

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی مالی

یک روش هموارسازی در حل بهینه‌سازی سبد سهام با روش CVaR و کاربردهای آن در تخصیص دارایی تولید

نگارنده: سعیده اشک تلخ

استادان راهنما

دکتر علیرضا ناظمی
دکتر عبدالمجید عبدالباقی عطا آبادی

بهمن ۱۳۹۸

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم سعیده اشک تلخ با شماره دانشجویی ۹۶۰۲۵۵۴ رشته ریاضی گرایش مالی تحت عنوان روش هموارسازی در حل بهینه‌سازی سبب سهام با روش CVAR و کاربردهای آن در تخصیص دارایی تولید که در تاریخ ۱۳۹۸/۱۱/۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ (ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹-۱۸
 ج) درجه خوب: نمره ۱۷/۹۹-۱۶ (د) درجه متوسط: نمره ۱۵/۹۹-۱۴
 ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
 نوع تحقیق: نظری عملی

| عضو هیأت داوران | نام و نام خانوادگی | مرتبه علمی | امضاء |
|---------------------------|---------------------------------------|------------|-------|
| ۱- استاذ راهنمای اول | دکتر علیرضا ناظمی | استاد | |
| ۲- استاذ راهنمای دوم | دکتر عبدالمجید عبدالباقی عطا آبادی | استادیار | |
| ۳- استاذ مشاور | | | |
| ۴- نماینده تحصیلات تکمیلی | دکتر سمیه مغاری | استادیار | |
| ۵- استاذ ممتحن اول | دکتر الهام دسترنج بلالی | استادیار | |
| ۶- استاذ ممتحن دوم | دکتر محمد مهدی نوری اسکندری | استادیار | |

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوت‌نمد

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

۹۸ ۱۲ ۱۰



تقدیم به سه وجود مقدس:
آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...
موهایشان سپید شد تا ما رو سفید شویم...
و عاشقانه سوختند تا گرما بخش وجود ما
و روشنگر راهمان باشند...

پدارنمان
مادرانمان
استادانمان

سپاس‌گزاری...

نمی‌توانم معنایی بالاتر از تقدیر و تشکر بر زبانم جاری
سازم و سپاس خود را در وصف استادان خویش آشکار
نمایم، که هرچه گویم و سراپم، کم گفته‌ام...

از استادان گرامی‌ام جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی و
آقای دکتر عبدالمجید عبدالباقی عطاآبادی بسیار سپاس‌گزارم
چرا که بدون راهنمایی‌های ایشان تامین این پایان‌نامه بسیار
مشکل می‌نمود.

در پایان از خانواده‌ام که در تمام دوران تحصیلی مرا
حمایت کرده‌اند تقدیر و تشکر می‌کنم و این پایان‌نامه را
تقدیم می‌کنم به مادرم که پشتیبان من در زندگی بوده
است.

سعیده اشک تلخ

بهمن ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب سعیده اشک تلخ دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان یک روش هموارسازی در حل بهینه‌سازی سبد سهام با روش CVaR و کاربردهای آن در تخصیص دارایی تولید، تحت راهنمایی علیرضا ناظمی و عبدالمجید عبدالباقی عطا آبادی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سعیده اشک تلخ

بهمن ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه مساله بهینه‌سازی سبد سهام با CVaR مورد بررسی قرار می‌گیرد. مطابق مدل‌های مطالعه شده درباره نیمه هموارسازی، ابتدا روش هموارسازی را در نظر گرفته و سپس الگوریتم SQP ارائه می‌شود. مثال‌های عددی از تخصیص دارایی تولید به بازارهای قدرت ارائه می‌شوند. کارایی روش محاسباتی بین روش پیشنهادی SQP و روش برنامه‌ریزی خطی مقایسه می‌شود. نتایج عددی نشان دهنده‌ی این است که عملکرد این روش جدید خوب بوده است. از مزایای قابل توجه این روش سه مورد است.

- بعد مدل‌های هموارسازی برای بهینه‌سازی سبد سهام با CVaR پایین است و مستقل از تعداد نمونه‌هاست.

- مدل‌های هموارسازی، تحذب مساله‌های اولیه بهینه‌سازی سبد سهام را حفظ می‌کند.
- مدل هموارسازی پیچیده‌ای که شامل بیشینه‌سازی تحت قیود CVaR است، می‌تواند به یک مدل بهینه‌سازی معمولی کاهش یابد.

همه این موارد نشان دهنده‌ی مزیت روش جدید برای بالا بردن کارایی محاسباتی به منظور حل کردن مساله بهینه‌سازی سبد سهام از طریق محاسبه‌ی CVaR است.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی سبد سهام، ارزش در معرض ریسک مشروط (CVaR)، روش هموارسازی، تخصیص دارایی تولید

فهرست مطالب

| | |
|----|--|
| ک | فهرست تصاویر |
| م | فهرست جداول |
| ۱ | ۱ مفاهیم |
| ۱ | ۱.۱ مروری بر برخی از مفاهیم ریاضی |
| ۳ | ۲.۱ سیستم‌های دینامیکی |
| ۴ | ۳.۱ مفاهیم مالی |
| ۴ | ۱.۳.۱ سبد سهام |
| ۶ | ۲.۳.۱ بازده |
| ۷ | ۳.۳.۱ مفهوم ریسک و شاخص‌های معیار |
| ۱۰ | ۴.۳.۱ بهینه‌سازی سبد سهام |
| ۱۰ | ۴.۱ انتخاب پرتفوی بهینه |
| ۱۲ | ۵.۱ تاریخچه سبد سهام |
| ۱۴ | ۱.۵.۱ مدل‌های جایگزین |
| ۱۵ | ۶.۱ مقدمه‌ای برای ارزش در معرض ریسک مشروط |
| | ۲ یک چارچوب شبکه عصبی گرادیان جدید برای حل مسائل بهینه‌سازی مینیمم-ماکزیمم مقید با یک کاربرد در مدل‌های انتخاب پورتفوی |
| ۱۹ | ۱.۲ مقدمه |
| ۲۱ | ۲.۲ فرمول‌بندی معادل |
| ۲۳ | ۳.۲ مدل شبکه عصبی گرادیان |
| ۲۴ | ۴.۲ مقایسه با برخی شبکه‌های عصبی موجود |
| ۲۶ | ۵.۲ پایداری و تحلیل همگرایی |
| ۲۸ | ۶.۲ مثال‌های عددی |

| | | |
|------|---|--------|
| ۳۵ | یک شبکه عصبی تصویری برای حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی مینیمم-ماکزیمم | ۳ |
| ۳۶ | مدل شبکه عصبی | ۱.۳ |
| ۳۷ | مقایسه با برخی شبکه‌های عصبی موجود | ۲.۳ |
| ۳۹ | تحلیل پایداری و همگرایی | ۳.۳ |
| | | |
| | روش هموارسازی در حل بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از ارزش در معرض ریسک | ۴ |
| ۴۷ | | |
| ۵۰ | مدل‌های بهینه‌سازی پورتنوی با اندازه‌گیری CVaR | ۱.۴ |
| ۵۰ | فرمول CVaR | ۱.۱.۴ |
| ۵۱ | محاسبات بهینه‌سازی CVaR | ۲.۴ |
| ۵۱ | روش اول: طرح روش بر اساس بهینه‌سازی ناهموار | ۱.۲.۴ |
| ۵۱ | روش دوم: طرح روش بر اساس بهینه‌سازی هموار | ۲.۲.۴ |
| ۵۲ | مدل‌های کلی بهینه‌سازی پرتفوی با استفاده از CVaR | ۳.۴ |
| ۵۳ | هموار کردن مدل‌های بهینه‌سازی با در نظر گرفتن CVaR | ۴.۴ |
| ۵۴ | تابع هموارسازی در فرمول CVaR | ۵.۴ |
| ۵۵ | مدل‌های بهینه‌سازی هموار متناظر با اندازه CVaR | ۶.۴ |
| ۵۷ | الگوریتم SQP هموارسازی و همگرایی آن | ۷.۴ |
| ۵۷ | الگوریتم SQP هموارسازی | ۸.۴ |
| ۵۸ | مراحل الگوریتم SQP هموارسازی | ۹.۴ |
| ۵۹ | کاربردها در تخصیص دارایی‌های تولیدی | ۱۰.۴ |
| ۶۳ | کمینه‌سازی CVaR | ۱.۱۰.۴ |
| ۶۳ | کمینه‌سازی CVaR با قید بازده | ۱۱.۴ |
| ۶۷ | بیشینه‌سازی بازده با قید CVaR | ۱.۱۱.۴ |
| ۶۹ | نتیجه‌گیری | ۱۲.۴ |
| ۷۱ | | مراجع |

فهرست تصاویر

| | | |
|----|--|------|
| ۲۵ | نمایش اجرای سخت‌افزاری شبکه عصبی (۱۷.۲) و (۱۸.۲) | ۱.۲ |
| ۲۹ | رفتار $x(t)$ براساس مدل (۱۷.۲) و (۱۸.۲) با 1^0 نقطه اولیه تصادفی | ۲.۲ |
| ۳۰ | رفتار همگرایی خطای l^2 بین x و x^* با 2^0 نقطه اولیه مختلف | ۳.۲ |
| ۳۱ | نمودار فاز از متغیرهای حالت $(x_1(t), x_2(t))^T$ با 8 نقطه اولیه | ۴.۲ |
| ۳۱ | مسیرها و نمودار فاز متغیرهای حالت $(x_1(t), x_2(t))^T$ | ۵.۲ |
| ۳۱ | رفتار همگرایی محلی خطای $\ x(t) - x^*\ ^2$ با خطای η و نقطه اولیه x_0 | ۶.۲ |
| ۳۲ | $(1, -1)^T$ | |
| ۳۷ | اجرای شبکه عصبی (۷.۳) در سخت افزار | ۱.۳ |
| ۴۰ | رفتار گذرا از شبکه عصبی (۷.۳) با 3^0 نقطه اولیه تصادفی در مثال ۱.۳.۳ | ۲.۳ |
| ۴۱ | نمودار فازی شبکه عصبی (۷.۳) با 6 نقطه اولیه تصادفی در مثال ۱.۳.۳ | ۳.۳ |
| ۴۲ | رفتار همگرایی از $\ x(t) - x^*\ ^2$ در مثال ۱.۳.۳ با $x_0 = (1, -1)^T$ | ۴.۳ |
| ۴۳ | نمودار فاز شبکه عصبی (۷.۳) با 8 نقطه اولیه تصادفی در مثال ۲.۳.۳ | ۵.۳ |
| ۴۳ | رفتار همگرایی از $\ x(t) - x^*\ ^2$ در مثال ۲.۳.۳ با $x_0 = (1, -1)^T$ | ۶.۳ |
| ۴۴ | رفتار گذرا از شبکه عصبی (۷.۳) با 1^0 نقطه اولیه تصادفی در مثال ۲.۳.۳ | ۷.۳ |
| ۴۵ | رفتار همگرایی $\ x(t) - x^*\ ^2$ در مثال ۲.۳.۳ | ۸.۳ |
| ۶۰ | پی دی اف قیمت‌های بازار نقدی | ۱.۴ |
| ۶۱ | پی دی اف قیمت‌های قراردادهای آتی | ۲.۴ |
| ۶۲ | نقاط درصد تخصیص بهینه از بازارهای آتی | ۳.۴ |
| ۶۲ | مرز کارایی CVaR و بازده | ۴.۴ |
| ۶۳ | مرزهای کارایی CVaR و کران V_α | ۵.۴ |
| ۶۴ | خطای درصد تخصیص برای دو روش فوق با V_α مختلف | ۶.۴ |
| ۶۵ | مضرب‌های مصرف زمان CPU برای دو روش | ۷.۴ |
| ۶۶ | تخصیص بهینه بازار نقدی با V_1 مختلف | ۸.۴ |
| ۶۶ | مرز کارایی CVaR- سود | ۹.۴ |
| ۶۷ | مرز کارایی V_1 - سود | ۱۰.۴ |

۱۱.۴ خطای تخصیص بین دو روش مزبور در بازارهای نقدی و آتی ۶۸

فهرست جداول

| | | | |
|----|-------|--|-----|
| ۶۱ | | نتایج محاسبات و مقایسه دو روش | ۱.۴ |
| ۶۵ | | کارایی محاسباتی در CVaR کمینه سازی با قید بازده | ۲.۴ |
| ۶۸ | | کارایی محاسباتی در بیشینه سازی بازده با قید CVaR | ۳.۴ |

فصل ۱

مفاهیم

در این فصل برای درک و فهم بهتر پایان نامه، به طور مختصر به بیان برخی مفاهیم و اصطلاحات در زمینه ریاضیات و مالی می پردازیم.

۱.۱ مروری بر برخی از مفاهیم ریاضی

تعریف ۱.۱.۱. در نظریه احتمالات، امید ریاضی^۱، میانگین، مقدار مورد انتظار یا ارزش مورد انتظار یک متغیر تصادفی گسسته برابر است با مجموع حاصل ضرب احتمال وقوع هر یک از حالات ممکن در مقدار آن حالت.

امید ریاضی یک متغیر تصادفی پیوسته به صورت زیر تعریف می شود

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

که در آن $f_X(x)$ ، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X است. برای متغیرهای تصادفی گسسته تعریف بالا به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_X(x_i).$$

که در آن $p_X(x_i)$ تابع احتمال است.

^۱Expected Value

- امید ریاضی یک عدد ثابت برابر با همان عدد ثابت است، یعنی اگر c عددی ثابت باشد، آن گاه $E(c) = c$.
- اگر برای دو متغیر تصادفی X و Y داشته باشیم $X \leq Y$ ، آن گاه با احتمال قریب به یقین داریم: $E(X) \leq E(Y)$.
- عملگر امید ریاضی خطی است یعنی برای هر دو متغیر تصادفی X و Y و هر عدد حقیقی a و b داریم:

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \quad (1.1)$$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

تعریف ۲.۱.۱. در آمار و احتمال، گشتاور^۱ معیاری کمی برای توصیف شکل یک توزیع احتمال است. گشتاور اول همان میانگین است. برای گشتاورهای مراتب بالاتر معمولاً گشتاور را حول میانگین حساب می کنند و آن را گشتاور مرکزی می نامند. k -امین گشتاور مرکزی متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k].$$

فرض کنید $\mu = E(X)$ ، امید ریاضی (میانگین) متغیر تصادفی X باشد.

تعریف ۳.۱.۱. در نظریه احتمالات و آمار، واریانس^۲ نوعی سنجش پراکندگی است و آن عددی است که نشان می دهد چگونه یک سری داده حول مقدار میانگین پخش می شوند. واریانس X به صورت زیر تعریف می شود:

$$V(X) = E[(X - \mu)^2].$$

- اگر X یک متغیر تصادفی باشد، برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$V[aX + b] = E[((aX + b) - (aE(X) + b))^2] = a^2 E[(X - E(X))^2] = a^2 V[X].$$

- اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$V[aX + bY] = a^2 V[X] + b^2 V[Y] + 2ab Cov(X, Y),$$

که در آن، $Cov(X, Y)$ اندازه تغییرات هماهنگ دو متغیر تصادفی است.

¹Moment

²Variance

۲.۱ سیستم‌های دینامیکی

تعریف ۱.۲.۱. سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

که در آن f یک تابع از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^n است. x^* یک نقطه تعادل^۱ (۲.۱) نامیده می‌شود اگر $f(x^*) = 0$. اگر همسایگی $\Omega^* \subseteq \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد که $f(x^*) = 0$ و $\forall x \in \Omega^* \setminus \{x^*\}$ ، $f(x) \neq 0$ ، آن‌گاه x^* یک نقطه تعادل تنها^۲ نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. سیستم دینامیکی (۲.۱) همگرای سراسری به مجموعه جواب‌های (۲.۱) که با Ω^* نمایش داده می‌شود، گفته می‌شود اگر برای هر نقطه آغازین دلخواه، مسیر $x(t)$ در رابطه زیر صدق کند:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \Omega^*) = 0,$$

که در آن

$$\text{dist}(x, \Omega^*) = \inf_{y \in \Omega^*} \|x - y\|,$$

و $\|\cdot\|$ نرم L_2 را نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۲.۱ (قضیه پایداری لیاپانوف [۶۱]). فرض کنید که $x = 0$ یک نقطه تعادل سیستم (۲.۱) باشد و $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به‌طور پیوسته مشتق پذیر باشد به‌طوری‌که:

$$1. \quad V(0) = 0$$

$$2. \quad V(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$3. \quad \dot{V}(x) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

آن‌گاه $x = 0$ نقطه پایداری سیستم خواهد بود.

قضیه ۲.۲.۱ (قضیه پایداری مجانبی [۶۱]). تحت شرایط قضیه ۱.۲.۱ اگر $V(\cdot)$ در شرایط زیر صدق کند:

$$1. \quad V(0) = 0$$

$$2. \quad V(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$3. \quad \dot{V}(x) < 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

آن‌گاه $x = 0$ پایدار مجانبی خواهد بود.

¹Equilibrium Point

²Isolated Equilibrium Point

قضیه ۳.۲.۱ (قضیه پایداری مجانبی سراسری [۶۱]). تحت شرایط قضیه ۱.۲.۱ اگر $V(\cdot)$ به طور شعاعی بی کران باشد یعنی

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|V(x)\| = \infty$$

آن گاه نقطه $x = 0$ پایدار مجانبی سراسری است.

۳.۱ مفاهیم مالی

سرمایه‌گذاری^۱ به معنی گذاشتن پول در چیزی با انتظار سود از آن است. به طور دقیق سرمایه‌گذاری تعهد پول یا سرمایه برای خرید مالی و سائل یا دارایی‌های دیگر، به منظور منفعت برگشت‌های سودمند و مفید در قالب بهره، سود سهام یا قدردانی از ارزش و سائل (منافع سرمایه) است. به عبارت دیگر سرمایه‌گذاری یعنی به تعویق انداختن مصرف فعلی برای دستیابی به امکان مصرف بیشتر در آینده است.

در سرمایه‌گذاری دو ویژگی متفاوت و مهم وجود دارد که عبارتند از زمان و ریسک. اهمیت دو موضوع یاد شده به این علت است که در سرمایه‌گذاری صرف پول در زمان حال صورت می‌گیرد و مقدار آن معین است، در حالی که پاداش حاصل از آن در آینده به دست می‌آید و معمولاً با عدم اطمینان همراه است. در بعضی مواقع، ویژگی زمان غالب می‌شود (مانند اوراق قرضه دولتی) و در بعضی مواقع ریسک از نظر اهمیت مقدم است (مانند برگه اختیار خرید سهام عادی) و در مواقع دیگر هر دو دارای اهمیت هستند (مانند سهام عادی).

۱.۳.۱ سبد سهام

تعریف ۱.۳.۱. سبد سهام یا پُرتفوی^۲ ترکیبی مناسب از سهام یا سایر دارایی‌ها است، که یک سرمایه‌گذار آن‌ها را خریداری کرده است. هدف از تشکیل سبد سهام، تقسیم کردن ریسک سرمایه‌گذاری بین چند سهم است؛ بدین ترتیب، سود یک سهم می‌تواند ضرر سهام دیگر را جبران کند. یک ضرب‌المثل معروف می‌گوید: «همه تخم‌مرغ‌ها را در یک سبد نگذارید.»، چرا که ریسک شکستن سبد، باعث نابودی همه تخم‌مرغ‌ها خواهد شد.

تعریف ۲.۳.۱. دارایی^۳ عبارت است از کلیه اموال و حقوقی که دارای ارزش پولی هستند. به منابعی که دارای ارزش اقتصادی هستند و افراد، شرکت‌ها یا دولت‌ها مالکیت آن را در اختیار می‌گیرند و انتظار دارند آن منابع در آینده منافی را برای آن‌ها ایجاد کنند، دارایی گفته

¹Investment

²Portfolio

³Asset

می‌شود.

دو نوع دارایی داریم:

۱. دارایی ریسکی^۱: به دارایی گویند که در مورد بازده آن اطمینان نداریم. این عدم اطمینان را به‌وسیله واریانس (انحراف معیار و ...) بازدهی‌های مورد انتظار نشان می‌دهیم. مانند سهام، اوراق قرضه غیر دولتی، ارز و طلا و

۲. دارایی بدون ریسک^۲: دارایی که دارای یک بازدهی آتی است و بازده آن به‌حدی امن است که بسیار نزدیک به نرخ بهره فعلی است.

تعریف ۳.۳.۱. تخصیص دارایی،^۳ فرآیندی که در آن تقسیم منابعی مالی انجام می‌گیرد.

تعریف ۴.۳.۱. افق سرمایه‌گذاری،^۴ چارچوب زمانی و عامل کلیدی برای اتخاذ استراتژی سرمایه‌گذاری به حساب می‌آید. میزان زمانی که باید پس‌انداز و سرمایه‌گذاری کرد را مشخص می‌کند و بر تصمیمات تخصیص دارایی موثر است.

تعریف ۵.۳.۱. هزینه معامله،^۵ آن دسته از هزینه‌هایی است که افراد در فرآیند مبادله اقتصادی متحمل می‌شوند تا حقوق مالکیت خود را مشخص، تعریف و تضمین کنند. مانند هزینه‌های کسب اطلاعات درباره‌ی فروشنده، خریدار و کیفیت کالا یا خدمتی که مبادله می‌شود، هزینه‌های عقد قرارداد و نظارت بر عملکرد طرف مقابل و از همه مهم‌تر هزینه‌های مربوط به تعریف حقوق مالکیت و تضمین اعمال این حقوق می‌باشد.

در مسأله‌ی سبد سهام تک دوره‌ای، فرض می‌شود که سرمایه‌گذار تصمیم به تخصیص دارایی‌ها برای یک بار و برای n دارایی موجود، در ابتدای دوره‌ی موردنظر می‌گیرد. تصمیم‌گیری فقط یک بار انجام می‌شود و اجازه‌ی بازنگری تا انتهای دوره وجود ندارد و اثر تصمیمات بر دوره‌های بعدی مورد توجه قرار نمی‌گیرد.

مسائل تک دوره‌ای بر پایه سه فرض محدودکننده بنا شده‌اند:

- افق سرمایه‌گذاری کوتاه مدت است.
- هزینه معاملات در بازار در نظر گرفته نشده است.
- پارامترهای مسأله به‌صورت قطعی و از قبل معلوم هستند.

¹Risky Asset

²Riskless Asset

³Asset Allocation

⁴Investment horizon

⁵Transaction Cost

در حالی که مسائل سبد سهام چند دوره‌ای^۱ کلی‌تر هستند به طوری که سرمایه‌گذار یک رشته تصمیم‌گیری انجام می‌دهد که هر تصمیم بر روی تصمیمات بعدی اثرگذار است. هدف پیدا کردن تصمیم‌گیری برای تخصیص در هر دوره با در نظر گرفتن یک مجموعه از فرصت‌های تغییر در آینده افق سرمایه‌گذاری باقی‌مانده، هزینه‌های معاملات نهایی و دیگر محدودیت‌ها است.

تعریف ۶.۳.۱. تعداد مشخصی از اوراق بهادار که حجم سفارش وارده به سامانه‌ی معاملاتی آن باید مضرب صحیحی از آن باشد را lot گویند.

برای معامله در بورس باید مقدار حداقل و استاندارد از تعداد واحدهای مورد معامله مورد مبادله قرار گیرد که به این مقدار استاندارد یک lot گفته می‌شود. از نظر سهام، تعداد سهامی که در یک معامله خریداری می‌شود. در بازارهای مالی، lot نشان‌دهنده مقادیر استاندارد یک ابزار مالی است به نحوی که سازمان مقررات تنظیم کرده است. مفهوم lot به بازارهای مالی برای استاندارد کردن قیمت مجوز می‌دهد.

تعریف ۷.۳.۱. سبد خودتامین^۲، سبد مالی است که در آن سرمایه‌گذاری‌ها فقط به خرید سهام و درآمدهای ناشی از فروش سهام منحصر باشد.

۲.۳.۱ بازده

معمولاً افراد مصرف کنونی را به مصرف در آینده ترجیح می‌دهند. بنابراین برای تشویق افراد در به تعویق انداختن مصرف فعلی می‌بایستی انتظار کسب پاداش از سرمایه‌گذاری را برای آنان ایجاد کرد. در واقع انتظار کسب بازده یا پاداش سرمایه‌گذاری موجب می‌شود تا سرمایه‌گذاران مصرف در آینده را به مصرف فعلی ترجیح دهند. به بهره ناشی از سرمایه‌گذاری بازده^۳ گفته می‌شود. این تعریف به بهره یا سود سهام دریافتی از اوراق بهادار اشاره دارد و معمولاً به صورت سالانه و به عنوان درصدی از هزینه سرمایه‌گذاری، ارزش بازاری جاری یا ارزش اسمی آن بیان می‌شود.

تعریف ۸.۳.۱. نرخ بهره^۴ عبارت است از نرخ که بابت جلوگیری از کاهش ارزش پول پرداختی در امروز و دریافتی در آینده (به دلیل ارزش زمانی) از وام‌گیرنده دریافت می‌شود.

¹Multi-period portfolio

²Self-financing

³Returns

⁴Interest Rate

بازده مورد انتظار هر سهم

با معلوم بودن توزیع احتمال برای بازده سهام، بازده مورد انتظار برای سهام i ام با $E(R_i)$ نشان داده شده و به صورت زیر به دست می آید:

$$E(R_i) = \sum_{k=1}^m (p_k) P R_k,$$

که در آن، $P R_k$ بازده سهم i ام و p_k احتمال وقوع آن است.

بازده مورد انتظار سبد سرمایه

در صورتی که سبد سرمایه با N دارایی داشته باشیم که وزن دارایی i ام در آن x_i باشد، بازده مورد انتظار سبد سرمایه با $E(R_p)$ نشان داده می شود و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N x_i E(R_i). \quad (3.1)$$

۳.۳.۱ مفهوم ریسک و شاخص های معیار

زیان بالقوه و قابل اندازه گیری یک نوع سرمایه گذاری را ریسک^۱ می گویند. ریسک در بازارهای مالی مفهوم کلیدی است، از این رو می بایست آن را شناخت، اندازه گیری کرد و برای حذف ریسک های غیرضروری برنامه ریزی و ریسک های همراه با فرصت را مدیریت نمود.

ریسک پدیده ای مربوط به آینده است که نمی توان آن را به طور دقیق پیش بینی کرد زیرا با عدم اطمینان همراه است. هرچه عدم اطمینان^۲ بیشتر باشد، ریسک نیز بیشتر خواهد بود. در بازارهای مالی به همراه هر فرصتی ریسکی هم وجود دارد و اصولاً نمی توان از همه ریسک ها چشم پوشی کرد زیرا کلیه فرصت ها از بین می روند.

در گام نخست هر سرمایه گذاری می داند که برای کسب بازدهی بیشتر می بایست سطح ریسک پذیری خود را افزایش دهد.

ریسک در یک طبقه بندی کلی، به دو دسته تقسیم می شود:

۱. ریسک سیستماتیک

۲. ریسک غیر سیستماتیک

¹Risk

²Unreliability

ریسک سیستماتیک، ریسکی است که از عوامل بازار ناشی شده و بر یک سرمایه‌گذاری (مثلاً قیمت سهام شرکت‌ها) تأثیر دارد و مدیریت آن از دست مدیران شرکت‌ها خارج است اما ریسک غیر سیستماتیک، به ریسکی گفته می‌شود که ناشی از عوامل کلان حاکم بر یک بازار نیست و به ساختار یک شرکت یا بنگاه اقتصادی مربوط می‌شود. برای مثال ساختار سرمایه شرکت، نوع محصول (کالا یا خدمات)، تصمیم‌گیری در شرایط مختلف و

از مهم‌ترین عوامل مؤثر در انتخاب گزینه‌های سرمایه‌گذاری، میزان پذیرش ریسک سرمایه‌گذار است. به‌طور کلی می‌توان سرمایه‌گذاران را به دو گروه ریسک‌پذیر^۱ و ریسک‌گریز^۲ تقسیم کرد. سرمایه‌گذار ریسک‌پذیر، سرمایه‌گذاری است که مقدار بازده معینی را انتظار دارد و هدفش کمینه‌کردن^۳ ریسک است و ریسک‌گریز کسی است که با هدف بیشترین بازده، برای یک سطح مشخص از ریسک سرمایه‌گذاری می‌کند.

مهمترین مسأله در ریسک، محاسبه میزان آن است. تاکنون معیارهای مختلفی برای تعیین ریسک معرفی شده است.

در سال ۱۹۵۲، هری مارکوویتز با ارائه مدلی کمی به اندازه‌گیری ریسک پرداخت و با معرفی مدلی مبتنی بر ریسک و بازده و ارائه مجموعه کارا^۴ برای اولین بار ریسک را در کنار بازده به‌عنوان متغیری دیگر جهت انتخاب دارایی برای سرمایه‌گذاری قرار داد. وی انحراف معیار را به‌عنوان شاخص پراکندگی، معیار عددی ریسک خواند. شاگرد او ویلیام شارپ^۵، شاخص بتا (ضریب حساسیت) را برای تغییرات نسبی ارزش یک سهم در قبال تغییر ارزش بازار ارائه کرد و با معرفی مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای، مدیریت علمی سبد سرمایه را پایه‌گذاری کرد. مک کالی^۶ معیار بتا را به‌عنوان ملاک اندازه‌گیری ریسک اوراق بهادار با درآمد ثابت معرفی کرد، در ادامه‌ی کار، مک کالی معیار تحذب را به‌عنوان شاخصی دقیق‌تر معرفی کرد. در سال ۱۹۹۶ وترستون^۷ مدیر موسسه‌ی مورگان^۸ مدل ارزش در معرض ریسک^۹ را معرفی کرد. در نهایت در سال ۱۹۹۸ دلبان^{۱۰} ریسک منسجم^{۱۱} را به‌عنوان معیار ریسک در نظر گرفت. می‌توان طبقه‌بندی زیر را در مورد معیارهای اندازه‌گیری ریسک ارائه داد:

۱. حساسیت: تغییر یک متغیر وابسته بر اثر تغییر یک متغیر مستقل، مثل تغییرات قیمت در قبال تغییر یک واحد نرخ سود (تحذب و بتا).

¹Risk Taker

²Risk Avers

³Minimum

⁴Efficient Frontier Line

⁵ William Sharpe

⁶McCauley

⁷Weterstone

⁸J. P. Morgan

⁹Value at Risk

¹⁰Delbaen

¹¹Coherent Risk

۲. نوسان: عبارت است از نوسان یک متغیر در اطراف میانگین و یا یک پارامتر تصادفی دیگر مثل واریانس یا انحراف معیار.

۳. معیارهای ریسک نامطلوب: این معیارها که برعکس معیارهای نوسان، تنها بر بخش مخرب ریسک تمرکز دارند، در حقیقت نوسانات زیر سطح میانگین و یا متغیر هدف را مورد محاسبه قرار می‌دهند (نیم واریانس، نیم انحراف معیار و ارزش در معرض ریسک).

۴. ریسک منسجم: که به صورت یک اصل موضوع می‌باشد مانند (ارزش در معرض ریسک مشروط^۱).

تعریف ۹.۳.۱. نیم واریانس^۲ شاخصی است که در آن تنها انحرافات نامطلوب بازده مورد توجه قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر اگر ریسک را میزان ضرر تعریف کنیم، آن‌گاه تغییرات مطلوب (افزایش نرخ بازدهی دارایی مالی) به عنوان ریسک محسوب نمی‌شود و فقط آن دسته از مشاهداتی که کمتر از میانگین نرخ بازدهی هستند، به عنوان ریسک به حساب می‌آید. فرمول محاسبه نیم واریانس به صورت زیر است:

$$SV = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \{\max(0, E(r_i) - r_T)\}^2,$$

که در آن، r_T بازدهی دارایی در پایان دوره، r_i بازدهی در زمان i ام K تعداد مشاهدات و E امید ریاضی نرخ بازدهی است.

تعریف ۱۰.۳.۱. ارزش در معرض ریسک^۳ یک روش آماری است که برای اندازه‌گیری و تعیین میزان ریسک مالی در یک شرکت و یا پرتفوی سرمایه‌گذاری در یک دوره زمانی مشخص، استفاده می‌شود.

اعتقاد عمومی در مفاهیم مالی بر این موضوع اشاره دارد که ارزش در معرض ریسک رویکردی جدید برای اداره و کنترل ریسک است. به طور کلی می‌توان گفت ارزش در معرض ریسک بیشترین مقدار زیان مورد انتظار را در یک افق زمانی (یک روز، یک هفته، یک ماه، ...) مشخص در سطح اطمینانی معین اندازه‌گیری می‌نماید. از مزایای مهم این ابزار، خلاصه‌سازی ریسک در یک عدد واحد است.

درجه تنوع

تنوع^۴، یک تکنیک مدیریت ریسک، آمیزه‌ای از سرمایه‌گذاری‌های مختلف در یک سبد سهام است.

¹Conditional Value at Risk

²Semivariance

³Value at Risk (VaR)

⁴Diversification

منطق پشت این تکنیک معتقد است که یک سبد سهام ساخته شده از انواع مختلف سرمایه‌گذاری، به‌طور متوسط بازده بالاتر و ریسک پایین‌تری نسبت به هر سرمایه‌گذاری تکی دارد. تنوع تلاش می‌کند که حوادث ریسک‌گیر سیستماتیک در یک سبد سهام را کنترل کند به نحوی که عملکرد مثبت برخی از سرمایه‌گذاری‌ها را با عملکرد منفی سرمایه‌گذاران دیگر خنثی کند.

۴.۳.۱ بهینه‌سازی سبد سهام

بهینه‌سازی سبد سهام^۱ عبارت است از تعیین نسبت سرمایه‌گذاری در دارایی‌هایی که قرار است در سبد نگه‌داری شود؛ به‌شکلی که سبد انتخابی بهتر از هر سبد دیگری باشد. این بهتر بودن براساس معیارهایی مشخص می‌شود. معیارهایی که به‌صورت مستقیم یا غیرمستقیم ترکیبی از ملاحظات بازده مورد انتظار سبد، پراکندگی بازده‌ها و سایر پارامترهای ریسک مالی است. به‌عبارت دیگر سبد سهام بهینه، سبدي است که موجب بیشترین بازدهی و کمترین زیان شود. در بسیاری از رویکردهای بهینه‌سازی، این کار به‌صورت یک دوره‌ای انجام می‌گیرد اما از آنجا که سرمایه‌گذاری مفهومی بلندمدت و آینده‌نگر است، یک دوره‌ای در نظر گرفتن بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با این مفهوم همخوانی نخواهد داشت. سرمایه‌گذار به‌دنبال بهینه‌کردن تخصیص دارایی در هر دوره‌ی زمانی است به‌گونه‌ای که امید مطلوبیت ثروت در آخرین دوره‌ی زمانی بیشینه شود. در موضوعات مالی، انتخاب سبد سهام به‌منظور حداکثرسازی سود یکی از اصلی‌ترین دغدغه‌های سرمایه‌گذاران در بازارهای مالی است. مسأله‌ی بهینه‌سازی مارکوویتز^۲ و تعیین مرز کارا، زمانی توسط مدل‌های ریاضی قابل حل است که تعداد دارایی‌های سرمایه‌گذاری و محدودیت‌های موجود در بازار اندک است اما هنگامی که شرایط و محدودیت‌های دنیای واقعی در نظر گرفته شود، مسأله‌ی بهینه‌سازی پرتفوی به‌راحتی با استفاده از شیوه‌های ریاضی قابل حل نیست.

۴.۱ انتخاب پرتفوی بهینه

در این بخش چند مدل برای مسأله انتخاب پرتفوی در شرایطی که بازده اوراق بهادار نامعین فرض می‌شود، بیان می‌گردد. با توجه به اینکه این مسائل به روش‌های معمول قابل حل نیستند ایده اصلی کار، جایگزینی این مدل‌ها با معادله‌های دقیق و قطعی آن‌ها در حالاتی خاص از متغیرهای نامعین (مانند متغیر نامعین خطی، زیگزاگ، دوزنقه‌ای) و سپس حل آن‌ها است. برای نشان دادن کارایی مدل شبکه عصبی پیشنهاد شده در فصل دوم، چند مثال عددی از مسائل انتخاب پرتفوی بیان و حل می‌شود.

¹Optimization Portfolio

²Markowitz

مسئله انتخاب مجموعه بهینه‌ای از دارایی‌ها، یکی از مسائل بازار سرمایه است که از اهمیت زیادی برخوردار است. در حوزه اقتصاد خرد، اهمیت تصمیمات سرمایه‌گذاری، ناشی از این مسئله است که در واقع فرد سرمایه‌گذار، مصرف و بازده امروز را به امید بازده بیشتر به زمانی در آینده موکول می‌کند. در واقع تصمیم بهینه سرمایه‌گذاری، میزان مطلوبیت هر فرد است که با توجه به ترجیحات شخصی وی تعیین می‌گردد و لزوماً با سایر افراد یکسان نخواهد بود، ولی می‌توان با معیارهایی، مطلوبیت فرد را از انتخاب مجموعه‌ای از دارایی‌های سرمایه‌ای، مشخص کرد. از جمله مهمترین این معیارها، ریسک و بازده کل مجموعه انتخاب شده است. هدف مدیریت مجموعه دارایی‌ها به‌طور عام و مجموعه سهام (سبد سهام) به‌طور خاص، تعیین دارایی‌های درون سبد به‌گونه‌ای که ریسک حداقل و بازده حداکثر شود.

مسئله تنوع‌بخشی در دارایی‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. طبقات مختلف دارایی شامل انواع اوراق بهادار، پول نقد، زمین، طلا و... می‌باشد.

نظریه‌های سرمایه‌گذاری در چند دهه اخیر از پیشرفت‌های زیادی برخوردار بودند و در سیر تاریخی تکاملی خود به فرمول‌های کاربردی زیادی دست یافتند. حجم تجارت و سرمایه‌گذاری طی قرن بیستم و اوایل بیست‌ویکم گسترش فراوانی داشته است. این گسترش و تغییرات حاصل از آن موجب شده است که معیارهای متفاوتی برای اخذ تصمیم سرمایه‌گذار در مقایسه با دوره‌های گذشته به‌کار گرفته شود. از عوامل موثر در انتخاب و انجام سرمایه‌گذاری دو مفهوم ریسک و بازده و رابطه این دو با یکدیگر است. در قرن ۱۸ میلادی برنولی^۱ و کرامر^۲ به این نتیجه رسیدند که تصمیمات تحت شرایط عدم اطمینان نباید صرفاً بر اساس بازده مورد انتظار صورت پذیرد.

تا اوایل قرن بیستم میلادی، سرمایه‌گذاران جهت اخذ تصمیم در فرآیند سرمایه‌گذاری از نسبت‌های بازده سرمایه‌گذاری استفاده می‌کردند و توجهی به مفاهیم ارزش زمانی پول و ریسک سرمایه‌گذاری نداشتند. از دهه ۱۹۲۰ مفهوم ارزش زمانی پول با روش‌های تنزیلی وارد حوزه ادبیات مالی و سرمایه‌گذاری شد. این روش‌ها، تحولی قابل توجه در انتخاب طرح‌های سرمایه‌گذاری به‌وجود آوردند. لیکن همچنان رفتار متفاوت سرمایه‌گذاران در مواجهه با ریسک نادیده گرفته می‌شد. در واقع با وجود اینکه نظریه مطلوبیت پول تا حدودی به تکامل معیارهای انتخاب کمک نموده بود، لیکن هنوز از جامعیت کافی برخوردار نبود. تا دهه ۱۹۵۰ ریسک یک عامل کیفی به‌شمار می‌رفت تا اینکه هری مارکوویتز برای نخستین بار ریسک را کمیت‌پذیر نمود و انحراف معیار جریان‌ات نقدی طرح‌های سرمایه‌گذاری را به‌عنوان کمیت سنجش ریسک معرفی کرد. چندی بعد ویلیام شارپ در [۹۸] با تعیین ضریب حساسیت β به‌عنوان معیار ریسک، مدل ساده‌تر و کاربردی‌تری را به دنیای نظریه‌های سرمایه‌گذاری عرضه کرد. این روش امروز به‌عنوان مدل تک شاخصی معروف است. در ادامه این روند و در اواسط دهه ۶۰ شارپ و لینتر [۴۹] بر پایه نظریه بازار سرمایه، مدلی را توسعه دادند که امروزه تحت عنوان مدل

¹Bernoulli

²Cramer

قیمت گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای^۱ شناخته می‌شود. این مدل ریسک سیستماتیک و غیر سیستماتیک را به‌عنوان اجزای اصلی ریسک از یکدیگر تفکیک می‌کند. در دهه ۷۰، پروفیسور راس^۲، مدل آربیتراژ^۳ را در [۹۵] پایه‌گذاری کرد. (برای توضیحات بیشتر به [۶۲] و [۷] مراجعه شود).

۵.۱ تاریخچه سبد سهام

در سال ۱۹۵۲ میلادی، هری مارکوویتز مدل بنیادی پرتفوی را ارائه داد که مبنایی بر نظریه مدرن سبد سرمایه شد. پیش از ارائه این نظریه سرمایه‌گذاران علیرغم آشنایی با مفاهیم ریسک و بازده، قادر به اندازه‌گیری آن به روش کمی نبودند. مارکوویتز نخستین کسی بود که مفهوم تنوع‌بخشی در سبد سرمایه‌گذاری به‌طور عام و سبد سهام به‌طور خاص را بسط و گسترش داد. او این موضوع که چگونه متنوع‌سازی سبد سرمایه می‌تواند منجر به کاهش ریسک سرمایه‌گذاری یک سرمایه‌گذار شود را، به‌صورت کمی بیان نمود.

نظریه مدرن سبد سرمایه MPT^۴ براساس رابطه بازدهی و ریسک محاسبه شده از طریق واریانس و انحراف معیار بازدهی تبیین می‌شود. نظریه فرامدرن سبد سرمایه PMPT^۵ براساس رابطه‌ی ریسک نامطلوب به تبیین رفتار سرمایه‌گذار و معیار انتخاب سبد سرمایه بهینه می‌پردازد (برای توضیحات بیشتر، مراجع [۳۳] و [۳۶] را ببینید). مارکوویتز در فرمول‌بندی مدل میانگین-واریانس^۶ خود، به هدف سرمایه‌گذاری توجه خاصی داشت. به نظر وی، سرمایه‌گذار عاقل به دنبال سرمایه‌گذاری در طرح‌هایی است که بازدهی بیشتر و ریسک کمتر داشته باشد. وی ریسک یک سرمایه‌گذاری را تنها در انحراف معیار آن طرح جستجو نمی‌کرد، بلکه به رابطه بین دارایی‌های مختلف در سبد سرمایه و تاثیر این رابطه بر ریسک کل هم توجه داشت. یکی دیگر از مفاهیمی که مارکوویتز مطرح نمود، سبد سرمایه کارا (سبد سهام کارا) بود، که به معنای ترکیب مطلوب اوراق بهادار است به‌نحوی که ریسک آن سبد سرمایه در ازای بازده معینی حداقل شود یا بازده سبد سرمایه در ازای ریسک معین حداکثر شود.

مدل مارکوویتز بر اساس مفروضاتی شکل گرفته است. این مفروضات عبارتند از:

۱. سرمایه‌گذار دارای رفتار عقلایی است.
۲. سرمایه‌گذاران، ریسک‌گریزند و دارای مطلوبیت مورد انتظار افزایشی هستند.
۳. سرمایه‌گذاران، سبد سرمایه خود را بر مبنای میانگین و واریانس بازده مورد انتظار انتخاب می‌کنند.

¹Capital Asset Pricing Model (CAPM)

²Ross

³Arbitrage Pricing Theory

⁴Modern Portfolio Theory

⁵Post-modern Portfolio Theory

⁶Mean-Variance

۴. هر گزینه سرمایه‌گذاری تا بی‌نهایت قابل تقسیم است.
۵. سرمایه‌گذاران یک افق زمانی معین داشته و این برای همه مشابه است.
۶. سرمایه‌گذاران، در یک سطح مشخص از ریسک، بازده بالاتری را ترجیح می‌دهند و بالعکس برای سطح معینی از بازدهی خواهان، کمترین ریسک هستند.
۷. بازارها کامل هستند (هزینه مالیات و معاملات وجود ندارد).

در رویکرد مارکوویتز بازده دارایی‌ها به صورت متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شود که احتمال آنها از تابع توزیع نرمال به دست می‌آید. میانگین به عنوان معیار کارایی سبد سرمایه و انحراف معیار هم به عنوان شاخص ریسک سبد سرمایه در نظر گرفته می‌شود. ورودی‌های اصلی مدل مارکوویتز عبارتند از بازده مورد انتظار، ماتریس واریانس-کواریانس بازدهی دارایی‌ها و ضریب همبستگی بین بازدهی‌ها. مدل کلاسیک میانگین-واریانس به صورت زیر بیان می‌شود [۵۹].

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} X^T \Sigma X, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \mu^T X = R, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

که در آن

$$\mu^T X = E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i,$$

$$X^T \Sigma X = V[X] = \sum_{i,j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j x_i x_j,$$

x_i نسبت سرمایه‌گذاری در سهم i ام، ρ_{ij} ضریب همبستگی بین سهم i ام و j ام، μ_i بازده مورد انتظار و σ_i ریسک سهم i ام هستند و قید اول نشان‌دهنده سطح مشخصی از بازدهی مورد انتظار یعنی R است. قید دوم این اطمینان را می‌دهد که تمام بودجه سرمایه‌گذاری شود و قید آخر هم نشان‌دهنده این است که سرمایه‌گذار اجازه فروش استقراضی را ندارد. متأسفانه مدل مارکوویتز یک سری معایب و فرضیات غیر واقعی دارد که از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. با افزایش تعداد دارایی، حجم محاسبات ماتریس کواریانس بیش از اندازه بزرگ می‌شود.
۲. محدودیت‌هایی که در دنیای واقعی وجود دارد، در مدل مارکوویتز در نظر گرفته نشده است، همانند محدودیت سهام ثابت در سبد سرمایه، هزینه‌های معاملات^۱، خرید

¹Cardinality Constraint

آستانه‌ای^۱، معاملات بلوکی، معادلات سهام در دسته‌های ثابت و...، اکثر این محدودیت‌ها از توابع غیرخطی پیروی می‌کنند که مدل‌ها را برای حل دچار پیچیدگی می‌نماید.

۳. فرض نرمال بودن تابع توزیع بازده دارایی‌ها فرض قابل قبولی نیست.

۴. معیار عمومی ریسک، واریانس و یا انحراف معیار است که این معیار یک دارایی با توزیع نرمال و در بازار کارا قابل قبول است. اگر این دو خصوصیت برای دارایی وجود نداشته باشد، واریانس معیار مناسبی نیست.

۱.۵.۱ مدل‌های جایگزین

در سال ۱۹۵۹ مارکوویتز به مزایای ریسک نامطلوب اشاره کرد [۶۰]. او به این نتیجه رسید که سرمایه‌گذاران به دو علت مایل به حداقل ساختن ریسک نامطلوب هستند، نخست اینکه سرمایه‌گذاران ابتدا به امنیت اصل سرمایه می‌اندیشند و دوم وقتی که توزیع متغیرهای تصادفی (نرخ بازدهی) از نوع نرمال نباشد، آن‌گاه معیار ریسک نامطلوب مفید خواهد بود. بعدها در سال ۱۹۹۱ وی هنگام دریافت جایزه نوبل اقتصاد برای ارائه نظریه مدرن سبد سرمایه و مدل مارکوویتز نیز به این مسأله اشاره داشت.

سال ۱۹۷۳ لی و لرو^۲ [۴۴]، مدلی به‌منظور بهینه‌سازی سبد سرمایه با به‌کارگیری برنامه‌ریزی آرمانی ارائه نمودند. چندی بعد در سال ۱۹۸۰ لی و چیسیر^۳ [۴۳]، نگرش برنامه‌ریزی آرمانی چند معیاره^۴ را مطرح کردند. کونو و یامازاکی در سال ۱۹۹۱، مدلی از طریق برنامه‌ریزی خطی برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری ارائه کردند. پس از آن در سال ۱۹۹۷، اسپرانزا و مانسینی^۵ [۵۸]، مدلی از برنامه‌ریزی صحیح آمیخته^۶ را با خصوصیات واقعی مثل هزینه‌های معاملات و حداقل واحدهای معاملات ارائه داد و برای حل آن از الگوریتم‌های ابتکاری کمک گرفتند و مدل را برای بازار سهام میلان آزمایش کردند. سال ۱۹۹۸ یونگ^۷ [۱۲۰]، مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه قابل حل توسط برنامه‌ریزی خطی را ارائه کرد که در آن ریسک بر مبنای بدترین حالت تعریف شده و آن را رویکرد "مینیماکس"^۸ نامید. سال ۱۹۹۹ ژیا و همکاران [۱۱۰] مدلی خاص را معرفی کردند. در فوریه همین سال چانگ^۹ و همکاران [۹]، به ارائه مدلی پارامتریک و غیرخطی جهت بهینه‌سازی سهام پرداختند. در ادامه در نوامبر همین سال، جوناس پالمکوئیست^{۱۰} و همکارانش [۸۳] به معرفی بهینه‌سازی سبد سرمایه با محدودیت‌ها و

¹Transaction Cost

²Lee and Lerro

³Lee and Chesser

⁴Multi-Criteria Goal Programming

⁵Mansini and Speranza

⁶Mixed Integer Programming

⁷young

⁸Minimax

⁹Chang

¹⁰Palmquist

تابع هدف ارزش در معرض ریسک شرطی، مدلی از نوع برنامه‌ریزی خطی ارائه دادند. در سال ۲۰۰۲ لوبو^۱ و همکاران [۵۰] به بهینه‌سازی سبد با اعمال هزینه‌های معاملات خطی و ثابت پرداختند. در همین سال، کریستوس پاپاریستودولو^۲ [۸۴] به ارائه مدل‌هایی در این زمینه پرداخت و سپس با طرح مسأله‌ای متشکل از ۵ سهام در دوره زمانی ۱۲ ماهه به مقایسه سبدهای به‌دست آمده در هر مدل پرداخت. در سال ۲۰۰۳ آلکسی چخلاو^۳ و همکاران در مقاله‌ای تحت عنوان «بهینه‌سازی سبد سرمایه با محدودیت‌های کاهش‌دهنده» به ارائه مدلی در این زمینه پرداخت سپس در همان سال مانسینی^۴ و همکارانش [۵۷] به معرفی مدل‌های برنامه‌ریزی خطی پرداخته‌اند. در سال ۲۰۰۴ گاندربو^۵ و همکاران برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی سبد سرمایه، روش نقطه درونی اولیه - دوگان را معرفی کردند.

۶.۱ مقدمه‌ای برای ارزش در معرض ریسک مشروط

در سال ۱۹۵۲ مارکوویز^۶ در تجزیه و تحلیل میانگین-واریانس را بررسی کرد. و با استفاده از آن یک راه‌حل آسان و هوشمند از انتخاب بهینه سبد سرمایه را پیدا کرد. بسته به سطح انتخاب شده بازده موردانتظار، پرتفوی مساله‌های بهینه متفاوتی به‌دست می‌آید. تمام این پرتفوی‌ها در یک مجموعه در فضای میانگین-واریانس، مرز کار قرار می‌گیرند. که دارای این خاصیت هستند که مقدار بزرگتری از بازده مورد انتظار متناظر با ریسک بزرگتر است. از این رو، افزایش سود پورتفوی بدون افزایش ریسک غیرممکن است. مرتون^۷ در [۵۴] به تفضیل این موضوع را مورد مطالعه قرار داد. او نشان داد که وابستگی بین بازده موردانتظار و ریسک، غیرخطی است و مرز کارا سهمی شکل به‌دست آمده فضای میانگین-واریانس است، به‌دست می‌آید.

این روش ساخت وزن‌های پرتفوی دارای یک اشکال جدی است، در واقع واریانس همیشه اندازه‌گیری مناسبی برای ریسک نیست زیرا یک ریسک دو طرفه را در نظر می‌گیرد. این بدان معنی است که در صورت وجود واریانس، سود بالا ممکن است باعث افزایش ریسک شود [۴۰]. مطالعات اخیر در نظریه ریسک نشان می‌دهد که از توابع مناسب دیگری برای محاسبه ریسک می‌توان استفاده کرد. که ساده‌ترین آن ارزش در معرض ریسک است که به عنوان یک ابزار استاندارد برای نظارت بانکی توسط کمیته توصیه شد. مفهوم ارزش در معرض ریسک برای اولین بار توسط بامول^۸ در سال ۱۹۶۳ معرفی شده است.

¹Lobo

²Papahristodoulou

³Alexi Chekhlov

⁴Mansini

⁵Gandryv

⁶Markowitz

⁷Merton

⁸Baumol

محبوبیت این اندازه‌گیری ریسک بیشتر مربوط به بازاریابی ساده و فهم آن در خسارت‌های شدید است. اکساندرو و باپتیستا^۱ در [۱] استفاده از ارزش در معرض ریسک را در عوض واریانس برای ساختن یک پورتفوی بهینه پیشنهاد دادند. آنها یک جواب صریح برای مساله مینیم‌سازی ارزش در معرض ریسک در انتخاب پورتفوی با این فرض که بازده دارای توزیع نرمال است ارائه کردند.

ارزش در معرض ریسک به عنوان یک روش اندازه‌گیری ریسک در مدل‌های تصادفی (PSMs) استفاده شده است در [۳۷]. جوریون^۲ ارزش در معرض ریسک مشروط را به عنوان بدترین زیان موردانتظار در افق معین در شرایط عادی بازار در سطح معینی از اطمینان تعریف کرد. و او مشاهده کرد که ارزش در معرض ریسک مشروط می‌تواند به عنوان یک ریسک در انتخاب پورتفوی استفاده شود. علاوه بر این، او همچنین محاسبه ارزش در معرض ریسک مشروط را در مدل‌های تصادفی ارائه داد. گارسیا^۳ در [۹۱] با تمرکز بر یک سیستم مدیریت غیرمستقیم پرتفوی، که در موسسات مالی استفاده می‌شود، از ارزش در معرض ریسک مشروط به عنوان یک روش اندازه‌گیری ریسک و یک ابزار کنترل ریسک استفاده می‌کند. از ارزش در معرض ریسک مشروط می‌توان در شرایط متنوع استفاده کرد.

هوانگ^۴ در [۳۲] برای پرداختن به مشکل انتخاب پورتفوی ارزنده^۵، که فقط اطلاعات جزئی در مورد توزیع زمان خروج و توزیع مشروط بازده پورتفوی در دسترس است، جواب‌های بدترین حالت ارزش در معرض ریسک مشروط را گسترش داد و مسائل مربوط به آن را به صورت یک برنامه‌ریزی نیمه‌نهایی^۶ تعریف کرد. او برخی از نتایج عددی را با استفاده از داده‌های بازار واقعی ارائه داد تا عملی بودن استفاده از ارزش در معرض ریسک مشروط در انتخاب پورتفوی را نشان دهد. متأسفانه، ارزش در معرض ریسک مشروط فقط در حالتی معیار ریسک مناسبی به نظر می‌رسد، بازده‌ها توزیع نرمال داشته باشند. در سال‌های گذشته، محققان فرضیاتی را مطرح کردند که یک ریسک مناسب باید داشته باشد.

آرتزور و همکاران در [۴] مفهومی به نام اندازه ریسک منسجم معرفی کردند که مبتنی بر چهار اصل است. یک اندازه‌گیری از ریسک دارای خواص انتقال نامتغیر، زیرجمعی، همگن مثبت و یکنواختی باشد. این فرضیات یک اندازه‌گیری ریسک را به‌طور منحصر به فرد تعیین نمی‌کند. اخیراً چندین مثال از ریسک منسجم مورد بحث قرار گرفته است. به نظر می‌رسد یکی از مهم‌ترین انواع آن ارزش در معرض ریسک مشروط است که یک توسعه از ارزش در معرض ریسک است. در [۳۱] نشان داد که CVaR یک اندازه‌گیری منسجم است. اگرچه تاکنون CVaR به عنوان یک عامل در صنعت مالی مطرح نشده است، اما در صنعت بیمه اهمیت خیلی زیادی دارد [۶۴] علاوه بر این، به آسانی می‌توان آن را نشان داد. CVaR بزرگتر- مساوی با ارزش

¹Alexander and Baptista

²Jorion

³Garcia

⁴Huang

⁵Valueable portfolios

⁶semi final

در معرض ریسک در یک سطح ثابت است. این خاصیت CVaR امروزه به دلیل بحران‌های مالی و این واقعیت که سرمایه‌گذاران تمایل به ریسک‌پذیری دارند، بسیار مورد توجه است. الکساندر و بابتیستا (۲۰۰۴) مساله انتخاب پورتهفوی را با استفاده از CVaR در نظر گرفتند.

فصل ۲

یک چارچوب شبکه عصبی گرادینان جدید برای حل مسائل بهینه‌سازی مینیمم-ماکزیمم مقید با یک کاربرد در مدل‌های انتخاب پورتفوی

۱.۲ مقدمه

ما به یافتن جواب مساله مینیمم-ماکزیمم به صورت زیر علاقه‌مندیم:

$$\min f(x) = \max_{1 \leq i \leq s} \{f_i(x)\} \quad (1.2)$$

تحت قیود

$$g(x) \leq 0, \quad (2.2)$$

$$Ax - b = 0, \quad (3.2)$$

که در آن $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))^T$ یک تابع برداری پیوسته m بعدی و x یک متغیر n بعدی است، توابع $f_i(x)$ ($i = 1, \dots, s$) و $g_k(x)$ ($k = 1, \dots, m$) محدب و تا مرتبه دو مشتق پذیر

۲۰ یک چارچوب شبکه عصبی گرادیان جدید برای حل مسائل بهینه‌سازی مینیمم-ماکزیمم مقید با یک کاربرد در مدل‌های انتخاب پورتنوی

فرض می‌شوند، $A \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $\text{rank}(A) = l$ و $b \in \mathbb{R}^l$. در مساله (۱.۲) تابعی مشتق ناپذیر است. بنابراین مساله (۱.۲) تا (۳.۲) به عنوان یک مساله برنامه ریزی مشتق ناپذیر شناخته می‌شود.

مسائل مختلفی در ریاضیات، مهندسی و اقتصاد می‌توانند به عنوان مسائل بهینه‌سازی مشتق ناپذیر مطرح سازی شوند که در بسیاری از آنها تابع هدف به عنوان یک تابع ناهموار است. مقالات زیادی وجود دارند ([۲]، [۷۹]، [۱۴]، [۱۰۶]، [۱۷]، [۱۶]، [۱۱]، [۲۸]، [۳۸]، [۳۹]، [۸۷]، [۴۷])، که در آنها روش‌های مختلفی برای حل چنین مسائلی مطرح شده است ([۴۵]، [۹۹]، [۲۱]، [۸۲]). مسائل بهینه‌سازی مینیمم-ماکزیمم در جنبه‌های مختلفی مطرح شده‌اند. از جمله طراحی مدار [۲] ساختارهای مهندسی [۱۴]^۲، اقتصاد [۸۷] و غیره. هرچند روش‌های عددی سنتی ([۲۸]، [۲۸]، [۳۹]، [۴۸]، [۵۵]، [۹۰]، [۱۰۰]، [۱۰۷]، [۱۰۸]، [۱۰۹]، [۱۱۴]، [۱۱۵]، [۱۲۳]) نیاز به زمان محاسباتی زیادی داشته و نمی‌توانند مسائل را در زمان واقعی^۳ حل کنند [۶۸]. برای چنین کاربردهایی در زمان واقعی، شبکه‌های عصبی بازگشتی براساس اجرای سخت افزاری، مناسب‌تر هستند ([۱۰۱] و [۱۰۲]) و می‌توانند از حیث فیزیکی مساله را با مدارهای یک پارچه به صورت موازی حل کنند. در نتیجه روش شبکه‌های عصبی برای بهینه‌سازی، کنترل و پردازش سیگنال توسط محققان متعددی مورد مطالعه قرار گرفته است.

مبنای روش شبکه عصبی در بهینه‌سازی، ایجاد یک تابع انرژی و سیستم دینامیکی است که نمایشی از شبکه عصبی است. سیستم دینامیکی معمولاً به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بیان می‌شود. انتظار می‌رود که برای یک نقطه شروع دلخواه، سیستم دینامیکی به حالت ایستای خود همگرا شود، که همان جواب مساله بهینه‌سازی است. یک شرط مهم این است که وقتی سیستم دینامیکی، به نقطه تعادل نزدیک می‌شود، تابع انرژی به طور یکنواخت کاهش یابد. با توجه به مواجهه دینامیکی با مسائل بهینه‌سازی و قابلیت اجرای مدارهای الکترونیکی، شبکه‌های عصبی می‌توانند به شکل فیزیکی با سخت افزار تعیین شده از جمله مدارهای یک پارچه اجرا شوند که در آن فرایند بهینه‌سازی به صورت موازی است. بنابراین روش شبکه‌های عصبی می‌تواند مسائل بهینه‌سازی را بسیار سریع‌تر از الگوریتم‌های متعارف بهینه‌سازی حل کنند.

با توجه به اجرای سخت افزاری و زمان واقعی، در دو دهه گذشته شبکه‌های عصبی برای حل مسائل بهینه‌سازی و کاربردهای مهندسی آن توسط بسیاری از محققان مطالعه شده و نتایج بسیار مهمی به دست آمده است

([۱۲]، [۲۲]، [۲۹]، [۳۰]، [۳۴]، [۵۲]، [۶۵]، [۶۶]، [۶۸]، [۶۹]، [۷۰]، [۷۱]، [۷۲]، [۷۳]، [۷۴]، [۱۱۱]، [۱۱۲]، [۱۱۸])
مثلاً شبکه‌های عصبی برای برنامه‌ریزی خطی، نامساوی‌های وردشی و مسائل مکمل غیرخطی استفاده شده‌اند. اگرچه انواع مختلفی از شبکه‌های عصبی آنالوگ برای محاسبه پیشنهاد شده

¹Circuit design

²Engineering structures

³Real time

است، مطالعات کمی درباره حل مساله بهینه‌سازی (۱.۲)–(۳.۲) وجود دارد. یانگ و کائو^۱ در [۱۱۸] و یانگ و همکاران در [۱۱۹] دو مدل شبکه عصبی تصویری برای حل مساله (۱.۲)–(۳.۲) پیشنهاد کردند. آن‌ها اثبات کردند این مدل‌ها پایدار سراسری مفهوم لیاپونوف^۲ هستند و می‌توانند یک جواب بهینه دقیق یا تقریبی از مساله (۱.۲)–(۳.۲) را به دست آورند. هرچند ساختارهای این مدل‌ها نسبتاً پیچیده‌اند و ساده‌سازی‌های بیشتری لازم دارند. بنابراین پیشنهاد یک شبکه عصبی موثر برای حل مساله بهینه‌سازی مینیمم-ماکزیمم (۱.۲)–(۳.۲) با ساختار ساده و پایداری همگرایی خوب بسیار ضروری است. با توجه به بحث‌های بالا در این فصل مساله مینیمم-ماکزیمم (۱.۲)–(۳.۲) ابتدا به یک مساله بهینه‌سازی محدب با تابع هدف مشتق‌پذیر تبدیل می‌شود. با کاهش مساله به یک مساله بهینه‌سازی بدون محدودیت، یک مدل شبکه عصبی ابتکاری پیشنهاد می‌شود. پایداری و همگرایی مدل نیز به صورت دقیق تحلیل می‌شود.

۲.۲ فرمول‌بندی معادل

به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که مساله (۱.۲)–(۳.۲) معادل مساله برنامه‌ریزی محدب زیر است

$$\min z \quad (۴.۲)$$

تحت قیود

$$f_i(x) \leq z, \quad i = 1, \dots, s, \quad (۵.۲)$$

$$g_k(x) \leq 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (۶.۲)$$

$$Ax - b = 0. \quad (۷.۲)$$

که در آن $z = \max\{f_i(x), i = 1, 2, \dots, s\}$. توجه کنید در مساله (۴.۲)–(۷.۲)، محدودیت‌ها و پیچیدگی‌های محاسباتی زیاد است. به‌منظور غلبه بر این مشکلات فرض می‌کنیم

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n | g_k(x) \leq 0, k = 1, 2, \dots, m \ \& \ Ax = b\},$$

و یک تابع آنتروپی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۰۸]:

$$F_p(x) = \frac{1}{p} \ln \sum_{i=1}^s \exp(pf_i(x)), \quad (۸.۲)$$

که در آن $p > 0$ یک عدد مثبت است. بعضی ویژگی‌های $F_p(x)$ به‌صورت زیر هستند:

لم ۱.۰۲.۲. [۱۱۸] $F_p(x)$ در X همگرایی نقطه‌ای به $f(x)$ است، وقتی p به سمت بی‌نهایت می‌رود.

^۱Yang and Cao

^۲Lyapunov

لم ۲.۲.۲. [۱۱۸] $F_p(x)$ به صورت یکنواخت در X به $f(x)$ همگراست، وقتی p به سمت بی‌نهایت می‌رود.

$$\text{لم ۳.۲.۲. [۱۱۸] برای هر } p > 0 \text{ و } x \in \mathbb{R}^n \text{، } 0 \leq F_p(x) - f(x) \leq \frac{\ln(s)}{p} .$$

لم ۴.۲.۲. [۱۱۸] $F_p(x)$ محدب است، اگر هر $f_i(x), i = 1, 2, \dots, s$ یک تابع محدب باشد که روی مجموعه محدب X تعریف می‌شود.

قضیه ۱.۲.۲. [۱۱۸] جواب بهینه مساله مینیمم-ماکزیمم (۱.۲)-(۳.۲) می‌تواند با حل مساله برنامه‌ریزی محدب $\{\min_{x \in X} F_p(x)\}$ با p به حد کافی بزرگ به دست آید.

این نتایج اطمینان می‌دهد که می‌توان $F_p(x)$ را در مساله (۸.۲) به جای تابع مشتق‌ناپذیر $f(x)$ در (۱.۲) به کار برد. بنابراین یک جواب بهینه تقریبی از مساله مینیمم-ماکزیمم (۱.۲)-(۳.۲) با حل مساله زیر وقتی p به قدر کافی بزرگ است به دست می‌آید:

$$\min F_p(x) \quad (9.2)$$

$$\text{s.t. } x \in X. \quad (10.2)$$

در این فصل مفروضات زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) مساله (۹.۲)-(۱۰.۲) یک جواب بهینه منحصر به فرد دارد.

ب) گرادیان‌های $\{\nabla g_k(x) | k = 1, \dots, m\} \cup \{A_q^T | q = 1, \dots, l\}$ مستقل خطی هستند.

ج) X^* به عنوان مجموعه جواب‌های بهینه (۹.۲)-(۱۰.۲) است.

قضیه ۲.۲.۲. [۷۸] سه تایی $(x^{*T}, u^{*T}, v^{*T})^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ یک جواب بهینه (۹.۲)-(۱۰.۲) است اگر و فقط اگر $(x^{*T}, u^{*T}, v^{*T})^T$ موجود باشد که در سیستم KKT زیر صدق کند:

$$\begin{cases} u^* \geq 0, \quad g(x^*) \leq 0, \quad u^{*T}g(x^*) = 0, \\ \nabla F_p(x^*) + A^T v^* + \nabla g(x^*)^T u^* = 0, \\ Ax^* - b = 0. \end{cases} \quad (11.2)$$

x^* یک نقطه KKT برای مساله (۹.۲)-(۱۰.۲) نامیده می‌شود و زوج $(u^{*T}, v^{*T})^T$ یک بردار ضریب لاگرانژی متناظر با x^* نامیده می‌شود. به علاوه اگر f و $g_k, k = 1, \dots, p$ همگی محدب باشند آن‌گاه x^* یک جواب بهینه (۹.۲)-(۱۰.۲) است اگر و فقط اگر X^* یک نقطه KKT از مساله (۹.۲)-(۱۰.۲) باشد.

۳.۲ مدل شبکه عصبی گرادیان

می‌توانیم رابطه‌ای بین جواب مساله (۹.۲)–(۱۰.۲) و جوابی برای مساله بهینه‌سازی نامقید معادل آن از طریق تعریف یک تابع شایسته^۱ ایجاد کنیم. تابع شایسته تابعی است که مینیمم‌کننده آن با جواب‌های NCP معادل است. توابع NCP در زیر تعریف می‌شوند که برای ساختن تابع شایسته به کار می‌روند.

تعریف ۱.۳.۲. تابع $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع NCP است اگر

$$\phi(a, b) = 0 \iff a \geq 0, b \geq 0, ab = 0.$$

یک تابع مشهور NCP تابع FB^۲ است که قویاً نیمه‌هموار است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_{\text{FB}}(a, b) = (a + b) - \sqrt{a^2 + b^2}.$$

تابع شایسته $\psi_{\text{FB}}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ می‌تواند با گرفتن مربع از ϕ_{FB} به دست آید یعنی:

$$\psi_{\text{FB}}(a, b) = \frac{1}{4} \|\phi_{\text{FB}}(a, b)\|^2.$$

تابع FB آشفته نیز به صورت زیر است:

$$\phi_{\text{FB}}^\varepsilon(a, b) = (a + b) - \sqrt{a^2 + b^2 + \varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0_+. \quad (12.2)$$

ویژگی مهم $\phi_{\text{FB}}^\varepsilon$ می‌تواند در گزاره زیر بیان شود.

گزاره ۱.۳.۲. [۲۵] برای هر $\varepsilon \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\phi_{\text{FB}}^\varepsilon(a, b) = 0 \iff a > 0, b > 0, ab = \frac{\varepsilon}{4}.$$

باید توجه داشت $\phi_{\text{FB}}^\varepsilon(a, b)$ برای $\varepsilon > 0$ هموار است.

چندین مدل شبکه عصبی براساس شرایط KKT (۱۱.۲) برای مسائل بهینه‌سازی محدب (۹.۲)–(۱۰.۲) پیشنهاد شده است. این مدل‌های شبکه عصبی نیاز به l متغیر حالت دارند تا تساوی $Ax = b$ در شرایط KKT صدق کند. برای ساده‌سازی معماری شبکه لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۳.۲. [۷۸] یک جواب بهینه مساله (۹.۲)–(۱۰.۲) است اگر و فقط اگر $u^* \geq 0$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که $(x^{*T}, u^{*T})^T$ در شرایط زیر صدق کند:

$$(I - P)[\nabla F_p(x^*) + \nabla g(x^*)^T u^*] + Q(Ax^* - b) = 0 \quad (13.2)$$

$$\phi_{\text{FB}}^\varepsilon(u^*, -g(x^*)) = 0, \quad \text{for } \varepsilon \rightarrow 0_+. \quad (14.2)$$

که در آن $P = A^T(AA^T)^{-1}A$ و $Q = A^T(AA^T)^{-1}$

¹Merit function

²Fisher Bromischer Function

لم ۲.۳.۲. [۷۸] $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ در معادله زیر صدق کند

$$\zeta(y) = \begin{bmatrix} (I - P)[\nabla F_p(x) + A^T v + \nabla g(x)^T u] + Q(Ax - b) \\ \phi_{\text{FB}}^\varepsilon(u, -g(x)) \end{bmatrix} = \circ, \quad (15.2)$$

اگر و فقط اگر x^* یک نقطه KKT از مساله (۹.۲)–(۱۰.۲) برای هر $\varepsilon \rightarrow \circ_+$ باشد.

اکنون با تعریف ۱.۳.۲ و با توجه به لم ۱.۳.۲ می‌توانیم به‌سادگی سیستم KKT (۱۱.۲) را بررسی کنیم که معادل مساله مینیمم‌سازی نامقید زیر است:

$$\min E(y) = \frac{1}{\gamma} \|\zeta(y)\|^2. \quad (16.2)$$

واضح است $E(y)$ یک تابع هموار برای سیستم (۱۱.۲) است. تابع E در (۱۶.۲) پیوسته و برای هر $y \in \mathbb{R}^{n+p+1}$ مشتق‌پذیر است.

اکنون فرض $x(\cdot)$ و $u(\cdot)$ را متغیرهای وابسته به زمان در نظر می‌گیریم. هدف ما طراحی یک شبکه عصبی است که به یک نقطه تعادل که نقطه‌ای بحرانی از تابع انرژی $E(y)$ همگرا شود. بنابراین می‌توانیم از روش تندترین شیب برای ساخت مدل شبکه عصبی زیر در حل (۹.۲)–(۱۰.۲) استفاده کنیم

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\eta \nabla E(y(t)), \quad \eta > \circ, \quad (17.2)$$

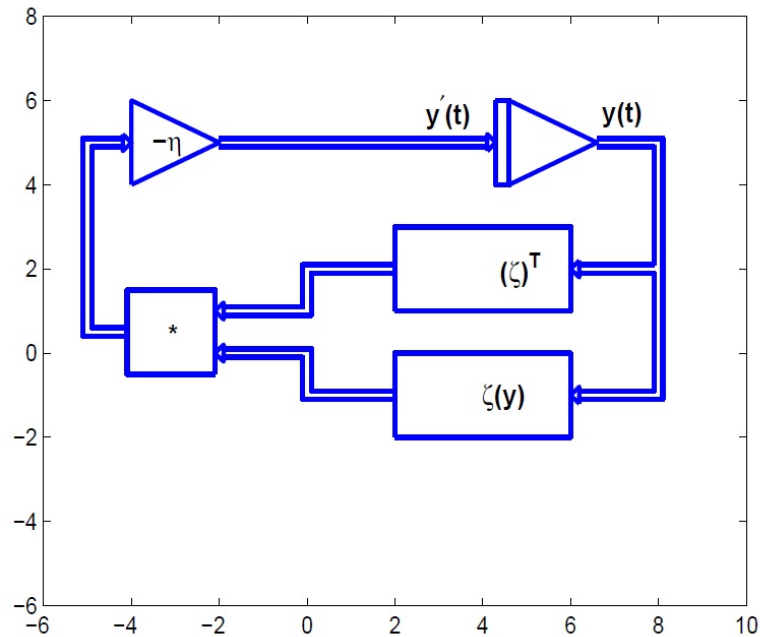
$$y(\circ) = y_0, \quad (18.2)$$

که در آن η یک عامل مقیاس است و نرخ همگرایی شبکه عصبی (۱۷.۲) را نشان می‌دهد. نمایش اجرای سخت‌افزاری شبکه عصبی (۱۷.۲) و (۱۸.۲) در شکل ۱.۲ آورده شده است.

۴.۲ مقایسه با برخی شبکه‌های عصبی موجود

برای مشاهده چگونگی کاربرد شبکه عصبی (۱۷.۲) و (۱۸.۲) در حل مسائل (۹.۲)–(۱۰.۲)، آن را با برخی مدل‌های شبکه عصبی موجود مقایسه می‌کنیم.

نوعی مدل شبکه عصبی به‌نام مدل گرادییانی وجود دارد. برای استفاده از مدل شبکه عصبی گرادییانی یک مساله بهینه‌سازی مقید می‌تواند با یک مساله بهینه‌سازی نامقید تقریب زده شود. سپس تابع انرژی با روش تابع جریمه ساخته می‌شود. باید توجه داشت مدل شبکه عصبی گرادییانی دارای این مزیت است که این مدل به‌طور مستقیم با استفاده از مشتقات تابع انرژی ساخته می‌شود، زیرا مدل ممکن است مستقیماً با استفاده از مشتق‌های تابع انرژی تعریف شود. اما نقص آن این است که همگرایی تضمین شده‌ای ندارد. به‌علاوه شبکه عصبی گرادییانی براساس تابع جریمه نیاز به پارامتر تنظیم کننده دارد. برای مثال با استفاده از روش جریمه، مساله بهینه‌سازی (۹.۲)–(۱۰.۲) می‌تواند با مساله بهینه‌سازی نامقید زیر تقریب زده



شکل ۱۰۲: نمایش اجرای سخت‌افزاری شبکه عصبی (۱۷.۲) و (۱۸.۲)

شود

$$\min \bar{E}(x) = F_p(x) + \frac{\gamma}{\gamma} \left\{ \sum_{k=1}^m [g_k^+(x)]^2 + \sum_{q=1}^l (A_q - b_q)^2 \right\},$$

که در آن γ یک پارامتر جریمه است. سپس مدل شبکه عصبی گرادینانی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla \bar{E}(x) = -(\nabla F_p(x) + \gamma[\nabla g(x)^T g^+(x) + A^T(Ax - b)]). \quad (۱۹.۲)$$

سیستم بیان شده در ۸.۳ مدل شبکه عصبی کندی - چو^۱ نامیده می‌شود. این شبکه با پارامتر جریمه محدود قادر به یافتن جواب بهینه دقیق نیست و اجرای آن هنگامی که پارامتر جریمه بسیار بزرگ باشد دشوار است. بنابراین این شبکه فقط به جواب تقریبی (۹.۲) - (۱۰.۲) برای هر پارامتر جریمه بزرگ نزدیک می‌شود. همچنین می‌توان نشان داد شبکه عصبی کندی - چو^۱ ۸.۳ همگرا به جواب دقیق بعضی مسائل برنامه‌ریزی محدب نیست. برای مثال می‌توان مساله ۱۰.۴ در [۶۵] را مشاهده کرد.

در [۶۶]، ناظمی یک مدل شبکه عصبی لاگرانژی برای حل (۹.۲) - (۱۰.۲) به صورت زیر پیشنهاد کرد:

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y), \quad (۲۰.۲)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y(t) = (x(t), u(t), v(t))^T, \quad u(t_0) > 0, \quad (۲۱.۲)$$

¹Kennedy and Chua's

که در آن

$$\Phi(y) = \begin{bmatrix} -(\nabla F_p(x) + \frac{1}{\gamma} \nabla g(x)^T u^\gamma + A^T v) \\ \text{diag}(u_1, \dots, u_p) g(x) \\ Ax - b \end{bmatrix}.$$

در [۶۵]، ناظمی شبکه عصبی زیر را نیز برای حل مساله (۹.۲)–(۱۰.۲) پیشنهاد کرد:

$$\frac{dx}{dt} = -(\nabla F_p(x) + \nabla g(x)^T (y + g(x))^+ + \nabla h(x)^T v), \quad (22.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = (y + g(x))^+ - y, \quad (23.2)$$

$$\frac{dv}{dt} = h(x). \quad (24.2)$$

در [۶۷]، ناظمی و عفتی یک مدل گرادینانی برای حل مساله (۹.۲)–(۱۰.۲) پیشنهاد می‌کنند:

$$\frac{d(y(t))}{dt} = -\nabla \hat{E}(y(t)), \quad (25.2)$$

$$y(\circ) = y_\circ, \quad y(t) = (x(t)^T, u(t)^T, v(t)^T)^T, \quad (26.2)$$

که در آن

$$\hat{E}(y) = \frac{1}{\gamma} \|\Psi(y)\|^\gamma, \quad (27.2)$$

$$\Psi(y) = \begin{bmatrix} \nabla F_p(x) + \nabla A^T v + \nabla g(x)^T u \\ b - Ax \\ \phi_{\text{FB}}^\varepsilon(u, -g(x)) \end{bmatrix} = \circ, \quad (28.2)$$

و $\phi_{\text{FB}}^\varepsilon(a, b)$ در (۱۲.۲) تعریف می‌شود.

در مدل‌های (۱۳.۳)–(۱۴.۳)، (۲۲.۲)–(۲۴.۲)، و (۲۵.۲)–(۲۶.۲)، متغیرهای حالت $x \in \mathbb{R}^n$ ، $u \in \mathbb{R}^p$ و $v \in \mathbb{R}^l$ هستند. بنابراین این شبکه‌های عصبی نرون‌های $n + m + l$ دارند. در حالی که شبکه عصبی ما در (۱۷.۲) فقط نرون‌های $n + p$ دارد. شبکه عصبی بیان شده در (۱۷.۲) و (۱۸.۲) یک اصلاح از مدل بیان شده در [۶۷] برای حل مساله برنامه‌ریزی درجه دوم است.

۵.۲ پایداری و تحلیل همگرایی

در این قسمت قبل از پرداختن به مباحث پایه، و همگرایی مدل (۱۷.۲) و (۱۸.۲) و چند تعریف لم و قضیه را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۵.۲. [۹۷] فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ را یک همسایگی باز از \bar{x} باشد. یک تابع به طور پیوسته مشتق پذیر $\zeta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع لیاپونوف^۱ فرض کنید روی مجموعه Ω برای سیستم $x' = \mathcal{F}(x)$ ، اگر

$$\begin{cases} \zeta(\bar{x}) = 0, \zeta(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega \setminus \{\bar{x}\}, \\ \frac{d\zeta(x(t))}{dt} = [\nabla\zeta(x(t))]^T \mathcal{F}(x(t)) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

لم ۱.۵.۲. [۶۶]

(الف) یک نقطه تعادل تنها x^* از سیستم $x' = \mathcal{F}(x)$ پایدار لیاپونوف است اگر یک تابع لیاپونوف در همسایگی Ω^* از x^* وجود داشته باشد.

(ب) یک نقطه تعادل تنهای x^* از سیستم $x' = \mathcal{F}(x)$ پایدار مجانبی است اگر تابع لیاپونوف روی یک همسایگی از x^* وجود داشته باشد آن چنان که $\frac{d\zeta(x(t))}{dt} < 0$ برای هر $x \in \Omega^* \setminus \{x^*\}$.

تعریف ۲.۵.۲. [۹۷] فرض کنید $x(t)$ یک جواب سیستم $x' = \mathcal{F}(x)$ باشد و X^* مجموعه نقاط تعادل این سیستم باشد. مسیر جواب سیستم یک همگرای سراسری به مجموعه X^* است اگر $x(t)$ در شرط زیر صدق کند

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), X^*) = 0,$$

که در آن $\text{dist}(x(t), X^*) = \inf_{y \in X^*} \|x - y\|$ به ویژه اگر مجموعه X^* دارای فقط یک نقطه x^* باشد، آن گاه $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$ و سیستم پایدار مجانبی سراسری گفته می شود اگر سیستم در x^* به مفهوم لیاپونوف پایدار باشد.

قضیه ۱.۵.۲. [۸۹] اگر A یک ماتریس معکوس پذیر $n \times n$ است، آن گاه سیستم همگن $AX = 0$ فقط جواب $X = 0$ دارد.

ابتدا رابطه بین نقطه تعادل (۱۷.۲) و (۱۸.۲) و جواب مساله (۹.۲)–(۱۰.۲) را بررسی می کنیم.

قضیه ۲.۵.۲. [۷۸] فرض کنید x^* یک نقطه KKT از (۹.۲)–(۱۰.۲) باشد، آن گاه y^* یک نقطه تعادل از شبکه عصبی (۱۷.۲) و (۱۸.۲) است. از طرفی اگر $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ نقطه تعادل شبکه عصبی (۱۷.۲) و (۱۸.۲) باشد و ماتریس ژاکوبی $\zeta(y)$ در (۱۲.۳) نامنفرد است، آن گاه x^* یک نقطه KKT از مساله (۹.۲)–(۱۰.۲) است.

لم ۲.۵.۲. [۷۸] نقطه تعادل مدل شبکه عصبی پیشنهادی (۱۷.۲) و (۱۸.۲) منحصر به فرد است

¹Lyapunov

قضیه ۳.۵.۲. [۷۸] فرض کنید y^* یک نقطه تعادل تنها از (۱۷.۲) و (۱۸.۲) باشد. آن‌گاه y^* پایدار مجانبی برای (۱۷.۲) و (۱۸.۲) است.

قضیه ۴.۵.۲. [۷۸] فرض کنید $y = y(t, y_0)$ یک مسیر از (۱۷.۲) و (۱۸.۲) است که در آن نقطه اولیه $y_0 = y(\circ, y_0)$ و مجموعه سطح $L(y_0) = \{y \in \mathbb{R}^{n+m+l} : E(y) \leq E(y_0)\}$ کراندار است آن‌گاه،

(الف) $\gamma^+(y_0) = \{y(t, y_0) | t \geq \circ\}$ کراندار است.

(ب) \bar{y} وجود دارد به گونه‌ای که $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t, y_0) = \bar{y}$.

به عنوان یک نتیجه فوری از قضایای ۳.۵.۲ و ۴.۵.۲ می‌توانیم نتیجه زیر را به دست آوریم.

نتیجه ۱.۵.۲. [۷۸] اگر $D^* = \{(x^{*T}, u^{*T})^T\}$ ، آن‌گاه شبکه عصبی (۱۷.۲) و (۱۸.۲) برای حل مساله (۹.۲)–(۱۰.۲) پایدار مجانبی سراسری به نقطه تعادل منحصر به فرد $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ است که در آن D^* به عنوان مجموعه جواب‌های (۹.۲)–(۱۰.۲) است.

۶.۲ مثال‌های عددی

با توجه به مزایای تابع آنتروپی، ترجیح می‌دهیم مثال‌های زیر را براساس این طرح و مدل شبکه عصبی (۱۷.۲) و (۱۸.۲) حل کنیم. برای هر مساله عملکرد شبکه عصبی پیشنهادی را با مقادیر مختلف نقاط شروع $y(\circ)$ مقایسه می‌کنیم. برای بعضی مسائل، عملکرد (۱۷.۲) و (۱۸.۲) را نیز با مقادیر مختلف فاکتور مقیاس بندی η مقایسه می‌کنیم. شبیه‌سازی در مطلب ۷ (matlab 7) انجام می‌شود و حل کننده معادله دیفرانسیل معمولی ode45s است.

مثال ۱.۰۶.۲. [۱۰۸]

$$\min f(x) = \max \{x_1^4 + x_2^2; (2 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2; 2e^{-x_1 + x_2}\}. \quad (29.2)$$

جواب بهینه این مساله $x^* = (1, 1)^T$ است، فرض کنید

$$z = \max \{x_1^4 + x_2^2; (2 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2; 2e^{-x_1 + x_2}\}$$

مساله (۲۹.۲) می‌تواند به مساله معادل زیر تبدیل شود:

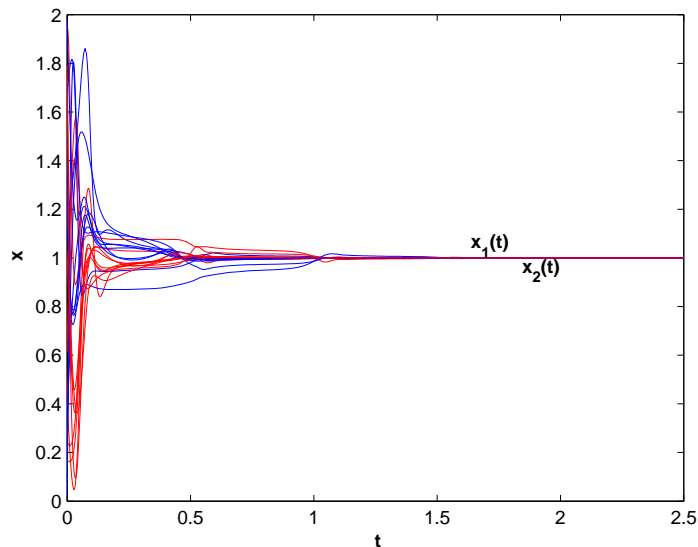
$$\min z \quad (30.2)$$

$$\text{s.t} \begin{cases} x_1^4 + x_2^2 - z \leq \circ, \\ (2 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2 - z \leq \circ, \\ 2e^{-x_1 + x_2} - z \leq \circ. \end{cases} \quad (31.2)$$

شکل ۳.۳ نشان می‌دهد مسیرهای (۱۷.۲) و (۱۸.۲) برای حل مساله (۳۰.۲) و (۳۱.۲) با $\alpha = 20$ حالت نقطه شروع تصادفی به x^* همگراست.

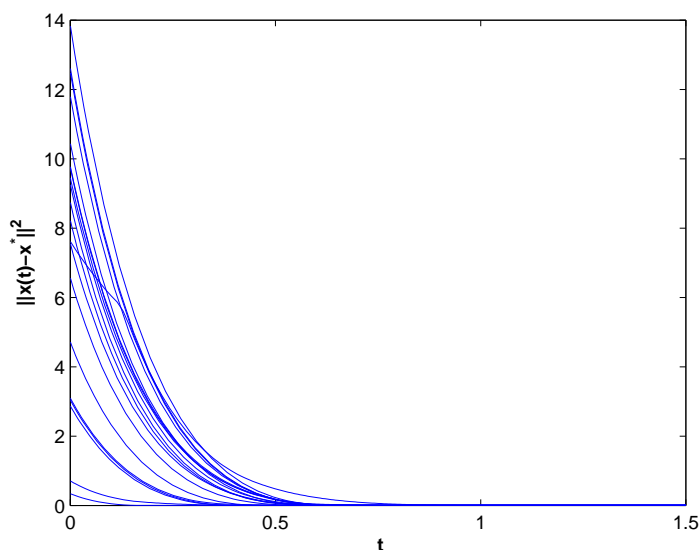
فرض کنید $F_p(x) = \frac{1}{p} \ln \sum_{i=1}^r \exp(pf_i(x))$ مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_x F_p(x) = \frac{1}{p} \ln \sum_{i=1}^r \exp(pf_i(x)). \quad (32.2)$$



شکل ۲.۲: رفتار $x(t)$ براساس مدل (۱۷.۲) و (۱۸.۲) با $\alpha = 10$ نقطه اولیه تصادفی

باتوجه به مدل (۱۷.۲) و (۱۸.۲) با $p = 10^4$ برای حل مساله (۳۲.۲)، نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد مسیرهای مدل به نقطه تعادل x^* همگرا می‌شوند. قضیه ۱.۵.۲ تضمین می‌کند مدل گفته شده در (۱۷.۲) و (۱۸.۲) به x^* همگراست. شکل ۳.۳ رفتار $x(t)$ براساس مدل (۱۷.۲) و (۱۸.۲) را با $\alpha = 10$ نقطه اولیه تصادفی نشان می‌دهد. رفتار همگرایی خطای l^2 بین x و x^* با $\alpha = 20$ نقطه اولیه مختلف نیز در شکل ۴.۳ نشان داده شده است.



شکل ۳.۲: رفتار همگرایی خطای l^2 بین x و x^* با ۲۰ نقطه اولیه مختلف

مثال ۲.۶.۲. [۱۱۸]

$$\min f(x) = \max \{x_1^2 + x_2^2; (2 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2; 2e^{-x_1 + x_2}\} \quad (33.2)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ |x_1| \leq 2, \\ |x_2| \leq 2. \end{cases} \quad (34.2)$$

مساله (۳۳.۲) و (۳۴.۲) می‌تواند به یک مساله معادل به صورت زیر تبدیل شود

$$\min z \quad (35.2)$$

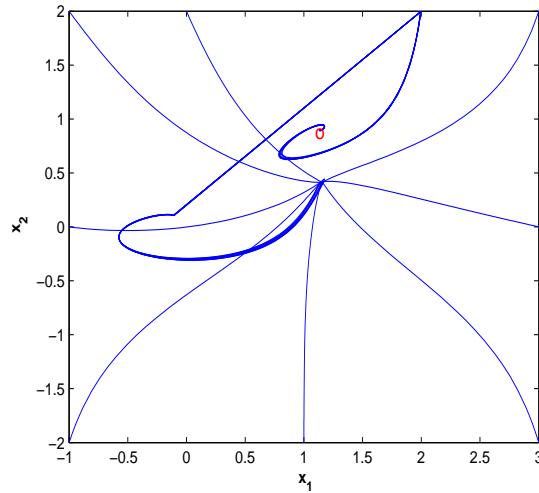
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - z \leq 0, \\ (2 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2 - z \leq 0, \\ 2e^{-x_1 + x_2} - z \leq 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 2, \\ -x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ -x_2 \leq 2, \end{cases} \quad (36.2)$$

که در آن $z = \max\{x_1^2 + x_2^2; (2 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2; 2e^{-x_1 + x_2}\}$

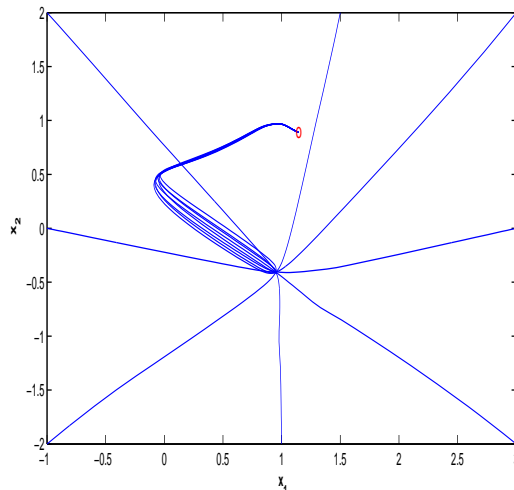
مدل (۱۷.۲) و (۱۸.۲) را برای حل مساله (۳۵.۲) و (۳۶.۲) به کار می‌بریم. نتایج شبیه‌سازی

نشان می‌دهد مسیرهای (۱۷.۲) و (۱۸.۲) با هر نقطه شروع دلخواهی به $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$

همگراست. برای مثال شکل ۵.۳ نمودار فاز از متغیرهای حالت $(x_1(t), x_2(t))^T$ را با ۸ نقطه اولیه مختلف نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم همه مسیرها به جواب بهینه تقریبی یا بیرون ناحیه شدنی است. شبکه پیشنهادی همیشه به جواب بهینه x^* همگراست.



شکل ۴.۲: نمودار فاز از متغیرهای حالت $(x_1(t), x_2(t))^T$ با ۸ نقطه اولیه



شکل ۵.۲: مسیره‌ها و نمودار فاز متغیرهای حالت $(x_1(t), x_2(t))^T$

فرض کنید

$$F_p(x) = \frac{1}{p} \ln \sum_{i=1}^r \exp(p f_i(x))$$

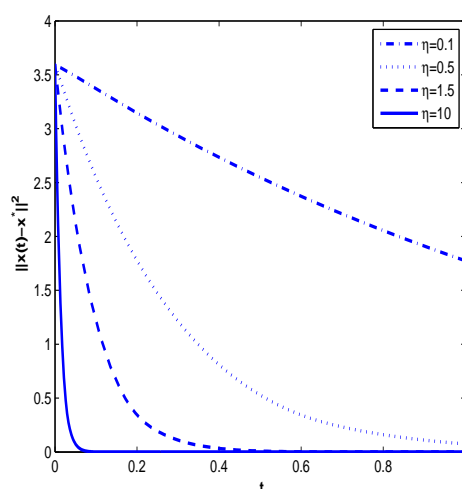
مساله زیر را در نظر بگیرید

$$\min F_p(x) = \frac{1}{p} \ln \sum_{i=1}^r \exp(p f_i(x)) \quad (۳۷.۲)$$

تحت قیود

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 2, \\ -x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ -x_2 \leq 2. \end{cases} \quad (38.2)$$

با استناد از مدل (۱۷.۲) و (۱۸.۲) برای حل (۳۷.۲) و (۳۸.۲) با $p = 10^5$ و با انتخاب ۸ نقطه شروع مختلف، نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد همه مسیرهای حالت $(x_1(t), x_2(t))^T$ به جواب بهینه تقریبی $x^* = (1/1377, 0/8912)^T$ همگرا می‌شود. شکل ۶.۳ مسیرها و نمودار فاز متغیرهای حالت $(x_1(t), x_2(t))^T$ را نشان می‌دهد. به علاوه هنگامی که نقطه اولیه به عنوان غیرشدنی انتخاب می‌شود، مسیر شبکه همچنان به x^* همگرا می‌شود. برای مساله (۳۷.۲) و (۳۸.۲) با $p = 10^5$ ، شکل ۷.۳ رفتار همگرایی محلی خطای $\|x(t) - x^*\|^2$ با خطای η و نقطه اولیه $x_0 = (1, -1)^T$ نشان داده می‌شود. واضح است η بزرگتر به نرخ همگرایی بهتر می‌شود.



شکل ۶.۲: رفتار همگرایی محلی خطای $\|x(t) - x^*\|^2$ با خطای η و نقطه اولیه $x_0 = (1, -1)^T$.

مدل Maxmin

یانگ در سال ۱۹۹۸ در [۱۲۰] برای مسأله انتخاب سبد سرمایه، از حداقل بازدهی که در دوره‌های گذشته حاصل شده است به عنوان تخمین ریسک استفاده می‌کنند. به عبارتی دیگر به دنبال حداقل کردن، حداکثر زبانی که در طول دوره ممکن است رخ دهد، هستیم. اکنون متغیر M_p را که نشان‌دهنده حداقل بازدهی بدست آمده از سبد سرمایه را به فرم $M_p = \min_t \sum_{i=1}^n r_{it} x_i$ معرفی می‌کنیم، بنابراین مدل به صورت زیر قابل بیان است:

$$\max \quad Z_{mm} = M_p \quad (39.2)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^n r_{it}x_i \geq M_p & t = 1, 2, \dots, T, \\ \sum_{i=1}^n x_i\mu_i = R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, n, \\ l^{M_p} \leq M_p \leq u^{M_p}. \end{cases} \quad (40.2)$$

مدل Minimax

کای^۱ قبل از معرفی مدل یک تعریف ارائه می‌دهیم:

تعریف ۱.۶.۲. مدل L_∞ ، ماکزیمم انحراف مطلق ریسک به صورت زیر است:

$$L_\infty(x) = \max_{1 \leq j \leq n} E(|r_jx_j - \mu_jx_j|).$$

بنابراین مدل *Minimax* به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\min Z_{mm} = l_\infty(x) = \max_{1 \leq j \leq n} E(|r_jx_j - \mu_jx_j|) \quad (41.2)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j\mu_j = R, \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (42.2)$$

این مدل را می‌توان به فرم خطی زیر تبدیل کرد: ([۱۲۱])

$$\min y \quad (43.2)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} q_jx_j \leq y, \\ \sum_{j=1}^n x_j\mu_j = R, \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (44.2)$$

که در آن $q_j = E(|r_j - \mu_j|)$ و $y = \max q_j$ برای $(j = 1, 2, \dots, n)$ است.

همچنین، جایگزین دیگر تابع ریسک L_∞ را که توسط تئو^۲ و یانگ در [۱۰۶] پیشنهاد شد، به صورت زیر است: که در آن متغیرهای تصادفی و μ_{jt} مقادیر مورد انتظار از r_{jt} برای $(i = 1, 2, \dots, n)$ و $(t = 1, 2, \dots, T)$ هستند. این تابع توسعه یافته L_∞ است. بنابراین مدل دیگر از Minimax به صورت زیر ارائه شده است:

$$\min Z_{mm} = H_\infty^T(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \max_{1 \leq j \leq n} E(|r_{jt}x_j - \mu_{jt}x_j|) \quad (45.2)$$

¹Cai

²Teo

$$\text{s.t} \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j \mu_j = R, \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (46.2)$$

این مدل را نیز، می‌توان به فرم خطی زیر تبدیل کرد [۱۲۱]:

$$\min \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \quad (47.2)$$

$$\text{s.t} \begin{cases} a_{jt} x_j \leq y_t, \quad i = 1, 2, \dots, n, t = 1, 2, \dots, T, \\ \sum_{j=1}^n x_j \mu_j = R, \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (48.2)$$

که در آن $a_{jt} = E|r_{jt} - \mu_{jt}|$ برای $(i = 1, 2, \dots, n)(t = 1, 2, \dots, T)$ هستند. برای یافتن مدل‌های
بیشتر مراجع [۲۶، ۵۳، ۸۱] را ببینید.

فصل ۳

یک شبکه عصبی تصویری برای حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی مینیمم-ماکزیمم

همانند فصل دوم مساله ناهموار زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_{x \in X} f(x) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, s\}} \{f_i(x)\} \quad (1.3)$$

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_k(x) \leq 0, k = 1, 2, \dots, m \text{ \& } Ax = b\},$$

که در آن $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))^T$ یک تابع برداری پیوسته m بعدی و x یک متغیر n بعدی است، توابع $f_i(x)$ ($i = 1, \dots, s$) و $g_k(x)$ ($k = 1, \dots, m$) محدب و تا مرتبه دو مشتق پذیر فرض می‌شوند، $A \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $\text{rank}(A) = l$ و $b \in \mathbb{R}^l$. گرچه توابع $f_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots, s$) به‌طور پیوسته مشتق پذیرند، $f(x) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, s\}} \{f_i(x)\}$ یک تابع غیرهموار است. بنابراین مساله (۱.۳) به‌عنوان مساله بهینه‌سازی غیرهموار طبقه‌بندی می‌شود.

در این فصل یک مدل شبکه عصبی تصویری برای حل مساله (۱.۳) معرفی می‌کنیم. مزایای اصلی مدل معرفی شده به‌صورت زیر است:

- کاهش متغیرهای حالت در شبکه عصبی در مقایسه با مدل‌های بیان شده در ([۶۳]، [۶۹]، [۷۶]).

- همگرایی شبکه جدید حتی زمانی که $\nabla^2 f(x) + \sum_{k=1}^m \nabla^2 g_k(x) u_k$ نیمه معین و مثبت است، که در مقالات [۶۳] و [۷۶] این موضوع یک محدودیت است.
- شبکه عصبی معرفی شده یک ساده سازی از مدل ارائه شده در [۶۹] است و می‌تواند به سادگی با استفاده از شرایط KKT به دست آید.

همان‌طور که در فصل قبل گفته شد، مساله (۱.۳) معادل با مساله زیر است:

$$\min f_p(x) \quad (۲.۳)$$

$$\text{s.t. } Ax = b, \quad (۳.۳)$$

$$g(x) \leq 0, \quad (۴.۳)$$

که در آن $f_p(x) = \frac{1}{p} \ln \sum_{i=1}^s \exp(p f_i(x))$ و p تا حد امکان بزرگ انتخاب می‌شود.
در این فصل مفروضات زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) مساله (۱.۳) دارای بهینه منحصر بفرد است.

ب) گرادیان‌های $\{\nabla g_k(x) | k = 1, \dots, m\} \cup \{A_q^T | q = 1, \dots, l\}$ مستقل خطی هستند.

ج) D^* به صورت مجموعه جواب‌های بهینه (۲.۳)–(۴.۳) و دوگان آن است.

۱.۳ مدل شبکه عصبی

در این بخش، مدل شبکه عصبی برای حل مساله (۱.۳) را بیان می‌کنیم. برای ساده سازی معماری شبکه، لم زیر را می‌آوریم:

لم ۱.۱.۳. [۷۹] x^* یک جواب بهینه (۲.۳)–(۴.۳) است اگر و فقط اگر $u^* \geq 0$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که $(x^{*T}, u^{*T})^T$ که شرایط زیر را برآورده کند:

$$(I - P)[\nabla f_p(x^*) + \nabla g(x^*)^T u^*] + Q(Ax^* - b) = 0, \quad (۵.۳)$$

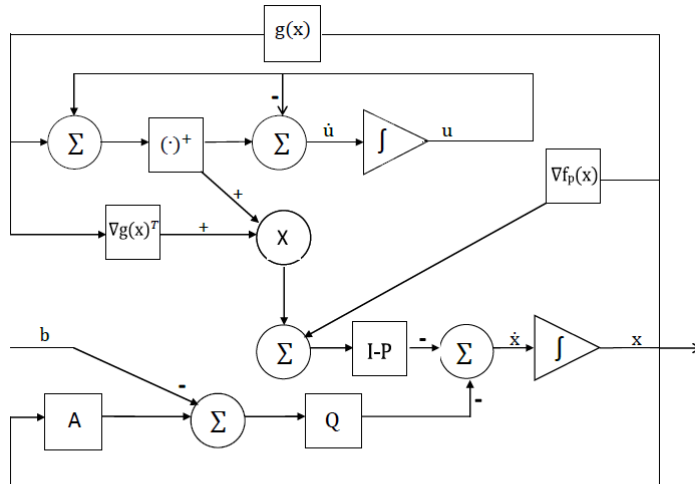
$$(u^* + g(x^*))^+ - u^* = 0, \quad (۶.۳)$$

که در آن $P = A^T(AA^T)^{-1}A$, $Q = A^T(AA^T)^{-1}$ و $(u)_+ = ([u_1]_+, \dots, [u_m]_+)^T$, $[u_i]_+ = \max\{0, u_i\}$.

با توجه به لم ۱.۱.۳ یک شبکه عصبی جدید برای حل مساله (۲.۳)–(۴.۳) به صورت زیر پیشنهاد می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \kappa \{-(I - P)[\nabla f_p(x^*) + \nabla g(x^*)^T (u + g(x))^+] - Q(Ax - b)\}, \\ \frac{du}{dt} = \kappa \{-u + (u + g(x))^+\}, \end{cases} \quad (۷.۳)$$

که در آن κ فاکتور مقیاس‌بندی است و نرخ همگرایی شبکه عصبی (۷.۳) را نشان می‌دهد. چگونگی اجرای شبکه عصبی (۷.۳) در سخت افزار در شکل ۱.۳ آورده شده است.



شکل ۱.۳: اجرای شبکه عصبی (۷.۳) در سخت افزار

ملاحظه ۱.۱.۳. با توجه به لم ۱.۱.۳ به سادگی متوجه می‌شویم x^* یک جواب بهینه (۲.۳)–(۴.۳) است اگر و فقط اگر $u^* \geq 0$ وجود داشته باشد که $(x^{*T}, u^{*T})^T$ یک نقطه تعادل از (۷.۳) باشد. بنابراین هنگامی که شبکه عصبی به نقطه تعادل آن همگرا می‌شود، مسیر حالت $x(t)$ به جواب بهینه مساله (۲.۳)–(۴.۳) نزدیک می‌شود.

۲.۳ مقایسه با برخی شبکه‌های عصبی موجود

به منظور مشاهده چگونگی کاربرد شبکه عصبی (۷.۳) برای حل مساله (۲.۳)–(۴.۳)، آن را با بعضی مدل‌های شبکه عصبی موجود مقایسه می‌کنیم. نوعی مدل شبکه عصبی به نام مدل گرادینانی وجود دارد. برای استفاده از مدل شبکه عصبی گرادینانی، یک مساله بهینه‌سازی مقید می‌تواند توسط مساله بهینه‌سازی نامقید تقریب زده شود. سپس تابع انرژی با روش جریمه‌ای ساخته می‌شود. قابل ذکر است که مدل شبکه عصبی گرادینانی دارای این مزیت است که به‌طور مستقیم استفاده از مشتقات تابع انرژی تعریف شود. اما نقص آن این است که همگرایی تضمین نمی‌شود، به ویژه زمانی که فضای جواب بی کران است. به علاوه، شبکه عصبی گرادینان براساس تابع جریمه نیاز به پارامتر قابل تنظیم، دارد. برای مثال با کاربرد روش جریمه مساله بهینه‌سازی کراندار می‌تواند با مساله بهینه‌سازی نامحدود زیر تقریب زده شود:

$$\min \bar{E}(x) = f_p(x) + \frac{\gamma}{\nu} \left\{ \sum_{k=1}^m [g_k^+(x)]^2 + \sum_{q=1}^l (A_q x - b_q)^2 \right\},$$

که در آن γ پارامتر جریمه است. مدل شبکه عصبی گرادیان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla \bar{E}(x) = -(\nabla f_p(x) + \gamma[\nabla g(x)^T g^+(x) + A^T(Ax - b)]). \quad (۸.۳)$$

سیستم (۸.۳) به عنوان مدل شبکه عصبی کندی-چوآ^۱ نامیده می‌شود. این شبکه قادر به یافتن جواب بهینه دقیق به دلیل پارامتر جریمه است و اجرای آن هنگامی که پارامتر جریمه بسیار بزرگ باشد سخت است. بنابراین، این شبکه با پارامتر جریمه خیلی بزرگ فقط به جواب تقریبی گرادیان نزدیک می‌شود. می‌توان نشان داد شبکه عصبی کندی-چوآ (۸.۳) به جواب بهینه دقیق بعضی مسائل برنامه‌ریزی محدب همگرا نمی‌شود. در [۶۷] ناظمی و عفتی یک مدل گرادیان برای مساله (۲.۳)-(۴.۳) به صورت زیر ارائه می‌کنند:

$$\frac{d(y(t))}{dt} = -\nabla E(y(t)), \quad (۹.۳)$$

$$y(\circ) = y_\circ, \quad y(t) = (x(t), u(t), v(t))^T, \quad (۱۰.۳)$$

که در آن

$$E(y) = \frac{1}{\gamma} \|\eta(y)\|^2, \quad (۱۱.۳)$$

$$\eta(y) = \begin{bmatrix} \nabla f_p(x) + A^T v + \nabla g(x)^T u \\ b - Ax \\ \phi_{\text{FB}}^\varepsilon(u, -g(x)) \end{bmatrix} = \circ, \quad (۱۲.۳)$$

و

$$\phi_{\text{FB}}^\varepsilon(a, b) = (a + b) - \sqrt{a^2 + b^2 + \varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow \circ_+.$$

در [۶۳]، ناظمی یک مدل شبکه عصبی لاگرانژی برای حل (۲.۳)-(۴.۳) به صورت زیر پیشنهاد کرد.

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y), \quad (۱۳.۳)$$

$$y(t_\circ) = y_\circ, \quad y(t) = (x(t), u(t), v(t))^T, \quad u(t_\circ) > \circ, \quad (۱۴.۳)$$

که در آن

$$\Phi(y) = \begin{bmatrix} -(\nabla f_p(x) + \frac{1}{\gamma} \nabla g(x)^T u^2 + A^T v) \\ \text{diag}(u_1, \dots, u_m) g(x) \\ Ax - b \end{bmatrix}.$$

در مدل‌های (۹.۳)-(۱۰.۳) و (۱۳.۳)-(۱۴.۳)، متغیرهای حالت $x \in \mathbb{R}^n$ ، $u \in \mathbb{R}^m$ و $v \in \mathbb{R}^l$ هستند. بنابراین، این مدل‌های شبکه عصبی $n + m + l$ نرون دارند. در حالی که شبکه عصبی

¹Kennedy and Chua's

بیان شده در (۷.۳) فقط $n + m$ نرون دارد. مهمتر از آن، همگرایی مدل‌های (۹.۳)–(۱۰.۳) و (۱۳.۳)–(۱۴.۳) در شرایطی که $\nabla^2 f(x) + \sum_{k=1}^m \nabla^2 g_k(x)u_k$ ماتریس معین مثبت است تضمین می‌شود. در نتیجه، این مدل‌ها نمی‌توانند مسائل برنامه‌ریزی خطی را حل کنند که کاربرد آنها را محدود می‌سازد. به علاوه شبکه عصبی (۷.۳) می‌تواند به جواب بهینه تحت نیمه معین مثبت بودن $\nabla^2 f(x) + \sum_{k=1}^m \nabla^2 g_k(x)u_k$ برای همه $x \in \mathbb{R}^n$ و $u_k \geq 0$ همگرا شود. در [۶۹]، ناظمی شبکه عصبی زیر را برای حل مساله (۲.۳)–(۴.۳) پیشنهاد داد:

$$\frac{dx}{dt} = -(\nabla f_p(x) + \nabla g(x)^T(u + g(x))^+ + A^T v), \quad (15.3)$$

$$\frac{du}{dt} = (u + g(x))^+ - u, \quad (16.3)$$

$$\frac{dv}{dt} = Ax - b. \quad (17.3)$$

در این مدل متغیرهای حالت $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^l$ هستند. در نتیجه، این شبکه عصبی $n + m + l$ نرون دارد. در حالی که شبکه عصبی (۷.۳) فقط $n + m$ نرون دارد، به علاوه شبکه عصبی ما یک ساده سازی از (۱۵.۳)–(۱۷.۳) است.

۳.۳ تحلیل پایداری و همگرایی

در این بخش فرض کنید Ω^e مجموعه نقطه تعادل شبکه عصبی (۷.۳) است.

لم ۱.۳.۳. [۷۹] فرض کنید $(x^{*T}, u^{*T})^T \in \Omega^e$ نقطه تعادل (۷.۳) است و

$$V(x, u) = f_p(x) - f_p(x^*) + \frac{1}{\gamma} \|(u + g(x))^+\|^2 - \frac{1}{\gamma} \|(u^* + g(x^*))^+\|^2 - (x - x^*)^T (\nabla f_p(x^*) + \nabla g(x^*)^T u^*) - (u - u^*)^T u^* + \frac{1}{\gamma} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|u - u^*\|^2. \quad (18.3)$$

سپس

$$(I) \quad V(x, u) \geq \frac{1}{\gamma} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|u - u^*\|^2,$$

$$(II) \quad \frac{dV}{dt} \leq -\|(I - P)[\nabla f_p(x) + \nabla g(x)^T(u + g(x))^+]\|^2 + Q\|Ax - b\|^2 - \frac{1}{\gamma} \|u - (u + g(x))^+\|^2.$$

ملاحظه ۱.۳.۳. به سادگی مشاهده می‌شود $V(x, u)$ یک تابع لیاپونوف^۱ است. همچنین داریم $\frac{dV}{dt} \leq 0$ ، بنابراین شبکه عصبی (۷.۳) به مفهوم لیاپونوف پایدار است.

قضیه ۱.۳.۳. [۷۹] برای هر نقطه اولیه $(x^{(0)T}, u^{(0)T})^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ ، یک جواب پیوسته منحصر به فرد $(x(t)^T, u(t)^T)^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ برای $t \geq 0$ وجود دارد.

¹Lyapunou

قضیه ۲.۳.۳. [۷۹] مسیر حالت شبکه عصبی (۷.۳) برای هر نقطه اولیه $(x^{(0)T}, u^{(0)T})^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ به یک نقطه تعادل (۷.۳) همگرا می‌شود. شبکه عصبی (۷.۳) با هر نقطه اولیه $(x^{(0)T}, u^{(0)T})^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ پایدار مجانبی است زمانی که Ω^e نقطه تعادل منحصر به فرد دارد.

مثال ۱.۳.۳. [۱۰۸]

$$\min f(x) = \max \{x_1^4 + x_2^4; (2 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2; 2e^{-x_1+x_2}\}. \quad (۱۹.۳)$$

جواب بهینه این مساله $x^* = (1, 1)^T$ است. فرض کنید

$$z = \max \{x_1^4 + x_2^4; (2 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2; 2e^{-x_1+x_2}\},$$

سپس مساله (۱۹.۳) می‌تواند به مساله معادل زیر تبدیل شود:

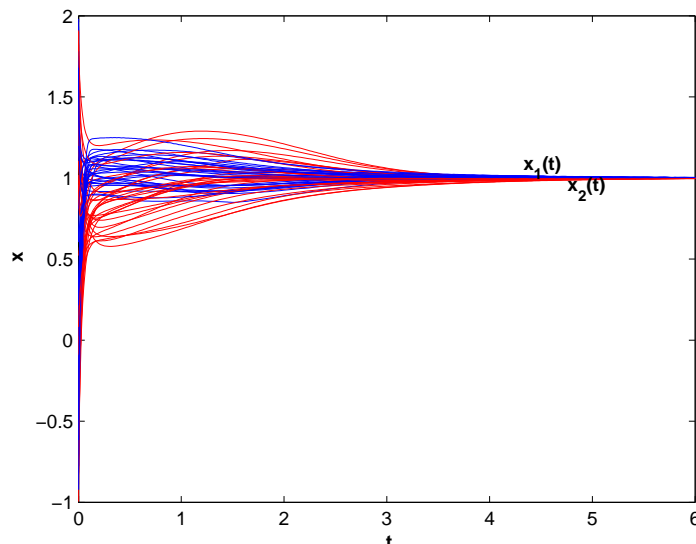
$$\min \quad z \quad (۲۰.۳)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1^4 + x_2^4 - z \leq 0, \\ (2 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2 - z \leq 0, \\ 2e^{-x_1+x_2} - z \leq 0. \end{cases} \quad (۲۱.۳)$$

شکل ۲.۳ نشان می‌دهد مسیرهای شبکه (۷.۳) برای حل مساله با ϵ حالت اولیه تصادفی به x^* نزدیک می‌شوند.

فرض کنید $f_p(x) = \frac{1}{p} \ln \sum_{i=1}^r \exp(p f_i(x))$ مساله زیر را داریم:

$$\min \quad f_p(x) = \frac{1}{p} \ln \sum_{i=1}^r \exp(p f_i(x)). \quad (۲۲.۳)$$

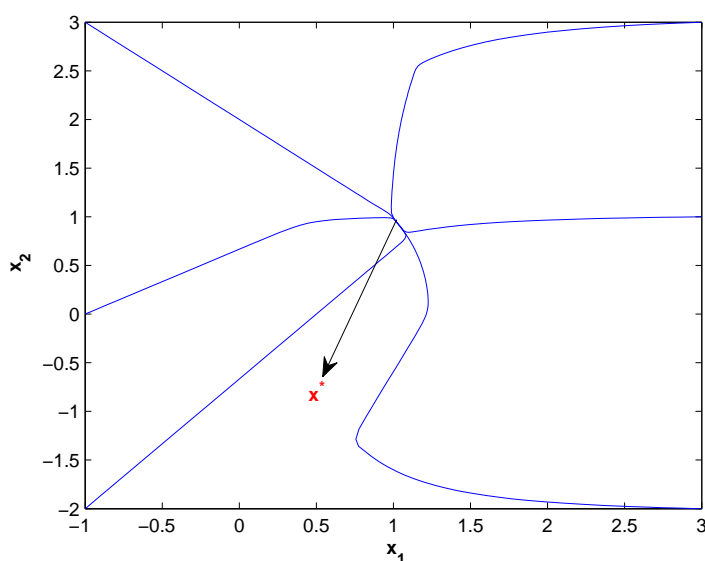


شکل ۲.۳: رفتار گذرا از شبکه عصبی (۷.۳) با ϵ نقطه اولیه تصادفی در مثال ۱.۳.۳

با توجه به شبکه (۷.۳) با $p = 10^4$ برای حل (۲۱.۳)، نتایج شبیه سازی نشان می دهد مسیر جواب به نقطه تعادل x^* نزدیک می شود. شکل ۳.۳ نمودار فاز متغیرهای حالت $(x_1(t), x_2(t))^T$ را با نقطه اولیه متفاوت نشان می دهد.

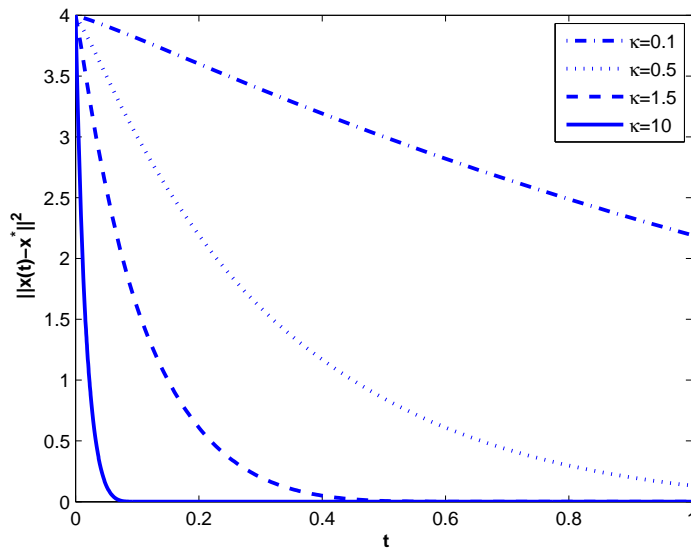
برای مساله (۲۲.۳) با $p = 10^4$ باید تاثیر پارامتر κ در شبکه عصبی (۷.۳) بر اساس

$\|x(t) - x^*\|^2$ بسنجیم. طبق شکل (۴.۳) زمانی که $\kappa = 0.1$ باشد، شبکه عصبی (۷.۳) با سرعت کمتری کاهش می یابد. در حالی که اگر $\kappa = 10$ باشد این نرم $\|x(t) - x^*\|^2$ سریع تر کاهش پیدا می کند. همان طور که مشاهده می کنیم هرچه κ بیشتر باشد نرخ همگرایی این نرم $\|x(t) - x^*\|^2$ سریع تر است.



شکل ۳.۳: نمودار فازی شبکه عصبی (۷.۳) با ۶ نقطه اولیه تصادفی در مثال ۱.۳.۳

با توجه به شکل ۴.۳، مشاهده می کنیم هنگامی که $\kappa = 0.1$ شبکه عصبی (۷.۳) کندترین کاهش از $\|x(t) - x^*\|^2$ را دارد. در حالی که وقتی $\kappa = 10$ ، سریع ترین کاهش $\|x(t) - x^*\|^2$ با حالت اولیه را دارد. مشاهده می کنیم بزرگترین، نرخ همگرایی بهتری از خطای $\|x(t) - x^*\|^2$ را نشان می دهد.



شکل ۴.۳: رفتار همگرایی از $\|x(t) - x^*\|^2$ در مثال ۱.۳.۳ با $x_0 = (1, -1)^T$

مثال ۲.۳.۳. [۱۱۶]

$$\min f(x) = \max \{x_1^2 + x_2^2; (2 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2; 2e^{-x_1 + x_2}\} \quad (23.3)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ |x_1| \leq 2, \\ |x_2| \leq 2. \end{cases} \quad (24.3)$$

فرض کنید $z = \max \{x_1^2 + x_2^2; (2 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2; 2e^{-x_1 + x_2}\}$ ، سپس مساله (۲۳.۳) و (۲۴.۳) می‌تواند به مساله معادل تبدیل شود

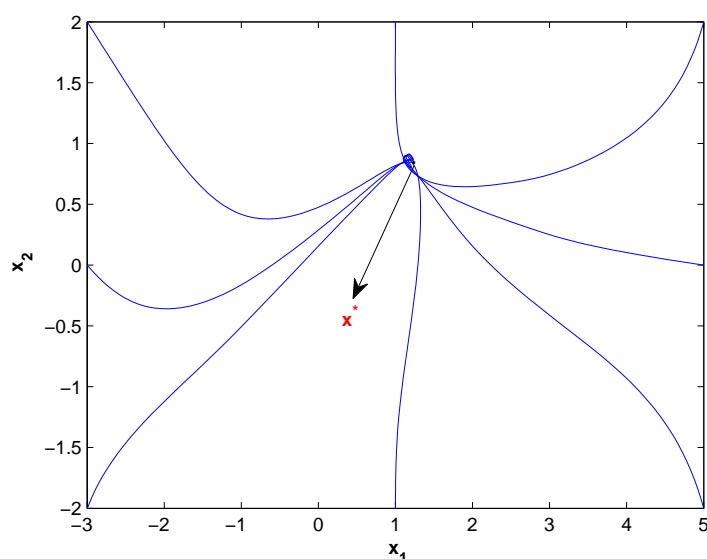
$$\min z \quad (25.3)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - z \leq 0, \\ (2 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2 - z \leq 0, \\ 2e^{-x_1 + x_2} - z \leq 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ |x_1| \leq 2, \\ |x_2| \leq 2. \end{cases} \quad (26.3)$$

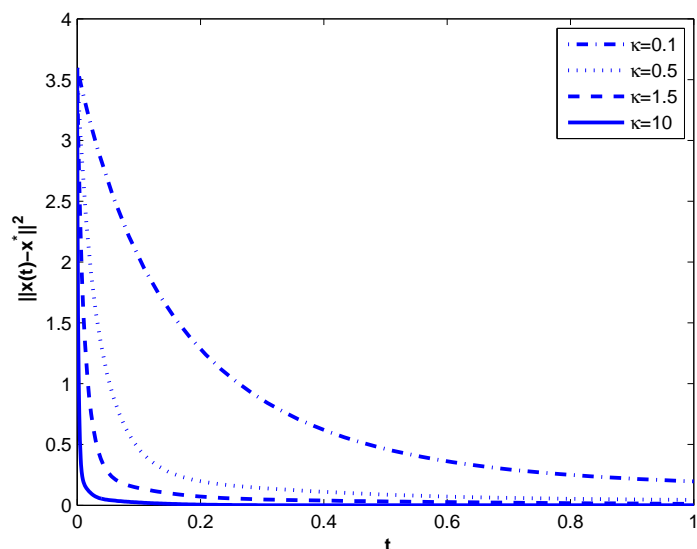
شبکه عصبی (۷.۳) را برای حل مساله (۲۶.۳) و (۲۵.۳) به کار می‌بریم. نتایج شبیه‌سازی می‌دهد شبکه (۷.۳) با هر نقطه اولیه، همیشه به $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ همگرا می‌شود. برای

مثال، شکل ۵.۳ نمودار فاز متغیرهای حالت $(x_1(t), x_2(t))^T$ را با ۸ نقطه اولیه مختلف ترسیم می‌کند.

واضح است صرف‌نظر از این‌که حالت اولیه داخل یا خارج منطقه احتمالی باشد، شبکه همیشه به جواب بهینه $x^* = (1/1377, 0/8912)^T$ همگرا می‌شود. شکل ۶.۳ رفتار همگرایی محلی خطای $\|x(t) - x^*\|^2$ را با $x_0 = (1, -1)^T$ و نقطه اولیه κ نشان می‌دهد. مشخص است بزرگتر منجر به نرخ همگرایی بهتر می‌شود.



شکل ۵.۳: نمودار فاز شبکه عصبی (۷.۲) با ۸ نقطه تصادفی در مثال ۲.۳.۳



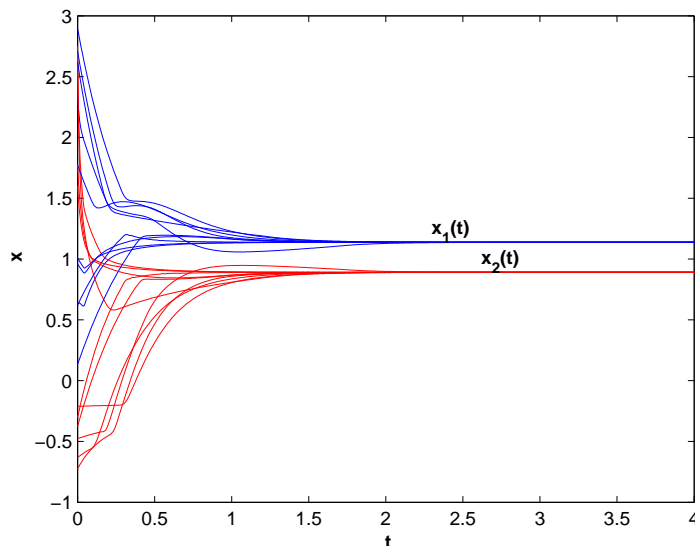
شکل ۶.۳: رفتار همگرایی از $\|x(t) - x^*\|^2$ در مثال ۲.۳.۳ با $x_0 = (1, -1)^T$

فرض کنید $f_p(x) = \frac{1}{p} \ln \sum_{i=1}^3 \exp(pf_i(x))$. مساله زیر را در نظر بگیرید

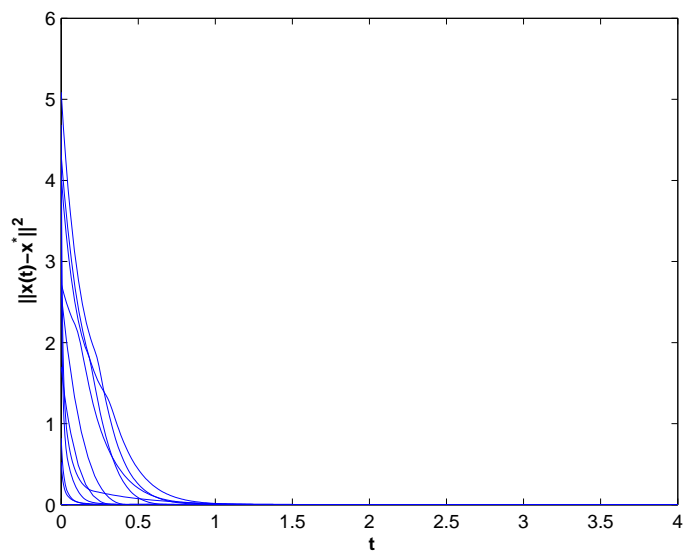
$$\min f_p(x) = \frac{1}{p} \ln \sum_{i=1}^3 \exp(pf_i(x)) \quad (27.3)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ |x_1| \leq 2, \\ |x_2| \leq 2. \end{cases} \quad (28.3)$$

در اجرای (۷.۳) با $p = 10^4$ برای حل (۲۷.۳)–(۲۸.۳)، نتایج شبیه سازی نشان می‌دهد مسیر جواب به نقطه تعادل $x^* = (1/1380, 0/8915)^T$ همگرا می‌شود. در حقیقت، قضیه (۲.۳.۳) تضمین می‌کند مدل گفته شده در (۷.۳) به‌طور سراسری به x^* همگرا می‌شود. برای مثال شکل ۷.۳ رفتار همگرایی $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ را براساس (۷.۳) با نقطه اولیه تصادفی نشان می‌دهد. رفتار همگرایی خطای l^2 بین x و x^* نیز در شکل ۸.۳ دیده می‌شود.



شکل ۷.۳: رفتار گذرا از شبکه عصبی (۷.۳) با نقطه اولیه تصادفی در مثال ۲.۳.۳



شکل ۸.۳: رفتار همگرایی $\|x(t) - x^*\|^2$ در مثال ۲.۲.۳

فصل ۴

روش هموارسازی در حل بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از ارزش در معرض ریسک

بهینه‌سازی سبد سهام مربوط به انتخاب سرمایه‌گذاری‌های بهینه بوده و شامل مشتقات مالی از جمله قراردادهای فوروارد^۱، قراردادهای آینده و قراردادهای اختیاری است، تا قرارگرفتن سرمایه‌گذار در معرض ریسک را کاهش داده و مدیریت کند [۵۱]. بر اساس سنجش‌های مختلف ریسک و نیز به حداکثر رسانی سودمندی^۲ و تحلیل جابه‌جایی بازگشت سرمایه-ریسک در چشم اندازه‌های نامطمئن، مسائل بهینه‌سازی سبد سهام به شکل گسترده در بهینه‌سازی مالی مطالعه شده‌اند [۱۸، ۲۰، ۴۱، ۴۶، ۵۶، ۹۲]. با توجه به تحلیل مدل، دنچوا و روزینسکی^۳ در [۲۰] یک مدل بهینه‌سازی سبد سهام با محدودیت‌های تسلطی تصادفی^۴ ارائه کردند. مدل جدید شامل شرایط بهینگی، خاصیت دوگانی و مدل‌های بهینه‌سازی معادل است. اخیراً با استفاده از نظریه میانگین-ریسک میلر و روزینسکی^۵ در [۵۶] مشخصات دوگانه^۶

¹forward contract

²Maximum handy update

³Dentcheva and Ruszczyński

⁴Random Dominance Limitations

⁵Miller and Ruszczyński

⁶Dual specifications

را به صورت یک مساله بهینه‌سازی سبد سهام با اندازه ریسک منسجم بازی ماتریسی^۱ معادل مجموع- صفر فرمول‌بندی کردند. در [۵۶] دیدگاه جدیدی درباره بهینه‌سازی سبد سهام را مطرح می‌شود.

آن مشهور است که بحث کلیدی بهینه‌سازی سبد سهام، اندازه‌گیری ریسک است. به علت خوب بودن سنجش ریسک منسجم و مشارکت راکافلارو- اورياسو^۲ در [۹۲] ارزش در معرض ریسک مشروط CVaR^۳ عمومیت پیدا کرده و در مسائل مختلف بهینه‌سازی سبد سهام استفاده می‌شود. بر اساس کار راکافلارو- اورياسو، کراخمال- پالمکیست- اورياسو^۴ [۴۱] سه مدل بهینه‌سازی سبد سهام با CVaR معرفی شد و روابط بین این مدل‌ها و فرمول‌های معادل آنها مطالعه شد. نویسندگان در مقاله [۴۱] سود و ریسک را هم‌زمان در نظر می‌گیرند. اخیراً بحث روی مسائل بهینه‌سازی سبد سهام گسترش یافته‌است. یک مطالعه مربوط به بهینه‌سازی مقاوم است، که در آن اطلاعات توزیع تصادفی تا حدی مشخص است [۱۹، ۲۷، ۸۵، ۱۰۴، ۱۲۲]. از طرف دیگر، بهینه‌سازی سبد سهام با CVaR در مسائل تصمیم‌گیری علمی مختلفی به کار می‌رود [۳، ۲۵، ۹۴]. واضح است که علاوه بر مدل‌سازی مسائل، یکی از مباحث مورد نظر در بهینه‌سازی سبد سهام، روش‌های حل عددی این مسائل است. مطابق سنجش ریسک متفاوت، روش‌های مختلف بهینه‌سازی برای حل مسائل بهینه‌سازی سبد سهام به کار رفته‌اند. بر اساس سنجش CVaR با تقریب نمونه گسسته، روش رایج برای مسائل سبد سهام، فرمول‌بندی مجدد آنها به عنوان برنامه‌ریزی خطی تحت یک بازده و تابع زیان خطی است. محاسبه بر اساس روش‌های برنامه‌ریزی خطی در موارد بسیاری موثر نشان داده شده است. در هر حال، گفته می‌شود بعد مسائل سبد سهام مربوط به برنامه‌ریزی خطی به صورت $n+1+S$ است که در آن n بعد متغیرهای تصمیم، و S تعداد نمونه‌هاست. این نشان می‌دهد اندازه مسائل بستگی به اندازه نمونه‌ها دارد. از طرف دیگر به منظور کسب تقریب خوب با روش انتخاب تعداد S از نمونه‌ها بزرگ در نظر گرفته می‌شود. به این ترتیب ابعاد بسیار بالا برای مسائل بهینه‌سازی به دست می‌آید که از نظر محاسباتی هزینه محاسباتی زیادی در بر دارد، حتی برای مدل‌هایی که قبلاً با برنامه‌ریزی خطی فرمول‌بندی شده است. بعضی روش‌های دیگر اخیراً پیشنهاد شده‌اند. بلیاکوف- باگیروف^۵ در [۶] از گرادیان گسسته برای حل بهینه‌سازی سبد سهام غیرهموار با CVaR استفاده کردند و مقایسه‌هایی با روش برنامه‌ریزی خطی نیز ارائه دادند. نویسندگان در [۶] نشان دادند که روش بهینه‌سازی غیرهموار نیز موثر است. اخیراً لیم- شرالی- اورياسو^۶ در [۴۶] نیز روش‌های مشتق ناپذیری را برای مسائل سبد سهام ارائه کردند. نتایج عددی نیز تاثیر روش‌های بهینه‌سازی مشتق ناپذیر را

¹Coherent Matrix Risk

²Rockafellar - Uryasev

³Conditional Value-at-risk

⁴Krokhmal-Palmquist-Uryasev

⁵Beliakov-Bagiroy

⁶Lim-Sherali-Uryasev

نشان می‌دهد. کانزیبای و مایر^۱ در [۴۲] و فابیان^۲ در [۲۳] الگوریتم‌های تجزیه دو مرحله‌ای برای حل مساله کمینه‌سازی CVaR را ارائه کردند. همه این موارد، انگیزه‌ای برای محاسبه بهینه‌سازی سبد سهام با CVaR به ما می‌دهد.

در این پایان‌نامه مساله بهینه‌سازی سبد سهام با اندازه‌گیری CVaR را در نظر می‌گیریم. به خوبی مشخص است روش نیوتون نیمه‌هموار که در [۸۸] پیشنهاد شد روش جالب برای مسائل ناهموار از نقطه نظر روش‌های عددی است. به علاوه، روش هموارسازی تبدیل به روش مشهوری برای حل سیستم معادلات نیمه‌هموار و مسائل بهینه‌سازی شده است. در مقایسه با روش نیمه‌هموار، روش هموارسازی می‌تواند از مشتق عادی به راحتی استفاده کرده و ویژگی‌های همگرایی را به خوبی حفظ کند، به ویژه برای مسائل نیمه‌هموار، برای بهینه‌سازی سبد سهام با CVaR، مشاهده می‌کنیم عبارت $[u]^+ = \max\{u, 0\}$ ، نیمه‌هموار است. با توجه به تاثیر محاسباتی روش‌های هموارسازی، یک روش هموارسازی را برای مسائل بهینه‌سازی سبد سهام با اندازه‌گیری CVaR در نظر می‌گیریم. با این روش هموارسازی بعضی مدل‌های هموارسازی که از بهینه‌سازی سبد سهام به دست آمده، در نظر گرفته می‌شود. به علاوه، ویژگی‌های مدل‌های هموارسازی بررسی می‌شوند. یک الگوریتم هموارسازی برای مدل‌های هموارسازی ارائه شده است. برای بررسی تاثیر روش جدید، یک بازار قدرت-بازار^۳ رقابتی نوعی را به عنوان مثال در نظر می‌گیریم. گفته می‌شود بازارهای قدرت پراز ریسک هستند و شرکت کنندگان بازار باید موازنه‌هایی بین بازگشت سرمایه و ریسک انجام دهند. در بازارهای قدرت، اختصاص دارایی‌های تولید شده به مسائل سبد سهام به شکل گسترده مطالعه شده است. بنابراین از روش هموارسازی برای حل تخصیص دارایی‌هایی تولید با CVaR استفاده می‌کنیم. روش پیشنهادی در این پایان‌نامه، سه مشخصه دارد.

- بعد مدل‌های هموارسازی برای بهینه‌سازی سبد سهام با CVaR مستقل از تعداد نمونه‌هاست.
- مدل‌های هموارسازی، تحذب مسائل سبد سهام اولیه را حفظ می‌کنند. این مساله برای جواب عمومی بسیار مفید است.
- برای به حداکثر رساندن بازگشت سرمایه با مساله مقید به CVaR ثابت می‌کنیم عملگر کمینه در محدودیت می‌تواند کنار گذاشته شود.

به این ترتیب مدل ساده می‌شود و نتایجی مشابه [۹۳] به دست می‌آید.

¹Kunzi-Bay and Mayer

²Fabian

³Power-market

۱.۴ مدل‌های بهینه‌سازی پورتفوی با اندازه‌گیری CVaR

در این بخش فرمول CVaR و برخی از مدل‌های بهینه‌سازی پورتفوی با اندازه CVaR معرفی می‌شود در [۴۱، ۹۲، ۹۳].

۱.۱.۴ فرمول CVaR

فرض کنید $f(x, y)$ تابع زیان وابسته به بردار تصمیم $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ و بردار دلخواه $y \in \mathbb{R}^m$ باشد. برای راحتی، احتمال y با توزیع $p(\cdot)$ فرض شده است [۹۳]. فرض کنید $E(|f(x, y)|) < +\infty$ برای هر $x \in X$. در اینجا عملگر E بیان‌کننده مقدار موردانتظار است. متغیر تصمیم $x \in X$ مفروض است. احتمال این که $f(x, y)$ بیشتر از آستانه α شود به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\psi(x, \alpha) = \int_{f(x, y) \leq \alpha} p(y) dy \quad (۱.۴)$$

برای سطح اطمینان β و یک $x \in X$ ثابت، ارزش در معرض ریسک به شکل زیر معرفی می‌شود:

$$VaR_\beta(x) = \min\{\alpha \in \mathbb{R} : \Psi(x, \alpha) \geq \beta\}. \quad (۲.۴)$$

ارزش در معرض ریسک مشروط که با $CVaR_\beta(x)$ نشان داده می‌شود، مقدار موردانتظار زیانی است که از $VaR_\beta(x)$ تجاوز می‌کند^۱ و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CVaR_\beta(x) = \frac{1}{1-\beta} \int_{f(x, y) \geq VaR_\beta(x)} f(x, y) p(y) dy \quad (۳.۴)$$

CVaR یک اندازه ریسک منسجم^۲ است. یادآور می‌شویم به علت مشکلات موجود در $CVaR_\beta(x)$ ، در [۹۲] تابع زیر را معرفی شده است

$$F_\beta(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{y \in \mathbb{R}^m} [f(x, y) - \alpha]^+ p(y) dy \quad (۴.۴)$$

که $[t]^+ = \max\{t, 0\}$. سپس نتیجه‌ی ارزشمند زیر داده می‌شود:

$$\phi_\beta(x) \equiv CVaR_\beta(x) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} F_\beta(x, \alpha) \quad (۵.۴)$$

^۱it exceeds

^۲Inconsistent risk

که $F_\beta(x, \alpha)$ محدب و به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر بر حسب α است. این نتایج دیدگاه جدیدی برای بررسی CVaR ایجاد می‌کند. با تغییر در فرمول CVaR مساله کمینه‌سازی CVaR به شکل زیر مطرح می‌شود:

$$\min_x \Phi_\beta(x) = \min F(x, \alpha) \quad (۶.۴)$$

$$\text{s.t. } x \in X \quad (۷.۴)$$

۲.۴ محاسبات بهینه‌سازی CVaR

در محاسبات کاربردی، یک روش ساده برای تقریب $F_\beta(x, \alpha)$ به صورت زیر است:

$$\tilde{F}_\beta(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^S [f(x, y_k) - \alpha]^+, \quad (۸.۴)$$

که S تعداد نمونه‌هاست. $\tilde{F}_\beta(x, \alpha)$ محدب و قطعه‌ای خطی نسبت به α است. همچنین $\tilde{F}_\beta(x, \alpha)$ برای (x, α) محدب است اگر $f(x, y)$ محدب باشد. در حالت کلی متغیر تصمیم x به شکل زیر است:

$$x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0\} \quad (۹.۴)$$

با استفاده از تقریب CVaR دو روش محاسباتی برای کمینه‌سازی CVaR وجود دارد.

۱.۲.۴ روش اول: طرح روش بر اساس بهینه‌سازی ناهموار

$$\min_x \phi_\beta(x) = \min_\alpha \tilde{F}_\beta(x, \alpha) = \min_\alpha \left[\alpha + \frac{1}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^S [f(x, y_k) - \alpha]^+ \right]. \quad (۱۰.۴)$$

$$\text{s.t. } x \in X$$

این یک مساله بهینه‌سازی ناهموار است، اما دارای بعد پایین برای متغیر $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1}$ است.

۲.۲.۴ روش دوم: طرح روش بر اساس بهینه‌سازی هموار

با معرفی یک متغیر کمکی مساله کمینه‌سازی CVaR به شکل زیر کاهش می‌یابد

$$\min_{(x, \alpha, z)} \left[\alpha + \frac{1}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^S Z_k \right] \quad (۱۱.۴)$$

$$\text{s.t. } x \in X$$

$$Z_k \geq f(x, y_k) - \alpha, \quad Z_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, S.$$

مشخصه این روش این است که آن یک برنامه‌ریزی هموار و یک مساله برنامه‌ریزی خطی مرتبط با x است. بعد مساله تغییر یافته به تعداد نمونه‌ها بستگی دارد. اگرچه وقتی نمونه‌ها بزرگ باشند، این مساله یک مساله با ابعاد بالاست.

۳.۴ مدل‌های کلی بهینه‌سازی پرتفوی با استفاده از CVaR

فرض کنید متغیر تصمیم به صورت $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ باشد. در اینجا X فضای تصمیم است. در مساله انتخاب سبد سهام بعد متغیر y و متغیر تصمیم x برابرند یعنی:

$$y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

با توجه به بازده پرتفوی، مدل‌های ریسک-بازده را طبق CVaR در این زیر بخش بیان می‌کنیم [۴۱]. برای یک توزیع معین $p(\cdot)$ از متغیر تصادفی y ، بازده سرمایه‌گذاران به صورت $\mathbb{R}_{p(x)}$ نشان داده می‌شود که اغلب به وسیله مقدار موردانتظار تابع زیان منفی^۱ تعریف می‌شود. به عبارتی:

$$\mathbb{R}_p(x, y) = E_p[-f(x, y)].$$

سه مدل بهینه‌سازی سبد سهام به شکل زیر هستند.

مدل ۱

بشینه‌سازی بهره سبد سهام با قید CVaR

$$\max_{x \in X} \mathbb{R}_p(x) \quad (۱۲.۴)$$

$$\text{s.t. } \Phi_\beta(x) < V_1.$$

مدل ۲

کمینه‌سازی CVaR با قید بهره

$$\min_{x \in X} \phi_\beta(x) \quad (۱۳.۴)$$

$$\text{s.t. } \mathbb{R}_p(x) > V_2.$$

مدل ۳

بیشینه‌سازی تابع سودهی متشکل از بهره و کمینه‌سازی CVaR

$$\max_{x \in X} \mathbb{R}_p(x) - A\Phi_\beta(x). \quad (۱۴.۴)$$

^۱Negative loss function

۴.۴ هموار کردن مدل‌های بهینه‌سازی با در نظر گرفتن

CVaR

فرمول CVaR شامل ماکزیمم سازی تابع زیر است [۱۵]:

$$[f(x, y_k) - \alpha]^+ = \max\{f(x, y_k) - \alpha, 0\}, \quad k = 1, \dots, S.$$

این تابع ناهموار است. ناهمواری موجب دشوار شدن محاسبات می‌شود. یک روش هموارسازی برای مدیریت این گونه مسائل وجود دارد [۱۰۳، ۱۰۵]. در اینجا یک روش هموارسازی را برای حل بهینه‌سازی پرتفوی با CVaR معرفی خواهیم کرد. ویژگی‌های مدل‌های هموارسازی نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تابع هموارسازی برای تابع ماکزیمال

در این زیربخش، یک تابع هموارسازی و ویژگی‌های مربوطه را معرفی می‌نماییم. تعریف کنید

$$g(x) = \max_{1 \leq i \leq m} \{g_i(x)\}, \quad (15.4)$$

در معادله فوق $g_i(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ دو بار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است. واضح است که تابع $g(x)$ در نقطه‌ای که شاخص‌های i و j وجود دارند به‌طوری که $g_i(x) = g_j(x)$ ناهموار است. برای یک پارامتر معین $t > 0$ از همان روش پیشنهادی در [۸۶] استفاده می‌کنیم تا تابع هموارسازی را به‌صورت زیر نشان دهیم:

$$g(t, x) = t \ln \left(\sum_{i=1}^m \exp(g_i(x)/t) \right). \quad (16.4)$$

تابع هموارسازی $g(t, x)$ دارای ویژگی‌های مطلوب زیادی است (به لم ۷ در [۸۶، ۱۰۵] مراجعه کنید).

لم ۱۰.۴.۴. به ازای هر $t > 0$ ، دارای ویژگی‌های زیر است:

۱. $g(t, x)$ نسبت به t صعودی است، به عبارتی به ازای هر $t_1 > t_2 > 0$ داریم:

$$g(t_1, x) \geq g(t_2, x) \quad \text{علاوه بر این در داریم} \quad 0 \leq g(t, x) - g(x) \leq t$$

۲. $g(t, x)$ دوبار به‌طور پیوسته به ازای هر $t > 0$ مشتق‌پذیر است و

$$\nabla_x g(t, x) = \sum_{i=1}^n a_i(t, x) \nabla g_i(x). \quad (17.4)$$

$$\begin{aligned} \nabla_x^2 g(t, x) = & \sum_{i=1}^m \left(a_i(t, x) \nabla^2 g_i(x) + \frac{1}{t} a_i(t, x) \nabla g_i(x) \nabla g_i(x)^T \right) \\ & - \frac{1}{t} \left(\sum_{i=1}^m a_i(t, x) \nabla g_i(x) \right) \left(\sum_{i=1}^m a_i(t, x) \nabla g_i(x) \right)^T, \end{aligned} \quad (18.4)$$

که در آن

$$a_i(t, x) = \frac{\exp g_i(x)/t}{\sum_{i=1}^m \exp g_i(x)/t}, \quad I(x) = \{i/g(x) = g_i(x)\}. \quad (۱۹.۴)$$

به‌علاوه اگر $g_i(x) (i = 1, \dots, m)$ توابع خطی باشند، آنگاه $g(t, x)$ یک تابع محدب و بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر به‌ازای هر $t > 0$ است.

۳. به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داریم:

$$\nabla_x g(O_+, x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \nabla_x g(t, x) = \sum_{i \in I(x)} \nabla g_i(x)/\bar{k}, \quad (۲۰.۴)$$

که در آن $\bar{k} = |I(x)|$.

۴. داریم

$$\text{dist}(\nabla_x g(t, x), \partial g(x)) = o(t). \quad (۲۱.۴)$$

۵.۴ تابع هموارسازی در فرمول CVaR

برمبنای روش هموارسازی تابع ماکزیمال، تابع ناهموار در فرمول بندی CVaR را می‌توان هموار نمود. فرض کنید $t > 0$ پارامتر هموارسازی باشد. $Z = (x, a)$ را در نظر بگیرید و تعریف کنید:

$$\begin{cases} g_1^k(z) = f(x, y_k) - \alpha, & \begin{cases} g^k(z) = \max\{g_1^k(z), g_2^k(z)\}, \\ g_s^k(t, z) = t \ln(1 + e^{g_1^k(z)}). \end{cases} \\ g_2^k(z) = 0, \end{cases} \quad (۲۲.۴)$$

و

$$\begin{cases} \tilde{F}_\beta(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^S g^k(z), \\ \tilde{F}_\beta^s(t, x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^S g_s^k(t, z), \end{cases} \quad (۲۳.۴)$$

که در آن g_s^k و $F_\beta^s(t, x, \alpha)$ به ترتیب توابع هموارساز از $g^k(z)$ و $F_\beta(x, \alpha)$ هستند. طبق نتیجه‌گیری در لم (۱.۴.۴)، نتایج زیر را داریم:

لم ۱.۵.۴. فرض کنید $F_\beta^s(t, x, a)$ تابع تعریف شده در معادله (۲۳.۴) باشد. آنگاه نتیجه‌گیری‌های زیر به ازای هر $t > 0$ برقرار است.

۱. ویژگی تقریب: $F_\beta^s(t, x, a)$ نسبت به t صعودی است، به عبارتی به ازای هر $t_1 > t_2 > 0$

داریم، $F_\beta^s(t, x, a) \geq F_\beta^s(t_2, x, a)$ به علاوه

$$0 \leq \tilde{F}_\beta^s(t, x, \alpha) - \tilde{F}_\beta(x, \alpha) \leq \frac{t \ln 2}{(1-\beta)} \quad (۲۴.۴)$$

۲. ویژگی تحدب: تحت شرط محدب بودن $F_\beta^s(t, x, a)$ ، $f(x, y_k)$ محدب می‌ماند.

۳. محاسبه مشتق: $F_\beta^s(x, a)$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است و

$$\nabla_x \tilde{F}_\beta^s(t, x, \alpha) = \frac{1}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^S \frac{e^{(f(x, y_k) - \alpha)/t}}{1 + e^{(f(x, y_k) - \alpha)/t}} \nabla_x f(x, y_k), \quad (25.4)$$

$$\nabla_\alpha \tilde{F}_\beta^s(t, x, \alpha) = 1 - \frac{1}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^S \frac{e^{(f(x, y_k) - \alpha)/t}}{1 + e^{(f(x, y_k) - \alpha)/t}}. \quad (26.4)$$

۴. خاصیت تقریب ژاکوبین: به ازای هر $(x, a) \in \mathbb{R}^{(n+1)}$ داریم:

$$\text{dist}\left(\nabla_{(x, \alpha)} \tilde{F}_\beta^s(t, x, \alpha), \partial \tilde{F}_\beta(x, \alpha)\right) = o(t) \quad (27.4)$$

ملاحظه ۱.۵.۴. محدب بودن تابع هموارساز $F_\beta^s(t, x, \alpha)$ در لم ۱.۵.۴ بسیار ارزشمند است زیرا به ما کمک می‌کند جواب بهینه سراسری را در مدل‌های بهینه‌سازی ریسک-بازده به‌دست آوریم.

۶.۴ مدل‌های بهینه‌سازی هموار متناظر با اندازه CVaR

تابع هموارساز CVaR با در نظر گرفتن $\Phi_\beta(t, x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi_\beta^s(t, x) = \min_\alpha \tilde{F}_\beta^s(t, x, \alpha) = \min_\alpha \left[\alpha + \frac{t}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^S \ln(e^{(f(x, y_k) - \alpha)/t} + 1) \right] \quad (28.4)$$

فرض کنید $t > 0$ پارامتر هموارساز باشد. در متناظر با کمیینه‌سازی CVaR و سه مدل ریسک-بازده در مدل‌های (۱۲.۴) - (۱۴.۴) مدل‌های هموارساز زیر را داریم:

۱. مدل کمیینه‌سازی CVaR

$$\min_x \Phi_\beta^s(t, x) = \min_x \tilde{F}_\beta^s(t, x, \alpha) = \min_\alpha \left[\alpha + \frac{t}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^S \ln(e^{(f(x, y_k) - \alpha)/t} + 1) \right] \\ \text{s.t. } x \in X. \quad (29.4)$$

۲. مدل بیشینه‌سازی بازده با قید CVaR

$$\max_x \mathbb{R}_p(x) \\ \text{s.t. } x \in X \quad (30.4) \\ \Phi_\beta^s(t, x) = \min_\alpha \tilde{F}_\beta^s(t, x, \alpha) = \min_\alpha \left[\alpha + \frac{t}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^S \ln(e^{(f(x, y_k) - \alpha)/t} + 1) \right] \leq V_1.$$

۳. مدل کمینه‌سازی CVaR با قید بازده

$$\begin{aligned} \min_x \Phi_\beta^s(t, x) = \min_\alpha \tilde{F}_\beta^s(t, x, \alpha) = \min_{(x, \alpha)} & \left[\alpha + \frac{t}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^S \ln \left(e^{(f(x, y_k) - \alpha)/t} + 1 \right) \right] \\ \text{s.t. } & x \in X \\ & \mathbb{R}_p(x) \geq V_r. \end{aligned} \quad (31.4)$$

۴. مدل بیشینه‌سازی تابع مطلوبیت متشکل از بازده و سنج CVaR

$$\begin{aligned} \max_x \mathbb{R}_p(x) - A \min_\alpha \tilde{F}_\beta^s(t, x, \alpha) = \max_\alpha & \left[\mathbb{R}_p(x) - A \left(\alpha + \frac{t}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^S \ln \left(e^{(f(x, y_k) - \alpha)/t} + 1 \right) \right) \right] \\ \text{s.t. } & x \in X \end{aligned} \quad (32.4)$$

ما توجه خود را به مدل (۳۰.۴) معطوف می‌کنیم، که این مدل شامل عملگر کمینه‌سازی مقید است. با استفاده از تحلیل مشابه در [۴۱] می‌توان حالت ساده‌ای از آن را تحت برخی شرایط کلی به دست آورد.

گزاره ۱۰۶.۴. فرض کنید مجموعه X محدب باشد و توابع $f(x, y)$ و $\mathbb{R}_p(x)$ نسبت به x به ترتیب محدب و مقعر باشند. به ازای $t > 0$ ، مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max_{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}} & \mathbb{R}_p(x) \\ \text{s.t. } & \tilde{F}_\beta^s(t, x, \alpha) = \alpha + \frac{t}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^S \ln \left(e^{(f(x, y_k) - \alpha)/t} + 1 \right) \leq V_1. \end{aligned} \quad (33.4)$$

آنگاه داریم:

- اگر x^* یک جواب (۳۰.۴) و $\alpha^* \in \arg \min \tilde{F}_\beta^s(t, x^*, \alpha)$ ، آنگاه (x^*, α^*) یک جواب (۳۳.۴) است.
- اگر (x^*, α^*) یک (۳۳.۴) با یک ضریب لاگرانژ $\mu > 0$ باشد، آنگاه x^* یک جواب (۳۰.۴) است.

ملاحظه ۱۰۶.۴. الف. دو نوع مدل برای هموار کردن بهینه‌سازی پرتفوی بر مبنای اندازه CVaR وجود دارد. یکی شامل هموارسازی تابع هدف و دیگری شامل هموارسازی قیود. این‌ها را می‌توان به‌طور مشابه بررسی کرد.

ب. رده‌ای از مدل‌های بهینه‌سازی با ابعاد $n + 1$ را با توجه به CVaR به دست می‌آوریم. به عبارتی فرمول‌های (۲۸.۴)، (۳۱.۴)، (۳۲.۴)، (۳۳.۴)، همچنین با توجه به لم (۱.۵.۴) این مدل‌ها به برنامه‌ریزی غیرخطی محدب با تابع زیان محدب و تابع بازده مقعر منجر شوند.

۷.۴ الگوریتم SQP هموارسازی و همگرایی آن

مساله (۳۳.۴) را به عنوان یک مثال انتخاب می‌کنیم. مسائل دیگر را می‌توان به همین روش حل کرد. برای پارامتر هموارسازی $t > 0$ مساله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \min_{(x, \alpha)} -\mathbb{R}_p(x) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \\ & \Phi(t, x, \alpha) \equiv \tilde{F}_\beta^s(t, x, \alpha) - V_1 \leq 0. \end{aligned} \quad (34.4)$$

مساله (۳۴.۴) هموارسازی شده از مساله زیر است:

$$\begin{aligned} & \min_{(x, \alpha)} -\mathbb{R}_p(x) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \\ & \varphi(x, \alpha) \equiv \tilde{F}_\beta(x, \alpha) - V_1 \leq 0. \end{aligned} \quad (35.4)$$

که در آن

$$\tilde{F}_\beta(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^s \max\{f(x, y_k) - \alpha, 0\}.$$

۸.۴ الگوریتم SQP هموارسازی

به ازای $t > 0$, $r > 0$, فرض کنید $(x, \alpha) \in \vartheta \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ یک جهت جستجوی از x و α باشد. یک برنامه ریزی درجه دوم $QP(x, \alpha, t, r)$ به عنوان زیرمساله‌ای (۳۴.۴) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} & \min_{(dx, d\alpha, \xi) \in \mathbb{R}^{n+2}} -\nabla \mathbb{R}_p(x)^T dx + \frac{1}{2} d^T W d + r\xi \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n (x_i + (dx)_i) = 1, \quad x_i + (dx)_i \geq 0, \quad (i = 1, \dots, n) \\ & \Phi(t, x, \alpha) + \Phi'(t, x, \alpha) \leq \xi \\ & \xi \geq 0, \end{aligned} \quad (36.4)$$

که در آن، $(dx)_i$ مولفه i ام dx و $W \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ یک ماتریس معین مثبت متقارن و $r > 0$ یک پارامتر جریمه است. در اینجا یک متغیر ξ را اضافه می‌کنیم تا شدنی بودن تضمین شود.

به دست آوردن سیستم KKT (۳۶.۴) به صورت زیر دشوار نیست.

$$\begin{pmatrix} -\nabla \mathbb{R}_p(x) \\ \circ \end{pmatrix} + Wd + \begin{pmatrix} \lambda_{1x} e \\ \circ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_{2x} \\ \circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla_x \Phi(t, x, \alpha) \\ \nabla_\alpha \Phi(t, x, \alpha) \end{pmatrix} \lambda_\Phi = \circ$$

$$r = \lambda_\Phi + \lambda_\xi$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i + (dx)_i) = 1 \quad (37.4)$$

$$\circ \leq (x + dx) \perp \lambda_{2x} \geq \circ$$

$$\circ \leq \xi - (\Phi(t, x, \alpha) + \Phi'(t, x, \alpha)d) \perp \lambda_\Phi \geq \circ$$

$$\circ \leq \xi \perp \lambda_\xi \geq \circ$$

که در آن، $e \in \mathbb{R}^n$ یک بردار است که همه‌ی مولفه‌های آن برابر ۱ است، و $(\lambda_{1x}, \lambda_{2x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ و $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$ ضرایب لاگرانژ متناظر با قید X هستند و $\xi \geq \circ$.

جواب زیرمساله QP ، $x + y(dx) \in X$ را برای هر طول گام $\gamma \in [0, 1]$ برآورده می‌کند. یک تابع جریمه $\Theta_{(r^\circ, t)}(x, \alpha)$ را به عنوان یک تابع شایسته معرفی می‌کنیم که در آن جمله جریمه برحسب قید CVaR است.

$$\Theta_{(r^\circ, t)}(x, \alpha) = -R_p(x) + r^\theta \max\{\Phi(t, x, \alpha), \circ\}. \quad (38.4)$$

حال روش SQP هموارسازی را برای حل مساله (۳۴.۴) بیان می‌کنیم. t را به عنوان یک پارامتر هموارسازی در نظر می‌گیریم و آن را در هر تکرار تنظیم می‌کنیم.

۹.۴ مراحل الگوریتم SQP هموارسازی

مرحله ۰ (خطی‌سازی): فرض $\delta_1 > \circ, \delta_2 > \circ, \beta \in (\circ, 1), \sigma \in (\circ, 1), \tau \in (\circ, 1)$ و $r_{-1} > \circ$ بگیرید. $z^\circ = (x^\circ, \alpha^\circ) \in \mathbb{R}^{n+1}$ و $t_\circ > \circ$ را انتخاب کنید. یک ماتریس معین مثبت متقارن $W_\circ \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ را در نظر بگیرید.

مرحله ۱ (جهت جستجو): زیرمساله (۳۶.۴) را با $r = r_{k-1}, W = W_k, t = t_k, z^k = (x^k, \alpha^k)$ حل کنید. فرض کنید $(dx^k, d\alpha^k, \xi^k)$ را یک جواب مساله (۳۶.۴) است. $\lambda^K = (\lambda_{1x}, \lambda_{2x}, \lambda_\Phi, \lambda_\xi) \in \mathbb{R}^{n+2}$ را ضریب KKT متناظر آن بگیرید.

مرحله ۲ (بررسی خاتمه): اگر شرط توقف برقرار بود، الگوریتم را خاتمه دهید. در غیر این صورت به مرحله (۹.۴) بروید.

مرحله ۳ (به‌روزرسانی جریمه) فرض کنید:

$$\begin{cases} \tilde{r}_k = r_{k-1} & r_{k-1} \geq \max_{1 \leq i \leq n+3} \{|\lambda_i^k|\} \\ \delta_1 + \max_{1 \leq i \leq n+3} \{|\lambda_i^k|\}, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۳۹.۴)$$

تعریف کنید $r_k^\theta = \tilde{r}_k$ و

$$r_k = \begin{cases} \tilde{r}_k, & \text{if } \xi^k = 0 \\ \tilde{r}_k + \delta_2, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۴۰.۴)$$

مرحله ۴ (جستجوی خطی)

فرض کنید $\eta_k = \tau^{i_k}$ ، که در آن i_k کوچکترین عدد صحیح نامنفی است، به گونه ای که رابطه زیر را برآورده کند:

$$\Theta_{(r_k^\theta, t_k)}(z^k + (\tau)^i d^k) - \Theta_{(r_k^\theta, t_k)}(z^k) \leq -\sigma \tau^i (d^k)^T W_k d^k \quad (۴۱.۴)$$

مرحله ۵ (به‌روزرسانی پارامتر هموارسازی) فرض کنید:

$$z^{k+1} = z^k + \eta_k d^k, \quad (۴۲.۴)$$

$$t_{k+1} = \begin{cases} \beta t_k, & \text{if } \|d^k\| \leq t_k \\ t_k, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۴۳.۴)$$

یک ماتریس معین مثبت متقارن $W_{k+1} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ را انتخاب کنید.

$k := k + 1$ را بگیرید و به مرحله (۹.۴) بروید.

۱۰.۴ کاربردها در تخصیص دارایی‌های تولیدی

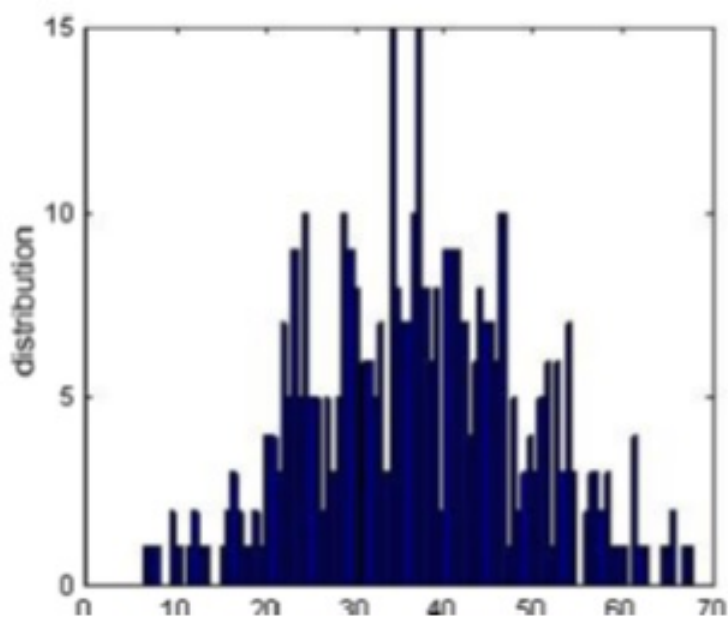
در کاربردهای عملی، توابع زیان و بازده از تخصیص پرتفوی معمولاً به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$f(x, y) = -x^T y, \quad R_p(x) = E_p[-f(x, y)] = E_p[x^T y] \quad (۴۴.۴)$$

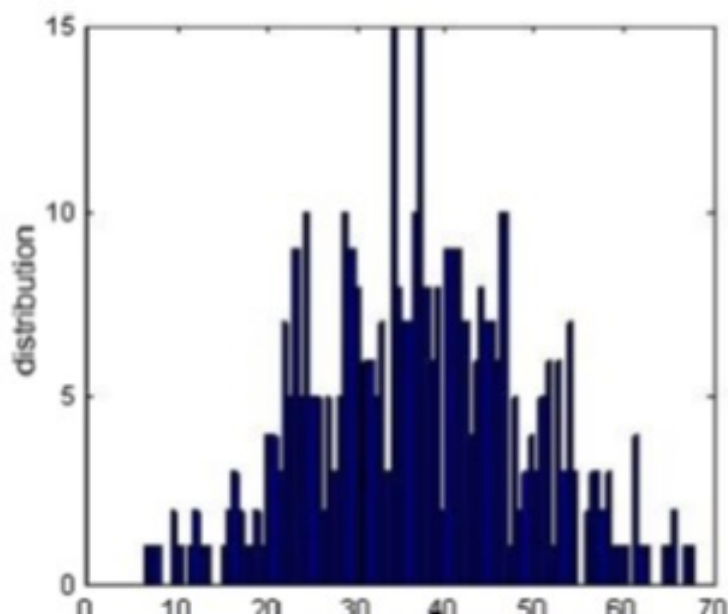
سپس مسائل بهینه‌سازی مرتبط با اندازه CVaR، از جمله مسائل (۱۰.۴)–(۱۴.۴) و همین‌طور مدل‌های هموارسازی متناظر یعنی (۲۹.۴)–(۳۲.۴)، مسائل بهینه‌سازی محدب هستند. به‌طور

مشخص مدل کمینه‌سازی CVaR در مساله (۲۸.۴)، با معرفی یک متغیر کمکی، به یک مساله برنامه ریزی خطی تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min_x \phi_\beta(x) &= \min_{(x,\alpha)} \tilde{F}_\beta(x, \alpha) = \min_{(x,\alpha)} \left[\alpha + \frac{1}{S(1-\beta)} \sum_{k=1}^S z_k \right] \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad (i = 1, \dots, n) \\ & z_k \geq -x^T y_k - \alpha, \quad z_k \geq 0, \quad (k = 1, \dots, S). \end{aligned} \tag{۴۵.۴}$$



شکل ۱.۴: پی دی اف قیمت‌های بازار نقدی



شکل ۲.۴: پی دی اف قیمت‌های قراردادهای آتی

جدول ۱.۴: نتایج محاسبات و مقایسه دو روش

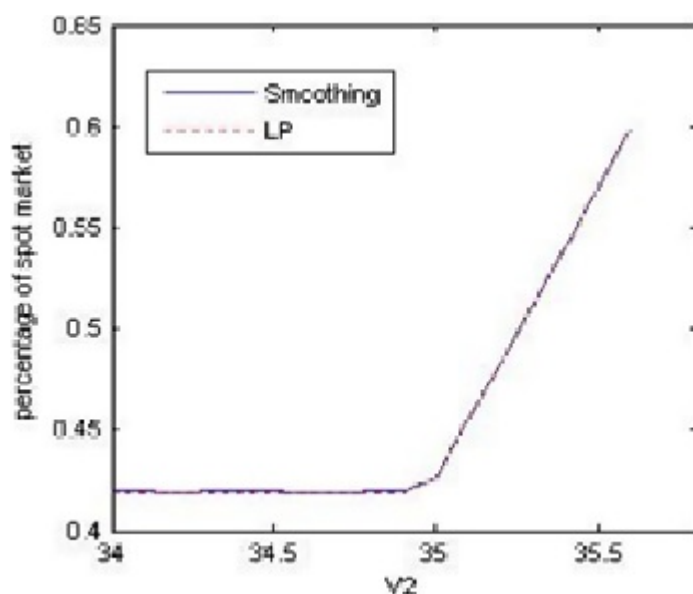
| مقادیر بهینه | روش هموارسازی | روش LP | خطا (%) |
|------------------------------|---------------|----------|---------|
| نقدی x^*1 | ۴۱۸۴.۰ | ۴۱۹۴.۰ | ۲۴.۰ |
| عدد آتی x^*2 | ۵۸۱۶.۰ | ۵۸۰۶.۰ | ۱۷.۰ |
| $CVaR_\beta(x^*)$ | ۱۵۹۵.۲۲- | ۱۵۹۸.۲۲- | ۰.۱۳.۰ |
| $Var = \alpha^*$ | ۹۸۷۷.۲۳- | ۹۹۰۸.۲۳- | ۰.۱۳.۰ |
| بازده مورد انتظار $R_p(x^*)$ | ۹۷۵۰.۳۴ | ۹۷۱۶.۳۴ | ۰.۱۰ |

در این بخش از روش هموارسازی برای حل مسائل (۲۹.۴) ، (۳۱.۴) و (۳۳.۴) استفاده خواهیم کرد. همچنین برای آزمایش عملکرد محاسباتی روش هموارسازی، چند مقایسه محاسباتی برای روش‌های هموارسازی و روش‌های برنامه‌ریزی خطی انجام می‌دهیم. این دو روش را به ترتیب با عنوان روش برنامه‌ریزی خطی و روش هموارسازی نامگذاری می‌کنیم. مساله کاربردی اینجا از تخصیص تولیدی بهینه دارایی‌های نسل^۱ نشأت می‌گیرد. فرض کنید دو نوع معاملات در بازار وجود داشته باشد، بازارهای نقدی^۲ و قراردادهای آتی^۳.

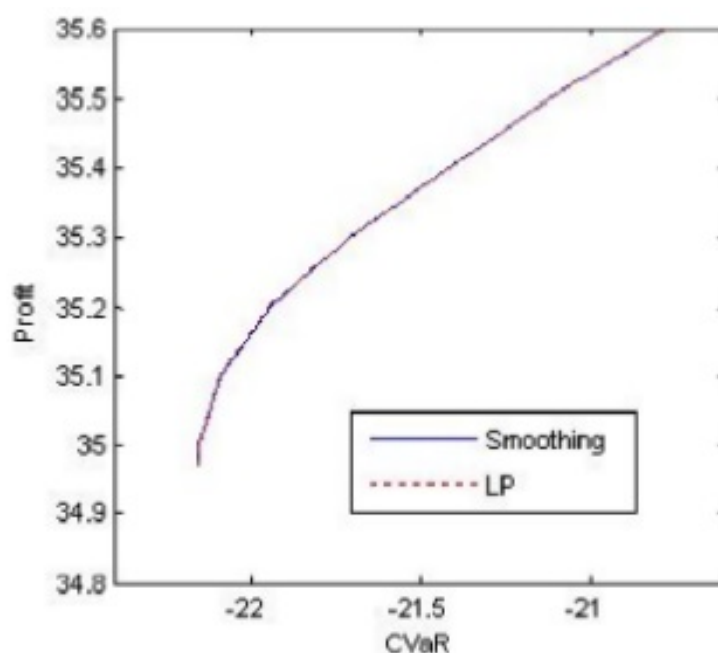
¹Optimal production allocation of generation assets

²Cash Markets

³Futures



شکل ۳.۴: نقاط درصد تخصیص بهینه از بازارهای آتی



شکل ۴.۴: مرز کارایی CVaR و بازده

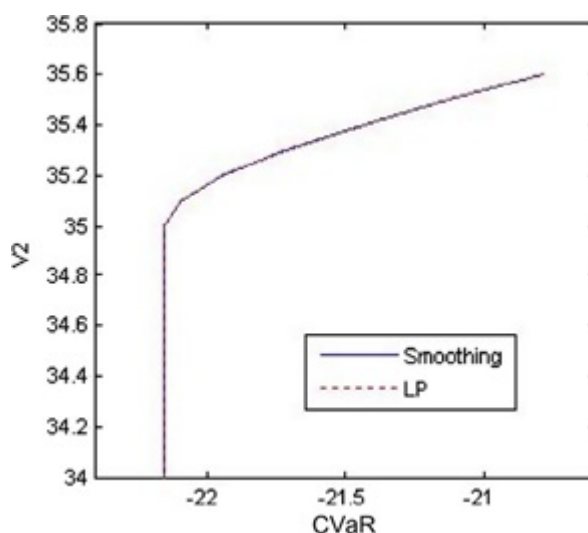
قیمت‌های برق در بازار نقدی با توزیع نرمال با میانگین $۳۷/۵۲$ و انحراف معیار $۱۲/۷۶۵$ تنظیم می‌شوند. قیمت‌های قراردادهای آتی با توزیع نرمال با میانگین $۳۳/۹۶$ و انحراف معیار $۸/۲۵$ تنظیم می‌شوند. شکل‌های ۱.۴ و ۲.۴ توزیع‌های قیمت‌های بازار نقدی و قیمت‌های قراردادهای آتی را نشان می‌دهند. نمونه‌هایی از قیمت‌ها به صورت تصادفی در نرم افزار متلب با تعداد مختلف نمونه‌ها تولید می‌شوند. سطح اطمینان در آزمایش‌ها در مقدار $\beta = ۰/۹۵$ تنظیم می‌شود.

۱.۱۰.۴ کمینه‌سازی CVaR

دو رویکرد در نظر گرفته می‌شود، روش برنامه‌ریزی خطی برای مسئله (۵.۴) و روش هموارسازی برای مسئله (۲۹.۴). در اینجا از یک پارامتر کوچک ثابت $t = 0.1$ برای تسهیل محاسبات استفاده می‌کنیم. خطای محاسباتی بین دو روش به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$error = \left| \frac{x_{si}^* - x_{LPi}^*}{x_{LPi}^*} \right| \times 100\%, \quad (i = 1, 2) \quad (46.4)$$

در معادله فوق، x_{LPi}^* و x_{si}^* به ترتیب جواب‌های بازارهای نقدی و آتی با استفاده از روش هموارسازی و روش برنامه‌ریزی خطی هستند. در (۴۶.۴) اندیس‌های $i = 1, 2$ شاخص‌های بازار نقدی و آتی را نمایش می‌دهند. نتایج محاسبه شده در جدول ۱.۴ گزارش شده است. در جدول ۱.۴ مشاهده می‌شود که جواب‌ها بین دو مدل بسیار به هم نزدیک بوده و خطاها زیر ۱٪ هستند. این امر همچنین بیانگر (اعتبار) روش هموارسازی است.

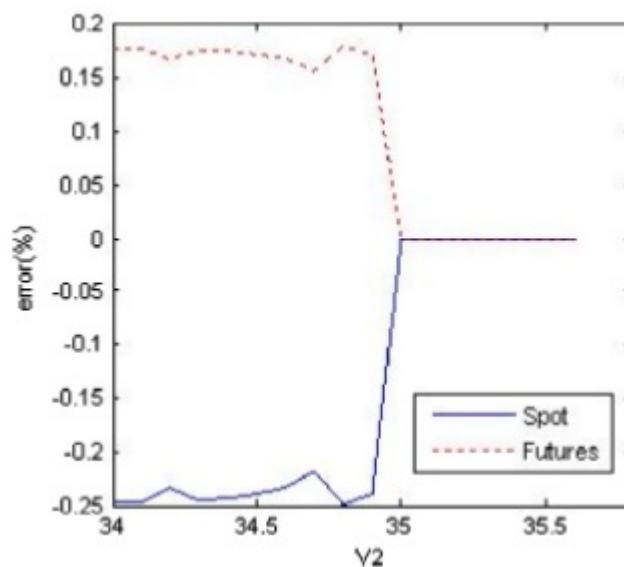


شکل ۵.۴: مرزهای کارایی CVaR و کران V_α

ما همچنین تاثیر پارامتر هموارسازی t بر مساله بهینه‌سازی به‌روز شده از $10^{-9} \times 1$ به 0.1 را در مدل (۲۹.۴) آزمایش می‌کنیم. می‌بینیم که تقریباً جواب‌های بهینه یکسان هستند. این بیانگر آن است که روش هموارسازی به پارامتر t حساسیت ندارد.

۱۱.۴ کمینه‌سازی CVaR با قید بازده

در این زیربخش به بررسی کمینه‌سازی CVaR با قید بازده تعریف شده در مساله (۳۱.۴) می‌پردازیم. کران بازده از $V_\alpha = 34$ به $V_\alpha = 36/9$ به وسیله طول گام 0.1 به‌روز می‌شود. برای مقادیر مختلف V_α ، مقادیر بهینه‌سازی متناظر را بدست می‌آوریم. نتایج محاسبات دو روش فوق در شکل‌های ۳.۴-۶.۴ ارائه شده است. شکل ۳.۴ جواب بهینه‌سازی پرتفوی بین بازارهای



شکل ۶.۴: خطای درصد تخصیص برای دو روش فوق با V_2 مختلف

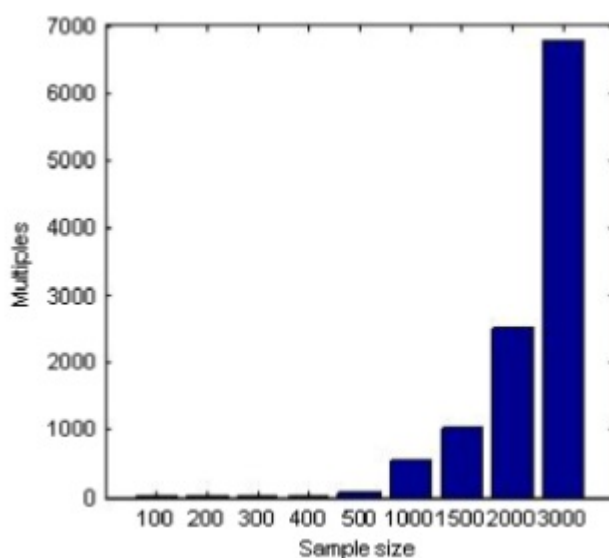
نقدی و قراردادهای آتی است. مرزهای کارایی در شکل‌های ۴.۴-۵.۴ نشان داده شده است. شکل ۶.۴ مربوط به خطای دو روش با کران مقید V_2 مختلف است.

مقایسه عملکرد محاسباتی برای دو روش مذکور از طریق مقایسه زمان‌های CPU (واحد پردازش مرکزی) صورت می‌گیرد که در جدول ۲.۴ گزارش شده و در شکل ۷.۴ رسم شده است. که در آن مضرب^۱ها نسبت دو روش با توجه به زمان CPU را نمایش می‌دهند. مضرب‌های مصرف CPU توسط دو روش مذکور با نقاط نمونه مختلف در شکل ۷.۴ نشان داده شده است. از جدول و شکل مذکور می‌توان ملاحظه کرد که زمان محاسبه روش هموارسازی تقریباً مستقل از تعداد نمونه‌ها است، در حالی که زمان CPU روش برنامه‌ریزی خطی با افزایش تعداد نمونه‌ها به شدت افزایش می‌یابد.

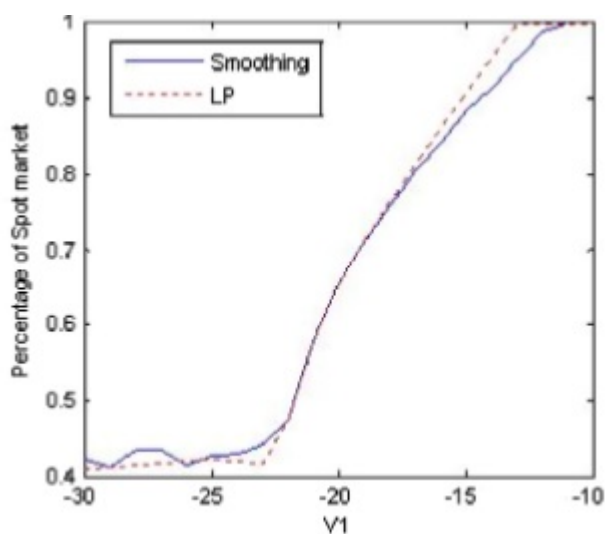
¹Multiples

جدول ۲.۴: کارایی محاسباتی در CVaR کمیته سازی با قید بازده

| حجم نمونه ها | روش هموارسازی (CPU/s) | روش LP (CPU/s) | مضرب ها |
|--------------|-----------------------|----------------|---------|
| ۱۰۰ | ۰۹۳۸۴.۰ | ۰۳۱۳.۰ | ۳۳.۰ |
| ۲۰۰ | ۱۲۵۰.۰ | ۲۳۴۴.۰ | ۹.۱ |
| ۳۰۰ | ۱۷۱۹.۰ | ۰۴۶۹.۱ | ۰.۶ |
| ۴۰۰ | ۱۴۰۶.۰ | ۰۳۱۳.۲ | ۴.۱۴ |
| ۵۰۰ | ۰۷۸۱.۰ | ۸۱۲۵.۵ | ۴.۷۴ |
| ۱۰۰۰ | ۱۵۶۳.۰ | ۵۱۵۶.۸۵ | ۳.۵۴۷ |
| ۱۵۰۰ | ۲۵۰۰.۰ | ۵۴۶۹.۲۵۹ | ۲.۱۰۳۸ |
| ۲۰۰۰ | ۲۶۵۶.۰ | ۸۲۸۱.۶۶۷ | ۴.۲۵۱۴ |
| ۳۰۰۰ | ۳۱۲۵.۰ | ۸.۲۱۱۴ | ۵.۶۷۶۷ |

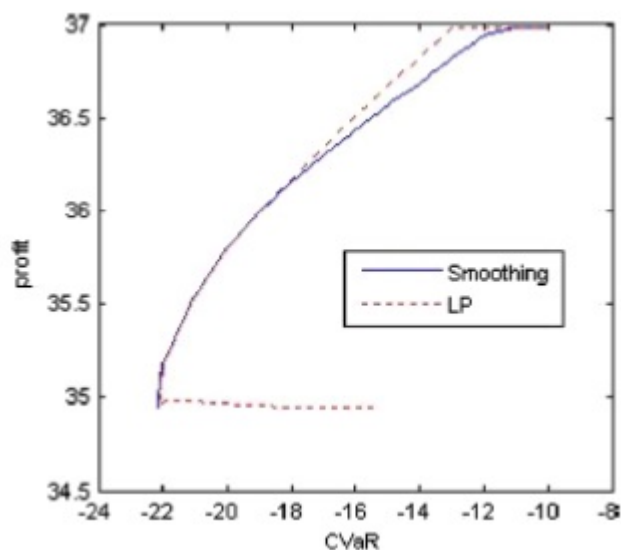


شکل ۷.۴: مضرب‌های مصرف‌شده برای دو روش

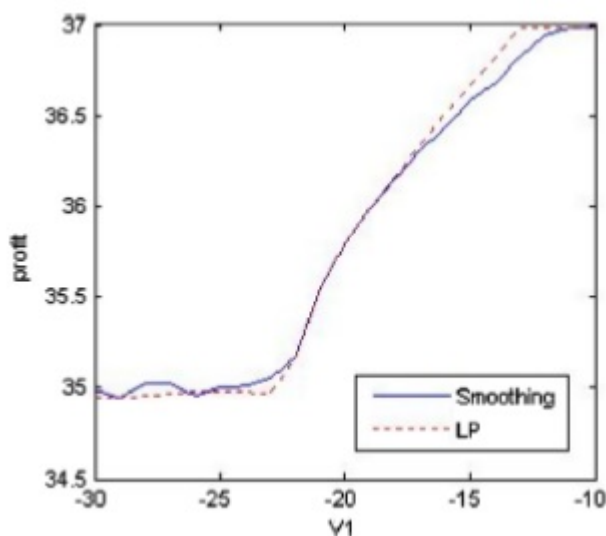


شکل ۸.۴: تخصیص بهینه بازار نقدی با V_1 مختلف

به عبارت دیگر، هزینه محاسبات در روش برنامه‌ریزی خطی به تعداد نمونه‌ها وابستگی شدیدی دارد. در واقع بعد روش هموارسازی ۳ است و بعد روش برنامه‌ریزی خطی $3+S$ است. که در آن S تعداد نقاط نمونه است. جدول ۲.۴ و شکل ۷.۴ عملکرد خوب روش هموارسازی را نشان می‌دهند.



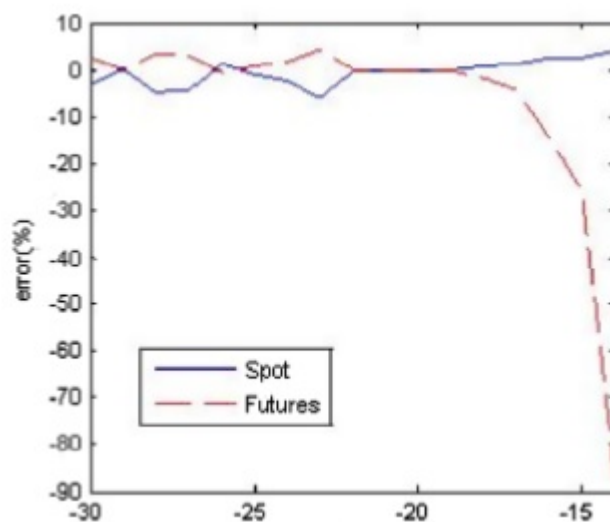
شکل ۹.۴: مرز کارایی CVaR- سود


 شکل ۱۰.۴: مرز کارایی V_1 - سود

۱.۱۱.۴ بیشینه‌سازی بازده با قید CVaR

در این زیربخش، بیشینه‌سازی بازده با قید CVaR در (۳۰.۴) را آزمایش می‌کنیم. به دلیل نتیجه‌گیری از گزاره ۱.۴.۴، از مدل کاهش یافته ۳۳.۴ در آزمایش استفاده می‌کنیم. پارامتر V_1 مربوط به CVaR از -30 تا -10 تغییر می‌کند. سپس جواب‌های بهینه مختلف را بدست می‌آوریم. نتایج محاسبه شده و مقایسه دو روش مذکور در شکل‌های ۸.۴-۱۱.۴ ارائه شده است، شکل ۸.۴ درصد‌های تخصیص بهینه بازار نقدی با V_1 مختلف را نشان می‌دهد. شکل‌های ۹.۴ و ۱۰.۴ به ترتیب مرزهای کارایی با رابطه CVaR - سود و V_1 - سود می‌باشند. شکل ۱۱.۴ خطای جواب درصد تخصیص در بازارهای نقدی و قراردادهای آتی توسط دو روش مذکور را نشان می‌دهد. می‌توان دید که وقتی $V_1 \leq -15$ باشد، جواب‌های دو روش فوق به هم نزدیک هستند. این حاکی از (اعتبار) روش هموارسازی است. ما متوجه شده‌ایم که خطای بزرگی برای مورد $V_1 > -15$ وجود دارد. دلیل این مورد این است که وقتی V_1 افزایش پیدا می‌کند، بازار آتی صاحب بهره کوچکتری است، به عبارتی مولفه x_2 به صفر میل می‌کند. پس محاسبات از مساله (۴۶.۴) ممکن است مقدار بزرگی را نتیجه دهد.

ما همچنین مقایساتی درباره عملکرد محاسباتی دو روش مذکور انجام می‌دهیم. مقایسه نتایج در جدول ۳.۴ گزارش شده است. نتایج فوق همچنین بیانگر عملکرد محاسباتی خوب روش هموارسازی پیشنهادی در این مقاله است. نتیجه‌گیری‌هایی نیز به دست می‌آید، مثلاً این که روش هموارسازی مستقل از حجم (اندازه) نمونه هاست، درحالی‌که روش برنامه‌ریزی خطی وابستگی شدیدی به تعداد نمونه‌ها دارد.



شکل ۱۱.۴: خطای تخصیص بین دو روش مزبور در بازارهای نقدی و آتی

جدول ۳.۴: کارایی محاسباتی در بیشینه‌سازی بازده با قید CVaR

| حجم نمونه ها | روش هموارسازی (CPU/s) | روش LP (CPU/s) | مضرب ها |
|--------------|-----------------------|----------------|---------|
| ۱۰۰ | ۰.۴۶۹.۰ | ۳۱۲۵.۰ | ۶۶۳.۶ |
| ۲۰۰ | ۰.۴۶۹.۰ | ۴۸۴۴.۱ | ۶۵.۳۱ |
| ۳۰۰ | ۰.۶۲۵ | ۷۵۰۰.۴ | ۷۶ |
| ۴۰۰ | ۰.۷۸۱.۰ | ۵۶۲۵.۱۰ | ۲.۱۳۵ |
| ۵۰۰ | ۱.۲۵۰ | ۹۲۱۹.۱۸ | ۳.۱۵۱ |
| ۱۰۰۰ | ۰.۹۳۸.۰ | ۶۷۱۹.۱۳۴ | ۷.۱۴۳۵ |
| ۱۵۰۰ | ۱.۲۵۰.۰ | ۲۳۴۴.۴۲۸ | ۹.۳۴۲۵ |
| ۲۰۰۰ | ۱.۲۵۰.۰ | ۶.۱۰۱۵ | ۸۱۲۴ |
| ۳۰۰۰ | ۱.۵۶۳.۰ | ۰.۲۱۱۵ | ۱۳۵۳۲ |

۱۲.۴ نتیجه‌گیری

در این فصل یک روش هموارسازی برای حل مساله بهینه‌سازی پرتفوی با اندازه CVaR ارائه شده است. بر پایه روش هموارسازی، مدل‌های پرتفوی با بازده CVaR مورد بررسی قرار گرفتند. مسائل تقریبی داری چند ویژگی مطلوب هستند، از جمله بعد پایین، تقریب خوب و محدب بودن. یک الگوریتم SQP هموارسازی شناخته می‌شود که همگرایی آن تحت شرایطی تضمین می‌شود. مثال‌های عددی حاکی از عملکرد محاسباتی روش هموارسازی پیشنهادی در مقایسه با روش مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی است. روش هموارسازی پیشنهادی در این فصل را می‌توان برای هر گونه مساله بهینه‌سازی پرتفوی با نیمه‌هموار به کار برد.

مراجع

- [1] Alexander G. J. and Baptista. M. A. (2002), "Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis", **Journal of Economic Dynamics & Control**, 26, pp. 1159-1193.
- [2] Agnew D. (1981), "Improved minimax optimization for circuit design", **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, 28, pp. 791-803.
- [3] Andersson F. Mausser H. Rosen D. Uryasev S. (2001), "Credit risk optimization with conditional value-at-risk criterion", **Mathematical Programming**, 89, pp. 273-291.
- [4] Bazaraa MS, Jarvis JJ, Sherali HD. (1990), "**Linear Programming and Network Flows. Wiley**", New York.
- [5] Bazaraa MS, Sherali HD, Shetty CM. (1993), " Non-linear programming, theory and algorithms" **2nd edn. Wiley**, New York.
- [6] Beliakov C. Bagirov A. (2006), "Non-smooth optimization methods for computation of the conditional value-at-risk and portfolio optimization"**Optimization**, 55, 5-6, pp. 459-479.
- [7] Black F, and Litterman R. (1990), " Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium ", **Goldman Sachs Fixed Income Research**.
- [8] Cai XQ, Teo KL, Yang XQ, Zhou XY, (2000), "Portfolio optimization under a minimax rule" **Management Science**, 46, pp. 957-972.
- [9] Chang T, and Meade T, and Beasley JE, and Sharaihan YM. (2000), "Heuristics for cardinaly constrained portfolio optimization" **Computers and Operations Research**, 27, pp. 1271-1302.

-
- [10] Chao M, Wang Z, Liang Y, Hu Q. (2008), "Quadratically constraint quadratical algorithm model for nonlinear minimax problems" **Applied mathematics and computation**, 205:247–262.
- [11] Charalambous C, Conn AR. (1978), "An efficient method to solve the minimax problem directly" **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 15,162–187.
- [12] Chen JS, Ko CH, Pan S. (2010), "A neural network based on the generalized Fischer–Burmeister function for nonlinear complementarity problems" **Information Sciences**, 180, pp. 697–711.
- [13] Chen JS, Pan SH. (2008), "A family of NCP functions and a descent method for the nonlinear complementarity problem", **Computational Optimization and Applications**, 40:389–404.
- [14] Cherkaev E, Cherkaev A. (2008), "Minimax optimization problem of structural design" **Computers & Structures**, 86, 1426–1435.
- [15] Clarke FH. (1983), "Optimization and Nonsmooth Analysis", **John Wiley**, New York.
- [16] Cornuejol G, Tutuncu R. (2006), "Optimization methods in finance" **Cambridge University Press**, Cambridge.
- [17] Di Pillo G, Grippo L, Lucidi S, (1997), "Smooth transformation of the generalized minimax problem" **Journal of optimization theory and applications**, 95,1–24.
- [18] Dahlgren R, Liu CC, Lawarrée J. (2003), "Risk assessment in energy trading" **IEEE Transactions on Power Systems**, 28, 2, pp. 503–511.
- [19] Delage E, Ye Y. "Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems", <<http://www.stanford.edu/yyye/>>.
- [20] Dentcheva D, Ruszczyński A. (2006), "Portfolio optimization with stochastic dominance constraints" **Journal of Banking & Finance**, 30, pp. 433–451.
- [21] Deb K, Padhye N. (2014), "Enhancing performance of particle swarm optimization through an algorithmic link with genetic algorithms" **Computational Optimization and Applications**, 57,761–794.

- [22] Effati S, Ghomashi A, Nazemi AR. (2007), "Application of projection neural network in solving convex programming problems " **Applied Mathematics and Computation**, 188, 1103–1114.
- [23] Fábíán CI. (2008), "Handling CVaR objectives and constraints in two-stage stochastic models" **European Journal of Operational Research**, 191, pp. 888–911.
- [24] Facchinei F, Pang J. (2003), "Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems" **Springer Science & Business Media**, New York.
- [25] Facchinei F, Pang J. (2003), " Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems " **Springer Science & Business Media**, New York.
- [26] Fishburn P,C. (1977), "Mean-risk analysis with risk associated with belowtarget returns" **American Economics Review**, 67, pp. 116-126.
- [27] Goldfarb D, Iyengar G. (2003), "Robust portfolio selection problems" **Mathematics of operations research** , 28, 1, pp. 1–38.
- [28] Gigola C,Gomez S. (1990), "A regularization method for solving the finite convex min-max problem" **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 27,1621– 1634.
- [29] Gao X. (2004), " A novel neural network for nonlinear convex programming" **IEEE Trans Neural Netw**, 15, 613–621.
- [30] Gao X, Liao L. (2009), " A new projection-based neural network for constrained variational inequalities " **IEEE Trans Neural Netw**, 20, 373–388.
- [31] Hosseini A. Wang J. & Mohamma S. (2013), "A recurrent neural network for solving a class of generalized convex optimization problems" **Neural Networks**, 44, pp. 78-86.
- [32] Huang D, Fabozzi F.J, and Fukushima M. (2007), "Robust portfolio selection with uncertain exit time using worst-case VaR strategy" **Operations Research Letters**, 35, 5, pp. 627-635.
- [33] Hull JC, (2006), " Options Futures and Other Derivatives" **6th Edition, Perntice Hall, New Jersey**.
- [34] Huang YC. (2002), "A novel method to handle inequality constraints for convex programming neural network " **Neural Process Lett**, 16, 17–27.

-
- [35] Jabr RA. (2005), "Robust self-scheduling under price uncertainty using conditional value-at-risk" **IEEE Transactions on Power Systems**, 20, 4, pp. 1852–1858.
- [36] Jones C.P. (2001), "Investments: Analysis and Management" **John Wiley and Sons, New York**.
- [37] Jorion P. (2000), "Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk" **New York: McGraw-Hill**.
- [38] Jian J, Tang C. (2005), "An SQP feasible descent algorithm for nonlinear inequality constrained optimization without strict complementarity" **Comput Math Appl** 49,223–238.
- [39] Jian J, Quan R, Zhang X. (2007), "Feasible generalized monotone line search SQP algorithm for nonlinear minimax problems with inequality constraints" **Comput Appl Math** 205,406–429.
- [40] Krokhmal P. Zabaranin M. and Uryasev. S. (2011), "Modeling and optimization of risk" **Surveys in Operations Research and Management Science**, 16, pp. 4966.
- [41] Krokhmal P. Palmquist J. Uryasev S. (2002), "Portfolio of optimization with conditional value-at-risk objective and constraints" **Journal of risk**, 4, 2, pp. 11–27.
- [42] Künzi-Bay A. Mayer J. (2006), "Computational aspects of minimizing conditional value-at-risk" **Computational Management Science**, 3, pp. 3–27.
- [43] Lee S. M. and Chesser D. L. (1980), "Goal Programming for Portfolio" **The Journal of Portfolio Management**, pp. 22-26.
- [44] Lee S. M. and Lerro A. J. (1973), "Optimization the Portfolio Selection for Mutual Funds" **The Journal of finance**, 28, pp. 1087-1099.
- [45] Liang J. J. Suganthan PN. Deb K. (2005), "Novel composition test functions for numerical global optimization" **In: Proceedings 2005 IEEE on swarm intelligence symposium**, 2005. SIS 2005. IEEE.
- [46] Lim C. Sherali H.D. Uryasev S. (2008), "Portfolio optimization by minimizing conditional value-at-risk via nondifferentiable optimization" **Computational Optimization and Applications**, doi: 10.1007/s10589-008-9196-3.

- [47] Li X. (1994), "An efficient approach to a class of non-smooth optimization problems" **Science in China (Series A)**, 37, pp. 323–330.
- [48] Li X, Fang S. (1997), " On the entropy regularization method for solving min-max problems with applications" **Math Methods Oper Res** 46, 119–130.
- [49] Lintner J. (1965), "The Valuation of Risk Asset and the Selection of Risky Investments in Stock: Portfolio and Capital Budgets" **Review of Economics and Statistics**, 47, pp. 22-26.
- [50] Lobo S. M. and Fazel M. and Boyd S. (2002), "**Portfolio Optimization with Linear and Fixed Transaction Costs**", California Institute of Technology.
- [51] Luenberger D.G. (1998), "Investment Science" **Oxford Univ Press**.
- [52] Malek A, Hosseinipour-Mahani N, Ezazipour S. (2009), "Efficient recurrent neural network model for the solution of general nonlinear optimization problems" **Optim Methods Softw** 25, 1–18.
- [53] Markowitz H. (1959), "Portfolio selection: Efficient Diversification of investment" **John Wiley and Sons**, New York.
- [54] Merton R. C. (1972), "An analytical derivation of the efficient frontier" **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 7, pp. 1851-1872.
- [55] Madsen K. Jacobsen HS. (1978), "Linear constrained minimax optimization" **Math Program** 14, 208–223.
- [56] Miller N. Ruszczyński A. (2008), "Risk-adjusted probability measures in portfolio optimization with coherent measures of risk" **European Journal of Operational Research**, 191, pp. 193–206.
- [57] Mansini R. and Oryczak W. and Speranza M. G. (2003), "LP Solvable Models for Portfolio Optimization: A Classification and Computational Comparison" **IMA Journal of Management Mathematics**, 14, pp. 187-220.
- [58] Mansini R. and Speranza M. G. (1997), "Heuristic Algorithms for the Portfolio Selection Problem with Minimum Transaction lots" **European Journal of Operational Research**, 114, pp. 219-233.
- [59] Markowitz H. (1952), "Portfolio Selection" **Journal of Finance**, 7, pp. 77-91.

- [60] Markovitz H. (1959), "**Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment**", John Wiley and Sons, New York.
- [61] Miller R. K. and Michel A. N. (1981), "**Ordinary Differential Equations**", Academic Press, New York.
- [62] Mossin J. (1966), "Equilibrium in a Capital Asset Market" **Econometrica**, 34, pp. 14-16.
- [63] Nazemi AR. (2012), "A dynamic system model for solving convex nonlinear optimization problems" **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 17, pp. 1696–1705.
- [64] Nazemi AR. (2011), "A dynamic system model for solving convex nonlinear optimization problems" **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 17,4, pp. 1696–1705.
- [65] Nazemi AR. (2011), " A dynamical model for solving degenerate quadratic minimax problems with constraints" **J Comput Appl Math**, 236, 1282–1295.
- [66] Nazemi AR. (2012), " A dynamic system model for solving convex nonlinear optimization problems " **Commun Nonlinear Sci Numer Simul**, 17, 1696–1705.
- [67] Nazemi AR, Effati S. (2013), " An application of a merit function for solving convex programming problems " **Comput Ind Eng**, 66, 212–221.
- [68] Nazemi AR. (2014), " A neural network model for solving convex quadratic programming problems with some applications " **Eng Appl Artif Intell**, 32, 54–62.
- [69] Nazemi AR. (2013), "Solving general convex nonlinear optimization problems by an efficient neurodynamic model" **Eng Appl Artif Intell**, 26, 685–696.
- [70] Nazemi AR, Omidi F. (2012), " A capable neural network model for solving the maximum flow problem " **J Comput Appl Math**, 236, 3498–3513 40.
- [71] Nazemi AR, Omidi F. (2013), "An efficient dynamic model for solving the shortest path problem" **Transp Res C**, 26, 1–19 41.
- [72] Nazemi AR, Sharifi E. (2013), " Solving a class of geometric programming problems by an efficient dynamic model " **Commun Nonlinear Sci Numer Simul**, 18, 692–709 42.

- [73] Nazemi AR, Effati S. (2013), "An application of a merit function for solving convex programming problems" **Comput Ind Eng**, 66, 212–221 43.
- [74] Nazemi AR, Tahmasbi N. (2013), " A high performance neural network model for solving chance constrained optimization problems" **Neurocomputing**, 121, 540–550.
- [75] Nazemi A.R. (2013), "Solving general convex nonlinear optimization problems by an efficient neurodynamic model" **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, 26, pp. 685–696.
- [76] Nazemi A.R. and Effati S. (2013), "An application of a merit function for solving convex programming problems" **Computers & Industrial Engineering**, 66, pp. 212–221.
- [77] Nazemi A. R. (2011), "A dynamical model for solving degenerate quadratic minimax problems with constraints" **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 236, pp. 1282–1295.
- [78] Nazemi, A., Mortezaee, M., (2019), "A new gradient-based neural dynamic framework for solving constrained min-max optimization problems with an application in portfolio selection models", **Applied Intelligence**, 49(2), 396-419.
- [79] Nazemi, A., Mortezaee, M. (2019)," A Novel Collaborate Neural Dynamic System Model for Solving a Class of Min–Max Optimization Problems with an Application in Portfolio Management", **The Computer Journal**, 62(7), 1061-1085.
- [80] Nazemi A. R. (2014), "A neural network model for solving convex quadratic programming problems with some applications" **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, 32, pp. 54–62.
- [81] Ogryczak O. Ruszczyński A. (1999), "From stochastic dominance mean-risk model: semideviation as risk measure" **European Journal of Operational Research**, 116, pp. 33-50.
- [82] Padhye N. Bhardawaj P. Deb K. (2013), "Improving differential evolution through a unified approach" **Journal of Global Optimization**, 55, pp. 771–799.
- [83] Palmquist J. and Uryaser S. and Krokhmal P. (1999), "Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints", **Journal of Risk**.

-
- [84] Papahristodoulou C. and Dotzauer E. (2004), "Optimal portfolios using linear programming models" **Journal of Operations Research Society**, 55, pp. 1169-1177.
- [85] Peel D. Mclachlan G.J. (2000), "Robust mixture modelling using the t distribution" **Statistics and computing**, 10, pp. 339-348.
- [86] Peng J.M. Lin Z. (1999), "A non-interior continuation method for generalized linear complementarity problems" **Mathematical Programming**, 86, pp. 533-563.
- [87] Polak GG, Rogers DF, Sweeney DJ. (2010), "Risk management strategies via minimax portfolio optimization" **Eur J Oper Res** 207,409-419.
- [88] Qi L. (1993), "Convergence analysis of some algorithms for solving nonsmooth equations" **Mathematics of operations research**, 18, pp. 227-244.
- [89] Quarteroni A, Sacco R, Saleri F. (2007), "Numerical mathematics" **In: Texts in applied mathematics, 2nd edn., vol 37. Springer, Berlin**
- [90] Rustem B, Nguyen Q. (1998), "An algorithm for the inequalityconstrained discrete minimax problem" **SIAM J Optim** 8, 265-283.
- [91] Renault E. and Tsafack G. (2007), "Proper conditioning for coherent VaR in portfolio management" **Management Science**, 53, 3, pp. 483-494.
- [92] Rockafellar R.T. Uryasev S. (2000), "Optimization of conditional value-at-risk" **Journal of risk**, 2, 3, pp. 21-41.
- [93] Rockafellar R.T. Uryasev S. (2002), "Conditional value-at-risk for general loss distributions" **Journal of banking & finance**, 26, pp. 1443-1471.
- [94] Rockafellar R.T. Uryasev S. Zabrankin M. (2006), "Master funds in portfolio analysis with general deviation measure" **Journal of Banking & Finance**, 30, 2, pp. 743-778.
- [95] Ross S. A. (1976), "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing" **Journal of Economic Theory**, 13, PP. 341-360.
- [96] Rustem B. Nguyen Q. (1998), "An algorithm for the inequalityconstrained discrete min-max proble" **SIAM J Optim**, 8, pp. 265-283.
- [97] Sastry S. (1999), "Nonlinear systems analysis" **Stability and Control, Springer**

- [98] Sharpe W. F. (1964), "Capital Asset Price: A theory of market equilibrium under conditions of Risk" **Journal of Finance**, 19, 3, pp. 16-18.
- [99] Srinivas N, Deb K. (1994), " Muultiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms" **Evol Comput** 2.3,221–248.
- [100] Shen Z, Huang Z, Wolfe M. (1997), " An interval maximum entropy method for a discrete minimax problem " **Appl Math Comput** 87, 49–68.
- [101] Tank DW, Hopfield JJ. (1986), " Simple neural optimization networks: an A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit " **IEEE Trans Circuits Syst**, 33, 533–541.
- [102] Teo KL, Yang XQ. (2001), " Portfolio selection problem with minimax type risk function " **Ann Oper Res**, 101, 333–349.
- [103] Tong X.J. Wu F. F. Qi L. (2008), "Available transfer capability using a smoothing pointwise maximum function" **IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers**, 55, 1, pp. 462–474.
- [104] Tong X.J. Wu F. F. Qi L. (2009), "Worst-case CVaR based portfolio optimization models with application to scenario planning" **Optimization Methods & Software**, 24, 6, pp. 933–958.
- [105] Tong, X., Zhou, S. (2005), "A smoothing projected Newton-type method for semismooth equations with bound constraints". **Journal of Industrial Management Optimization**, 1(2), 235.
- [106] Teo K. L. Yang X. Q. (2001), "Portfolio selection problem with minimax type risk function" **Annals of Operations Research**, 101, pp. 333-349.
- [107] Vardi A. (1992), " New minimax algorithm" **J Optim Theory Appl** 75, 613–634.
- [108] Xingsia L. (1992), " An entropy-based aggregate method for minimax optimization" **Eng Optim** 18, 277–285.
- [109] Xue W, Shen C, Pu D. (2009), "Anewnon-monotoneSQPalgorithm for the minimax problem " **Int J Comput Math** 86, 1149–1159.
- [110] Xia Y. and Liu B. and Shoayang W. and Lai K. (1999), "A model for portfoilo selection with order of expected returns" **Computers and Opeartionals Resarch**, 27, pp. 409-424.

-
- [111] Xia Y, Wang J. (2004), " A recurrent neural network for nonlinear convex optimization subject to nonlinear inequality constraints " **IEEE Trans Circuits Syst**, 51, 447–458 45.
- [112] Xue X, Bian W. (2007), " A project neural network for solving degenerate convex quadratic program" **Neural Netw**, 70, 2449– 2459.
- [113] Xingsia L. (1992), "An entropy-based aggregate method for minimax optimization" **Engineering Optimization**, 18, pp. 277–285.
- [114] Ye F, Liu H, Zhou S, Liu S. (2008), " A smoothing trust-region newton-CG method for minimax problem " **Appl Math Comput** 199, 581–589.
- [115] Yu YH, Gao L. (2002), " Nonmonotone linear search algorithm for constrained minimax problem " **J Optim Theory Appl** 115,419– 446.
- [116] Yang Y. and Cao J. (2010), "The optimization technique for solving a class of non-differentiable programming based on neural network method" **Nonlinear Anal.**, 11, pp. 1108–1114.
- [117] Yang Y. Cao J. Xu X. Liu J. (2012), "A generalized neural network for solving a class of minimax optimization problems with linear constraints" **Appl Math Comput**, 218, pp. 7528–7537.
- [118] Yang Y, Cao J. (2010), " The optimization technique for solving a class of non-differentiable programming based on neural network method " **Nonlinear Anal**, 11, 1108–1114.
- [119] Yang Y, Cao J, Xu X, Liu J (2012)," A generalized neural network for solving a class of minimax optimization problems with linear constraints" **Appl Math Comput**, 218, 7528–7537.
- [120] Young M.R. (1998), "A minimax portfolio selection rule with linear programming solution" **Management Science**, 44, pp. 673-683.
- [121] Yu M. Inouez H. Shi J. (2006), "Portfolio optimization problems with linear programming models" **In: Proceedings of the 2006 China international conference in finance**, pp. 14-16.
- [122] Zhu S.S. Fukushima M. (2009), "Worst-case conditional value-at-risk with application to robust portfolio management" **Operations research**, 57, pp. 1155–1168.

- [123] Zhu Z, Cai X, Jian J. (2009), "An improved SQP algorithm for solving minimax problems " **Appl Math Lett**, 22, 464–469.

Aabstract

This paper focuses on the computation issue of portfolio optimization with scenario-based CVaR. According to the semismoothness of the studied models, a smoothing technology is considered, and a smoothing SQP algorithm then is presented. The global convergence of the algorithm is established. Numerical examples arising from the allocation of generation assets in power markets are done. The computation efficiency between the proposed method and the linear programming (LP) method is compared. Numerical results show that the performance of the new approach is very good. The remarkable characteristic of the new method is threefold. First, the dimension of smoothing models for portfolio optimization with scenario-based CVaR is low and is independent of the number of samples. Second, the smoothing models retain the convexity of original portfolio optimization problems. Third, the complicated smoothing model that maximizes the profit under the CVaR constraint can be reduced to an ordinary optimization model equivalently. All of these show the advantage of the new method to improve the computation efficiency for solving portfolio optimization problems with CVaR measure.

Keywords: Portfolio optimization , Conditional value-at-risk (CVaR) , Smoothing method , Allocation of generation asset



Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in Financial Mathematics

A Smoothing method for solving portfolio optimization with CVaR and applications in allocation of generation asset

By: Saeideh Ashktalkh

Supervisors:

Dr. Alireza Nazemi
Dr. Abdolmajid Abdolbaghi Ata'abadi

January 2020