

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

تعداد و مینیمم اندازه کدهای شناسایی روی گراف‌ها

نگارنده: سیده عاطفه موسوی چهارطاقی

استادان راهنما

دکتر میثم علیشاهی

دکتر عبدالله آل هوز

استاد مشاور

دکتر ابراهیم هاشمی

مهرماه ۱۳۹۹

شماره:
تاریخ:

باسمه تعالی



فرم شماره (3) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم سیده عاطفه موسوی چهارطاقی با شماره دانشجویی 9614404 رشته ریاضی کاربردی گرایش ----- تحت عنوان تعداد و مینیمم اندازه کدهای شناسایی روی گراف ها که در تاریخ 1399/07/30 با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☐ الف) درجه عالی: نمره 19-20 ☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره 18/99 - 18			
☐ ج) درجه خوب: نمره 17/99 - 16 ☐ د) درجه متوسط: نمره 15/99 - 14			
☐ ه) کمتر از 14 غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐ عملی ☒ نظری: نوع تحقیق:			
عنوان هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
1- استاد راهنمای اول	دکتر میثم علیشاهی	دانشیار	
2- استاد راهنمای دوم	دکتر عبدالله آل هوز	دانشیار	
3- استاد مشاور	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد	
4- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمدهادی نوری اسکندری	استادیار	
5- استاد ممتحن اول	دکتر ابوالفضل پورعیدی	استادیار	
6- استاد ممتحن دوم	دکتر سیدحیدر جعفری	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قونمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



“تقدیم به محضر مولا و آقا امام زمان
عجل الله”

تقدیم به پدر بزرگوارم که با غیرت خود
الفبای زندگی را به من آموخت
تقدیم به مادر فداکارم که از اول آفرینش،
هیچ واژه ای نتوانسته مهر او را معنی کند
آنانکه بی صدا شکستند
تا طلوع سپیده را نظاره گر باشند.

تشکر

حمد و ثنای خدای متعال را که به فضلش آدمی را اندیشه و عمل عطا فرمود تا بکاود و بداند و از علم و آگاهی چراغی برافروزد و هستی خویش را روشنی بخشد. آنچه دارم همه از اوست. سخنان و علم ادبمان همه سخن استادی است که به دل نشسته و آن را شادی و نشاط بخشیده است. استادان ارجمند جناب آقای دکتر علیشاهی و دکتر آل هوز با راهنمایی دو بزرگوار، که این پایانامه حاصل زحمات عزیزان در باروری و بروز رسانی اطلاعات اینجانب می باشد.

سپاس گزارم

« پدر بزرگوارم » او که به من آموخت که دردهای بزرگ از آن مردان بزرگ است لیکن از آن به کوچکی یاد می کنند و دردهای کوچک از آن مردان کوچک و به من آموخت تا انتخاب کنم .
ای پدر ، ای مظهر رنج و تلاش غنچه ای بر پینه های دست تو خواهم گذاشت
یک سبد بوسه نثارت می کنم صبح و شام دست علی همراه و یارت می کنم
« مادر مهربانم » او که فروغ نگاهش ، گرمی کلامش و روشنی رویش سرمایه های جاودانه زندگی من است و وجود پرمهرش برایم عزیزترین است . مادر ، در برابر وجود نازنینت زانوی ادب به زمین می نهم و با دلی مالا مال از عشق و محبت متواضعانه بر دستانت بوسه می زنم .

سیده عاطفه موسوی چهارطاقی
مهرماه ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب سیده عاطفه موسوی چهارطاقی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **تعداد و مینیمم اندازه کدهای شناسایی روی گراف ها**، تحت راهنمایی دکتر میثم علیشاهی و دکتر عبدالله آل هوز متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سیده عاطفه موسوی چهارطاقی

مهرماه ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

فرض کنیم G یک گراف ساده با مجموعه رأس‌های V باشد. برای هر $v \in V$ و هر عدد $r \geq 1$ ، گوی به مرکز v و به شعاع r را با نماد $B_{G,r}(v)$ نشان می‌دهیم. مجموعه $C \subseteq V$ یک کد r – شناسایی در گراف G می‌نامیم هرگاه مجموعه‌های $B_{G,r}(v) \cap C$ ، برای هر $v \in V$ ، همگی غیرتهی و متمایز باشند. گراف G که دارای کد r – شناسایی باشد را یک گراف r – قابل شناسایی می‌نامند و در این حالت اندازه کوچکترین کد r – شناسایی در گراف G را با $id(G)$ نشان می‌دهیم. در این پایان نامه اندازه کدهای r – شناسایی بهینه C که گراف G دارا می‌باشد را بررسی می‌کنیم، یعنی کدهای r – شناسایی که دارای ویژگی $|C| = id(G)$ می‌باشند، و سعی می‌کنیم گراف‌هایی بسازیم که دارای ”تعداد زیاد“ از این چنین کدهایی باشند. برای گراف G ، فرض کنیم $idor(G)$ کوچکترین اندازه‌ی $id(D)$ روی تمام گراف‌های جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی‌های مختلف ممکن از گراف G باشد. در این پایان نامه، برخی کران‌های بالا و کران‌های پایین را برای پارامتر $idor(G)$ به دست می‌آوریم. نشان می‌دهیم که برای هر گراف G ، داریم $idor(G) \leq \frac{3}{4} id(G)$. همچنین نشان می‌دهیم که مسأله محاسبه $idor(G)$ ، یک مسأله NP – سخت بوده، در حالی که مسأله‌ی تصمیم اینکه آیا نامساوی $idor(G) \leq |V(G)|k$ برای هر عدد ثابت k ، برقرار می‌باشد یا نه، یک مسأله حل‌پذیر در زمان چند جمله‌ای می‌باشد.

کلمات کلیدی: کد شناسایی، گراف‌های قابل شناسایی، جهت‌دهی، گراف‌های فاقد رأس دوقلو، NP – کامل.

فهرست مطالب

۱	تعاریف و قضایای مقدماتی	۱
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۱	۲.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی لازم از نظریه گراف	۱
۷	۳.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی لازم از نظریه کدگذاری	۷
۹	۴.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی لازم از نظریه رمزنگاری	۹
۱۱	۲ کدهای شناسایی بهینه در گراف فاقد رأس دو قلو	۱۱
۱۱	۱.۲ مقدمه	۱۱
۱۱	۲.۲ برخی از کاربردها و ویژگی‌های کدهای شناسایی	۱۱
۱۳	۳.۲ نتایج اصلی	۱۳
۱۸	۴.۲ تعدادی از کدهای r -شناسایی بهینه	۱۸
۲۷	۳ کوچکترین اندازه کدهای شناسایی روی تمام جهت‌دهی‌های گراف	۲۷
۲۷	۱.۳ مقدمه	۲۷
۲۷	۲.۳ برخی ویژگی‌های اولیه از کدهای شناسایی	۲۷
۳۴	۳.۳ کران‌ها برای $idor(G)$ با استفاده از پارامترهای مختلف	۳۴
۳۴	۱.۳.۳ کران‌های بالا	۳۴
۳۷	۲.۳.۳ کران‌های پایین	۳۷
۳۸	۳.۳.۳ درختان	۳۸
۴۳	۴.۳ ارتباط بین پارامتر id و پارامتر $idor$	۴۳
۴۸	۵.۳ پیچیدگی	۴۸
۴۸	۱.۵.۳ پیچیدگی $IDOR$	۴۸
۵۱	۲.۵.۳ $IDOR - LARGE$	۵۱
۵۳	۳.۵.۳ $IS CODE$	۵۳
۶۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	۶۱

فهرست تصاویر

۱۷	۱.۲	مکعب‌های $(a) - (f)$: مکعب سه بعدی گراف G و چهار زیر مجموعه غیر همریخت متمایز هستند؛ مکعب‌های $(h) - (g)$: کدهای ۱-جداکننده تنها غیر همریخت از اندازه سه در گراف G می‌باشند.
	۲.۲	درخت‌های $T_{۴,۲}$ و $T_{۳,۴}$ که در اثبات قضیه ۲.۴.۲ آمده‌اند. کد واژه‌ها به رنگ سیاه هستند، غیر کدواژه‌ها به رنگ سفید هستند. در درخت (a) کد C یک کد ۲-شناسایی است؛ در درخت b کد C یک کد ۴-شناسایی نیست، زیرا $C \cap V_2 = \emptyset$ است، بنابراین $a_{۲,۴}$ توسط C یک کد ۴-پوششی نیست. . .
۴۵	۱.۳	گراف افرازبندی شده
۴۶	۲.۳	گراف R
۴۹	۳.۳	ابزار یال F_e برای یال $e = uv$
	۴.۳	جهت‌دهی ابزار یال F_e وقتی که رأس e در S است (سمت چپ) و هر دو پایان رأس e در S هستند (سمت راست). رأس‌های سیاه آن‌هایی که در S هستند و رأس‌های سیاه و خاکستری آن‌هایی که در C هستند.
۵۴	۵.۳	ابزار متغییر VG_i (سمت چپ) و ابزار جمله CG_j (سمت راست)

فهرست جداول

- ۱.۲ برای هر مقدار k و r ($2 \leq r \leq 6$ ، $r = 10$ ، و $3 \leq k \leq 6$) و با $p = \frac{n}{kr+1}$.
در سطر اول تعدادی از قسمت‌های $S_{k,r}$ که در رابطه (۱۱.۲) و در سطر
دوم به طور تقریبی تعدادی از $S_{p,k,r}$ که در برابری (۱۲.۲) داده شده است.
گلوله‌ها بیشترین مقدار $S_{p,k,r}$ برای r داده شده است. ۲۴

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا به بیان برخی از مفاهیم، قضایا و نمادگذاری‌ها از نظریه گراف و نظریه کدگذاری می‌پردازیم که در فصل‌های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در بخش اول، تعاریف و مفاهیم اولیه لازم از نظریه گراف را بیان می‌کنیم که مطالب و تعاریف این بخش برگرفته از مرجع [۱] می‌باشد. در بخش دوم، تعاریف و مفاهیم اولیه لازم از نظریه کدگذاری را بیان خواهیم کرد که مطالب این بخش برگرفته از مرجع [۲] می‌باشد.

۲.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی لازم از نظریه گراف

تعریف ۱.۲.۱. گراف ساده عبارت است از سه تایی مرتب $G = (V(G), E(G), I_G)$ ، که در آن $V(G)$ مجموعه‌ای ناتهی، $E(G)$ مجموعه‌ای مجزا از $V(G)$ ، و I_G یک نگاشت (وقوع) است، که به هر عضو $E(G)$ یک زوج نامرتب از $V(G)$ نظیر می‌کند. عناصر $V(G)$ را رأس‌ها (گره‌ها یا نقاط) G ، و عناصر $E(G)$ را یال‌ها G ، نامیم. بنابراین یک گراف ساده را می‌توان به عنوان زوج مرتب $G = (V(G), E(G))$ ، که در آن $V(G)$ مجموعه ناتهی رأس‌ها و $E(G)$ مجموعه‌ای از زوج‌های نامرتب $V(G)$ که یال‌ها نامیم، در نظر گرفت. یال در گراف G بین رأس‌های $x, y \in V(G)$ می‌باشد، و به صورت $\{x, y\}$ ، $\{y, x\}$ ، xy یا yx نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. یک یال که دو پایان آن یکسان باشند را یک طوقه در رأس مشترک گوییم.

تعریف ۳.۲.۱. تعداد رأس‌های یک گراف را مرتبه آن می‌گوییم و با $|V(G)|$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۲.۱. تعداد یال‌های یک گراف را اندازه آن گوییم و با $|E(G)|$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۲.۱. رأس‌های u و v را مجاور با یک‌دیگر در G گوییم اگر یال از G با پایان‌های u و v وجود داشته باشد.

دو یال e و f را مجاور گوییم اگر در یک رأس مشترک باشند.

تعریف ۶.۲.۱. مسیر $P = x_1 x_2 \dots x_n$ دنباله‌ای از رأس‌های متمایز $x_1 x_2 \dots x_n$ است، که برای $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ یک یال $x_i x_{i+1}$ باشد. طول P_n تعداد یال‌های آن یعنی $n-1$ می‌باشد.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم $G = (V, E)$ گراف باشد. توان r -ام گراف G را که به صورت $G^r(V, E^r)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$E^r = \{xy : x \in V, y \in V, d_G(x, y) \leq r\}$$

تعریف ۸.۲.۱. مسیر بسته را دور نامیم.

تعریف ۹.۲.۱. گراف C_n ، گراف دور^۱ از مرتبه n است.

گراف P_n ، گراف مسیر^۲ از مرتبه n است.

تعریف ۱۰.۲.۱. گراف H را زیرگراف^۳ G نامیم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ ، در این حالت می‌نویسیم $H \subseteq G$ و می‌گوییم G شامل H است.

تعریف ۱۱.۲.۱. گراف G را همبند گوییم اگر برای هر دو رأس x و y مسیری بین آنها وجود داشته باشد، در غیر این صورت گراف را ناهمبند می‌گوییم.

تعریف ۱۲.۲.۱. در گراف همبند G می‌توانیم فاصله بین دو رأس x و y ، در صورتی که مسیری بین آنها وجود داشته باشد، اندازه کوتاهترین مسیر بین x و y تعریف می‌کنیم، با $d_G(x, y)$ نمایش می‌دهیم.

این تعریف را به گراف ناهمبند می‌توان گسترش داد با استفاده از قرار داد $d_G(x, y) = \infty$ هرگاه مسیری بین x و y وجود نداشته باشد.

تعریف ۱۳.۲.۱. برای هر رأس $v \in V$ و عدد صحیح $r, r \geq 1$ ، گوی با شعاع r و مرکز v که با $B_{G,r}(v)$ نشان می‌دهند، مجموعه همه‌ی رأس‌ها با فاصله حداکثر r از v می‌باشد:

$$B_{G,r}(v) = \{x \in V : d_G(v, x) \leq r\}.$$

¹Cycle

²Path

³Subgraph

تعاریف و قضایای مقدماتی لازم از نظریه گراف ۳

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنیم G یک گراف باشد. همسایگی (یا همسایگی باز) رأس v ، که با نماد $N(v)$ نشان می‌دهیم، مجموعه رأس‌هایی که مجاور رأس v هستند به عبارت دیگر $N(v) = \{x \in V | vx \in E\}$.

همسایگی بسته^۴ رأس $v \in V$ ، که با نماد $N[v]$ نشان می‌دهیم برابر $N(v) \cup \{v\}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. دو رأس x و y به طوری که $B_{G,r}(x) = B_{G,r}(y)$ را (G, r) -دوقلو گوئیم. در حالتی که $r = 1$ باشد دو رأس x و y در گراف G دوقلو^۵ گوئیم اگر $N[x] = N[y]$.

تعریف ۱۶.۲.۱. اگر گراف G یک گراف بدون رأس‌های x و y که (G, r) -دوقلو باشند، یعنی اگر داشته باشیم:

$$\forall x, y \in V \text{ با } x \neq y, B_{G,r}(x) \neq B_{G,r}(y)$$

آنگاه گراف G را r -فاقد رأس دوقلو یا r -شناسایی پذیر می‌گوییم. زمانی که گراف G مشخص باشد، به طور خلاصه از نماد $B_r(v)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱۷.۲.۱. هرگاه دو رأس x و y در فاصله r از یکدیگر در گراف G باشند، یعنی $x \in B_r(y)$ و $y \in B_r(x)$ ، می‌گوییم که x و y را r -پوشش^۶ یکدیگر هستند.

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنیم رأس‌های x, y, z وجود داشته باشند به گونه‌ای که $x \in B_r(z)$ و $y \notin B_r(z)$ ، رأس z را r -جداکننده^۷ دو رأس x و y در گراف G می‌گوییم. (توجه داشته باشیم که ممکن است $z = x$) مجموعه z را یک مجموعه r -جداکننده برای دو رأس x و y در گراف G گوئیم هرگاه حاوی حداقل یک رأس باشد.

تعریف ۱۹.۲.۱. گراف ساده و بدون جهت G را گراف کامل^۸ گوئیم هرگاه بین هر دو رأس آن دقیقاً یک یال وجود داشته باشد. به عبارت دیگر در آن هر رأس توسط یالی به تمامی رأس‌های دیگر متصل باشند. گراف کامل از مرتبه n را با K_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۰.۲.۱. گراف G را دوبخشی^۹ گوئیم هرگاه مجموعه‌ی رأس‌های G را بتوان به دو مجموعه ناتهی X و Y افراز کرد طوری که یک پایان هر یال G در X و پایان دیگر آن در Y باشد. زوج (X, Y) را یک دوبخشی سازی گراف دوبخشی G گوئیم. گراف G با دوبخشی سازی (X, Y) را با $G(X, Y)$ نشان می‌دهیم.

⁴Closed neighbourhood

⁵Twin

⁶Cover

⁷Separate

⁸Complete graph

⁹Bipartite graph

گراف ساده‌ی دوبخشی $G(X, Y)$ را گراف دوبخشی کامل^{۱۰} گوییم هرگاه هر رأس در X با همه‌ی رأس‌های Y مجاور باشد. اگر $G(X, Y)$ گراف کامل با $|X| = p$ و $|Y| = q$ باشد، آنگاه $G(X, Y)$ را با $K_{p,q}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۱.۲.۱. گراف وقوع^{۱۱} H از گراف دوبخشی G افزایی به صورت $(V(H), E(H))$ است جایی که یال‌های بین $v \in V(H)$ و $e \in E(H)$ وجود دارد اگر و تنها اگر v رأس پایانی e باشد.

تعریف ۲۲.۲.۱. گراف تهی^{۱۲} با n رأس را با E_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنیم G یک گراف باشد و $v \in V(G)$. تعداد یال‌های مجاور با رأس v در G را درجه رأس v گوییم و با نماد $\deg(v)$ نشان می‌دهیم. در گراف‌های ساده می‌توان به صورت تعداد اعضای همسایگی (باز) رأس v نیز آن را تعریف کرد. حداکثر درجه گراف G ، که با نماد $\Delta(G)$ نمایش می‌دهیم، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}.$$

حداقل درجه گراف G ، که با نماد $\delta(G)$ نشان می‌دهیم، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta(G) = \min\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}.$$

تعریف ۲۴.۲.۱. یک گراف همبند بدون دور را درخت^{۱۳} نامیم.

تعریف ۲۵.۲.۱. بیشترین فاصله ممکن بین دو رأس در گراف G را قطر^{۱۴} می‌نامیم. قطر در درخت که به آن عرض نیز گفته می‌شود، تعداد یال‌هایی است که در طولانی‌ترین مسیر بین دو رأس وجود دارد.

تعریف ۲۶.۲.۱. گراف G را گراف منتظم^{۱۵} از درجه r (یا r - منتظم) گوییم در صورتی که برای هر رأس v در گراف G ، $\deg(v) = r$ باشد.

تعریف ۲۷.۲.۱. فرض کنیم G یک گراف باشد. زیر گراف H از G را فراگیر^{۱۶} گوییم هرگاه $V(H) = V(G)$.

تعریف ۲۸.۲.۱. گراف همبند G که هیچ برش رأسی ندارد را بلوک^{۱۷} می‌نامیم. یک بلوک از گراف، زیرگرافی همبند و ماکزیمال از آن گراف است و هر گراف اجتماعی از بلوک‌هایش می‌باشد.

¹⁰Complete bipartite graph

¹¹Incidence graph

¹²Empty graph

¹³Tree

¹⁴Diameter

¹⁵Regular

¹⁶Spanning subgraph

¹⁷Block

تعریف ۲۹.۲.۱. خوشه، زیر مجموعه‌ای از رأس‌های گراف بدون جهت است به طوری که هر دو رأس متمایز آن مجاور هم باشند، به عبارت دیگر زیر گراف القایی روی آن گراف کامل باشد. عدد خوشه‌ای^{۱۸} گراف G را با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم که برابر با بیشترین تعداد رأس‌های یک خوشه از گراف G است.

تعریف ۳۰.۲.۱. زیر مجموعه‌ی M از مجموعه‌ی یال‌های $E(G)$ از گراف بدون طوقه‌ی G را مستقل گوئیم اگر هیچ دو یال M در G مجاور نباشند.

تعریف ۳۱.۲.۱. یک جورسازی^{۱۹} از یک گراف G یک مجموعه‌ی مستقل از یال‌های G است. اگر $e = uv$ یک یال در جورسازی M از G باشد، گوئیم رأس‌های پایانی u و v از e توسط M جور می‌شوند.

تعریف ۳۲.۲.۱. میانگین درجه^{۲۰} گراف G را با $Ad(G)$ نشان می‌دهیم که برابر $\frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$ است. حداکثر میانگین درجه^{۲۱} گراف G را با $Mad(G)$ نشان می‌دهیم، و به صورت

$$Mad(G) = \{Ad(H) \mid H \text{ زیر مجموعه‌ای از } G\}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳۳.۲.۱. گراف G را مسطح^{۲۲} نامیم اگر بتوان G را در صفحه طوری رسم کرد به طوری که هیچ دو یال G یکدیگر را در نقطه‌ای غیر از رأس قطع نکنند.

تعریف ۳۴.۲.۱. گراف G مکعبی^{۲۳} است هرگاه در آن تمام رأس‌ها از درجه ۳ باشند. به عبارتی یک گراف ۳ – منتظم است که به نمودارهای سه گانه معروف هستند.

تعریف ۳۵.۲.۱. گراف تقسیم^{۲۴}، گرافی است که در آن می‌توان رأس‌ها را به یک خوشه و یک مجموعه مستقل تقسیم کرد.

تعریف ۳۶.۲.۱. گراف مکمل تحویل پذیر^{۲۵} گرافی است که می‌توان از گراف تنها رأس K_1 با مکمل و اجتماع مجزا از آن تولید کرد. یعنی خانواده گراف‌های مکمل تحویل پذیر کوچک‌ترین کلاس از گراف‌هایی است که K_1 را در برمی‌گیرد و تحت مکمل و اجتماع مجزا آن بسته می‌شود.

تعریف ۳۷.۲.۱. یک گراف دوبخشی را وتری^{۲۶} گوئیم اگر هر دور آن به طول حداقل ۶ دارای حداقل وتر باشد.

¹⁸Clique number

¹⁹Matching

²⁰Average degree

²¹Maximum average degree

²²Planar graph

²³Cube

²⁴Split

²⁵Cograph or Complement reducible graph

²⁶Chordal graph

تعریف ۳۸.۲.۱. گراف بازه‌ای^{۲۷} G گرافی است که به ازای هر رأس v از آن، یک بازه باز $J(v)$ از خط حقیقی وجود دارد که $uv \in E(G)$ اگر و تنها اگر $J(u) \cap J(v) \neq \emptyset$.

تعریف ۳۹.۲.۱. یک گراف G را فاقد مثلث^{۲۸} گوییم هرگاه گرافی بدون جهت فاقد دور به طول ۳ باشد.

تعریف ۴۰.۲.۱. پوشش رأسی^{۲۹} در یک گراف G ، زیرمجموعه‌ای مانند S از مجموعه رأس‌ها است به طوری که هر یال از گراف G دارای یک رأس پایانی در مجموعه S داشته باشد. به عبارت دیگر هر یال گراف G با حداقل یک رأس از مجموعه S مجاور باشد.

حداقل اندازه یک پوشش رأسی از گراف G را با نماد $vc(G)$ نشان می‌دهیم. (به عنوان مثال پوشش رأسی گراف G ، گراف $H = G - (V_1 \cup N(V_1))$ در نظر می‌گیریم که در آن V_1 مجموعه‌ای از رأس‌ها از درجه حداکثر ۱ و $N(V_1)$ مجموعه راس‌های مجاور به رأس‌های مجموعه V_1 است).

تعریف ۴۱.۲.۱. گراف $G = (V, E)$ که در آن $V = V_1 \cup V_2$ و $E = E_1 \cup E_2$ را اجتماع G_1 و G_2 نامیم و با $G_1 \cup G_2$ نشان می‌دهیم. هنگامی که مجموعه رأس‌های G_1 و G_2 مجزا باشند، را با $G_1 + G_2$ نشان می‌دهیم و آن را اجتماع مجزا^{۳۰} دو گراف G_1 و G_2 نامیم.

فرض کنیم G_1 و G_2 گراف‌هایی با مجموعه رأس‌های مجزا باشند. در این صورت پیوند^{۳۱} $G_1 \vee G_2$ ، از G_1 و G_2 عبارت است از زیرگراف $G_1 + G_2$ به طوری که هر رأس G_1 با هر رأس G_2 مجاور باشند. پیوند آن‌ها را با $G_1 \oplus G_2$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴۲.۲.۱. برگ^{۳۲} در یک درخت، یک رأس از درجه ۱ است. تعداد برگ‌ها در درخت را با نماد $leav(T)$ نمایش می‌دهیم. یک رأس از درخت که برگ نیست را گره^{۳۳} می‌نامیم.

تعریف ۴۳.۲.۱. اندازه بزرگترین مجموعه رأسی در تجزیه درختی گراف‌ها را عرض درختی^{۳۴} گراف می‌گویند.

تعریف ۴۴.۲.۱. گراف $K_{1,n}$ را ستاره^{۳۵} می‌نامیم و با S_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴۵.۲.۱. گراف جهت‌دار^{۳۶} D دوتایی مرتب $D = (V(D), A(D))$ است که در آن $V(D)$ مجموعه‌ای ناتهی که مجموعه‌ی رأس‌های D نامیده می‌شود؛ $A(D)$ مجموعه‌ای مجزا از $V(D)$ ،

²⁷Interval

²⁸Triangle-free graph

²⁹Vertex cover

³⁰Disjoint union

³¹Join

³²Leaf

³³Node

³⁴Treewith

³⁵Star

³⁶Directed graph

که مجموعه‌ی کمان‌های D نامیده می‌شود. کمان در گراف جهت‌دار یک رأس را به رأس دیگری وصل می‌کند. گراف جهت‌دار را دی‌گراف^{۳۷} نیز می‌نامیم.

به طور خاص گراف جهت‌داری که فاقد دور به طول ۲ باشد را گراف سودار^{۳۸} می‌نامیم.

تعریف ۴۶.۲.۱. گراف جهت‌دار D' را زیرگراف یک گراف جهت‌دار D گوییم هرگاه

$$A(D') \subseteq A(D) \text{ و } V(D') \subseteq V(D).$$

تعریف ۴۷.۲.۱. گراف متقارن^{۳۹}، یک گراف جهت‌دار G است به طوری که اگر uv یک کمان در G باشد آنگاه vu نیز یک کمان در گراف جهت‌دار G است.

تعریف ۴۸.۲.۱. فرض کنیم G گراف باشد. گراف جهت‌دار متقارن وابسته به گراف G ، که با نماد D_G نشان داده می‌شود، گرافی جهت‌دار است که از گراف G با جایگزینی هر یال با دو کمان در جهت‌های مخالف بدست می‌آید.

تعریف ۴۹.۲.۱. فرض کنیم G گراف یا گراف جهت‌دار باشد و $S \subseteq V(G)$ ، در اینصورت زیرگراف القا^{۴۰}ی G توسط S ، با نماد $G\langle S \rangle$ نشان می‌دهیم، که زیرگرافی با مجموعه رأس‌های S و مجموعه یال‌ها به صورت $\{uv \mid u, v \in S, uv \in E(G)\}$ است. بنابراین $G\langle S \rangle$ شامل تمام رأس‌های S و تمام یال‌های G است که پایان هر دو سر آن‌ها در S هستند.

تعریف ۵۰.۲.۱. یک شبکه N ، گراف جهت‌داری است مانند D با دو زیر مجموعه متمایز X و Y از رأس‌ها که روی مجموعه کمان‌های D تعریف شده است و فرض بر این است که مجموعه‌های X و Y مجزا و ناتهی هستند. هر رأس X را منبع^{۴۱} شبکه و هر رأس Y را یک چاهک^{۴۲} شبکه می‌نامیم.

تعریف ۵۱.۲.۱. فرض کنیم D یک گراف جهت‌دار باشد. همسایگی بیرونی بسته^{۴۳} رأس v ، که با نماد $N^+[v]$ ، نشان می‌دهیم برابر است با $\{v\} \cup \{x \mid xv \in E(D)\}$.

تعریف ۵۲.۲.۱. دو رأس u و v در گراف جهت‌دار D را دوقلو گوییم هرگاه $N^+[u] = N^+[v]$.

۳.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی لازم از نظریه کدگذاری

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم A یک مجموعه q -عنصری به صورت $A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ باشد در این صورت مجموعه A را الفبای کد^{۴۴} نامیم و هر یک از عناصر A را سمبل کد نامیم.

³⁷Digraph

³⁸Oriented graph

³⁹Symmetric graph

⁴⁰Induced graph

⁴¹Source

⁴²Sink

⁴³Closed out-neighbourhood

⁴⁴Code alphabet

تعریف ۲.۳.۱. کلمه q -آرایه‌ای^{۴۵} با طول n روی الفبای A ، در واقع دنباله‌ای به صورت $W = w_1, w_2, \dots, w_n$ می‌باشد. جایی که $w_i \in A$ برای هر $1 \leq i \leq n$. همچنین می‌توان هر کلمه را به صورت برداری $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ نیز در نظر گرفت.

تعریف ۳.۳.۱. کد بلوکی q -آرایه‌ای^{۴۶} با طول n روی مجموعه A ، مجموعه‌ای نا تهی مانند C متشکل از کلمات q -آرایه‌ای می‌باشد که تمام کلمات آن از طول یکسان n است.

تعریف ۴.۳.۱. هر عنصر از مجموعه C یک کدواژه^{۴۷} از کد C می‌نامیم.

تعریف ۵.۳.۱. تعداد کدواژه‌های کد C را اندازه کد C نامیده و با نماد $|C|$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف باشد و کد C را زیر مجموعه‌ای از V در نظر می‌گیریم. برای هر رأس $v \in V$ ، مجموعه r -شناسایی از رأس v ، با توجه به کد C ، مجموعه‌ای از کدواژه‌های r -پوششی رأس v گوئیم و با $I_{G,C,r}(v)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B_{G,r}(v) \cap C = I_{G,C,r}(v)$$

در حالتی که $r = 1$ مجموعه $N[v] \cap C$ را شناساگر^{۴۸} رأس v (نسبت به C در G) می‌گوئیم و با $I_{C,G}(v)$ نشان می‌دهند، یا به طور خلاصه $I_C(v)$ (یا $I(v)$) جایی که گراف G مشخص باشد.

تعریف ۷.۳.۱. کد C را یک کد r -احاطه‌گر در G می‌گوئیم اگر برای هر $v \in V$ ، مجموعه‌ی $I_{G,C,r}(v)$ غیر تهی باشد.

تعریف ۸.۳.۱. کد C را یک کد r -شناسایی گوئیم اگر برای هر $v \in V$ مجموعه‌ی $I_{G,C,r}(v)$ غیر تهی و متمایز باشد: به عبارت دیگر، هر رأس r -پوششی با حداقل یک کد واژه و هر جفت از رأس‌ها r -جدا کننده با حداقل یک کد واژه باشد. با توجه به مجموعه شناسایی (غیر تهی) $I_{G,C,r}(v)$ از رأس ناشناخته $v \in V$ ، می‌توانیم به طور منحصر بفرد رأس v را بازیابی کنیم (همچنین r -شناسایی رأس v می‌گوئیم)

در حالتی که $r = 1$ مجموعه $C \subseteq V(G)$ یک کد شناسایی^{۴۹} در گراف G است اگر برای هر رأس $v \in V(G)$ ، $N[v] \cap C \neq \emptyset$ و برای هر دو رأس متمایز $u, v \in V(G)$ ، $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$ باشد.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنیم G گراف دلخواه باشد. اگر گراف G دارای کد شناسایی باشد آنگاه $id(G)$ را به عنوان اندازه کوچکترین کد شناسایی روی گراف G تعریف می‌کنیم، و اگر گراف G فاقد کد شناسایی باشد $id(G) = \infty$.

تعاریفی که برای گراف ساده بیان کردیم برای گراف جهت‌دار D نیز برقرار است.

⁴⁵Q-array word

⁴⁶Q-array block code

⁴⁷Code words

⁴⁸Identifier

⁴⁹Identifying code

تعریف ۱۰.۳.۱. هر کد r -شناسایی C از گراف G که $|C| = id(G)$ ، را بهینه^{۵۰} می‌گوییم.

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف باشد. کد C را r -جداکننده گوییم اگر برای $v \in V$ ، مجموعه‌ی $I_{G,C,r}(v)$ متمایز باشد؛ کد C را r -جداکننده تنها گوییم اگر برای هر $v \in V$ ، همه‌ی مجموعه‌های $I_{G,C,r}(v)$ متمایز و یکی از آنها تهی باشد. اندازه کوچکترین کد r -جداکننده تنها در گراف G وقتی که چنین کدی در گراف وجود داشته باشد را با $\chi_r^S(G)$ نشان می‌دهیم، و کد C را یک کد r -جداکننده تنهای بهینه گوییم اگر $|C| = \chi_r^S(G)$.

تعریف ۱۲.۳.۱. مجموعه $C \subseteq V(G)$ یک کد شناسایی در گراف جهت‌دار^{۵۱} D است اگر برای هر راس $v \in V(D)$ ، $N^+[v] \cap C \neq \emptyset$ و برای هر دو رأس متمایز $u, v \in V(G)$ ، $N^+[u] \cap C \neq N^+[v] \cap C$.

تعریف ۱۳.۳.۱. مجموعه $N^+[v] \cap C$ را شناساگر رأس v (نسبت به C در D) می‌گوییم و با $I_{C,D}(v)$ نشان می‌دهیم، جایی که گراف جهت‌دار D مشخص باشد به طور خلاصه $I_C(v)$ (یا $I(v)$) نشان می‌دهیم.

۴.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی لازم از نظریه رمزنگاری

تعریف ۱.۴.۱. زبان $L \in \Sigma^*$ (جایی که Σ یک الفبای متناهی است) را متعلق به NP ^{۵۲} گوییم هرگاه یک ماشین تورینگ قطعی M و یک چند جمله‌ای $P(n)$ چنان موجود باشند که اولاً $T_M(n) \leq P(n)$ و همچنین برای هر $x \in \Sigma^*$ داشته باشیم:

(۱) اگر $x \in L$ ، آنگاه یک تصدیق $y \in \Sigma^*$ چنان موجود باشد که $|y| \leq P(n)$ و ماشین M ورودی $x - y$ را تصدیق کند (خروجی M روی ورودی $x - y$ ، "yes" باشد).

(۲) اگر $x \in L$ ، آنگاه برای هر رشته $y \in \Sigma^*$ خروجی M روی ورودی $x - y$ ، "NO" باشد. L را NP -کامل^{۵۳} گوییم هرگاه

$$L \in NP \quad (۱)$$

$$\forall L' \in NP, L' \leq_M L \quad (۲)$$

که در اینجا $\leq_M$ به معنی کاهش چندجمله‌ای مسأله L' به L است.

تعریف ۲.۴.۱. یک مسأله پارامتری یک زبان $L \in \Sigma^* \times N$ می‌باشد جایی که Σ یک الفبای متناهی است. مؤلفه دوم، پارامتر مسأله نامیده می‌شود.

^{۵۰}Optimal

^{۵۱}Digraph

^{۵۲}Non-deterministic polynomial-time

^{۵۳}NP-complete

مسئله پارامتری L را FPT نامیم، اگر این سوال که ”آیا (x, k) در L می باشد یا خیر“، را بتوانیم در زمان پردازش $f(k) \cdot |x|^{o(1)}$ تصمیم گیری کنیم، جایی که f یک تابع دلخواه وابسته به k است. بنابراین پیچیدگی محاسباتی متناظر مسئله فوق را FPT ^{۵۴} می نامند.

تعریف ۳.۴.۱. مسئله تصمیم H یک مسئله NP – سخت^{۵۵} است هرگاه برای هر مسئله L در NP ، یک کاهش زمان چند جمله ای از L به H وجود داشته باشد. تعریف معادل این است که نیاز به حل هر مسئله L در NP در زمان چند جمله ای توسط ماشین اوراکل^{۵۶} برای H دارد. به طور غیر صوری، می توانیم به الگوریتمی فکر کنیم که بتواند چنین ماشین اوراکلی را به عنوان زیر روند برای حل H بنامد و L را در زمان چند جمله ای حل کند. درصوتی که فرض کنیم زیر روند فقط یک قدم برای محاسبه طول می کشد.

به عبارت دیگر به کاهش زمان چند جمله ای از یک مسئله NP – کامل G به H نیاز داریم. همانطور که هر مسئله L در NP در زمان چند جمله ای به G کاهش می یابد، L به نوبه خود به H در زمان چند جمله ای کاهش می یابد، بنابراین این تعریف به تعریف اولیه دلالت دارد.

تعریف ۴.۴.۱. برنامه نویسی پویا^{۵۷} به طور کلی یک بهینه سازی نسبت به بازگشت ساده است. هر کجا که یک راه حل بازگشتی بینیم که تماس های مکرر برای ورودی های یکسان دارد، می توانیم آن را با استفاده از برنامه نویسی پویا بهینه کنیم. ایده این است که به سادگی نتایج زیر برنامه ها را ذخیره کنیم. بنابراین مجبور به محاسبه مجدد آن ها نیستیم. این بهینه سازی باعث کاهش پیچیدگی های زمانی از نمایی به چند جمله ای می شود. به عنوان مثال اگر برای اعداد فیبوناچی راه حل باگشتی ساده بنویسیم، ما از پیچیدگی زمانی نمایی برخوردار می شویم و اگر آن را با ذخیره راه حل های زیر برنامه ای بهینه کنیم، پیچیدگی زمان به خطی کاهش می یابد.

⁵⁴Fixed-parameter tractable

⁵⁵NP-hard

⁵⁶ Oracle machine

⁵⁷Dynamic programming

فصل ۲

کدهای شناسایی بهینه در گراف فاقد رأس دو قلو

۱.۲ مقدمه

در این فصل، تعداد کدهای r -شناسایی بهینه مختلف C را که گراف G دارا می‌باشد، یعنی کدهای r -شناسایی را بررسی می‌کنیم که دارای ویژگی $|C| = id(G)$ می‌باشند، و سعی می‌کنیم گراف‌هایی بسازیم که دارای "تعداد زیاد" از چنین کدهایی باشند. برای گراف G ، پارامتر $idor(G)$ کوچکترین اندازه‌ی $id(D)$ روی تمام گراف‌های جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی‌های مختلف ممکن از گراف G تعریف می‌کنیم.

۲.۲ برخی از کاربردها و ویژگی‌های کدهای شناسایی

در این بخش هدف بدست آوردن یک کد r -شناسایی بهینه در گراف‌ها یا خانواده‌ای از گراف‌ها است که بخش مهمی از مطالعات اختصاص داده شده به کدهای شناسایی را شامل می‌شود. به طور کلی، این مسأله یک مسأله NP - سخت می‌باشد که در مرجع [۳] مورد بررسی قرار گرفته است.

به عنوان یک کاربرد از کدهای شناسایی به مثال زیر توجه کنید: حالت $r = 1$ را در

نظر می‌گیریم و فرض کنیم یک موزه، با استفاده از حس‌گر دود محافظت شود. این موزه را می‌توان به عنوان یک گراف در نظر گرفت جایی که رأس‌های آن اتاق‌ها، یال‌ها درهای بین اتاق‌ها هستند. حسگرها در بعضی از اتاق‌ها قرار گرفته‌اند و هر وقت که دود در یکی از اتاق‌ها یا اتاق مجاور وجود داشته باشد زنگ هشدار می‌دهد، اگر دود در یک اتاق باشد و حسگرهای قرار گرفته در اتاق‌ها شبیه به یک کد ۱-شناسایی باشد سپس می‌توانیم با توجه به حس‌گرهایی که زنگ هشدار می‌دهند اتاقی که برخی از افراد سیگار می‌کشند را تشخیص دهیم.

در این فصل، با توجه به مراجع [۱۴، ۱۵] در ادامه مفهومی از ”کدهای کاملاً متمایز” که در چارچوب شبکه‌های بی‌نهایت است را مورد بحث قرار دهیم، می‌خواهیم گراف‌هایی که تعداد زیادی از آن‌ها کدهای r -شناسایی مختلف بهینه هستند بدست آوریم (بخش ۴.۲). به طور معمول، باید گراف‌هایی از مرتبه n بسازیم که تعداد $2^{\alpha \cdot n}$ کدهای r -شناسایی بهینه مختلف دارد، و قصد داریم تاجایی که ممکن است α را به ۱ نزدیک کنیم. در نتیجه برای α حالت‌های زیر را بدست می‌آوریم:

- برای $r = 1$ داریم $2^{\circ/77003n} \approx$ (قضیه ۱.۴.۲)؛
- برای $r \geq 1$ و هر $\epsilon > 0$ داریم $\lfloor 2^{(\frac{1+\log 2}{\delta} - \epsilon)n} \rfloor$ (نتیجه ۲.۴.۲)،
می‌دانیم که $\frac{1+\log 2}{\delta} \simeq 0.664$.

با در نظر گرفتن مجدد مثال موزه، یعنی نمی‌خواهیم فقط از کمترین تعداد ممکن از حس‌گرها استفاده کنیم، می‌خواهیم تعداد بیشتری برای این مطلب انتخاب کنیم. توجه داشته باشیم می‌توانیم تعدادی از کدهای r -شناسایی را در نظر بگیریم که در گراف با شرایطی که برای α بیان کردیم صدق کند (بدون نیاز به بهینه سازی)، سپس با استفاده از لمی از قبل کران بالا را برای این گراف بدست می‌آوریم

$$\sum_{i=\lfloor \log_2(n+1) \rfloor}^n \binom{n}{i} = 2^n - \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2(n+1) \rfloor - 1} \binom{n}{i}.$$

از طرف دیگر با در نظر گرفتن گراف $G = (V, E)$ با $V = Z_q \times Z_q$ و

$$E = \{x = (a, b), y = (c, d) : a = c \text{ یا } b = d\}$$

یعنی G یک مربع $q \times q$ آرایه‌ای از رأس‌ها، که در آن هر دو رأس مجاور هستند اگر و تنها اگر آنها در یک ردیف یا ستون باشند (کدهای شناسایی در این گراف‌ها در مرجع [۷] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند). هر زیرمجموعه از V حاوی حداقل دو رأس در هر سطر و هر ستون یک کد ۱-شناسایی است: رأس v که در آن مجموعه ۱-شناسایی دو کد واژه متعلق به یک سطر را دارد، خود در این سطر است، برای ستون‌ها نیز به همین صورت برقرار است، و ترکیب v به طور منحصر بفرد تعیین می‌شود (با مشاهده مرجع [۷] توجه داشته باشیم که کدها بهینه

نیستند). در حال حاضر دقیقا $2^{q-1}(q+1)$ زیرمجموعه از رأس‌ها با بیش از یک راس وجود دارند، که در سطر اول قرار دارند، و بنابراین حداکثر $2^{q-1}(q+1)$ کد وجود دارند که ۱- شناسایی نیستند، تقریبا همه‌ی زیر مجموعه‌های 2^q از V کدهای - شناسایی هستند: اگر مجموعه $n = 2^q$ قرار دهیم، پس حداقل

$$2^n \left(1 - \frac{n(\sqrt{n}+1)}{2^{\sqrt{n}}}\right)$$

کدهای ۱- شناسایی در گراف G داریم.

برخی از نتایج با توجه به اینکه کم هستند برای کدهای ۱- احاطه‌گر بدست می‌آوریم: در مرجع [۶] ثابت شده است که گراف‌های n رأسی وجود دارند که حداقل $2^{0.651n}$ تعداد کدهای - احاطه‌گر داریم، و همچنین گراف n رأسی هستند که حداقل بیش از $2^{0.779n}$ تعداد کدهای ۱- شناسایی وجود دارند؛ کران بالا نیز برای این کدهای بهینه بدیهی است، و کران پایین با توجه به ساختار کدهای بهینه نیز بدست می‌آید. با توجه به مرجع [۴] خوشه n رأسی مثال واضحی است که همه‌ی $2^n - 1$ زیر مجموعه‌های غیر تهی از رأس‌ها، کدهای ۱- احاطه‌گر هستند.

در مرجع [۱۱] مجموعه تمام کدهای r - شناسایی بهینه را در یک گراف مطالعه می‌کنیم، به ویژه فاصله بین کدهای بهینه را بدست می‌آوریم. این کار را برای کدهای ۱- احاطه‌گر و همچنین برای کدهای ۱- احاطه‌گر مکانی بدست می‌آوریم که کدهای ۱- احاطه‌گر مکانی در مرجع [۱۰] قسمت کوتاهی به آن‌ها اشاره شده است.

۳.۲ نتایج اصلی

در این بخش با استفاده از لم‌ها و گزاره‌ها می‌خواهیم نتایجی را برای کدهای r - شناسایی به دست آوریم. در ادامه به بیان و اثبات آن‌ها می‌پردازیم.

لم ۱.۳.۲. فرض کنیم $r \geq 1$ و $s \geq 1$ دو عدد صحیح باشد. کد C یک (rs) - شناسایی در گراف G است اگر و تنها اگر r - شناسایی در گراف G^s باشد.

برهان. فرض می‌کنیم کد C یک (r) - شناسایی در گراف G^s است بنابراین برای دو رأس u, v در V داریم $d_{G^s}(u, v) \leq r$ با توجه به تعریف توان s - ام گراف نتیجه می‌گیریم که $d_G(u, v) \leq rs$.
 حالت عکس آن نیز به همین طریق برقرار است. $\square$

لم ۲.۳.۲. فرض کنیم $r \geq 1$ ، همچنین فرض کنیم G یک گراف و C زیر مجموعه‌ای از رأس‌های G باشد. اگر همه‌ی رأس‌ها r - پوششی توسط C و همه‌ی رأس‌های زوج متوالی r - جداکننده توسط C باشند، آنگاه کد C یک کد r - شناسایی در گراف G است.

لم ۳.۳.۲. اگر یک کد r -جداکننده تنها در گراف G وجود داشته باشد، آنگاه یک کد r -شناسایی نیز وجود دارد، علاوه بر این داریم:

$$id(G) \geq \chi(G) \geq id(G) - 1, \quad (1.2)$$

و اگر داشته باشیم $\chi(G) = id(G) - 1$ ، همه‌ی کدهای r -جداکننده بهینه r -جداکننده تنها هستند.

برهان. عکس این لم برقرار نیست یعنی اگر کد r -شناسایی در گراف G وجود داشته باشد آنگاه کد r -جداکننده تنها در این گراف وجود ندارد برای مثال مسیرهای p_3 و p_4 نمونه‌هایی از گراف‌ها هستند که کد ۱-شناسایی هستند ولی کد ۱-جداکننده تنها نیستند. اگر کد C یک کد r -جداکننده تنها در گراف G دارای رأس v باشد که توسط C یک کد r -پوششی نیست، آنگاه $C \cup \{v\}$ کد r -شناسایی در G است؛ از این استدلال نتیجه می‌گیریم که $id(G) \leq |C|$. $\chi(G) + 1$ پس نابرابری ثابت می‌شود. $\square$

لم ۴.۳.۲. فرض کنیم G_0 یک گراف از مرتبه n_0 باشد، که S_0 کدهای r -شناسایی بهینه متمایز و σ_0 کدهای r -جداکننده تنها بهینه متمایز در نظر می‌گیریم. برای $p \geq 1$ ، فرض کنیم G یک گراف شامل p باشد که نوعی از گراف G_0 است. پس G دارای $n = pn_0$ رأس می‌باشد، تعداد کدهای r -شناسایی بهینه برابر $(S_0)^p = 2^{\frac{\log S_0}{n_0} n}$ ، که اندازه آن‌ها $p id(G_0)$ است و تعداد کدهای r -جداکننده تنها بهینه متمایز برابر $p\sigma_0(S_0)^{p-1}$ ، که اندازه آن‌ها

$$\chi(G_0) + (p-1)id(G_0)$$

می‌باشد.

برهان. تنها راه ساخت یک کد r -شناسایی در گراف G به گونه‌ای است که در هر نوع یک کد r -شناسایی داشته باشیم و برای بهینه سازی در هر نوع از یک کد بهینه را در نظر می‌گیریم. تنها راه ساخت یک کد r -جداکننده تنها در گراف G به گونه‌ای است که در یک نوع یک کد r -جداکننده تنها و در هر نوع دیگر از یک کد r -شناسایی باشند و برای بهینه سازی در هر نوع از یک کد بهینه را در نظر می‌گیریم. در هر مورد، همه‌ی انتخاب‌ها مستقل هستند. $\square$

گزاره و لم بعدی را در حالت $r = 1$ اثبات می‌کنیم.

گزاره ۱.۳.۲. فرض کنیم G_0 یک گراف از مرتبه $n_0 \geq 2$ باشد، که s_0 کدهای ۱-شناسایی بهینه متمایز و σ_0 کدهای ۱-جداکننده تنها بهینه متمایز در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که

$$\chi(G_0) = id(G_0) - 1. \quad (2.2)$$

برقرار باشد، برای $P \geq 2$ فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف شامل P باشد که نوعی از G_0 است. فرض کنیم x رأسی باشد که در V نباشد و $G(x)$ یک گراف با مجموعه رأس $V(x) = V \cup \{x\}$ و مجموعه یال $E(x) = E \cup \{\{x, y\}; y \in V\}$ باشد؛ (رأس x را یک رأس کلی می‌نامیم). تعداد کدهای ۱- شناسایی بهینه متمایز (۱- جداکننده تنها) در گراف $G(x)$ را با $S(G(x))$ نشان می‌دهیم.

بنابراین گراف $G(x)$ دارای $n = pn_0 + 1$ رأس است و مجموعه ζ از کدهای ۱- شناسایی بهینه در $G(x)$ برابر است با اجتماعی از

- مجموعه ζ_1 از همه‌ی کدهای ۱- شناسایی بهینه در G ،
- مجموعه ζ_2 مجموعه همه‌ی $\{x\} \cup C$ ، جایی که C یک کد ۱- جداکننده تنها بهینه در G است.

این کدها از اندازه $Pid(G_0)$ هستند. تعداد رأس‌های $S(G(x))$ نیز برابر با

$$S(G(x)) = (S_0)^P + P\sigma_0(S_0)^{P-1} \quad (3.2)$$

است، همچنین مجموعه ζ_3 همه‌ی کدهای ۱- جداکننده تنها بهینه در $G(X)$ است.

- مجموعه ζ_4 همه‌ی کدهای ۱- جداکننده تنها بهینه در G هستند.
- این کدها از اندازه $Pid - 1$ هستند، تعداد رأس‌های $\sigma(G(x))$ برابر با

$$\sigma(G(x)) = p\sigma_0(S_0)^{P-1} \quad (4.2)$$

است.

برهان. الف) فرض کنیم C یک کد ۱- شناسایی در G باشد: برای هر $v \in V$ ، مجموعه‌های $I_{G,C}(v)$ همه متمایز و غیر تهی هستند. حال فرض کنیم همان کد C در گراف $G(x)$ در نظر بگیریم؛ داریم $I_{G(x),C}(x) = C$ ، و این مجموعه غیر تهی از همه‌ی مجموعه‌های ۱- شناسایی دیگر متمایز است، زیرا حداقل دو نوع از G_0 وجود دارد، پس یک نوع نمی‌تواند حاوی همه‌ی کدواژه‌ها باشد. یعنی C نیز ۱- شناسایی در $G(x)$ می‌باشد. بنابراین $id(G(x)) \leq id(G)$.

ب) فرض کنیم C یک کد ۱- شناسایی بهینه در $G(x)$ شامل x باشد. از آنجایی که x نمی‌تواند ۱- جدا کننده هر جفت رأس‌ها در G باشد، تنها هدف آن به عنوان کدواژه این است که ۱- پوششی باشد در صورتی که برخی از رأس‌ها توسط هیچ کدواژه دیگری ۱- پوششی نیستند؛ زیرا این رأس‌ها توسط C یک کد ۱- جداکننده هستند، تنها یکی از رأس‌ها در نظر می‌گیریم دارای شرایطی است که بیان کردیم آن را v می‌نامیم. پس می‌تواند به صورت $I_{G(x),C,r}(v) = \{x\}$ باشد. بنابراین $C^* = C \cup \{v\}$ نیز بهینه و ۱- شناسایی در گراف $G(x)$ است. حال $C^* \subseteq V$ در نظر می‌گیریم و C^* یک کد ۱- شناسایی در گراف G است. بنابراین $id(G) \leq id(G(x))$.

ج) با توجه به قسمت الف و ب، هر کد ۱-شناسایی بهینه در G یک کد ۱-شناسایی در $G(x)$ است، بنابراین ثابت کردیم که $\zeta \subseteq \zeta_1$ است، و رابطه

$$id(G(x)) = id(G). \quad (5.2)$$

برقرار است.

د) فرض کنیم C یک کد ۱-جداکننده تنها در G باشد: برای هر $v \in V$ ، مجموعه‌های $I_{G,C}(v)$ همه متمایز و غیر تهی هستند، به جز برای رأس منحصر بفرد v_0 ، به دلیل اینکه $I_{G,C}(v_0) = \emptyset$. حال $C^* = C \cup \{x\}$ یک کد ۱-شناسایی در $G(x)$ در نظر می‌گیریم، زیرا $I_{G(x),C}(x) = C^*$ و $I_{G(x),C}(v_0) = \{x\}$ با مجموعه‌های ۱-شناسایی برابر هستند؛ بنابراین هیچ رأس دیگری از x نمی‌تواند دارای C^* به عنوان یک مجموعه ۱-شناسایی باشد، زیرا G_0 دارای اندازه حداقل دو باشد، کد واژه‌ها در C همه نمی‌توانند یک نوع از P باشند ($P \geq 2$).

حال برای G با استفاده از لم (۸.۲) با $r = 1$ ، فرض (۲.۳) و برابری (۵.۲) داریم

$$\begin{aligned} \chi_1^S(G) &= \chi_1^S(G_0) + (P-1)id(G_0) = P id(G_0) - 1 \\ &= id(G) - 1 = id(G(x)) - 1. \end{aligned} \quad (6.2)$$

بنابراین، اگر C یک کد ۱-جداکننده تنها بهینه در G باشد، پس $C \cup \{x\}$ یک کد ۱-شناسایی بهینه در $G(x)$ از اندازه $pr_1^{ID}(G_0)$ است و در نتیجه $\zeta \subseteq \zeta_2$ ثابت می‌شود.

ز) اکنون ثابت می‌کنیم $\zeta_1 \cup \zeta_2 \subseteq \zeta$. فرض کنیم C یک کد ۱-شناسایی بهینه در $G(x)$ باشد. اگر کد C شامل رأس x نباشد، پس C یک کد ۱-شناسایی در گراف G نیز است، و با توجه به برابری (۵.۲)، کد C در گراف G بهینه است. اگر C شامل رأس x باشد، پس $C \setminus \{x\}$ در گراف G یک کد ۱-جداکننده تنها است (در غیر این صورت، رأس x یک کد واژه بدون استفاده است و کد C در $G(x)$ بهینه است)، و با توجه به برابری (۵.۲) و سمت راست برابری ۱.۳، نتیجه می‌گیریم $C \setminus \{x\}$ در گراف G بهینه است.

س) حال ثابت می‌کنیم $\zeta = \zeta_1 \cup \zeta_2$. بنابراین، تعدادی از کدهای ۱-شناسایی بهینه در گراف $G(x)$ برابر با تعدادی از کدهای ۱-شناسایی بهینه در گراف G هستند، همچنین با تعدادی از کدهای ۱-جداکننده تنها بهینه در G برابرند، و تعدادی دیگر برابر با $P\sigma_0(S_0)^{P-1}$ می‌باشد. این برابری ۳.۲ را ثابت می‌کند.

م) فرض کنیم C یک کد ۱-جداکننده تنها در گراف G باشد: برای هر $v \in V$ ، مجموعه‌های $I_{G,C}(v)$ همه متمایز و غیر تهی هستند، به جز برای رأس منحصر بفرد v_0 ، به دلیل اینکه $I_{G,C}(v_0) = \emptyset$ است. بنابراین مجموعه $I_{G(x),C}(x) = C$ متمایز از همه‌ی مجموعه‌های ۱-شناسایی دیگر است، زیرا اندازه G_0 از اندازه حداقل دو باشد، کد واژه‌ها همه نمی‌توانند

یک نوع از P باشند ($P \geq 2$)؛ بنابراین کد C یک کد 1 -شناسایی تنها در گراف $G(x)$ است.

با استفاده از سمت راست برابری (۱.۳) و (۶.۲) داریم:

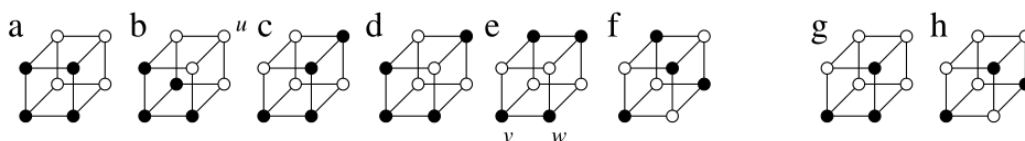
$$\chi_1^S(G(x)) \leq id(G(x)) - 1 = \chi_1^S(G)$$

نشان می‌دهد که اگر C یک کد 1 -جداکننده تنها بهینه در گراف G باشد، پس یک کد 1 -جداکننده تنها بهینه در $G(x)$ است ($\chi_1^S(G(x)) = \chi_1^S(G)$)؛ در نتیجه ثابت کردیم که $\zeta_3 \subseteq \zeta_4$ است. تا اکنون مشاهده کرده‌ایم اندازه این کدها $1 - id(G_0) = P$ است.

(ن) می‌خواهیم ثابت کنیم $\zeta_3 \subseteq \zeta_4$. فرض کنیم کد C یک کد 1 -جداکننده تنها بهینه در $G(x)$ باشد. پس کد C شامل رأس x نمی‌باشد، کد C یک کد 1 -جداکننده تنها در G است، و همان استدلال قبلی در اندازه‌ها نشان می‌دهد که در گراف G بهینه است.

(ی) باتوجه به برابری (۴.۲) نتیجه می‌گیریم که $\sigma(G(x)) = P\sigma(S_0)^{P-1}$.

□



شکل ۱.۲: مکعب‌های $(a) - (f)$: مکعب سه بعدی گراف G_0 و چهار زیر مجموعه غیر همریخت متمایز هستند؛ مکعب‌های $(g) - (h)$: کدهای 1 -جداکننده تنها غیر همریخت از اندازه سه در گراف G_0 می‌باشند.

اکنون خواصی از مکعب را مطالعه می‌کنیم، که در ساختارهای بعدی استفاده خواهیم کرد.

لم ۵.۳.۲. فرض کنیم گراف $G_0 = (V_0, E_0)$ یک مکعب سه بعدی باشد. این گراف از $56 = S_0$ کدهای 1 -شناسایی بهینه متمایز و $32 = \sigma_0$ کدهای 1 -جداکننده تنها بهینه متمایز گرفته شده است.

برهان. بدرستی مشاهده می‌کنیم $id(G_0) = 4$ و تا حدودی متقارن هستند، شش نوع متمایز از چهار زیر مجموعه رأس V_0 هستند که در شکل ۱.۳ مکعب‌های $(a) - (f)$ حاصل شده است. اگر رأس‌های مشکی نشان دهنده کدواژه‌ها باشند، پس a, c, d و f کدهای 1 -شناسایی هستند، که تعداد این کدها به ترتیب $24, 24, 6$ و 2 است، مکعب‌های (b) و (e) دارای به ترتیب 6 و 8 کد می‌باشند که 1 -شناسایی نیستند: زیرا u توسط کد واژه‌ها 1 -پوششی نیست و همچنین در e نیز مطلب قبل برقرار است زیرا بین v و w توسط کد واژه‌ها 1 -جداکننده نیستند.

کدهای ۱- جداکننده تنها در سه سائز هستند و دو نوع از آنها وجود دارد: که در شکل ۱.۳ مکعب‌های $(g) - (h)$ مشاهده می‌شود، به طوری که تعداد $32 = 8 + (4 \times 6)$ کد بهینه وجود دارند.

□

۴.۲ تعدادی از کدهای r - شناسایی بهینه

در این بخش تعدادی از کدهای r - شناسایی بهینه را در حالت $r = 1$ با استفاده از درختان و مکعب‌هایی که در شکل قبل هستند بدست می‌آوریم، و همچنین در حالت کلی نتایج را برای این تعداد از کدها بیان می‌کنیم.

۱. حالت $r = 1$ قصد داریم از مکعب‌های سه بعدی استفاده کنیم که در لم (۵.۳.۲) بیان کردیم، به صورت بلوک در مرحله اول، گرافی متشکل از k_1 نوع دیگری از آن با رأس کلی x_1 بسازیم. گراف جدید به صورت بلوک مرحله دوم مورد استفاده قرار می‌گیرد که یک گراف متشکل از k_2 نوع دیگری از آن با رأس عمومی x_2 می‌سازیم و این روند را ادامه می‌دهیم. در هر مرحله، گراف همبند است، با داشتن تعدادی از رأس‌ها و باتوجه به گزاره (۱.۳.۲)، تعدادی از کدهای ۱- شناسایی بهینه و تعدادی از کدهای ۱- جداکننده تنها داریم، همانند این واقعیت که اندازه کد ۱- شناسایی بهینه با اندازه یک کد ۱- جداکننده تنها بعلاوه یک برابر است، این مطلب این توانایی را می‌دهد که به مرحله بعدی رفته و این تعداد را محاسبه کنیم.

حال شروع به ساختن k_1 نوعی مکعب با $k_1 \geq 2$ می‌کنیم، که یک گراف با $8k_1 + 1$ رأس حاصل می‌شود، برابر با حداقل

$$56^{k_1} + 32 \cdot k_1 \cdot 56^{k_1-1} \quad (7.2)$$

کد ۱- شناسایی بهینه از اندازه $4k_1$ و

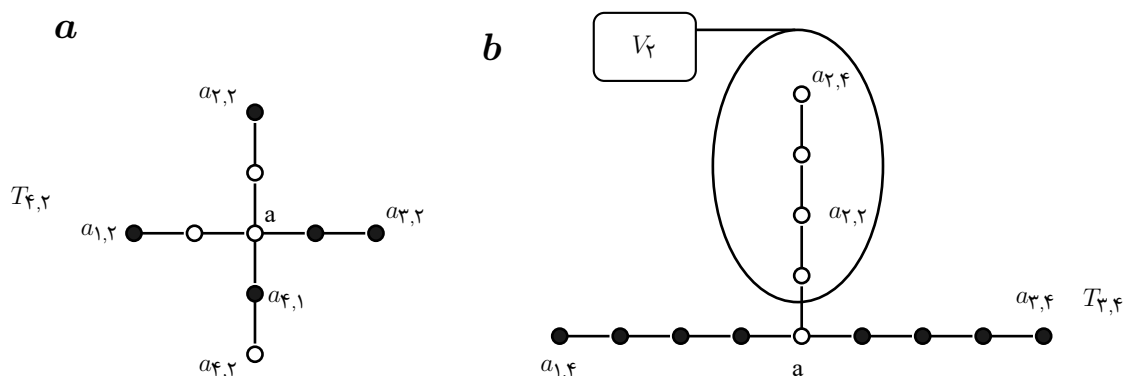
$$32 \cdot k_1 \cdot 56^{k_1-1} \quad (8.2)$$

کد ۱ - جداکننده تنها بهینه از اندازه $4k_1 - 1$ هستند. در مرحله بعدی، برای $k_2 \geq 2$ ، یک گراف با $1 + k_2(8k_1 + 1)$ رأس بدست می‌آوریم، که حداقل

$$(56^{k_1} + 32 \cdot k_1 \cdot 56^{k_1-1})^{k_2} + k_2(56^{k_1} + 32 \cdot k_1 \cdot 56^{k_1-1})^{k_2-1} \cdot 32 \cdot k_1 \cdot 56^{k_1-1} \quad (9.2)$$

کدهای ۱- شناسایی بهینه از اندازه $4k_1 k_2$ و

$$k_2(56^{k_1} + 32 \cdot k_1 \cdot 56^{k_1-1})^{k_2-1} \cdot 32 \cdot k_1 \cdot 56^{k_1-1} \quad (10.2)$$



شکل ۲.۲: درخت‌های $T_{4,2}$ و $T_{3,4}$ که در اثبات قضیه ۲.۴.۲ آمده‌اند. کد واژه‌ها به رنگ سیاه هستند، غیر کدواژه‌ها به رنگ سفید هستند. در درخت (a) کد C یک کد ۲-شناسایی است؛ در درخت b کد C یک کد ۴-شناسایی نیست، زیرا $C \cap V_2 = \emptyset$ است، بنابراین $a_{2,4}$ توسط C یک کد ۴-پوششی نیست.

کدهای ۱- جداکننده تنها در اندازه $4k_1k_2 - 1$ داریم، و این روند را ادامه می‌دهیم تا در مرحله مشخص h متوقف شویم، جایی که تعدادی از رأس‌ها و تعدادی از کدهای ۱-شناسایی بهینه داریم، که برای $1 \leq j \leq h$ به صورت k_j^i s، تعریف می‌کنیم، به طوری که می‌توان در اصل h بهینه و k_j^i s برحسب مرتبه یک گراف بسازیم جایی که تعدادی از کدهای ۱-شناسایی بهینه بدست آوریم، به عنوان $2^{\alpha.n}$ نوشته شده است جایی که n مرتبه گراف نهایی است که دارای بیشترین مقدار α است.

همین که گراف بهینه یا زیر بهینه با مرتبه ثابت n_0 بدست آورده‌ایم، می‌توان p نوعی از آن و یک خانواده متناهی از گراف‌ها با مرتبه $n = pn_0$ بدست آورد، با توجه به لم (۴.۳.۲) تعداد $2^{\alpha.n} = (2^{\alpha.n_0})^p$ کدهای ۱-شناسایی بهینه داریم.

عبارت‌های موجود در فرمول‌های (۷.۲) - (۱۰.۲) نشان می‌دهد که استخراج بهترین ضریب α از نظر تحلیلی و محاسباتی دشوار است. اگر برای انتخاب مرحله ۱۰ را در نظر بگیریم، بنابراین بهتر است که $k_1 = k_2 = \dots = k_9 = 3$ و $k_{10} = 4$ بگیریم، برای اینکه به $\alpha \approx 0.77003$ برسیم (برای ۶۶۹۲۲۱ رأس). در نهایت، این گراف را می‌توان با استفاده از یک رأس کلی متصل کرد که بدون تغییر قابل ملاحظه‌ای در نتیجه α ساخته می‌شود و سپس در قضیه زیر به همین طریق برقرار است.

قضیه ۱.۴.۲. گراف‌های همبند زیادی با n رأس وجود دارند که تقریباً برابر با $2^{0.77003.n}$ کدهای ۱-شناسایی بهینه متمایز است.

ملاحظه ۱.۴.۲. فرض کنیم که گراف G_0 با n_0 رأس داریم، اگر این گراف $s_0 = 2^{\alpha.n_0}$ کدهای ۱-شناسایی بهینه به ازای بعضی $\alpha \in [0, 1]$ و گراف G_0 نیز دارای s_0 کدهای

۱- جدا کننده بهینه باشد، اندازه آن را برابر $1 - id(G_0)$ فرض کنیم، در واقع برای رسیدن به هدف کافیت فقط یک کد ۱- جدا کننده تنها از اندازه $1 - id(G_0)$ داشته باشیم. اگر P_0 نوعی از G_0 در نظر بگیریم، یک گراف G با $n = pn_0$ رأس بدست می‌آوریم، که دارای $2^{\alpha n}$ کدهای ۱- شناسایی بهینه است. اما اگر یک رأس کلی x به گراف G اضافه کنیم، پس با استفاده از گزاره (۱.۳.۲) گراف $G(x)$ که مرتبه آن $pn_0 + 1$ می‌باشد، دارای $2^{\beta(n+1)} = (s_0)^p + p\sigma_0(s_0)^{p-1}$ راه حل است، در حال حاضر برای p به اندازه کافی بزرگ (یعنی $p > s_0 \sigma_0$ و $\sigma_0 > 0$) داریم:

$$n_0 \log_2 \left(1 + p \frac{\sigma_0}{s_0} \right) > n_0 \geq \alpha n_0 = \log_2(s_0),$$

این به این معنی است که

$$\frac{p \log_2(s_0) + \log_2(1 + p \frac{\sigma_0}{s_0})}{pn_0 + 1} > \frac{p \log_2(s_0)}{pn_0},$$

این نشان می‌دهد که

$$\frac{\log_2((s_0)^p + p\sigma_0(s_0)^{p-1})}{n + 1} > \frac{\log_2((s_0)^p)}{n},$$

یعنی $\beta > \alpha$. به این معنی است که به شرطی که برخی از شرایط در گراف G_0 ثابت نگه داشته شوند، که می‌تواند کمی ضریب α را بهبود یابد.

توجه داشته باشیم که شرایط با مکعب سه بعدی و گراف‌های ساخته شده با استفاده از مکعب‌ها که در بالا توضیح دادیم برقرار است.

در ادامه می‌خواهیم کران بالای نابدی در تعدادی از کدهای ۱- شناسایی بهینه متمایز که می‌تواند یک گراف باشد را بدست آوریم.

کران بالا را با $\binom{n}{id}$ نشان دهیم، که یک کران بالا $\binom{n}{p}$ است؛ برای n بزرگ، تعداد $\binom{n}{id}$ می‌توان تقریباً با فرمول استرلینگ بدست آورد، که از آنتروپی دودویی در $id(G)/n$ استفاده می‌شود. این به نوبه خود بازه‌ای به صورت $\ell = [\frac{n}{p} - \lambda n, \frac{n}{p} + \lambda n]$ ایجاد می‌کند که در آن $id(G)$ باید باشد اگر بخواهیم ضریب بهتری از $\alpha \approx 0.77003$ بدست آوریم. متأسفانه این بازه خیلی زیاد است زمانی که بخواهیم از آن استفاده کنیم، پس به صورت $\ell \approx [0.722n, 0.78n]$ بدست می‌آوریم. حدس می‌زنیم که گراف‌های G با بیشترین تعداد کدهای ۱- شناسایی بهینه دارای $id(G)$ نزدیک به $\frac{n}{p}$ هستند. اگر به عقب برگردیم $2^{0.799n}$ کران بالا برای تعدادی از کدهای ۱- شناسایی بهینه متمایز نامبرده است، زیرا بهینگی نتیجه مورد نظر بوده است، که نمی‌توان به طور مستقیم به کدهای ۱- شناسایی اعمال کنیم، با اینکه کد r -شناسایی یک کد r -احاطه‌گر است، کران از طریق الگوریتم بازگشتی بدست می‌آید که حداقل همه‌ی کدهای ۱- احاطه‌گر در گراف n رأسی فهرست می‌کنیم و پایه استقرار است؛ که انطباق این روش با کدهای ۱- شناسایی بسیار دشوار است.

۲. حالت کلی در این قسمت حالت کلی یک کد r -شناسایی بهینه را با استفاده از قضیه‌ها بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۴.۲. برای هر $r \geq 2$ و $k \geq 3$ ، درخت $T_{k,r}$ از مرتبه $n = kr + 1$ وجود دارد، که دارای

$$S_{k,r} = k \left(\binom{k}{2}^{r-1} - \binom{k-1}{1}^{r-1} \right) \quad (11.2)$$

کد r -شناسایی بهینه متمایز از اندازه $2(r-1) + k - 1$ است.

برهان. درخت $T_{k,r}$ به صورت زیر ساخته می‌شود (که در شکل ۲.۳ می‌بینید)؛ مجموعه رأس‌ها مجموعه‌ای به صورت

$$V_{k,r} = \{a_{i,j} : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r\} \cup \{a\}$$

و مجموعه یال‌ها به صورت

$$E_{k,r} = \bigcup_{i=1}^k \{ \{a, a_{i,j}\}, \{a_{i,j}, a_{i,j+1}\} : 1 \leq j \leq r-1 \}$$

می‌باشد.

درخت $T_{k,r}$ را می‌توان به ستاره‌ای با k شاخه به $r-1$ بار تقسیم کرد. مجموعه V_i به صورت مجموعه $\{a_{i,j} : 1 \leq j \leq r\}$ نشان می‌دهیم. رأس $a_{i,j}$ در مرحله j قرار می‌گیرد. بنابراین k برگ‌های درخت که رأس‌ها از مرحله r هستند.

ابتدا مشاهده می‌کنیم که در این مرحله k رأس در مرحله اول دوبه‌دو r -جدا کننده هستند، هر کد r -شناسایی دارای حداقل $k-1$ رأس در مرحله r هستند. در ادامه می‌توان دید که این $k-1$ برگ (یا بیشتر) به صورت کد واژه در C انتخاب می‌کنیم،

۱. رأس a توسط کد C یک کد r -پوششی و توسط کد C یک کد r -جدا کننده برای همه‌ی رأس‌های دیگر است زیرا $K \geq 3$ ؛

۲. هر رأس در V_i توسط C یک کد r -جدا کننده از هر رأس V_l است که $i \neq l$.

بنابراین هر آنچه که در ادامه اثبات لازم است را بیان می‌کنیم:

۱. در هر مجموعه V_i ، برای $1 \leq j \leq r$ رأس‌های $V_{i,j}$ دوبه‌دو r -جدا کننده هستند؛ یک کد لزوماً r -پوششی همه‌ی رأس‌ها در V_i به جز برگ‌ها است.

۲. در صورت لزوم پس از مرحله اول، برگ را که ممکن است در کد r -پوششی نباشد دوباره پوشش داده و وارد کد می‌کنیم.

در ادامه با استفاده و تطبیق لم (۲.۳.۲)، مشاهده می‌کنیم که در این مرحله رأس‌های r -جداکننده درون V_i هستند، کافیست $r-1$ جفت رأس‌های متوالی به کد r -جداکننده به صورت

$$a_{i,1} \text{ و } a_{i,r-2}, \dots, a_{i,r-2} \text{ و } a_{i,r-1}, a_{i,r-1} \text{ و } a_{i,r}$$

تقسیم کنیم. علاوه بر این در مرحله $1 \leq j \leq r-1$ رأس‌های $a_{i,r-j+1}$ و $a_{i,r-j}$ کد r -جداکننده هستند. رأس‌های $a_{l,j}$ با $l \neq i$ تنها گزینه انتخاب شده هستند. از آنجایی که این کار باید برای هر v_i انجام شود، باید برای هر $j \in \{1, \dots, r-1\}$ دو کدواژه در مرحله j انتخاب کنیم. در نتیجه

$$id(T_{k,r}) \geq 2(r-1) + k - 1$$

. در این صورت هر کد C شامل

۱. دارای $k-1$ برگ است،

۲. برای هر $j \in \{1, \dots, r-1\}$ دو رأس در سطح j دارد،

۳. همچنین حداقل یک کدواژه در هر مجموعه V_i وجود دارد (بنابراین توسط C همه‌ی برگ‌ها r - پوششی هستند).

که این کد C یک کد r -شناسایی بهینه در درخت $T_{k,r}$ است. می‌توان k روش از خاصیت (۱) و $\binom{k}{2}^{r-1}$ روش از خاصیت (۲) بدست آورد، در حالی که خاصیت (۳) کدهای C با i_0 به طوری که $C \cap V_{i_0} = \emptyset$ قابل قبول نیستند. همچنین $k \binom{k-1}{2}^{r-1}$ دارای ترکیب قابل قبولی نیست، بنابراین تعداد $(\binom{k}{2}^{r-1} - \binom{k-1}{2}^{r-1})$ کدهای r -شناسایی بهینه متمایز در درخت $T_{k,r}$ وجود دارند. $\square$

نتیجه ۱.۴.۲. برای هر $p \geq 1$ و $r \geq 2$ و $k \geq 3$ یک جنگل $F_{p,k,r}$ از مرتبه $n = p(kr+1)$ وجود دارد، که تعداد

$$S_{p,k,r} = 2^{\frac{n}{kr+1} \log_2(k(\binom{k}{2}^{r-1} - \binom{k-1}{2}^{r-1}))} \quad (12.2)$$

کدهای r -شناسایی بهینه متمایز از اندازه $p(2(r-1) + k - 1)$ داریم.

برهان. با در نظر گرفتن p نوعی از درخت $T_{k,r}$ و اعمال کردن لم (۴.۳.۲) بدست می‌آید. $\square$

برای $r=2$ ، برابری (۱۲.۲) به صورت $S_{p,4,2} = 2^{\frac{n}{4p+1} \log_2(k^2 - k)}$ کاهش می‌یابد، حداکثر عدد صحیح برای $k=4$ به تعداد $S_{p,4,2} = 2^{\frac{\log_2 12}{9} n} \approx 2^{0.398n}$ کدهای ۲-شناسایی بهینه متمایز می‌رسیم.

برای $r=3$ ، برابری (۱۲.۲) حداکثر عدد صحیح برای $k=5$ به تعداد $S_{p,5,3} = 2^{\frac{\log_2 220}{16} n} \approx 2^{0.520n}$ کدهای ۳-شناسایی متمایز بهینه می‌رسیم.

جدول (۱.۲) نشان می‌دهد که اولین مقدار r غیر از $r = ۲$ ، برای $k = ۵$ حداکثر تعداد کدهای r -شناسایی در درخت $F_{p,k,r}$ تعیین می‌شود. در حال حاضر مشاهده می‌کنیم که برای همه مقادیر r از جمله $r = ۱$ ، می‌توان به $۲^{\frac{1+\log_2 5}{5}n} \approx ۲^{۰/۶۶۴n}$ میل کند: برای انجام چنین کاری، اولین مرحله محاسبات توان ۲ در برابری (۱۲.۲) برای k ثابت و r متغیر انجام می‌گیرد: اگر

$$\alpha = \frac{n}{kr+1} \log_2 \left(k \binom{k}{r}^{r-1} - \binom{k-1}{r}^{r-1} \right),$$

آنگاه

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{n}{kr+1} \log_2 \left(\frac{k(k-1)^{r-1}}{2^{r-1}} (k^{r-1} - (k-2)^{r-1}) \right) \\ &= \frac{n}{kr+1} \log_2 \left(\frac{k^r(k-1)^{r-1}}{2^{r-1}} \left(1 - \left(\frac{k-2}{k} \right)^{r-1} \right) \right) \\ &= \frac{n}{kr+1} \log_2 \frac{k^r(k-1)^{r-1}}{2^{r-1}} + n \frac{\log_2 (1 - (\frac{k-2}{k})^{r-1})}{kr+1}. \end{aligned}$$

حال می‌توان دید که برای هر $\epsilon_1 > 0$ ، یک r_1 وجود دارد به طوری که برای هر $r \geq r_1$ داریم

$$\begin{aligned} \alpha &> \frac{n}{kr+1} \log_2 \left(\frac{k^r(k-1)^{r-1}}{2^{r-1}} \right) - n\epsilon_1 = \frac{n}{kr+1} \left(r \log_2 k + (r-1) \log_2 \frac{k-1}{2} \right) - n\epsilon_1 \\ &= n \frac{\log_2 k + \log_2 (k-1) - 1}{k} - n \left(\frac{\log_2 k}{k(kr+1)} + \frac{k+1}{k(kr+1)} \log_2 \frac{k-1}{2} \right) - n\epsilon_1. \end{aligned}$$

برای هر $\epsilon_2 > 0$ ، یک r_2 وجود دارد به طوری که برای هر $r \geq \max(r_1, r_2)$ داریم

$$\alpha > n \frac{\log_2 k + \log_2 (k-1) - 1}{k} - n\epsilon_1 - n\epsilon_2.$$

در عبارت بالا از n فاکتور می‌گیریم که $\frac{\log_2 k + \log_2 (k-1) - 1}{k}$ برای بزرگترین $k = ۵$ بدست می‌آوریم، جایی $\frac{1+\log_2 5}{5} \approx ۰/۶۶۴$ برابر است، بنابراین قضیه زیر را نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۳.۴.۲. برای هر $\epsilon > 0$ حقیقی، یک r_0 صحیح وجود دارد به طوری که برای هر عدد صحیح $r \geq r_0$ ، تعداد زیادی جنگل با $n = p(5r+1)$ رأس وجود دارد، تعداد $\lfloor 2^{(\frac{1+\log_2 5}{5}-\epsilon)n} \rfloor$ کدهای r -شناسایی متمایز دارند.

نتیجه اصلی این بخش در حال حاضر یک نتیجه از قضیه (۳.۴.۲) است که برای تمام مقادیر r ، از جمله $r = ۱$ ، برقرار است و می‌تواند توسط گراف‌های همبند بدست آید.

نتیجه ۲.۴.۲. فرض کنیم $r \geq ۱$ صحیح و $\epsilon > 0$ حقیقی باشد. تعداد زیادی گراف‌های همبند با n رأس وجود دارد که تعداد $\lfloor 2^{(\frac{1+\log_2 5}{5}-\epsilon)n} \rfloor$ کدهای r -شناسایی متمایز دارند.

جدول ۱.۲: برای هر مقدار k و r ($r = 10, 2 \leq r \leq 6$ ، و $3 \leq k \leq 6$) و با $p = \frac{n}{kr+1}$ در سطر اول تعدادی از قسمت‌های $S_{k,r}$ که در رابطه (۱۱.۲) و در سطر دوم به طور تقریبی تعدادی از $S_{p,k,r}$ که در برابری (۱۲.۲) داده شده است. گلوله‌ها بیشترین مقدار $S_{p,k,r}$ برای r داده شده است.

r	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
۲	۶ $20/369n$	۱۲ $20/398n$	۲۰ $20/392n$	۳۰ $20/378n$
۳	۲۴ $20/459n$	۱۰۸ $20/5196n$	۳۲۰ $20/5202n$	۷۵۰ $20/502n$
۴	۷۸ $20/483n$	۷۵۶ $20/563n$	۳۹۲۰ $20/568n$	۱۴۲۵۰ $20/553n$
۵	۲۴۰ $20/494n$	۴۸۶۰ $20/583n$	۴۳۵۲۰ $20/593n$	۲۴۳۷۵۰ $20/577n$
۶	۷۲۶ $20/501n$	۳۰۱۳۲ $20/596n$	۴۶۱۱۲۰ $20/607n$	۳۹۵۶۲۵۰ $20/592n$
۱۰	۵۹۰۴۶ $20/511n$	۴۰۲۳۲۰۵۲ $20/617n$	۴۹۴۹۶۱۱۵۲۰ $20/632n$	۲۲۴۶۶۰۱۵۶۲۵۰ $20/618n$

برهان. فرض کنیم R_0 در شرایط قضیه (۳.۴.۲) با $p = 1$ اعمال کرده‌ایم: برای $R \geq R_0$ یک درخت T وجود دارد، یعنی یک گراف همبند با $n = 5R + 1$ مرتبه وجود دارد، که تعداد $\lfloor 2^{(\frac{1+\log_2 5}{5}-\epsilon)n} \rfloor$ کدهای R -شناسایی بهینه متمایز بدست می‌آید. با انتخاب $R \geq R_0$ چند برابر از $r: R = qr$ ، و در نظر گرفتن توان q ام از درخت T ، که به صورت T^q : در نظر می‌گیریم پس T^q همبند است، بنابراین تعداد $n = 5R + 1 = 5qr + 1$ رأس و $\lfloor 2^{(\frac{1+\log_2 5}{5}-\epsilon)n} \rfloor$ کدهای r -شناسایی بهینه داریم، باتوجه به لم (۱.۳.۲)، هر کد R -شناسایی در درخت T یک کد r -شناسایی در درخت T^q است جایی که $R = qr$ می‌باشد و برعکس.

□

فصل ۳

کوچکترین اندازه کدهای شناسایی روی تمام جهت‌دهی‌های گراف

۱.۳ مقدمه

در این فصل، قصد داریم برخی کران‌های بالا و پایین را برای پارامتر $idor(G)$ به دست آوریم. به خصوص، نشان می‌دهیم که برای هر گراف G ، همواره داریم $idor(G) \leq \frac{3}{4}|V(G)|$. همچنین نشان می‌دهیم که مسأله‌ی محاسبه $idor(G)$ ، یک مسأله‌ی NP – سخت بوده، در حالی که مسأله تصمیم اینکه آیا نامساوی $idor(G) \leq |V(G)| - k$ برای هر عدد صحیح ثابت k ، برقرار می‌باشد یا نه، یک مسأله‌ی حل‌پذیر در زمان چندجمله‌ای است.

۲.۳ برخی ویژگی‌های اولیه از کدهای شناسایی

به وضوح، اگر گراف G دارای دو رأس دو قلو مانند u و v باشد، بنابراین در این گراف برای هر زیر مجموعه $C \subseteq V(G)$

هیچ کد شناسایی وجود ندارد زیرا $I_C(u) = I_C(v)$. برعکس، اگر گراف G فاقد رأس دوقلو^۱ باشد، آنگاه مجموعه تمام رأس‌های گراف یعنی $V(G)$ خود یک کد شناسایی می‌باشد. لذا

^۱Twin-free

گزاره زیر را داریم.

گزاره ۱.۲.۳. گراف دارای کد شناسایی است اگر و تنها اگر فاقد رأس دوقلو باشد.

بنا به گزاره (۱.۲.۳) می‌توان گفت $id(G)$ متناهی است اگر و تنها اگر گراف G فاقد رأس دوقلو باشد.

کدهای شناسایی، بعد از معرفی آن‌ها در مرجع [۲۳]، به طور وسیعی مورد مطالعه قرار گرفتند و از آن‌ها در مسائل مختلفی نظیر تشخیص خطا در سیستم‌های چند پردازنده که در مرجع [۲۳]، مسیر یابی فشرده در شبکه‌ها در مراجع [۲۴، ۲۵]، شبکه‌های حسگر اضطراری در تأسیسات در مرجع [۳۵]، یا تجزیه و تحلیل ساختارهای ثانویه RNA در مرجع [۳۷] می‌توان نام برد. به خصوص، در مرجع [۱۲] ثابت شده است که مسأله تعیین دقیق مقدار $id(G)$ برای گراف G یک مسأله NP - سخت است.

کدهای شناسایی اولین بار در گراف‌های بدون جهت مورد مطالعه قرار گرفت. اما، این مفهوم به طور طبیعی به گراف‌های جهت‌دار^۲ و سودار^۳ گسترش یافت که در مراجع [۱۱، ۱۴] می‌توان دید.

اگر گراف جهت‌دار D دارای دو رأس دوقلو مانند u و v باشد، آنگاه در این گراف برای هر زیر مجموعه $C \subseteq V(D)$ هیچ کد شناسایی وجود ندارد زیرا $I_C(u) = I_C(v)$. برعکس، اگر گراف D فاقد رأس دوقلو است، آنگاه مجموعه رأس‌های $V(D)$ کد شناسایی هستند. لذا گزاره زیر را بیان می‌کنیم.

گزاره ۲.۲.۳. گراف جهت‌دار دارای کد شناسایی است اگر و تنها اگر فاقد رأس دوقلو باشد. به عبارت دیگر هرگراف جهت‌دار یک کد شناسایی است.

بنا به گزاره (۲.۲.۳) می‌توان گفت $id(D)$ متناهی است اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار D فاقد رأس دوقلو باشد.

به وضوح، مجموعه C یک کد شناسایی در گراف G است اگر و تنها اگر یک کد شناسایی برای گراف جهت‌دار D_G باشد. از این رو همه نتایج بدست‌آمده برای کدهای شناسایی روی گراف‌ها را می‌توان به عنوان نتایجی کدهای شناسایی روی گراف‌های جهت‌دار متقارن^۴ دید. به خصوص، تعیین مقدار دقیق $id(D)$ برای یک گراف جهت‌دار متقارن نیز یک مسأله NP - سخت می‌باشد. چارن و هاردی در مرجع [۱۲] مقدار دقیق $id(D)$ محاسبه کردند حتی اگر D یک گراف جهت‌دار دوبخشی فاقد دور باشد، و به ویژه اگر D گراف سودار نیز باشد.

لم ۱.۲.۳. فرض کنیم D گراف جهت‌دار فاقد رأس دوقلو از مرتبه n باشد. در این صورت

$$\log_2(n+1) \leq id(D) \leq n. \quad (1.3)$$

²Directed

³Oriented

⁴symmetric digraph

برهان. فرض کنید C یک کد شناسایی از گراف جهت‌دار D باشد، در اینصورت مجموعه‌های شناساگر زیر مجموعه‌های غیر تهی مجزا کد شناسایی C هستند، بنابراین

$$n \leq 2^{|C|} - 1 \implies 2^{|C|} \geq n + 1 \implies \log_2 2^{|C|} \geq \log_2(n + 1) \implies |C| \geq \log_2(n + 1).$$

از طرفی، $|C| \leq n$ جایی که C زیرمجموعه‌ای از $V(D)$ است. بنابراین داریم

$$\log_2(n + 1) \leq id(D) \leq n.$$

□

فرض کنیم G گراف بدون جهت از مرتبه n باشد، ما می‌خواهیم D گراف حاصل از جهت‌دهی گراف G را بدست آوریم به گونه‌ای که گراف جهت‌دار D حاصل طوری باشد که $id(D)$ تا هر اندازه امکان دارد کوچک باشد. که فرض می‌کنیم کمترین مقدار $id(D)$ از جهت‌دهی‌های ممکن D از G را با نماد $idor(G)$ نشان می‌دهیم.

پس از رابطه (۱.۳) و اینکه $idor(G) \leq id(D)$ به‌طور مستقیم نتیجه زیر بدست می‌آید

$$\log_2(n + 1) \leq idor(G) \leq n. \quad (2.3)$$

کران‌ها در این رابطه دقیق است. اگر E_n ، گراف‌های تهی از مرتبه n باشد رابطه $idor(E_n) = n$ ، و اگر K_n ، گراف کامل از مرتبه n باشد، رابطه $idor(K_n) = \lceil \log_2(n + 1) \rceil$ صدق می‌کند (در گزاره ۳.۲.۳ ثابت خواهیم کرد). با توجه به مطالب قبل این واقعیت که کران بالا^۵ و کران پایین^۶ پارامتر $idor$ به ترتیب توسط گراف‌های تهی و گراف‌های کامل بدست می‌آید، به این دلیل که پارامتر $idor$ با افزایش یال کاهش می‌یابد (در گزاره ۵.۲.۳ نشان داده است). در بخش ۳، کران‌های بالا بیشتری با استفاده از پارامترهای مختلف گرافی بدست می‌آوریم. همچنین برخی از درخت‌ها را در نظر می‌گیریم: نشان می‌دهیم برای درخت T از مرتبه حداقل ۵ داریم

$$\frac{|V(T)| + 1}{2} \leq idor(T) \leq \frac{4}{3}\alpha(T),$$

که در آن $\alpha(T)$ حداکثر اندازه یک مجموعه پایدار T است.

در بخش ۴، ارتباط بین پارامترهای id و $idor$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به صورت مشابه، با توجه به رابطه ۱.۳، برای هر گراف فاقد رأس دوقلو G داریم $\log_2(n + 1) \leq id(G) \leq n$. علاوه بر این، Gravier و Moncel در مرجع [۳۳] ثابت کردند که هر گراف فاقد رأس دوقلو غیر تهی G از مرتبه n در رابطه $id(G) \leq n - 1$ صدق می‌کند. از این‌رو، با استفاده از رابطه ۲.۳، برای هر گراف فاقد رأس دوقلو G بدست می‌آوریم $idor(G) \leq 2^{id(G)} - 1$ و $id(G) \leq 2^{idor(G)} - 2$. به این سوال می‌رسیم که آیا این کران‌هایی که بدست آوردیم کران‌های دقیق هستند یا نه. در

^۵bound upper

^۶lower bound

قضیه ۲.۴.۳ ثابت می‌کنیم که $idor(G) \leq \frac{2}{3} id(G)$ ، و در گزاره ۱.۴.۳، نشان می‌دهیم کران دقیق است. Foucaud در مرجع [۱۰] نشان می‌دهد که گراف‌های فاقد رأس دوقلو G وجود دارند که در مورد آن‌ها $id(G) \leq 2^{idor(G)} - 2$ داریم، که در گزاره ۲.۴.۳ می‌توان دید. در بخش ۵، پیچیدگی محاسباتی تعیین مقدار پارامتر $idor(G)$ و مسأله تصمیم متناظر با آن را بررسی می‌کنیم.

IDOR

ورودی: G گراف و k عدد صحیح.

سوال: آیا $idor \leq k$ ؟

ثابت می‌کنیم که این مسأله NP – کامل است (قضیه ۱.۵.۳). از طرفی، اگر k مقدار عددی ثابت باشد، آنگاه تعیین اینکه چه زمانی $idor(G) \leq K$ می‌تواند در یک زمان چند جمله‌ای انجام شود. در واقع، با توجه به رابطه ۲.۳، گرافی که در شرط $idor(G) \leq K$ صدق می‌کند. دارای مرتبه حداکثر $2^k - 1$ می‌باشد. لذا ما جواب 'NO' را ارسال می‌کنیم اگر $|V(G)| \geq 2^k$ و همه‌ی حالت‌های ممکن را برای حالتی که $|V(G)| \leq 2^k - 1$ بررسی می‌کنیم (حداکثر $2^{|E(G)|} \leq 2^{|V(G)|^2}$ جهت‌دهی ممکن وجود دارد و برای هر یک از آن‌ها حداکثر $\binom{2^k}{|V(G)|} \leq \binom{2^k}{2^k - 1}$ مجموعه‌ای متشکل از k رأس‌ها وجود دارد). این روند فوق نشان می‌دهد که مسأله فوق می‌تواند در زمان FTP انجام شود جایی که توسط پارامتر k پارامتر بندی شده باشد. یک مسأله جالب این است که بررسی کنیم چه زمانی $idor(G)$ نزدیک به کران پایین

$$\log_2(|V(G)| + 1) + 1$$

می‌باشد.

مسأله ۱.۲.۳. پیچیدگی محاسباتی مسأله زیر جایی که توسط k پارامتر بندی شده باشد چیست؟

SMALL – IDOR

ورودی: G گراف و k عدد صحیح نا منفی باشد.

سوال: آیا $idore(G) \leq \log_2(|V(G)| + 1) + k$ ؟

به صورت متناظر، تعیین اینکه آیا چه زمانی $idore(G)$ نزدیک به کران بالا $|V(G)|$ می‌باشد نیز مسأله جالبی است.

IDOR – LARGE

ورودی: G گراف و k عدد صحیح نا منفی باشد.

سوال: $idore(G) \geq |V(G)| - k$ ؟

در قضیه ۲.۵.۳ ثابت می‌کنیم که این مسأله در کلاس XP قرار دارد جایی که توسط پارامتر k پارامتر بندی شده باشد. یعنی، مسأله $LARGE - IDOR$ برای هر مقدار ثابت k مسأله فوق در زمان چند جمله‌ای حل می‌شود. لذا به صورت طبیعی سوال زیر مطرح می‌شود.

مساله ۲.۲.۳. آیا پارامتر $LARGE - IDOR$ یک مساله FTP جایی که توسط k پارامتر بندی می‌شود است.

برای هر عدد صحیح مثبت n ، مجموعه $\{1, \dots, n\}$ را به صورت $[n]$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۳.۲.۳. $idore(K_n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

برهان. مجموعه $\{1, \dots, i\}$ را با $[i]$ نشان می‌دهیم.

مجموعه $k = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ مجموعه‌ای از k رأس از گراف کامل K_n و $Y = V(K_n) \setminus X$ باشد. یال‌های گراف القا شده $K_n[X]$ به صورت متعددی جهت‌دهی می‌کنیم، یعنی $x_i x_j$ کمان است اگر و تنها اگر $j > i$ باشد. فرض کنیم $I = \{[i] \mid 1 \leq i \leq k\}$. اگر رأس‌های Y را با زیر مجموعه غیرتهی مجزا $[k]$ که در I نیستند برچسب گذاری می‌کنیم. برچسب گذاری را می‌توان انجام داد زیرا $n \leq 2^k - 1$ بنابراین $n - k \leq 2^k - 1 - k$. پس Y رابه صورت دلخواه جهت‌دهی می‌کنیم. سرانجام، یال yx_i را از y به x_i جهت‌دهی می‌کنیم اگر و تنها اگر i در برچسب گذاری y باشد یعنی در $L_y = (\{1, \dots, k\} \setminus \{\emptyset\} \cup I)$ قرار داشته باشند. می‌دانیم که اگر $y \neq y'$ آنگاه $L_y \neq L_{y'}$. حال نتیجه جهت‌دهی شده حاصل برای گراف کامل K_n را با D نشان می‌دهیم.

می‌خواهیم ثابت کنیم X یک کد شناسایی برای D است. لذا باید نشان دهیم برای هر $x, y \in V(K_n)$ که $x \neq y$ داریم $N^+[x] \neq N^+[y]$ ، بنابراین سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. اگر $x = x_i, y = y_i \in X$ که $i < j$ در اینصورت

$$N^+[x_i] \cap X = \{x_\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq i\} = \{x_1, \dots, x_i\}$$

$$N^+[x_j] \cap X = \{x_\beta \mid 1 \leq \beta \leq j\} = \{x_1, \dots, x_j\}$$

که با هم برابر نیستند چون L_y ها متمایز برابر هستند.

۲. اگر $x_i \in X$ و $z \in Y$ در اینصورت

$$N^+[x_i] \cap X = \{x_\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq i\} = \{x_1, \dots, x_i\}$$

$$N^+[x_j] \cap X = \{x_\beta \mid \beta \in L_y\}$$

با هم برابر نیستند زیرا $L_y \notin I$.

۳. اگر $z, y \in Y$ که $x \neq z$ در اینصورت

$$N^+[y] \cap X = \{x_\alpha \mid \alpha \in L_y\}$$

$$N^+[z] \cap X = \{x_\beta \mid \beta \in L_z\}$$

که با هم برابر نیستند چون L_y ها متمایز برابر هستند. لذا X یک کد شناسایی از اندازه k است

پس $idore(K_n) \leq id(D) \leq k$ از طرفی با توجه به رابطه ۲.۳، نتیجه می‌گیریم

$$idor(K_n) \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil$$

بنابراین از دو رابطه اخیر حکم ثابت می‌شود. $\square$

در این گزاره نشان دادیم که کران پایین $\log_2(n+1) \leq idor(G)$ از رابطه ۲.۳ یک کران دقیق است. گراف‌های تهی نشان می‌دهد که کران بالا $idor(G) \leq n$ از رابطه ۲.۳ یک کران دقیق است. حال برای تمام گراف‌های G از مرتبه n که برای آن‌ها $idor(G) = n$ به طور کامل دسته‌بندی می‌کنیم. در ادامه لم مهم زیر که به آن نیاز داریم بیان و اثبات می‌کنیم.

لم ۲.۲.۳. فرض کنیم G گراف باشد، (V_1, V_2) افرازی از رأس‌های G ، و مجموعه $G_i = G[V_i]$ باشد. بنابراین

$$idor(G) \leq idor(G_1) + idor(G_2).$$

برهان. برای $i = 1, 2$ ، فرض کنید D_i یگراف حاصل از جهت‌دهی گراف G_i باشد که دارای کد شناسایی C_i از مرتبه $idor(G)$ است. حال فرض کنید D گراف جهت‌دار حاصل از گراف G باشد که از D_1 و D_2 بدست می‌آید به گونه‌ای که همه‌ی یال‌های بین V_1 و V_2 که از V_1 به V_2 جهت‌دهی می‌کنیم. حال ثابت می‌کنیم که $C_1 \cup C_2$ یک کد شناسایی از D است. واضح است که برای هر رأس v داریم $I_C(v) \neq \emptyset$ زیرا $I_{C_1}(v)$ یا $I_{C_2}(v)$ غیر تهی هستند. فرض کنید u و v دو رأس باشد. اگر u و v هر دو در V_2 باشند، سپس $I_C(u) = I_{C_2}(u) \neq I_{C_2}(v) = I_C(v)$. اگر u و v هر دو در C_1 باشند بنابراین $I_C(u) \cap V_1 \neq I_{C_1}(u) \neq I_{C_2}(v) = I_C(v) \cap V_1$. پس $I_C(u) \neq I_C(v)$. اگر $u \in V_1$ و $v \in V_2$ ، سپس $I_C(u) \cap V_1 \neq \emptyset$ و $I_C(v) \cap V_1 = \emptyset$ ، بنابراین $I_C(u) \neq I_C(v)$. علاوه‌براین، همه‌ی شناسه‌ها (نسبت به C) متمایز هستند. $\square$

نتیجه ۱.۲.۳. فرض کنید G گراف و k عدد صحیح باشد. اگر G دارای زیر گراف القا شده H به طوری که $idor(H) \leq |V(H)| - k$ ، باشد بنابراین $idor(G) \leq |V(G)| - k$.

نتیجه ۲.۲.۳. فرض کنیم G_1 و G_2 دو گراف باشند. دراینصورت

$$idor(G_1 + G_2) = idor(G_1) + idor(G_2)$$

برهان. با توجه به لم ۲.۲.۳، داریم $idor(G_1 + G_2) \leq idor(G_1) + idor(G_2)$. کفایت نشان دهیم $idor(G_1 + G_2) \geq idor(G_1) + idor(G_2)$. حال کد شناسایی C از گراف جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی $G_1 + G_2$ در نظر می‌گیریم. برای $i = 1, 2$ ، فرض می‌کنیم $C_i = C \cap V(G_i)$ و $D_i = D[C_i]$. نشان می‌دهیم که C_i یک کد شناسایی برای گراف جهت‌دار D_i است، ابتدا برای $i = 1$ یعنی کدشناسایی C_1 ثابت می‌کنیم که برای C_2 نیز برقرار است. حال بررسی می‌کنیم که C_1 کدشناسایی برای گراف G_1 است. هر رأس u در $V(G_1)$ نشان می‌دهیم که $N[u] \cap C_1 \neq \emptyset$ از طرفی $C_1 = C \cap V(G_1)$. از اینکه $u \in V(G_1)$ چون $G = G_1 + G_2$ نتیجه می‌گیریم $u \in V(G)$ ، از طرفی C یک کد شناسایی برای $G = G_1 + G_2$ است پس $N[u] \cap C \neq \emptyset$ بنابراین با توجه به اینکه $N[u] \cap C \subseteq V(G)$ داریم $N[u] \cap C_1 = N[u] \cap (C \cap V(G_1)) = (N[u] \cap C) \cap V(G_1)$ چون $N[u] \cap C \subseteq V(G)$

است، بنابراین تساوی اخیر برابر $N[u] \cap C$ است که بنابه ۲.۳ ناتهی می‌باشد. حال دو رأس مجزا $u, v \in V(G_1)$ در نظر می‌گیریم نشان می‌دهیم که $N[u] \cap C_1 \neq N[v] \cap C_1$ با توجه به اینکه $u, v \in V(G_1)$ پس $u, v \in V(G)$ چون C یک کدشناسایی برای گراف G است. بنابراین $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$ حال داریم

$$N[u] \cap C_1 = N[u] \cap (C \cap V(G_1)) = (N[u] \cap C) \cap V(G_1) = N[u] \cap C$$

و همچنین $N[v] \cap C_1 = N[v] \cap (C \cap V(G_1)) = (N[v] \cap C) \cap V(G_1) = N[v] \cap C$ با توجه به ۲.۳ نتیجه می‌گیریم که $N[u] \cap C_1 \neq N[v] \cap C_1$ بنابراین C_1 کدشناسایی برای گراف G_1 است. چون C_1 کدشناسایی برای گراف G_1 است پس $|C_1| \leq idor(G_1)$ و چون C_2 کدشناسایی برای گراف G_2 است پس $|C_2| \leq idor(G_2)$. بنابراین

$$idor(G_1 + G_2) = |C_1| + |C_2| \geq idor(G_1) + idor(G_2).$$

□

گزاره ۴.۲.۳. فرض کنیم گراف G از مرتبه n باشد. بنابراین $idor(G) = n$ اگر و تنها اگر G یک اجتماع مجزا از نوعی از K_2 و نوعی از K_2 است.

برهان. واضح است که اگر G اجتماع مجزا نوعی از K_1 و نوعی از K_2 باشد، آنگاه $idor(G) = n$. حال نشان می‌دهیم اگر $idor(G) = n$ آنگاه G یک اجتماع مجزا از نوعی از K_1 و نوعی از K_2 است.

فرض می‌کنیم که G یک اجتماع مجزا از نوعی از K_1 و نوعی از K_2 نیست. بنابراین به برهان خلف فرض می‌کنیم گراف G دارای زیر گراف القا شده ایزومورفیک است که به صورت P_3 مسیری از مرتبه ۳، یا K_2 گراف کامل از مرتبه ۳ است. گراف کامل K_3 را به صورت چرخه جهت‌دار $\vec{C}_3$ جهت‌دهی می‌کنیم و P_3 به صورت مسیر جهت‌دار $\vec{P}_3$ جهت‌دهی می‌کنیم. این دو گراف جهت‌دار دارای کد شناسایی از اندازه ۲ هستند، از این‌رو $idor(K_3), idor(P_3) \leq 2$. بنابراین، با توجه به نتیجه ۱.۲.۳، داریم $idor(G) \leq n - 1$. □

این گزاره بیان می‌کند که می‌توان در زمان چند جمله‌ای تصمیم گرفت که آیا گراف G از مرتبه n در رابطه $idor(G) \leq n - 1$ صدق می‌کند. در زیر بخش ۲.۵.۳، نشان خواهیم داد که برای هر مقدار ثابت k ، مسأله فوق در زمان چند جمله‌ای حل می‌شود که تصمیم بگیریم آیا برای گراف G از مرتبه n در رابطه $idor(G) \leq n - k$ صدق می‌کند.

گزاره ۵.۲.۳. فرض کنیم G گراف و H زیر گراف فراگیر از G باشد. بنابراین

$$idor(G) \leq idor(H).$$

برهان. کفایت اثبات را برای $H = G \setminus e$ در آن $e = xy$ برخی از یال‌ها است نشان دهیم. پس نتیجه را با استقرا ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم گراف D یک جهت‌دهی از گراف فراگیر H باشد که دارای کد شناسایی C از اندازه $idor(H)$ باشد یعنی $|C| = idor(H)$. فرض می‌کنیم $U = V(G) \setminus C$ حال برای رأس انتهایی e ، دو حالت اتفاق می‌افتد. مثلاً y در U قرار بگیرد $y \in C$ ، بنابراین D' یک جهت‌دهی اصل از گراف G که از D با اضافه کردن کمان xy بدست می‌آید. برای هر $v \in V(G)$ داریم $I_{C,D'}(v) = I_{C,D}(v) \implies N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$ چون رأس انتهایی e در U است پس به C تعلق ندارد و برابری اخیر برقرار است. از این رو C یک کد شناسایی برای گراف جهت‌دار D' می‌باشد. به این ترتیب بنا به تعریف $idor$ داریم $idor(G) \leq |C| = idor(H)$. حالت دیگر یعنی فرض کنیم که هر دو رأس انتهایی e در U قرار نگیرد (یعنی هر دو رأس x و y در کد C قرار دارند). فرض کنیم D' یک جهت‌دهی بدست‌آمده از گراف D با اضافه کردن کمان xy باشد. برای هر دو رأس $v \in V(G) \setminus \{x\}$ داریم $I_{C,D'}(v) = I_{C,D}(v)$ یعنی $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$ حال برای رأس x دو حالت اتفاق می‌افتد اگر $x \neq v$ و $v \in V(G)$ پس $I_{C,D'}(x) \neq I_{C,D'}(v)$ آنگاه C یک کد شناسایی برای D' می‌باشد. اگر وجود داشته باشد یک رأس مانند u در گراف G به گونه‌ای که $x \neq u$ پس $N_{D'}^+[u] \cap C = I_{C,D'}(u) = I_{C,D'}(x) = N_{D'}^+[x] \cap C$ ابتدا فرض کنیم $x \in C$ با توجه به رابطه ۲.۳ نتیجه می‌گیریم $u \notin C$ بنابراین رأس u حتماً باید در U قرار گیرد، و با توجه به خاصیت مجموعه احاطه‌گر رأس u باید رأس y را احاطه کند. فرض کنیم D'' یک جهت‌دهی حاصل از G که با تغییر دادن کمان uy به yu بدست می‌آید. بنابراین برای هر رأس $v \in V(G) \setminus \{x, u\}$ داریم $I_{C,D''}(v) = I_{C,D}(v)$ پس $I_{C,D'}(x) = I_{C,D}(u)$ و در نتیجه $I_{C,D'}(u) = I_{C,D}(x)$. از این رو C یک کد شناسایی برای گراف جهت‌دار D'' است. حال بنابه تعریف $idor$ داریم $idor(G) \leq idor(H) = |C|$. پس در هر دو حالت نتیجه می‌گیریم که $idor(G) \leq idor(H)$. $\square$

۳.۳ کران‌ها برای $idor(G)$ با استفاده از پارامترهای مختلف

در این بخش، به بررسی کران بالا، کران پایین و هم رده‌ای از گراف‌ها علی‌الخصوص درختان برای پارامتر $idor(G)$ می‌پردازیم.

۱.۳.۳ کران‌های بالا

ابتدا کران بالا را برای پارامتر $idor(G)$ بدست می‌آوریم. در گزاره‌ای که در ادامه بیان می‌کنیم کران بالا را با استفاده از اندازه گراف G و عدد خوشه‌ای آن مطرح می‌کنیم. گزاره ۳.۲.۳ و نتیجه ۱.۲.۳ به طور دقیق به گزاره زیر اشاره می‌کنند.

گزاره ۱.۳.۳. برای تمام گراف‌های G داریم

$$idor(G) \leq |V(G)| - \omega(G) + \lceil \log_2(\omega(G) + 1) \rceil.$$

گزاره ۱.۳.۳ برای گراف‌های کامل و اجتماع مجزا نوعی از K_1 ، نوعی از K_2 و گراف کامل دقیق است. بنابراین، ممکن است کران‌های بالا بهتری را برای گراف‌های دیگر انتظار داشته باشیم، به عنوان مثال برای گراف‌های جهت‌دار فاقد مثلث را می‌توان نام برد.

گزاره ۴.۲.۳ نشان می‌دهد که $idor(G) \leq n - 1$ اگر و تنها اگر $\delta(G) \geq 2$. از این‌رو این بحث را برای گراف‌هایی با حداقل درجه بزرگتر گسترش می‌دهیم. که در گزاره زیر کران بالا را با اندازه گراف و حداقل درجه گراف بدست می‌آوریم.

گزاره ۲.۳.۳. برای هر گراف G ، داریم $idor(G) \leq |V(G)| - \delta(G)/2 + 1$.

برهان. نتیجه را با استقرا روی $|V(G)|$ ثابت می‌کنیم، بنابراین وقتی که $\delta(G) \leq 1$ ، آنگاه بنابه ۴.۲.۳، $idor(G) = n \leq n - \delta(G)/2 + 1$. وقتی که $1 \leq \delta(G) \leq 4$ ، با توجه به گزاره ۴.۲.۳ داریم $idor(G) \leq n - 1 \leq n - \delta(G)/2 + 1$.

حال فرض کنیم G گراف با $\delta(G) \geq 5$ باشد. در صورت لزوم گراف G دارای دور است. فرض کنیم C کوتاهترین دور در گراف G باشد. همچنین فرض کنیم $G' = G - C$. جایی که C کوتاهترین دور است، پس هر رأس G در $V(G')$ دارای حداکثر سه همسایگی در C است. از آنجا که C کوچکترین دور در G است لذا C القایی است بنابراین هر رأس واقع در C دقیقاً دارای دو همسایه است ولی اگر v رأس خارج از C باشد و دارای ۴ همسایگی u_1, u_2, u_3, u_4 در C باشد (این رأس‌ها روی دور به ترتیب قرار گرفته‌اند). آنگاه دور حاصل از حذف مسیر $u_1 \dots u_2 \dots u_3 \dots u_4$ از دور C و اضافه کردن مسیر $u_1 v u_4$ دوری با طول کمتر است که این تناقض است. بنابراین $\delta(G') \geq \delta(G) - 3$.

حال فرض می‌کنیم که $\delta(G') \geq \delta(G) - 2$. با توجه به فرض استقرا،

$$\delta(G') \leq |V(G')| - \delta(G')/2 + 1 \leq |V(G)| - \delta(G)/2 + 2.$$

علاوه بر این با توجه به گزاره ۴.۲.۳، داریم $idor(C) \leq |V(C)| - 1$ از این‌رو با توجه به لم ۲.۲.۳، نتیجه می‌گیریم که

$$idor(G) \leq idor(G') + idor(C) \leq |V(G)| - \delta(G)/2 + 2 + |V(C)| - 1 \leq |V(G)| - \delta(G)/2 + 1.$$

حال فرض می‌کنیم که $\delta(G') = \delta(G) - 3$. رأس v از گراف G' وجود دارد که دارای سه همسایگی در C است. جایی که C کوتاهترین دور است، این نشان می‌دهد که $|C| = 3$. بنابراین $V(C) \cup \{v\}$ یک خوشه در چهار رأس است، که $K = \{t, u, v, w\}$ می‌نامیم. جایی که $\delta(G) \geq 5$ ، رأس‌های متمایز v' و w' در $G - K$ وجود دارند به طوری که v' مجاور v و w' مجاور w است. مجموعه $H = G - K \cup \{v', w'\}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم D گراف

جهت‌دار حاصل از گراف H باشد به طوری که t یک منبع است، (u, v, w, u) یک دور جهت‌دار است، $\{v'v, w'w\} \subset A(D)$ و همه‌ی یال‌های دیگر بین $\{u, v, w\}$ و $\{u', w'\}$ به سمت $\{u', w'\}$ جهت‌دهی می‌کنیم. مجموعه $\{u, v, w\}$ یک کد شناسایی از گراف جهت‌دار D که به صورت $I(w') = \{w\}$ و $I(v') = \{v\}$ ، $I(w) = \{w, u\}$ ، $I(v) = \{v, w\}$ ، $I(u) = \{u, v\}$ ، $I(t) = \{u, v, w\}$ است. بنابراین $idor(H) \leq 3$. بدیهی است که $\delta(G - H) \leq \delta(G) - 6$ با توجه به فرض استقرا، $idor(G - H) \leq |V(G - H)| - \delta(G - H)/2 + 1 \leq |V(G)| - 6\delta(G - 6)/2 + 1 \leq |V(G)| - \delta(G)/2 - 2$. بنابراین، با توجه به **۲.۲.۳**، داریم

$$idor(G) \leq idor(H) + idor(G - H) \leq 3 + |V(G)| - \delta(G)/2 - 2 \leq |V(G)| - \delta(G)/2 + 1.$$

□

گزاره ۳.۳.۳ (Folklore) هر گراف شامل یک زیر گراف (القایی) با کمترین درجه حداقل $Ad(G)/2$ است.

با توجه به گزاره‌های **۲.۳.۳**، **۳.۳.۳** و **۴.۲.۳** نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۱.۳.۳. برای هر گراف G ، داریم

$$idor(G) \leq |V(G)| - Mad(G)/4 + 1 \leq |V(G)| - Ad(G)/4 + 1.$$

با توجه به نتیجه قبل مسأله کلی زیر را مطرح می‌کنیم:

مسأله ۱.۳.۳. • حداکثر مقدار $g(k)$ به طوری که $idor(G) \leq |V(G)| - g(k)$ برای هر گراف G با $\delta(G) \geq k$ چقدر است؟

• حداکثر مقدار $g_1(\alpha)$ به طوری که $idor(G) \leq |V(G)| - g_1(\alpha)$ برای هر گراف G با $Ad(G) \geq \alpha$ چقدر است؟

• حداکثر مقدار $g_2(\alpha)$ به طوری که $idor(G) \leq |V(G)| - g_2(\alpha)$ برای هر گراف G با $Mad(G) \geq \alpha$ چقدر است؟

با توجه به مسأله قبل نشان می‌دهیم که $g_1 = g_2$:

برای همه G ‌هایی که $Mad(G) \geq \alpha$ فرض کنیم G یک گراف دلخواه باشد که $Ad(G) \geq \alpha$ از آنجایی که $Ad \leq Mad$ چون $g_2(\alpha)$ بیشترین مقدار ممکن است که

$$idor(G) \leq |V(G)| - g_2(\alpha),$$

بنابراین $g_1(\alpha) \geq g_2(\alpha)$.

برعکس، فرض کنیم G گرافی دلخواه با $Mad(G) \geq \alpha$ باشد. بنابراین زیر گراف H از G چنان وجود دارد که $Mad(G) = Ad(H)$. از آنجایی که H زیر گراف G است پس

$$Mad(G) = Ad(H) \leq Mad(H) \leq Mad(G).$$

بنابراین $Ad(H) = Mad(H) = Mad(G) \geq \alpha$. سپس $idor(H) \leq |V(H)| - g_1(\alpha)$ ، بنابراین با توجه به لم ۱.۲.۳، داریم $idor(G) \leq |V(G)| - g_1(\alpha)$. فرض کنیم G یک گراف دلخواه باشد که $Mad(G) \geq \alpha$ آنگاه $idor(G) \leq |V(G)| - g_1(\alpha)$. بنابراین بنابه تعریف مسئله سوم داریم $g_1(\alpha) \leq g_2(\alpha)$ پس بنا به ۱.۳.۳ و ۱.۳.۳ داریم $g_1(\alpha) = g_2(\alpha)$ از این رو بنا به ۱.۳.۳، اگر $Mad(G) \geq \alpha$ بنابراین داریم

$$idor(G) \leq |V(G)| - (Mad(G)/4 - 1) \leq |V(G)| - \alpha/4 + 1.$$

با توجه به تعریف $g_2(\alpha)$ پس $g_2(\alpha) \geq \frac{\alpha}{4} - 1$.
از گزاره ۲.۳.۳ و نتیجه ۱.۳.۳ کران‌های پایین $g(k) \geq \frac{\alpha}{4} - 1$ و $g_1(\alpha) \geq \frac{\alpha}{4} - 1$ بدست می‌آیند.
حال برخی از کران‌های بالا را معرفی می‌کنیم.

گزاره ۴.۳.۳. $idor(K_{k,n-k}) \geq n - 2^k + 1$.

برهان. فرض کنیم (A, B) افرازی از گراف کامل دوبخشی $K_{k,n-k}$ با $|A| = k$ و $|B| = n - k$ باشد. فرض کنیم C یک کد شناسایی از گراف جهت‌دار D حاصل از گراف دو بخشی $K_{k,n-k}$ باشد. مجموعه‌های $Q = B \setminus C$ ، $P = A \cap C$ ، $q = |Q|$ و $p = |P|$ را در نظری می‌گیریم. شناساگر رأس‌ها در Q زیرمجموعه متمایز غیرتهی از P هستند. پس $q \leq 2^p - 1$. بنابراین $|C| = n - k - q + p \geq n - k - 2^p + p + 1$. حال اگر $p \in [k]$ ، آنگاه $|C| \geq -2^k + 1$. $\square$

مشاهده می‌کنیم که اگر $n \geq 2k$ ، آنگاه $\delta(K_{k,n-k}) = k$

$$Ad = (K_{k,n-k}) = Mad(K_{k,n-k}) = 2k - \frac{2^k}{n}.$$

سپس $g_1(\alpha) \leq 2^{\lfloor \alpha/2 \rfloor - 1}$ ؛ بنابراین $g(k) \leq 2^k - 1$

۲.۳.۳ کران‌های پایین

حال کران پایین را برای پارامتر $idor$ با برخی از ویژگی‌های گراف‌ها بدست می‌آوریم. در قضیه زیر کران پایین را با استفاده از اندازه گراف و حداکثر درجه گراف بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنیم G گراف با حداکثر درجه Δ باشد. بنابراین $idor(G) \geq \frac{2}{\Delta+2}|V(G)|$.

برهان. فرض کنیم C یک کدشناسایی از گراف جهت‌دار D حاصل از گراف G باشد. با استفاده از روش تخلیه ثابت می‌کنیم که $|C| \geq \frac{2}{\Delta+2}|V(G)|$. این روش اغلب برای بدست آوردن کران‌های پایین در اندازه کدهای شناسایی، مخصوصاً شبکه‌های بی‌نهایت استفاده می‌شود، برای مثال به [۲، ۶، ۷، ۸، ۹] نگاه کنید.

یک بار اولیه به هر رأس v می‌دهیم. زین رو کل هزینه $|V(G)|$ است. سپس هر رأس شارژ خود را به صورت یکنواخت به رأس‌ها در شناسه آن توزیع می‌کند. به عبارت دیگر، قانون زیر را اعمال می‌کنیم: هر رأس $\frac{1}{|I(v)|}$ به هر رأس از $I(v)$ ارسال می‌کنیم.

در حال حاضر شارژ نهایی $\omega(v)$ از یک رأس را در نظر می‌گیریم. اگر $v \notin C$ ، سپس همه‌ی آن را شارژ و هیچ چیزی دریافت نمی‌کند، پس $\omega(v) = 0$. اگر $v \in C$ ، سپس همه‌ی آنها شارژ می‌شوند. اما از تمام رأس‌هایی که شناسه آن شامل v (از جمله خود آن) می‌توان رسید. مشاهده می‌کنیم که بیشتر $\Delta + 1$ چنین رأس‌هایی وجود دارد، و بیشترین مقدار این رأس برای شناسه $\{v\}$ دارد. بنابراین v حداکثر یک رأس، و بیشتر $\frac{1}{2}$ از تمام دیگر دریافت می‌کند. بنابراین $\omega(v) \leq 1 + \frac{\Delta}{2} = \frac{\Delta+2}{2}$.

شارژ کامل بدون تغییر است، پس

$$|V(G)| = \sum_{v \in V(G)} \omega(v) = \sum_{v \in C} \omega(v) \leq |C| \frac{\Delta+2}{2}$$

بنابراین، $idor(G) \geq \frac{2}{\Delta+2} |V(G)|$. □

کران $\frac{2}{\Delta+2} |V(G)|$ در قضیه (۱.۳.۳) دقیق است، که در گزاره زیر نشان خواهیم داد.

گزاره ۵.۳.۳. اگر G گراف وقوع از گراف Δ - منتظم باشد، بنابراین $idor(G) = \frac{2}{\Delta+2} |V(G)|$.

برهان. فرض کنیم H یک گراف Δ - منتظم از گراف وقوع G باشد. مجموعه $p = |V(H)|$ را در نظر می‌گیریم. داریم $|E(H)| = \frac{\Delta p}{2}$ ، و بنابراین $|V(G)| = \frac{(\Delta+2)p}{2}$. حال فرض کنیم D گراف جهت‌دار حاصل از گراف G باشد که در آن همه‌ی یال‌ها از $E(H)$ به سمت $V(H)$ جهت‌دهی می‌شود. مجموعه $V(H)$ یک کد شناسایی از گراف G است. در واقع هر $v \in V(H)$ دارای شناساگر $\{v\}$ ، و هر $e = uv \in E(H)$ دارای شناساگر $\{u, v\}$ است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $idor(G) \leq p = \frac{2}{\Delta+2} |V(G)|$. باتوجه به قضیه ۱.۳.۳ داریم $idor(G) \geq \frac{2}{\Delta+2} |V(G)|$. از دو رابطه اخیر نتیجه می‌گیریم که $idor(G) = \frac{2}{\Delta+2} |V(G)|$. □

۳.۳.۳ درختان

کران‌های پایین و بالا بهتری ممکن است بدست آید جایی که گراف G متعلق به برخی از کلاس‌های گراف است. در این بخش، کران‌های پایین و بالا دقیقی را برای درختان ارائه می‌دهیم. کدهای شناسایی درختان در مرجع [۸] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در ادامه به لم مهمی که به آن نیاز داریم می‌پردازیم.

لم ۱.۳.۳. فرض کنیم G یک گراف دارای درخت با سه رأس u, v, w باشد به طوری که دارای ویژگی $N(u) = \{v\}$ و $N(v) = \{u, w\}$ است. هر کد شناسایی از هر جهت‌دهی حاصل از گراف G دارای حداقل دو رأس در مجموعه $\{u, v, w\}$ است. علاوه بر این، مجموعه‌ای از اندازه $idor(G)$ شامل w وجود دارد که یک کد شناسایی از گراف جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی‌های گراف G است.

برهان. از آنجا که u و v دارای شناساگرهای غیرتهی متمایز هستند، هر کد شناسایی از هر جهت‌دهی حاصل از گراف G دارای حداقل دو رأس در مجموعه $\{u, v, w\}$ است.

حال فرض کنیم که C یک کد شناسایی از گراف جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی گراف G است. اگر کد C شامل w نباشد، بنابراین $\{u, v\} \subseteq C$. فرض کنیم داریم $C' = (C \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ و فرض کنیم D' حاصل از جهت‌دهی گراف G باشد که از گراف جهت‌دار D با تغییر جهت (در صورت لزوم) تمام یال‌های منطبق بر رأس v که دور از این رأس هستند بدست می‌آید. به راحتی می‌توان بررسی کرد که C' یک کد شناسایی از گراف D' است. $\square$

قضیه ۲.۳.۳. اگر T یک درخت از مرتبه $n \geq 2$ باشد، بنابراین $idor(T) \geq \lceil (n+1)/2 \rceil$.

برهان. نتیجه را با استقرا روی n اثبات می‌کنیم، نتیجه وقتی که $n \leq 3$ بدیهی است چون برای $n = 2$ داریم $\{v_1\} \subseteq \{v_1, v_2\}$ کدشناسایی نیست زیرا $N[v_1] \cap \{v_1\} = \{v_1\} \neq N[v_2] \cap \{v_1\} = \emptyset$ و برای $\{v_2\}$ نیز به همین طریق کد شناسایی نیست پس کدشناسایی از اندازه یک نداریم. حال برای $n = 3$ داریم $\{v_1\} \subseteq \{v_1, v_2, v_3\}$ کدشناسایی نیست زیرا

$$N[v_1] \cap \{v_1\} = \{v_1\} \neq N[v_2] \cap \{v_1\} = \{v_1\} = \emptyset$$

، برای $\{v_2\}$ و $\{v_3\}$ نیز به همین روش کدشناسایی نیستند. حال استقرا را برای $n \geq 4$ بررسی می‌کنیم. فرض کنیم T یک درخت n رأسی باشد حکم را برای درخت‌های کمتر n رأس ثابت شده است. مسیر $P = (v_1, \dots, v_k)$ قطر درخت T در نظر می‌گیریم (P مسیر ماکسیمم در T است، و قرار می‌دهیم $L = N(v_2) \setminus \{v_3\}$. واضح است که هر رأس L دارای درجه یک است، فرض کنیم $x \in L$ دلخواه باشد به برهان خلف اگر درجه x بزرگتر یا مساوی ۲ باشد آنگاه x یک همسایگی $y \neq v_2$ دارد. y نمی‌تواند روی مسیر P باشد زیرا T فاقد دور است، از طرفی مسیر $P' = (y, v_1, \dots, v_k)$ یک مسیر طولانی‌تر از P است که این با انتخاب P در تناقض است.

فرض کنیم C یک کد شناسایی از یک جهت‌دهی D حاصل از درخت T باشد. فرض کنیم که $v \notin C$. بنابراین $L \subseteq C$. $x \in L$ را دلخواه فرض می‌کنیم. واضح است که $N_D[x] \subseteq \{x, v_2\}$ و از آنجا که C یک کد شناسایی است لذا $\{x, v_2\} \cap C \neq \emptyset$. ولی می‌دانیم که $v \notin C$ پس $x \in C$. علاوه‌براین،

$C' = L \setminus C$ یک کدشناسایی از $D' = D - (L \cup \{v_2\})$ است. زیرا اگر $x \in V(D - (L \cup \{v_2\}))$ آنگاه $N_D(x) \cap L = \emptyset$. زیرا همه رأس‌های واقع در L درجه یک هستند و تنها همسایه آنها v_2 است. لذا با توجه به $v_2 \notin C$ داریم

$$N_D(x) \cap (x) = (N_D(x) \cap L) \cup (N_D(x) \cap C \setminus L) = N_D(x) \cap (x) = N_{D'}(x) \cap C \setminus L.$$

بنابراین چون C برای D یک کد شناسایی است، لذا C' برای D' نیز چنین است. حال بنا به فرض استقرا

$$|C| \geq \lceil \frac{|V(D')| + 1}{2} \rceil \implies |C| - |L| \geq |C \setminus L| \geq \frac{|V(D)| - |L| - 1 + 1}{2} \implies |C| \geq \frac{|V(D)| - |L|}{2}$$

از آنجا که $|L| \geq 1$ زیرا $v \in L$ داریم $|C| \geq \frac{|V(D)|+1}{2}$. حال فرض می‌کنیم که $v_2 \in C$ باشد. علاوه بر این می‌توان فرض کرد که v_2 همه‌ی رأس‌های واقع در $L \cap C$ را در D احاطه می‌کند. به عبارت دیگر اگر $x \in L \cap C$ آنگاه $(v_2, x) \in \vec{E}(D)$ زیرا اگر $(x, v_2) \in \vec{E}(D)$ باشد آنگاه با تغییر جهت یال xv_2 در D گراف جهت‌دار D' را می‌سازیم که هنوز C یک کدشناسایی برای D' است. زیرا فقط $N(v_2)$ و $N(x)$ در D و D' تغییر یافته‌اند. با توجه به اینکه

$$N_D(x) \cap C = \{x, v_2\}, N_{D'}(x) \cap C = \{x\}$$

داریم $x \notin N_D[v_2] \cap C, x \in N_{D'}[v_2] \cap C$ بنابراین $\{x, v_2\} \subseteq N_{D'}[v_2] \cap C$. دقت کنیم که برای هر رأس v داریم $N_{D'}[v_2] \cap C \neq \emptyset$. اگر برای C برای D' کدشناسایی نباشد لذا باید y و z چنان وجود داشته باشد که $N_{D'}[z] \cap C = N_{D'}[y] \cap C$. حال چند حالت داریم:

۱. اگر $z = x$ و $y \neq v_2$ آنگاه $\{x\} = N_{D'}[v_2] \cap C$ ولی $x \in N_{D'}[y] \cap C$ است بنابراین $N_{D'}[y] \cap C \neq N_{D'}[z] \cap C$

۲. اگر $z = x$ و $y = v_2$ آنگاه $\{x, v_2\} = N_{D'}[z] \cap C \neq N_{D'}[y] \cap C = \{x\}$

۳. اگر $z \neq x$ و $y = v_2$ آنگاه $x \in N_D[y] \cap C, x \notin N_{D'}[z] \cap C$ در نتیجه $N_{D'}[y] \cap C \neq N_{D'}[z] \cap C$

۴. اگر $z \neq x$ و $y \neq v_2$ آنگاه $N_D[y] = N_{D'}[y] \cap C \neq N_{D'}[z] \cap C = N_D[z] \cap C$

از آنجا که حداکثر یک رأس دارای v_2 به عنوان شناساگر هستند، تمام رأس‌های L به غیر از یک رأس در C هستند.

دو حالت را با توجه به اینکه آیا $|L| \geq 2$ است یا نه بررسی می‌کنیم.

حالت اول: فرض کنیم $|L| \geq 2$. اگر $L \subseteq C$ ، پس $C \setminus \{v_1\}$ یک کد شناسایی از $D - v_1$ است، وقتی که v_2 دارای یک رأس از L در شناساگر $D - v_1$ است. بنابراین، با توجه به فرض استقرا، $|C \setminus \{v_1\}| \geq \lceil n/2 \rceil$ ، پس $|C| \geq \lceil (n+1)/2 \rceil$. از این‌رو، فرض می‌کنیم که یک رأس در L ، که $\{v_1\}$ نامیم، که در C نباشد. مشاهده می‌کنیم که $I(v_1) = \{v_2\}$. از این‌رو، $C \setminus L$ یک کد شناسایی از $D - L$ است زیرا رأس v_2 توسط رأس v_2 احاطه شده است و شناساگر آن در $D - L$ از $\{v_2\}$ نیست زیرا C یک کد در گراف D است، یا رأس v_2 توسط رأس v_2 احاطه می‌شود و $I(v_2)$ شامل v_2 نیست. سپس با توجه به فرض استقرا، $|C \setminus L| \geq \lceil (n - |L| + 1)/2 \rceil$ ، بنابراین $|C| = |C \setminus L| + |L| - 1 \geq \lceil (n+1)/2 \rceil$ ، زیرا $|L| \geq 2$.

حالت دوم: فرض کنیم $|L| = 1$. با توجه به لم (۱.۳.۳)، فرض می‌کنیم که $v_3 \in C$. اگر $v_1 \notin C$ ، پس $I(v_1) = \{v_2\}$. در صورت لزوم، $I(v_2) = \{v_2, v_3\}$. به خصوص، رأس v_2 توسط رأس v_3 در گراف D احاطه شده است. در نتیجه، $C \setminus \{v_2\}$ یک کد شناسایی از $D - \{v_1, v_2\}$ است. پس، با توجه به فرض استقرا، $|C \setminus \{v_2\}| \geq \lceil (n-1)/2 \rceil$ ، بنابراین $|C| \geq \lceil (n+1)/2 \rceil$. از این‌رو، فرض می‌کنیم $v_1 \in C$. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم که رأس v_2 توسط رأس v_1 احاطه شده است. بنابراین $C \setminus \{v_1\}$ یک کدشناسایی از $D - v_1$ است. پس، با توجه به فرض استقرا، $|C \setminus \{v_1\}| \geq \lceil n/2 \rceil$ ، بنابراین $|C| \geq \lceil (n+1)/2 \rceil$. $\square$

کران در قضیه ۲.۳.۳ دقیق است. گزاره‌ای که در ادامه بیان می‌کنیم برای مسیرها نیز نشان می‌دهیم:

گزاره ۶.۳.۳. فرض کنیم P_n یک مسیر از مرتبه n باشد. در این صورت داریم

$$idor(P_n) = \lceil (n+1)/2 \rceil.$$

برهان. مجموعه $P_n = (v_1, \dots, v_n)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم D_n یک جهت‌دهی از مجموعه P_n باشد جایی که $v_i \rightarrow v_{i+1}$ اگر و تنها اگر i زوج است. حال دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول n فرد باشد، سپس $\{v_i \mid i \text{ فرد}\}$ یک کد شناسایی از مجموعه P_n است: اگر i فرد است بنابراین $I(v-i) = \{v_i\}$ ، و اگر i زوج است بنابراین $I(v_i) = \{v_{i-1}, v_{i+1}\}$.
حالت دوم n زوج باشد، سپس $\{v_i \mid i \text{ فرد}\} \cup \{v_n\}$ یک کد شناسایی از مجموعه P_n است: اگر i فرد است بنابراین $I(v-i) = \{v_i\}$ ، اگر i زوج و $i < n$ است بنابراین $I(v_i) = \{v_{i-1}, v_{i+1}\}$ ، و $I(v_n) = \{v_{n-1}, v_n\}$. از این رو $idor(P_n) \leq \lceil (n+1)/2 \rceil$. با استفاده از قضیه ۲.۳.۳ داریم $idor(P_n) \geq \lceil (n+1)/2 \rceil$.

از دو رابطه اخیر نتیجه می‌گیریم که $idor(P_n) = \lceil (n+1)/2 \rceil$. $\square$

گراف‌های K_1 و K_2 درختان T به طوری که $idor(T) = |V(T)|$ هستند. از این رو، در گزاره (۴.۲.۳) نشان دادیم که آن‌ها یکی هستند. با توجه به گزاره (۶.۳.۳)، اگر $T = P_4$ ، بنابراین $idor(T) = |V(T)| - 1$. در ستاره‌ها نیز این رابطه صدق می‌کند.

گزاره ۷.۳.۳. فرض کنیم S_n ستاره با رأس n باشد. داریم $idor(S_n) = n - 1$.

برهان. فرض کنیم c مرکز و $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ برگ‌های ستاره باشند. مجموعه $V(S_n) \setminus u_1 = C$ یک کد شناسایی از جهت‌دهی‌های گراف S_n با مجموعه کمان $\{(u_1, c)\} \cup \{c, u_i \mid 2 \leq i \leq n-1\}$ در نظر می‌گیریم، زیرا برای دو رأس $u_1, u_2 \in V(S_n) \setminus u_1$ داریم

$$N[u_1] \cap C = c \neq N[u_2] \cap C = u_2.$$

حال C یک کد شناسایی از گراف جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی‌های گراف S_n است. ابتدا فرض می‌کنیم تمام برگ‌های S_n در C هستند، پس $|C| \geq n - 1$. در ادامه فرض می‌کنیم که برگ u_1 در کد C نباشد. جایی که $I(u_1) \neq \emptyset$ ، پس برای $c \in C$ داریم $(u_1, c) \in A(D)$ و $I(u_1) = c$. علاوه بر این، جایی که برای $2 \leq i \leq n - 1$ ، رابطه $I(u_i) = I(u_1)$ بدست می‌آید پس داریم $u_i \in C$. بنابراین $|C| \geq n - 1$. $\square$

از این رو، می‌توانیم کران بالا $idor(T) = |V(T)| - 1$ از طریق برخی از پارامترهای درخت گسترش دهیم. وقتی که $|V(T)| > 2$ ، داریم $leav(T) \leq |V(T)| - 1$.

قضیه ۳.۳.۳. اگر T یک درخت باشد، بنابراین $idor(T) \leq \left\lceil \frac{|V(T)| + leav(T)}{2} \right\rceil$.

برهان. فرض کنیم T درخت، و L مجموعه برگ‌های آن باشد. $T - L$ درخت است. بنابراین این درخت دارای مجموعه ثابت S از اندازه حداقل $\left\lceil \frac{|V(T-L)|}{2} \right\rceil$ است. فرض می‌کنیم گراف D حاصل از جهت‌دهی‌های درخت T باشد به طوری که تمام یال‌های آن بین S و $V(T) \setminus S$ به سمت S جهت‌دهی می‌کنیم.

ادعا می‌کنیم که $C = V(T) \setminus S$ یک کد شناسایی از گراف جهت‌دار D است. در واقع هر رأس S دارای حداقل دو همسایگی در درخت T است که همسایگی بیرونی آن‌ها در گراف جهت‌دار D است. بنابراین شناساگر هر رأس غیر تهی است، زیرا شناساگر هر رأس $c \in C$ شامل c است. علاوه بر این، دو رأس متمایز u و v از $V(T)$ را در نظر می‌گیریم. اگر یکی از آنها مانند u در S داشته باشیم، بنابراین $N_T(u) = I(u)$. اما u تنها رأس مجاور به (حداقل دو) رأس‌های $N_T(u)$ در درخت T است، زیرا T غیر دوری است. بنابراین $I(u) \neq I(v)$. اگر u و v هر دو در S نباشند، پس در کد C وجود دارند. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم رأس u توسط رأس v احاطه نشود و سپس $v \in I(v) \setminus I(u)$ ، بنابراین $I(u) \neq I(v)$. این نشان می‌دهد که C یک کد شناسایی از گراف D است. از این‌رو

$$idor(T) \leq |C| = |V(T)| - |V(S)| \leq |V(T)| - \left\lceil \frac{|V(T-L)|}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{|V(T)| + leav(T)}{2} \right\rceil.$$

□

مشاهده می‌کنیم که کران در قضیه ۳.۳.۳ برای ستاره‌ها و مسیرها نیز بدست می‌آید. توجه داشته باشید علاوه بر این که $leav(T) \leq \alpha(T)$ و $|V(T)|/2 \leq \alpha(T)$. حال به طور مستقیم نتیجه زیر را بیان می‌کنیم.

نتیجه ۲.۳.۳. اگر T یک درخت است، بنابراین $idor(T) \leq \frac{3\alpha(T)}{2}$.

کران بالا برای مسیرهای P_2 و P_4 به ترتیب از مرتبه ۲ و ۴ بدست می‌آید. از این‌رو، آنها یکی هستند.

قضیه ۴.۳.۳. فرض کنیم T درخت متفاوت از مسیرهای P_2 و P_4 باشد. بنابراین

$$idor(T) \leq \frac{4\alpha(T)}{3}.$$

برهان. نتیجه را با استقرا ثابت می‌کنیم. نتایج برای $|V(T)| \leq 5$ درست است. به خصوص، برای هر درخت T از مرتبه ۵، داریم $idor(T) \leq \frac{4\alpha(T)}{3}$. حال فرض کنیم که $V(T) \geq 6$. فرض می‌کنیم برخی از رأس $v \in T$ شامل حداقل دو برگ v_1 و v_2 می‌شود. واضح است که $\alpha(T) = \alpha(T - v_1) + 1$ و با توجه به لم (۲.۲.۳) داریم $idor(T) \leq idor(T - v_1) + 1$. با توجه به فرض استقرا $idor(T - v_1) \leq \frac{4}{3}\alpha(T - v_1) + 1$ است. در نتیجه $idor(T) \leq \frac{4}{3}\alpha(T)$.

از این رو، فرض می‌کنیم هر رأس درخت T مجاورت حداکثر یک برگ است. با توجه به مقدار $leav(T)$ سه حالت متمایز را بررسی می‌کنیم:

• اگر $leav(T) \leq \frac{n}{3}$ باشد، قضیه ۳.۳.۳ را بکار می‌بریم و $idor(T) \leq \frac{2}{3}n = \frac{4}{3} \cdot \frac{n}{3} \leq \frac{4\alpha(T)}{3}$ بدست می‌آید.

• اگر $\frac{n}{3} < leav(T) < \frac{2n}{3}$ باشد، پس گره $v \in T$ وجود دارد که به هر برگ مجاور نیست. درخت T به صورت شاخه‌ای از ریشه v جهت‌دهی می‌کنیم، جایی که وضعیت C مجموعه‌ای از گره‌ها است. مشاهده می‌کنیم که تمام برگ‌ها و v دارای شناساگر از اندازه ۱ می‌باشند در حالی که تمام گره‌های متمایز از v دارای شناساگر از اندازه ۲ هستند. بنابراین $idor(T) \leq n - leav(T) \leq \frac{2}{3}n \leq \frac{4\alpha(T)}{3}$ نتیجه می‌گیریم.

• اگر $leav(T) = \frac{2n}{3}$ باشد، سپس جهت‌دهی‌ها را به صورت قبلی با استفاده از هر رأس برگ v به صورت ریشه تعریف می‌کنیم، و مجموعه کد C شامل تمام گره‌های درخت T و رأس v می‌شود. بنابراین تمام گره‌ها دارای شناساگر از اندازه ۲ می‌باشند در حالی که تمام برگ‌ها دارای شناساگر از اندازه ۱ هستند. وقتی که $n > 5$ این نشان می‌دهد که

$$idor(T) \leq \frac{n}{3} + 1 \leq \frac{2}{3}n \leq \frac{4\alpha(T)}{3}.$$

□

قضیه ۴.۳.۳ بهترین حالت ممکن است. در واقع $A_{\mathcal{E}_p}$ درختی است که اجتماعی از $2p$ مسیرهای مجزا $Q_i = (a_i, b_i, c_i)$ ، $1 \leq i \leq 2p$ و مسیر $P = (p_1, p_2, \dots, p_{2p})$ است. به راحتی می‌توان دید حداکثر جورسازی از $A_{\mathcal{E}_p}$ که مجموعه $\{c_i \mid 1 \leq i \leq 2p\} \cup \{a_{2j} \mid 1 \leq j \leq 2p\}$ بدست می‌آید، بنابراین $\alpha(A_{\mathcal{E}_p}) = 3p$. از طرف دیگر، برای هر کد C از هر جهت‌دهی گراف جهت‌دار D حاصل از $A_{\mathcal{E}_p}$ ، باید حداقل دو رأس از C در هر $\{a_i, b_i, c_i\}$ با توجه به لم ۱.۳.۳ داشته باشد. از این رو $idor(A_{\mathcal{E}_p}) \geq 4p$. در نتیجه $idor(A_{\mathcal{E}_p}) \geq \frac{4}{3}\alpha(A_{\mathcal{E}_p})$.

۴.۳ ارتباط بین پارامتر id و پارامتر $idor$

ارتباط بین پارامتر id و پارامتر $idor$ را با چند قضیه مفید که در ادامه بیان می‌کنیم بدست می‌آوریم.

فرض کنیم A و B دو زیر مجموعه غیر تهی از $V(G)$ باشد، در این صورت مجموعه یال‌ها با پایان رأس^۷ که یک رأس آن در A و رأس دیگری آن در B را با نماد (A, B) نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۴.۳. برای تمام گراف‌ها مانند G داریم $idor(G) \leq 2id(G)$.

⁷End vertex

برهان. فرض کنیم G یک گراف باشد. اگر گراف G دارای برخی از گراف‌های دوقلو باشد، آنگاه $id(G) = +\infty$ و در نتیجه بدیهی است. حال فرض کنیم که گراف G گراف فاقد رأس دوقلو است، که $id(G) < +\infty$ است. فرض کنیم C یک کد از گراف G با اندازه $id(G)$ باشد و همچنین مجموعه $U = V(G) \setminus C$ را در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنیم D یک جهت‌دهی حاصل از گراف G به طوری که تمام یال‌ها از $E(U, C)$ به سمت C جهت‌دهی می‌کنیم. پس برای هر $u \in U$ ، داریم $I_{C,D}(u) \cap C = I_{C,G}(u) \neq \emptyset$ و برای هر رأس $w \in C$ ، رابطه $w \in I_{C,D}(w)$ نتیجه می‌گیریم. بنابراین برای هر $v \in V(G)$ ، داریم $I_{C,G}(v) \neq \emptyset$. پس برای هر دو رأس متمایز $u_1, u_2 \in U$ ، داریم

$$I_{C,D}(u_1) \cap C = I_{C,G}(u_1) \neq I_{C,G}(u_2) = I_{C,D}(u_2) \cap C,$$

بنابراین $I_{C,D}(u_1) \neq I_{C,G}(u_2)$. علاوه بر این برای دو رأس w_1, w_2 در کد C ، داریم $I_{C,D}(w_1) \neq I_{C,G}(w_2)$. از این رو C تقریباً یک کد شناسایی از گراف جهت‌دار D است. تنها چیزی که مانع می‌شود که کد C ، کد باشد زوج مرتب‌های $(u, w) \in U \times C$ به طوری که $I_{C,D}(w) = I_{C,G}(u)$ است. چنین زوج مرتب‌ها را زوج مرتب‌های بد می‌نامیم. برای هر زوج مرتب بد (u, v) ، داریم $(u, v) \in A(D)$. علاوه بر این، رأس $w \in c$ در بیش از یک زوج مرتب بد است، بنابراین حداکثر $|C|$ زوج مرتب‌های بد وجود دارد. فرض کنیم U' مجموعه‌ای از رأس‌های U باشد که اولین رأس از زوج مرتب بد هستند. بنابراین $C' = C \cup U'$ یک کد شناسایی از گراف جهت‌دار D است جایی که شناساگر آن دو عضو از زوج مرتب بد که متمایز هستند. علاوه بر این $|U'| \leq |C|$ ، پس $|C'| \leq 2|C|$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $idor(G) \leq 2id(G)$. $\square$

قضیه ۲.۴.۳. برای تمام گراف‌ها مانند G داریم $idor(G) \leq \frac{3}{2}id(G)$.

قضیه ۲.۴.۳ به طور مستقیم از لم زیر پیروی می‌کند.

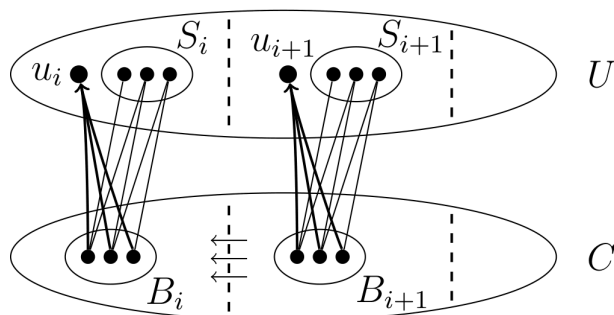
لم ۱.۴.۳. فرض کنیم G یک گراف دارای کد شناسایی C باشد. گراف جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی گراف G وجود دارد که دارای کد شناسایی C' با $C \subseteq C'$ و $|C'| \leq \frac{3}{2}|C|$ است.

برهان. مجموعه $U = V(G) \setminus C$ در نظر می‌گیریم.

ابتدا تمام یال‌ها را از $E(U, C)$ به سمت C جهت‌دهی می‌کنیم. سپس گراف را به صورت فرایندی که در ادامه بیان می‌شود افزایش می‌دهیم. فرض کنیم مجموعه $U_1 := U, C_1 := C$ و $i = 1$ در نظر می‌گیریم. تا زمانی که رأسی در U_i وجود دارد دارای حداقل دو همسایگی در C_i است. رأس u_i را انتخاب می‌کنیم. مجموعه زیر

$$B_i = N(u_i) \cap C, S_i = N(B_i) \cap U_i \setminus \{u_i\}, C_{i+1} = C_i \setminus B_i, U_{i+1} = U_i \setminus (S_i \cup \{u_i\}),$$

و $i := i + 1$ داریم. یال‌های $E(u_i, B_i)$ را به سمت u_i و یال‌های $E(C_{i+1}, B_i)$ به سمت B_i تغییر جهت می‌دهیم. به شکل ۱.۳ نگاه کنید.



شکل ۱.۳: گراف افرازبندی شده

فرض کنیم p اندیس i باشد که فرایند را متوقف می کند. هر رأس U_p دارای همسایگی در $C \setminus C_p$ نیست در غیر این صورت به برخی از S_i ها تعلق دارد. از این رو دارای درجه ۱ در کد C و همسایگی آن در C_p است. برای هر $u \in U_p$ فرض کنیم $c(u)$ همسایگی آن باشد. داریم $I_{C,G}(u) = \{c(u)\}$ ، بنابراین برای تمام $u, u' \in U_p$ نتیجه می گیریم $c(u) \neq c(u')$ است. فرض کنیم B_p مجموعه رأس های C_p باشد که دارای همسایگی در U_p است، یعنی به صورت مجموعه $B_p = \{c(u) | u \in U_p\}$ است. تمام یال های $E(B_p, C_p \setminus B_p)$ را به سمت $C \setminus B_p$ جهت دهی می کنیم. برای هر مؤلفه همبند H از GB_p از مرتبه حداقل ۳، رأس r_H در H را انتخاب می کنیم. یال های H را جهت دهی می کنیم به طوری که تمام رأس های H به جز r_H دارای درجه بیرونی حداقل ۱ باشند، و فرض کنیم w_H رأس U_p به طوری که $c(w_H) = r_H$ باشد. فرض کنیم W مجموعه تمام w_H باشد. مؤلفه های همبند H از GB_p از مرتبه ۲ با رأس های $c(u_1)$ و $c(u_2)$ را در نظر می گیریم، از آنجا که $I_{C,G}(u_1) = \{c(u_1)\}$ و $I_{C,G}(u_2) = \{c(u_2)\}$ است، رأس $b_H \in \{c(u_1), c(u_2)\}$ وجود دارد به طوری که $I_{C,G}(b_H)$ شامل یک رأس در $C \setminus \{c(u_1), c(u_2)\}$ است. فرض کنیم a_H رأس دیگری از $\{c(u_1), c(u_2)\}$ باشد. یال $a_H b_H$ را به سمت b_H جهت دهی می کنیم. مجموعه $U' = U \setminus (\{u_1, \dots, u_{p-1}\} \cup W)$ را در نظر می گیریم. یال های $E(U \setminus U', U')$ به سمت U' جهت دهی می کنیم. در نهایت جهت تمام یال های جهت داده نشده به طور دلخواه به گراف جهت دار D حاصل از جهت دهی گراف G جهت دهی می کنیم. مجموعه

$$C' = C \cup \{u_1, \dots, u_{p-1}\} \cup W$$

را در نظر می گیریم. مشاهده می کنیم که $|\{u_1, \dots, u_p\} \cup W| \leq |C|/2$ ، بنابراین نتیجه می گیریم $|C'| \leq 3|C|/2$. باید ثابت کنیم که C' یک کد شناسایی از گراف جهت دار D است. ابتدا مشاهده می کنیم که برای هر رأس $u \in U'$ داریم $I_{C,G}(u) = I_{C',G}(u)$. به خصوص، $I_{C',G}(u)$ غیر تهی است. از آنجایی که شناساگر رأس های C' به طور قطعی غیر تهی هستند، بنابراین تمام شناساگرها غیر تهی هستند. فرض کنیم می خواهیم ثابت کنیم که تمام شناساگرها متمایز هستند.

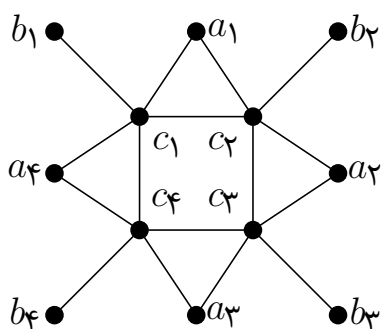
دو رأس در C' دارای شناساگرهای متمایز مشخص هستند. اگر u' و u'' دو رأس از U' باشند، بنابراین $I_{C',G}(u'_1) = I_{C,G}(u'_1) \neq I_{C,G}(u''_1) = I_{C',G}(u''_1)$

حال رأس $u \in U'$ و $v \in C'$ در نظر می‌گیریم. اگر $v \in (\{u_1, \dots, u_{p-1}\} \cup W)$ باشد، به دلیل اینکه تمام یال‌های $E(U \setminus U', U')$ به سمت U' جهت‌دهی می‌کنیم بنابراین $v \in I_{C',D}(v) \setminus I_{C',D}(u)$ است؛ اگر v در B_i برای برخی از $1 \leq i \leq p-1$ باشد، بنابراین $u_i \in I_{C',D}(v) \setminus I_{C',D}(u)$ ؛ اگر uv کمان نباشد، بنابراین $v \in I_{C',D}(v) \setminus I_{C',D}(u)$.

در ادامه فرض می‌کنیم که $u \in U_p, v \in B_p$ و $c(u) = v$ است. توجه داشته باشیم که $I_{C',G}(u) = \{v\}$ است. فرض کنیم H مؤلفه v در $G\langle B_p \rangle$ باشد. اگر H از مرتبه حداقل ۳ باشد، سپس $r_H \neq v$ است زیرا وقتی که $u \neq w_H$ باشد $u \in U'$ است. از آنجایی که v دارای همسایگی بیرونی در H است و بنابراین $I_{C',G}(u) \neq \{v\}$ می‌باشد. اگر H از مرتبه ۲ باشد، پس v در a_H یا b_H دیگر است. اگر $v = a_H$ باشد بنابراین v توسط b_H احاطه می‌شود. اگر $v = b_H$ باشد پس v در گراف G دارای یک همسایگی w در $C \setminus \{a_H\}$ است. از آنجایی که H مؤلفه‌ای از $G\langle B_p \rangle$ است، در صورت لزوم $w \in \bigcup_{i=1}^{p-1} B_i$ و بنابراین v توسط w با ترسیم در D احاطه می‌شود. در هر دو مورد، $I_{C',G}(v) \neq \{v\}$ است. اگر H از مرتبه ۱ باشد، سپس v مجاور به رأس w در C است، زیرا $I_{C,G}(v) = I_{C,G}(u) \neq \{v\}$. از آنجا که v در GB_p مجزا است، بنابراین $w \in \bigcup_{i=1}^{p-1} B_i$ و رأس v توسط رأس w با ترسیم در D با احاطه می‌شود. در نتیجه $I_{C',G}(v) \neq \{v\}$. $\square$

کران قضیه (۲.۴.۳) دقیق است، همانطور که در گراف R در شکل ۲.۳ نشان داده شده است و گراف ساخته شده نوع مجزایی از آن است.

گزاره ۱.۴.۳. فرض کنیم R گراف نشان داده شده در شکل ۲.۳ باشد. در این صورت $id(R) = 4$ و $idor(R) = 6$ است.



شکل ۲.۳: گراف R

برهان. هر کد شناسایی از گراف G باید شامل حداقل یک رأس در هر مجموعه $\{b_i, c_i\}$ باشد، بنابراین $id(G) \geq 4$ است. مجموعه $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ یک کد شناسایی از گراف G است. در واقع، برای تمام i ها، در نتیجه $I(a_i) = \{a_i, a_{i+1}\}$ (اندیس‌ها به پیمانه ۴ هستند)، $I(b_i) = \{c_i\}$ ، و $I(c_i) = \{c_{i-1}, c_i, c_{i+1}\}$ می‌باشد. بنابراین $id(R) = 4$ است.

با توجه به قضیه (۲.۴.۳)، داریم $idor(R) \leq 6$ ، حال باید ثابت کنیم که $idor(R) \geq 6$ است.

به برهان خلف فرض کنیم که گراف جهت‌دار D شامل یک جهت‌دهی از گراف G دارای کد شناسایی C از مرتبه کمتر از ۶ است. علاوه بر این زوج مرتب (D, C) در نظر می‌گیریم به طوری که $C \cap \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ ماکزیمم است.

ادعا می‌کنیم که $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \subseteq C$ است. اگر $c_i \notin C$ باشد، بنابراین b_i دارای شناساگر $\{b_i\}$ و به‌ویژه $b_i \in C$ است. فرض کنیم $C' = (C \setminus \{b_i\}) \cup \{c_i\}$ باشد و فرض کنیم D' گراف جهت‌دار بدست آمده از گراف جهت‌دار D به طوری که یال $b_i c_i$ به سمت c_i تغییر جهت می‌دهیم. بنابراین C' یک کد شناسایی از گراف جهت‌دار D' است و بنابراین (D', C') در تناقض با حداکثر (D, C) است. این ادعای ما را ثابت می‌کند.

از آنجا که $|C| < 6$ است، داریم $|C \cap \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4\}| \leq 1$. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم که $C \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\} = \emptyset$ باشد. بنابراین برای $i \in \{1, 2, 3\}$ داریم $I(b_i) = \{c_i\}$. در نتیجه برای $i \in \{1, 2\}$ ، داریم $I(a_i) = \{c_i, c_{i+1}\}$. حال $I(c_2) = \{c_1, c_2, c_3\}$ است، بنابراین $(c_2, c_3) \in A(D)$ می‌باشد. در نتیجه $c_2 \notin I(c_3)$ و بنابراین $I(c_3) = \{c_3, c_4\}$ زیرا $I(c_3) = I(b_3)$ است. حال $I(a_3) = \{c_4\}$ ، و بنابراین $b_4 \in I(b_4) \subseteq C$ است. در نتیجه c_1 و a_4 دارای شناساگر $\{c_1, c_4\}$ است، که تناقض است. $\square$

مساله ۱.۴.۳. پیچیدگی محاسباتی مسائل زیر چیست:

- تصمیم‌گیری در مورد اینکه آیا $idor(G) < \frac{3}{4} id(G)$ است.
- با توجه به گراف G با کد شناسایی C ، تصمیم می‌گیریم که آیا گراف جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی گراف G و کد شناسایی C' از گراف جهت‌دار D به طوری که $C \subseteq C'$ و $|C'| < \frac{3}{4}|C|$ است.

به‌یاد داریم که برای هر گراف فاقد رأس دوقلو G داریم $id(G) \leq 2^{idor(G)} - 2$. گزاره زیر، توسط Florent Foucaud بیان شده است که نشان می‌دهد که این کران دقیق است. فرض کنیم J_{2p+1} یک گراف حاصل از گراف کامل با $2p+1$ رأس با حذف جورسازی از اندازه p است.

گزاره ۲.۴.۳. فرض کنیم $k \geq 1$ عدد صحیح باشد. در اینصورت

$$idor(J_{2^k-1}) = k \text{ و } id(J_{2^k-1}) = 2^k - 2.$$

برهان. گراف‌های فاقد رأس دوقلو به طوری که $id(G) = |V(G)| - 1$ باشد توسط Foucaud و همکارانش در مرجع [۸] مورد بررسی قرار گرفته است. گراف‌های J_{2p+1} نمونه‌ای از آن‌ها هستند، بنابراین $id(J_{2^k-1}) = 2^k - 2$ است.

حال فرض کنیم C مجموعه k رأسی از گراف J_{2p+1} باشد به طوری که C با $V(J_{2p-1}) \setminus C$ کامل می‌شود. چنین مجموعه‌ای با تعریف J_{2p+1} وجود دارد. به طور دلخواه گراف جهت‌دار D_C حاصل از گراف GC را جهت‌دهی می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای از همسایگی

بیرونی بسته در D_C باشد: مجموعه‌ای به صورت $D_C: \mathcal{F} = \{N_{D_C}^+(v) | v \in C\}$ است. فرض کنیم رأس‌های $V(J_{p-1}) \setminus C$ را با زیرمجموعه‌های غیر تهی متمایز از C که در $\mathcal{F}$ نیستند برچسب‌گذاری کنیم. این برچسب‌گذاری را می‌توان انجام داد زیرا گراف J_{p+1} دارای $2^k - 1$ رأس است. فرض کنیم گراف جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی گراف G باشد که از گراف D_C با جهت‌دهی کردن یال uv با $u \in V(J_{p-1}) \setminus C$ و $v \in C$ از u به v بدست می‌آید اگر و تنها اگر v برچسبی از u باشد، و به طور دلخواه یال‌ها با هر دو پایان رأس در $V(J_{p-1}) \setminus C$ جهت‌دهی می‌کنیم. بنابراین C یک کد شناسایی از گراف جهت‌دار D است. در نتیجه $idor(J_{k-1}) = k$ است. $\square$

۵.۳ پیچیدگی

در این بخش پیچیدگی را برای پارامتر $IDOR$ و پارامتر $LARGE - IDOR$ و پارامتر $ISCODE$ محاسبه می‌کنیم.

۱.۵.۳ پیچیدگی $IDOR$

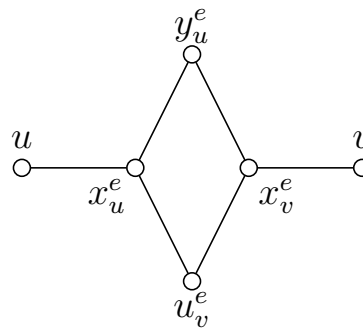
پیدا کردن کوچکترین اندازه کد شناسایی در گراف یا گراف جهت‌دار یک مسأله NP -سخت است حتی اگر به برخی از کلاس‌های گراف‌ها یا گراف‌های جهت‌دار محدود شوند، به عنوان مثال در مراجع [۱۲، ۹، ۷، ۱۱] مشاهده می‌کنیم. حال نتایج مشابهی برای پارامتر $idor$ ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱.۵.۳. پارامتر $IDOR$ یک مسأله NP -کامل است، حتی در صورتی که به گراف‌های دوبخشی مکعبی^۸ و یا گراف‌های دوبخشی مسطح^۹ از حداکثر درجه ۳ محدود شده باشد.

برهان. کاهش پوشش رأسی که شامل یک گراف G و یک عدد صحیح نامنفی k می‌شود، تصمیم می‌گیریم که آیا گراف G دارای پوشش رأسی از اندازه حداکثر k است یا نه. این مسأله یکی از ۲۱ مسأله اولیه که NP -کامل است و در مرجع [۳۳] توسط *Karp* ثابت شده است. شناخته شده است که این مسأله یک مسأله NP -کامل است حتی زمانی که به گراف‌های مکعبی در مرجع [۲۸] و یا گراف‌های مسطح در مرجع [۲۷] از حداکثر درجه ۳ محدود شده باشد. به راحتی نشان می‌دهیم که مسأله NP -کامل است باقی می‌ماند زمانی که به گراف‌های مسطح با کمترین درجه حداقل ۲ و درجه حداکثر ۳ محدود شده باشد. فرض کنیم G یک گراف باشد. فرض کنیم H گراف بدست‌آمده از گراف G با جایگزین کردن هر یال با ابزار یال F_e که در شکل ?? نشان داده شده است.

^۸Bipartite cubic graph

^۹Bipartite planar graph



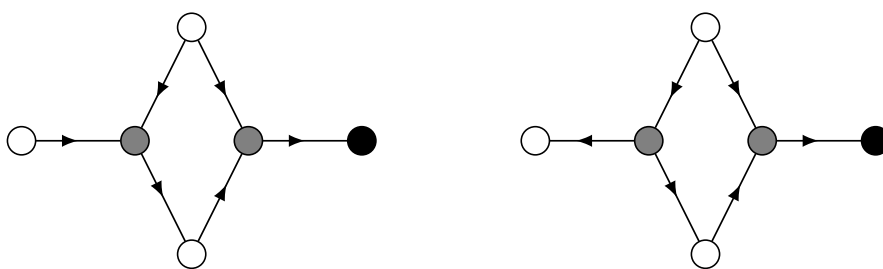
شکل ۳.۳: ابزار یال F_e برای یال $e = uv$.

مشاهده می‌کنیم که گراف H دوبخشی است. علاوه بر این اگر گراف G مکعبی باشد سپس گراف H نیز مکعبی است، و اگر گراف G گراف مسطح با کمترین درجه حداقل ۲ و حداکثر ۳ باشد گراف H نیز است. ادعا می‌کنیم که $idor(H) = vc(G) + 2|E(G)|$ که نتیجه بدست می‌آید.

نام رأس‌ها را به صورتی که در شکل نوشته شده است استفاده می‌کنیم. برای هر یال $e = uv$ ، مجموعه به صورت $\{x_u^e, x_v^e\}$ است.

فرض کنیم که گراف G دارای پوشش رأس S است.

فرض کنیم $e = uv$ یک یال از گراف G باشد. داریم $|\{u, v\} \cap S| \geq 1$. اگر $|\{u, v\} \cap S| = 1$ ، یال‌های F_e رابه صورت شکل ۴.۳ سمت چپ نشان داده است جهت‌دهی می‌کنیم، و اگر $|\{u, v\} \cap S| = 2$ ، یال‌های F_e رابه صورت شکل ۴.۳ سمت راست نشان داده است جهت‌دهی می‌کنیم. این نتیجه در گراف جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی گراف G است. مجموعه $C = \bigcup_{e \in E(G)} S \cup X_e$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین مجموعه C یک کد شناسایی در گراف جهت‌دار D است. در واقع، برای تمام $v \in S$ ، داریم $I(v) = \{v\}$ ، برای تمام $w \in V(G) \setminus S$ ، $I(w) = N_H(w)$ ، می‌باشد، برای هر یال $e = uv$ با $v \in S$ ، نتیجه می‌گیریم $I(y_v^e) = \{x_v^e\}$ ، $I(y_u^e) = \{x_u^e, x_v^e\}$ ، $I(x_v^e) = \{x_v^e, v\}$ و اگر $u \in S$ باشد داریم $I(x_u^e) = \{x_u^e, u\}$ و در غیر اینصورت $I(x_u^e) = \{x_u^e\}$ است. (در اینجا این حقیقت که گراف G دارای کمترین درجه حداقل ۲ دلالت بر این دارد برای تمام $w \in V(G) \setminus S$ ، $I(w)$ غیر تهی و متمایز از شناساگرهای دیگر است). بنابراین $idor(H) \leq |C| = vc(G) + 2|E(G)|$



شکل ۴.۳: جهت‌دهی ایزار یال F_e وقتی که رأس e در S است (سمت چپ) و هر دو پایان رأس e در S هستند (سمت راست). رأس‌های سیاه آن‌هایی که در S هستند و رأس‌های سیاه و خاکستری آن‌هایی که در C هستند.

به طور متقابل، گراف جهت‌دار D حاصل از گراف H را با یک کد شناسایی C از اندازه $idor(H)$ در نظر می‌گیریم. علاوه بر این، کد شناسایی را در نظر می‌گیریم که تعداد رأس‌ها در $V(G)$ به حداکثر می‌رساند.

اگر E' مجموعه‌ی یال‌ها از گراف G باشد که هیچ رأس پایانی در C نداشته باشند. برای هر $e \in E'$ رأس پایانی x_e از e را انتخاب می‌کنیم. اگر $S = (C \cap V(G)) \cup \{x_e | e \in E'\}$ باشد. مجموعه S را به صورت پوشش رأسی از G ترسیم می‌کنیم. علاوه بر این، برای هر یال $e = uv$ از گراف G ، کد C شامل حداقل دو رأس در $\{x_u^e, x_v^e, y_u^e, y_v^e\}$ است در غیر این صورت یکی از شناسه‌های y_u^e و y_v^e تهی یا هر دو یکسان هستند. علاوه بر این، اگر $e \in E'$ باشد، حداقل سه رأس در $\{x_u^e, x_v^e, y_u^e, y_v^e\}$ وجود دارد: بنابراین شناسه‌های این چهار رأس در $\{x_u^e, x_v^e, y_u^e, y_v^e\} \cap C$ وجود دارند، و این مجموعه باید از اندازه حداقل ۳ باشد تا چهار زیر مجموعه غیر تهی متمایز داشته باشند. در نتیجه، $|C| \geq |C \cap V(G)| + 2|E(G)| + |E'| = |S| + 2|E(G)|$. بنابراین $idor(H) \leq |C| = vc(G) + 2|E(G)|$. $\square$

مشاهده می‌کنیم که $idor$ را می‌توان در زمان چند جمله‌ای برای گراف‌هایی با حداکثر درجه ۲ حل کرد. در واقع چنین نمودارهایی اجتماعی از مسیرها و دورها هستند. در نتیجه $idor$ را می‌توان در زمان خطی (زمان مورد نیاز برای محاسبه اجرای مرتبط گراف) با استفاده از نتیجه (۲.۲.۳)، گزاره (۶.۳.۳) و گزاره زیر محاسبه کرد.

گزاره ۱.۵.۳. اگر C_n دور به طول n باشد. اگر $n \neq 4$ بنابراین $idor(C_n) = \lceil n/2 \rceil$ و $idor(C_4) = 3$ است.

برهان. ابتدا فرض کنیم که $n \neq 4$ است. باتوجه به قضیه (۱.۳.۳)، نتیجه می‌گیریم که $idor(C_n) = \lceil n/2 \rceil$ است. فرض کنیم گراف جهت‌دار D حاصل از C_n با منابع $\lceil n/2 \rceil$ و چاهک $\lceil n/2 \rceil$ باشد. مجموعه $\lceil n/2 \rceil$ رأس از گراف جهت‌دار D که منبع یک کد شناسایی از گراف D

نیست. بنابراین $idor(C_n) = \lceil n/2 \rceil$. حال فرض می‌کنیم که $n = 4$. از برابری (۲.۳) نتیجه می‌گیریم $idor(C_4) \geq 3$ و گزاره (۴.۲.۳) نشان می‌دهد که $idor(C_4) \leq 3$ است. $\square$

مشاهده می‌کنیم که گراف‌ها با حداکثر درجه ۲ دارای عرض درختی حداکثر ۲ دارند. به طور کلی، پارامتر $IDOR$ می‌تواند در زمان چند جمله‌ای برای گراف‌ها با عرض درختی محدود حل شود.

گزاره ۲.۵.۳. برای هر عدد صحیح ثابت t ، پارامتر $IDOR$ در زمان چند جمله‌ای قابل حل است زمانی که به کلاس $\mathcal{T}t$ از گراف‌ها با عرض درختی حداکثر t محدود شود.

برهان. با استفاده از برنامه نویسی استاندارد پویا. برای هر کیسه B ، فرض کنیم H_B زیر گراف القایی باشد شامل رأس‌ها در کیسه‌هایی از زیر درخت با ریشه B قرار گرفته است. برای هر زیر مجموعه A و مجموعه P از زوج‌های نامرتب B ، حداقل اندازه یک کد جزیی C حاصل از گراف جهت‌دار D_B از زیر مجموعه $H_B \setminus E(GB)$ به طوری که $B \cap C = A$ و هر زوج $\{U, V\}$ در P مشخص می‌شود (یعنی $N_D^+(u) \neq N_D^+(v)$). $\square$

۲.۵.۳ IDOR – LARGE

هدف این بخش این است که ثابت کنیم پارامتر $LARGE - IDOR$ یک XP هست که پارامتر k است. این معادل با عبارت زیر است.

قضیه ۲.۵.۳. برای هر k ثابت نا منفی، مسأله زیر در زمان چند جمله‌ای قابل حل است.

$$k - LARGE - IDOR$$

ورودی: G یک گراف باشد.

سؤال: $idor(G) \geq |V(G)| - k$ ؟

اثبات قضیه قبل براساس مفهوم اتم است. گراف G یک k -اتم است اگر $idor(G) = |V(G)| - k$ و $idor(H) > |V(H)| - k$ برای همه زیرگراف‌های القا شده H از G برقرار است. اگر A_k مجموعه‌ای از k -اتم باشد. مشاهده می‌کنیم نتیجه (۱.۲.۳) به این معنی است که هر گراف G به طوری که $idor(G) \leq |V(G)| - k$ شامل یک K -اتم به صورت یک زیر گراف القایی است. به عبارت دیگر، مجموعه‌ای از گراف‌ها به طوری که $idor(G) > |V(G)| - k$ مجموعه گراف‌های A_k - مستقل هستند.

ثابت خواهیم کرد که برای هر k مجموعه A_k متناهی است. بنابراین الگوریتم $brute-force$ برای بررسی اینکه آیا گراف G شامل $(k+1)$ -اتم در زمان چند جمله‌ای $k - LARGE - IDOR$ را حل خواهد کرد.

قضیه ۳.۵.۳. فرض کنیم k عدد صحیح مثبت باشد. هر k -اتم دارای بیشترین مرتبه $\binom{k}{2} + 1$ است.

برهان. فرض کنیم G یک گراف از مرتبه n باشد. دارای گراف جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی گراف G است که یک کد شناسایی C از مرتبه $n - k$ دارد. مجموعه $U = V(G) \setminus C$ در نظر می‌گیریم.

برای اثبات کافیت ثابت کنیم که یک مجموعه C' از اندازه حداکثر $1 + k + \binom{k}{2}$ وجود دارد که یک کد شناسایی از گراف جهت‌دار D' حاصل از جهت‌دهی $GU \cup C'$ است. برای D' و C' ، چهار ویژگی زیر بررسی خواهیم کرد.

(P۱) برای هر رأس $v \in V(D')$ داریم $I_{C'}(v) \neq \emptyset$.

(P۲) برای دو رأس متمایز $u, u' \in U$ داریم $I_{C'}(u) \neq I_{C'}(u')$.

(P۳) برای دو رأس متمایز $v, v' \in C'$ داریم $I_{C'}(v) \neq I_{C'}(v')$.

(P۴) برای هر $u \in U$ و $v \in C$ داریم $I_{C'}(v) \neq I_{C'}(u)$.

برای دو رأس متمایز $u, u' \in U$ ، رأس $s(u, u')$ در $I_C(u) \Delta I_C(u')$ انتخاب می‌کنیم. مجموعه $\{u, u'\} - 2$ زیر مجموعه از U است $S = \{s(u, u') \mid u, u' \in U\}$ در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم $|S| \leq \binom{k}{2}$. علاوه بر این، رأس $s(u, u')$ توسط u یا u' در گراف D احاطه می‌شود زیرا $I_C(u) \Delta I_C(u')$ است. بنابراین حداکثر یک رأس از U دارای همسایه بیرونی S نیستند. اگر رأس u_0 وجود داشته باشد، اگر $t(u_0)$ همسایگی بیرونی در C باشد و فرض کنیم $C_0 = S \cup \{t(u_0)\}$ باشد. به عبارت دیگر $C_0 = S$ است. فرض کنیم $D_0 = D < C_i \cup U >$ باشد. حال C_0 را به مجموعه C_i و D_0 که یک گراف جهت‌دار D_i حاصل از جهت‌دهی گراف $G < C_i \cup U >$ است گسترش می‌دهیم. که خواص زیر را بدست می‌آید.

مشاهده می‌کنیم که C_0 و D_0 به گونه‌ای ساخته شده‌اند که در مسیرهای (P۱) و (P۲) صدق می‌کنند. علاوه بر این، مسیر (P۳) برای هر گراف جهت‌دار از دو عضو در کد صدق می‌کند، یکی از آن‌ها در شناساگر دیگری نیست. با این حال، گراف‌های C_0 و D_0 در صورت لزوم کامل در مسیر (P۴) برقرار است. فرض کنیم مجموعه $B = \{(u_1, v_1), \dots, (u_p, v_p)\}$ زوج مرتب‌هایی از $U \times C_0$ باشند که مسیر (P۴) صدق می‌کند (یعنی $I_{C_0}(u_i) = I_{C_0}(v_i)$). از آنجا که (P۳) برقرار است، بنابراین همه u_i ‌ها متمایز هستند، و بنابراین $P \leq k$ است.

برای $i = 1, \dots, p$ ، رأس $t(u_i, v_i)$ در $I_C(u_i) \Delta I_C(v_i)$ انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم $T = \{t(u_i, v_i) \mid 1 \leq i \leq p\}$ باشد. توجه داشته باشیم که $T \cap C_0 = \emptyset$ است. حال همه یال‌های بین C_0 و T به سمت T و همه یال‌های بین T و U به سمت U جهت‌دهی می‌کنیم. در نهایت، اگر $\{v_i, t(u_i, v_i)\}$ یال نباشد، بنابراین جهت $\{v_i, t(v_i)\}$ در $(v_i, t(u_i, v_i))$ تغییر می‌دهیم. این نتیجه می‌دهد که گراف جهت‌دار D' حاصل از جهت‌دهی $G < S \cup T \cup U >$ است.

فرض می‌کنیم کد $C' = C_0 \cup T$ یک کد شناسایی از گراف D' است. بنابراین C' و D' مسیرهای P۱، P۲ و P۳ نتیجه می‌دهد. فرض کنیم ثابت کرده‌ایم که P۴ نیز برقرار است. فرض کنیم u و v به ترتیب دو رأس در U و C باشند.

ابتدا $v \in C_0$ در نظر می‌گیریم. اگر $(u, v) \notin B$ باشد، بنابراین $I_{C_0}(u) \neq I_{C_0}(v)$ ، پس $I_{C'}(u) = I_{C'}(v)$ است. اگر $(u, v) \in B$ باشد، سپس $\{u, t(u, v)\}$ یک یال در G است و نتیجه

می‌گیریم $t(u, v) \in N^+[v] \setminus N^+[u]$ یا $\{u, t(u, v)\}$ یک یال در G نیست و $t(u, v) \in N^+[u] \setminus N^+[v]$ است. در هر دو حالت، $I_{C'}(u) \neq I_{C'}(v)$ برقرار است. حال $v \in T$ در نظر می‌گیریم. اندیس i وجود دارد به طوری که $v = t(u_i, v_i)$ است. اگر $u \neq u_i$ باشد، بنابراین $v \notin N^+[u]$ و سپس $I_{C'}(u) \neq I_{C'}(v)$ داریم. اگر $u = u_i$ باشد، بنابراین $v \notin N^+[u]$ یا $\{v_i, v\}$ یک یال در G نیست. در هر دو مورد، داریم $I_{C'}(u) \neq I_{C'}(v)$. $\square$

با توجه به گزاره ۴.۲.۳ نتیجه می‌گیریم که مجموعه $\{K_3, P_3\}$ مجموعه ۱-اتم است.

۳.۵.۳ IS CODE

مسئله ۱.۵.۳. پیچیدگی مسأله زیر:

IS CODE

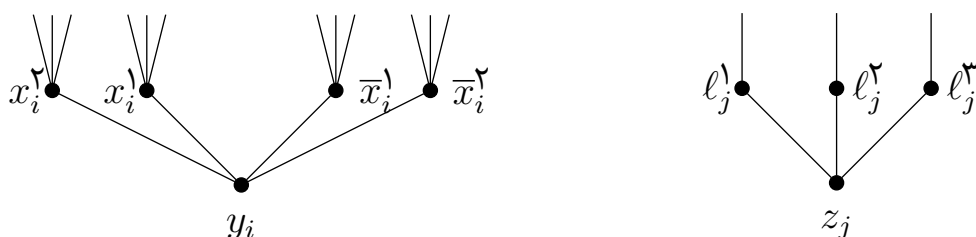
ورودی: G یک گراف و مجموعه $C \subseteq V(G)$ باشد.

سؤال: یک گراف جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی گراف G وجود دارد که C یک کد شناسایی است؟

قضیه ۴.۵.۳. مسأله IS CODE یک مسأله NP -کامل است.

برهان. مسأله IS CODE در NP است. گراف جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی گراف G در نظر می‌گیریم که در آن C یک کد شناسایی است.

اکنون ثابت می‌کنیم مسأله IS CODE یک مسأله NP -سخت است. مسأله را به مسأله $SAT-3,4$ کاهش می‌دهیم که این کاهش ۳- SAT به مواردی می‌رسد که هر متغیر بیشتر از ۴ بار رخ می‌دهد. این مسأله توسط Tovey در مرجع [۲۳] نشان داده NP -کامل است. دستور $SAT-3,4$ را در نظر می‌گیریم. برای اولین بار هر جمله را برای دستور $SAT-3,4$ معادل $\mathcal{F}$ در نظر می‌گیریم که برابر با 2^m جمله به صورت $C_1, \dots, C_m$ در n متغیر به صورت $x_1, \dots, x_i$ بدست می‌آوریم. فرض کنیم G یک گراف و C زیر مجموعه‌ای از رأس‌ها به صورتی که در ادامه بیان می‌کنیم باشد. برای هر متغیر x_i ، ابزار متغیر VG_i با مجموعه رأس $\{x_i, \bar{x}_i, x_i y_i, \bar{x}_i y_i, \bar{x}_i \bar{y}_i, x_i \bar{y}_i\}$ ، و مجموعه بال $\{x_i, \bar{x}_i, \bar{x}_i y_i, x_i y_i\}$ ایجاد می‌کنیم. برای هر جمله CG_j ، یک ابزار جمله CG_j با مجموعه رأس‌های $\{l_j^1, l_j^2, l_j^3, z_j\}$ ، و مجموعه یال‌های $C_j = l_j^1 \vee l_j^2 \vee l_j^3$ ، یک ابزار جمله CG_j با مجموعه رأس‌های $\{l_j^1, l_j^2, l_j^3, z_j\}$ ، و مجموعه یال‌های $l_j^1 z_j, l_j^2 z_j, l_j^3 z_j$ ایجاد می‌کنیم. به شکل ۳.۵.۳ نگاه کنید. علاوه بر این، اگر $k \in [3]$ باشد، کلمه مخالف x_i است و سپس l_j^k را به $\bar{x}_i$ و $\bar{x}_i$ به هم متصل کنیم، و اگر l_j^k کلمه مخالف x_i نباشد بنابراین رأس l_j^k به $\bar{x}_i$ و $\bar{x}_i$ متصل می‌کنیم.



شکل ۵.۳: ابزار متغیر VG_i (سمت چپ) و ابزار جمله CG_j (سمت راست)

مجموعه $C = \bigcup_{i=1}^n V(VG_i) \cup \bigcup_{j=1}^m V(CG_j)$ تعریف می‌کنیم.

دو ابزار در اصل بسیار شبیه هستند: می‌خواهیم مطمئن شویم که در هر گراف جهت‌دار حاصل از جهت‌دهی گراف G که در آن C یک کد شناسایی است، هر ابزار متغیر یا جمله دارای حداقل یک رأس است که یال‌های خروجی ابزار همه از آن دور شده‌اند. بنابراین رأس‌های جدید در گراف G (اما نه در C) اضافه می‌کنیم. برای هر رأس v در $\{x_i^1, x_i^2, \bar{x}_i^1, \bar{x}_i^2\}$ ، فرض کنیم $P[v] = N_G[v] \setminus \{y_i\}$ است.

- برای هر متغیر x_i ، یک رأس اضافه می‌کنیم که همسایگی منحصر بفرد y_i است؛
 - برای هر جمله C_j ، یک رأس اضافه می‌کنیم که همسایگی منحصر بفرد z_j است؛
 - برای هر مجموعه S که زیر مجموعه دقیق غیر تهی از $P[v]$ است به ازای رأس $v \in \bigcup_{i=1}^n \{x_i^1, x_i^2, \bar{x}_i^1, \bar{x}_i^2\}$ ، یک رأس اضافه می‌کنیم که همسایگی منحصر بفرد S است.
- مشاهده می‌کنیم که در مرحله آخر، برای هر l_j^k ، یک رأس از $V(G) \setminus C$ ایجاد می‌کنیم که همسایگی منحصر بفرد l_j^k است.

توجه داشته باشیم هر متغیر در حداکثر ۸ جمله واقع می‌شود، حداکثر $2^8 - 2 = 254$ زیر مجموعه اکید غیر تهی از $P[v]$ برای هر $v \in \bigcup_{i=1}^n \{x_i^1, x_i^2, \bar{x}_i^1, \bar{x}_i^2\}$ وجود دارد. بنابراین G از اندازه حداکثر $2^{46}n + 2m$ است.

فرض کنیم نشان می‌دهیم که $\mathcal{F}$ برقرار است اگر و تنها اگر G دارای یک جهت‌دهی که در آن C یک کد شناسایی است.

ابتدا فرض کنیم که C یک کد شناسایی در گراف جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی گراف G است. مشاهده می‌کنیم که هر رأس $v \in V(G) \setminus C$ است که این نتیجه می‌دهد $I(v) = N_G(v)$ ، و هر یال از $E(V(G) \setminus C, C)$ به سمت C جهت‌دهی می‌کنیم.

برای هر رأس $v \in C$ ، یک رأس در $V(G) \setminus C$ وجود دارد که دارای شناساگر $\{v\}$ است. در نتیجه، همه رأس‌های C باید حداقل یک همسایگی بیرونی در C داشته باشند. بنابراین هر رأس y_i یک همسایگی بیرونی دارد که باید در C باشد بنابراین در $\{x_i^1, x_i^2, \bar{x}_i^1, \bar{x}_i^2\}$ است. علاوه بر این، می‌توانیم برای رأس y_i دقیقاً یک همسایگی بیرونی در $\{x_i^1, x_i^2, \bar{x}_i^1, \bar{x}_i^2\}$ در نظر

بگیریم زیرا به ترتیب برخی از کمان‌های y_i به سمت C خارج می‌شود که یک کد شناسایی از گراف D است (ثابت می‌کنیم که y_i یکی از همسایگی‌های بیرونی را نگه دارد). فرض کنیم w_i یک همسایگی بیرونی از y_i باشد. همانطور که قبل بیان شد در مجموعه $\{x_i^1, x_i^2, \bar{x}_i^1, \bar{x}_i^2\}$ است. شناساگر w_i در $P[w_i]$ قرار دارد. اکنون با ترسیم کردن و این واقعیت که همه یال‌های $E(V(G) \setminus C, C)$ به سمت C جهت‌دهی می‌کنیم، هر زیر مجموعه اکید S از این مجموعه یک همسایگی است و شناساگر یک رأس در $V(G) \setminus C$ است. بنابراین شناساگر w_i در $P[w_i]$ قرار دارد. این شناساگر توسط همه همسایگان خود در ابزارهای جمله احاطه می‌شود.

فرض کنیم ϕ مسأله‌ای در حالت درست باشد که به صورت $\phi(x_i) = true$ نمایش می‌دهیم یعنی اگر $w_i \in \{x_i^1, x_i^2\}$ باشد و در غیر این صورت $\phi(x_i) = false$ است. فرض کنیم می‌خواهیم ثابت کنیم که نتیجه ϕ است.

فرض کنیم $C_j = l_j^1 \vee l_j^2 \vee l_j^3$ یک جمله از $\mathcal{F}$ باشد. در گراف D ، رأس z_j دارای یک همسایگی بیرونی است که l_j^k می‌نامیم. فرض کنیم که کلمه $l + j^k$ متناظر با مخالف متغیر $\bar{x}_i$ است. پس رأس $N_G(l_j^k) = \{z_j, x_j^1, x_j^2\}$ داریم. بنابراین شناساگر آن در $\{l_j^k, x_j^1, x_j^2\}$ وجود دارد. اما از آنجا که x_i حداقل در دو جمله است (زیرا جمله‌ها را دو برابر کرده‌ایم)، پس $\{l_j^k, x_i^1\}$ و $\{l_j^k, x_i^2\}$ به ترتیب زیر مجموعه‌های اکید از $P[x_i^1]$ و $P[x_i^2]$ است. بنابراین این سه مجموعه شناساگرهای برخی از رأس‌های $V(G) \setminus C$ است. بنابراین شناساگر l_j^k برای $\{l_j^k, x_j^1, x_j^2\}$ است. بنابراین l_j^k توسط x_i^1 و x_i^2 احاطه می‌شود و در نتیجه w_i در مجموعه $\{x_j^1, x_j^2\}$ نیست. بنابراین به صورت $\phi(l_j^k) = \phi(\bar{x}_i) = true$ تعریف می‌کنیم. بنابراین C_j شامل کلمه درست است.

حال فرض می‌کنیم ϕ در حالت درست $\mathcal{F}$ نتیجه می‌دهد. فرض کنیم گراف جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی گراف G باشد به صورتی که در ادامه بیان می‌شود بدست می‌آید. حالت اول همه یال‌های $E(V(G) \setminus C, C)$ به سمت C جهت‌دهی می‌کنیم. حالت دوم برای هر متغیر x_i ، یال‌های $y_i x_i^1$ و $y_i x_i^2$ از y_i به سمت y_i جهت‌دهی می‌کنیم اگر $\phi(x_i) = true$ باشد و اگر $\phi(x_i) = false$ باشد یال‌ها را در جهت دیگری می‌چرخانیم. در نهایت، برای هر جمله $C_j = l_j^1 \vee l_j^2 \vee l_j^3$ ، رأس z_j را به سمت جهت درست جهت‌دهی می‌کنیم. علاوه بر این اگر $\phi(l_j^k) = true$ باشد، همه یال‌های بین l_j^k و رأس‌ها در ابزار متغیرها دور از l_j^k جهت‌دهی می‌کنیم. در غیر این صورت، همه یال‌ها را به سمت l_j^k جهت می‌دهیم. بنابراین کد C یک کد شناسایی از گراف D است. $\square$

علاوه بر قضیه قبل، موارد زیادی وجود دارد که IS CODE را می‌توان در زمان چند جمله‌ای حل کرد. اگر $C = V(G)$ باشد پاسخ بی‌درنگ "بله" و اگر $1 < |C| < 2^{|C|}$ باشد بنابراین جواب بی‌درنگ "نه" است. اگر C یک مجموعه پایدار از G باشد، یا اگر $G < C$ باشد دارای تعداد محدودی از یال‌ها داریم، بنابراین می‌توان آن را در زمان چند جمله‌ای با استفاده از جورسازی حل کرد، که در ادامه توضیح خواهیم داد.

لم ۱.۵.۳. با توجه به گراف G ، مجموعه $C \subseteq V(G)$ و گراف جهت‌دار D_C حاصل از جهت‌دهی

گراف $G < C >$ داده شده است، می‌خواهیم بررسی کنیم آیا می‌توان در زمان چند جمله‌ای بررسی کرد که یک گراف جهت‌دار D حاصل از جهت‌دهی گراف G وجود دارد به طوری که $D < G > = D_C$ و C یک کد شناسایی از گراف D است.

برهان. ابتدا فرض کنیم که گراف جهت‌دار D به طوری که $D < G > = D_C$ باشد، پس برای هر $v \in C$ داریم $I_{C,D}(v) = N^+[v] \cap C$.

برای هر رأس $v \in V(G)$ ، فرض کنیم $P(v)$ مجموعه شناساگرهای پتانسیلی v و $P(v)$ باشد که اندازه آن است: اگر $v \in C$ باشد، بنابراین $P(v) = \{N^+[v] \cap C\}$ و $P(v) = 1$ است؛ اگر $v \in V(G) \setminus C$ باشد، بنابراین $P(v)$ شامل همه زیر مجموعه‌های غیر تهی از $N(v) \cap C$ و $p(v) = 2^{|N(v) \cap C|} - 1$ است. توجه داشته باشیم که $P(v)$ می‌تواند در زمان چند جمله‌ای قابل حل باشد.

برای هر رأس v یک مجموعه $I(v)$ در $P(v)$ اختصاص دهیم به طوری که $I(v)$ دودو متمایز هستند. مشاهده می‌کنیم که اگر $p(v) \geq |V(G)|$ باشد برای دیگر رأس‌ها نسبت می‌دهیم، می‌توان مجموعه‌ای $I(v)$ در $P(v)$ پیدا کنیم که برای $u \neq v$ از $I(u)$ متمایز باشد. بنابراین، چنین رأس‌ها به طور مرتب در پایان نسبت می‌دهیم.

فرض کنیم A مجموعه‌ای از رأس‌ها به طوری که $p(v) \geq |V(G)|$ باشد. با توجه به مشاهدات قبل، کافی است که شناساگرهای مربوط به رأس‌ها را در A نسبت دهیم. فرض کنیم یک گراف دو بخشی معین H ایجاد کنیم. افرازی از مجموعه رأس (A, B) با B مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های C در $\bigcup_{v \in A} P(v)$ است. توجه داشته باشیم که B دارای اندازه کمتر از $|V(G)|^2$ است زیرا برای هر $v \in A$ داریم $p(v) < n$. مجموعه یال H به صورت

$$E(H) = \{ab | a \in A, b \in P(a)\}$$

است. پیدا کردن شناساگرهای متمایز برای رأس‌ها در A معادل پیدا کردن جور سازی اشباع A در H است. می‌توان در زمان چند جمله‌ای، با روش شناخته شده مجارستانی به عنوان مثال انجام داد. $\square$

لم قبل نشان می‌دهد که مسأله IS CODE را می‌توان در زمان چند جمله‌ای حل کرد اگر C چند یال داشته باشد، که دارای حداکثر $\log_2(P(|V(G)|))$ چند جمله‌ای ثابت P است.

کتابنامه

- [۱] بالاکریشان و رانگانتهان (مترجم: بیژن طائری)، (۱۳۸۶)، ”کتاب درسی نظریه گراف“ جلد اول، چاپ سوم، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، ۲۹۹ صفحه.
- [۲] سان لینگ و چائو بینگ شینگ (مترجمان: حسام‌الدین شریفی و کبری علی محمدی)، (۱۳۹۳)، ”درآمدی بر نظریه کدگذاری“ جلد اول، چاپ اول، انتشارات دانشگاه شاهد تهران، ۲۸۷ صفحه.
- [3] A. Cukierman and G. Yu, New bounds on the minimum density of an identifying code for the infinite hexagonal grid, *Discrete Appl. Math.*, 161(18) (2013), 2910–2924.
- [4] A. Lobstein, A bibliography on watching systems, identifying, locating-dominating and discriminating codes in graphs. <http://perso.telecomparistech.fr/~lobstein/debutBIBidetlocdom.pdf>.
- [5] C. A. Tovey, A simplified NP-complete satisfiability problem, *Discrete Appl. Math.*, 8(1) (1984), 85–89.
- [6] C. Berge, *Graphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1983, English translation: *Graphs*, North-Holland Publishing Company: Amsterdam, 1985.
- [7] D. W. Cranston and G. Yu, A new lower bound on the density of vertex identifying codes for the infinite hexagonal grid, *Electron. J. Combin.*, 16(1) (2009), R113.
- [8] F. Foucaud, Decision and approximation complexity for identifying codes and locating-dominating sets in restricted graph classes, *J. Discrete Algorithms*, 31 (2015), 48–68.
- [9] F. Foucaud, E. Guerrini, M. Kovse, R. Naserasr, Aline Parreau, and Petru Valicov, Extremal graphs for the identifying code problem, *Eur. J. Comb.*, 32(4) (2011), 628–638.
- [10] F. Foucaud, S. Gravier, R. Naserasr, A. Parreau, and P. Valicov, Identifying codes in line graphs, *J. Graph Theory*, 73(4) (2013), 425–448.

-
- [11] F.V. Fomin, F. Grandoni, A.V. Pyatkin, A.A. Stepanov, Combinatorial bounds via measure and conquer: bounding minimal dominating sets and applications, *ACM Trans. Algorithms*, 5 (2008) Article 9.
 - [12] I. Charon, O. Hudry, and A. Lobstein, Identifying and locating dominating codes: NP-completeness results for directed graphs, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 48(8) (2002), 2192–2200.
 - [13] I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein, Minimizing the size of an identifying or locating-dominating code in a graph is NP-hard, *Theoret. Comput. Sci.*, 290 (2003), 2109–2120.
 - [14] I. Charon, S. Gravier, O. Hudry, A. Lobstein, M. Mollard, and J. Moncel, A linear algorithm for minimum 1-identifying codes in oriented trees, *Discrete Applied Mathematics*, 154(8) (2006), 1246–1253.
 - [15] I. Honkala, O. Hudry, A. Lobstein, On the ensemble of optimal identifying codes in a twin-free graph, *Cryptography Communications*, 8(1) (2016), 139-153.
 - [16] I. Honkala, O. Hudry, A. Lobstein, On the ensemble of optimal dominating and locating-dominating codes in a graph, *Inform. Proc. Letters*, 115(9) (2015), 699-702.
 - [17] J.F. Couturier, P. Heggernes, P. Van't Hof, D. Kratsch, Minimal dominating sets in graph classes: combinatorial bounds and enumeration, in: *Lecture Notes in Computer Science*, 7147, (2012).
 - [18] M. A. Henning, A. Yao, *Total Domination in Graphs*, Springer-Verlag, New York, 2013.
 - [19] M. G. Karpovsky, K. Chakrabarty, L. B. Levitin, On a new class of codes for identifying vertices in graphs, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 44 (1998), 599–611.
 - [20] M. Pelto, A definition of uniqueness for optimal identifying and covering codes in infinite lattices, *Preprint*, (2012).
 - [21] M. Pelto, On identifying and locating-dominating codes in the infinite king grid, Ph. D. Thesis, *University of Turku, Finland*, 2012, 133 pp.
 - [22] M. Blidia, M. Chellali, Fr. Maffray, J. Moncel, and A. Semri, Locating-domination and identifying codes in trees. *Australasian Journal of Combinatorics*, 39 (2007), 219–232.
 - [23] M. Bouznif, F. Havet, and M. Preissmann. Minimum-density identifying codes in square grids. In *Algorithmic Aspects in Information and Management - 11th International Conference*, AAIM 2016, Bergamo, Italy, 18-20, 2016, Proceedings, 77–88.

- [24] M. G. Karpovsky, K. Chakrabarty, and L. B. Levitin, On a new class of codes for identifying vertices in graphs. *IEEE Trans. Information Theory*, 44(2) (1998), 599– 611.
- [25] M. Laifenfeld, A. Trachtenberg, R. Cohen, and D. Starobinski, Joint monitoring and routing in wireless sensor networks using robust identifying codes, *In Fourth International Conference on Broadband Communications, Networks and Systems, (BROADNETS 2007), 10-14 September 2007, Raleigh, North-Carolina, USA, pages 197–206. IEEE, 2007.*
- [26] M. Laifenfeld, A. Trachtenberg, R. Cohen, and D. Starobinski, Joint monitoring and routing in wireless sensor networks using robust identifying codes, *MONET*, 14(4) (2009), 415–432.
- [27] M. R. Garey and D. S. J. Computers and I. W. H. Freeman and Co., S. Francisco, Calif., 1979, A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.
- [28] M. R. Garey, D. S. Johnson, and L. J. Stockmeyer, Some simplified NP-complete graph problems, *Theoretical Computer Science*, 1(3) (1976), 237 – 267.
- [29] N. Bertrand, I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein, Identifying and locating-dominating codes on chains and cycles, *EuropeanJ. Combin.*, 25 (2004), 969–987.
- [30] R. Dantas, F. Havet, and R. M. Sampaio, Identifying codes for infinite triangular grids with a finite number of rows, *Discrete Math.*, 340(7) (2017), 1584–1597.
- [31] R. Dantas, R. M. Sampaio, and F. Havet, Minimum density of identifying codes of king grids, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 62 (2017), 51–56.
- [32] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [33] R. M. Karp, Reducibility among Combinatorial Problems, *Springer US, Boston, MA*, (1972), 85–103.
- [34] S. Gravier and J. Moncel, On graphs having a set as an identifying code, *Discrete Mathematics*, 307(3-5) (2007), 432 – 434.
- [35] S. Gravier, J. Moncel, A. Semri, Identifying codes of Cartesian product of two cliques of the same size, *Electron.J. Combin.* 15 (1) (2008) N 4.
- [36] S. Ray, R. Ungrangsi, F. D. Pellegrini, A. Trachtenberg, and D. Starobinski, Robust location detection in emergency sensor networks. *In Proceedings IEEE INFOCOM 2003, The*

22nd Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies, San Francisco, CA, USA, March 30 - April 3, 2003. IEEE, 2003.

- [37] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, Fundamentals of Domination in Graphs, *MarcelDekker*, NewYork, 1998.
- [38] T. Haynes, D. Knisley, E. Seier, and Y. Zou, A quantitative analysis of secondary rna structure using domination based parameters on trees, *BMC Bioinformatics*, 7(1) (2006), 108.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Dominate	احاطه کردن
Disjoint union	اجتماع مجزا
Complexity	پیچیدگی
Orientation	جهت‌دهی
Oriented	گراف جهت‌دار
Maximum average degree	حداکثر میانگین درجه
Cycle	دور
Discharging method	روش تخلیه
Polynomial time	زمان چندجمله‌ای
Spanning subgraph	زیرگراف فراگیر
Star	ستاره
Identifier	شناساگر
Clique number	عدد خوشه‌ای
Tight	فشرده (دقیق)
Code	کد
Identifying code	کدشناسایی
Upper bound	کران بالا
Lower bound	کران پایین
Graph	گراف
Induced graph	گراف القایی
Split graph	گراف تقسیم
Empty graph	گراف تهی
Digraph	گراف جهت‌دار
Symmetric digraph	گراف جهت‌دار متقارن
Twin-free graph	گراف فاقد رأس دوقلو
Triangle-free graph	گراف فاقد مثلث

Interval graph	گراف فاصله‌ای
Complete graph	گراف کامل
Complete bipartite graph	گراف کامل دوبخشی
Bipartite cubic graph	گراف مکعبی دوبخشی
Bipartite planar graph	گراف مسطح دوبخشی
Regular graph	گراف منظم
Chordal graph	گراف وتری
Incidence graph	گراف وقوع
Path	مسیر
Average degree	میانگین درجه
Closed out-neighbourhood	همسایگی بیرونی بسته
Closed neighbourhood	همسایگی بسته

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Average degree	میانگین درجه
Bipartite cubic graph	گراف مکعبی دوبخشی
Bipartite planar graph	گراف مسطح دوبخشی
Chordal graph	گراف وتری
Clique number	عدد خوشه‌ای
Closed neighbourhood	همسایگی بسته
Code	کد
Complete bipartite graph	گراف کامل دوبخشی
Complete graph	گراف کامل
Closed out-neighbourhood	همسایگی بیرونی بسته
Complexity	پیچیدگی
Cycle	دور
Digraph	گراف جهت‌دار
Discharging method	روش تخلیه
Disjoint union	اجتماع مجزا
Dominate	احاطه کردن
Empty graph	گراف تهی
Graph	گراف
Identifier	شناساگر
Identifying code	کد شناسایی
Incidence graph	گراف وقوع
Induced graph	گراف القایی
Interval graph	گراف فاصله‌ای
Lower bound	کران پایین
Maximum average degree	حداکثر میانگین درجه
Orientation	جهت‌دهی

Oriented graph	گراف جهت‌دار
Path	مسیر
Polynomial time	زمان چندجمله‌ای
Regular graph	گراف منظم
Spanning subgraph	زیرگراف فراگیر
Split graph	گراف تقسیم
Star	ستاره
Symmetric digraph	گراف جهت‌دار متقارن
Tight	فشرده (دقیق)
Triangle-free graph	گراف فاقد مثلث
Twin-free graph	گراف فاقد رأس دوقلو
Upper bound	کران بالا

Abstract

Let G be a simple graph with vertex set V . For $v \in V$ and $r \geq 1$, we denote by $B_{G,r}(v)$ the ball of radius r and centre v . A set $C \subseteq V$ is said to be an r - identifying code in G if the sets $B_{G,r}(v) \cap C$, for $v \in V$, are all nonempty and distinct. A graph G which admits an r - identifying code is called r - identifiable, and in this case the smallest size of an r - identifying code in G is denoted by $\gamma_r^{ID}(G)$. We study the number of different optimal r - identifying codes C , i.e., such that $|C| = \gamma_r^{ID}(G)$, that a graph G can admit, and try to construct graphs having “many” such codes. For a graph G , let $idor(G)$ be the minimum of $id(D)$ over all orientations D of G . We give some lower and upper bounds on $idor(G)$. In particular, we show that $idor(G) \leq \frac{3}{2}id(G)$ for every graph G . We also show that computing $idor(G)$ is NP -hard, while deciding whether $idor(G) \leq |V(G)| - k$ is polynomial-time solvable for every fixed integer k .

Keywords: Identifying code; identifiable graphs; orientation; twin-free graphs; NP-complete.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Applied Mathematics

**On the number and minimum size of
identifying codes over graphs**

By: Atefeh Moussavi

Supervisors

Dr. Meysam Alishahi

Dr. Abdollah Alhevaz

Advisor

Dr. Ebrahim Hashemi

October 2020