





دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری گراف و ترکیبیات

تعیین کران‌هایی برای اعداد تحمیلی و احاطه‌گری در گراف‌ها

نگارنده: الهه رضایی ثانی

استاد راهنما

دکتر میثم علیشاهی

استاد مشاور

دکتر الهه شریفی

شهریور ۱۳۹۹



مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم شماره ۱۱: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود خانم الهه رضایی ثانی دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی (گراف و ترکیبیات) به شماره دانشجویی ۹۳۰۰۶۱۵ ورودی ۹۳-۹۴ در تاریخ ۹۹/۶/۳۰ از رساله نظری / عملی خود با عنوان : تعیین کران‌هایی برای اعداد تحمیلی و احاطه‌گری در گراف‌ها دفاع و با اخذ نمره ۱۹/۲۰ به درجه عالی نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ ☒ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷ ☐
ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵ ☐ د) مردود: کمتر از ۱۵ ☐

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱-	دکتر میثم علیشاهی	استاد راهنما	دانشیار	
۲-	دکتر الهه شریفی	استاد مشاور	استادیار	
۳-	دکتر ابراهیم هاشمی	داور داخلی	استاد	
۴-	دکتر عبدالله آل هوز	داور داخلی	دانشیار	
۵-	دکتر نادر جعفری راد	داور خارجی	استاد	
۶-	دکتر سید حیدر جعفری	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم الهه رضایی ثانی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده



تقدیم به مهربان فرشتگانی که:
لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن،
جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام
تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون
حضور سبز آنهاست.

تقدیم به همسر عزیزم که سایه مهربانیش
سایه سار زندگیم می باشد، او که اسوه
صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را
برایم تسهیل نمود.

به نام آفریدگار پاک که انسان را از خاک آفرید و به واسطه عقل بر تمام موجودات رجحان داد و آنگاه دانش را وسیله تکامل عقل قرار داد. بزرگ پروردگار را سپاس که به ما استعداد آموختن عطا کردی.

تشکر قلبی و لسانی خود را از استاد عالی قدر جناب آقای دکتر میثم علیشاهی که زحمت راهنمایی این رساله را عهده دار گردیدند و در تمامی مراحل انجام رساله از راهنمایی های مدبرانه ایشان استفاده نمودم ابراز می دارم و توفیقات روز افزون ایشان را توأم با صحت و سعادت خواستارم.

با سپاس از پدر و مادر عزیزم که الفبای انسانیت و چگونه زیستن را به من آموختند و همچنین از همسر خوبم که در مسیر ناهموار زندگی واژه صبر را برایم به تصویر کشید و برق امید چشمانش چراغ دلم را روشن کرد.

در پایان از سایر دوستانی که هر کدام به نحوی در تهیه این مجموعه با این جانب همکاری داشته اند تشکر نموده و موفقیت همه آنها را از خداوند متعال خواهانم.

تعهد نامه

اینجانب الهه رضایی ثانی دانشجوی دکترای رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان تعیین کران هایی برای اعداد تحمیلی و احاطه گری در گراف ها، تحت راهنمایی میثم علیشاهی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

الهه رضایی ثانی

شهریور ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

عدد تحمیلی یک کران بالا برای ماکزیمم پوچی یک گراف می‌باشد. محاسبه عدد تحمیلی، عدد تحمیلی کلی و عدد تحمیلی همبند در کلاس مسائل NP - سخت قرار دارند. گراف‌هایی که عدد تحمیلی برابر ۱ یا ۲ دارند به ترتیب گراف‌های مسیر و ۲- مسیر موازی هستند. در این رساله ما ابتدا گراف‌های k - مسیر موازی را تعریف می‌کنیم و یک کران بالا برای عدد تحمیلی گراف‌های ۳- مسیر موازی و کران بالایی برای عدد تحمیلی کلی گراف‌های k - مسیر موازی ارائه می‌دهیم. سپس به رده‌بندی گراف‌هایی می‌پردازیم که ماکزیمم درجه حداکثر ۳ و عدد تحمیلی برابر با ۳ دارند. در ادامه، گراف‌ها با ویژگی ماکزیمم درجه حداکثر ۳ که عدد تحمیلی و ماکزیمم پوچی آن‌ها حداکثر ۳ است را دسته‌بندی می‌کنیم. همچنین ما گراف‌هایی که عدد تحمیلی کلی برابر با ۲ دارند را نیز رده‌بندی می‌کنیم و به عنوان یک نتیجه رده‌بندی گراف‌هایی که عدد تحمیلی همبند برابر با ۲ دارند را ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی: عدد تحمیلی، عدد تحمیلی کلی، عدد تحمیلی همبند، ماکزیمم پوچی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Alishahi M., Rezaei-Sani E. (2020), "Graphs with total forcing number two, revisited" **Journal of Algebraic Systems**, Accepted
2. Alishahi M., Rezaei-Sani E., and Sharifi E. (2020), "Maximum nullity and zero forcing number on graphs with maximum degree at most three" **Discrete Applied Mathematics**, 284, pp 179-194

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ش	پیشگفتار
۱	۱ مقدمه
۱	۱.۱ تعاریف مقدماتی
۳	۲.۱ فرایند تحمیلی صفر و تعاریف مرتبط با آن
۳	۳.۱ انگیزه اولیه برای تعریف مجموعه‌های تحمیلی و مطالعات انجام شده روی آن
۷	۴.۱ مجموعه احاطه‌گر قوی و ارتباط آن با مجموعه تحمیلی
۱۱	۲ نتایج اولیه
۱۱	۱.۲ گراف‌های k -مسیر موازی
۱۴	۲.۲ زنجیرهای تحمیلی
۱۷	۳ رده‌بندی گراف‌های با عدد تحمیلی کلی ۲
۱۷	۱.۳ نتایج مقدماتی
۲۰	۲.۳ گراف‌ها با عدد تحمیلی کلی ۲ و گراف‌ها با عدد تحمیلی همبند ۲
۲۳	۴ ماکزیمم پوچی و عدد تحمیلی در گراف‌های با ویژگی ماکزیمم درجه حداکثر ۳
۲۳	۱.۴ نتایج مقدماتی
۳۹	۲.۴ یک شرط کافی برای ۳-مسیر موازی بودن
۴۳	۳.۴ ماکزیمم پوچی و عدد تحمیلی در گراف‌ها با ویژگی ماکزیمم درجه حداکثر ۳
۴۷	مراجع
۵۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۵۳	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

نمایه ۵۵

علائم اختصاری ۵۹

فهرست تصاویر

۱۲	۱.۲	نمایشی از یک گراف ۲-مسیر موازی با مسیرهای موازی R_1 و R_2 که در آن دو یال ad و cb یکدیگر را قطع می‌کنند.
۱۲	۲.۲	نمایش استاندارد از گراف ۴-مسیر موازی K_5 با مسیرهای موازی $v_5 : v_3 v_4, P^4 : v_5, P^3 : v_3 v_4, P^2 : v_3, P^1 : v_1$
۱۸	۱.۳	دو مسیر $P_1 : x_5, x_6, x_7$ و $P_2 : x_7, x_1, x_2, x_3$ قطعه هستند ولی دو مسیر x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 و $P' : x_3, x_4, x_5$ قطعه نیستند. مجموعه $\{x_1, x_2\}$ یک مجموعه تحمیلی کلی برای این گراف است.
۲۴	۱.۴	نمایشی از S با فرض این که راس x از زنجیر R_1 نسبت به S بد است.
۲۵	۲.۴	نمایشی از S با فرض این که $y \neq a$ یا $y = a$ باشد.
۲۷	۳.۴	نمایشی از S با فرض این که راس z همسایه‌ای در مسیر $y R_2 a$ ندارد.
۲۸	۴.۴	نمایشی از S با فرض این که زنجیر R_3 بدیهی یا غیر بدیهی است.
۲۸	۵.۴	نمایشی از S با فرض این که $c \neq a$ یا $c = a$ باشد.
۳۰	۶.۴	نمایشی از S با فرض این که راس y حداکثر یک همسایه در مسیر $R_3 c$ دارد.
۳۰	۷.۴	نمایشی از S با فرض این که $y \neq a$ است.
۳۳	۸.۴	نمایشی از مجموعه زنجیر S در لم ۲.۱.۴.
۳۴	۹.۴	نمایشی از S با فرض این که راس x از زنجیر R_1 یک راس نامطلوب نسبت به S است.
۳۶	۱۰.۴	نمایشی از S با فرض این که $y = a$ یا $y \neq a$ باشد.
۳۷	۱۱.۴	نمایشی از S با فرض این که $z = d$ یا $z \neq d$ باشد.
۳۸	۱۲.۴	نمایشی از S با فرض این که راس $c = x'$ یک همسایه d' یا a' داشته باشد به طوری که $d' = \text{next}_{R_3}(d)$ و $a' = \text{next}_{R_2}(x')$ باشد.
۴۰	۱۳.۴	نمایشی از مسیرهای P^1 و P^2 با فرض این که راس u از مسیر P^1 ، دو همسایه v_1, v_2 روی مسیر P^2 داشته باشد.
۴۰	۱۴.۴	نمایشی از مسیرهای P^1 و P^2 نشان داده شده در شکل ۱۳.۴.
۴۲	۱۵.۴	شکل سمت راست از تقسیم هر یال ضخیم و راس پررنگ در شکل سمت چپ به دو یال و دو راس حاصل شده به طوری که تقاطعی بین قاطع‌ها به وجود نیاید.
۴۳	۱۶.۴	نمایشی از R_1, R_2 و زنجیر بدیهی $(z)z = R_3$ واقع در بالای R_1 ، به طوری که یال بین z و همسایه‌اش روی R_2 (اگر وجود داشته باشد) یک قاطع عمودی باشد.

۱۷.۴	نمایشی از زنجیره‌های R_1, R_2 و R_3 در شکل ۱۶.۴ به‌طوری‌که یال‌های بین آن‌ها به‌صورت قاطع‌اند
۴۳	ویکدیگر را قطع نمی‌کنند.
۴۴	خانواده گراف‌های با ویژگی $F(G) = M(G) + 1 = 3$

پیشگفتار

رنگ آمیزی گراف یکی از مفاهیم کاربردی در نظریه گراف است. در طی قرن ۲۰ام تقریباً تمام رنگ آمیزی‌های گراف ایستا بود، یعنی یک رنگ آمیزی گراف در طی زمان تغییر نمی‌کند. با این وجود در سال‌های اخیر تغییرات جدیدی در رنگ آمیزی گراف پدیدار شد که اجازه می‌دهد یک رنگ آمیزی از یک گراف در بازه‌های مشخصی در طول اجرایش تعدیل شود. به عبارتی یک گراف ممکن است رنگ آمیزی‌های متفاوت بسیاری مبنی بر یک رنگ آمیزی اولیه واحد داشته باشد.

یکی از مشهورترین فرایندهای رنگ آمیزی پویا، فرایند تحمیلی و پارامتر گرافی وابسته‌اش، عدد تحمیلی می‌باشد. در ابتدا ایده و انگیزه تعریف این پارامتر، پیدا کردن کران بالا برای ماکزیمم پوچی و یا به عبارتی پیدا کردن کران پایین برای مینیمم مرتبه یک گراف بود که در ادامه به تعریف آن‌ها می‌پردازیم.

فرض کنید در یک گراف n راسی G ، مجموعه $S_n(G)$ شامل تمام ماتریس‌های متقارن $n \times n$ با این ویژگی باشد که: $a_{i,j} \neq 0$ اگر و تنها اگر ij یک یال در G باشد (توجه شود که درایه‌های قطری این ماتریس‌ها محدودیتی ندارند). حال مینیمم مرتبه گراف G را که با $mr(G)$ نشان می‌دهیم برابر با مینیمم مرتبه ماتریس‌های متقارن در $S_n(G)$ تعریف می‌کنیم و به‌طور مشابه ماکزیمم پوچی گراف G را که با $M(G)$ نشان می‌دهیم برابر با ماکزیمم پوچی ماتریس‌های متقارن در $S_n(G)$ قرار می‌دهیم. به‌وضوح برای هر گراف G داریم $mr(G) + M(G) = n$ و $M(G) \geq 1$.

از آنجایی که محاسبه ماکزیمم پوچی و یا به عبارتی مینیمم مرتبه یک گراف یک مساله باز است و نیاز به ارزیابی تعداد نامتناهی از ماتریس‌ها دارد، تعیین کران‌هایی برای این پارامترها برای محققان دارای اهمیت است. اولین بار در سال ۲۰۰۶ در کارگاه برگزار شده توسط بنیاد ریاضی آمریکا، گروهی از محققان جبر خطی در [۲۵] به معرفی فرایند تحمیلی و عدد تحمیلی که موضوع اصلی این رساله است پرداختند و با استفاده از آن کران بالایی برای ماکزیمم پوچی یک گراف ارائه نمودند. بعد از آن عدد تحمیلی دوباره در سال ۲۰۰۷ در [۱۲] ظاهر شد و از آن به بعد مورد توجه و مطالعه بسیاری از محققان در علوم مختلف قرار گرفت و نتایج بسیاری در مورد آن حاصل شد. داویلا در [۱۷] به معرفی و مطالعه عدد تحمیلی کلی پرداخت و پس از کسب نتایج با ارزشی درباره آن، به همراه بریمکو در [۸] عدد تحمیلی همبند را تعریف نمود.

که با کمک آن پارامترهای گراف‌ی زیادی کران‌دار می‌شوند.

در فصل اول این رساله، ابتدا به بیان تعاریف مقدماتی مورد نیاز می‌پردازیم و سپس فرایند تحمیلی و مفاهیم مرتبط با آن را معرفی می‌کنیم و در ادامه انگیزه اولیه برای تعریف این مفاهیم و برخی از نتایج بدست آمده برای آن‌ها را ارائه می‌کنیم که مورد نیاز برای فصول بعد است. در انتهای فصل به تعریف مجموعه احاطه‌گر و مجموعه احاطه‌گر قوی می‌پردازیم و بعد از آن رابطه بین مجموعه احاطه‌گر قوی و مجموعه تحمیلی را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم، گراف‌های k -مسیر موازی را تعریف نموده و در ادامه ابتدا به بیان نتایج حاصل از مطالعه بر روی این خانواده از گراف‌ها و سپس نتایج حاصل از مطالعه بر روی مجموعه زنجیرهای تحمیلی می‌پردازیم. نتایج ارائه شده در این فصل در [۲] به چاپ رسیده است.

در فصل سوم، گراف‌ها با عدد تحمیلی کلی ۲ را رده‌بندی کرده و در ادامه به‌عنوان یک نتیجه رده‌بندی گراف‌ها با عدد تحمیلی همبند ۲ را ارائه می‌کنیم. نتایج ارائه شده در این فصل در [۱] به چاپ رسیده است.

در فصل چهارم، تمام گراف‌ها با ماکزیمم درجه حداکثر ۳ که عدد تحمیلی آن‌ها ۳ است را رده‌بندی می‌کنیم و در ادامه با استفاده از این نتیجه، به دسته‌بندی گراف‌ها با ویژگی ماکزیمم درجه حداکثر ۳ که عدد تحمیلی و ماکزیمم پوچی آن‌ها حداکثر ۳ است می‌پردازیم. نتایج ارائه شده در این فصل در [۲] به چاپ رسیده است.

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ تعاریف مقدماتی

در این رساله تمام گراف‌های ارائه شده متناهی، غیر جهت‌دار و ساده می‌باشند و در ادامه برای هر عدد طبیعی k ، از نماد استاندارد $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$ استفاده خواهیم کرد.

یک گراف $G = (V, E)$ شامل یک مجموعه متناهی $V(G)$ از رئوس و مجموعه متناهی $E(G)$ از یال‌ها می‌باشد. اندازه مجموعه $V(G)$ ، مرتبه^۱ گراف G می‌باشد که با $n := |V(G)|$ نمایش می‌دهیم و اندازه مجموعه $E(G)$ ، اندازه^۲ گراف G می‌باشد که با $m := |E(G)|$ نشان خواهیم داد. دو راس $v, w \in V(G)$ در گراف G ، همسایه^۳ یا مجاور^۴ هستند اگر $vw \in E(G)$ باشد. همسایگی باز^۵ راس $v \in V(G)$ به صورت $N(v) := \{w : vw \in E(G)\}$ و همسایگی بسته^۶ راس $v \in V(G)$ به صورت $N[v] := N(v) \cup \{v\}$ تعریف می‌شود. درجه^۷ راس $v \in V(G)$ که با $deg_G(v)$ نشان می‌دهیم برابر با $|N(v)| := deg_G(v)$ می‌باشد. مینیمم درجه^۸ و ماکزیمم درجه^۹ رئوس گراف نیز به ترتیب با δ و Δ نشان می‌دهیم. راسی از یک گراف که درجه آن صفر باشد

^۱order

^۲size

^۳neighbor

^۴adjacent

^۵open neighborhood

^۶closed neighborhood

^۷degree

^۸minimum degree

^۹maximum degree

راس تنها^۱ می‌نامیم. برای $S \subseteq V(G)$ ، **زیرگراف القایی^۲** روی S گرافی است که توسط S تولید می‌شود و با $G[S]$ نمایش می‌دهیم. همچنین گراف $G - S$ بیان‌گر زیرگراف به‌دست آمده از حذف رئوس S از G می‌باشد؛ یا به عبارتی زیرگراف القایی روی $V \setminus S$ می‌باشد. برای هر یال $uv \in E(G)$ ، گراف $G - uv$ نیز بیانگر زیرگرافی از G می‌باشد که تنها با حذف یال uv از آن حاصل شده است.

یک **مسیر^۳** n راسی که با P_n نمایش می‌دهیم مجموعه متناهی از رئوس $v_1, \dots, v_n$ می‌باشد به‌طوری‌که داشته باشیم $v_i \neq v_j$ برای تمام $i \neq j$ و یال‌های $v_i v_{i+1}$ برای تمام $i = 1, \dots, n-1$ ، وجود داشته باشد. همچنین برای هر مسیر $P = v_0 \dots v_m$ در G که $Pv_i = v_0 \dots v_i$ ، $i \in [m]$ و $v_i P = v_i \dots v_m$ می‌باشند.

یک **دور^۴** n راسی که با C_n نمایش می‌دهیم، یک مسیر $v_1, \dots, v_n$ به همراه یال اضافی $v_1 v_n$ که $n \geq 3$ ، می‌باشد. برای یک دور $C = v_1, \dots, v_n = v_1$ در G ، یک **وتر^۵** از C یک یال از G می‌باشد که یالی از C نیست ولی دو راس آن را به هم مجاور می‌سازد.

گراف کامل^۶ n راسی که با K_n نمایش می‌دهیم گرافی است که هر جفت راس از آن با هم مجاورند در حالی که **گراف تهی^۷** گرافی فاقد یال می‌باشد.

گراف همیلتونی^۸، گرافی همبند می‌باشد که دارای مسیری است که از هر راس آن گراف تنها یک بار می‌گذرد. به گرافی که در یک صفحه به گونه‌ای قابل رسم است که یال‌هایش یکدیگر را تنها در راس‌ها قطع کنند، **گراف مسطح^۹** گفته می‌شود و به چنین نمایشی از گراف، گراف محاط شده در صفحه گویند. یک **گراف مسطح بیرونی^{۱۰}** گراف مسطحی است که می‌توان راس‌های آن را روی یک دایره قرار داد به نحوی که یال‌های آن داخل دایره باشند و یکدیگر را قطع نکنند. بدیهی است که هر گراف مسطح بیرونی مسطح است اما عکس این مطلب درست نیست.

فرض می‌کنیم $S_n(\mathbb{R})$ مجموعه تمام ماتریس‌های n در n متقارن روی اعداد حقیقی باشد. برای $A = (a_{ij}) \in S_n(\mathbb{R})$ ، گراف متناظر با A که با $\mathcal{G}(A)$ نمایش می‌دهیم یک گراف با مجموعه رئوس $\{v_1, \dots, v_n\}$ و مجموعه یال $\{v_i v_j : a_{ij} \neq 0, 1 \leq i < j \leq n\}$ می‌باشد (توجه شود که قطر A نقشی در تعریف $\mathcal{G}(A)$ ندارد). همچنین مجموعه ماتریس‌های متقارن گراف G به صورت $S(G) = \{A \in S_n(\mathbb{R}) : \mathcal{G}(A) = G\}$ تعریف می‌شود. **مینیمم مرتبه^{۱۱}** گراف G که با $mr(G)$ نشان می‌دهیم مینیمم مرتبه ماتریس‌های متقارن در $S(G)$ می‌باشد و به‌طور مشابه

¹isolated vertex²induced subgraph³path⁴cycle⁵chord⁶complete graph⁷empty graph⁸Hamiltonian graph⁹planar graph¹⁰outerplanar graphs¹¹minimum rank

ماکزیمم پوچی^۱ گراف G که با $M(G)$ نشان می‌دهیم ماکزیمم پوچی ماتریس‌های متقارن در $S(G)$ است. به‌وضوح برای هر گراف G داریم $mr(G) + M(G) = n$ و $M(G) \geq 1$.

۲.۱ فرایند تحمیلی صفر و تعاریف مرتبط با آن

در یک گراف G ، **فرایند تحمیلی صفر**^۲ بدین‌صورت تعریف می‌کنیم: فرض کنیم $F \subseteq V(G)$ ، یک مجموعه رئوس آغازی باشد. در گام صفر، هر راس در F رنگی است و بقیه رئوس گراف غیر رنگی هستند. در گام i که $i \geq 1$ ، هر راس رنگی v که دقیقاً یک همسایه غیررنگی داشته باشد، آن را رنگی می‌کند و یا به‌عبارتی آن را تحمیل می‌کند.

قرار می‌دهیم $V_0 = F$. برای هر $i \geq 1$ ، مجموعه رئوسی از گراف که در گام i ام رنگی می‌شوند را با علامت V_i نشان می‌دهیم. این فرایند تا زمانی ادامه می‌یابد که امکان ایجاد تغییر جدیدی نباشد. در پایان فرایند، به مجموعه رئوس رنگی **مجموعه مشتق شده**^۳ می‌گوییم.

یک **مجموعه تحمیلی صفر**^۴ برای G ، یک مجموعه آغازی رنگی $F \subseteq V(G)$ می‌باشد که مجموعه مشتق شده متناظر با آن برابر با $V(G)$ باشد به‌عبارتی $V(G) = \bigcup V_i$. برای هر راس $v \in V(G)$ ، گامی که v در آن رنگی می‌شود را با $k_F(v)$ نمایش می‌دهیم. توجه داشته باشید که $k_F(v) = i$ هرگاه $v \in V_i$ و اگر $v \in V_i$ آنگاه $k_F(v) = i$.

تعداد اعضای یکی از کوچک‌ترین مجموعه‌های تحمیلی صفر گراف G را **عدد تحمیلی صفر**^۵ می‌گوییم و با $F(G)$ نمایش می‌دهیم. همچنین به هر مجموعه تحمیلی صفر از اندازه $F(G)$ یک $F(G)$ - **مجموعه**^۶ می‌گوییم.

واضح است که $F(G) = |V(G)|$ اگر و تنها اگر G یک گراف تهی باشد یا به‌عبارتی یک گراف فاقد یال باشد. در این رساله از کلمه ”تحمیلی“ به جای ”تحمیلی صفر“ به جهت اختصار استفاده می‌کنیم.

۳.۱ انگیزه اولیه برای تعریف مجموعه‌های تحمیلی و مطالعات انجام شده روی آن

مجموعه‌های تحمیلی توجه و علاقه بسیاری از محققان علوم مختلف را به خود جلب کرده و موضوع مقالات بسیاری در حوزه‌های مختلف را به خود اختصاص داده‌اند. در اینجا به بیان

¹maximum nullity

²zero forcing process

³drived set

⁴zero forcing set

⁵zero forcing number

⁶ $F(G)$ -set

داستان چگونگی پیدایش مجموعه‌های تحمیلی و وارد شدن آن از علم جبرخطی به علم گراف می‌پردازیم.

در اکتبر سال ۲۰۰۶، بنیاد ریاضی آمریکا کارگاهی برگزار نمود که در این کارگاه برای اولین بار رسماً تعریف فرایند تحمیلی و عدد تحمیلی متناظر با آن در [۲۵] آورده شد. انگیزه اصلی معرفی فرایند تحمیلی و عدد تحمیلی متناظر با آن، تعیین یک کران بالا برای ماکزیمم پوچی یا به عبارت دیگر تعیین یک کران پایین برای مینیمم مرتبه یک گراف بود که در گزاره زیر آورده شده است.

گزاره ۱.۳.۱. [۲۵] اگر $G = (V, E)$ یک گراف و $S \subseteq V$ یک مجموعه تحمیلی باشد آنگاه $M(G) \leq |S|$. به‌ویژه $M(G) \leq F(G) = n - mr(G)$.

محاسبه $M(G)$ نیاز به ارزیابی تعدادی نامتناهی از ماتریس‌ها دارد در حالی که محاسبه عدد تحمیلی نیازمند ارزیابی مجموعه متناهی از ماتریس‌ها است. بنابراین محققان علاقه‌مند به موضوع ماکزیمم پوچی، گزاره بالا را بسیار مفید دانستند. در مقاله مذکور خانواده‌هایی از گراف‌ها که حالت تساوی گزاره ۱.۳.۱ را برقرار می‌سازند و یا به عبارتی تعدادی از خانواده گراف‌هایی که عدد تحمیلی و ماکزیمم پوچی برابر دارند نیز ارائه شد، که در قضیه زیر به بیان آن می‌پردازیم.

قضیه ۱.۳.۱. [۲۵] اگر G عضو هریک از خانواده گراف‌های زیر باشد آنگاه $F(G) = M(G)$.

۱. گراف‌هایی که مرتبه آن‌ها حداکثر ۶ است.

۲. خانواده گراف‌های K_n, P_n و C_n .

۳. گراف‌های همیلتنی.

۴. هر ابرمکعب روی n راس.

رده‌بندی کردن تمام گراف‌هایی که در حالت تساوی گزاره ۱.۳.۱ برقرارند مشکل است و این مهم در مقاله مذکور به عنوان مساله باز ارائه شد که در زیر به بیان آن می‌پردازیم.

مساله ۱.۳.۱. [۲۵] خانواده گراف‌هایی که در تساوی $F(G) = M(G)$ صدق می‌کنند را تعیین کنید.

در آگوست ۲۰۰۷، عدد تحمیلی در [۱۲] دوباره ظاهر شد. با وجود این که این مقاله در مورد کران‌دار کردن مینیمم مرتبه یک گراف بود، گزاره زیر نیز در این مقاله ارائه و اثبات شد.

گزاره ۲.۳.۱. [۱۲] اگر G یک گراف با مینیمم درجه δ باشد آنگاه $\delta \leq F(G)$.

بعد از انتشار مقالات [۲۵] و [۱۲]، فرایند تحمیلی مورد توجه و علاقه بسیاری از محققان قرار گرفت. فرایند تحمیلی از الهام‌گیری مسایل ماکزیمم پوچی بوجود آمد ولی در شاخه‌های متنوع از علوم مانند نظریه گراف [۵] و نظریه کد [۲۰] در ریاضی، کنترل سیستم‌های کوانتوم در فیزیک [۱۲]، مدارهای منطقی در کامپیوتر [۱۱] و ... مورد استفاده قرار گرفت و از جمله پارامترهای گرافی محبوب در علوم مختلف شد. یکی از اولین مقالاتی که به بیان خصوصیات فرایند تحمیلی پرداخت مقاله باریولی^۱ و همکارانش در سال ۲۰۰۹ بود [۶]. آن‌ها در این مقاله درصدد پاسخ به پرسش‌های زیر برآمدند.

۱. آیا گرافی با کوچکترین مجموعه تحمیلی منحصر بفرد وجود دارد؟

۲. آیا یک گراف G و یک راس $v \in V$ وجود دارد به‌طوری که v عضو هر کوچک‌ترین مجموعه تحمیلی G باشد؟

بدین جهت آن‌ها ابتدا قضیه‌های زیر را اثبات نمودند.

قضیه ۲.۳.۱. [۶] اگر S یک مجموعه تحمیلی از G باشد آنگاه هر معکوس^۲ از S نیز یک مجموعه تحمیلی است.

قضیه ۳.۳.۱. [۶] اگر G یک گراف همبند از مرتبه بزرگ‌تر از یک باشد آنگاه $\bigcap_{S \in ZFS(G)} S = \phi$ که $ZFS(G)$ بیان‌گر مجموعه تمام کوچک‌ترین مجموعه‌های تحمیلی برای G است.

حال با استفاده از قضیه‌های ۲.۳.۱ و ۳.۳.۱ می‌توان نتایج زیر را داشت.
گراف همبند از مرتبه بزرگ‌تر از یک وجود ندارد به‌طوری که دارای مینیمم مجموعه تحمیلی یکتا باشد.

گرافی همبند از مرتبه بزرگ‌تر از یک وجود ندارد به‌طوری که یک راس آن عضو هر مینیمم مجموعه تحمیلی از آن گراف باشد.

علاوه بر قضایای بالا، مفهوم **زنجیرهای تحمیلی**^۳ نیز در [۶] آورده شد. با استفاده از این زنجیرها می‌توان مسیر رنگ‌آمیزی و یا پخش شدن مجموعه تحمیلی را دانست. همچنین در قضیه زیر، به بیان رابطه بین عدد مسیرهای پوششی^۴ که با $P(G)$ نمایش داده می‌شود و عدد تحمیلی پرداختند.

قضیه ۴.۳.۱. [۶] فرض کنیم G یک گراف باشد. در این صورت $P(G) \leq F(G)$.

از سال ۲۰۰۹ تا ۲۰۱۱ جامعه محققان علاقه بیشتری به مطالعه اختصاصی روی پارامتر گرافی فرایند تحمیلی نشان دادند. برای مثال در سال ۲۰۱۰، رو^۵، تکنیک‌هایی در حوزه نظریه

^۱Brailoli

^۲reversal

^۳forcing chains

^۴path cover number

^۵Row

گراف برای محاسبه عدد تحمیلی گراف‌هایی با تنها یک راس برشی پیشنهاد کرد و دو رده‌بندی زیر را ارائه داد [۲۳].

گزاره ۳.۳.۱. [۲۳] فرض کنیم G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq 2$ باشد. در این صورت $F(G) = n - 1$ است اگر و تنها اگر $G = K_n$.

گزاره ۴.۳.۱. [۲۳] با فرض این که G یک گراف است، $F(G) = 2$ اگر و تنها اگر G یک گراف ۲-مسیر موازی باشد.

فرض کنیم G یک گراف و F یک مجموعه تحمیلی از G باشد. هرگاه F فاقد راس تنها باشد گوئیم F یک **مجموعه تحمیلی کلی**^۱ برای G است. واضح است که مجموعه‌های تحمیلی کلی برای گراف‌های فاقد راس تنها تعریف می‌شود. تعداد اعضای یکی از کوچک‌ترین مجموعه‌های تحمیلی کلی را **عدد تحمیلی کلی**^۲ می‌نامیم و با $F_t(G)$ نمایش می‌دهیم. هر کوچک‌ترین مجموعه تحمیلی کلی را یک $F_t(G)$ -**مجموعه**^۳ می‌نامیم.

عدد تحمیلی کلی ابتدا توسط داویلا^۴ معرفی و مطالعه شد [۱۷]. داویلا و هنینگ^۵ به مطالعه مجموعه‌های تحمیلی کلی در درختان پرداختند [۱۴] و نشان دادند که برای هر گراف همبند G از مرتبه $n \geq 3$ و ماکزیمم درجه Δ ، نامساوی $F_t(G) \leq (\frac{\Delta}{\Delta+1})n$ برقرار است [۱۳]. همچنین آن‌ها مجموعه‌های تحمیلی و مجموعه‌های تحمیلی کلی را در گراف‌های ۳-منتظم پنجه آزاد^۶ نیز بررسی نمودند [۱۶].

هرگاه زیرگراف القایی روی یک مجموعه تحمیلی $F \subset V(G)$ همبند باشد، F را یک **مجموعه تحمیلی همبند**^۷ برای G می‌نامیم. بنابراین واضح است که مجموعه‌های تحمیلی همبند برای گراف‌های همبند تعریف می‌شوند. تعداد اعضای یکی از کوچک‌ترین مجموعه‌های تحمیلی همبند را **عدد تحمیلی همبند**^۸ می‌نامیم و با $F_c(G)$ نمایش می‌دهیم. عدد تحمیلی همبند ابتدا توسط بریمکو^۹ و داویلا معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت [۸]. پارامترهای ماکزیمم پوچی، عدد احاطه گر قوی^{۱۰} عدد برگ^{۱۱} و عدد مسیرهای پوششی از یک گراف، توسط عدد تحمیلی همبند کران‌دار می‌شوند ([۸، ۱۵] را ببینید). محاسبه $F_c(G)$ مانند $F(G)$ و $F_t(G)$ مشکل است و در واقع همگی در کلاس مسائل تصمیم‌گیری NP -سخت قرار دارند [۱۹، ۲۴، ۳، ۹]. بنابراین رده‌بندی و کران‌دار کردن این پارامترها حتی برای گراف‌های خاص دارای اهمیت است. بدین منظور رده‌بندی گراف‌ها با عدد تحمیلی ۱، ۲ و $n-1$ در [۲۳]

¹total forcing set

²total forcing number

³ $F_t(G)$ -set

⁴Davila

⁵Henning

⁶claw-free

⁷connected forcing set

⁸connected forcing number

⁹Brimkov

¹⁰power domination number

¹¹leaf number

و رده‌بندی گراف با عدد تحمیلی $n - 2$ در [۲۵] انجام شده است. بریمکو و داویلا گراف‌ها با عدد تحمیلی همبند ۱ و $n - 1$ را رده‌بندی کردند و مساله باز زیر را بیان نمودند [۸].

مسئله ۲.۳.۱. تمام گراف‌هایی که عدد تحمیلی همبند آن‌ها ۲، ۳، $n - 2$ و $n - 3$ باشند را مشخص کنید (n مرتبه گراف می‌باشد).

در ادامه به بیان نتایج مهم و اثبات شده دیگر می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. ابتدا به بیان گزاره بدیهی زیر می‌پردازیم.

گزاره ۵.۳.۱. [۱۶] فرض کنیم G یک گراف باشد. در این صورت $F(G) = 1$ اگر و تنها اگر G یک مسیر باشد.

همان‌طور که قبلاً بیان کردیم عدد تحمیلی به‌عنوان یک ابزار برای مطالعه ماکزیمم پوچی گراف‌ها تعریف شد. گزاره بعدی پیشتر ذکر شد، بیان می‌کند که ماکزیمم پوچی یک گراف G نمی‌تواند از $F(G)$ پیشی گیرد.

گزاره ۶.۳.۱. [۲۵] فرض کنیم G یک گراف باشد. در این صورت $M(G) \leq F(G)$.

از این رو در قضیه بعد نتیجه‌ای قوی‌تر از گزاره ۵.۳.۱، ارائه شد.

قضیه ۵.۳.۱. [۲۵] فرض کنیم G یک گراف باشد. در این صورت $M(G) = 1$ اگر و تنها اگر G یک مسیر باشد.

از آنجایی که برای محاسبه $M(G)$ ، نیاز به ارزیابی تعداد نامتناهی ماتریس می‌باشد ولی برای محاسبه عدد تحمیلی تنها بررسی تعداد متناهی گراف لازم است، محققان علاقه‌مند به ماکزیمم پوچی یک گراف گزاره ۶.۳.۱ را بسیار مفید دانستند. مشهور است که گراف‌ها با ماکزیمم پوچی ۱ دقیقاً مسیرها هستند [۲۵]. به منظور رده‌بندی گراف‌های با ماکزیمم پوچی ۲، جانسون^۱ و همکارانش یک خانواده گرافی $\mathcal{F}$ شامل ۶ نوع گراف معرفی کردند (برای جزئیات بیشتر جدول B۱ در [۲۲] را ببینید) و قضیه بعد را اثبات نمودند.

قضیه ۶.۳.۱. [۲۲] فرض کنیم G یک گراف باشد. در این صورت $M(G) = 2$ اگر و تنها اگر G یک گراف دو مسیر موازی یا یک گراف از خانواده $\mathcal{F}$ باشد.

۴.۱ مجموعه احاطه گر قوی و ارتباط آن با مجموعه تحمیلی

فرض کنیم G یک گراف باشد و $S \subseteq V(G)$. هرگاه هر رأس $v \in V(G)$ یا در S باشد یا با عضوی از S مجاور باشد آنگاه S یک **مجموعه احاطه گر**^۲ در گراف G می‌نامیم. به اندازه کوچک‌ترین

^۱Johnson

^۲dominating set

مجموعه احاطه‌گر در گراف G ، **عدد احاطه‌گری**^۱ گراف G گوییم و با علامت $\gamma(G)$ ، نمایش می‌دهیم. عدد احاطه‌گری یکی از مفاهیم اساسی و پرکاربرد در نظریه گراف است. مساله پیدا کردن عدد احاطه‌گری از مسائل NP - کامل است.

نوع دیگری از احاطه‌گری، احاطه‌گری قوی است که در ادامه ابتدا به ضرورت تعریف آن می‌پردازیم.

از آنجایی که شبکه‌های الکتریکی توسط دستگاه‌های اندازه‌گیری گران‌قیمت کنترل می‌شوند، تعیین حداقل جایگاه‌های مطلوب در شبکه که این دستگاه‌ها برای نظارت بر کل شبکه نصب شوند از نظر اقتصادی سودمند و دارای اهمیت است. این مساله شامل مجموعه‌های احاطه‌گر قوی در نظریه گراف می‌باشد. در واقع شبکه‌های الکتریکی می‌توانند با یک گراف مدل شوند به‌طوری‌که رئوس آن بیان‌گر گره‌های الکتریکی (مکان‌هایی که دستگاه‌های اندازه‌گیری می‌توانند در آن‌جا قرار گیرند) و یال‌ها بیان‌گر خطوط انتقالی است که این گره‌ها را به هم مربوط می‌سازند.

در این مدل، مساله احاطه‌گری قوی در گراف‌ها شامل پیدا کردن یک مجموعه کمینه از رئوس است به‌طوری‌که کل گراف با قوانینی خاص گزاره شود. از نظر شبکه فیزیکی این مجموعه کمینه شامل مکان‌هایی است که دستگاه‌های اندازه‌گیری به منظور نظارت بر کل شبکه با کمترین هزینه باید قرار گیرند.

حال تعریف مجموعه احاطه‌گری قوی برای گراف G را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.
برای یک مجموعه $S \subseteq V(G)$ ، مجموعه‌های $(P_G^i(S))_{i \geq 0}$ ، رئوس بدست آمده توسط S در i -امین گام هستند که گام‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$P_G^0 = N[S]. \quad ۱.$$

$$P_G^{i+1} = \cup \{N[v] : v \in P_G^i(S) \text{ s.t. } |N[v] \setminus P_G^i(S)| \leq 1\}. \quad ۲.$$

اگر برای یک i_0 داشته باشیم $P_G^{i_0} = P_G^{i_0+1}$ آنگاه برای هر $j \geq i_0$ ، $P_G^j = P_G^{i_0}$ و لذا قرار می‌دهیم $P_G^\infty = P_G^{i_0}$.

S یک **مجموعه احاطه‌گر قوی**^۲ برای G نامیده می‌شود هرگاه $P_G^\infty(G) = V$.

به اندازه یکی از کوچک‌ترین مجموعه‌های احاطه‌گر قوی گراف G ، **عدد احاطه‌گر قوی**^۳ می‌گوییم و با $\gamma_P(G)$ نمایش می‌دهیم.

دین و دیگران در [۱۸]، با بررسی تعریف مجموعه احاطه‌گر قوی و فرایند تحمیلی، گزاره زیر را که بیان‌گر رابطه بین این دو مفهوم می‌باشد را ارائه نمودند.

گزاره ۱.۴.۱. [۱۸] مجموعه احاطه‌گر قوی روی گراف G ، با اجرای فرایند تحمیلی روی $N[S]$ که $S \subseteq V(G)$ نیز توصیف می‌شود. یک مجموعه $S \subseteq V(G)$ یک مجموعه احاطه‌گر قوی برای G است اگر و تنها اگر $N[S]$ یک مجموعه تحمیلی برای G باشد.

^۱domination number

^۲power dominating set

^۳power domination number

عدد احاطه گر قوی خانواده هایی از گراف ها با استفاده از یک فرایند دو مرحله ای پیدا کردن یک کران بالا و یک کران پایین تعیین می شود. کران بالا معمولاً با ارائه الگویی برای ساخت یک مجموعه، همراه با اثبات اینکه مجموعه ساخته شده یک مجموعه احاطه گر قوی است، بدست می آید. کران پایین معمولاً با استفاده از خصوصیات ساختاری خانواده خاصی از گراف ها یافت می شود و اغلب شامل یک روند بسیار فنی و طولانی است. بنابراین یافتن کران های خوب برای عدد احاطه گر قوی دارای اهمیت فراوان است. دین و دیگران به منظور پیدا کردن کران پایین برای عدد احاطه گر قوی یک ابر مکعب، قضیه مفید زیر را ارائه دادند.

قضیه ۱.۴.۱. [۱۸] اگر G یک گراف فاقد راس تنها و $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ یک مجموعه احاطه گر قوی برای G باشد آنگاه

$$Z(G) \leq \sum_{i=1}^k \deg(u_i).$$

درحالی که دین و دیگران قضیه ۱.۴.۱ را تنها برای مطالعه خانواده خاصی از گراف ها به کار بردند، برای بنسن و دیگران نقطه آغازی در به دست آوردن یک کران پایین عمومی بود به طوری که آن ها قضیه زیر را از قضیه ۱.۴.۱ نتیجه گرفتند.

قضیه ۲.۴.۱. [۷] اگر G یک گراف ناتهی و $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ یک مجموعه احاطه گر قوی برای G باشد آنگاه

$$\left\lceil \frac{Z(G)}{\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma_P(G)$$

و این کران دقیق است.

در واقع با استفاده از این قضیه نتایج عدد تحمیلی را می توان در نتایج عدد احاطه گر قوی به کار برد و برعکس. همچنین این قضیه اهمیت مطالعه بر روی عدد تحمیلی را دو چندان نمود.

فصل ۲

نتایج اولیه

در این فصل به بیان نتایج اولیه مورد نیاز برای فصول بعد می‌پردازیم. ابتدا گراف‌های k – مسیر موازی را تعریف نموده و نتایج به‌دست آمده برای آن را ارائه می‌کنیم. در ادامه نتایج حاصل از مطالعه بر روی مجموعه زنجیرهای تحمیلی را بیان می‌کنیم.

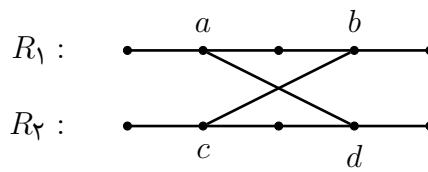
۱.۲ گراف‌های k – مسیر موازی

جانسون و همکارانش در [۲۲] گراف‌های ۲ – مسیر موازی را به‌صورت زیر تعریف نمودند.

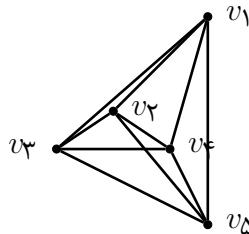
تعریف ۱.۱.۲. [۲۲] گراف $G \neq P_n$ یک گراف ۲ – مسیر موازی است اگر دو مسیر القایی راس مجزا وجود داشته باشد به‌طوری‌که همه رئوس گراف G را بپوشاند و گراف G در صفحه به نحوی قابل رسم باشد که با در نظر گرفتن این دو مسیر به‌صورت خط‌های موازی، یال‌های بین این دو مسیر را بتوان به نحوی با خطوط راست (نه منحنی) رسم کرد که جز در انتهای یال‌ها یکدیگر را قطع نکنند.

به‌طور خاص می‌توان گفت اجتماع دو مسیر مجزا، یک گراف ۲ – مسیر موازی می‌باشد. حال ما در این رساله به عنوان یک تعمیم، گراف‌های k – مسیر موازی^۱، را برای $k \geq 1$ ، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

^۱k-parallel paths



شکل ۱.۲: نمایشی از یک گراف ۲-مسیر موازی با مسیرهای موازی R_1 و R_2 که در آن دو یال ad و cb یکدیگر را قطع می‌کنند.



شکل ۲.۲: نمایش استاندارد از گراف ۴-مسیر موازی K_5 با مسیرهای موازی $P^1 : v_1, P^2 : v_2, P^3 : v_3v_4, P^4 : v_5$.

تعریف ۲.۱.۲. گراف ۱-مسیر موازی را تنها یک مسیر در نظر می‌گیریم. برای هر $k \geq 2$ ، گراف G یک گراف k -مسیر موازی است اگر $(k-1)$ -مسیر موازی نباشد و k مسیر القایی راس مجزا وجود داشته باشد به‌طوری‌که همه رئوس گراف G را بپوشاند و گراف G در صفحه به نحوی قابل رسم باشد که با در نظر گرفتن این k مسیر به‌صورت خط‌های موازی، یال‌های بین این k مسیر را بتوان با خطوط راست (نه منحنی) رسم کرد که جز در انتهای یال‌ها یکدیگر را قطع نکنند.

نمایش ارائه شده در تعریف ۲.۱.۲ برای گراف G را یک **نمایش استاندارد**^۱ برای گراف G می‌نامیم. برای مثال شکل ۲.۲ و ۱.۲ را ببینید. توجه کنید که یک گراف G ممکن است چندین نمایش استاندارد داشته باشد. در یک نمایش استاندارد خاص از یک گراف k -مسیر موازی، k مسیر بیان شده در تعریف مسیرهای موازی این نمایش هستند و به یال‌هایی که دو انتهایشان روی دو مسیر مجزا قرار دارند **قاطع**^۲ گوییم.

واضح است که هر گراف k -مسیر موازی حداقل k راس دارد. از آنجاییکه هر گراف مسطح در یک صفحه چنان می‌توان رسم نمود که یال‌ها تنها در نقاط انتهایی یکدیگر را قطع کنند [۲۱]، می‌توان نتیجه گرفت هر گراف مسطح از مرتبه n یک گراف k -مسیر موازی که $k \leq n$ ، است. به‌وضوح می‌توان گفت یک گراف غیر مسطح از مرتبه n یک گراف n -مسیر موازی نمی‌باشد. با این وجود در گزاره زیر نشان می‌دهیم گراف‌هایی مانند گراف‌های کامل از مرتبه $n \geq 6$ وجود دارند که برای هر $k \in [n]$ ، در خانواده گراف‌های k -مسیر موازی نمی‌باشند.

گزاره ۱.۱.۲. برای هر $n \geq 6$ و هر $k \in [n]$ ، گراف‌های K_n در خانواده گراف‌های k -مسیر موازی قرار ندارند.

برهان. (فرض خلف) فرض کنیم $n \geq 6$ و $k \in [n]$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که K_n یک گراف k -مسیر موازی باشد. یک نمایش استاندارد از آن را در نظر می‌گیریم. از آنجایی که K_n یک

¹standard drawing

²segment

گراف کامل است و مسیرهای موازی، مسیرهای القایی هستند؛ هر مسیر موازی باید از مرتبه یک یا دو باشد. به علاوه بنا به اینکه K_n یک گراف غیرمسطح است و گراف‌های غیرمسطح از مرتبه n ، یک گراف n - مسیر موازی نیستند می‌توان $k \leq n - 1$ را نتیجه گرفت. بنابراین گراف K_n حداقل یک مسیر یکرخت با P_k دارد. حال می‌توانیم ادعا کنیم که تنها یک مسیر موازی P_k داریم، زیرا در غیراین صورت قاطع‌های بین دو مسیر P_k یکدیگر را قطع می‌کنند که با فرض k - مسیر موازی بودن در تناقض است. بنابراین $(n - 2)$ مسیر موازی $P^1, \dots, P^{(n-2)}$ یکرخت با P_1 و تنها یک مسیر $P^{(n-1)}$ یکرخت با P_k وجود دارد. مجموعه تمام رئوس K_n به جز یک راس آن در $P^{(n-1)}$ را V می‌نامیم. زیرگراف القایی روی V در نمایش استاندارد K_n ، یک گراف مسطح یکرخت با K_{n-1} می‌باشد، که با فرض $n \geq 6$ در تناقض است. $\square$

در گزاره بعد، به تعیین عدد تحمیلی گراف‌های ۳ - مسیر موازی می‌پردازیم.

گزاره ۲.۱.۲. اگر G یک گراف ۳ - مسیر موازی باشد آنگاه $F(G) = 3$. به طور خاص، مجموعه رئوس واقع در سمت چپ هر نمایش استاندارد از G ، تشکیل یک $F(G)$ - مجموعه می‌دهد.

برهان. بنا به گزاره ۵.۳.۱ و گزاره ۴.۳.۱ کافی است نشان دهیم برای هر گراف ۳ - مسیر موازی G ، $F(G) \leq 3$. یک نمایش استاندارد از یک گراف G با مسیرهای موازی Q_1, Q_2, Q_3 را در نظر می‌گیریم به طوری که اندیس‌های آن‌ها مطابق با موقعیتشان در نمایش باشند؛ یعنی برای $i < j$ ، مسیر Q_i بالای مسیر Q_j باشد. همچنین x, y, z را به ترتیب رئوس واقع در سمت چپ Q_1, Q_2, Q_3 در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم $F = \{x, y, z\}$ یک مجموعه تحمیلی برای G است که بنا به آن اثبات کامل است. با استقرا روی $|V(G)| + |E(G)|$ به اثبات این ادعا می‌پردازیم. برای حالت $|V(G)| + |E(G)| = 3$ به وضوح ادعا برقرار است (در این حالت G یال ندارد). فرض کنیم $|V(G)| + |E(G)| \geq 4$. اگر $i \in [3]$ وجود داشته باشد که Q_i یک مسیر یک راسی باشد آنگاه به آسانی می‌توان نشان داد که F یک مجموعه تحمیلی برای G است. بنابراین فرض می‌کنیم که هر کدام از مسیرهای Q_1, Q_2 و Q_3 حداقل دو راس دارند. اگر $v \in \{x, y, z\}$ وجود داشته باشد که $\deg(v) = 1$ ، آنگاه بنا به استقرا $F' = (F \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ یک مجموعه تحمیلی برای $G - v$ می‌باشد (u تنها همسایه v است)، و همان طور که مورد نظر است مجموعه تحمیلی بودن F برای G را نتیجه می‌دهد. از این رو فرض می‌کنیم برای هر $v \in \{x, y, z\}$ داریم $\deg(v) \geq 2$. حال حالتی را در نظر می‌گیریم که $G[F]$ ، زیرگراف القایی روی F ، حداقل یک یال e را دارد. واضح است که حذف این یال تغییری روی وضعیت تحمیل شدن گراف ندارد؛ یعنی F یک مجموعه تحمیلی برای G است اگر و فقط اگر F یک مجموعه تحمیلی برای $G - e$ باشد. به عنوان فرض خلف درجه هر کدام از رئوس x, y, z را حداقل دو در نظر می‌گیریم به طوری که هیچ جفت از آن‌ها با هم مجاور نباشند. به آسانی مشهود است که یا راس x یک همسایه روی Q_3 دارد یا z یک همسایه روی Q_1 دارد. بنا به تشابه حالات فرض می‌کنیم که راس x یک همسایه z' روی Q_3 دارد. توجه داریم که راس z در Q_3 در سمت چپ z' واقع است. Q_1, Q_2, Q_3 را به صورت سه خط موازی در فضای $\mathbb{R}^2$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم a نقطه تقاطع قاطع xz' و خط Q_2

باشد. به وضوح راس z همسایه‌ای روی Q_1 ندارد چون در غیر این صورت یک تقاطع داریم. بنابراین راس z یک همسایه y' روی Q_2 در سمت چپ a دارد و راس y روی Q_2 در سمت چپ y' می‌باشد. حالا واضح است که راس y یک همسایه دارد که نه روی Q_3 و نه روی Q_1 قرار دارد که یک تناقض است.

□

ملاحظه ۱.۱.۲. با روشی مشابه با اثبات لم قبل می‌توانیم ثابت کنیم، گراف‌های k -مسیر موازی عدد تحمیلی حداکثر k دارند که در جهت تایید حدس ۱.۳.۴ است.

حال رابطه بین عدد تحمیلی کلی گراف‌های k -مسیر موازی با تعداد مسیرها را مشخص می‌کنیم.

نتیجه ۱.۱.۲. اگر G یک گراف k -مسیر موازی فاقد راس تنها باشد آنگاه $F_t(G) \leq 2k$ و این کران، قوی است.

برهان. یک نمایش استاندارد از G در نظر می‌گیریم. بنا به ملاحظه ۱.۱.۲، مجموعه رئوس که در سمت چپ مسیرهای موازی قرار دارند یک مجموعه تحمیلی برای G تشکیل می‌دهند. واضح است که اگر در هر مسیر موازی دو راسی که در سمت چپ قرار دارند را در یک مجموعه قرار دهیم مجموعه حاصل یک TF -مجموعه برای G است. توجه داریم که در مسیرهای موازی یک‌ریخت با P_1 ، ما تنها راس این مسیرها را به همراه یکی از رئوس مجاورش در نظر می‌گیریم. بنابراین $F_t(G) \leq 2k$. حال نشان می‌دهیم این کران قوی است. G را یک گراف در نظر می‌گیریم که از k مسیر مجزا از مرتبه حداقل ۲ تشکیل شده است. واضح است که G یک گراف k -مسیر موازی است و هر TF -مجموعه شامل حداقل دو راس از هر مسیر می‌باشد که در این صورت $F_t(G) \geq 2k$. از آنجایی که $F_t(G) \leq 2k$ ، بنابراین $F_t(G) = 2k$.

□

۲.۲ زنجیرهای تحمیلی

فرض می‌کنیم F یک $F(G)$ -مجموعه باشد. در فرایند تحمیلی با مجموعه رئوس آغازی F هر راس حداکثر یک راس را تحمیل می‌کند درحالی‌که آن راس ممکن است توسط رئوس متفاوتی تحمیل شود. بنابراین $V(G)$ می‌تواند به $|F|$ **زنجیر**^۱ (دنباله) $R_1, \dots, R_{|F|}$ افزاز شود. در هر کدام از این زنجیرها به‌طور مثال $R_i = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ ، می‌توان گفت $v_0 \in F$ و v_j توسط v_{j-1} که $j \in [k]$ ، تحمیل می‌شود. مجموعه $S = \{R_1, \dots, R_{|F|}\}$ یک **مجموعه زنجیر**^۲ متناظر با F برای G می‌باشد که لزوماً یکتا نیست. در هر زنجیر $R_i = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ ، برای

^۱chain^۲chain set

هر $\text{prev}_{R_i}(v_j) = v_{j-1}$ ، $j \in [k]$ و برای هر $\text{next}_{R_i}(v_j) = v_{j+1}$ ، $j \in \{0, \dots, k-1\}$ را تعریف می‌کنیم. $\text{chains}_S(v)$ و $\text{end}(R_i)$ به ترتیب بیان‌گر زنجیر تحمیلی در S شامل v و آخرین راس زنجیر R_i می‌باشند. به‌عنوان یک گزاره ساده، می‌توان گفت که هر زنجیر $R_i = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ یک مسیر $P_i = v_0 v_1 \dots v_k$ در G القا می‌کند، به عبارتی $G[V(R_i)]$ یک مسیر القایی است. به منظور توضیح اثباتش، توجه کنید که اگر دو راس مجاور $v_{j_1}, v_{j_2} \in V(R_i)$ که $j_2 > j_1 + 1$ وجود داشته باشد آنگاه زمانی که v_{j_1} راس v_{j_1+1} را تحمیل می‌کند همسایه‌اش v_{j_2} غیر رنگی است که غیر ممکن می‌باشد. به یک زنجیر، **بدیهی^۱** گفته می‌شود هرگاه یک راس داشته باشد و با توجه به آن زنجیر **غیر بدیهی^۲** نیز تعریف می‌شود.

فرض می‌کنیم G یک گراف با $\Delta(G) \leq 3$ و F یک $F(G)$ -مجموعه باشد. یک مجموعه زنجیر $S = \{R_1, \dots, R_{|F|}\}$ متناظر با F در نظر می‌گیریم. همان‌طور که بیان شد هر کدام از این زنجیرها یک مسیر القایی در G است. در واقع ما در فصل ۴ می‌خواهیم شرایطی برای S پیدا کنیم به‌طوری‌که یک نمایش استاندارد از G وجود داشته باشد که مسیرهای موازی آن دقیقاً این زنجیرها باشند. توجه داشته باشید در این رساله مجموعه رئوس واقع در سمت چپ این زنجیرها مجموعه F را تشکیل می‌دهند. بنابراین فرایند تحمیلی را در هر زنجیر R_i ، یک ترتیب از چپ به راست روی رئوس R_i القا می‌کند به عبارت دیگر $u <_{R_i} v$ یعنی u و v روی زنجیر R_i قرار دارند به‌طوری‌که u قبل از v روی زنجیر است. در ادامه تعریف و گزاره کلیدی ذیل را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۲. فرض می‌کنیم F یک $F(G)$ -مجموعه برای گراف G و $S = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ یک مجموعه زنجیر تحمیلی متناظر با آن باشد. **مجموعه زنجیرهای تحمیلی جزئی تا مرحله k ^۳** از S ، مجموعه مسیرهای $S' = \{R'_1, R'_2, \dots, R'_n\}$ است به‌طوری‌که

- برای هر $i \in [n]$ $\text{end}(R'_i) \in R_i$
- برای هر $i \in [n]$ $R_i \text{end}(R'_i) = R'_i \text{end}(R'_i)$
- $\max \{k_F(\text{end}(R'_i))\}_{i=1}^n = k$
- برای هر $v \in V(G) \setminus (\bigcup_{i=1}^n V(R'_i))$ $k_F(v) > k$.

بنا به تعریف قبل و تعریف مجموعه زنجیر تحمیلی، گزاره بدیهی زیر را ارائه می‌کنیم.

گزاره ۱.۲.۲. فرض می‌کنیم F_1 و F_2 ، دو $F(G)$ -مجموعه از گراف G و $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ و $\mathcal{R}' = \{R'_1, R'_2, \dots, R'_n\}$ به ترتیب دو مجموعه زنجیر متناظر با آن‌ها باشند. اگر $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ و $\mathcal{P}' = \{P'_1, P'_2, \dots, P'_n\}$ به ترتیب مجموعه زنجیرهای جزئی تا مرحله k و k' از $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}'$ باشند به‌طوری‌که $\text{end}(P_i) = \text{end}(P'_i)$ و $\bigcup_{i=1}^n V(P_i) = \bigcup_{i=1}^n V(P'_i)$ برقرار باشند

¹trivial

²non-trivial

³partial chain set up to step k

آنگاه با در نظر گرفتن $R_i'' = P_i \text{end}(P_i') R_i'$ که $i \in [n]$ ، مجموعه $\{R_1'', R_2'', \dots, R_n''\}$ یک مجموعه زنجیر تحمیلی متناظر با F_1 می باشد.

برای اثبات نتایج اصلی فصل ۳ نیاز به بررسی تعداد زنجیرهای بدیهی و غیر بدیهی متناظر با یک $F(G)$ - مجموعه از یک گراف G داریم. بدین منظور ابتدا به بیان گزاره ساده زیر می پردازیم.

گزاره ۲.۲.۲. فرض می کنیم G یک گراف ناتهی و F یک $F(G)$ - مجموعه باشد به طوری که $F(G) = k$. در این صورت هر مجموعه زنجیر S متناظر با F حداکثر $k - 1$ زنجیر بدیهی دارد.

برهان. (فرض خلف) فرض می کنیم S ، k زنجیر بدیهی دارد. بنابراین مرتبه گراف برابر با k است. اما می دانیم $k - 1 = |V(G)| - 1 = |F| - 1 = k - 1$ ، که یک تناقض است. $\square$

اگرچه لم بعد اثبات واضحی دارد ولی در اثبات هایی که در فصل های بعد می آید نقش مهمی را ایفا می کند.

لم ۱.۲.۲. فرض می کنیم G یک گراف، F یک $F(G)$ - مجموعه و S یک مجموعه زنجیر متناظر با F باشد. اگر u و v دو راس باشند به طوری که $u, v \in R \in S$ و $u <_R v$ ، آنگاه برای هر $w \in N(u) \setminus V(R)$ ، $k_F(w) < k_F(v)$.

برهان. زمانی که راس u ، $\text{next}_R(u)$ را تحمیل می کند، تمام همسایه های راس u به جز $\text{next}_R(u)$ رنگی هستند. بنابراین w قبل از رنگی شدن راس $\text{next}_R(u)$ و در پی آن قبل از v ، رنگی است که نتیجه می دهد $k_F(w) < k_F(v)$. $\square$

دو لم بعد را به راحتی از این لم نتیجه می گیریم.

لم ۲.۲.۲. فرض می کنیم G یک گراف، F یک $F(G)$ - مجموعه و S یک مجموعه زنجیر متناظر با F باشد. برای هر یال uv که u و v به ترتیب روی دو زنجیر متمایز R_1, R_2 از S قرار دارند، هیچ یال $u'v'$ وجود ندارد به طوری که $u' \in R_1$ ، $v' \in R_2$ ، $u <_{R_1} u'$ و $v' <_{R_2} v$.

لم ۳.۲.۲. فرض می کنیم G یک گراف، F یک $F(G)$ - مجموعه و S یک مجموعه زنجیر متناظر با F باشد. اگر سه زنجیر متمایز $R_1, R_2, R_3 \in S$ و یال ab و cd وجود داشته باشد به طوری که $a <_{R_1} u$ و $d \in R_3$ ، $b, c \in R_2$ ، $c <_{R_2} b$ ، آنگاه هیچ یال uv وجود ندارد به طوری که $a <_{R_1} u$ و $v <_{R_3} d$.

فصل ۳

رده‌بندی گراف‌های با عدد تحمیلی کلی

۲

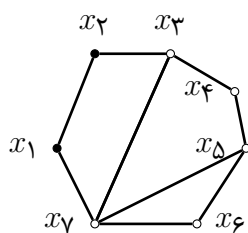
بریمکو و همکارانش در [۱۰] گراف‌های با عدد تحمیلی همبند ۲ و $n-2$ را رده‌بندی نمودند. در این فصل ما ابتدا گراف‌های با ویژگی‌های $F_t(G) = 2$ را رده‌بندی کرده و در ادامه به‌عنوان یک نتیجه، گراف‌ها با ویژگی $F_c(G) = 2$ را رده‌بندی می‌کنیم. به‌عبارتی دیگر ما یک پاسخ جزئی به مساله ۲.۳.۱ می‌دهیم به‌طوری‌که اثبات ما کوتاه‌تر از اثبات ارائه شده در [۱۰] می‌باشد.

۱.۳ نتایج مقدماتی

در این فصل نیاز داریم دو خانواده گرافی $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_2$ را معرفی کنیم.

قرارداد ۱.۱.۳. خانواده تمام گراف‌های مسطح بیرونی همیلتونی که شامل هیچ دوری گذرنده از حداقل سه وتر نباشند را با علامت $\mathcal{F}_1$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین واضح است که هر $G \in \mathcal{F}_1$ تنها یک دور همیلتونی دارد که در این فصل با $\mathcal{C}_G$ نمایش می‌دهیم و یک وتر از G یک وتر از $\mathcal{C}_G$ می‌باشد. در این فصل برای هر گراف $G \in \mathcal{F}_1$ یک نمایش مسطح بیرونی مشخص از آن را در نظر می‌گیریم. در یک uv -مسیر P در $\mathcal{C}_G$ ، اگر uv یک وتر از گراف G باشد و هر راس روی این مسیر در گراف G ، درجه دو داشته باشد



شکل ۱.۳: دو مسیر $P_1 : x_5, x_6, x_7, x_3, x_2, x_1$ و $P_2 : x_7, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ قطع هستند ولی دو مسیر $P' : x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_1$ و $P'' : x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_1$ قطع نیستند. مجموعه $\{x_1, x_2\}$ یک مجموعه تحمیلی کلی برای این گراف است.

آنگاه به این مسیر، یک **قطعه^۱** از G می‌گوییم (شکل ۱.۳ را ببینید). اگر G وترى نداشته باشد یا به عبارتی یک دور باشد آنگاه تمام G به عنوان یک قطعه در نظر می‌گیریم. توجه داریم یک قطعه حداقل شامل سه راس می‌باشد و بنا به فرض این که G شامل دوری گذرنده از حداقل سه وتر نمی‌باشد، هر گراف $G \in \mathcal{F}_1$ با حداقل یک وتر، دارای تنها دو قطعه متفاوت است.

قرارداد ۲.۱.۳. هر گراف در خانواده گرافی $\mathcal{F}_2$ از یک گراف در خانواده گرافی $\mathcal{F}_1$ حاصل می‌شود به طوری که یک یال در یک قطعه از آن حذف شده باشد. به عبارت دیگر

$$\mathcal{F}_2 = \{H : H = G - e \text{ s.t } G \in \mathcal{F}_1, \text{ باشد } G \text{ از یک قطعه } e \text{ متعلق به یک قطعه از } G\}$$

در اینجا، بنا به این ویژگی گراف‌های خانواده $\mathcal{F}_1$ که شامل دوری گذرنده از حداقل سه وتر نیستند، گزاره بدیهی زیر را داریم.

گزاره ۱.۱.۳. برای هر گراف $G \in \mathcal{F}_1$ ، هر یال از $\mathcal{C}_G$ متعلق به یک قطعه است اگر و تنها اگر $|E(G) - |E(\mathcal{C}_G)| \leq 1$.

ما در دو لم بعدی، به اثبات ویژگی‌هایی از $F_t(G)$ - مجموعه‌های گراف‌های متعلق به خانواده $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ می‌پردازیم. این دو لم در اثبات نتیجه اصلی ما نقش کلیدی دارند.

لم ۱.۱.۳. برای هر گراف $G \in \mathcal{F}_1$ ، مجموعه $\{u, v\} \subseteq V(G)$ یک $F_t(G)$ - مجموعه است اگر و تنها اگر $uv \in E(\mathcal{C}_G)$ و همچنین رئوس u و v در یک قطعه از گراف G قرار داشته باشد.

برهان. اگر گراف G وترى نداشته باشد آنگاه چیزی برای اثبات وجود ندارد. فرض کنیم گراف G حداقل یک وتر دارد و $\{u, v\} \subseteq V(G)$ یک $F_t(G)$ - مجموعه باشد. از آنجایی که درجه رئوس هر وتر حداقل سه است uv نمی‌تواند یک وتر باشد و از این رو $uv \in E(\mathcal{C}_G)$. رئوس x و y را اولین دو راس با درجه حداقل سه در نظر می‌گیریم به طوری که با حرکت از u و v روی دور $\mathcal{C}_G$ به آن‌ها می‌رسیم و می‌توانند برابر با u یا v نیز باشند. واضح است که xy یک وتر است و به عبارتی داریم $xy \in E(G) \setminus E(\mathcal{C}_G)$. در غیراین صورت فرایند تحمیلی بعد از تحمیل شدن رئوس x و y نمی‌تواند ادامه پیدا کند و $\{u, v\}$ یک مجموعه تحمیلی نمی‌باشد که یک تناقض است. بنابراین رئوس u و v در یک قطعه قرار دارند.

¹section

حال از استقرا برای اثبات حالت عکس لم استفاده می‌کنیم. به‌وضوح گزاره برای دوره‌های بدون وتر برقرار است بنابراین فرض کنیم G یک گراف با $n \geq 4$ راس و حداقل یک وتر می‌باشد و همچنین گزاره برای هر گراف از خانواده $\mathcal{F}_1$ با کمتر از n راس و دارای حداقل یک وتر برقرار است. حال $uv \in E(\mathcal{C}_G)$ را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که رئوس u و v به قطعه $P : x_1, \dots, x_t$ از گراف G متعلق است به‌طوری‌که $x_i = u$ و $x_{i+1} = v$ برای $i \in [t-1]$ ، $\deg(x_i) = 2$ برای $2 \leq i \leq t-1$ ؛ و $x_1 x_t$ یک وتر از G است. به‌وضوح $\{u, v\}$ یک مجموعه تحمیلی برای گراف G است اگر و تنها اگر $\{x_1, x_t\}$ یک مجموعه تحمیلی برای $G' = G - \{x_2, \dots, x_{t-1}\}$ باشد. بنابراین برای کامل شدن اثبات کافی است نشان دهیم $\{x_1, x_t\}$ یک مجموعه تحمیلی برای G' است. توجه داریم که G' عضوی از خانواده $\mathcal{F}_1$ است. اگر G' یک دور باشد گزاره واضح است. فرض کنیم G' دارای وتر است که می‌توان نتیجه گرفت حداقل دو قطعه دارد. ادعا می‌کنیم x_1 و x_t در یک قطعه از G قرار دارند. بدین منظور w_1 و w_2 را اولین دو راس با درجه حداقل سه در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که با حرکت از x_1 و x_t روی دور $\mathcal{C}_{G'}$ ، به آن‌ها می‌رسیم و می‌توانند برابر با u یا v نیز باشند. حال باید اثبات کنیم که $w_1 w_2 \in E(G')$. (فرض خلف) فرض می‌کنیم که $w_1 z_1$ و $w_2 z_2$ دو وتر متفاوت از G' هستند. حالا به سادگی نتیجه می‌شود که G شامل یک دور گذرنده از حداقل سه وتر $w_1 z_1, x_1 x_t$ و $w_2 z_2$ است که غیرممکن می‌باشد. بنابراین از آنجایی که x_1 و x_t در یک قطعه از G' قرار دارند با استفاده از فرض استقرا می‌توان گفت $\{x_1, x_t\}$ یک مجموعه تحمیلی برای G' است و در نتیجه اثبات کامل می‌باشد. $\square$

لم ۲.۱.۳. فرض کنیم H یک گراف از خانواده $\mathcal{F}_1$ و $S = z_1, \dots, z_t$ یک قطعه از آن باشد. گراف $G = H - xy \in \mathcal{F}_1$ را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که xy یک یال در قطعه S باشد.

۱. گراف H وتر ندارد اگر و تنها اگر هر یال از G یک مجموعه تحمیلی کلی برای آن باشد.
۲. با فرض این‌که گراف H دارای حداقل یک وتر است، یال $uv \in E(\mathcal{C}_H)$ یک مجموعه تحمیلی کلی برای G است اگر رئوس u و v در قطعه‌ای متفاوت با S ، از H قرار داشته باشند.

برهان. ابتدا فرض کنیم گراف H یک دور بدون وتر است. واضح است که G یک مسیر است و رئوس هر یال از آن یک مجموعه تحمیلی کلی برای آن است. حال برای اثبات حالت عکس گزاره اول از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم رئوس هر یال گراف G یک مجموعه تحمیلی کلی و گراف H ، یک دور با حداقل یک وتر باشد. واضح است گراف G دارای یک دور و یک راس a از درجه یک می‌باشد. راس a و همسایه‌اش باید یک مجموعه تحمیلی باشند ولی از آنجایی که G راس با درجه سه نیز دارد این حالت غیر ممکن است.

برای اثبات گزاره دوم، از استقرا روی $|V(H)|$ استفاده می‌کنیم. از آنجایی که H دارای وتر است داریم $|V(G)| \geq 4$. زمانی که $|V(G)| = 4$ ، گزاره به‌وضوح درست است. فرض کنیم H یک گراف با $n \geq 5$ راس باشد و گزاره برای هر گراف H با کمتر از n راس برقرار باشد.

می‌دانیم $uv \in E(C_H)$ و رئوس u و v در قطعه ای متفاوت با قطعه S از گراف H قرار دارند. بدین منظور رئوس u و v را متعلق به قطعه $P : x_1, x_2, \dots, x_t$ از گراف H در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $x_i = u$ و $x_{i+1} = v$ برای یک $i \in [t-1]$ ، $\deg(x_i) = 2$ برای $2 \leq i \leq t-1$ و $x_1 x_t$ یک وتر از H باشد. به‌وضوح مجموعه $\{u, v\}$ یک مجموعه تحمیلی برای G است اگر و تنها اگر $\{x_1, x_t\}$ یک مجموعه تحمیلی برای $G' = G - \{x_2, \dots, x_{t-1}\}$ باشد.

حال برای تکمیل اثبات کافی است نشان دهیم که $\{x_1, x_t\}$ یک مجموعه تحمیلی برای G' است. گراف $H' = H - \{x_2, \dots, x_{t-1}\}$ را در نظر می‌گیریم. ابتدا توجه داریم که H' از خانواده $\mathcal{F}_1$ است زیرا در غیر این صورت H' شامل دوری گذرنده از حداقل سه وتر می‌باشد. این دور، دوری از H نیز محسوب می‌شود که تناقض با $H \in \mathcal{F}_1$ دارد. اگر H' یک دور باشد آنگاه همان‌طور که مدنظر است، $\{x_1, x_t\}$ یک مجموعه تحمیلی برای $G' = H' - xy$ است. بنابراین فرض می‌کنیم H' حداقل یک وتر دارد. از آنجایی که $G' = H' - xy$ برای استفاده از فرض استقرا نیاز داریم اثبات کنیم که x و y به یک قطعه مشخص از H' تعلق دارند و همچنین x_1 و x_t نیز در قطعه ای متفاوت با قطعه x و y از H' قرار دارند. از آنجایی که $\{x, y\} \cap \{x_2, \dots, x_{t-1}\} = \emptyset$ ، قطعه شامل x و y (که در فرض لم S نامیده شده است) همچنان یک قطعه از H' است و می‌توان گفت که x و y به S به عنوان یک قطعه از H' تعلق دارند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $G' = H' - xy \in \mathcal{F}_2$. توجه داریم، از آنجایی که H' یک دور نیست، x_1 و x_t در S قرار ندارند.

حال برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم x_1 و x_t در یک قطعه مشخص از H' قرار دارند. بدین منظور w_1 و w_2 را اولین دو راس با درجه حداقل سه در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که با حرکت از x_1 و x_t روی دور $C_{H'}$ به آن‌ها می‌رسیم و می‌توانند برابر با x_1 یا x_t نیز باشند. حال نیاز است اثبات کنیم که $w_1 w_2 \in E(H')$ می‌باشد. (فرض خلف) فرض کنیم که $w_1 z_1$ و $w_2 z_2$ دو وتر متفاوت از H' هستند. در این صورت واضح است که H شامل یک دور گذرنده از حداقل سه وتر $w_1 z_1, x_1 x_t$ و $w_2 z_2$ می‌باشد که می‌دانیم این حالت غیرممکن و فرض خلف باطل است. حال از آنجایی که x_1 و x_t در یک قطعه از H' قرار دارند با استفاده از فرض استقرا می‌توان گفت $\{x_1, x_t\}$ یک مجموعه تحمیلی برای G' است و در نتیجه اثبات کامل می‌باشد. $\square$

۲.۳ گراف‌ها با عدد تحمیلی کلی ۲ و گراف‌ها با عدد

تحمیلی همبند ۲

حال به کمک لم‌های قبل ابتدا به بیان و اثبات رده‌بندی گراف‌ها با عدد تحمیلی کلی ۲ می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنیم G یک گراف باشد. در این صورت $F_t(G) = 2$ اگر و تنها اگر $G \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \{P_2\}$.

برهان. برای اثبات طرف اول گزاره از استقرا روی $|E(G)|$ استفاده می‌کنیم. زمانی که $|E(G)| \in \{1, 2\}$ گزاره به‌وضوح برقرار است. فرض می‌کنیم که گزاره برای هر گراف با کمتر از $m \geq 3$ یال برقرار باشد. G را یک گراف با مشخصات m یال، $F_t(G) = 2$ و $F = \{u, v\}$ به‌عنوان یک $-F_t(G)$ مجموعه برای آن، در نظر می‌گیریم. واضح است که $uv \in E(G)$ و از آنجایی که $\{u, v\}$ یک مجموعه تحمیلی برای G است، حداقل یکی از رئوس آن به طور مثال u درجه دو دارد. در اولین گام از فرایند تحمیلی روی F ، راس u تنها همسایه غیر رنگی خود را که w می‌نامیم تحمیل می‌کند. گراف G' را از حذف راس u و اضافه کردن یال vw (اگر همچنان در G مجاور نباشند)، در گراف G به‌دست می‌آوریم که در این صورت داریم $|E(G')| \leq |E(G)| - 1$. از آنجایی که F یک $-F_t(G)$ مجموعه است، $\{w, v\}$ باید یک $-F_t(G')$ مجموعه باشد. بنا به استقرا $G' \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \{P_2\}$ که بنا به آن می‌توان $G \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \{P_2\}$ را نتیجه گرفت.

حال برای اثبات طرف دوم گزاره فرض کنیم $G \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \{P_2\}$ زمانی که $G \in \mathcal{F}_1$ است، یک یال uv از یک قطعه در G را انتخاب می‌کنیم. بنا به [لم ۱.۱.۳](#)، مجموعه $\{u, v\}$ ، یک $-F_t(G)$ مجموعه است. اگر $G \in \mathcal{F}_2 \cup \{P_2\}$ آنگاه $G = P_n$ که $n \geq 2$ یا G شامل یک دور می‌باشد. در حالت اول به‌وضوح گزاره برقرار است. در حالت دوم G گرافی از خانواده $\mathcal{F}_2$ است و بنا به تعریف خانواده $\mathcal{F}_2$ ، یک گراف $H \in \mathcal{F}_1$ وجود دارد به‌طوری‌که $G = H - xy$ در تعریف خانواده $\mathcal{F}_2$ صدق می‌کند. از آنجایی که G دارای یک دور است، H دارای دو قطعه است. قطعه متفاوت با قطعه شامل x و y را در نظر می‌گیریم و یک یال uv در آن قطعه انتخاب می‌کنیم. بنا به [لم ۲.۱.۳](#) مجموعه $\{u, v\}$ یک $-F_t(G)$ مجموعه می‌باشد. $\square$

در ادامه به‌عنوان یک نتیجه از قضیه [۱.۲.۳](#)، گراف‌هایی با عدد تحمیلی همبند ۲ را رده‌بندی می‌کنیم.

نتیجه ۱.۲.۳. فرض کنیم G یک گراف باشد. در این صورت $F_c(G) = 2$ اگر و تنها اگر $G \in (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \setminus \{P_n : n \geq 3\}$.

برهان. فرض کنیم G یک گراف باشد که $F_c(G) = 2$. از آنجایی که عدد تحمیلی همبند یک مسیر، ۱ می‌باشد؛ G یک مسیر نیست. توجه کنیم که هر مجموعه تحمیلی همبند از اندازه حداقل ۲، یک مجموعه تحمیلی کلی است. بنابراین $F_t(G) = 2$ و بنا به قضیه [۱.۲.۳](#)، گراف G در خانواده گرافی $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ قرار دارد.

حالا فرض کنیم $G \in (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \setminus \{P_n : n \geq 3\}$. از آنجایی که G یک مسیر نیست و می‌دانیم $F_c(H) = 1$ ، اگر و تنها اگر گراف H یک مسیر است [\[۸\]](#)، داریم $F_c(G) \geq 2$. بنا به قضیه [۱.۲.۳](#) می‌توان $F_t(G) = 2$ را نتیجه گرفت و با توجه به این که هر مجموعه تحمیلی کلی از اندازه ۲ یک مجموعه تحمیلی همبند است $F_c(G) \leq 2$ را داریم و اثبات کامل است. $\square$

فصل ۴

ماکزیمم پوچی و عدد تحمیلی در گراف‌های با ویژگی ماکزیمم درجه حداکثر ۳

اکبری و همکارانش تمام گراف‌های سه منتظم با عدد تحمیلی ۳ را رده‌بندی کردند و نشان دادند که ماکزیمم پوچی این گراف‌ها ۳ می‌باشد [۴]. در این فصل به عنوان یک تعمیم از نتیجه آن‌ها، تمام گراف‌ها با ماکزیمم درجه حداکثر ۳ که عدد تحمیلی آن‌ها ۳ است را رده‌بندی می‌کنیم و با استفاده از آن یک پاسخ جزئی به مساله ۱.۳.۱ می‌دهیم. در ادامه، ما دسته‌بندی گراف‌ها با ویژگی ماکزیمم درجه حداکثر ۳ که عدد تحمیلی و ماکزیمم پوچی آن‌ها حداکثر ۳ است را ارائه می‌کنیم.

۱.۴ نتایج مقدماتی

فرض کنیم F یک $F(G)$ -مجموعه برای گراف G با ویژگی $\Delta(G) \leq 3$ و S یک مجموعه زنجیر تحمیلی متناظر با آن باشد. اگر دو زنجیر غیر بدیهی $R_1, R_2 \in S$ وجود داشته باشند به طوری که $v \in R_1$ دو همسایه غیر مجاور روی R_2 داشته باشد آنگاه راس v نسبت به S ، ^۱بد می‌نامیم. به

¹bad

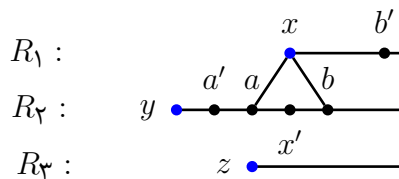
عبارت دیگر یک راس v راسی از یک زنجیر غیر بدیهی، با سه همسایه است به‌طوری که یکی از آنها توسط v تحمیل می‌شود و دوتای دیگر دو راس غیر مجاور از زنجیر دیگر می‌باشند.

لم ۱.۱.۴. فرض کنیم G یک گراف باشد و $\Delta(G) \leq 3$. اگر F یک $F(G)$ - مجموعه و S یک مجموعه زنجیر متناظر با F باشند آنگاه هر راس بد نسبت به S یک راس ابتدایی از یک زنجیر غیر بدیهی در S است.

برهان. فرض کنیم R_1 یک زنجیر در S و $x \in R_1$ یک راس بد نسبت به S باشد. با توجه به تعریف راس بد، R_1 غیربدیهی و حداقل دو راس دارد. از آنجایی که $\Delta(G) \leq 3$ و R_1 یک مسیر القایی است، x باید یک راس ابتدا یا انتهایی از R_1 باشد. $a, b \in R_2$ را دو همسایه راس x در نظر می‌گیریم به‌طوری که $R_2 \neq R_1$ یک زنجیر در S باشد. بدون کم شدن از کلیت فرض کنیم که $a <_{R_2} b$ ، یعنی a اولین همسایه x در ترتیب القا شده روی R_2 باشد. از آنجایی که a و b متوالی نیستند داریم $a <_{R_2} \text{next}_{R_2}(a) <_{R_2} b$. (فرض خلف) x را راس انتهایی زنجیر R_1 در نظر می‌گیریم. زمانی که a راس $\text{next}_{R_2}(a)$ را تحمیل می‌کند راس x باید رنگی باشد. در نتیجه از آنجایی که x آخرین راس R_1 می‌باشد، راس b در این گام می‌تواند توسط x تحمیل شود. بنابراین $\text{next}_{R_2}(a)$ و b نمی‌توانند روی یک زنجیر واقع باشند که یک تناقض است. $\square$

لم ۲.۱.۴. فرض کنیم G یک گراف باشد و $\Delta(G) \leq 3$. اگر $F(G) = 3$ آنگاه یک $F(G)$ - مجموعه و یک مجموعه زنجیر S متناظر با آن وجود دارند به‌طوری که دارای راس بد نیستند.

برهان. فرض کنیم $F = \{x, y, z\}$ یک $F(G)$ - مجموعه و $S = \{R_1, R_2, R_3\}$ که y, x و z به ترتیب رئوس ابتدایی R_1, R_2 و R_3 هستند، یک مجموعه زنجیر متناظر با F باشد به‌طوری که نسبت به تمام انتخاب‌های F و S ، کمترین تعداد رئوس بد را داشته باشد. برای اثبات لم به کمک برهان خلف نشان می‌دهیم که G نسبت به S راس بد ندارد.



شکل ۱.۴: نمایشی از S با فرض این که راس x از زنجیر R_1 نسبت به S بد است.

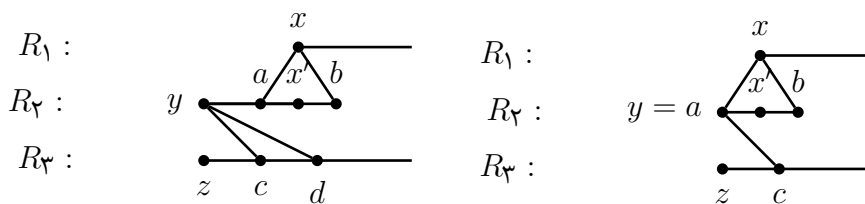
فرض کنیم G نسبت به S ، دارای راس بد است. بنابه لم ۱.۱.۴، رئوس بد ممکن x, y و z هستند. بدون کم شدن از کلیت فرض کنیم x نسبت به S بد است و دو همسایه غیر مجاور a و b روی R_2 دارد به‌طوری که $a <_{R_2} b$ (شکل ۱.۴ را ببینید). راس x' را به‌صورت $x' = \text{next}_{R_2}(a)$ در نظر می‌گیریم و با توجه به آن مجموعه $F' = (F \setminus \{x\}) \cup \{x'\}$ را به‌صورت F' تعریف می‌کنیم. به راحتی قابل بررسی است که F' یک مجموعه تحمیلی است. یک مجموعه زنجیر دلخواه $S' = \{R'_1, R'_2, R'_3\}$ متناظر با F' در نظر می‌گیریم. واضح است که x', y و z به ترتیب اولین رئوس R'_1, R'_2 و R'_3 می‌باشند. با توجه به نحوه انتخاب F و S ، تعداد رئوس بد در G نسبت به

S' نمی‌تواند کمتر از تعداد آن‌ها نسبت به S باشد. توجه داریم که تنها رئوس بد ممکن نسبت به S' ، x, y, z هستند. بنابراین x نسبت به S' بد نیست درحالی‌که نسبت به S بد است. از این رو یک راس در F' وجود دارد که نسبت به S' بد است ولی نسبت به S بد نیست. در ادامه به اثبات حالت‌های مختلف در این شرایط می‌پردازیم.

(I) در هر زنجیر تحمیلی دلخواه S' متناظر با F' ، اگر راس y نسبت به S' بد باشد آنگاه آن نسبت به S نیز بد است.

(فرض خلف) راس y را نسبت به S' بد در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که نسبت به S بد نیست. از آنجایی که y نسبت به S' بد است و $\Delta(G) \leq 3$ داریم $\deg(y) = 3$.

(۱) ابتدا فرض کنیم $y \neq a$. بنا به لم ۲.۲.۲، y همسایه‌ای در R_1 ندارد. به‌علاوه از آنجایی که R_2 یک مسیر القایی در G است، راس y دقیقاً یک همسایه در آن دارد که به‌عبارتی راس بعدی آن روی R_2 است. بنابراین y دقیقاً دو همسایه در R_3 دارد. از طرف دیگر از آنجایی که y نسبت به S بد نیست، y مجاور با دو راس پیاپی c و d از R_3 است (شکل ۲.۴ (چپ) را ببینید). بنا به لم‌های ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲، هر راس در مسیر $z R_3 \text{ prev}_{R_3}(c)$ (اگر وجود داشته باشد) از درجه حداکثر دو می‌باشد. هر کدام از رئوس y و x' حداقل دو همسایه غیر رنگی دارند. به‌وضوح تنها راسی که می‌تواند فرایند تحمیلی روی F' را آغاز کند، z است و دو راس x', y تا زمانی که رئوس c و d رنگی نشوند، راسی را تحمیل نمی‌کنند. بنابراین y دو همسایه پیاپی در R'_3 دارد که می‌توانیم نتیجه بگیریم که y نسبت به S' بد نیست و تناقض با فرض است.



شکل ۲.۴: نمایشی از S با فرض این که $y \neq a$ یا $y = a$ باشد.

(۲) حالا فرض کنیم که $y = a$. مشابه با حالت قبل بنا به لم ۲.۲.۲ و از آنجایی که $\deg(y) = 3$ ، راس y مجاور با یک راس c از R_3 است. بنا به تعریف راس بد و مجاورت y با c و x' می‌توانیم نتیجه بگیریم که $z \neq c$ و به‌علاوه دقیقاً یک راس از رئوس x و c به R'_1 متعلق است و دیگری توسط y تحمیل می‌شود (شکل ۲.۴ (راست) را ببینید). حالا نشان می‌دهیم که x به R'_1 متعلق است و c توسط y تحمیل می‌شود. در غیراین‌صورت x باید توسط y تحمیل شود (از این‌رو داریم

$(x \in R'_1)$ و در نتیجه $k_{F'}(x) > k_{F'}(c)$ و $c \in R'_1$. بنابراین $x'R'_1c$ یک مسیر از x' تا c است. اما می‌دانیم $y, x \notin R'_1$ که می‌توان نتیجه گرفت یک راس u در مسیر $x'R_2b$ وجود دارد به‌طوری‌که $\deg(u) = 3$ و u به R'_1 متعلق است. توجه داریم که u در R'_1 قبل از c است و بنا به آن داریم $k_{F'}(u) < k_{F'}(c) < k_{F'}(x)$. بنابراین از آنجایی که $c \neq z$ و u همسایه‌ای در مسیر $zR_3 \text{prev}_{R_3}(c)$ ندارد (بنا به لم ۲.۲.۲) می‌توانیم نتیجه بگیریم که راس u در گام $k_{F'}(\text{next}_{R'_1}(u))$ تنها یک همسایه رنگی دارد که یک تناقض است. از این رو $x \in R'_1$ و c توسط y تحمیل می‌شود و داریم $k_{F'}(x) < k_{F'}(c)$.

ما ادعا می‌کنیم که $x'R_2bx = x'R'_1x$ و هر راس در $x'R_2b$ از درجه ۲ می‌باشد. راس v را اولین راس در $x'R_2bx$ در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $\text{next}_{R_2}(v) \neq \text{next}_{R'_1}(v)$. به‌وضوح داریم $v \in x'R_2b$ و $\deg(v) = 3$. از طرف دیگر بنا به لم ۲.۲.۲، v همسایه‌ای در $zR_3 \text{prev}_{R_3}(c)$ ندارد و مجموعه رئوس رنگی تا مرحله $k_{F'}(v)$ یک زیر مجموعه از $V(zR_3 \text{prev}_{R_3}(c)) \cup V(R_2v)$ هستند. اما این یک تناقض است چون v دو همسایه غیر رنگی دارد و از این رو نمی‌تواند $\text{next}_{R'_1}(v)$ را تحمیل کند. بنابراین $x'R_2bx = x'R'_1x$. اگر یک راس $v \in x'R'_1b$ درجه ۳ داشته باشد آنگاه به‌طور مشابه، آن نمی‌تواند همسایه بعدی‌اش روی R'_1 را تحمیل کند. حالا $F'' = F' \cup \{x', \text{next}_{R_2}(x'), z\}$ را در نظر می‌گیریم. واضح است F'' یک مجموعه تحمیلی است و از آنجایی که $x', \text{next}_{R_2}(x')$ و z درجه حداکثر ۲ دارند، هر مجموعه زنجیر متناظر با F'' راس بد ندارد که یک تناقض است.

(II) اگر راس z نسبت به S بد نباشد آنگاه یک مجموعه زنجیر متناظر با F' وجود دارد به‌طوری‌که z نسبت به آن بد نیست.

فرض کنیم z نسبت به S بد نیست و (فرض خلف) z را نسبت به هر مجموعه زنجیر S' متناظر با F' بد در نظر می‌گیریم. ابتدا ادعای زیر را اثبات می‌کنیم.

ادعا ۱.۱.۴. برای هر مجموعه زنجیر S' ، راس z مجاور است با دقیقاً یک راس از مسیر yR_2a که در زنجیر R'_1 واقع است.

اثبات ادعا. فرض کنیم که z همسایه‌ای در مسیر yR_2a ندارد. توجه داریم که z از درجه ۳ است و حداکثر یک همسایه در F' دارد (وقتی z مجاور با x' است). شکل ۳.۴ را ببینید. تا زمانی که a رنگی نشده‌است، z و x' حداقل دو همسایه غیر رنگی دارند و قادر به تحمیل کردن راسی در فرایند تحمیلی روی F' نمی‌باشند و به عبارتی $yR_2a = yR'_1a$. در فرایند تحمیلی روی F' ، مرحله $K_{F'}(a) + 1$ را در نظر می‌گیریم. در این مرحله، a و x' به‌ترتیب x و $\text{next}_{R_2}(x')$ را تحمیل می‌کنند و زنجیرهای جزئی تا این مرحله $z, yR_2ax, \text{next}_{R_2}(x')$ هستند. به‌طور مشابه با قبل، در فرایند تحمیلی روی

F ، در مرحله $k_F(\text{next}_{R_2}(x'))$ رئوس x و z هنوز راسی را تحمیل نکرده‌اند. از این‌رو زنجیرهای جزئی تا مرحله $k_F(\text{next}_{R_2}(x'))$ ، $yR_2\text{next}_{R_2}(x')$ و x و z هستند. بنابراین بنا به گزاره ۱.۲.۲، زنجیرهای $R_1'' = x'R_2$ ، $R_2'' = yR_2axR_1$ و $R_3'' = R_3$ یک مجموعه زنجیر S'' متناظر با F' تشکیل می‌دهند. بنا به فرض راس z نسبت به S'' بد است. بنابراین از آنجایی که z همسایه‌ای در yR_2a ندارد، می‌توان نتیجه گرفت که z نسبت به S بد است که یک تناقض می‌باشد. بنابراین z باید با حداقل یک راس در مسیر yR_2a مجاور باشد.



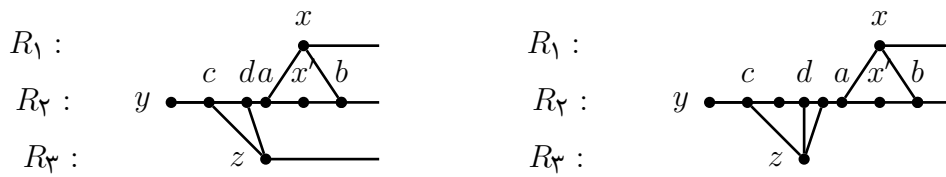
شکل ۳.۴: نمایشی از S با فرض این که راس z همسایه‌ای در مسیر yR_2a ندارد.

حال فرض کنیم z حداقل دو همسایه c و d که $c <_{R_2} d <_{R_2} a$ در مسیر yR_2a دارد و c تنها همسایه z قبل از d روی مسیر R_2 است (z نمی‌تواند با a مجاور باشد). راس z نمی‌تواند با x' مجاور باشد چون در غیر این صورت در مرحله $k_F(d) + 1$ راس z راس x' را تحمیل می‌کند و از این‌رو x' به زنجیر R_3 متعلق است که غیرممکن می‌باشد.

بنابراین تا زمانی که در فرایند تحمیلی روی F' ، d تحمیل نشده است x' و z نمی‌توانند راسی را تحمیل کنند یعنی به عبارتی $yR_2d = yR_2'd$ و $c, d \in R_2'$. از آنجایی که می‌دانیم z نسبت به S بد نیست، یا c و d روی R_2 پیایی هستند یا $z = R_3$ یک زنجیر بدیهی است (شکل ۴.۴ را ببینید). زمانی که R_3 غیر بدیهی است (شکل ۴.۴ (چپ) را ببینید) و c و d روی R_2' پیایی هستند واضح است که z نسبت به S' بد نیست که یک تناقض است. بنابراین R_3 بدیهی است (شکل ۴.۴ (راست) را ببینید). حال توجه داریم که راس z مجاور با $\text{next}_{R_2}(d)$ است. زیرا در غیر این صورت همانند آنچه قبلاً گفته شد در گام $k_F(d) + 1$ راس z می‌تواند $\text{next}_{R_2}(d)$ را تحمیل کند و از این‌رو R_3 غیر بدیهی است.

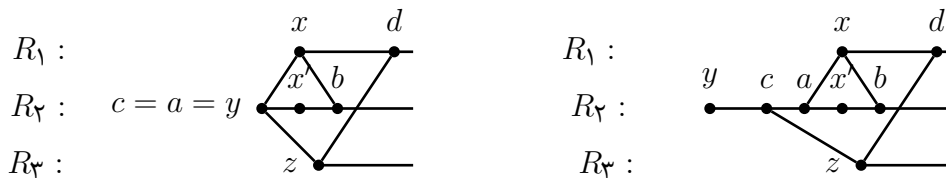
مشهود است که $S'' = \{R_1'' = x'R_2, R_2'' = yR_2axR_1, R_3'' = z\}$ یک مجموعه زنجیر متناظر با F' می‌باشد به طوری که دارای راس بد نیست و این یک تناقض است (شکل ۴.۴ (راست) را ببینید).

از این رو نشان دادیم z دقیقاً یک همسایه c در yR_2a دارد. برای تکمیل اثبات ادعا نشان می‌دهیم که c در زنجیر R_2' واقع است. اگر $c = y$ باشد آنگاه ادعا واضح است. بنابراین فرض کنیم $c \neq y$ در مسیر $yR_2\text{prev}_{R_2}(a)$ باشد. واضح است تا زمانی که c رنگی نشود، x' و z قادر به تحمیل راسی در فرایند تحمیلی روی F' نمی‌باشند و در نتیجه راس c در R_2' واقع است و اثبات کامل می‌شود. $\square$



شکل ۴.۴: نمایشی از S با فرض این‌که زنجیر R_3 بدیهی یا غیر بدیهی است.

فرض کنیم راس c تنها همسایه راس z روی مسیر yR_2a باشد. به راحتی $zx' \notin E(G)$ را می‌توان نتیجه گرفت. در غیر این صورت راس z با راس c از R'_2 و راس x' از R'_1 مجاور است که بدنبودن راس z نسبت به هر مجموعه زنجیر متناظر با F' را نتیجه می‌دهد. از آنجایی که $zx' \notin E(G)$ و $zc \in E(G)$ ، تا زمانی که a رنگی نشده است، رئوس z و x' در فرایند تحمیلی روی F' ، راسی را تحمیل نمی‌کنند (شکل ۵.۴ را ببینید). از این‌رو a به R'_2 متعلق است و زنجیرهای جزئی تا گام $k_{F'}(\text{next}_{R_2}(x'))$ زنجیرهای R'_2 به a متعلق است و زنجیرهای جزئی تا گام $k_F(\text{next}_{R_2}(x'))$ و مجموعه زنجیرهای جزئی تا مرحله $z, yR_2ax, x' \text{next}_{R_2}(x')$ هستند. بنا به گزاره ۱.۲.۲ و مجموعه زنجیرهای جزئی تا مرحله $R''_3 = R_3$ و $R''_2 = yR_2axR_1$ ، $R''_1 = x'R_2$ زنجیرهای $k_F(\text{next}_{R_2}(x'))$ یک مجموعه زنجیر S'' متناظر با F' را تشکیل می‌دهند. اگر z نسبت به S'' بد باشد آنگاه از آنجایی که z با راس c از R'_2 مجاور است و نسبت به S بد نیست، باید با راسی از مسیر xR_1 مجاور باشد که در اینجا ما آن را d می‌نامیم. با توجه به لم‌های ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲، رئوس مسیر $yR_2 \text{prev}_{R_2}(b)$ به جز c و a با هیچ راسی از زنجیرهای R_1 و R_3 مجاور نیستند و در نتیجه درجه حداکثر ۲ دارند (شکل ۵.۴ را ببینید). مجموعه $F'' = \{y, x', \text{next}_{R'_2}(c)\}$ را در نظر می‌گیریم. به وضوح مجموعه F'' یک $F(G)$ -مجموعه است. حالا در حالت‌های زیر نشان می‌دهیم که یک مجموعه زنجیر S''' متناظر با F'' وجود دارد به‌طوری‌که F'' نسبت به آن فاقد راس بد است و یک تناقض است.



شکل ۵.۴: نمایشی از S با فرض این‌که $c \neq a$ یا $c = a$ باشد.

(۱) ابتدا فرض کنیم $c = a$ (شکل ۵.۴ (چپ) را ببینید). واضح است که $y = a = c$ ، $\deg(x') = 2$ و $\text{next}_{R'_2}(c) = x$ در گام اول فرایند تحمیلی روی F'' ، رئوس x' و y به ترتیب $\text{next}_{R_2}(x')$ و z را تحمیل می‌کنند و زنجیرهای جزئی تا این مرحله زنجیرهای $yz, x' \text{next}_{R_2}(x'), x$ هستند. بنا به گزاره ۱.۲.۲ و زنجیرهای جزئی تا

گام $k_F \text{next}_{R_4}(x')$ مجموعه $S''' = \{x'R_4, yzR_4, xR_1\}$ یک مجموعه زنجیر متناظر با F'' است. از آنجایی که $\deg(x') = 2$ و هریک از رئوس $\text{next}_{R_4}(c)$ و y دو همسایه در دو زنجیر مجزای دیگر دارند، F'' نسبت به S''' فاقد راس بد است که تناقض با انتخاب F و S دارد.

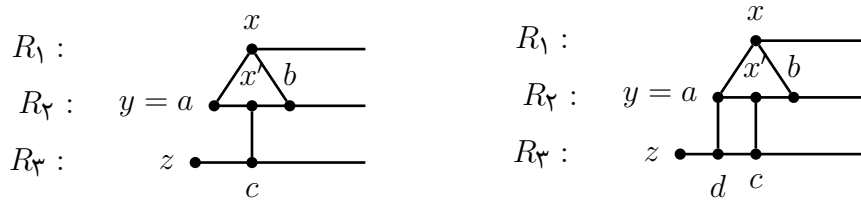
(۲) حال فرض کنیم $c \neq a$ (شکل ۵.۴ (راست) را ببینید). $S''' = \{R_1''', R_2''', R_3'''\}$ را یک مجموعه زنجیر دلخواه متناظر با F'' در نظر می‌گیریم به طوری که $x', y, \text{next}_{R_4}(c)$ به ترتیب رئوس ابتدایی زنجیرهای R_1''' , R_2''' , R_3''' باشند. بنا به لم ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲، رئوس x' و y درجه حداکثر ۲ دارند که بد نبودن آنها نسبت به S''' را نتیجه می‌دهد. راس $\text{next}_{R_4}(c)$ یا راس a است یا راسی به نام d که $c <_{R_4} d <_{R_4} a$. اگر $\text{next}_{R_4}(c) = d$ آنگاه مطابق با آنچه قبل تر گفته شد $\deg(d) = 2$ و d نمی‌تواند بد باشد. فرض کنیم که $\text{next}_{R_4}(c) = a$ و راس بد است. از آنجایی که راس a مجاور با راس x' از R_1''' است، یکی از رئوس x یا c باید متعلق به R_1''' باشد و دیگری توسط a تحمیل شود.

ادعا می‌کنیم که راس a راس c را تحمیل می‌کند و در نتیجه راس x به R_1''' متعلق است. در غیراینصورت از آنجایی که راس a راس x را تحمیل می‌کند داریم $k_{F''}(c) < k_{F''}(x)$. با توجه به این که تمام رئوس مسیر $x'R_4 \text{prev}(b)$ درجه ۲ دارند و رئوس c و x به ترتیب به زنجیرهای R_1''' و R_2''' تعلق دارند، داریم $\deg(b) = 3$ ، $b \in V(R_1''')$ و $b <_{R_1'''} c$. بنابراین زمانی که راس b ، راس $\text{next}_{R_1'''}(b) \leq c$ که $\text{next}_{R_1'''}(b) \leq c$ را تحمیل می‌کند، راس x رنگی است و $k_{F''}(x) < k_{F''}(c)$ که یک تناقض است.

حالا مجموعه $F^* = \{x', \text{next}_{R_4}(x'), y\}$ را که یک $F(G)$ - مجموعه است در نظر می‌گیریم. از آنجایی که درجه رئوس F^* حداکثر ۲ است این مجموعه فاقد راس بد است و بنابراین یک تناقض با انتخاب F و S داریم.

(III) راس x' نسبت به هر مجموعه زنجیر S' متناظر با F' بد نیست. فرض کنیم که یک مجموعه زنجیر S' وجود دارد که راس x' نسبت به آن بد است. از آنجایی که راس x' نسبت به S' بد است، $\deg(x') = 3$ و بنا به لم ۲.۲.۲، x' مجاور با یک راس c از R_3 است. در این صورت باید $y \neq a$ ؛ زیرا در غیر این صورت بنا به لم ۲.۲.۲، y حداکثر با یک راس از مسیر zR_3c از زنجیر R_3 مجاور می‌باشد (شکل ۶.۴ را ببینید) که در ذیل به بررسی حالت‌های آن می‌پردازیم.

(۱) زمانی که راس y همسایه‌ای در مسیر zR_3c ندارد (شکل ۶.۴ (چپ) را ببینید). اگر $c = z$ آنگاه x' بد نیست چون همسایه‌هایش y و c به ترتیب در زنجیرهای R_1' و R_2' واقع‌اند. حال فرض کنیم $c \neq z$. در این حالت تا زمانی که c در فرایند تحمیلی رنگی نشده است x' راسی را تحمیل نمی‌کند. همچنین در گام اول فرایند تحمیلی، y

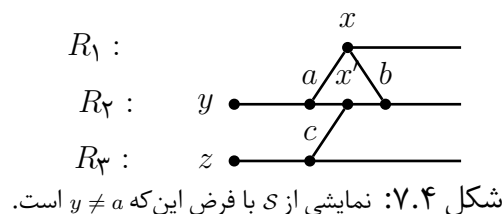


شکل ۶.۴: نمایشی از S با فرض این که راس y حداکثر یک همسایه در مسیر zR_3c دارد.

راس x ؛ و z همسایه‌اش روی مسیر R_3 را تحمیل می‌کند. با این وجود بعد از این گام، تا زمانی که c رنگی نباشد فرایند تحمیلی تنها در طول مسیر R_3 ادامه پیدا می‌کند. بنابراین c یک راس در R'_3 است. مشابه با توضیحی که پیش‌تر آوردیم نتیجه می‌شود که x' بد نیست.

(۲) زمانی که راس y یک همسایه d در مسیر zR_3c دارد (شکل ۶.۴ را ببینید). در این حالت رئوس x' و y تا زمانی که d رنگی نشود نمی‌توانند راسی را تحمیل کنند. بنا به لم ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲، هر راس در مسیر $zR_3 \text{prev}(d)$ (در صورت وجود راس $\text{prev}(d)$) درجه حداکثر ۲ دارند. بنابراین فرایند تحمیلی از z آغاز می‌شود و تا زمانی که d رنگی نباشد تنها روی مسیر R_3 ادامه می‌یابد و $d \in R'_3$ را نتیجه می‌دهد. اگر $d = c$ آنگاه $c \in R'_3$ و مشابه با حالت قبل x' بد نیست. حال ما فرض می‌کنیم که $c \neq d$. در گام بعدی، رئوس y و d به ترتیب رئوس x و $\text{next}_{R_3}(d)$ را تحمیل می‌کنند. بعد از این گام فرایند تحمیلی تا زمانی که راس c رنگی نباشد تنها می‌تواند در امتداد مسیر R_3 ادامه پیدا کند و $c \in R'_3$ را نتیجه می‌دهد. لذا x' بد نیست چون همسایه‌هایش y و c به ترتیب در زنجیرهای R'_3 و R'_3 واقع هستند.

از این رو می‌توانیم فرض کنیم که $y \neq a$ (شکل ۷.۴ را ببینید). در ادامه ابتدا خصوصیات دیگری از S' را در چندین ادعا اثبات می‌کنیم و سپس یک $F(G)$ – مجموعه جدید و یک مجموعه زنجیر متناظر با آن تعریف می‌کنیم که تعداد رئوس بد در آن کمتر از تعداد رئوس بد مجموعه S است که یک تناقض با انتخاب F و S می‌باشد.



شکل ۷.۴: نمایشی از S با فرض این که $y \neq a$ است.

ادعا ۲.۱.۴. راس c به R'_3 متعلق است و به عبارتی $zR_3c = zR'_3c$.

اثبات ادعا. این ادعا را به صورت عمومی‌تر اثبات می‌کنیم. در واقع به جز ویژگی $y = a$ تمام ویژگی‌های اثبات شده در قبل برای G را مورد توجه قرار می‌دهیم.

اگر $c = z$ آنگاه ادعا واضح است. بنابراین فرض کنیم $c \neq z$.

اگر $y = a$ آنگاه بنابه لم ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲، راسی در $zR_3 \text{prev}_{R_3}(c)$ مجاور با رئوس $V(G) \setminus (V(zR_3c) \cup \{a\})$ وجود ندارد. بنابراین فرایند تحمیلی از z آغاز می‌شود و تا زمانی که c رنگی نشده است در R_3 ادامه می‌یابد و از طرفی y تنها راس دیگر از F است که می‌تواند x را تحمیل کند و بعد از آن در انتظار می‌ماند. بنابراین $zR_3c = zR'_3c$.

حال فرض کنیم $y \neq a$ و $z \neq c$. در اولین گام فرایند تحمیلی، x' راسی را نمی‌تواند تحمیل کند. تنها رئوسی که فرایند تحمیلی را می‌توانند آغاز کنند y و z می‌باشند. سه وضعیت زیر در اولین گام از فرایند تحمیلی ممکن است روی دهد.

- (۱) رئوس y و z به ترتیب رئوس $y' = \text{next}_{R_3}(y)$ و $z' = \text{next}_{R_3}(z)$ را تحمیل می‌کنند،
 - (۲) راس y ، راس $y' = \text{next}_{R_3}(y)$ را تحمیل می‌کند اما راس z هیچ راسی را تحمیل نمی‌کند و
 - (۳) راس z راس $z' = \text{next}_{R_3}(z)$ را تحمیل می‌کند ولی y هیچ راسی را تحمیل نمی‌کند.
- به علت تشابه، تنها به بررسی اولین حالت می‌پردازیم. در دومین گام از فرایند تحمیلی شرایط مانند زمانی است که رئوس y و z را از گراف حذف کرده‌ایم و y' و z' در F می‌باشند. از این رو بنا به استقرا یکی از حالات بالا را داریم و اثبات ادعا کامل است. $\square$

ادعا ۳.۱.۴. راس c یک همسایه d در $V(G) \setminus (\{x\} \cup V(R_3x') \cup V(R_3c))$ دارد.

اثبات ادعا. (برهان خلف) فرض کنیم که c همسایه‌ای در $V(G) \setminus (\{x\} \cup V(R_3x') \cup V(R_3c))$ نداشته باشد که در این صورت c راس انتهایی R_3 می‌باشد. از آنجایی که $y \neq a$ و بنابه لم ۱.۱.۴، راس c نمی‌تواند با راسی از مسیر yR_3a مجاور باشد و در نتیجه درجه c حداکثر ۲ است. بنابراین بنا به لم‌های ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲، رئوس مسیرهای $zR_3 \text{prev}_{R_3}(c)$ و $yR_3 \text{prev}_{R_3}(a)$ می‌توانند تنها با یکدیگر مجاور باشند. زیر گراف القایی روی رئوس این دو مسیر به همراه رئوس c و a را G' بنامید. واضح است که $\{y, z\}$ یک مجموعه تحمیلی برای G' است. در این صورت زمانی که c در فرایند تحمیلی روی $\{y, z\}$ در G تحمیل می‌شود می‌تواند x' را تحمیل کند و در نتیجه $\{y, z\}$ یک مجموعه تحمیلی برای G است که غیرممکن می‌باشد. $\square$

از طرف دیگر از آنجایی که راس x' نسبت به $\mathcal{S}'$ بد است و یک همسایه c در R'_3 دارد (ادعای ۲.۱.۴)، دقیقاً یکی از دو همسایه‌اش یعنی a و $\text{next}_{R_3}(x')$ باید در R'_3 باشد و دیگری توسط x' تحمیل شود. در ادعای بعدی نشان می‌دهیم راس a توسط x' تحمیل می‌شود.

ادعا ۴.۱.۴. راس a توسط x' تحمیل می‌شود و از این‌رو در R'_1 واقع است.

اثبات ادعا. (برهان خلف) فرض کنیم $a \in R'_3$ باشد که در این صورت راس $\text{next}_{R_2}(x')$ توسط x' تحمیل می‌شود. از آنجایی که راس $x \in R_1$ دو همسایه a و b در R_2 دارد و بنابه‌لم‌های ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲، راسی در $V(zR_3 \text{prev}_{R_2}(c)) \cup V(yR_2 \text{prev}_{R_2}(a))$ مجاور با راسی در $V(xR_1) \cup V(x'R_2) \cup V(\text{next}_{R_2}(c)R_3)$ نمی‌باشد. بنابه این که $R'_3c = R_3c$ ، روابط $zR'_3a = zR_3cdR_2a$ یا $V(zR'_3a) \cap V(yR_2a) = \{a\}$ را داریم که راس d یک همسایه از c در $V(yR_2 \text{prev}(a))$ است.

(۱) زمانی که $zR'_3a = zR_3cdR_2a$ و d یک همسایه از c در $V(yR_2 \text{prev}(a))$ است. در این حالت، راس c همسایه‌ای در $V(G) \setminus (V(R_2x') \cup V(R_3c))$ ندارد در غیراین صورت اگر u چنین همسایه‌ای از c باشد آنگاه زمانی که، c راس d را تحمیل می‌کند، راس u باید رنگی باشد. که این با توجه به این که راس x' فرایند تحمیلی را آغاز نکرده، غیر ممکن است. بنابراین یک تناقض با ادعای ۳.۱.۴ داریم.

(۲) زمانی که $V(zR'_3a) \cap V(yR_2a) = \{a\}$. از آنجایی که $y \neq a$ ، داریم $\text{prev}_{R'_2}(a) = x$ که نتیجه می‌دهد در گام $k_{F'}(x)$ ، راس a تاکنون تحمیل نشده است. توجه داریم که راس $\text{next}_{R_2}(x')$ در R'_1 است و توسط راس x' تحمیل شده است. بنابراین زمانی که راس x' این راس را تحمیل می‌کند، راس a باید تحمیل شده باشد که $k_{F'}(\text{next}_{R_2}(x')) > k_{F'}(a)$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین زمانی که x راس a را تحمیل می‌کند، راس $\text{next}_{R_2}(x')$ غیررنگی است و در پی آن نتیجه می‌شود که x' تاکنون راسی را تحمیل نکرده است. دوباره توجه داریم که راسی در $V(yR_2 \text{prev}_{R_2}(a))$ مجاور با راسی در $V(G) \setminus (V(yR_2x') \cup V(zR_3c))$ وجود ندارد که در این صورت زمانی که x راس a را تحمیل می‌کند رئوس رنگی در $V(cR_3) \cup V(\text{next}_{R_2}(x')R_2) \cup V(xR_1)$ تمام رئوس مسیر cR'_3x است. بنابر این زمانی که x راس a را تحمیل می‌کند همسایه‌هایش b و $\text{next}_{R_1}(x)$ باید رنگی باشند در این صورت b و $\text{next}_{R_1}(x)$ در R'_3 هستند که تناقض با مسیر القایی بودن R'_3 دارد. $\square$

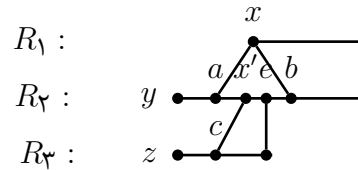
حال ادعای زیر را اثبات می‌کنیم.

ادعا ۵.۱.۴. راس $e = \text{next}_{R_2}(x')$ در R'_3 واقع است، طول cR'_3e حداقل ۲ است و هر راس داخلی cR'_3e در G درجه ۲ دارد.

اثبات ادعا. توجه داریم زمانی که x' راس a را تحمیل می‌کند راس $e = \text{next}_{R_2}(x')$ رنگی شده‌است. مشابه با توضیحی که در اثبات ادعای قبل شد، زمانی که x' راس a را تحمیل می‌کند رئوس رنگی در $V(cR_3) \cup V(eR_2) \cup (xR_1)$ تمام رئوس مسیر cR'_3x

می‌باشند. بنابراین راس $e = \text{next}_{R_2}(x')$ در R_2' واقع است. از آنجایی که راسی در $V(yR_2 \text{prev}_{R_2} a)$ مجاور با راسی در $V(G) \setminus (V(yR_2 x') \cup V(zR_2 c))$ نمی‌باشد، واضح است تمام رئوس داخلی مسیر $cR_2' e$ در G درجه ۲ دارند. برای تکمیل اثبات ادعا باید نشان دهیم $ce \notin E(G)$. اگر $ce \in E(G)$ آنگاه از آنجایی که $c, e \in R_2'$ نسبت به S' بد نیست که یک تناقض داریم. $\square$

حال در موقعیتی هستیم که می‌توانیم اثبات را کامل کنیم. $F'' = \{y, z, \text{next}_{R_2'}(c)\}$



شکل ۸.۴: نمایشی از مجموعه زنجیر S در لم ۲.۱.۴.

را که یک مجموعه تحمیلی برای G است در نظر می‌گیریم (شکل ۸.۴ را ببینید). حال در ادامه نشان می‌دهیم که یک مجموعه زنجیر $\hat{S}$ متناظر با F'' وجود دارد به‌طوری‌که تعداد رئوس بد در آن کمتر از تعداد رئوس بد در S می‌باشد که یک تناقض است.

همان‌طور که قبلاً بیان شد $\deg(\text{next}_{R_2'}(c)) = 2$ و به‌وضوح راس $\text{next}_{R_2'}(c)$ نسبت به $\hat{S}$ بد نیست. کافی است اثبات کنیم که اگر رئوس y و z نسبت به $\hat{S}$ بد باشند آنگاه آن‌ها نسبت به S نیز بد هستند.

(۱) اگر راس $y \neq a$ نسبت به $\hat{S}$ بد باشد آنگاه نسبت به S نیز بد است. فرض کنیم راس y نسبت به $\hat{S}$ بد است. پس $\deg(y) = 3$ و بنا بر لم ۲.۲.۲، راس y مجاور با دو راس غیر پایایی y_1 و y_2 که $y_1 \leq_{R_2} y_2$ ، از مسیر $zR_2 \text{prev}(c)$ است. گزاره واضح است چون تنها راسی که می‌تواند فرایند تحمیلی روی F'' را آغاز کند راس z است و تا زمانی که رئوس y_1 و y_2 تحمیل نشوند رئوس دیگر نمی‌توانند فرایند را آغاز کنند که در این صورت نتیجه می‌شود که رئوس y_1 و y_2 در زنجیر $\hat{R}_2 \in \hat{S}$ با راس ابتدایی z ، واقع‌اند و به‌علاوه داریم $z\hat{R}_2 y_2 = zR_2 y_2$. بنابه این که راس y نسبت به $\hat{S}$ بد است، دو راس y_1 و y_2 غیرمتوالی هستند و همان‌طور که مدنظر بود راس y نسبت به S نیز بد است.

(۲) اگر راس z نسبت به $\hat{S}$ بد باشد آنگاه نسبت به S نیز بد است. فرض کنیم راس z نسبت به $\hat{S}$ بد است ولی نسبت به S بد نیست. بنابراین $\deg(z) = 3$ و بنا به لم ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲، راس z مجاور با حداقل یک راس از $yR_2 \text{prev}(a)$ است و از آنجایی که z نسبت به S بد نیست، داریم $z \neq c$. در نتیجه z باید دو همسایه متوالی در مسیر $yR_2 \text{prev}_{R_2}(a)$ داشته باشد که بد نبودن z نسبت به S را نتیجه می‌دهد.

بنابه I، II و III تعداد رئوس بد در G نسبت به S' کمتر از تعداد آن‌ها نسبت به S است که یک

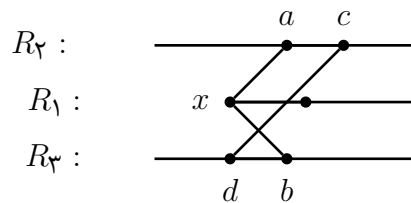
تناقض است و اثبات کامل است.

□

لم ۳.۱.۴. فرض کنیم G یک گراف باشد و $\Delta(G) \leq 3$. اگر $F(G) = 3$ آنگاه یک $-F(G)$ مجموعه F و یک مجموعه زنجیر S متناظر با F وجود دارد به طوری که اگر راس x از یک زنجیر غیر بدیهی $R_1 \in S$ مجاور با دو راس y و z از زنجیر دیگر $R_2 \in S$ باشد آنگاه x راس ابتدایی یا انتهایی R_1 است و رؤس y, z روی R_2 متوالی هستند.

برهان. فرض کنیم F یک $-F(G)$ مجموعه و S یک مجموعه زنجیر متناظر با آن باشد به طوری که در لم ۲.۱.۴ صدق می‌کند. ادعا می‌کنیم که F و S در لم برقرارند. برای اثبات فرض کنیم x یک راس از یک زنجیر غیر بدیهی R_1 است که مجاور با دو راس y و z از زنجیر دیگر R_2 است. از آنجایی که $\Delta(G) \leq 3$ ، راس x یا راس ابتدایی یا انتهایی R_1 است. حال باید نشان دهیم که رؤس y و z روی R_2 متوالی‌اند. (فرض خلف) خلاف آن را در نظر می‌گیریم. در اینجا می‌توانیم نتیجه بگیریم x باید یک راس بد نسبت به S باشد که غیر ممکن است. □

فرض کنیم F یک $-F(G)$ مجموعه از یک گراف G و S یک مجموعه زنجیر متناظر با آن باشد. اگر سه زنجیر غیر بدیهی $R_1, R_2, R_3 \in S$ به طوری که راس $x \in R_1$ دو همسایه $a \in R_2$ و $b \in R_3$ داشته و یک قاطع cd به طوری که $a <_{R_2} c$ و $d <_{R_3} b$ وجود داشته باشد آنگاه x یک راس نامطلوب^۱ نسبت به S است (شکل ۹.۴ را ببینید).



شکل ۹.۴: نمایشی از S با فرض این که راس x از زنجیر R_1 یک راس نامطلوب نسبت به S است.

لم ۴.۱.۴. فرض کنیم G یک گراف باشد و $\Delta(G) \leq 3$. اگر F یک $-F(G)$ مجموعه و S یک مجموعه زنجیر متناظر با F باشد آنگاه هر راس نامطلوب نسبت به S یک راس ابتدایی از یک زنجیر در S است.

برهان. راس x را نسبت به S نامطلوب در نظر می‌گیریم. به جهت سادگی نوشتار فرض کنیم $x \in R_1$ دو همسایه $a \in R_2$ و $b \in R_3$ دارد که R_2, R_1, R_3 زنجیرهای مجزای غیر بدیهی هستند و یک قاطع cd وجود دارد به طوری که $a <_{R_2} c$ و $d <_{R_3} b$ است. از آنجایی که $\Delta(G) \leq 3$ و راس x دو همسایه روی R_2 و R_3 دارد، راس x باید راس ابتدایی یا انتهایی زنجیر R_1 باشد. (فرض خلف) راس x را راس انتهایی زنجیر R_1 در نظر می‌گیریم. واضح است که

¹ unfavorite

۱) $k_F(b) \leq \max\{k_F(x), k_F(a)\} + 1$ می‌باشد. به علاوه بنا به لم ۱.۲.۲ داریم $k_F(c) < k_F(b)$ و $k_F(x) < k_F(c)$ که

$$k_F(a) < k_F(c) < k_F(b) \quad \text{و} \quad k_F(x) < k_F(c) < k_F(b).$$

و در نهایت ۲) $k_F(b) \geq \max\{k_F(x), k_F(a)\} + 1$ را نتیجه می‌دهد که یک تناقض است. $\square$

لم ۵.۱.۴. فرض کنیم G یک گراف باشد و $\Delta(G) \leq 3$. اگر $F(G) = 3$ باشد آنگاه یک $F(G)$ – مجموعه F و یک مجموعه زنجیر S متناظر با آن وجود دارد به طوری که در لم ۳.۱.۴ صدق می‌کند و شامل راس نامطلوب نمی‌باشد.

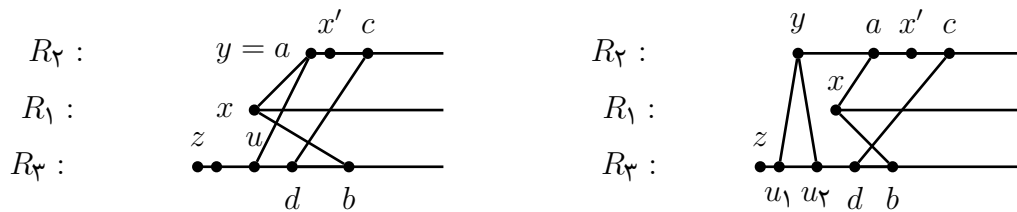
برهان. فرض کنیم $F = \{x, y, z\}$ یک $F(G)$ – مجموعه و $S = \{R_1, R_2, R_3\}$ یک مجموعه زنجیر متناظر با آن باشد به طوری که در لم ۳.۱.۴ صدق می‌کند و کمترین تعداد راس نامطلوب ممکن را دارد. توجه داریم که x, y, z به ترتیب رئوس ابتدایی R_3, R_2, R_1 می‌باشند. در ادامه نشان می‌دهیم G راس نامطلوب نسبت به S ندارد. بنا به لم ۴.۱.۴، رئوس نامطلوب ممکن x, y, z هستند. به عنوان (فرض خلف) x را نامطلوب در نظر می‌گیریم. برای ساده سازی نوشتار، فرض کنیم راس x دو همسایه $a \in R_2$ و $b \in R_3$ دارد به طوری که وجود دارد قاطع cd که $a <_{R_2} c$ و $b <_{R_3} d$ ؛ و وجود ندارد قاطعی مانند $ef \neq cd$ که $a < e \leq c$ و $f \leq d$ (شکل ۹.۴ را ببینید). حال راس $x' = \text{next}_{R_2}(a)$ و مجموعه $F' = \{x', y, z\}$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که F' یک مجموعه تحمیلی است. بنا به لم‌های ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲ و نحوه انتخاب cd ، هر راس v که $a <_{R_2} v <_{R_2} c$ ، درجه ۲ دارد. برای اثبات لم کافی است نشان دهیم که یک مجموعه زنجیر متناظر با F' وجود دارد به طوری که هیچ کدام از رئوس x', y, z نسبت به آن نامطلوب یا بد نیستند و این به عنوان یک نتیجه از موارد زیر حاصل می‌شود.

• برای هر مجموعه زنجیر S' متناظر با F' ، راس y نسبت به S' نه بد و نه نامطلوب است.

مجموعه $S' = \{R'_1, R'_2, R'_3\}$ را یک مجموعه زنجیر دلخواه متناظر با F' در نظر می‌گیریم که x, y, z به ترتیب رئوس ابتدایی زنجیرهای R'_3, R'_2, R'_1 هستند. ابتدا فرض کنیم $y = a$ می‌باشد. اگر راس y بد یا نامطلوب باشد آنگاه درجه ۳ دارد و بنابه لم‌های ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲، یک همسایه u در zR_3d دارد (شکل ۱۰.۴ (چپ) را ببینید). بنا به لم ۲.۲.۲، هر راس در $\text{prev}_{R_3}(u)$ درجه حداکثر ۲ دارد. توجه داریم تا زمانی که راس u یا راس x رنگی نشود فرایند تحمیلی نمی‌تواند از y آغاز شود. راس x' فرایند را آغاز می‌کند و تا زمانی که به یک راس درجه ۳ برسد که c یا d می‌باشد، فرایند ادامه می‌یابد. راس z نیز مانند x' فرایند را آغاز می‌کند و حداقل تا زمانی که راس u تحمیل شود فرایند ادامه می‌یابد. از این رو داریم $zR_3u = zR'_3u$ یا به عبارتی راس u به R'_3 تعلق دارد که بد نبودن

راس y را نتیجه می‌دهد. از طرف دیگر از آنجایی که راس y مجاور با اولین راس زنجیر R'_1 یعنی x' و $u \in R'_3$ است، برای نامطلوب بودن y باید راسی در $zR_3 \text{ prev}(u)$ با راسی در $V(G) \setminus V(zR_3u)$ مجاور باشد که این امر غیرممکن است.

حال فرض کنیم $y \neq a$ باشد. اگر راس y ، بد یا نامطلوب باشد آنگاه درجه ۳ دارد. بنا به لم ۲.۲.۲، راس y باید دو همسایه u_1, u_2 در $zR_3 \text{ prev}_{R_3}(d)$ داشته باشد که با توجه به بد نبودن y نسبت به S ، آن دو باید متوالی باشند (شکل ۱۰.۴ (راست) را ببینید).



شکل ۱۰.۴: نمایشی از S با فرض این که $y = a$ یا $y \neq a$ باشد.

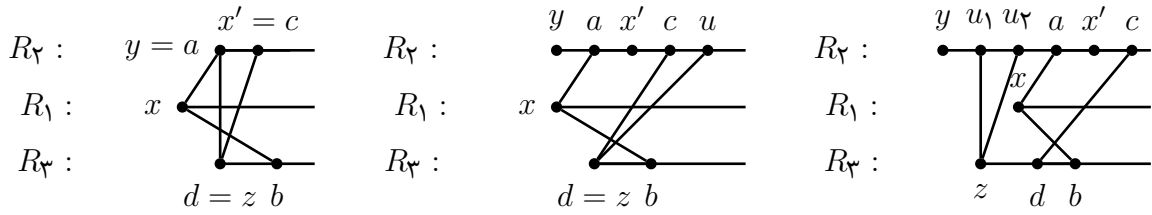
توجه داریم بنا به لم ۲.۲.۲، در زنجیر R_3 هر راس قبل از u_1 درجه حداکثر ۲ دارد. فرایند تحمیلی تنها می‌تواند از راس z آغاز شود و تا تحمیل شدن رئوس u_1 و u_2 ادامه یابد. این در حالیست که رئوس y و x' هنوز راسی را تحمیل نکرده‌اند. در نتیجه رئوس u_1, u_2 دو راس متوالی در R'_3 هستند و راس y بد و نامطلوب نیست.

• برای هر مجموعه زنجیر S' متناظر با F' راس z نسبت به S' نه بد و نه نامطلوب است.

مجموعه $S' = \{R'_1, R'_2, R'_3\}$ را یک مجموعه زنجیر دلخواه متناظر با F' در نظر می‌گیریم که z و y, x' به ترتیب رئوس ابتدایی زنجیرهای R'_3, R'_2, R'_1 هستند. ابتدا فرض کنیم $d \neq z$ می‌باشد. اگر راس z بد یا نامطلوب باشد آنگاه درجه ۳ دارد.

بنا به لم ۲.۲.۲ و نحوه انتخاب cd ، راس z باید دو همسایه u_1, u_2 در $yR_2 \text{ prev}_{R_2}(a)$ داشته باشد که بنا به بد نبودن راس z نسبت به S ، باید متوالی باشند (شکل ۱۱.۴ (راست) را ببینید). توجه داریم بنا به لم ۲.۲.۲، در زنجیر R_2 هر راس قبل از u_1 درجه حداکثر ۲ دارد. فرایند تحمیلی تنها می‌تواند از راس y آغاز شود و تا رنگی شدن رئوس u_1 و u_2 ادامه پیدا کند در حالی که رئوس z و x' تا آن زمان راسی را تحمیل نکرده‌اند. بنابراین u_1, u_2 دو راس متوالی در R'_2 هستند و راس z نه بد و نه نامطلوب است.

حال فرض کنیم که $z = d$ باشد. اگر راس z بد یا نامطلوب باشد آنگاه درجه ۳ دارد. بنا به لم ۲.۲.۲، راس z همسایه‌ای در R_1 ندارد. از آنجایی که z نسبت به S بد نیست و مجاور با راس $c \in R_2$ است، راس z باید مجاور با $\text{prev}_{R_2}(c)$ یا $\text{next}_{R_2}(c)$ باشد. زمانی که راس z مجاور با $\text{prev}_{R_2}(c)$ است باید داشته باشیم $x' = c$ و $\text{prev}_{R_2}(c) = a = y$ ؛ چون تمام رئوس بین a و c در R_2 از درجه ۲ هستند و $\Delta(G) \leq 3$ می‌باشد (شکل ۱۱.۴ (چپ)).



شکل ۱۱.۴: نمایشی از S با فرض این که $z = d$ یا $z \neq d$ باشد.

را ببینید). به وضوح راس z نه بد و نه نامطلوب است چون مجاور با دو راس ابتدایی از دو زنجیر متفاوت می باشد.

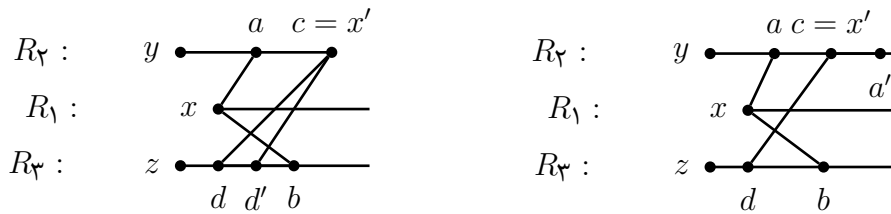
حال فرض کنیم که راس z مجاور با $\text{next}_{R_2}(c)$ باشد (شکل ۱۱.۴ (وسط) را ببینید). فرایند تحمیلی تنها می تواند از راس y آغاز شود و تا تحمیل شدن راس a ادامه یابد. این درحالیست که رئوس z و x' هنوز راسی را تحمیل نکرده اند. رئوس a و x' در گام $k_{F'}(a) + 1$ به ترتیب رئوس x و $\text{next}_{R_2}(x')$ را تحمیل می کنند و تا زمانی که c و u رنگی نباشند x و z هیچ راسی را نمی توانند تحمیل کنند (توجه کنیم تمام رئوس بین a و c در R_2 از درجه ۲ هستند). بنابراین رئوس c و u دو راس متوالی در R'_1 هستند و راس z نه بد و نه نامطلوب است.

• یک مجموعه زنجیر S'' متناظر با F' وجود دارد به طوری که راس x' نه بد و نه نامطلوب است.

مجموعه $S' = \{R'_1, R'_2, R'_3\}$ را یک مجموعه زنجیر متناظر با F' در نظر می گیریم که y, x' و z به ترتیب رئوس ابتدایی R'_3, R'_2, R'_1 هستند. اگر راس x' نه بد و نه نامطلوب نسبت به $S' = S''$ باشد آنگاه چیزی برای اثبات کردن نداریم. اگر راس x' نسبت به S' بد یا نامطلوب باشد آنگاه واضح است که $\deg_G(x') = 3$ می باشد و بنا به لم های ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲ و نحوه انتخاب cd می توان $x' = c$ را نتیجه گرفت. همچنین بنا به لم ۴.۱.۴، راس x' همسایه ای در R_1 ندارد چون در غیراین صورت راسی نامطلوب نسبت به S است. بنابراین یا راس x' دو همسایه متوالی d و d' که $d' <_{R_3} d$ ، روی R_3 دارد یا راس $\text{next}_{R_2}(x') = a'$ یک همسایه از راس x' می باشد؛ که در ادامه به صورت مجزا به آنها می پردازیم (شکل ۱۲.۴ را ببینید).

(I) راس x' دو همسایه متوالی d و d' که $d' <_{R_3} d$ ، روی R_3 دارد (شکل ۱۲.۴ (چپ) را ببینید). در این حالت سه مورد زیر را در نظر می گیریم.

(۱) $k_{F'}(d) = k_{F'}(d')$. در این مورد، نه d و نه d' توسط x' تحمیل نمی شوند و در نتیجه رئوس d و d' رئوس انتهایی دو زنجیر متمایز هستند که نشان می دهند راس x' نه بد و نه نامطلوب است.



شکل ۱۲.۴: نمایشی از $\mathcal{S}$ با فرض این که راس $c = x'$ یک همسایه d' یا a' داشته باشد به طوری که $d' = \text{next}_{R_3}(d)$ و $a' = \text{next}_{R_2}(x')$ باشد.

(۲) $k_{F'}(d) < k_{F'}(d')$. در این مورد، راس d توسط راس x' تحمیل نمی‌شود چون یا $d = z$ و یا در گام $k_{F'}(d) - 1$ رؤس d, d' هنوز رنگی نشده‌اند و بنابراین راس x' حداقل دو همسایه غیر رنگی دارد. از طرف دیگر در گام $k_{F'}(d) - 1$ راس d' رنگی نیست. در نتیجه یا $d = z$ و یا $d \neq z$ و d توسط همسایه‌اش d'' که $d'' \neq x', d'$ تحمیل شده است. از این رو در گام $k_{F'}(d) + 1$ ، راس d می‌تواند راس d' را تحمیل کند. $\mathcal{S}''$ را یک مجموعه زنجیر متناظر با F' در نظر می‌گیریم به طوری که راس d' توسط d تحمیل شود. به وضوح راس x' نسبت به $\mathcal{S}''$ نه بد و نه نامطلوب است.

(۳) $k_{F'}(d') < k_{F'}(d)$. این مورد مشابه با مورد قبل است.

(II) راس x' همسایه‌های a, a' و d را دارد که $a, a' \in R_2$ و $d \in R_3$ (شکل ۱۲.۴ (راست) را ببینید).

ادعا ۶.۱.۴. دو راس a و d به ترتیب به R_2' و R_3' تعلق دارند و به علاوه داریم $zR_3'd = zR_2'a$ و $yR_2'a = yR_3'd$.

ابتدا این ادعا را در دو حالت پایه $y = a$ و $z = d$ اثبات می‌کنیم. سپس حالت کلی را به یکی از این دو حالت تبدیل می‌کنیم.

فرض کنیم $y = a$. اگر $z = d$ آنگاه ادعا واضح است. بنابراین فرض کنیم که $z \neq d$. مطابق با لم ۲.۲.۲ و نحوه انتخاب cd ، راسی در $\text{prev}(d)$ وجود ندارد که با راسی در $V(G) \setminus (V(zR_3'd) \cup \{y\})$ مجاور باشد. توجه کنیم که راس x' تا زمانی که یکی از رؤس d یا a' تحمیل نشده باشد نمی‌تواند راسی را تحمیل کند. به علاوه اگرچه راس y ممکن است بتواند راس x را تحمیل کند اما بعد از آن x باید در انتظار تحمیل شدن یکی از همسایه‌هایش بماند. حال واضح است که $zR_3'd = zR_2'a$.

فرض کنیم $z = d$. اگر $y = a$ آنگاه ادعا واضح است. بنابراین فرض کنیم که $y \neq a$. مطابق با لم ۲.۲.۲، راسی در $\text{prev}(a)$ با راسی در $V(G) \setminus (V(yR_2'a) \cup \{z\})$ مجاور نمی‌باشد. مشابه با حالت قبل، راس x' تا زمانی که یکی از رؤس a' یا d تحمیل نشده باشد نمی‌تواند راسی را تحمیل کند. اگرچه فرایند تحمیلی از راس

z می‌تواند آغاز شود اما تا زمانی ادامه دارد که یک راس درجه ۳ را تحمیل کند که می‌دانیم این راس متعلق به zR_3bx است. با این وجود بعد از تحمیل شدن این راس، فرایند تحمیلی در این زنجیر در انتظار می‌ماند و از این رو فرایند از راس y ادامه می‌یابد تا زمانی که راس a تحمیل شود. بنابراین داریم $yR_3a = yR'_3a$.
حال فرض کنیم $y \neq a$ و $z \neq d$. در اولین گام از فرایند تحمیلی، راس x' نمی‌تواند راسی را تحمیل کند. رئوس y و z تنها رئوسی هستند که ممکن است فرایند تحمیلی را آغاز کنند. در اولین گام از فرایند تحمیلی، سه حالت متمایز زیر ممکن است روی دهد:

(۱) رئوس y و z به ترتیب رئوس $y' = \text{next}_{R_3}(y)$ و $z' = \text{next}_{R_3}(z)$ را تحمیل می‌کنند.

(۲) راس y راس $y' = \text{next}_{R_3}(y)$ را تحمیل می‌کند ولی راس z راسی را تحمیل نمی‌کند و

(۳) راس z راس $z' = \text{next}_{R_3}(z)$ را تحمیل می‌کند ولی راس y راسی را تحمیل نمی‌کند.

به علت تشابه، تنها به بررسی حالت اول می‌پردازیم. گام دوم فرایند تحمیلی، مانند حالتی است که رئوس y و z را از گراف حذف کرده‌ایم و y' و z' به جای آن‌ها در F می‌باشند. از این رو بنا به استقرا یکی از حالات بالا را داریم که اثبات کامل است.

□

۲.۴ یک شرط کافی برای ۳-مسیر موازی بودن

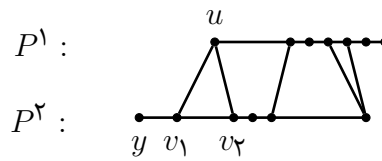
در این بخش ابتدا به معرفی خانواده‌ای از گراف‌های ۳-مسیر موازی می‌پردازیم و در ادامه به کمک لم‌هایی که پیشتر به اثبات آن‌ها پرداختیم نشان می‌دهیم که گراف‌ها با ویژگی $\Delta(G) \leq 3$ و $F(G) = 3$ متعلق به این خانواده از گراف‌ها می‌باشد.

فرض کنیم G یک گراف با $\Delta(G) \leq 3$ باشد که مجموعه رئوسش به سه مسیر القایی راس مجزا P^1, P^2, P^3 افراز شود و ویژگی‌های زیر را دارا باشد.

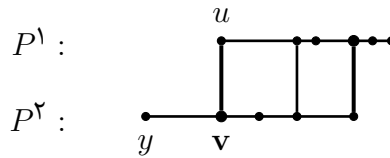
۱. هر کدام از P^1 و P^2 حداقل دو راس دارند.

۲. اگر P^3 یک راس منفرد باشد آنگاه درجه‌اش حداکثر ۲ است.

۳. اگر یال xy وجود داشته باشد که رئوس انتهایی‌اش x و y به ترتیب روی P^i و P^j باشد آنگاه یال $x'y'$ وجود ندارد به طوری که $x' \in P^j, y' \in P^i, x <_{P^i} x'$ و $y' <_{P^j} y$.



شکل ۱۳.۴: نمایشی از مسیرهای P^1 و P^2 با فرض این که راس u از مسیر P^1 ، دو همسایه v_1, v_2 روی مسیر P^2 داشته باشد.



شکل ۱۴.۴: نمایشی از مسیرهای P^1 و P^2 نشان داده شده در شکل ۱۳.۴.

۴. اگر دو یال ab و cd با ویژگی‌های $a \in P^i, b, c \in P^j, d \in P^k, c <_{P^j} b$ و $\{i, j, k\} = [3]$ وجود داشته باشد آنگاه یال xy که $a <_{P^i} x$ و $y <_{P^k} d$ وجود ندارد.

۵. هر راس $v \in V(P^i)$ فاقد دو همسایه غیر متوالی روی مسیر P^j است به طوری که $i \neq j$ و $i, j \in [3]$.

۶. اگر $\{i, j, k\} = [3]$ و $x \in P^i$ راسی با دو همسایه $a \in P^j$ و $b \in P^k$ باشد آنگاه یال cd که $a <_{P^j} c$ و $d <_{P^k} b$ وجود ندارد.

از آنجایی که $\Delta(G) \leq 3$ و بنا به ویژگی ۵، اگر یک راس از P^1 (یا P^2) دو همسایه روی P^2 (به ترتیب P^1) داشته باشد آنگاه این راس یا راس ابتدایی یا انتهایی از P^1 (به ترتیب P^2) است و همسایه‌هایش روی P^2 (به ترتیب P^1) متوالی هستند. به علاوه بنا به ویژگی سوم، حداکثر یکی از رئوس ابتدایی (به ترتیب انتهایی) P^1 و P^2 می‌تواند دو همسایه متوالی روی مسیر دیگر داشته باشد. اگر یک راس u از P^1 (به ترتیب P^2) دو همسایه v_1 و v_2 روی P^2 (به ترتیب P^1) داشته باشد آنگاه این دو همسایه متوالی را به هم می‌چسبانیم تا یک راس بزرگ‌تر v و یک یال ضخیم‌تر بین u و v داشته باشیم. حال دو مسیر P^1 و P^2 را به صورت خط‌های افقی موازی رسم می‌کنیم (با در نظر نگرفتن رئوس) به طوری که P^1 بالای P^2 و و یال‌های بین آن‌ها قاطع‌های عمودی باشند. توجه کنیم بنا به ویژگی ۳، در این نمایش تقاطعی نداریم. این نمایش را **نمایش نردبانی**^۱ از P^1 و P^2 می‌نامیم، تصاویر ۱۳.۴ و ۱۴.۴ را ببینید.

همچنین $a_1, \dots, a_m \in P^1$ و $b_1, \dots, b_m \in P^2$ را به عنوان رئوس P^1 و P^2 در نمایش نردبانی در نظر می‌گیریم به طوری که $a_i b_i$ قاطع‌های این نمایش باشند. توجه داریم که $a_i b_i$ به صورت یک قاطع عمودی برای هر $i \in [m]$ باشد. زیرگراف القایی روی مجموعه رئوس

$$V_i = \{v \in V(P^1) \cup V(P^2) : a_i \leq_{P^1} v \leq_{P^1} a_{i+1} \text{ or } b_i \leq_{P^2} v \leq_{P^2} b_{i+1}\}$$

از این نمایش نردبانی را **بخش**^۲ S_i که $i \in [m-1]$ ، متناظر با این نمایش نردبانی می‌نامیم. اگر حداقل یک راس قبل (یا به ترتیب بعد) از a_1 یا b_1 (به ترتیب a_m یا b_m) وجود داشته باشد

¹ladder drawing

²part

آنگاه بخش S_0 (به ترتیب S_m) به صورت زیرگراف القایی روی مجموعه رئوس

$$V_0 = \{v \in V(P^1) \cup V(P^2) : v \leq_{P^1} a_1 \text{ or } v \leq_{P^2} b_1\}$$

(به ترتیب $V_m = \{v \in V(P^1) \cup V(P^2) : a_m \leq_{P^1} v \text{ or } b_m \leq_{P^2} v\}$) تعریف می کنیم. همچنین هرکدام از رئوس a_i و b_i که $i \in [m]$ یک راس **مرزی**^۱ می نامیم.

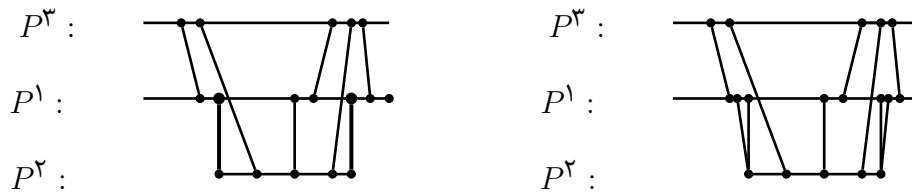
لم ۱.۲.۴. هر گراف G که دارای ویژگی های مذکور باشد یک نمایش استاندارد دارد که مسیرهای موازی اش P^1, P^2, P^3 است.

برهان. یک نمایش نردبانی از P^1 و P^2 در نظر می گیریم. ادعا می کنیم که P^3 را به صورت مسیر افقی بالای P^1 به نحوی می توان رسم نمود که یال های بین $V(P^1) \cup V(P^2)$ و $V(P^3)$ به صورت قاطع، یکدیگر را قطع نکنند. برای اثبات این ادعا از استقرا روی $n = |V(P^3)| \geq 1$ بهره می بریم. فرض کنیم $n = 1$ یا به عبارتی $P^3 = z$. مشکل ترین حالت، حالتی است که $\deg(z) = 2$ (حالت ۱، $\deg(z) = 0$ بدیهی است). مجموعه $N(z) = \{u, v\}$ را در نظر می گیریم. بنا به ویژگی ۵ و ۶ یک بخش یکتای S_i وجود دارد به طوری که $u, v \in V(S_i)$. واضح است که با قرار دادن راس z بالای بخش S_i (نه بالای رئوس مرزی) می توان دو قاطع zu و zv را به نحوی رسم نمود که تقاطعی، بین قاطع ها بوجود نیاید. بنابراین ادعا برای $n = 1$ برقرار است.

حالا فرض کنیم $n \geq 2$ و $P^3 = z_1 z_2 \dots z_n$. بدون کم شدن از کلیت، فرض کنیم هر z_i حداقل یک همسایه در $V(P^1) \cup V(P^2)$ دارد. مسیر P^3 را با حذف راس z_n از P^3 به دست می آوریم. بنا به استقرا می توانیم P^3 را به صورت یک مسیر افقی بالای P^1 به نحوی رسم کنیم که یال های بین $V(P^1) \cup V(P^2)$ و $V(P^3)$ به صورت قاطع یکدیگر را قطع نکنند. فرض کنیم x' و y' به ترتیب آخرین رئوس P^1 و P^2 باشند که دارای همسایه ای روی P^3 هستند. بنابه ویژگی ۳، $|N(z_{n-1}) \cap \{x', y'\}| \geq 1$. به علت مشابهت فرض کنیم $y' z_{n-1}, x' z_j \in E(G)$. بخش شامل همسایه های z_n در $V(P^1) \cup V(P^2)$ در نظر می گیریم. (توجه داریم که بنا به ویژگی ۳، ۴ و ۶، راسی روی P^3 وجود ندارد که همسایه ای در S_j ، $k < j$ داشته باشد). تمام رئوس واقع در داخل بخش S_k و بعد از x' را به سمت راست حرکت دهید تا از تقاطع قاطع $y' z_{n-1}$ و P^1 عبور کنند. حالا بخش S_k را امتداد می دهیم (در واقع a_{k+1} ، b_{k+1} و تمام رئوس بعد از این دو راس (اگر وجود داشته باشند و لازم باشد) را به سمت راست حرکت می دهیم). بنابراین با اضافه کردن z_n به P^3 ، یال های مجاور با z_n به نحوی قابل رسمند که تقاطعی بین قاطع ها بوجود نمی آید. در حالت دیگر که داریم $x' z_{n-1}, y' z_j \in E(G)$ ، به طور مشابه عمل می کنیم. بنابراین به کمک استقرا درستی ادعا ثابت است. برای اتمام اثبات لم، کافی است یال های ضخیم و رئوس بزرگ تر را به دو یال و دو راس به نحوی مجزا کنیم که تقاطعی به وجود نیاید، شکل ۱۵.۴ را ببینید.

□

¹boundary



شکل ۱۵.۴: شکل سمت راست از تقسیم هر یال ضخیم و راس پررنگ در شکل سمت چپ به دو یال و دو راس حاصل شده به‌طوری که تقاطعی بین قاطع‌ها به‌وجود نیاید.

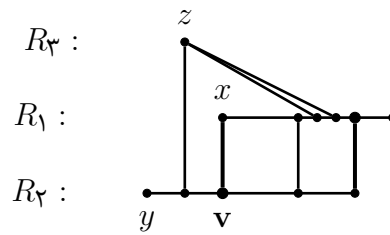
حالا در موقعیتی هستیم که می‌توانیم لم بعدی که تمام لم‌های این بخش را به هم مربوط می‌سازد را اثبات کنیم.

لم ۲.۲.۴. فرض کنیم G یک گراف باشد و $\Delta(G) \leq 3$. اگر $F(G) = 3$ باشد آنگاه یک $-F(G)$ مجموعه، یک مجموعه زنجیر $\mathcal{S} = \{R_1, R_2, R_3\}$ متناظر با آن و یک نمایش استاندارد از G وجود دارد به‌طوری که مسیرهای موازی‌اش R_1, R_2, R_3 است.

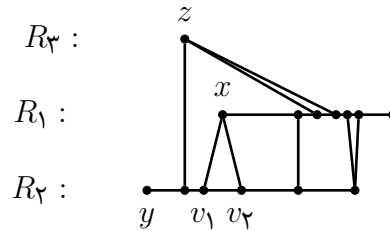
برهان. فرض کنیم $F = \{x, y, z\}$ یک $-F(G)$ مجموعه و $\mathcal{S} = \{R_1, R_2, R_3\}$ یک مجموعه زنجیر متناظر با آن باشد که توسط لم ۵.۱.۴ وجودش اثبات شده است و کمترین تعداد ممکن زنجیر غیر بدیهی را دارد. x, y, z را به‌ترتیب رئوس ابتدایی از زنجیرهای R_1, R_2, R_3 در نظر می‌گیریم. در ادامه، اثبات می‌کنیم که G دارای یک نمایش استاندارد است به‌طوری که مسیرهای موازی‌اش R_1, R_2, R_3 هستند و بنابراین اثبات لم کامل می‌شود.

توجه داریم که زمانی که تنها یک زنجیر غیر بدیهی در $\mathcal{S}$ داریم آنگاه با رسم زنجیر غیر بدیهی به‌صورت یک خط افقی، قرار دادن دو زنجیر بدیهی در طرفین آن و رسم یال‌ها به‌صورت قاطع، به‌وضوح یال‌های بین زنجیرها یکدیگر را قطع نمی‌کنند و ما یک نمایش استاندارد از G داریم. اگر زنجیرها در $\mathcal{S}$ غیر بدیهی باشند آنگاه بنا به لم‌های ۲.۲.۲، ۳.۲.۲ و ۵.۱.۴، گراف G با مسیرهای R_1, R_2, R_3 در شرایط بیان شده قبل از لم ۱.۲.۴، صدق می‌کند. بنابراین بنابه لم ۱.۲.۴، واضح است که G دارای یک نمایش استاندارد می‌باشد به‌طوری که مسیرهای موازی‌اش R_1, R_2, R_3 هستند. در ادامه اثبات فرض کنیم تنها دو زنجیر در $\mathcal{S}$ غیربدیهی هستند.

به‌منظور ساده‌سازی نوشتار، فرض کنیم زنجیرهای R_1 و R_2 غیر بدیهی هستند و R_3 بدیهی است. یک نمایش نردبانی از R_1 و R_2 وجود دارد به‌طوری که R_1 در سمت بالای R_2 واقع است. توجه داریم که زنجیر R_3 تنها دارای یک راس z می‌باشد. بدون کم شدن از کلیت فرض می‌کنیم که تعداد همسایه‌های z روی R_1 کمتر از تعداد همسایه‌هایش روی R_2 نباشد. حالا راس z را بالای R_1 قرار می‌دهیم به‌طوری که یال بین z و همسایه‌اش روی R_2 (اگر وجود داشته باشد) یک قاطع عمودی باشد (شکل ۱۶.۴ را ببینید). حال می‌توانیم دو یال مجاور دیگر با z را به‌صورت قاطع رسم کنیم. برای رسیدن به نمایش مورد نظر کافی است هر یال



شکل ۱۶.۴: نمایشی از زنجیر بدیهی $R_3 = (z)z$ واقع در بالای R_1 ، به‌طوری‌که یال بین z و همسایه‌اش روی R_2 (اگر وجود داشته باشد) یک قاطع عمودی باشد.



شکل ۱۷.۴: نمایشی از زنجیرهای R_3 و R_1, R_2 در شکل ۱۶.۴ به‌طوری‌که یال‌های بین آن‌ها به‌صورت قاطع‌اند و یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

ضخیم و راس بزرگ‌تر را به دو یال و دو راس تقسیم کنیم (به حالت اصلی گراف برگردیم) به‌طوری‌که تقاطع بوجود نیاید (شکل ۱۷.۴ را ببینید). بنابراین لم اثبات شد.

□

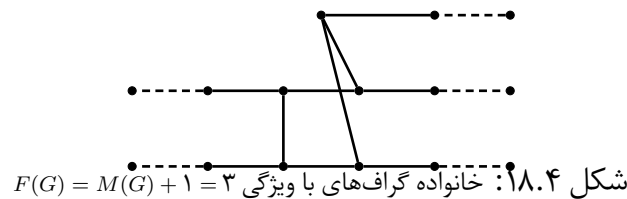
توجه داریم که این لم قوی‌تر از گزاره ۵.۳.۱ و قضیه ۴.۳.۱ است.

۳.۴ ماکزیمم پوچی و عدد تحمیلی در گراف‌ها با ویژگی ماکزیمم درجه حداکثر ۳

در این بخش به کمک لم‌های اثبات شده قبل به ارائه و اثبات نتایج اصلی این فصل می‌پردازیم. گزاره ۲.۱.۲ بیان‌گر این مطلب بود که یک گراف ۳-مسیر موازی یک مجموعه تحمیلی از اندازه حداکثر ۳ دارد. در قضیه بعد نشان می‌دهیم که عدد تحمیلی این گراف‌ها با شرط $\Delta(G) \leq 3$ ، برابر ۳ می‌باشد.

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنیم G یک گراف باشد و $\Delta(G) \leq 3$. در این صورت $F(G) = 3$ اگر و تنها اگر G یک گراف ۳-مسیر موازی باشد. به‌طور خاص، مجموعه رئوسی که در سمت چپ مسیرهای موازی در هر نمایش استاندارد از یک گراف ۳-مسیر موازی واقع‌اند، تشکیل یک $F(G)$ -مجموعه را می‌دهند.

برهان. فرض کنیم G یک گراف ۳-مسیر موازی باشد و $\Delta(G) \leq 3$. بنابه گزاره ۲.۱.۲، $F(G) \leq 3$. اگر $F(G) = k < 3$ آنگاه بنا به گزاره ۵.۳.۱ و گزاره ۴.۳.۱، G یا یک مسیر یا یک



گراف ۲- مسیر موازی است که غیرممکن می‌باشد.

حال فرض کنیم G یک گراف با ویژگی‌های $F(G) = 3$ و $\Delta(G) \leq 3$ باشد. بنا به [لم ۲.۲.۴](#) یک نمایش استاندارد از G وجود دارد به‌طوری که مسیرهای موازی اش زنجیرهای یک مجموعه زنجیر متناظر با یک $F(G)$ -مجموعه است. بنابراین G یک گراف k -مسیر موازی است که $k \in [3]$. اگر G یک گراف k -مسیر موازی باشد که $k < 3$ آنگاه بنابه گزاره‌های [۵.۳.۱](#) و [۴.۳.۱](#)، $F(G) = k < 3$ که یک تناقض است. بنابراین G یک گراف ۳-مسیر موازی است. بنا به گزاره [۲.۱.۲](#)، می‌دانیم رئوس واقع در سمت چپ مسیرهای موازی در هر نمایش استاندارد از G تشکیل یک $F(G)$ -مجموعه می‌دهد و اثبات کامل است.

□

اگرچه از گزاره‌های [۵.۳.۱](#) و [۴.۳.۱](#) برای اثبات $1, 2 \neq F(G)$ ، بهره بردیم ولی می‌توان به جای آن‌ها از [لم ۲.۲.۴](#) استفاده نمود. به‌عنوان یک نتیجه از قضیه [۱.۳.۴](#)، در قضیه بعد یک پاسخ جزئی به مساله [۱.۳.۱](#) می‌دهیم. در واقع به‌صورت کلی گراف‌ها با ویژگی $\Delta(G) \leq 3$ که عدد تحمیلی و ماکزیمم پوچی حداکثر ۳ دارند را دسته‌بندی می‌کنیم.

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنیم G یک گراف باشد و $\Delta(G) \leq 3$. در این صورت:

۱. $F(G) = M(G) = 1$ اگر و تنها اگر G یک مسیر است.

۲. $F(G) = M(G) = 2$ اگر و تنها اگر G یک گراف ۲-مسیر موازی است.

۳. $F(G) = M(G) + 1 = 3$ اگر و تنها اگر G یک گراف از نوع تعریف شده در شکل [۱۸.۴](#) است.

۴. $F(G) = M(G) = 3$ اگر و تنها اگر G یک گراف ۳-مسیر موازی است و از نوع تعریف شده در شکل [۱۸.۴](#) نمی‌باشد.

۵. گرافی با شرایط $F(G) = M(G) + 1 = 2$ یا $F(G) = M(G) + 2 = 3$ وجود ندارد.

برهان. اولین عبارت به‌راحتی از گزاره [۵.۳.۱](#) و قضیه [۱.۳.۱](#) نتیجه می‌شود. با استفاده از قضیه‌های [۶.۳.۱](#) و [۴.۳.۱](#) دومین عبارت نیز برقرار است.

به‌منظور اثبات عبارت سوم، فرض کنیم $F(G) = M(G) + 1 = 3$. از آنجایی که $F(G) = 3$ و بنا به قضیه [۱.۳.۴](#)، G یک گراف ۳-مسیر موازی است. بنابه قضیه [۶.۳.۱](#)، G یک گراف در

خانواده $\mathcal{F}$ می‌باشد. خانواده $\mathcal{F}$ شامل ۶ نوع گراف است. از آنجایی که $\Delta(G) \leq 3$ ، تنها نوع ممکن، نوع معرفی شده در شکل ۱۸.۴ می‌باشد. به‌طور عکس اگر G یک گراف از نوع تعریف شده در شکل ۱۸.۴ باشد آنگاه G در خانواده $\mathcal{F}$ می‌باشد و بنا به قضیه ۶.۳.۱، $M(G) = 2$. از طرف دیگر G یک گراف ۳-مسیر موازی است و بنابراین بنا به قضیه ۱.۳.۴، $F(G) = 3$ که اثبات عبارت سوم کامل است.

به‌عنوان یک نتیجه مستقیم از قضیه ۱.۳.۴، $F(G) = M(G) = 3$ برای ۳-مسیر موازی بودن کافی است. همچنین بنا به قضیه ۶.۳.۱، G از نوع تعریف شده در شکل ۱۸.۴ نمی‌باشد. به‌طور عکس اگر G یک گراف ۳-مسیر موازی باشد ولی از نوع تعریف شده در شکل ۱۸.۴ نباشد آنگاه بنا به گزاره ۱.۳.۱ و ۲.۱.۲، $1 \leq M(G) \leq F(G) \leq 3$ و با استفاده از قضیه ۶.۳.۱ و ۵.۳.۱، $M(G) \neq 1, 2$ که در این‌جا اثبات عبارت چهارم کامل است.

برای اثبات عبارت آخر، توجه داریم زمانی که $F(G) = 2$ ، G یک گراف ۲-مسیر موازی می‌باشد (قضیه ۴.۳.۱ را ببینید) و از این‌رو بنا به قضیه ۶.۳.۱، $M(G) = 2$. همچنین زمانی که $F(G) = 3$ ، G یک گراف ۳-مسیر موازی می‌باشد (قضیه ۱.۳.۴ را ببینید). اما می‌دانیم $M(G) = 1$ اگر فقط اگر G یک مسیر است (قضیه ۵.۳.۱ را ببینید). بنابراین به‌وضوح عبارت پنجم نیز برقرار است.

□

توجه داریم، از آنجایی که $M(G) \leq F(G)$ و $F(G) \leq 3$ ، قضیه ۲.۳.۴ تمام مقادیر ممکن $M(G)$ و $F(G)$ را پوشش می‌دهد.

این بخش را با حدس زیر که توسط قضیه ۱.۳.۴، گزاره‌های ۴.۳.۱ و ۵.۳.۱؛ و ملاحظه ۱.۱.۲ حمایت می‌شود به پایان می‌رسانیم.

حدس ۱.۳.۴. فرض کنیم G یک گراف باشد و $\Delta(G) \leq 3$. در این صورت $F(G) = k$ اگر و تنها اگر G یک گراف k -مسیر موازی باشد.

مراجع

- [1] Alishahi M., Rezaei-Sani E. (2020), “Graphs with total forcing number two, revisited” **Journal of Algebraic Systems**, Accepted
- [2] Alishahi M., Rezaei-Sani E., and Sharifi E. (2020), “Maximum nullity and zero forcing number on graphs with maximum degree at most three” **Discrete Applied Mathematics**, 284, pp 179-194
- [3] Aazami A., (2008), PhD thesis, “Hardness results and approximation algorithms for some problems on graphs”, Math. Dept. Waterloo University
- [4] Akbari S., Vatandoost E. and Pour Y.G. (2017), “Maximum nullity and zero forcing number on cubic graphs” **arXiv preprint**, arXiv:1705.09773
- [5] Barioli F., Barrett W., Fallat S.M., Hall H.T., Hogben L., Shader B., van den Driessche P. and Van Der Holst H. (2013), “Parameters Related to Tree-Width, Zero Forcing, and Maximum Nullity of a Graph” **Journal of Graph Theory**, 72(2), pp 146-177
- [6] Barioli F., Barrett W., Fallat S.M., Hall H.T., Hogben L., Shader B., Van Den Driessche P. and Van Der Holst H. (2010), “Zero forcing parameters and minimum rank problems” **Linear Algebra and its Applications**, 433(2), pp 401-411.
- [7] Benson K.F., Ferrero D., Flagg M., Furst V., Hogben L., Vasilevska V. and Wissman B. (2015), “Power domination and zero forcing” **arXiv preprint**, arXiv:1510.02421
- [8] Brimkov B. and Davila R. (2016), “Characterizations of the connected forcing number of a graph” **arXiv preprint**, arXiv:1604.00740
- [9] Brimkov B. and Hicks I.V. (2017), “Complexity and computation of connected zero forcing” **Discrete Applied Mathematics**, 229, pp 31-45

- [10] Brimkov B., Fast C.C. and Hicks I.V. (2017) "Graphs with extremal connected forcing numbers" **arXiv preprint**, arXiv:1701.08500
- [11] Burgarth D., Giovannetti V., Hogben L., Severini S. and Young M. (2015), "Logic circuits from zero forcing" **Natural computing**, 14(3), pp 485-490
- [12] Burgarth D. and Giovannetti V. (2007), "Full control by locally induced relaxation" **Physical review letters**, 99(10), pp 100501
- [13] Davila R. and Henning M.A. (2019), "On the total forcing number of a graph" **Discrete Applied Mathematics**, 257, pp 115-127
- [14] Davila R. and Henning M. (2017), "Total forcing sets in trees" **arXiv preprint**, arXiv:1702.06496
- [15] Davila R., Henning M.A., Magnant C. and Pepper R. (2018), "Bounds on the connected forcing number of a graph" **Graphs and Combinatorics**, 34(6), pp 1159-1174
- [16] Davila R. and Henning M. (2018), "Total Forcing and Zero Forcing in Claw-Free Cubic Graphs." **Graphs and Combinatorics**, 34(6), pp 1371-1384
- [17] Davila R.R., (2015), PhD thesis, "Bounding the forcing number of a graph", Math. Dept. Texas State University
- [18] Dean N., Ilic A., Ramirez I., Shen J. and Tian K. (2011), "On the power dominating sets of hypercubes." In 2011 14th IEEE International Conference on Computational Science and Engineerin, pp 488-491, IEEE
- [19] Deaett L. (2011), "The minimum semidefinite rank of a triangle-free graph." **Linear Algebra and its Applications**, 434(8), pp 1945-1955
- [20] Haynes T.W., Hedetniemi S.M., Hedetniemi S.T. and Henning M.A. (2002), "Domination in graphs applied to electric power networks" **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, 15(4), pp 519-529
- [21] István F. (1948), "On straight-line representation of planar graphs" **Acta scientiarum mathematicarum**, 11(2), pp 229-233
- [22] Johnson C.R., Loewy R. and Smith P.A. (2009), "The graphs for which the maximum multiplicity of an eigenvalue is two" **Linear and Multilinear Algebra**, 57(7), pp 713-736.

- [23] Row D.D. (2012), "A technique for computing the zero forcing number of a graph with a cut-vertex" **Linear Algebra and its Applications**, 436(12), pp 4423-4432.
- [24] Trefois M. and Delvenne J.C. (2013), "Zero forcing sets, constrained matchings and minimum rank." **Linear and Multilinear Algebra**, 34(6), pp 1371-1384
- [25] Work A.M.R.S.G. (2008), "Zero forcing sets and the minimum rank of graphs" **Linear Algebra and its Applications**, 428(7), pp 1628-1648.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Size	اندازه
Part	بخش
Trivial	بدیهی
Claw-Free	پنجه آزاد
Degree	درجه
Cycle	دور
Bad Vertex	راس بد
Isolated Vertex	راس تنها
Unfavorite Vertex	راس نامطلوب
Forcing Chains	زنجیرهای تحمیلی
Induced Subgraph	زیرگراف القایی
Domination Number	عدد احاطه‌گری
Power Domination Number	عدد احاطه‌گری قوی
Leaf Number	عدد برگ‌گی
Zero Forcing Number	عدد تحمیلی صفر
Total Forcing Number	عدد تحمیلی کلی
Connected Forcing Number	عدد تحمیلی همبند
Path Cover Number	عدد مسیرهای پوششی
Non-Trivial	غیر بدیهی
Zero Forcing Process	فرایند تحمیلی صفر
Segment	قاطع
Section	قطعه
Empty Graph	گراف تهی
Complete Graph	گراف کامل
k -Parall Path graph	گراف k -مسیر موازی
Maximum Nullity	ماکزیمم پوچی

Adjacent.....	مجاور.
Domination Set	مجموعه احاطه‌گر.
Power Domination Set	مجموعه تحمیلی صفر.
Zro Forcing Set	مجموعه تحمیلی صفر.
Total Forcing Set	مجموعه تحمیلی کلی.
Connected Forcing Set.....	مجموعه تحمیلی همبند.
Chain Set	مجموعه زنجیر.
Partial Chain Set.....	مجموعه زنجیرهای جزئی.
Drived Set	مجموعه مشتق شده.
Order.....	مرتبه.
Boundary	مرزی.
Path	مسیر.
Minimum Rank	مینیمم مرتبه.
Standard Drawing.....	نمایش استاندارد.
Ladder Drawing	نمایش نردبانی.
Standard Drawing.....	نمایش استاندارد.
Chord	وتر.
Neighbor	همسایه.
Closed Neighborhood	همسایگی بسته.
Open Neighborhood	همسایگی باز.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjacent	مجاور
Bad Vertex	راس بد
Boundary	مرزی
Chain Set	مجموعه زنجیر
Chord	وتر
Claw-Free	پنجه آزاد
Closed Neighborhood	همسایگی بسته
Complete Graph	گراف کامل
Connected Forcing Number	عدد تحمیلی همبند
Connected Forcing Set	مجموعه تحمیلی همبند
Cycle	دور
Degree	درجه
Domination Number	عدد احاطه‌گری
Domination Set	مجموعه احاطه‌گر
Driven Set	مجموعه مشتق شده
Empty Graph	گراف تهی
Forcing Chains	زنجیرهای تحمیلی
Induced Subgraph	زیرگراف القایی
Isolated Vertex	راس تنها
k -Parall Path Graph	گراف k - مسیر موازی
Ladder Drawing	نمایش نردبانی
Leaf Number	عدد برگ
Maximum Nullity	ماکزیمم پوچی
Minimum Rank	مینیمم مرتبه
Neighbor	همسایه
Non-Trivial	غیر بدیهی

Open Neighborhood	همسایگی باز
Order	مرتبه
Part	بخش
Partial Chain Set	مجموعه زنجیرهای جزئی
Path	مسیر
Path Cover Number	عدد مسیرهای پوششی
Power Domination Number	عدد احاطه‌گری قوی
Power Domination Set	مجموعه احاطه‌گر قوی
Segment	قاطع
Section	قطعه
Size	اندازه
Standard Drawing	نمایش استاندارد
Total Forcing Number	عدد تحمیلی کلی
Total Forcing Set	مجموعه تحمیلی کلی
Trivial	بدیهی
Unfavorite Vertex	راس نا مطلوب
Zero Forcing Number	عدد تحمیلی صفر
Zero Forcing Process	فرایند تحمیلی صفر
Zro Forcing Set	مجموعه تحمیلی صفر

نمایه

ا

اندازه ۱

ب

بخش ۴۰

بدیهی ۱۵

د

درجه ۱

دور ۲

ر

راس بد ۲۳

راس نامطلوب ۳۴

ز

زنجیر ۱۴

زنجیرهای تحمیلی ۵

زیرگراف القایی ۲

ع

عدد احاطه‌گری ۸

عدد احاطه‌گری قوی ۸

عدد برگی ۶

عدد تحمیلی صفر ۳

عدد تحمیلی کلی ۶

عدد تحمیلی همبند ۶

عدد مسیرهای پوششی ۵

غ

غیر بدیهی ۱۵

ف

فرایند تحمیلی ۳

ق

قاطع ۱۲

قطعه ۱۸

گ

گراف تهی ۲

گراف کامل ۲

گراف k - مسیر موازی ۱۱

م

ماکزیمم پوچی ۳

مجاور ۱

مجموعه احاطه گر ۷

مجموعه احاطه گر قوی ۸

مجموعه تحمیلی صفر ۳

مجموعه تحمیلی کلی ۶

مجموعه تحمیلی همبند ۶

مجموعه زنجیر ۱۴

مجموعه زنجیرهای جزئی ۱۵

مجموعه مشتق شده ۳

مرتبه ۱

مرزی ۴۱

مسیر ۲

مینیمم مرتبه ۲

ن

نمایش استاندارد ۱۲

نمایش نردبانی ۴۰

و

وتر ۲

ه

همسایگی باز ۱

همسایگی بسته ۱

همسایه ۱

علائم اختصاری

- $\text{end}(R_i)$: آخرین رأس زنجیر R_i ۱۵
- $\deg_G(v)$: درجه رأس v در گراف G ۱
- C_n : دور k راسی ۲
- $\text{next}_{R_i}(v_j)$: رأس بعد از v_j در زنجیر R_i ۱۵
- $\text{prev}_{R_i}(v_j)$: رأس قبل از v_j در زنجیر R_i ۱۵
- $\text{chain}_S(v)$: زنجیر تحمیلی در S شامل v ۱۵
- $G[S]$: زیرگراف القایی روی رؤس در مجموعه S ۲
- $G - xy$: زیر گراف پوشای حاصل از حذف یال xy از G ۲
- $G - S$: زیر گراف حاصل از حذف رؤس S از G ۲
- $\gamma(G)$: عدد احاطه‌گری ۸
- $\gamma_P(G)$: عدد احاطه‌گری قوی ۸
- $F(G)$: عدد تحمیلی ۱۵
- $F_t(G)$: عدد تحمیلی کلی ۶
- $F_c(G)$: عدد تحمیلی همبند ۶
- $P(G)$: عدد مسیرهای پوششی ۵
- $k_F(v)$: گامی که V در آن رنگی می‌شود ۳
- K_n : گراف کامل ۲
- Δ : ماکزیمم درجه ۱
- $M(G)$: ماکزیمم مرتبه گراف G ۳
- $ZFS(G)$: مجموعه تمام کوچک‌ترین مجموعه‌های تحمیلی گراف G ۵
- $S_n(\mathbb{R})$: مجموعه تمام ماتریس‌های n در n متقارن روی اعداد حقیقی v ۲
- P_n : مسیر k راسی ۲
- δ : مینیمم درجه ۱
- $mr(G)$: مینیمم مرتبه گراف G ۲
- $N(v)$: همسایگی باز رأس v ۱
- $N[v]$: همسایگی بسته رأس v ۱

Aabstract

It is known that zero forcing number is an upper bound for the maximum nullity of a graph. Computing zero forcing number, total forcing number, and connected forcing number of graphs lies in the class of NP-hard problems. The graphs with zero forcing number 1 and 2 are respectively the paths and the graphs of 2-parallel paths. In this thesis, we first define the graphs of k -parallel paths and then introduce some upper bounds for zero forcing number and total forcing number of the graphs of k -parallel paths. Next, we characterize the graphs with maximum degree at most three and zero forcing number three and then as a conclusion, we exactly find the graphs with maximum degree at most three having zero forcing number and maximum nullity at most three. Moreover we characterize the graphs with total forcing number two as well as the graphs with connected forcing number two.

Key Words: Zero forcing number; Total forcing number; Connected forcing number; Maximum nullity



Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Graph and Combinatorics

Bounds on the zero forcing number and domination number of graphs

By: Elahe Rezaei-Sani

Supervisor:

Meysam Alishahi

Advisor:

Elahe Sharifi

September 2020