858
-0/0122	-0/019313	-0/0158418	-0/0241349	0/0369213	-0/00586203
-0/013004	-0/020975	-0/0181926	-0/0023904	-0/015404	-0/01130319
-0/007174	-0/020476	-0/0178639	-0/0025384	-0/014562	-0/0054884
-0/006045	-0/010336	-0/0143919	-0/0058207	0/0032263	-0/00359379
-0/005797	-0/007442	-0/0058133	-0/0073729	0/0097364	-0/00511023
-0/00327	-0/008841	-0/0006439	-0/0099908	0/0144381	-0/00397557
-0/002891	-0/009671	-0/0061684	-0/0100404	0/0137229	-0/00624899
-0/002775	-0/011569	-0/0006255	-0/0112015	0/0145308	0/00557464
-0/002179	-0/00833	-5/099E-05	-0/0114634	0/0183798	0/00196667
-0/002064	-0/008181	-0/0025836	-0/0128861	0/0218438	0/01158298
-0/002317	0/0049313	-0/0010333	-0/0081648	0/0239553	0/01154317
-0/002001	0/0051991	0/00209946	-0/0001372	0/0055187	0/01187015
-0/003227	0/0032131	-0/0021983	-0/0017648	0/0073251	-0/01744898
-0/005683	0/0007869	-0/0033807	-0/0050348	0/0125179	-0/00114559
-0/006282	-0/002107	-0/011217	-0/0122334	0/0263966	-0/01521256
-0/006163	-0/006575	-0/0138338	-0/0157229	0/0300596	-0/0112987
-0/005863	-0/007375	-0/0254825	-0/0091404	0/0139226	-0/02195088
-0/006897	-0/008233	-0/0223467	-0/0089848	0/0127017	-0/00784298
-0/006114	-0/007968	-0/0195864	-0/0097255	0/0146921	-0/0060943
-0/004556	-0/008152	-0/0187588	-0/0101509	0/0154994	-0/00959348
-0/004705	-0/008205	-0/0206497	-0/0073439	0/0089061	-0/0007088
-0/005316	-0/005019	-0/019077	-0/0144228	0/0285858	-0/0020555
-0/009223	-0/003902	-0/0081193	-0/0195616	0/0416762	0/00741403
-0/007927	-0/008026	-0/0082112	-0/0178883	0/0336542	0/01427348
-0/00955	-0/004072	-6/149E-05	-0/0130656	0/0263703	0/01088645
-0/009697	-0/003261	0/01993037	-0/0220265	0/0480605	-0/0074588
-0/009607	-0/006295	0/00280048	-0/0273247	0/0573716	-0/02448072
-0/009796	-0/006995	-0/0099269	-0/0227456	0/0460024	-0/01646564
-0/005814	-0/008059	-0/0120579	-0/0243453	0/0486652	-0/01655151
-0/006253	-0/006483	-0/0073837	-0/0228901	0/0468505	0/00700267
-0/004737	-0/003024	-0/003432	-0/0245934	0/0542785	-0/00499843
-0/004698	-0/004937	0/00048491	-0/0164254	0/0333345	-0/0010079
-0/004618	-0/003808	-0/0091575	-0/0127239	0/0258384	-0/0195804
-0/004523	-0/003808	-0/0122691	-0/0313537	0/0692466	-0/03117445
-0/004525	-0/014446	-0/0180423	-0/0462394	0/0932923	-0/03442234
-0/003271	-0/014562	-0/0260821	-0/0529571	0/1088277	-0/03254779
-0/00259	-0/015601	-0/0238224	-0/0529978	0/1078843	-0/00753947
-0/002434	-0/014407	-0/0229922	-0/0529299	0/1089195	-0/0072481
-0/002383	-0/013797	-0/0219195	-0/0527394	0/1090858	-0/01350662
-0/001183	-0/013701	-0/0216939	-0/0431212	0/0867712	-0/00702856
-0/003814	-0/002023	-0/0193189	-0/0289565	0/0654452	-0/00765933
-0/005462	-0/00166	-0/0115248	-0/0053451	0/0107945	-0/00780904
-0/005156	-0/004023	-0/0129074	-0/008522	0/0158328	-0/00911254
-0/005309	-0/003939	-0/0122355	-0/0089217	0/016849	-0/00146594
-0/005345	-0/004084	-0/0078378	-0/0080605	0/014697	0/00086994

-0/005092	-0/004646	-0/0091478	-0/0077748	0/013469	0/0072119
-0/003088	-0/012747	-0/0029249	-0/0103693	0/0114135	0/01729636
-0/001442	-0/010359	-0/0039789	-0/0101228	0/0132266	-0/00775065
-0/001388	-0/008108	-0/0029703	-0/007799	0/0100637	-0/01103963
-0/001418	-0/007744	-0/0081186	-0/0170983	0/0320949	-0/02297846
-0/001418	-0/003198	-0/020459	-0/02146	0/0468037	-0/02336734
-0/001418	0/0059992	-0/019716	-0/0214239	0/0559168	-0/00134014
-0/002013	0/0012422	-0/0187049	-0/0251202	0/0597723	0/0036016
-0/001701	-0/004345	-0/0180092	-0/0210225	0/0446369	-0/00331891
-0/00166	-0/005389	-0/0183304	-0/0299573	0/0644115	-0/02315098
-0/001607	-0/007275	-0/0163552	-0/0197919	0/0388402	-0/00792607
-0/002575	-0/01201	-0/0053445	-0/0196663	0/0338122	-0/01453674
-0/00261	-0/00917	-0/0124187	-0/0251795	0/049498	-0/02154227
-0/001971	-0/008673	-0/013784	-0/0264675	0/0529957	-0/01368309
-0/001862	-0/010925	-0/0145958	-0/0245627	0/0463061	-0/0063123
-0/001912	-0/010368	-0/0147471	-0/0155961	0/0259708	-0/00621976
-0/001958	-0/012019	-0/0149274	-0/0128075	0/0178225	-0/00622843
-0/000846	-0/010476	-0/0147578	-0/0101018	0/0130614	-0/01151732
-0/000846	-0/007296	-0/009183	-0/0084726	0/0124452	-0/00032603
-0/000892	-0/005979	-0/0281242	-0/007395	0/0112512	-0/01149374
-0/001161	-0/006048	-0/0275512	-0/0074604	0/0113352	-0/0078016
-0/006639	-0/004571	-0/0298611	-0/0081385	0/0143913	0/00452611
-0/007339	-0/000343	-0/0293464	-0/0081928	0/0187464	-0/0062565
-0/007337	0/000174	-0/0267865	-0/0066814	0/0157416	-0/00843999
-0/007518	0/0005394	-0/0280735	-0/0076877	0/0184517	-0/00794632
-0/007606	-0/002451	-0/0081307	-0/0078349	0/015804	-0/00529202
-0/00751	-0/003906	-0/0103706	-0/0065453	0/0113442	-0/00676311
-0/002822	-0/005923	-0/0062425	-0/0052128	0/0062225	-0/00492981
-0/003607	-0/006289	-0/0065954	-0/0050787	0/0055448	-0/00669479
-0/003641	-0/006382	-0/0090885	-0/0050797	0/0054538	-0/00664844
-0/003627	-0/004548	-0/0129384	-0/0030792	0/0026264	-0/00517217
-0/003671	-0/004553	-0/017632	-0/0023501	0/0009225	-0/00907323
-0/003689	-0/006288	-0/0237708	-0/003531	0/0019395	-0/01207699
-0/002803	-0/004656	-0/0233296	-0/0043139	0/0053959	-0/00647259
-0/003344	-0/00454	-0/0236323	-0/0043142	0/0055117	-0/00615269
-0/003503	-0/003308	-0/0242289	-0/0049821	0/0083005	-0/00101259
-0/004489	-0/002089	-0/0223499	-0/0070499	0/0143377	-0/00777001
-0/00461	-0/001155	-0/0237574	-0/0083941	0/0184036	-0/01203367
-0/004812	-0/003919	-0/0152589	-0/0156169	0/0324682	-0/01197679
-0/005629	-0/004658	-0/0152055	-0/0156358	0/0317738	-0/00549779
-0/004909	-0/003106	-0/0135202	-0/0156584	0/0333783	-0/00324914
-0/004747	-0/00419	-0/0142695	-0/0159571	0/0329899	-0/00558198
-0/003402	-0/006707	-0/0150213	-0/0158803	0/0302943	-0/00912927
-0/003802	-0/006824	-0/0063208	-0/0151905	0/0285701	-0/0051274
-0/003805	-0/006554	-0/0069413	-0/0067148	0/0090916	-0/00311344
-0/002001	-0/005737	-0/0071225	-0/0059865	0/0082114	-0/00135731

-0/002001	-0/004852	-0/0091891	-0/0055167	0/0080018	-0/00400397
-0/002079	-0/004703	-0/0114583	-0/0045403	0/005876	-0/00445568
-0/002164	-0/002185	-0/011608	-0/0013817	0/0010344	-0/00234863
-0/000479	-0/002199	-0/0128189	-0/0004214	-0/001217	-0/00234925
-0/00046	-0/000214	-0/0127125	0/00053093	-0/001450	-0/00187145
-0/000493	-0/000397	-0/0102017	0/00208926	-0/005264	-0/00384599
-0/000493	-0/002486	-0/0094034	-0/0018489	0/001822	-0/00206713
-0/000929	-0/006954	-0/0117992	-0/0108639	0/0183594	0/00801095
-0/001671	-0/025527	-0/0132213	-0/0110534	0/0002274	-0/00849341
-0/002908	-0/027122	-0/012834	-0/0116195	-4/89E-05	-0/0103593
-0/003038	-0/030522	-0/0118827	-0/0149929	0/0044116	-0/0188802
-0/002705	-0/042108	-0/0140984	-0/0148872	-0/007420	-0/02940012
-0/003097	-0/042209	-0/011692	-0/0147139	-0/007925	-0/00829849
-0/003374	-0/040616	-0/0146302	-0/0094726	-0/018544	-0/0100139
-0/0032	-0/029735	-0/0086313	-0/010785	-0/004606	-0/01093718
-0/002762	-0/03022	-0/0119593	-0/0107565	-0/005157	-0/01558798
-0/003064	-0/029678	-0/0117372	-0/0069196	-0/013554	-0/01053859
-0/002183	-0/016727	-0/0069776	-0/0069149	-0/000615	-0/00523847
-0/002336	-0/020495	-0/0064556	-0/0068396	-0/004558	-0/00595771
-0/002181	-0/02021	-0/0136451	-0/012617	0/0091872	-0/0133987
-0/002348	-0/020477	-0/0144367	-0/0117867	0/0069856	-0/00897106
-0/003765	-0/020151	-0/010184	-0/0119084	0/0075953	-0/00866111
-0/003845	-0/019207	-0/0110435	-0/0116099	0/0078444	-0/00645128
-0/004816	-0/022614	-0/0165701	-0/019111	0/0219142	-0/0160427
-0/005121	-0/017973	-0/0171702	-0/0207052	0/03027	-0/00701622
-0/004996	-0/017666	-0/0115509	-0/0184447	0/0253102	-0/00512554
-0/007211	-0/01541	-0/012007	-0/0190644	0/0290105	-0/00322516
-0/006832	-0/014003	-0/0130861	-0/0186447	0/0294388	-0/00613252
-0/010457	-0/013396	-0/0144724	-0/0196907	0/0324837	-0/01553616
-0/009947	-0/003494	-0/0109649	-0/0113853	0/0230339	-0/00519127
-0/010582	-0/001873	-0/008063	-0/005477	0/0108887	-0/00065826
-0/010597	-0/001303	-0/0088161	-0/0095556	0/0209612	0/00396626
-0/010051	-0/000806	-0/007998	-0/0085136	0/019031	0/00211654
-0/009945	-0/000949	-0/007809	-0/0109065	0/0244627	-0/00764117
-0/00616	-0/001564	-0/0132922	-0/0083045	0/0177859	-0/0145798
-0/00664	-0/00184	-0/0138232	-0/0075753	0/0158104	-0/0112269
-0/005422	-0/002789	-0/0186844	-0/0033397	0/0049924	-0/00286493
-0/005429	-0/004744	-0/0189407	-0/0133212	0/0262939	-0/00921733
-0/004525	-0/013071	-0/0255064	-0/0138492	0/0191981	-0/00866912
-0/004542	-0/013043	-0/0227385	-0/0142872	0/0202462	-0/00708599
-0/004291	-0/013217	-0/0214019	-0/0213913	0/0366243	-0/00930883
-0/004229	-0/01297	-0/0206408	-0/0200172	0/03367	-0/0043012
-0/004514	-0/011825	-0/0182797	-0/0201037	0/0350171	-0/00619292
-0/005058	-0/010679	-0/0184505	-0/0196685	0/0351491	-0/00896149
-0/004243	-0/000833	-0/0083559	-0/0209697	0/0480265	-0/00939106
-0/005211	0/0001296	-0/0076132	-0/0206268	0/04819	-0/00875986

-0/005738	-0/001408	-0/0290875	-0/0345118	0/0790047	-0/0263207
-0/004782	-0/001459	-0/0290135	-0/0345279	0/0789907	-0/01082689
-0/004397	-0/00158	-0/0279495	-0/0309434	0/0705179	-0/00079087
-0/00566	-0/010269	-0/0296031	-0/0296724	0/0588682	0/0168502
-0/006211	-0/007307	-0/028537	-0/0229973	0/0462772	0/03259889
-0/005848	-0/009106	-0/0244	-0/0215589	0/0411261	0/01733112
-0/005992	-0/007862	-0/0089572	0/00798962	-0/026477	-0/00748004
-0/007019	-0/001146	-0/0026511	0/0233573	-0/055568	0/02697031
------	0/0006404	0/00639218	0/00192279	-0/003839	------
------	-0/001473	0/00236765	0/0016004	-0/005202	------
0/0296493	-0/001445	0/00240764	0/001599	-0/005171	0/02063784
0/0059556	-0/021089	-0/0189845	-0/0230486	0/0326147	-0/05068902
-0/007593	-0/02033	-0/0299622	-0/0423831	0/0784226	-0/03790139
-0/016807	-0/023355	-0/0360212	-0/0422519	0/0750916	-0/01950442
-0/017144	-0/030786	-0/0498012	-0/0361382	0/0534159	-0/04567607
-0/009071	-0/03699	-0/0499997	-0/0391283	0/0541791	-0/00978767
-0/006335	-0/033121	-0/0485836	-0/0387596	0/0571886	0/0139327
-0/009195	-0/018435	-0/0473766	-0/022495	0/0339783	-0/01861831
-0/009331	-0/022594	-0/047265	-0/0236722	0/0325621	-0/04877223
-0/006208	-0/0228	-0/0460121	-0/0277014	0/041744	-0/02174438
-0/007815	-0/017466	-0/0341442	-0/0319367	0/0569467	-0/02312664
-0/010436	-0/013224	-0/0339475	-0/0464061	0/0949019	-0/03162628
-0/00962	-0/010989	-0/0328821	-0/0491119	0/1034413	-0/02859919
-0/008177	-0/011003	-0/0239939	-0/0483404	0/1016301	-0/01652148
-0/012236	-0/005906	-0/0107812	-0/0432859	0/0949501	-0/01683162
-0/009685	-0/006166	-0/0120768	-0/0466379	0/1025004	-0/01338397
-0/009212	-0/008989	-0/0123918	-0/0509912	0/1098203	-0/00168561
-0/007988	-0/007798	-0/0093715	-0/0446307	0/096192	-0/01006967
-0/009957	-0/010172	-0/0071939	-0/0359422	0/0735735	-0/00192182
-0/009075	-0/009446	-0/0199369	-0/039113	0/0816877	-0/00665147
-0/003759	-0/008868	-0/0236458	-0/0011925	-0/006089	-0/01158007
-0/002139	-0/006621	-0/0070075	0/00113708	-0/009270	0/00551113
-0/00224	-0/012885	0/00247036	-0/0049791	-0/001283	0/0235515
-0/002338	-0/011768	-0/0117236	-0/0011543	-0/009078	-0/00117885
-0/003786	-0/004171	-0/0058174	0/00269855	-0/010458	0/01977113
-0/004075	0/0033697	-0/0057212	0/00390229	-0/005722	0/01565553
-0/005244	0/011189	0/00864594	0/01436129	-0/022272	0/00602706
-0/004999	-0/014313	-0/0067407	0/01597239	-0/051528	-0/02899518
-0/007151	-0/014323	-0/0067722	0/01579404	-0/051122	0/01643147
-0/007244	-0/005164	0/01109653	0/01241214	-0/034083	0/01464412
-0/012406	-0/005648	-0/0106156	-0/0205546	0/0422445	-0/02912845
-0/012424	-0/005642	-0/029314	-0/0346828	0/0751686	-0/0364159
-0/012093	-0/020256	-0/0344865	-0/0430851	0/0801322	-0/04177683
-0/012183	0/0105515	-0/0338118	-0/0447262	0/1147637	-0/01221526
-0/011488	0/0008956	-0/0350221	-0/0449632	0/1056598	-0/01679575
-0/011322	-0/001472	-0/0297909	-0/0450038	0/1033864	0/00180317

-0/004388	-0/006615	-0/0288303	-0/036476	0/0783738	-0/0245306
-0/004452	-0/012614	-0/018387	-0/0304743	0/0583914	-0/02263919
-0/005963	0/0038407	-0/0164129	-0/020778	0/0522535	0/00383908
-0/005818	-0/001218	-0/0127735	-0/0169947	0/0383796	0/01204273
-0/019833	0/0007315	-0/0109043	-0/0185119	0/0438643	-0/0109919
-0/020733	-0/013007	-0/0116135	-0/0202422	0/0341578	-0/01775962
-0/020714	-0/023625	0/00187964	-0/009748	-0/000912	0/00100476
-0/018381	-0/016254	0/0087411	0/00270724	-0/022561	0/01223763
-0/016886	-0/029666	-0/044356	-0/0101324	-0/006057	-0/04142708
-0/014606	-0/02424	-0/0475429	-0/0100344	-0/00086	-0/0191617
0/0007346	-0/032176	-0/0603498	-0/0040975	-0/022629	-0/02718461
-0/004718	-0/040244	-0/0655621	0/00319955	-0/047698	-0/03289246
-0/006539	-0/037114	-0/0655622	0/00810606	-0/056001	0/00185396
-0/005387	-0/038197	-0/0641829	0/01557692	-0/074491	0/01278012
-0/005099	-0/024861	-0/0232438	0/02230191	-0/076824	-0/00025759
-0/00372	-0/028576	-0/017411	0/02941461	-0/097112	0/01031961
-0/013424	-0/015852	0/00270881	0/00452715	-0/026400	0/00289903
-0/010126	0/00832	0/02690867	-0/0056337	0/0214466	0/0236632
-0/002986	-0/004179	-0/0011673	-0/00699	0/0121073	-0/00476632
0/0055328	-0/004231	-0/0012727	-0/0075233	0/0132985	0/03076462
0/018155	-0/002966	-0/0021008	-0/0075085	0/0145288	0/00764429
0/0380903	-0/018727	-0/013487	-0/0085879	0/0012826	-0/03109148
0/033819	-0/030153	-0/0123382	-0/0199251	0/0162724	-0/01343128
0/0336967	-0/037989	-0/016651	-0/0332356	0/0394503	-0/02664186
0/0346907	-0/037363	-0/0012817	-0/0393841	0/0544014	-0/00310747
0/0062124	-0/034585	-0/001453	-0/0392249	0/0568091	0/00906943
0/0020579	-0/034323	0/00127025	-0/038999	0/056545	0/00906046
0/0013129	-0/022235	0/01590164	-0/0318667	0/0520146	0/01534238
-0/002521	-0/016104	0/0122661	-0/01285	0/0138366	0/02640736
-0/004248	-0/002968	0/03239551	0/01021732	-0/026774	0/05003508
-0/017569	0/0078287	0/03418288	0/03214778	-0/067075	0/04034808
-0/023609	-0/00909	0/03270992	0/01902579	-0/053420	-0/02396294
-0/035299	-0/030169	-0/0229011	-0/0066488	-0/014676	-0/06904612
-0/049028	-0/02659	-0/0157907	-0/0288919	0/0407278	-0/03591063
-0/052056	-0/02788	-0/0114589	-0/047031	0/0817023	-0/04078591
-0/044311	-0/040895	-0/0236985	-0/0436908	0/0609051	-0/05970942
-0/043126	-0/042307	-0/0243078	-0/0264293	0/0192733	-0/01441726
-0/053142	-0/038367	-0/0243852	-0/0340237	0/0409082	0/00460261
-0/053425	-0/017938	0/00062752	-0/043962	0/0844932	-0/01454809
-0/049931	-0/032782	-0/023643	-0/0430142	0/0674408	-0/04734847
-0/043553	-0/035338	-0/0424505	-0/039695	0/0571513	-0/02844432
-0/031353	-0/023281	-0/0341087	-0/0457977	0/0834279	0/00244383
-0/019999	-0/014779	-0/0448044	-0/0475568	0/096028	-0/00973928
-0/030413	-0/019842	-0/0443253	-0/0507987	0/098519	-0/03134164
-0/022801	-0/019237	-0/045534	-0/0388928	0/0713831	0/00736261
-0/033823	-0/012944	-0/0315824	-0/0433712	0/0881114	-0/03292516

-0/037008	-0/009429	-0/0204168	-0/0445829	0/0944489	-0/03368192
-0/042263	-0/01436	-0/0258506	-0/0412521	0/0817569	-0/04819265
-0/040084	-0/030251	-0/0530887	-0/0508889	0/0883205	-0/06292531
-0/037237	-0/042729	-0/0652116	-0/0399613	0/0503805	-0/03668816
-0/040334	-0/041433	-0/065795	-0/0424587	0/0574954	-0/00098587
-0/029889	-0/037781	-0/0617884	-0/037576	0/0497707	0/00625526
-0/021502	-0/038404	-0/0651102	-0/0352907	0/0438237	-0/02345474
-0/007396	-0/039191	-0/0595654	-0/0389591	0/0515835	-0/03279133
-0/015743	-0/030034	-0/03578	-0/0378584	0/0581763	-0/03445958
-0/012008	-0/013221	-0/026338	-0/0381839	0/0757475	-0/01002944
-0/011783	-0/013862	-0/0242105	-0/0396559	0/0785362	-0/00579629
-0/011651	-0/01821	-0/0289235	-0/0361962	0/0661275	-0/00922667
-0/019341	-0/021744	-0/0265334	-0/0460166	0/0854746	-0/04017314
-0/01359	-0/023818	-0/0255674	-0/0410602	0/0718527	0/00720078
0/0051027	-0/022809	-0/0243414	-0/0262102	0/0382609	0/00180885
0/0021777	-0/023014	-0/0366984	-0/024584	0/0342666	-0/01846615
-0/00493	-0/022723	-0/041602	-0/030562	0/0484863	-0/02634528
-0/01374	-0/026322	-0/0458044	-0/0443751	0/0770721	-0/05204949
-0/026872	-0/021699	-0/0434474	-0/0342312	0/0580598	-0/0126193
-0/027756	-0/022446	-0/0433508	-0/0417479	0/0748265	-0/0216835
-0/027732	-0/023898	-0/0524897	-0/0376935	0/0639275	-0/03189411
-0/040108	-0/042403	-0/0552686	-0/0402765	0/0514416	-0/06242796
-0/040032	-0/05297	-0/061028	-0/046513	0/0554054	-0/05206973
-0/041506	-0/04734	-0/0526888	-0/0384235	0/0421865	-0/01029226
-0/032256	-0/045092	-0/0548701	-0/0384291	0/0444481	-0/03011675
-0/042372	-0/050309	-0/0584708	-0/0458162	0/0564428	-0/05528912
-0/04095	-0/050309	-0/0591331	-0/0520569	0/0709836	0/00906028
-0/025496	-0/040563	-0/0466363	-0/0459376	0/0664722	0/00984832
-0/032328	-0/030526	-0/028824	-0/0285932	0/0360964	-0/02104236
-0/031794	-0/029689	-0/029575	-0/0267892	0/0327301	-0/0146238
-0/030861	-0/037224	-0/0165297	-0/0286565	0/0295451	-0/02695377
-0/016713	-0/032061	-0/0050325	-0/0279968	0/0331715	-0/02951204
-0/018117	-0/031387	-0/0119922	-0/0331674	0/0458935	-0/01970209
-0/018187	-0/024246	-0/0173908	-0/0344004	0/0559065	-0/01357989
-0/007882	-0/020088	-0/0196021	-0/0307419	0/0515408	-0/01461358
-0/005425	-0/020199	-0/0193201	-0/0314682	0/0531221	-0/01215207
-0/005624	-0/018174	-0/0214664	-0/0402462	0/0755991	-0/034307
-0/007631	-0/021224	-0/019803	-0/0395076	0/0708288	-0/03143672
-0/012369	-0/021336	-0/0231762	-0/0399386	0/0717211	-0/01514427
-0/011393	-0/01633	-0/0353907	-0/0463309	0/0916208	-0/03788279
-0/009431	-0/016326	-0/0443507	-0/0467792	0/092669	-0/02599503
-0/010604	-0/018063	-0/0515586	-0/0472396	0/0920055	-0/00046965
-0/011289	-0/015881	-0/0478057	-0/0371271	0/0706251	-0/01142284
-0/009291	-0/028343	-0/051528	-0/0255739	0/031244	-0/01847047
-0/00676	-0/02838	-0/0465876	-0/0198457	0/0178606	0/0051356
-0/009312	-0/024883	-0/0283273	0/00549377	-0/037683	0/00903079

-0/010917	-0/024217	-0/0086846	0/00309491	-0/031428	-0/01227577
-0/010289	-0/025039	-0/0136686	-0/0063607	-0/010218	-0/01310957
-0/011074	-0/027107	-0/019657	-0/0153125	0/008571	-0/02363576
-0/022563	-0/016153	-0/0219413	-0/0197696	0/02991	-0/02966242
-0/02225	-0/016145	-0/0218329	-0/020984	0/0327478	-0/00512969
-0/021284	-0/012717	-0/0232339	-0/0153293	0/0230001	-0/01257822
-0/020349	-0/011614	-0/0231656	-0/0209691	0/0372439	0/00157881
-0/020355	-0/011991	-0/0205313	-0/0178855	0/029682	0/00967216
-0/018507	-0/010987	-0/013578	-0/0086214	0/009101	-0/00029621
-0/002447	-0/009358	6/0731E-05	-0/0031149	-0/002100	-0/0078816
-0/003768	-0/011582	-0/0158055	-0/0042147	-0/001762	-0/01716057
-0/005307	-0/012938	-0/0132772	0/00342586	-0/020920	-0/00473377
-0/010808	-0/013214	-0/0133532	0/00345259	-0/021258	0/00190638
-0/011705	-0/012742	-0/0152668	-0/01059	0/0119323	-0/01679338
-0/012765	-0/013012	-0/0155308	-0/0156041	0/0233452	-0/00689674
-0/013584	-0/008037	-0/0099735	-0/0177186	0/0332475	-0/00432453
-0/020395	-0/012269	-0/0181593	-0/0308228	0/0595478	-0/0426665
-0/020336	-0/01007	-0/0193545	-0/0304018	0/0607661	-0/00850948
-0/019076	-0/010994	-0/0247828	-0/0280521	0/0543677	-0/01418287
-0/024719	-0/014219	-0/0359741	-0/0247929	0/0435484	-0/01406718
-0/025548	-0/023104	-0/0396127	-0/0300322	0/0468706	-0/03514209
-0/02296	-0/027127	-0/0381431	-0/0304748	0/0438791	-0/01523752
-0/014171	-0/025028	-0/027195	-0/017536	0/0158311	-0/0097147
-0/032811	-0/02575	-0/0268766	-0/0176533	0/015382	-0/01956555
-0/032902	-0/025955	-0/0258693	-0/0168856	0/0133883	-0/01576473
-0/041125	-0/024675	-0/0179674	-0/0195314	0/0208336	-0/02819725
-0/040484	-0/015536	-0/0115506	-0/0107484	0/0095076	-0/01238199
-0/040009	-0/00904	-0/008864	-0/0185199	0/0341111	-0/00302824
-0/040217	-0/010095	-0/009492	-0/0157805	0/0266735	-0/00292654
-0/026965	-0/006079	-0/0105145	-0/0130323	0/0242863	-0/00739401
-0/02582	-0/006188	-0/0111049	-0/01039	0/0180203	-0/00695953
-0/006128	-0/008746	-0/0093904	-0/0059617	0/0051443	-0/0090006
-0/016004	-0/01028	-0/0136313	-0/007834	0/0079734	-0/01817053
-0/018304	-0/020078	-0/0126741	-0/0158222	0/016788	-0/02137568
-0/018479	-0/019269	-0/0128228	-0/017132	0/0206485	-0/01027571
-0/019151	-0/022798	-0/0115691	-0/0168047	0/0163568	-0/01301209
-0/033435	-0/022095	-0/0083337	-0/0220948	0/0293856	-0/00278402
-0/03367	-0/024419	-0/0046313	-0/0191311	0/0201566	0/01898215
-0/028506	-0/019085	-0/0094108	-0/0237193	0/0361814	-0/00565156
-0/025158	-0/007601	-0/0176115	-0/0251329	0/0509585	-0/01945321
-0/025968	-0/024499	-0/0291424	-0/0309567	0/0476307	-0/0426535
-0/025075	-0/019558	-0/0274111	-0/0327083	0/0566523	-0/01485
-0/004793	-0/022916	-0/0325123	-0/0345356	0/0575524	-0/02480251
-0/006234	-0/021609	-0/0272178	-0/0280742	0/0438036	-0/0131212
-0/008526	-0/021962	-0/0270552	-0/0276677	0/0425033	-0/00907192
-0/011401	-0/022745	-0/0257234	-0/0237325	0/0325512	-0/02052414

-0/011262	-0/006003	-0/0116626	-0/0153721	0/0298137	-0/00944312
-0/022281	-0/006623	-0/0131446	-0/0148293	0/0279292	-0/00048983
-0/020425	-0/007146	-0/0089579	-0/0095039	0/014998	0/00035475
-0/0256	-0/005822	-0/0137951	-0/0074797	0/0116055	0/00445831
-0/030042	-0/010043	-0/0135308	-0/0129369	0/0200998	-0/02152622
-0/030054	-0/018394	-0/0064599	-0/0111571	0/0076017	0/00263263
-0/030388	-0/014728	-0/0038471	-0/000225	-0/014203	0/00579481
-0/022774	-0/015316	-0/000574	-0/0041744	-0/005589	-0/01405447
-0/022699	-0/01061	0/00133373	-0/0022685	-0/005324	0/01010882
-0/019392	-0/005782	-0/0035722	-0/0025861	0/0002438	0/01173342
-0/012691	0/0072574	-0/0058315	-0/0031008	0/0144822	-0/00469009
-0/004023	0/0068052	-0/0095906	-0/0100691	0/0302661	-0/00827966
-0/009513	-0/000572	-0/0058389	-0/009853	0/0223854	-0/00951407
-0/010729	-0/002918	-0/0042932	-0/0026037	0/0031487	-0/00034123
-0/012937	-0/009786	-0/0079327	-0/0177135	0/0314861	-0/02544753
-0/013477	-0/010449	-0/0077663	-0/0186386	0/0329785	0/00121099
-0/013125	-0/015072	-0/0064394	-0/0161081	0/02246	-0/00877739
-0/013017	-0/012821	-0/0051621	-0/0225759	0/0397806	-0/00465319
-0/008788	-0/013432	-0/0032862	-0/0221041	0/0380707	-0/00445771
-0/009352	-0/011114	-0/0087143	-0/0218858	0/0398799	-0/01123486
-0/005365	-0/013242	-0/0097903	-0/014107	0/0196274	-0/00612938
-0/009565	-0/013319	-0/0106573	-0/0158983	0/0237243	-0/00761262
-0/008262	-0/00966	-0/0080356	-0/0188151	0/0341792	0/0177587
-0/012499	-0/015193	-0/019404	-0/0109319	0/0102787	-0/01575153
-0/013841	-0/015371	-0/0241096	-0/0143767	0/0181266	-0/02625719
-0/015332	-0/028412	-0/0211286	-0/0163278	0/0096317	0/01785309
-0/014558	-0/016492	-0/016582	-0/017723	0/0248021	-0/00940612
-0/022033	-0/013194	-0/0226834	------	------	------
-0/02201	-0/023898	-0/0196926	------	------	------
-0/01641	-0/01541	-0/0118379	-0/0148044	0/019084	-0/00820883
-0/010055	-0/014749	-0/0105745	-0/0008228	-0/012831	0/01284091
-0/010405	-0/008439	-0/0105707	0/00706115	-0/024891	0/01095615
-0/027111	-0/008167	-0/0159643	0/00930452	-0/029846	-0/02011074
-0/016328	-0/008134	-0/0066999	0/01317462	-0/038830	0/00589066
-0/015908	-0/003159	-0/0058163	0/01300168	-0/033452	0/00289166
-0/014823	-0/007562	-0/0172591	0/02780084	-0/072338	-0/01621297
-0/039411	-0/02977	-0/0369142	-0/0140351	0/0029321	-0/06886968
-0/051373	-0/041645	-0/0468069	-0/0376943	0/0461826	-0/06474697
-0/047209	-0/041588	-0/0458832	-0/0382639	0/0475671	-0/0092752
-0/047222	-0/041651	-0/0522381	-0/0462666	0/0661499	-0/03380108
-0/057356	-0/042995	-0/0542339	-0/0510975	0/0760622	-0/05101485
-0/057026	-0/044289	-0/0579305	-0/0525147	0/0780698	0/005887
-0/046292	-0/037515	-0/046998	-0/0398156	0/0552558	-0/00092455
-0/031085	-0/021727	-0/0330824	-0/0248311	0/0361295	-0/01450678
-0/018175	-0/024142	-0/0338747	-0/0314073	0/0490369	-0/00848442
-0/035981	-0/023218	-0/0181797	-0/0279357	0/0418724	-0/0267501

-0/032426	-0/017504	-0/0152053	-0/0224019	0/0346924	-0/03206327
-0/028943	-0/015401	-0/0174019	-0/0239942	0/0405056	-0/00423175
-0/041458	-0/003198	-0/0176716	-0/0153696	0/0328129	-0/02073747
-0/045254	-0/008541	-0/0251298	-0/0209888	0/0403634	-0/01395142
-0/043756	-0/007268	-0/025139	-0/0163793	0/0308954	0/00779873
-0/030091	-0/00748	-0/0271555	-0/0081217	0/0114433	0/01242637
-0/017651	-0/009539	-0/0196938	0/00506453	-0/021339	-0/00591907
-0/01986	-0/010003	-0/0228278	-0/0046757	0/0008917	-0/01876381
-0/007781	-0/007816	-0/0195323	-0/0059224	0/0059827	-0/00696823
-0/001809	-0/002783	-0/0029906	-0/0111326	0/0231563	------
-0/004883	-0/006307	-0/007894	-0/0177866	0/0351354	------
-0/004926	-0/006005	-0/0044233	-0/0196268	0/0397254	------
-0/008335	-0/009216	-0/0057597	-0/0165513	0/0293488	-0/01335761
-0/007216	-0/010487	-0/0063815	-0/0086512	0/0096708	-0/01236638
-0/01311	-0/014419	-0/0058733	-0/011898	0/013303	-0/00540371
-0/02927	-0/0166	-0/0081624	-0/0095812	0/0057246	-0/01475861
-0/031901	-0/017169	-0/0116593	0/00448371	-0/027616	0/01013768
-0/035666	-0/017632	-0/0112371	0/01413859	-0/050574	-0/00524021
-0/037335	-0/015461	-0/0178879	0/02104429	-0/064493	-0/01337142
-0/036886	-0/01476	-0/0164295	0/0360638	-0/098788	0/00016803
-0/038623	-0/011786	-0/0155975	0/03390938	-0/090794	-0/00539968
-0/038289	-0/008887	-0/0106904	0/03386224	-0/087785	0/01324114
-0/03472	-0/008015	-0/0090494	0/03386418	-0/086918	0/01869622
-0/030947	-0/007825	-0/0091867	0/02826853	-0/073691	-0/00907568
-0/026584	-0/003507	0/00563169	0/02574357	-0/063489	0/00031046
-0/024086	-0/01274	0/00016015	0/01995914	-0/059244	-0/01139585
-0/018814	-0/014486	-0/0073068	-0/0206691	0/0336731	-0/02966469
-0/017749	-0/017936	-0/011429	-0/0428344	0/0818681	-0/02607187
-0/020784	-0/016271	-0/0131883	-0/042354	0/0824134	-0/01016199
-0/018754	-0/021909	-0/0209533	-0/0531365	0/1018988	-0/03574602
-0/017205	-0/021705	-0/0232358	-0/0492199	0/0929772	-0/00590305
-0/019097	-0/016747	-0/0221897	-0/051557	0/1033813	-0/01141229
-0/02646	-0/01567	-0/0239966	-0/0423479	0/083001	-0/01065531
-0/030567	-0/012725	-0/0240646	-0/0260225	0/047907	0/00160288
-0/031301	-0/012818	-0/0224431	-0/0355755	0/0700734	-0/00430552
-0/032747	-0/003128	-0/012609	-0/0300617	0/0669156	-0/00161451
-0/033708	-0/002501	-0/0130227	-0/0330331	0/0744659	-0/01581941
-0/050689	-0/01879	-0/0131355	-0/0320682	0/0559287	-0/05118778
-0/030169	-0/017326	-0/0057874	-0/0392838	0/0742053	0/00493383
-0/03018	-0/018049	0/00071124	-0/0241376	0/0381913	-0/01656854
-0/024007	-0/021381	0/00082695	-0/0251458	0/0372093	0/00861005
-0/020829	-0/020202	9/9904E-05	------	------	------
-0/028888	-0/022827	-0/0148326	------	------	------
-0/01815	-0/006361	-0/0120479	-0/062816	0/1400003	-0/00840342
-0/020488	-0/01366	-0/0131814	-0/0430712	0/0866962	-0/01117628
-0/014065	-0/009841	-0/0149677	-0/0407196	0/0850354	-0/00938748

-0/024387	-0/009622	-0/019465	-0/036117	0/0745303	-0/01756361
-0/023998	-0/009887	-0/0151476	-0/0427189	0/0896475	-0/02092619
-0/017208	-0/005035	-0/0122638	-0/0275064	0/059055	-0/00732715
-0/012482	-0/007151	-0/013215	-0/029884	0/062479	-0/01090227
-0/012923	0/0009088	-0/0135113	-0/0275316	0/0650574	0/00114811
-0/014758	-0/002062	-0/0126734	-0/0253964	0/0571116	-0/00099529
-0/01233	-0/010621	-0/0204997	-0/0255754	0/0489698	-0/02735648
-0/008928	-0/018236	-0/0259869	-0/0062437	-0/003688	-0/00690424
-0/001023	-0/017746	-0/024837	-0/0030868	-0/010553	-0/00112951
-0/023356	-0/017611	-0/0248555	-0/0083066	0/0017428	-0/02379518
-0/024773	-0/020361	-0/025076	-0/0104729	0/0040405	-0/01514786
-0/028858	-0/020873	-0/0267329	-0/014488	0/0128845	-0/00331492
-0/023485	-0/016016	-0/0200899	-0/0143849	0/0175011	-0/01945971
-0/02236	-0/007835	-0/0139925	-0/016229	0/0299784	0/00242951
-0/024343	-0/009204	-0/0074627	-0/0117896	0/0182654	0/00421285
-0/004567	-0/009314	-0/0020507	-0/0093639	0/0125044	0/01247069
-0/006236	-0/002249	0/00430196	-0/0113029	0/0240864	0/01258
-0/020028	-0/00579	-0/0054453	-0/0087691	0/0146417	-0/02627593
-0/014603	-0/002401	-0/0006526	-0/001797	0/0017857	0/01384137
-0/013297	-0/000587	-0/003497	0/00785371	-0/018886	0/01076947
-0/014801	0/0003762	-0/0073472	-0/0014368	0/0037239	-0/01660022
-0/014808	-0/000272	-0/0064341	-0/0001278	2/601E-05	0/01403576
-0/01041	-0/006739	-0/0053892	-0/0246173	0/0506191	-0/0158899
-0/012925	-0/010567	4/114E-05	-0/0392963	0/0809938	-0/03346942
-0/021028	-0/013178	-0/0020694	-0/0447684	0/0911318	-0/02095681
-0/022342	-0/009399	-0/0021215	-0/0435924	0/0921708	-0/00405254
-0/032174	-0/008813	0/00277609	-0/0399936	0/0843715	-0/00151994
-0/035005	-0/00984	0/00182818	-0/0363557	0/074869	-0/00862478
-0/035527	-0/00787	0/00039797	-0/024941	0/0502423	-0/00845053
-0/025457	-0/000296	-0/009882	-0/0081013	0/0185803	0/00099585
-0/028017	-0/000416	-0/0091323	-0/0213256	0/0492726	-0/03287645
-0/028049	0/0006016	-0/0084538	-0/0211987	0/0499946	-0/00152961
-0/030263	-0/009326	-0/0163328	-0/0241619	0/0469713	-0/03560503
-0/040677	-0/026382	-0/0302468	-0/023581	0/0285615	-0/04284628
-0/037757	-0/026784	-0/0304972	-0/0233484	0/0276175	-0/00201888
-0/036679	-0/028684	-0/0276133	-0/02302	0/0249521	-0/00551019

نمایه

Aabstract

In this thesis, the concept of tail subadditivity (Belles-Sampera et al., 2014a and 2014b) for distortion risk measures is extended. Also sufficient and necessary conditions for a distortion risk measure to be tail subadditive are given. The generalized GlueVaR risk measures, which can be used to approach any coherent distortion risk measure are introduced. To further illustrate the applications of the tail subadditivity, the multivariate tail distortion (MTD) risk measures are proposed and the multivariate tail conditional expectation (MTCE) risk measure introduced by Landsman et al. (2016) is generalized. The properties of multivariate tail distortion risk measures, such as positive homogeneity, translation invariance, monotonicity, and subadditivity, are discussed as well. Moreover, the applications of the multivariate tail distortion risk measures in capital allocations for a portfolio of risks are discussed and the impacts of the dependence between risks in a portfolio and extreme tail events of a risk portfolio in capital allocations are explored.
Keywords: Generalized GlueVaR, Subadditivity, Tail subadditivity, Tail distortion risk measure, Multivariate tail risk measure, Coherent risk measure, Choquet integral, Capital allocation.

Shahrood
University of
Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in Financial Mathematics

Tail subadditivity of distortion risk measures, multivariate tail distortion risk measures and the applications of MTD risk measures in capital allocations

By: Fereshteh Mehrpour

Supervisors:

Dr. Ali Reza Khoddami
Dr. Abdolmajid Abdolbaqi Ataabadi

January 2020