

الحمد لله
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی مالی، گرایش مالی

پایان نامه کارشناسی ارشد

روش جدید در قیمت گذاری اختیار معامله از طریق معادله دیفرانسیل جزئی زمان کسری

نگارنده: زینب یاسینی

استادان راهنما

دکتر الهام دسترنج
دکتر محمد میر باقری جم

استاد مشاور

دکتر سید رضا حجازی

مهر ۱۳۹۹

شماره:
تاریخ:

باسمه تعالی



فرم شماره (3) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم زینب یاسینی، با شماره دانشجویی..9516114، رشته ریاضی کاربردی گرایش ریاضی مالی تحت عنوان روش جدید در قیمت گذاری اختیار معامله از طریق معادله دیفرانسیل جزئی زمان کسری که در تاریخ 1399/07/22، با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☐ الف) درجه عالی: نمره 19-20 ☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره 18-18/99 ☐ ج) درجه خوب: نمره 16-17/99 ☐ د) درجه متوسط: نمره 14-15/99 ه) کمتر از 14 غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐ عملی ☒ نظری نوع تحقیق:			
عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
1- استاداراهنمای اول	دکتر الهام دسترنج	استادیار	
2- استاداراهنمای دوم	دکتر محمد میرباقری جم	استادیار	
3- استاد مشاور	دکتر سید رضا حجازی	دانشیار	
4- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سمیه مغاری	استادیار	
5- استاد ممتحن اول	دکتر حجت احسنی طهرانی	دانشیار	
6- استاد ممتحن دوم	دکتر عبدالمجید عبدالباقی عطاآبادی	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند جزئی



تقدیم به
پدر و مادر مهربانم
که در سختی ها و دشواری های زندگی همواره یوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی
محکم و مطمئن برایم بوده اند.
همسرم که نشانه لطف الهی در زندگی من است.
و فرزندان عزیزم

سپاسگزاری

حمد و سپاس مختص یگانه بی‌همتایی است که جسم و روح ما در اختیار اوست و پویدن در مسیر علم و دانش را در وجودمان نهاده است. در آغاز بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادرم که همواره پشتیبان و حامی من بوده و موفقیت‌هایم را مدیون زحماتشان هستم. سپس تشکر و قدردانی می‌کنم از استادان راهنمای عزیزم خانم دکتر الهام دسترنج و آقای دکتر محمد میرباقری جم و استاد مشاور گرامی آقای دکتر سید رضا حجازی به پاس زحماتی که برایم کشیدند و همچنین از آقای حسین صاحبی فرد که صبورانه در انجام این کاریاریام کردند.

شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا بر منتهای همت خود کامران شدم.

زینب یاسینی

مهر ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب زینب یاسینی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی مالی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **روش جدید در قیمت گذاری اختیار معامله از طریق معادله دیفرانسیل جزئی زمان کسری**، تحت راهنمایی الهام دسترنج و محمد میر باقری جم متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زینب یاسینی

مهر ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این رساله، به قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل رژیم سوئیچینگ از طریق حل معادله دیفرانسیل جزئی زمان کسری پرداخته شده است. در ادامه به عنوان نمونه، قیمت‌گذاری اختیار معامله توان روی شاخص مثقال طلا به عنوان دارایی پایه تحت مدل ذکر شده انجام شده است. بدین منظور اطلاعات ۲ سال اخیر شاخص مثقال طلا در بازار بورس ایران استخراج شده و قیمت‌گذاری با مشاهده داده‌ها از ابتدای سال ۱۳۹۷ انجام گرفته است. در پایان نشان داده شده است که مدل معرفی شده نوسانات بازار را کنترل می‌کند.

کلمات کلیدی: رژیم سوئیچینگ، زیر فضای ناوردا، قیمت‌گذاری اختیار معامله توان، اختیار معامله اروپایی، معادله دیفرانسیل جزئی زمان کسری.

فهرست مطالب

س	فهرست تصاویر	
ف	فهرست جداول	
۱	۱ مفاهیم و مقدمات	
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۲	۲.۱ ضرورت انجام تحقیق	۲
۲	۳.۱ پیش نیازها	۲
۲	۱.۳.۱ نظریه اندازه و احتمال	۲
۵	۲.۳.۱ فرآیند تصادفی	۵
۷	۳.۳.۱ مارتینگل	۷
۷	۴.۳.۱ حرکت براونی: تعریف و ویژگی‌ها	۷
۹	۴.۱ انتگرال ایتو	۹
۱۱	۱.۴.۱ فرمول ایتو در حالت یک بعدی	۱۱
۱۱	۲.۴.۱ فرمول ایتو در حالت کلی	۱۱
۱۲	۵.۱ تغییر اندازه	۱۲
۱۵	۶.۱ مفاهیم مالی	۱۵
۱۵	۱.۶.۱ اختیار معامله	۱۵
۱۸	۲.۶.۱ آربیتراژ	۱۸
۲۰	۳.۶.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی	۲۰
۲۳	۲ مدل رژیم سوئیچینگ	
۲۳	۱.۲ پیشینه تحقیق	۲۳
۲۵	۲.۲ مقدمه	۲۵
۲۵	۳.۲ زنجیر مارکوف زمان پیوسته	۲۵
۲۷	۴.۲ رژیم سوئیچینگ	۲۷

۲۸	۵.۲	قیمت‌گذاری اختیار توان تحت مدل رژیم سوئیچینگ
۳۳	۳	قیمت‌گذاری اختیار معامله توان با روش زیر فضای ناوردا
۳۳	۱.۳	مقدمه
۳۴	۱.۱.۳	یافتن جواب دقیق با روش زیر فضای ناوردا
۴۵	۴	نتایج عددی در بازار طلای ایران
۵۳		مراجع
۵۷		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

فهرست تصاویر

۱۷	۱.۱	بازدهی حاصل از خرید یا فروش اختیار معاملات اروپایی.
۲۷	۱.۲	قیمت طلا در نیم قرن اخیر در جهان
۳۷	۱.۳	(a) $t = 2, \sigma = 1, r = 5\%$ و (b) $s = 2, \sigma = 1, r = 5\%$
	۲.۳	(a) نمایشی از V_1 در معادله (۱۸.۳)، (b) V_1 در معادله (۲۸.۳)، $\sigma_1 = 4\%, \sigma_2 = 3\%, r_1 = 2\%, r_2 = 2\%, q_{12} = 3\%, q_{21} = 3\%, c_1 = c_2 = c_3 = 1$
۴۱	۳.۳	(a) نمایشی از V_2 در معادله (۱۸.۳)، (b) V_1 در معادله (۲۸.۳)، $\sigma_1 = 4\%, \sigma_2 = 3\%, r_1 = 2\%, r_2 = 2\%, q_{12} = 1\%, q_{21} = 3\%, c_1 = c_2 = c_3 = 1$
۴۲	۴.۳	نمایشی از مقادیر مختلف آلفا برای معادلات (۲۸.۳)، $\sigma_1 = 4\%, \sigma_2 = 3\%, r_1 = 2\%, r_2 = 2\%, q_{12} = 1\%, q_{21} = 3\%, \alpha = 2\%$
۴۳	۵.۳	ادامه شکل قبل $(c)V_1(t, s), \alpha = 5\%$ ، $(d)V_2(t, s), \alpha = 5\%$
۴۳	۶.۳	ادامه شکل قبل $(e)V_1(t, s), \alpha = 8\%$ ، $(f)V_2(t, s), \alpha = 8\%$
۴۶	۱.۴	نمودار جامع تحولات سالانه شاخص مبالغ طلا در بازه مورد نظر
۴۸	۲.۴	نمایش V_1 از معادله (۱۸.۳)، $q_{12} = 1\%, q_{21} = 3\%, c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$
۴۹	۳.۴	نمایش V_2 از معادله (۱۸.۳)، $q_{12} = 1\%, q_{21} = 3\%, c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$
۵۰	۴.۴	نمایش V_1 از معادله (۲۸.۳)، $q_{12} = 1\%, q_{21} = 3\%, c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$
۵۱	۵.۴	نمایش V_2 از معادله (۲۸.۳)، $q_{21} = 3\%, c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$

فهرست جداول

۴۹		برخی از مقادیر حاصل از نمودار ۲.۴	۱.۴
۵۰		برخی از مقادیر حاصل از نمودار ۳.۴	۲.۴
۵۱		برخی از مقادیر حاصل از نمودار ۴.۴	۳.۴
۵۲		برخی از مقادیر حاصل از نمودار ۵.۴	۴.۴

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات

۱.۱ مقدمه

برای پژوهشگران، تحلیلگران مالی و مدیران ریسک در سازمان‌های پولی و مالی، تجزیه و تحلیل اوراق بهادار اهمیت ویژه‌ای دارد.

بدون داشتن یک مدل ریاضی در تجزیه و تحلیل اوراق بهادار از جمله اوراق قرضه، سهام و اوراق مشتقه اشتباهاتی ظریف رخ خواهد داد که تشخیص آن کار ساده‌ای نیست و همچنین نمی‌توان از آن چشم‌پوشی کرد.

اخیراً پژوهشگران و تحلیلگران مالی و ریسک و به کمک ریاضیدانان و اقتصاددانان با استفاده از تکنیک‌های پیشرفته‌ی ریاضی توانسته‌اند مدل‌های جدیدی طراحی کنند که تغییرات ناگهانی بازار را توصیف می‌کند.

مدل بلک-شولز یکی از مشهورترین مدل‌ها در بازارهای مالی است و در تعیین قیمت دارایی‌های دارای ریسک بالا نقش مهمی دارد. اما نقص این مدل در پیش‌بینی خصوصیات مهم مشاهده شده در درآمدهای دارایی‌ها و نوسانات ناگهانی بازار است.

در مدل بلک-شولز قیمت دارایی پایه از فرآیند حرکت براونی هندسی تبعیت می‌کند که در آن نوسانات و جابجایی قیمت دارایی ثابت فرض شده است. به همین دلیل قادر به پیش‌بینی و یا توضیح رفتار دینامیک یا تصادفی در تغییرات قیمت نیست.

۲.۱ ضرورت انجام تحقیق

فعالان بازارهای اقتصادی و سرمایه‌گذاری به دلیل شرایط حاکم بر بازارها و نوسانات و عدم اطمینان از وضعیت آتی بازار همواره با ریسک‌هایی مواجه هستند که ممکن است آن‌ها را در معرض زیان قرار دهد. بدین منظور همواره تلاش بر این بوده است که راهکارهای مناسبی برای پوشش این ریسک‌ها اتخاذ شود و به عبارتی ریسک‌های پیش روی فعالان بازار سرمایه مدیریت شوند.

۳.۱ پیش نیازها

در این فصل، به طور خلاصه به بیان برخی مفاهیم و اصطلاحات اولیه می‌پردازیم. مطالب ارائه شده در این فصل به جز مواردی که به روشنی مشخص شده است، از مراجع [۳]، [۴] و [۸] گرفته شده‌اند.

۱.۳.۱ نظریه اندازه و احتمال

نظریه احتمال، مطالعه‌ی رویدادهای احتمالی از دیدگاه ریاضیات است. به عبارت دیگر نظریه احتمال شاخه‌ای از ریاضیات است که با تحلیل وقایع تصادفی سروکار دارد.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{F}$ زیرمجموعه‌ای ناتهی از مجموعه توانی مجموعه Ω باشد، یک σ - میدان روی Ω است هرگاه

$$۱. \Omega \in \mathcal{F}$$

$$۲. \text{ اگر } A \in \mathcal{F} \text{ آنگاه } A^c \in \mathcal{F}$$

$$۳. \text{ اگر } A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F} \text{ آنگاه } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

تعریف ۲.۳.۱. اگر $\Omega = \mathbb{R}^n$ (یا $\mathbb{R}$) و $\mathcal{F}$ مجموعه‌ی تمام بازها باشد، σ - میدان تولید شده توسط $\mathcal{F}$ را σ - میدان بورل گویند و با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک σ - میدان از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ناتهی Ω باشد، تابع $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ را یک اندازه گوییم هرگاه

$$۱. \text{ برای هر مجموعه } A \in \mathcal{F} \text{ داشته باشیم؛ } 0 \leq \mu(A) \leq \infty$$

$$۲. \text{ اگر } \{A_n\}_{n \geq 1} \text{ دنباله‌ای از اعضای دو به دو جدا از هم } \mathcal{F} \text{ باشد به طوری که } \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$$

آنگاه داشته باشیم؛

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

تعریف ۴.۳.۱. اندازه $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ را σ -متناهی گوییم هرگاه دنباله $\{A_n\}_{n \geq 1}$ از اعضای $\mathcal{F}$ وجود داشته باشد به طوری که $X = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ و برای هر $n \geq 1$ داشته باشیم؛

$$\mu(A_n) < \infty.$$

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{F}$ ، σ -میدانی از زیرمجموعه‌های آن باشد، زوج مرتب $(\Omega, \mathcal{F})$ را یک فضای اندازه‌پذیر گویند. اگر μ اندازه‌ای روی $\mathcal{F}$ باشد آنگاه سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ را فضای اندازه می‌نامیم.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. اندازه دیراک (جرم نقطه‌ای دیراک) مربوط به یک نقطه $x \in E$ برای هر مجموعه $A \in \mathcal{F}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنید B ، σ -میدان بول روی $\mathbb{R}^d$ باشد و $E \subset \mathbb{R}^d$. اندازه رادون روی (E, B) یک اندازه μ است به طوری که برای هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر فشرده داشته باشیم:

$$B \in \mathcal{B}, \quad \mu(B) < \infty.$$

تعریف ۸.۳.۱. تابع حقیقی مقدار $f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ را اندازه‌پذیر گوییم هرگاه برای هر B از σ -میدان $\mathcal{B}$ داشته باشیم:

$$f^{-1}(B) = \{w \in \Omega : f(w) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. یک اندازه علامت‌دار روی $(\Omega, \mathcal{F})$ تابعی چون $V : \mathcal{F} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ است هرگاه

$$V(\emptyset) = 0. \quad ۱.$$

۲. V حداکثر یکی از مقادیر $+\infty$ یا $-\infty$ را بپذیرد،

۳. اگر $\{A_n\}_{n \geq 1}$ دنباله‌ای از اعضای دو به دو جدا از هم در $\mathcal{F}$ باشند به طوری که $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ ، آنگاه داشته باشیم:

$$V\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} V(A_n).$$

بنابراین هر اندازه، یک اندازه علامت‌دار است.

مثال ۱.۳.۱. اگر μ یک اندازه روی $(\Omega, \mathcal{F})$ باشد و $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ تابعی باشد به قسمی که یکی از دو مقدار $\int f^+ d\mu$ و $\int f^- d\mu$ متناهی باشد آنگاه $V(E) = \int_E f d\mu$ یک اندازه علامت‌دار است.

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک σ -میدان از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ناتهی Ω باشد. تابع $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ را یک **اندازه احتمال** گوییم هرگاه

$$P(\Omega) = 1.$$

۲. اگر $\{A_n\}_{n \geq 1}$ دنباله‌ای از اعضای دو به دو جدا از هم در $\mathcal{F}$ باشند به طوری که $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ ، آنگاه داشته باشیم:

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} P(A_n).$$

سه تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را **فضای احتمال** می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۳.۱. هر دسته‌ی صعودی از σ -میدان‌ها را یک **فیلتر** گویند و با نماد $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ نمایش می‌دهند که در آن I مجموعه‌ی اندیس‌گذار است که می‌تواند شمارش‌پذیر یا شمارش‌ناپذیر باشد.

تعریف ۱۲.۳.۱. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ مجهز شده به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ را یک **فضای احتمال فیلترشده** می‌نامند و با $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۳.۳.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال و Q اندازه احتمال دیگری روی این فضا باشد، اگر برای هر $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0,$$

آنگاه Q نسبت به P **مطلقاً پیوسته** است و می‌نویسیم $Q \ll P$. همچنین اگر برای هر $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = 0 \iff Q(A) = 0,$$

گوییم Q و P اندازه‌های **معادل** هستند و می‌نویسیم $Q \sim P$.

تعریف ۱۴.۳.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. در این صورت تابع مشخصه A در X ، یعنی $1_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ را برای هر $x \in X$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in X - A. \end{cases}$$

البته انتخاب مجموعه $\{0, 1\}$ هر چند معمول‌تر است ولی الزامی نیست و می‌توان هر مجموعه دو عضوی دیگر را نیز انتخاب کرد. این تابع به هر عضو مجموعه A عدد یک و به هر عضو $X - A$ یعنی عناصری که متعلق به X هستند ولی به A تعلق ندارند مقدار صفر را نسبت می‌دهد.

۲.۳.۱ فرآیند تصادفی

تعریف ۱۵.۳.۱. هر تابع اندازه‌پذیر از فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ به فضای اندازه‌پذیر $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ را یک متغیر تصادفی گوییم.

تعریف ۱۶.۳.۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد، σ -میدان تولید شده توسط X که با نماد $\mathcal{F}(X)$ نشان داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{F}(X) = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}\}.$$

تعریف ۱۷.۳.۱. هر خانواده (شمارا یا ناشمارا) از متغیرهای تصادفی، یک فرآیند تصادفی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۸.۳.۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. تابع توزیع X که با F_X نشان داده می‌شود، برای هر عدد حقیقی x به صورت زیر است.

$$F_X(x) = P_X(-\infty, x] = P\{X \leq x\},$$

که در آن P_X اندازه‌ی القا شده توسط X روی $\mathcal{B}$ است و **توزیع متغیر تصادفی** نامیده می‌شود.

تعریف ۱۹.۳.۱. فرض کنید $\{X_t\}_{t \geq 0}$ فرآیند تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{F})$ باشد. برای هر $w \in \Omega$ ، مسیر $X(w) : t \rightarrow X_t(w)$ تابعی از زمان را تعریف می‌کند که **مسیر** فرآیند نامیده می‌شود.

تعریف ۲۰.۳.۱. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ را نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ **سازگار** می‌گوییم هرگاه برای هر $t, s \geq 0$ ، X_t نسبت به $\mathcal{F}_t$ اندازه‌پذیر باشد. فیلتر طبیعی، کوچک‌ترین فیلتری است که فرآیند تصادفی X نسبت به آن سازگار است.

تعریف ۲۱.۳.۱. متغیر تصادفی X روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را در نظر بگیرید. امید ریاضی (ارزش مورد انتظار) X به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega),$$

به طوری که $E|X| < \infty$.

تعریف ۲۲.۳.۱. واریانس متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

تعریف ۲۳.۳.۱. کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است.

$$Cov(X, Y) = E(X)E(Y).$$

تعریف ۲۴.۳.۱. دو متغیر تصادفی X و Y را مستقل از هم می‌نامند هرگاه:

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

اگر دو متغیر تصادفی مستقل باشند آنگاه کوواریانس آنها صفر خواهد بود.

تعریف ۲۵.۳.۱. ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر است.

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

تعریف ۲۶.۳.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال و $\mathcal{D}$ یک زیر σ -میدان از $\mathcal{F}$ و Z متغیری تصادفی، نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد. امید Z به شرط $\mathcal{D}$ یک متغیر تصادفی $\mathcal{D}$ -اندازه‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ است که آن را با $E(Z|\mathcal{D})$ نشان می‌دهیم و برای هر $D \in \mathcal{D}$ داریم:

$$\int_D E(Z|\mathcal{D})dP = \int_D ZdP.$$

ملاحظه ۱.۳.۱. خواص امید شرطی:

۱. اگر $X \geq 0$ ، آنگاه، $a.s.$ ، $E(X|\mathcal{D}) \geq 0$.

۲. $E(X + Y|\mathcal{D}) = E(X|\mathcal{D}) + E(Y|\mathcal{D})$ ، $a.s.$

۳. برای هر $a \in \mathbb{R}$ داریم: $E(aX|\mathcal{D}) = aE(X|\mathcal{D})$ ، $a.s.$

۴. اگر $\mathcal{D} = \{\Omega, \emptyset\}$ آنگاه $a.s.$ ، $E(X|\mathcal{D}) = E(X)$.

۵. اگر $\mathcal{D}_1$ یک زیر σ میدان از $\mathcal{D}_2$ باشد، آنگاه $a.s.$ ، $E(E(X|\mathcal{D}_2)|\mathcal{D}_1) = E(X|\mathcal{D}_1)$.

۶. $E(E(X|\mathcal{D})) = E(X)$ ، $a.s.$

تعریف ۲۷.۳.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. متغیر تصادفی T روی $(\Omega, \mathcal{F})$ که مقادیر خود را از $[0, \infty]$ اختیار می‌کند، یک **زمان توقف** نسبت به $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $t \geq 0$ ، داشته باشیم: $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

تعریف ۲۸.۳.۱. فرض کنید $\{X_t\}$ یک فرآیند تصادفی و برای هر $n \geq 1$ ، T_n نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ زمان توقف باشد. فرآیند متوقف شده را با نماد $X^{T_n}(t)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall w \in \Omega, \quad X^{T_n}(w) = X_{T_n \wedge t}(w).$$

تعریف ۲۹.۳.۱. فرض کنید $P = \{a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = b\}$ یک افراز از $[a, b] \subset \mathbb{R}$ باشد. تغییر تابع f بر P به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Var_P(f) = \sum_{i=1}^n |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

اگر $\sup_P \text{Var}_P(f)$ متناهی باشد آنگاه تابع f بر بازه $[a, b]$ با تغییر متناهی نامیده می‌شود. اگر تابع f بر بازه $[a, b]$ یا $\mathbb{R}$ تعریف شده و بر هر بازه، با تغییر متناهی باشد آنگاه تابع f با تغییر متناهی است. فرآیند تصادفی را با تغییر متناهی گویند هرگاه مسیرهای آن با احتمال یک، با تغییر متناهی باشد در غیر این صورت فرآیند با تغییر نامتناهی خوانده می‌شود.

۳.۳.۱ مارتینگل

تعریف ۳.۳.۱. فرآیند تصادفی $\{M_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$ را نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$ مارتینگل گوییم هرگاه

۱. $\{M_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$ نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$ سازگار باشد،

۲. برای هر t, M_t انتگرال پذیر باشد،

۳. برای هر $t \geq 1$ داشته باشیم $E(M_{t+1} | \mathcal{F}_t) = M_t, \text{ a.s.}$

به بیان دیگر، بهترین پیش‌بینی برای مقدار آینده یک مارتینگل، مقدار فعلی آن است.

۴.۳.۱ حرکت براونی: تعریف و ویژگی‌ها

حرکت براونی از اساسی‌ترین فرآیندهای تصادفی و سنگ بنای نظریه‌ی احتمال مدرن و معادلات دیفرانسیل است. حرکت نامنظم گرده گیاهان که در سطح آب معلق هستند را به افتخار روبرت براون^۱، گیاه‌شناس اسکاتلندی که برای نخستین بار در تابستان ۱۸۲۷ میلادی حرکت نامنظم گرده گیاهان معلق در آب را مشاهده کرد، حرکت براونی نامیدند. در سال ۱۹۰۵ میلادی آلبرت انیشتین^۲ این حرکت را حاصل برخورد دانه‌های گرده به مولکول‌های مایع آب معرفی کرد. به عبارت دیگر، ذرات و مولکول‌های موجود در گازها و یا مایعات دارای حرکت نامنظمی هستند، یعنی به هر طرف می‌توانند حرکت کنند و با برخورد با یکدیگر تغییر جهت دهند به این حرکت، حرکت براونی می‌گویند. پس از آن گستره کاربرد حرکت براونی بیشتر شده و حتی به مباحث ریاضیات مالی مانند مدل‌سازی قیمت سهام نیز وارد شده است. در سال ۱۹۱۸ میلادی نوربرت وینر^۳ ریاضیدان برجسته و نابغه آمریکایی، الگوی حرکت براونی را به‌طور کامل بررسی کرد. وی در سال ۱۹۲۳ میلادی فرآیند مطلوب حرکت براونی را که امروزه فرآیند وینر نیز گفته می‌شود مدل‌سازی کرد که به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۱] و [۶].

تعریف ۳.۱.۳.۱. فرآیند تصادفی $\{B_t\}_{t \geq 0}$ بر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را یک فرآیند براونی استاندارد یا حرکت براونی استاندارد گوییم هرگاه در ویژگی‌های زیر صدق کند.

¹Robert Brown

²Albert Einstein

³Norbert Wiener

$$۱. B_0 = 0,$$

۲. به ازای هر t و s که $s \leq t$ ، متغیر تصادفی $B_t - B_s$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $t - s$ باشد.

۳. متغیرهای تصادفی $B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ برای $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ مستقل و هم توزیع باشند.

دو ویژگی اساسی فرآیند براونی به شرح زیر است.

۱. حرکت براونی یک مارتینگل است به این معنی که برای هر $0 \leq s \leq t$ داریم:

$$E[B_t | \mathcal{F}_s] = B_s.$$

برهان.

$$\begin{aligned} E[B_t | \mathcal{F}_s] &= E[B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s], \\ &= E[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] + E[B_s | \mathcal{F}_s], \\ &= 0 + B_s = B_s. \end{aligned}$$

□

همچنین برای هر $0 \leq s \leq t$ ،

$$E[B_s B_t] = \min\{s, t\}.$$

برهان. برای $s < t$ ، خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} E[B_t B_s] &= E[(B_t - B_s + B_s) B_s], \\ &= E[B_t - B_s] E[B_s] + E[B_s^2], \\ &= 0 + s = s. \end{aligned}$$

□

بنابراین $E[B_t B_s] = t \wedge s$ که در آن $t \wedge s = \min\{s, t\}$.

۲. حرکت براونی دارای مسیرهای پیوسته است. مسیرهای حرکت براونی بسیار نامنظم و غیر قابل پیش بینی اند. برای مثال مشتق پذیر نیستند و مسیرهای آن تغییر نامتناهی هستند.

تعریف ۳۲.۳.۱. فرض کنید $\{B_t\}_{t \geq 0}$ یک حرکت براونی استاندارد باشد. در این صورت فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ که در معادله دیفرانسیل معمولی زیر صدق می کند

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dB_t,$$

و در آن α, σ مقادیر ثابت هستند را حرکت براونی هندسی می گویند.

قضیه ۱.۳.۱. برای حرکت براونی هندسی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ با فرض $X_0 = x_0$ روابط زیر برقرار است.

$$1. E(X_t) = x_0 \exp(\alpha t)$$

$$2. X_t = x_0 \exp\left\{\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right\}$$

برهان به [۸] رجوع شود.

۴.۱ انتگرال ایتو

می‌خواهیم معادله حرکت ذره‌ای که در سطح آب جوی حرکت می‌کند را نسبت به زمان به دست آوریم. از آنجا که مکان ذره در لحظه t ، $t \in [0, T]$ و $(T > 0)$ ، به دلیل ضرباتی که وزش باد و مولکول‌های آب به آن وارد می‌کنند مشخص نیست (تصادفی است)، معادله آن به صورت زیر خواهد بود:

$$(1.1) \quad \frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \text{ (نوفه)},$$

که در آن b و σ توابع حقیقی داده شده روی $[0, \infty) \times \Omega$ هستند و نوفه^۱ فرآیند تصادفی مانند Z_t است که در سه شرط زیر صدق می‌کند.

- برای هر $t_1, t_2 \in [0, T]$ که $t_1 \neq t_2$ ، Z_{t_1} و Z_{t_2} مستقل از هم باشند.
- توزیع توأم متغیرهای تصادفی $Z_{t_1+t}, \dots, Z_{t_n+t}$ ، $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq T$ به t بستگی نداشته باشد.
- برای هر $t \in [0, T]$ ، $E(Z_t) = 0$.

فرض کنید $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ افرازی از فاصله $[0, T]$ است. با گسسته سازی رابطه (۱.۱) خواهیم داشت:

$$X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = b(t_k, X_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, X_{t_k})\Delta t_k Z_k.$$

تنها فرآیندی با این ویژگی‌ها که دارای مسیرهای پیوسته است فرآیند براونی می‌باشد. لذا می‌توان نوشت:

$$X_t = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j.$$

اگر حد طرف راست عبارت بالا وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ وجود داشته باشد رابطه زیر را داریم.

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, w)ds + \int_0^t \sigma(s, w)dB_s.$$

¹Noise

بنابراین به روشنی برای پیدا کردن فرآیند $\{X_t\}$ لازم است انتگرال‌های زیر را محاسبه کنیم.

$$\int_s^T f(t, w) dB_t(w),$$

که $B_t(w)$ فرآیند براونی یک بعدی استاندارد و f تابعی حقیقی روی $\Omega \times [0, \infty)$ است. برای رسیدن به این هدف مراحل زیر را طی می‌کنیم.

گام اول فرض کنید $\phi : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی ابتدایی باشد. یعنی

$$\phi(t, w) = X(w)\Pi_{(a,b]}(t), \quad a, b \in [0, \infty),$$

در این صورت تعریف می‌کنیم؛

$$\int_a^t \phi(s, w) dB_s = \int_a^t X(w)\chi_{[a,b]}(t) dB_s(w) = X(w)[B_{b \wedge t}(w) - B_{a \wedge t}(w)],$$

که در آن برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ ، $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

گام دوم فرض کنید f تابعی ساده روی $\Omega \times [0, \infty)$ باشد. یعنی

$$f = \sum_{j=0}^n \phi_j,$$

که در آن ϕ_i ها توابع ابتدایی هستند. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t f dB_s = \sum_{j=0}^n \int_a^t \phi_j dB_s. \quad (2.1)$$

تعریف ۱.۴.۱. رده‌ی $\mathcal{P}_T$ از توابع $f(t, w)$ روی مجموعه $\Omega \times [0, \infty)$ ، رده‌ای از توابع با ویژگی‌های زیر است.

- تابع $(t, w) \rightarrow f(t, w)$ ، اندازه پذیر است،
- به ازای هر t ، تابع $f(t, \cdot)$ ، $\mathcal{F}_t$ - اندازه پذیر باشد،
- برای هر $T \geq 0$ ، $E\left[\int_0^T f^2(s, w) ds\right] < \infty$.

لم ۱.۴.۱ (ایزومتري ایتو^۱). اگر تابع $\phi(t, w)$ کران دار و ابتدایی باشد، آنگاه

$$E\left[\left(\int_s^T \phi(t, w) dB_t(w)\right)^2\right] = E\left[\int_s^T \phi^2(t, w) dt\right].$$

□

برهان. به [۲۹] رجوع کنید.

^۱Ito

گام سوم اکنون می‌توانیم $\int_s^T f(t, w) dB_t$ را برای هر $f \in \mathcal{P}_2$ تعریف کنیم زیرا برای $f \in \mathcal{P}_2$ با توجه به لم قبل دنباله‌ای از توابع ابتدایی مانند $\{\phi_n\}_{n \geq 0}$ موجود است که به f میل می‌کند. پس می‌توان تعریف کرد؛

$$\int_0^T f dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \phi_n dB_t.$$

که انتگرال اخیر را **انتگرال ایتو** می‌نامند.

۱.۴.۱ فرمول ایتو در حالت یک بعدی

فرض کنید $\{B_t\}_{t \geq 0}$ یک حرکت براونی استاندارد روی (Ω, F, P) باشد. یک انتگرال تصادفی یک بعدی، یک فرآیند تصادفی X_t روی (Ω, F, P) است و به صورت

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s.$$

که در آن $u, v : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ یا با مشتق گیری

$$dX_t = u dt + v dB_t,$$

بیان می‌شود. اگر قرار دهیم $Y_t = g(t, X_t)$ ، آنگاه

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) (dX_t)^2,$$

که در آن $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$ و مطابق قوانین زیر محاسبه می‌شود.

$$dB_t \cdot dB_t = dt, \quad dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0.$$

۲.۴.۱ فرمول ایتو در حالت کلی

فرض کنید $\{X_t\}_{t \geq 0}$ جواب معادله دیفرانسیل تصادفی زیر باشد.

$$dX_t = \mu(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dB_t,$$

تابع f را به گونه‌ای فرض می‌کنیم که $f(x, t) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$. آنگاه فرآیند $f(X_t, t)$ دارای معادله دیفرانسیل تصادفی زیر می‌باشد که به **فرمول ایتو چند بعدی** شناخته می‌شود.

$$df(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dX_i dX_j.$$

با فرض مستقل بودن حرکت‌های براونی، یعنی

$$dW_i \cdot dW_i = dt, \quad i = 1, 2, \dots, d,$$

$$dW_i \cdot dW_j = 0, \quad i \neq j.$$

داریم:

$$df(x, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dB_i.$$

۵.۱ تغییر اندازه

قضیه ۱.۵.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال و Z یک متغیر تصادفی نامنفی باشد و $E[Z] = 1$ برای $A \in \mathcal{F}$ تعریف می‌کنیم؛

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z dP.$$

آنگاه $\tilde{P}$ یک اندازه احتمال است. علاوه بر این، اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد، آنگاه

$$\tilde{E}[X] = E[XZ].$$

همچنین اگر Z متغیر تصادفی مثبت باشد، داریم:

$$\tilde{E}[Y] = E\left[\frac{Y}{Z}\right].$$

برهان. به [۳۳] رجوع کنید. □

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال و $\tilde{P}$ اندازه احتمال معادل P باشد. اگر Z متغیر تصادفی مثبتی باشد که

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z dP.$$

آنگاه Z

مشتق رادون-نیکودیم^۱ $\tilde{P}$ نسبت به P نامیده می‌شود که

$$Z = \frac{d\tilde{P}}{dP}.$$

قضیه ۲.۵.۱ (رادون-نیکودیم). اگر P و $\tilde{P}$ اندازه‌های احتمال معادل تعریف شده روی $(\Omega, \mathcal{F})$ باشند، آنگاه متغیر تصادفی مثبت Z وجود دارد به طوری که $E[Z] = 1$ و برای هر $A \in \mathcal{F}$ داشته باشیم:

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z dP.$$

برهان. به [۳۳] رجوع کنید. □

^۱Rodon-Nikodym

قضیه ۳.۵.۱ (گیرسانوف^۱ تک بعدی). فرض کنید $B(t)$ ، $0 \leq t \leq T$ ، یک حرکت براونی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $\mathcal{F}(t)$ ، $0 \leq t \leq T$ ، یک فیلتر برای حرکت براونی باشد. همچنین فرض کنید $\theta(t)$ یک فرآیند سازگار باشد. تعریف می‌کنیم؛

$$Z(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \theta(u) dB(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(u) du \right\},$$

$$\tilde{B}(t) = \int_0^t \theta(u) du + B(t).$$

اگر

$$E \left[\int_0^t \theta^2(u) Z^2(u) du \right] < \infty,$$

و قرار دهیم $Z = Z[T]$ ، آنگاه تحت اندازه احتمال P ، $E[Z] = 1$ و تحت اندازه احتمال $\tilde{P}$ ، $\tilde{B}$ یک حرکت براونی است.

□

برهان. به [۳۳] رجوع کنید.

قضیه ۴.۵.۱ (گیرسانوف d -بعدی). فرض کنید

$$B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_d(t)), \quad 0 \leq t \leq T,$$

یک حرکت براونی d -بعدی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $\mathcal{F}(t)$ ، $0 \leq t \leq T$ ، یک فیلتر برای حرکت براونی باشد. همچنین فرض کنید $\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_d(t))$ یک فرآیند d -بعدی سازگار باشد تعریف می‌کنیم؛

$$Z(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \theta(u) dB(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(u) du \right\},$$

$$\tilde{B}_j(t) = \int_0^t \theta_j(u) du + B_j(t).$$

با در نظر گرفتن شرایط قضیه (۳.۵.۱) تحت اندازه احتمال $\tilde{P}$ ، $\tilde{B}$ یک حرکت براونی است.

□

برهان. به [۳۳] رجوع کنید.

قضیه ۵.۵.۱ (گیرسانوف-میر). اگر P و Q اندازه‌های احتمال معادل و X تحت P یک نیم‌مارتینگل با تجزیه $X = M + A$ باشد، آنگاه X یک نیم‌مارتینگل تحت Q خواهد بود و تجزیه‌ای به فرم $X = L + C$ دارد که در آن

$$L_t = M_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} \langle Z, M \rangle_s,$$

یک Q -مارتینگل و $C = X - L$ تحت Q یک فرآیند با تغییرات متناهی است.

¹Girsanov

قضیه ۶.۵.۱ (قضیه فاینمن-کاک^۱). فرض کنید F جوابی برای مسئله‌ی مقدار مرزی زیر باشد.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x) \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = 0, \\ F(T, x) = \phi(x). \end{cases}$$

همچنین فرض کنید فرآیند

$$\sigma(s, X_s) \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s),$$

متعلق به $\mathcal{L}^2$ است که در آن X جواب معادله دیفرانسیل تصادفی زیر است.

$$\begin{cases} dX_s = \mu(X_s, s)ds + \sigma(X_s, s)dW_s, \\ X_t = x. \end{cases}$$

در این صورت F دارای نمایشی به صورت زیر می‌باشد.

$$F(t, x) = E[\phi(X_T) | X_t = x].$$

□

برهان. به [۲۵] رجوع کنید.

قضیه ۷.۵.۱ (کاربرد فاینمن-کاک). فرض کنید V قیمت یک اختیار اروپایی باشد که در مسئله‌ی مقدار مرزی زیر صدق می‌کند.

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t}(t, s) + \mu(t, s) \frac{\partial V}{\partial s}(t, s) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, s) \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(t, s) = 0, \\ V(T, s) = P(s). \end{cases}$$

که در آن $P(s)$ بازده اختیار در زمان T است. اگر B_t فرآیند براونی استاندارد باشد و قیمت دارایی پایه از معادله دیفرانسیل زیر پیروی کند

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dB_t,$$

آنگاه V دارای نمایشی به صورت زیر است.

$$V(t, S_t) = E[P(S_T) | S_t = s].$$

برهان. بنابر فرمول ایتو برای V ,

$$dV(t, S_t) = \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(t, S_t)}{\partial S_t^2} (dS_t)^2.$$

با توجه به معادله دیفرانسیل تصادفی dS_t ، و جایگذاری آن در معادله فوق نتیجه می‌گیریم؛

$$dV(t, S_t) = \left(\frac{\partial V(t, S_t)}{\partial t} + \mu(t, S_t) \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, S_t) \frac{\partial^2 V(t, S_t)}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma(t, S_t) \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial S_t} dB_t.$$

¹Finman-kak Theorem

با توجه به فرض

$$\frac{\partial V(t, S_t)}{\partial t} + \mu(t, S_t) \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, S_t) \frac{\partial^2 V(t, S_t)}{\partial S_t^2} = 0,$$

بنابراین

$$dV(t, S_t) = \sigma(t, S_t) \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial S_t} dB_t.$$

با انتگرال گیری از دو طرف تساوی می‌توان نوشت؛

$$V(t, S_t) = V(T, S_T) - \int_t^T \sigma(u, S_u) \frac{\partial V(u, S_u)}{\partial S_u} dB_u.$$

و با توجه به اینکه $\sigma(t, S_t) \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial S_t} \in \mathcal{L}^2$ و $dB_t \sim N(0, dt)$ داریم؛

$$E \left[\int_t^T \sigma(u, S_u) \frac{\partial V(u, S_u)}{\partial S_u} dB_u | S_t = s \right] = 0,$$

و بنابراین

$$V(t, S_t) = E[V(T, S_T) | S_t = s].$$

با توجه به اینکه $V(T, S_T) = P(S_T)$ می‌توان نوشت؛

$$V(t, S_t) = E[P(S_T) | S_t = s].$$

□

۶.۱ مفاهیم مالی

در این بخش، مفاهیم مورد نیاز مربوط به ریاضیات مالی معرفی و تشریح شده‌است.

۱.۶.۱ اختیار معامله

ریاضیات مالی شاخه‌ای از ریاضیات است که برای جریان‌های پول و سرمایه در بازارهای مالی، مدل‌های ریاضی طراحی و مطالعه می‌کند. به عبارت دیگر، به کمک ابزارهای ریاضی به توصیف و مدل سازی رفتارهای مختلف بازارهای مالی می‌پردازد. بازارهای مالی محل خرید و فروش دارایی‌ها هستند و علاوه بر خرید و فروش دارایی‌های پایه نظیر سهام و اوراق قرضه قراردادهایی تحت عنوان مشتقات مالی نیز مورد توجه قرار می‌گیرند.

تعریف ۱.۶.۱. ترکیبی مناسب از سهام یا سایر دارایی‌ها که یک سرمایه‌گذار آنها را خریداری کرده است را سبد سهام یا پرتفوی می‌نامند. هدف از تشکیل سبد سهام، تقسیم کردن ریسک سرمایه‌گذاری بین چند سهم است. در این صورت سود یک سهم می‌تواند ضرر سهام دیگر را جبران کند.

پرتفوی به منظور کاهش ریسک و به صورتی انتخاب می شود تا در شرایط عادی احتمال کاهش بازده همه دارایی ها (شامل سهام های خریداری شده) نزدیک به صفر شود.

تعریف ۲.۶.۱. پرتفوی $h = (x, y)$ را در نظر بگیرید. فرآیند ارزش پرتفوی h به صورت زیر تعریف می شود.

$$V_t^h = xB_t + yS_t, \quad t = 0, 1.$$

که در آن S_t فرآیند قیمت هر سهم (فرآیند تصادفی) در زمان t و B_t فرآیند قیمت یک ورق قرضه (فرآیند قطعی) در زمان t است.

تعریف ۳.۶.۱. استراتژی پرتفوی را خود تامین گوئیم هرگاه برای $t = 0, 1, \dots, T-1$ داشته باشیم؛

$$x_t(1+R) + y_t S_t = x_{t+1}(1+R) + y_{t+1} S_t,$$

به عبارتی با استفاده از ارزش پرتفوی قدیم $x_t(1+R) + y_t S_t$ که در زمان $t-1$ تشکیل شده است، می توان پرتفوی جدید به ارزش $x_{t+1}(1+R) + y_{t+1} S_t$ در لحظه t تشکیل داد. در واقع در پرتفوی خود تامین هیچ گاه پولی وارد نمی شود و پولی از آن برداشت نمی شود و تنها تغییر در ارزش پرتفوی خواهد بود.

تعریف ۴.۶.۱. متغیر تصادفی X یک ادعای مشروط با زمان سررسید T نامیده می شود هرگاه $X \in F_T$. دارنده این ادعا در $t = T$ مقدار تصادفی X را دریافت می کند.

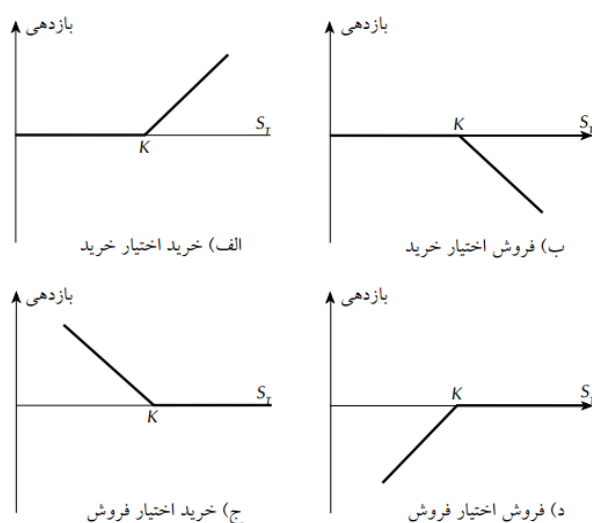
تعریف ۵.۶.۱. قراردادی را که به دارنده آن حق (نه الزام) خرید یا فروش دارایی موضوع قرارداد را به قیمت معین و در تاریخ مشخص می دهد اختیار معامله می گویند.

اختیار خرید (فروش) به دارنده آن این حق را می دهد که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن خریداری کند (بفروشد). هر یک از اختیارهای خرید و فروش را می توان به دو حالت اروپایی و آمریکایی تقسیم کرد. **اختیار اروپایی** فقط در تاریخ سررسید قابل اجرا است، در حالی که **اختیار آمریکایی** را می توان در هر زمان قبل از سررسید، یا در سررسید اجرا کرد.

در بازارهای مالی علاوه بر دارایی پایه نظیر سهام و اوراق قرضه، اختیار معامله نیز خرید و فروش می شود. منظور از حل مسئله قیمت گذاری اختیار معامله، تعیین قیمت عادلانه ای آن در لحظه $t \in [0, T]$ است که با π_t نشان داده می شود.

اکنون می خواهیم با توجه به تصادفی بودن قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید در حالت کلی، بازده سرمایه ی سرمایه گذار در اختیار معامله های اروپایی را بررسی کنیم. فرض می کنیم که مبلغ اولیه سرمایه گذاری در اینجا دخیل نمی باشد. اگر K را قیمت توافقی و S_T را قیمت دارایی پایه در زمان سررسید بدانیم، بازده حاصل از موقعیت خرید در یک اختیار خرید اروپایی عبارت است از:

$$\max\{S_T - K, 0\}.$$



شکل ۱.۱: بازدهی حاصل از خرید یا فروش اختیار معاملات اروپایی.

بازده سرمایه‌گذاری که موقعیت فروش در یک اختیار خرید اروپایی اتخاذ کرده است به ترتیب زیر خواهد بود.

$$-\max\{S_T - K, 0\} = \min\{K - S_T, 0\}.$$

به این ترتیب بازده سرمایه‌گذاری که موقعیت خرید در یک اختیار فروش اروپایی اتخاذ کرده است به صورت زیر می‌باشد.

$$\max\{K - S_T, 0\}.$$

همچنین بازده دارنده موقعیت فروش در قرارداد اختیار فروش اروپایی به صورت زیر است.

$$-\max\{K - S_T, 0\} = \min\{S_T - K, 0\}.$$

نمودارهای شکل ۱.۱ این حالات را نشان می‌دهند. علاوه بر اختیار معامله‌های استاندارد، اختیار معامله‌های غیراستاندارد نیز وجود دارند. قراردادهای اختیار معامله غیراستاندارد یا نامتعارف، اختیاراتی هستند که با استفاده از یک سری قواعد، بازده‌هایی را به دست می‌دهند که محاسبه این بازده‌ها همچون اختیار معامله استاندارد ساده و آسان نیست. از جمله اختیارات غیراستاندارد می‌توان اختیار آسیایی^۱، اختیار متکی^۲ به گذشته و مانع^۳ را نام برد. دسته‌ای دیگر از اختیارات غیراستاندارد، اختیار معاملات توان می‌باشند. اختیاری که بازده آن، وابسته به قیمت دارایی پایه با توانی از $m > 0$ است را اختیار معامله توان می‌نامند. اگر S_T قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید $T > 0$ و K را قیمت توافقی بدانیم، بازده حاصل از اختیار خرید توان m —ام استاندارد عبارت است از:

$$\max\{S_T^m - K^m, 0\}.$$

^۱Asian option

^۲Look back option

^۳Barrier option

و به همین ترتیب، بازده حاصل از اختیار فروش توان m -ام استاندارد به صورت زیر است.

$$\max\{K^m - S_T^m, 0\}.$$

اختیار معامله‌های توان به دلیل قدرت نفوذ قابل توجهی که نسبت به اختیار معامله‌های معمولی دارند، باعث جلب توجه خریداران اختیار معامله و سرمایه‌گذاران شده‌اند. زیرا برای یک سرمایه‌گذار تیزبین در بازار، اختیار معامله‌های توان به دلیل داشتن بازده بیشتر به خصوص در بازار تبادلات ارز خارجی و شاخص‌ها، کارایی بیشتری از اختیار معامله‌های معمولی دارد.

تعریف ۶.۶.۱. قراردادی که به موجب آن دارایی پایه در زمان معلوم با قیمت توافق شده مشخص مورد معامله قرار گیرد را یک **مشتق مالی استاندارد** می‌گویند. قرارداد اختیار معامله یکی از انواع مشتقات مالی است.

تعریف ۷.۶.۱. احتمالی را که در آن انجام یا عدم انجام کاری مشخص منجر به زیان و پیامدهای ناخوشایند و ناخواسته گردد ریسک می‌نامند. در ادبیات مالی رویدادهای غیر منتظره‌ای که معمولاً باعث تغییر در ارزش دارایی‌ها یا بدهی‌ها می‌شود را **ریسک** می‌گویند.

تعریف ۸.۶.۱. به طور کلی **دارایی‌های ریسکی** دارایی‌هایی هستند که میزان سود آن‌ها در سررسید به طور قطع از قبل مشخص نباشند، مانند سهام و اختیار معامله.

تعریف ۹.۶.۱. دارایی که در هنگام سرمایه‌گذاری میزان سود آن در سررسید به طور قطع مشخص می‌شود، مانند سپرده‌های سرمایه‌گذاری اشخاص در بانک‌ها و اوراق قرضه **دارایی بدون ریسک** می‌نامند.

۲.۶.۱ آربیتراژ

تعریف ۱۰.۶.۱. یک **فرصت آربیتراژ**، عبارت است از سبد مالی خودتأمین φ که برای هر $t \in [0, T]$

$$P(V_t(\varphi) \geq 0) = 1,$$

$$P(V_T(\varphi) > V_0(\varphi)) \neq 0.$$

امکان به دست آوردن سود، بدون متحمل شدن ریسک را فرصت آربیتراژ می‌گویند. آربیتراژ یک استراتژی وسوسه انگیز برای سرمایه‌گذاران است. اگر سهامی در یک بورس با یک قیمت و در بورسی دیگر با قیمت متفاوت به فروش رسد، آربیتراژکننده وسوسه می‌شود، که به قیمت پایین بخرد و با قیمت بالا بفروشد، در نتیجه قیمت‌های پایین افزایش و قیمت‌های بالا کاهش می‌یابد و این روند تا زمانی که قیمت‌ها به تعادل برسند ادامه پیدا می‌کنند. قاعدتاً سبدهای یکسان باید دارای قیمت یکسان باشند وگرنه آربیتراژکننده‌ها به سرعت وارد عمل شده و عملکرد آن‌ها، قیمت‌ها را به تعادل می‌رساند.

تعریف ۱۱.۶.۱. یک ادعای مشروط، یک متغیر تصادفی نامنفی و $\mathcal{F}_T$ - اندازه پذیر است.

تعریف ۱۲.۶.۱. ادعای مشروط H را **دست یافتنی** می نامیم هرگاه سبد مالی خودتأمین φ موجود باشد که

$$V_T(\varphi) = H, \quad a.s.$$

در این صورت φ یک **پوشش ریسک** برای H نامیده می شود.

تعریف ۱۳.۶.۱. هرگاه هر ادعای مشروط، دست یافتنی باشد بازار کامل خواهد بود. در غیر این صورت بازار ناکامل است.

قضیه ۱.۶.۱ (قضیه اساسی اول قیمت گذاری). مدل عاری از آربیتراژ است اگر و فقط اگر اندازه احتمال مارتینگل موجود باشد.

برهان. به [۸] رجوع کنید. □

این قضیه بین یک مفهوم اقتصادی (وجود بازار بدون آربیتراژ) و یک مفهوم ریاضی (وجود اندازه احتمال مارتینگل) ارتباط ایجاد می کند.

قضیه ۲.۶.۱ (قضیه اساسی دوم قیمت گذاری). فرض کنیم بازار عاری از آربیتراژ باشد، آنگاه بازار کامل است اگر و تنها اگر اندازه مارتینگل منحصر بفرد باشد.

برهان. به [۸] رجوع کنید. □

تعریف ۱۴.۶.۱. **تلاطم** یک سهم، معیاری برای اندازه گیری عدم اطمینان در مورد بازده های آن سهم است. در واقع تلاطم قیمت یک سهم انحراف معیار بازده سهم در طول یک سال است.

تعریف ۱۵.۶.۱. **نرخ** که توسط قرض گیرنده، بابت استفاده از پولی که از قرض دهنده گرفته، پرداخت می شود را **نرخ بهره** می گویند. به عنوان مثال، هرگاه مبلغی پول برای مدت معینی وام داده شود، مبلغی در آینده وام گیرنده به وام دهنده می پردازد که بیش از مبلغ دریافتی اولیه خواهد بود. این پرداخت اضافی یا نرخ بهره را می توان به صورت نسبت مابه التفاوت مبلغ دریافتی و مبلغ باز پرداخت در پایان یک دوره معین به کل پول دریافتی بیان کرد. بدین ترتیب هرگاه ۳۰۰ ریال وام داده شود و در پایان سال ۳۲۰ ریال دریافت گردد، نرخ بهره سالانه برابر خواهد بود با ۲۰ درصد.

$$(320 - 300) / 300 = 0.20.$$

تعریف ۱۶.۶.۱ (نرخ تنزیل). هر رقم پیش بینی شده برای قیمت دارایی در سال های آتی برابر یک سرمایه گذاری با نرخ سود سالانه در زمان حال می باشد. برای حذف عامل زمان در محاسبات، ارزش دارایی را که در سال های آتی کسب می گردد با استفاده از ضریب تنزیل

e^{-rt} به ارزش روز تبدیل می‌نماییم. در این حالت نرخ بهره سالانه r که در محاسبات به‌عنوان نرخ بهره سرمایه‌گذاری در یک بازار بورس بدون ریسک می‌باشد را به‌عنوان **نرخ تنزیل** در نظر می‌گیرند [۲۸]. لذا فرض کنید نرخ بهره، یک فرآیند سازگار $R(t)$ باشد. فرآیند تنزیل را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$D(t) = e^{-\int_0^t R(s)ds}.$$

تعریف ۱۷.۶.۱. هرگاه داشته باشیم؛

۱. Q و P دو اندازه احتمال معادل باشند.

۲. فرآیند قیمت دارایی تنزیل شده $D(t)S(t)$ تحت Q مارتینگل باشد.

اندازه احتمال Q را **اندازه ریسک خنثی** می‌گوییم.

در صورت ثابت بودن نرخ بهره، نرخ تنزیل e^{-rt} می‌باشد.

۳.۶.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در مسائل فیزیک، مهندسی و سایر علوم که به متغیرهای زمان و مکان وابسته‌اند، با به‌کارگیری قوانین حاکم پدید می‌آیند. از معروف‌ترین آنها معادله موج، معادله انتقال حرارت، معادله لاپلاس، معادله پواسن و معادله شرودینگر را می‌توان نام برد.

تعریف ۱۸.۶.۱. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، یک معادله شامل مشتقات تابع نامعلوم $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ است که Ω زیر مجموعه‌ای باز از R^d ($d \geq 2$) است.

فرض کنید u یک تابع از متغیرهای مستقل x, y, z, t باشد. مشتق نسبی، پاره‌ای و یا جزئی u را نسبت به x در نقطه (x, y, z, t) با

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{u(x+h, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{h},$$

تعریف می‌کنیم و با $D_x(u)$ نشان می‌دهیم، مشروط براینکه حد بالا موجود باشد. متغیر t در معادلات دیفرانسیل جزئی به‌عنوان متغیر زمان ظاهر می‌شود و همواره غیر منفی است. همچنین متغیرهای x, y, z به‌عنوان متغیرهای مکان استفاده می‌شوند و (x, y, z) یک نقطه از فضا است.

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای تابع u از دو متغیر مستقل x و y به‌صورت زیر می‌باشد.

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots) = 0.$$

در صورتی که تابع F نسبت به u و مشتقات آن خطی باشد، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی تعریف شده در معادله فوق یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی و در غیر این صورت یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی خواهد بود. [۲]

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را می‌توان با توجه به بیشترین مرتبه مشتق موجود در معادله نیز دسته‌بندی کرد.

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه دو عبارت‌است از:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)u = G.$$

در صورتی که ما در هر نقطه (x, y) از دامنه تعریف معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برابر صفر باشد، معادله را همگن و در غیر این صورت معادله را ناهمگن می‌نامیم.

از سوی دیگر معادله فوق را در هر ناحیه مفروض از صفحه xy بر حسب اینکه مقدار

$$\Delta = B^2 - 4ac$$

در سراسر ناحیه مثبت، صفر و یا منفی باشد، به ترتیب به سه نوع اساسی هذلولوی، سهموی و بیضوی دسته‌بندی می‌کنند [۳، ۳۰].

فصل ۲

مدل رژیم سوئیچینگ

۱.۲ پیشینه تحقیق

در سال‌های اخیر اکثر مطالعات تجربی بر روی شکست‌های ساختاری بازار دارایی پایه (سهام) تمرکز یافته است. تغییرات و نوسانات شدید در قیمت نفت در دهه (۱۹۷۰)، جنگ اعراب و اسرائیل (۱۹۷۳)، و تحریم نفتی دولت‌های عربی صادرکننده نفت بر علیه آمریکا، ورشکستگی بازار سهام (۱۹۷۸)، سقوط نظام شاهنشاهی ایران (۱۹۷۹) و تجاوز عراق به ایران (۱۹۸۱) و یا بحران مالی در کشورهای آسیای شرقی (۱۹۹۷) نمونه‌ای از اتفاق‌هایی است که باعث تغییر در فرآیند سری زمانی مالی می‌شود. مدلی که توانایی توضیح و اندازه‌گیری این تغییر را دارد مدل رژیم سوئیچینگ است.

مدل رژیم سوئیچینگ به‌طور دقیق ویژگی‌های سری‌های زمانی پیچیده از چندین متغیر مهم، از جمله نرخ بهره و نرخ ارز و غیره را محاسبه می‌کند. تحقیقات و پژوهش‌های انجام شده، اقتصادسنجی را با مدل‌های رژیم سوئیچینگ توسعه داده و برتری این مدل را نسبت به سایر مدل‌ها ثابت کرده است.

بدین ترتیب مدل رژیم سوئیچینگ در بسیاری از بازارهای سهام و مشتقات مورد استفاده قرار گرفته است [۱۰]، [۸]، [۱۶]. ایده‌ی اصلی به کار گرفته شده در این روش، در نظر گرفتن تغییرات رفتار رژیم است. هیشیما^۱ با بررسی وجود احتمالی رژیم سوئیچینگ در بازده بازار

^۱Hichima

سهام پنج اقتصاد توسعه یافته تغییر رفتار رژیم را در تمامی نوسانات بازارهای سهام تشخیص داد [۷]. مقاله‌ی وانگ^۱ ثابت می‌کند بیش از یک رژیم در هر بازار مالی وجود دارد. به گفته‌ی او تغییرات پویای قیمت‌های دارایی‌های پایه به وسیله مدل‌هایی که با یک مؤلفه‌ی رژیم سوئیچینگ ترکیب شده‌اند، بهتر می‌توانند توصیف شوند. بارها این پدیده مشاهده شده است که یک مرحله تغییر بین بحران و توسعه چرخه تجارت معمولاً باعث به وجود آمدن تغییر معناداری در بازگشت سهام، نرخ بهره و دیگر شاخص‌های مالی می‌شود [۷].

خطای قیمت‌گذاری با معادله بلک-شولز^۲ زمانی که یک فرآیند رژیم سوئیچینگ بازده دارایی پایه را کنترل می‌کند، بهتر محاسبه می‌شود. همچنین، قیمت‌گذاری اختیارات با رژیم سوئیچینگ تاثیر تلاطم در بیشتر مطالعات تجربی را نشان می‌دهد.

روش‌های اقتصادی برای تخمین پارامترهای مدل رژیم سوئیچینگ با استفاده از پژوهش‌های گذشته توسعه داده شده‌اند. در این پژوهش‌ها ثابت شده است که مدل‌های رژیم سوئیچینگ رفتار سری‌های زمانی از چندین متغیر را نسبت به مدل تک رژیمی بهتر توصیف می‌کنند [۱۱].

همیلتون^۳ با مطالعه یک مدل رژیم سوئیچینگ با گام‌های ثابت در هر رژیم یک تابع درست نمایی لگاریتمی را بر پایه‌ی احتمال در رژیم‌ها برای تخمین پارامترها ساخت و سپس آن را ماکزیمم کرد [۲۱].

همچنین گرای^۴ (۱۹۹۶) با مطالعه نرخ‌های بهره، نشان داد که مدل رژیم سوئیچینگ، پیش‌بینی‌های نوسانات را بهتر از مدل‌هایی که در آنها واریانس ثابت است، نشان می‌دهد [۷].

با دوباره مدل کردن مسئله توسط همیلتون و گرای، تخمین برحسب احتمال بودن در رژیم خاص به صورت شرطی روی داده‌های قابل مشاهده، ساده گردید. بولن^۵ یک درخت پنج جمله‌ای را برای حالت دو رژیم که برای تقریبی از قیمت اختیار اروپایی و آمریکایی می‌تواند استفاده شود، طراحی کرد [۷].

بافینگتون و الیوت^۶ با به کارگیری اصل قیمت گذاری ریسک خنثی و مطالعه اختیارات اروپایی و آمریکایی با مدل رژیم سوئیچینگ به یک سیستم از معادلات دیفرانسیل جزئی شبیه معادله بلک-شولز در قیمت اختیار دست یافتند [۱۱].

مطالعات یائو^۷ بر روی سیستمی از معادله دیفرانسیل جزئی که با دقت شرایط کران هموار را برای تقریب قیمت اختیار انتخاب می‌کند، موجب توسعه روش‌های تقریبی شده است [۳۵].

¹Wang

²Black-Scholes

³Hamilton

⁴Gray

⁵Bollen

⁶Buffington and Elliott

⁷Yao et al

۲.۲ مقدمه

همانطور که قبلاً گفته شد، مدل بلک-شولز دارای فرضیاتی است که باعث ایجاد محدودیت‌هایی در بازار می‌شود. یکی از این محدودیت‌ها در مدل دارایی پایه این است که در آن نرخ بهره و نوسان‌پذیری ثابت فرض شده است. به همین دلیل نمی‌تواند رفتار تصادفی بازار را توضیح دهد. در این بخش در نظر داریم این محدودیت را با استفاده از فرآیند تصادفی مارکوف رفع کنیم و یک مدل قابل قبول برای دارایی پایه که از مدل رژیم سوئیچینگ تبعیت می‌کند را ارائه کنیم. همچنین با بستن یک اختیار توان روی دارایی پایه‌ی مذکور، یک مدل نوین در بازار مشتقات به‌دست آورده و ثابت می‌کنیم مدل مذکور در یک معادله دیفرانسیل جزئی صدق می‌کند.

۳.۲ زنجیر مارکوف زمان پیوسته

مدل مارکوف سوئیچینگ یکی از مدل‌های غیرخطی سری زمانی است که توسط همیلتون (۱۹۸۹) ارائه شده است. در این مدل فرض کنید X_t ، برای هر $t \geq 0$ ، یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد و مقادیر خود را از مجموعه S بگیرد. در این صورت مجموعه‌ی $\{X_t, t \geq 0\}$ یک فرآیند تصادفی روی فضای حالت S است. یک فرآیند تصادفی $\{X_t, t \geq 0\}$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ، با مقادیرش در مجموعه شمارشی S (که فضای حالت نامیده می‌شود)، زنجیر مارکوف زمان پیوسته است، اگر برای هر دنباله‌ی متناهی از زمان‌های $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$ و $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i, j$ در S ، رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i) = P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i), \quad (1.2)$$

که در آن

$$P(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, X_{t_n} = i) > 0.$$

رابطه (۱.۲) خاصیت مارکوف نامیده می‌شود و برای هر $0 \leq s \leq t$ ،

$$P(s, i, t, j) := P(\mathbf{X}_t = j | \mathbf{X}_s = i), \quad i, j \in S. \quad (2.2)$$

تابع (احتمال) انتقال زنجیر می‌باشد. $P(s, i, t, j)$ بیانگر احتمال انتقال فرآیند به حالت j در زمان t است وقتی که در زمان s در حالت i باشد.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنید $P(s, i, t, j)$ تابع انتقال از یک زنجیر مارکوف باشد. برای هر $i, j \in S$ و $0 \leq s \leq t$ داریم

$$P(s, i, t, j) \geq 0. \quad ۱.$$

$$\sum_{j \in S} P(s, i, t, j) = 1. \quad ۲.$$

$$P(s, i, t, j) = \delta_{i,j}. \quad ۳.$$

۴. برای هر $i, j \in S$ و $0 \leq s \leq v \leq t$ داریم؛

$$P(s, i, t, j) = \sum_{k \in S} P(s, i, v, j) P(v, k, t, j).$$

یک زنجیر مارکوف این خاصیت پایه را دارد که فرآیند آن تنها به مقدار مشاهده شده پیشین وابسته است و از دیگر عوامل گذشته مستقل است. چندین مزیت مهم در استفاده از مدل‌های مارکوف وجود دارد. یکی از این مزایا آن است که در اغلب فرآیندها به دلیل عدم وابستگی بین وضعیت کنونی و تاریخ گذشته آن، به راحتی می‌توان تابع چگالی الحاقی را تعبیر نمود. بنابراین ماتریس انتقال برای این فرآیند بعد از چندین نقطه زمانی دست یافتنی خواهد شد.

تعریف ۱.۳.۲. یک تابع انتقال استاندارد است، اگر علاوه بر شرایط قضیه ۱.۳.۲ در شرط زیر نیز صادق باشد.

$$\lim_{t \downarrow s} P(s, i, t, j) = \delta_{i,j}.$$

حال فرض کنید $P(s, i, t, j)$ یک تابع استاندارد باشد، آنگاه برای هر دو حالت $i \neq j$ و $s \geq 0$ خواهیم داشت؛

$$q_{ii} = \lim_{t \rightarrow s+} \frac{P(s, i, t, j) - 1}{t - s} \text{ موجود و منفی است.} \quad \bullet$$

$$q_{ij} = \lim_{t \rightarrow s+} \frac{P(s, i, t, j)}{t - s} \text{ موجود نامنفی و متناهی است.} \quad \bullet$$

$$\sum_{j \neq i} q_{ij}(s) < q_i(s) \text{ که } q_i(s) := -q_{ii}(s) > 0 \text{ نرخ انتقال نامیده می‌شود.} \quad \bullet$$

تعریف ۲.۳.۲. برای هر $i, j \in S$ فرض کنید q_{ij} تابع حقیقی مقدار تعریف شده روی $[0, \infty]$ باشد. ماتریس $Q(t) := [q_{ij}(t)]$ ، ماتریس نرخ انتقال ناهمگن است اگر برای هر i, j و $t \geq 0$ داشته باشیم؛

$$q_{ij}(t) \geq 0 \quad i \neq j \quad \bullet$$

$$0 \leq q_i(t) := -q_{ii}(t) < \infty \quad \bullet$$

$$\sum_{j \in S} q_{ij}(t) \leq 0 \quad \bullet$$

اگر $i \in S$ و $0 \leq t$ و $\sum_{j \in S} q_{ij}(t) = 0$ ، آنگاه تابع $Q(t)$ را محافظه کار گوییم. اگر هر مولفه q_{ij} برای $Q(t)$ مستقل از t باشد (یعنی $q_{ij}(t) = q_{ij}$)، آنگاه ماتریس Q ، همگن

نامیده می‌شود و داریم $Q := [q_{ij}]$. در این پایان‌نامه نیز از یک ماتریس نرخ انتقال همگن محافظه کار با شرایط زیر استفاده شده است.

$$q_{ij} \geq 0, \quad i \neq j,$$

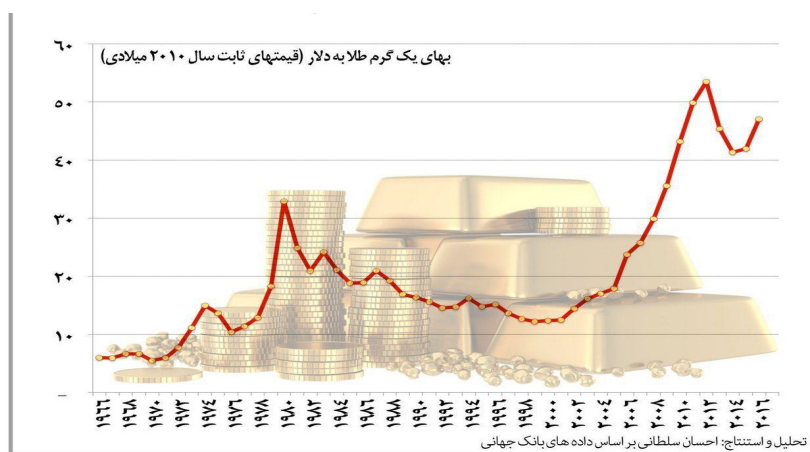
$$q_{ii} \geq 0, \quad q_{ii} = - \sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

۴.۲ رژیم سوئیچینگ

تغییرات ناگهانی در بسیاری از پارامترها باعث می‌شود که دینامیک دارایی پایه (رفتار سری) به‌طور چشمگیری تغییر کند. این مطلب در هر اقتصاد کلانی و در سری‌های زمانی مالی که دوره‌های به اندازه کافی طولانی دارند، دیده می‌شود [۳۱].

بی‌ثباتی در مدل، اغلب به‌عنوان سوئیچ در یک معادله از یک رژیم به رژیم دیگر تعریف شده‌است. در ابتدا برخی محققین مدل‌هایی را در نظر گرفتند که فقط یک رژیم را در سری داده‌ها دارا باشد، سپس مدل‌هایی با بیش از یک رژیم طراحی شد که احتمال سوئیچ در آن‌ها وابسته است و این وابستگی با مدل رژیم سوئیچینگ معرفی شده‌است. این مدل قادر است تغییرات متناوب و تکراری رژیم‌های اقتصادی را در نظر بگیرد [۲۴، ۱۲].

به‌عنوان مثال، در شکل ۱.۲ نمونه‌هایی از شکست قیمت سهام طلا در چند دهه اخیر مشاهده می‌شود.



شکل ۱.۲: قیمت طلا در نیم قرن اخیر در جهان

حال فرض کنید که رفتار قیمت این سهم را با فرآیند براونی هندسی زیر توصیف شود.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (3.2)$$

که در آن μ نرخ بهره و σ نوسان پذیری دارایی پایه و W فرآیند براونی هندسی باشد. در اینجا نرخ بهره و نوسان‌پذیری ثابت فرض شده‌است.

سوالی که به ذهن می‌رسد آن است که چگونه باید شکست موجود در نمودار فوق را در مدل‌سازی لحاظ کنیم؟ عموماً داده‌ها تا قبل از سال ۱۹۷۹ از مدل زیر تبعیت می‌کنند.

$$dS_t = \mu_1 S_t dt + \sigma_1 S_t dW_t, \quad (4.2)$$

و بعد از سال ۱۹۷۹، داده‌ها به‌صورت زیر مدل می‌شوند.

$$dS_t = \mu_2 S_t dt + \sigma_2 S_t dW_t, \quad (5.2)$$

لذا معادلات فوق به خوبی نمودار را توصیف می‌کنند. اما نحوه‌ی پیش‌بینی در این مدل‌ها معلوم نیست. اگر یک فرآیند در گذشته تغییر کرده است، واضح است که در آینده نیز می‌تواند تغییر کند و این باید در پیش‌بینی در نظر گرفته شود. بنابراین می‌توان تغییر در رژیم را به عنوان یک متغیر تصادفی در نظر گرفت.

فرض کنید فرآیند تحت تاثیر متغیر تصادفی غیر قابل مشاهده‌ی X_t قرار گرفته است، که رژیم نامیده می‌شود. در این صورت $X_t = 1$ یعنی فرآیند در رژیم اول می‌باشد و $X_t = 2$ بدین معناست که فرآیند در رژیم دوم قرار دارد. با این توضیحات، معادلات (۴.۲) و (۵.۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$dS_t = \mu X_t S_t dt + \sigma X_t S_t dW_t, \quad (6.2)$$

که در آن μX_t و σX_t در رژیم اول به‌ترتیب برابر μ_1 و σ_1 و در رژیم دوم به‌ترتیب برابر μ_2 و σ_2 می‌باشد.

بدین ترتیب دینامیک دارایی پایه برای دو رژیم به‌صورت بالا طراحی شد و برای تعداد متناهی رژیم دینامیک زیر را می‌توان نوشت.

$$dS_t = \mu_i X_t S_t dt + \sigma_i X_t S_t dW_t, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

حال نیاز است فرآیندی برای متغیر تصادفی X_t توصیف شود. ساده‌ترین مدل برای یک متغیر تصادفی زنجیر مارکوف مقدار گسسته است. برای بررسی بیشتر به [۸] و [۲۱] مراجعه شود.

۵.۲ قیمت‌گذاری اختیار توان تحت مدل رژیم سوئیچینگ

فرض کنید که بازار کارا است، یعنی فرصت آربیتراژ وجود ندارد. طبق قضیه اساسی اول قیمت‌گذاری، عدم فرصت آربیتراژ با وجود یک اندازه مارتینگل معادل، هم‌ارز است. فرض کنید فضای احتمال ریسک خنثی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ داده شده است، همچنین بازار مالی شامل دو

دارایی، یکی دارایی ریسک S_t و دیگری دارایی غیر ریسکی B_t به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\begin{aligned} dB_t &= rX_t B_t dt, \\ dS_t &= rX_t S_t dt + \sigma X_t S_t dW_t. \end{aligned} \quad (7.2)$$

که در آن‌ها، وضعیت اقتصادی با زنجیر مارکوف زمان پیوسته-متناهی مقدار $\{X_t, t \geq 0\}$ معین می‌گردد. حال بدون آنکه از کلیت مسئله کاسته شود، فرض کنید؛

$$X_t \in \{e_1, e_2, \dots, e_M\}, \quad e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in R^M,$$

که دارای دینامیک زیر است.

$$X_t = X_0 + \int_0^t Q X_s ds + M_t. \quad (8.2)$$

معادله (۸.۲) نمایش نیم-مارتینگل زمان پیوسته برای X_t می‌باشد. همچنین، در رابطه (۷.۲) نرخ بهره و نوسان‌پذیری به $\{X_t, t \geq 0\}$ از اقتصاد بستگی دارند که به صورت زیر نمایش داده می‌شوند.

$$\begin{aligned} rX_t &= (r_1, r_2, \dots, r_M), \\ \sigma X_t &= (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M). \end{aligned}$$

در زمان $t \in [0, T]$ ، قیمت یک اختیار خرید توان با سر رسید T و قیمت توافقی K به صورت زیر می‌باشد.

$$V(S_t, t, T, X_t) = E^Q[e^{-\int_t^T r_u du} V(T) | S_t = s, X_t = x], \quad (9.2)$$

$$= E^Q[e^{-\int_t^T r_u du} (S_T^m - K^m)^+ | S_t = s, X_t = x]. \quad (10.2)$$

حال فرض کنید $\tilde{V}(S_t, t, X_t) = e^{-\int_0^T r_u du} V(S_t, t, T, X_t)$ داریم؛

$$\begin{aligned} \tilde{V}(S_t, t, X_t) &= E^Q[e^{-\int_0^T r_u du} (S_T^m - K^m)^+ | S_t = s, X_t = x], \\ &= E^Q[e^{-\int_0^T r_u du} (S_T^m - K^m)^+ | G_t]. \end{aligned} \quad (11.2)$$

که در آن $G_t = \sigma\{S_u, X_u : u \leq t\}$. در نتیجه $\tilde{V}$ یک مارتینگل تحت اندازه Q است [۱۶]. قرار می‌دهیم؛

$$\tilde{V}(S_t, t) = (\tilde{V}(S_t, t, e_1), \dots, \tilde{V}(S_t, t, e_M)),$$

بنابراین $\tilde{V}(S_t, t, X_t) = \langle \tilde{V}(S_t, t), X_t \rangle$ (که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle$ نماد ضرب داخلی است). با به کار بردن فرمول ایتو برای $\tilde{V}$ می‌توان نوشت؛

$$\begin{aligned} \tilde{V}(S_t, t, X_t) &= \tilde{V}(S_t, 0, X_t) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial u} du + \int_0^t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} (r_u S_u du + \sigma_u S_u dW_u) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} (\sigma_u S_u)^2 du + \int_0^t \langle \tilde{V}, dX_s \rangle. \end{aligned} \quad (12.2)$$

به عبارت دیگر

$$d\tilde{V}_t = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} dt + r_t S_t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} dt + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} dt + \sigma_t S_t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} dW_t + \langle \tilde{V}, dX_t \rangle. \quad (۱۳.۲)$$

لم ۱.۵.۲. فرآیند تصادفی X که دارای نمایش دیفرانسیلی (تصادفی) است، مارتینگل است اگر و فقط اگر نمایش دیفرانسیل تصادفی آن به صورت زیر باشد.

$$dX_t = g(t) dW_t.$$

یعنی عبارتی بر حسب dt نداشته باشد.

□

برهان. به [۸] رجوع شود.

با توجه به آنکه

$$dX_t = QX_t dt + dM_t. \quad (۱۴.۲)$$

و M_t مارتینگل است، همچنین با توجه به لم ۱.۵.۲ استنباط می شود که عبارات بر حسب dt در رابطه (۱۳.۲) برابر صفر هستند. لذا

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + r_t S_t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} + \langle \tilde{V}, QX_t \rangle = 0. \quad (۱۵.۲)$$

با جایگذاری $\tilde{V} = e^{-\int_0^T r_u du} V$ ، در رابطه اخیر می توان نوشت؛

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(e^{-\int_0^T r_u du} V)}{\partial t} + r_t S_t \frac{\partial(e^{-\int_0^T r_u du} V)}{\partial S} \\ & + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2(e^{-\int_0^T r_u du} V)}{\partial S^2} + \langle e^{-\int_0^T r_u du} V, QX_t \rangle = 0. \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e^{-\int_0^T r_u du} V)}{\partial t} &= \frac{\partial(e^{-\int_0^T r_u du})}{\partial t} V + e^{-\int_0^T r_u du} \frac{\partial V}{\partial t} \\ &= -r_t V e^{-\int_0^T r_u du} + e^{-\int_0^T r_u du} \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$e^{-\int_0^T r_u du} (-r_t V + \frac{\partial V}{\partial t} + r_t S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \langle V, QX_t \rangle) = 0. \quad (۱۶.۲)$$

قرار می دهیم؛

$$X_t = e_i,$$

$$r_{X_i} = r_i,$$

$$\sigma_{X_i} = \sigma_i,$$

همچنین

$$V_i = V(S_t, t, T, e_i), \quad V = (V_1, V_2, \dots, V_M).$$

لذا V در معادله دیفرانسیل رژیم سوئیچینگ زیر صدق می‌کند.

$$-r_i V_i + \frac{\partial V_i}{\partial t} + r_i S_t \frac{\partial V_i}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_i^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2} + \langle V, Qe_i \rangle = 0. \quad (17.2)$$

معادله اخیر، یک معادله دیفرانسیل جزئی سهموی خطی می‌باشد. پس رفتار قیمت دارایی پایه به صورت فوق مدل‌سازی شده و یک مدل پویا و نوین در بازار مشتقات به‌دست آمده‌است. همچنین ثابت شد که مدل مذکور در یک معادله دیفرانسیل جزئی صدق می‌کند.

فصل ۳

قیمت گذاری اختیار معامله توان با روش زیر فضای ناوردا

در این بخش، قیمت گذاری اختیار معامله توان با حل معادله دیفرانسیل جزئی زمان کسری، انجام شده است. این قیمت گذاری با شرطی انجام می شود که قیمت دارایی پایه از مدل رژیم سوئیچینگ پیروی می کند، درحالی که دارایی های پایه ریسکی به یک فرآیند زنجیره مارکوف وابسته است.

۱.۳ مقدمه

بازارهای رژیم سوئیچینگ مارکوف شامل تغییرات چشمگیری در اقتصادکلان به وسیله ترکیب یک زنجیر مارکوف مداوم شده است. در حقیقت، به ندرت نتایج حاصل از اطلاعات روی قیمت سهام در چنین چارچوبی اثر می گذارد. به یقین، بازارهای رژیم سوئیچینگ ناکامل هستند. بنابراین، قیمت گذاری رژیم سوئیچینگ موضوع مهمی به شمار می رود. قیمت گذاری اختیار معامله به طور عمده برای کاهش ریسک در بازارهای مالی استفاده می شود [۷، ۱۴، ۳۴]. بنابراین، قیمت گذاری اختیار معامله موضوعی مهم در بازارهای مالی محسوب می شود. درواقع روش قیمت گذاری اختیار معامله توسط بلک و شولز توسعه یافته است. نوشته های زیادی به مدل آن ها اختصاص داده شده است. به عنوان مثال در [۲۷] یک استخراج ساده از مدل

قیمت گذاری اختیار معامله بلک- شولز ارائه شده است. یک چالش عمده در مدل بلک - شولز این است که نرخ تلاطم و نرخ بهره ثابت فرض شده است که مطابق با واقعیت نیست [۹].

برای به دست آوردن مدل هایی که به واقعیت بازار نزدیک تر باشد بسط های زیادی از مدل بلک - شولز ارائه شده است. از میان آن ها مدل رژیوم سوئیچینگ بهترین توصیف از قیمت دارایی ریسکی را دارد [۱۱، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۲۰].

در این فصل، به روشی پرداخته شده است که زیر فضای ناورد نامیده می شود و برای حل معادلات دیفرانسیل مربوط به قیمت گذاری اختیار معامله استفاده شده است [۳۲]. سود و زیان برای اختیار معامله توان وابسته به افزایش قیمت دارایی پایه ریسکی است، زمانی که توان $\beta > 0$. برای یک سرمایه گذار تیزبین در یک بازار مالی، اختیار معامله توان، عایدی بیشتری در مقایسه با اختیار معاملات معمولی دارد [۲۲].

۱.۱.۳ یافتن جواب دقیق با روش زیر فضای ناورد

در ابتدا، به طور خلاصه روش زیر فضای ناورد را برای معادلات دیفرانسیل یاد آوری می کنیم. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$u_t = F[u] \equiv F(u, Du, D^2u, \dots) = 0, \quad (1.3)$$

که در آن F یک عملگر دیفرانسیلی است و $Du = \{u_t, u_x\}$, $D^2u = \{u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}\}$ یک زیر فضای تولید شده از ترکیبات خطی یافته که به صورت زیر است.

$$W_n = \langle f_1(x), \dots, f_n(x) \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \right\},$$

با n تابع پایه ای مستقل خطی $f_i(x)$ ، W_n یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است، که در آن $c_1, c_2, \dots, c_n$ ثابت و دلخواه هستند.

تعریف ۱.۱.۳. به فضای خطی با بعد متناهی W_n تحت عملگر دیفرانسیلی F ناورد گفته می شود اگر به ازای هر $u \in W_n$

$$F[W_n] \subseteq W_n, \quad F[u] \in W_n.$$

از آنجائی که مجموعه ای از توابع $f_i(x)$ از زیر فضای ناورد W_n ارائه شده است، لذا جواب دقیق معادله (۱.۳) برای هر $t \in \mathbb{R}$ به صورت زیر است.

$$u(x, t) = C_1(t)f_1(x) + \dots + C_n(t)f_n(x) \in W_n, \quad (2.3)$$

که در آن $C_i(t)$ مجهول است و $f_i(x) \in W_n$. در حالیکه معادله فوق نسبت به t تکاملی مرتبه اول باشد مانند:

$$u_t = F[u] \equiv F(u, u_x, u_{xx}, \dots), \quad (3.3)$$

آنگاه W_n تحت F ناورد است یعنی به ازای هر $u \in W_n$ ، داریم:

$$F[u] = \psi_1(C_1, \dots, C_n)f_1 + \dots + \psi_n(C_1, \dots, C_n)f_n \in W_n, \quad (4.3)$$

که در آن ψ_i با بسطی از ضرایب $F[u]$ روی W_n مشخص می‌شود. بنابراین W_n یک زیر فضای ناورد برای معادله (۱.۳) است و ضرایب $C_i(t)$ در دستگاه زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} \frac{dC_1(t)}{dt} = \psi_1(C_1(t), \dots, C_n(t)), \\ \vdots \\ \frac{dC_n(t)}{dt} = \psi_n(C_1(t), \dots, C_n(t)). \end{cases} \quad (5.3)$$

می‌توان تعمیم زمان کسری معادله (۱۷.۲) را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{\partial^\alpha V_i}{\partial t^\alpha} = r_i V_i - r_i S \frac{\partial V_i}{\partial S} - \frac{1}{\Upsilon} \sigma_i^2 S^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2} - \sum_{i \neq j} q_{ij} (V_i - V_j) = 0, \quad i = 1, \dots, M, \quad (6.3)$$

که در آن $\frac{\partial^\alpha V_i}{\partial t^\alpha}$ مشتق کسری کاپوتو است. فرض کنید که $M = 1$. بنابراین معادله (۶.۳) می‌تواند به فرم زیر نوشته شود.

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial t^\alpha} = rV - rS \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{\Upsilon} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0, \quad (7.3)$$

بنابراین عملگر خطی $\hat{F}[v]$ از معادله زیر حاصل می‌شود.

$$\hat{F}[V] = rV - rS \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{\Upsilon} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2},$$

از آنجائی که $W_\Upsilon = \langle 1, S^\Upsilon \rangle$ زیر فضای ناورد بوده است، جوابی دقیق برای معادله (۶.۳) به شکل زیر موجود است.

$$V(t, S) = A(t) + S^\Upsilon B(t). \quad (8.3)$$

لذا؛

$$\frac{d^\alpha A}{dt^\alpha} = rA(t), \quad \frac{d^\alpha B}{dt^\alpha} = -B(t)(r + \sigma^\Upsilon). \quad (9.3)$$

بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید که $A(0), B(0) \neq 0$. همچنین برای راحتی فرض کنید که $A(0) = B(0) = 1$ و $\alpha \in (0, 1)$. برای $\alpha = 1$ جواب دقیق معادله (۶.۳) به صورت زیر خواهد بود.

$$V(t, S) = C_1 e^{rt} + S^\Upsilon C_2 e^{-(\sigma^\Upsilon + r)t}, \quad (10.3)$$

که در آن c_1, c_2 دلخواه و ثابت هستند.

در حال حاضر با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف معادله (۸.۳) می توان نوشت

$$s^\alpha L\{A(t)\} - s^{\alpha-1} A(0) = r L\{A(t)\},$$

$$L\{A(t)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - r},$$

داریم

$$A(t) = E_{\alpha,1}(rt^\alpha),$$

که در آن $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ تابع میتاگ لفر^۱ است.

$$E_{\alpha,\beta}(rt^\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r^i t^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i + \beta)}.$$

به طور مشابه

$$B(t) = E_{\alpha,1}(-(\sigma^2 + r)t^\alpha).$$

بنابراین، یک جواب دقیق معادله (۷.۳) به صورت زیر است.

$$V(t, S) = E_{\alpha,1}(rt^\alpha) + S^\gamma E_{\alpha,1}(-(\sigma^2 + r)t^\alpha). \quad (11.3)$$

از طرفی

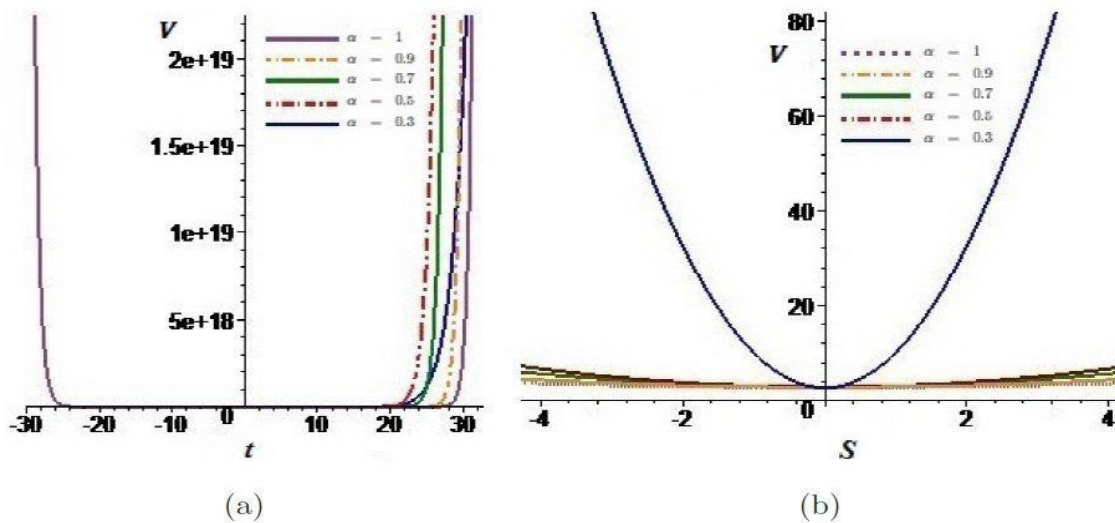
$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z.$$

از این رو برای $\alpha = 1$ جواب به دست آمده در معادله (۱۱.۳) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$V(t, S) = e^{rt} + S^\gamma e^{-(\sigma^2 + r)t},$$

که دقیقاً همان جواب دقیق معادله (۹.۳) است. نمایشی از جواب برای مقادیر مختلف α در شکل (۱.۳) نشان داده شده است.

¹Mittage-leffer



شکل ۱.۳: (a) $t = ۲$ و $\sigma = ۱, r = ۰/۵$ ، (b) $s = ۲$ و $\sigma = ۱, r = ۰/۵$

با توجه به شکل (a)، تاثیر تغییرات ارزش اختیار با ثابت در نظر گرفتن قیمت دارایی پایه و متغیر در نظر گرفتن زمان و تاثیر α نمایش داده شده است. همان طوری که مشاهده می شود در این شکل با گذر زمان و نزدیک شدن به تاریخ سررسید مقدار ارزش اختیار برای مقادیر مختلف α مشابه و تقریباً یکسان است.

در شکل (b) تاثیر تغییرات ارزش اختیار با ثابت در نظر گرفتن زمان و متغیر بودن قیمت دارایی پایه و تاثیر آلفا نمایش داده شده است. همان طوری که مشاهده می کنید در این شکل با افزایش قیمت اختیار مقدار ارزش معامله هم افزایش می یابد.

حال با قرار دادن $M = ۲$ در معادله (۶.۳) معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی زمان کسری زیر را خواهیم داشت.

$$\frac{\partial^\alpha V_1}{\partial t^\alpha} = r_1 V_1 - r_1 S \frac{\partial V_1}{\partial S} - \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} - q_{12} (V_1 - V_2) = 0, \quad (12.3)$$

$$\frac{\partial^\alpha V_2}{\partial t^\alpha} = r_2 V_2 - r_2 S \frac{\partial V_2}{\partial S} - \frac{1}{2} \sigma_2^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} - q_{21} (V_2 - V_1) = 0. \quad (13.3)$$

با روشی مشابه می توان جوابی دقیق برای زیر فضای $< 1, S^2 > \times < 1, S^2 >$ که به $W_{2,2}$ یک جواب دقیق برای معادله (۱۲.۳) اشاره دارد به شکل زیر یافت.

$$V_1(t, s) = A_1(t) + S^2 A_2(t),$$

$$V_2(t, S) = B_1(t) + S^2 B_2(t).$$

با قرار دادن جواب در معادلات (۱۲.۳) و بازسازی مجدد آن ها، معادلات دیفرانسیل با مشتقات

کسری زیر به دست می آیند.

$$\frac{d^\alpha A_1}{dt^\alpha} = q_{12} A_1(t) + r_1 A_1(t) - q_{12} B_1(t), \quad (14.3)$$

$$\frac{d^\alpha B_1}{dt^\alpha} = q_{21} B_1(t) + r_2 B_1(t) - q_{21} A_1(t). \quad (15.3)$$

$$\frac{d^\alpha A_2}{dt^\alpha} = q_{12} A_2(t) - r_1 A_2(t) - \sigma_1^\gamma A_2(t) - q_{12} B_2(t), \quad (16.3)$$

$$\frac{d^\alpha B_2}{dt^\alpha} = q_{21} B_2(t) - r_2 B_2(t) - \sigma_2^\gamma B_2(t) - q_{21} A_2(t). \quad (17.3)$$

وقتی $\alpha = 1$ می توان مقادیر $A_1(t), A_2(t), B_1(t), B_2(t)$ را یافت. بنابراین جوابی دقیق برای معادلات (۱۲.۳) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} V_1(t, S) = & C_F \exp \left(\frac{q_{12} + q_{21} + r_1 + r_2 + \sqrt{X}}{2} t \right) \\ & + C_F \exp \left(\frac{q_{12} + q_{21} + r_1 + r_2 - \sqrt{X}}{2} t \right) \\ & + S^\gamma \left[C_1 \exp \left(\frac{-\sigma_1^\gamma - \sigma_2^\gamma + q_{12} + q_{21} - r_1 - r_2 + \sqrt{Y}}{2} t \right) \right] \\ & + S^\gamma C_2 \left[\exp \left(\frac{-\sigma_1^\gamma - \sigma_2^\gamma + q_{12} + q_{21} - r_1 - r_2 - \sqrt{Y}}{2} t \right) \right], \\ V_2(t, S) = & C_F \left(\frac{q_{12} - q_{21} - \sqrt{X} + r_1 - r_2}{2 q_{12}} \right) \exp \left(\frac{q_{12} + q_{21} + r_1 + r_2 + \sqrt{X}}{2} t \right) \\ & + C_F \left(\frac{q_{12} - q_{21} + \sqrt{X} + r_1 - r_2}{2 q_{12}} \right) \exp \left(\frac{q_{12} + q_{21} + r_1 + r_2 - \sqrt{X}}{2} t \right) \\ & + S^\gamma C_F \left(\frac{\sigma_1^\gamma - \sigma_2^\gamma + q_{12} - q_{21} - r_1 + r_2 + \sqrt{Y}}{2 q_{12}} \right) \\ & \times S^\gamma \exp \left(\frac{-\sigma_1^\gamma - \sigma_2^\gamma + q_{12} + q_{21} - r_1 - r_2 - \sqrt{Y}}{2} t \right) \\ & + S^\gamma C_1 \left(\frac{\sigma_1^\gamma - \sigma_2^\gamma + q_{12} - q_{21} - r_1 + r_2 - \sqrt{Y}}{2 q_{12}} \right) \\ & \times S^\gamma \exp \left(\frac{-\sigma_1^\gamma - \sigma_2^\gamma + q_{12} + q_{21} - r_1 - r_2 + \sqrt{Y}}{2} t \right). \end{aligned} \quad (18.3)$$

که در آن

$$X = q_{12}^\gamma + 2 q_{12} q_{21} + 2 q_{12} r_1 - 2 q_{12} r_2 + q_{21}^\gamma - 2 q_{21} r_1 + 2 q_{21} r_2 + r_1^\gamma - 2 r_1 r_2 + r_2^\gamma,$$

$$\begin{aligned} Y = & \sigma_1^\gamma - 2 \sigma_1^\gamma \sigma_2^\gamma + \sigma_2^\gamma - 2 q_{12} \sigma_1^\gamma + q_{12} \sigma_2^\gamma + q_{21} \sigma_1^\gamma - 2 q_{21} \sigma_2^\gamma + 2 r_1 \sigma_1^\gamma \\ & - 2 r_1 \sigma_2^\gamma - 2 r_2 \sigma_1^\gamma + 2 r_2 \sigma_2^\gamma + q_{12}^\gamma + 2 q_{12} q_{21} - 2 q_{12} r_1 + 2 q_{12} r_2 + q_{21}^\gamma \\ & + 2 q_{21} r_1 - 2 q_{21} r_2 + r_1^\gamma - 2 r_1 r_2 + r_2^\gamma. \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\alpha \in (\circ/1)$. با استفاده از روش تبدیل لاپلاس می‌توان نوشت.

$$s^\alpha L\{A_1(t)\} - s^{\alpha-1} A_1(\circ) = q_{12} L\{A_1(t)\} + r_1 L\{A_1(t)\} - q_{12} L\{B_1(t)\}, \quad (19.3)$$

$$s^\alpha L\{B_1(t)\} - s^{\alpha-1} B_1(\circ) = q_{21} L\{B_1(t)\} + r_2 L\{B_1(t)\} - q_{21} L\{A_1(t)\}. \quad (20.3)$$

قرار می‌دهیم، $A_1(\circ) = A_2(\circ) = B_1(\circ) = B_2(\circ) = 1$. بنابراین می‌توان نوشت،

$$\begin{cases} L\{A_1(t)\}(s^\alpha - q_{12} - r_1) + q_{12} L\{B_1(t)\} = s^{\alpha-1}, \\ L\{B_1(t)\}(s^\alpha - q_{21} - r_2) + q_{21} L\{A_1(t)\} = s^{\alpha-1}. \end{cases}$$

برای حل دستگاه معادلات جبری فوق در ابتدا فرض کنید،

$$L\{A_1(t)\} = \frac{s^{\alpha-1}(s^\alpha - q_{21} - r_2 - q_{12})}{(s^\alpha - q_{12} - r_1)(s^\alpha - q_{21} - r_2) - q_{12}q_{21}}, \quad (21.3)$$

در نتیجه

$$L\{A_1(t)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + s^{\alpha}(-q_{12} - r_1 - q_{21} - r_2) + q_{12}r_2 + q_{21}r_1 + r_1r_2} \quad (22.3)$$

$$+ \frac{s^{\alpha-1}(-q_{21} - r_2 - q_{12})}{s^{\alpha} + s^{\alpha}(-q_{12} - r_1 - q_{21} - r_2) + q_{12}r_2 + q_{21}r_1 + r_1r_2}. \quad (23.3)$$

برای پیدا کردن تابع $A_1(t)$ از تبدیل لاپلاس، از لم مطرح شده در [۲۳] استفاده می‌شود.

لم ۱.۱.۳. برای $\alpha \leq \beta$, $\alpha > \gamma$, $a \in R$, $S^{(\alpha-\beta)} > |a|$, $|S^\alpha + aS^\beta| > |b|$

$$L^{-1} \left[\frac{s^\gamma}{s^\alpha + as^\beta + b} \right] = x^{\alpha-\gamma-1} \sum_{n=\circ}^{\infty} \sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{(-b)^n (-a)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(K(\alpha-\beta) + (n+1)\alpha - \gamma)} x^{k(\alpha-\beta) + n\alpha}. \quad (24.3)$$

با استفاده از لم فوق می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \sum_{n=\circ}^{\infty} \sum_{k=\circ}^{\infty} (-q_{12}r_2 - q_{21}r_1 - r_1r_2)^n (q_{12} + q_{21} + r_1 + r_2)^k \binom{n+k}{k} t^{(n+k)\alpha} \\ &\times \left(\frac{1}{\Gamma(k\alpha + 2\alpha n + 1)} - (q_{12} + r_2 + q_{21}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(k\alpha + 2\alpha n + \alpha + 1)} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1(t) &= \sum_{n=\circ}^{\infty} \sum_{k=\circ}^{\infty} (-q_{12}r_2 - q_{21}r_1 - r_1r_2)^n (q_{12} + q_{21} + r_1 + r_2)^k \binom{n+k}{k} t^{(n+k)\alpha} \\ &\times \left(\frac{1}{\Gamma(k\alpha + 2\alpha n + 1)} - (q_{12} + r_1 + q_{21}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(k\alpha + 2\alpha n + \alpha + 1)} \right). \end{aligned} \quad (25.3)$$

به طور مشابه، با به کارگیری تبدیل لاپلاس روی دو طرف معادلات (۱۴.۳) داریم؛

$$\begin{aligned} L\{A_T(t)\} &= \frac{s^{\alpha-1}(s^\alpha - q_{1T} + r_T - q_{2T} + \sigma_T^2)}{(s^\alpha - q_{1T} + r_1 + \sigma_1^2)(s^\alpha - q_{2T} + r_T + \sigma_T^2) - q_{1T}q_{2T}}, \\ L\{B_T(t)\} &= \frac{s^{\alpha-1}(s^\alpha - q_{1T} + r_1 - q_{2T} + \sigma_1^2)}{(s^\alpha - q_{1T} + r_1 + \sigma_1^2)(s^\alpha - q_{2T} + r_T + \sigma_T^2) - q_{1T}q_{2T}}. \end{aligned} \quad (26.3)$$

با تبدیل لاپلاس^۱ معکوس گرفتن از دو طرف معادله فوق و با استفاده از لم اخیر جواب های زیر حاصل می شود.

$$\begin{aligned} A_T(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (q_{1T}r_T + q_{2T}r_1 - r_1r_T + q_{2T}\sigma_1^2 + q_{1T}\sigma_T^2 - r_1\sigma_T^2 - r_T\sigma_1^2 - \sigma_1^2\sigma_T^2)^n \\ &\quad \times (q_{1T} + q_{2T} - r_1 - r_T - \sigma_1^2 - \sigma_T^2)^k \binom{n+k}{k} t^{(Tn+k)\alpha} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\Gamma(k\alpha + T\alpha n + 1)} - (\sigma_T^2 - q_{1T} + r_T - q_{2T}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(k\alpha + T\alpha n + \alpha + 1)} \right). \\ B_T(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (q_{1T}r_T + q_{2T}r_1 - r_1r_T + q_{2T}\sigma_1^2 + q_{1T}\sigma_T^2 - r_1\sigma_T^2 - r_T\sigma_1^2 - \sigma_1^2\sigma_T^2)^n \\ &\quad \times (q_{1T} + q_{2T} - r_1 - r_T - \sigma_1^2 - \sigma_T^2)^k \binom{n+k}{k} t^{(Tn+k)\alpha} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\Gamma(k\alpha + T\alpha n + 1)} - (\sigma_1^2 - q_{1T} + r_T - q_{2T}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(k\alpha + T\alpha n + \alpha + 1)} \right). \end{aligned} \quad (27.3)$$

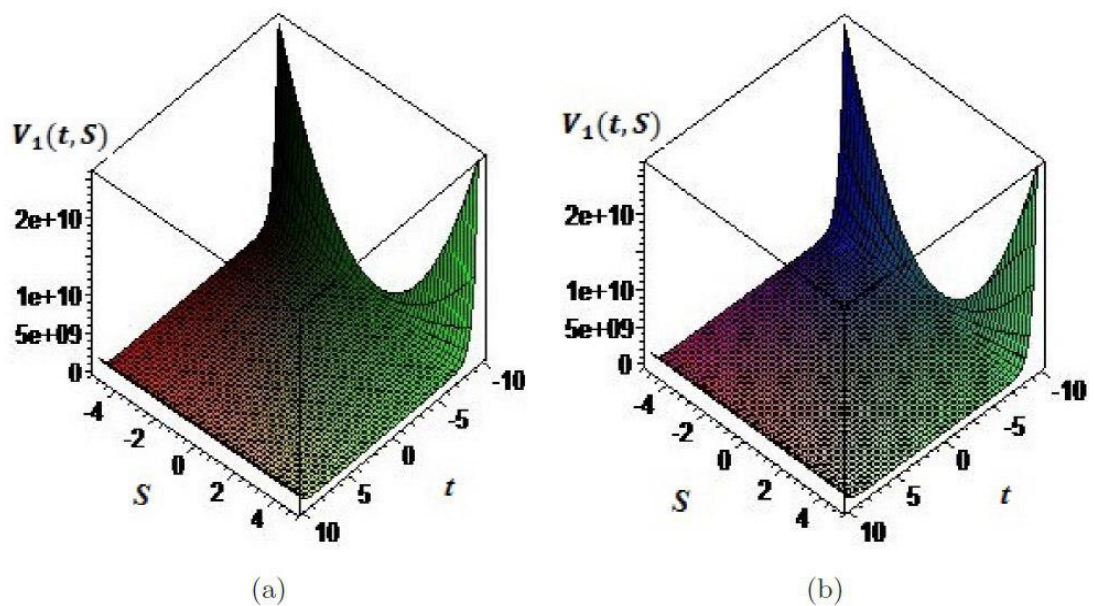
در نتیجه جواب های به دست آمده از معادلات دیفرانسیل معمولی (۱۴.۳) دقیقاً همان جواب های دقیق معادلات دیفرانسیل (۱۲.۳) است.

$$\begin{aligned} V_1(t, S) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-q_{1T}r_T - q_{2T}r_1 - r_1r_T)^n (q_{1T} + q_{2T} + r_1 + r_T)^k \binom{n+k}{k} t^{(Tn+k)\alpha} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\Gamma(k\alpha + T\alpha n + 1)} - (q_{1T} + r_T + q_{2T}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(k\alpha + T\alpha n + \alpha + 1)} \right) \\ &\quad + S^T \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (q_{1T}r_T + q_{2T}r_1 - r_1r_T + q_{2T}\sigma_1^2 + q_{1T}\sigma_T^2 - r_1\sigma_T^2 - r_T\sigma_1^2 \\ &\quad - \sigma_1^2\sigma_T^2)^n (q_{1T} + q_{2T} - r_1 - r_T - \sigma_1^2 - \sigma_T^2)^k \binom{n+k}{k} t^{(Tn+k)\alpha} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\Gamma(k\alpha + T\alpha n + 1)} + (\sigma_T^2 - q_{1T} + r_T - q_{2T}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(k\alpha + T\alpha n + \alpha + 1)} \right). \end{aligned} \quad (28.3)$$

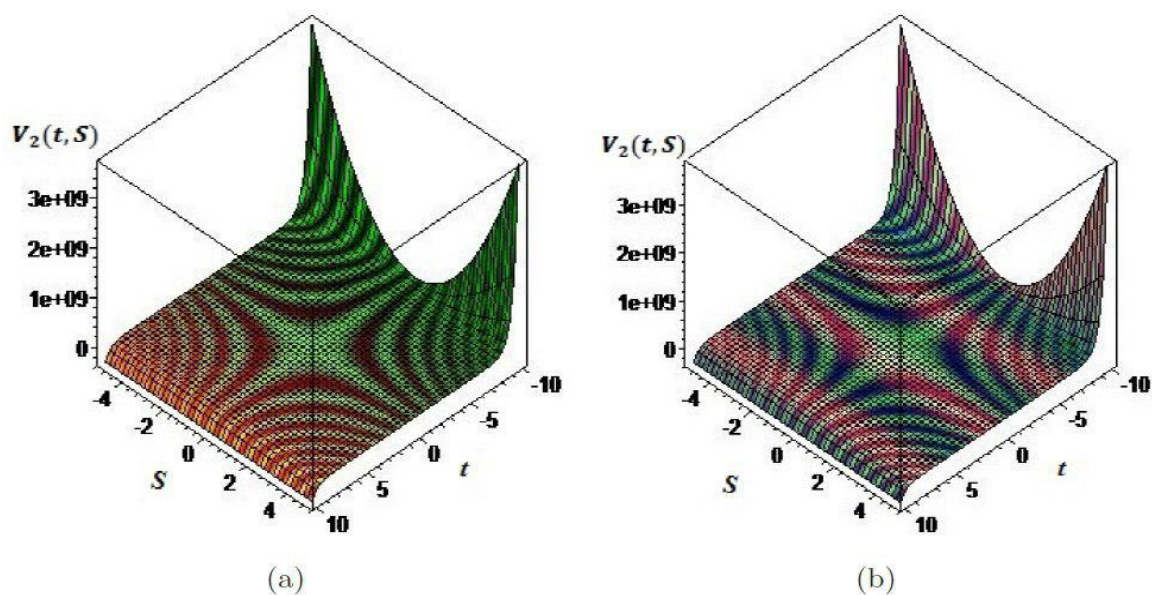
¹Laplas

$$\begin{aligned}
 V_{\gamma}(t, S) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-q_{1\gamma} r_{\gamma} - q_{\gamma 1} r_1 - r_1 r_{\gamma})^n (q_{1\gamma} + q_{\gamma 1} + r_1 + r_{\gamma})^k \binom{n+k}{k} t^{(\gamma n+k)\alpha} \\
 & \times \left(\frac{1}{\Gamma(k\alpha + \gamma\alpha n + 1)^n} - (q_{1\gamma} + r_{\gamma} + q_{\gamma 1}) \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(k\alpha + \gamma\alpha n + \alpha + 1)} \right) \\
 & + S^{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (q_{1\gamma} r_{\gamma} + q_{\gamma 1} r_1 - r_1 r_{\gamma} + q_{\gamma 1} \sigma_1^{\gamma} + q_{1\gamma} \sigma_{\gamma}^{\gamma} - r_1 \sigma_{\gamma}^{\gamma} - r_{\gamma} \sigma_1^{\gamma} \\
 & - \sigma_1^{\gamma} \sigma_{\gamma}^{\gamma})^n (q_{1\gamma} + q_{\gamma 1} - r_1 - r_{\gamma} - \sigma_1^{\gamma} - \sigma_{\gamma}^{\gamma})^k \binom{n+k}{k} t^{(\gamma n+k)\alpha} \\
 & \times \left(\frac{1}{\Gamma(k\alpha + \gamma\alpha n + 1)} + (\sigma_1^{\gamma} - q_{1\gamma} + r_1 - q_{\gamma 1}) \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(k\alpha + \gamma\alpha n + \alpha + 1)} \right).
 \end{aligned}$$

معادلات (۲۸.۳) هر دو جواب‌های به‌دست آمده با استفاده از روش زیر فضای ناوردا هستند.

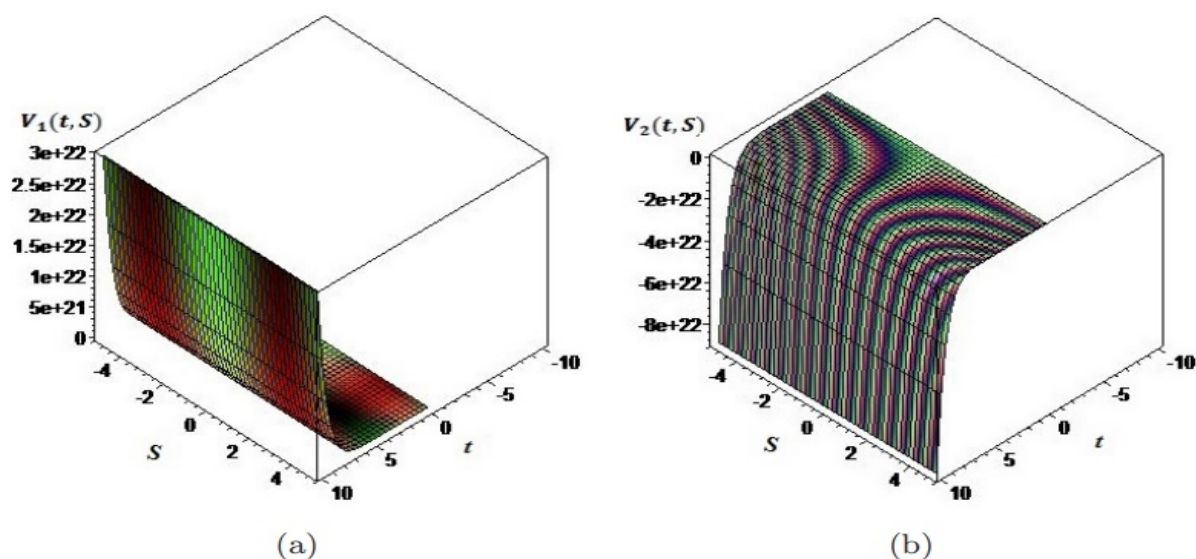


شکل ۲.۳: (a) نمایشی از V_1 در معادله (۱۸.۳)، (b) V_1 در معادله (۲۸.۳)،
 $\sigma_1 = 0/4, \sigma_{\gamma} = 0/3, r_1 = 2, r_{\gamma} = 0/3, q_{1\gamma} = 0/3, q_{\gamma 1} = 0/3, c_1 = c_{\gamma} = c_3 = c_4 = 1$

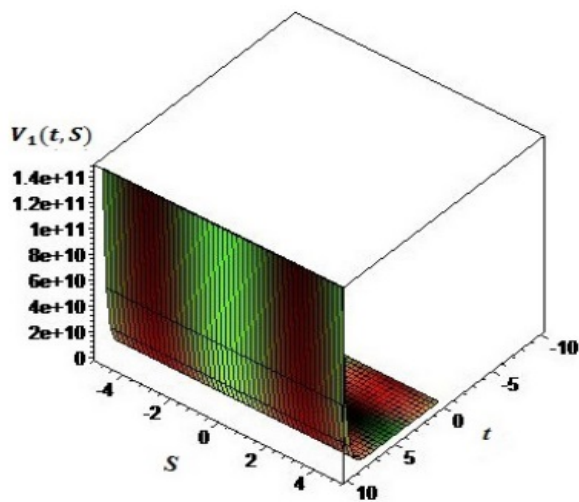


شکل ۳.۳: (a) نمایشی از V_2 در معادله (۱۸.۳)، (b) V_1 در معادله (۲۸.۳)،
 $\sigma_1 = 0.4, \sigma_2 = 0.3, r_1 = 2, r_2 = 0.2, q_{12} = 0.1, q_{21} = 0.3, c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$

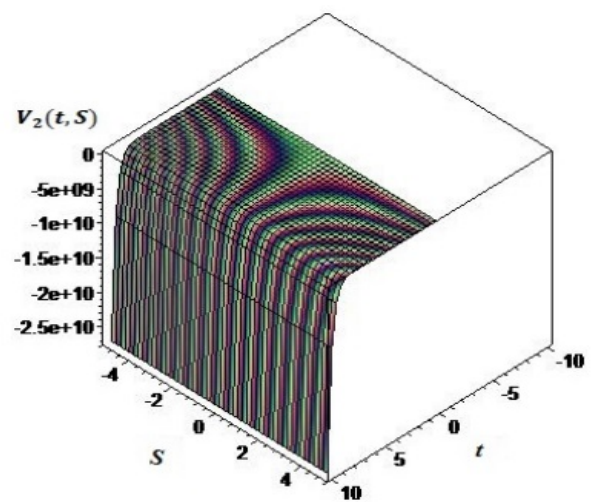
با توجه به شکل‌های ۲.۳ و ۳.۳ مشاهده می‌شود که مجموعه جواب‌های دو معادله (۱۸.۳) و (۲۸.۳) در بلند مدت مقادیر مشابه و نزدیک به هم دارند.



شکل ۴.۳: نمایشی از مقادیر مختلف آلفا برای معادلات (۲۸.۳)،
 $\sigma_1 = 0.4, \sigma_2 = 0.3, r_1 = 2, r_2 = 0.2, q_{12} = 0.1, q_{21} = 0.3, \alpha = 0.2$

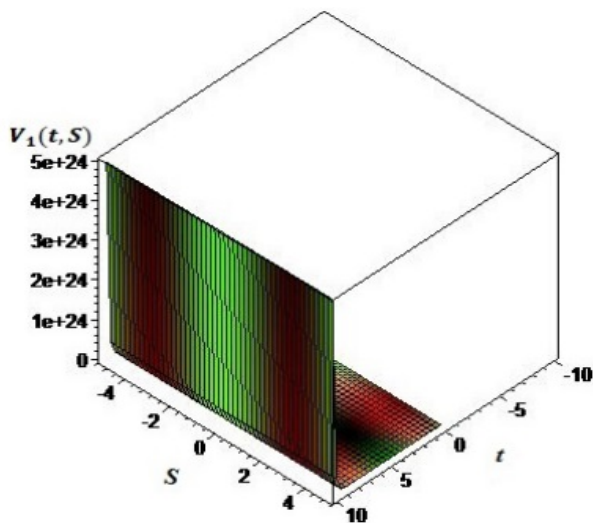


(c)

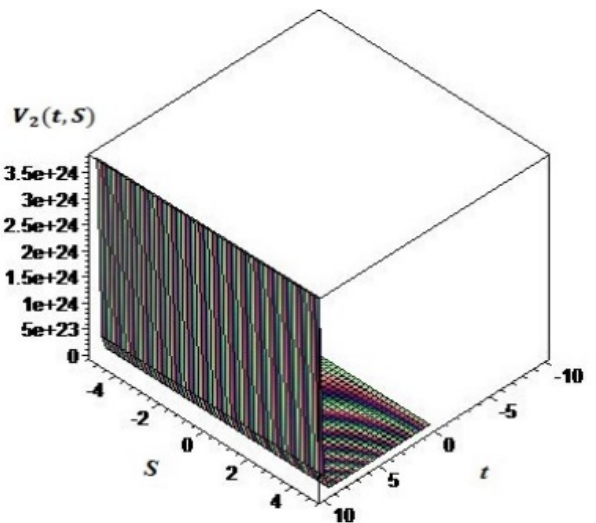


(d)

شکل ۵.۳: ادامه شکل قبل $\alpha = 0.5$, (d) $V_2(t, s)$, $\alpha = 0.5$, (c) $V_1(t, s)$, $\alpha = 0.5$



(e)



(f)

شکل ۶.۳: ادامه شکل قبل $\alpha = 0.8$, (f) $V_2(t, s)$, $\alpha = 0.8$, (e) $V_1(t, s)$, $\alpha = 0.8$

در شکل های ۴.۳، ۵.۳ و ۶.۳، ارزش اختیار معامله دو رژیم با استفاده از معادله (۲۸.۳) با تغییرات α مشخص شده است. همان طور که مشاهده می کنید با افزایش مقدار آلفا مقادیر ارزش اختیار معامله هر دو جواب در بلند مدت به یکدیگر نزدیک می شوند.

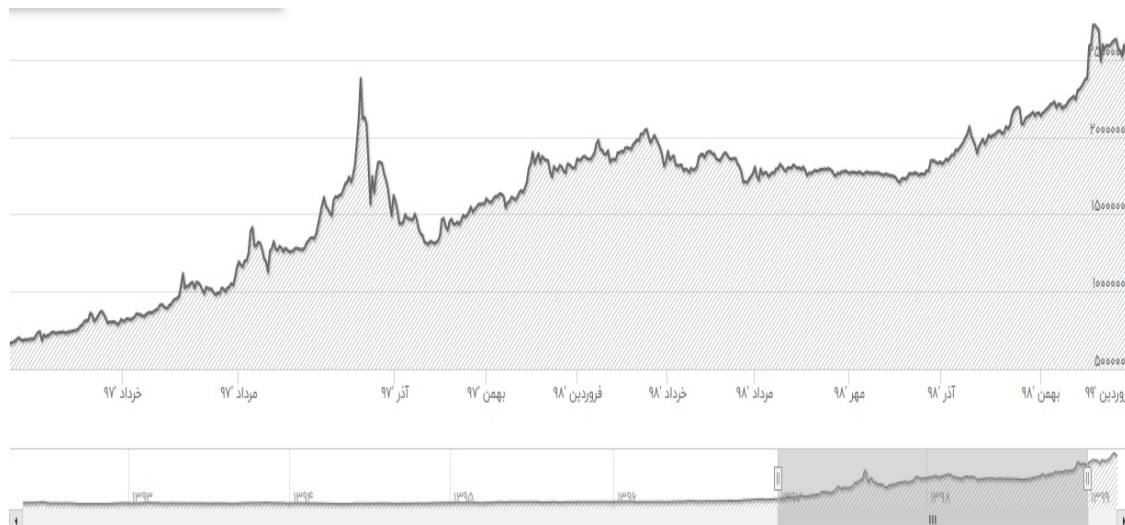
فصل ۴

نتایج عددی در بازار طلای ایران

در این بخش، قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل رژیم سوئیچینگ با در نظر گرفتن یک مثال طلا به عنوان دارایی پایه در بازار ایران انجام شده است.

قیمت‌گذاری اختیار در بازار طلا به عنوان یک بازار پرتلاطم، چالشی پیچیده است که برای حل این چالش راه‌حل‌های مختلفی ارائه شده است. به‌طور مثال در [۵] قیمت‌گذاری اختیار در بازار طلا تحت مدل هستون و برخی از مشتقات آن، و در [۱۳] قیمت‌گذاری اختیار در بازار طلای ایران تحت مدل هستون کسری و در [۱] به بررسی عوامل مؤثر در تغییر پذیری قیمت آتی سکه طلا پرداخته شده است.

در شکل ۱.۴ نمودار جامع تحولات سالانه شاخص مثال طلا از تاریخ ۱۳۹۶/۱۲/۲۹ تا ۱۳۹۸/۱۲/۲۹ و در پی آن نوسانات این بازار قابل مشاهده است.



شکل ۱.۴: نمودار جامع تحولات سالانه شاخص مئقال طلا در بازه مورد نظر

در این پایان نامه ابتدای سال ۱۳۹۷ زمان شروع قیمت گذاری اختیار در نظر گرفته شده و هدف، قیمت گذاری اختیار معامله توان با توان دو و سررسید دو ساله است. برای سادگی محاسبات مقادیر شاخص بر 10^8 تقسیم شده اند. بنابراین قیمت اولیه دارایی پایه $S = 0/665$ است. از طرفی قیمت واقعی در انتهای سال ۱۳۹۸ برابر $S_T = 2/613$ می باشد. یکی از روش های پوشش ریسک ناشی از نوسانات موجود در بازار طلا استفاده از مدل های کسری است. چرا که در مدل های کسری، پارامترهای مدل دارای حافظه ی بلند مدت هستند. توان هرست ابزاری مناسب برای تشخیص یک سری زمانی غیر تصادفی از یک سری تصادفی، بدون در نظر گرفتن نوع توزیع آن است. روش مطالعه و آزمون هرست به تدریج به پدیده های دیگری نیز که در ظاهر تصادفی به نظر می رسند، ولی ممکن است از یک الگوی منظمی برخوردار باشند، تعمیم داده شده است. هرست با استفاده از قاعده نصف در آمار، رابطه زیر را تعریف کرد.

$$\left(\frac{R}{S}\right)_n = a \cdot n^\alpha \quad (1.4)$$

که در آن R دامنه تجدید مقیاس شده، S انحراف معیار سری زمانی، a عدد ثابت، n تعداد مشاهدات و α توان هرست است. فرمول بالا را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\log\left(\frac{R}{S}\right)_n = \log a + \alpha \log n \quad (2.4)$$

توان هرست همانندی دو پیشامد پیاپی را نشان می دهد و به کمک محاسبه شیب منحنی $\frac{\log \frac{R}{S}}{\log n}$ و با استفاده از روش رگرسیون در حوزه تغییرات n به دست می آید. مقدار به دست آمده نمایان گر میانگین دوره گردش متناوب الگو است. در عمل، می توان با انجام یک رگرسیون، ضریب توان هرست α را برآورد کرد، طبق نتایج هرست اگر مقدار توان برابر $(0/5)$ باشد،

دلالت بر یک فرآیند مستقل دارد. همچنین بعد فراکتالی سری‌های زمانی میزان ناهموازی و نوسانات آن را نشان می‌دهد [۲۶]. بعد فراکتالی یک خط برابر ۱ و برای یک صفحه برابر ۲ است، بنابراین بعد فراکتالی یک سری زمانی بین ۱ و ۲ قرار دارد. رابطه بعد فراکتالی و توان هرست یک سری زمانی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$D = 2 - \alpha$$

D بعد فراکتال و α توان هرست است. اگر توان هرست بین ۵٪ و ۱ قرار گیرد، یعنی سری زمانی پایدار با حافظه بلند مدت خواهد بود و در نهایت اگر، توان هرست برابر با یک مقدار مثبت ولی کمتر شد، دلالت بر ناپایداری فرآیند دارد. برای محاسبه توان هرست می‌توان از رابطه زیر نیز استفاده کرد.

$$(3.4) \quad \text{لگاریتم دامنه تغییرات قیمت} / \text{انحراف معیار قیمت‌های ماهیانه} = \text{توان هرست}$$

مقدار توان هرست در بازه مورد نظر برابر $\alpha = 0.928893636$ محاسبه شده که نشان دهنده‌ی فرآیندی پایدار و با حافظه بلند مدت است.

روش دیگری که برای پوشش ریسک ناشی از نوسانات قیمت دارایی پایه در این پایان‌نامه معرفی شده، استفاده از راهبرد رژیم‌گزینی است.

قیمت طلا به عنوان یک دارایی ریسکی متأثر از عوامل متعدد سیاسی، اقتصادی، اجتماعی و... است. این امر سبب می‌شود ارزش‌گذاری اختیاری را که دارایی پایه آن طلا باشد، دشوار کند.

در مدل‌های کلاسیک قیمت‌گذاری، فرض بر این است که پارامترهای مدل به‌خصوص تلاطم در طول یک دوره ثابت هستند. اما در بسیاری از سری‌های زمانی، اقتصادی و مالی مشاهده می‌شود که در دوره‌هایی نوسانات بسیار شدید می‌باشند و به دنبال آن دوره‌هایی تغییرات اندک را پشت سر می‌گذارند.

بررسی‌های اولیه نشان می‌دهد نوسانات خوشه‌ای است. یعنی ویژگی توزیع مستقل و یکسان و همسانی واریانس نقض می‌گردد. با فرض وجود رژیم‌های جداگانه در سری‌های زمانی می‌توان وجود رفتارهای نامتقارن در نوسانات و سایر پارامترهای تاثیرگذار بر دارایی پایه را توجیه کرد.

در این پژوهش سال‌های ۱۳۹۷ و ۱۳۹۸ به عنوان دو رژیم جداگانه در نظر گرفته شده‌اند و پارامترهای مورد نیاز به صورت زیر برآورد شده‌است.

برای محاسبه بازده بدون ریسک روش‌های متنوعی مورد استفاده قرار گرفته است. در این پایان‌نامه در هر دوره ابتدا بازده روزانه با استفاده از لگاریتم نسبت قیمت هر روز به روز قبل محاسبه شده و سپس میانگین بازده تمام روزهای سال به عنوان بازده آن سال در نظر گرفته شده‌است.

بازده مورد انتظار (r) در سال ۱۳۹۷ برابر $r_1 = 0.27\%$ و در سال ۱۳۹۸ برابر $r_2 = 0.41\%$ برآورد شده است. با توجه به اینکه مقدار بازده سال ۱۳۹۸ از سال ۱۳۹۷ بیشتر برآورد شده است، می توان انتظار داشت ارزش اختیار در سال ۱۳۹۸ از سال ۱۳۹۷ بیشتر باشد.

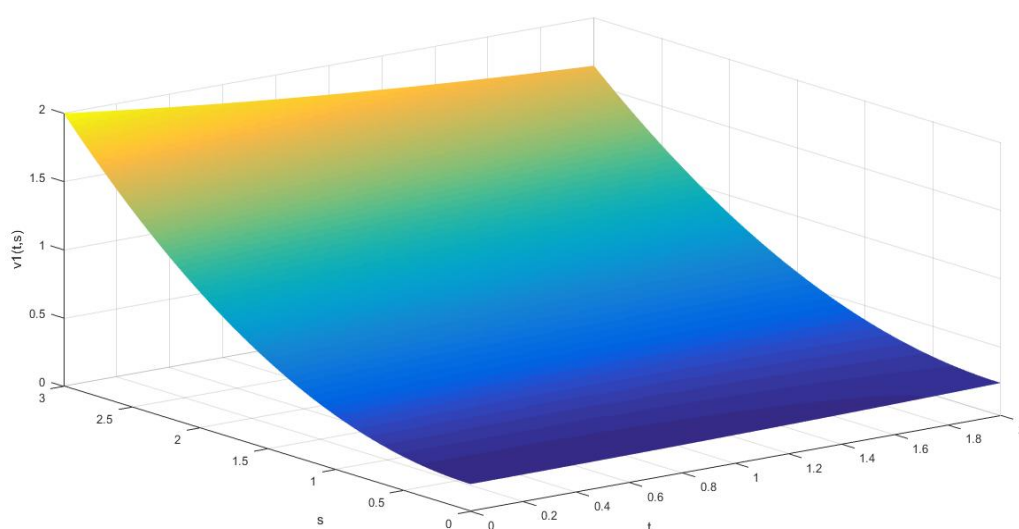
برای محاسبه نوسانات ابتدا هر بازه یک ساله به زیر بازه های ماهانه تقسیم بندی شده و سپس انحراف معیار هر ماه محاسبه شده و به عنوان نوسان ماهانه در نظر گرفته شده است. میانگین نوسانات ماهانه در هر سال برابر نوسان سالانه بازه در نظر گرفته شده است.

مقادیر نوسان هر سال به صورت زیر محاسبه شده است. مقادیر زیر نشان می دهند نوسانات دو سال تقریباً به هم نزدیک می باشند.

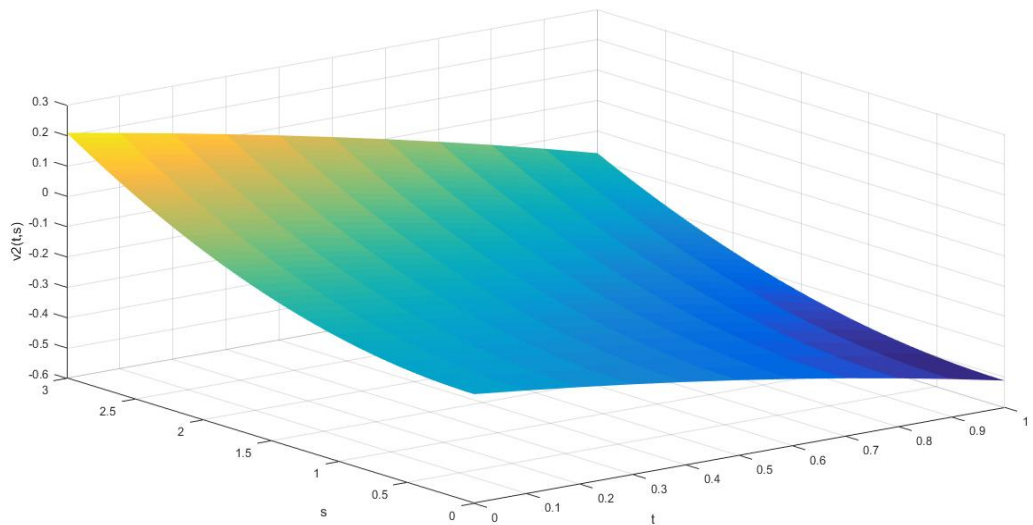
$$\sigma_1 = 0.389915117, \sigma_2 = 0.242410671.$$

برای راحتی در محاسبات، اختیار معاملات بدون هزینه معاملاتی در نظر گرفته شده اند. با استفاده از مقادیر فوق جواب های به دست آمده در فصل سوم بر روی داده های سال های ۱۳۹۷-۱۳۹۸ شاخص مثقال طلا در ایران مورد بررسی قرار گرفته است.

در شکل های ۲.۴ و ۳.۴ تغییرات قیمت اختیار معامله توان در معادله (۱۸.۳) بر روی مقدار کل شاخص مثقال طلا در سال های ۱۳۹۷-۱۳۹۸ مشاهده می شود. در این معادله مقادیر ثابت c_1, c_2, c_3 و c_4 برابر یک و $q_{21} = 0.3\%$, $q_{12} = 0.1\%$ در نظر گرفته شده اند. در شکل های زیر منظور از هر واحد t یک سال است.



شکل ۲.۴: نمایش V_1 از معادله (۱۸.۳)، $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$ ، $q_{21} = 0.3\%$ ، $q_{12} = 0.1\%$



شکل ۳.۴: نمایش V_2 از معادله (۱۸.۳)، $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$ ، $q_{12} = 0/1$ ، $q_{21} = 0/3$

در شکل‌های ۲.۴ و ۳.۴ مشاهده می‌شود که در هر دو رژیم روند افزایش قیمت اختیار با افزایش سررسید و قیمت اولیه دارایی به صورت منظم و منطقی افزایش یافته است. اما در رژیم دوم بخشی از مقادیر حاصل، منفی شده که این مقادیر غیر قابل قبول هستند. سایر مقادیر نیز بسیار کم بوده و قابل استناد نیستند. این اختلاف تا حد زیادی ناشی از بهره بدون ریسک بالا در سال ۱۳۹۸ می‌باشد. هرچند تاثیر خطای مدل نیز قابل چشم‌پوشی نیست. در جدول ۱.۴ و ۲.۴ برخی مقادیر نمونه از نمودارهای فوق مشاهده می‌شوند. در این دو جدول واضح است که مدلی با فرض $\alpha = 1$ در بازار مورد بررسی، کارآمد نبوده و مقادیر حاصل شده، دارای خطا می‌باشند.

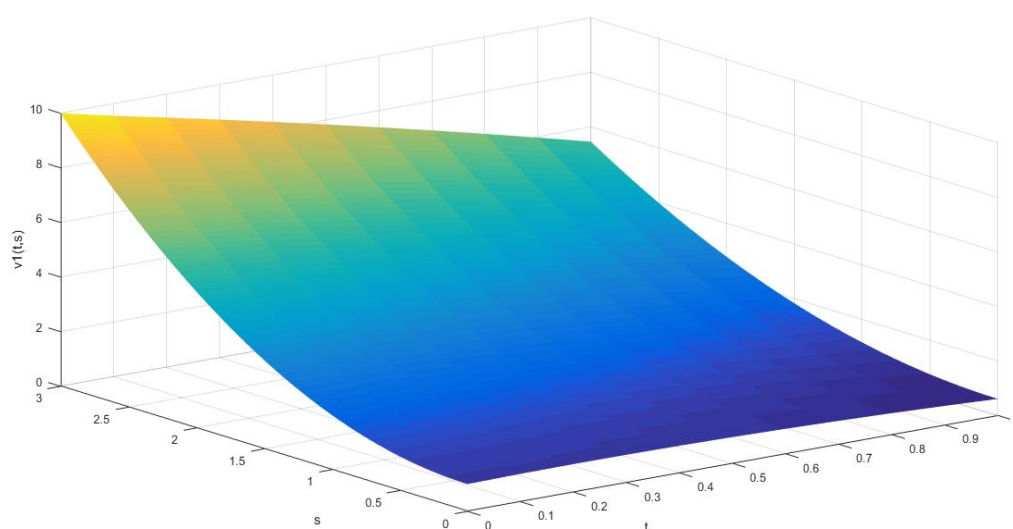
جدول ۱.۴: برخی از مقادیر حاصل از نمودار ۲.۴

دارایی پایه \ سررسید	۰/۱	۰/۳	۰/۵	۰/۷	۱
۰/۵	۰/۲۵۳	۰/۲۵۰	۰/۲۴۸۹	۰/۲۴۸۷	۰/۲۴۹
۱	۰/۳۸۴	۰/۳۸۶	۰/۳۸۸	۰/۳۹۲	۰/۳۹۷
۱/۵	۰/۶۰۳	۰/۶۱۳	۰/۶۲۲	۰/۶۳۲	۰/۶۴۲
۲	۰/۹۰۹	۰/۹۳۱	۰/۹۴۸	۰/۹۶۷	۰/۹۸۸
۲/۵	۱/۳۰۳	۱/۳۴۰	۱/۳۶۸	۱/۳۹۹	۱/۴۳۲
۳	۱/۷۸۵	۱/۸۴۰	۱/۸۸۲	۱/۹۲۶	۱/۹۷۲

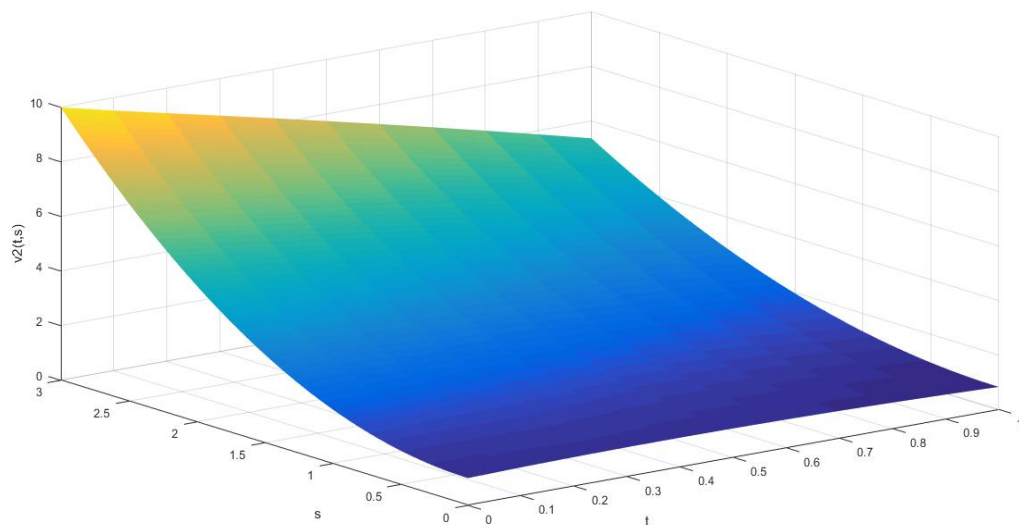
جدول ۲.۴: برخی از مقادیر حاصل از نمودار ۳.۴

دارایی پایه \ سررسید	۰/۱	۰/۳	۰/۵	۰/۷	۱
۰/۵	-۰/۵۰۲	-۰/۳۹۸	-۰/۳۴۱	-۰/۲۹۰	-۰/۲۴۷
۱	-۰/۴۷۴	-۰/۳۶۸	-۰/۳۰۸	-۰/۲۵۶	-۰/۲۱۰
۱/۵	-۰/۴۲۷	-۰/۳۱۷	-۰/۲۵۴	-۰/۱۹۹	-۰/۱۵۰
۲	-۰/۳۶۱	-۰/۲۴۵	-۰/۱۷۸	-۰/۱۱۹	-۰/۰۶۵
۲/۵	۰/۲۷۷	-۰/۱۵۳	۰/۰۸۱	۰/۰۱۱	۰/۰۴۳
۳	-۰/۱۷۴	-۰/۰۴۱	۰/۰۳۷	۰/۱۰۹	۰/۱۷۷

در شکل‌های ۴.۴ و ۵.۴ روند تغییرات قیمتی مقدار کل شاخص مطلق طلا در ایران را در بازه مورد نظر بر روی معادلات (۲۸.۳) بخش قبل مشاهده می‌کنید.



شکل ۴.۴: نمایش V_1 از معادله (۲۸.۳)، $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$ ، $q_{12} = 0/1$ ، $q_{21} = 0/3$



شکل ۵.۴: نمایش V_2 از معادله (۲۸.۳)، $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$ ، $q_{21} = 0/3$

در شکل‌های ۴.۴ و ۵.۴ دیده می‌شود که روند رشد ارزش اختیار، با افزایش سررسید و قیمت اولیه دارایی پایه به طور منظم و منطقی رشد کرده است. همچنین برخلاف مدل قبل، نتایج حاصل، اعداد غیر واقعی نبوده و قابل استناد هستند. در جدول‌های ۳.۴ و ۴.۴ برخی مقادیر نمونه برای این دو شکل محاسبه شده‌اند.

جدول ۳.۴: برخی از مقادیر حاصل از نمودار ۴.۴

سررسید \ دارایی پایه	دارایی پایه				
	۰/۱	۰/۳	۰/۵	۰/۷	۱
۰/۵	۰/۷۴۱	۱/۰۲۵	۱/۱۵۵	۱/۲۳۵	۱/۲۶۱
۱	۱/۱۴۴	۱/۵۳۰	۱/۷۲۸	۱/۸۷۶	۱/۹۷۲
۱/۵	۱/۸۱۶	۲/۳۷۱	۲/۶۸۲	۲/۹۴۴	۳/۱۵۷
۲	۲/۷۵۷	۳/۵۴۹	۴/۰۱۸	۴/۴۴۰	۴/۸۱۷
۲/۵	۳/۹۶۷	۵/۰۶۳	۵/۷۳۶	۶/۳۶۳	۶/۹۵۱
۳	۵/۴۴۶	۶/۹۱۵	۷/۸۳۶	۸/۷۱۴	۹/۵۵۵

جدول ۴.۴: برخی از مقادیر حاصل از نمودار ۵.۴

دارایی پایه سررسید	۰/۱	۰/۳	۰/۵	۰/۷	۱
۰/۵	۰/۹۵۰	۱/۱۶۲	۱/۲۴۸	۱/۲۸۷	۱/۲۷۷
۱	۱/۳۲۸	۱/۶۴۶	۱/۸۰۴	۱/۹۱۷	۱/۹۸۵
۱/۵	۱/۹۵۶	۲/۴۵۲	۲/۷۳۱	۲/۹۶۸	۳/۱۶۳
۲	۲/۸۳۶	۳/۵۸۲	۴/۰۳۰	۴/۴۳۹	۴/۸۱۳
۲/۵	۳/۹۶۸	۵/۰۳۴	۵/۶۹۹	۶/۳۳۰	۶/۹۳۵
۳	۵/۳۵۰	۶/۸۰۸	۷/۷۳۹	۸/۶۴۱	۹/۵۲۸

در جداول فوق دیده می‌شود که ارزش اختیار، با وجود اینکه بهره بدون ریسک سال ۱۳۹۸ بالاتر بوده و نوسانات هر دو رژیم زیاد است، در هر دو رژیم تقریباً یکسان و نزدیک به هم است. همچنین با توجه به اینکه مقدار توان هرست، $\alpha = ۰/۹۲۸۸۹۳۶۳۶$ برآورد شده است می‌توان گفت، چون توان هرست بین ۰/۵ و ۱ قرار دارد لذا سری زمانی پایدار با حافظه بلند مدت است. در واقع می‌توان گفت، مدل معرفی شده توانسته است نوسانات بازار پرتلاطمی مانند بازار طلا را کنترل کند.

مراجع

- [۱] دلاوری، م. و روشنی بروجنی، ن. (۱۳۹۱)، ”بررسی عوامل موثر بر تغییرپذیری قیمت‌های آتی سکه طلا”، فصلنامه علوم اقتصادی، سال ششم، شماره ۱۹، ۲۹-۵۸.
- [۲] چمنی انباجی، ر. (۱۳۹۰)، پایان نامه کارشناسی ارشد، ”روش های عددی نوین در قیمت گذاری اختیار معامله آمریکایی تحت دینامیک رژیم سوئیچینگ”، دانشکده اقتصاد، دانشگاه علامه طباطبائی.
- [۳] حصارکی، م. فتوحی، م. (۲۰۰۶) ”معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی”، موسسه انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، ۲۵ (۳۶)، ۱-۱۶.
- [۴] هال، جان. ۱۹۴۶-م. (۱۳۸۴)، ”مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک”، مترجمان: سجاد سیاح و علی صالح آبادی، تهران، گروه رایانه تدبیر پرداز، ۱.
- [۵] صاحبی فرد، ح. (۱۳۹۸)، پایان نامه کارشناسی ارشد، ”مقایسه قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت چند مدل تلاطم تصادفی در بازار بورس تهران”، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، ۱-۱۷.
- [۶] ظهوری زنگنه، ب. و جهانی پور، ا. (۲۰۰۴)، ”حرکت براونی یا فرآیند وینر: ریاضی مدل ساز پدیده‌های طبیعی”، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۱-۲۰.
- [۷] نمازی، ش. (۱۳۹۶)، پایان نامه کارشناسی ارشد، ”مینیمم سازی موضعی ریسک قیمت گذاری اختیار معامله در بازارهای ناکامل مارکوفی”، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، ۳۲-۳۵.

[8] Bjork T. (2009), ”Arbitrage theory in continuous time”, Oxford University Press.

[9] Black F. and Myron S. (1973), ”The pricing of options and corporate liabilities”, Journal Political Economics, 81, 3, 637-654.

[10] Boyle, P. P., and Draviam, T. (2007), ”Pricing exotic options under regime switching”, Insurance Mathematics and Economics, 40, 267-282.

- [11] Buffington, J., and Elliott, R. J. (2002), " Regime switching and European options", In Stochastic Theory and Control, Springer, Berlin, Heidelberg, 73-82.
- [12] Chan, L., and Zhu, S. P. (2014), " An exact and explicit formula for pricing Asian options with regime switching", Quantitative Finance, arXiv preprint arXiv:1407.5091.
- [13] Dastranj, E., Fard, H. S., Abdolbaghi, A., and Hejazi, S. R. (2020), " Power option pricing under the unstable conditions (Evidence of power option pricing under fractional Heston model in the Iran gold market)", Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 537, 122690.
- [14] Elliott, R. J., and Van der Hoek, J. (1997), " An application of hidden Markov models to asset allocation problems", Finance and Stochastics, 1(3), 229-238.
- [15] Elliott, R. J., Aggoun, L., and Moore, J. B. (2008), "Hidden Markov models: estimation and control", Springer Science and Business Media, 29.
- [16] Elliott, R. J., Chan, L., and Siu, T. K. (2005), "Option pricing and Esscher transform under regime switching", Annals of Finance, 1(4), 423-432.
- [17] Elliott, R. J., Hunter, W. C., and Jamieson, B. M. (2001), "Financial signal processing: a self calibrating model", International Journal of Theoretical and Applied Finance, 4(04), 567-584.
- [18] Elliott, R. J., Malcolm, W. P., and Tsoi, A. H. (2003), " Robust parameter estimation for asset price models with Markov modulated volatilities", Journal of Economic Dynamics and Control, 27(8), 1391-1409.
- [19] Grigoriu, M. (2013), "Stochastic calculus: applications in science and engineering", Springer Science and Business Media.
- [20] Guo, X. (2001), "Information and option pricings", Quantitative Finance, 1(1), 38–44.
- [21] Hamilton, J.D. (1994), " Time Series Analysis", Princeton University Press.
- [22] Heynen, R. C., and Kat, H. M. (1996), "Pricing and hedging power options", Financial Engineering and the Japanese Markets, 3(3), 253-261.
- [23] Kazem, S. (2013), "Exact solution of some linear fractional differential equations by Laplace transform", International Journal of Nonlinear Science, 16(1), 3-11.

- [24] Kim, C. J., and Nelson, C. R. (1999), "State-space models with regime switching: classical and Gibbs-sampling approaches with applications", MIT Press Books, 1.
- [25] Klebaner, F. C. (2005), "Introduction to stochastic calculus with applications", World Scientific Publishing Company, (2).
- [26] Mandelbrot, B. B., and Hudson, R. L. (2005), "The (mis) behavior of markets: a fractal view of risk, ruin, and reward", Basic Books.
- [27] Mamon, R. S. (2005), "A streamlined derivation of the Black-Scholes option pricing formula", Journal of Interdisciplinary Mathematics, 8(3), 327-334.
- [28] Musiela, M. and Rutowski, M. (2009), "Martingale methods in financial modelling", Stochastic Modelling and Applied Probability: Springer Science and Business Media, 36.
- [29] Oksendal, B. (2003), "Stochastic differential equations: an introduction with applications", Springer Science and Business Media, 65-84.
- [30] Podlubny, I. (1998), "Fractional differential equations. an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications", Mathematics in Science and Engineering, 198.
- [31] Raymond, J. E and Rich, R. W. (1997), "Oil and the macroeconomy: A Markov state-switching approach", Journal of Money, Credit and Banking, 29, 2, 193-213.
- [32] Saberi, E., Hejazi, S. R., and Dastranj, E. (2018), "A new method for option pricing via time-fractional PDE", Asian-European Journal of Mathematics, 11(05), 1850074.
- [33] Shreve, S. E. (2004), "Stochastic calculus for finance: Continuous-time models", Springer Science and Business Media, 11.
- [34] Yang, J., and Xiao, Q. (2010), "Risk-minimizing hedging strategies with restricted information and cost", Applied Stochastic Models in Business and Industry, 26(4), 401-415.
- [35] Yao, D. D., Zhang, Q., and Zhou, X. Y. (2006), "A regime-switching model for European options. In Stochastic processes, optimization, and control theory: applications in financial engineering, queueing networks, and manufacturing systems", Springer, Boston, MA, 94, 281-300.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

measure	اندازه
probability measure	اندازه احتمال
measurable	اندازه پذیر
random measure	اندازه تصادفی
probability space	فضای احتمال
Dirac measure	اندازه دیراک
Radon measure	اندازه رادون
signed measure	اندازه علامت دار
martingale measure	اندازه مارتینگل
Borel	بورل
jump	پرش
almost surely	تقریباً مطمئن
finite variation	تغییرمتناهی
Brownian motion	حرکت براونی
random time	زمان تصادفی
stopping time	زمان توقف
adapted	سازگار
measure space	فضای اندازه
measurable space	فضای اندازه پذیر
American option	اختیار معامله آمریکایی
arbitrageurs	آربیتراژگران
attainable	دست یافتنی
call option	اختیار خرید
put option	اختیار فروش
continuous-time markov chain	زنجیر مارکوف زمان پیوسته
maturity time	تاریخ اعمال

exercise price	قیمت اعمال
hedging	پوشش ریسک
interest rate	نرخ بهره
look back option	اختیار متکی به گذشته
option	اختیار معامله
partial differential equation	معادله دیفرانسیل جزئی
portfolio	پرتفوی
power option	اختیار توان
regime switching	رژیم سوئیچینگ
risk	ریسک
state space	فضای حالت
volatility	تلاطم
filter	فیلتر
martingale	مارتینگل
random variable	متغیر تصادفی
finite	متناهی
absolutely continuous	مطلقاً پیوسته
equivalent	معادل
field	میدان
semi martingale	نیم مارتینگل
stock	سهام
risky asset	دارایی ریسکی
contingent claim	ادعای مشروط
underlying asset	دارایی پایه
invariant subspace	زیر فضای ناورد
linear differential equation	معادله دیفرانسیل خطی
nonlinear differential equation	معادله دیفرانسیل غیر خطی

Abstract

In this thesis, power options pricing are driven via time-fractional PDE when the dynamic of underlying asset price follows a regime switching model. Then power option pricing under these models has been driven on Iranian gold market. So in this study, gold weight index information for tow years has been restored and divided for two periods of one years. Finally, it has been shown that the considered model can control the market volatilities.

keywords:Invariant subspace, Regime switching, Option pricing, Eeuropen option, Time Fractional Partial differential equation.



Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Financial Mathematics

A new method for option pricing via time fractional PDE

By: Zeynab Yasini

Supervisors

Dr. Elham Dastranj

Dr. Mohammad Mirbagheri jam

Advisor

Dr. Reza Hejazi

October 2020