

الحمد لله
الذي هدانا لهذا
الذي كنا لنهتدي لولا
أن هدانا الله



دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری تحقیق در عملیات - کنترل و بهینه‌سازی

حل عددی مسائل کنترل بهینه افق نامتناهی با مشتقات کسری

نگارنده: مینا یآوری

استاد راهنما

دکتر علیرضا ناظمی

بهمن ۱۳۹۸

شماره: ۳-۲۰-۲۳۰
تاریخ: ۹۹/۲/۲۷
ویرایش:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۱: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود خانم مینا یآوری دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات-کنترل و بهینه سازی به شماره دانشجویی ۹۴۰۱۳۰۵ ورودی مهر سال ۹۴ در تاریخ ۹۸/۱۱/۱۶ از رساله نظری خود با عنوان: حل عددی مسائل کنترل بهینه افق نامتناهی با مشتقات کسری دفاع و با اخذ نمره ۱۹.۴ به درجه عالی نائل گردید.

<input type="checkbox"/> الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹	<input checked="" type="checkbox"/> ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹-۱۷
<input type="checkbox"/> ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹-۱۵	<input type="checkbox"/> د) مردود: کمتر از ۱۵

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبۀ علمی	امضاء
۱	استاد راهنما	دکتر علیرضا ناظمی	استاد	
۲	استاد داور خارجی	دکتر سهراب عفتی	استاد	
۳	استاد داور داخلی	دکتر حجت احسنی طهرانی	دانشیار	
۴	استاد داور داخلی	دکتر محمد هادی نوری اسکندری	استادیار	
۵	نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهرداد غزنوی	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم مینا یآوری بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



۹۹/۲/۲۷

تقدیم به
پدرم به استواری کوه، مادرم به زلالی چشمه، همسرم به صمیمیت باران
و رهام عزیزم به معنای عشق.

تشکر و قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر ناظمی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت و منش والای ایشان هستم. از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر سهراب عفتی که به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. همپنین لازم می‌دانم از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر نوری و جناب آقای دکتر احسنی که داوری این پایان نامه را به عهده گرفتند با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

مینا یاوری

بهمن ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **مینا یآوری** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی کاربردی علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **حل عددی مسائل کنترل بهینه افق نامتناهی با مشتقات کسری**، تحت راهنمایی **علیرضا ناظمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مینا یآوری

بهمن ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

حسابان مرتبه کسری مبحثی است که به بررسی مشتق های مرتبه غیر صحیح و مختلط می پردازد. مسائل کنترل بهینه کسری مسائلی هستند که دستگاههای دینامیکی همراه کننده آنها دارای مشتقات و انتگرال های مرتبه کسری هستند که این مشتقات و انتگرال ها مدل های دقیق تری برای سیستم های موجود در طبیعت فراهم می کنند. با توسعه و پیچیده تر شدن مسائل کنترل بهینه، نیاز به روش های نوین برای حل این مسائل گسترش یافته است. اگر چه تاکنون تعریف های متعددی در مشتق و انتگرال مرتبه کسری ارائه شده است، اما پیچیدگی محاسباتی بالا سبب شده است محققین این حوزه در جستجوی تعاریف کاربردی، ساده تر و سازگار تر با تعریف مشتق کلاسیک باشند. از آنجایی که یافتن جواب دقیق و یا حتی تقریبی برای مسائل کنترل بهینه کسری افق نامتناهی در حالت کلی وجود ندارد لذا برای اولین بار در این رساله مسایل کنترل بهینه کسری افق نامتناهی را مورد مطالعه قرار می دهیم. برای حل این مسائل از روش های هوش محاسباتی بر پایه شبکه عصبی استفاده می کنیم. از طرفی به برخی از کاربرد های مسائل کنترل بهینه کسری افق نامتناهی شامل پایدار سازی سیستم های آشوبناک، بررسی پایداری سیستم های مرتبه کسری و غیره در این رساله می پردازیم.

کلمات کلیدی: مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی، مشتقات کسری، شبکه عصبی مصنوعی، شرایط بهینگی، بهینه سازی نامقید.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1- Mina Yavari, Alireza Nazemi. (2019). An efficient numerical scheme for solving fractional infinite-horizon optimal control problems. ISA Transactions. DOI 10.1016/j.isatra.2019.04.016.

2-Mina Yavari, Alireza Nazemi. (2019). Fractional infinite-horizon optimal control problems with a feed forward neural network scheme. Network: Computation in Neural Systems. DOI: 10.1080/0954898X.2019.1688878.

3- Mina Yavari, Alireza Nazemi. On chaos control of fractional order systems using a neural network scheme, submitted.

Conference articles

1-Soleiman Hosseipour, Alireza Nazemi, Mina Yavari (2016), A numerical method based on fractional-order Chebyshev polynomials for solving delay fractional optimal control problems, The 9th International Conference of Iranian Operations Research Society, Shiraz-Iran.

2-Mina Yavari, Alireza Nazemi (2017), Fractional optimal control problems with a new definition of fractional derivative, 10th International Conference of Iranian Operations Research Society, Babolsar-Iran.

3-Mina Yavari, Alireza Nazemi (2018), Fractional infinite-horizon optimal control problems with a feed forward neural network scheme, 11th International Conference of Iranian Operations Research Society, Kermanshah-Iran.

4-Mina Yavari, Alireza Nazemi (2018), On chaos control of the adaptive fractional order systems, The 2th national seminar on control and optimization, Shahrood-Iran.

5-Mina Yavari, Alireza Nazemi (2019), Chaos Control of the Fractional-Order System, 12th International Conference of Iranian Operations Research Society, Mazandaran-Iran.

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
۱	۱ مفاهیم اولیه
۱	۱.۱ حسابان مرتبه کسری
۱	۱.۱.۱ توابع پایه حساب کسری
۳	۲.۱.۱ مقدمه ای در حسابان مرتبه کسری
۶	۳.۱.۱ مشتق ها و انتگرال های کسری
۲۰	۴.۱.۱ پایداری سیستم های مرتبه کسری
۲۴	۲.۱ شبکه عصبی
۲۵	۱.۲.۱ شبکه های عصبی طبیعی
۲۶	۲.۲.۱ شبکه های عصبی مصنوعی
	۳.۲.۱ تاریخچه ای از حل مسائل بهینه سازی با استفاده از شبکه های عصبی
۳۱	عصبی
۳۲	۳.۱ مساله کنترل بهینه کسری و شرایط بهینگی
۳۳	۱.۳.۱ مساله کنترل بهینه
۳۴	۲.۳.۱ مساله کنترل بهینه کسری و شرایط بهینگی آن
۳۹	۲ روش های عددی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری افق نامتناهی
۴۲	۱.۲ حل مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی
۴۸	۱.۱.۲ الگوریتم آموزش
۴۸	۲.۱.۲ پایداری و همگرایی
۴۹	۳.۱.۲ مثال های عددی
۵۸	۲.۲ یک تکنیک جدید برای حل مسائل کنترل بهینه افق نامتناهی
۵۹	۱.۲.۲ تبدیل مساله افق نامتناهی به یک مساله افق متناهی

۶۲	الگوریتم آموزش	۲.۲.۲
۶۴	مثال های عددی	۳.۲.۲
۷۱		کاربردهای مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی	۳
۷۱	کنترل سیستم های آشوبناک	۱.۳
۹۳		مراجع	
۱۰۱		واژه نامه فارسی به انگلیسی	
۱۰۳		واژه نامه انگلیسی به فارسی	

فهرست تصاویر

۹	تعبیر هندسی انتگرال کسری ریمن-لییویل تابع $F(t) = t + \alpha \sin(t)$ و $\alpha = 0.75$ در بازه $0 \leq \tau \leq 10^\circ$	۱.۱
۱۷	پایداری لیاپانف.	۲.۱
۱۸	پایداری مجانبی	۳.۱
۲۱	ناحیه پایداری سیستم های مرتبه کسری برای $0 < \alpha < 1$	۴.۱
۲۱	پایداری مجانبی برای $\alpha = 0.5$	۵.۱
۲۲	پایداری مجانبی	۶.۱
۲۳	رفتار سیستم ۲۷.۱	۷.۱
۲۵	ساختار نرون	۸.۱
۲۷	مدل ریاضی نرون عصبی مصنوعی	۹.۱
۲۸	انواع تابع فعال سازی	۱۰.۱
۲۹	شبکه دو لایه	۱۱.۱
۳۰	شبکه پرسپترون	۱۲.۱
۵۰	مسیر $y(\cdot)$ با مقادیر مختلف α در مثال ۱.۱.۲	۱.۲
۵۰	کنترل $v(\cdot)$ با مقادیر مختلف α در مثال ۱.۱.۲	۲.۲
۵۱	خطای مطلق $y(\cdot)$ برای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۱.۲	۳.۲
۵۲	مسیر $y(\cdot)$ با مقادیر مختلف α در مثال ۲.۱.۲	۴.۲
۵۳	کنترل $v(\cdot)$ با مقادیر مختلف α در مثال ۲.۱.۲	۵.۲
۵۳	خطای مطلق $y(\cdot)$ برای $\alpha = 1$ در مثال ۲.۱.۲	۶.۲
۵۶	مسیر $y_1(\cdot)$ با مقادیر مختلف α در مثال ۳.۱.۲	۷.۲
۵۶	مسیر $y_2(\cdot)$ با مقادیر مختلف α در مثال ۳.۱.۲	۸.۲
۵۷	کنترل $v(\cdot)$ با مقادیر مختلف α در مثال ۳.۱.۲	۹.۲
۵۷	خطای مطلق $y_1(\cdot)$ و $y_2(\cdot)$ برای $\alpha = 1$ در مثال ۳.۱.۲	۱۰.۲
۶۳	فلوچارت الگوریتم آموزش شبکه عصبی	۱۱.۲
۶۵	مسیر X_1 و X_2 برای مقادیر مختلف α در مثال ۱.۲.۲	۱۲.۲

۶۶	۱.۲.۲	در مثال	α	مقادیر مختلف	برای	U	کنترل	۱۳.۲
۶۶	۱.۲.۲	در مثال	$\alpha = 1$	برای	$X_2(\cdot)$	و	$X_1(\cdot)$	خطای مطلق
۶۷	۲.۲.۲	در مثال	α	مقادیر مختلف	برای	U	کنترل	و مسیر
۶۸	۲.۲.۲	در مثال	$\alpha = 1$	برای	$X(\cdot)$	خطای مطلق	۱۶.۲	
۶۹	...	۳.۲.۲	در مثال	α	مقادیر مختلف	برای	$X_3(\cdot)$	و	$X_2(\cdot)$ ،
۷۰	۳.۲.۲	در مثال	α	مقادیر مختلف	برای	$U(\cdot)$	کنترل	۱۸.۲
۷۵	۱.۱.۳	در مثال	چن	مرتبه	کسری	رفتار	آشوبناک	سیستم
۷۷	۱.۱.۳	در مثال	چن	مرتبه	کسری	مسیرهای متغیر	حالت	سیستم
۷۷	۱.۱.۳	در مثال	چن	مرتبه	کسری	کنترل	سیستم	مرتبه
۷۸	...	۲.۱.۳	در مثال	چن	مرتبه	کسری	مسیرهای متغیر	حالت	سیستم
۷۹	۲.۱.۳	در مثال	چن	مرتبه	کسری	مسیرهای کنترل	سیستم	مرتبه
۷۹	۳.۱.۳	در مثال	تسی	گنسیو-تسی	رفتار	آشوبناک	سیستم	گنسیو-تسی
۸۱	۳.۱.۳	در مثال	تسی	گنسیو-تسی	مسیرهای متغیر	حالت	سیستم	مرتبه
۸۲	۳.۱.۳	در مثال	تسی	گنسیو-تسی	مسیرهای کنترل	کننده	سیستم	مرتبه
۸۴	۴.۱.۳	در مثال	لو	رفتار	سیستم	لو	۹.۳	
۸۵	۴.۱.۳	در مثال	لو	مسیرهای متغیر	حالت	سیستم	مرتبه	
۸۵	۴.۱.۳	در مثال	لو	مسیرهای کنترل	کننده	سیستم	مرتبه	
۸۷	۵.۱.۳	در مثال	لورنز	رفتار	آشوبناک	سیستم	لورنز	
۸۸	۵.۱.۳	در مثال	لورنز	مسیرهای متغیر	حالت	سیستم	مرتبه	
۸۸	..	۵.۱.۳	در مثال	لورنز	مسیرهای کنترل	کننده	سیستم	مرتبه	
۸۹	۶.۱.۳	در مثال	لورنز	مسیرهای متغیر	حالت	سیستم	مرتبه	
۹۰	..	۶.۱.۳	در مثال	لورنز	مسیرهای کنترل	کننده	سیستم	مرتبه	

فهرست جداول

۵۱	۱.۱.۲	مقدار تابع خطای $E(\Omega)$ برای مثال	۱.۲
۵۴	۲.۱.۲	مقدار تابع خطای $E(\Omega)$ برای مثال	۲.۲
۵۸	۳.۱.۲	مقدار تابع خطای $E(\Omega)$ برای مثال	۳.۲
۶۶	۱.۲.۲	مقدار تابع خطای $E(\Omega)$ برای مثال	۴.۲
۶۸	۲.۲.۲	مقدار تابع خطای $E(\Omega)$ برای مثال	۵.۲
۷۰	۳.۲.۲	مقدار تابع خطای $E(\Omega)$ برای مثال	۶.۲

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ حسابان مرتبه کسری

۱.۱.۱ توابع پایه حساب کسری

تابع لگاریتم طبیعی و تابع نمائی

در این بخش تعدادی از توابع نظیر تابع گاما^۱، تابع بتا^۲، تابع میتاگ-لفلر^۳ و ... که در حل تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل کسری مورد استفاده قرار می‌گیرند را معرفی می‌کنیم. این توابع دارای خواص بسیاری هستند، بدیهی است که اثبات و بیان تمام این خواص و قضایای مربوطه از حوصله این رساله خارج است و بحث‌های تکمیلی این قسمت را می‌توان در منابع معرفی شده یافت.

یکی از توابع اساسی حساب کسری تابع گاما است که تعمیمی از تابع $n!$ است و این امکان را فراهم می‌کند که n مقادیر غیرصحیح و حتی مختلط را بپذیرد.

^۱Gamma

^۲Beta

^۳Mittag-Leffler function

تعریف ۱.۱.۱. [۴] تابع گاما $\Gamma(\gamma)$ با انتگرال زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-t} dt. \quad (1.1)$$

تابع گاما یک تعریف با نمایش حدی نیز دارد که به صورت زیر است:

$$\Gamma(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{\gamma}}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+n)}. \quad (2.1)$$

شاید یکی از مهم‌ترین خواص تابع گاما رابطه بازگشتی زیر باشد:

$$\Gamma(\gamma+1) = \gamma\Gamma(\gamma), \quad (3.1)$$

این رابطه با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء به سادگی قابل اثبات است:

$$\Gamma(\gamma+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\gamma} dt = [-e^{-t} t^{\gamma}]_{t=0}^{t=\infty} + \gamma \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\gamma-1} dt = \gamma\Gamma(\gamma).$$

به وضوح $\Gamma(1) = 1$ و برای $\gamma = 1, 2, 3, \dots$ خواهیم داشت:

$$\Gamma(2) = 1 \times \Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(3) = 2 \times \Gamma(2) = 2 \times 1! = 2!,$$

$$\Gamma(4) = 3 \times \Gamma(3) = 3 \times 2! = 3!.$$

⋮

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.$$

خاصیت مهم دیگر تابع گاما به صورت زیر است:

$$\Gamma(\gamma+n)\Gamma(-\gamma-n+1) = (-1)^n \Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma). \quad (4.1)$$

نماد فاکتوریل را حتی اگر α عدد صحیح مثبت نباشد، به صورت $\alpha! = \Gamma(\alpha+1)$ تعریف می‌کنیم. در بسیاری از حالات بهتر است به جای ترکیبی از مقادیر معین تابع گاما از تابعی موسوم به تابع بتا استفاده کنیم.

تعریف ۲.۱.۱. [۴] تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta(\gamma, w) = \int_0^1 t^{\gamma-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad \text{Re}(\gamma) > 0, \quad \text{Re}(w) > 0. \quad (5.1)$$

رابطه بین تابع بتا و گاما به صورت زیر است:

$$\beta(\gamma, w) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(w)}{\Gamma(\gamma+w)}.$$

به کمک تابع بتا می‌توان خواص دیگری از تابع گاما را به دست آورد [۵]. یکی از این خواص به صورت زیر است:

$$\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma) = \frac{\pi}{\sin \pi\gamma}. \quad (\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (6.1)$$

در حالت خاص اگر $\gamma = \frac{1}{2}$ رابطه معروف $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ حاصل می‌شود که برای محاسبه مقدار تابع گاما در بسیاری نقاط مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تعریف ۳.۱.۱. [۶، ۷] تابع میتاگ- لفلر در دو نوع تابع تک پارامتری و دو پارامتری به صورت زیر تعریف می شود

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

تابع میتاگ- لفلر به افتخار ریاضی دان سوئدی میتاگ- لفلر، تابع میتاگ- لفلر نامیده شده است و تابع مهمی است که در زمینه حساب کسری مورد استفاده قرار می گیرد. این تابع تعمیم تابع نمایی است. همان طور که تابع نمایی نقش مهمی در جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه غیر صحیح ایفا می کند، تابع میتاگ- لفلر نیز نقش مهمی در جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه غیر صحیح دارد.

چند حالت خاص از توابع تک پارامتری و دو پارامتری در زیر بیان شده است

$$\begin{aligned} E_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \\ E_{2,1}(-z^2) &= \cos(z), \\ E_{1,2}(z) &= \frac{e^z - 1}{z}, \\ E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z). \end{aligned}$$

۲.۱.۱ مقدمه ای در حسابان مرتبه کسری

حسابان کسری، موضوعی است که بیش از سیصد سال قدمت دارد. حسابان مرتبه کسری، تعمیمی از حسابان کلاسیک به مشتق گیری و انتگرال گیری که لزوماً از مرتبه صحیح نیست تعریف می شود. در حال حاضر کاربردهای حسابان کسری به سرعت رو به افزایش است. این پدیده ریاضی، توصیف و مدل کردن دقیق پدیده های واقعی را نسبت به روش های رایج ”مرتبه صحیح” به ارمغان می آورد. به طور کلی پدیده های واقعی کسری هستند [۸]، به هر حال در بعضی از آن ها مقدار کسری بودن خیلی کم است. اولین بار ایده حسابان کسری به سال ۱۶۹۵ بر می گردد که لایب نیز^۴ و هوپیتال^۵ به مشتق مرتبه $\frac{1}{2}$ اشاره کردند. در سال ۱۷۳۰ موضوع حسابان کسری توجه اولر^۶ را جلب کرد. در سال ۱۷۷۲ لاگرانژ^۷ به طور مستقیم در حسابان کسری مشارکت کرد. لیویل^۸ اولین مطالعه جدی حسابان کسری را در سال ۱۸۳۲ انجام داد که تعاریف خود را به طور نظری به مسائل اعمال کرد. در سال ۱۸۴۷ ریمن^۹ تحقیقاتی را روی تعمیم سری تیلور انجام داد. او تعریف انتگرال کسری از مرتبه α از تابع مفروض $f(x)$ را

^۴ Leibniz

^۵ Hopital

^۶ Euler

^۷ Lagrange

^۸ Liouville

^۹ Riemann

به صورت زیر پیشنهاد کرد

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \psi(x). \quad (7.1)$$

وجود تابع $\psi(x)$ به علت ابهام در حد پایین انتگرال است. امروزه رابطه (7.1) بدون تابع $\psi(x)$ رایج ترین تعریف از انتگرال گیری کسری است که انتگرال کسری ریمن-لیوویل نام گرفته است. در سال ۱۸۶۷ گرانوالد^{۱۰} روی عملگرهای کسری کار کرد. همچنین در این سالها لتنیکوف^{۱۱} چندین مقاله در این موضوع نوشت. با گذشت زمان و پیدایش کاربردهای مختلفی از حسابان کسری تعاریف متعددی از مشتق و انتگرال کسری که متناسب با مدل های فیزیکی بودند بیان شد. تا نیمه قرن بیستم حسابان کسری تا حدی رشد پیدا کرد که اولین کنفرانس در سال ۱۹۷۴ فقط مربوط به نظریات و کاربردهای حسابان کسری برگزار شد. بازیگران اصلی حسابان کسری تاکنون به ایفای نقش در بسط و گسترش این شاخه از علم پرداختند، برای مثال هاردی،^{۱۲} سامکو،^{۱۳} اولدهام،^{۱۴} کیلباس،^{۱۵} میلر،^{۱۶} کاپوتو،^{۱۷} پودلیبنی^{۱۸} و افراد زیاد دیگری این کار را انجام داده اند. حسابان مرتبه کسری نقش مهمی در فیزیک [۹]، مهندسی برق [۱۰]، شیمی کاربردی [۱۱]، مهندسی پزشکی [۱۲] و غیره بازی می کند.

مفهوم انتگرال مرتبه کسری از اولین مفاهیمی است که در مبحث حسابان کسری درباره آن صحبت می شود. تعریف انتگرال مرتبه کسری، در واقع تعمیمی از فرمول کشی^{۱۹} برای محاسبه انتگرال های مرتبه صحیح است. از طرف دیگر یکی از مهم ترین مفاهیم در سیستم های مرتبه کسری، تعریف مشتق است که برخلاف انتگرال مرتبه کسری می توان تعریف های متفاوتی از آن ارائه نمود [۸].

در این فصل، قبل از ورود به بحث اصلی، به عنوان یکی از کاربرد های حسابان مرتبه کسری به بررسی خواص مکانیکی مواد ویسکوالاستیک^{۲۰} می پردازیم.

بررسی خواص مواد ویسکوالاستیک به کمک مشتق مرتبه کسری

مواد دارای خاصیت ویسکوالاستیک و پدیده های فیزیکی مرتبط با آنها اهمیت فراوانی در خواص مکانیکی مواد، بخصوص در ساختار های بیولوژیکی دارند. دسته ای از این مواد برخی از ویژگی

^{۱۰} Grunwald

^{۱۱} Ietnikov

^{۱۲} Hardy

^{۱۳} Samko

^{۱۴} Oldham

^{۱۵} Kilbas

^{۱۶} Miller

^{۱۷} Caputo

^{۱۸} Podlubny

^{۱۹} Cauchy

^{۲۰} Viscoelastic

های پیچیده را در آزمون های مکانیکی از خود بروز می دهند که با معادلات خطی استاندارد قابل توصیف نیستند. بارزترین دلیل این موضوع تاثیر حافظه در بازگشت این مواد از تغییر شکل اولیه در اثر تنش وارد شده به حالت طبیعی آنها است. به طور خلاصه این ویژگی ها را حافظه شکل ^{۲۱} می نامند.

در این بخش به اختصار رفتار فیزیکی مواد ویسکوالاستیک را مورد بررسی قرار می دهیم. برای مطالعه بیشتر می توان به [۱۳] مراجعه کرد.

مواد ویسکوالاستیک

الاستیسیته ^{۲۲} عبارت است از خاصیت تغییر شکل برگشت پذیر در اثر نیروی وارد شده از محیط و تعبیر فیزیکی آن همان توانایی برگشت ماده به فرم طبیعی آن می باشد. بر اساس قانون هooke ^{۲۳} رابطه خطی زیر بین فشار وارد شده بر ماده $\delta(t)$ و کشیدگی ناشی از آن بر اثر فشار $\epsilon(t)$ وجود دارد

$$\delta(t) = E\epsilon(t). \quad (۸.۱)$$

که در آن E ضریب یانگ ^{۲۴} می باشد. در مقابل خاصیت الاستیسیته، ویسکوزیته ^{۲۵} به عنوان مقاومت یک سیال در برابر اعمال تنش محیط می باشد. به عبارت دیگر مقاومت اصطکاکی یک مایع یا گاز در برابر شارش یا لغزیدن لایه ها هنگامی که تحت یک تنش از محیط قرار می گیرد، ویسکوزیته تعریف می شود. بنا بر قانون سیالات نیوتن ^{۲۶} رابطه زیر بین فشار وارد شده از محیط $\delta(t)$ و کشیدگی یا مقاومت سیال $\epsilon(t)$ برقرار است

$$\delta(t) = \eta \frac{d\epsilon(t)}{dt}, \quad (۹.۱)$$

که در آن η ضریب برشی ^{۲۷} می باشد. دسته سوم از مواد نیز وجود دارد که رفتاری میان دو حالت الاستیسیک و ویسکوزیته از خود نشان می دهند به این مواد، مواد ویسکوالاستیک می گویند. این خاصیت به هنگام تحمیل نیروی خارجی و اعمال تغییر شکل بر آنها پدیدار می شود. به عنوان مثال مواد ویسکوز مانند عسل در برابر تنش اعمال شده پاسخ هایی به صورت جریان برشی و تغییر شکل طولی با تغییرات نسبت به زمان از خود نشان می دهند. در مقابل مواد الاستیک مانند آهن به هنگام رویارویی با کشش به آرامی کشیده می شود و در صورتی که میزان تنش از آستانه کشسانی آنها فراتر نرود، به محض برداشتن تنش به وضعیت اولیه

^{۲۱}Shape Memory

^{۲۲}Elasticity

^{۲۳}Hooke's law

^{۲۴}Young

^{۲۵}Viscosity

^{۲۶}Newtonian fluid's law

^{۲۷}Shear

بر می گردند. اما مواد ویسکوالاستیک خواصی از این دو دسته کلی را دارند. این گونه مواد بخشی از نیروی دریافتی از محیط را ذخیره کرده و بخش دیگر مانند حرارت ایجاد شده در محیط پراکنده می کنند. حال یک مدل بر اساس مشتق مرتبه کسری به منظور بررسی پاسخ سیستم های ویسکوالاستیک ارائه می شود. می توان نشان داد که این مدل جایگزین مناسبی برای مدل های ساده غیر کسری می باشد. همانطور که قبلا مشاهده کردیم، فشار در یک ماده الاستیک ایده آل، با مشتق مرتبه صفر کشیدگی یا کشیدگی مرتبط است. از طرفی فشار با مشتق اول یک ماده ویسکوزیته متناسب می باشد. انتظار می رود در مواد ویسکوالاستیک که رفتاری بین این دو نوع ماده دارند، فشار با یک مشتق مرتبه کسری α که $0 \leq \alpha \leq 1$ متناسب باشد. از دیدگاه ریاضی این تفسیر فیزیکی را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$\delta(t) = \gamma_\alpha D^\alpha \epsilon(t). \quad (10.1)$$

که در آن γ_α ضریب ثابت برای بیان وابستگی $\delta(t)$ و $\epsilon(t)$ می باشد. اندیس α بیانگر وابستگی این ضریب با توجه به نوع ماده ویسکوالاستیسیته، به α خواهد بود. برای تعیین این ضریب به کمک قوانین هووک، قوانین سیالات نیوتن و نتایج تجربی ناشی از آزمایش های بررسی فشار و کشیدگی و دو شرط

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \gamma_\alpha = E, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} \gamma_\alpha = \eta,$$

داریم

$$\gamma_\alpha = E^{1-\alpha} \eta^\alpha,$$

با توجه به روابط فوق رابطه میان فشار و کشیدگی به صورت زیر است

$$\delta(t) = E^{1-\alpha} \eta^\alpha D^\alpha \epsilon(t). \quad (11.1)$$

در مورد روش تعیین ضریب γ_α می توان با توجه به ساختار ماده، ابتدا α و سپس γ_α را تعیین نمود به طوری که همواره برای یک ماده مشخص، ضریب ثابتی بدست آید [۱۳].

۳.۱.۱ مشتق ها و انتگرال های کسری

مشتق و انتگرال کسری گرانوالد- لتنیف

فرض کنید f تابعی پیوسته باشد. در این صورت مشتق مرتبه اول تابع f به صورت زیر تعریف می شود

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}.$$

با به کارگیری تعریف بالا، مشتق مرتبه دوم به صورت زیر به دست می آید

$$f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}.$$

در حالت کلی برای مشتق مرتبه صحیح و مثبت n ، رابطه زیر را داریم

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh), \quad n \in \mathbb{N}.$$

بنابراین می‌توان مشتق کسری مرتبه α را به صورت زیر تعمیم داد

$${}^G D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh), \quad \alpha > 0, \quad (12.1)$$

که $a \leq t \leq b$ ، $[\alpha] = n$ و $nh = t - a$ ، کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی α تعریف می‌شود. می‌توان با جا به جایی $-\alpha$ و α در رابطه (12.1)، انتگرال کسری گرانوالد-لتنیف از مرتبه α را تعریف کرد. یعنی با فرض $nh = t - a$ داریم

$$\begin{aligned} {}^G I_t^\alpha f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-\alpha}{k} f(t - kh), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k + \alpha)}{\Gamma(k + 1)} f(t - kh), \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

با توجه به ماهیت تعریف مشتق کسری گرانوالد-لتنیف، از این تعریف در روش‌های عددی محاسبه مشتقات مرتبه کسری و همچنین گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری استفاده فراوانی می‌شود. همچنین برای تقریب مشتق کسری (12.1) در روش‌های عددی، از این تعریف با مجموع متناهی استفاده می‌شود. جزییات بیشتر در [43] قابل مشاهده است.

انتگرال و مشتق ریمن-لیوویل

فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ عددی روی محور حقیقی \mathbb{R} باشد و تابع $f(t)$ به ازای $t > a$ پیوسته و در هر بازه متناهی (a, t) انتگرال پذیر باشد. انتگرال مرتبه n تابع $f(t)$ طبق فرمول کشی برابر است با

$$\begin{aligned} {}_a I_t^n f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (13.1)$$

از طرفی با توجه به تعریف تابع گاما، (13.1) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$${}_a I_t^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}.$$

با الهام گرفتن از فرمول کشی و جانشینی عدد حقیقی $\alpha > 0$ به جای عدد صحیح n ، ${}_a I_t^\alpha f(t)$ و ${}_t I_b^\alpha f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > a), \\ {}_t I_b^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t < b). \end{aligned} \quad (14.1)$$

این انتگرال‌ها به ترتیب انتگرال‌های چپ و راست ریمن-لیوویل نامیده می‌شوند [4].

تعریف ۴.۱.۱. فضای $AC^n(\Omega)$ عبارت است از مجموعه تمام توابعی مانند f که روی بازه‌ی Ω تا مرتبه $(n-1)$ ام، مشتقات پیوسته دارند و مشتق $(n-1)$ ام آن‌ها مطلقاً پیوسته است. فرض کنید $n-1 \leq \alpha < n$ و $f \in AC^n([a, b])$ که $n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$. علامت $[\mathcal{R}(\alpha)]$ قسمت صحیح $\mathcal{R}(\alpha)$ تعریف می‌شود. مشتقات چپ و راست ریمن-لیوویل از مرتبه α که $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n ({}_a I_t^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > a), \\ {}_t D_b^\alpha f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n ({}_t I_b^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t < b). \end{aligned} \quad (15.1)$$

قضیه ۱.۱.۱. فرض کنید تابع $f(t)$ دارای مشتقات مرتبه اول تا مرتبه $n-1$ پیوسته بوده و $f^{(n)}(t)$ انتگرال پذیر باشد. همچنین فرض کنید $n-1 < \alpha < n$ ، $n \in \mathbb{N}$. در این صورت مشتق مرتبه α با تعریف گرانوالد-لتنیکف تابع $f(t)$ با مشتق مرتبه α ریمن-لیوویل این تابع برابر خواهد بود، یعنی

$${}_a^G D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha f(t),$$

است [۴۳].

با فرض برقراری شرایط مطرح شده در قضیه ۱.۱.۱ تعاریف گرانوالد-لتنیکف و ریمن-لیوویل معادل بوده و بنابراین خواص مشتق مرتبه کسری ریمن-لیوویل برای مرتبه کسری گرانوالد-لتنیکف نیز برقرار است.

تعبیر هندسی انتگرال ریمن-لیوویل

برای اولین بار پودلیبنی در مقاله معروف خود در سال ۲۰۰۲ یک تعبیر هندسی قابل تصور برای انتگرال ریمن-لیوویل ارائه داد که با تعاریف کلاسیک انتگرال، مانند انتگرال ریمن، قابل توصیف است. در این قسمت به صورت مختصر این تعبیر هندسی را بازگو می‌کنیم. با توجه به تعریف انتگرال ریمن-لیوویل می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

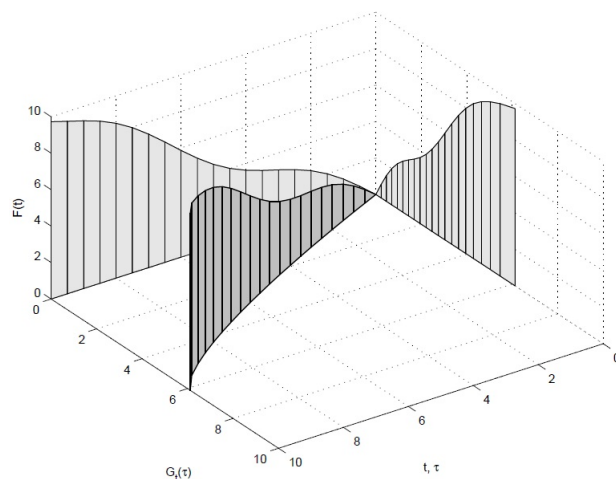
$${}_0 I_t^\alpha F(t) = \int_0^t F(\tau) dG_t(\tau), \quad (16.1)$$

که در آن

$$G_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (t^\alpha - (t-\tau)^\alpha).$$

اگر در انتگرال (۱۶.۱)، t را ثابت فرض کنیم، این انتگرال یک انتگرال ریمن استیلس ۲۸ می‌شود. در دستگاه مختصات سه بعدی $(\tau, G(\tau), F(\tau))$ ، ابتدا تابع $G_t(\tau)$ را بر حسب τ در بازه

^{۲۸}Stieljes



شکل ۱.۱: تعبیر هندسی انتگرال کسری ریمن-لیوویل تابع $F(t) = t + \frac{\pi}{5} \sin(t)$ و $\alpha = \frac{\pi}{75}$ در بازه $0 \leq \tau \leq 10$.

رسم می‌کنیم سپس در طول منحنی بدست آمده یک دیوار با ارتفاع متغیر $F(\tau)$ می‌سازیم. بنابراین لبه بالایی دیوار یک منحنی در فضای سه بعدی $(\tau, G(\tau), F(\tau))$ برای $0 \leq \tau \leq t$ است. این دیوار دو سایه ایجاد می‌کند. اولی در صفحه مختصات دو بعدی (τ, F) که مساحت ایجاد شده همان انتگرال معمولی تابع $F(t)$ بر حسب t است. یعنی

$$I_t^1 F(t) = \int_0^t F(\tau) d\tau,$$

و سایه دوم این دیوار در صفحه (G, F) می‌باشد که مساحت آن متناظر با انتگرال مرتبه کسری ریمن-لیوویل از مرتبه α برای یک t مشخص می‌باشد. با در نظر گرفتن $\alpha = 1$ خواهیم داشت $G_t(\tau) = \tau$ و انتگرال مرتبه کسری به انتگرال معمولی تبدیل می‌شود. حال اگر t تغییر کند مسلماً طول و شکل دیوار تغییر کرده و سایه‌های آن و در نتیجه مساحت سایه‌ها تغییر خواهد کرد. در شکل ۱.۱ این تعبیر هندسی نمایش داده شده است. به وضوح مشخص است اگر t تغییر کند مساحت سایه‌ها عوض خواهند شد و انتگرال ریمن-لیوویل به صورت یک تابع از متغیر t یک تعبیر دینامیکی پیدا می‌کند. برای مطالعه بیشتر می‌توان [۴۴] را مطالعه نمود. لازم به ذکر است که برای مشتق مرتبه کسری تاکنون تعبیر هندسی ارائه نشده است.

خواص مشتق و انتگرال مرتبه کسری ریمن-لیوویل

انتگرال و مشتق مرتبه کسری ریمن-لیوویل عملگر خطی هستند. یعنی برای تمام توابع $f(t)$ و $g(t)$ و تمام اسکالرهای حقیقی λ و γ می‌توان نشان داد

$$I^\alpha(\lambda f(t) + \gamma g(t)) = \lambda I^\alpha f(t) + \gamma I^\alpha g(t),$$

$$D^\alpha(\lambda f(t) + \gamma g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \gamma D^\alpha g(t).$$

برای انتگرال مرتبه کسری داریم

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha {}_a I_t^\beta f(t) &= {}_a I_t^\beta {}_a I_t^\alpha f(t) = {}_a I_t^{\alpha+\beta} f(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \\ {}_t I_b^\alpha {}_t I_b^\beta f(t) &= {}_t I_b^\beta {}_t I_b^\alpha f(t) = {}_t I_b^{\alpha+\beta} f(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}. \end{aligned}$$

این تساوی بدان معناست که عملگر انتگرال مرتبه کسری خواص جمع پذیری^{۲۹} و جابجایی پذیری^{۳۰} را داراست. اما عملگرهای مشتق مرتبه کسری ریمن-لیوویل در حالت کلی جابجایی پذیر و جمع پذیر نیستند، یعنی تساوی‌های

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^\beta f(t)) &= {}_a D_t^\beta ({}_a D_t^\alpha f(t)), \\ {}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^\beta f(t)) &= {}_a D_t^{\alpha+\beta} f(t), \end{aligned} \quad (17.1)$$

در حالت کلی برقرار نیستند. از طرفی با توجه به اینکه

$${}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^\beta f(t)) = {}_a D_t^\beta ({}_a D_t^\alpha f(t)) + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha-\beta+k}}{\Gamma(-\alpha-\beta+k+1)},$$

می‌توان نشان داد که یک شرط کافی برای برقراری تساوی‌های (17.1) این است که برای

$$k = 0, 1, \dots, r-1, \quad r = \max\{\alpha + 1, \beta + 1\},$$

داشته باشیم $f^{(k)}(a) = 0$.

قضیه ۲.۱.۱. [۴] عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل از مرتبه α معکوس چپ عملگر انتگرال کسری از همان مرتبه α است، یعنی

$${}_a D_t^\alpha ({}_a I_t^\alpha f(t)) = f(t), \quad {}_t D_b^\alpha ({}_t I_b^\alpha f(t)) = f(t).$$

اما عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل یک معکوس راست عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل نیست، یعنی

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha ({}_a D_t^\alpha f(t)) &= f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_a D_t^{\alpha-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}, \\ {}_t I_b^\alpha ({}_t D_b^\alpha f(t)) &= f(t) - \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} [{}_t D_b^{\alpha-j} f(t)]_{t=b} \frac{(b-t)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}. \end{aligned}$$

اکنون چندین قاعده اساسی انتگرال و مشتق مرتبه کسری ریمن-لیوویل را بیان می‌کنیم

[۴].

الف- فرض کنید $\beta \in \mathbb{C}$ و $\beta > 0$

آن‌گاه

$$\begin{aligned} ({}_a I_t^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad (\Re(\alpha) > 0), \\ ({}_a D_t^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\Re(\alpha) \geq 0), \end{aligned}$$

^{۲۹}Additivity Property

^{۳۰}Commutative Property

$$\begin{aligned}({}_t I_b^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-t)^{\beta+\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) > 0), \\({}_t D_b^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) \geq 0).\end{aligned}$$

در حالت خاص اگر $\beta = 1$ آن گاه در حالت کلی مشتق کسری ریمن-لیوویل از تابع ثابت صفر نیست. یعنی

$$({}_a D_t^\alpha 1)(t) = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad ({}_t D_b^\alpha 1)(t) = \frac{(b-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

ب- فرض کنید $c \in \mathbb{R}$ ، آن گاه

$$\begin{aligned}I^\alpha e^{ct} &= t^\alpha E_{1, \alpha+1}(ct), & {}_a D_t^\alpha (e^{ct}) &= t^{-\alpha} E_{1, 1-\alpha}(ct), \\I^\alpha (\sin(ct)) &= ct^{\alpha+1} E_{\gamma, \alpha+\gamma}(-ct)^\gamma, & {}_a D_t^\alpha (\sin(ct)) &= ct^{1-\alpha} E_{\gamma, \gamma-\alpha}((ct)^\gamma), \\I^\alpha (\cos(ct)) &= t^{\alpha+1} E_{\gamma, \alpha+1}(-ct)^\gamma, & {}_a D_t^\alpha (\cos(ct)) &= t^{-\alpha} E_{\gamma, 1-\alpha}(-ct)^\gamma.\end{aligned}$$

انتگرال و مشتق لیوویل

در این قسمت مشتق و انتگرال کسری لیوویل روی \mathbb{R}^+ بررسی می‌شود. مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل روی بازه متناهی $[a, b]$ تعریف می‌شوند که قابل تعمیم به بازه \mathbb{R}^+ هستند. انتگرال‌های کسری لیوویل متناظر با (۱۴.۱) در بازه \mathbb{R}^+ عبارت است از

$$\begin{aligned}{}^L I_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > 0, \mathcal{R}(\alpha) > 0), \\{}^L I_\infty^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > 0, \mathcal{R}(\alpha) > 0).\end{aligned} \tag{۱۸.۱}$$

مشتقات کسری متناظر با (۱۵.۱) به ازای $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$ به صورت

$$\begin{aligned}{}^L D_t^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n ({}^L I_t^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1; t > 0), \\ {}^L D_\infty^\alpha f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n ({}^L I_\infty^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^\infty (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1; t > 0),\end{aligned}$$

تعریف می‌شوند. به طور مشابه می‌توان مشتق و انتگرال لیوویل را روی محور حقیقی \mathbb{R} تعریف کرد. برای جزئیات بیشتر [۴] را ببینید.

مشتق کسری کاپوتو

ایده تعریف مشتق کاپوتو بسیار مشابه با همان ایده‌ای است که در تعریف مشتق ریمن-لیوویل به کار گرفته شد. در این تعریف مانند تعریف ریمن-لیوویل، مشتق بر اساس مفهوم انتگرال مرتبه کسری توسعه پیدا می‌کند. تفاوت این دو تعریف در واقع در توالی عملگرهای مشتق

مرتبه صحیح و عملگر انتگرال مرتبه کسری است. در مشتق کسری کاپوتو برعکس مشتق کسری ریمن-لیوویل ابتدا مشتق مرتبه صحیح از تابع گرفته شده و سپس انتگرال گیری مرتبه کسری انجام می‌شود. به بیان ریاضی اگر $\alpha \in \mathbb{R}^+$ عدد مثبت ناصحیحی باشد و $n = [\alpha] + 1$ مشتق کسری کاپوتو از مرتبه α به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha} \{f^{(n)}(t)\}.$$

بنابراین مشتق کسری چپ و راست کاپوتو به ترتیب عبارت است از

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau,$$

$${}^C D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau,$$

که $f \in AC^n[a, b]$.

خواص مشتق کسری کاپوتو

مشتق مرتبه کسری کاپوتو یک عملگر خطی است، یعنی برای تمام توابع $f(t)$ و $g(t)$ و تمام اسکالرهایی حقیقی λ و γ می‌توان نشان داد

$${}^C D^\alpha (\lambda f(t) + \gamma g(t)) = \lambda {}^C D^\alpha f(t) + \gamma {}^C D^\alpha g(t).$$

برخلاف مشتق کسری ریمن-لیوویل مشتق کسری کاپوتو از عدد ثابت صفر است، یعنی برای هر عدد ثابت c داریم ${}^C D^\alpha c = 0$.

مشتق کسری کاپوتو جابجایی پذیر است، یعنی

$${}^C D_t^m {}^C D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha {}^C D_t^m f(t) = {}^C D_t^{m+\alpha} f(t), \quad n-1 < \alpha < n < m,$$

اگر و تنها اگر

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = n, n+1, \dots, m).$$

اگر $\alpha > 0$ و $f(t) \in L_p((a, b))$ ، $(1 \leq p \leq \infty)$ ، آن‌گاه

$${}^C D_t^\alpha ({}_a I_t^\alpha f(t)) = f(t), \quad {}^C D_b^\alpha ({}_t I_b^\alpha f(t)) = f(t).$$

این نشان می‌دهد عملگر مشتق کسری کاپوتو معکوس چپ برای عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل از همان مرتبه است. اما عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل معکوس راست عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل نیست، یعنی

$${}_a I_t^\alpha {}^C D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k,$$

$${}_t I_b^\alpha {}^C D_b^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k.$$

رابطه بین مشتق‌های کسری ریمن-لیوویل و کاپوتو به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} {}_a^c D_t^\alpha f(t) &= {}_a D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}, \\ {}_t^c D_b^\alpha f(t) &= {}_t D_b^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b^-)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-t)^{k-\alpha}. \end{aligned} \quad (19.1)$$

اکنون چندین قاعده اساسی مشتق مرتبه کسری کاپوتو را بیان می‌کنیم.

الف- فرض کنید $\beta \in \mathbb{C}$ ، $\beta > 0$ و $\mathbb{R} \geq 0$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned} ({}_a^c D_t^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\Re(\alpha) \geq 0), \\ ({}_t^c D_b^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\Re(\alpha) \geq 0), \end{aligned} \quad (20.1)$$

ب- فرض کنید $c \in \mathbb{R}$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} {}_a^c D_t^\alpha (e^{ct}) &= c^n t^{n-\alpha} E_{\lambda, n-\alpha+1}(ct), \\ {}_a^c D_t^\alpha (\sin(ct)) &= -\frac{1}{i} i (ic)^n t^{n-\alpha} [E_{\lambda, n-\alpha+1}(ict) - (-1)^n E_{\lambda, n-\alpha+1}(-ict)], \\ {}_a^c D_t^\alpha (\cos(ct)) &= \frac{1}{i} (ic)^n t^{n-\alpha} [E_{\lambda, n-\alpha+1}(ict) + (-1)^n E_{\lambda, n-\alpha+1}(-ict)]. \end{aligned}$$

لم ۱.۱.۱. [۲۱] فرض کنید $f(t) \in \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر باشد. آنگاه برای هر $t > t_0$ داریم

$$\frac{1}{i} {}_t_0^c D_t^\alpha f^2(t) \leq f(t) {}_t_0^c D_t^\alpha f(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

مشتق و انتگرال ریمن-لیوویل اصلاح‌شده یا جوماری

مشتقات کسری ریمن-لیوویل و کاپوتو به دلیل سادگی تعاریف و منطبق بودن آن‌ها با حالت صحیح (جز در موارد خاص) از جمله مهم‌ترین و پرکاربردترین تعاریف از مشتقات کسری هستند. البته این تعاریف دارای ایراداتی نیز هستند. ایراد اساسی مشتق ریمن-لیوویل این است که مشتق تابع ثابت در آن صفر نیست. در واقع اگر $f(t) = C$ تابع ثابت باشد و $0 < \alpha < 1$ ، داریم

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}.$$

همچنین برای محاسبه مشتق کاپوتو از مرتبه $0 < \alpha < 1$ ، لازم است که تابع f دارای مشتق مرتبه اول کلاسیک باشد. برای این منظور جوماری [۳۱] [۱۴] تعریف جدیدی از مشتق و انتگرال کسری ارائه داد. انتگرال جوماری به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a^J I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (f(\tau) - f(a)) d\tau, \quad \alpha > 0.$$

به ازای $0 < \alpha < 1$ مشتق کسری جوماری به صورت

$${}_a^J D_t^\alpha f(t) = D {}_a^J I_t^{1-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right) \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} (f(\tau) - f(a)) d\tau,$$

و به ازای $n - 1 \leq \alpha < n$ و $n \geq 1$ به صورت

$${}^J D_t^\alpha f(t) = D^n {}^J I_t^{n-\alpha} f(t),$$

محاسبه می‌شود. با توجه به تعریف ارائه شده، مشتق کسری جوماری از عدد ثابت صفر است و برای محاسبه مشتق کسری به ازای $0 < \alpha < 1$ لزومی به وجود مشتق مرتبه اول تابع f نیست. تقریباً در تمامی تعاریف مشتقات کسری مشهور موجود، قاعده حاصل ضرب و قاعده زنجیره‌ای در محاسبه مشتق ترکیب توابع برقرار نیست. البته جوماری در [۱۵، ۱۶، ۱۷] روابطی را برای مشتق ریمان-لیوویل اصلاح شده به صورت تقریبی در این زمینه بیان و اثبات نمود اما پس از آن چند مثال در نقض برقراری روابط مطرح شده توسط وی بیان گردید. یکی از تعاریفی که در راستای برقراری این خواص مهم و پرکاربرد مطرح شده است، مشتق کسری همدیس‌پذیر [۳۲] است که تعریف آن در زیر آمده است.

مشتق کسری همدیس‌پذیر

این تعریف از مشتق کسری به صورت حدی تعریف می‌شود و به دلیل سادگی و سازگاری با بعضی مدل‌ها در فیزیک و مهندسی کاربردهای فراوانی پیدا کرده است. مشتق کسری چپ همدیس‌پذیر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T_a^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}.$$

اگر حد فوق موجود باشد، آن‌گاه تابع از چپ مشتق‌پذیر است. مشتق کسری راست همدیس‌پذیر به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_b T^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}.$$

اگر حد فوق موجود باشد، آن‌گاه تابع از راست مشتق‌پذیر است و بالعکس. نکته مهم در مورد مشتق همدیس‌پذیر آن است که به ازای $\alpha = 1$ با تعریف کلاسیک مشتق صحیح برابر است. لازم به ذکر است که این تعریف از مشتق چون به صورت انتگرال بیان نمی‌شود خاصیت حافظه‌دار بودن را دارا نیست. همچنین یکی از ایرادهایی که به این مشتق وارد می‌باشد این است که مشتق کسری مرتبه $0 < \alpha < 1$ هر تابع دارای مشتق کلاسیک مرتبه اول کراندار در $t = 0$ ، صفر می‌باشد.

خواص مشتق کسری همدیس‌پذیر

لم ۲.۱.۱ [۱۸] فرض کنید $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $t_0 > 0$ مشتق‌پذیر از مرتبه $\alpha \in (0, 1]$ باشد (منظور از مشتق‌پذیری کسری، همان مشتق کسری همدیس‌پذیر است). در این صورت f در نقطه t_0 پیوسته است.

۳.۱.۱. [۱۸] فرض کنید $\alpha \in (0, 1]$ و $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد. در این صورت برای $t_0 > 0$ داریم

$$T^\alpha f(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t).$$

علاوه بر دو خاصیت فوق، مشتق کسری همدیس پذیر خواص دیگری نیز دارد که برخی از آنها در زیر آورده شده‌اند.

۴.۱.۱. [۱۸] برای هر f و g مشتق پذیر از مرتبه α

۱. اگر $a, b \in \mathbb{R}$ آن گاه $T^\alpha(af + bg) = aT^\alpha(f) + bT^\alpha(g)$.

۲. برای هر $p \in \mathbb{R}$ داریم $T^\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$.

۳. برای تابع ثابت $f(t) = C$ ، $T^\alpha(C) = 0$.

۴. برای توابع مشتق پذیر کسری f و g داریم

$$T^\alpha(fg) = fT^\alpha(g) + gT^\alpha(f), \quad T^\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT^\alpha(f) - fT^\alpha(g)}{g^2}.$$

مشتق و انتگرال کاپوتو-فابریسیو

تعریفی که کاپوتو از مشتق کسری ارائه داد به صورت زیر است

$${}_a^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (21.1)$$

این تعریف دارای یک نقطه تکین در $t = \tau$ است. برای حذف این نقطه در (۲۱.۱) کاپوتو و فابریسیو^{۳۳} تعریف جدیدی را ارائه دادند [۱۹]. با تغییر هسته $(t-\tau)^{-\alpha}$ به $\exp(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau))$ و $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ به $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$ تعریف جدید از مشتق کسری را می توان به صورت زیر نوشت

$${}_a^{CF} D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t \exp(-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}) f'(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha < 1,$$

که $M(\alpha)$ تابع نرمال شده^{۳۴} بر حسب α است به طوری که $M(0) = M(1) = 1$. این تعریف مشتق چپ کاپوتو-فابریسیو است. مشتق راست کاپوتو-فابریسیو به صورت زیر تعریف می شود

$${}_t^{CF} D_b^\alpha f(t) = -\frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_t^b \exp(-\frac{\alpha(\tau-t)}{1-\alpha}) f'(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha < 1.$$

طبق تعریف جدید واضح است که اگر f تابعی ثابت باشد، مشابه تعریف کاپوتو ${}_a^{CF} D_t^\alpha f = 0$ تفاوت اصلی بین مشتق جدید و مشتق کاپوتو این است که مشتق جدید در نقطه $t = \tau$ دارای نقطه تکین نیست.

^{۳۳}Fabrizio

^{۳۴}Normalization Function

حافظه در سیستم های دینامیکی

یکی از دلایل مهم استفاده از مشتق مرتبه کسری مفهوم حافظه است. هنگامی که خروجی یک سیستم در لحظه t تنها به ورودی سیستم در لحظه t مربوط باشد، آنگاه به این سیستم اصطلاحاً بدون حافظه ^{۳۵} می گویند. از طرف دیگر در شرایطی که سیستم مجبور به بخاطر سپردن مقادیر قبل از لحظه t برای مشخص کردن وضعیت فعلی سیستم در لحظه t باشد، آنگاه به این سیستم اصطلاحاً حافظه دار ^{۳۶} می گویند. فرض کنید تابع $X(t)$ به کمک رابطه زیر با مقادیر تابع $f(t)$ ارتباط داشته باشد

$$X(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau. \quad (22.1)$$

واضح است که تابع $X(t)$ یک مجموع وزن دار از مقادیر قبلی تابع $f(t)$ در بازه $[0, t]$ است. این یک نمونه از سیستم حافظه دار با حافظه

$$w(t) = \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (23.1)$$

است. با اعمال مشتق کاپوتو از مرتبه α از طرفین (۲۲.۱) داریم

$$D^\alpha(X(t)) = f(t). \quad (24.1)$$

اکنون دستگاه دینامیکی کسری (۲۴.۱) یک دستگاه حافظه دار را توصیف می کند. اگر به تعاریف متفاوت مشتق مرتبه کسری توجه شود، مشخص است که ماهیت تابع وزن $w(t)$ نوع مشتق مرتبه کسری را تعیین می کند. توجه شود که تاکنون هیچ قاعده مشخصی برای انتخاب نوع مشتق مرتبه کسری پیدا نشده است و تنها معیار انتخاب مشتق، سازگاری توصیف ریاضی با ماهیت فیزیکی پدیده ها و نتایج آزمایشگاهی است [۱۳].

پایداری سیستم های مرتبه صحیح

در این بخش ابتدا سیستم های دینامیکی را تعریف کرده و انواع پایداری سیستم های دینامیکی را بررسی می کنیم و قضایای اساسی در این حوزه را بیان می کنیم. سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (25.1)$$

که f یک تابع از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^n است. x^* یک نقطه تعادل ^{۳۷} (۲۵.۱) نامیده می شود اگر $f(x^*) = 0$. اگر همسایگی $\Omega^* \subseteq \mathbb{R}^n$ از x^* وجود داشته باشد که $f(x^*) = 0$ و $f(x) \neq 0, \forall x \in \Omega^* \setminus \{x^*\}$ ، آن گاه x^* یک نقطه تعادل تنها ^{۳۸} نامیده می شود.

^{۳۵}Memoryless

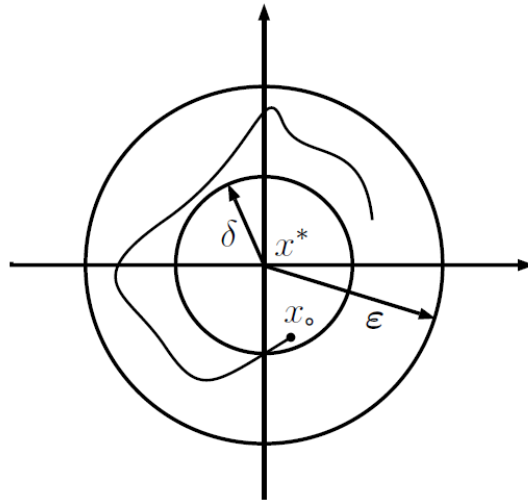
^{۳۶}Non-Memoryless

^{۳۷}Equilibrium Point

^{۳۸}Isolated Equilibrium Point

تعریف ۵.۱.۱ (پایداری به مفهوم لیاپانوف^{۳۹}). فرض کنید $x(t)$ یک جواب (۲۵.۱) است. x^* نقطه تعادل پایدار تنها به مفهوم لیاپانوف است اگر برای هر $x_0 = x(t_0)$ و هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $\|x(t_0) - x^*\| < \delta$ آن گاه

$$\|x(t) - x^*\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$



شکل ۲.۱: پایداری لیاپانوف.

تعریف ۶.۱.۱ سیستم دینامیکی (۲۵.۱) همگرای سراسری^{۴۰} به مجموعه جواب‌های (۲۵.۱) که با Ω^* نمایش داده می‌شود، است اگر برای هر نقطه آغازین دلخواه، مسیر $x(t)$ در رابطه زیر صدق کند

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \Omega^*) = 0,$$

که

$$\text{dist}(x, \Omega^*) = \inf_{y \in \Omega^*} \|x - y\|,$$

و $\|\cdot\|$ نرم l_2 را نشان می‌دهد.

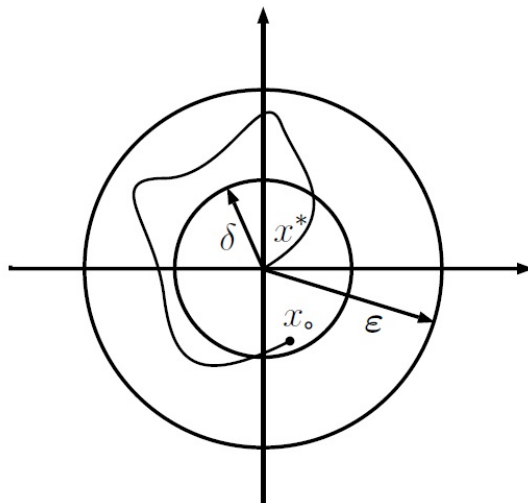
تعریف ۷.۱.۱ سیستم دینامیکی (۲۵.۱) که دارای نقطه تعادل x^* است، پایدار مجانبی^{۴۱} نامیده می‌شود اگر x^* به مفهوم لیاپانوف پایدار باشد و در شرط زیر صدق کند

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*.$$

^{۳۹}Stability in the Sense of Lyapunov

^{۴۰}Globally Convergent

^{۴۱}Globally Asymptotically Stable



شکل ۳.۱: پایداری مجانبی .

تعریف ۸.۱.۱. تابع $F : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی E لیپشیتز^{۴۲} است، اگر ثابت L وجود داشته باشد به طوری که برای هر دو نقطه $x, y \in E$ داشته باشیم

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\|.$$

تابع F لیپشیتز محلی^{۴۳} روی E نامیده می شود اگر برای نقطه $x_0 \in E$ ، یک ε -همسایگی مانند $N_\varepsilon(x_0) \subset E$ و یک ثابت L_0 وجود داشته باشد به طوری که برای هر دو نقطه $x, y \in N_\varepsilon(x_0)$ داشته باشیم

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L_0 \|x - y\|.$$

قضیه ۳.۱.۱. [۴۱] تابع $F : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. اگر $F \in C^1(E)$ باشد، آن گاه F روی E لیپشیتز محلی است.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به طور پیوسته مشتق پذیر باشد. $V(x)$ به طور شعاعی بی کران گفته می شود اگر

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty.$$

قضیه ۴.۱.۱. [۴۱] در سیستم دینامیکی (۲۵.۱) فرض کنید f یک تابع پیوسته از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^n باشد، آن گاه برای هر $t_0 \geq 0$ و $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ، یک جواب محلی $x(t)$ به ازای $t \in [t_0, \tau)$ که $\tau > t_0$ وجود دارد. علاوه بر این اگر f در x_0 لیپشیتز محلی باشد آن گاه جواب یکتاست و اگر f در \mathbb{R}^n لیپشیتز باشد آن گاه τ می تواند تا $+\infty$ توسعه داده شود.

^{۴۲}Lipschitz Continuous

^{۴۳}Locally Lipschitz Continuous

قضیه ۵.۱.۱. (قضیه پایداری لیپانوف) [۴۲] فرض کنید که $x = \circ$ یک نقطه تعادل سیستم (۲۵.۱) است و $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به طور پیوسته مشتق پذیر است به طوری که

$$V(\circ) = \circ \quad .1$$

$$V(x) > \circ, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\circ\} \quad .2$$

$$\dot{V}(x) \leq \circ, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\circ\} \quad .3$$

آن گاه سیستم در $x = \circ$ پایدار است.

قضیه ۶.۱.۱. (قضیه پایداری جانبی) [۴۲] تحت شرایط قضیه ۵.۱.۱ اگر $V(\cdot)$ در شرایط زیر صدق کند

$$V(\circ) = \circ \quad .1$$

$$V(x) > \circ, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\circ\} \quad .2$$

$$\dot{V}(x) < \circ, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\circ\} \quad .3$$

آن گاه سیستم در $x = \circ$ پایدار جانبی است.

قضیه ۷.۱.۱. (قضیه پایداری جانبی سراسری) [۴۲] تحت شرایط قضیه ۶.۱.۱ اگر $V(\cdot)$ به طور شعاعی بی کران باشد آن گاه نقطه $x = \circ$ پایدار جانبی سراسری است.

قضیه ۸.۱.۱. (اصل تغییرناپذیری لاسال ۴۴) فرض کنید $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به طور پیوسته مشتق پذیر باشد، همچنین فرض کنید

۱. $M \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه فشرده و پایدار (تغییرناپذیر) نسبت به جواب سیستم (۲۵.۱) باشد.

$$.2 \quad \dot{V}(x) \leq \circ, \quad x \in M \quad \text{به ازای}$$

$$.3 \quad E \quad \text{مجموعه همه نقاط } M \text{ باشد به طوری که } \dot{V}(x) = \circ.$$

۴. N بزرگترین مجموعه پایدار در E باشد.

آن گاه به ازای هر $x(t_0) \in M$ که $t_0 \geq \circ$ است داریم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), N) = \circ.$$

تعریف ۱۰.۱.۱ [۴۹] فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ یک همسایگی باز از \bar{x} است. به تابع مشتق‌پذیر و پیوسته $\zeta: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ، یک تابع لیپانوف در \bar{x} برای سیستم $\dot{x} = F(x)$ گفته می‌شود، اگر

$$\begin{cases} \zeta(\bar{x}) = 0, & \zeta(x) > 0, \forall x \in \Omega \setminus \{\bar{x}\}, \\ \frac{d\zeta(x(t))}{dt} = [\nabla\zeta(x(t))]^T F(x(t)) \leq 0, & \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

لم ۵.۱.۱ [۵۰] اگر A یک ماتریس $n \times n$ نامنفرد باشد آن‌گاه دستگاه همگن $AX = 0$ دارای جواب بدیهی $X = 0$ است.

قضیه ۹.۱.۱ [۵۰] مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \min & \quad f(x), \\ \text{s. t.} & \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

که $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $x^* \in \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر است. اگر x^* یک جواب‌بهینه موضعی برای این باشد، آن‌گاه $\nabla f(x^*) = 0$.

۴.۱.۱ پایداری سیستم‌های مرتبه کسری

حساب کسری که به آن لقب حساب قرن ۲۱ نیز داده اند نامی است برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبه دلخواه که تعمیمی برای مشتق و انتگرال از مرتبه صحیح است. حسابان کسری تاکنون به عنوان یک ابزار قدرتمند برای مدلسازی مسائل مهندسی مورد توجه جوامع مهندسی و علوم کاربردی قرار گرفته است. چون تحلیل پایداری اینگونه مسائل همانند دستگاه‌هایی با مشتقات معمولی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است از اینرو تحقیقات متعددی در سالهای اخیر در این زمینه ارائه گردید. لذا در این بخش پایداری و کنترل پذیری سیستم‌های مرتبه کسری را به صورت اجمالی مرور می‌کنیم.

پایداری سیستم‌های خطی مرتبه کسری: بطور کلی ثابت شده است که دستگاه

$$D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0,$$

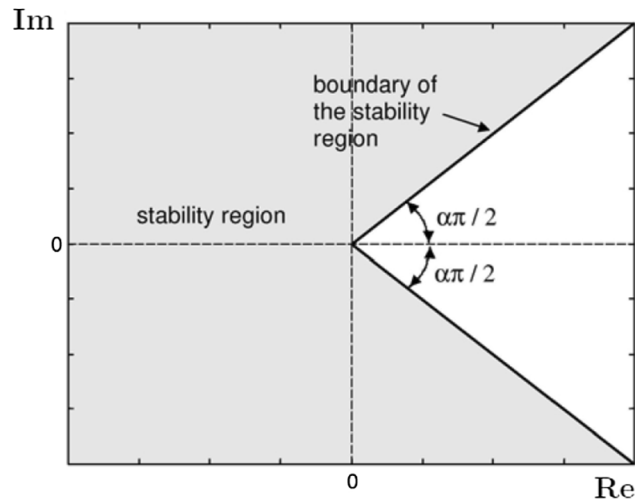
بطور مجانبی پایدار است، هرگاه $|\text{Arg}(eig(A))| > \frac{\alpha\pi}{3}$ که $0 < \alpha < 1$ و $eig(A)$ مقادیر ویژه ماتریس A است [۲۰، ۵۱]. در شکل ۴.۱ ناحیه پایداری برای سیستم‌های مرتبه کسری نشان داده شده است.

مثال ۱.۱.۱. سیستم خطی زیر را با شرایط اولیه $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$ در نظر بگیرید

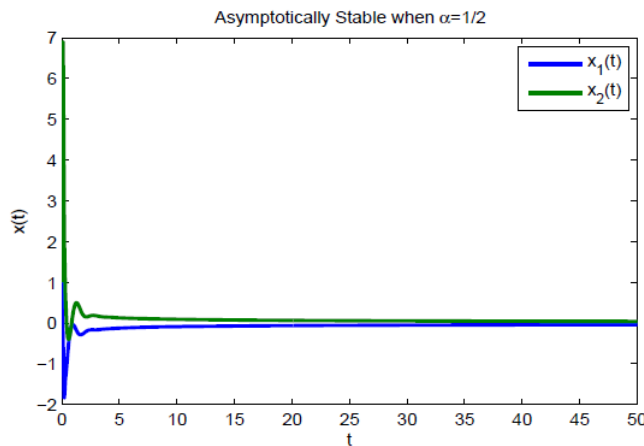
$${}^c D_t^{\alpha/\delta} x(t) = Ax(t),$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$



شکل ۴.۱: ناحیه پایداری سیستم های مرتبه کسری برای $0 < \alpha < 1$.



شکل ۵.۱: پایداری مجانبی برای $\alpha = 0.5$.

مقادیر ویژه برای ماتریس A به صورت $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i$ می باشد. داریم

$$|Arg(\lambda_{1,2})| \approx 1.04 > \frac{\alpha\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \approx 0.78$$

لذا سیستم کسری فوق پایدار مجانبی می باشد. توجه شود به دلیل اینکه در این سیستم خطی، ماتریس A معکوس پذیر است لذا این سیستم دارای نقطه تعادل یکتا $(0, 0)$ می باشد که سیستم برای این نقطه تعادل پایدار مجانبی می باشد. در شکل ۵.۱ می توان رفتار این سیستم را مشاهده نمود.

پایداری سیستم های مرتبه کسری: سیستم مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید.

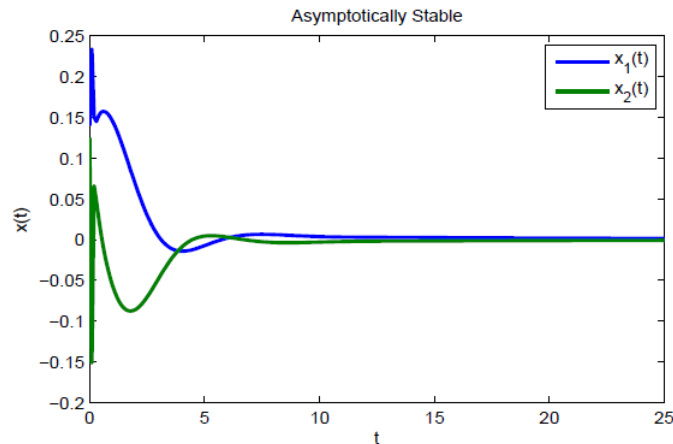
$$D_t^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0,$$

نقاط تعادل سیستم بالا از حل معادله $f(x(t)) = 0$ حاصل می شوند. این نقاط به طور موضعی پایدار مجانبی هستند هرگاه مقادیر ویژه ژاکوبین ماتریس $J = \frac{\partial f}{\partial x}$ در نقاط تعادل در شرط زیر

صدق کنند [۲۰]

$$|Arg(eig(J))| > \frac{\alpha\pi}{4}. \quad (26.1)$$

در شکل ۴.۱ ناحیه پایداری برای سیستم های مرتبه کسری نشان داده شده است.



شکل ۴.۱: پایداری مجانبی

مثال ۲.۱.۱. سیستم مرتبه کسری زیر را با شرایط اولیه $(x_1(0), x_2(0)) = (0.14, 0.125)$ در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{\alpha} x_1(t) &= x_2(t), \\ {}^C D_t^{\alpha} x_2(t) &= -x_1(t) - (1 + x_2(t))^2 x_2(t), \end{aligned}$$

که در آن نقطه تعادل سیستم مبدا می باشد. ماتریس ژاکوبین در نقطه تعادل به صورت

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

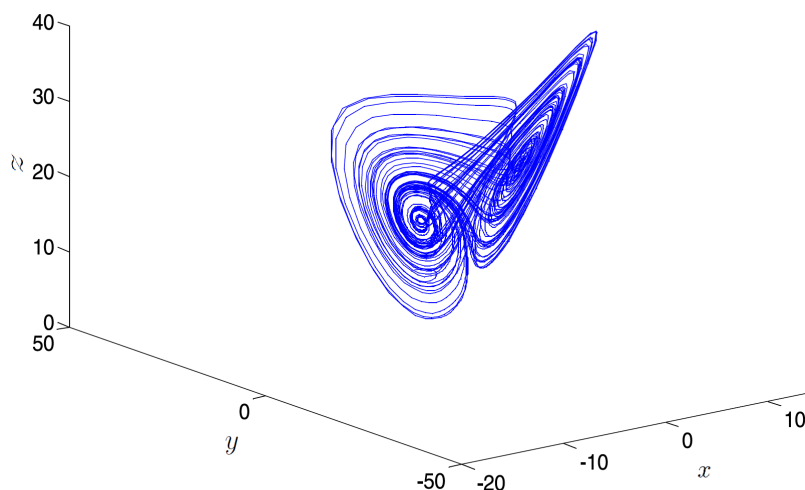
مقادیر ویژه برای ماتریس J به صورت $\lambda_{1,2} \approx -0.5 \pm 0.86i$ می باشد. به دلیل اینکه

$$|Arg(\lambda_{1,2})| \approx \frac{4\pi}{6} \approx 2.093 > \frac{\alpha\pi}{4} \approx 1.413,$$

لذا سیستم کسری فوق پایدار مجانبی می باشد. در شکل ۴.۱ می توان رفتار این سیستم را مشاهده نمود.

مثال ۳.۱.۱. یک سیستم نامتغیر با زمان سه بعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{\alpha} x(t) &= a(y(t) - x(t)), \\ {}^C D_t^{\alpha} y(t) &= (c - a)x(t) - x(t)z(t) + cy(t), \\ {}^C D_t^{\alpha} z(t) &= x(t)y(t) - bz(t). \end{aligned} \quad (27.1)$$



شکل ۷.۱: رفتار سیستم ۲۷.۱

زمانی که $(a, b, c) = (35, 3, 28)$ برای این سیستم نقاط تعادل $E_1 = (7/9373, 7/9373, 21)$ و $E_2 = (-7/9373, -7/9373, 21)$ را در نظر می‌گیریم. ماتریس ژاکوبین سیستم مرتبه کسری در نقطه تعادل $E^* = (x^*, y^*, z^*)$ به صورت زیر می‌باشد.

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a - z^* & c & -x^* \\ y^* & x^* & -b \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه برای نقاط تعادل به صورت $\lambda_{1,2} = 1/3417 \pm 0/1944i$ می‌باشد، به دلیل اینکه $|Arg(\lambda_{1,2})| \approx 0/1439 < \frac{\alpha\pi}{4} \approx 1/413$ لذا این نقاط تعادل برای سیستم کسری فوق پایدار نمی‌باشند. در شکل ۷.۱ می‌توان رفتار این سیستم را مشاهده نمود [۷۴].

در ادامه قضیه ای بسیار مهم برای پایداری سیستم های مرتبه کسری را بیان می‌کنیم. این قضیه تعمیم روش لیاپانوف برای پایداری سیستم های کسری می‌باشد.
قضیه ۱۰.۱.۱. فرض کنید $x = 0$ یک نقطه تعادل سیستم مرتبه کسری زیر باشد.

$${}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (28.1)$$

که $0 < \alpha < 1$ همچنین فرض کنید $V(t, x(t))$ تابع لیاپانوف و توابع صعودی اکید γ_i ، $i = 1, 2, 3$ که $\gamma_i(0) = 0$ موجود باشند که در شرایط زیر صدق کنند

$$\begin{aligned} \gamma_1(\|x\|) &\leq V(t, x(t)) \leq \gamma_2(\|x\|), \\ {}^C D_t^\alpha V(x(t)) &\leq -\gamma_3(\|x\|) \end{aligned}$$

آنگاه دستگاه (۲۸.۱) بطور مجانبی پایدار است [۲۱].

توجه داریم که در قضیه فوق شرط "نقطه تعادل مبدا باشد" محدودیتی برای سیستم نیست زیرا می توانیم با یک تغییر متغیر هر نقطه تعادل دیگر را به نقطه صفر انتقال دهیم.

مثال ۴.۱.۱. سیستم مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} {}^c D_t^{\alpha} x_1(t) &= -x_1(t) + x_2^{\beta}(t), \\ {}^c D_t^{\alpha} x_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t). \end{aligned}$$

برای بررسی پایداری، تابع لیپانوف را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$V(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{\alpha} x_1^{\beta}(t) + \frac{1}{\alpha} x_2^{\beta}(t),$$

واضح است که

$$\frac{1}{\alpha} x_1^{\beta}(t) + \frac{1}{\alpha} x_2^{\beta}(t) \leq V(x_1(t), x_2(t)) \leq x_1^{\beta}(t) + \frac{1}{\alpha} x_2^{\beta}(t).$$

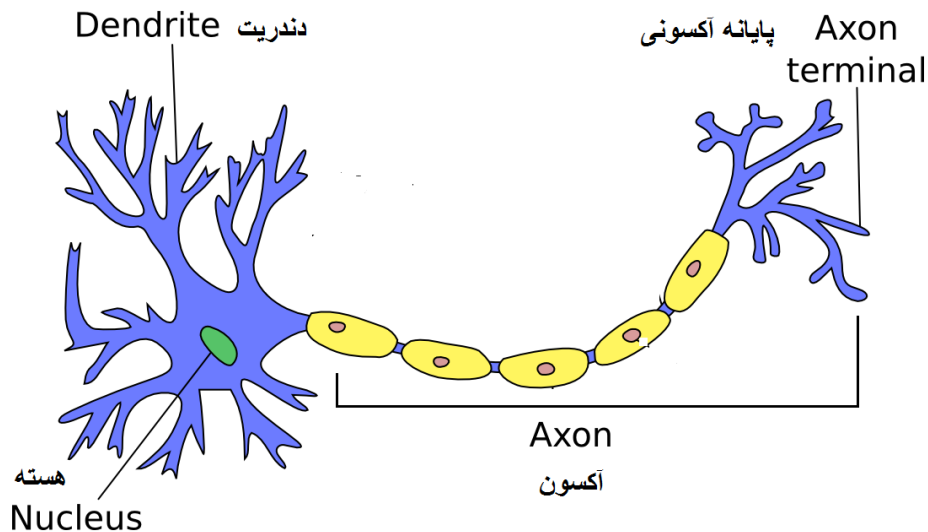
طبق لم ۱.۱.۱، داریم

$$\begin{aligned} {}^c D_t^{\alpha} V(x_1(t), x_2(t)) &= \frac{1}{\alpha} {}^c D_t^{\alpha} x_1^{\beta}(t) + \frac{1}{\alpha} {}^c D_t^{\alpha} x_2^{\beta}(t) \\ &\leq x_1(t) {}^c D_t^{\alpha} x_1^{\beta}(t) + \frac{1}{\alpha} x_2^{\beta}(t) {}^c D_t^{\alpha} x_2^{\beta}(t) \\ &\leq x_1(t) {}^c D_t^{\alpha} x_1^{\beta}(t) + x_2^{\beta}(t) {}^c D_t^{\alpha} x_2^{\beta}(t) = -x_1^{\beta}(t) - x_2^{\beta}(t) < 0 \end{aligned}$$

رابطه فوق نشان می دهد که مشتق کسری از تابع لیپانوف منفی است، بنابراین سیستم مرتبه کسری پایدار مجانبی است.

۲.۱ شبکه عصبی

در این فصل ابتدا ساختار کلی از شبکه های عصبی موجود در مغز انسان را معرفی می کنیم در واقع خواهیم دید که عملکرد سیستمی مغز به صورت شماتیک چگونه است. سپس با الگوبرداری از رفتار سیستمی مغز، در می یابیم که می توانیم برخی از محاسبات را برحسب عملکرد مغز انجام دهیم که به آن هوش محاسباتی یا هوش مصنوعی می گویند. یکی از روش های کارا برای حل مسائل پیچیده، شکستن آن به زیرمساله های ساده تر است که هر کدام از این زیرمساله ها به نحو ساده تری قابل درک و توصیف هستند. در حقیقت یک شبکه مجموعه ای از این ساختارهای ساده است که در کنار یکدیگر سیستم پیچیده نهایی را توصیف می کند. در این فصل ابتدا نرونهای شبکه های عصبی زیستی معرفی شده و طرز کار آنها نشان داده شده است سپس مدل مصنوعی این نرونها و ساختار آنها، مدل ریاضی آنها، شبکه های عصبی مصنوعی و نحوه آموزش و بکارگیری این شبکه ها نشان داده شده است. تمرکز بیشتر بر نوعی از این شبکه ها به نام شبکه های عصبی مصنوعی چند لایه می باشد.



شکل ۸.۱: ساختار نرون

۱.۲.۱ شبکه‌های عصبی طبیعی

مغز انسان درصد کمی از وزن بدن را تشکیل می‌دهد اما از لحاظ مصرف انرژی، بیست درصد انرژی بدن را مصرف می‌کند. ساده‌ترین واحد ساختاری شبکه عصبی مغز نرون^{۴۵} ها یا عصب‌ها هستند. مغز از ۱۰۰ تریلیون^{۱۰^{۱۱}} نرون به هم مرتبط با تعداد^{۱۰^{۱۶}} پیوند تشکیل شده است و این ساختار، امکان پردازش موازی اطلاعات را موجب می‌شود. نرون‌ها توسط سیناپس‌ها (ارتباط‌های الکترومغناطیسی) اطلاعات را منتقل می‌کنند. در این شبکه‌ها اگر یک سلول آسیب ببیند بقیه سلول‌ها می‌توانند نبود آنرا جبران کرده و نیز در بازسازی آن سهیم باشند. این شبکه‌ها قادر به یادگیری اند. مثلاً با اعمال سوزش به سلول‌های عصبی لامسه، سلول‌ها یاد می‌گیرند که به طرف جسم داغ نروند و با این الگوریتم سیستم می‌آموزد که خطای خود را اصلاح کند. یادگیری در این سیستم‌ها به صورت تطبیقی صورت می‌گیرد، یعنی با استفاده از مثال‌ها وزن سیناپس‌ها به گونه‌ای تغییر می‌کند که در صورت دادن ورودی‌های جدید سیستم پاسخ درستی تولید کند. نرون‌ها با وجود تفاوت‌های زیاد از نظر اندازه و شکل ظاهری، مشخصه‌های مشترکی دارند. همان‌طور که در شکل ۸.۱ نشان داده شده است از تنه سلولی نرون تعدادی شاخک کوتاه خارج می‌شود که دندریت^{۴۶} نام دارد. دندریت‌ها و تنه سلولی، سیگنال‌ها را از نرون‌های مجاور دریافت می‌کنند و از طریق یک لوله باریک به نام آکسون^{۴۷} به نرون‌های دیگر منتقل می‌کنند.

آکسون در انتهای خود به تعدادی رشته جانبی باریک تقسیم می‌شود که پایانه آکسونی نام دارد و با دندریت‌های سایر نرون‌ها مرتبط است. ارتباط بین آکسون یک نرون و دندریت

^{۴۵} Neuron

^{۴۶} Dendrite

^{۴۷} Axon

نرون دیگر را سیناپس^{۴۸} می‌نامند. همه سیگنال‌های جمع‌بندی شده در تنه نرون ترکیب می‌شوند و اگر وسعت سیگنال‌های ترکیب شده به آستانه نرون برسد، مرحله تحریک شدن^{۴۹} فعال می‌شود و یک سیگنال خروجی تولید می‌شود. این سیگنال به صورت یک پالس منفرد یا بخشی از پالس‌ها در یک میزان خاص به موازات آکسون به پایانه‌های سیناپسی انتقال می‌یابد و موجب ترشح موادی به نام عصب-رسانه می‌شود. عصب-رسانه در داخل شکاف سیناپسی پخش می‌شود و نرون بعدی را تحریک می‌کند و به این ترتیب یک سیگنال از یک نرون به دیگری انتقال می‌یابد. تعداد بسیار زیادی آکسون از نرون‌های مختلف با دندریته‌های یک نرون به این صورت ارتباط برقرار می‌کنند. ابتدا تصور می‌شد یک پیام عصبی ماهیت الکتریکی دارد اما بعدها ثابت شد که این پیام‌ها ماهیت الکتروشیمیایی دارند. لذا حفظ اطلاعات و ذخیره سازی آنها در مغز چیزی جز فعالیت‌های شیمیایی در بدنه سلول و پیوندهای آن نیست.^[۲]

۲.۲.۱ شبکه‌های عصبی مصنوعی

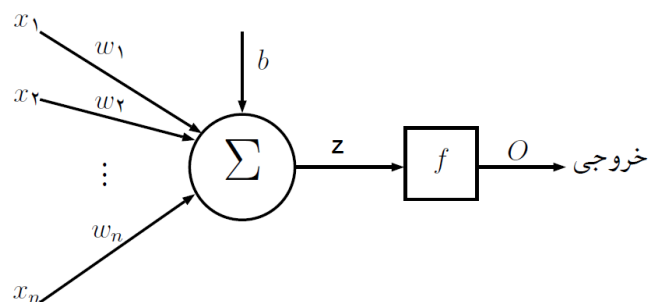
شبکه عصبی مصنوعی^{۵۰} ایده‌ای است برای پردازش اطلاعات که از سیستم عصبی زیستی الهام گرفته شده و مانند مغز به پردازش اطلاعات می‌پردازد. شبکه‌های عصبی شاخه‌ای از هوش مصنوعی است و در واقع تلاشی برای پیاده‌سازی نرون‌های عصبی مغز انسان به صورت مصنوعی است. عنصر کلیدی این ایده، ساختار جدید سیستم پردازش اطلاعات است. این سیستم از شمار زیادی عناصر پردازشی بهم پیوسته تشکیل شده که برای حل یک مساله با هم هماهنگ عمل می‌کنند، در این شبکه‌ها به کمک دانش برنامه نویسی، ساختار داده‌ای طراحی می‌شود که می‌تواند همانند نرون عمل کند. مهم‌ترین ویژگی شبکه‌های عصبی مصنوعی قابلیت یادگیری در آنها است. به این مفهوم که این شبکه بر مبنای یک قاعده مشخص و ثابت برنامه‌ریزی نشده و با گذشت زمان و یا در هر تکرار شبکه وضعیت آن تغییر می‌کند یا به اصطلاح آموزش می‌بیند. مبحث شبکه‌های عصبی مصنوعی مربوط به الگوبرداری از قوه یادگیری در انسان و پیاده‌سازی آن به صورت الگوریتم‌های کامپیوتری است. بنابراین شبکه‌های عصبی این قابلیت را دارند که کارهای پیچیده‌ای که برای سیستم‌های مبتنی بر قاعده مشکل هستند را فرا گیرند. هر چند شروع تحقیقات در زمینه شبکه‌های عصبی مصنوعی به دهه ۱۹۴۰ میلادی برمی‌گردد اما گسترش آن در دهه ۱۹۸۰ صورت پذیرفت^[۱]. سال‌های ۱۹۸۲ تا ۱۹۸۶ را می‌توان تولد دوباره شبکه عصبی دانست. در این سال‌ها دو اتفاق مهم در این زمینه رخ داد. اول ارائه شبکه عصبی بازگشتی و مفهوم تابع انرژی توسط جان هاپفیلد^{۵۱} بود که در سال ۱۹۸۲ منتشر شد^[۲۳]. دومین اتفاق، حل مساله فروشنده دوره‌گرد (TSP) توسط

^{۴۸}Synapse

^{۴۹}Firing

^{۵۰}Artificial Neural Network

^{۵۱}John Hopfield



شکل ۹.۱: مدل ریاضی نرون عصبی مصنوعی

شبکه هاپفیلد بود [۲۴]. هاپفیلد نشان داد که از این شبکه بازگشتی می‌توان برای حل مسائل بهینه‌سازی استفاده کرد و افق جدیدی را در شبکه‌های عصبی مصنوعی گشود.

توپولوژی شبکه‌های عصبی مصنوعی

وضعیت نسبی نرون‌ها در شبکه (تعداد و گروه بندی و نوع اتصالات آنها) را توپولوژی شبکه گویند. توپولوژی در واقع سیستم اتصال سخت افزار نرون‌ها به یکدیگر است که توام با نرم افزار مربوطه نوع عملکرد شبکه‌ی عصبی را تعیین می‌کند. در این توپولوژی یک لایه‌ی ورودی وجود دارد که اطلاعات را دریافت می‌کند، تعدادی لایه‌ی مخفی وجود دارد که اطلاعات را از لایه‌های قبلی می‌گیرند و در نهایت یک لایه‌ی خروجی وجود دارد که نتیجه محاسبات به آنجا می‌رود و جوابها در آن قرار می‌گیرند.

لایه ورودی: دریافت اطلاعات خامی که به شبکه تغذیه شده است.







لایه‌های پنهان: عملکرد این لایه‌ها به وسیله ورودی‌ها و وزن ارتباط بین آنها و لایه‌های پنهان تعیین می‌شود. وزن‌های بین واحدهای ورودی و پنهان تعیین می‌کند که چه وقت یک واحد پنهان باید فعال شود.

لایه خروجی: عملکرد واحد خروجی بسته به فعالیت واحد پنهان و وزن ارتباط بین واحد پنهان و خروجی می‌باشد.

در یک نگاه ساده مدل یک نرون باید شامل n ورودی x_j ، $(j = 1, 2, \dots, n)$ باشد. این ورودی‌ها در وزن‌های سیناپسی w_j ، $(j = 1, 2, \dots, n)$ که روی آکسون‌ها واقع هستند و نقش ساختار سیناپسی را ایفا می‌کنند ضرب می‌شوند. حاصل ضرب ورودی‌ها در وزن‌های متناظرشان را به همراه عددی مانند b موسوم به بایاس^{۵۲} با هم جمع می‌شوند. این حاصل جمع را خروجی خطی نرون نامیده و با z نشان می‌دهیم. نهایتاً تابعی به نام تابع فعال‌ساز^{۵۳} به z اثر کرده و

^{۵۲} Bias

^{۵۳} Activation Function

Name	Plot	Equation	Derivative
Identity		$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Binary step		$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$	$f'(x) = 0 \text{ for } x \neq 0$
Logistic (a.k.a Soft step)		$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$	$f'(x) = f(x)(1 - f(x))$
Tanh		$f(x) = \tanh(x) = \frac{2}{1 + e^{-2x}} - 1$	$f'(x) = 1 - f(x)^2$
ArcTan		$f(x) = \tan^{-1}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
Rectified Linear Unit (ReLU)		$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$	$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$

شکل ۱۰.۱: انواع تابع فعال سازی

بدین ترتیب خروجی نرون حاصل می گردد. معادلات ریاضی چنین نرونی به صورت زیر است.

$$f(z) = f\left(\sum_{j=1}^n w_j x_j + b\right) \quad (29.1)$$

بنابراین شبکه عصبی مصنوعی با استفاده از مدل ساده شده نرون واقعی به پردازش اطلاعات می پردازد. با توجه به این توضیحات می توان مدل ساده ای برای توصیف یک نرون (یک گره در شبکه عصبی مصنوعی) پیشنهاد کرد. این مدل در شکل ۹.۱ نشان داده شده است [۲]. مشخصه های اصلی یک شبکه عصبی که در طراحی آن باید مد نظر قرار گیرند عبارت است از

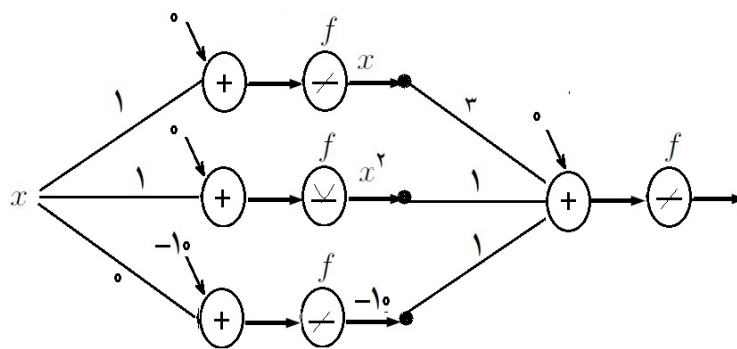
الف: معماری شبکه عصبی: نحوه اتصالات بین نرون ها، تعداد آن ها و تعداد لایه های تشکیل دهنده بخش نرون های ارتباطی را معماری شبکه عصبی گویند.

ب: تابع فعال ساز: نوع تابعی که انتخاب می شود تا روی نرون قرار گیرد و خروجی نرون را تولید کند تابع فعال ساز آن نرون گویند. در مورد ماهیت تابع f باید این نکته مورد توجه قرار بگیرد که ضابطه این تابع بستگی به نوع خروجی هایی که انتظار داریم شبکه آنها را حاصل کند مشخص می شود. در شکل ۱۰.۱ انواع تابع فعال سازی مشاهده می شود.

ج: یادگیری شبکه عصبی: یادگیری عبارت است از یافتن وزن ها، بایاس ها و توابع فعالیت به طوریکه در یک دامنه کاری از هر ورودی، خروجی مطلوب حاصل گردد.

مثال ۱.۲.۱. یک شبکه طراحی کنید که ورودی آن $x \in (-1, 1)$ بوده و خروجی متناظر، تابع $y = x^2 + 3x - 10$ باشد.

این کار را می توان با یک شبکه دولایه انجام داد که یکی از حالت های جواب با در نظر گرفتن توابع فعال ساز همانی و درجه دو، می تواند شبکه ای با مشخصات شکل ۱۱.۱ باشد.



شکل ۱۱.۱: شبکه دو لایه

لازم به ذکر است که بدانیم کار یک شبکه همیشه مانند یک تابع نیست هرچند دقیقاً یک تابع نیز می‌تواند باشد، در واقع نباید انتظار داشته باشیم برای شبکه‌ها مانند توابع ضابطه بنویسیم بلکه در واقع یک شبکه، برنامه کامپیوتری است که برای استفاده از آن در صنعت می‌توان آن را در یک آی‌سی یا همان مدار که برنامه پذیر باشد ذخیره کرد و از آن استفاده کنیم. برای مثال پارکینگی را نظر بگیرید که هنگام ورود هر ماشین باید شماره آن در کامپیوتر ثبت شده و قبض صادر شود. دستگاهی که شماره را می‌خواند بر اساس یک شبکه عصبی برنامه ریزی می‌شود [۳].

انواع یادگیری شبکه عصبی مصنوعی

یادگیری تحت نظارت ^{۵۴}

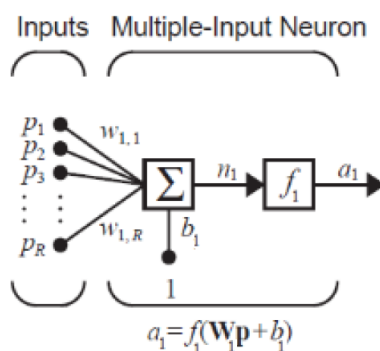
در این یادگیری به ازای هر ورودی، خروجی مطلوب معلوم است. برای یافتن وزن‌ها، ورودی‌ها را به شبکه اعمال کرده و خروجی را بدست می‌آوریم سپس این خروجی را با خروجی مطلوب مقایسه می‌کنیم. در صورت وجود اختلاف هنوز یادگیری کامل نشده است و باید وزن‌ها و بایاس‌ها تغییر یابند. این عمل تا رسیدن به پارامترهای بهین شبکه، را یادگیری تحت نظارت می‌گوییم.

یادگیری بدون نظارت ^{۵۵}

در این یادگیری پارامترهای اولیه را در دست داریم اما خروجی مطلوب در دست نمی‌باشد و پارامترهای شبکه عصبی تنها توسط پاسخ سیستم اصلاح و تنظیم می‌شوند. لذا یک شاخص برای آموزش وجود دارد (مانند تابع هزینه) در این حالت آموزش شبکه را یادگیری بدون نظارت می‌گوییم.

^{۵۴} Supervised Learning

^{۵۵} Unsupervised Learning



شکل ۱۲.۱: شبکه پرسپترون

شبکه پرسپترون چند لایه

شبکه هایی که از یک نرون ساخته شده اند دارای محدودیت هایی می باشند. این شبکه ها توانایی پیاده سازی توابع غیر خطی را ندارند. برای حل این مشکل شبکه های دیگری پیشنهاد شد که ما به یکی از آنان که بیشترین کاربرد را دارد می پردازیم. مدل عمومی شبکه های پرسپترون، شبکه جلورونده با روال تعلیم انتشار به عقب است. شبکه های جلورونده، شبکه هایی هستند که ورودی های لایه اول نرون های آن به لایه های بعدی متصل بوده و در هر سطح این مسئله صادق بوده تا به لایه خروجی برسد. روال انتشار به عقب بدین معنی است که پس از مشخص شدن خروجی شبکه، ابتدا وزن های لایه آخر تصحیح شده و بعد به ترتیب اوزان لایه های قبلی تصحیح می شوند. در شبکه های پرسپترون چند لایه، تعداد لایه های پنهان می تواند هر تعداد باشد. البته در بیشتر کاربردها یک لایه پنهان کفایت می کند. در بعضی مواقع نیز دو لایه پنهان یادگیری شبکه را ساده تر می کند.

فرانک روزنبلات^{۵۶}، با اتصال این نرون ها به طریقی ساده پرسپترون را ایجاد و ابداع کرد، و برای نخستین بار این مدل را در کامپیوترهای دیجیتال شبیه سازی و آن ها را به طور رسمی تحلیل نمود. شبکه های پرسپترون از یک لایه ورودی، تعدادی لایه پنهان و یک لایه خروجی تشکیل شده است. می توان گفت این شبکه عصبی به عنوان یک نگاشت غیر خطی با تعداد ورودی و خروجی دلخواه مانند $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ است. اما در تمام شبکه ها توابع اینگونه نیستند بلکه عملکردی فراتر از آن می توانند داشته باشند.

با توجه به شکل ۱۲.۱، یک نرون، سیگنال های p که بردار R تایی است را دریافت کرده و هریک از آنها را به اعدادی موسوم به وزن ها ضرب کرده، سپس همه آنها را به همراه عددی موسوم به بایاس با هم جمع می کند. حاصل جمع را خروجی خطی نرون نامیده و با n_1 نمایش می دهیم. نهایتاً تابعی مانند f_1 به n_1 اثر کرده و بدین ترتیب خروجی اولین نرون به نام a_1

^{۵۶}Rosenblatt, Frank

حاصل می گردد. معادلات ریاضی چنین نرونی به صورت زیر است.

$$a_1 = f_1(n_1) = f_1\left(\sum_{j=1}^R w_{1,j}p_j + b_1\right) \quad (30.1)$$

ماهیت تابع f_1 به نوع خروجی که انتظار داریم شبکه آن را حاصل کند بستگی دارد. در حالت کلی یکی از توابع فعالساز در شکل ۱۰.۱ می تواند به عنوان تابع فعالیت نرونی قرار گیرد. اندیس ۱ در این روابط نشان دهنده ساختار اولین نرون شبکه می باشد. با کنار هم قرار دادن این نرون ها، شبکه بزرگتری طراحی می شود. برای بکارگیری روش شبکه عصبی مصنوعی در حل مسائل مختلف عموماً پارامترهای وزن ها و بایاس ها مجهول می باشند و سعی خواهیم کرد آن ها را با استفاده از ورودی ها و خروجی های متناظرشان بیابیم.

۳.۲.۱ تاریخچه‌ای از حل مسائل بهینه سازی با استفاده از شبکه‌های عصبی

در سال ۱۹۸۶ تانک و هاپفیلد [۲۵] اولین شبکه عصبی را برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی معرفی کردند. نشان دادند که وضعیت شبکه در هر تکرار به گونه‌ای تغییر می کند که تابع انرژی متناظر با آن به طور یکنواخت کاهش می یابد تا جایی که به نقطه کمینه خود می رسد که این نقطه کمینه متناظر با نقطه تعادل شبکه عصبی است. آن ها این شبکه عصبی را توسط یک مدار الکترونیکی پیاده سازی کردند. همچنین از این شبکه برای حل مساله فروشنده دوره گرد با ۳۰ شهر استفاده نمودند. این شبکه دارای نقص‌هایی بود به خصوص این که نقطه تعادل شبکه در شرایط بهینگی صدق نمی کرد و لذا جواب مطلوبی از مساله حاصل نمی شد. با این وجود کارهای هاپفیلد انگیزه بسیار خوبی را برای محققین به وجود آورد تا در این زمینه فعالیت کنند. کندی و چا [۲۶] با افزودن یک پارامتر جریمه متناهی به شبکه هاپفیلد آن را توسعه دادند و از آن برای حل مساله برنامه‌ریزی غیرخطی محدب استفاده کردند. با پارامترهای جریمه این شبکه در یافتن نقطه بهینه دقیق ناتوان است به خصوص اگر پارامتر جریمه بزرگ باشد این شبکه به سختی عمل می کند.

برای جلوگیری از به کار بردن پارامتر جریمه یک شبکه عصبی سوئیچ-خازن^{۵۸} توسط رودریگز-وازکز^{۵۹} و همکاران [۲۷] معرفی شد. همچنین ما و شانبلات^{۶۰} [۲۸] یک شبکه عصبی دو فازی ارائه کردند که فاز اول شبکه مشابه شبکه کندی و چا بود و در فاز دوم مسیر شبکه به جواب دقیق مساله همگرا می شد. بنابراین، این روش جواب‌های دقیق تری نسبت به شبکه کندی و چا ارائه داد. مشکل این شبکه در این بود که پایداری فاز دوم شبکه بستگی به

^{۵۷} Kennedy and Chua

^{۵۸} Switched-Capacitor

^{۵۹} Rodriguez-Vazquez

^{۶۰} Maa and Shanblatt

انتخاب یک مقدار بزرگ از پارامتر جریمه داشت و لذا اگرچه تاثیر پارامتر جریمه در این روش کاهش یافته بود و جواب‌های حاصل دقیق‌تر بودند اما هنوز مستقل از پارامتر نبود. ژانگ^{۶۱} و همکارش [۲۹] بر مبنای روش لاگرانژ یک شبکه عصبی ارائه کردند که کاملاً مستقل از پارامتر جریمه و قادر به حل مسائل غیرخطی بود. نقطه تعادل این شبکه عصبی در شرایط بهینگی مرتبه اول و دوم صدق می‌کرد و هم‌چنین شبکه حاصل همگرا بود. در سال ۱۹۹۳ بوزردوم و پتیسن^{۶۲} [۳۰] شبکه‌ای را بر مبنای گرادیان و روش تصویر و مستقل از پارامتر جریمه ابداع کردند که تنها قادر به حل مسائل درجه دوم با متغیرهای کران‌دار بود. این روش در عمل روش کارایی بود اما نمی‌توانست حالت کلی مسائل برنامه‌ریزی خطی و درجه دوم را حل کند. چندین مدل شبکه عصبی برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی توسط عفتی و همکاران [۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴] ارائه شده است.

۳.۱ مساله کنترل بهینه کسری و شرایط بهینگی

حساب تغییرات به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات نوعی تعمیم محاسبات است که در حل مسائل بهینه‌سازی بسیار مفید است. در حساب تغییرات هدف یافتن مجموعه‌ای از مسیرها، خم‌ها است که به عنوان توابعی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای اکسترمم هستند که از مساله پیشنهاد شده (مساله بارچيستوچرون)^{۶۳} در سال ۱۶۹۶ به وسیله ریاضی‌دان سوئیسی جان برنولی^{۶۴} ناشی شده است [۳۵].

تعریف ۱.۳.۱. [۳۶] نمو تابع را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$\Delta J(x, \delta x) = \delta J(x, \delta x) + g(x, \delta x) \|\delta x\|,$$

که δJ قسمت خطی بر حسب δx است. اگر $\lim_{\|\delta x\| \rightarrow 0} g(x, \delta x) = 0$ ، آن‌گاه J را دیفرانسیل پذیر^{۶۵} گویند و δJ تغییرات تابع J نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۳.۱. (قضیه اساسی حساب تغییرات) [۳۶]. اگر x^* یک منحنی اکسترمم باشد، تغییرات J روی x^* باید صفر شود، یعنی به ازای هر δx قابل قبول $\delta J(x^*, \delta x) = 0$.

لم ۱.۳.۱. (لم اساسی حساب تغییرات) [۳۶]. اگر تابع h پیوسته بوده و برای هر تابع پیوسته مانند δx در محدوده $[t_0, t_f]$ داشته باشیم

$$\int_{t_0}^{t_f} h(t) \delta x(t) dt = 0,$$

آن‌گاه h باید در تمام محدوده $[t_0, t_f]$ صفر باشد.

^{۶۱}Zhang

^{۶۲}Bouzerdoum and Pattison

^{۶۳}Barchistochrone

^{۶۴}John Bernoulli

^{۶۵}Differentiable

۱.۳.۱ مساله کنترل بهینه

مساله کنترل بهینه^{۶۶} با مشتقات مرتبه صحیح، بخش وسیعی از تحقیقات در زمینه کنترل و کنترل بهینه را شامل می شود. یک مساله کنترل بهینه کسری در واقع همان مساله کنترل بهینه است که دستگاههای دینامیکی همراه کننده آن از مرتبه کسری است. مساله کنترل بهینه کسری با توجه به تعاریف مختلفی که از مشتقات کسری موجود است تعریف می شود، که مهم ترین آنها مشتقات کسری ریمن-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو هستند. در سالهای اخیر، بحث کنترل بهینه کسری رشد بسیاری کرده است و مقالات بسیار زیادی در زمینه های مهندسی، علوم، اقتصاد و دیگر زمینه ها به چاپ رسیده است. با این وجود، یافتن کنترل بهینه یا حتی زیر-بهینه برای سیستم های غیرخطی، هنوز یکی از زمینه های تحقیقاتی فعال و مشکل در نظریه کنترل است. هدف سیستم کنترل بهینه یافتن مسیرهای کنترل است به طوری که در محدودیتها یا قیود فیزیکی صدق کند همچنین تابع هدف یا معیار معینی را حداکثر یا حداقل کند.

مساله کنترل بهینه

شکل کلی یک مساله کنترل بهینه با مشتق مرتبه صحیح به صورت زیر است

$$\min J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f(x(t), u(t), t) dt, \quad (31.1)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \dot{x} = g(x(t), u(t), t), \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f, \end{cases} \quad (32.1)$$

که $x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))^T \in \mathbb{R}^p$ بردار حالت و $u(t) = (u_1(t), \dots, u_q(t))^T \in \mathbb{R}^q$ بردار کنترل نامیده می شود. در حالت کلی کنترل قابل قبول $u^*(t)$ باعث می شود سیستم (۳۲.۱) مسیر قابل قبول x^* را تعقیب نموده و تابع هدف (۳۱.۱) را حداقل کند. توجه کنید که معادله دیفرانسیل می تواند انواع مختلفی داشته باشد، مانند کسری، تاخیری، معادله دیفرانسیل جزئی یا حتی می تواند معادله انتگرالی باشد. در این مسائل، وقتی می گوئیم u^* موجب حداقل شدن تابع هدف می شود، یعنی به ازای تمام u ها و x های قابل قبول داریم

$$h(x^*(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f(x^*(t), u^*(t), t) dt \leq h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f(x(t), u(t), t) dt. \quad (33.1)$$

بنابراین در حل مساله ی کنترل بهینه به دنبال یک کمینه ی مطلق هستیم.

۲.۳.۱ مساله کنترل بهینه کسری و شرایط بهینگی آن

مساله کنترل بهینه کسری، تعمیمی از مساله کنترل بهینه کلاسیک تحت سیستم های دینامیکی شامل مشتقات کسری است. به عبارت دیگر در مساله کنترل بهینه ای که توسط روابط (۳۲.۱) و (۳۱.۱) معرفی شده است، به جای مشتق معمولی از مشتق کسری استفاده می شود. اخیرا بسیاری از پژوهشگران در رابطه با مساله کنترل بهینه کسری مطالعاتی انجام داده اند و توانسته اند به راه حل های عددی برای آن ها دست یابند [۳۷]. نظریه کنترل کسری یک زمینه جدید در ریاضیات است. نظریه کنترل بهینه کسری به عنوان یک ابزار قدرتمند و کارآمد برای طراحی پایدارکننده بازخورد برای سیستم های کنترل کسری بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۳۸]. مساله کنترل بهینه کسری می تواند با توجه به تعاریف مختلف مشتقات کسری تعریف شود. در سال ۲۰۰۴ آگراوال با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، شرایط لازم بهینگی را برای مساله کنترل بهینه کسری به دست آورد [۳۹]. نویسندگان در [۷۶] یک راه حل کلی مبتنی بر یافتن جواب عددی برای معادله همیلتون-ژاکوبی-بلمن را با روش هم محلی لژاندر-گائوس ارائه کردند. در [۴۰]، نویسندگان برای حل رده ای از مسائل کنترل بهینه کسری، از روش تقریب مساله مرتبه کسری به مرتبه صحیح استفاده کردند.

قضیه ۲.۳.۱. [۴۶] فرض کنید $0 < \alpha < 1$ ، $p, q \geq 1$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$. اگر $f \in L_p([t_0, t_f])$ و $g \in L_p([t_0, t_f])$ آنگاه داریم

$$\int_{t_0}^{t_f} g(t) {}_{t_0}D_t^\alpha f(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} f(t) {}_{t_0}D_t^\alpha g(t) dt + [({}_t I_{t_f}^{1-\alpha} g(t)) f(t)]_{t_0}^{t_f}. \quad (34.1)$$

فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ ، $\alpha \in (0, 1)$ و f, g در بازه $[a, +\infty)$ توابع به طور پیوسته مشتق پذیر باشند، همچنین $\phi : [a, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد. مساله زیر را نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min \quad & J(x, u, T) = \phi(T, x(T)) + \int_a^T f(x(t), u(t), t) dt \\ \text{s.t.} \quad & M\dot{x}(t) + N {}_a D_t^\alpha x(t) = g(x(t), u(t), t), \\ & x(a) = x_a, \end{aligned} \quad (35.1)$$

که در آن $(M, N) \neq (0, 0)$ و x_a عدد حقیقی ثابت است. هدف این است که با در نظر گرفتن سیستم کنترل (۳۵.۱) که مشتقات عدد صحیح و کسری را شامل می شود، شرایط لازم بهینگی را بیابیم. برای سادگی روال یافتن شرایط بهینگی را برای مساله یک بعدی ارائه می شود. با این حال، با استفاده از تکنیک های مشابه، نتایج را می توان به راحتی به مسائل چند حالت و کنترل های متعدد گسترش داد. در این مساله، T یک مقدار متغیر $0 < T < \infty$ است. دقت شود زمانی که $N = 0$ باشد، مساله کنترل بهینه کلاسیک بدست می آید، لذا شرایط بهینگی مساله کنترل بهینه کلاسیک را به جداگانه بررسی ننموده ایم. در مساله (۳۵.۱)، T و $x(T)$ می توانند ثابت و یا آزاد باشند. بنابراین توجه در این مساله، علاوه بر متغیر وضعیت

$x(\cdot)$ و متغير كنترل $u(\cdot)$ ، روى زمان نهايى T موردنظر نيز معطوف است تا بتوان تابع J را با توجه به حالت‌هاى T و $x(T)$ بهينه كرد. منظور از D_t^α همان مشتق كسرى مرتبه α ام چپ است.

شرايط لازم و كافي بهينگى مساله كنترل بهينه كسرى

براي نوشتن شرايط لازم بهينگى، ابتدا از بردار لاگرانژ $\lambda(\cdot)$ براي ايجاد تابع هاميلتونين به صورت زير استفاده مي كنيم

$$H(x, u, \lambda, t) = f(x, u, t) + \lambda g(x, u, t). \quad (۳۶.۱)$$

بنابراين مساله (۳۵.۱) را مي توان به صورت زير نوشت

$$J(x, u, T, \lambda) = \int_a^T H(x, u, \lambda, t) - \lambda(t)[M\dot{x}(t) + N_a D_t^\alpha x(t)] dt + \phi(T, x(T)), \quad (۳۷.۱)$$

تغييرات متغير حالت، كنترل، T و لاگرانژ را به صورت زير در نظر مي گيريم

$$x + \delta x \quad u + \delta u \quad T + \delta T \quad \lambda + \delta \lambda$$

با توجه به شرايط مرزى مساله مي دانيم $\delta x(a) = 0$. طبق قضيه اساسى حساب تغييرات، براي يافتن كنترل بهينه بايد تغييرات J صفر باشد.

$$\begin{aligned} \circ &= \int_a^T \left[\frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \delta \lambda - \delta \lambda(t)(M\dot{x}(t) + N_a D_t^\alpha x(t)) \right. \\ &\quad \left. - \lambda(M\delta \dot{x}(t) + N_a D_t^\alpha \delta x(t)) \right] dt \\ &+ \delta T \left[H(x, u, \lambda, t) - \lambda(t)(M\dot{x}(t) + N_a D_t^\alpha x(t)) \right]_{t=T} \\ &+ \frac{\partial \phi}{\partial t}(T, x(T)) \delta T + \frac{\partial \phi}{\partial x}(T, x(T))(\dot{x}(T) \delta T + \delta x(T)), \end{aligned}$$

با استفاده از انتگرال جز به جز

$$\int_a^T \lambda(t) \delta \dot{x}(t) dt = \delta x(T) \lambda(T) - \int_a^T \delta x(t) \dot{\lambda}(t) dt$$

و قضيه ۲.۳.۱ داريم

$$\int_a^T \lambda(t) {}_a D_t^\alpha \delta x(t) dt = \int_a^T \delta x(t) {}_t D_T^\alpha \lambda(t) dt + \delta x(T) [{}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t)]_{t=T}.$$

لذا رابطه زير را مي توان نوشت

$$\begin{aligned} \circ &= \int_a^T \left[\delta x \left[\frac{\partial H}{\partial x} + M\dot{\lambda}(t) - N_t D_T^\alpha \lambda(t) \right] + \delta u \frac{\partial H}{\partial u} + \delta \lambda \left[\frac{\partial H}{\partial \lambda} - M\dot{x}(t) - N_a D_t^\alpha x(t) \right] \right] dt \\ &- \delta x(T) \left[M\lambda(t) + N_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x(t)) \right]_{t=T} \\ &+ \delta T \left[H(x, u, \lambda, t) - \lambda(t)(M\dot{x}(t) + N_a D_t^\alpha x(t)) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x(t)) \dot{x}(t) \right]_{t=T}. \end{aligned}$$

حال متغیر جدید زیر را تعریف می کنیم

$$\delta x_T = (x + \delta x)(T + \delta T) - x(T).$$

طبق قضیه تیلور داریم

$$(x + \delta x)(T + \delta T) = (x + \delta x)(T) + \dot{x}(T)\delta T + O(\delta T^2),$$

که در آن $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{O(\gamma)}{\gamma}$ متناهی است، همچنین $\delta x(T) = \delta x_T - \dot{x}(T)\delta T + O(\delta T^2)$. در نهایت به عبارت زیر می رسیم.

$$\begin{aligned} \circ &= \int_a^T \left[\delta x \left[\frac{\partial H}{\partial x} + M\dot{\lambda}(t) - N_t D_T^\alpha \lambda(t) \right] + \delta u \frac{\partial H}{\partial u} + \delta \lambda \left[\frac{\partial H}{\partial \lambda} - M\dot{x}(t) - N_a D_t^\alpha x(t) \right] \right] dt \\ &- \delta x_T \left[M\lambda(t) + N_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x(t)) \right]_{t=T} \\ &+ \delta T \left[H(x, u, \lambda, t) - N\lambda(t)_a D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t) I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} + O(\delta T^2). \end{aligned}$$

با توجه به تغییرات فوق و لم ۱.۳.۱، در ادامه جهت یافتن شرایط بهینگی قضیه زیر را داریم.

قضیه ۳.۳.۱ [۴۵] اگر (x, u, T) مینیمم مساله (۳۵.۱) باشد، آنگاه تابع λ وجود دارد به طوریکه سه تایی (x, u, λ) در شرایط زیر صدق کند
(الف) سیستم هامیلتونین:

$$\begin{aligned} M\dot{\lambda}(t) - N_t D_T^\alpha \lambda(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), u(t), t, \lambda(t)), \\ M\dot{x}(t) + N_a D_T^\alpha x(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x(t), u(t), \lambda(t), t). \end{aligned}$$

برای تمام $t \in [a, T]$

(ب) شرایط ایستایی:

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x(t), u(t), \lambda(t), t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

(ج) شرایط حدی:

$$\begin{aligned} \left[H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - N\lambda(t)_a D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t) I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} &= 0, \\ \left[M\lambda(t) + N_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x(t)) \right]_{t=T} &= 0. \end{aligned}$$

برهان. طبق قضیه اساسی حساب تغییرات، تغییرات J باید صفر شود، یعنی ضرایب δu ، δx و $\delta \lambda$ باید صفر باشد، لذا حکم برقرار است.

□

با توجه به قضيه فوق مى توان شرايط بهينگى را براى حالت هاى مختلف نوشت [۴۵]. فرض كنيد (x, u) مينيمم مساله (۳۵.۱) باشد. لذا حالت هاى زير را داريم.
الف) اگر T ثابت و $x(T)$ آزاد باشد، در اين حالت در قضيه ۳.۳.۱ شرايط مرزى به صورت زير است.

$$\left[M\lambda(t) + N {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0.$$

ب) اگر T آزاد و $x(T)$ ثابت باشد، در اين حالت در قضيه ۳.۳.۱ شرايط مرزى به صورت زير است.

$$\left[H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - N\lambda(t) {}_a D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t) {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0,$$

ج) اگر T و $x(T)$ هر دو ثابت باشند، در اين حالت در قضيه ۳.۳.۱ شرايط مرزى وجود ندارد و فقط شرايط مرزى در مساله (۳۵.۱) را در نظر مى گيريم.
د) اگر $x(T)$ روى يك سطح مشخص باشد، يعنى $x(T) = \gamma(T)$ كه تابع γ سطحى مشتق پذير است. در اين حالت در قضيه ۳.۳.۱ شرايط مرزى به صورت زير است.

$$\left[H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - N\lambda(t) {}_a D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t) {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x(t)) - \dot{\gamma}(t) \left(M\lambda(t) + N {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x(t)) \right) \right]_{t=T} = 0.$$

ه) اگر T ثابت و $x(T) \geq K$ كه $K \in \mathbb{R}$ و ثابت باشد، با اين شرايط در قضيه ۳.۳.۱ شرايط مرزى به صورت زير است.

$$\left[M\lambda(t) + N {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} \leq 0,$$

$$(x(T) - K) \left[M\lambda(t) + N {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0.$$

و) اگر $x(T)$ ثابت و $T \leq K$ كه $K \in \mathbb{R}$ و ثابت باشد، با اين شرايط در قضيه ۳.۳.۱ شرايط مرزى به صورت زير است.

$$\left[H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - N\lambda(t) {}_a D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t) {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} \geq 0,$$

$$\left[H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - N\lambda(t) {}_a D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t) {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} \times (T - K) = 0.$$

جهت مشاهده اثبات موارد فوق به [۴۵] رجوع شود.

دقت شود که جواب های بدست آمده از معادلات اولر لاگرانژ در قضیه ۳.۳.۱ شرایط لازم بهینگی می باشند. در ادامه قضیه ای را بیان می کنیم که شرایط کافی بهینگی را بیان می کند.

قضیه ۴.۳.۱. [۴۸] (شرایط کافی بهینگی) فرض کنید $x^*(.), u^*(.)$ و $\lambda^*(.)$ در قضیه ۳.۳.۱ صدق کنند. همچنین فرض کنید

۱. f و g روی x و u ، و ϕ روی x محدب باشند.

۲. T ثابت باشد.

۳. برای تمام $t \in [a, T]$ یا $\lambda^* \geq 0$ یا g روی x و u خطی باشد.

آنگاه $(x^*(.), u^*(.))$ یک جواب بهینه برای مساله (۳۵.۱) می باشد.

فصل ۲

روش های عددی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری افق نامتناهی

مسائل کنترل بهینه افق نامتناهی در سالهای اخیر مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است [۵۳]–[۵۵]. این مسائل در علوم مهندسی [۵۶]، مدل‌های رشد اقتصادی [۵۷]، مدل‌های گسسته نامحدود فیزیک حالت جامد در بلورها [۵۸]، در نظریه تعادل ترمودینامیکی مواد [۵۹] و علوم دیگر کاربرد بسیاری دارند. با توجه به اهمیت مساله کنترل بهینه افق نامتناهی، روشهای زیادی در این حوزه برای حل آنها ارائه شده است، از جمله روشهای مبتنی بر موجک هار [۶۰] و روشهای شبه طیفی [۶۱]. این روش ها مستلزم گسسته سازی دامنه به تعداد عناصر متناهی است که در آن توابع به صورت محلی تقریب زده می شوند.

در حالت کلی در بیشتر موارد جواب‌های تحلیلی برای مسائل کسری ممکن است به آسانی به دست نیاید و اغلب از روش‌های عددی استفاده کنند که ثابت شده است که این روش‌ها معتبر و کارا هستند. در مساله کنترل بهینه با مشتق مرتبه کسری (۳۵.۱)، اگر $T = \infty$ و $\phi = 0$ در نظر بگیریم، این مساله را یک مساله کنترل بهینه افق نامتناهی مرتبه کسری^۱ می

^۱Fractional infinite horizon optimal control

نامند.

$$\begin{aligned} \min \quad & J(x, u, T) = \int_a^\infty f(x(t), u(t), t) dt \\ \text{s.t.} \quad & M\dot{x}(t) + N_a D_t^\alpha x(t) = g(t, x(t), u(t)) \\ & x(a) = x_a \end{aligned}$$

شرایط بهینگی برای این دسته از مسائل در قضایای ۳.۳.۱ و ۴.۳.۱ آمده است. برای مثال، شرایط بهینگی مساله کنترل بهینه افق نامتناهی زمانی که $(M, N) = (1, \circ)$ و تابع هدف درجه دوم است با معادلات حالت مشخص شده را در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} \min \quad & J = \frac{1}{2} \int_a^\infty [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt \\ \text{s.t.} \quad & \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ & x(a) = x_a \end{aligned}$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و $u(t) \in \mathbb{R}^m$ به ترتیب بردارهای حالت و کنترل، $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ توابع پیوسته و مشتق پذیر، $Q(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس نیمه معین مثبت و $R(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ معین مثبت می باشند. هامیلتونین برای مساله درجه دوم را به صورت زیر است.

$$H(x, u, \lambda) = \frac{1}{2} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] + \lambda^T(t)[A(t)x(t) + B(t)u(t)],$$

که در آن $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار ضریب لاگرانژ است. شرایط لازم بهینگی برای این مساله به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, u, \lambda), \\ \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, u, \lambda), \\ \circ &= \frac{\partial H}{\partial u}(x, u, \lambda), \end{aligned}$$

شرایط بهینگی فوق را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ \dot{\lambda}(t) &= -Q(t)x(t) - A^T(t)\lambda(t), \\ u(t) &= -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t). \end{aligned}$$

همچنین شرایط مرزی برای این مساله

$$\begin{aligned} x(a) &= x_a, \\ \lambda(\infty) &= \circ, \end{aligned}$$

است. با توجه به فرض های این مثال و قضیه ۴.۳.۱ می توان نتیجه گرفت جواب های بدست آمده از معادلات اولر لاگرانژ این مساله شرایط لازم و کافی بهینگی را دارا می باشند. برای مشاهده جزییات بیشتر به [۴۷] مراجعه شود.

در دهه های اخیر روش های عددی بسیاری برای حل مسائل کنترل بهینه ارائه شده است. رویکردها برای حل عددی مسائل کنترل بهینه کسری به دو دسته بزرگ تقسیم می شوند: روش های مستقیم و روش های غیرمستقیم.

روش های مستقیم، مسائل کنترل بهینه را برای سیستم های غیرخطی و کاملاً پیوسته حل می کنند که بر پایه یک گسسته سازی نسبت به زمان می باشند. این بدان معناست که مساله برای یافتن متغیرهای کنترل و حالت بهینه، به برنامه ریزی غیرخطی با ارزش گذاری مقادیر کنترل و حالت فقط در یک تعداد متناهی از نقاط هم محلی زمانی تبدیل می شود. با تغییر دادن مقادیر کنترل و حالت در این نقاط، تابع هزینه به طور مستقیم بهینه می شود. مساله به دست آمده می تواند با روش های برنامه ریزی غیرخطی حل شود.

روش های غیرمستقیم بر پایه جواب هایی هستند که در شرایط لازم بهینگی و یا در معادلات همیلتونی-ژاکوبی-بلمن^۲ صدق کنند. در این روش، به جای کمینه کردن تابع هزینه در روش مستقیم، جواب بهینه، از حل معادلات و نامعادلات مربوط به شرایط بهینگی به دست می آید. با توجه به مساله کنترل بهینه داده شده، شرایط بهینگی منجر به دست یابی به مساله با مقادیر کران دونقطه ای می شود که شامل معادلات دیفرانسیل برای متغیر حالت پیوسته و متغیرهای الحاقی پیوسته، معادله جبری برای کنترل پیوسته و شرایط کران داری برای متغیرهای حالت، متغیرهای الحاقی و زمان است. در برخی موارد خاص پیوستگی کامل سیستم های خطی و هزینه های درجه دوم، می توان یک راه حل تحلیلی برای مساله با شرایط مرزی پیدا کرد. روش های غیرمستقیم بر پایه بهینگی سپس گسسته سازی مساله کنترل بهینه اصلی هستند در حالی که روش های مستقیم بر پایه گسسته سازی و سپس بهینگی مساله کنترل بهینه اصلی هستند. برای برخی از کارهای عددی چه به صورت مستقیم و چه به صورت غیرمستقیم می توان به [۷۶] و [۷۷] رجوع کرد.

گرچه این روش ها تقریب های خوبی برای جواب فراهم می کنند اما جواب های تقریبی به دست آمده ناپیوسته هستند و به طور جدی روی پایداری جواب تاثیر می گذارند. از طرف دیگر برخی از روش های عددی از ماتریس های عملگر برای حل استفاده می کنند در حالی که پیدا کردن ماتریس های عملگر معمولاً سخت است و این ماتریس های عملگر در مرتبه های بالاتر باعث پیچیدگی محاسباتی نیز خواهند شد. یک رویکرد امیدوار کننده برای غلبه بر این محدودیت ها استفاده از شبکه های عصبی مصنوعی بر پایه یک توپولوژی شبکه، الگوی اتصال، خواص فعال سازی عصبی، استراتژی یادگیری و توانایی پردازش داده هاست. جواب های به دست آمده از طرح های شبکه عصبی مشتق پذیر و نزدیک به جواب های تحلیلی هستند [۷۸].

^۲Hamilton-Jacobi-Bellman

۱.۲ حل مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی

مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی زیر را نظر بگیرید به طوری که سیستم کنترل همراه کننده آن به مشتق کسری کاپوتو بستگی دارد.

$$\min J = \int_0^{\infty} f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (1.2)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} {}^c D_t^\alpha(x(t)) = g(t, x(t), u(t)), & t \in (0, \infty), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

که $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^l$ به ترتیب متغیر حالت و کنترل می باشند همچنین $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ و $g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ توابعی به طور پیوسته مشتق پذیر می باشند. برای حل مساله فوق در ابتدا با استفاده از تغییر متغیر بازه $[0, \infty)$ را به $[0, 1)$ تبدیل می کنیم. بدون از دست دادن کلیت مساله فرض می کنیم M یک عدد بزرگ است. با استفاده از تغییر متغیر زیر می توانیم مساله (۱.۲) و (۲.۲) را به مساله کنترل بهینه کسری افق متناهی روی بازه $\theta \in [0, 1)$ تبدیل کنیم. فرض کنید

$$t = M\theta \implies \theta = \frac{t}{M}. \quad (3.2)$$

همچنین فرض کنید $y(\theta) = x(M\theta)$ و $v(\theta) = u(M\theta)$. داریم

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx(M\theta)}{dt} = \frac{dx(M\theta)}{d\theta} \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{dx(M\theta)}{d\theta} \frac{1}{M} = \frac{1}{M} \frac{dy(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{M} \frac{dy(\frac{t}{M})}{d\theta}. \quad (4.2)$$

طبق (۴.۲) و تعریف مشتق کاپوتو داریم

$${}^c D_t^\alpha x(M\theta) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{M\theta} (M\theta - \tau)^{-\alpha} \frac{1}{M} \frac{dy(\frac{\tau}{M})}{d\theta} d\tau. \quad (5.2)$$

تغییر متغیر جدید را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\rho = \frac{\tau}{M} \implies \frac{d\tau}{d\rho} = M. \quad (6.2)$$

لذا، (۵.۲) را می توان به صورت زیر نوشت

$${}^c D_t^\alpha x(M\theta) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\theta M^{-\alpha} (\theta - \rho)^{-\alpha} \frac{dy(\rho)}{d\rho} d\rho. \quad (7.2)$$

در نتیجه داریم

$${}^c D_t^\alpha x(M\theta) = M^{-\alpha} {}^c D_\theta^\alpha y(\theta). \quad (8.2)$$

با استفاده از تبدیل (۸.۲)، مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی (۱.۲) و (۲.۲) با مساله زیر تقریب زده می شود که در آن $M > 0$ یک عدد به اندازه کافی بزرگ و مفروض است

$$\min J = \int_{[\circ, 1)} Mf(M\theta, y(\theta), v(\theta)) d\theta, \quad (9.2)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} {}^c D_{\theta}^{\alpha} y(\theta) = M^{\alpha} g(M\theta, y(\theta), v(\theta)), \\ y(\circ) = x_{\circ}, \\ \lim_{\theta \rightarrow 1^-} y(\theta) = x_f. \end{cases} \quad (10.2)$$

یک روش عددی برای حل مساله کنترل بهینه کسری افق متناهی

در این قسمت به دنبال حل عددی مساله کنترل بهینه کسری افق متناهی (۹.۲) و (۱۰.۲) هستیم. به این منظور ابتدا از تقریبی برای مشتق کسری استفاده می کنیم. مشتق ریمن-لیوویل در یک سری توانی که شامل مشتقات مرتبه صحیح است بسط داده می شود. اگر y یک تابع تحلیلی باشد آنگاه از [۴] داریم

$${}^R D_t^{\alpha} (y(t)) = \sum_{k=\circ}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} y^{(k)}(t), \quad (11.2)$$

که در آن

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{(-1)^{k-1} \alpha \Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha) \Gamma(1+k)}.$$

عیب آشکار استفاده از رابطه (۱۱.۲) این است که برای داشتن خطای کم باید از تعداد زیادی از جملات سری استفاده کنیم، بنابراین برای یک تقریب خوب باید از جملات شامل مشتقات مرتبه بالاتر استفاده کنیم که برای محاسبات مناسب نیستند. در [۶۳] تقریب خوبی وجود دارد که به مشتقات مرتبه بالا نیازی نیست. این روش را می توان برای مشتق کسری چپ ریمن-لیوویل به صورت زیر توضیح داد. فرض کنید

$${}^R D_t^{\alpha} (y(t)) = A(\alpha)(t-a)^{-\alpha} y(t) + B(\alpha)(t-a)^{1-\alpha} \dot{y}(t) - \sum_{p=2}^{\infty} C(\alpha, p)(t-a)^{1-p-\alpha} y_p(t), \quad (12.2)$$

که $\alpha \in (\circ, 1)$ و $y \in C^2[a, b]$ در (۱۲.۲)، جواب سیستم زیر است

$$\begin{cases} \dot{y}_p(t) = (1-p)(t-a)^{p-2} y_p(t), \\ y_p(a) = \circ. \end{cases} \quad (13.2)$$

برای $p = 2, 3, \dots$ همچنین A, B و C به صورت زیر هستند

$$A(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[1 + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(p-1)!} \right],$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha-1)p!} \right],$$

$$C(\alpha, p) = \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha-1)(p-1)!}.$$

با استفاده از

$${}^c D_t^\alpha(y(t)) = {}^R D_t^\alpha(y(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}. \quad (14.2)$$

که ارتباط بین مشتق کسری ریمن-لیویل و کاپوتو را بیان می کند، می توانیم رابطه ای مشابه برای تقریب مشتق کاپوتو بنویسیم. برای محاسبات عددی این بسط را متناهی در نظر می گیریم لذا داریم

$${}^R D_t^\alpha(y(t)) \approx A(\alpha, k)(t-a)^{-\alpha}y(t) + B(\alpha, k)(t-a)^{1-\alpha}\dot{y}(t) - \sum_{p=2}^k C(\alpha, p)(t-a)^{1-p-\alpha}y_p(t), \quad (15.2)$$

که $k \geq 2$ و

$$A(\alpha, k) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[1 + \sum_{p=2}^k \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(p-1)!} \right],$$

$$B(\alpha, k) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[1 + \sum_{p=1}^k \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha-1)p!} \right].$$

همچنین کران خطای تقریب فوق به صورت زیر است

$$|E_{tr}(t)| \leq \max_{\tau \in [a, t]} |\ddot{y}(\tau)| \frac{\exp((1-\alpha)^2 + 1 - \alpha)}{\Gamma(2-\alpha)(1-\alpha)k^{1-\alpha}} (t-a)^{2-\alpha}. \quad (16.2)$$

برای مشاهده اثبات و جزئیات بیشتر به [۶۳] مراجعه کنید.

اکنون در مساله کنترل بهینه کسری افق متناهی (۹.۲) و (۱۰.۲) تابع ${}^c D_t^\alpha(y(t))$ را با استفاده از رابطه (۱۵.۲) تقریب می زنیم. برای سادگی در نوشتار فرض می کنیم $A = A(\alpha, k)$ ، $B = B(\alpha, k)$ و $C_p = C(\alpha, p)$. لذا داریم

$$\dot{y}(\theta) = \frac{M^\alpha g(M\theta, y(\theta), v(\theta)) - A\theta^{-\alpha}y(\theta) + \sum_{p=2}^k C_p\theta^{1-p-\alpha}z_p(\theta) + \frac{y^{(\circ)}\theta^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{B\theta^{1-\alpha}}.$$

همچنین

$$Z(\theta) = (z_2(\theta), z_3(\theta), \dots, z_k(\theta)),$$

و

$$G(M\theta, y(\theta), Z(\theta), v(\theta)) = \frac{M^\alpha g(M\theta, y(\theta), v(\theta)) - A\theta^{-\alpha}y(\theta) + \sum_{p=2}^k C_p\theta^{1-p-\alpha}z_p(\theta) + \frac{y^{(\circ)}\theta^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{B\theta^{1-\alpha}},$$

لذا مساله کنترل بهینه (۹.۲) و (۱۰.۲) به مساله زیر تبدیل می شود

$$\min J = \int_{[0,1)} Mf(M\theta, y(\theta), v(\theta)) d\theta, \quad (17.2)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \dot{y}(\theta) = G(M\theta, y(\theta), Z(\theta), v(\theta)), \\ \dot{z}_p(\theta) = (1-p)\theta^{p-2} y(\theta), \quad p = 2, \dots, k, \\ y(0) = x_0, \\ z_p(0) = 0 \quad p = 2, \dots, k. \end{cases} \quad (18.2)$$

برای یافتن کنترل بهینه، تابع هامیلتونین مساله (۱۷.۲) و (۱۸.۲) به صورت زیر در نظر می گیریم

$$H = Mf(M\theta, y(\theta), v(\theta)) + \lambda G(M\theta, y(\theta), Z(\theta), v(\theta)) + \sum_{p=2}^k \gamma_p (1-p)\theta^{p-2} y(\theta),$$

که $\lambda \in \mathbb{R}^n$ و $\gamma_p, p = 2, \dots, k$ ضرایب لاگرانژ هستند.

برای سادگی $\Upsilon(\theta) = (\gamma_2(\theta), \gamma_3(\theta), \dots, \gamma_k(\theta))$ و $H = H(M\theta, y(\theta), Z(\theta), v(\theta), \Upsilon(\theta), \lambda(\theta))$ را در نظر می گیریم. شرایط لازم بهینگی برای مساله (۱۷.۲) و (۱۸.۲) به صورت زیر است

$$\begin{cases} \frac{\sigma H}{\sigma \lambda} = \dot{y}(\theta), \\ \frac{\sigma H}{\sigma \Upsilon} = \dot{Z}(\theta), \\ \frac{\sigma H}{\sigma y} = -\dot{\lambda}(\theta), \\ \frac{\sigma H}{\sigma Z} = -\dot{\Upsilon}(\theta), \\ \frac{\sigma H}{\sigma v} = 0. \end{cases} \quad (19.2)$$

طبق اصل حداقل یابی پونتریاگین، اگر $(y(\theta)^T, v(\theta)^T, Z(\theta)^T)^T$ یک جواب بهینه مساله (۱۷.۲) و (۱۸.۲) باشد، آنگاه $\lambda(\theta)$ و $\Upsilon(\theta)$ وجود دارد به طوریکه $(y(\theta)^T, v(\theta)^T, Z(\theta)^T)^T$ در (۱۹.۲) صدق می کند.

ساختار شبکه عصبی

ساختار شبکه عصبی دو لایه را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} z_i &= w_i \theta + b_i, \\ \text{output} &= \sum_{i=1}^I v_i \sigma(z_i), \end{aligned} \quad (20.2)$$

که در آن I تعداد نرون های شبکه، w_i پارامتر وزن i امین لایه ورودی، v_i پارامتر وزن i امین لایه خروجی، b_i پارامتر بایاس مربوط به i امین لایه پنهان، z_i خروجی i امین لایه پنهان و σ تابع فعالساز است که به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$\sigma(\theta) = \tanh(\theta) = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1}. \quad (21.2)$$

واضح است که با استفاده از یک شبکه عصبی دو لایه با وزنهای مناسب، می توان هر تابع هموار را به طور مطلوبی تقریب زد. (برای جزئیات بیشتر به [۶۴] و [۶۵] مراجعه کنید). اکنون جواب های آزمایشی برای متغیر های حالت، کنترل و ضرایب لاگرانژ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} n_y = \sum_{i=1}^I \nu_i^y \sigma(z_i^y), & z_i^y = w_i^y \theta + b_i^y, \\ n_z = \sum_{i=1}^I \nu_i^z \sigma(z_i^z), & z_i^z = w_i^z \theta + b_i^z, \\ n_v = \sum_{i=1}^I \nu_i^v \sigma(z_i^v), & z_i^v = w_i^v \theta + b_i^v, \\ n_\lambda = \sum_{i=1}^I \nu_i^\lambda \sigma(z_i^\lambda), & z_i^\lambda = w_i^\lambda \theta + b_i^\lambda, \\ n_\Upsilon = \sum_{i=1}^I \nu_i^\Upsilon \sigma(z_i^\Upsilon), & z_i^\Upsilon = w_i^\Upsilon \theta + b_i^\Upsilon, \end{cases}$$

که σ در (۲۱.۲) تعریف شده است. این جواب های آزمایشی که برای تخمین توابع کنترل، حالت و ضرایب لاگرانژ پیشنهاد شده است باید در شرایط مرزی صدق کنند لذا جواب های آزمایشی را می توان با ساختار زیر تعریف کرد

$$\begin{cases} \bar{Y}(\theta) = D(\theta) + F(\theta)n_y, \\ \bar{Z}(\theta) = J(\theta) + K(\theta)n_z, \\ \bar{V}(\theta) = L(\theta) + N(\theta)n_v, \\ \bar{\lambda}(\theta) = O(\theta) + Q(\theta)n_\lambda, \\ \bar{\Upsilon}(\theta) = S(\theta) + T(\theta)n_\Upsilon, \end{cases} \quad (22.2)$$

که $D(\theta)$ ، $F(\theta)$ ، $J(\theta)$ ، $K(\theta)$ ، $L(\theta)$ ، $N(\theta)$ ، $O(\theta)$ ، $Q(\theta)$ ، $S(\theta)$ و $T(\theta)$ توابع تک متغیره حقیقی هستند که باعث می شوند \bar{Y} ، \bar{Z} ، \bar{V} ، $\bar{\lambda}$ و $\bar{\Upsilon}$ در شرایط اولیه یا نهایی صدق کنند. جواب های آزمایشی (۲۲.۲) باید در شرایط لازم بهینگی صدق کنند. لذا داریم

$$\begin{cases} \frac{\sigma \bar{H}}{\sigma \lambda} = \dot{\bar{Y}}(\theta), \\ \frac{\sigma \bar{H}}{\sigma \Upsilon} = \dot{\bar{Z}}(\theta), \\ \frac{\sigma \bar{H}}{\sigma Y} = -\dot{\bar{\lambda}}(\theta), \\ \frac{\sigma \bar{H}}{\sigma Z} = -\dot{\bar{\Upsilon}}(\theta), \\ \frac{\sigma \bar{H}}{\sigma V} = 0, \end{cases} \quad (23.2)$$

که $\bar{H} = H(M\theta, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{V}, \bar{\lambda}, \bar{\Upsilon})$. نوع یادگیری در شبکه عصبی مصنوعی پیشنهاد شده، یادگیری بدون ناظر است لذا به یک معیار کلی برای یافتن وزن ها و بایاس های شبکه نیاز داریم. برای این منظور تابع خطا متناظر با سیستم (۲۳.۲) را به صورت زیر نظر می گیریم:

$$E(\Omega) = \frac{1}{\varphi} \sum_{l=1}^m \{E_{\lambda}^{\check{}}(\theta_l, \Omega) + E_{\Upsilon}^{\check{}}(\theta_l, \Omega) + E_{\Upsilon}^{\check{}}(\theta_l, \Omega) + E_{\Upsilon}^{\check{}}(\theta_l, \Omega) + E_{\Delta}^{\check{}}(\theta_l, \Omega)\}, \quad (24.2)$$

که در آن داریم $\Omega = (w_y, w_z, w_v, w_{\lambda}, w_{\Upsilon}, b_y, b_z, b_v, b_{\lambda}, b_{\Upsilon}, \nu_y, \nu_z, \nu_v, \nu_{\lambda}, \nu_{\Upsilon})^T$ و

$$\begin{cases} E_{\lambda}(\theta, \Omega) = [\frac{\sigma \bar{H}}{\sigma \lambda} - \dot{Y}(\theta)], \\ E_{\Upsilon}(\theta, \Omega) = [\frac{\sigma \bar{H}}{\sigma \Upsilon} - \dot{Z}(\theta)], \\ E_{\Upsilon}(\theta, \Omega) = [\frac{\sigma \bar{H}}{\sigma \Upsilon} + \dot{\lambda}(\theta)], \\ E_{\Upsilon}(\theta, \Omega) = [\frac{\sigma \bar{H}}{\sigma Z} + \dot{\Upsilon}(\theta)], \\ E_{\Delta}(\theta, \Omega) = [\frac{\sigma \bar{H}}{\sigma V}]. \end{cases}$$

در این تابع خطا، $\theta_l, l = 1, 2, \dots, m$ در بازه $[0, 1]$ نقاط هم محل هستند و m تعداد گره ها است. این گره ها را نقاط چبیشف-گوس-لباتو^۳ در بازه $[0, 1]$ به صورت زیر انتخاب می کنیم [۶۲].

$$\theta_l = \frac{1}{\varphi} (1 - \cos(\frac{\pi(l-1)}{m})), \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

لم ۱.۱.۲. اگر $\Omega^* = (w_y^*, w_z^*, w_v^*, w_{\lambda}^*, w_{\Upsilon}^*, b_y^*, b_z^*, b_v^*, b_{\lambda}^*, b_{\Upsilon}^*, \nu_y^*, \nu_z^*, \nu_v^*, \nu_{\lambda}^*, \nu_{\Upsilon}^*)$ در دستگاه زیر صدق کند

$$\eta(\Omega) = [E_{\lambda}(\theta_1, \Omega), \dots, E_{\lambda}(\theta_m, \Omega), E_{\Upsilon}(\theta_1, \Omega), \dots, E_{\Upsilon}(\theta_m, \Omega), E_{\Upsilon}(\theta_1, \Omega), \dots, E_{\Upsilon}(\theta_m, \Omega), E_{\Upsilon}(\theta_1, \Omega), \dots, E_{\Upsilon}(\theta_m, \Omega), E_{\Delta}(\theta_1, \Omega), \dots, E_{\Delta}(\theta_m, \Omega)]^T = 0, \quad (25.2)$$

آنگاه Ω^* جواب بهینه (۲۴.۲) است.

اثبات. فرض کنید $\eta(\Omega^*) = 0$ ، آنگاه برای $i = 1, \dots, 5$ و $k = 1, 2, \dots, m$ ، $E_i(\theta_k, \Omega) = 0$. چون در (۲۴.۲)، $E(\Omega) \geq 0$ ، لذا Ω^* جواب بهینه مساله (۲۴.۲) است. با استفاده از لم ۱.۱.۲، می توان به راحتی نتیجه گرفت که مساله کمینه سازی (۲۴.۲) معادل با مساله زیر است

$$\min_{\Omega} E(\Omega) = \frac{1}{\varphi} \|\eta(\Omega)\|_2^2. \quad (26.2)$$

به این ترتیب، مساله کنترل بهینه افق نامتناهی به یک مساله بهینه سازی نامقید تبدیل شده است که می تواند توسط هر الگوریتم بهینه سازی ریاضی کلاسیک مانند نیوتن^۴، شبه نیوتن

^۳ Chebyshev-Gauss-Lobatto points

^۴ Newton

۵، تندترین کاهش^۶، گرادیان مزدوج^۷ و غیره حل شود (مراجع [۶۶] و [۶۷] را ببینید). همچنین از الگوریتم های ابتکاری، مانند الگوریتم ژنتیک^۸، بهینه سازی ذرات^۹، الگوریتم های جستجوی کلونی مورچه ها^{۱۰}، جستجوی تابو^{۱۱} می توان استفاده کرد [۶۸].

۱.۱.۲ الگوریتم آموزش

فرض کنید $w_y(\cdot), w_z(\cdot), w_v(\cdot), w_\lambda(\cdot), w_\gamma(\cdot), b_y(\cdot), b_z(\cdot), b_v(\cdot), b_\lambda(\cdot), b_\gamma(\cdot), \nu_y(\cdot), \nu_z(\cdot), \nu_v(\cdot), \nu_\lambda(\cdot)$ و $\nu_\gamma(\cdot)$ متغیرهای وابسته به زمان هستند. هدف طراحی یک مدل دینامیکی است که به نقطه تعادل خود، که یک نقطه تعادل از تابع انرژی $E(\Omega)$ است میل کند. یک مدل دینامیکی برای حل مساله (۲۶.۲) به صورت زیر پیشنهاد می شود

$$\begin{cases} \frac{d\Omega(t)}{dt} = -\kappa \nabla E(\Omega(t)), & \kappa > 0, \\ \Omega(0) = \Omega_0, \end{cases} \quad (27.2)$$

که در آن κ نرخ همگرایی برای (۲۷.۲) است. در ادامه مطلب $\|\cdot\|$ ، نرم L^2 از \mathbb{R}^p و $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T$. اگر $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ تابع مشتق پذیر باشد، آن گاه $\nabla F \in \mathbb{R}^p$ ، گرادیان F است. برای هر نگاشت مشتق پذیر $F = (F_1, \dots, F_q)^T: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ، $\nabla F = [\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_q(x)]^T \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ژاکوبین F در x است.

۲.۱.۲ پایداری و همگرایی

قضیه ۱.۱.۲ [۶۹] فرض کنید Ω^* یک نقطه تعادل از مدل (۲۷.۲) و ماتریس ژاکوبین $\eta(\Omega)$ در (۲۵.۲) معکوس پذیر است. آن گاه Ω^* یک جواب بهینه برای (۲۶.۲) است و اگر Ω^* یک جواب بهینه برای (۲۶.۲) باشد، آن گاه Ω^* یک نقطه تعادل برای (۲۷.۲) است.

قضیه ۲.۱.۲ [۶۹] فرض کنید Ω^* یک نقطه تعادل تنها برای (۲۷.۲) است و ماتریس ژاکوبین $\eta(\Omega)$ در (۲۵.۲) معکوس پذیر است. آن گاه سیستم (۲۷.۲) پایدار مجانبی در Ω^* است.

گزاره ۱.۱.۲ [۶۹] (a) برای هر حالت اولیه $\Omega_0 = \Omega(t_0)$ ، دقیقاً یک جواب ماکسیمال $\Omega(t, \Omega_0)$ با $t \in [t_0, \beta(\Omega_0))$ وجود دارد.

^۵Quasi-Newton

^۶Steepest descent

^۷Conjugate Gradient

^۸Genetic algorithm

^۹Particle swarm optimization

^{۱۰}Ant colony search algorithms

^{۱۱}Tabu search

(b) اگر مجموعه تراز β $L(\Omega_0) = \{\Omega \in \mathbb{R}^{3(\Delta T)} : E(\Omega) \leq E(\Omega_0)\}$ کراندار باشد آن گاه

$$\beta(\Omega_0) \rightarrow +\infty.$$

قضیه ۳.۱.۲. [۶۹] فرض کنید $\Omega = \Omega(t, \Omega_0)$ یک مسیر از (۲۷.۲) است و مجموعه تراز

$$L(\Omega_0) = \{\Omega \in \mathbb{R}^{3(\Delta T)} : E(\Omega) \leq E(\Omega_0)\}$$

$$(a) \gamma^+(\Omega_0) = \{\Omega(t, \Omega_0) | t \geq 0\} \text{ کراندار است.}$$

$$(b) \bar{\Omega} \text{ وجود دارد به طوری که } \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega(t, \Omega_0) = \bar{\Omega}.$$

(c) فرض کنید ماتریس ژاکوبین از $\eta(\Omega)$ در (۲۵.۲) معکوس پذیر است. آنگاه به ازای هر

$\Omega_0 \in \mathbb{R}^{3(\Delta T)}$ مسیر مربوطه از (۲۷.۲) به یک جواب بهینه از (۲۶.۲) همگرا می شود.

۳.۱.۲ مثال های عددی

در این بخش برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی چندین مثال را بیان می کنیم.

مثال ۱.۱.۲. مساله زیر را نظر بگیرید

$$\min \int_0^\infty (x(t) - \exp(-\alpha t) + 1)^2 dt,$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} {}^c D_t^\alpha(x(t)) = -u(t), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

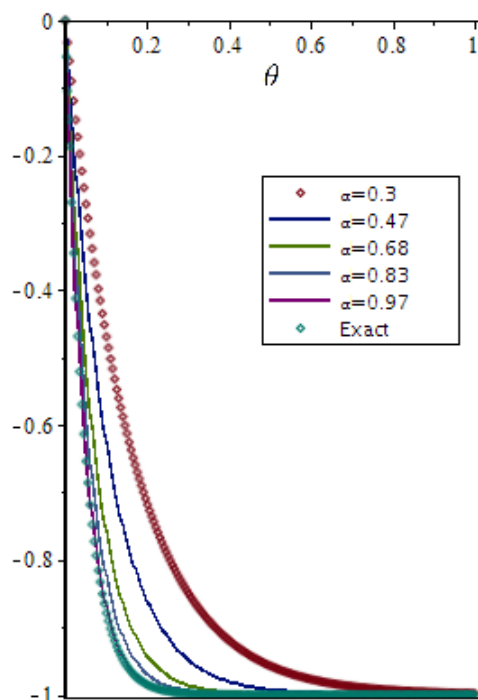
جواب بهینه برای $\alpha = 1$ به صورت زیر است

$$x(t) = \exp(-t) - 1, \quad u(t) = \exp(-t).$$

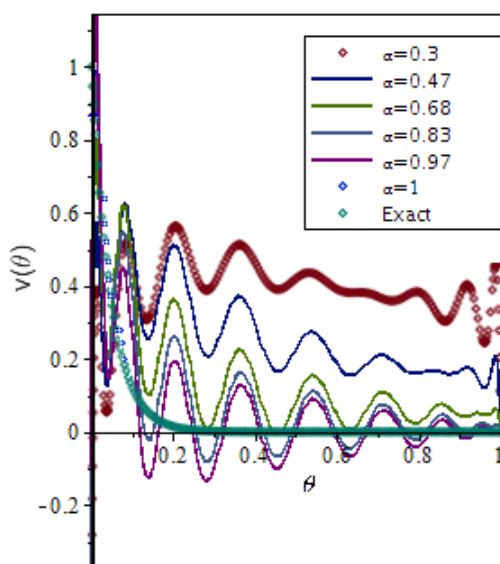
با استفاده از روابط (۳.۲) و (۱۵.۲) به مساله زیر می رسیم

$$\min J = \int_{[0,1)} M \left(y(\theta) - \exp(-\alpha M \theta) + 1 \right)^2 d\theta$$

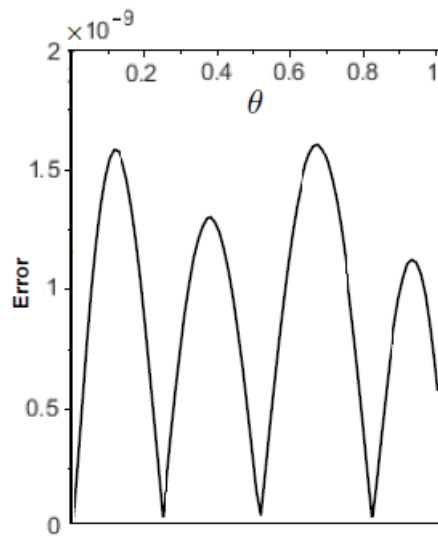
$$\text{s. t. } \begin{cases} \dot{y}(\theta) = \frac{-M^\alpha v(\theta) - A(\alpha)\theta^{-\alpha}y(\theta) + \sum_{p=2}^k C(\alpha,p)\theta^{1-p-\alpha}z_p(\theta)}{B(\alpha)\theta^{1-\alpha}}, \\ \dot{z}_p(\theta) = (1-p)\theta^{p-2}y(\theta), \quad p = 2, \dots, k, \\ y(0) = 0, \\ z_p(0) = 0, \quad p = 2, \dots, k. \end{cases}$$



شکل ۱.۲: مسیر $y(\cdot)$ با مقادیر مختلف α در مثال ۱.۱.۲



شکل ۲.۲: کنترل $v(\cdot)$ با مقادیر مختلف α در مثال ۱.۱.۲



شکل ۳.۲: خطای مطلق $y(\cdot)$ برای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۱.۲

جدول ۱.۲: مقدار تابع خطای $E(\Omega)$ برای مثال ۱.۱.۲

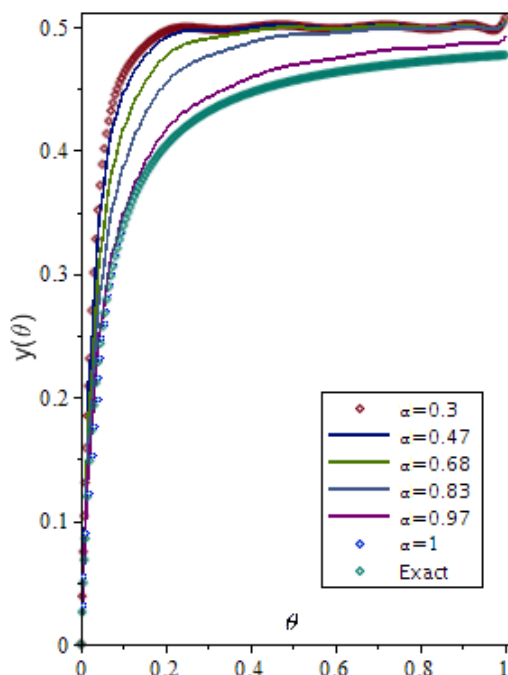
α	۰/۳	۰/۴۷	۰/۶۸	۰/۸۳	۰/۹۷	۱
$E(\Omega)$	$۷/۰۴ \times 10^{-۲۰}$	$۷/۹۵ \times 10^{-۱۹}$	$۲/۳۴ \times 10^{-۱۶}$	$۳/۷۳ \times 10^{-۱۶}$	$۱/۴۸ \times 10^{-۱۴}$	$۷/۰۱ \times 10^{-۱۹}$

جواب های آزمایشی را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\begin{cases} \bar{Y} = \theta n_y, \\ \bar{Z}_p = \theta n_{z_p}, & p = 2, \dots, k, \\ \bar{\lambda} = (1 - \theta) n_\lambda, \\ \bar{\Upsilon}_p = (1 - \theta) n_{\Upsilon_p}, & p = 2, \dots, k, \\ \bar{V} = n_v. \end{cases}$$

در شبکه عصبی مصنوعی برای وزن های لایه ورودی، خروجی و بایاس ها ۱۷ پارامتر را در نظر می گیریم، یعنی $I = 17$ ، همچنین $M = 15$ در نظر گرفته شده است. در روابط (۱۵.۲) و (۲۴.۲) به ترتیب $k = 3$ و $m = 20$ فرض شده است. در شکل های ۱.۲ و ۲.۲ مسیر های دقیق $y(\cdot)$ و $v(\cdot)$ برای $\alpha = 1$ و جواب های تقریبی برای $\alpha = 0/3, 0/47, 0/68, 0/83, 0/97, 1$ به ترتیب نشان داده شده است.

مقادیر تابع خطا $E(\Omega)$ در جدول ۱.۲ آورده شده اند و این جدول نشان می دهد که این جواب های آزمایشی در شرایط لازم بهینگی با تقریب بسیار خوب صدق می کنند. با توجه به



شکل ۴.۲: مسیر $y(\cdot)$ با مقادیر مختلف α در مثال ۲.۱.۲

بحث پایداری و همگرایی که برای روش پیشنهادی ارائه شد، مشاهده می شود در این مثال تابع هدف نسبت به متغیر $x(t)$ محدب است و معادلات حالت خطی می باشند لذا طبق قضیه ۴.۳.۱ جواب بدست آمده علاوه بر شرط لازم، شرط کافی بهینگی را دارا می باشد.

مثال ۲.۱.۲. مساله زیر را در نظر بگیرید

$$\min \int_0^{\infty} \left(x(t) + \frac{\exp(-(1-\alpha)t)}{1+t} - \exp(-\alpha t) \right)^2 dt,$$

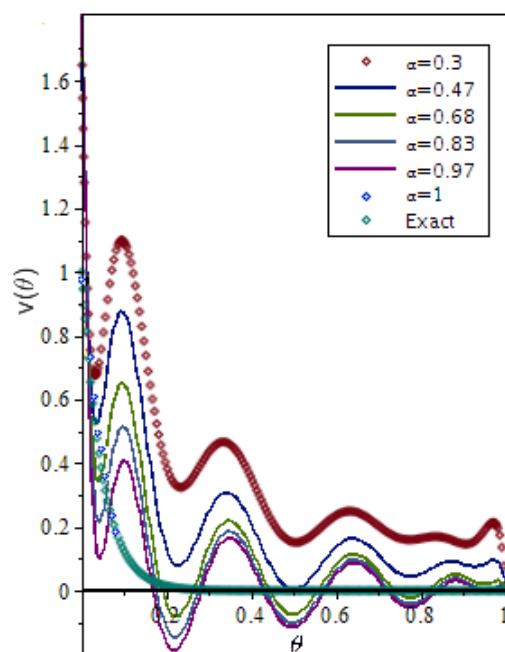
$$\text{s. t. } \begin{cases} {}^c D_t^\alpha(x(t)) = u(t) + \frac{\exp(-(1-\alpha)t)}{(1+t)^2} - \exp(-\alpha t), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

جواب بهینه این مساله برای $\alpha = 1$ به صورت زیر است.

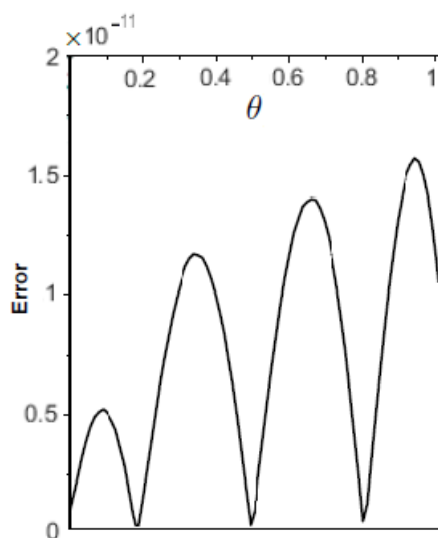
$$x(t) = \frac{t}{t+1}, \quad u(t) = \exp(-t).$$

با به کارگیری روابط (۳.۲) و (۱۵.۲) داریم

$$\min J = \int_{[0,1)} M \left(y(\theta) + \frac{\exp(-(\alpha-1)M\theta)}{1+M\theta} - \exp(-\alpha\theta) \right)^2 d\theta$$



شكل ۵.۲: کنترل $v(\cdot)$ با مقادير مختلف α در مثال ۲.۱.۲



شكل ۶.۲: خطاي مطلق $y(\cdot)$ براي $\alpha = 1$ در مثال ۲.۱.۲

جدول ۲.۲: مقدار تابع خطای $E(\Omega)$ برای مثال ۲.۱.۲

α	۰/۳	۰/۴۷	۰/۶۸	۰/۸۳	۰/۹۷	۱
$E(\Omega)$	$5/19 \times 10^{-5}$	$3/7 \times 10^{-5}$	$2/43 \times 10^{-5}$	$1/8 \times 10^{-5}$	$1/36 \times 10^{-5}$	$5/82 \times 10^{-6}$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \dot{y}(\theta) = \frac{M^\alpha (v(\theta) + \frac{\Delta \exp(-(\alpha-1)M\theta)}{(1+M\theta)^\alpha} - \exp(-\alpha M\theta)) - A(\alpha)\theta^{-\alpha}y(\theta) + \sum_{p=2}^k C(\alpha,p)\theta^{1-p-\alpha}z_p(\theta)}{B(\alpha)\theta^{1-\alpha}}, \\ \dot{z}_p(\theta) = (1-p)\theta^{p-2}y(\theta), \quad p = 2, \dots, k, \\ y(0) = 0, \\ z_p(0) = 0, \quad p = 2, \dots, k. \end{cases}$$

جواب های آزمایشی را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\begin{cases} \bar{Y} = \theta n_y, \\ \bar{Z}_p = \theta n_{z_p}, \quad p = 2, \dots, k, \\ \bar{\lambda} = (1-\theta)n_\lambda, \\ \bar{\Upsilon}_p = (1-\theta)n_{\Upsilon_p}, \quad p = 2, \dots, k, \\ \bar{V} = n_v. \end{cases}$$

در شبکه عصبی مصنوعی برای وزن های لایه ورودی، خروجی و بایاس ها 10 پارامتر را در نظر می گیریم، یعنی $I = 10$ ، همچنین $M = 18$ در نظر گرفته شده است. در روابط (۱۵.۲) و (۲۴.۲) به ترتیب $k = 3$ و $m = 20$ فرض شده است. در شکل های ۴.۲ و ۵.۲ مسیر های دقیق $y(\cdot)$ و $v(\cdot)$ برای $\alpha = 1$ و جواب های تقریبی برای $\alpha = 0.3, 0.47, 0.68, 0.83, 0.97, 1$ به ترتیب نشان داده شده اند. مقادیر تابع خطا $E(\Omega)$ در جدول ۲.۲ آورده شده اند. علاوه بر بحث پایداری و همگرایی، مشاهده می شود در این مثال تابع هدف نسبت به متغیر $x(t)$ محدب است و معادلات حالت نسبت به متغیر $u(t)$ خطی می باشند لذا طبق قضیه ۴.۳.۱ جواب بدست آمده علاوه بر شرط لازم، شرط کافی بهینگی را دارا می باشد.

مثال ۳.۱.۲. مساله زیر را نظر بگیرید

$$\min \frac{1}{\Gamma} \int_0^\infty (x^2(t) + \Upsilon u^2(t)) dt, \quad (28.2)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} {}^c D_t^\alpha(x_1(t)) = x_2(t), \\ {}^c D_t^\alpha(x_2(t)) = -x_2(t) + u(t), \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0. \end{cases} \quad (29.2)$$

جواب بهینه این مساله برای $\alpha = 1$ در $[Y^0]$ به صورت زیر است.

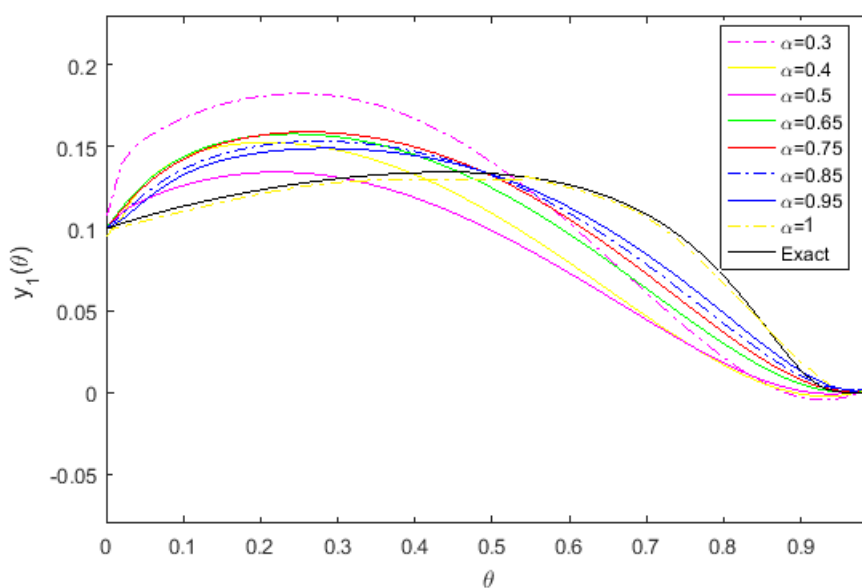
$$\begin{aligned} x_1(t) &= [0 + (0 + \frac{0}{\sqrt{p}})t] \exp(\frac{-t}{\sqrt{p}}), \\ x_2(t) &= [0 - (0 + \frac{0}{\sqrt{p}})t] \exp(\frac{-t}{\sqrt{p}}). \end{aligned}$$

با استفاده از (3.2) و تقریب (15.2)، مساله (28.2) و (29.2) را با مساله زیر تقریب می زنیم

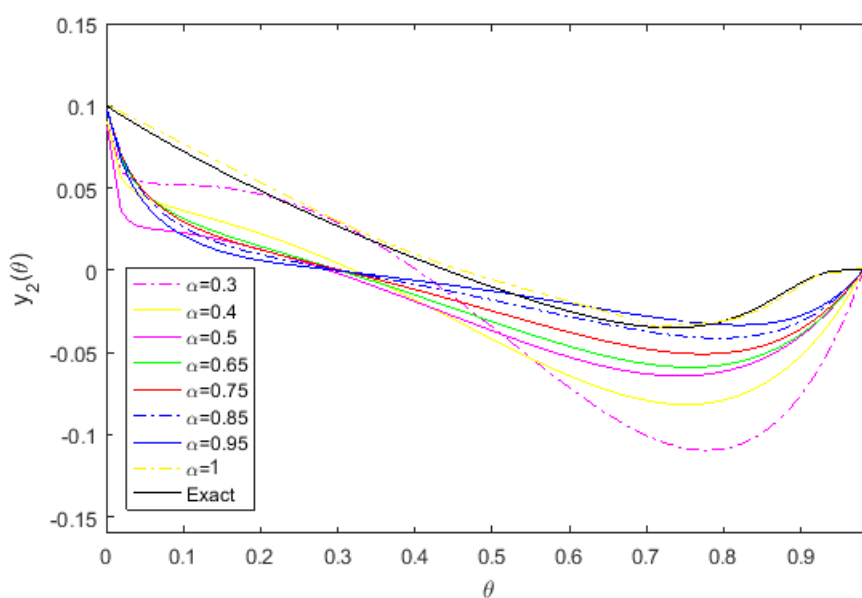
$$\begin{aligned} \min J &= \int_{[0,1)} \frac{M}{\Upsilon} (y_1^\Upsilon(\theta) + \Upsilon v^\Upsilon(\theta)) d\theta \\ \text{s. t. } \begin{cases} \dot{y}_1(\theta) = \frac{M^\alpha y_2(\theta) - A(\alpha)\theta^{-\alpha} y_1(\theta) + \sum_{p=\Upsilon}^k C(\alpha,p)\theta^{1-p-\alpha} z_{1p}(\theta) + \frac{(0)\theta^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{B(\alpha)\theta^{1-\alpha}}, \\ \dot{y}_2(\theta) = \frac{M^\alpha (-y_2(\theta) + v(\theta)) - A(\alpha)\theta^{-\alpha} y_2(\theta) + \sum_{p=\Upsilon}^k C(\alpha,p)\theta^{1-p-\alpha} z_{2p}(\theta) + \frac{(0)\theta^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{B(\alpha)\theta^{1-\alpha}}, \\ \dot{z}_{1p}(\theta) = (1-p)(\theta)^{p-\Upsilon} y_1(\theta), \quad p = \Upsilon, \dots, k, \\ \dot{z}_{2p}(\theta) = (1-p)(\theta)^{p-\Upsilon} y_2(\theta), \quad p = \Upsilon, \dots, k, \\ y_1(0) = y_2(0) = 0, \\ z_{1p}(0) = 0, \quad p = \Upsilon, \dots, k, \\ z_{2p}(0) = 0, \quad p = \Upsilon, \dots, k, \\ \lim_{\theta \rightarrow 1^-} y_1(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 1^-} y_2(\theta) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

جواب های آزمایشی را به صورت زیر در نظر می گیریم

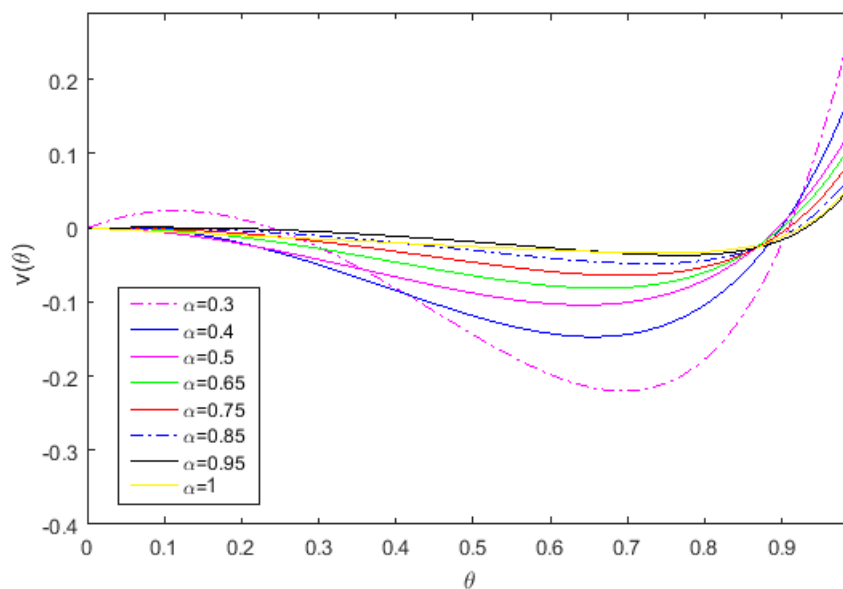
$$\begin{cases} \bar{Y}_1 = 0 - 0\theta + \theta(1-\theta)n_{y_1}, \\ \bar{Y}_2 = 0 - 0\theta + \theta(1-\theta)n_{y_2}, \\ \bar{Z}_{1p} = \theta n_{z_{1p}}, \quad p = \Upsilon, \dots, k, \\ \bar{Z}_{2p} = \theta n_{z_{2p}}, \quad p = \Upsilon, \dots, k, \\ \bar{\lambda}_1 = n_{\lambda_1}, \\ \bar{\lambda}_2 = n_{\lambda_2}, \\ \bar{\Upsilon}_{1p} = (1-\theta)n_{\Upsilon_{1p}}, \quad p = \Upsilon, \dots, k, \\ \bar{\Upsilon}_{2p} = (1-\theta)n_{\Upsilon_{2p}}, \quad p = \Upsilon, \dots, k, \\ \bar{V} = n_v. \end{cases}$$



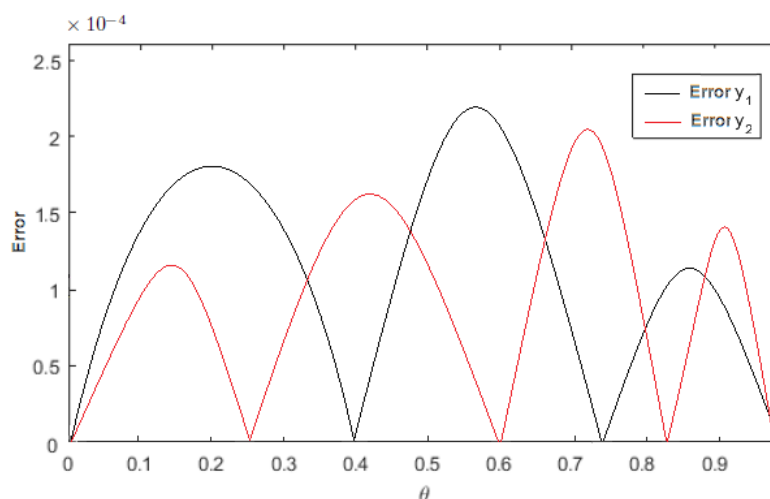
شکل ۷.۲: مسیر $y_1(\cdot)$ با مقادیر مختلف α در مثال ۳.۱.۲



شکل ۸.۲: مسیر $y_2(\cdot)$ با مقادیر مختلف α در مثال ۳.۱.۲



شكل ۹.۲: کنترل $v(\cdot)$ با مقادير مختلف α در مثال ۳.۱.۲



شكل ۱۰.۲: خطاي مطلق $y_1(\cdot)$ و $y_2(\cdot)$ براي $\alpha = 1$ در مثال ۳.۱.۲

در شبکه عصبی مصنوعی برای وزن های لایه ورودی، خروجی و بایاس ها 10° پارامتر را در نظر می گیریم، یعنی $I = 10^\circ$ ، همچنین $M = 15$ در نظر گرفته شده است. در روابط (۱۵.۲) و (۲۴.۲) به ترتیب $k = 3$ و $m = 100$ فرض شده است. در شکل های ۷.۲ و ۸.۲ مسیر های دقیق $y_1(\cdot)$ و $y_2(\cdot)$ برای $\alpha = 1$ و جواب های تقریبی برای $\alpha = 0.3, 0.4, 0.5, 0.65, 0.75, 0.85, 0.95$ ، جواب تقریبی کنترل $v(\cdot)$ برای مقادیر مختلف α نشان داده شده است. مقادیر تابع خطا $E(\Omega)$ در جدول ۳.۲ آورده شده اند. این جدول نشان می دهد که این جواب های آزمایشی در شرایط لازم بهینگی به صورت تقریبی صدق می کنند. با توجه به بحث پایداری و همگرایی که برای روش پیشنهادی به طور مفصل ارائه شد، مشاهده می شود در این مثال تابع هدف درجه دوم، و معادلات حالت خطی می باشند لذا طبق قضیه ۴.۳.۱ جواب بدست آمده علاوه بر شرط لازم، شرط کافی بهینگی را دارا می باشد.

جدول ۳.۲: مقدار تابع خطای $E(\Omega)$ برای مثال ۳.۱.۲

α	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶۵	۰/۷۵	۰/۸۵	۰/۹۵	۱
$E(\Omega)$	$2/5 \times 10^{-6}$	$1/6 \times 10^{-5}$	$1/4 \times 10^{-5}$	1×10^{-4}	$2/2 \times 10^{-5}$	$1/3 \times 10^{-4}$	1×10^{-4}	$3/4 \times 10^{-5}$

۲.۲ یک تکنیک جدید برای حل مسائل کنترل بهینه افق نامتناهی

در این بخش روش دیگری برای حل مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی به طوری که سیستم کنترلی همراه آن شامل مشتقات مرتبه صحیح و مرتبه کسری کاپوتو باشد، را بیان می کنیم. برای این منظور مساله زیر را نظر بگیرید

$$\min J = \int_0^{\infty} f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (30.2)$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} M\dot{x}(t) + N^c D_t^\alpha(x(t)) = g(t, x(t), u(t)), & t \in [0, \infty), \\ x(0) = x_0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_f, \end{cases} \quad (31.2)$$

که $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^l$ به ترتیب متغیر های حالت و کنترل می باشند، و $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ و $g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ توابعی مشتق پذیر هستند، همچنین $(M, N) \neq (0, 0)$.

در ابتدا عملگر مشتق کسری کاپوتو ${}^c D_t^\alpha(x(t))$ را با کمک (۱۵.۲) تقریب می‌زنیم. برای سادگی فرض می‌کنیم $A = A(\alpha, k)$ ، $B = B(\alpha, k)$ و $C_p = C(\alpha, p)$. لذا داریم

$$\dot{x}(t) = \frac{g(t, x(t), u(t)) - NAt^{-\alpha}x(t) + \sum_{p=2}^k NC_p t^{1-p-\alpha} y_p(t) + \frac{Nx(\circ)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{M + NBt^{1-\alpha}}.$$

همچنین تعاریف زیر را در نظر می‌گیریم

$$Y(t) = (y_2(t), y_3(t), \dots, y_k(t)),$$

و

$$G(t, x(t), Y(t), u(t)) = \frac{g(t, x(t), u(t)) - NAt^{-\alpha}x(t) + \sum_{p=2}^k NC_p t^{1-p-\alpha} y_p(t) + \frac{Nx(\circ)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{M + NBt^{1-\alpha}}.$$

لذا مساله (۳۰.۲) و (۳۱.۲) به مساله زیر تبدیل می‌شود

$$\min J = \int_0^\infty f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (32.2)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \dot{x}(t) = G(t, x(t), Y(t), u(t)), \\ \dot{y}_p(t) = (1-p)t^{p-2}x(t), & p = 2, \dots, k, \\ x(\circ) = x_\circ, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_f, \\ y_p(\circ) = \circ, & p = 2, \dots, k. \end{cases} \quad (33.2)$$

۱.۲.۲ تبدیل مساله افق نامتناهی به یک مساله افق متناهی

در این قسمت می‌خواهیم با تغییر متغیر، بازه $[0, \infty)$ را به بازه $[0, 1)$ تبدیل کنیم، لذا تبدیل زیر را در نظر می‌گیریم

$$t = \frac{\tau}{1-\tau}, \quad (34.2)$$

لذا $\tau \in [0, 1)$. بنابراین مساله کنترل بهینه افق نامتناهی (۳۲.۲) و (۳۳.۲) به مساله زیر تبدیل می‌شود

$$\min J = \int_{[0,1)} \frac{1}{(1-\tau)^2} f\left(\frac{\tau}{1-\tau}, X(\tau), U(\tau)\right) d\tau, \quad (35.2)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \dot{X}(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^2} G\left(\frac{\tau}{1-\tau}, X(\tau), \mathcal{Y}(\tau), U(\tau)\right), \\ \dot{Y}_p(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^2} (1-p)\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{p-2} X(\tau), & p = 2, \dots, k, \\ X(\circ) = x_\circ, \\ \lim_{\tau \rightarrow 1^-} X(\tau) = x_f, \\ \mathcal{Y}_p(\circ) = \circ, & p = 2, \dots, k, \end{cases} \quad (36.2)$$

در این رابطه فرض می کنیم

$$X(\tau) = x\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), \quad U(\tau) = u\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), \quad \mathcal{Y}(\tau) = Y\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right). \quad (37.2)$$

برای یافتن کنترل بهینه، تابع هامیلتونین را برای مساله (35.2) و (36.2) به صورت زیر نظر می گیریم

$$H = \frac{1}{(1-\tau)^2} \left[f\left(\frac{\tau}{1-\tau}, X, U\right) + \lambda G\left(\frac{\tau}{1-\tau}, X, \mathcal{Y}, U\right) + \sum_{p=2}^k \gamma_p \left((1-p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{p-2} X \right) \right],$$

در این رابطه λ و γ_p ، $p = 2, \dots, k$ ضرایب لاگرانژ هستند.

برای سادگی فرض می کنیم $\Upsilon(\tau) = (\gamma_2(\tau), \gamma_3(\tau), \dots, \gamma_k(\tau))$ ، $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3, \dots, \mathcal{Y}_k)$ و $H = H(X, \mathcal{Y}, U, \lambda, \Upsilon, \tau)$ در نظر می گیریم. با استفاده از شبکه عصبی مصنوعی پرسپترون، جواب های آزمایشی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{cases} n_x = \sum_{i=1}^I \nu_i^x \sigma(z_i^x), & z_i^x = w_i^x \tau + b_i^x, \\ n_y = \sum_{i=1}^I \nu_i^y \sigma(z_i^y), & z_i^y = w_i^y \tau + b_i^y, \\ n_u = \sum_{i=1}^I \nu_i^u \sigma(z_i^u), & z_i^u = w_i^u \tau + b_i^u, \\ n_\lambda = \sum_{i=1}^I \nu_i^\lambda \sigma(z_i^\lambda), & z_i^\lambda = w_i^\lambda \tau + b_i^\lambda, \\ n_\Upsilon = \sum_{i=1}^I \nu_i^\Upsilon \sigma(z_i^\Upsilon), & z_i^\Upsilon = w_i^\Upsilon \tau + b_i^\Upsilon, \end{cases}$$

که در آن σ تابع فعالساز است که به صورت زیر است

$$\sigma(z) = \tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

با توجه به شرایط مرزی مساله می توان جواب های آزمایشی برای توابع وضعیت، کنترل و ضرایب لاگرانژ را به صورت زیر تعریف کرد

$$\begin{cases} \bar{X} = x_0 + \tau(1-\tau)n_x + \tau(x_f - x_0), \\ \bar{\mathcal{Y}} = \tau n_y, \\ \bar{U} = n_u, \\ \bar{\lambda} = n_\lambda, \\ \bar{\Upsilon} = (1-\tau)n_\Upsilon. \end{cases} \quad (38.2)$$

این جواب های آزمایشی از شبکه عصبی تقریب های سراسری هستند که باید در شرایط لازم

بهینگی (۳۵.۲) و (۳۶.۲) به صورت زیر صدق کند

$$\begin{cases} \frac{\sigma \bar{H}}{\sigma \lambda} = \dot{X}(\tau), \\ \frac{\sigma \bar{H}}{\sigma \Upsilon} = \dot{Y}(\tau), \\ \frac{\sigma \bar{H}}{\sigma \bar{X}} = -\dot{\lambda}(\tau), \\ \frac{\sigma \bar{H}}{\sigma \bar{Y}} = -\dot{\Upsilon}(\tau), \\ \frac{\sigma \bar{H}}{\sigma U} = 0, \end{cases} \quad (39.2)$$

که در آن $\bar{H} = H(\tau, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{U}, \bar{\lambda}, \bar{\Upsilon})$. اکنون جهت آموزش شبکه عصبی تابع خطا متناظر با سیستم (۳۹.۲) را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$E(\Omega) = \frac{1}{\Upsilon} \sum_{j=1}^m \{E_{\lambda}^{\Upsilon}(\tau_j, \Omega) + E_{\Upsilon}^{\Upsilon}(\tau_j, \Omega) + E_{\bar{X}}^{\Upsilon}(\tau_j, \Omega) + E_{\bar{Y}}^{\Upsilon}(\tau_j, \Omega) + E_{\Delta}^{\Upsilon}(\tau_j, \Omega)\}, \quad (40.2)$$

که $\Omega = (w_x, w_y, w_u, w_{\lambda}, w_{\Upsilon}, b_x, b_y, b_u, b_{\lambda}, b_{\Upsilon}, \nu_x, \nu_y, \nu_u, \nu_{\lambda}, \nu_{\Upsilon})$ و

$$\begin{cases} E_{\lambda}(\tau, \Omega) = [\frac{\sigma \bar{H}}{\sigma \lambda} - \dot{X}(\tau)], \\ E_{\Upsilon}(\tau, \Omega) = [\frac{\sigma \bar{H}}{\sigma \Upsilon} - \dot{Y}(\tau)], \\ E_{\bar{X}}(\tau, \Omega) = [\frac{\sigma \bar{H}}{\sigma \bar{X}} + \dot{\lambda}(\tau)], \\ E_{\bar{Y}}(\tau, \Omega) = [\frac{\sigma \bar{H}}{\sigma \bar{Y}} + \dot{\Upsilon}(\tau)], \\ E_{\Delta}(\tau, \Omega) = [\frac{\sigma \bar{H}}{\sigma U}]. \end{cases} \quad (41.2)$$

در اینجا، $\tau_j = \frac{j-1}{m}$ ، $j = 1, 2, \dots, m$ ، نقاط هم محل در بازه $[0, 1]$ هستند و m تعداد گره ها است. حال مساله بهینه سازی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\min_{\Omega} E(\Omega) = \frac{1}{\Upsilon} \|\eta(\Omega)\|_{\Upsilon}^2 \quad (42.2)$$

که در آن

$$\eta(\Omega) = [E_{\lambda}(\tau_1, \Omega), \dots, E_{\lambda}(\tau_m, \Omega), E_{\Upsilon}(\tau_1, \Omega), \dots, E_{\Upsilon}(\tau_m, \Omega), E_{\bar{X}}(\tau_1, \Omega), \dots, E_{\bar{X}}(\tau_m, \Omega), E_{\bar{Y}}(\tau_1, \Omega), \dots, E_{\bar{Y}}(\tau_m, \Omega), E_{\Delta}(\tau_1, \Omega), \dots, E_{\Delta}(\tau_m, \Omega)]^T. \quad (43.2)$$

لم ۱.۲.۲. اگر $\Omega^* = (w_y^*, w_z^*, w_v^*, w_{\lambda}^*, w_{\Upsilon}^*, b_y^*, b_z^*, b_v^*, b_{\lambda}^*, b_{\Upsilon}^*, \nu_y^*, \nu_z^*, \nu_v^*, \nu_{\lambda}^*, \nu_{\Upsilon}^*)$ در رابطه ی زیر صدق کند

$$\eta(\Omega) = [E_{\lambda}(\theta_1, \Omega), \dots, E_{\lambda}(\theta_m, \Omega), E_{\Upsilon}(\theta_1, \Omega), \dots, E_{\Upsilon}(\theta_m, \Omega), E_{\bar{X}}(\theta_1, \Omega), \dots, E_{\bar{X}}(\theta_m, \Omega), E_{\bar{Y}}(\theta_1, \Omega), \dots, E_{\bar{Y}}(\theta_m, \Omega), E_{\Delta}(\theta_1, \Omega), \dots, E_{\Delta}(\theta_m, \Omega)]^T = 0, \quad (44.2)$$

آنگاه Ω^* جواب بهینه (۴۰.۲) است.

به این ترتیب، مساله کنترل بهینه افق نامتناهی به یک مساله بهینه سازی نامقید تبدیل شده است که می تواند توسط هر الگوریتم بهینه سازی کلاسیک و همچنین الگوریتم های ابتکاری حل شود.

۲.۲.۲ الگوریتم آموزش

در این قسمت هدف تعیین جواب های آزمایشی (۳۸.۲) است به طوری که

$$E(\Omega) = \frac{1}{2} \|\eta(\Omega)\|^2,$$

کمینه شود. در این قسمت، از روش یادگیری بدون ناظر و الگوریتم انتشار رو به عقب^{۱۳}، برای یادگیری و به هنگام کردن وزن ها و بایاس ها استفاده می شود. با استفاده از روش تندترین کاهش گرادیان، وزن ها و بایاس ها به طور تصادفی انتخاب شده و به صورت زیر به هنگام می شوند.

$$\Omega_i(j+1) = \Omega_i(j) - \kappa \frac{\partial E(\Omega)}{\partial \Omega_i}(j),$$

که در آن κ پارامتر آموزش است که بین ۰ و ۱ قرار دارد، j گام تکرار است، $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, 5(3I)$ همه پارامترهای شبکه (وزن ها و بایاس ها) در جواب های آزمایشی (۳۸.۲) هستند. به عنوان مثال، الگوریتم انتشار روبه عقب شبکه n_x ، برای به هنگام کردن پارامترها (وزن ها و بایاس ها) از لایه ورودی به لایه پنهان و از پنهان به خروجی به شرح زیر هستند.

$$w_i^x(j+1) = w_i^x(j) - \kappa \frac{\partial E(\Omega)}{\partial w_i^x}(j), \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (45.2)$$

$$b_i^x(j+1) = b_i^x(j) - \kappa \frac{\partial E(\Omega)}{\partial b_i^x}(j), \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (46.2)$$

$$\nu_i^x(j+1) = \nu_i^x(j) - \kappa \frac{\partial E(\Omega)}{\partial \nu_i^x}(j), \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (47.2)$$

به طور مشابه، پارامتر های دیگر $n_\lambda, n_y, n_\gamma, n_u$ با استفاده از (۴۵.۲) – (۴۷.۲) بهینه می شوند. فلوجارت الگوریتم آموزش شبکه عصبی در شکل ۱۱.۲ نشان داده شده است. در گام های زیر، الگوریتم آموزش شرح داده شده است.

گام ۱ مقادیر اولیه برای پارامتر های $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, 5(3I)$ و پارامتر تحمل خطا $\varepsilon > 0$ به صورت تصادفی انتخاب می شوند.

گام ۲ بردار ورودی $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$ وارد می شود.

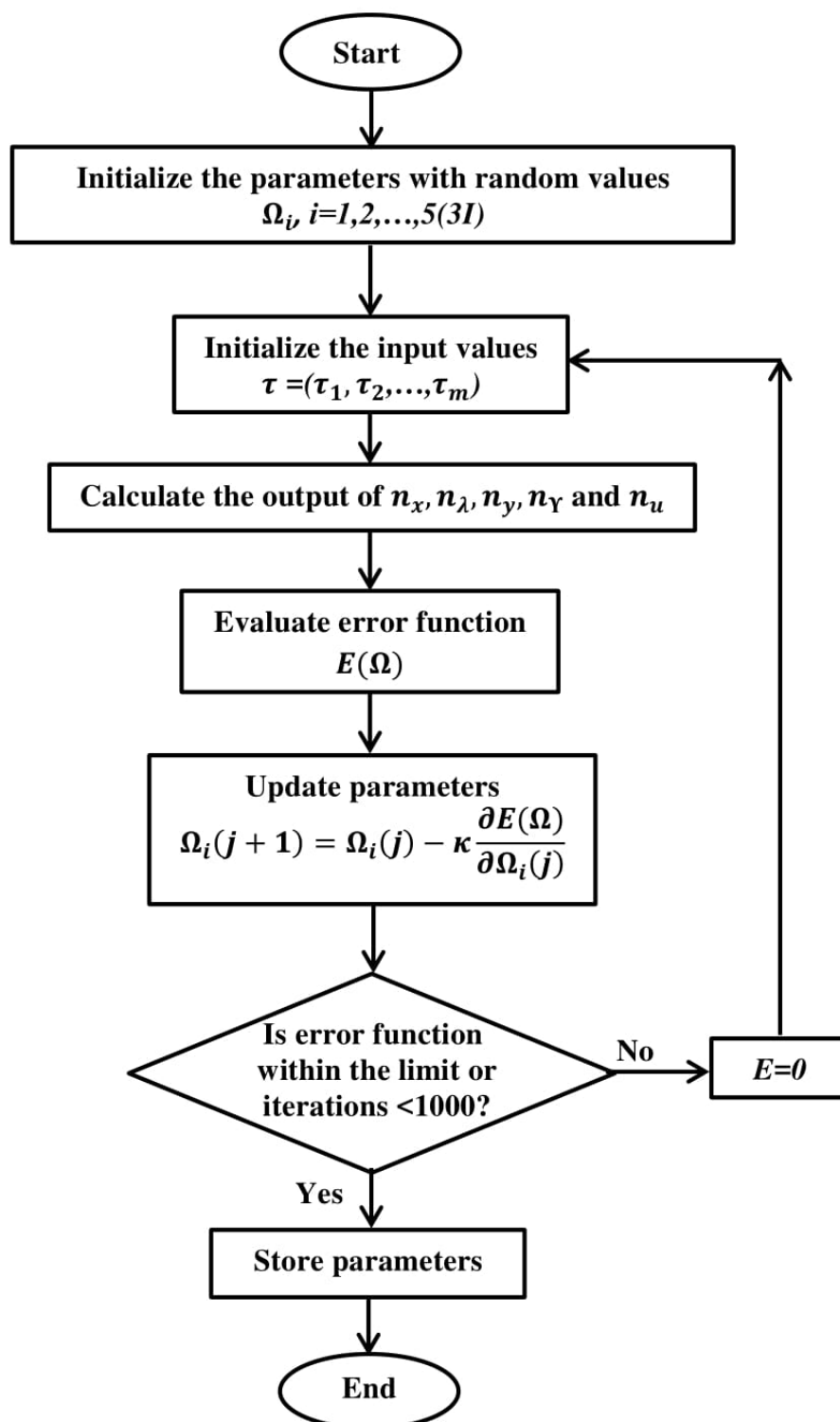
گام ۳ مقادیر خروجی $n_x, n_\lambda, n_y, n_\gamma$ و محاسبه می شوند.

گام ۴ با استفاده از (۴۲.۲) تابع خطا $E(\Omega)$ محاسبه می شود.

گام ۵ پارامتر های مورد استفاده در الگوریتم انتشار به عقب بدون ناظر به صورت زیر به هنگام می شوند

$$\Omega_i(j+1) = \Omega_i(j) - \kappa \frac{\partial E(\Omega)}{\partial \Omega_i}(j).$$

^{۱۳}Back Propagation Algorithm



شکل ۱۱.۲: فلوچارت الگوریتم آموزش شبکه عصبی

گام ۶ اگر $E(\Omega) \leq \varepsilon$ یا تکرارها بیشتر از ۱۰۰۰ شد، آنگاه به گام ۷ برو و در غیر این صورت به گام ۲ برو.

گام ۷ پس از پایان الگوریتم، پارامترهای نهایی ذخیره می شوند. از طرفی با انتخاب تابع $E(\Omega)$ به عنوان یک تابع لیاپانوف می توان همگرایی و پایداری روش را اثبات کرد.

۳.۲.۲ مثال های عددی

این بخش برای نشان دادن صحت و کارایی روش عددی چند مثال پیشنهاد شده است.

مثال ۱.۲.۲. مساله زیر را نظر بگیرید

$$\min \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} (x_1^2(t) + 4u^2(t)) dt,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} {}^c D_t^\alpha(x_1(t)) = x_2(t), \\ {}^c D_t^\alpha(x_2(t)) = -x_2(t) + u(t), \\ x_1(0) = x_2(0) = 0.1, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0. \end{cases}$$

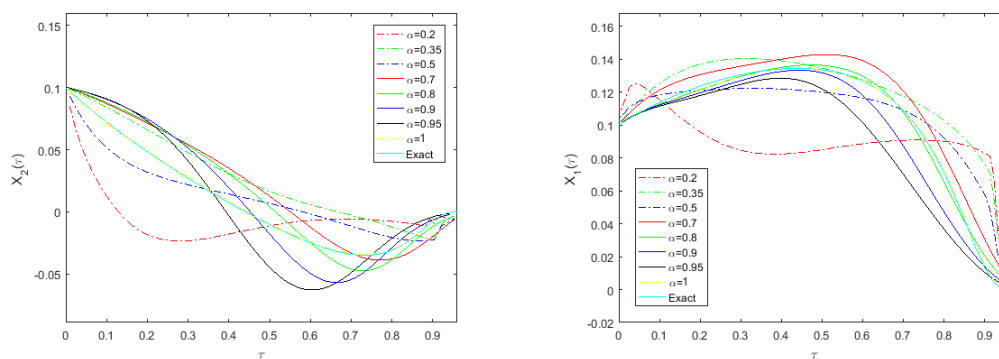
جواب بهینه این مساله برای $\alpha = 1$ در [۷۱] به صورت زیر است

$$x_1(t) = [0.1 + (0.1 + \frac{0.1}{\sqrt{2}})t] \exp(-\frac{t}{\sqrt{2}}), \quad x_2(t) = [0.1 - (0.1 + \frac{0.1}{\sqrt{2}})t] \exp(-\frac{t}{\sqrt{2}}).$$

با استفاده از (۳۴.۲) و تقریب (۱۵.۲)، مساله زیر به دست می آید

$$\min J = \int_{[0,1)} \frac{1}{\sqrt{2}(1-\tau)^2} (X_1^2(\tau) + 4U^2(\tau)) d\tau$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \dot{X}_1(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^2} \frac{X_2(\tau) - A(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha} X_1(\tau) + \sum_{p=2}^k C(\alpha, p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-p-\alpha} \mathcal{Y}_p(\tau) + \frac{0.1(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{B(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}}, \\ \dot{X}_2(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^2} \frac{-X_2(\tau) + U(\tau) - A(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha} X_2(\tau) + \sum_{p=2}^k C(\alpha, p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-p-\alpha} \mathcal{Z}_p(\tau) + \frac{0.1(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{B(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}}, \\ \dot{\mathcal{Y}}_p(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^2} (1-p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{p-2} X_1(\tau), \quad p = 2, \dots, k, \\ \dot{\mathcal{Z}}_p(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^2} (1-p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{p-2} X_2(\tau), \quad p = 2, \dots, k, \\ X_1(0) = X_2(0) = 0.1, \\ \mathcal{Y}_p(0) = 0, \quad p = 2, \dots, k, \\ \mathcal{Z}_p(0) = 0, \quad p = 2, \dots, k, \\ \lim_{\tau \rightarrow 1^-} X_1(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 1^-} X_2(\tau) = 0. \end{cases}$$



شکل ۱۲.۲: مسیر X_1 و X_2 برای مقادیر مختلف α در مثال ۱.۲.۲.

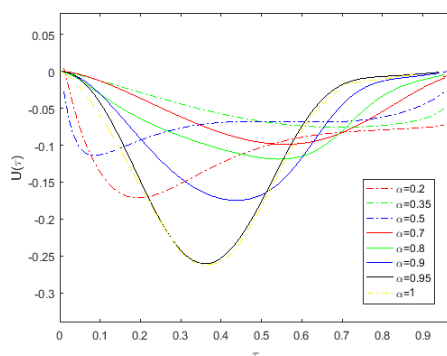
اکنون جواب های آزمایشی را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_1 = 0.1 - 0.1\tau + \tau(1 - \tau)n_{x_1}, \\ \bar{X}_2 = 0.1 - 0.1\tau + \tau(1 - \tau)n_{x_2}, \\ \bar{Y} = \tau n_y, \\ \bar{Z} = \tau n_z, \\ \bar{\lambda} = n_\lambda, \\ \bar{\Upsilon} = (1 - \tau)n_\Upsilon, \\ \bar{U} = n_u. \end{array} \right.$$

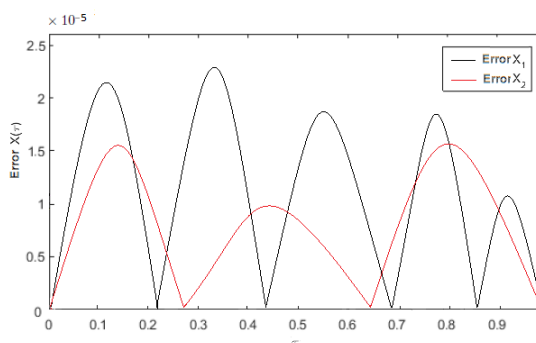
در شبکه عصبی مصنوعی برای وزن های لایه ورودی، خروجی و بایاس ها γ پارامتر را در نظر می گیریم، یعنی $I = 7$. در روابط (۱۵.۲) و (۴۰.۲) به ترتیب $k = 2$ و $m = 100$ فرض شده است. در شکل های ۱۲.۲ و ۱۳.۲ مسیر های دقیق $X_1(\cdot)$ و $X_2(\cdot)$ برای $\alpha = 1$ و جواب های تقریبی برای $\alpha = 0.2, 0.35, 0.5, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95, 1$ و کنترل U به ترتیب نشان داده شده است.

مقادیر تابع خطا $E(\Omega)$ در جدول ۴.۲ آورده شده اند که نشان دهنده این حقیقت هستند که شرایط لازم بهینگی با تقریب خوب برقرار شده است. با توجه به بحث پایداری و همگرایی که ارائه شد، مشاهده می شود در این مثال تابع هدف درجه دوم، و معادلات وضعیت خطی می باشند لذا طبق قضیه ۴.۳.۱ جواب بدست آمده شرط لازم و کافی بهینگی را دارا می باشد.

مثال ۲.۲.۲. مساله زیر را در نظر بگیرید



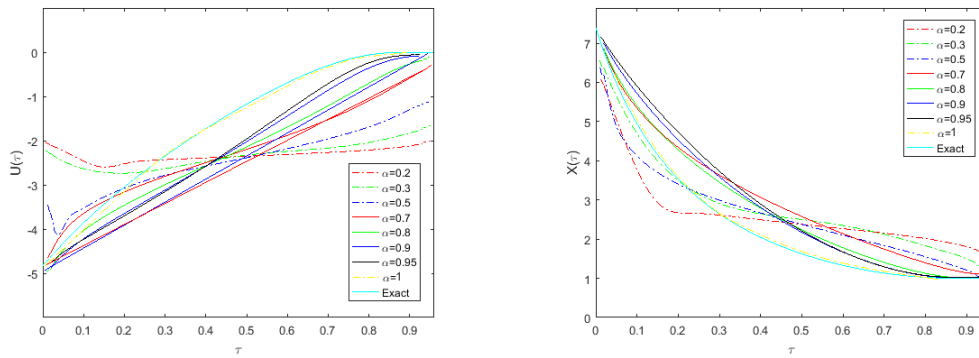
شکل ۱۳.۲: کنترل U برای مقادیر مختلف α در مثال ۱.۲.۲.



شکل ۱۴.۲: خطای مطلق $X_1(\cdot)$ و $X_2(\cdot)$ برای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۲.۲.

جدول ۴.۲: مقدار تابع خطای $E(\Omega)$ برای مثال ۱.۲.۲

α	۰/۲	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۰/۹۵	۱
$E(\Omega)$	$۳/۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۹ \times ۱۰^{-۲}$	$۴/۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۱ \times ۱۰^{-۴}$



شکل ۱۵.۲: مسیر X و کنترل U برای مقادیر مختلف α در مثال ۲.۲.۲.

$$\min \frac{1}{\Upsilon} \int_0^{\infty} (\log^{\Upsilon}(x(t)) + u^{\Upsilon}(t)) dt,$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} {}^c D_t^{\alpha}(x(t)) = x(t) \log(x(t)) + x(t)u(t), \\ x(0) = e^{\Upsilon}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1. \end{cases}$$

جواب بهینه این مساله برای $\alpha = 1$ در [۷۱] به صورت زیر است

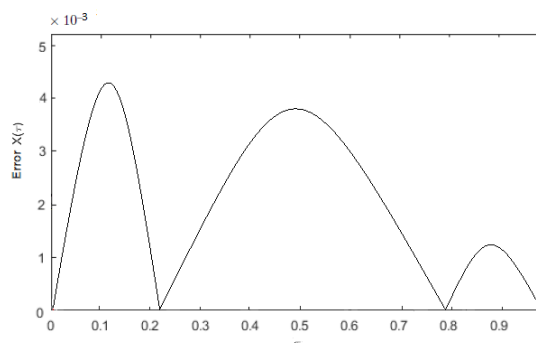
$$x(t) = \exp(\Upsilon \exp(-t\sqrt{\Upsilon})), \quad u(t) = -\Upsilon(1 + \sqrt{\Upsilon}) \exp(-t\sqrt{\Upsilon}).$$

با استفاده از (۳۴.۲) و تقریب (۱۵.۲)، مساله زیر نتیجه می شود

$$\min J = \int_{[0,1)} \frac{1}{\Upsilon(1-\tau)^{\Upsilon}} (\log^{\Upsilon}(X(\tau)) + U^{\Upsilon}(\tau)) d\tau$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \dot{X}(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{\Upsilon}} \frac{X(\tau) \log(X(\tau)) + X(\tau)U(\tau) - A(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha} X(\tau) + \sum_{p=\Upsilon}^k C(\alpha,p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-p-\alpha} \mathcal{Y}_p(\tau) + \frac{e^{\Upsilon}(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{B(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}}, \\ \dot{\mathcal{Y}}_p(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{\Upsilon}} (1-p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{p-\Upsilon} X(\tau), \quad p = \Upsilon, \dots, k, \\ X(0) = e^{\Upsilon}, \\ \mathcal{Y}_p(0) = 0, \quad p = \Upsilon, \dots, k, \\ \lim_{\tau \rightarrow 1^-} X(\tau) = 1. \end{cases}$$

با توجه با شرایط مرزی مساله، روابط زیر را نظر می گیریم



شکل ۱۶.۲: خطای مطلق $X(\cdot)$ برای $\alpha = 1$ در مثال ۲.۲.۲.

جدول ۵.۲: مقدار تابع خطای $E(\Omega)$ برای مثال ۲.۲.۲

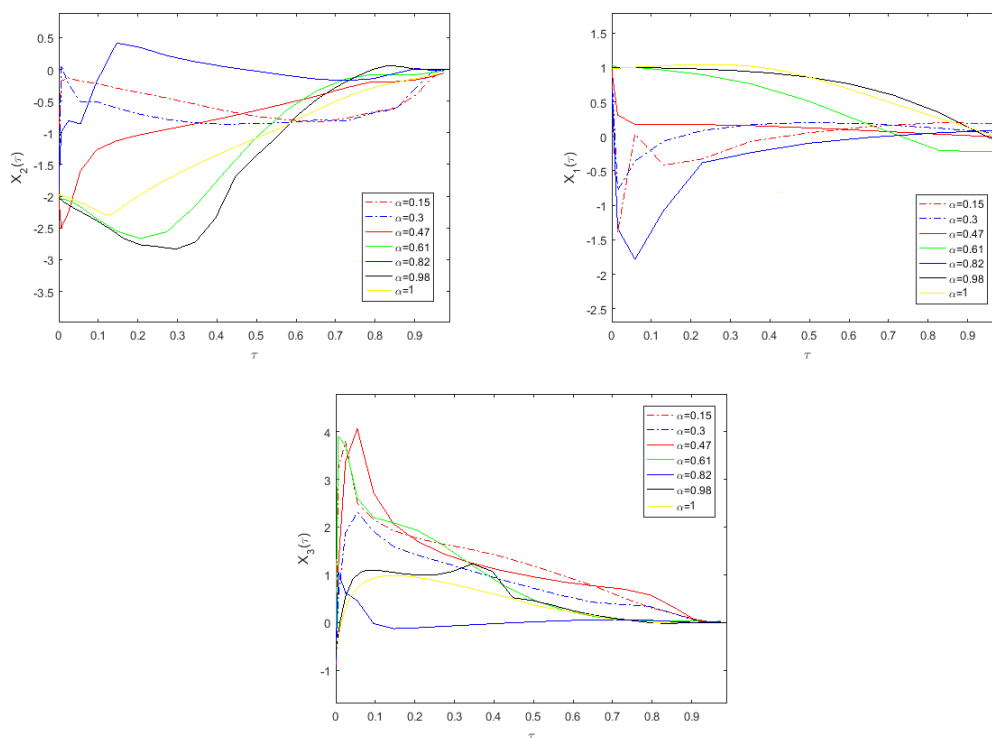
α	۰/۲	۰/۳	۰/۵	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۰/۹۵	۱
$E(\Omega)$	$۳/۸ \times 10^{-۲}$	$۳/۹ \times 10^{-۲}$	$۵/۵ \times 10^{-۳}$	$۱/۴ \times 10^{-۳}$	$۸/۹ \times 10^{-۴}$	$۲/۷ \times 10^{-۴}$	$۷/۱ \times 10^{-۲}$	$۱/۱ \times 10^{-۳}$

$$\begin{cases} \bar{X} = e^{\tau} + \tau(1 - \tau)n_x + \tau(1 - e^{\tau}), \\ \bar{y} = \tau n_y, \\ \bar{U} = n_u, \\ \bar{\lambda} = n_{\lambda}, \\ \bar{Y} = (1 - \tau)n_{\tau}. \end{cases}$$

در شبکه عصبی مصنوعی فرض کنید $I = 19$. در روابط (۱۵.۲) و (۴۰.۲) به ترتیب $k = 2$ و $m = 100$ فرض شده است. در شکل ۱۵.۲ و جدول ۵.۲ نتایج مربوط به این مثال نشان داده می شوند.

مثال ۳.۲.۲. سیستم کنترل کسری غیرخطی زیر را نظر بگیرید [۷۲].

$$\begin{cases} {}^c D_t^{\alpha}(x_1(t)) = x_2(t) + 2x_1^2(t), \\ {}^c D_t^{\alpha}(x_2(t)) = x_3(t) + 2x_1(t)x_2(t), \\ {}^c D_t^{\alpha}(x_3(t)) = u(t), \\ x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = -2, \\ x_3(0) = -1. \end{cases} \quad (۴۸.۲)$$



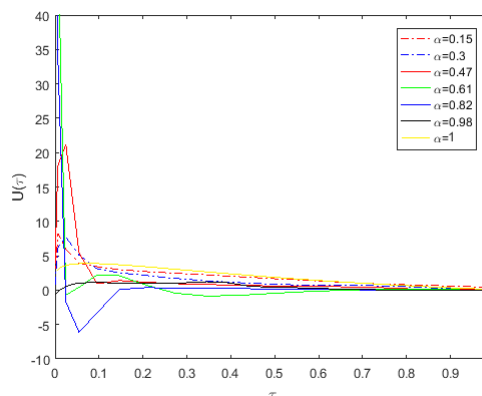
شکل ۱۷.۲: مسیر \$X_1(\cdot)\$، \$X_2(\cdot)\$ و \$X_3(\cdot)\$ برای مقادیر مختلف \$\alpha\$ در مثال ۳.۲.۲.

فرض کنید \$(q_1(t), q_2(t), q_3(t)) = (\circ, \circ, \circ)\$ نقطه تعادل سیستم (۴۸.۲) باشد. هدف یافتن یک کنترل برای پایدارسازی سیستم (۴۸.۲) است. طبق قضیه ۱ در [۷۳]، می توانیم سیستم (۴۸.۲) را به مساله کنترل بهینه زیر تبدیل کنیم

$$\min \int_0^\infty \|(x_1(t) - q_1(t), x_2(t) - q_2(t), x_3(t) - q_3(t))\|_2^2 dt = \int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)) dt,$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} {}^c D_t^\alpha(x_1(t)) = x_2(t) + 2x_1^2(t), \\ {}^c D_t^\alpha(x_2(t)) = x_3(t) + 2x_1(t)x_2(t), \\ {}^c D_t^\alpha(x_3(t)) = u(t), \\ x_1(\circ) = 1, \\ x_2(\circ) = -2, \\ x_3(\circ) = -1. \end{cases}$$

مشابه مثال های قبل، این مساله را حل می کنیم. در شبکه عصبی مصنوعی \$I = 2^\circ\$ در نظر می گیریم. در روابط (۱۵.۲) و (۴۰.۲) به ترتیب \$k = 2\$ و \$m = 2^\circ\$ فرض شده است. در شکل های ۱۷.۲ و ۱۸.۲ و جدول ۶.۲ نتایج مربوط به این مثال قابل مشاهده اند. با توجه به شکل های ۱۷.۲ و ۱۸.۲، مشاهده می شود که متغیرهای حالت به نقطه تعادل \$x_e = \circ\$ همگرا شده اند.



شکل ۱۸.۲: کنترل برای مقادیر مختلف α در مثال ۳.۲.۲.

جدول ۶.۲: مقدار تابع خطای $E(\Omega)$ برای مثال ۳.۲.۲

α	۰/۱۵	۰/۳	۰/۴۷	۰/۶۱	۰/۸۲	۰/۹۸	۱
$E(\Omega)$	$۲/۰۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۸/۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۶/۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۰۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۹ \times ۱۰^{-۴}$

فصل ۳

کاربردهای مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی

۱.۳ کنترل سیستم های آشوبناک

آشوب پدیده ای است که رفتارهای پیچیده دینامیکی دارد، مثلا به تغییرات کوچک در شرایط اولیه حساس بودن و غیره. اولین بار ریاضیدان و منجم برجسته، هنری پوانکاره^۱ حین مطالعه سیستم های دینامیکی متوجه ویژگی حساسیت به شرایط اولیه شد. در ادامه برای درک این ویژگی به توضیح آن می پردازیم.

یک سیستم دینامیکی را دو بار با دو شرط اولیه متفاوت ولی بسیار نزدیک به هم به حرکت وادار می کنیم. این تفاوت اولیه کوچک را می توان ناشی از خطای اندازه گیری دانست. برای سیستم های غیر آشوبناک این عدم قطعیت تنها به خطایی در پیش بینی حالت نهایی خواهد انجامید که به طور خطی با زمان افزایش می یابد. اما برای سیستم های آشوبناک خطا به طور نمایی با زمان افزایش می یابد به طوریکه حالت سیستم پس از زمانی بسیار کوتاه نیز اساسا نامعلوم است. این پدیده حساسیت به شرایط اولیه نامیده می شود و تنها زمانی رخ می دهد که معادلات وضعیت حاکم بر سیستم غیرخطی باشند. به دلیل این که پیش بینی حالت بعدی سیستم آشوبناک عملا غیر ممکن است سیستم آشوبناک مانند یک سیستم تصادفی

^۱ Henri Poincare

(سیستمی متاثر از نیروهای خارجی) رفتار می کند اما عامل بی نظمی در این دو حالت کاملاً متفاوت است. پدیده آشوب در بسیاری از سیستم های فیزیکی و مهندسی به عنوان یک اثر نامطلوب عمل می کند و موجب می شود که سیستم رفتاری پیچیده، نامنظم و غیرقابل پیش بینی از خود نشان دهد. این پدیده در بسیاری از سیستم های دینامیکی غیرخطی مانند: سیستم لورنتس^۲، سیستم چن^۳ و ... مورد مطالعه قرار گرفته است.

شرایط لازم برای رفتار آشوبناک

یک سیستم دینامیکی را نظر بگیرید که با معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت زیر توصیف می شود.

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1.3)$$

شرایط لازم برای رفتار آشوبناک این سیستم عبارت است از:

۱. سیستم حداقل سه متغیر دینامیکی مستقل داشته باشد.
۲. معادله های وضعیت سیستم شامل حداقل یک جمله غیر خطی باشد. یعنی در سیستم (۱.۳) مقدار n حداقل برابر سه باشد. جهت مشاهده جزئیات بیشتر و همچنین شرایط لازم رفتار آشوبناک سیستم های دینامیکی می توان به [۷۵] مراجعه کرد.

در سال های اخیر به کنترل آشوب در زمینه ارتباطات امن، سیستم های نوری، شیمیایی، فیزیکی، بیولوژیکی، شبکه های عصبی و غیره توجه بسیار زیادی شده است [۷۹، ۸۰]. تاکنون برای کنترل سیستم های آشوبناک، طیف وسیعی از روش ها پیشنهاد شده است. مانند روش کنترل تطبیقی^۴ [۸۱]، کنترل کمینه آنتروپی^۵ [۸۲]، روش کنترل مد لغزشی^۶ [۸۳] و غیره. در اینجا سیستم های آشوبناک که سیستم های آشوبناک مرتبه کسری نامیده می شود را معرفی می کنیم. هارتلی در [۸۴] یک سیستم آشوبناک مرتبه کسری جدید را معرفی کرد.

در این بخش قصد داریم یک مساله کنترل بهینه کسری از سیستم های آشوبناک را حول نقاط تعادل آن مورد بررسی قرار دهیم. یک سیستم دینامیکی مدل بندی شده توسط معادلات

^۲ Lorenz system

^۳ Chen system

^۴ Adaptive Control Method

^۵ Minimum Entropy Control

^۶ Sliding Mode Control Method

^۷ Hartley

وضعیت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha(x(t)) = g(t, x(t)), t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \\ x(t) \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.3)$$

که در آن $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ، $n \geq 3$ و $x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ متغیر حالت است. تابع $g: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ غیر خطی و به طور پیوسته مشتق پذیر است. فرض کنید $p^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ نقطه تعادل سیستم (۲.۳) است.

ملاحظه ۱.۱.۳. از نرم های زیر برای تابع $\gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ در $L_2([0, \infty))$ استفاده می کنیم.

$$\|\gamma(t)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |\gamma_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t \geq 0,$$

$$\|\gamma(\cdot)\|_{L_2} = \left(\int_0^\infty \|\gamma(t)\|_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

که n متناهی، $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))^T$ و $\gamma_i(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ، $i = 1, 2, \dots, n$.

مساله کنترل آشوب: یافتن کنترل $u(\cdot)$ به طوری که $x(\cdot)$ متناظر در سیستم (۲.۳) در رابطه $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = p^*$ صدق کند.

برای این منظور مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی را برای سیستم (۲.۳) به صورت زیر معرفی می کنیم

$$\min J(x(\cdot)) = \|x(\cdot) - p^*\|_{L_2}^2 = \int_0^\infty \|x(t) - p^*\|_2^2 dt, \quad (3.3)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} {}^c D_t^\alpha(x(t)) = g(t, x(t)) + u(t), \\ x(0) = x_0, t \geq 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

برای کنترل کردن رفتار آشوبناک سیستم (۲.۳)، کنترل $u(t)$ را به هر یک از معادلات وضعیت اضافه می کنیم. در قضیه زیر نشان می دهیم که کنترل بهینه بدست آمده از مساله (۳.۳) و (۴.۳) می تواند سیستم مرتبه کسری آشوبناک را حل کند.

قضیه ۱.۱.۳. فرض کنید برای مساله کنترل آشوب (۲.۳)، یک جواب $u(\cdot) = \bar{u}(\cdot)$ موجود باشد به طوری که متناظر با خروجی $x(\cdot) = \bar{x}(\cdot)$ در $L_2([0, \infty))$ باشد. مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی (۳.۳) و (۴.۳) که برای تمام $t \geq 0$ ، $p^* = 0$ است را در نظر بگیرید. اگر $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ یک جواب بهینه برای مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی (۳.۳) و (۴.۳) باشد، آنگاه $u^*(\cdot)$ یک کنترل پایدارکننده مجانبی برای سیستم (۲.۳) است.

اثبات. چون $u(\cdot) = \bar{u}(\cdot)$ یک جواب برای مساله کنترل آشوب است، لذا خروجی متناظر با آن، $x(\cdot) = \bar{x}(\cdot)$ ، در شرط $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = p^*$ صدق می کند. بنابراین

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{x}(t) - p^*\|_{L^2}^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{x}(t) - p^*\|_{L^2}^2 = 0. \quad (5.3)$$

همچنین از آنجایی که $\bar{x}(\cdot) \in L^2([0, \infty))$

$$J(\bar{x}(\cdot)) = \|\bar{x}(\cdot) - p^*\|_{L^2}^2 = \int_0^\infty \|\bar{x}(t) - p^*\|_{L^2}^2 dt, \quad (6.3)$$

متناهی است. از سوی دیگر، $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ یک جواب بهینه برای مساله (۳.۳) و (۴.۳) است. لذا

$$0 \leq J(x^*(\cdot)) = \|x^*(\cdot) - p^*\|_{L^2}^2 = \int_0^\infty \|x^*(t) - p^*\|_{L^2}^2 dt \leq J(\bar{x}(\cdot)). \quad (7.3)$$

از این رو $J(x^*(\cdot))$ متناهی است. اکنون فرض می کنیم $\lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t) = K$ و $p^* \neq K \in \mathbb{R}^n$ پس $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x^*(t) - p^*\|_{L^2} = \|K\|_{L^2}$ و با توجه به (۷.۳)، باید عددی متناهی باشد. از این رو $n_1 \in \mathbb{N}$ و $t_1 > 0$ وجود دارد به طوری که برای $t > t_1$ ، $\|x^*(t) - p^*\|_{L^2} \geq \|K\|_{L^2} - \frac{1}{n_1}$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} J(x^*(\cdot)) &= \int_0^\infty \|x^*(t) - p^*\|_{L^2}^2 dt \\ &= \int_0^{t_1} \|x^*(t) - p^*\|_{L^2}^2 dt + \int_{t_1}^\infty \|x^*(t) - p^*\|_{L^2}^2 dt \\ &\geq \int_0^{t_1} \|x^*(t) - p^*\|_{L^2}^2 dt + (\|K\|_{L^2} - \frac{1}{n_1}) \int_{t_1}^\infty dt. \end{aligned} \quad (8.3)$$

با توجه به آخرین انتگرال در (۸.۳)، $J(x^*(\cdot))$ نمی تواند متناهی باشد که این یک تناقض است. بنابراین $\lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t) = p^*$. \square

حال با استفاده از تکنیک دوم بیان شده در فصل دوم، مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی (۳.۳) و (۴.۳) را می توانیم حل کنیم. جهت جلوگیری از تکرار مطالب در ادامه تنها چندین مثال عددی برای کنترل سیستم های آشوبناک مرتبه کسری بیان می کنیم.

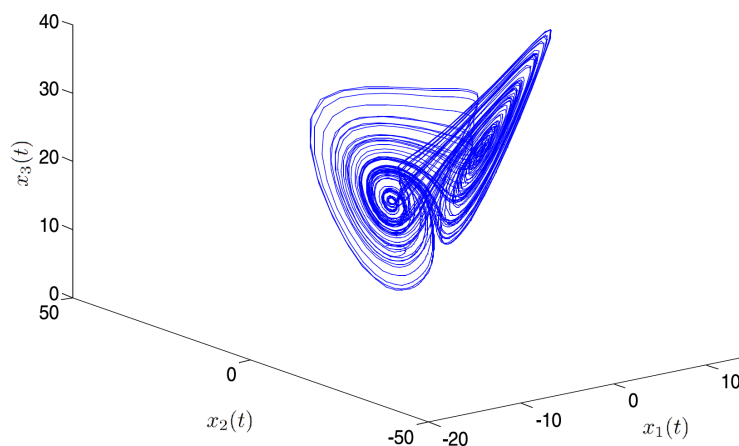
مثال های عددی

مثال ۱.۱.۳. سیستم آشوبناک مرتبه کسری چن^۸ را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} {}^c D_t^{\alpha_1}(x_1(t)) = a(x_2(t) - x_1(t)), \\ {}^c D_t^{\alpha_2}(x_2(t)) = dx_1(t) - x_1(t)x_3(t) + cx_2(t) + u(t), \\ {}^c D_t^{\alpha_3}(x_3(t)) = x_1(t)x_2(t) - bx_3(t). \end{cases} \quad (9.3)$$

در این سیستم کسری، مرتبه های کسری سیستم به صورت $\alpha_1 = 0.9$ ، $\alpha_2 = 0.95$ ، $\alpha_3 = 0.9$ هستند. سیستم (۹.۳) بدون کنترل کننده و با پارامترهای $(a, b, c, d) = (35, 3, 28, -7)$ ،

^۸ Chen system



شکل ۱.۳: رفتار آشوبناک سیستم مرتبه کسری چن در مثال ۱.۱.۳

رفتار آشوبناک دارد که این رفتار آشوبناک در شکل ۱.۳، قابل مشاهده است [۷۴]. همچنین شرایط اولیه سیستم به صورت $[x_1, x_2, x_3]^T = [-9, -5, 14]^T$ است. نقطه تعادل این سیستم مرتبه کسری $p^* = (0, 0, 0)$ می باشد. مساله متناظر با مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی (۳.۳) و (۴.۳) برای سیستم (۹.۳) به صورت زیر است

$$\min \int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)) dt, \quad (10.3)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} {}^c D_t^{\alpha_1}(x_1(t)) = a(x_2(t) - x_1(t)), \\ {}^c D_t^{\alpha_2}(x_2(t)) = dx_1(t) - x_1(t)x_3(t) + cx_2(t) + u(t), \\ {}^c D_t^{\alpha_3}(x_3(t)) = x_1(t)x_2(t) - bx_3(t), \\ x_1(0) = -9, \\ x_2(0) = -5, \\ x_3(0) = 14. \end{cases} \quad (11.3)$$

با استفاده از (۳۴.۲) و تقریب (۱۵.۲)، مساله (۱۰.۳) و (۱۱.۳) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$\min J = \int_{[0,1)} \frac{1}{(1-\tau)^2} (X_1^2(\tau) + X_2^2(\tau) + X_3^2(\tau)) d\tau$$

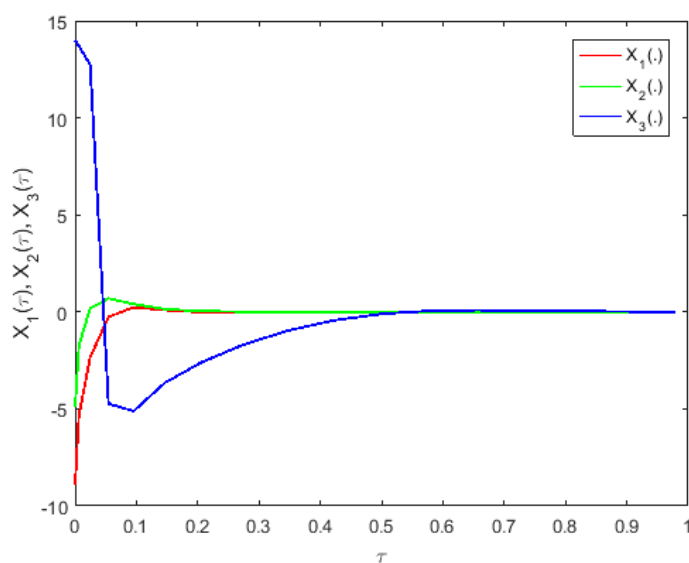
$$\begin{aligned}
 \dot{X}_1(\tau) &= \frac{1}{(1-\tau)^\Upsilon} \frac{a(X_\Upsilon(\tau) - X_1(\tau)) - A(\alpha_1) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{-\alpha_1} X_1(\tau) + \sum_{p=\Upsilon}^k C(\alpha_1, p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1-p-\alpha_1} \mathcal{Y}_p(\tau) - \frac{9 \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{-\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)}}{B(\alpha_1) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1-\alpha_1}}, \\
 \dot{X}_\Upsilon(\tau) &= \frac{1}{(1-\tau)^\Upsilon} \frac{dX_1(\tau) - X_1(\tau)X_\Upsilon(\tau) + cX_\Upsilon(\tau) + U(\tau) - A(\alpha_\Upsilon) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{-\alpha_\Upsilon} X_\Upsilon(\tau) + \sum_{p=\Upsilon}^k C(\alpha_\Upsilon, p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1-p-\alpha_\Upsilon} \mathcal{Z}_p(\tau) - \frac{5 \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{-\alpha_\Upsilon}}{\Gamma(1-\alpha_\Upsilon)}}{B(\alpha_\Upsilon) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1-\alpha_\Upsilon}}, \\
 \dot{X}_\Psi(\tau) &= \frac{1}{(1-\tau)^\Upsilon} \frac{X_1(\tau)X_\Upsilon(\tau) - bX_\Upsilon(\tau) - A(\alpha_\Psi) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{-\alpha_\Psi} X_\Psi(\tau) + \sum_{p=\Upsilon}^k C(\alpha_\Psi, p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1-p-\alpha_\Psi} \mathcal{M}_p(\tau) + \frac{14 \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{-\alpha_\Psi}}{\Gamma(1-\alpha_\Psi)}}{B(\alpha_\Psi) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1-\alpha_\Psi}}, \\
 \dot{\mathcal{Y}}_p(\tau) &= \frac{1}{(1-\tau)^\Upsilon} (1-p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{p-\Upsilon} X_1(\tau), \quad p = \Upsilon, \dots, k, \\
 \dot{\mathcal{Z}}_p(\tau) &= \frac{1}{(1-\tau)^\Upsilon} (1-p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{p-\Upsilon} X_\Upsilon(\tau), \quad p = \Upsilon, \dots, k, \\
 \dot{\mathcal{M}}_p(\tau) &= \frac{1}{(1-\tau)^\Upsilon} (1-p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{p-\Upsilon} X_\Psi(\tau), \quad p = \Upsilon, \dots, k, \\
 X_1(0) &= -9, \\
 X_\Upsilon(0) &= -5, \\
 X_\Psi(0) &= 14, \\
 \mathcal{Y}_p(0) &= 0, \quad p = \Upsilon, \dots, k, \\
 \mathcal{Z}_p(0) &= 0, \quad p = \Upsilon, \dots, k, \\
 \mathcal{M}_p(0) &= 0, \quad p = \Upsilon, \dots, k.
 \end{aligned}$$

s.t.

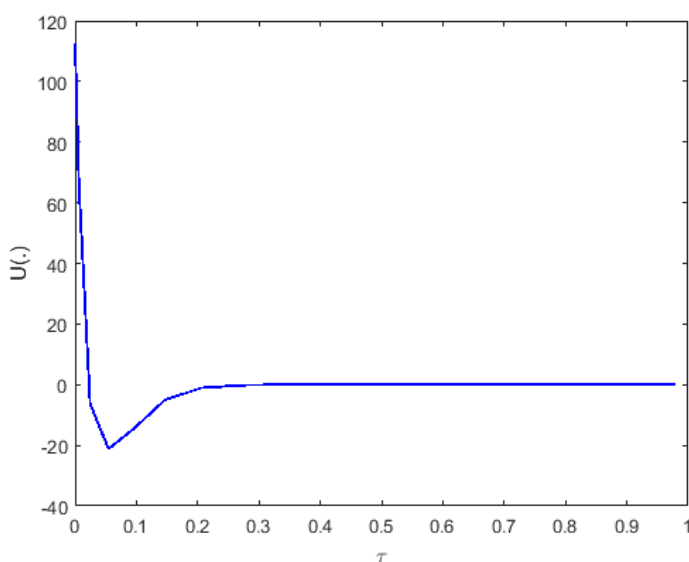
با در نظر گرفتن شرایط اولیه، می توان جواب های آزمایشی را به صورت زیر انتخاب کرد

$$\begin{cases}
 \bar{X}_1 = -9(1-\tau) + \tau n_{x_1}, \\
 \bar{X}_\Upsilon = -5(1-\tau) + \tau n_{x_\Upsilon}, \\
 \bar{X}_\Psi = 14(1-\tau) + \tau n_{x_\Psi}, \\
 \bar{\mathcal{Y}} = \tau n_y, \\
 \bar{\mathcal{Z}} = \tau n_z, \\
 \bar{\mathcal{M}} = \tau n_M, \\
 \bar{\lambda}_i = (1-\tau)n_{\lambda_i}, \quad i = 1, \Upsilon, \dots, 6, \\
 \bar{U} = n_u.
 \end{cases}$$

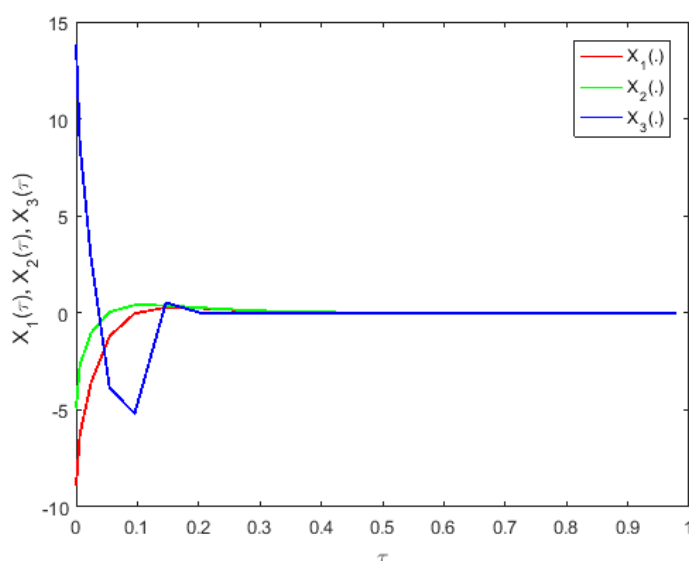
در شبکه عصبی مصنوعی برای وزن های لایه ورودی، خروجی و بایاس ها 3^0 پارامتر را در نظر می گیریم، یعنی $I = 3^0$. در روابط (۱۵.۲) و (۲۴.۲) به ترتیب $k = 2$ و $m = 2^0$ فرض شده است. در شکل های ۲.۳ و ۳.۳ مسیر های تقریبی $X_1(\cdot)$ ، $X_\Upsilon(\cdot)$ و $X_\Psi(\cdot)$ و کنترل $U(\cdot)$ به ترتیب نشان داده شده است. مقدار تابع خطا $E(\Omega) = 0.000394$ بدست آمده است. همچنین با توجه شکل های ۲.۳ و ۳.۳ مشاهده می شود که متغیر حالت به نقطه تعادل p^* همگرا شده است.



شکل ۲.۳: مسیرهای متغیر حالت سیستم مرتبه کسری چن برای مثال ۱.۱.۳



شکل ۳.۳: مسیرهای کنترل سیستم مرتبه کسری چن برای مثال ۱.۱.۳



شکل ۴.۳: مسیرهای متغیر حالت سیستم مرتبه کسری چن برای مثال ۲.۱.۳

مثال ۲.۱.۳. سیستم آشوبناک مرتبه کسری چن را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}^c D_t^{\alpha_1}(x_1(t)) = a(x_2(t) - x_1(t)), \\ {}^c D_t^{\alpha_2}(x_2(t)) = dx_1(t) - x_1(t)x_2(t) + cx_2(t), \\ {}^c D_t^{\alpha_3}(x_3(t)) = x_1(t)x_2(t) - bx_3(t). \end{cases} \quad (12.3)$$

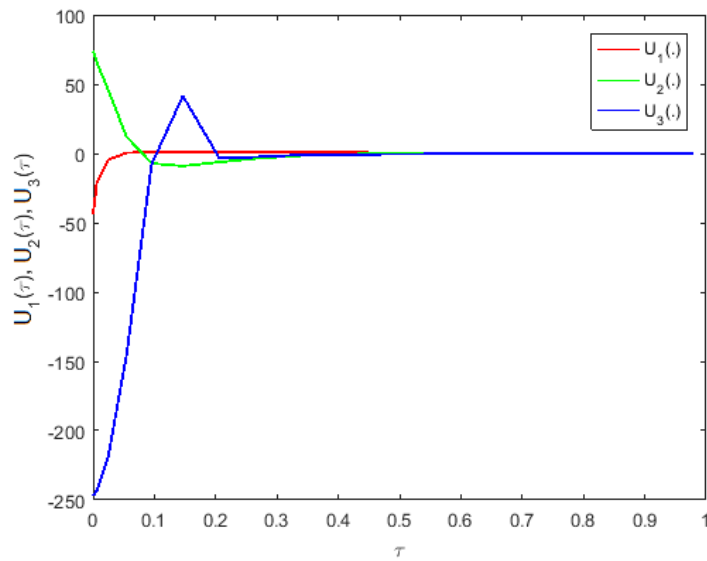
جهت کنترل این سیستم، کنترل گرهای $u_1(t)$ ، $u_2(t)$ و $u_3(t)$ به تمامی معادلات وضعیت این سیستم اضافه می شوند. مشابه شرایط مثال ۱.۱.۳ این مساله را حل می کنیم. در شکل های ۴.۳ و ۵.۳ مسیر های تقریبی $X_1(\cdot)$ ، $X_2(\cdot)$ و $X_3(\cdot)$ و کنترل های $U_1(\cdot)$ ، $U_2(\cdot)$ و $U_3(\cdot)$ به ترتیب نشان داده شده است. مقدار تابع خطا $E(\Omega) = 0.0017$ بدست آمده است.

مثال ۳.۱.۳. سیستم گنسیو-تسی^۹ مرتبه کسری زیر را نظر بگیرید

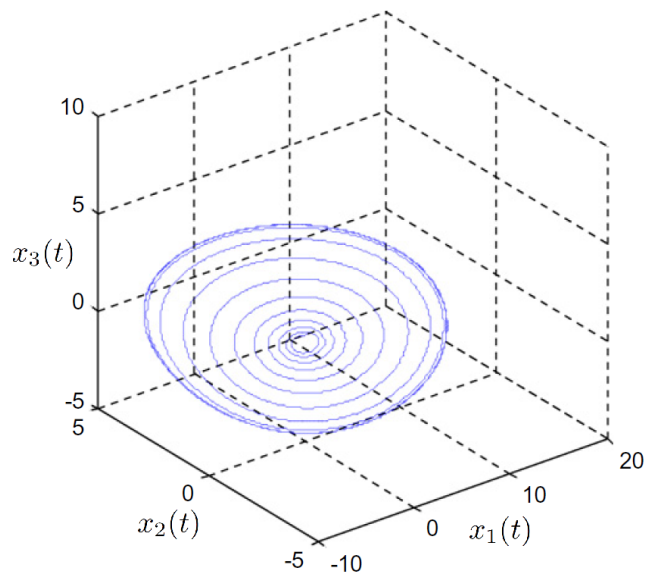
$$\begin{cases} {}^c D_t^{\alpha_1}(x_1(t)) = x_2(t), \\ {}^c D_t^{\alpha_2}(x_2(t)) = x_3(t), \\ {}^c D_t^{\alpha_3}(x_3(t)) = -6x_1(t) - 2/9x_2(t) - 1/2x_3(t) + x_1^2(t) + u(t). \end{cases} \quad (13.3)$$

مرتبه های کسری این سیستم $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha = 0.98$ و شرایط اولیه $[x_1, x_2, x_3]^T = [-1, 2, 3]^T$ است [۷۴]. سیستم (۱۳.۳) بدون وجود کنترل کننده رفتار آشوبناک دارد که در شکل ۶.۳ نشان داده است. نقطه تعادل این سیستم مرتبه کسری $p^* = (0, 0, 0)$ می باشد.

^۹Genesis-Tesi system



شکل ۵.۳: مسیرهای کنترل سیستم مرتبه کسری چن برای مثال ۲.۱.۳



شکل ۶.۳: رفتار آشوبناک سیستم گنسیو-تسی در مثال ۳.۱.۳

مساله متناظر با مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی (۳.۳) و (۴.۳) برای سیستم (۱۳.۳) به صورت زیر است

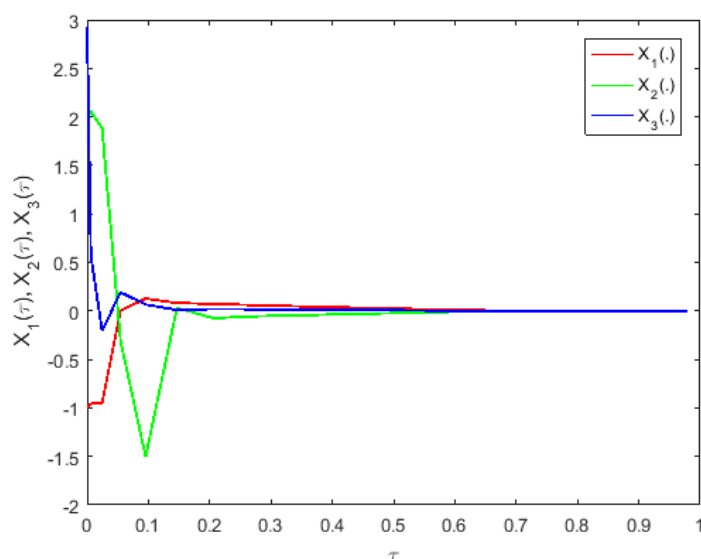
$$\min \int_0^{\infty} (x_1^{\gamma}(t) + x_2^{\gamma}(t) + x_3^{\gamma}(t)) dt, \quad (14.3)$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} {}^c D_t^{\alpha_1}(x_1(t)) = x_2(t), \\ {}^c D_t^{\alpha_2}(x_2(t)) = x_3(t), \\ {}^c D_t^{\alpha_3}(x_3(t)) = -\phi x_1(t) - \psi/\theta x_2(t) - \nu/\lambda x_3(t) + x_1^{\gamma}(t) + u(t), \\ x_1(0) = -1, \\ x_2(0) = \psi, \\ x_3(0) = \theta. \end{cases} \quad (15.3)$$

با استفاده از (۳۴.۲) و تقریب (۱۵.۲)، مساله (۱۴.۳) و (۱۵.۳) به صورت زیر نوشته می شود

$$\min J = \int_{[0,1)} \frac{1}{(1-\tau)^{\gamma}} (X_1^{\gamma}(\tau) + X_2^{\gamma}(\tau) + X_3^{\gamma}(\tau)) d\tau$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \dot{X}_1(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{\gamma}} \frac{X_2(\tau) - A(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha} X_1(\tau) + \sum_{p=2}^k C(\alpha,p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-p-\alpha} \mathcal{Y}_p(\tau) - \frac{(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{B(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}}, \\ \dot{X}_2(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{\gamma}} \frac{X_3(\tau) - A(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha} X_2(\tau) + \sum_{p=2}^k C(\alpha,p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-p-\alpha} \mathcal{Z}_p(\tau) + \frac{\psi(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{B(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}}, \\ \dot{X}_3(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{\gamma}} \frac{-\phi X_1(\tau) - \psi/\theta X_2(\tau) - \nu/\lambda X_3(\tau) + X_1^{\gamma}(\tau) + U(\tau) - A(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha} X_3(\tau) + \frac{\sum_{p=2}^k C(\alpha,p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-p-\alpha} \mathcal{M}_p(\tau) + \frac{\theta(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{B(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}}}{B(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}}, \\ \dot{\mathcal{Y}}_p(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{\gamma}} (1-p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{p-\gamma} X_1(\tau), \quad p = 2, \dots, k, \\ \dot{\mathcal{Z}}_p(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{\gamma}} (1-p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{p-\gamma} X_2(\tau), \quad p = 2, \dots, k, \\ \dot{\mathcal{M}}_p(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{\gamma}} (1-p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{p-\gamma} X_3(\tau), \quad p = 2, \dots, k, \\ X_1(0) = -1, \\ X_2(0) = \psi, \\ X_3(0) = \theta, \\ \mathcal{Y}_p(0) = 0, \quad p = 2, \dots, k, \\ \mathcal{Z}_p(0) = 0, \quad p = 2, \dots, k, \\ \mathcal{M}_p(0) = 0, \quad p = 2, \dots, k. \end{cases}$$

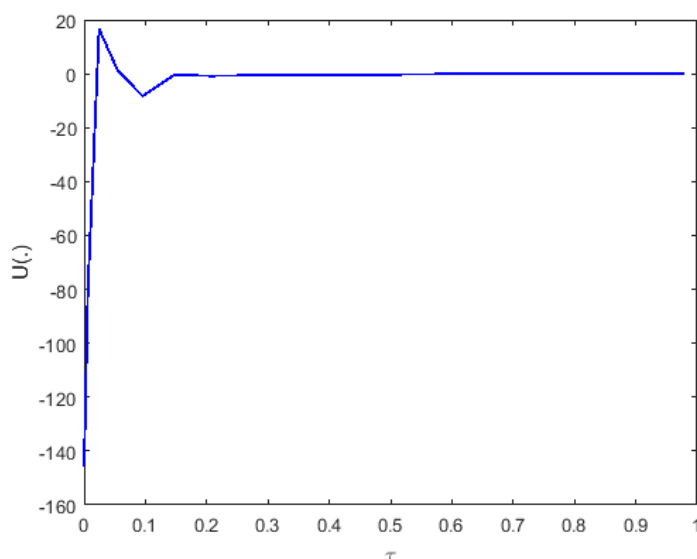


شکل ۷.۳: مسیرهای متغیر حالت سیستم مرتبه کسری گنسیو-تسی برای مثال ۳.۱.۳

با توجه شرایط مرزی، جواب‌های آزمایشی را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$\begin{cases} \bar{X}_1 = -1(1 - \tau) + \tau n_{x_1}, \\ \bar{X}_2 = 2(1 - \tau) + \tau n_{x_2}, \\ \bar{X}_3 = 3(1 - \tau) + \tau n_{x_3}, \\ \bar{y} = \tau n_y, \\ \bar{z} = \tau n_z, \\ \bar{M} = \tau n_M, \\ \bar{\lambda}_i = (1 - \tau)n_{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \\ \bar{U} = n_u. \end{cases}$$

در شبکه عصبی $I = 3^0$ و در روابط (۱۵.۲) و (۲۴.۲) به ترتیب $k = 2$ و $m = 2^0$ فرض شده است. در شکل‌های ۷.۳ و ۸.۳ مسیرهای تقریبی $X_1(\cdot)$ ، $X_2(\cdot)$ و $X_3(\cdot)$ و کنترل $U(\cdot)$ به ترتیب نشان داده شده است همچنین مقدار تابع خطا $E(\Omega) = 0.00037$ است. با توجه شکل‌های ۷.۳ و ۸.۳ مشاهده می‌شود که متغیر حالت به نقطه تعادل $p^* = (0, 0, 0)$ همگرا شده است.



شکل ۸.۳: مسیره‌های کنترل کننده سیستم مرتبه کسری گنسیو-تسی برای مثال ۳.۱.۳

مثال ۴.۱.۳. سیستم لو^۱ مرتبه کسری زیر را نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}^c D_t^{\alpha_1}(x_1(t)) = a(x_2(t) - x_1(t)), \\ {}^c D_t^{\alpha_2}(x_2(t)) = -x_1(t)x_3(t) + cx_2(t) + u(t), \\ {}^c D_t^{\alpha_3}(x_3(t)) = x_1(t)x_2(t) - bx_3(t). \end{cases} \quad (۱۶.۳)$$

مرتبه های کسری این سیستم $\alpha_1 = 0.985$ ، $\alpha_2 = 0.99$ و $\alpha_3 = 0.98$ همچنین شرایط اولیه $[x_1, x_2, x_3]^T = [0.2, 0.5, 0.3]^T$ است [۷۴]. سیستم (۱۶.۳) با پارامترهای $(a, b, c) = (0.36, 3, 20)$ ، بدون وجود کنترل کننده رفتار آشوبناک دارد که این رفتار در شکل ۹.۳ قابل مشاهده است. نقطه تعادل این سیستم مرتبه کسری $p^* = (0, 0, 0)$ می باشد. مساله متناظر با مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی (۳.۳) و (۴.۳) برای سیستم (۱۶.۳) به صورت زیر است

$$\min \int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)) dt, \quad (۱۷.۳)$$

^۱ Lu system

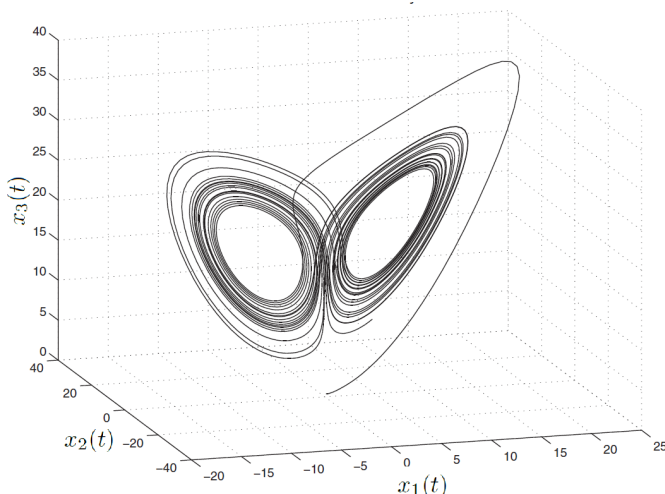
$$\text{s. t. } \begin{cases} {}^c D_t^{\alpha_1}(x_1(t)) = a(x_2(t) - x_1(t)), \\ {}^c D_t^{\alpha_2}(x_2(t)) = -x_1(t)x_2(t) + cx_2(t) + u(t), \\ {}^c D_t^{\alpha_3}(x_3(t)) = x_1(t)x_2(t) - bx_3(t), \\ x_1(\circ) = \circ/\mathcal{A}, \\ x_2(\circ) = \circ/\mathcal{B}, \\ x_3(\circ) = \circ/\mathcal{C}. \end{cases} \quad (18.3)$$

با استفاده از (۳۴.۲) و تقریب (۱۵.۲)، مساله (۱۷.۳) و (۱۸.۳) به صورت زیر نوشته می شود

$$\min J = \int_{[0,1]} \frac{1}{(1-\tau)^{\mathcal{A}}} \left(X_1^{\mathcal{A}}(\tau) + X_2^{\mathcal{A}}(\tau) + X_3^{\mathcal{A}}(\tau) \right) d\tau$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} \dot{X}_1(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{\mathcal{A}}} \frac{a(X_2(\tau) - X_1(\tau)) - A(\alpha_1) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{-\alpha_1} X_1(\tau) + \sum_{p=\mathcal{A}}^k C(\alpha_1, p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1-p-\alpha_1} \mathcal{Y}_p(\tau) + \frac{\circ/\mathcal{A} \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{-\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)}}{B(\alpha_1) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1-\alpha_1}}, \\ \dot{X}_2(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{\mathcal{A}}} \frac{-X_1(\tau)X_2(\tau) + cX_2(\tau) + U(\tau) - A(\alpha_2) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{-\alpha_2} X_2(\tau) + \sum_{p=\mathcal{A}}^k C(\alpha_2, p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1-p-\alpha_2} \mathcal{Z}_p(\tau) + \frac{\circ/\mathcal{B} \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{-\alpha_2}}{\Gamma(1-\alpha_2)}}{B(\alpha_2) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1-\alpha_2}}, \\ \dot{X}_3(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{\mathcal{A}}} \frac{X_1(\tau)X_2(\tau) - bX_3(\tau) - A(\alpha_3) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{-\alpha_3} X_3(\tau) + \sum_{p=\mathcal{A}}^k C(\alpha_3, p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1-p-\alpha_3} \mathcal{M}_p(\tau) + \frac{\circ/\mathcal{C} \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{-\alpha_3}}{\Gamma(1-\alpha_3)}}{B(\alpha_3) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1-\alpha_3}}, \\ \dot{\mathcal{Y}}_p(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{\mathcal{A}}} (1-p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{p-\mathcal{A}} X_1(\tau), \quad p = \mathcal{A}, \dots, k, \\ \dot{\mathcal{Z}}_p(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{\mathcal{A}}} (1-p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{p-\mathcal{A}} X_2(\tau), \quad p = \mathcal{A}, \dots, k, \\ \dot{\mathcal{M}}_p(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^{\mathcal{A}}} (1-p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{p-\mathcal{A}} X_3(\tau), \quad p = \mathcal{A}, \dots, k, \\ X_1(\circ) = \circ/\mathcal{A}, \\ X_2(\circ) = \circ/\mathcal{B}, \\ X_3(\circ) = \circ/\mathcal{C}, \\ \mathcal{Y}_p(\circ) = \circ, \quad p = \mathcal{A}, \dots, k, \\ \mathcal{Z}_p(\circ) = \circ, \quad p = \mathcal{A}, \dots, k, \\ \mathcal{M}_p(\circ) = \circ, \quad p = \mathcal{A}, \dots, k. \end{cases}$$

اکنون جواب های آزمایشی را به صورت زیر انتخاب می کنیم



شکل ۹.۳: رفتار سیستم لو ۴.۱.۳

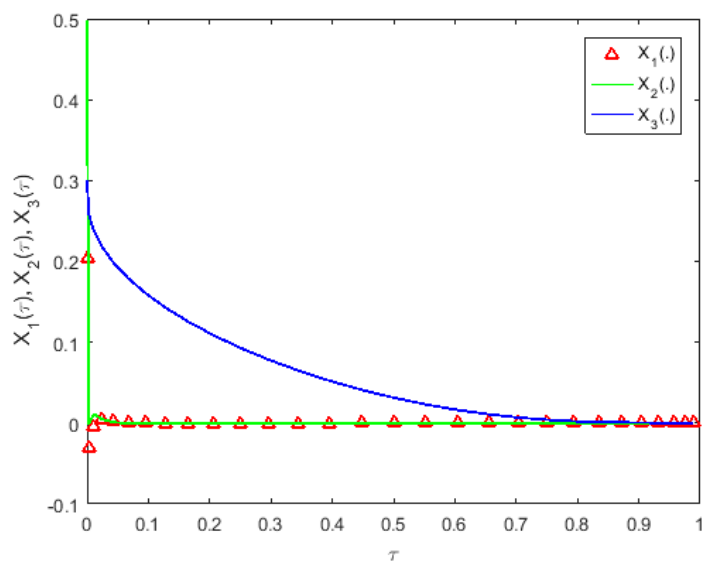
$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_1 = 0.2(1 - \tau) + \tau n_{x_1}, \\ \bar{X}_2 = 0.5(1 - \tau) + \tau n_{x_2}, \\ \bar{X}_3 = 0.3(1 - \tau) + \tau n_{x_3}, \\ \bar{Y} = \tau n_y, \\ \bar{Z} = \tau n_z, \\ \bar{M} = \tau n_M, \\ \bar{\lambda}_i = (1 - \tau)n_{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \\ \bar{U} = n_u. \end{array} \right.$$

در شبکه عصبی $I = 23$ و در روابط (۱۵.۲) و (۲۴.۲) به ترتیب $k = 2$ و $m = 30$ فرض شده است. در شکل های ۱۰.۳ و ۱۱.۳ مسیر های تقریبی $X_1(\cdot)$, $X_2(\cdot)$ و $X_3(\cdot)$ و کنترل $U(\cdot)$ به ترتیب نشان داده شده است و مقدار تابع خطا $E(\Omega) = 6/8 \times 10^{-6}$ است. با توجه شکل های ذکر شده مشاهده می شود که متغیر حالت به نقطه تعادل $p^* = (0, 0, 0)$ همگرا شده است.

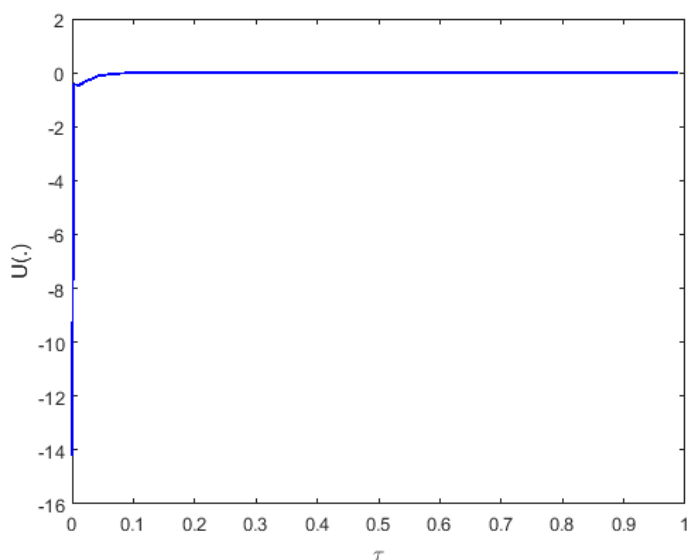
مثال ۵.۱.۳. سیستم لورنز مرتبه کسری زیر را نظر بگیرید

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^c D_t^{\alpha_1}(x_1(t)) = a(x_2(t) - x_1(t)), \\ {}^c D_t^{\alpha_2}(x_2(t)) = x_1(t)(b - x_3(t)) - x_2(t) + u(t), \\ {}^c D_t^{\alpha_3}(x_3(t)) = x_1(t)x_2(t) - cx_3(t). \end{array} \right. \quad (19.3)$$

مرتبه های کسری این سیستم $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha = 0.993$ و شرایط اولیه $[x_1, x_2, x_3]^T = (10, 28, 28/3)^T$ است [۷۴]. سیستم (۱۹.۳) با در نظر گرفتن پارامترهای $(a, b, c) = (10, 28, 28/3)$



شکل ۱۰.۳: مسیرهای متغیر حالت سیستم مرتبه کسری لو برای مثال ۴.۱.۳



شکل ۱۱.۳: مسیرهای کنترل کننده سیستم مرتبه کسری لو برای مثال ۴.۱.۳

بدون وجود کنترل کننده رفتار آشوبناک دارد که در شکل ۱۲.۳ نشان داده است. نقطه تعادل این سیستم مرتبه کسری $p^* = (\circ, \circ, \circ)$ در نظر گرفته شده است. مساله متناظر با مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی (۳.۳) و (۴.۳) برای سیستم (۱۹.۳) به صورت زیر است

$$\min \int_0^\infty (x_1^\gamma(t) + x_2^\gamma(t) + x_3^\gamma(t)) dt, \quad (20.3)$$

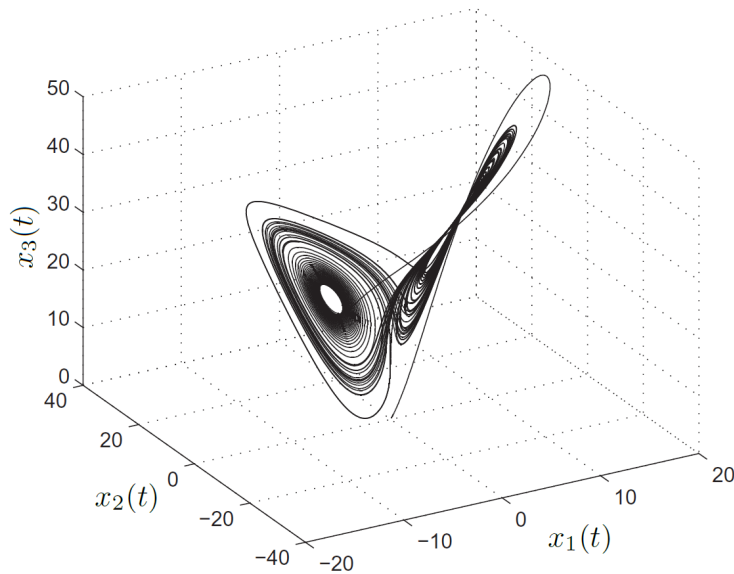
$$\text{s. t. } \begin{cases} {}^c D_t^\alpha(x_1(t)) = a(x_2(t) - x_1(t)), \\ {}^c D_t^\alpha(x_2(t)) = x_1(t)(b - x_3(t)) - x_2(t) + u(t), \\ {}^c D_t^\alpha(x_3(t)) = x_1(t)x_2(t) - cx_3(t), \\ x_1(\circ) = \circ/\lambda, \\ x_2(\circ) = \circ/\lambda, \\ x_3(\circ) = \circ/\lambda. \end{cases} \quad (21.3)$$

با استفاده از (۳۴.۲) و تقریب (۱۵.۲)، مساله (۲۰.۳) و (۲۱.۳) به صورت زیر نوشته می شود

$$\min J = \int_{[0,1)} \frac{1}{(1-\tau)^\gamma} (X_1^\gamma(\tau) + X_2^\gamma(\tau) + X_3^\gamma(\tau)) d\tau$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \dot{X}_1(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^\gamma} \frac{a(X_2(\tau) - X_1(\tau)) - A(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha} X_1(\tau) + \sum_{p=2}^k C(\alpha, p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-p-\alpha} \mathcal{Y}_p(\tau) + \frac{\circ/\lambda(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{B(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}}, \\ \dot{X}_2(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^\gamma} \frac{X_1(\tau)(b - X_3(\tau)) - X_2(\tau) + U(\tau) - A(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha} X_2(\tau) + \sum_{p=2}^k C(\alpha, p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-p-\alpha} \mathcal{Z}_p(\tau) + \frac{\circ/\lambda(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{B(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}}, \\ \dot{X}_3(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^\gamma} \frac{X_1(\tau)X_2(\tau) - cX_3(\tau) - A(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha} X_3(\tau) + \sum_{p=2}^k C(\alpha, p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-p-\alpha} \mathcal{M}_p(\tau) + \frac{\circ/\lambda(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{B(\alpha)(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}}, \\ \dot{\mathcal{Y}}_p(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^\gamma} (1-p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{p-\gamma} X_1(\tau), \quad p = 2, \dots, k, \\ \dot{\mathcal{Z}}_p(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^\gamma} (1-p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{p-\gamma} X_2(\tau), \quad p = 2, \dots, k, \\ \dot{\mathcal{M}}_p(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^\gamma} (1-p)(\frac{\tau}{1-\tau})^{p-\gamma} X_3(\tau), \quad p = 2, \dots, k, \\ X_1(\circ) = \circ/\lambda, \\ X_2(\circ) = \circ/\lambda, \\ X_3(\circ) = \circ/\lambda, \\ \mathcal{Y}_p(\circ) = \circ, \quad p = 2, \dots, k, \\ \mathcal{Z}_p(\circ) = \circ, \quad p = 2, \dots, k, \\ \mathcal{M}_p(\circ) = \circ, \quad p = 2, \dots, k. \end{cases}$$

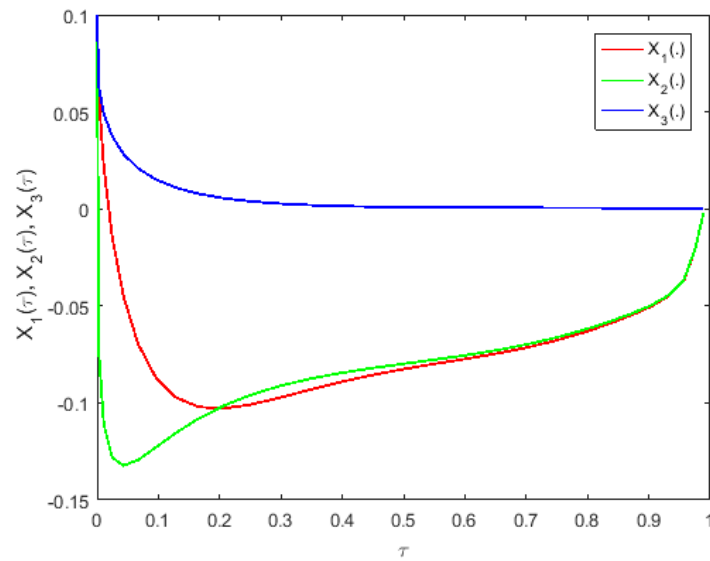
جواب های آزمایشی را صورت زیر در نظر می گیریم



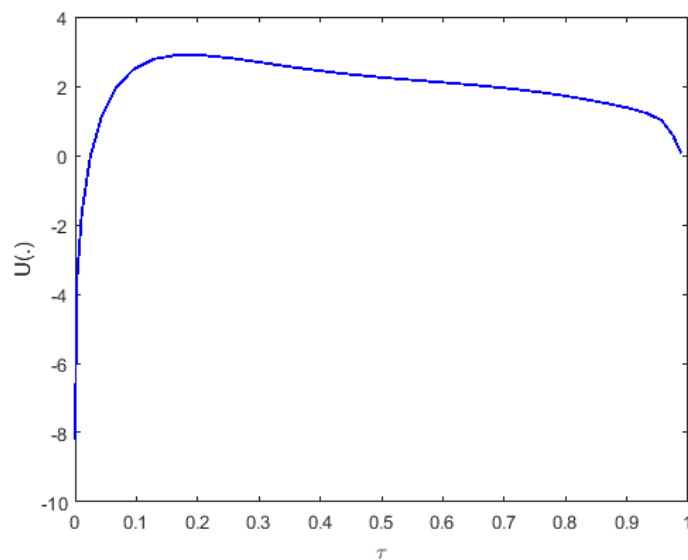
شکل ۱۲.۳: رفتار آشوبناک سیستم لورنز مرتبه کسری ۵.۱.۳

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_1 = \circ/\lambda(1 - \tau) + \tau n_{x_1}, \\ \bar{X}_2 = \circ/\lambda(1 - \tau) + \tau n_{x_2}, \\ \bar{X}_3 = \circ/\lambda(1 - \tau) + \tau n_{x_3}, \\ \bar{Y} = \tau n_y, \\ \bar{Z} = \tau n_z, \\ \bar{M} = \tau n_M, \\ \bar{\lambda}_i = (1 - \tau)n_{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \\ \bar{U} = n_u. \end{array} \right.$$

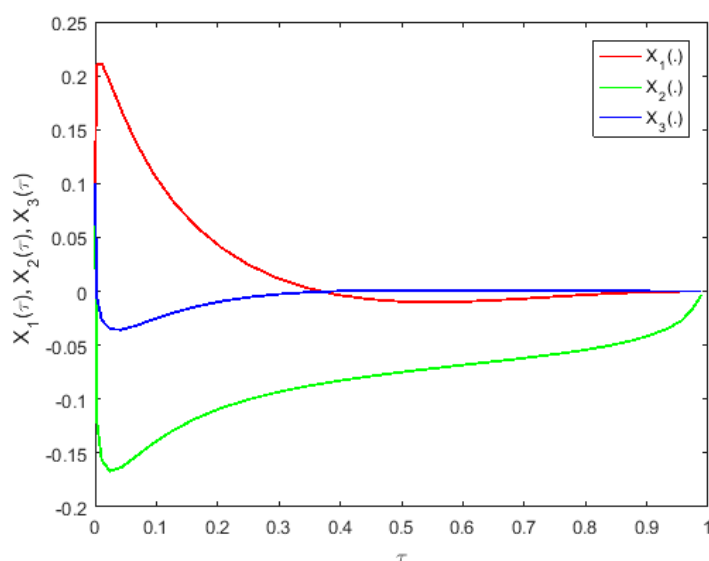
در شبکه عصبی مورد استفاده $I = 13$ و در روابط (۱۵.۲) و (۲۴.۲) به ترتیب $k = 2$ و $m = 30$ فرض شده است. در شکل های ۱۳.۳ و ۱۴.۳ مسیر های تقریبی $X_1(\cdot)$, $X_2(\cdot)$ و $X_3(\cdot)$ و کنترل $U(\cdot)$ به ترتیب نشان داده شده است و مقدار تابع خطا $E(\Omega) = 5/8 \times 10^{-4}$ است. با توجه شکل های ذکر شده مشاهده می شود که متغیر حالت به نقطه تعادل $p^* = (\circ, \circ, \circ)$ همگرا می شود.



شکل ۱۳.۳: مسیرهای متغیر حالت سیستم مرتبه کسری لورنز برای مثال ۵.۱.۳



شکل ۱۴.۳: مسیرهای کنترل کننده سیستم مرتبه کسری لورنز برای مثال ۵.۱.۳

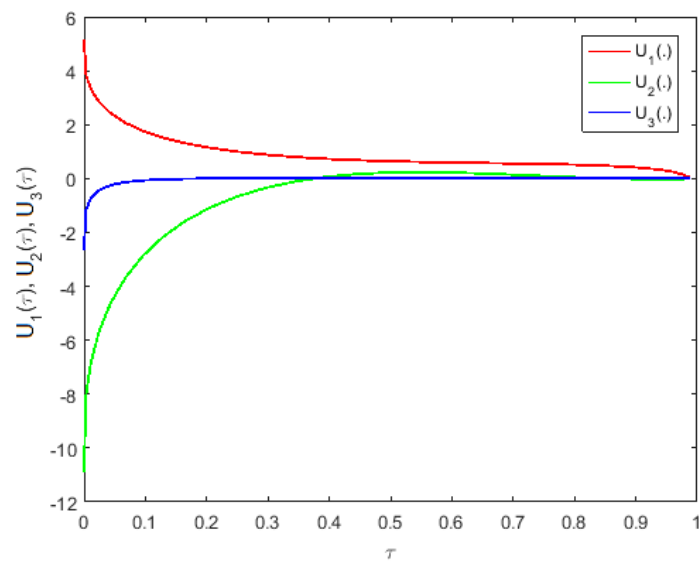


شکل ۱۵.۳: مسیرهای متغیر حالت سیستم مرتبه کسری لورنز برای مثال ۶.۱.۳

مثال ۶.۱.۳. سیستم لورنز مرتبه کسری زیر را نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha(x_1(t)) = a(x_2(t) - x_1(t)), \\ {}^c D_t^\alpha(x_2(t)) = x_1(t)(b - x_3(t)) - x_2(t), \\ {}^c D_t^\alpha(x_3(t)) = x_1(t)x_2(t) - cx_3(t), \end{cases} \quad (22.3)$$

در این مثال کنترل کننده های $u_1(t)$ ، $u_2(t)$ و $u_3(t)$ به تک تک معادلات وضعیت سیستم (۲۲.۳) اضافه می کنیم. تحت شرایط مثال ۵.۱.۳ مساله را حل می کنیم. در شکل های ۱۵.۳ و ۱۶.۳ مسیرهای تقریبی $X_1(\cdot)$ ، $X_2(\cdot)$ و $X_3(\cdot)$ و کنترل های $U_1(\cdot)$ ، $U_2(\cdot)$ و $U_3(\cdot)$ برای $\alpha = 0.993$ به ترتیب نشان داده شده است همچنین مقدار تابع خطا $E(\Omega) = 2/2 \times 10^{-4}$ است. با توجه شکل های ذکر شده مشاهده می شود که متغیر حالت به نقطه تعادل $p^* = (0, 0, 0)$ همگرا می شود.



شکل ۱۶.۳: مسیرهای کنترل کننده سیستم مرتبه کسری لورنز برای مثال ۶.۱.۳

نتیجه گیری و پیشنهادات

در این رساله رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری افق نامتناهی بر پایه شبکه عصبی را مورد بررسی قرار دادیم. برای حل مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی، نیاز داریم این مساله با استفاده از تغییر متغیر مناسب به یک مساله با افق متناهی تبدیل شود. در فصل ۲ یک تغییر متغیر جدید را ارائه کردیم که توسط آن مشتق کسری کاپوتو که در بازه افق نامتناهی تعریف شده است به مشتق کسری کاپوتو روی بازه $[0, 1]$ تبدیل می شود و ساختار شبکه عصبی پرسپترون روی آن پیاده سازی شد. در ادامه این فصل تکنیک جدید دیگری برای حل مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی ارائه کردیم. در فصل ۳ کاربرد های مساله کنترل بهینه کسری افق نامتناهی را بیان کردیم. از جمله این کاربردها، می توان به کنترل رفتار آشوبناک برخی سیستم های دینامیکی اشاره کرد.

تمام روش هایی که در این رساله استفاده شد روش های غیرمستقیم هستند و در تمام این روش ها در نهایت به یک تابع خطا رسیدیم. با انتخاب این تابع خطا به عنوان یک تابع لیاپانوف در ساختار شبکه عصبی، به طور کامل همگرایی و پایداری روش ها بررسی شد.

اکنون یک سوال منطقی پیش می آید. مزایای استفاده از شبکه های عصبی در مقایسه با دیگر روش های موجود برای حل مسائل کنترل بهینه چیست؟ برای پاسخ به این سوال بعضی از مزیت های روش شبکه عصبی پیشنهادی به طور خلاصه بیان می شود.

(۱) از شبکه های عصبی برای حل مسائلی که جواب های تحلیلی ندارند یا جواب های تحلیلی آنها به راحتی قابل محاسبه نیست استفاده می شود.

(۲) جواب مساله حول تمام دامنه مساله پیوسته است. در حالی که اکثر روش های عددی جواب ها را تنها در نقاط گسسته سازی شده به دست می آورند و جواب بین این نقاط باید از طریق درونیایی به دست آید.

(۳) روش ها بر پایه شبکه عصبی از ماتریس عملگر استفاده نمی کنند. برخی از روش های عددی از ماتریس عملگر برای حل استفاده می کنند. پیدا کردن ماتریس عملگر معمولاً سخت است و این ماتریس های عملگر در مرتبه های بالاتر باعث پیچیدگی محاسباتی نیز خواهند شد.

(۴) جواب تقریبی مساله نزدیک به جواب تحلیلی است.

(۵) به راحتی می توان از روش شبکه عصبی برای حل مسائل غیرخطی یا مسائلی با مرتبه های بالاتر استفاده کرد.

(۶) جواب مساله را می توان به طور سریع و با تعداد کمی از پارامترها در کاربردهای واقعی تخمین زد.

برای کارهای آتی پیشنهاد می شود که این مسائل را بدون تغییر متغیر، یعنی مستقیماً روی بازه $[0, \infty)$ حل کنیم. همچنین می توان این مسائل را بر پایه شبکه عصبی به صورت مستقیم نیز حل کرد و پایداری و همگرایی روش را بررسی کرد. می توان برای کارهای آتی مسائلی با سیستم های تاخیری، مسائلی با مشتقات جزئی کسری و یا حتی مشتق کاپاتو- فابریسیو را

پیشنهاد کرد.

مراجع

- [۱] پتکین ف، (۱۳۸۷)، ”شبکه‌های عصبی” ترجمه مبرصالحی م.م. تقی‌زاده کاخکی ح، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۲] منهاج م.ب، (۱۳۷۷)، ”هوش محاسباتی”، جلد اول، مرکز نشر پرفسور حسابی.
- [۳] سلیمانپور با کفایت ا، (۱۳۹۳) ”شبکه‌های عصبی مصنوعی در علوم پایه” انتشارات ارومیه.
- [4] Kilbas A. A., Srivastava H. M. and Trujillo J. J. (2006), ”Theory and Applications of Fractional Differential Equations”. North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., Amsterdam.
- [5] Podlubny I. (1998). Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications (Vol. 198). Academic press.
- [6] Mittag-Leffler G. M. (1904), Sopra la funzione $E_\alpha(x)$, Rend Accad Lincei, ser. , 5 (13), 3-5.
- [7] Mittag-Leffler G. M. (1905), Sur la representation analytique d’une branche uniforme d’une fonction monogene, Acta Mathematica, 29, 101-182.
- [8] Podlubny I. (1999), Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press Inc, San Diego, CA, 198.
- [9] Parada F. J. V., Tapia J. A. O. and Ramirez J. A., (2007). Effective medium equations for fractional Ficks law in porous, Physica A .373, 339-353.
- [10] Arena P., Caponetto R., Fortuna L. and Porto D., (2000). Nonlinear noninteger order Circuits and systems - An introduction, World Scientific, Singapor.
- [11] Oldham K. B. and Spanier J., The fractional calculus, Academic Press, New York.

- [12] Magin R. L., (2006). Fractional calculus in bioengineering, Begell House Publishers, Redding.
- [13] Matlob M. A., Jamali Y., (2017). The Concepts and Applications of Fractional Order Differential Calculus in Modelling of Viscoelastic Systems: A primer, Biological Physics, arXiv:1706.06446.
- [14] Jumarie G. (2008), Modeling fractional stochastic systems as non-random fractional dynamics driven by Brownian motions, Applied Mathematical Modelling, 32, 836–859.
- [15] Jumarie G. (2006), "Modified Riemann-Liouville Derivative and Fractional Taylor Series of Nondifferentiable Functions Further Results", Computers and Mathematics with Applications, 51, 1367-1376.
- [16] Jumarie G. (2007), Lagrangian mechanics of fractional order, Hamilton- Jacobi fractional PDE and Taylors series of non differentiable functions, Chaos Solitons Fractals, 32(3), 969-987.
- [17] Jumarie G. (2009), Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann - Liouville derivative for non-differentiable funtions, Applied Mathematics Letters, 22, 378-385.
- [18] Khalil R., Al Horani M. , Yousef A. and Sababheh M.(2014) , A new definition of fractional derivative, Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 65-70.
- [19] Caputo M. and Fabrizio M. (2015), A New Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel, Progress in Fractional Differentiation and Applications, 1–13.
- [20] Matignon D. (1996), Stability results for fractional differential equations with applications to control processing, Computational Engineering in Systems Applications, IEEE-SMC, 2. 963–968.
- [21] Aguila-Camacho N., Duarte-Mermoud M., Gallegos J.A., (2014), Lyapunov functions for fractional order systems, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 19. 2951–2957.
- [22] Govindaraj V., Malik M., George R.K., (2016), Trajectory controllability of fractional dynamical systems, Journal of Control and Decision.

- [23] Hopfield J. J. (1982), Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proceedings of the National Academy of Science*, 79, 8, 2554-2558.
- [24] Hopfield J. J. and Tank D. W. (1985), neural computation of decisions in optimization problems, *Biological Cybernetics*, 52(3), 141-152.
- [25] Tank D. and Hopfield J. J. (1986), Simple neural optimization networks: An a/d converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 33(5), 533-541.
- [26] Kennedy M. P. and Chua. L. O. (1988), Neural networks for nonlinear programming, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35(5), 554-562.
- [27] Rodriguez-Vazquez A. , Dominguez-Castro R. , Rueda A. , Huertas J.L. and Sanchez Sinencio E. (1990), Nonlinear switched capacitor neural networks for optimization problems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 37(3), 384-398.
- [28] Maa C.Y. and Schanblatt M. A. (1992), A two-phase optimization neural network, *IEEE Transaction on Neural Networks*, 3(6), 1003-1009.
- [29] Zhang S. and Constantinides A.G. (1992), Lagrange programming neural networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems, II, Analog Digit. Signal Process.*, 39(7), 441-452.
- [30] Bouzerdoum A. and Pattison T. R. (1993), Neural network for quadratic optimization with bound constraints, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 4(2), 293-304.
- [31] Effati S. and Baymani M. A. (2005), new nonlinear neural network for solving convex nonlinear programming problems, *Applied Mathematics and Computation*, 168(2), 1370 -1379.
- [32] Effati S. , Ghomashi A. and Abbasi M. (2011), A novel recurrent neural network for solving mlcps and its application to linear and quadratic programming, *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 28(4), 523-541.
- [33] Effati S. , Ghomashi A. and Nazemi A. R. (2007), Application of projection neural network in solving convex programming problems, *Applied Mathematics and Computation*, 188(2), 1103 - 1114.

- [34] Sabouri J. , Effati S. and Pakdaman M. (2017), A Neural Network Approach for Solving a Class of Fractional Optimal Control Problems, *Neural Processing Letters*, 45, 59-74.
- [35] Pinch E.R. (1995), *Optimal control and the calculus of variations*, Oxford University Press.
- [36] Kirk D.E. (1970), *Optimal Control Theory, An Introduction*, Englewood Cliffs, New York.
- [37] Djennoune, S., Bettayeb, M. (2013). Optimal synergetic control for fractional-order systems. *Automatica*, 49(7), 2243-2249.
- [38]] Hamamci S.E., (2007), An algorithm for stabilization of fractional-order time delay systems using fractional-order PID controllers, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 52, pp. 1964-1969.
- [39] Agrawal OP., (2004), A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems. *Nonlinear Dynamics* , 38(1):323-337.
- [40] Almeida R., Delfim, Torres F. M., (2015), A discrete method to solve fractional optimal control problems, *Nonlinear Dyn.*,no. 4, 80, 1811-1816.
- [41] Perko, L. (2001), *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 3rd ed.
- [42] Khalil H. K. (2002), *Nonlinear Systems*, Prentice Hall PTR, 3rd ed.
- [43] Baleanu D., Deftarli O. and Agrawal O. P. (2009), A Central Difference Numerical Scheme for Fractional Optimal Control Problems, *Jurnal of Vibration and Control*, 15, 4, 583-597.
- [44] Podlubny, I. (2002), Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation, *Frac. Calc. App. Anal.*, 5, 367–386, .
- [45] Pooseh, S., Almeida, R., Torres, D. F. (2013). Fractional order optimal control problems with free terminal time. arXiv preprint arXiv:1302.1717.
- [46] Effati S., Rakhshan S. A., Saqi S., (2018), Formulation of Euler–Lagrange Equations for Multidelay Fractional Optimal Control Problems, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, , Vol. 13 / 061007-1.

- [47] Mirhosseini-Alizaminia S. M., Effati S., (2018), An iterative method for suboptimal control of a class of nonlinear time-delayed systems, *International Journal of Control*.
- [48] Sayevand Kh., Rostami M.R., (2016), Fractional optimal control problems: optimality conditions and numerical solution, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 00, 1–26.
- [49] Miller R. K. and Michel A. N. (1982), *Ordinary Differential Equations*, New York: Academic Press, 16.
- [50] Zhang X-S. (2000), *Neural Networks in Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- [51] Ahmed E., El-Sayed A.M.A., El-Saka H.A.A., (2007), Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional order predator-prey and rabies models, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 325 (1), 542–553.
- [52] Sun J., Chen J. S. and Ko C.-H. (2012), Neural networks for solving second-order cone constrained variational inequality problem, *Computational Optimization and Applications*, 51, 623-648.
- [53] Blot J., (2009), Infinite-horizon Pontryagin principles without invertibility, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 10, 177-189.
- [54] Effati S., Nazemi A. R., (2007), A new approach for asymptotic stability of the nonlinear ordinary differential equations, *Journal of Applied Mathematics Computing*, 25 231–244.
- [55] Effati, S., Kamyad, A.V., and Kamyabi-Gol, R.A., (2000), On infinite-horizon optimal control problems, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* 19.1, 269-278.
- [56] Leizarowitz A. , (1986), Tracking nonperiodic trajectories with the overtaking criterion, *Applied Mathematics Optimization*, 14, 155-171.
- [57] Zaslavski A. J., (2009), Two turnpike results for a discrete-time optimal control systems, *Nonlinear Analysis*, 71, 902-909.
- [58] Zaslavski A. J., (1987), Ground states in Frenkel-Kontorova model, *Mathematics of the USSR, Izvestiya*, 29, 323-354.

- [59] Coleman B. D., Marcus M., Mizel V. J., (1992), On the thermodynamics of periodic phases, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 117, 321-347.
- [60] Nazemi A. R., Mahmoudy N., (2014), Solving infinite horizon optimal control problems using the haar wavelet collocation method, *Anziam Journals*, 56, 179-191.
- [61] Fahroo F., Ross I. M., (2008), Pseudospectral methods for infinite-horizon optimal control problems, *Journal of guidance, control, and dynamics*, 31, 927-936.
- [62] Sweilam NH., Al-Ajami TM., Hoppe RH., (2013), Numerical solution of some types of fractional optimal control problems. *Sci World J*, 1-9.
- [63] Pooseh S, Almeida R, Torres DFM. (2013), Numerical approximations of fractional derivatives with applications. *Asian J Control*. 15(3):698-712.
- [64] Cybenko G., (1989), Approximation by superpositions of a sigmoidal function, *Math. ControlSignals*, 303-314.
- [65] Hornik K, Stinchcombe, White H., (1989), Multilayer feedforward networks are universal approximators, *Neural Networks*, 359-366.
- [66] Zhang X-S., (2000), *Neural Networks in Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- [67] Nocedal J., Wright S., (2006), *Numerical Optimization*. Second edition, Berlin, NewYork, Springer-Verlag.
- [68] Lee K. Y., El-Shakawi M. A., (2008), *Modern Heuristic Optimization Techniques: Theory and Applications to Power Systems*. Wiley InterScience.
- [69] Ghasemi S., Nazemi A. R., Hosseinpour S., (2017), Nonlinear fractional optimal control problems with neural network and dynamic optimization schemes, *Nonlinear Dynamics* 89, 2669-2682.
- [70] Effati S., Kamyad A. V., Kamyabi- Gol R. A., (2000), On Infinite-Horizon Optimal Control Problems, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 19, 269-278.
- [71] Garg D., Hager W. W., Rao A. V., (2011), Pseudospectral methods for solving infinite-horizon optimal control problems, *Automatica* 47, 829-837.
- [72] Wang X., (2018), Mittag-Leffler stabilization of fractional-order nonlinear systems with unknown control coefficients, *Advances in Difference Equations*.

- [73] Noori Skandari M H., Nazemi A. R., (2018), A new approach to design asymptotically stabilizing control and adaptive control, *Optimal Control Applications and Methode*.
- [74] Pourmahmood Aghababa M., (2012), Robust stabilization and synchronization of a class of fractional-order chaotic systems via a novel fractional sliding mode controller. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 17, 2670–2681.
- [75] Baker, G. L., Gollub, J. P. (1996). *Chaotic Dynamics an Introduction*. Second edition, Cambridge University Press, New York.
- [76] Rakhshan S. A. , Effati S. and Vahidian Kamyad A. (2016), "Solving a class of fractional optimal control problems by the Hamilton-Jacobi-Bellman equation", *Journal of Vibration and Control*, 1-16.
- [77] Rabiei K. , Ordokhani Y. and Babolian E. (2016), "The Boubaker polynomials and their application to solve fractional optimal control problems", *Nonlinear Dynamic*, DOI 10.1007/s11071-016-3291-2.
- [78] Haykin S. (2007), *Neural Networks :A Comprehensive Foundation*, third edition, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- [79] Chen G. , Dong X. (1998), *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications*, World Scientific, Singapore.
- [80] Das A. , Roy A.B. and Das P. (2000), Chaos in a three dimensional neural network, *Applied Mathematical Modelling*, 24 (7) ,511–522.
- [81] Yassen M.T. (2003), Adaptive control and synchronization of a modified Chua's circuit system, *Applied Mathematics and Computation*, 135, 113-128.
- [82] Sadeghpour M., Salarieh H. and Alasty A. (2013), Controlling chaos in tapping mode atomic force microscopes using improved minimum entropy control, *Applied Mathematical Modelling*, 37, 3, 1599-1606.
- [83] Yin C. , Dadras S. , Zhong S.M. and Chen Y.Q. (2013), Control of a novel class of fractional-order chaotic systems via adaptive sliding mode control approach, *Applied Mathematical Modelling*, 37, 4, 2469-2483.

-
- [84] Hartley T. T. , Lorenzo C. F. and Qammer H. K. (1995), Chaos in a fractional Chua's system, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications , 42, 485-490.
- [85] Zhen W., Xia H., Guodong Sh., (2011), Analysis of nonlinear dynamics and chaos in a fractional order financial system with time delay, Computers and Mathematics with Applications 62, 1531–1539.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Chaos	آشوب
Pontryagin Minimum Principle	اصل کمینه پونتریاگین
Infinite horizon	افق نامتناهی
Fractional Integral	انتگرال کسری
Unconstrained optimization	بهینه سازی نامقید
Lyapunov Stability	پایداری لیپانوف
Stable Equilibrium Point	پایداری نقطه تعادل
Error Function	تابع خطا
Control Function	تابع کنترل
Lyapunov Function	تابع لیپانوف
Trajectory Function	تابع مسیر
Weight Function	تابع وزن
Objective Function	تابع هدف
Functional	تابعی
Approximation	تقریب
Optimal Solution	جواب بهینه
Trial Solution	جواب‌های آزمایشی
Variational Calculus	حساب تغییرات
Fractional Calculus	حساب کسری
Indirect Method	روش غیر مستقیم
Chaotic System	سیستم آشوبناک
Dynamic System	سیستم دینامیکی
Neuron Network	شبکه عصبی
Biological Neural Network	شبکه عصبی زیستی
Artificial Neural network	شبکه عصبی مصنوعی
Initial Condition	شرایط اولیه

Fractional Necessary Optimality Conditions.....	شرایط لازم بهینگی کسری
Boundary Condition.....	شرایط مرزی
Lagrangian Multipliers.....	ضرایب لاگرانژ
Optimal Control.....	کنترل بهینه
Fraction Optimal control.....	کنترل بهینه کسری
State Variable.....	متغیر حالت
Nonlinear Optimal Control Problem.....	مساله کنترل بهینه غیرخطی
Fractional Derivative.....	مشتق کسری
Equilibrium Point.....	نقطه تعادل

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Artificial Neural Network	شبکه عصبی مصنوعی
Biological Neural Network	شبکه عصبی زیستی
Boundary Condition	شرایط مرزی
Chaos	آشوب
Chaotic System	سیستم آشوبناک
Control Function	تابع کنترل
Dynamic System	سیستم دینامیکی
Equilibrium Poin	نقطه تعادل
Errore Function	تابع خطا
Functional	تابعی
Fractional Calculas	حساب کسری
Fractional Derivative	مشتق کسری
Fractional Integral	انتگرال کسری
Fractional Necessary Optimality Conditions	شرایط لازم بهینگی کسری
Fractional Optimal Control	کنترل بهینه کسری
Infinite horizon	افق نامتناهی
Initial Condition	شرایط اولیه
Indirect Method	روش غیرمستقیم
Lagrangian Multipliers	ضرایب لاگرانژ
Lyapunov Function	تابع لیاپانوف
Nonlinear Optimal Control Problem	مساله کنترل بهینه غیرخطی
Optimal Control	کنترل بهینه
Optimal Solution	جواب بهینه
Optimization	بهینه‌سازی
Pontryagin Minimim Principle	اصل کمینه پونتریاگین
Stable Equilibrium Point	پایداری نقطه تعادل

State Variable	متغیر حالت
Trial Solution	جواب آزمایشی
Unconstrained optimization	بهینه سازی نامقید
Variational Calculus	حساب تغییرات
Weight Function	تابع وزن

Abstract

Fractional calculus is a subject that deals with the derivatives of integers or complex order. Fractional optimal control problems are problems that their associated dynamical systems have derivatives and integrals of fractional order. These derivatives and integrals provide more accurate models for existing systems in nature. With the development and complexity of optimal control problems, new methods have to be developed to solve these issues. Although there are so many definitions in the derivative and integral of the fractional order, the high computational complexity caused the researchers to seek definitions to be functional, simpler and more compatible with the classical derivative. Since there is no exact and approximation solution for the infinite horizon fractional optimal control problem in general, thus for the first time in this thesis we study an infinite horizon fractional optimal control problem. In order to solve these problems, we use numerical methods based on the neural networks. On the other hand, in this thesis, we state some applications of the infinite horizon fractional optimal control problems such as stabilizing chaos system, stabilizing of fractional systems.

keywords: Infinite horizon fractional optimal control problem, fractional derivative, Artificial neural network, Optimal condition, Unconstrained optimization.



Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Optimal Control and Optimization

**Numerical Solution of Infinite Horizon
Optimal Control Problems with Fractional
Derivative**

By: Mina Yavari

Supervisor:

Dr. Alireza Nazemi

2020