

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

بررسی شاخص‌های تعمیم‌یافته ناکارایی فرایند تولید در محیط فازی

نگارنده: گل بانو محمدیان

استادان راهنما

دکتر محمدرضا ربیعی
دکتر بهرام صادق‌پور گیلده

بهمن ۱۳۹۸

تقدیم بہ

آہنا کہ بی دریغ کوشیدندا امروز سربہ اوج ساییدن را تجربہ کنم.

پدرو مادرم

آموزگارانی کہ برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.

ہمسرم

کہ نشانہ لطف الہی در زندگی من است.

سپاس گزارمی... ♦

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدسشان را و تشکر می‌کنم از همسر عزیزم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمود تا با حمایت‌های همه‌جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی خود را به نحو احسن به اتمام برسانم. همچنین، وظیفه خود می‌دانم از زحمات اساتید فرهیخته و فرزانه‌ام آقای دکتر «محمد رضا ربیعی» و آقای دکتر «بهرام صادق‌پور گیلده» صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت و منش والای ایشان هستم.

گل بانو محمدیان

بهمن ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **گل بانو محمدیان** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آمار علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **بررسی شاخص‌های تعمیم‌یافته ناکارایی فرایند تولید در محیط فازی**، تحت راهنمایی **محمدرضا ربیعی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

گل بانو محمدیان

بهمن ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

کنترل کیفیت آماری از مباحث مهم و کاربردی علم آمار می‌باشد که بخشی از آن به شاخص‌های کارایی و ناکارایی مربوط می‌شود. شاخص‌های کارایی و ناکارایی فرایندهای مفیدی برای میزان سنجش کیفیت محصول و وضعیت فرایند با استفاده از تجزیه و تحلیل کارایی فرایند می‌باشند. ارجحیت استفاده از شاخص‌های ناکارایی، تفکیک اطلاعات به دو شاخص عدم دقت و عدم درستی است. از طرفی شاخص ناکارایی در برخی موارد قادر به بیان درست ناکارایی (یا کارایی) فرایند نیست. از این رو، تعمیمی از شاخص ناکارایی معرفی شد که می‌تواند این مشکل را مرتفع سازد. حال، در شرایطی که داده‌ها دقیق نیستند، می‌توان از منطق فازی بهره گرفت. در این صورت، نمی‌توان از شاخص‌های ناکارایی معمولی استفاده کرد، بنابراین برای استفاده از این شاخص‌ها در محیط فازی، ابتدا باید برآورد فازی شاخص‌های عدم دقت و عدم درستی محاسبه شود. در این پایان‌نامه، برای این امر، دو حالت در نظر گرفته‌ایم. حالت اول، زمانی که حدود مشخصات و مقدار هدف فازی نیستند و حالت دوم، زمانی که حدود مشخصات و مقدار هدف فازی هستند. در پایان، با ارائه مثال واقعی، کاربرد این دو شاخص ناکارایی فازی را در صنعت بررسی کرده و با یکدیگر مقایسه می‌نماییم.

کلمات کلیدی: شاخص‌های کارایی فرایند، شاخص ناکارایی فرایند و تعمیم آن، منطق فازی، حدود مشخصات و مقدار هدف

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
۱	۱ مفاهیم پایه‌ای و اساسی
۱	۱.۱ کنترل کیفیت آماری
۱	۱.۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱.۱ تاریخچه کنترل کیفیت
۳	۳.۱.۱ تجزیه و تحلیل کارایی (قابلیت) فرایند
۵	۴.۱.۱ استفاده از نمودار فراوانی
۷	۵.۱.۱ نمودار احتمال
۹	۶.۱.۱ استفاده و تفسیر C_p
۱۲	۷.۱.۱ نسبت کارایی فرایند برای فرایند نامتقارن
۱۴	۸.۱.۱ نکاتی دیگر در مورد تمرکز فرایند
۱۷	۹.۱.۱ بررسی حالت‌های مختلف تلورانس نامتقارن
۲۱	۱۰.۱.۱ معرفی شاخص ناکارایی فرایند
۲۴	۲.۱ منطق فازی
۲۴	۱.۲.۱ مقدمه
۲۹	۲.۲.۱ اعداد فازی
۲۹	۳.۲.۱ اعداد فازی LR
۳۴	۴.۲.۱ روش‌های رتبه بندی اعداد فازی
۳۵	۵.۲.۱ روش‌های غیرفازی‌سازی
۴۱	۳.۱ نتیجه‌گیری
۴۳	۲ شاخص‌های کارایی و ناکارایی فرایند
۴۳	۱.۲ مقدمه

۴۴	شاخص‌های کارایی فرایند	۲.۲
۴۹	خانواده جدید شاخص‌های کارایی فرایند	۱.۲.۲
۵۵	شاخص‌های کارایی فرایند در محیط فازی	۲.۲.۲
۵۶	شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته فرایند	۳.۲
۶۰	شاخص‌های ناکارایی فرایند در محیط فازی	۱.۳.۲
۶۰	نتیجه‌گیری	۴.۲
۶۱	شاخص ناکارایی C_{pp} در محیط فازی	۳
۶۱	مقدمه	۱.۳
۶۲	برآورد C_{pp}	۲.۳
۶۲	شاخص ناکارایی فرایند فازی ...	۳.۳
۶۲	برآورد فازی C_{pp} به روش باکلی	۱.۳.۳
۶۳	برآورد فازی \bar{X} و S^2	۲.۳.۳
۶۳	برآورد فازی شاخص ناکارایی C_{pp}	۳.۳.۳
۶۵	تابع عضویت شاخص ناکارایی \tilde{C}_{pp}	۴.۳.۳
۶۸	شاخص ناکارایی فرایند فازی ...	۴.۳
۶۹	واریانس فازی	۱.۴.۳
۷۰	میانگین فازی	۲.۴.۳
۷۰	حدود مشخصات و مقدار هدف فازی	۳.۴.۳
۷۱	برآورد فازی شاخص ناکارایی فرایند \tilde{C}_{pp}	۴.۴.۳
۷۳	نتیجه‌گیری	۵.۳
۷۵	شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته C''_{pp} در محیط فازی	۴
۷۵	مقدمه	۱.۴
۷۶	برآورد C''_{pp}	۲.۴
۷۶	شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته فرایند فازی ...	۳.۴
۷۶	برآورد فازی C''_{pp}	۱.۳.۴
۷۹	شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته فرایند فازی ...	۴.۴
۷۹	برآورد فازی شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته \tilde{C}''_{pp}	۱.۴.۴
۸۲	نتیجه‌گیری	۵.۴
۸۳	مثال کاربردی	۵
۸۳	مقدمه	۱.۵
۸۳	مثال کاربردی	۲.۵
۹۲	نتیجه‌گیری	۳.۵

۹۷

مراجع

۱۰۳

آ دستورات برنامه‌نویسی در R

۱۰۳

..... ۱.آ دستورات برنامه‌نویسی در R

فهرست تصاویر

۴	حدود تلورانس بالا و پایین و حدود مشخصات فنی بالا و پایین در توزیع نرمال	۱.۱
۶	نمودار هیستوگرام مربوط به داده های قدرت تحمل در مقابل فشار	۲.۱
۷	برخی از علل کارایی فرایند نامناسب	۳.۱
۹	نمودار احتمال نرمال برای داده های مربوط به قدرت تحمل در مقابل فشار	۴.۱
۹	رسم داده های غیر نرمال بر روی کاغذ احتمال نرمال	۵.۱
۱۰	حالت های مختلف C_p	۶.۱
۱۵	ارتباط بین C_{pk} و C_p	۷.۱
۱۶	دو فرایند با $C_{pk} = 1$	۸.۱
۱۹	برخی از حالت های مختلف $T = M$ و $T \neq M$	۹.۱
۲۰	نمودار هیستوگرام مربوط به داده های فرایند	۱۰.۱
۲۳	حالت های مختلف وضعیت کیفیت شاخص C_{pp}	۱۱.۱
	نمودارهای توابع عضویت مجموعه های فازی A (شکل بالایی) و B (شکل پایینی)	۱۲.۱
۲۵	نمودار تابع عضویت مجموعه فازی A به همراه تکیه گاه، هسته و α - برش آن	۱۳.۱
۳۱	نمودار تابع عضویت عدد فازی تقریباً صفر	۱۴.۱
۳۲	نمودار تابع عضویت عدد فازی مثلی تقریباً صفر	۱۵.۱
۳۲	نمودار تابع عضویت عدد فازی مثلی	۱۶.۱
۳۳	نمودار تابع عضویت عدد فازی ذوزنقه ای	۱۷.۱
۳۷	غیرفازی سازی با روش مرکز ثقل	۱۸.۱
۳۷	غیرفازی سازی با روش مرکز ارتفاع سطح	۱۹.۱
۳۸	غیرفازی سازی با روش میانگین سطح $x^* = 345/94$	۲۰.۱
۳۹	غیرفازی سازی با روش اولین ماکسیمم و میانگین ماکسیمم	۲۱.۱
۴۶	شاخص C_p^*	۱.۲
۴۷	شاخص C_p'	۲.۲
۴۹	شاخص C_p''	۳.۲

۵۰	شاخص C_p'''	۴.۲
۵۲	مقایسه نموداری برخی شاخص‌های کارایی	۵.۲
۵۶	مقایسه دو شاخص ناکارایی	۶.۲
۶۴	.	نمودار توابع عضویت (آ) میانگین فازی (\bar{X}) و (ب) واریانس فازی (\bar{S}^2)	۱.۳
۶۷	.	نمودار توابع عضویت (آ) میانگین فازی (\bar{X}) و (ب) واریانس فازی (\bar{S}^2)	۲.۳
۶۸	نمودار توابع عضویت شاخص‌های فازی برای فرایند مورد بررسی	۳.۳
۷۴	نمودار توابع عضویت شاخص‌های فازی برای ارتفاع فشرده‌سازی	۴.۳
۷۸	نمودار توابع عضویت شاخص‌های فازی برای فرایند مورد بررسی	۱.۴
۸۱	نمودار توابع عضویت شاخص‌های فازی برای ارتفاع فشرده‌سازی	۲.۴
		نمودار توابع عضویت واریانس فازی (σ^2) برای گزینه‌های انتخابی A شکل	۱.۵
۸۶	(آ، B شکل ب) و C شکل ج)	
		نمودار توابع عضویت میانگین فازی $(\bar{\mu})$ برای گزینه‌های انتخابی A شکل	۲.۵
۸۷	(آ، B شکل ب) و C شکل ج)	
		نمودار توابع عضویت شاخص‌های فازی برای گزینه‌های انتخابی A در	۳.۵
۸۹	..	شکل‌های (آ و د) ، B در شکل‌های (ب و ه) ، C در شکل‌های (ج و و)	
		نمودار توابع عضویت شاخص‌های فازی برای گزینه‌های انتخابی A در	۴.۵
۹۰	..	شکل‌های (آ و د) ، B در شکل‌های (ب و ه) ، C در شکل‌های (ج و و)	
۹۳	نمودار راداری برای مقایسه سه گزینه انتخابی	۵.۵

فهرست جداول

۸	مقدار مشاهدات فرایند مورد بررسی	۱.۱
۱۲	مقادیر قابلیت فرایند (C_p) و نسبت‌های اقلام نامنطبق (بر حسب ppm)	۲.۱
۱۳	حداقل مقادیر پیشنهادی برای نسبت قابلیت فرایند	۳.۱
۱۷	مقایسه شاخص‌ها و میزان درصد استفاده از حدود مشخصات	۴.۱
۲۲	طبقه‌بندی وضعیت کیفیت (مرجع [۱۸])	۵.۱
۵۳	مقایسه بین شاخص‌های کارایی $C_p(u, v)$ ، $C_{pa}(u, v)$ و $C_p'''(u, v)$	۱.۲
۵۸	مقایسه بین شاخص‌های ناکارایی C_{pp} و C_{pp}''	۲.۲
۸۴	میانگین و واریانس فرایند برای قطر فولاد بر حسب (mm)	۱.۵
۸۵	مقادیر فازی میانگین و واریانس برای گزینه‌های انتخابی	۲.۵
۸۵	مقادیر فازی حدود مشخصات و مقدار هدف	۳.۵
۸۸	شاخص‌های فازی برای گزینه‌های انتخابی	۴.۵
۸۸	شاخص‌های فازی برای گزینه‌های انتخابی	۵.۵
۹۱	مقادیر شاخص‌های غیرفازی‌سازی شده برای گزینه‌های انتخابی	۶.۵
۹۱	مقادیر شاخص‌های غیرفازی‌سازی شده برای گزینه‌های انتخابی	۷.۵

پیشگفتار

کنترل کیفیت آماری به معنای کاربرد اصول آماری در تمامی مراحل تولید، نگهداری و خدمات به منظور رضایت تقاضا به صورت اقتصادی است. در صورتی که شرایط زیر برای مشخصه کیفی تولیدی یک فرایند برقرار باشد، اکثر مشکلات مربوط به کنترل کیفیت برطرف می‌شود:

۱. مشخصه کیفی مورد نظر، در حدود مشخصه تعیین شده توسط مهندسان ساخت یا مشتریان قرار داشته باشد.

۲. تغییرپذیری مشخصه کیفی تا حد ممکن کم باشد.

۳. میانگین مشخصه کیفی تا حد امکان به مقدار هدف نزدیک باشد.

شرط اول، به تولید اقلام منطبق و نامنطبق مربوط می‌شود که اقلام نامنطبق به عنوان دورریز به حساب می‌آیند یا برای استفاده در فرایند دوباره‌کاری قرار می‌گیرند. شروط دوم و سوم، به عملکرد فرایند مرتبط می‌شوند. برای ارزیابی عملکرد فرایندهای تولید، شاخص‌های کارایی و ناکارایی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

شاخص‌های کارایی و ناکارایی بسیاری برای ارزیابی عملکرد فرایند معرفی شده‌اند که در این پایان‌نامه به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم. اما، در برخی مواقع، فرایندهایی وجود دارند که داده‌ها به صورت مبهم (نادقیق) در دست هستند، از این رو، منطق فازی به میان می‌آید. بنابراین، برای ارزیابی عملکرد فرایند در محیط فازی، از شاخص‌های کارایی و ناکارایی فازی استفاده می‌شود.

این پایان‌نامه شامل ۵ فصل می‌باشد که در زیر به اختصار به آن‌ها اشاره می‌کنیم: در **فصل اول** به اختصار، مفاهیمی از کنترل کیفیت و منطق فازی را در دو بخش بیان کرده و سپس، به مفهوم شاخص کارایی فرایند می‌پردازیم. سه روش برای تجزیه و تحلیل کارایی فرایند مطرح می‌کنیم و کاربرد هر یک را با ارائه مثال، بررسی می‌کنیم. در **فصل دوم** به شاخص‌های کارایی در فرایندهای با تلورانس نامتقارن اشاره می‌کنیم و از آنجایی که در مواردی برای بیان کارایی فرایند نارسا می‌باشند، شاخص کارایی جدیدی معرفی می‌کنیم که ایرادات شاخص‌های قبل را مرتفع می‌سازد. در ادامه، شاخص ناکارایی و تعمیم‌یافته آن را مطرح می‌کنیم که به دلیل جداسازی اطلاعات مربوط به دقت و درستی فرایند و ترکیب دو شاخص در خود، متفاوت از شاخص‌های کارایی هستند.

در **فصل سوم** شاخص ناکارایی فازی ارائه می‌شود که در دو بخش آن را بررسی می‌کنیم. در بخش اول، این شاخص را با حدود مشخصات و مقدار هدف غیر فازی و در بخش دوم، با حدود مشخصات و مقدار هدف فازی تجزیه و تحلیل می‌کنیم. از آنجایی که این شاخص در مواردی مقدار ناکارایی فرایند را به درستی بیان نمی‌کند، تعمیمی از آن معرفی می‌شود که این مشکل را برطرف می‌سازد.

در **فصل چهارم** شاخص تعمیم‌یافته ناکارایی فازی را در دو بخش ارائه می‌کنیم. در بخش اول، این شاخص را با حدود مشخصات و مقدار هدف غیر فازی و در بخش دوم، با حدود مشخصات و مقدار هدف فازی بررسی می‌کنیم.

در **فصل پنجم** با ارائه مثالی کاربردی در صنعت، به مقایسه دو شاخص ناکارایی فازی با حدود مشخصات و مقدار هدف فازی می‌پردازیم.

فصل ۱

مفاهیم پایه‌ای و اساسی

۱.۱ کنترل کیفیت آماری

در این فصل، تعاریف اولیه در کنترل کیفیت و منطق فازی را آورده‌ایم، به طوری که در بخش اول مباحث مربوط به شاخص‌های کارایی و ناکارایی بیان شده‌است و در بخش دوم مباحث مربوط به مجموعه‌های فازی و عملگرهای آن‌ها، اعداد فازی، روش‌های رتبه‌بندی اعداد فازی و روش‌های غیرفازی‌سازی مطرح شده‌اند. اغلب مطالب در بخش‌های اول و دوم به ترتیب از مراجع [۲] و [۵] گرفته شده‌است.

۱.۱.۱ مقدمه

کیفیت تقریباً همیشه بخش لاینفک تمامی محصولات و خدمات بوده‌است. در واقع، کیفیت به معنای شایستگی برای هدف است. کنترل و بهبود کیفیت، در اغلب سازمان‌ها نظیر تولیدکنندگان، شرکت‌های حمل و نقل، سازمان‌های خدماتی مالی و غیره به یک راهبرد اساسی و مهم مبدل شده‌است. به عبارت دیگر، کیفیت یک مزیت رقابتی محسوب می‌شود. شرکت‌هایی که بتوانند محصولات خود را از طریق بهبود و کنترل کیفیت مشعوف سازند بر رقبای خود برتری دارند.

کیفیت به یکی از مهم‌ترین عوامل تصمیم‌گیری مشتری در انتخاب بین محصولات و خدمات

موجود تبدیل شده‌است. این نگرش، فارغ از این که مصرف‌کننده یک شخص، یک سازمان صنعتی، یک خرده‌فروش و غیره باشد، فراتر رفته و در جامعه تقریباً فراگیر شده‌است. بنابراین، درک و بهبود کیفیت به‌عنوان عوامل کلیدی موفقیت و رشد کسب و کار، یک مزیت رقابتی محسوب می‌شود.

به طور کلی، شایستگی برای هدف دارای دو جنبه است که عبارت است از: کیفیت طراحی و کیفیت انطباق. تمامی محصولات یا خدمات در درجه‌بندی‌ها یا سطوح مختلفی از کیفیت تولید می‌شوند. این اختلاف در درجه‌بندی‌ها یا سطوح کیفیت عمده‌اً به وجود آمده و حاصل کیفیت طراحی است. به طور مثال، هدف اصلی تمام خودروها، حمل و نقل ایمن مصرف‌کنندگان است. با این حال، خودروها از نظر اندازه، تجهیزات، شکل ظاهری و عملکرد متفاوت هستند. این تفاوت‌ها ناشی از اختلافات طراحی است که به طور آگاهانه در خودروهای گوناگون لحاظ شده‌است.

کیفیت انطباق یعنی این که، محصول به چه میزان با تلورانس‌ها و مشخصات طراحی، انطباق دارد. کیفیت انطباق تابعی از عوامل مختلف است که از میان آن‌ها می‌توان به نوع فرایند تولید، نحوه آموزش و نظارت بر نیروی کار، روش‌های کنترل فرایند، فعالیت‌های بازرسی، انگیزه نیروی کار و غیره جهت دستیابی به کیفیت اشاره کرد. کیفیت طراحی و کیفیت انطباق، هر دو مربوط به داخل سازمان می‌باشند به طوری که ابزار متداول بهبود کیفیت طراحی، طراحی آزمایش‌ها و ابزار متداول بهبود کیفیت انطباق، کنترل فرایند آماری می‌باشد. کیفیت با پراکندگی رابطه معکوس دارد؛ چرا که تغییرپذیری (یا همان پراکندگی) در مشخصات مهم یک محصول با افزایش کیفیت کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، می‌توان گفت که بهبود کیفیت در جهت کاهش پراکندگی در فرایندها و محصولات عمل می‌کند. غالباً پراکندگی بیش از حد در عملکرد فرایند منجر به اتلاف می‌شود.

هر محصول از عناصری تشکیل شده‌است که به طور مشترک چیزی که استفاده‌کننده یا مصرف‌کننده از آن به عنوان کیفیت نام می‌برد را توصیف می‌کنند. این پارامترها را غالباً مشخصه‌های کیفی می‌نامند. قابل ذکر است که، کمیت اندازه‌گیری شده متناظر با مقدار ایده‌آل یک مشخصه کیفی را مقدار اسمی یا هدف^۱ آن مشخصه می‌نامند. این مقادیر هدف معمولاً دارای حدودی هستند و قاعدتاً، این حدود باید به اندازه کافی به مقدار هدف نزدیک باشند تا تأثیر نامطلوبی بر کارکرد یا عملکرد ایجاد نشود. بیشترین مقدار مجاز یک مشخصه کیفی، حد مشخصه بالا (USL)^۲ و کمترین مقدار مجاز آن، حد مشخصه پایین (LSL)^۳ نامیده می‌شود. حدود مشخصات معمولاً حاصل فرایند طراحی یک محصول است. به طور معمول، مهندسان طراح با در نظر گرفتن اصول علوم مهندسی، یک محصول را طراحی می‌کنند و غالباً نیز مقادیر هدف پارامترهای بحرانی طرح توسط طراح تعیین می‌شود. (مشخصه‌های کیفی در بعضی مواقع به

¹Target value

²Upper specification limit

³Lower specification limit

عنوان مشخصه‌های بحرانی برای کیفیت نام برده می‌شوند.) قابل ذکر است که، حدود مشخصات بستگی به فرایند ندارند. به عبارت دیگر، منشأ آن خارج از فرایند است و معمولاً توسط مدیریت، مهندسان، مشتری و یا طراحان محصول تعیین می‌شود. شخصی که مسئول تعیین حدود مشخصات است، باید آگاهی کامل در مورد تغییرپذیری فرایند داشته باشد.

۲.۱.۱ تاریخچه کنترل کیفیت

روش‌های آماری و کاربرد آن‌ها در تولید و تضمین کیفیت از تاریخچه نسبتاً قدیمی برخوردار است. در سال ۱۹۲۴ والتر شوهارت از آزمایشگاه‌های تلفن بل، اساس نمودار کنترل آماری را پایه‌گذاری کرد. به طور کلی این مقطع، به عنوان نقطه آغاز کنترل کیفیت آماری شناخته می‌شود. در اواخر دهه ۱۹۲۰ هارولد داج و هری رومینگ که هر دو در آزمایشگاه‌های تلفن بل مشغول به کار بودند، روش‌های نمونه‌گیری پذیرش آماری را به جای بازرسی صددرصد معرفی کردند. در اواسط دهه ۱۹۳۰ فنون کنترل کیفیت آماری به طور نسبتاً وسیعی در شرکت وسترن الکتریک که شاخه تولیدی سیستم بل بود به کار گرفته شد و این در حالی بود که ارزش و اهمیت کنترل کیفیت آماری هنوز برای صنایع مشخص نشده بود. در زمان جنگ جهانی دوم، مفاهیم کنترل کیفیت آماری در صنایع تولیدی مختلف پذیرفته و به کار گرفته شد. انجمن کنترل کیفیت آمریکا در سال ۱۹۴۶ پایه‌گذاری شد. در دهه ۱۹۵۰ برای اولین بار در آمریکا از طراحی آزمایش‌ها به منظور بهبود محصول و فرایند استفاده شد. شرکت‌های ژاپنی، طراحی آزمایش‌ها را از دهه ۱۹۶۰ به طور نظام‌مند برای بهبود فرایند، تکوین فرایندهای جدید، ارزیابی محصولات طراحی شده جدید، بهبود قابلیت اطمینان و عملکرد محصولات و انتخاب قطعات و تلورانس‌های سیستم‌ها، استفاده می‌کردند. از سال ۱۹۸۰ تا به امروز، رشد قابل ملاحظه‌ای در میزان استفاده از روش‌های آماری در سازمان‌های مختلف در ایالات متحده آمریکا با هدف بهبود کیفیت و عملکرد کسب و کار مشاهده می‌شود.

۳.۱.۱ تجزیه و تحلیل کارایی (قابلیت) فرایند

فنون آماری می‌توانند در مراحل مختلف تولید یک محصول که شامل فعالیت‌های توسعه‌ای قبل از تولید نیز می‌گردند، مفید واقع شود. از میان این فعالیت‌ها، می‌توان به کمی نمودن تغییرپذیری فرایند، تجزیه و تحلیل تغییرپذیری با توجه به نیازها و مشخصات فنی محصول و کمک به ساخت و توسعه آن، به گونه‌ای که این تغییرپذیری حذف و یا به میزان نسبتاً زیادی کاهش یابد، اشاره کرد. این فعالیت‌های کلی را تجزیه و تحلیل کارایی فرایند می‌نامند. کارایی فرایند به یکنواختی فرایند اشاره دارد. این نکته کاملاً بدیهی است که تغییرپذیری فرایند، معیاری برای یکنواختی خروجی آن می‌باشد. تغییرپذیری فرایند را می‌توان به دو صورت در نظر گرفت:

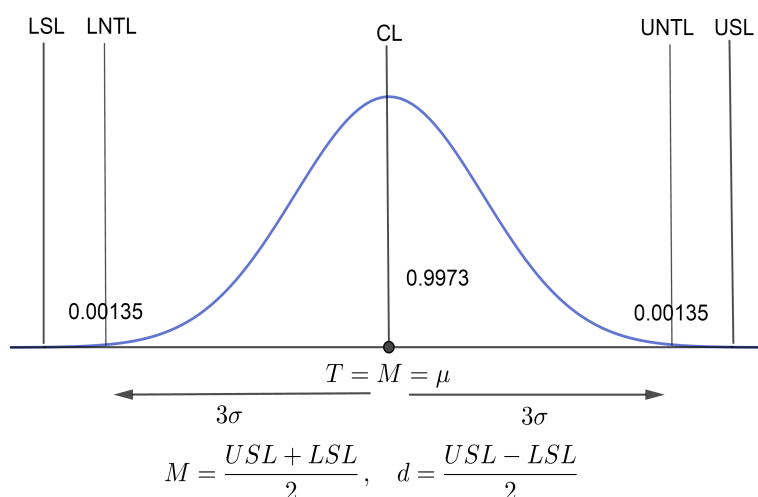
۱. تغییرپذیری ذاتی یا طبیعی در یک مقطع زمانی خاص، یا به عبارت دیگر تغییرپذیری لحظه‌ای.

۲. تغییرپذیری در طول زمان.

در توزیع یک مشخصه کیفی، معمولاً از فاصله شش انحراف معیار به عنوان معیار کارایی استفاده می‌شود. شکل ۱.۱ مشخصه کیفی مربوط به یک فرایند را نشان می‌دهد که دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است. حدود تلورانس طبیعی بالا^۴ و پایین^۵ برای این فرایند به ترتیب عبارت است از: $\mu + 3\sigma$ و $\mu - 3\sigma$.
به عبارت دیگر:

$$UNTL = \mu + 3\sigma$$

$$LNTL = \mu - 3\sigma$$



شکل ۱.۱: حدود تلورانس بالا و پایین و حدود مشخصات فنی بالا و پایین در توزیع نرمال

در شکل فوق، CL^۶ نشان‌دهنده خط مرکزی در بازه تلورانس می‌باشد.

در یک توزیع نرمال، حدود تلورانس طبیعی ۹۹/۷۳ درصد از مقادیر متغیر مورد نظر را شامل می‌گردند و یا به عبارت دیگر، فقط ۰/۲۷ درصد خروجی فرایند خارج از حدود تلورانس طبیعی واقع می‌شوند. دو نکته را باید به خاطر داشت:

⁴Upper natural tolerance limit

⁵Lower natural tolerance limit

⁶Center Line

۱. ۲۷٪ درصد از محصولات خارج از حدود تلورانس طبیعی شاید خیلی ناچیز به نظر برسد ولی این مقدار در هر یک میلیون محصول تولید شده برابر با ۲۷۰۰ محصول معیوب خواهد بود.

۲. اگر توزیع خروجی فرایند نرمال نباشد، آنگاه نسبت اقلام معیوب فرایند که خارج از فاصله $\pm 3\sigma$ واقع می‌گردند، به طور قابل ملاحظه‌ای با ۲۷٪ درصد تفاوت خواهد داشت.

تحلیل قابلیت فرایند به عنوان یک مطالعه رسمی جهت برآورد قابلیت فرایند تعریف می‌شود. تخمین کارایی فرایند ممکن است در قالب یک توزیع احتمال که دارای شکل، مرکز (میانگین) و تغییرپذیری (انحراف معیار) خاصی است، ارائه شود. به عنوان مثال، ممکن است خروجی فرایند در قالب یک توزیع نرمال با میانگین $\mu = 1$ سانتی‌متر و انحراف معیار $\sigma = 0.001$ سانتی‌متر تعریف شود. در این صورت می‌توان تجزیه و تحلیل کارایی فرایند را بدون توجه به مشخصات فنی مشخصه کیفی انجام داد. یا به عبارت دیگر، می‌توان کارایی فرایند را در قالب نسبت اقلام معیوب که خارج از حدود مشخصات فنی قرار می‌گیرند محاسبه نمود. با این حال، نیازی به حدود مشخصات فنی جهت انجام تجزیه و تحلیل کارایی فرایند نمی‌باشد. تجزیه و تحلیل کارایی فرایند یک جزء ضروری یک برنامه بهبود کیفیت محسوب می‌شود. در بین کاربردهای مهم داده‌های حاصل از تجزیه و تحلیل کارایی فرایند، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. پیش‌بینی میزان تطابق فرایند با تلورانس‌ها.

۲. کمک به تولیدکنندگان یا طراحان محصول در انتخاب یا اصلاح یک فرایند.

۳. انتخاب بین تأمین‌کنندگان بالقوه.

۴. کاهش تغییرپذیری در یک فرایند تولید.

۵. و ...

بنابراین، تجزیه و تحلیل کارایی فرایند روشی است که در بسیاری از مراحل تولید یک محصول کاربرد دارد. این مراحل شامل طراحی محصول و فرایند، انتخاب تأمین‌کننده و برنامه‌ریزی ساخت و تولید می‌گردد.

در این پایان‌نامه، سه روش برای تجزیه و تحلیل کارایی فرایند به کار گرفته می‌شود: نمودارهای فراوانی (هیستوگرام)، نمودارهای احتمال و استفاده از شاخص‌ها. در ادامه، به هر یک از این سه روش به طور مختصر اشاره خواهیم کرد.

۴.۱.۱ استفاده از نمودار فراوانی

توزیع فراوانی می‌تواند در برآورد کارایی فرایند مفید باشد. حداقل ۱۰۰ مشاهده یا بیشتر لازم است تا بتوان یک نمودار فراوانی رسم کرد که ثبات کافی داشته باشد. تحت این شرایط می‌توان

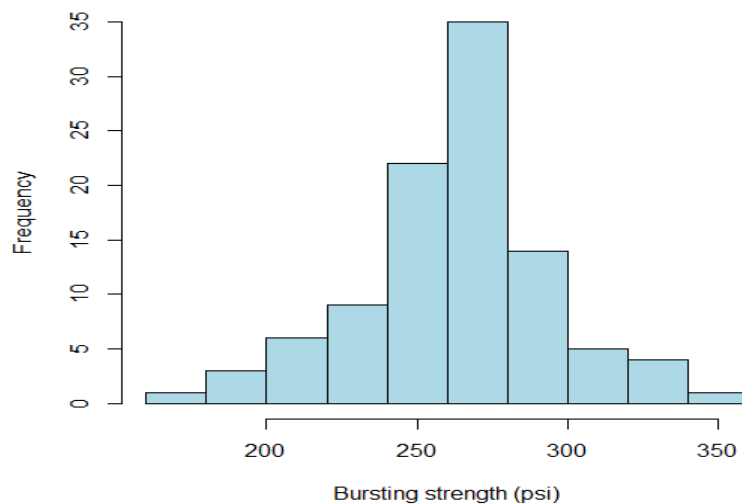
یک برآورد قابل اطمینان در مورد کارایی فرایند به دست آورد. نمودار فراوانی (هیستوگرام) همراه با میانگین نمونه \bar{x} و انحراف معیار نمونه s اطلاعاتی در مورد کارایی فرایند برای ما فراهم می‌سازند.

مثال ۱.۱.۱. به منظور نشان دادن کاربرد نمودار فراوانی در برآورد کارایی فرایند، شکل ۲.۱ که نمودار فراوانی قدرت تحمل در مقابل فشار ۱۰۰ شیشه نوشابه یک لیتری را نشان می‌دهد، در نظر بگیرید. با توجه به میانگین و واریانس داده شده، کارایی فرایند به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$\bar{x} = 264/06, \quad s = 32/02$$

$$\bar{x} \pm 3s$$

$$264/06 \pm 3(32/02) \approx 264 \pm 96 \text{ psi}$$

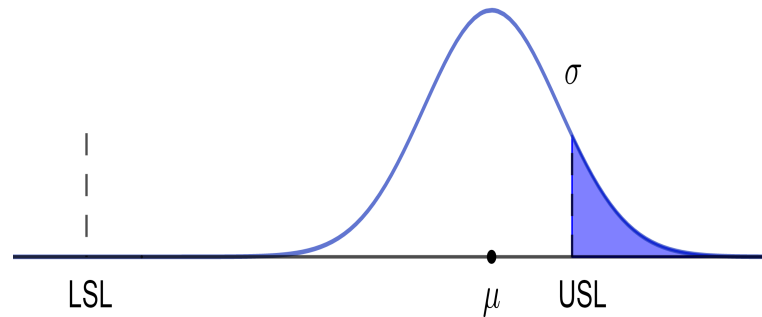


شکل ۲.۱: نمودار هیستوگرام مربوط به داده های قدرت تحمل در مقابل فشار

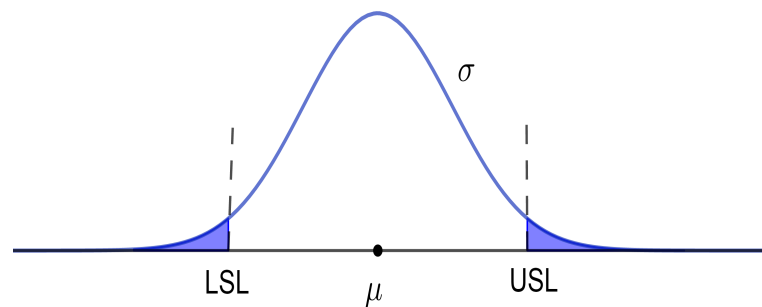
به علاوه، شکل هیستوگرام بیانگر این واقعیت است که توزیع قدرت تحمل در مقابل فشار تقریباً نرمال است. بنابراین، می‌توان برآورد کرد که حدوداً ۹۹/۷۳ درصد از شیشه‌های تولید شده به وسیله این فرایند در فشاری بین ۱۶۸ psi و ۳۶۰ psi می‌شکنند. باید به این نکته توجه داشت که کارایی فرایند را می‌توان به طور مستقل از حدود مشخصات فنی مربوط به قدرت تحمل در مقابل فشار برآورد کرد.

یک برتری استفاده از نمودار فراوانی جهت تخمین کارایی فرایند، سرعت عمل در انعکاس عملکرد فرایند می‌باشد. این نمودار ممکن است علت عملکرد ضعیف فرایند را نیز سریعاً نشان دهد. به عنوان مثال، شکل ۳.۱ (آ) فرایندی را نشان می‌دهد که از کارایی بالقوه کافی برخوردار

است ولی میانگین آن در جای مناسبی واقع نگردیده است. در حالی که در قسمت (ب) همان شکل فرایندی را مشاهده می‌کنیم که به علت وجود تغییرپذیری بیش از حد فاقد کارایی لازم می‌باشد.



(آ)



(ب)

شکل ۳.۱: برخی از علل کارایی فرایند نامناسب

۵.۱.۱ نمودار احتمال

نمودار احتمال را می‌توان به عنوان جایگزینی برای نمودار فراوانی جهت تعیین شکل، مرکز و تغییرپذیری توزیع استفاده کرد. نمودار احتمال نسبت به نمودار فراوانی از این مزیت برخوردار است که دیگر ضرورتی برای تقسیم دامنه متغیر به فواصل مختلف وجود ندارد. از طرف دیگر، نمودار احتمال برای اندازه نمونه‌های نسبتاً کوچک نتایج قابل قبولی را ارائه می‌کند (معمولاً چنین نتایجی از هیستوگرام به دست نمی‌آید). به طور کلی، یک نمودار احتمال نموداری است که از رسم داده‌های رتبه‌بندی شده بر حسب فراوانی تجمعی نمونه به دست می‌آید. این داده‌ها بر روی یک کاغذ خاص که محور عمودی آن به گونه‌ای انتخاب شده تا توزیع تجمعی مفروض یک خط راست را نتیجه دهد رسم می‌شود. این نمودار می‌تواند در مطالعات قابلیت فرایند

بسیار مفید واقع شود. به منظور نشان دادن کاربرد نمودار احتمال نرمال در مطالعات قابلیت فرایند، ۲۰ مشاهده مطابق جدول ۱.۱ که مربوط به قدرت تحمل در مقابل فشار شیشه‌های نوشابه است را در نظر بگیرید:

جدول ۱.۱: مقدار مشاهدات فرایند مورد بررسی

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
X_i	۱۹۷	۲۰۰	۲۱۵	۲۲۱	۲۳۱	۲۴۲	۲۴۵	۲۵۸	۲۶۵	۲۶۵	۲۷۱	۲۷۵	۲۷۷	۲۷۸	۲۸۰	۲۸۳	۲۹۰	۳۰۱	۳۱۸	۳۴۶

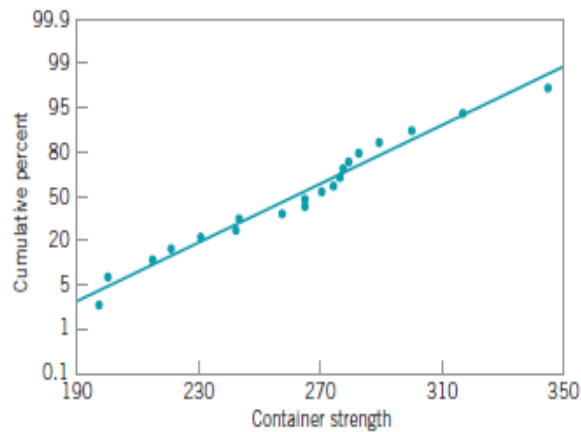
شکل ۴.۱ نمودار احتمال نرمال قدرت تحمل در مقابل فشار را نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که داده‌ها تقریباً بر روی خط راست واقع می‌شوند. این بدین معناست که مشخصه کیفی قدرت تحمل در مقابل فشار دارای توزیع نرمال است. همانگونه که می‌دانیم میانگین توزیع نرمال برابر صدک پنجاه است. این مقدار بر اساس شکل ۴.۱ حدوداً برابر با ۲۶۵ psi است. انحراف معیار توزیع بر اساس شیب خط راست برآورد می‌شود. شاید راحت‌تر باشد که انحراف معیار را بر اساس اختلاف بین صدک‌های هشتاد و چهار و پنجاه برآورد کرد. برای این داده‌ها، انحراف معیار به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$\hat{\sigma} = ۳۳ \text{ psi} = ۲۹۸ - ۲۶۵ = \text{صدک پنجاهم} - \text{صدک هشتاد و چهارم}$$

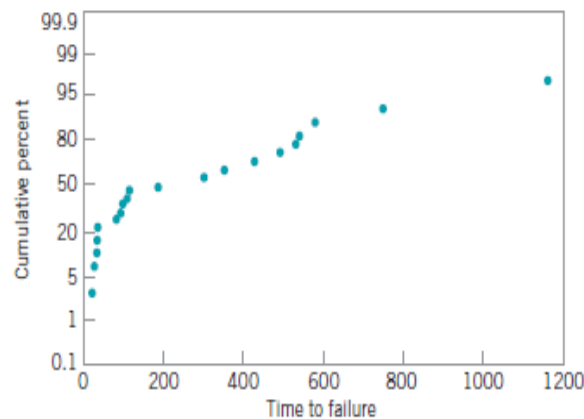
توجه داشته باشید که $\hat{\mu} = ۲۶۵ \text{ psi}$ و $\hat{\sigma} = ۳۳ \text{ psi}$ تفاوت چندانی با میانگین نمونه $\bar{x} = ۲۶۴/۰۶ \text{ psi}$ و انحراف معیار نمونه $s = ۳۲/۰۲ \text{ psi}$ ندارند.

جنبه احتیاط باید در زمان استفاده از نمودارهای احتمال رعایت شود. اگر توزیع داده‌ها با توزیع مفروض متفاوت باشد، نتایج حاصل در مورد کارایی فرایند می‌تواند دارای خطای زیادی باشد. شکل ۵.۱ نمودار احتمال نرمال زمان تا خرابی (بر حسب ساعت) یک شیر که در صنعت پتروشیمی کاربرد دارد را نشان می‌دهد. با بررسی این نمودار می‌توان مشاهده کرد که توزیع زمان تا خرابی نرمال نیست.

یکی از نقاط ضعف نمودار احتمال، تفسیر نظری آن است. به عبارت دیگر، این امکان وجود دارد که دو تحلیل‌گر برای یک مجموعه داده دو نتیجه متفاوت به دست آورند. بدین علت، معمولاً علاقه‌مندیم که نمودارهای احتمال با آزمون‌های زیبندگی که از اصول آماری بیشتری برخوردار هستند همراه باشد. می‌توان برای کسب اطلاعات بیشتر در این باره به مرجع [۶۰] مراجعه کرد.



شکل ۴.۱: نمودار احتمال نرمال برای داده‌های مربوط به قدرت تحمل در مقابل فشار



شکل ۵.۱: رسم داده‌های غیر نرمال بر روی کاغذ احتمال نرمال

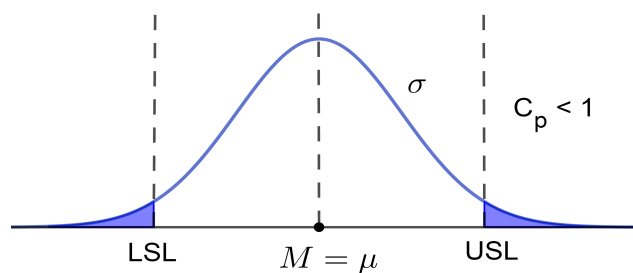
۶.۱.۱ استفاده و تفسیر C_p

در اغلب مواقع ترجیح داده می‌شود که کارایی فرایند به صورت یک کمیت ساده بیان شود. یک روش انجام این کار، استفاده از نسبت کارایی فرایند C_p است که عبارت است از:

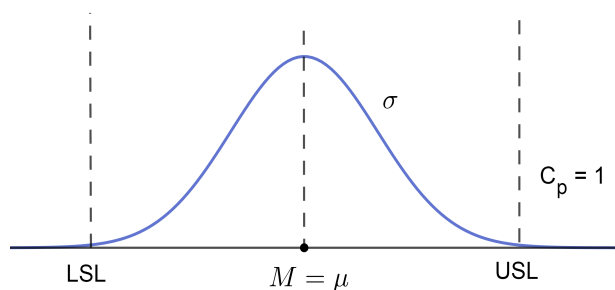
$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad (1.1)$$

در رابطه فوق، USL و LSL به ترتیب حدود مشخصات بالا و پایین می‌باشند. در شکل ۶.۱ حالت‌هایی از شاخص C_p را ارائه کرده‌ایم که نشان می‌دهد هرچه تغییرپذیری کمتر باشد، کارایی بیشتر می‌شود.

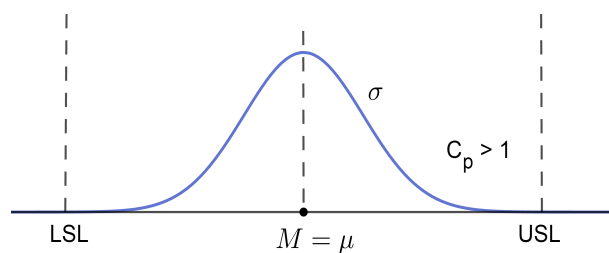
^۷ آن را با PCR نیز نشان می‌دهند



(ا)



(ب)



(ج)

شکل ۶.۱: حالت‌های مختلف C_p

شاخص C_p و سایر نسبت‌های کارایی فرایند در صنعت به طور گسترده‌ای استفاده می‌شود. در کاربردهای عملی، انحراف معیار فرایند σ معمولاً نامعلوم است و باید برآورد شود. به منظور برآورد σ معمولاً از انحراف معیار نمونه s استفاده و برآورد زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6s} \quad (2.1)$$

به منظور نشان دادن محاسبات C_p ، داده‌های مربوط به مثال ۱.۱.۱ را در نظر بگیرید. اگر حدود مشخصات فنی بالا و پایین به صورت $USL = 400$ و $LSL = 200$ باشند، در این صورت برآورد C_p از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6s} = \frac{400 - 200}{6(32.02)} = 1.04$$

نسبت کارایی فرایند C_p ارائه شده در رابطه (۱.۱) را می‌توان به طور عملی تفسیر کرد. اگر P را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$P = \left(\frac{1}{C_p}\right) 100$$

P درصدی از فاصله بین حدود مشخصات فنی که به وسیله فرایند استفاده شده است را نشان می‌دهد. برای فرایند قدرت تحمل در مقابل فشار P برابر است با:

$$P = \left(\frac{1}{1.04}\right) 100 = 96.15$$

یا به عبارت دیگر، این فرایند ۹۶/۱۵ درصد از فاصله بین حدود مشخصات فنی را استفاده کرده است.

نسبت کارایی فرایند معیاری است که به وسیله آن می‌توان توانایی فرایند را برای تولید محصولات منطبق با مشخصات مورد نظر ارزیابی کرد.

در جدول ۲.۱ مقادیر مختلفی از نسبت کارایی فرایند C_p همراه با مقادیر مربوط به تعداد محصولات معیوب تولید شده به وسیله فرایند بر حسب جزء در میلیون (ppm) نشان داده شده است. تعداد محصولات معیوب بر اساس توزیع نرمال تعیین گردیده است. به منظور نشان دادن کاربرد این جدول، $C_p = 0.25$ را در نظر بگیرید. در حالتی که فرایند در مرکز حدود مشخصات فنی متمرکز شده باشد، داریم:

$$\mu = \frac{LSL + USL}{2}, \quad \sigma = \frac{USL - LSL}{1.5}$$

حال، با استفاده از رابطه $P(X < LSL) + P(X > USL)$ نسبت اقلام نامعیوب به دست می‌آید. بنابراین، در هر یک میلیون محصول تولید شده حدوداً ۴۵۳۲۵۵ محصول معیوب وجود دارد. کمیت‌های ppm ارائه شده در جدول ۲.۱ با استفاده از مفروضات مهم زیر محاسبه شده است.

۱. مشخصه کیفی دارای توزیع نرمال است.

جدول ۲.۱: مقادیر قابلیت فرایند (C_p) و نسبت‌های اقلام نامنطبق (بر حسب ppm)

C_p	نسبت اقلام نامنطبق
۰/۲۵	۴۵۳,۲۵۵
۰/۵۰	۱۳۳,۶۱۴
۰/۶۰	۷۱,۸۶۱
۰/۷۰	۳۵,۷۲۹
۰/۸۰	۱۶,۳۹۵
۰/۹۰	۶,۹۳۴
۱/۰۰	۲,۷۰۰
۱/۱۰	۹۶۷
۱/۲۰	۳۱۸
۱/۳۰	۹۶
۱/۴۰	۲۷
۱/۵۰	۷
۱/۶۰	۲
۱/۷۰	۰/۳۴
۱/۸۰	۰/۰۶
۲/۰۰	۰/۰۰۱۸

۲. میانگین فرایند دقیقاً در وسط فاصله بین حدود مشخصات فنی بالا و پایین قرار دارد.

جدول ۳.۱ بعضی از خطوط راهنما که می‌تواند در انتخاب حداقل مقدار برای C_p مفید باشد را نشان می‌دهد. مشخصه قدرت تحمل در مقابل فشار پارامتری است که به ایمنی محصول خیلی مرتبط می‌شود. بدیهی است شیشه‌هایی که از قدرت کافی برخوردار نباشند ممکن است به مشتری صدمه برسانند. این بدان معنا است که C_p باید حداقل دارای مقدار ۱/۵۰ باشد. احتمالاً آن را می‌توان با افزایش میانگین قدرت تحمل در مقابل فشار بهبود داد (این کار را می‌توان مثلاً با افزودن مقدار بیشتری شیشه مذاب به قالب‌ها انجام داد).

۷.۱.۱ نسبت کارایی فرایند برای فرایند نامتقارن

نسبت کارایی فرایند C_p ، به مکان واقع شدن میانگین فرایند نسبت به حدود مشخصات فنی توجهی ندارد. C_p فقط فاصله بین حدود مشخصات فنی را نسبت به فاصله شش انحراف معیار

جدول ۳.۱: حداقل مقادیر پیشنهادی برای نسبت قابلیت فرایند

C_p	
۱/۳۳	فرایندهای موجود
۱/۵۰	فرایندهای جدید
۱/۵۰	پارامتر ایمنی، استحکام یا بحرانی، فرایند موجود
۱/۶۷	پارامتر ایمنی، استحکام یا بحرانی، فرایند جدید

فرایند می‌سنجد. به عنوان مثال، دو توزیع بالایی در شکل ۷.۱ هر دو دارای $C_p = ۲$ هستند ولی به وضوح مشاهده می‌کنیم که فرایند ارائه شده در قسمت (ب) به علت عدم تمرکز در وسط فاصله بین حدود مشخصات فنی از کارایی کمتری نسبت به فرایند ارائه شده در قسمت (آ) برخوردار است.

در چنین حالتی شاید بهتر است از معیار جدیدی که مکان واقع شدن میانگین را در نظر می‌گیرد به عنوان نسبت کارایی فرایند استفاده کنیم. این معیار را با C_{pk} (یا با PCR_k) نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{pk} = \min(C_{pu}, C_{pl}) \quad (۳.۱)$$

که در آن، $C_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\sigma}$ ، $C_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma}$. به عنوان مثال، C_{pk} برای فرایندی که در قسمت (ب) شکل ۷.۱ نشان داده شده است به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} C_{pk} &= \min(C_{pu}, C_{pl}) \\ &= \min\left(\frac{۶۲ - ۵۳}{۳(۲)}, \frac{۵۳ - ۳۸}{۳(۲)}\right) \\ &= ۱/۵ \end{aligned}$$

به طور کلی، اگر $C_p = C_{pk}$ باشد، آنگاه فرایند درست در نقطه وسط فاصله بین مشخصات فنی متمرکز شده است. در صورتی که اگر $C_{pk} < C_p$ باشد فرایند در نقطه‌ای دیگر تمرکز یافته است. اندازه C_{pk} نسبت به C_p معیاری است که مقدار فاصله مکان تمرکز فرایند و نقطه وسط فاصله بین مشخصات فنی را نشان می‌دهد. چند حالت مختلف ولی متداول در شکل ۷.۱ ارائه شده است. جدول ۲.۱ را می‌توان به منظور تعیین برآورد میزان بهبود بالقوه که احتمالاً با تمرکز فرایند در نقطه وسط فاصله بین مشخصات فنی حاصل می‌گردد، استفاده نمود. اگر در جدول ۲.۱ از $C_p = ۱$ استفاده شود آنگاه مقدار واقعی معیوبی فرایند $۲۷۰۰ ppm$ برآورد می‌گردد. با این حال، اگر بتوان فرایند را در وسط بازه حدود مشخصات فنی متمرکز کرد آنگاه C_p به ۲ افزایش و در

نتیجه میزان محصولات معیوب فرایند به 18 ppm کاهش می‌یابد (به جدول ۲.۱ مراجعه شود). این کار باعث می‌گردد تا عملکرد فرایند به میزان قابل توجهی بهبود یابد. بنابراین، معمولاً بیان می‌شود که C_p کارایی بالقوه فرایند و C_{pk} کارایی واقعی آن را اندازه‌گیری می‌کند.

۸.۱.۱ نکاتی دیگر در مورد تمرکز فرایند

اگر میانگین فرایند μ دقیقاً در وسط فاصله بین حدود مشخصات فنی قرار نداشته باشد، آنگاه معیار C_p با مشکل مواجه خواهد شد. با این حال، C_{pk} نیز به تنهایی نمی‌تواند معیاری کافی در رابطه با مرکز فرایند باشد. به عنوان مثال، دو فرایند ارائه شده در شکل ۸.۱ را در نظر بگیرید. هر دو فرایند A و B دارای $C_{pk} = 1$ هستند ولی مرکز آن‌ها با یکدیگر متفاوت است. به منظور تعیین مرکز فرایند به نحو مناسب، C_{pk} باید با C_p مقایسه گردد. برای فرایند A ، $C_p = C_{pk} = 1$ است. به عبارت دیگر، فرایند دقیقاً در وسط فاصله بین حدود مشخصات فنی متمرکز شده است. برای فرایند B ، $C_p = 2 > C_{pk} = 1$ است. به عبارت دیگر، فرایند دقیقاً در وسط فاصله بین حدود مشخصات فنی متمرکز نگردیده است. برای هر مقدار ثابتی از μ که در فاصله بین USL و LSL قرار داشته باشد، C_{pk} یک رابطه معکوس با σ دارد و در صورت افزایش C_p ، σ به سمت صفر میل می‌کند. این خاصیت باعث می‌گردد تا C_{pk} نتواند معیار مناسبی در رابطه با مرکز فرایند باشد.

به عبارت دیگر، یک مقدار بزرگ C_{pk} چیزی در مورد مکان واقع شدن میانگین در فاصله بین USL و LSL منعکس نمی‌کند. یک راه برطرف کردن این مشکل، استفاده از نسبت کارایی فرایندی است که بتواند بهتر نقطه تمرکز فرایند را مشخص نماید. رابطه زیر یکی از این نسبت‌ها است:

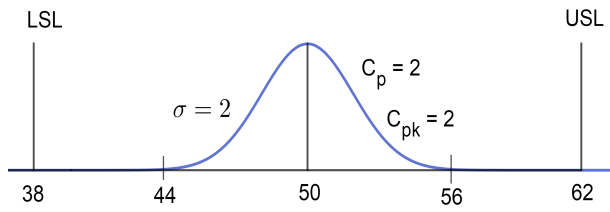
$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\tau} \quad (۴.۱)$$

در رابطه فوق، τ جذر امید ریاضی مربع انحراف از مقدار هدف $T = \frac{1}{2}(USL + LSL)$ تعریف شده است و یا به عبارت دیگر:

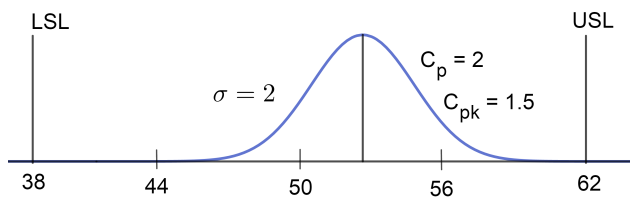
$$\begin{aligned} \tau^2 &= E[(X - T)^2] \\ &= E[(X - \mu)^2] + (\mu - T)^2 \\ &= \sigma^2 + (\mu - T)^2 \end{aligned}$$

بنابراین، رابطه (۴.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

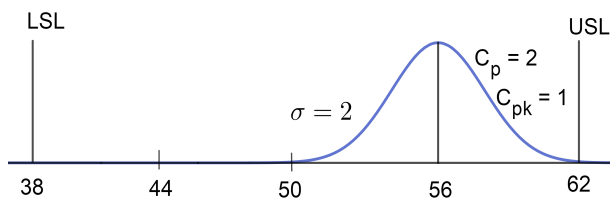
$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad (۵.۱)$$



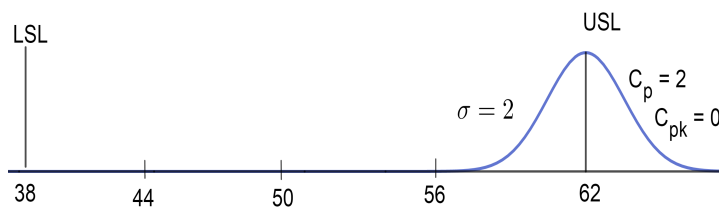
(آ)



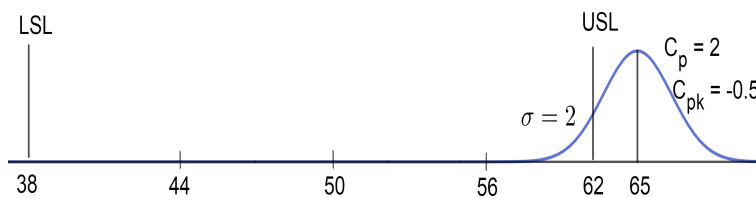
(ب)



(ج)

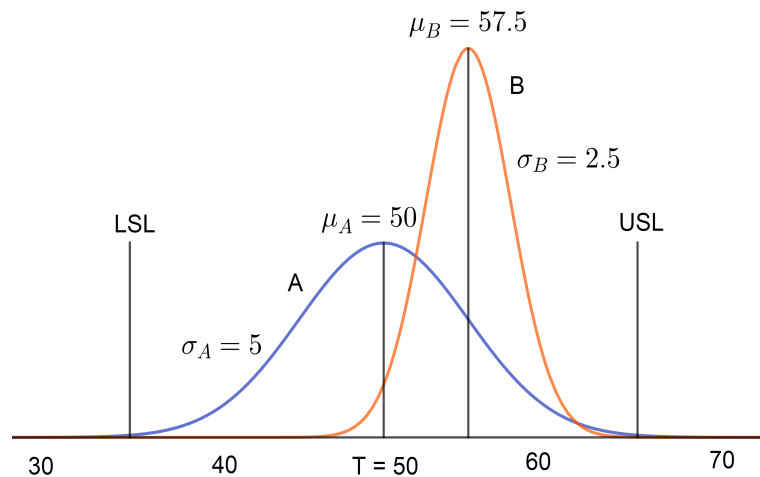


(د)



(ه)

شکل ۷.۱: ارتباط بین C_p و C_{pk}



شکل ۸.۱: دو فرایند با $C_{pk} = 1$

به طوری که

$$\xi = \frac{T - \mu}{\sigma}$$

یک روش منطقی برآورد C_{pm} استفاده از رابطه زیر است:

$$\hat{C}_{pm} = \frac{\hat{C}_p}{\sqrt{1 + V^2}}$$

به طوری که

$$V = \frac{T - \bar{x}}{s}$$

قابل ذکر است که اشاره کنیم زمانی که $\mu = T$ است، هر دو نسبت کارایی C_{pk} و C_{pm} با C_p برابر هستند و وقتی که μ از T فاصله می‌گیرد مقادیر آنها نیز کاهش می‌یابد. با این حال، به ازای $\mu > USL$ یا $\mu < LSL$ شاخص $C_{pk} < 0$ خواهد بود. در حالی که اگر $|\mu - T| \rightarrow \infty$ مقدار C_{pm} به طور مجانبی به سمت صفر میل خواهد کرد.

مثال ۲.۱.۱. به منظور نشان دادن کاربرد C_{pm} ، دو فرایند A و B در شکل ۸.۱ را در نظر بگیرید. از آنجایی که میانگین فرایند A در نقطه هدف $T = 50$ قرار دارد، لذا:

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1$$

توجه داشته باشید که برای فرایند A ، $C_{pm} = C_{pk}$ است. حال فرایند B را در نظر بگیرید:

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + (3)^2}} = 0.63$$

با بررسی شکل ۸.۱ می‌توان مشاهده کرد که میانگین فرایند حدوداً در نیمه میانی فاصله بین حدود مشخصات فنی واقع شده‌است.

مرجع [۵۶] رابطه زیر را به عنوان نسبت کارایی فرایند پیشنهاد می‌کند:

$$C_{pmk} = \frac{C_{pk}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}} = \frac{C_{pk}}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad (۶.۱)$$

در بعضی مواقع نسبت C_{pmk} که بر اساس نسبت‌های نسل دوم یا C_{pk} و C_{pm} که متقابلاً بر اساس نسل اول یا C_p محاسبه شده‌اند را نسبت قابلیت (کارایی) فرایند نسل سوم می‌نامند. هدف از ارائه این نسبت جدید، افزایش حساسیت نسبت به دور شدن میانگین فرایند μ از مقدار هدف T است.

مثال ۳.۱.۱. مفروضات مثال ۲.۱.۱ را در نظر بگیرید. برای فرایندهای A و B شاخص C_{pmk} را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$C_{pmk_A} = \frac{C_{pk_A}}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1$$

$$C_{pmk_B} = \frac{C_{pk_B}}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (3)^2}} = 0.31$$

همانطور که از روابط پیداست، زمانی که $\mu = M$ است، مقادیر تمامی شاخص‌ها یکسان می‌شود و زمانی که $\mu \neq M$ باشد، هر یک از شاخص‌ها، مقادیر مختلفی به دست می‌دهند. به عنوان مثال، برای مقایسه شاخص‌ها و میزان استفاده از حدود مشخصات برای هر یک از شاخص‌ها، جدول ۴.۱ را ارائه کرده‌ایم.

جدول ۴.۱: مقایسه شاخص‌ها و میزان درصد استفاده از حدود مشخصات

شاخص‌ها	مقادیر	P
C_p	۲	۵۰٪
C_{pk}	۱	۱۰۰٪
C_{pm}	۰/۶۳	۱۵۸/۷۳٪
C_{pmk}	۰/۳۱	۳۲۲/۵۸٪

۹.۱.۱ بررسی حالت‌های مختلف تلورانس نامتقارن

فرض کنید مشخصه مورد بررسی یک محصول را با متغیر X نشان می‌دهیم. بازه تلورانس برای X شامل حد پایین مشخصه (LSL)، حد بالای مشخصه (USL) و مقدار هدف (T) که

نقطه‌ای بین حدود بالا و پایین تلورانس است، می‌باشد. تلورانس فرایند را متقارن گوئیم هرگاه مقدار هدف در وسط بازه تلورانس یعنی $T = M = \frac{LSL+USL}{2}$ باشد. در این حالت مقدار $T - LSL$ و $USL - T$ یکسان است.

قابل ذکر است که، تلورانس متقارن در بسیاری از فرایندها مورد استفاده قرار می‌گیرد، اما موارد زیادی وجود دارد که T در وسط بازه تلورانس قرار نمی‌گیرد. در این صورت، تلورانس را نامتقارن می‌نامیم. در این حالت، فاصله T از حدود بالا و پایین مشخصه متفاوت است و با $D_u = USL - T$ و $D_l = T - LSL$ نشان داده می‌شود.

در شکل ۹.۱، حالات مختلف تلورانس متقارن و نامتقارن رسم شده‌است، به طوری که در شکل‌های (ب) و (ه) میانگین در وسط بازه تلورانس قرار دارد و فرایند درست بر حدود مشخصات واقع شده‌است. در حالی که، در شکل‌های دیگر میانگین در وسط بازه تلورانس قرار ندارد، در این صورت اقلام نامنطبق بیشتری نسبت به شکل‌های (ب) و (ه) خواهد داشت.

برخی از حالاتی که تلورانس نامتقارن برای فرایند اتفاق می‌افتد در زیر توضیح داده می‌شود

[۹]:

۱. در برخی فرایندها، توزیع داده چوله است و مصرف‌کننده به تولیدکننده اجازه می‌دهد

که حدود تلورانس را بر اساس توزیع داده‌ها تعیین کند. یک روش برای تعیین حدود تلورانس، به صورت $(LSL, T, USL) = (P_\alpha, P_{\sigma/5}, P_{1-\alpha})$ برای مقادیر مثبت و کوچک α می‌باشد. P_α صدک 100α ام توزیع فرایند می‌باشد. برای توزیع چوله واضح است که

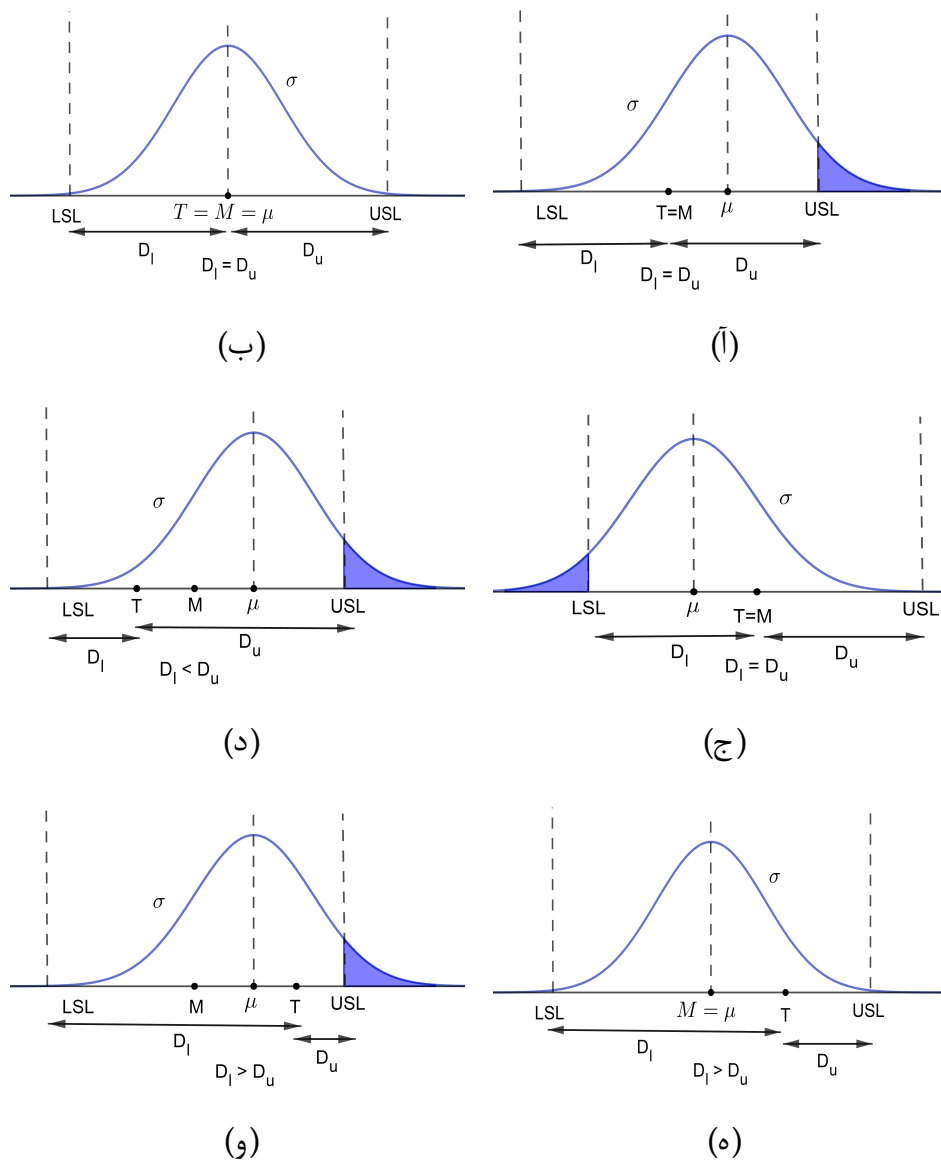
$$D_l = P_{\sigma/5} - P_\alpha \neq P_{1-\alpha} - P_{\sigma/5} = D_u$$

به عنوان مثال، فرض کنید برای یک فرایند حدود تلورانس به صورت (۳۹، ۴۲، ۴۵) باشد یعنی 42 ± 3 . شکل ۱۰.۱ هیستوگرام ۲۱ داده جمع‌آوری شده از فرایند را نشان می‌دهد. واضح است که تولیدات فرایند نمی‌توانند حد بالا یعنی ۴۵ را برقرار کنند (تا آنجا باشد). در اینجا مصرف‌کننده راغب است که حد بالا را تا ۵۱ گسترش دهد که در این حالت، تلورانس نامتقارن به صورت (۳۹، ۴۲، ۵۱) می‌شود.

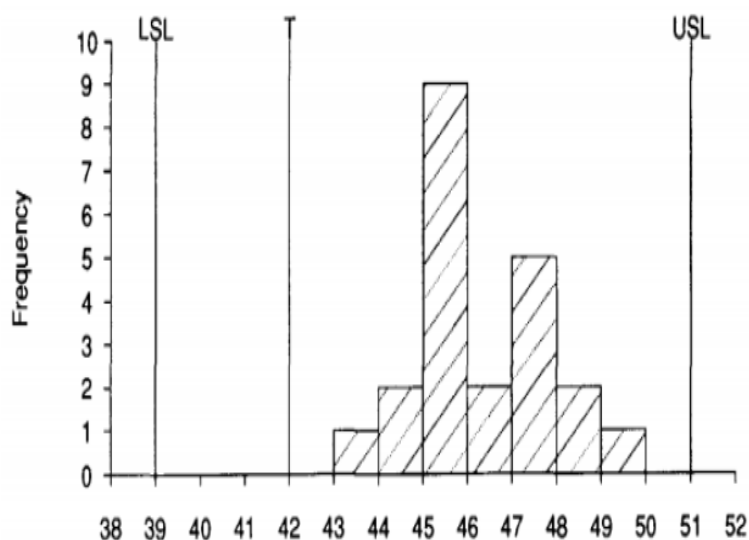
۲. تلورانس‌های نامتقارن، ممکن است در اثر تبدیل داده‌ها برای رسیدن به توزیع نرمال

به وجود آیند. فرض کنید X یک متغیر تصادفی غیر نرمال و دارای تلورانس متقارن (LSL, T, USL) باشد. اگر $Y = g(X)$ توزیع نرمال تقریبی داشته باشد که در آن، g تابع غیر خطی صعودی باشد، کار کردن Y به جای X ساده‌تر است و بنابراین، Y دارای تلورانس نامتقارن $(g(LSL), g(T), g(USL))$ خواهد بود.

به عنوان مثال، فرض کنید تلورانس فرایندی با $(LSL, T, USL) = (30, 35, 40)$ باشد. همچنین، فرض کنید مشخصه مربوطه X از توزیع غیر نرمال پیروی می‌کند که با انجام تبدیل ریشه دوم به مشخصه نرمال تبدیل می‌شود. به بیان دیگر، $Y = \sqrt{X}$ از توزیع نرمال پیروی می‌کند. بنابراین، متغیر Y با تلورانس نامتقارن $(\sqrt{30}, \sqrt{35}, \sqrt{40})$ را به



شکل ۹.۱: برخی از حالت‌های مختلف $T = M$ و $T \neq M$



شکل ۱۰.۱: نمودار هیستوگرام مربوط به داده‌های فرایند

کار می‌گیریم.

۳. در برخی موارد، تلورانس‌های نامتقارن به شکل توزیع فرایند مربوط نمی‌شوند و به سادگی منعکس‌کننده نظر مصرف‌کننده (نگرش مصرف‌کننده) هستند که از نظر مصرف‌کننده، انحراف مقدار هدف در یک سمت نسبت به دیگر کمتر انجام می‌پذیرد. در این موارد، تولیدکننده تمایل مصرف‌کننده را در مورد این که تلورانس را در یک طرف مقدار هدف نسبت به طرف دیگر پهن‌تر کند در نظر می‌گیرد.

به طور مثال، فرض کنید مقدار هدف برای اندازه مشخصه‌ای برابر با ۳۰ باشد. از نظر مصرف‌کننده مقدار مشخصه نباید کمتر از ۲۸ باشد. همچنین، هنگامی که اندازه مشخصه از مقدار هدف بزرگ‌تر است، نباید بیشتر از ۳۶ باشد. در این صورت، بازه تلورانس را برابر با (۲۸, ۳۰, ۳۶) در نظر می‌گیرند که نامتقارن است.

به عنوان نمونه در ادامه، شاخصی را تعریف می‌کنیم که برای تلورانس‌های نامتقارن مناسب است.

تعریف ۱.۱.۱. شاخص C_{pm}^* تعمیمی از شاخص C_{pm} می‌باشد، با این تفاوت که این شاخص

برای تلورانس‌های نامتقارن مناسب است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} C_{pm}^* &= \frac{\min\{T - LSL, USL - T\}}{\sqrt{3}\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \\ &= \frac{d^*}{\sqrt{3}\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \\ &= \frac{D}{\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \end{aligned} \quad (7.1)$$

۱۰.۱.۱ معرفی شاخص ناکارایی فرایند

گرینویچ و جهراسکافرت [۲۸] با معکوس کردن رابطه (۷.۱) و به توان دوم رساندن آن، یعنی

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{C_{pm}^*}\right)^2 &= \frac{\sigma^2 + (\mu - T)^2}{D^2} \\ &= \left(\frac{\mu - T}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{D}\right)^2 \end{aligned}$$

شاخص ناکارایی C_{pp} را به صورت زیر تعریف کردند:

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید مشخصه مورد بررسی محصولات فرایندی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. همچنین بازه تلورانس برابر است با (LSL, USL) . آنگاه، شاخص ناکارایی C_{pp} را به صورت

$$C_{pp} = C_{ia} + C_{ip} \quad (8.1)$$

خواهیم داشت، که در آن $C_{ia} = \left(\frac{\mu - T}{D}\right)^2$ شاخص عدم درستی^۸ و $C_{ip} = \left(\frac{\sigma}{D}\right)^2$ شاخص عدم دقت^۹ می‌باشند.

شاخص C_{pp} به طور گسترده‌ای جهت خلاصه‌سازی عملکرد فرایند مورد استفاده قرار گرفته‌است؛ چرا که این شاخص عدم دقت و عدم درستی فرایند را به طور همزمان با استفاده از دو شاخص C_{ia} و C_{ip} شناسایی و بررسی می‌کند. در حقیقت شاخص C_{ia} که عدم درستی فرایند را نشان می‌دهد، انحراف میانگین از مقدار هدف را شامل می‌شود و همچنین شاخص C_{ip} که عدم دقت فرایند را در بر می‌گیرد، مقدار تغییرپذیری (یا به عبارتی پراکندگی) فرایند را شامل می‌شود [۳۵].

اغلب، شاخص‌های کارایی فرایند برای ارزیابی عملکرد فرایند به کار گرفته می‌شوند؛ زیرا دقت و درستی فرایند مهم است. بنابراین این جداسازی اطلاعات از اهمیت بالایی برخوردار است؛ زیرا حاکی از آن است که به چه میزان عدم درستی فرایند باعث ناکارا شدن فرایند در ارائه

^۸Inaccuracy index

^۹Imprecision index

مشخصات می‌شود (یا به عبارت دیگر به چه میزان عدم درستی فرایند باعث عدم انطباق فرایند با مشخصات در نظر گرفته شده، می‌شود) [۳۵].

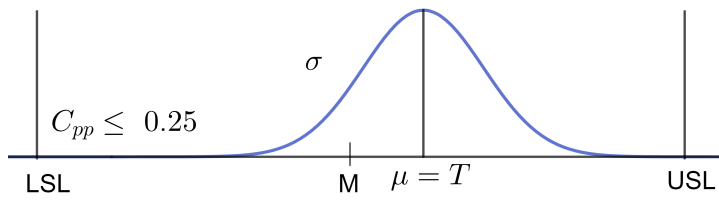
حال اگر شاخص C_{pp} مقدار کوچکتری را شامل شود آنگاه فرایند مورد بررسی کارا است (یا فرایند مورد بررسی با مشخصات در نظر گرفته شده مطابقت دارد) و اگر مقدار بزرگتری را شامل شود، آنگاه فرایند، کارایی کمتری خواهد داشت. زمانی فرایند بیشترین کارایی را دارد که $C_{pp} = 0$ شود. این به این معناست که میانگین فرایند دقیقاً روی مقدار هدف قرار گرفته باشد (یا $T = \mu$) و واریانس نیز برابر صفر باشد ($\sigma^2 = 0$). لذا، هر مقدار غیر صفر C_{pp} می‌تواند شامل چندین میزان از ناکارایی فرایند شود [۳۵]. این میزان از درجه‌بندی ناکارایی فرایند توسط چن و چن [۱۸] در نظر گرفته شده و در جدول ۵.۱ نشان داده شده است. حالت‌های مختلف وضعیت کیفیت شاخص C_{pp} نیز، در شکل ۱۱.۱ رسم شده‌اند.

جدول ۵.۱: طبقه‌بندی وضعیت کیفیت (مرجع [۱۸])

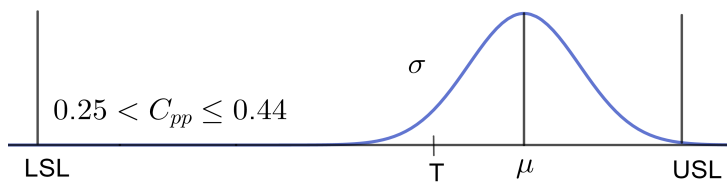
C_{pp}	وضعیت کیفیت
$C_{pp} > 1$	نامناسب
$1 \geq C_{pp} > 0/56$	قابل استفاده
$0/56 \geq C_{pp} > 0/44$	متوسط
$0/44 \geq C_{pp} > 0/25$	خوب
$0/25 \geq C_{pp}$	عالی

قابل ذکر است که، شاخص C_{pp} به طور گسترده‌ای جهت ارائه معیارهای عددی مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است، از آنجایی که نشان می‌دهد، یک فرایند در مقابل مشخصات در نظر گرفته شده کارا هست یا نه (یا به عبارتی مطابقت دارد یا نه) [۳۵].

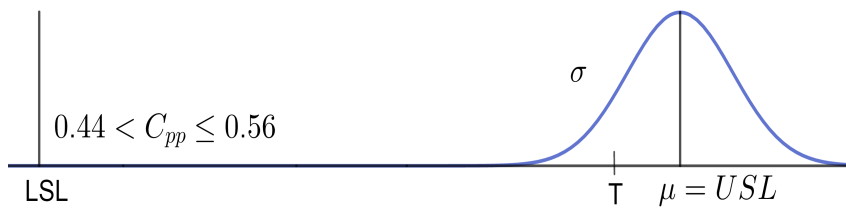
این شاخص در بیان ناکارایی فرایند در برخی موارد نارساست که برای رفع این مشکل تعمیمی از این شاخص به نام شاخص C_{pp}'' معرفی شده است که در فصل دوم به این موضوع می‌پردازیم.



(ا)



(ب)



(ج)



(د)



(ه)

شکل ۱۱.۱: حالت‌های مختلف وضعیت کیفیت شاخص C_{pp}

۲.۱ منطق فازی

۱.۲.۱ مقدمه

مفاهیم نادقیق بسیاری در اطراف ما وجود دارند که آن‌ها را به صورت روزمره در قالب عبارت‌های مختلف بیان می‌کنیم. به عنوان مثال «هوا خوب است» هیچ کمیتی برای خوب بودن هوا مطرح نیست تا آن را به طور دقیق اندازه‌گیری نماییم، بلکه این یک حس کیفی است. منطق فازی فناوری جدیدی است که شیوه‌هایی را که برای طراحی و مدل‌سازی یک سیستم نیازمند ریاضیات پیچیده و پیشرفته است، با استفاده از مقادیر زبانی و دانش فرد خبره جایگزین می‌سازد.

در جهان واقعیات، بسیاری از مفاهیم را آدمی به صورت فازی (به معنای غیر دقیق، ناواضح و مبهم) درک می‌کند و به کار می‌بندد. به عنوان نمونه کلماتی چون، گرم، سرد، جوان، پیر، کوتاه، بلند و غیره به عدد خاص و دقیقی اشاره نمی‌کند، اما ذهن انسان با سرعت و با انعطاف‌پذیری شگفت‌آوری همه را می‌فهمد و در نتیجه‌گیری‌های خود به کار می‌گیرد. این در حالیست که ماشین فقط اعداد را می‌فهمد.

منطق فازی اولین بار در پی تنظیم مجموعه‌های فازی توسط پروفیسور زاده [۶۵] در سال ۱۹۶۵ میلادی در صحنه‌ی محاسبات نو ظاهر شد. کاربرد این بخش در علوم نرم‌افزاری را می‌توان به طور ساده این‌گونه تعریف کرد: منطق فازی از منطق ارزش‌های «صفر و یک» نرم‌افزارهای کلاسیک فراتر رفته و درگاهی جدید برای دنیای علوم نرم‌افزاری و رایانه‌ها می‌گشاید، زیرا فضای شناور و نامحدود بین اعداد صفر و یک را نیز در منطق و استدلال‌های خود به کار برده و به چالش می‌کشد.

تعریف ۱.۲.۱. یک زیرمجموعه فازی (از این پس به کوتاهی: مجموعه فازی) از مجموعه مرجع X ، توسط یک تابع $\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]$ به نام تابع عضویت مشخص می‌شود که در آن برای هر x از X ، مقدار $\mu_A(x)$ میزان عضویت x در مجموعه فازی A را نشان می‌دهد. برای کوتاهی از این پس، به جای $\mu_A(x)$ می‌نویسم $A(x)$. تکیه‌گاه A را با $supp(A)$ نشان داده و مجموعه تکیه‌گاه می‌نامند و اعضای آن همه x هایی هستند که درجه عضویت آن‌ها بزرگتر از صفر است. به عبارت دیگر

$$supp(A) = \{x \in X \mid A(x) > 0\}$$

به مجموعه عضوهایی از X که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه A یک باشد، هسته مجموعه فازی گفته می‌شود و آن را با $core(A)$ نشان داده و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$core(A) = \{x \in X \mid A(x) = 1\}$$

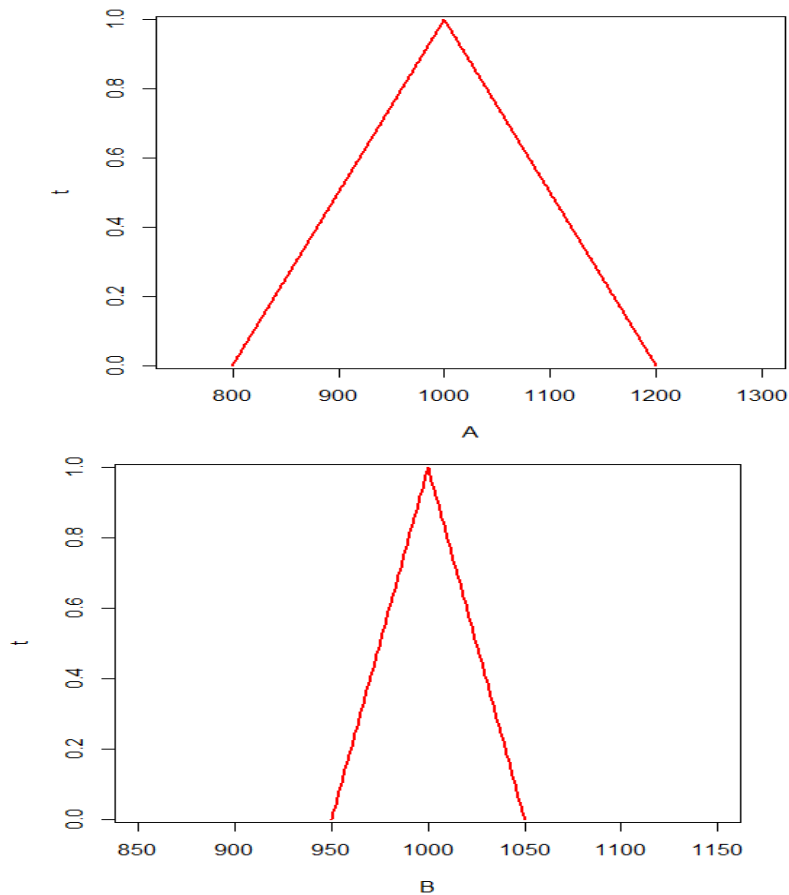
در شکل ۱۳.۱ نمودار تابع عضویت یک مجموعه فازی به همراه تکیه‌گاه و هسته آن نشان داده شده‌است.

مثال ۱.۲.۱. فرض کنید مجموعه فازی A توصیف کننده «طول عمر حدوداً ۱۰۰۰» و مجموعه فازی B توصیف کننده «طول عمر بسیار نزدیک به ۱۰۰۰» بر حسب ساعت بر اساس توابع عضویت زیر باشند:

$$A(t) = \begin{cases} \frac{t-800}{200}, & 800 \leq t < 1000 \\ \frac{1200-t}{200}, & 1000 \leq t < 1200 \end{cases}$$

$$B(t) = \begin{cases} \frac{t-950}{50}, & 950 \leq t < 1000 \\ \frac{1050-t}{50}, & 1000 \leq t < 1050 \end{cases}$$

نمودار توابع عضویت این دو مجموعه فازی در شکل ۱۲.۱ رسم شده است. با توجه به توابع عضویت مذکور، اگر طول عمر یک لامپ ۹۸۰ ساعت باشد، با درجه عضویت ۰/۹ طول عمر آن حدوداً ۱۰۰۰ و با درجه عضویت ۰/۶ طول عمر آن بسیار نزدیک به ۱۰۰۰ است. مجموعه



شکل ۱۲.۱: نمودارهای توابع عضویت مجموعه‌های فازی A (شکل بالایی) و B (شکل پایینی)

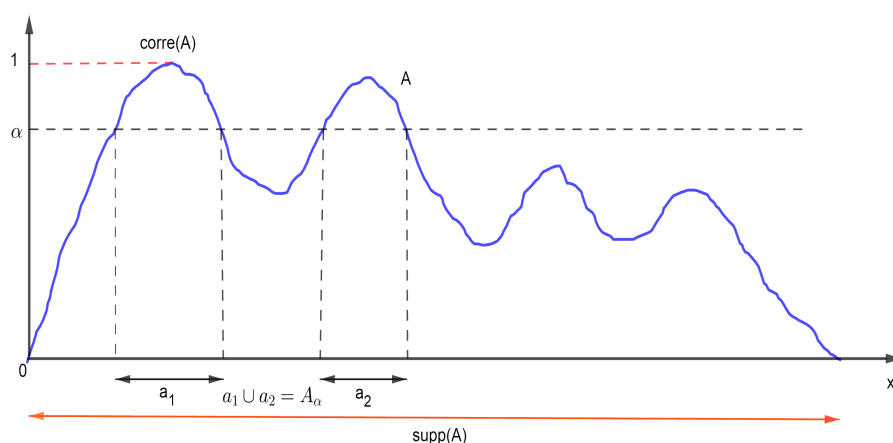
تکیه‌گاه به ترتیب برای A به صورت $(800, 1200)$ و برای B به صورت $(950, 1050)$ می‌باشد.

هسته مجموعه فازی نیز برای هر دو مجموعه فازی A و B برابر $\{1\}$ می‌باشد.

تعریف ۲.۲.۱ (α -برش). مجموعه (معمولی) عنصری از X را که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی A دست کم به بزرگی α ($0 < \alpha \leq 1$) باشد، α -برش A (مجموعه تراز α وابسته به A) گوییم و با A_α نشان می‌دهیم، یعنی

$$A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\}$$

در شکل ۱۳.۱ α -برش مجموعه فازی A نشان داده شده‌است.



شکل ۱۳.۱: نمودار تابع عضویت مجموعه فازی A به همراه تکیه‌گاه، هسته و α -برش آن

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ و A مجموعه فازی تعریف شده از X با تابع عضویت زیر باشد:

$$A(x) = \left\{ \frac{0}{0}, \frac{0}{4}, \frac{0}{6}, \frac{0}{8}, 1 \right\}$$

بنابراین α -برش آن‌ها را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$A(0/2) = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad A(0/4) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A(0/6) = \{3, 4\}, \quad A(0/8) = \{4\}$$

قضیه ۱.۲.۱ (اتحاد تجزیه). [۲] هر مجموعه فازی مانند A را می‌توان به صورت زیر برحسب مجموعه‌های تراز آن تجزیه کرد.

$$A = \bigcup_{\alpha} \alpha A_{\alpha}$$

که در آن αA_{α} یک مجموعه فازی با تابع عضویت $(\alpha A)(x) = \alpha A(x)$ است.

مثال ۳.۲.۱. در مثال ۲.۲.۱، اتحاد تجزیه را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$A = \circ/2\{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \circ/4\{1, 2, 3, 4\} \cup \circ/6\{2, 3, 4\} \cup \circ/8\{3, 4\} \cup 1\{4\}$$

$$= \left\{ \frac{\circ/2}{0}, \frac{\circ/4}{1}, \frac{\circ/6}{2}, \frac{\circ/8}{3}, \frac{1}{4} \right\}$$

قضیه ۱.۲.۱ (قضیه نمایش). [۲] فرض کنید $\{B_\alpha\}_{\alpha \in [0, 1]}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد که $B_0 = X$. شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعه فازی A از X وجود داشته باشد به طوری که برای هر $\alpha \in [0, 1]$ داشته باشیم $A_\alpha = B_\alpha$ ، آن است که برای هر $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ که $B_{\alpha_2} \subseteq B_{\alpha_1}$ ، $\alpha_1 < \alpha_2$.

مثال ۴.۲.۱. فرض کنید مجموعه‌های معمولی B_{α_1} تا B_{α_4} و اعداد α_1 تا α_4 متناظر با آن‌ها به صورت زیر داده شده باشند:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, & B_{\alpha_1} &= \{x_3\} \\ \alpha_2 &= \circ/75, & B_{\alpha_2} &= \{x_2, x_3\} \\ \alpha_3 &= \circ/45, & B_{\alpha_3} &= \{x_2, x_3, x_5\} \\ \alpha_4 &= \circ/25, & B_{\alpha_4} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \end{aligned}$$

چون مجموعه‌های فوق به همراه α_1 تا α_4 در شرط قضیه نمایش صدق می‌کنند پس بر پایه این دنباله از مجموعه‌ها یک مجموعه فازی مانند A (با α -برش‌های $A_\alpha = B_\alpha$) به صورت زیر ساخته می‌شوند:

$$A = \bigcup_{\alpha} \alpha A_\alpha = \alpha_1 A_{\alpha_1} \cup \alpha_2 A_{\alpha_2} \cup \alpha_3 A_{\alpha_3} \cup \alpha_4 A_{\alpha_4}$$

$$= \left\{ \frac{\circ/25}{x_1}, \frac{\circ/75}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{\circ/25}{x_4}, \frac{\circ/45}{x_5} \right\}$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید f یک تابع از X به Y باشد، یعنی

$$y = f(x), \quad x \in X, y \in Y$$

این تابع به هر نقطه از X ، نقطه‌ای از Y را می‌نگارد. حال فرض کنید A زیرمجموعه معمولی از X باشد با استفاده از f و A می‌توانیم نگاشت A تحت f ، یعنی $f(A)$ را به صورت زیر به دست آوریم

$$f(A) = \{f(a) \in Y | a \in A\}$$

اکنون می‌خواهیم f را طوری توسیع (گسترش) دهیم که به جای این که صرفاً به یک نقطه از X یا یک زیرمجموعه معمولی از X عمل کند، بتواند بر یک زیرمجموعه فازی از X نیز عمل کند. مسلماً انتظار داریم که $f(A)$ حاصل عمل f بر مجموعه فازی A از X ، دیگر یک مجموعه معمولی از Y نباشد، بلکه یک مجموعه فازی از Y مانند $B = f(A)$ باشد. در اینجا

تعیین تابع عضویت $B(y)$ مهم است. واضح است که اگر f تابعی یک به یک باشد، آنگاه $B(y) = A(f^{-1}(y))$.

تعریف ۴.۲.۱ (اصل گسترش). فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع و A یک مجموعه فازی از X باشد. در این صورت $B = f(A)$ به صورت یک مجموعه فازی از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$B(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x); x \in X} A(x), & f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ \circ, & f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases}$$

که در آن $f^{-1}(\{y\})$ نگاشت معکوس f است که گاهی آن را با $f^{-1}(y)$ نشان می‌دهند.

مثال ۵.۲.۱. فرض کنید $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و $f: X \rightarrow Y$ و تابع آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} ۱, & x = \{a_1, a_2, a_4\} \\ ۲, & x = \{a_3, a_5\} \end{cases}$$

و مجموعه فازی A را که تعریف شده از مجموعه مرجع است، با تابع عضویت زیر خواهیم داشت:

$$A(x) = \left\{ \frac{۱}{a_1}, \frac{\circ/۷}{a_2}, \frac{\circ/۵}{a_3}, \frac{\circ/۳}{a_4}, \frac{\circ}{a_5} \right\}$$

در نتیجه طبق اصل گسترش داریم:

$$B(y) = \begin{cases} ۱, & x = \{a_1, a_2, a_4\} \\ \circ/۵, & x = \{a_3, a_5\} \end{cases}$$

که به صورت زیر محاسبه شده است:

$$B(۱) = \sup_{x \in \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}} A(x) = \sup\{A(a_1), A(a_2), A(a_4)\} = \sup\{۱, \circ/۷, \circ/۳\} = ۱$$

$$B(۲) = \sup_{x \in \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}} A(x) = \sup\{A(a_3), A(a_5)\} = \sup\{\circ/۵, \circ\} = \circ/۵$$

تعریف ۵.۲.۱ (اصل توسیع برای چند مجموعه). فرض کنید X_1, \dots, X_n مجموعه مرجع و $X = X_1 \times \dots \times X_n$ حاصل ضرب دکارتی آن‌ها باشد همچنین A_1, \dots, A_n مجموعه فازی به ترتیب از X_1, \dots, X_n باشند. به علاوه $y = f(x_1, \dots, x_n)$ یک نگاشت از X به Y باشد. حاصل عمل f بر n مجموعه فازی A_1, \dots, A_n به صورت مجموعه فازی B از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$B(y) = f(A_1, \dots, A_n)(y) = \begin{cases} \sup_{x_1, \dots, x_n} y = f(x_1, \dots, x_n) \min\{A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \circ, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

که در آن $f^{-1}(y)$ نگاشت معکوس y تحت f است.

مثال ۶.۲.۱. فرض کنید $X_1 = X_2 = N$ مجموعه اعداد صحیح مثبت، A_1 مجموعه فازی تقریباً ۴ و A_2 مجموعه فازی تقریباً ۳ به صورت زیر باشند:

$$A_1 = \left\{ \frac{0.3}{2}, \frac{0.7}{3}, \frac{1}{4}, \frac{0.7}{5}, \frac{0.3}{6} \right\}, \quad A_2 = \left\{ \frac{0.6}{2}, \frac{1}{3}, \frac{0.6}{4} \right\}$$

آنگاه بر اساس اصل توسیع می‌توان جمع دو مجموعه فازی تقریباً ۴ و تقریباً ۳ را انجام داد. به طور مثال:

$$\begin{aligned} (A_1 \oplus A_2)(5) &= \max_{x_1+x_2=5} \min\{A_1(x_1), A_2(x_2)\} \\ &= \max\{\min\{A_1(3), A_2(2)\}, \min\{A_1(2), A_2(3)\}\} = \max\{0.3, 0.6\} = 0.6 \end{aligned}$$

و سرانجام

$$A_1 \oplus A_2 = \left\{ \frac{0.3}{4}, \frac{0.6}{5}, \frac{0.7}{6}, \frac{1}{7}, \frac{0.7}{8}, \frac{0.6}{9}, \frac{0.3}{10} \right\}$$

ملاحظه می‌کنید که $A_1 \oplus A_2$ را می‌توان تعبیری از یک مجموعه فازی که تقریباً ۷ را مدل‌سازی می‌کند تعبیر کرد، و این چیزی است که انتظار آن را داریم.

۲.۲.۱ اعداد فازی

اعداد فازی، که زیرمجموعه‌های فازی خاصی از مجموعه اعداد حقیقی هستند، در بیشتر مسائل کاربردی استفاده می‌شوند. در این بخش اعداد فازی و نوع ویژه‌ای از آن‌ها، موسوم به اعداد فازی LR را مرور می‌کنیم.

تعریف ۶.۲.۱. مجموعه فازی N از \mathbb{R} (اعداد حقیقی) را یک عدد فازی (حقیقی) گوییم، اگر

۱. N نرمال و تک‌نمایی باشد. یعنی یک و دقیقاً یک $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که

$$.N(x_0) = 1$$

۲. $-\alpha$ -برش‌های N ، به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، به صورت بازه‌های بسته باشند.

مجموعه همه‌ی اعداد فازی را با $F(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.

۳.۲.۱ اعداد فازی LR

اعداد فازی LR نوع خاصی از اعداد فازی هستند که علاوه بر آنکه ساختار ویژه‌ای دارند، اعمال حسابی بر آن‌ها نیز از قواعد خاصی پیروی می‌کند. این ساختار و این قواعد باعث شده است که در عمل، عمدتاً از این نوع اعداد فازی استفاده شود.

تعریف ۷.۲.۱. اگر ساختار تابع عضویت عدد فازی N به صورت زیر باشد:

$$N(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\alpha}), & x \leq m \\ R(\frac{x-m}{\beta}), & x > m \end{cases}$$

که در آن L تابع غیر نزولی و R تابع غیر صعودی از \mathbb{R}^+ (مجموعه اعداد حقیقی مثبت) به $[0, 1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$ ، آنگاه N را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $N = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان می‌دهیم. عدد m را مقدار نما (یا میانه) و اعداد مثبت α و β را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست N می‌نامیم. L و R توابع مرجع (یا توابع شکل) نامیده می‌شوند. توابع رایج برای L (به طور مشابه برای R) عبارتند از $(x \in \mathbb{R})$:

$$L(x) = \max\{0, 1 - |x|^p\} \quad (L(x) = 1 - |x|^p)$$

$$L(x) = \exp^{-|x|^p}$$

$$L(x) = \frac{1}{1 + |x|^p}$$

$$L(x) = \frac{1}{1 + p|x|}$$

که در آن‌ها $p > 0$.

مثال ۷.۲.۱. فرض کنید N یک عدد فازی LR متقارن باشد و $L(x) = R(x) = \frac{1}{1+|x|^p}$ و $m = 0$ و $\alpha = \beta = 1$ و $p = 1$.

$$N(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+|x|}, & x \leq 0 \\ \frac{1}{1+|x|}, & x > 0 \end{cases}$$

با استفاده از نمودار ۱۴.۱ می‌توان N را یک عدد فازی تقریباً صفر در نظر گرفت.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید $N = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $L = R$. در این صورت:

۱. N را یک عدد فازی مثلثی نامیده و با $N = (m, \alpha, \beta)_T$ نشان می‌دهیم اگر

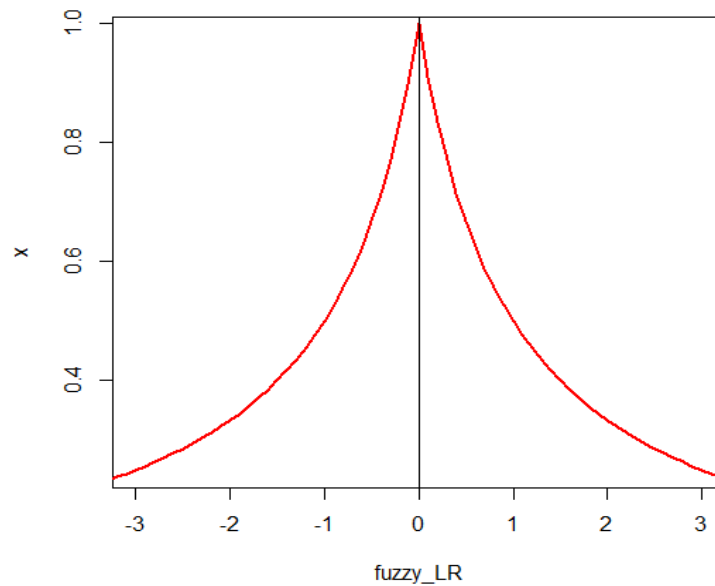
$$L(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$$

۲. N را یک عدد فازی نرمال نامیده و با $N = (m, \alpha, \beta)_N$ نشان می‌دهیم اگر

$$L(x) = \exp^{-|x|^2}$$

۳. N را یک عدد فازی سهموی نامیده و با $N = (m, \alpha, \beta)_P$ نشان می‌دهیم اگر

$$L(x) = \max\{0, 1 - x^2\}$$



شکل ۱۴.۱: نمودار تابع عضویت عدد فازی تقریباً صفر

تعریف ۹.۲.۱. اگر برای عدد فازی N ، $L = R$ و $\alpha = \beta$ ، آنگاه N را یک عدد فازی متقارن می‌نامیم و با $N = (m, \alpha)_L$ نشان می‌دهیم. اگر N عدد فازی متقارن مثلثی، نرمال یا سهموی باشد، به ترتیب از نمادهای $N = (m, \alpha)_T$ و $N = (m, \alpha)_N$ و $N = (m, \alpha)_P$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۸.۲.۱. فرض کنید N یک عدد فازی مثلثی به صورت زیر باشد و داشته باشیم:

$$L(x) = R(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$$

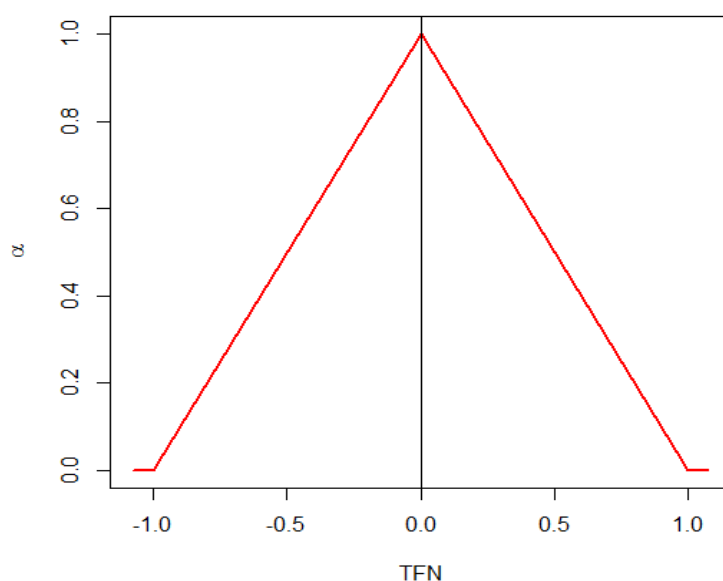
$$N(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 \leq x < 0 \\ 1 - x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با توجه به نمودار ۱۵.۱ می‌توان عدد فازی N را تقریباً صفر بیان کرد.

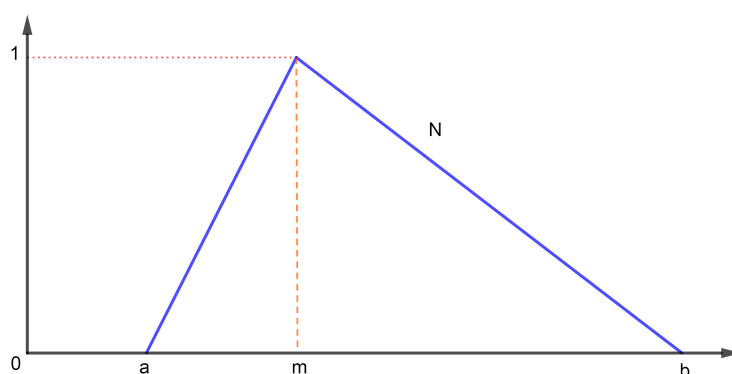
تعریف ۱۰.۲.۱. عدد فازی مثلثی را می‌توان به صورت زیر نیز تعریف کرد. به طوریکه تابع عضویت آن را به شکل زیر داشته باشیم:

$$N(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & a \leq x < m \\ \frac{b-x}{b-m}, & m \leq x < b \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و آن را با $T(a, m, b)$ نشان می‌دهند، که در آن a ، m و b به ترتیب، نقاط رأس چپ، رأس وسط و رأس راست مثلث می‌باشند. نمودار تابع عضویت عدد فازی مثلثی در شکل ۱۶.۱ آورده شده‌است.



شکل ۱۵.۱: نمودار تابع عضویت عدد فازی مثلثی تقریباً صفر

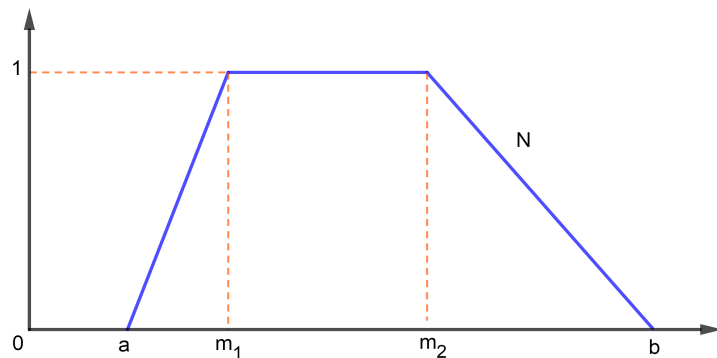


شکل ۱۶.۱: نمودار تابع عضویت عدد فازی مثلثی

تعریف ۱۱.۲.۱. عدد فازی دوزنقه‌ای را هم می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$N(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m_1-a}, & a \leq x < m_1 \\ 1, & m_1 \leq x < m_2 \\ \frac{b-x}{b-m_2}, & m_2 \leq x < b \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و آن را با $Tr(a, m_1, m_2, b)$ نشان می‌دهند، که در آن a, m_1, m_2, b به ترتیب، نقاط رأس چپ، رأس‌های وسط و رأس راست دوزنقه می‌باشند. در صورتی که $m_1 = m_2 = m$ باشند، عدد دوزنقه‌ای به عدد مثلثی تبدیل می‌شود. نمودار تابع عضویت عدد فازی دوزنقه‌ای در شکل



شکل ۱۷.۱: نمودار تابع عضویت عدد فازی ذوزنقه‌ای

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنید M و N دو عدد فازی و $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک عملگر دوتایی بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم عملگر $*$ را برای اعداد فازی با \otimes نشان دهیم، با استفاده از اصل توسیع، حاصل $M \otimes N$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$(M \otimes N)(z) = \sup_{z=x*y} \min[M(x), N(y)]$$

به طوریکه $*$ هر یک از چهار عملگر \oplus, \ominus, \otimes و \odot می‌تواند باشد.

قضیه ۲.۲.۱. [۲] اگر $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\lambda \in R$ آنگاه:

$$\lambda \otimes (m, \alpha, \beta)_{LR} = (\lambda m, \lambda \alpha, \lambda \beta)_{LR} \quad \lambda > 0$$

$$\lambda \otimes (m, \alpha, \beta)_{LR} = (\lambda m, -\lambda \beta, -\lambda \alpha)_{RL} \quad \lambda < 0$$

قضیه ۳.۲.۱. [۲] اگر $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $N = (n, \delta, \gamma)_{LR}$ ، آنگاه $M \oplus N$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است:

$$M \oplus N = (m + n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}$$

قضیه ۴.۲.۱. [۲] اگر $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $N = (n, \gamma, \delta)_{RL}$ ، آنگاه $M \ominus N$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است:

$$M \ominus N = (m - n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}$$

تذکره ۱.۲.۱. طبق تعریف ۲.۲.۱، اگر A_α ، α -برش عدد فازی A باشد، آنگاه دارای بازه‌ای است که این بازه شامل کمترین مقدار برای سمت چپ بازه و بیشترین مقدار برای سمت راست بازه است و آن را به صورت زیر نمایش میدهیم:

$$\tilde{A}_\alpha = [A_\alpha^L, A_\alpha^R]$$

و یا به عبارت دیگر:

$$\tilde{A}(\alpha) = [A_l(\alpha) \quad , \quad A_r(\alpha)]$$

تذکر ۲.۲.۱. اگر A و B دو عدد فازی به ترتیب با توابع عضویت \tilde{A} و \tilde{B} باشند، آنگاه برای جمع دو α -برش این دو عدد فازی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(\tilde{A} \oplus \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha + \tilde{B}_\alpha = [A_\alpha^L + B_\alpha^L \quad , \quad A_\alpha^R + B_\alpha^R]$$

۴.۲.۱ روش‌های رتبه‌بندی اعداد فازی

در یک محیط فازی، رتبه‌بندی اعداد فازی روش بسیار مهمی برای تصمیم‌گیری محسوب می‌شود. از آنجایی که، جین [۳۱، ۳۲] مفهوم مجموعه حداکثری را برای ترتیب اعداد فازی در سال‌های ۱۹۷۶ و ۱۹۷۷ به کار گرفت، دیگر نویسندگان نیز روش‌های مختلف رتبه‌بندی را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. برخی از این روش‌های رتبه‌بندی توسط بورتولان و دگاری [۸] مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. در ادامه، به روش‌هایی که در این زمینه مورد مطالعه قرار گرفته‌است، به صورت مختصر اشاره می‌کنیم. چوبینه و لی [۲۲] شاخصی برای ترتیب اعداد فازی ارائه کردند، دیاس [۲۵] رتبه‌بندی تأمین‌کنندگان با استفاده از اعداد فازی را مورد مطالعه قرار داد، رکوتنا و همکارانش [۵۸]، رتبه‌بندی خودکار (اتوماتیک) اعداد فازی را با استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی پیشنهاد کردند، لی و همکارانش [۴۳] نیز در زمینه رتبه‌بندی مقادیر فازی کارهایی را ارائه کردند، روش‌های غیرفازی‌سازی بر اساس ناحیه جبران نیز توسط فورتمپس و روبنس [۲۷] ارائه گردید، رتبه‌بندی تأمین‌کنندگان با میانگین‌های فازی با استفاده از مجموعه حداکثری و مجموعه حداقلی توسط راج و کومار [۵۷] پیشنهاد شد.

اما برخی از این روش‌های پیشنهادی، در عمل دارای محاسبات پیچیده و مشکلی هستند و برخی دیگر هم برای یک مسئله نتایج یکسانی را ارائه می‌دهند. به عنوان مثال، لی و لی [۴۱] در سال ۱۹۸۸، یک روش مقایسه اعداد فازی با توجه به میانگین و انحراف معیار بر اساس توزیع‌های احتمال متناسب و یکنواخت ارائه کردند که بر اساس این رتبه‌بندی در سال ۱۹۹۸، چنگ [۲۱] نظراتی را ارائه کرد و برای بهبود روش رتبه‌بندی لی [۲۴] ضریب واریانس (یا شاخص CV) را پیشنهاد کرد. همچنین می‌توان به روش دیگری که موراکامی [۵۰] برای رتبه‌بندی اعداد فازی به نام روش رتبه‌بندی شاخص مرکز ارائه کرد، اشاره کرد. و اما چنگ [۲۱] برای بهبود این روش، روش فاصله‌ای برای رتبه‌بندی اعداد فازی را پیشنهاد کرد. این روش و روش شاخص CV در رتبه‌بندی برخی اعداد فازی نارسا بودند در نتیجه برای غلبه بر مشکلات به وجود آمده توسط این دو روش، یک روش رتبه‌بندی دیگری توسط چو [۲۴] که مربوط به ناحیه بین نقاط اصلی و مرکزی عدد فازی بود، مطرح شد. روز به روز روش‌های مختلفی برای رتبه‌بندی اعداد فازی پیشنهاد می‌شود که ما فقط به برخی از آن‌ها اشاره کردیم. برای کسب اطلاعات بیشتر و استفاده از این روش‌ها می‌توانید به مراجع [۲۰] و [۲۴] مراجعه کنید.

روشی که ما برای رتبه‌بندی (یا به عبارتی ترتیب) اعداد فازی در این پایان‌نامه استفاده کرده‌ایم، روش ارائه شده توسط فورتمپس و روبنس [۲۷] می‌باشد. این روش به صورت زیر تعریف شده است:

تعریف ۱۳.۲.۱. [۲۷] عدد فازی \tilde{A} بزرگتر از عدد فازی \tilde{B} یا برابر با آن است و می‌نویسیم $\tilde{A} \geq_R \tilde{B}$ اگر و فقط اگر $C(\tilde{A} \geq \tilde{B}) \geq 0$ و یا $\tilde{B} \geq_R \tilde{A}$ اگر و فقط اگر $C(\tilde{A} \geq \tilde{B}) \leq 0$. یا به طور مشابه، عدد فازی \tilde{A} بزرگتر از عدد فازی \tilde{B} است و می‌نویسیم $\tilde{A} >_R \tilde{B}$ اگر و فقط اگر $C(\tilde{A} \geq \tilde{B}) > 0$ و یا $\tilde{B} >_R \tilde{A}$ اگر و فقط اگر $C(\tilde{A} \geq \tilde{B}) < 0$ و عدد فازی \tilde{A} مساوی است با عدد فازی \tilde{B} و می‌نویسیم $\tilde{A} =_R \tilde{B}$ اگر و فقط اگر $C(\tilde{A} \geq \tilde{B}) = 0$ ، که در آن

$$C(\tilde{A} \geq \tilde{B}) = R(\tilde{A}) - R(\tilde{B}) \quad (9.1)$$

و

$$R(\tilde{A}) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 (A_l(\alpha) + A_r(\alpha)) d\alpha \quad (10.1)$$

تذکره ۳.۲.۱. $\tilde{B} >_R \tilde{A}$ به صورت $\tilde{A} <_R \tilde{B}$ نیز استفاده شود. همچنین، $\tilde{A} \geq_R \tilde{B}$ نیز به صورت $\tilde{B} \leq_R \tilde{A}$ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

نکته ۱.۲.۱. تابع C طبق رابطه (۹.۱) یک رتبه‌بندی کامل از همه اعداد فازی تولید می‌کند که مطابق با غیرفازی کردن از طریق تابع R می‌باشد.

نکته ۲.۲.۱. می‌توان روابط تعریف ۱۳.۲.۱ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} R(\tilde{A}) > R(\tilde{B}) & \text{ اگر } \tilde{A} >_R \tilde{B} \\ R(\tilde{A}) \geq R(\tilde{B}) & \text{ اگر } \tilde{A} \geq_R \tilde{B} \\ R(\tilde{A}) = R(\tilde{B}) & \text{ اگر } \tilde{A} =_R \tilde{B} \end{aligned} \quad (11.1)$$

که در آن R مطابق رابطه (۱۰.۱) است.

نکته ۳.۲.۱. به راحتی می‌توان نشان داد که برای عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = T(a, m, b)$ خواهیم داشت $R(\tilde{A}) = \frac{a + 2m + b}{4}$ و برای عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A} = Tr(a, m_1, m_2, b)$ به صورت $R(\tilde{A}) = \frac{a + m_1 + m_2 + b}{4}$ حاصل می‌شود [۴، ۷].

۵.۲.۱ روش‌های غیرفازی‌سازی

در اکثر موارد بعد از انجام عملیات جبری و توابع فازی لازم است که عدد فازی حاصل، به یک عدد حقیقی تبدیل شود تا بتوان مقایسه‌ای بین محاسبات معمولی و فازی انجام داد.

فرایند غیرفازی‌سازی یک عدد حقیقی معمولی را به دست می‌دهد که می‌توان آن را نماینده عدد فازی حاصل از محاسبات دانست. اگرچه غیرفازی نمودن پاسخ نهایی برای کاربردهایی مانند مدل‌سازی و کنترل سیستم‌ها ضروری می‌نماید، اما استفاده از آن برای جبر فازی باعث از بین رفتن اطلاعات مربوط به عدم قطعیت می‌شود. در هر حال، چگونگی استفاده از این اطلاعات هنوز به تحقیق و بررسی بیشتر نیاز دارد [۱].

روش‌های مختلفی برای غیرفازی‌سازی وجود دارند. با وجود کثرت روش‌های غیرفازی‌سازی که تعداد آن‌ها به بیش از 3° روش می‌رسد، هنوز یک شیوه سامان‌مند برای انتخاب نوع غیرفازی‌سازی وجود ندارد. انتخاب نوع غیرفازی‌سازی نیز می‌تواند بسته به دیدگاه کاربر آن متفاوت باشد. در اینجا به متداول‌ترین روش‌های غیرفازی‌سازی پرداخته می‌شود [۱].

تعریف ۱۴.۲.۱. (مرکز ثقل). در این روش مرکز ناحیه‌ای که به وسیله نمودار عدد فازی مورد نظر پوشانده شده‌است، محاسبه می‌شود. اگر A یک عدد فازی و $\mu_A(x)$ تابع عضویت آن باشد، آنگاه غیرفازی‌شده A با این روش به وسیله رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$x^* = \frac{\int_a^b x \mu_A(x) dx}{\int_a^b \mu_A(x) dx}$$

که در آن، $[a, b]$ بازه شامل تکیه‌گاه A است.

مثال ۹.۲.۱. یک عدد فازی مثلثی را مطابق شکل ۱۸.۱ در نظر بگیرید. با استفاده از روش مرکز ثقل داریم:

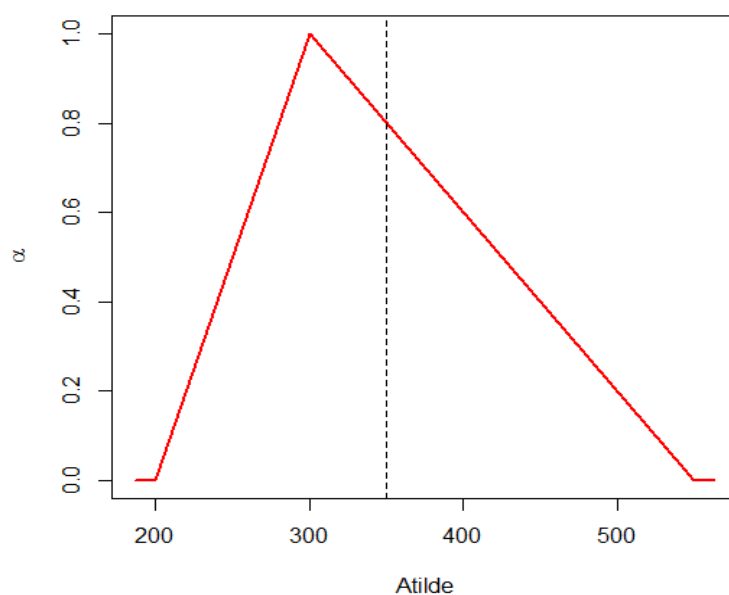
$$\begin{aligned} \int_{200}^{550} x \mu_A(x) dx &= \int_{200}^{300} x \left(\frac{x-200}{100} \right) dx + \int_{300}^{550} x \left(\frac{550-x}{250} \right) dx \\ &= 133333/33 + 47916/67 = 61250 \end{aligned}$$

$$\int_{200}^{550} \mu_A(x) dx = 0/5 \times 1 \times (550 - 200) = 175 \Rightarrow x^* = \frac{61250}{175} = 350$$

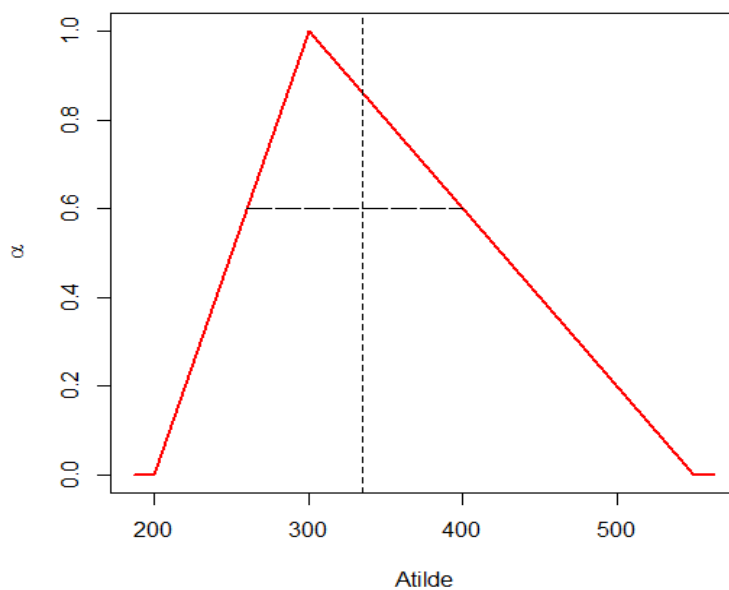
تعریف ۱۵.۲.۱. (روش مرکز ارتفاع سطح). در این روش، مقادیر کم‌تر از یک سطح α دلخواه نادیده گرفته و مرکز ثقل ناحیه بالای این سطح محاسبه می‌شود. در اینجا نقاطی با درجات عضویت پایین یا مقادیر بالای x در نظر گرفته نمی‌شوند.

مثال ۱۰.۲.۱. عدد فازی مثلثی مثال قبل را در نظر بگیرید. اگر درجات عضویت بیش از $0/6$ را با اهمیت بدانیم، با استفاده از روش مرکز ارتفاع سطح داریم:

$$\begin{aligned} \int_{200}^{550} x \mu_A(x) dx &= \int_{260}^{300} x \left(\frac{x-200}{100} \right) dx + \int_{300}^{400} x \left(\frac{550-x}{250} \right) dx = 23461/2 \\ x^* &= 23461/2 / 70 = 335/16 \end{aligned}$$



شکل ۱۸.۱: غیرفازی‌سازی با روش مرکز ثقل



شکل ۱۹.۱: غیرفازی‌سازی با روش مرکز ارتفاع سطح

تعریف ۱۶.۲.۱. (میانگین وزنی). هنگامی که عدد فازی A به صورت گسسته و منفک شده در دست است، می‌توان از روش میانگین وزنی که تخمینی از روش مرکز ثقل است، استفاده کرد:

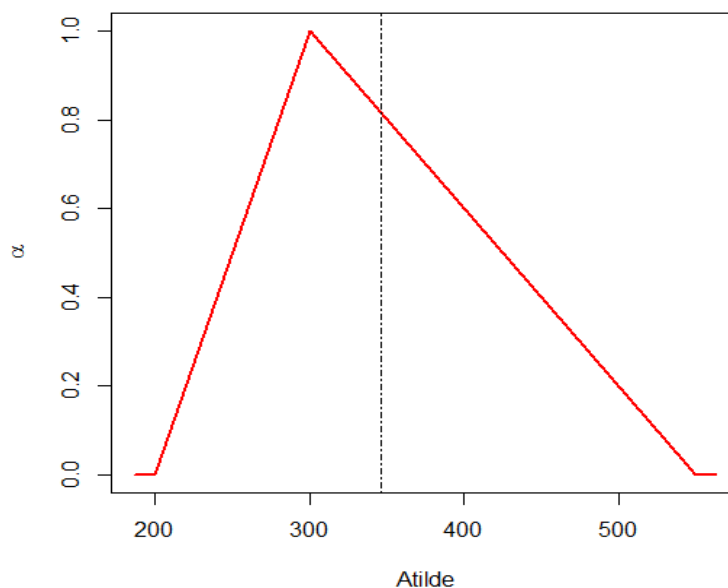
$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x \mu_A(x)}{\sum_{i=1}^n \mu_A(x)}$$

تعریف ۱۷.۲.۱. (میانگین سطح). در این روش x^* سطح زیر نمودار پوشش داده شده به وسیله عدد فازی A را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. رابطه محاسبه x^* ، بسته به شکل تابع عضویت عدد فازی A متفاوت خواهد بود. به هر حال داریم:

$$\int_{-\infty}^{x^*} \mu_A(x) dx = \int_{x^*}^{+\infty} \mu_A(x) dx$$

این روش به نصف کننده سطح نیز معروف است.

مثال ۱۱.۲.۱. عدد فازی مثال ۹.۲.۱ را در نظر بگیرید. این عدد با به دست آوردن مقداری که سطح تحت پوشش عدد فازی را به دو بخش مساوی تقسیم می‌کند، غیرفازی می‌شود.



شکل ۲۰.۱: $x^* = 345/94$ غیرفازی‌سازی با روش میانگین سطح

تعریف ۱۸.۲.۱. (روش ماکسیمم). در این روش، نقطه‌ای که مقدار حداکثر عضویت را در عدد فازی A دارد به عنوان نماینده آن انتخاب می‌شود.

تعریف ۱۹.۲.۱. (روش اولین ماکسیمم). در برخی موارد، مقادیر عضویت حداکثر در بیش از یک نقطه رخ می‌دهند. با این روش، کوچک‌ترین مقداری که دارای حداکثر عضویت است، انتخاب خواهد شد.

تعریف ۲۰.۲.۱. (میانگین ماکسیمم). اگر مجموعه نقاطی باشد که مقدار حداکثر عضویت در آن‌ها رخ می‌دهد، آنگاه در حالت پیوسته، غیرفازی‌سازی میانگین ماکسیمم نقطه زیر را به دست می‌دهد:

$$x^* = \frac{\min x_m + \max x_m}{2}$$

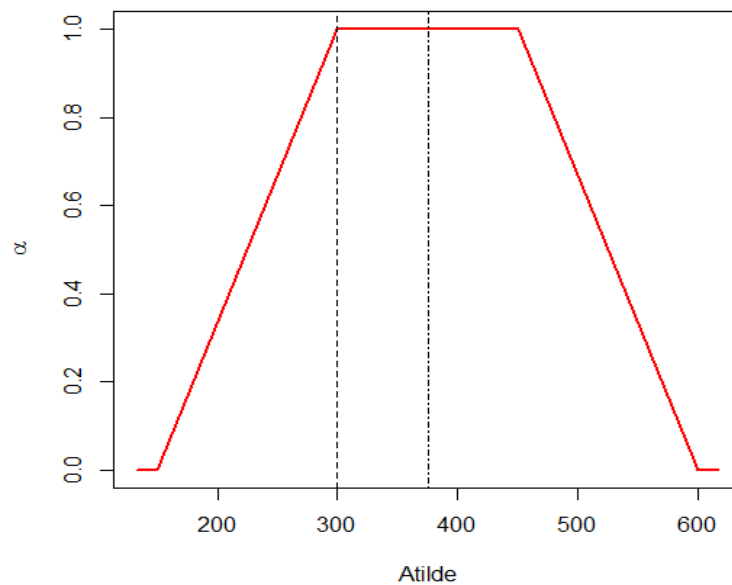
و در حالت گسسته

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

مثال ۱۲.۲.۱. تابع عضویت نشان داده شده در شکل ۲۱.۱ را در نظر بگیرید. ماکسیمم عضویت در بیش از یک نقطه و در یک بازه پیوسته رخ می‌دهد. با استفاده از روش اولین ماکسیمم مقدار $x^* = 300$ و با استفاده از روش میانگین ماکسیمم داریم:

$$x^* = \frac{300 + 450}{2} = 375$$

شکل ۲۱.۱ این فرایند را نشان می‌دهد [۱].



شکل ۲۱.۱: غیرفازی‌سازی با روش اولین ماکسیمم و میانگین ماکسیمم

تعریف ۲۱.۲.۱. (روش مقدار انتگرال کل). [۴۸] اگر A یک عدد فازی با تابع عضویت f_A باشد، آنگاه مقدار انتگرال کل با شاخص خوش‌بینی γ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_T^\gamma(A) = \gamma I_R(A) + (1 - \gamma) I_L(A) \quad (12.1)$$

به طوری که در آن، $I_L(A)$ و $I_R(A)$ مقدارهای انتگرال چپ و راست A می‌باشند و همچنین $\gamma \in [0, 1]$.

نکته ۴.۲.۱. شاخص خوش‌بینی γ درجات مختلفی بین ۰ و ۱ ارائه می‌کند. به عنوان مثال، اگر $\gamma = 1$ شود آنگاه، بالاترین درجه خوش‌بینی را شامل می‌شود و این یعنی مقدار انتگرال کل $I_T^\gamma(A)$ برابر می‌شود با انتگرال سمت راستی عدد فازی A . همچنین برای زمانی که $\gamma = 0$

باشد، به پایین‌ترین درجه خوش‌بینی تعلق دارد که این بدین معناست که، مقدار انتگرال کل $I_T^\gamma(A)$ برابر با انتگرال سمت چپی عدد فازی A می‌شود. بنابراین، بهترین مقدار برای شاخص γ ، مقدار $0/5$ می‌باشد که متعلق به درجه متوسط این بازه است.

تذکر ۴.۲.۱. اگر A یک عدد فازی با تابع عضویت چپ f_A^L و تابع عضویت راست f_A^R باشد و تابع معکوس آن‌ها به ترتیب به صورت g_A^R و g_A^L وجود داشته باشد، آنگاه مقدار انتگرال چپ و راست A را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$I_L(A) = \int_0^1 g_A^L(y) dy$$

$$I_R(A) = \int_0^1 g_A^R(y) dy$$

نکته ۵.۲.۱. اگر A طبق تعریف ۱۰.۲.۱ یک عدد فازی مثلثی باشد، به طوری که در آن، $f_A^L(x) = (x-a)/(m-a)$ و $f_A^R(x) = (x-b)/(m-b)$ باشند، آنگاه توابع معکوس آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_A^L(y) = a + (m-a)y \quad \text{و} \quad g_A^R(y) = b + (m-b)y, \quad y \in [0, 1]$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} I_A^L &= \int_0^1 g_A^L(y) dy \\ &= \int_0^1 [a + (m-a)y] dy = \frac{1}{2}(a+m) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} I_A^R &= \int_0^1 g_A^R(y) dy \\ &= \int_0^1 [b + (m-b)y] dy = \frac{1}{2}(m+b) \end{aligned}$$

در نتیجه مقدار انتگرال کل برای عدد فازی مثلثی A طبق رابطه (۱۲.۱) برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} I_T^\gamma &= \frac{1}{2}\gamma(m+b) + \frac{1}{2}(1-\gamma)(a+m) \\ &= \frac{1}{2}[\gamma b + m + (1-\gamma)a] \end{aligned} \quad (13.1)$$

نکته ۶.۲.۱. اگر A طبق تعریف ۱۱.۲.۱ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای باشد، در این صورت مقدار انتگرال چپ و راست A به ترتیب به صورت $\frac{1}{2}(a+m_1)$ و $\frac{1}{2}(m_2+b)$ به دست آمده و در نتیجه مقدار انتگرال کل برای عدد فازی ذوزنقه‌ای A برابر می‌شود با:

$$I_T^\gamma = \frac{1}{2}[\gamma(m_2+b) + (1-\gamma)(a+m_1)] \quad (14.1)$$

نکته ۷.۲.۱. لازم به ذکر است که، در این پایان‌نامه برای غیرفازی‌سازی از روش مقدار انتگرال کل استفاده می‌شود.

۳.۱ نتیجه‌گیری

شاخص کارایی فرایند ابزاری جهت کمی کردن تغییرات فرایند و تجزیه و تحلیل این تغییرات با توجه به نیازها و مشخصات فنی محصول است. در نتیجه‌ی چنین کاری می‌توان تغییرات فرایند را ریشه‌یابی کرده و برای حذف یا کاهش آن‌ها اقدام کرد. در این فصل، به معرفی چندین شاخص کارایی فرایند و روابط بین آن‌ها و همچنین کارایی فرایند با استفاده از نمودارهای فراوانی، احتمال پرداختیم. در ادامه، شاخص ناکارایی را معرفی کرده و نشان دادیم که می‌تواند ابزار مناسبی برای بیان کارایی فرایند باشد. در ادامه، به منطق فازی اشاره کردیم. زمانی که پارامترها به جای غیر فازی، فازی باشند، آنگاه شاخص‌های کارایی و ناکارایی فرایند معمولی برای اندازه‌گیری کارایی یک فرایند مناسب نخواهند بود. از این رو، به منظور برآورد شاخص‌های ناکارایی فازی در فصل‌های پیش رو، به معرفی مجموعه‌ها و عملگرهای فازی و اعداد فازی پرداختیم و سپس، روش‌هایی برای غیرفازی‌سازی و رتبه‌بندی اعداد فازی بیان کردیم که در بیان ناکارایی فازی از آن‌ها استفاده می‌شود.

فصل ۲

شاخص‌های کارایی و ناکارایی فرایند

در فصل اول، به برخی شاخص‌های کارایی معروف اشاره کردیم که برای فرایندهایی با تلورانس متقارن مناسب بودند. در این فصل، به برخی شاخص‌های کارایی می‌پردازیم که مناسب برای فرایندهای با تلورانس نامتقارن هستند. در ادامه، به ایرادی که در ارتباط با این شاخص‌ها وجود دارد اشاره می‌کنیم و سپس برای رفع ایراد مورد نظر، شاخص جدیدی را ارائه می‌کنیم که نسبت به دیگر شاخص‌ها، در بیان کارایی فرایند عملکرد بهتری دارد. لذا، شاخص ناکارایی و تعمیم آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم و با بیان مثال عددی دو شاخص را با هم مقایسه می‌کنیم. به اختصار نیز، به مطالعاتی که در زمینه شاخص‌های کارایی فازی و ناکارایی فازی شده، اشاره می‌کنیم.

۱.۲ مقدمه

همانطور که در فصل اول اشاره کردیم، اولین نسل از شاخص‌های کارایی فرایند شاخص C_p می‌باشد. این شاخص در برخی موارد قادر به تشخیص درست کارایی فرایند نبود بنابراین، شاخص دیگری به نام شاخص C_{pk} معرفی شد. از آنجایی که هر دوی این شاخص‌ها مستقل از مقدار هدف بودند شاخص جدیدی معروف به شاخص تاگوچی به نام C_{pm} مطرح شد. اما بعد از آن، شاخص دیگری که شامل تمامی اطلاعات شاخص‌های دیگر می‌شد، به نام شاخص C_{pmk} معرفی شد که این شاخص از دقت و حساسیت بیشتری نسبت به شاخص‌های قبلی برخوردار

بود.

۲.۲ شاخص‌های کارایی فرایند

در این بخش، شاخصی را معرفی می‌کنیم که هر چهار شاخص کارایی C_{pmk} و C_{pm} ، C_{pk} ، C_p را در بر دارد. این شاخص توسط وانمن [۶۲] در سال ۱۹۹۵ به صورت زیر معرفی شده است:

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید مشخصه مورد بررسی محصولات فرایندی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. همچنین بازه تلورانس برابر است با (LSL, USL) . آنگاه خانواده شاخص‌های کارایی $C_p(u, v)$ را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$C_p(u, v) = \frac{d - u|\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}}, \quad u, v \geq 0. \quad (1.2)$$

نکته ۱.۲.۲. اگر مقادیر 0 و 1 را برای u و v لحاظ کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$C_p(0, 0) = C_p, \quad C_p(1, 0) = C_{pk}, \quad C_p(0, 1) = C_{pm}, \quad C_p(1, 1) = C_{pmk}$$

لم ۱.۲.۲. قابل ذکر است که می‌توان شاخص‌ها را به صورت زیر مقایسه کرد [۴۰]:

$$C_p \geq C_{pk} \geq C_{pmk}, \quad C_p \geq C_{pm} \geq C_{pmk}$$

و همچنین می‌توان با توجه به تعاریف شاخص‌ها روابط زیر را نتیجه گرفت [۴۰]:

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}}$$

$$C_{pk} = C_p - \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{C_p}{C_{pm}}\right)^2 - 1}$$

برهان. اگر بخواهیم روابط بالا را اثبات کنیم، کافی است شاخص‌ها را در عبارات بالا جایگذاری کنیم. به عنوان مثال، برای اثبات رابطه اولی با توجه به تعریف شاخص $C_p = d/3\sigma$ داریم:

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{(USL - LSL)/6\sigma}{(\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2})/6\sigma} = \frac{C_p}{\sqrt{\frac{\sigma^2 + (\mu - T)^2}{\sigma^2}}} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}}$$

□

اثبات رابطه دوم نیز مشابه اثبات بالا خواهد بود.

تمامی شاخص‌های فوق برای زمانی کاربرد دارند که تلورانس فرایند متقارن باشد، یعنی اگر مقدار هدف بر وسط بازه تلورانس منطبق نباشد آنگاه استفاده از این شاخص‌ها نامناسب است. بنابراین، برای چنین فرایندهایی، شاخص‌هایی معرفی شده که در ادامه به آن‌ها می‌پردازیم.

هنگامی که به فرایندهای با تلورانس نامتقارن مواجه می‌شویم، بهتر است تلورانس واقعی $(T - D_l, T + D_u)$ را با تلورانس متقارن $(T - d^*, T + d^*)$ جایگذاری کنیم، به طوری که در آن $d^* = \min\{D_l, D_u\}$ است. حال خانواده شاخص‌های کارایی $C_p^*(u, v)$ را مطابق تعریف زیر معرفی می‌کنیم [۱۹].

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید مشخصه مورد بررسی فرایندی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 پیروی کند و دارای تلورانس نامتقارن $(T - D_l, T + D_u)$ باشد. در این صورت، خانواده شاخص‌های کارایی $C_p^*(u, v)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$C_p^*(u, v) = \frac{d^* - u|\mu - T|}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}} \quad (2.2)$$

قابل ذکر است که، اگر مقادیر 0 و 1 را برای u و v در نظر بگیریم، آنگاه خواهیم داشت:

$$C_p^*(0, 0) = C_p^*, \quad C_p^*(1, 0) = C_{pk}^*, \quad C_p^*(0, 1) = C_{pm}^*, \quad C_p^*(1, 1) = C_{pmk}^*$$

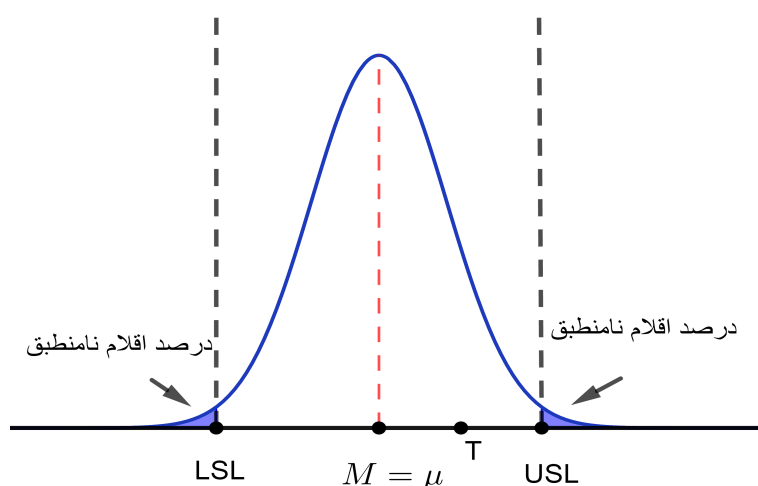
برای اینکه عملکرد این روش را مورد بررسی قرار دهیم، مثال زیر را ارائه کرده‌ایم.

مثال ۱.۲.۲. فرض بر این است که فرایند مورد بررسی از توزیع نرمال پیروی می‌کند به طوری که میانگین و انحراف معیار آن به ترتیب به صورت $\mu = M$ و $\sigma = d/3$ است. اما اگر مقدار هدف آن برابر با $T = (LSL + 3USL)/4$ باشد، با جایگذاری در خانواده شاخص‌های (2.2) ، شاخص‌های $C_{pk}^* = C_{pmk}^* = 0$ خواهند شد، در حالی که هر دو شاخص، کارایی را به شدت کم‌برآورد نشان می‌دهند، چرا که میانگین فرایند بر وسط بازه تلورانس قرار دارد و نسبت اقلام نامنطبق آن همانطور که در شکل ۱.۲ هم مشخص است، بسیار کم می‌باشد.

بنابراین، روش دیگری را در مواجهه با تلورانس نامتقارن معرفی می‌کنیم که در آن تلورانس واقعی را با تلورانس $(T - d', T + d')$ جایگذاری می‌کنیم، به طوری که در آن $d' = (D_l + D_u)/2$ می‌باشد. در این صورت خانواده شاخص‌های کارایی $C_p'(u, v)$ طبق تعریف زیر ارائه می‌شود:

تعریف ۳.۲.۲. مفروضات تعریف ۲.۲.۲ را در نظر بگیرید. خانواده شاخص‌های کارایی $C_p'(u, v)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_p'(u, v) = \frac{d' - u|\mu - T|}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}} \quad (3.2)$$



شکل ۱.۲: شاخص C_p^*

اگر مقادیر 0 و 1 را برای u و v قرار دهیم، آنگاه شاخص‌های زیر حاصل می‌شوند:

$$C'_p(0, 0) = C'_p, \quad C'_p(1, 0) = C'_{pk}, \quad C'_p(0, 1) = C'_{pm}, \quad C'_p(1, 1) = C'_{pmk}$$

این خانواده شاخص‌های کارایی در برخی فرایندها منجر به کم‌برآوردی و در برخی منجر به بیش‌برآوردی می‌شود. برای درک بیشتر عملکرد این شاخص مثال زیر را ارائه کرده‌ایم:

مثال ۲.۲.۲. فرض کنید دو فرایند A و B با میانگین‌های $\mu_A = T - d$ و $\mu_B = USL = T + d/2$ داشته باشیم که انحراف معیار آن‌ها یکسان و برابر با $\sigma = d/6$ باشد و همچنین مقدار هدف در این بازه برابر با $T = (LSL + 3USL)/4$ باشد. در این صورت با جایگذاری در خانواده شاخص‌های (۳.۲) خواهیم داشت:

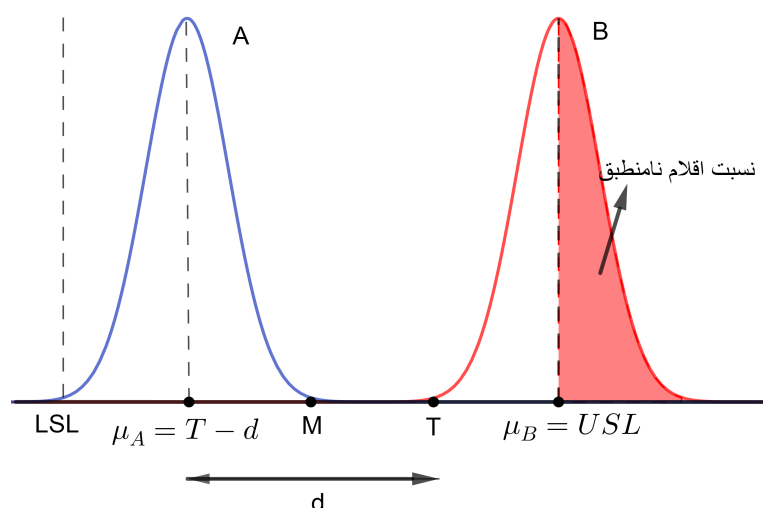
$$C'_{pkA} = C'_{pmkA} = 0, \quad C'_{pkB} = 1, \quad C'_{pmkB} = 0/32$$

همانطور که مشخص است شاخص معرفی شده، کارایی فرایند A را کم و کارایی فرایند B را زیاد برآورد کرده‌است. در حالی که از شکل ۲.۲ هم مشخص است نسبت اقلام نامنطبق فرایند B بیشتر از نسبت اقلام نامنطبق فرایند A می‌باشد.

نکته ۲.۲.۲. اگر تلورانس فرایند متقارن باشد یعنی $D_l = D_u$ ، آنگاه شاخص‌های کارایی معرفی شده با شاخص کارایی $C_p(u, v)$ برابر خواهند بود.

تعریف ۴.۲.۲. بویلز [۹] در سال ۱۹۹۴ با به کارگیری تابع $S(x, y) = \Phi^{-1}[(\Phi(x) + \Phi(y))/2]/3$ شاخص زیر را معرفی کرد:

$$S_{pk} = S\left(\frac{\mu - LSL}{\sigma}, \frac{USL - \mu}{\sigma}\right) \quad (4.2)$$



شکل ۲.۲: شاخص C'_p

که در آن، Φ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد می‌باشد. در واقع می‌توان گفت این شاخص تعمیمی از شاخص C_{pk} است. همچنین شاخص S_{pmk} می‌تواند تعمیمی از شاخص C_{pmk} باشد. در این صورت، شاخص S_{pmk} را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$S_{pmk} = S\left(\frac{\mu - LSL}{\tau}, \frac{USL - \mu}{\tau}\right) \quad (5.2)$$

به طوری که در آن، $\tau = \sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}$.

تعریف ۵.۲.۲. مفروضات تعریف ۲.۲.۲ را در نظر بگیرید. خانواده شاخص‌های کارایی $S_p(v)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_p(v) = S\left(\frac{\mu - LSL}{\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}}, \frac{USL - \mu}{\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}}\right) \quad (6.2)$$

بنابراین، با قرار دادن مقادیر ۰ و ۱ برای v داریم:

$$S_p(0) = S_{pk}, \quad S_p(1) = S_{pmk}$$

تذکر ۱.۲.۲. از نظر بویلز، شاخص S_{pmk} نسبت به شاخص‌های دیگر عملکرد بهتری دارد؛ چرا که شاخص‌های قبلی تک بعدی عمل می‌کردند در حالی که شاخص بویلز علاوه بر پارامترهای مورد نظر فرایند، عامل دوم دیگری که توزیع فرایند باشد را هم دخیل کرده‌است.

نکته ۳.۲.۲. قابل ذکر است که، چن و پیرن [۱۹] در سال ۲۰۰۱ نشان دادند که ماکسیم مقدار شاخص‌های C_{pmk} و S_{pmk} در نقطه $\mu = T$ اتفاق نمی‌افتد بلکه در نقطه‌ای بین مقدار هدف و وسط بازه تلورانس (یعنی $M < \mu < T$) اتفاق می‌افتد. حال برای رفع این مشکل، چن و پیرن، خانواده‌ای از شاخص‌ها را معرفی کردند که مشکل ایجاد شده را مرتفع می‌سازد. آن‌ها خانواده شاخص‌های $C''_p(u, v)$ را پیشنهاد کردند که در زیر به تعریف آن می‌پردازیم.

تعریف ۶.۲.۲. اگر مفروضات تعریف ۲.۲.۲ برقرار باشد، آنگاه خانواده شاخص‌های کارایی $C_p''(u, v)$ را به صورت زیر خواهیم داشت [۱۹]:

$$C_p''(u, v) = \frac{d^* - uF^*}{\sqrt{\sigma^2 + vF^2}} \quad (۷.۲)$$

به طوری که در آن داریم:

$$F^* = \max\left\{\frac{d^*(\mu - T)}{D_u}, \frac{d^*(T - \mu)}{D_l}\right\}$$

و

$$F = \max\left\{\frac{d(\mu - T)}{D_u}, \frac{d(T - \mu)}{D_l}\right\}$$

و $u, v \geq 0$.

حال اگر مقادیر 0 و 1 را برای u و v لحاظ کنیم، شاخص‌های زیر حاصل می‌شوند:

$$C_p''(0, 0) = C_p'', \quad C_p''(1, 0) = C_{pk}'', \quad C_p''(0, 1) = C_{pm}'', \quad C_p''(1, 1) = C_{pmk}''$$

اما این شاخص، زمانی ماکسیمم مقدار خود را می‌گیرد که میانگین فرایند روی مقدار هدف قرار داشته باشد. حال برای درک بیشتر این موضوع، فرض کنید اگر دو فرایند با بازه تلورانس $(26, 50, 58)$ داشته باشیم به طوری که در یکی میانگین فرایند قبل از مقدار هدف باشد و در دیگری، میانگین بعد از مقدار هدف باشد، آنگاه نتیجه یکسانی را بر اساس این شاخص به ما می‌دهد. همچنین، در حالتی که $\mu = USL$ یا $\mu = LSL$ باشد، باز هم یک مقدار کارایی را نشان می‌دهد.

حال خانواده دیگری از شاخص‌های کارایی که توسط وانمن [۶۳] مطرح شده‌است را معرفی می‌کنیم:

تعریف ۷.۲.۲. بر اساس مفروضات تعریف ۲.۲.۲، خانواده شاخص‌های کارایی $C_{pa}(u, v)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

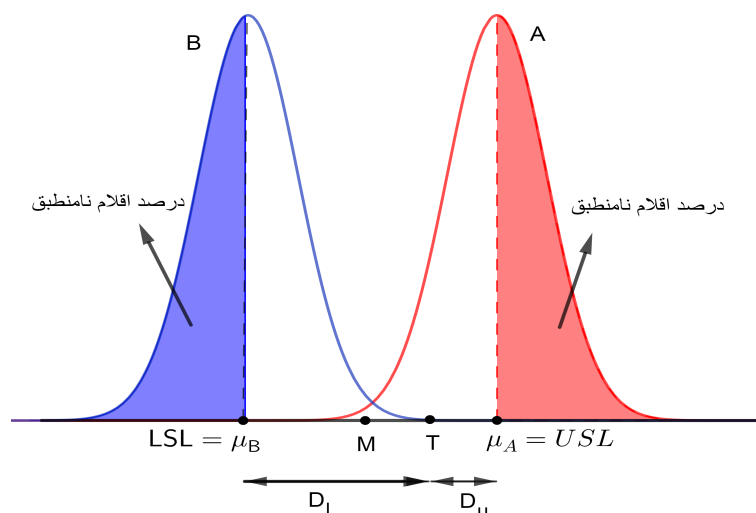
$$C_{pa}(u, v) = \frac{d - |\mu - M| - u|\mu - T|}{\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}} \quad (۸.۲)$$

و $u, v \geq 0$.

نکته ۴.۲.۲. اگر در رابطه (۸.۲) ، قرار دهیم $u = 0$ ، آنگاه $C_{pa}(0, v) = C_p(1, v)$ و همچنین اگر $T = M$ باشد، آنگاه داریم $C_{pa}(u, v) = C_p(u + 1, v)$.

اما مشکل عمده‌ای که در خانواده شاخص‌های $C_p''(u, v)$ وجود دارد، این است که انحراف فرایند از مقدار هدف بدون اینکه جهت انحراف ارزیابی شود، در نظر گرفته می‌شود. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۳.۲.۲. فرض کنید، دو فرایند A و B داشته باشیم که حدود مشخصات یکسانی دارند و مقدار هدف نیز به حد بالای مشخصه نزدیک باشد، در واقع داشته باشیم $D_u < D_l$. همچنین فرض کنید، هر دو فرایند انحراف معیاری برابر σ داشته باشند. اما میانگین فرایندها به صورت $\mu_B = LSL$ و $\mu_A = USL$ باشند. در واقع دو فرایند را مانند شکل ۳.۲ خواهیم داشت:



شکل ۳.۲: شاخص C_p''

بنا بر شکل، واضح است که درصد اقلام نامنتطبق برای هر دو فرایند یکسان است، در حالی که میانگین فرایند A نسبت به میانگین فرایند B به مقدار هدف نزدیکتر است. در نتیجه، باید کارایی فرایند A بیشتر از کارایی فرایند B باشد. اما مقدار کارایی برای هر دو فرایند طبق شاخص‌های C_{pk}'' و C_{pmk}'' برابر صفر و برای شاخص C_{pm}'' مقداری برابر و بزرگتر از صفر خواهد بود.

همچنین ایرادی که می‌توان بر خانواده شاخص‌های $C_{pa}(u, v)$ گرفت، این است که در برخی موارد، به مقدار σ توجهی ندارد یا به عبارتی تحت تأثیر انحراف معیار قرار نمی‌گیرد، که در زیربخش‌های بعدی بیشتر به این موضوع خواهیم پرداخت.

حال می‌خواهیم برای رفع ایراد خانواده شاخص‌های $C_p''(u, v)$ ، خانواده جدیدی از شاخص‌های کارایی را مطرح کنیم که توسط عباسی گنجی و صادق‌پور گیلده [۴، ۷] معرفی شده‌اند، که در زیر بخش بعدی به آن می‌پردازیم.

۱.۲.۲ خانواده جدید شاخص‌های کارایی فرایند

برای فرایندهای با تلورانس نامتقارن، خانواده شاخص‌های کارایی $C_p'''(u, v)$ را طبق تعریف زیر ارائه می‌دهیم:

تعریف ۸.۲.۲. [۴، ۷] طبق مفروضات تعریف ۲.۲.۲، خانواده شاخص‌های کارایی $C_p'''(u, v)$ عبارت است از:

$$C_p'''(u, v) = \frac{d^* - uA^*}{\sqrt{\sigma^2 + vA^2}} \quad (9.2)$$

که در آن،

$$A^* = \frac{(\mu - T)^2}{D_u} I\{\mu - T\} + \frac{(T - \mu)^2}{D_l} I\{T - \mu\}$$

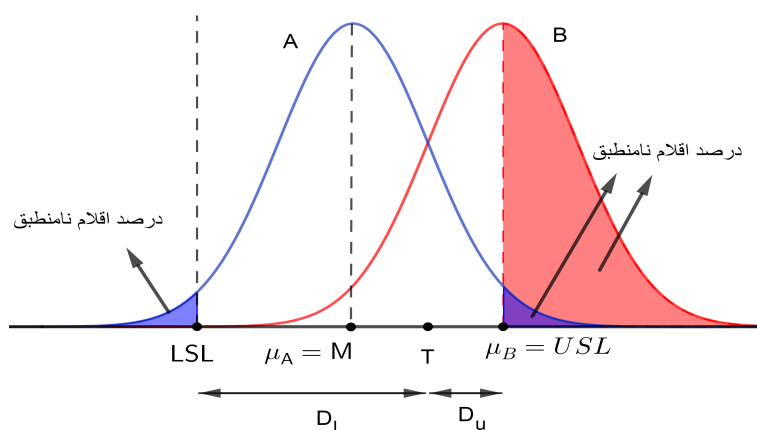
و

$$A = \frac{d(\mu - T)}{D_u} I\{\mu - T\} + \frac{d(T - \mu)}{D_l} I\{T - \mu\}$$

و

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نکته ۵.۲.۲. بر اساس شاخص فوق، کارایی فرایند هنگامی که میانگین از مقدار هدف به سمت حد مشخصه نزدیک‌تر انحراف پیدا می‌کند نسبت به حالتی که میانگین به حد مشخصه دورتری از مقدار هدف نزدیک می‌شود، سریع‌تر کاهش می‌یابد. به عنوان مثال، شکل ۴.۲ گواه این مطلب است.



شکل ۴.۲: شاخص C_p'''

نکته ۶.۲.۲. از مزیت‌های این شاخص می‌توان به این دو ویژگی اشاره کرد که: اولاً، این شاخص به انحراف میانگین از مقدار هدف توجه دارد و ثانیاً، تحت تأثیر نسبت اقلام نامنطبق قرار می‌گیرد.

مثال ۴.۲.۲. دو فرایند A و B را با مشخصات زیر در نظر بگیرید:

$$(LSL, T, USL) = (۲۶, ۵۰, ۵۸), \quad \mu_A = USL, \quad \mu_B = LSL, \quad \sigma_A = \sigma_B = ۸/۳$$

حال با قرار دادن $u = v = 1$ در شاخص جدید، $C_{pA}'''(1, 1) = 0$ و همچنین $C_{pB}'''(1, 1) = -0/329$ به دست می‌آید. این مقدار منفی برای فرایند B نشان‌دهنده این است که، میانگین فرایند در خارج از بازه تلورانس قرار گرفته است.

برای درک بیشتر تفاوت بین شاخص جدید و شاخص معرفی شده توسط چن و پیرن (۲۰۰۱) و دیگر شاخص‌ها، به شکل‌های ۵.۲ توجه کنید.

قضیه ۱.۲.۲. [۴] ماکسیمم مقدار شاخص $C_p'''(u, v)$ بر اساس مکان میانگین، در نقطه $\mu = T$ رخ می‌دهد.

برهان. با توجه به رابطه (۹.۲)، $C_p'''(u, v)$ نسبت به دو عامل uA^* و vA^2 رابطه عکس دارد. یعنی ماکسیمم مقدار آن زمانی اتفاق می‌افتد که دو عامل uA^* و vA^2 مینیمم مقدار شوند. از آنجایی که u و v مقادیر ثابتی هستند و برای اینکه کارایی شاخص مورد نظر ماکسیمم شود، باید u و v مینیمم مقدار را اختیار کنند. از طرفی دیگر، حداقل مقادیر uA^* و vA^2 صفر می‌باشد. بنابراین، ماکسیمم مقدار شاخص $C_p'''(u, v)$ در $A^* = A^2 = 0$ رخ می‌دهد. حال، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. فرض کنید $\mu \geq T$ باشد. بنابراین، خواهیم داشت:

$$A^* = \frac{(\mu - T)^2}{D_u}, \quad A^2 = \frac{d^2(\mu - T)^2}{D_u^2}$$

از آنجا که مقدار d نمی‌تواند صفر باشد، پس لزوماً $(\mu - T)^2$ صفر خواهد بود، که در نتیجه $\mu = T$ می‌شود.

۲. فرض کنید $\mu < T$ باشد. لذا خواهیم داشت:

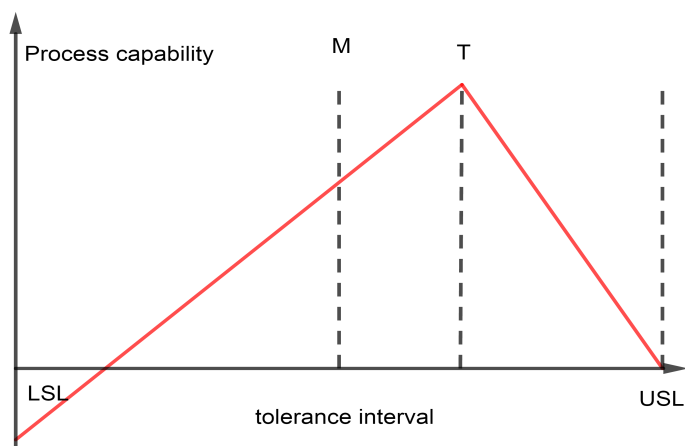
$$A^* = \frac{(T - \mu)^2}{D_l}, \quad A^2 = \frac{d^2(T - \mu)^2}{D_l^2}$$

چون $d \neq 0$ است، نتیجه می‌شود که $(\mu - T)^2 = 0$ و در نهایت، $\mu = T$ می‌شود.

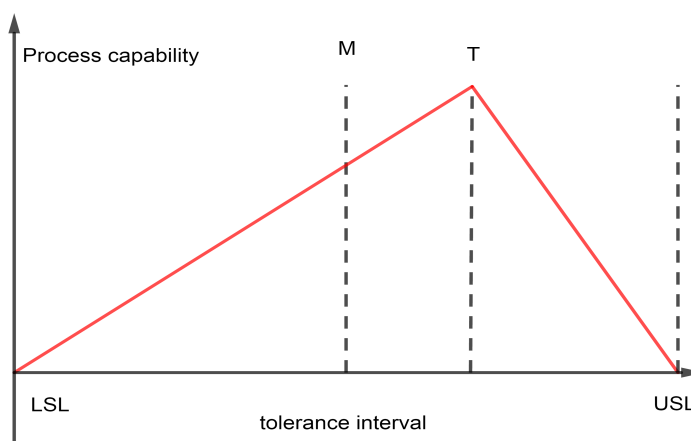
□

برای اینکه عملکرد شاخص جدید را با دیگر شاخص‌های معرفی شده مقایسه کنیم، فرایندی را با تلورانس نامتقارن $(LSL, T, USL) = (26, 50, 58)$ و انحراف معیار $\sigma = 8/3$ در نظر گرفته‌ایم که نتایج آن در جدول ۱.۲ آورده شده است.

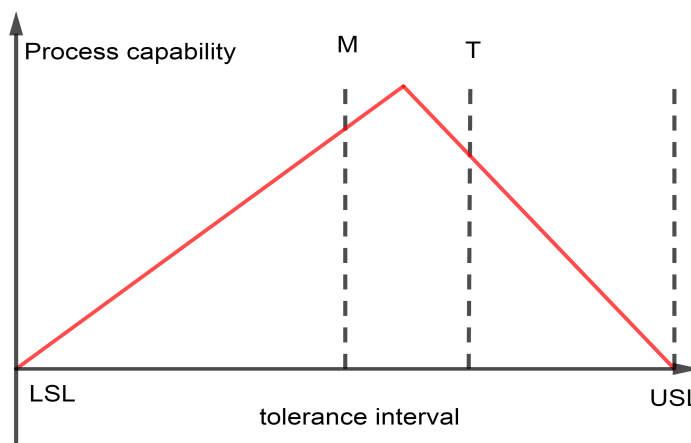
همانطور که در جدول ۱.۲ مشخص است، بیشترین مقداری که شاخص جدید می‌گیرد در نقطه $\mu = T$ است. در حالی که در شاخص‌های دیگر، ماکسیمم مقدار در نقاط مختلفی



(آ) شاخص جدید معرفی شده



(ب) شاخص معرفی شده توسط چن و پیرن



(ج) شاخص‌های S_{pmk} و C_{pmk}

شکل ۵.۲: مقایسه نموداری برخی شاخص‌های کارایی

جدول ۱.۲: مقایسه بین شاخص‌های کارایی $C_p(u, v)$ و $C_p'''(u, v)$ ، $C_{pa}(u, v)$

$C_p'''(1, 1)$	$C_p''(1, 1)$	$C_{pa}(1, 1)$	$C_p'''(0, 1)$	$C_p''(0, 1)$	$C_{pa}(0, 1)$	$C_p'''(1, 0)$	$C_p''(1, 0)$	$C_{pa}(1, 0)$	μ
-۰/۳۲۸۷	۰	-۰/۳۳۱۲	۰/۱۶۴۳	۰/۱۶۴۳	۰	-۲	۰	-۳	۲۶
-۰/۳۰۰۷	۰/۰۰۷۱	-۰/۳۱۶۷	۰/۱۷۱۳	۰/۱۷۱۳	۰/۰۱۴۳۹	-۱/۷۵۵۲	۰/۰۴۱۶	-۲/۷۵	۲۷
-۰/۲۷۲	۰/۰۱۴۹	-۰/۳۰۰۸	۰/۱۷۸۸	۰/۱۷۸۸	۰/۰۳	-۱/۵۲۰۸	۰/۰۸۳۳	-۲/۵	۲۸
-۰/۲۴۲۶	۰/۰۲۳۳	-۰/۲۸۳۴	۰/۱۸۷۱	۰/۱۸۷۱	۰/۰۴۷۲	-۱/۲۹۶۸	۰/۰۱۲۵	-۲/۲۵	۲۹
-۰/۲۱۲۴	۰/۰۳۲۶	-۰/۲۶۴۳	۰/۱۹۶۱	۰/۱۹۶۱	۰/۰۶۶	-۱/۰۸۳۳	۰/۱۶۶۶	-۲	۳۰
-۰/۱۸۱۳	۰/۰۴۲۹	-۰/۲۴۳۲	۰/۲۰۶	۰/۲۰۶	۰/۰۸۶۸	-۰/۸۸۰۲	۰/۲۰۸۳	-۱/۷۵	۳۱
-۰/۱۴۹۱	۰/۰۵۴۲	-۰/۲۱۹۸	۰/۲۱۶۹	۰/۲۱۶۹	۰/۱۰۹۹	-۰/۶۸۷۵	۰/۲۵	-۱/۵	۳۲
-۰/۱۱۵۷	۰/۰۶۶۸	-۰/۱۹۳۷	۰/۲۲۹	۰/۲۲۹	۰/۱۳۵۵	-۰/۵۰۵۲	۰/۲۹۱۶	-۱/۲۵	۳۳
-۰/۰۸۰۸	۰/۰۸۰۸	-۰/۱۶۴۳	۰/۲۴۲۵	۰/۲۴۲۵	۰/۱۶۴۳	-۰/۳۳۳۳	۰/۳۳۳۳	-۱	۳۴
-۰/۰۴۴۲	۰/۰۹۶۶	-۰/۱۳۱۲	۰/۲۵۷۶	۰/۲۵۷۶	۰/۱۹۶۹	-۰/۱۷۱	۰/۳۷۵	-۰/۷۵	۳۵
-۰/۰۰۵۷	۰/۱۱۴۴	-۰/۰۹۳۵	۰/۲۷۴۷	۰/۲۷۴۷	۰/۲۳۳۸	-۰/۰۲۰۸	۰/۴۱۶۶	-۰/۵	۳۶
۰/۰۳۵۲	۰/۱۳۴۷	-۰/۰۵۰۲	۰/۲۹۴	۰/۲۹۴	۰/۲۷۶۲	۰/۱۱۹۷	۰/۴۵۸۳	-۰/۲۵	۳۷
۰/۰۷۹	۰/۱۵۸۱	۰	۰/۳۱۶۲	۰/۳۱۶۲	۰/۳۲۵۳	۰/۲۵	۰/۵	۰	۳۸
۰/۱۲۶۳	۰/۱۸۵۱	۰/۰۵۸۹	۰/۳۴۱۷	۰/۳۴۱۷	۰/۳۸۲۸	۰/۳۶۹۷	۰/۵۴۱۶	۰/۲۵	۳۹
۰/۱۷۷۹	۰/۲۱۶۶	۰/۱۲۸۸	۰/۳۷۱۳	۰/۳۷۱۳	۰/۴۵۰۹	۰/۴۷۹۱	۰/۵۸۳۳	۰/۵	۴۰
۰/۲۳۴۷	۰/۲۵۳۸	۰/۲۱۳	۰/۴۰۶۱	۰/۴۰۶۱	۰/۵۳۲۶	۰/۵۷۸۱	۰/۶۲۵	۰/۷۵	۴۱
۰/۲۹۸۱	۰/۲۹۸۱	۰/۳۱۶۲	۰/۴۴۷۲	۰/۴۴۷۲	۰/۶۳۲۴	۰/۶۶۶۶	۰/۶۶۶۶	۱	۴۲
۰/۳۶۹۵	۰/۳۵۱۴	۰/۳۵۵۹	۰/۴۹۶۱	۰/۴۹۶۱	۰/۶۶۷۴	۰/۷۴۴۷	۰/۷۰۸۳	۱	۴۳
۰/۴۵۰۶	۰/۴۱۶	۰/۴۰۶۱	۰/۵۵۴۷	۰/۵۵۴۷	۰/۷۱۰۷	۰/۸۱۲۵	۰/۷۵	۱	۴۴
۰/۵۴۳۳	۰/۴۹۴۵	۰/۴۷۰۵	۰/۶۲۴۶	۰/۶۲۴۶	۰/۷۶۴۷	۰/۸۶۹۷	۰/۷۹۱۶	۱	۴۵
۰/۶۴۸۱	۰/۵۸۹۲	۰/۵۵۴۷	۰/۷۰۷۱	۰/۷۰۷۱	۰/۸۳۲	۰/۹۱۶۶	۰/۸۳۳۳	۱	۴۶
۰/۷۶۲۵	۰/۷	۰/۶۶۴۳	۰/۸	۰/۸	۰/۹۱۳۵	۰/۹۵۳۱	۰/۸۷۵	۱	۴۷
۰/۸۷۵۷	۰/۸۱۹۸	۰/۸	۰/۸۹۴۴	۰/۸۹۴۴	۱	۰/۹۷۹۱	۰/۹۱۶۶	۱	۴۸
۰/۹۶۵	۰/۹۲۹۷	۰/۹۳۶۳	۰/۹۷۰۱	۰/۹۷۰۱	۱/۰۵۳۳	۰/۹۹۴۷	۰/۹۵۸۳	۱	۴۹
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۵۰
۰/۷۸۷۵	۰/۷	۰/۷۰۲۲	۰/۸	۰/۸	۰/۸۱۹۲	۰/۹۸۴۳	۰/۸۷۵	۰/۷۵	۵۱
۰/۵۲	۰/۴۱۶	۰/۴	۰/۵۵۴۷	۰/۵۵۴۷	۰/۶	۰/۹۳۷۵	۰/۷۵	۰/۵	۵۲
۰/۳۴۹	۰/۲۵۳۸	۰/۱۶۶	۰/۴۰۶۱	۰/۴۰۶۱	۰/۴۱۵۲	۰/۸۵۹۳	۰/۶۲۵	۰/۲۵	۵۳
۰/۲۳۷۱	۰/۱۵۸۱	۰	۰/۳۱۶۲	۰/۳۱۶۲	۰/۲۷۷۳	۰/۷۵	۰/۵	۰	۵۴
۰/۱۵۷	۰/۰۹۶۶	-۰/۱۱۷۶	۰/۲۵۷۶	۰/۲۵۷۶	۰/۱۷۶۴	۰/۶۰۹۳	۰/۳۷۵	-۰/۲۵	۵۵
۰/۰۹۴۹	۰/۰۵۴۲	-۰/۲۰۳	۰/۲۱۶۹	۰/۲۱۶۹	۰/۱۰۱۵	۰/۴۳۷۵	۰/۲۵	-۰/۵	۵۶
۰/۰۴۳۸	۰/۰۲۳۳	-۰/۲۶۶۹	۰/۱۸۷۱	۰/۱۸۷۱	۰/۰۴۴۴	۰/۲۳۴۳	۰/۱۲۵	-۰/۷۵	۵۷
۰	۰	-۰/۳۱۶۲	۰/۱۶۴۳	۰/۱۶۴۳	۰	۰	۰	-۱	۵۸

از میانگین هم به چشم می‌خورد. همچنین، رفتار شاخص $C_p''(\circ, 1)$ مشابه شاخص $C_p'''(\circ, 1)$ می‌باشد زیرا در هر دو $u = \circ$ است. بنابراین، اثر عامل‌های A^* و F^* حذف می‌شود. شاخص $C_{pa}(\circ, 1)$ مقدار صفر را برای هر دو حالت $\mu = LSL$ و $\mu = USL$ اختیار می‌کند و همین‌طور برای دو حالت $\mu = 48$ و $\mu = T$ مقدار ۱ را می‌گیرد. همچنین شاخص $C_{pa}(1, \circ)$ علاوه بر اینکه در نقطه $\mu = T$ مقدار ۱ را می‌گیرد، برای حالت‌های دیگر میانگین هم مقدار ۱ را گرفته، در حالی که میانگین فرایند در آن حالت‌ها منطبق بر مقدار هدف نمی‌باشد. از طرف دیگر، هر چه میانگین از مقدار هدف دورتر می‌شود، مقدار شاخص $C_p''(1, \circ)$ کوچک‌تر می‌شود و همچنین این شاخص، مقدار صفر را برای هر دو حالت $\mu = LSL$ و $\mu = USL$ می‌پذیرد. به همین ترتیب، شاخص $C_p'''(\circ, 1)$ با افزایش فاصله میانگین از مقدار هدف، کارایی آن کمتر شده و این در حالی است که این شاخص در نقطه $\mu = LSL$ مقدار منفی و در نقطه $\mu = USL$ مقدار صفر را می‌گیرد. این ویژگی برای شاخص $C_p'''(1, 1)$ نیز صحیح می‌باشد در حالی که مقدار شاخص $C_p''(1, 1)$ در هر دو حالت $\mu = LSL$ و $\mu = USL$ مقدار صفر را می‌پذیرد. از سوی دیگر، شاخص $C_{pa}(1, 1)$ در حالتی که $\mu = 54$ است هنگامی که $\sigma = 1$ است، مقدار صفر را اختیار می‌کند. برای این حالت، انتظار می‌رود که ۳۲ قطعه از یک میلیون قطعه تولیدی نامنطبق باشند و در حالت $\sigma = 1/5$ ، 3793 قطعه در میلیون و برای $\sigma = 2$ ، 22750 قطعه در میلیون نامنطبق خواهند بود. این در حالی است که شاخص $C_{pa}(1, 1)$ در تمام حالات ذکر شده، یک مقدار کارایی، آن هم مقدار صفر را اختیار می‌کند. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که شاخص جدید عملکرد بهتری نسبت به دیگر شاخص‌های ذکر شده دارد.

تذکر ۲.۲.۲. با توجه به این که مشخصه فرایند از توزیع نرمال پیروی می‌کند، زمانی که انحراف معیار ثابت باشد، انحراف میانگین از مقدار هدف به سمت حد مشخصه‌ای که به مقدار هدف نزدیک‌تر است، نسبت اقلام نامنطبق بیشتری را نسبت به سمت حد مشخصه دورتر در پی خواهد داشت. بنابراین، نتیجه می‌شود که علاوه بر اینکه شاخص کارایی فرایند با افزایش مقدار واریانس کاهش می‌یابد، هنگامی که میانگین فرایند از مقدار هدف دورتر می‌شود نیز بایستی کاهش یابد.

قضیه ۲.۲.۲. [۴] فرض کنید $C_p'''(u, v)$ طبق رابطه (۹.۲) تعریف شده باشد و u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 مقادیر مثبتی باشند به قسمی که $u_1 < u_2$ و $v_1 < v_2$. در این صورت عبارات زیر برقرار است:

۱.

$$C_p'''(u_1, v) \geq C_p'''(u_2, v)$$

۲.

$$C_p'''(u, v_1) \geq C_p'''(u, v_2)$$

$$C_p'''(u_1, v_1) \geq C_p'''(u_2, v_2)$$

برهان. ۱. از آنجا که شاخص $C_p'''(u, v)$ نسبت به عامل uA^* رابطه عکس دارد، می‌توان به راحتی نتیجه گرفت که اگر $u_1 < u_2$ باشد آنگاه $C_p'''(u_1, v) \geq C_p'''(u_2, v)$ خواهد بود.

۲. از آنجا که شاخص $C_p'''(u, v)$ نسبت به عامل vA^2 رابطه عکس دارد، می‌توان به راحتی نتیجه گرفت که اگر $v_1 < v_2$ باشد آنگاه $C_p'''(u, v_1) \geq C_p'''(u, v_2)$ خواهد بود.

۳. از آنجا که شاخص $C_p'''(u, v)$ نسبت به عامل‌های uA^* و vA^2 رابطه عکس دارد، می‌توان به راحتی نتیجه گرفت که اگر $u_1 < u_2$ و $v_1 < v_2$ باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$C_p'''(u_1, v_1) \geq C_p'''(u_2, v_2)$$

□

بنابراین طبق قضیه مذکور، می‌توان نتیجه گرفت که شاخص کارایی $C_p'''(u, v)$ به عامل‌های u و v هم بستگی دارد، هرچند این وابستگی ممکن است اندک باشد ولی در مقدار کارایی می‌تواند تأثیرگذار باشد.

به علاوه، می‌توان از قضیه فوق اینطور استنباط کرد که هر چه مقدار u و v افزایش می‌یابد، مقادیر کارایی نیز کاهش می‌یابند. پس می‌توان نتیجه گرفت، که با انتخاب مقادیر بزرگتر u و v شاخص کارایی با حساسیت بیشتری روبرو می‌شود.

۲.۲.۲ شاخص‌های کارایی فرایند در محیط فازی

بعد از این که تئوری مجموعه فازی در زمینه کنترل فرایند آماری مطرح شد، چندین مطالعه برای ترکیب شاخص‌های کارایی فرایند در محیط فازی مورد بررسی قرار گرفت که می‌توان به مقالات زیر اشاره کرد.

یانگتین [۶۴]، لی و همکاران [۴۴]، چن و تسای [۶۱]، پرچمی و همکاران [۵۲، ۵۳]، پرچمی و ماشین‌چی [۵۱]، کایا و قهرمان [۳۶] و غیره روی شاخص فازی C_p کار کرده‌اند. لی [۴۲]، پرچمی و همکاران [۵۲، ۵۳]، پرچمی و ماشین‌چی [۵۱]، کایا و قهرمان [۳۶، ۳۷] و غیره در زمینه شاخص C_{pk} مطالعه و بررسی کرده‌اند و به همین ترتیب شاخص‌های C_{pm} و C_{pmk} نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند. البته ناگفته نماند که دیگر شاخص‌های کارایی معرفی شده در این فصل نیز در زمینه منطق فازی کار شده‌اند و می‌توان به افرادی همچون کایا و قهرمان [۳۸] که خانواده شاخص‌های فازی C_p'' را مورد بررسی قرار داده‌است، همچنین عباسی گنجی [۱۷] که به خانواده شاخص‌های فازی C_p''' پرداخته‌است و قهرمان و همکاران [۳۴] شاخص‌های فازی C_p ، C_{pk} و C_{pm} را با پارامترهای فازی مورد تحلیل و مطالعه قرار داده‌اند، اشاره کرد.

از آنجایی که مبحث شاخص‌های کارایی در محیط فازی در حیطه مطالعه ما قرار نمی‌گیرند از

توضیحات و پرداختن به آن پرهیز می‌کنیم. برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانید به مقالات اشاره شده مراجعه کنید.

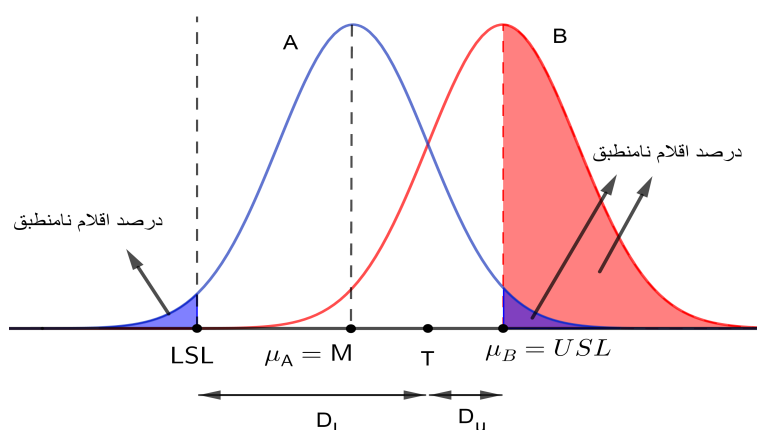
۳.۲ شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته فرایند

همانطور که در فصل اول هم اشاره کردیم، شاخص ناکارایی فرایند از اهمیت زیادی برخوردار است، از آنجایی که این شاخص به طور همزمان جداسازی اطلاعات مربوط به درستی و دقت فرایند را فراهم می‌کند. در حالی که، شاخص‌های کارایی از این مزیت بهره‌مند نبودند. اما این نکته حائز اهمیت است که شاخص ناکارایی می‌تواند برای فرایندهایی که تلورانس نامتقارن دارند کارآمد باشد. همانطور که در زیر بخش ۱۰.۱.۱ بیان شد، گرینویچ و جهر اسکافرت [۲۸] توانستند با یک تغییر شکل ساده از شاخص C_{pm}^* شاخص ناکارایی C_{pp} را ارائه کنند که در تعریف ۲.۱.۱ به معرفی آن پرداختیم. اما ایراد وارد بر این شاخص این است که، بدون اینکه به مکان میانگین توجه داشته باشد، فاصله میانگین از مقدار هدف را می‌سنجد. برای درک بیشتر این موضوع، به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱.۳.۲. فرض کنید دو فرایند A و B با حدود مشخصات یکسان داشته باشیم. به طوری که:

$$T = 3(LSL + USL)/4, \quad \mu_A = M, \quad \mu_B = USL, \quad \sigma_A = \sigma_B$$

با توجه به شکل ۶.۲ مشاهده می‌کنید که با وجود این که فاصله میانگین از مقدار هدف برای



شکل ۶.۲: مقایسه دو شاخص ناکارایی

هر دو فرایند یکسان است ولی نسبت اقلام نامنتطبق فرایند B بیشتر از فرایند A می‌باشد. بنابراین می‌بایست ناکارایی فرایند B بیشتر از ناکارایی فرایند A باشد. لذا، با جایگذاری در

فرمول خواهیم داشت:

$$C_{ppA} = \frac{(\mu_A - T)^2}{D^2} + \frac{\sigma_A^2}{D^2}, \quad C_{ppB} = \frac{(\mu_B - T)^2}{D^2} + \frac{\sigma_B^2}{D^2}$$

به طوری که در آن $d^* = D_u$ بنابراین $D = D_u/3$ و در نتیجه $C_{ppA} = C_{ppB}$.

طبق مثال ارائه شده، شاخص ناکارایی مذکور مقدار یکسانی را برای هر دو فرایند به دست می‌دهد، این در حالی است که فرایند A نسبت به فرایند B به مقدار هدف نزدیکتر است، در نتیجه باید مقدار ناکارایی آن کمتر از فرایند B باشد. برای رفع این مشکل شاخص C''_{pp} توسط چن [۱۵] در سال ۱۹۹۸ به صورت زیر مطرح شد:

تعریف ۱.۳.۲. با توجه به مفروضات تعریف ۲.۱.۱ داریم:

$$\begin{aligned} C''_{pp} &= \left(\frac{A}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{D}\right)^2 \\ &= C''_{ia} + C_{ip} \end{aligned} \quad (۱۰.۲)$$

که در آن، $A = \max\left\{\frac{(\mu - T)d}{D_u}, \frac{(T - \mu)d}{D_l}\right\}$ ، شاخص عدم درستی تعمیم یافته و C_{ip} شاخص عدم دقت می‌باشند.

نکته ۱.۳.۲. اگر در شاخص مذکور مقدار هدف بر وسط بازه تلورانس منطبق باشد ($T = M$)، آنگاه $A = |\mu - T|$ شده و C''_{ia} به C_{ia} تبدیل می‌شود و در نهایت $C''_{pp} = C_{pp}$ خواهد بود.

مثال ۲.۳.۲. حال می‌خواهیم مثال ۱.۳.۲ را با شاخص جدید معرفی شده مقایسه و بررسی کنیم. برای درک بیشتر شکل ۶.۲ را در نظر بگیرید و سپس با جایگذاری مشخصات هر دو فرایند در فرمول (۱۰.۲) خواهیم داشت:

$$A_A = \frac{(T - \mu_A)d}{D_l}, \quad A_B = \frac{(\mu_B - T)d}{D_u}$$

$$C''_{ppA} = \left(\frac{A_A}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_A}{D}\right)^2 = \frac{(T - \mu_A)^2 d^2}{D^2 D_l^2} + \frac{\sigma_A^2}{D^2},$$

$$C''_{ppB} = \left(\frac{A_B}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{D}\right)^2 = \frac{(\mu_B - T)^2 d^2}{D^2 D_u^2} + \frac{\sigma_B^2}{D^2}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید فرایندهای A و B مقادیر ناکارایی یکسانی بدست نمی‌دهند، چرا که به نامتقارن بودن تلورانس دقت داشته و در نتیجه شاخص‌های عدم درستی تعمیم یافته هر دو فرایند از یکدیگر متفاوت می‌شود. این در حالی است که شاخص C_{pp} یک مقدار ناکارایی را برای هر دو فرایند نشان می‌دهد.

حال می‌خواهیم با استفاده از یک مثال عددی ارائه شده در مقاله [۱۵]، شاخص‌های C_{pp} و C''_{pp} را با هم مقایسه کنیم و نتایج آن‌ها را بررسی نماییم.

مثال ۳.۳.۲. فرایندی با مشخصات زیر را در نظر بگیرید.

$$LSL = T - 1/5d, \quad USL = T + 0/5d$$

جدول ۲.۲ مقادیر شاخص‌های ناکارایی C_{pp} و C''_{pp} را برای مقادیر مختلف μ با انحراف معیار ثابت $\sigma = d/4$ نشان می‌دهد.

جدول ۲.۲: مقایسه بین شاخص‌های ناکارایی C_{pp} و C''_{pp}

C''_{pp}	C''_{ia}	C_{pp}	C'_{ip}	C_{ia}	μ	ردیف	C''_{pp}	C''_{ia}	C_{pp}	C'_{ip}	C_{ia}	μ	ردیف
۵/۴۹	۳/۲۴	۹/۵۴	۲/۲۵	۷/۲۹	$T - 0/45d$	۲۲	۳۸/۲۵	۳۶	۸۳/۲۵	۲/۲۵	۸۱	$T - 1/5d$	۱
۴/۸۱	۲/۵۶	۸/۰۱	۲/۲۵	۵/۷۶	$T - 0/4d$	۲۳	۳۵/۸۹	۳۳/۶۴	۷۷/۹۴	۲/۲۵	۷۵/۶۹	$T - 1/45d$	۲
۴/۲۱	۱/۹۶	۶/۶۶	۲/۲۵	۴/۴۱	$T - 0/35d$	۲۴	۳۳/۶۱	۳۱/۳۶	۷۲/۸۱	۲/۲۵	۷۰/۵۶	$T - 1/4d$	۳
۳/۶۹	۱/۴۴	۵/۴۹	۲/۲۵	۳/۲۴	$T - 0/3d$	۲۵	۳۱/۴۱	۲۹/۱۶	۶۷/۸۶	۲/۲۵	۶۵/۶۱	$T - 1/35d$	۴
۳/۲۵	۱	۴/۵	۲/۲۵	۲/۲۵	$T - 0/25d$	۲۶	۲۹/۲۹	۲۷/۰۴	۶۳/۰۹	۲/۲۵	۶۰/۸۴	$T - 1/3d$	۵
۲/۸۹	0/۶۴	۳/۶۹	۲/۲۵	۱/۴۴	$T - 0/2d$	۲۷	۲۷/۲۵	۲۵	۵۸/۵	۲/۲۵	۵۶/۲۵	$T - 1/25d$	۶
۲/۶۱	0/۳۶	۳/۰۶	۲/۲۵	0/۸۱	$T - 0/15d$	۲۸	۲۵/۲۹	۲۳/۰۴	۵۴/۰۹	۲/۲۵	۵۱/۸۴	$T - 1/2d$	۷
۲/۴۱	0/۱۶	۲/۶۱	۲/۲۵	0/۳۶	$T - 0/1d$	۲۹	۲۳/۴۱	۲۱/۱۶	۴۹/۸۶	۲/۲۵	۴۷/۶۱	$T - 1/15d$	۸
۲/۲۹	0/۰۴	۲/۳۴	۲/۲۵	0/۰۹	$T - 0/05d$	۳۰	۲۱/۶۱	۱۹/۳۶	۴۵/۸۱	۲/۲۵	۴۳/۵۶	$T - 1/1d$	۹
۲/۲۵	۰	۲/۲۵	۲/۲۵	۰	$T + 0d$	۳۱	۱۹/۸۹	۱۷/۶۴	۴۱/۹۴	۲/۲۵	۳۹/۶۹	$T - 1/05d$	۱۰
۲/۶۱	0/۳۶	۲/۳۴	۲/۲۵	0/۰۹	$T + 0/05d$	۳۲	۱۸/۲۵	۱۶	۳۸/۲۵	۲/۲۵	۳۶	$T - 1d$	۱۱
۳/۶۹	۱/۴۴	۲/۶۱	۲/۲۵	0/۳۶	$T + 0/1d$	۳۳	۱۶/۶۹	۱۴/۴۴	۳۴/۷۴	۲/۲۵	۳۲/۴۹	$T - 0/95d$	۱۲
۵/۴۹	۳/۲۴	۳/۰۶	۲/۲۵	0/۸۱	$T + 0/15d$	۳۴	۱۵/۲۱	۱۲/۹۶	۳۱/۴۱	۲/۲۵	۲۹/۱۶	$T - 0/9d$	۱۳
۸/۰۱	۵/۷۶	۳/۶۹	۲/۲۵	۱/۴۴	$T + 0/2d$	۳۵	۱۳/۸۱	۱۱/۵۶	۲۸/۲۶	۲/۲۵	۲۶/۰۱	$T - 0/85d$	۱۴
۱۱/۲۵	۹	۴/۵	۲/۲۵	۲/۲۵	$T + 0/25d$	۳۶	۱۲/۴۹	۱۰/۲۴	۲۵/۲۹	۲/۲۵	۲۳/۰۴	$T - 0/8d$	۱۵
۱۵/۲۱	۱۲/۹۶	۵/۴۹	۲/۲۵	۳/۲۴	$T + 0/3d$	۳۷	۱۱/۲۵	۹	۲۲/۵	۲/۲۵	۲۰/۲۵	$T - 0/75d$	۱۶
۱۹/۸۹	۱۷/۶۴	۶/۶۶	۲/۲۵	۴/۴۱	$T + 0/35d$	۳۸	۱۰/۰۹	۷/۸۴	۱۹/۸۹	۲/۲۵	۱۷/۶۴	$T - 0/7d$	۱۷
۲۵/۲۹	۲۳/۰۴	۸/۰۱	۲/۲۵	۵/۷۶	$T + 0/4d$	۳۹	۹/۰۱	۶/۷۶	۱۷/۴۶	۲/۲۵	۱۵/۲۱	$T - 0/65d$	۱۸
۳۱/۴۱	۲۹/۱۶	۹/۵۴	۲/۲۵	۷/۲۹	$T + 0/45d$	۴۰	۸/۰۱	۵/۷۶	۱۵/۲۱	۲/۲۵	۱۲/۹۶	$T - 0/6d$	۱۹
۳۸/۲۵	۳۶	۱۱/۲۵	۲/۲۵	۹	$T + 0/5d$	۴۱	۷/۰۹	۴/۸۴	۱۳/۱۴	۲/۲۵	۱۰/۸۹	$T - 0/55d$	۲۰
							۶/۲۵	۴	۱۱/۲۵	۲/۲۵	۹	$T - 0/5d$	۲۱

در جدول ۲.۲ مشاهده می‌کنیم که هر دو شاخص C_{pp} و C''_{pp} در نقطه $\mu = T$ کوچکترین مقدار خود را می‌گیرند. همانطور که اشاره کردیم، شاخص تعمیم‌یافته ناکارایی به مکان قرار گرفتن میانگین فرایند توجه دارد در حالیکه شاخص ناکارایی C_{pp} به این موضوع توجهی ندارد. این یعنی، اگر دو فرایند A و B را به صورت $\mu_A > T$ و $\mu_B < T$ داشته باشیم آنگاه اگر عبارت $\mu_A - T = T - \mu_B$ حاصل شود و داشته باشیم $D_l > D_u$ ، برای شاخص C_{pp} یک مقدار ناکارایی به دست می‌دهد ولی برای شاخص C''_{pp} اینطور نخواهد بود، در حالیکه انتظار می‌رود مقدار ناکارایی فرایند A بیشتر از مقدار ناکارایی فرایند B باشد. به عنوان مثال، در جدول ۲.۲، مقدار ناکارایی شاخص C''_{pp} برای $\mu_A = T + 0/5d$ برابر ۳۸/۲۵ و برای $\mu_B = T - 0/5d$ برابر ۶/۲۵ می‌باشد. همانطور که ملاحظه می‌کنید دو فرایند به یک میزان فاصله از مقدار هدف قرار

دارند، اما مقدار ناکارایی فرایند B کمتر از مقدار ناکارایی فرایند A است و این یعنی فرایند B عملکرد بهتری نسبت به فرایند A داشته است.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته C''_{pp} برتر از شاخص ناکارایی C_{pp} است.

تذکر ۱.۳.۲. هر آنچه که در فصل اول در رابطه با شاخص C_{pp} گفته شد، در مورد شاخص تعمیم‌یافته آن نیز صدق می‌کند. به عبارتی دیگر، فرایندی کارا خواهد بود که C''_{pp} آن برابر صفر شود و هر مقدار غیر صفر آن نیز چندین میزان از ناکارا بودن فرایند را همانند جدول ۵.۱ گویا خواهد بود.

نکته ۲.۳.۲. شاخص تعمیم‌یافته ناکارایی C''_{pp} می‌تواند گویاتر و دقیق‌تر از شاخص ناکارایی C_{pp} در همه موارد باشد. بنابراین بهتر است از تعمیم آن به عنوان ناکارایی فرایند استفاده شود؛ چرا که این شاخص، شاخص C_{pp} را در بر می‌گیرد ولی شاخص C_{pp} شاخص C''_{pp} را در بر نمی‌گیرد.

در اینجا به برخی از مقالاتی که در این زمینه کار شده اشاره می‌کنیم:

چن [۱۶] ابتدا برآورد C_{pp} را به دست آورد و سپس برآورد ناریب کمترین واریانس به طور یکنواخت آن UMVUE و همچنین تابع چگالی احتمال آن را محاسبه کرد. چن [۱۵] در مقاله‌ای دیگر شاخص C''_{pp} را معرفی و برآورد آن را به دست آورد و در نهایت به محاسبه امید ریاضی و واریانس و MSE آن پرداخت. پرن و لین [۵۵] بعد از برآورد C_{pp} و محاسبه MSE آن، با استفاده از فاصله اطمینان تصمیم‌گیری‌هایی بر اساس آن انجام داد. پرن و همکاران [۵۴] یک روش آزمون فرض بر اساس شاخص C_{pp} جهت تعیین این که آیا فرایند داده شده الزامات کیفیت را ارائه می‌کند یا نه، مورد بررسی قرار دادند. هونگ و همکاران [۲۹] روابط بین شاخص ناکارایی فرایند C_{pp} و بازده (عملکرد) فرایند را نشان دادند. چن و همکاران [۱۷] شاخص نمره (R_i) را تعیین کردند و سپس آن را برای ارزیابی عملکرد فرایند شرکت سازنده قرارداد، با استفاده از شاخص C_{pp} به کار گرفتند. چو و همکاران [۲۳] نتایج یک مطالعه شبیه‌سازی شده روی هر چهار فواصل اطمینان بوت استرپی ۹۵ درصدی برای برآورد شاخص C_{pp} زمانی که داده‌ها از توزیع بور^۱ باشند، مورد بررسی قرار داده‌اند. که و همکاران [۳۹] برآورد فاصله‌ای شاخص ناکارایی C_{pp} را برای فرایند غیر نرمال به دست آوردند. همچنین، در سال‌های ۲۰۱۴، ۲۰۱۵ و ۲۰۱۹ کارهای مختلف دیگری روی شاخص C_{pp} مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، از جمله، می‌توان به اثر خطای اندازه‌گیری روی شاخص ناکارایی [۵۹]، فاصله اطمینان تعمیم‌یافته برای برآورد شاخص ناکارایی نرمال [۴۷]، ارزیابی ناکارایی فرایند برای حالتی که داده‌ها از دسته‌های چندتایی باشند [۴۵] و غیره اشاره کرد.

¹Burr

۱.۳.۲ شاخص‌های ناکارایی فرایند در محیط فازی

در این زمینه، در فصل‌های سوم و چهارم به طور مفصل به آن پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که افراد زیادی در این زمینه کار کرده‌اند که به طور اختصار به برخی از این مقالات اشاره می‌کنیم.

لیو و وو [۴۶] بعد از فازی کردن شاخص C_{pp} و به دست آوردن تابع عضویت آن، برای ارزیابی این شاخص از آزمون فرض استفاده کرده‌اند. کایا و قهرمان [۳۵] شاخص فازی C_{pp} را برای حالتی که حدود مشخصات و مقدار هدف فازی هستند مورد بررسی قرار داده‌اند. عباسی گنجی [۳، ۶] شاخص فازی C''_{pp} را برای حالتی که داده‌ها فازی هستند ولی حدود مشخصات و مقدار هدف غیرفازی (حقیقی) هستند مورد بررسی قرار داده‌است و در نهایت برای ارزیابی این شاخص از آزمون فرض استفاده کرده‌است.

۴.۲ نتیجه‌گیری

شاخص‌های کارایی و ناکارایی بسیاری وجود دارند که ما در این فصل، به برخی از آن‌ها به اختصار اشاره کردیم. هر یک از شاخص‌ها دارای نقص‌ها و نارسایی‌هایی بودند که با بیان مثال نقص به ایرادات آن‌ها پی بردیم. اما در نهایت شاخص ناکارایی را مطرح کردیم که این شاخص با جداسازی اطلاعات و تفکیک دو شاخص در خود می‌تواند دقت و درستی فرایند را به طور جداگانه بررسی کند. ولی این شاخص نیز دارای ایراداتی بود که با معرفی تعمیم آن، ایرادات آن را برطرف ساختیم. سپس، با ارائه مثال عددی دو شاخص را با هم مقایسه نموده و برتری تعمیم آن را ثابت کردیم. از این رو، می‌توان نتیجه گرفت که شاخص تعمیم‌یافته می‌تواند گزینه مناسبی برای بیان ناکارایی (و یا کارایی) فرایند باشد.

فصل ۳

شاخص ناکارایی C_{pp} در محیط فازی

برای ارزیابی کارایی فرایند، همانطور که در فصل قبل اشاره شد شاخص‌های کارایی و ناکارایی متعددی پیشنهاد شده‌است. در این فصل، قصد داریم ابتدا شاخص ناکارایی C_{pp} را تخمین زده و سپس برآورد فازی آن را در دو بخش برآورد شاخص ناکارایی فازی با حدود مشخصات و مقدار هدف غیر فازی و برآورد فازی شاخص ناکارایی با حدود مشخصات و مقدار هدف فازی، بررسی کنیم. در پایان هم، مثالی را برای نشان دادن کاربرد فازی این شاخص ارائه می‌کنیم.

۱.۳ مقدمه

شاخص ناکارایی توانسته برتری خود را در زمینه جداسازی اطلاعات نسبت به شاخص‌های کارایی نشان دهد. اما در جامعه مواردی هستند که نمی‌توان به طور دقیق ناکارایی آن‌ها را تخمین زد، از این رو، از منطق فازی برای به دست آوردن مقدار ناکارایی فرایند کمک می‌گیریم. برای فازی کردن شاخص ناکارایی، لازم است که شاخص‌های عدم دقت و عدم درستی فازی شوند. در این صورت، از شاخص ناکارایی فازی می‌توان در مسائل فازی بهره برد.

۲.۳ برآورد C_{pp}

همانطور که در فصل دوم بیان شد، شاخص C_{pp} ، طبق تعریف ۲.۱.۱ توسط گرینویچ و جهراسکافرت در سال ۱۹۹۶ پیشنهاد شد که برای فرایندهای با تلورانس نامتقارن مورد استفاده قرار می‌گیرد. حال، جهت تخمین شاخص C_{pp} ، به صورت زیر عمل می‌کنیم [۲۸]:

فرض کنید X یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. از آنجایی که $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ و $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیمم (MLE) برای μ و σ^2 هستند. یعنی،

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad , \quad \hat{\sigma}^2 = S^2$$

بنابراین،

$$\hat{C}_{pp} = \frac{(\bar{X} - T)^2}{D^2} + \frac{S^2}{D^2} \quad (۱.۳)$$

حال که برآورد شاخص C_{pp} را به دست آوردیم، به سراغ برآورد فازی آن می‌رویم.

۳.۳ شاخص ناکارایی فرایند فازی با حدود مشخصات و مقدار هدف غیر فازی

۱.۳.۳ برآورد فازی C_{pp} به روش باکلی

برای فازی کردن برآورد C_{pp} از روش باکلی [۳۰، ۱۳] استفاده می‌کنیم، که در زیر به آن می‌پردازیم.

فرض کنید Y یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $f_y(y; \theta)$ باشد. از آنجایی که پارامتر مورد نظر یعنی θ مجهول است باید با استفاده از نمونه تصادفی Y_1, Y_2, \dots, Y_n برآورد شود. بنابراین، فرض کنید $\pi(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ یک آماره باشد که برای برآورد θ مورد استفاده قرار می‌گیرد. با مقدار دادن به این متغیرهای تصادفی به صورت y_1, y_2, \dots, y_n یک برآورد نقطه‌ای $\pi(y_1, y_2, \dots, y_n)$ برای θ به دست می‌آید. چون نمونه مورد نظر تصادفی است، هیچ‌گاه انتظار نمی‌رود که مقدار این برآوردگر به طور دقیق با θ برابر باشد. بنابراین، یک فاصله اطمینان $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ برای θ محاسبه می‌کنند که در آن، معمولاً α را برابر با 0.1 ، 0.05 و یا 0.25 در نظر می‌گیرند.

لازم به ذکر است که، فواصل اطمینان $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ برای θ را می‌توان به صورت $[\psi(\alpha), l(\alpha)]$ نشان داد که در آن $\alpha \in (0, 1)$ می‌باشد. فاصله $[\hat{\theta}, \hat{\theta}] = [\psi(1), l(1)]$ به عنوان فاصله اطمینان 0% برای θ است که همان برآورد نقطه‌ای را نتیجه می‌دهد و فاصله $[\psi(0), l(0)]$

فاصله اطمینان ۱۰۰٪ برای θ است که فضای پارامتر را نتیجه می‌دهد. باکلی [۱۳] پیشنهاد کرد که اگر فواصل اطمینان $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ را به عنوان α -برش‌های اعداد فازی در نظر بگیریم، با روی هم قرار دادن این برش‌ها (فواصل اطمینان) می‌توان عدد فازی مثلثی مانند $\tilde{\theta}$ را به دست آورد.

$$\tilde{\theta} = [l_{\tilde{\theta}}, \psi_{\tilde{\theta}}]$$

۲.۳.۳ برآورد فازی \bar{X} و S^2

با توجه به روش پیشنهادی باکلی، می‌توان α -برش‌های \tilde{X} و \tilde{S}^2 را به صورت زیر به دست آورد:

$$\tilde{X}(\alpha) = [l_{\tilde{X}}(\alpha), \psi_{\tilde{X}}(\alpha)] = \left[\bar{X} - t_{(1-\frac{\alpha}{2}), n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{(1-\frac{\alpha}{2}), n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right] \quad (2.3)$$

و

$$\tilde{S}^2(\alpha) = [l_{\tilde{S}^2}(\alpha), \psi_{\tilde{S}^2}(\alpha)] = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{(1-\frac{\alpha}{2}), n-1}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{(\frac{\alpha}{2}), n-1}^2} \right] \quad (3.3)$$

در دو معادله فوق، $t_{(1-\frac{\alpha}{2}), n-1}$ ، صدک $(1 - \frac{\alpha}{2}) \times 100\%$ توزیع t با $n-1$ درجه آزادی و $\chi_{(\frac{\alpha}{2}), n-1}^2$ ، صدک $(\frac{\alpha}{2}) \times 100\%$ توزیع کای-دو مرکزی با $n-1$ درجه آزادی می‌باشند. به عنوان مثال، شکل ۱.۳ نمودار توابع عضویت میانگین و واریانس فازی فرایندی با مشخصات زیر برای نمونه‌ای به حجم ۵۰ را نشان می‌دهد [۳۰]:

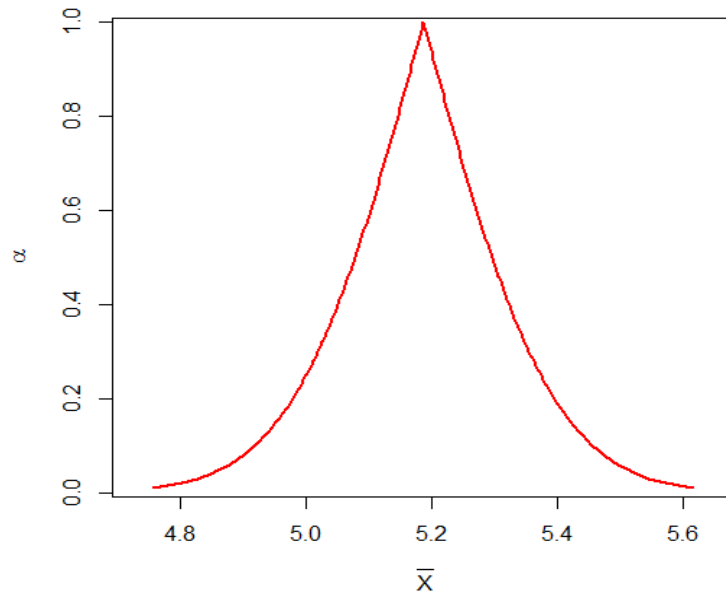
$$LSL = 0, \quad USL = 10, \quad T = 4, \quad \bar{x} = 5/187, \quad s^2 = 1/281$$

طبق معادله (۱.۳) می‌دانیم که \hat{C}_{pp} تابعی از \bar{X} و S^2 است. به این ترتیب، برای ایجاد برش‌های برآورد فازی C_{pp} یک روش کلی مطرح می‌شود که آن را در زیربخش بعدی ارائه کرده‌ایم.

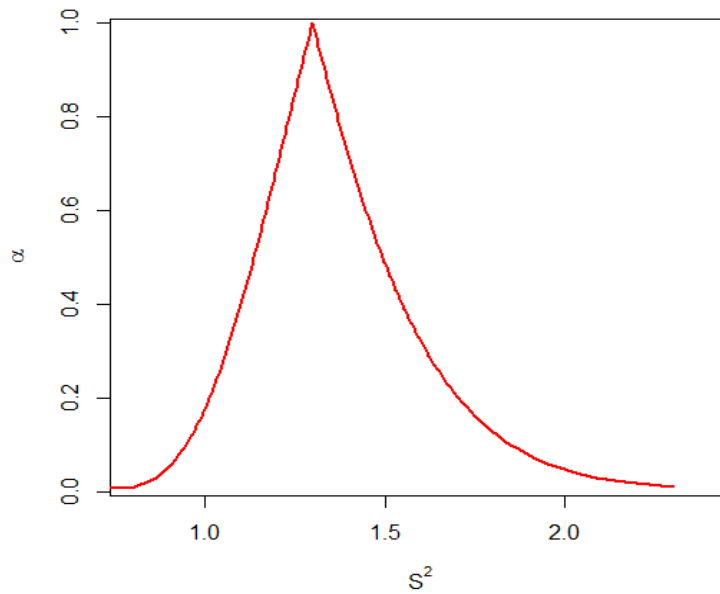
۳.۳.۳ برآورد فازی شاخص ناکارایی C_{pp}

همانطور که در قسمت قبل بیان شد، در حالتی که دو پارامتر یا بیشتر داشته باشیم، لازم است که به صورت زیر عمل کنیم [۳۰]:

فرض کنید X مجموعه مرجع باشد. q برآوردگر فازی از زیرمجموعه‌های فازی $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_q$ را در نظر بگیرید. یک نمونه q برآوردگر e_1, e_2, \dots, e_q از q زیر مجموعه فازی $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_q$ گرفته می‌شود. در حالت کلی، q زیر مجموعه فازی فوق توابع عضویت متفاوتی خواهند داشت که با $\eta_{\tilde{E}_1}, \eta_{\tilde{E}_2}, \dots, \eta_{\tilde{E}_q}$ نشان داده می‌شود. می‌توان این زیرمجموعه‌های فازی را ترکیب کرده



(ا)



(ب)

شکل ۱.۳: نمودار توابع عضویت (ا) میانگین فازی (\tilde{X}) و (ب) واریانس فازی (\tilde{S}^2)

و یک بردار فازی q -بعدی به صورت \tilde{E} با بردار تابع عضویت $\eta_{\tilde{E}}$ تولید کرد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\eta_{\tilde{E}}(e) : X^q \rightarrow [0, 1]$$

فیلزموزر و ورتل [۲۶] پیشنهاد کردند که یک راه ترکیب کردن توابع عضویت $\eta_{\tilde{E}_1}, \eta_{\tilde{E}_2}, \dots, \eta_{\tilde{E}_q}$ به یک بردار تابع عضویت $\eta_{\tilde{E}}(e)$ روش ترکیب مینیمم است. یعنی:

$$\eta_{\tilde{E}}(e) = \min\{\eta_{\tilde{E}_1}, \eta_{\tilde{E}_2}, \dots, \eta_{\tilde{E}_q}\}, \quad \forall e \in X^q$$

به علاوه، α -برش \tilde{E} حاصل ضرب دکارتی α -برش های q عدد فازی $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_q$ می باشد یعنی به صورت

$$\tilde{E}(\alpha) = \tilde{E}_1(\alpha) \times \tilde{E}_2(\alpha) \times \dots \times \tilde{E}_q(\alpha)$$

با در نظر گرفتن یک تابع $f: X^q \rightarrow X$ در صورتی که پیوسته و یکنوا باشد. می توان از اصل گسترش زاده استفاده کرد و بنابراین خواهیم داشت:

$$\eta_{\tilde{W}}(w) = \begin{cases} \sup\{\eta_{\tilde{E}}(e) & ; f(x) = w\}, & f^{-1}(w) \neq \circ \\ \circ, & f^{-1}(w) = \circ \end{cases}$$

در نتیجه، $\eta_{\tilde{W}}(w)$ یک تابع عضویت است که β -برش آن به صورت زیر می باشد:

$$\tilde{W}(\alpha) = [l_{\tilde{W}}(\alpha), \psi_{\tilde{W}}(\alpha)]$$

که در آن

$$l_{\tilde{W}}(\alpha) = \inf_{w \in \tilde{W}}(w) \quad , \quad \psi_{\tilde{W}}(\alpha) = \sup_{w \in \tilde{W}}(w)$$

بنابراین، بر اساس معادلات فوق می توان α -برش \tilde{C}_{pp} را به دست آورده و از آن تابع عضویت \tilde{C}_{pp} ، یعنی $\tilde{C}_{pp}(\hat{c}_{pp})$ را استخراج کرد.

۴.۳.۳ تابع عضویت شاخص ناکارایی \tilde{C}_{pp}

با توجه به معادله (۱.۳) و روش مذکور، با انتخاب نقاط $g \in \tilde{X}(\alpha)$ و $h \in \tilde{S}(\alpha)$ خواهیم داشت:

$$\tilde{C}_{pp}(g, h) = \left(\frac{g-T}{D}\right)^2 + \left(\frac{h}{D}\right)^2 \quad (۴.۳)$$

بنابراین α -برش برآورد فازی \tilde{C}_{pp} به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{pp}(\alpha) &= [l_{\tilde{C}_{pp}}(\alpha), \psi_{\tilde{C}_{pp}}(\alpha)] \\ &= [l_{\tilde{C}_{ia}}(\alpha), \psi_{\tilde{C}_{ia}}(\alpha)] + [l_{\tilde{C}_{ip}}(\alpha), \psi_{\tilde{C}_{ip}}(\alpha)] \\ &= \tilde{C}_{ia}(\alpha) + \tilde{C}_{ip}(\alpha) \end{aligned}$$

که در آن

$$l_{\tilde{C}_{pp}}(\alpha) = \frac{(\bar{X} - t_{(1-\frac{\alpha}{n}), n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} - T)^2}{D^2} + \frac{(n-1)S^2}{D^2 \chi_{1-\frac{\alpha}{n}, n-1}^2} \quad (۵.۳)$$

$$\psi_{\tilde{C}_{pp}}(\alpha) = \frac{(\bar{X} + t_{(1-\frac{\alpha}{2}), n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} - T)^2}{D^2} + \frac{(n-1)S^2}{D^2 \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \quad (6.3)$$

از آنجایی که \tilde{C}_{pp} در رابطه (۴.۳) رابطه‌ای مستقیم با g و h دارد، برای کران پایین α -برش شاخص \tilde{C}_{pp} یعنی (۵.۳) کران‌های پایین α -برش میانگین و واریانس فازی از روابط (۲.۳) و (۳.۳) قرار داده می‌شود و همچنین برای کران بالای آن در رابطه (۶.۳)، کران‌های بالای α -برش میانگین و واریانس فازی روابط (۲.۳) و (۳.۳) محاسبه می‌گردد. جهت نشان دادن کاربرد این شاخص مثال زیر را ارائه می‌کنیم:

مثال ۱.۳.۳. با کمک جدولی در مقاله چن [۱۵]، برای فرایندی با $LSL = 0$ و $USL = 10$ و مقدار هدف $T = 7/5$ یک نمونه 50 تایی با میانگین $8/25$ و انحراف استاندارد برابر با $1/25$ تولید کردیم.

ابتدا α -برش میانگین فازی و واریانس فازی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\alpha) &= [8/25 - 0/176 t_{1-\frac{\alpha}{2}, 49}, \quad 8/25 + 0/176 t_{1-\frac{\alpha}{2}, 49}] \\ \tilde{S}^2(\alpha) &= \left[\frac{76/562}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 49}^2}, \quad \frac{76/562}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, 49}^2} \right] \end{aligned}$$

سپس با جایگذاری در معادلات (۵.۳) و (۶.۳) تابع عضویت شاخص ناکارایی فازی \tilde{C}_{pp} به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\tilde{C}_{pp}(\alpha) = [l_{\tilde{C}_{pp}}(\alpha), \quad \psi_{\tilde{C}_{pp}}(\alpha)]$$

که در آن،

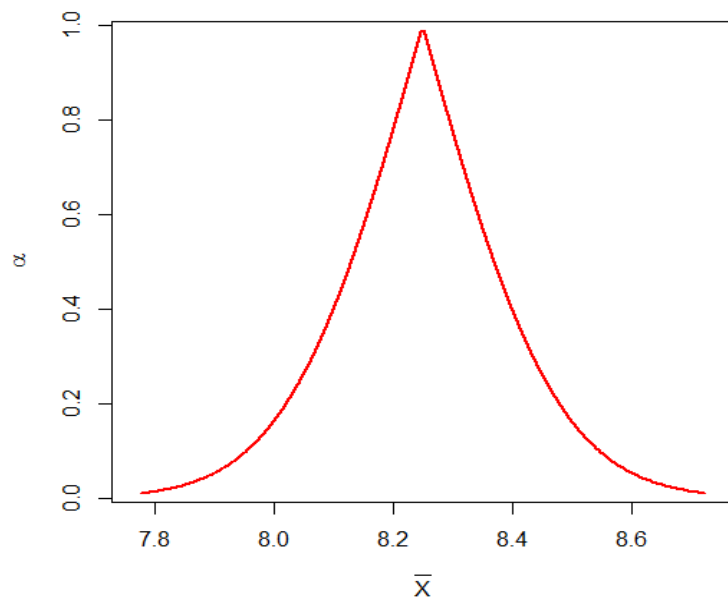
$$l_{\tilde{C}_{pp}}(\alpha) = \frac{1}{0/694} (0/75 - 0/176 t_{1-\frac{\alpha}{2}, 49})^2 + \frac{110/250}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 49}^2}$$

و

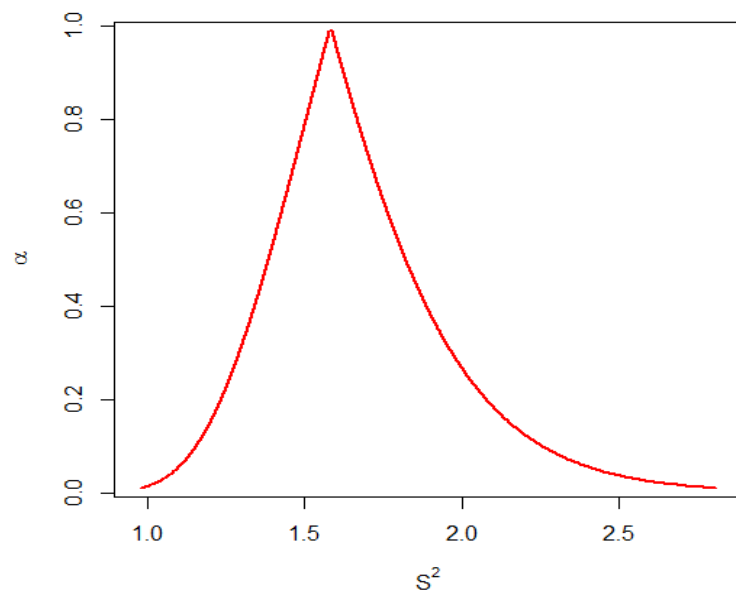
$$\psi_{\tilde{C}_{pp}}(\alpha) = \frac{1}{0/694} (0/75 + 0/176 t_{1-\frac{\alpha}{2}, 49})^2 + \frac{110/250}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, 49}^2}$$

با توجه به قضیه نمایش، نمودار توابع عضویت برآوردگرهای فازی میانگین و واریانس را می‌توان به صورت شکل ۲.۳ به دست آورد.

بر اساس شکل ۳.۳ برآورد شاخص‌های عدم درستی و عدم دقت زمانی که بیشترین درجه عضویت را می‌گیرند، به ترتیب برابر $0/805$ و $2/286$ می‌شوند. بنابراین، با جمع این مقادیر میزان ناکارایی در این حالت، برابر $3/08$ خواهد شد، که به دلیل بالا بودن میزان پراکندگی فرایند، میزان ناکارایی افزایش یافته و همین باعث شده که فرایند کارایی خوبی را ارائه ندهد.

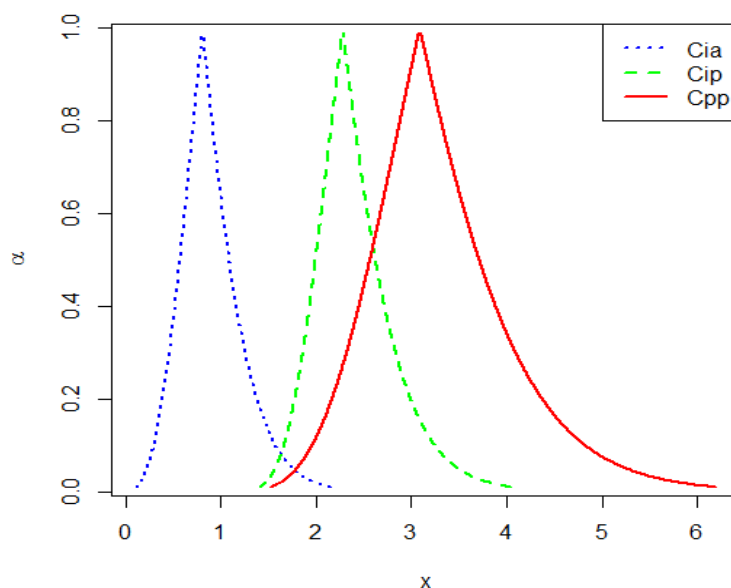


(ا)



(ب)

شکل ۲.۳: نمودار توابع عضویت (ا) میانگین فازی (\bar{X}) و (ب) واریانس فازی (S^2)



شکل ۳.۳: نمودار توابع عضویت شاخص‌های فازی برای فرایند مورد بررسی

۴.۳ شاخص ناکارایی فرایند فازی با حدود مشخصات و مقدار هدف فازی

در این بخش می‌خواهیم شاخص \tilde{C}_{pp} را با به دست آوردن برآورد فازی شاخص‌های عدم درستی C_{ip} و عدم دقت C_{ia} به دست آوریم. در حالی که، برآورد فازی شاخص‌های C_{ip} و C_{ia} هم برای اعداد فازی مثلثی (TFN)^۱ و هم برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای (TrFN)^۲ تولید شده‌اند که آن‌ها نیز با استفاده از حدود مشخصات و مقدار هدف فازی و میانگین و واریانس فازی به دست می‌آیند.

بنابراین، هنگامی که حدود مشخصات و مقدار هدف اعداد دقیقی نیستند، نمی‌توان از شاخص ناکارایی سنتی (کلاسیک) استفاده کرد. در این شرایط منطق فازی به کار گرفته شده و در نتیجه شاخص ناکارایی فازی ارزیابی می‌شود.

قابل ذکر است که، در این بخش، از مقادیر مشاهده شده نمونه تصادفی برای میانگین و واریانس استفاده شده است.

^۱Triangular fuzzy number

^۲Trapezoidal fuzzy number

۱.۴.۳ واریانس فازی

حال، برای اینکه برآورد فازی C_{pp} حاصل شود ابتدا باید برآوردهای فازی میانگین و واریانس را به دست آوریم. در زیربخش ۲.۳.۳ به محاسبه میانگین و واریانس فازی اشاره شده است، اما واریانس فازی به دست آمده از معادله (۳.۳) به عنوان یک برآوردگر فازی اریب به حساب می‌آید، از این رو باید یک برآوردگر فازی نارایب برای واریانس به دست آوریم. یک برآوردگر فازی نارایب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱.۴.۳. یک برآوردگر فازی را نارایب گویند هر گاه هسته‌اش (یعنی نقطه‌ای که درجه عضویت آن یک است) برآوردگر نارایب پارامتر مربوطه باشد. در غیر این صورت، اریب خواهد بود.

تذکر ۱.۴.۳. برآوردگر فازی به دست آمده از رابطه (۳.۳) اریب است، زیرا نقطه‌ای از آن که درجه عضویت آن یک است، برابر خواهد بود با $\frac{(n-1)s^2}{\chi_{(n-1), \frac{1}{\alpha}}^2}$ ، در حالی که این مقدار برابر با برآورد نقطه‌ای پارامتر σ^2 نمی‌باشد.

بنابراین، با توجه به مقالات [۱۰، ۱۱، ۱۳، ۱۴] برآوردگر فازی نارایب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{L(\lambda)}, \frac{(n-1)s^2}{R(\lambda)} \right] \quad (7.3)$$

که در آن $L(\lambda) = (1-\lambda)\chi_{(n-1), 0.995}^2 + \lambda(n-1)$ و $R(\lambda) = (1-\lambda)\chi_{(n-1), 0.005}^2 + \lambda(n-1)$ در نتیجه، مجموعه‌های α -برش برآوردگر فازی نارایب واریانس نیز به صورت زیر به دست می‌آیند [۳۵]:

$$\tilde{\sigma}^2(\alpha) = \begin{cases} [\sigma_l^2(0.001), \sigma_r^2(0.001)], & 0 \leq \alpha \leq 0.001 \\ [\sigma_l^2(\alpha), \sigma_r^2(\alpha)], & 0.001 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (8.3)$$

به طوری که در آن

$$\sigma_l^2(\alpha) = \frac{(n-1)s^2}{(1-\alpha)\chi_{(n-1), 0.995}^2 + \alpha(n-1)} \quad (9.3)$$

$$\sigma_r^2(\alpha) = \frac{(n-1)s^2}{(1-\alpha)\chi_{(n-1), 0.005}^2 + \alpha(n-1)}$$

نکته ۱.۴.۳. طبق مقاله [۱۰]، برای α هایی که در بازه $[0, 0.001]$ قرار دارند اگر مقدار α را صفر قرار دهیم، آنگاه برآوردگر فازی اریب σ^2 خواهد بود، بدین علت هر مقدار کوچکی به جز صفر مانند $0.001, 0.005$ و 0.005 را می‌توان برای α در نظر گرفت.

۲.۴.۳ میانگین فازی

میانگین به دست آمده از رابطه (۲.۳) یک برآوردگر فازی نارایب محسوب می‌شود، چرا که هسته آن، برابر با برآوردگر نارایب μ است. اما برای محاسبه α -برش‌های آن، از α -برش‌های واریانس فازی که در زیربخش قبل به دست آمد، استفاده می‌شود [۳۵، ۱۱]. بنابراین خواهیم داشت:

$$\tilde{\mu}(\alpha) = \begin{cases} [\mu_l(\alpha/\alpha), \mu_r(\alpha/\alpha)], & 0 \leq \alpha \leq \alpha/\alpha \\ [\mu_l(\alpha), \mu_r(\alpha)], & \alpha/\alpha \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (10.3)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mu_l(\alpha) &= \min \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{\alpha}} \frac{\sigma_i(\alpha)}{\sqrt{n}} \right), & i=\{l,r\} \\ \mu_r(\alpha) &= \max \left(\bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{\alpha}} \frac{\sigma_i(\alpha)}{\sqrt{n}} \right), & i=\{l,r\} \end{aligned} \quad (11.3)$$

و $\sigma_l(\alpha)$ و $\sigma_r(\alpha)$ به ترتیب جذر برش‌های چپ و راست بازه $\tilde{\sigma}^2(\alpha)$ می‌باشند.

۳.۴.۳ حدود مشخصات و مقدار هدف فازی

فرض کنید حدود مشخصات و مقدار هدف اعداد دقیقی نباشند. در این صورت از اعداد فازی برای بیان آن‌ها استفاده می‌شود. بنابراین، دو حالت از داده‌ها که شامل اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای هستند مطابق با روابط تعاریف ۱۰.۲.۱ و ۱۱.۲.۱ در نظر گرفته می‌شوند.

ملاحظه ۱.۴.۳. فرض کنید حدود مشخصات فنی و مقدار هدف، اعداد فازی مثلثی به ترتیب به صورت $\tilde{T} = T(t_1, t_2, t_3)$ ، $\tilde{USL} = T(u_1, u_2, u_3)$ ، $\tilde{LSL} = T(l_1, l_2, l_3)$ باشند. بنابراین، بازه‌های α -برش این اعداد فازی به صورت زیر است [۳۵، ۷، ۴]:

$$\begin{aligned} \tilde{USL}(\alpha) &= [U_l(\alpha), U_r(\alpha)] = [u_1 + (u_2 - u_1)\alpha, u_3 - (u_3 - u_2)\alpha] \\ \tilde{LSL}(\alpha) &= [L_l(\alpha), L_r(\alpha)] = [l_1 + (l_2 - l_1)\alpha, l_3 - (l_3 - l_2)\alpha] \\ \tilde{T}(\alpha) &= [T_l(\alpha), T_r(\alpha)] = [t_1 + (t_2 - t_1)\alpha, t_3 - (t_3 - t_2)\alpha] \end{aligned} \quad (12.3)$$

ملاحظه ۲.۴.۳. فرض کنید حدود مشخصات فنی و مقدار هدف، اعداد فازی ذوزنقه‌ای به صورت $\tilde{T} = T_r(t_1, t_2, t_3, t_4)$ ، $\tilde{USL} = T_r(u_1, u_2, u_3, u_4)$ ، $\tilde{LSL} = T_r(l_1, l_2, l_3, l_4)$ باشند. بنابراین، بازه‌های α -برش این اعداد فازی به صورت زیر است [۳۵، ۷، ۴]:

$$\begin{aligned} \tilde{USL}(\alpha) &= [U_l(\alpha), U_r(\alpha)] = [u_1 + (u_2 - u_1)\alpha, u_4 - (u_4 - u_3)\alpha] \\ \tilde{LSL}(\alpha) &= [L_l(\alpha), L_r(\alpha)] = [l_1 + (l_2 - l_1)\alpha, l_4 - (l_4 - l_3)\alpha] \\ \tilde{T}(\alpha) &= [T_l(\alpha), T_r(\alpha)] = [t_1 + (t_2 - t_1)\alpha, t_4 - (t_4 - t_3)\alpha] \end{aligned} \quad (13.3)$$

نکته ۲.۴.۳. لازم به ذکر است که، برای بیان اعداد فازی مثلثی در اصطلاح از کلمه «تقریباً» و برای بیان اعداد فازی دوزنقه‌ای نیز از اصطلاحی همچون «بین دو مقدار مثلاً بین X و Y » استفاده می‌شود.

۴.۴.۳ برآورد فازی شاخص ناکارایی فرایند \tilde{C}_{pp}

همانطور که قبلاً ذکر شد، هنگامی که حدود مشخصات و مقدار هدف اعداد فازی هستند، شاخص ناکارایی فازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای فازی کردن آن باید α -برش آن را به دست آورده و از آن تابع عضویت \tilde{C}_{pp} را استخراج کرد. برای این امر، ابتدا باید بازه‌های α -برش شاخص‌های \tilde{C}_{ip} و \tilde{C}_{ia} را محاسبه کنیم. در نتیجه α -برش شاخص \tilde{C}_{pp} از معادله (۱۴.۳) به دست می‌آید [۳۵]:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{pp}(\alpha) &= \tilde{C}_{ia}(\alpha) + \tilde{C}_{ip}(\alpha) \\ &= \{C_{ia}^L(\alpha) + C_{ip}^L(\alpha), C_{ia}^R(\alpha) + C_{ip}^R(\alpha)\} \end{aligned} \quad (14.3)$$

بازه‌های α -برش شاخص‌های C_{ip} و C_{ia} با استفاده از معادلات (۱۵.۳) و (۱۶.۳) به دست می‌آیند.

$$\tilde{C}_{ia}(\alpha) = \{C_{ia}^L(\alpha), C_{ia}^R(\alpha)\} = \left\{ \left(\frac{\mu_l(\alpha) - T_r(\alpha)}{D_r^Y(\alpha)} \right)^2, \left(\frac{\mu_r(\alpha) - T_l(\alpha)}{D_l^Y(\alpha)} \right)^2 \right\} \quad (15.3)$$

$$\tilde{C}_{ip}(\alpha) = \{C_{ip}^L(\alpha), C_{ip}^R(\alpha)\} = \left\{ \frac{\sigma_l^Y(\alpha)}{D_r^Y(\alpha)}, \frac{\sigma_r^Y(\alpha)}{D_l^Y(\alpha)} \right\} \quad (16.3)$$

بازه‌های α -برش شاخص \tilde{C}_{ia} را می‌توان به دو صورت اعداد فازی مثلثی و اعداد فازی دوزنقه‌ای تولید کرد که در روابط (۱۷.۳) و (۱۸.۳) نشان داده شده‌اند [۳۵].

$$C_{ia}^L(\alpha) = \begin{cases} \left(\frac{\min\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_i(\alpha)}{\sqrt{n}}\right) - (t_2 - t_3)\alpha - t_3}{\min\{(u_2 - u_3 - t_2 + t_1)\alpha + u_3 - t_1, (t_2 - t_3 - l_2 + l_1)\alpha + t_3 - l_1\}} \right)^2, & \text{برای TFN} \\ \left(\frac{\min\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_i(\alpha)}{\sqrt{n}}\right) - (t_3 - t_4)\alpha - t_4}{\min\{(u_3 - u_4 - t_3 + t_1)\alpha + u_4 - t_1, (t_3 - t_4 - l_3 + l_1)\alpha + t_4 - l_1\}} \right)^2, & \text{برای TrFN} \end{cases} \quad (17.3)$$

$$C_{ia}^R(\alpha) = \begin{cases} \left(\frac{\max\left(\bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_i(\alpha)}{\sqrt{n}}\right) - (t_2 - t_1)\alpha - t_1}{\min\{(u_2 - u_1 - t_2 + t_3)\alpha + u_1 - t_3, (t_2 - t_1 - l_2 + l_3)\alpha + t_1 - l_3\}} \right)^2, & \text{برای TFN} \\ \left(\frac{\max\left(\bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_i(\alpha)}{\sqrt{n}}\right) - (t_2 - t_1)\alpha - t_1}{\min\{(u_2 - u_1 - t_2 + t_4)\alpha + u_1 - t_4, (t_2 - t_1 - l_2 + l_4)\alpha + t_1 - l_4\}} \right)^2, & \text{برای TrFN} \end{cases} \quad (18.3)$$

همچنین بازه‌های α -برش شاخص \tilde{C}_{ip} به دو صورت زیر برای اعداد فازی مثلثی و دوزنقه‌ای محاسبه می‌شوند [۳۵]:

$$C_{ip}^L(\alpha) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{(n-1)s^2}{(1-\alpha)\chi_{(n-1), \gamma/\alpha}^2 + (n-1)\alpha}}{\left(\frac{\min\{(u_{\gamma}-u_{\gamma}-t_{\gamma}+t_1)\alpha+u_{\gamma}-t_1, (t_{\gamma}-t_{\gamma}-l_{\gamma}+l_1)\alpha+t_{\gamma}-l_1\}}{\gamma} \right)^2} \right)^2, & \text{برای TFN} \\ \left(\frac{\frac{(n-1)s^2}{(1-\alpha)\chi_{(n-1), \gamma/\alpha}^2 + (n-1)\alpha}}{\left(\frac{\min\{(u_{\gamma}-u_{\gamma}-t_{\gamma}+t_1)\alpha+u_{\gamma}-t_1, (t_{\gamma}-t_{\gamma}-l_{\gamma}+l_1)\alpha+t_{\gamma}-l_1\}}{\gamma} \right)^2} \right)^2, & \text{برای TrFN} \end{cases} \quad (19.3)$$

$$C_{ia}^R(\alpha) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{(n-1)s^2}{(1-\alpha)\chi_{(n-1), \gamma/\alpha}^2 + (n-1)\alpha}}{\left(\frac{\min\{(u_{\gamma}-u_1-t_{\gamma}+t_{\gamma})\alpha+u_1-t_{\gamma}, (t_{\gamma}-t_1-l_{\gamma}+l_{\gamma})\alpha+t_1-l_{\gamma}\}}{\gamma} \right)^2} \right)^2, & \text{برای TFN} \\ \left(\frac{\frac{(n-1)s^2}{(1-\alpha)\chi_{(n-1), \gamma/\alpha}^2 + (n-1)\alpha}}{\left(\frac{\min\{(u_{\gamma}-u_1-t_{\gamma}+t_{\gamma})\alpha+u_1-t_{\gamma}, (t_{\gamma}-t_1-l_{\gamma}+l_{\gamma})\alpha+t_1-l_{\gamma}\}}{\gamma} \right)^2} \right)^2, & \text{برای TrFN} \end{cases} \quad (20.3)$$

همانطور که در روابط بالا مشاهده می‌شود، برای اینکه بتوانیم طبق جدول ۵.۱ شاخصی را که کمترین ناکارایی را دارد، تعیین کنیم لازم است که شاخص ناکارایی فازی \tilde{C}_{pp} را غیرفازی کنیم. برای این منظور، می‌توان از روش‌های غیرفازی‌سازی از جمله روش مقدار انتگرال کل که در فصل اول به آن اشاره شده است، استفاده کرد. برای نشان دادن کاربرد این شاخص و غیرفازی کردن آن، مثالی را ارائه کرده‌ایم که در مرجع [۳۳] آورده شده است.

مثال ۱۰.۴.۳. از شاخص ناکارایی فرایند فازی در یک شرکت سازنده پیستون در منطقه صنعتی کنیا^۳ در کشور ترکیه استفاده شده است. این شرکت، پیستون حلقوی تولید می‌کند. مهندسين فرایند شرکت، تصمیم می‌گیرند که شاخص \tilde{C}_{pp} را استفاده کنند که نه تنها انعطاف‌پذیری فرایند را افزایش می‌دهد، بلکه حساسیت نتایج را برای چندین ویژگی پیستون موتور ولوو مارین^۴ موتور دیزل بالا می‌برد. مشخصات قابل اندازه‌گیری پیستون همچون قطر پیستون، ارتفاع فشردسازی، عمق کاسه، طول کل، قطر محفظه احتراق، قطر پین و طول پین کنترل و بازرسی می‌گردند. شاخص \tilde{C}_{pp} برای مشخصه ارتفاع فشردسازی به کار گرفته می‌شود. برای این منظور، مهندسين فرایند ۳۰۰ نمونه جمع‌آوری می‌کنند و میانگین و واریانس ارتفاع فشردسازی به صورت $\bar{x} = 114/206$ و $s^2 = 0/0002$ تعیین می‌شوند. همچنین، آن‌ها بررسی کردند که داده‌ها از توزیع نرمال می‌باشند. در نتیجه با قرار دادن مقادیر میانگین و واریانس نمونه‌ای در معادلات (۸.۳) - (۱۱.۳) برآوردهای فازی میانگین و واریانس فرایند به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\tilde{\mu} = (114/203, 114/206, 114/208), \quad \tilde{\sigma}^2 = (0/00016, 0/0002, 0/000248)$$

³Konya's Industrial Area

⁴Volvo Marine motor's piston

ناگفته نماند که برآوردهای فازی میانگین و واریانس نه تنها شامل اطلاعات بیشتری هستند بلکه، مقادیر حقیقی $\bar{x} = 114/206$ و $s^2 = 0/0002$ را نیز با درجه عضویت $1/00$ نشان می‌دهند. اما حدود مشخصات بالا و پایین برای ارتفاع فشرده‌سازی به صورت «تقریباً $114/220$ » و «تقریباً $114/190$ » و همچنین مقدار هدف فازی به صورت «تقریباً $114/203$ » تعیین شده‌اند. بازه‌های α - برش حدود مشخصات و مقدار هدف با استفاده از معادلات رابطه (۱۲.۳) برای محاسبه شاخص \tilde{C}_{pp} به دست می‌آیند. برآوردهای فازی شاخص‌های عدم دقت و عدم درستی فرایند نیز با جایگذاری در روابط مربوط به اعداد فازی مثلثی (۱۵.۳) - (۲۰.۳) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\tilde{C}_{ia} = (0/0049, 0/487, 2/989), \quad \tilde{C}_{ip} = (6/569, 10/704, 18/438)$$

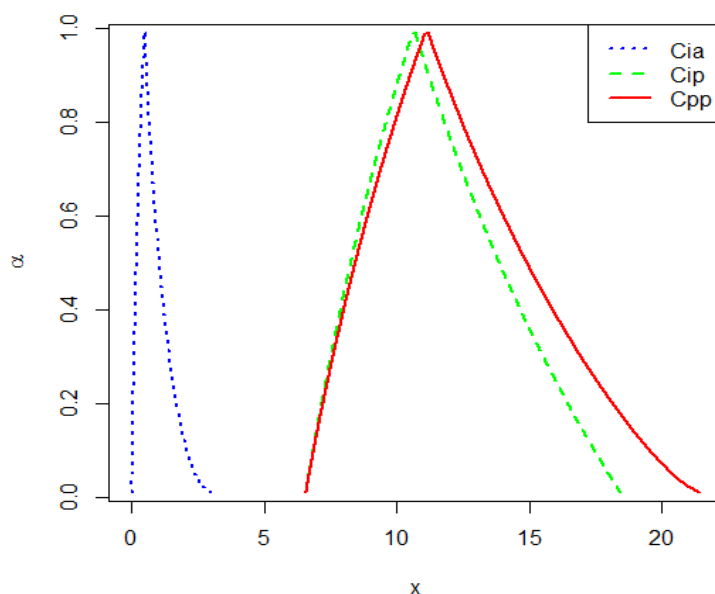
با توجه به برآورد فازی این شاخص‌ها، می‌توان میزان عدم درستی و عدم دقت فرایند مورد بررسی را زمانی که بیشترین درجه عضویت را می‌گیرند، به ترتیب به صورت $0/487$ و $10/704$ برآورد کرد. این میزان از عدم دقت نشان می‌دهد که پراکندگی فرایند بسیار زیاد است و این مسئله باعث افزایش میزان ناکارایی فرایند خواهد شد؛ چرا که، مقدار شاخص ناکارایی در این حالت برابر $11/192$ می‌شود.

حال، با قرار دادن بازه‌های α - برش شاخص‌های C_{ip} و C_{ia} در معادله (۱۴.۳) بازه‌های α - برش شاخص \tilde{C}_{pp} حاصل می‌شود و آن را به صورت $\tilde{C}_{pp} = (6/574, 11/192, 21/427)$ خواهیم داشت. نمودار توابع عضویت برآوردهای فازی شاخص‌های عدم درستی، عدم دقت و ناکارایی نیز در شکل ۴.۳ نشان داده شده‌اند.

حال اگر بخواهیم بدانیم این شاخص جزء کدام وضعیت کیفیت در جدول ۵.۱ قرار می‌گیرد باید آن را به روش مقدار انتگرال کل (طبق تعریف (۱۲.۱)) غیرفازی کنیم. بنابراین با انجام محاسبات و جایگذاری در رابطه (۱۳.۱) مقدار غیرفازی این شاخص برابر $12/59$ می‌شود. می‌دانیم که اگر مقدار شاخص ناکارایی فرایند بزرگتر از $1/00$ شود فرایند جزء دسته «نامناسب» قرار خواهد گرفت. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که فرایند تولید پیستون نمی‌تواند به عنوان شاخص «قابل استفاده» برای مشخصه ارتفاع فشرده‌سازی قرار بگیرد. اما تحلیل فازی شاخص ناکارایی فرایند، این مزیت را نشان می‌دهد که جزئیات بیشتر و تحلیل انعطاف‌پذیرتری را جهت افزایش کیفیت و کاهش تغییرپذیری فرایند در بر می‌گیرد.

۵.۳ نتیجه‌گیری

شاخص‌های کارایی و ناکارایی ابزارهای مفیدی برای میزان سنجش کیفیت محصول و وضعیت فرایند با استفاده از تجزیه و تحلیل کارایی فرایند هستند. اما شاخص ناکارایی، ابزار مناسبی برای جداسازی اطلاعات می‌باشد. این جداسازی اطلاعات بسیار مهم است؛ چرا که دقت



شکل ۴.۳: نمودار توابع عضویت شاخص‌های فازی برای ارتفاع فشرده‌سازی

فرایند مهم است. با این حال، برخی از محدودیت‌ها همانند تعریف غیرفازی از شاخص‌ها و تعریف دقیق مقادیر آن‌ها وجود دارند که مانع تجزیه و تحلیل عمیق و انعطاف‌پذیر می‌شوند. در این فصل، شاخص ناکارایی فازی پیشنهاد شد که با برآورد آن بتوان وضعیت کیفیت فرایند را با انعطاف‌پذیری بیشتر سنجید. فازی کردن این شاخص را به دو صورت انجام دادیم، در بخش اول حدود مشخصات و مقدار هدف را غیر فازی و در بخش دوم حدود مشخصات و مقدار هدف را فازی در نظر گرفتیم و سپس در هر بخش، با استفاده از روش باکلی برآورد فازی شاخص ناکارایی را به دست آوردیم. با ارائه مثال کاربردی در پایان هر بخش نیز، کاربرد این شاخص فازی را مورد بررسی قرار دادیم.

فصل ۴

شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته C_{pp}'' در محیط فازی

همانطور که در فصل دوم اشاره کردیم، شاخص ناکارایی C_{pp} در برخی موارد در بیان مکان میانگین نسبت به مقدار هدف نارسا بود، از این رو، شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته C_{pp}'' طبق تعریف ۱.۳.۲ معرفی شد. در این فصل، شاخص تعمیم‌یافته ناکارایی در محیط فازی را در دو بخش بررسی می‌کنیم. در بخش اول، حدود مشخصات و مقدار هدف غیرفازی و حقیقی هستند و در بخش دوم حدود مشخصات و مقدار هدف فازی می‌شوند. در پایان مثالی را ارائه کرده و شاخص تعمیم‌یافته را با شاخص ناکارایی C_{pp} مقایسه می‌کنیم و نشان می‌دهیم در حالت فازی همچون حالت حقیقی نیز، شاخص تعمیم‌یافته مناسب‌تر از شاخص ناکارایی عمل خواهد کرد.

۱.۴ مقدمه

شاخص ناکارایی در برخی موارد در بیان ناکارایی نامناسب عمل می‌کرد، از این رو، شاخص ناکارایی دیگری که تعمیم آن بود برای این گونه موارد پیشنهاد شد. حال این شاخص، همانند شاخص ناکارایی C_{pp} ، لازم است که برای استفاده در مسائل فازی، فازی شود. برای فازی کردن این شاخص نیز همانند شاخص C_{pp} عمل می‌کنیم.

۲.۴ برآورد C''_{pp}

فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ باشند. همانطور که در بخش ۲.۳ بیان شد، \bar{X} و S^2 برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم برای μ و σ^2 هستند. بنابراین طبق فرمول (۱۰.۲) برآورد \hat{A} به صورت زیر خواهد بود [۱۵]:

$$\hat{A} = \max \left\{ \frac{(\bar{X} - T)d}{D_u}, \frac{(T - \bar{X})d}{D_l} \right\}$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\tilde{C}''_{pp} = \frac{\hat{A}^2}{D^2} + \frac{\hat{\sigma}^2}{D^2} \quad (1.4)$$

۳.۴ شاخص ناکارایی تعمیم یافته فرایند فازی با حدود مشخصات و مقدار هدف غیر فازی

در این بخش، برآورد شاخص C''_{pp} را فازی می‌کنیم. از آنجایی که برآورد فازی شاخص C''_{pp} بر اساس روش باکلی انجام می‌پذیرد و توضیحات مربوط به آن در زیربخش‌های ۱.۳.۳ - ۴.۳.۳ داده شده‌است، از نوشتن مجدد آن خودداری می‌کنیم.

۱.۳.۴ برآورد فازی C''_{pp}

طبق فرمول‌های (۲.۳) و (۳.۳) برآوردهای فازی \bar{X} و S^2 محاسبه می‌شوند و در نتیجه برای محاسبه تابع عضویت شاخص \tilde{C}''_{pp} به صورت زیر عمل می‌کنیم، بنابراین، با توجه به معادله (۱.۴) و با انتخاب $g \in \tilde{X}(\alpha)$ و $h \in \tilde{S}^2(\alpha)$ خواهیم داشت [۳، ۶]:

$$\tilde{C}''_{pp}(g, h) = \left(\frac{A(g)}{D}\right)^2 + \left(\frac{h}{D}\right)^2 \quad (2.4)$$

$$A(g) = \max \left\{ \frac{(g-T)d}{D_u}, \frac{(T-g)d}{D_l} \right\}$$

بنابراین، α -برش شاخص \tilde{C}''_{pp} به صورت زیر خواهد بود [۳، ۶]:

$$\begin{aligned} \tilde{C}''_{pp}(\alpha) &= [l_{\tilde{C}''_{pp}}(\alpha), \psi_{\tilde{C}''_{pp}}(\alpha)] \\ &= [l_{\tilde{C}''_{ia}}(\alpha), \psi_{\tilde{C}''_{ia}}(\alpha)] + [l_{\tilde{C}''_{ip}}(\alpha), \psi_{\tilde{C}''_{ip}}(\alpha)] \\ &= \tilde{C}''_{ia}(\alpha) + \tilde{C}''_{ip}(\alpha) \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که، شاخص \tilde{C}''_{pp} طبق معادله (۲.۴) رابطه مستقیمی با h دارد؛ زیرا h در صورت کسر قرار دارد و نسبت به \tilde{C}''_{pp} رابطه مستقیم دارد. ولی در مورد $\hat{A}(g)$ باید بررسی

شود. از این رو، برای $\hat{A}(g)$ دو حالت وجود دارد به طوری که اگر $\bar{X} \leq T$ باشد، $\hat{A}(g)$ نسبت به g رابطه معکوسی دارد، در نتیجه \widetilde{C}''_{pp} نیز رابطه‌ای معکوس با g خواهد داشت؛ زیرا در این حالت، وقتی اختلاف بین \bar{X} و T را کم می‌کنیم (یا به عبارتی میانگین را زیاد می‌کنیم)، مقدار کسر $\hat{A}(g)$ نیز کمتر می‌شود و رابطه معکوس را با هم ایجاد می‌کنند. اما در حالتی که $\bar{X} > T$ است، $\hat{A}(g)$ نسبت به g رابطه مستقیم دارد، در نتیجه \widetilde{C}''_{pp} نیز نسبت به g رابطه‌ای مستقیم خواهد داشت؛ چرا که در اینجا نیز، وقتی اختلاف بین \bar{X} و T را کم می‌کنیم (یا به عبارتی میانگین را کم می‌کنیم)، مقدار کسر $\hat{A}(g)$ نیز کاهش می‌یابد، بنابراین رابطه مستقیمی با هم خواهند داشت. پس، برای دو حالت گفته شده مقادیر α -برش شاخص \widetilde{C}''_{pp} را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

برای حالتی که $\bar{X} \leq T$ [۳، ۶]:

$$l_{\widetilde{C}''_{pp}}(\alpha) = \frac{[(T - (\bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}))d]^2}{D_l^2 D^2} + \frac{(n-1)S^2}{D^2 \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \quad (3.4)$$

$$\psi_{\widetilde{C}''_{pp}}(\alpha) = \frac{[(T - (\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}))d]^2}{D_l^2 D^2} + \frac{(n-1)S^2}{D^2 \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \quad (4.4)$$

برای حالتی که $\bar{X} > T$ [۳، ۶]:

$$l_{\widetilde{C}''_{pp}}(\alpha) = \frac{[(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} - T)d]^2}{D_u^2 D^2} + \frac{(n-1)S^2}{D^2 \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \quad (5.4)$$

$$\psi_{\widetilde{C}''_{pp}}(\alpha) = \frac{[(\bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} - T)d]^2}{D_u^2 D^2} + \frac{(n-1)S^2}{D^2 \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \quad (6.4)$$

در نهایت، با استفاده از معادلات فوق، تابع عضویت شاخص \widetilde{C}''_{pp} حاصل می‌شود. برای نشان دادن کاربرد فازی این شاخص و همچنین مقایسه آن با شاخص \widetilde{C}_{pp} مثال زیر را ارائه کرده‌ایم:

مثال ۱.۳.۴. مفروضات مثال ۱.۳.۳ را در نظر بگیرید. مقادیر حاصل از α -برش‌های میانگین و واریانس فازی در مثال ۱.۳.۳ محاسبه شده‌است، از این رو، فقط به محاسبه α -برش‌های شاخص \widetilde{C}''_{pp} می‌پردازیم.

از آنجایی که $\bar{X} > T$ است، از روابط (۵.۴) و (۶.۴) برای محاسبه α -برش‌های \widetilde{C}''_{pp} استفاده می‌کنیم. بنابراین، با توجه به رابطه

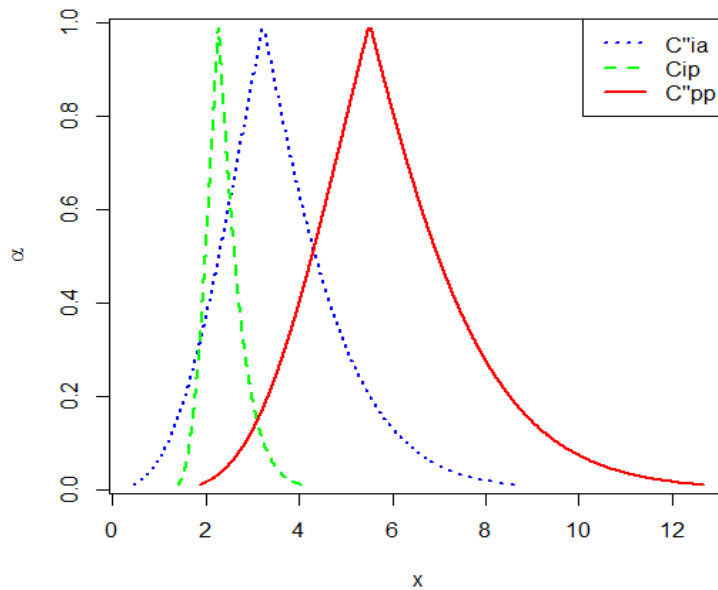
$$\widetilde{C}''_{pp}(\alpha) = [l_{\widetilde{C}''_{pp}}(\alpha) \quad , \quad \psi_{\widetilde{C}''_{pp}}(\alpha)]$$

کران‌های پایین و بالای شاخص مذکور به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$l_{\widetilde{C}''_{pp}}(\alpha) = \frac{1}{4/340} (\circ/75 - \circ/176 t_{1-\frac{\alpha}{2}, 49})^2 + \frac{110/250}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 49}^2}$$

$$\psi_{\widetilde{C}_{pp}''}(\alpha) = \frac{1}{4,340} (0,75 + 0,176 t_{1-\frac{\alpha}{2}, 49})^2 + \frac{110/250}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, 49}^2}$$

نمودار تابع عضویت برآوردگر فازی تعمیم یافته ناکارایی، در شکل ۱.۴ نشان داده شده است.



شکل ۱.۴: نمودار توابع عضویت شاخص های فازی برای فرایند مورد بررسی

بر اساس شکل ۱.۴ برآورد شاخص های عدم درستی تعمیم یافته و عدم دقت زمانی که بیشترین درجه عضویت را می گیرند، به ترتیب برابر ۳/۲۵۹ و ۲/۲۸۶ می شوند. بنابراین، با جمع این مقادیر میزان ناکارایی تعمیم یافته در این حالت، برابر ۵/۵۴۶ خواهد شد، که به دلیل بالا بودن میزان عدم درستی تعمیم یافته و همچنین پراکندگی فرایند، میزان ناکارایی تعمیم یافته افزایش یافته و همین باعث شده که فرایند کارایی خوبی را ارائه ندهد. از طرفی، این مقدار نسبت به مقدار ناکارایی شاخص C_{pp} بیشتر است. این نشان دهنده این است که، شاخص ناکارایی تعمیم یافته با جزئیات بیشتری فرایند را بررسی می کند. در واقع، این شاخص میزان فاصله میانگین از مقدار هدف را به طور دقیق تری مورد ارزیابی قرار می دهد. در هر حال، با توجه به اینکه مقادیر ناکارایی برای هر دو شاخص بالاست، نتیجه می شود که این فرایند حتی در بالاترین درجه عضویت نمی تواند مناسب باشد و کارایی خوبی ندارد.

۴.۴ شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته فرایند فازی با حدود مشخصات و مقدار هدف فازی

در این بخش، می‌خواهیم شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته فازی را با حدود مشخصات و مقدار هدف فازی، مورد تحلیل و بررسی قرار دهیم. برای به دست آوردن برآورد فازی شاخص \tilde{C}_{pp}'' ، نیاز است که برآورد فازی شاخص‌های عدم درستی \tilde{C}_{ia}'' و عدم دقت \tilde{C}_{ip} را محاسبه کنیم. از طرفی، برآورد فازی این شاخص‌ها با استفاده از اعداد فازی مثلثی و اعداد فازی ذوزنقه‌ای تولید می‌شوند و آن‌ها نیز به وسیله حدود مشخصات و مقدار هدف فازی و میانگین و واریانس فازی به دست می‌آیند.

۱.۴.۴ برآورد فازی شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته \tilde{C}_{pp}''

همانطور که بیان شد، زمانی که پارامترها فازی هستند باید از شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته فازی استفاده شود. در راستای این کار، نیاز است که همان مراحل که در بخش ۴.۳ فصل سوم برای شاخص \tilde{C}_{pp} انجام دادیم، به کار ببریم. بنابراین، با توجه به زیربخش‌های ۱.۴.۳-۳.۴.۳ میانگین، واریانس، حدود مشخصات و مقدار هدف فازی محاسبه می‌شوند. در نتیجه برای به دست آوردن α -برش و تابع عضویت شاخص \tilde{C}_{pp}'' ، مراحل زیر را انجام می‌دهیم: با توجه به تعریف ۱.۳.۲، α -برش شاخص تعمیم‌یافته به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{pp}''(\alpha) &= \tilde{C}_{ia}''(\alpha) + \tilde{C}_{ip}(\alpha) \\ &= \{C_{ia}^{''L}(\alpha) + C_{ip}^L(\alpha), \quad C_{ia}^{''R}(\alpha) + C_{ip}^R(\alpha)\} \end{aligned} \quad (7.4)$$

و در نتیجه بازه‌های α -برش شاخص‌های \tilde{C}_{ia}'' و \tilde{C}_{ip} به صورت زیر خواهند بود:

$$\tilde{C}_{ia}''(\alpha) = \{C_{ia}^{''L}(\alpha), \quad C_{ia}^{''R}(\alpha)\}$$

و

$$\tilde{C}_{ip}(\alpha) = \{C_{ip}^L(\alpha), \quad C_{ip}^R(\alpha)\} = \left\{ \frac{\sigma_l^*(\alpha)}{D_r^*(\alpha)}, \quad \frac{\sigma_r^*(\alpha)}{D_l^*(\alpha)} \right\}$$

و اما برای به دست آوردن بازه‌های α -برش شاخص \tilde{C}_{ia}'' دو مرحله زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. اگر میانگین فرایند کوچک‌تر یا مساوی مقدار هدف باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\tilde{C}_{ia}''(\alpha) = \left\{ \left(\frac{(T_l(\alpha) - \mu_r(\alpha))d_l(\alpha)}{D_{l_r}(\alpha)D_r(\alpha)} \right)^2, \quad \left(\frac{(T_r(\alpha) - \mu_l(\alpha))d_r(\alpha)}{D_{l_l}(\alpha)D_l(\alpha)} \right)^2 \right\} \quad (8.4)$$

که در آن $D_r(\alpha) = \frac{d_r^*(\alpha)}{3}$ و $D_{l_l}(\alpha) = T_l(\alpha) - L_r(\alpha)$ و $D_{l_r}(\alpha) = T_r(\alpha) - L_l(\alpha)$ و $D_l(\alpha) = \frac{d_l^*(\alpha)}{3}$ و $d_r^*(\alpha) = \min\{D_{l_r}(\alpha), D_{u_r}(\alpha)\}$ و $d_l^*(\alpha) = \min\{D_{l_l}(\alpha), D_{u_l}(\alpha)\}$ و $d_r(\alpha) = \frac{U_r(\alpha) - L_l(\alpha)}{3}$ و $d_l(\alpha) = \frac{U_l(\alpha) - L_r(\alpha)}{3}$

۲. اگر میانگین فرایند بزرگتر از مقدار هدف باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\tilde{C}''_{ia}(\alpha) = \left\{ \left(\frac{(\mu_l(\alpha) - T_r(\alpha))d_l(\alpha)}{D_{u_r}(\alpha)D_r(\alpha)} \right)^2, \left(\frac{(\mu_r(\alpha) - T_l(\alpha))d_r(\alpha)}{D_{u_l}(\alpha)D_l(\alpha)} \right)^2 \right\} \quad (9.4)$$

که در آن $D_{u_l}(\alpha) = U_l(\alpha) - T_r(\alpha)$ و $D_{u_r}(\alpha) = U_r(\alpha) - T_l(\alpha)$ و بقیه موارد مشابه روابط بالا خواهد بود.

تذکر ۱۰.۴.۴. برای تشخیص مقدار کوچکی و بزرگی اعداد فازی میانگین و مقدار هدف، از روش های رتبه‌بندی فازی استفاده می‌شود. در اینجا از روش رتبه‌بندی فورتمپس و روبنس که در تعریف ۱۳.۲.۱ آورده شده است، به کار می‌بریم.

از آنجایی که حدود مشخصات و مقدار هدف از اعداد فازی مثلثی و دوزنقه‌ای طبق معادلات (۱۲.۳) و (۱۳.۳) تولید شده‌اند، شاخص‌های عدم درستی و عدم دقت فرایند نیز به دو صورت عدد فازی مثلثی و عدد فازی دوزنقه‌ای به دست می‌آیند. در نتیجه، اگر اعداد فازی مثلثی مد نظر بود، از روابط (۱۲.۳) و اگر اعداد فازی دوزنقه‌ای استفاده شده‌بود، از روابط (۱۳.۳) در معادلات (۸.۴) و (۹.۴) قرار داده می‌شود.

کاربرد شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته فازی در مثال زیر نشان داده شده است. به علاوه، نتایج به دست آمده از هر دو شاخص فازی ناکارایی و تعمیم‌یافته آن نیز، مقایسه شده‌اند.

مثال ۱۰.۴.۴. مفروضات مثال ۱.۴.۳ را در نظر بگیرید. از آنجایی که میانگین و واریانس فازی در مثال قبل محاسبه شده، برای محاسبه تابع عضویت شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته فازی \tilde{C}''_{pp} ، فقط نیاز است که توابع عضویت شاخص‌های \tilde{C}''_{ia} و \tilde{C}_{ip} محاسبه شوند. اما قبل از محاسبه توابع عضویت این شاخص‌ها، لازم است بدانیم از کدام فرمول برای شاخص \tilde{C}''_{ia} استفاده می‌شود. برای تشخیص اینکه، $\tilde{\mu}$ بزرگتر است یا \tilde{T} از روش رتبه‌بندی استفاده می‌کنیم. بنا به تعریف ۱۳.۲.۱ و از رابطه (۱۱.۱)، $R(\tilde{\mu}) = 114/206$ و $R(\tilde{T}) = 114/203$ محاسبه می‌شوند. پس نتیجه می‌شود که، $R(\tilde{\mu}) > R(\tilde{T})$. در نتیجه از رابطه (۹.۴) برای محاسبه α -برش‌های شاخص \tilde{C}''_{ia} استفاده می‌کنیم. بنابراین، طبق رابطه (۹.۴) برآورد فازی شاخص \tilde{C}''_{ia} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{C}''_{ia} = (0/002, 0/380, 3/387)$$

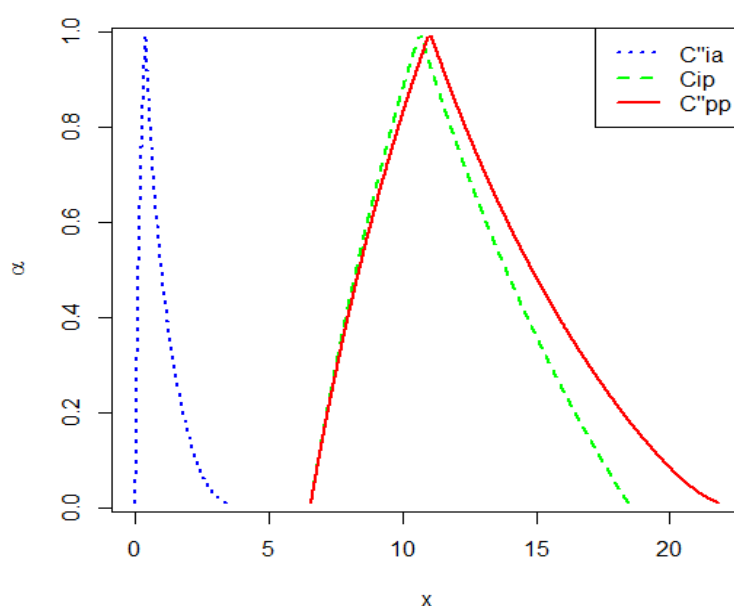
با توجه به برآورد فازی شاخص عدم درستی تعمیم‌یافته، می‌توان میزان این شاخص را زمانی که بیشترین درجه عضویت را می‌گیرد، به صورت $0/380$ برآورد کرد. اما از آنجایی که شاخص \tilde{C}_{ip} در هر دو شاخص \tilde{C}''_{pp} و \tilde{C}_{pp} مقدار یکسانی را می‌دهد، می‌توان نتیجه گرفت که میزان عدم دقت باز هم مقداری بزرگ خواهد بود و این یعنی پراکندگی فرایند بسیار زیاد است و این مسئله باعث افزایش میزان ناکارایی فرایند خواهد شد.

اما این نکته نیز حائز اهمیت است که، در حالتی که شاخص‌ها بیشترین درجه عضویت را می‌گیرند، میزان عدم درستی تعمیم‌یافته نسبت به میزان عدم درستی مقدار کمتری را برآورد

کرده است. در واقع، شاخص \tilde{C}_{ia}'' فاصله میانگین از مقدار هدف را دقیق تر محاسبه کرده است. پس، می توان به این نتیجه رسید که شاخص ناکارایی تعمیم یافته از دقت بالاتری برخوردار است؛ زیرا مقدار شاخص ناکارایی تعمیم یافته در این حالت، برابر $۱۱/۰۸۵$ ولی مقدار شاخص ناکارایی برابر $۱۱/۱۹۲$ می شود. حال، برای محاسبه α -برش های شاخص \tilde{C}_{pp}'' به صورت زیر عمل می کنیم، به طوری که با جایگذاری در معادله (۷.۴) خواهیم داشت:

$$\tilde{C}_{pp}'' = (۶/۵۷۲, ۱۱/۰۸۵, ۲۱/۸۲۵)$$

و در نهایت، نمودار توابع عضویت برآوردهای فازی شاخص های عدم درستی تعمیم یافته، عدم دقت و ناکارایی تعمیم یافته به صورت شکل ۲.۴ خواهند بود.



شکل ۲.۴: نمودار توابع عضویت شاخص های فازی برای ارتفاع فشرده سازی

حال برای تشخیص اینکه این شاخص جزء کدام دسته از وضعیت کیفیت جدول ۵.۱ قرار می گیرد، لازم است که شاخص ناکارایی تعمیم یافته فازی را غیرفازی کنیم. بنابراین، طبق روش مقدار انتگرال کل مقدار غیرفازی این شاخص برابر $۱۲/۶۳$ می شود و در نهایت نتیجه می گیریم که این مقدار ناکارایی در دسته وضعیت کیفیت «نامناسب» قرار می گیرد. از مقادیر به دست آمده از هر دو شاخص، این نتیجه به دست می آید که در مجموع، هر دو شاخص در دسته «نامناسب» قرار دارند و این بدین معناست که مقدار ناکارایی بالا بوده و کارایی مناسبی ندارند. هر چند تفاوت چندانی در مقدار حقیقی هر دو شاخص وجود ندارد ولی شاخص ناکارایی تعمیم یافته عملکرد بهتری نسبت به شاخص ناکارایی دارد. در نهایت می توان گفت، ارتفاع فشرده سازی از ناکارایی بالایی برخوردار است و پایین ترین دسته را به خود اختصاص داده است.

۵.۴ نتیجه‌گیری

از آنجایی که شاخص ناکارایی فازی همانند شاخص ناکارایی غیرفازی در مواردی برای بیان ناکارایی فازی نارسا است، در این فصل شاخص تعمیم‌یافته ناکارایی را فازی کردیم. فازی کردن این شاخص نیز به دو صورت انجام گرفت، در بخش اول شاخص تعمیم‌یافته را با حدود مشخصات و مقدار هدف غیر فازی و در بخش دوم با حدود مشخصات و مقدار هدف فازی، مورد تحلیل و بررسی قرار دادیم. در پایان با ارائه مثالی که در فصل قبل برای شاخص ناکارایی فازی بیان شد، شاخص تعمیم‌یافته فازی را مورد مطالعه قرار دادیم و نتایج دو شاخص فازی را با هم مقایسه کردیم. از نتایج بر می‌آید که استفاده از شاخص تعمیم‌یافته فازی همچون شاخص تعمیم‌یافته غیرفازی آن به جای شاخص ناکارایی فازی به مراتب مناسب‌تر است؛ چرا که در همه موارد، شاخص تعمیم‌یافته می‌تواند به جای شاخص ناکارایی به کار گرفته شود ولی عکس آن نمی‌تواند برقرار باشد.

فصل ۵

مثال کاربردی

در فصل‌های گذشته، به طور مفصل از شاخص‌های ناکارایی و نحوه فازی کردن آن‌ها در دو گروه مختلف بحث کردیم. حال، می‌خواهیم در این فصل، روابط گفته شده از این شاخص‌ها را در قالب یک مثال کاربردی مورد بررسی قرار دهیم.

۱.۵ مقدمه

برای مقایسه شاخص‌های \tilde{C}_{pp} و \tilde{C}_{pp}'' یک مثال کاربردی از مقاله [۳۵] ارائه کرده‌ایم که از آن‌ها برای تعیین مناسب‌ترین گزینه جهت خرید مصالح ساختمانی از بین سه گزینه مختلف تعیین شده توسط یک شرکت ساخت و ساز در ترکیه استفاده می‌شود.

۲.۵ مثال کاربردی

مثال ۱.۲.۵. شرکت ساخت و ساز بتن^۱، یکی از شرکت‌های برجسته در صنعت ساخت و ساز ترکیه می‌باشد که در سال ۱۹۶۳ تأسیس شده‌است. در طی سال‌های اولیه، در ساخت اسکله‌ها و بنادر فعالیت داشت، تا حدی که یک سوم از بنادر ترکیه به این شرکت اختصاص

^۱Beton Construction

پیدا می‌کند. این شرکت، نقش کلیدی در توسعه زیربنای ترکیه داشته‌است و همچنین قراردادهای متعددی در باب حمل و نقل، انرژی و پروژه‌های صنعتی و زیست محیطی انعقاد کرده‌است. شرکت مذکور و زیرمجموعه‌های آن، خدمات بسیار گسترده‌ای در حوزه‌های مختلفی همچون توریستی، خدمات مالی، فناوری اطلاعات، سرمایه‌گذاری و تولید ارائه کرده‌است، که همه این‌ها زیر نظر هولدینگ ABC^۲ در سال ۱۹۹۷ سامان‌دهی شده‌اند.

شرکت ساخت و ساز بتن، که شرکت ممتاز این هولدینگ محسوب می‌شود با تجربیات و نیروی کار متخصص توانسته به برخی از استانداردهای جهانی چون ISO 9001 و CHSAS 18001 دست پیدا کند. شرکت مذکور، اخیراً توانسته یک سری پروژه‌های ساخت و ساز جدیدی را کسب کند، مانند: پروژه‌های مسکونی، تجاری در مراکز خرید شهر استانبول و همچنین یک مرکز تجاری در آنکارا. علاوه بر این‌ها، این شرکت در پروژه‌های تصفیه آب و آبرسانی نیز مشارکت داشته‌است و همچنین در طرح خطوط حمل و نقل زیرزمینی برخی شهرهای ترکیه نیز تأثیرگذار بوده‌است. می‌توان به عنوان پیمان‌کار طرح‌های غیرنظامی این شرکت، از پروژه‌های تصفیه آب در آنکارا نام برد که از بزرگترین طرح‌ها در نوع خود در اروپا به شمار می‌آید. از دیگر پروژه‌های مهم این شرکت می‌توان به تصفیه آب آدانا، مترو استانبول، اتوبان بولامان پرشمبه و غیره اشاره کرد. ناگفته نماند که همچنان در حال انجام پروژه‌های بزرگ هم در ترکیه و هم در خارج از آن مشغول است.

برای تعیین مناسب‌ترین گزینه (جهت خرید مصالح ساختمانی)، شاخص‌های \bar{C}_{pp} و \bar{C}_{pp}'' برای شرکت مذکور مورد استفاده قرار می‌گیرند تا با خرید مقداری فولاد جهت مخلوط کردن با موادی دیگر، بتواند سازه قوی‌تری را تولید کند. شرکت ساخت و ساز بتن و زیرمجموعه‌های آن، تعیین می‌کنند که برای رسیدن به نتایج بهتر لازم است که قطر فولاد مورد نظر تقریباً بین ۸ تا ۱۰ میلی‌متر باشد. از این رو، شرکت سه گزینه پیشنهادی برای ارائه این کار مطابق با جدول ۱.۵ در نظر گرفته که با کمک شاخص‌های ناکارایی و تعمیم‌یافته آن بهترین گزینه انتخاب خواهد شد.

جدول ۱.۵: میانگین و واریانس فرایند برای قطر فولاد بر حسب (mm)

گزینه‌های انتخابی	حجم نمونه	\bar{x}	s
A	۲۰۰	۹/۱۰	۰/۲۴
B	۲۰۰	۹/۱۸	۰/۲۲
C	۲۰۰	۹/۰۸	۰/۲۳

^۲ABC Holding

بر اساس جدول ۱.۵ می‌توان برآوردهای فازی میانگین و واریانس را محاسبه کرد. بنابراین با جایگذاری در روابط (۸.۳)–(۱۱.۳) میانگین و واریانس فازی به دست می‌آیند که در جدول ۲.۵ نتیجه نهایی محاسبات آورده شده‌است.

جدول ۲.۵: مقادیر فازی میانگین و واریانس برای گزینه‌های انتخابی

	گزینه انتخابی A	گزینه انتخابی B	گزینه انتخابی C
$\tilde{\mu}$	(۹/۰۵۰, ۹/۱۰۰, ۹/۱۵۰)	(۹/۱۳۰, ۹/۱۸۰, ۹/۲۳۰)	(۹/۰۳۰, ۹/۰۸۰, ۹/۱۳۰)
$\tilde{\sigma}^2$	(۰/۰۴۵, ۰/۰۵۷, ۰/۰۷۵)	(۰/۰۳۷, ۰/۰۴۸, ۰/۰۶۳)	(۰/۰۴۱, ۰/۰۵۳, ۰/۰۶۹)

همانطور که در نمودارهای ۱.۵ و ۲.۵ نشان داده شده‌است، برآوردهای فازی میانگین و واریانس زمانی که درجه عضویت به بالاترین مقدار خود می‌رسد، برای گزینه انتخابی A به ترتیب برابر ۹/۱۰ و ۰/۰۵۷، برای گزینه انتخابی B به ترتیب برابر ۹/۱۸ و ۰/۰۴۸ و برای گزینه انتخابی C به ترتیب برابر ۹/۰۸ و ۰/۰۵۳ خواهد بود.

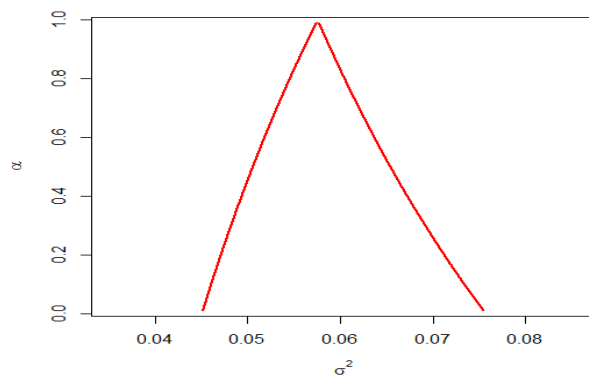
حال که میانگین و واریانس فازی را محاسبه کردیم، می‌توانیم توابع عضویت شاخص‌های \tilde{C}_{ia} ، \tilde{C}_{ip} ، \tilde{C}_{pp} و \tilde{C}_{pp}'' را به دست آوریم. اما برای محاسبه این شاخص‌ها نیاز است که α –برش‌های حدود مشخصات و مقدار هدف تعیین شوند. از آنجایی که حدود مشخصات و مقدار هدف از دو نوع اعداد فازی مثلثی و دوزنقه‌ای هستند، برای محاسبه شاخص‌ها از هر دو نوع اعداد فازی استفاده می‌شود. برای این مثال حدود مشخصات و مقدار هدف اعداد فازی مثلثی و دوزنقه‌ای در جدول ۳.۵ ارائه شده‌اند.

جدول ۳.۵: مقادیر فازی حدود مشخصات و مقدار هدف

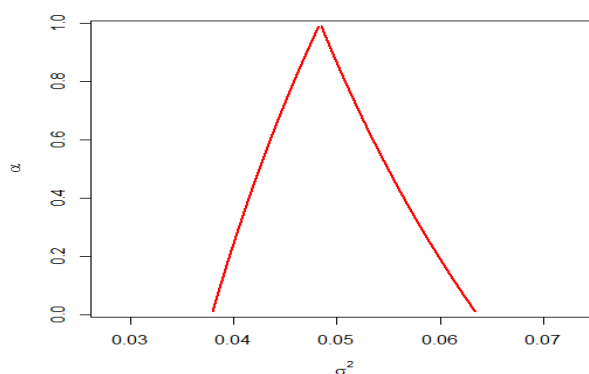
	LSL	T	USL
TFN	(۷/۹۵, ۸, ۸/۰۵)	(۸/۹۵, ۹, ۹/۰۵)	(۹/۹۵, ۱۰, ۱۰/۰۵)
TrFN	(۷/۹۰, ۷/۹۵, ۸, ۸/۰۵)	(۸/۹۰, ۸/۹۵, ۹, ۹/۰۵)	(۹/۹۰, ۹/۹۵, ۱۰, ۱۰/۰۵)

حال می‌توان بر اساس مقادیر فازی حدود مشخصات و مقدار هدف، α –برش‌های آن‌ها طبق روابط (۱۲.۳) و (۱۳.۳) محاسبه و در نهایت برای محاسبه α –برش‌های شاخص‌های \tilde{C}_{ia} ، \tilde{C}_{ip} ، \tilde{C}_{pp} ، \tilde{C}_{ia}'' و \tilde{C}_{pp}'' از آن‌ها استفاده کرد.

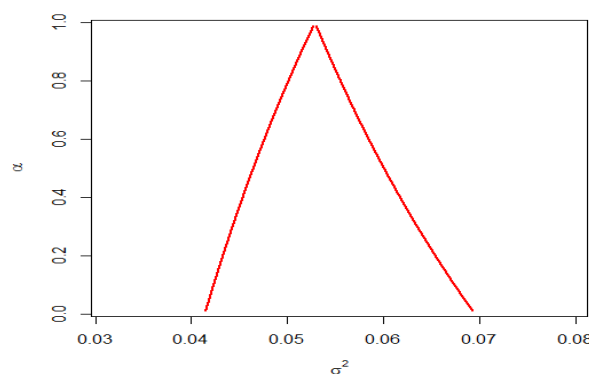
بنابراین، با جایگذاری در روابط (۱۴.۳) و (۱۷.۳)–(۲۰.۳) توابع عضویت شاخص‌های \tilde{C}_{ia} ، \tilde{C}_{ip} و \tilde{C}_{pp} محاسبه می‌شوند. اما برای محاسبه شاخص‌های \tilde{C}_{ia}'' و \tilde{C}_{pp}'' ابتدا باید مشخص



(آ) گزینه انتخابی A



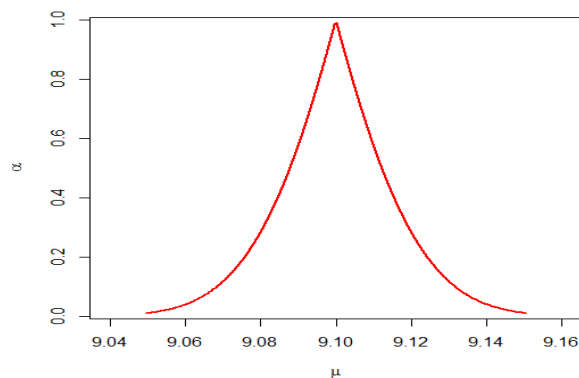
(ب) گزینه انتخابی B



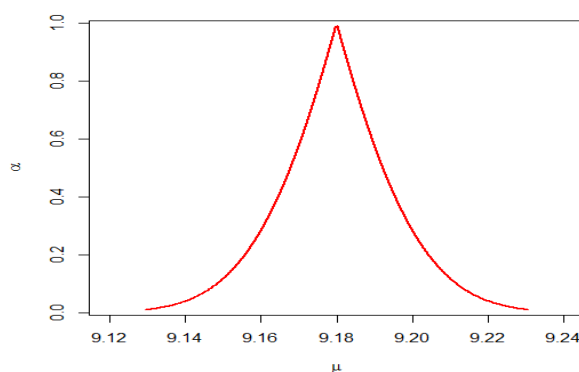
(ج) گزینه انتخابی C

شکل ۱.۵: نمودار توابع عضویت واریانس فازی $(\tilde{\sigma}^2)$ برای گزینه‌های انتخابی A شکل (آ)، B شکل (ب) و C شکل (ج)

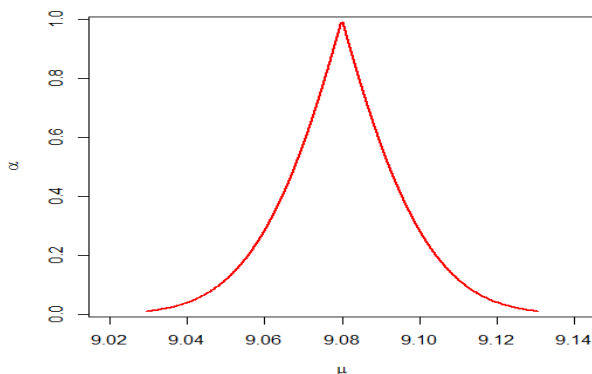
کنیم که از کدام یک از روابط (۸.۴) یا (۹.۴) استفاده می‌شود. برای تشخیص اینکه $\tilde{\mu}$ بزرگتر است یا \tilde{T} و یا بالعکس، لازم است از روش رتبه‌بندی استفاده شود. بنابراین، بنا به روش رتبه‌بندی قورتمپس و روبنس در تعریف ۱۳.۲.۱، برای هر سه گزینه انتخابی شرکت، از رابطه (۹.۴) برای محاسبه α -برش‌های شاخص \tilde{C}_{ia}'' استفاده می‌کنیم، زیرا میانگین هر سه گزینه



(آ) گزینه انتخابی A



(ب) گزینه انتخابی B



(ج) گزینه انتخابی C

شکل ۲.۵: نمودار توابع عضویت میانگین فازی ($\tilde{\mu}$) برای گزینه‌های انتخابی A شکل (آ)، B شکل (ب) و C شکل (ج)

انتخابی بزرگتر از مقدار هدف است ($R(\tilde{\mu}_A) = 9/1, R(\tilde{\mu}_B) = 9/18, R(\tilde{\mu}_C) = 9/08$) در حالی که، $R(\tilde{T}) = 9$ می‌باشد). در آخر هم می‌توان با استفاده از رابطه (۷.۴)، α -برش‌های شاخص \tilde{C}_{pp}'' را به دست آورد. محاسبات انجام شده هر یک از شاخص‌ها، در جدول‌های ۴.۵ و ۵.۵ برای دو گروه اعداد فازی مثلثی و دوزنقه‌ای تعبیه شده‌اند.

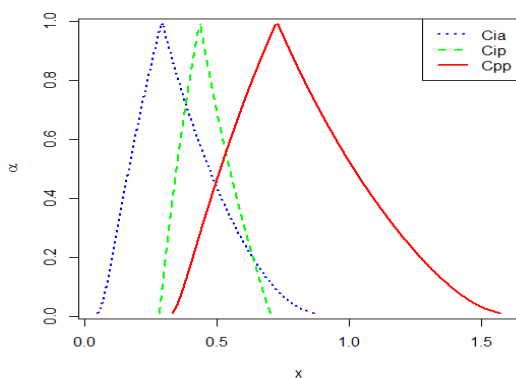
جدول ۴.۵: شاخص‌های فازی برای گزینه‌های انتخابی

برای اعداد فازی مثلثی		
گزینه انتخابی C	گزینه انتخابی B	گزینه انتخابی A
\tilde{C}_{ia}	(۰/۰۴۷, ۰/۲۹۴, ۰/۸۶۹)	(۰/۰۰۰, ۰/۰۹۱, ۰/۴۴۳)
\tilde{C}_{ip}	(۰/۲۸۳, ۰/۴۳۷, ۰/۷۰۳)	(۰/۳۳۶, ۰/۵۲۰, ۰/۸۳۶)
\tilde{C}_{pp}	(۰/۳۳۰, ۰/۷۳۲, ۱/۵۷۲)	(۰/۳۳۶, ۰/۶۱۲, ۱/۲۸۰)
\tilde{C}''_{ia}	(۰/۰۳۵, ۰/۲۹۵, ۱/۱۷۹)	(۰/۰۰۰, ۰/۰۹۱, ۰/۶۰۱)
\tilde{C}''_{pp}	(۰/۳۱۸, ۰/۷۳۲, ۱/۸۸۲)	(۰/۳۳۶, ۰/۶۱۲, ۱/۴۳۸)

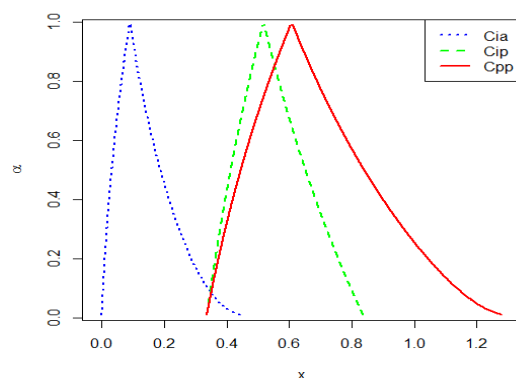
جدول ۵.۵: شاخص‌های فازی برای گزینه‌های انتخابی

برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای		
گزینه انتخابی C	گزینه انتخابی B	گزینه انتخابی A
\tilde{C}_{ia}	(۰/۰۴۳, ۰/۲۶۱, ۰/۵۳۱, ۱/۳۵۳)	(۰/۰۰۰, ۰/۰۸۰, ۰/۲۲۶, ۰/۷۷۶)
\tilde{C}_{ip}	(۰/۲۸۳, ۰/۴۲۹, ۰/۵۲۹, ۰/۸۶۱)	(۰/۳۰۸, ۰/۴۶۸, ۰/۵۷۶, ۰/۹۳۸)
\tilde{C}_{pp}	(۰/۲۸۵, ۰/۴۸۱, ۰/۷۰۰, ۱/۵۱۹)	(۰/۳۰۸, ۰/۵۴۸, ۰/۸۰۳, ۱/۷۱۴)
\tilde{C}''_{ia}	(۰/۰۲۸, ۰/۲۲۵, ۰/۶۲۱, ۲/۲۵۸)	(۰/۰۰۰, ۰/۰۶۹, ۰/۲۶۵, ۱/۲۹۶)
\tilde{C}''_{pp}	(۰/۲۸۴, ۰/۴۷۳, ۰/۷۲۹, ۱/۹۵۸)	(۰/۳۰۸, ۰/۵۳۷, ۰/۸۴۲, ۲/۲۳۴)

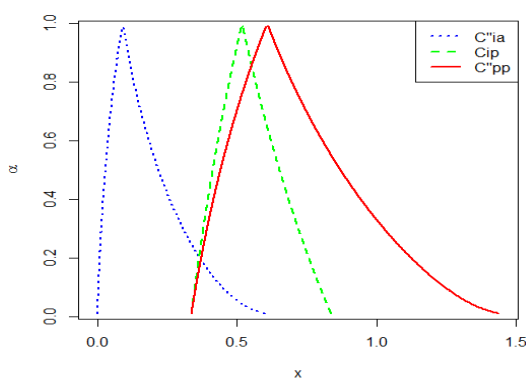
طبق جدول‌های ۴.۵ و ۵.۵، میزان عدم دقت گزینه‌های انتخابی A ، B و C زمانی که به بالاترین درجه عضویت خود می‌رسند، برای اعداد فازی مثلثی به ترتیب برابر $۰/۴۳۷$ و $۰/۴۷۸$ و برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای به ترتیب بین $۰/۴۶۸$ و $۰/۵۷۶$ ، بین $۰/۳۹۳$ و $۰/۴۸۴$ و بین $۰/۴۲۹$ و $۰/۵۲۹$ می‌باشند. همچنین، میزان عدم درستی برای شاخص C_{ia} برای گزینه‌های انتخابی A ، B و C زمانی که به بالاترین درجه عضویت خود می‌رسند، برای اعداد فازی مثلثی به ترتیب برابر $۰/۰۹۱$ ، $۰/۲۹۴$ و $۰/۵۸$ و برای شاخص C''_{ia} به ترتیب برابر $۰/۰۹۱$ ، $۰/۲۹۵$ و $۰/۵۸$ خواهد بود. میزان عدم درستی شاخص C_{ia} برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای نیز به ترتیب بین $۰/۰۸۰$ و $۰/۲۲۶$ ، بین $۰/۲۶۱$ و $۰/۵۳۱$ و بین $۰/۰۵۱$ و $۰/۱۷۰$ و برای شاخص C''_{ia} به ترتیب بین $۰/۰۶۹$ و $۰/۲۶۵$ ، بین $۰/۲۲۵$ و $۰/۶۲۱$ و بین $۰/۰۴۴$ و $۰/۱۹۹$ می‌باشند. بنا به مقادیر گفته شده، می‌توان اینطور استنباط کرد که میزان عدم دقت گزینه انتخابی B کمتر از گزینه‌های انتخابی دیگر است، اما میزان عدم درستی هر دو شاخص C_{ia} و C''_{ia} مربوط به گزینه انتخابی



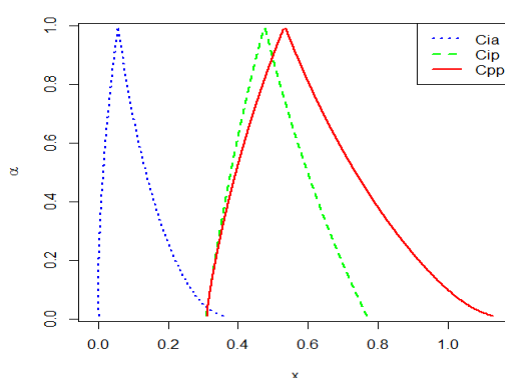
(ب) گزینه انتخابی B



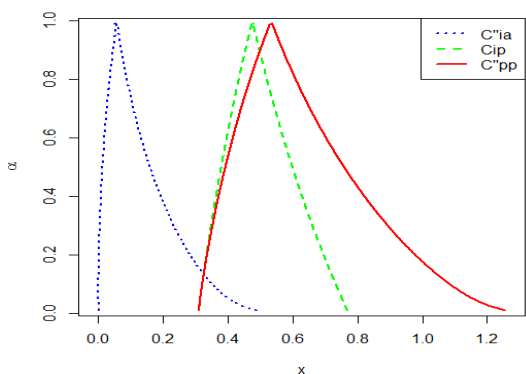
(آ) گزینه انتخابی A



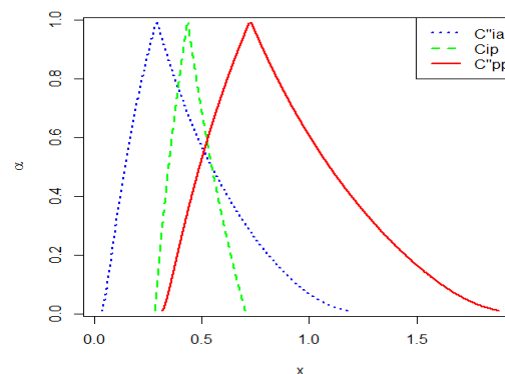
(د) گزینه انتخابی A



(ج) گزینه انتخابی C



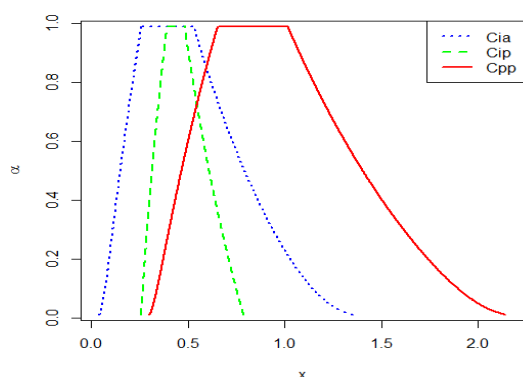
(و) گزینه انتخابی C



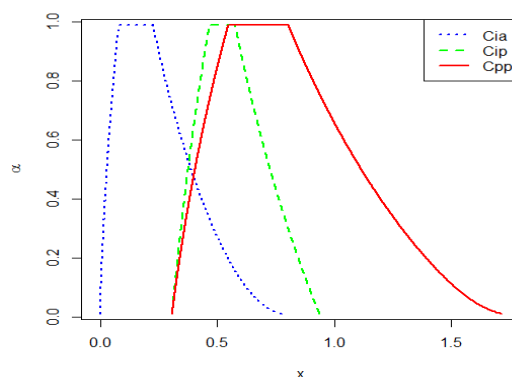
(ه) گزینه انتخابی B

شکل ۳.۵: نمودار توابع عضویت شاخص‌های فازی برای گزینه‌های انتخابی A در شکل‌های (آ و د)، B در شکل‌های (ب و ه)، C در شکل‌های (ج و و)

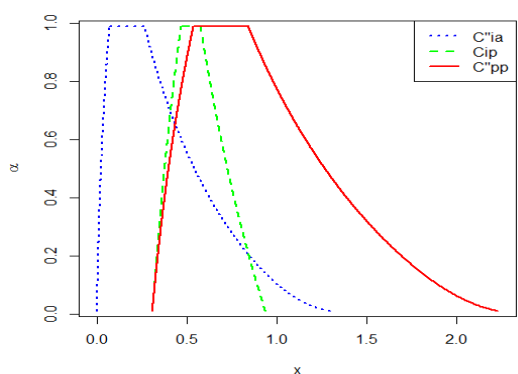
C کمتر از دیگر گزینه‌ها می‌باشد. حال، می‌توان با جمع دو شاخص عدم دقت و عدم درستی میزان ناکارایی هر یک از گزینه‌های انتخابی را محاسبه کرد.



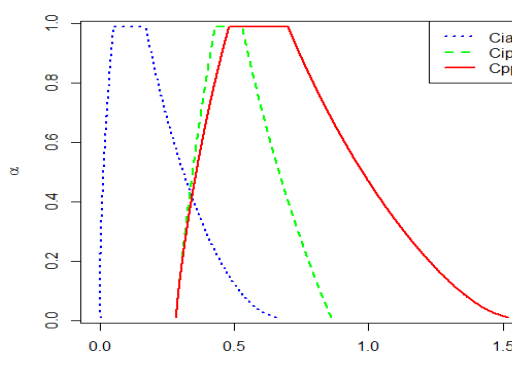
(ب) گزینه انتخابی B



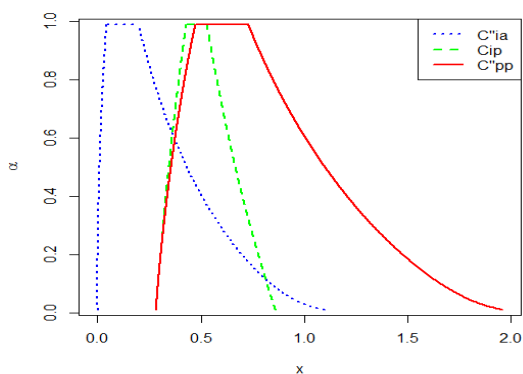
(آ) گزینه انتخابی A



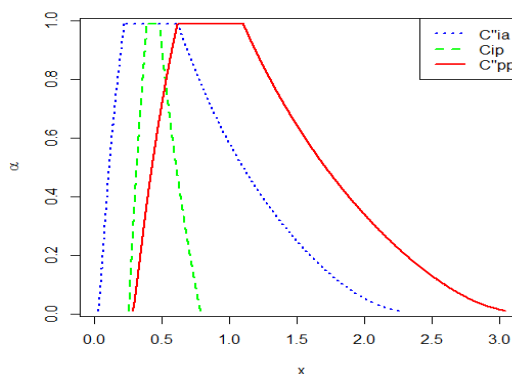
(د) گزینه انتخابی A



(ج) گزینه انتخابی C



(و) گزینه انتخابی C



(ه) گزینه انتخابی B

شکل ۴.۵: نمودار توابع عضویت شاخص‌های فازی برای گزینه‌های انتخابی A در شکل‌های (آ) و (د)، B در شکل‌های (ب) و (ه)، C در شکل‌های (ج) و (و)

همانطور که از نمودارهای شکل ۳.۵ بر می‌آید، برآوردهای فازی شاخص‌های ناکارایی و تعمیم آن، برای هر سه گزینه A، B و C زمانی که بیشترین درجه عضویت را می‌گیرند به ترتیب برای شاخص ناکارایی فازی برابر ۰/۶۱۲، ۰/۷۳۲ و ۰/۵۳۶ و برای شاخص تعمیم‌یافته فازی به

صورت ۰/۶۱۲، ۰/۷۳۲ و ۰/۵۳۷ خواهند بود و از نمودارهای شکل ۴.۵ اینطور بر می آید که، برآوردهای فازی شاخص ناکارایی برای هر سه گزینه انتخابی A ، B و C زمانی که به بالاترین میزان درجه عضویت می رسند، به ترتیب بین ۰/۵۴۸ و ۰/۸۰۳، بین ۰/۶۵۵ و ۱/۰۱۶، بین ۰/۴۸۱ و ۰/۷ و برای شاخص تعمیم یافته به ترتیب بین ۰/۵۳۷ و ۰/۸۴۲، بین ۰/۶۱۸ و ۱/۱۰۶، بین ۰/۴۷۳ و ۰/۷۲۹ خواهند بود. بنابراین، برای تشخیص اینکه شاخص های ناکارایی در کدام دسته قرار می گیرند، از جدول ۵.۱ که در فصل دوم ارائه شد، استفاده می کنیم. برای این کار، لازم است که شاخص های فازی ناکارایی را غیر فازی کنیم. از این رو، بر اساس روش مقدار انتگرال کل مقادیر غیر فازی شاخص ها را برای دو گروه اعداد فازی مثلثی و دوزنقه ای محاسبه و در جدول های ۶.۵ و ۷.۵ ارائه کرده ایم.

جدول ۶.۵: مقادیر شاخص های غیرفازی سازی شده برای گزینه های انتخابی

برای اعداد فازی مثلثی			
	گزینه انتخابی A	گزینه انتخابی B	گزینه انتخابی C
C_{pp}	۰/۶۱۰	۰/۷۳۴	۰/۵۳۸
$def\tilde{C}_{pp}$	۰/۷۱۰	۰/۸۴۱	۰/۶۲۷
$def\tilde{C}_{pp}''$	۰/۷۴۹	۰/۹۱۶	۰/۶۶۰

جدول ۷.۵: مقادیر شاخص های غیرفازی سازی شده برای گزینه های انتخابی

برای اعداد فازی دوزنقه ای			
	گزینه انتخابی A	گزینه انتخابی B	گزینه انتخابی C
C_{pp}	۰/۶۶۰	۰/۸۱۸	۰/۵۷۹
$def\tilde{C}_{pp}$	۰/۸۴۱	۱/۰۲۵	۰/۷۴۲
$def\tilde{C}_{pp}''$	۰/۹۷۵	۱/۲۵۷	۰/۸۵۵

همانطور که در جدول های ۶.۵ و ۷.۵ مشاهده می شود، شاخص \tilde{C}_{pp}'' نسبت به شاخص \tilde{C}_{pp} برای هر دو گروه اعداد فازی مثلثی و دوزنقه ای عملکرد دقیق تری را ارائه می کند؛ چرا که شاخص ناکارایی تعمیم یافته انحراف میانگین از مقدار هدف را نشان می دهد، ولی شاخص ناکارایی عاری از آن است. در جدول، منظور از $def\tilde{C}_{pp}''$ ، مقدار غیرفازی سازی شده شاخص \tilde{C}_{pp}'' می باشد. پس، با توجه به مقادیر می توان نتیجه گرفت که شرکت برای انتخاب مناسب ترین

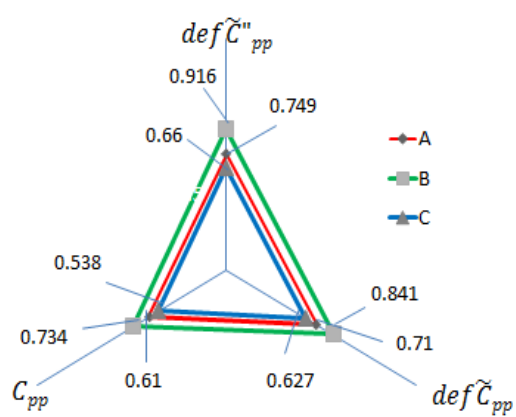
گزینه بهتر است از شاخص \tilde{C}_{pp}'' استفاده کند که از دقت بالاتری برخوردار است. لذا، طبق جدول‌های فوق، چه برای شاخص ناکارایی و چه برای شاخص تعمیم‌یافته ناکارایی، مناسب‌ترین ناکارایی را گزینه انتخابی C دارد که بر اساس جدول ۵.۱ در دسته «قابل استفاده» قرار می‌گیرد. از نظر هر دو شاخص، بعد از گزینه انتخابی C ، به ترتیب گزینه‌های انتخابی A و B مناسب خواهند بود؛ چرا که این گزینه‌های انتخابی در دسته‌های «قابل استفاده» و «نامناسب» قرار می‌گیرند. قابل ذکر است که، هر دو گزینه انتخابی A و C در یک دسته وضعیت کیفیت قرار گرفته‌اند ولی مقدار ناکارایی C نسبت به A برای هر دو گروه اعداد فازی کمتر است. بر همین اساس، بهترین گزینه برای خرید فولاد به قطر ۸ تا ۱۰ میلی‌متر، گزینه C خواهد بود.

حال می‌خواهیم شاخص‌های ناکارایی و تعمیم‌یافته آن را برای حالت غیر فازی بررسی کنیم. اگر حدود مشخصات و مقدار هدف را در حالت مثلثی به صورت (۸, ۹, ۱۰) و حالت ذوزنقه‌ای به صورت (۷/۹۷۵, ۸/۹۷۵, ۹/۹۷۵) در نظر بگیریم، آنگاه $D_l = D_u = 1$ می‌شود. بنابراین $C_{pp} = C_{pp}''$ خواهد بود. حال، با توجه به میانگین و واریانس هر یک از گزینه‌های انتخابی A ، B و C طبق جدول‌های فوق، مقادیر ناکارایی برای آن‌ها در حالت مثلثی به ترتیب برابر ۰/۶۱۰، ۰/۷۳۴ و ۰/۵۳۸ و در حالت ذوزنقه‌ای به ترتیب برابر ۰/۶۶۰، ۰/۸۱۸ و ۰/۵۷۹ به دست می‌آیند. در این حالت نیز، همانطور که پیداست میزان ناکارایی گزینه C در هر دو حالت مثلثی و ذوزنقه‌ای کمتر از دیگر گزینه‌ها می‌باشد. توضیحات فوق را می‌توان به سادگی در یک نمودار راداری مشاهده کرد. به زبان ساده‌تر، گزینه‌ای که کوچکترین مثلث را در شاخص‌های ذکر شده شامل شود گزینه مورد نظر است. همانطور که در شکل ۵.۵ مشاهده می‌کنید، C به عنوان بهترین گزینه انتخابی در نظر گرفته می‌شود.

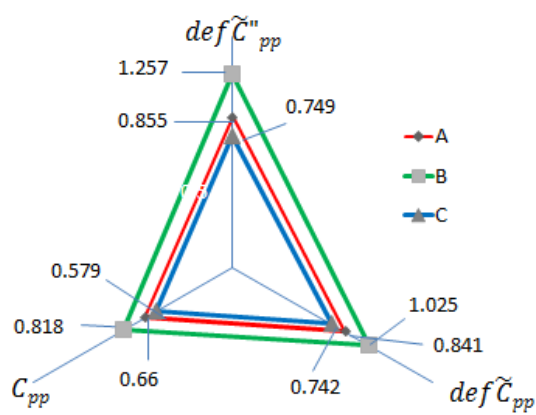
بنابراین، با مقایسه هر دو مقادیر فازی و غیرفازی ناکارایی فرایند می‌توان نتیجه گرفت که در حالت فازی مقادیر ناکارایی با دقت بیشتری محاسبه می‌شوند؛ چرا که با درجه عضویت دادن به آن‌ها دقت محاسبات بالاتر می‌رود و انعطاف‌پذیری بیشتری خواهند داشت.

۳.۵ نتیجه‌گیری

از مثال ارائه شده، می‌توان اینطور استنباط کرد که شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته فازی به دلیل نشان دادن جهت انحراف میانگین از مقدار هدف می‌تواند در انتخاب گزینه مناسب برای یک شرکت جهت هر گونه تعاملی مفید واقع گردد. اما شاخص ناکارایی فازی عاری از این ویژگی است. در ادامه، با مقایسه محاسبات غیر فازی و فازی هر دو شاخص، پیشنهاد می‌شود که برای بالا بردن دقت کار و به دست آوردن نتایج مناسب‌تر، بهتر است از شاخص ناکارایی تعمیم‌یافته فازی استفاده شود.



(آ) اعداد فازی مثلثی



(ب) اعداد فازی دوزنقه‌ای

شکل ۵.۵: نمودار راداری برای مقایسه سه گزینه انتخابی

نتیجه‌گیری و آینده تحقیق

نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، شاخص ناکارایی و تعمیم آن را معرفی کردیم، بدین صورت که، شاخص ناکارایی از ترکیب دو شاخص عدم دقت و عدم درستی تشکیل شده و اطلاعات مربوط به پراکندگی و انحراف میانگین از مقدار هدف را جداسازی می‌کند. از آنجایی که، شاخص ناکارایی به جهت انحراف میانگین از مقدار هدف اشاره‌ای ندارد، تعمیمی از شاخص ناکارایی معرفی شد که می‌تواند این ایراد را پوشش دهد. سپس، هر دو شاخص را در زمینه فازی مورد مطالعه قرار دادیم. در زمینه فازی، شاخص‌های ناکارایی را در دو حالت از حدود مشخصات و مقدار هدف فازی و غیرفازی بررسی کردیم. با ارائه یک مثال کاربردی در فصل آخر، هر دو شاخص ناکارایی فازی را با یکدیگر مقایسه کرده و نشان دادیم چه مقدار از ناکارایی به دست آمده مربوط به پراکندگی فرایند است و چه مقدار به انحراف میانگین از مقدار هدف مرتبط می‌شود. از طرفی، چون شاخص تعمیم‌یافته فازی این قابلیت را داشت که جهت انحراف میانگین فرایند نسبت به مقدار هدف را اندازه‌گیری کند، انتظار می‌رود میزان ناکارایی را نسبت به شاخص ناکارایی با دقت و حساسیت بیشتری ارائه کند. همچنین، در نهایت با محاسبه غیر فازی شاخص‌ها و مقایسه نتایج آن با شاخص‌های فازی، نشان دادیم که رسیدن به نتایج مناسب و دقیق در جهت فازی کردن شاخص‌ها به دست می‌آید. بنابراین، پیشنهاد می‌شود جهت هر گونه تعاملی بهتر است از شاخص تعمیم‌یافته فازی استفاده شود.

آینده تحقیق

۱. استنباط فازی ناکارایی فرایند با استفاده از مقدار بحرانی و p -value.
۲. بررسی خطای اندازه‌گیری تصادفی بر ناکارایی فرایند تولید در محیط فازی.
۳. بررسی شاخص ناکارایی و تعمیم آن برای فرایندهای غیرنرمال.
۴. بررسی شاخص ناکارایی و تعمیم آن در شرایطی که داده‌های مربوطه اعداد فازی نرمال یا نمایی باشند.

مراجع

- [۱] خاتمی ح.ر، رنجبر م، (۱۳۸۷)، ” مبانی مدل سازی فازی، جلد اول: جبر فازی ”، چاپ اول، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان
- [۲] طاهری س.م و ماشینی چی م، (۱۳۹۲)، ” مقدمه ای بر احتمال و آمار فازی ”، چاپ دوم، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان
- [۳] عباسی گنجی ز، (۱۳۸۷)، پایان نامه ارشد: ” اندیس ناکارایی فازی در فرآیندهای تولید ”، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مازندران
- [۴] عباسی گنجی ز، (۱۳۹۵)، رساله دکتری آمار: ” مباحثی بر شاخص های کارایی فرآیند ”، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد
- [۵] موننگومری، (۱۳۹۷)، ” کنترل کیفیت آماری ”، چاپ هفدهم، ترجمه دکتر رسول نورالسنا، انتشارات دانشگاه علم و صنعت
- [6] Abbasi Ganji Z. and Sadeghpour Gildeh B. (2016), ” Assessing process performance with incapability index based on fuzzy critical value”, **Iranian Journal of Fuzzy Systems**, 13(5), pp 21–34
- [7] Abbasi Ganji Z. and Sadeghpour Gildeh B. (2017), ” A new fuzzy process capability index for asymmetric tolerance interval”, **International Journal of Fuzzy Systems Applications**, 6(3), pp
- [8] Bortolan G. and Degani R. (1985), ” A review of some methods for ranking fuzzy numbers”, **Fuzzy Sets and Systems**, 15, pp 1-19
- [9] Boyles R.A. (1994), ” Process capability with asymmetric tolerances” **Communications in Statistics: Simulations and Computation**, 23, pp 615-643
- [10] Buckley J.J. (2004), ” Uncertain probabilities III: The continuous case” **Soft Computing**, 8, pp 200-206

- [11] Buckley J.J. (2005a), " Fuzzy statistics: Hypothesis testing" **Soft Computing**, 9, pp 512-518
- [12] Buckley J.J. (2005b), " Fuzzy systems" **Soft Computing**, 9, pp 757-760
- [13] Buckley J.J. (2006), " **Fuzzy Probability and Statistics**", Berlin Heidelberg: Springer Verlag
- [14] Buckley J.J. and Eslami E. (2004), " Uncertain probabilities II: The continuous case", **Soft Computing**, 8, pp 193-199
- [15] Chen K.S. (1998), " Incapability index with asymmetric tolerances", **Statistica Sinica**, 8, pp 253-262
- [16] Chen K.S. (1998a), " Estimation of the process incapability index", **Communications in Statistics Theory and Methods**, 27(4), pp 1263-1274
- [17] Chen K.S., Chen K.L. and Li R.K. (2005), " Contract manufacturer selection by using the process incapability index Cpp", **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, 26, pp 686-692
- [18] Chen K.S. and Chen T.W. (2008), "Multi-process capability plot and fuzzy inference evaluation", **International Journal of Production Economics**, 111(1), pp 70-79
- [19] Chen K.S. and Pearn W.L. (2001), " Capability indices for process with asymmetric tolerances", **Journal of the Chinese Institute of Engineers**, 24(5), pp 559-568
- [20] Chen S.J. and Chen S.M. (2007), " Fuzzy risk analysis based on the ranking of generalized trapezoidal fuzzy numbers", **Applied Intelligence**, 26(1), pp 1-11
- [21] Cheng C.H. (1998), " A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method", **Fuzzy Sets and Systems** 95, pp 307-317
- [22] Choobineh F. and Li H. (1993), " An index for ordering fuzzy numbers", **Fuzzy Sets and Systems**, 54, pp 287-294
- [23] Chou C.Y., Lin Y.C., Chang C.L. and Chen C.H. (2006), " On the bootstrap confidence intervals of the process incapability index Cpp", **Reliability Engineering and System Safety**, 91, pp 452-459

- [24] Chu T.C. (2002), " Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and original point", **Computers and Mathematics with Applications**, 43(1-2), pp 111-117
- [25] Oscar P.Dias Jr. Dias O. (1993), " Ranking alternatives using fuzzy numbers: A computational approach", **Fuzzy Sets and Systems**, 56, pp 247-252
- [26] Filzmoser R. and Vertl R. (2004), " Testing hypotheses with fuzzy data: the fuzzy p-value", **Metrika**, 59, pp 21-29
- [27] Fortemps P. and Roubens M. (1996), " Ranking and defuzzification methods based on area compensation", **Fuzzy Sets and Systems**, 82, pp 319-330
- [28] Greenwich M. and Jahr-Schaffrath B. L. (1995), " A process incapability index", **International Journal of Quality Reliability Management**, 12, pp 58-71
- [29] Huang M.L., Chen K.S. and Li R.K. (2002), " Process capability evaluation for a PVC pipe product family", **The Asian Journal on Quality**, 3, pp 61-70
- [30] Hsu B.M. and Shu M.H. (2007), " Fuzzy inference to assess manufacturing process capability with imprecise data", **European Journal of Operational Research**, 186(2), pp 652-670
- [31] Jain R. (1976), " Decision-making in the presence of fuzzy variables", **IEEE Trans. Systems Man and Cybernet**, 6, pp 698-703
- [32] Jain R. (1977), " A procedure for multi-aspect decision making using fuzzy sets", **Journal International Journal of Systems Science**, 8, pp 1-7
- [33] Kahraman C. and Kaya I. (2011) "Fuzzy Estimations of Process Incapability Index", WCE, pp 1106-1110, London, U.K.
- [34] Kahramana C., Parchami A., Onara S.C. and Oztaysia B. (2017), " Process capability analysis using intuitionistic fuzzy sets", **Journal of Intelligent and Fuzzy Systems**, 32, pp 1659-1671
- [35] Kaya I. (2014), " The process incapability index under fuzziness with an application for decision making", **International Journal of Computational Intelligence Systems**, 1, pp 114-128

-
- [36] Kaya I. and Kahraman C. (2008), " Fuzzy process capability analyses: An application to teaching processes", **Journal of Intelligent and Fuzzy Systems**, 19(4-5), pp 259-272
- [37] Kaya I. and Kahraman C. (2009), " Fuzzy robust process capability indices for risk assessment of air pollution" **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, 23(4), pp 529-541
- [38] Kaya I. and Kahraman C. (2011c), " Fuzzy process capability indices with asymmetric tolerances", **Expert Systems with Applications**, 38, pp 14882-14890
- [39] Ke J.C., Chu Y.K., Chung Y.T. and Lin P.C. (2009), " Assessing non-normally distributed processes by interval estimation of the incapability index Cpp", **Quality and Reliability Engineering International**, 25, pp 427-437
- [40] Kots S. and Johnson N. L. (2002), " Process capability indices-a review: 1992-2000", **Journal of Quality Technology**, 34(1), pp 1-19
- [41] Lee E.S. and Li R.J. (1988), " Comparison of fuzzy numbers based on the probability measure of fuzzy events", **Computers Math**, 15(10), pp 887-896
- [42] Lee H.T. (2001), " Cpk index estimation using fuzzy numbers", **European Journal of Operational Research**, 129, pp 683-688
- [43] Lee K.M., Cho C.H. and Lee-Kwang H. (1994), " Ranking fuzzy values with satisfaction function", **Fuzzy Sets and Systems**, 64, pp 295-311
- [44] Lee Y.H., Wei C.C. and Chang C.L. (1999), " Fuzzy design of process tolerances to maximise process capability", **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, 15, pp 655-659
- [45] Liao M.Y. (2015) ," Assessing process incapability when collecting data from multiple batches", **International Journal of Production Research**, 7, pp 2041-2054
- [46] Liao M.Y. and Wu Ch.W. (2010), " Evaluating process performance based on the incapability index for measurements with uncertainty", **Expert Systems with Applications**, 37, pp 5999-6006
- [47] Liao M.Y., Lin Ch.H., Wu Ch.W. and Yang Ch.H. (2014), " Reliable confidence intervals for assessing normal process incapability", **Communications in Statistics-Simulation and Computation**, 1, pp 446-457

- [48] Liou T.S. and Wang M.J. (1992), " Ranking fuzzy numbers with integral value", **Fuzzy Sets and Systems**, 50, pp 247-255
- [49] Montgomery D.C. (2008), " **Introduction to Statistical Quality Control**", Arizona State University, USA
- [50] Murakami S., Maeda S. and Imamura S. (1983), " Fuzzy decision analysis on the development of centralized regional energy control system", **IFAC Proceedings Volumes**, 16(13), pp 363- 368
- [51] Parchami A. and Mashinchi M. (2007), " Fuzzy estimation for process capability indices", **Information Sciences**, 177, pp 1452-1462
- [52] Parchami A., Mashinchi M. and Maleki H.R. (2006), " Fuzzy confidence interval for fuzzy process capability index", **Journal of Intelligent and Fuzzy Systems**, 17, pp 287-295
- [53] Parchami A., Mashinchi M., Yavari, A.R. and Maleki H.R. (2005), " Process Capability Indices as Fuzzy Numbers", **Austrian Journal of Statistics**, 34(4), pp 391-402
- [54] Pearn W.L., Chen K.L. and Chen K.S. (2002), " A practical implementation of the incapability index Cpp", **International Journal of Industrial Engineering**, 9(4), pp 372-383
- [55] Pearn W.L. and Lin G.H. (2001), " On the reliability of the estimated incapability index", **Quality and Reliability Engineering International**, 17, pp 279-290
- [56] Pearn W.L., Kots S. and Johnson N.L. (1992), " Distributional and inferential properties of process capability index", **Journal of Quality Technology**, 24(4), pp 216-231
- [57] Raj P.A. and Kumar D.N. (1999), " Ranking alternatives with fuzzy weights using maximizing set and minimizing set", **Fuzzy Sets and Systems**, 105, pp 365-375
- [58] Requena I., Delgado M. and Verdegay J.I. (1994), " Automatic ranking of fuzzy numbers with the criterion of decisionmaker learnt by an artificial neural network", **Fuzzy Sets and Systems**, 64, pp 1-19

-
- [59] Sadeghpour Gildeh B. and Abbasi Ganji Z. (2019), " The effect of measurement error on the process incapability index", **Communications in Statistics - Theory and Methods**, 3, pp 552-566
- [60] Shapiro S.S. (1980), " **How to test normality and other distributional assumptions**", The ASQC Basic Reference in Quality Control: Statistical Techniques, ASQC, Milwaukee, WI
- [61] Tsai C.C. and Chen C.C. (2006), " Making decision to evaluate process capability index C_p with fuzzy numbers", **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, 30, pp 334-339
- [62] Vannman, K. (1995), " A unified approach to capability indices", **Statistica Sinica**, 5, pp 805-820
- [63] Vannman, K. (1998), " Capability indices when tolerances are asymmetric", **Quality Improvement Through Statistical Methods Part of the series Statistics for Industry and Technology**, pp 79-95
- [64] Yongting C. (1996), " Fuzzy quality and analysis on fuzzy probability", **Fuzzy Sets Systems**, 83, pp 283-290
- [65] Zadeh L. A. (1965), "Fuzzy sets", **Information and Control**, 8(3), pp 338 - 353

پیوست آ

دستورات برنامه نویسی در R

۱.آ دستورات برنامه نویسی در R

دستورات مربوط به جدول ۱.۲ به شرح ذیل است:

```
USL=58 ; LSL= 26 ; d= (USL - LSL)/2 ; M= (USL + LSL)/2 ; T=50 ; sigma=8/3
Du= USL - T ; Dl= T - LSL ; D= dstar/3 ; dstar= min(Dl,Du) ; mu=26:58
```

```
##### czegond(u,v) #####
```

```
czegond=function(dstar,d,mu,T,Du,Dl,sigma,u,v){
l= ( dstar - ( ( u*(dstar*(T - mu)) ) /Dl ) ) /
( 3*sqrt( ( sigma^2) + ( ( v*(d*(T - mu)) ) /Dl)^2 ) )
u= ( dstar - ( ( u*(dstar*(mu - T)) ) /Du ) ) /
( 3*sqrt( ( sigma^2) + ( ( v*(d*(mu - T)) ) /Du)^2 ) )
return(list(l=l,u=u))
}
```

```

czegond(dstar,d,mu[i],T,Du,Dl,sigma,u,v)

if(mu[i]<=T) czegond(dstar,d,mu[i],T,Du,Dl,sigma,uv[k,1],uv[k,2])$l else
czegond(dstar,d,mu[i],T,Du,Dl,sigma,uv[k,1],uv[k,2])$u

##### ctierth(u,v) #####

ctierth=function(dstar,d,T,mu,Du,Dl,sigma,u,v){
l= ( dstar - ( ( u*(T - mu)^2 )/Dl ) )/
( 3*sqrt( (sigma^2) + ( ( v*(d*(T - mu)) )/Dl)^2 ) )
u= ( dstar - ( ( u*(mu - T)^2 )/Du ) )/
( 3*sqrt( (sigma^2) + ( ( v*(d*(mu - T)) )/Du)^2 ) )
return(list(l=l,u=u))
}

ctierth(dstar,d,T,mu[i],Du,Dl,sigma,u,v)

if(mu[i]<=T) ctierth(dstar,d,mu[i],T,Du,Dl,sigma,uv[k,1],uv[k,2])$l else
ctierth(dstar,d,mu[i],T,Du,Dl,sigma,uv[k,1],uv[k,2])$u

##### cpa(u,v) #####

cpa= function(d,mu,M,T,sigma,u,v){
xx= (d - abs(mu - M) - (u* abs(mu - T)))/(3 * sqrt(sigma^2 + (v*(mu - T)^2)))
return(xx)
}

cpa(d,mu[i],M,T,sigma,u,v)

x=matrix(NA, 33, 10)
mu=26:58
uv=matrix(c(1,0,0,1,1,1),3,2,byrow=T)
for(i in 1:length(mu)){

```

```

x[i,1]= mu[i]
j=0
for(k in 1:3){
x[i,2+j]= cpa(d,mu[i],M,T,sigma,uv[k,1],uv[k,2])
x[i,3+j]= if(mu[i]<=T) czegond(dstar,d,mu[i],T,Du,Dl,sigma,uv[k,1],uv[k,2])$l else
czegond(dstar,d,mu[i],T,Du,Dl,sigma,uv[k,1],uv[k,2])$u
x[i,4+j]= if(mu[i]<=T) ctierth(dstar,d,mu[i],T,Du,Dl,sigma,uv[k,1],uv[k,2])$l else
ctierth(dstar,d,mu[i],T,Du,Dl,sigma,uv[k,1],uv[k,2])$u
j=j+3
}
}
x
write.csv(x, 'D:/x.csv')

```

دستورات مربوط به جدول ۲.۲ به شرح ذیل است:

```

LSL= T-(1.5*d) ; USL= T+(.5*d) ; sigma=d/4 ; Dl= T-LSL
Du= USL-T; D=min(Dl,Du)/3

```

```

##### cia #####

```

```

cia= function(T,mu,D){
yy=((mu-T)/D)^2
return(yy)
}

```

```

cia(T,mu[i],D)

```

```

##### cip #####

```

```

cip= function(sigma,D){
x= (sigma/D)^2
return(x)
}

```

```
cip(sigma,D)
```

```
##### cpp #####
cpp= function(T,mu,D,sigma){
zz= ((mu-T)/D)^2 + (sigma/D)^2
return(zz)
}
```

```
cpp(T,mu[i],D,sigma)
```

```
##### ciazegond #####
ciazegond= function(T,mu,d,D,Du,Dl){
l= ( ((T-mu)*d)/(D*Dl) )^2
u= ( ((mu-T)*d)/(D*Du) )^2
return(list(l=l,u=u))
}
```

```
ciazegond(T,mu[i],d,D,Du,Dl)
```

```
if(mu[i]<=T) ciazegond(T,mu[i],d,D,Du,Dl)$l else
ciazegond(T,mu[i],d,D,Du,Dl)$u
```

```
##### cppzegond #####
cppzegond= function(T,mu,d,D,sigma,Du,Dl){
l= ( ((T-mu)*d)/(D*Dl) )^2 + (sigma/D)^2
u= ( ((mu-T)*d)/(D*Du) )^2 + (sigma/D)^2
return(list(l=l,u=u))
}
```

```
cppzegond(T,mu[i],d,D,sigma,Du,Dl)
```

```
if(mu[i]<=T) cppzegond(T,mu[i],d,D,sigma,Du,Dl)$l else
cppzegond(T,mu[i],d,D,sigma,Du,Dl)$u
```



```
##### table #####

y1=seq(-1.5,0.5,by=.05)
y=matrix(NA, length(y1), 8)
mu=seq(26,58,by=.8)
for(i in 1:length(y1)){
  z=c("T+",y1[i],"d")
  y[i,1]= z[1]
  y[i,2]= z[2]
  y[i,3]= z[3]
}
for(i in 1:length(mu)){
  y[i,4]= cia(T,mu[i],D)
  y[i,5]= cip(sigma,D)
  y[i,6]= cpp(T,mu[i],D,sigma)
  y[i,7]= if(mu[i]<=T) ciazegond(T,mu[i],d,D,Du,Dl)$l else
  ciazegond(T,mu[i],d,D,Du,Dl)$u
  y[i,8]= if(mu[i]<=T) cppzegond(T,mu[i],d,D,sigma,Du,Dl)$l else
  cppzegond(T,mu[i],d,D,sigma,Du,Dl)$u
}
y
write.csv(y, 'D:/y.csv')
```

دستورات مربوط به مثال ۱.۲.۵، به شرح ذیل است:

```
##### s2tilde #####

s_alpha=function(s,n){
  alpha=seq(.01,.99,by=.001)
  l=u=c(rep(NA, length(alpha)))
  for(i in 1:length(alpha)){
    l[i]= ( (n-1)*s^2 ) / ( (1-alpha[i])*qchisq(0.995,n-1) + (n-1)*alpha[i] )
    u[i]= ( (n-1)*s^2 ) / ( (1-alpha[i])*qchisq(0.005,n-1) + (n-1)*alpha[i] )
  }
}
```

```

}
return(list(l=l, u=u))
}

##### s2tilde for supplier A #####
s2A=s_alpha(.24,200)
s2A

alpha=seq(.01,.99,by=.001)

plot(range(s2A$u,alpha), range(s2A$l,alpha),type="n",
xlim=c(min(s2A$l)-0.01,max(s2A$u)+0.01),ylim=c(.03,.97)
,xlab=expression(sigma^2), ylab=expression(alpha))

lines(s2A$l,alpha,col="red",lwd=2)
lines(s2A$u,alpha,col="red",lwd=2)

##### mutilde #####

mu_alpha= function(xbar,n){
alpha=seq(0.01, 0.99,by=.001)
l = u = c(rep(NA, length(alpha)))
for(i in 1:length(alpha)){
l[i] = min ( xbar - qt((1-alpha[i]/2), n-1 ) * sqrt(s2A$l[i]/n)
, xbar - qt((1-alpha[i]/2), n-1 ) * sqrt(s2A$u[i]/n) )

u[i] = max( xbar + qt((1-alpha[i]/2), n-1 ) * sqrt(s2A$l[i]/n)
, xbar + qt((1-alpha[i]/2), n-1 ) * sqrt(s2A$u[i]/n) )
}
return(list(l=l, u=u))
}

##### mutilde for supplier A #####

```

```

mA=mu_alpha(9.10,200)
mA

plot(range(mA$u,alpha),range(mA$l,alpha),type="n",
xlim=c(min(mA$l)-0.01,max(mA$u)+0.01),ylim=c(.03,.97),
xlab=expression(mu), ylab=expression(alpha))

lines(mA$l,alpha,col="red",lwd=2)
lines(mA$u,alpha,col="red",lwd=2)

##### T fot TFN #####

T_alpha= function(t1,t2,t3){
alpha=seq(0.01,.99,by=.001)
l = u = c(rep(NA, length(alpha)))
for(i in 1:length(alpha)){
l[i]= ( t2 - t1 )*alpha[i] + t1
u[i]= ( t2 - t3 )*alpha[i] + t3
}
return(list(l=l, u=u))
}
T_alpha_TFN= T_alpha(8.95, 9, 9.05)
T_alpha_TFN

##### T fot TrFN #####

T_alpha= function(t1,t2,t3,t4){
alpha=seq(0.01,.99,by=.001)
l = u = c(rep(NA, length(alpha)))
for(i in 1:length(alpha)){
l[i]= ( t2 - t1 )*alpha[i] + t1
u[i]= ( t3 - t4 )*alpha[i] + t4
}
return(list(l=l, u=u))
}

```

```

}
T_alpha_TrFN= T_alpha(8.90, 8.95, 9.00, 9.05)
T_alpha_TrFN

##### cia for TFN #####
##### cia for supplier A #####

cia_alpha_TFN= function(alpha){
l = u = c(rep(NA, length(alpha)))
for(i in 1:length(alpha)){
l[i]= ( ( mA$l[i] - T_alpha_TFN$u[i] )/
D_alpha_TFN$u[i] )^2
u[i]= ( ( mA$u[i] - T_alpha_TFN$l[i] )/
D_alpha_TFN$l[i] )^2
}
return(list(l=l, u=u))
}

ciaA_TFN=cia_alpha_TFN(alpha)
ciaA_TFN

##### cia for TrFN #####
##### cia for supplier A #####

cia_alpha_TrFN= function(alpha){
l = u = c(rep(NA, length(alpha)))
for(i in 1:length(alpha)){
l[i]= ( ( mA$l[i] - T_alpha_TrFN$u[i] )/
D_alpha_TrFN$u[i] )^2
u[i]= ( ( mA$u[i] - T_alpha_TrFN$l[i] )/
D_alpha_TrFN$l[i] )^2
}
return(list(l=l, u=u))
}

```

```

ciaA_TrFN=cia_alpha_TrFN(alpha)
ciaA_TrFN

##### cip for TFN #####
##### cip for supplier A #####

cip_alpha_TFN=function(alpha){
  l = u = c(rep(NA, length(alpha)))
  for(i in 1:length(alpha)){
    l[i] = s2A$l[i] / ( D_alpha_TFN$u[i] )^2
    u[i] = s2A$u[i] / ( D_alpha_TFN$l[i] )^2
  }
  return(list(l=l, u=u))
}

cipA_TFN=cip_alpha_TFN(alpha)
cipA_TFN

##### cpp for TFN #####
##### cpp for supplier A #####

cpp_alpha_TFN=function(alpha){
  l = u = c(rep(NA, length(alpha)))
  for(i in 1:length(alpha)){
    l[i]= ciaA_TFN$l[i] + cipA_TFN$l[i]
    u[i]= ciaA_TFN$u[i] + cipA_TFN$u[i]
  }
  return(list(l=l, u=u))
}

cppA_TFN= cpp_alpha_TFN(alpha)
cppA_TFN

plot(range(cppA_TFN$u,alpha), range(cppA_TFN$l,alpha),type="n",

```

```

xlim=c(min(ciaA_TFN$l)-0.01,max(cppA_TFN$u)+0.01),ylim=c(.03,.97)
,xlab="x", ylab=expression(alpha))

lines(ciaA_TFN$l,alpha,col="blue",lwd=2,lty=3)
lines(ciaA_TFN$u,alpha,col="blue",lwd=2,lty=3)
lines(c(max(ciaA_TFN$l), min(ciaA_TFN$u)), c(.99,.99),col="blue",
lwd=2,lty=3)

lines(cipA_TFN$l,alpha,col="green",lwd=2,lty=2)
lines(cipA_TFN$u,alpha,col="green",lwd=2,lty=2)
lines(c(max(cipA_TFN$l), min(cipA_TFN$u)), c(.99,.99),col="green",
lwd=2,lty=2)

lines(cppA_TFN$l,alpha,col="red",lwd=2)
lines(cppA_TFN$u,alpha,col="red",lwd=2)
lines(c(max(cppA_TFN$l),min(cppA_TFN$u)),c(.99,.99),col="red",lwd=2)

legend("topright",
c("Cia","Cip","Cpp"),lwd=2,
col=c("blue", "green", "red"),text.col=1,lty=c(3,2,1)
)

##### cpp for TrFN #####
##### cpp for supplier A #####

cpp_alpha_TrFN=function(alpha){
l = u = c(rep(NA, length(alpha)))
for(i in 1:length(alpha)){
l[i]= ciaA_TrFN$l[i] + cipA_TrFN$l[i]
u[i]= ciaA_TrFN$u[i] + cipA_TrFN$u[i]
}
return(list(l=l, u=u))
}

```

```
cppA_TrFN= cpp_alpha_TrFN(alpha)
```

```
cppA_TrFN
```

```
##### ranking (mutilde & Ttilde for TFN) #####
```

```
R=function(a,b,c){
```

```
r=(a+2*b+c)/4
```

```
return(r)
```

```
}
```

```
R_muA= R(9.05,9.10,9.15)
```

```
R_muA
```

```
R_T_TFN= R(8.95,9,9.05)
```

```
R_T_TFN
```

```
##### Ranking (Ttilde for TrFN) #####
```

```
R_TrFN=function(a,b,c,d){
```

```
r=(a+b+c+d)/4
```

```
return(r)
```

```
}
```

```
R_T_TrFN= R_TrFN(8.90,8.95,9,9.05)
```

```
R_T_TrFN
```

```
##### ciazegond for TFN #####
```

```
##### ciazegond for supplier A #####
```

```
ciazegond_L_alpha_TFN= function(alpha){
```

```
l = u = c(rep(NA, length(alpha)))
```

```
for(i in 1:length(alpha)){
```

```
l[i]= ( ( (mA$l[i] - T_alpha_TFN$u[i])* d_alpha_TFN$l[i] ) /
```

```
( Du_alpha_TFN$u[i] * D_alpha_TFN$u[i] ) )^2
```

```

u[i]= ( ( (mA$u[i] - T_alpha_TFN$l[i])* d_alpha_TFN$u[i] ) /
( Du_alpha_TFN$l[i] * D_alpha_TFN$l[i] ) )^2
}
return(list(l=l, u=u))
}
ciazegonda_L_TFN= ciazegonda_L_alpha_TFN(alpha)
ciazegonda_L_TFN

ciazegonda_R_alpha_TFN= function(alpha){
l = u = c(rep(NA, length(alpha)))
for(i in 1:length(alpha)){
l[i]= ( ( (T_alpha_TFN$l[i] - mA$u[i]) * d_alpha_TFN$l[i] ) /
( Dl_alpha_TFN$u[i] * D_alpha_TFN$u[i] ) )^2
u[i]= ( ( (T_alpha_TFN$u[i] - mA$l[i]) * d_alpha_TFN$u[i] ) /
( Dl_alpha_TFN$l[i] * D_alpha_TFN$l[i] ) )^2
}
return(list(l=l, u=u))
}
ciazegonda_R_TFN= ciazegonda_R_alpha_TFN(alpha)
ciazegonda_R_TFN

cia_A_l_TFN= if( R_muA > R_T_TFN ) ciazegonda_L_TFN$l else ciazegonda_R_TFN$l
cia_A_l_TFN

cia_A_u_TFN= if( R_muA > R_T_TFN ) ciazegonda_L_TFN$u else ciazegonda_R_TFN$u
cia_A_u_TFN

##### ciazegond for TrFN #####
##### ciazegond for supplier A #####

ciazegond_L_alpha_TrFN= function(alpha){
l = u = c(rep(NA, length(alpha)))

```



```

for(i in 1:length(alpha)){
  l[i]= ( ( (mA$l[i] - T_alpha_TrFN$u[i])* d_alpha_TrFN$l[i] ) /
  ( Du_alpha_TrFN$u[i] * D_alpha_TrFN$u[i] ) ) ^2

  u[i]= ( ( (mA$u[i] - T_alpha_TrFN$l[i])* d_alpha_TrFN$u[i] ) /
  ( Du_alpha_TrFN$l[i] * D_alpha_TrFN$l[i] ) ) ^2
}
return(list(l=l, u=u))
}

ciazegondA_L_TrFN= ciazegond_L_alpha_TrFN(alpha)
ciazegondA_L_TrFN

ciazegond_R_alpha_TrFN= function(alpha){
  l = u = c(rep(NA, length(alpha)))
  for(i in 1:length(alpha)){
    l[i]= ( ( (T_alpha_TrFN$l[i] - mA$u[i]) * d_alpha_TrFN$l[i] ) /
    ( Dl_alpha_TrFN$u[i] * D_alpha_TrFN$u[i] ) ) ^2
    u[i]= ( ( (T_alpha_TrFN$u[i] - mA$l[i]) * d_alpha_TrFN$u[i] ) /
    ( Dl_alpha_TrFN$l[i] * D_alpha_TrFN$l[i] ) ) ^2
  }
  return(list(l=l, u=u))
}

ciazegondA_R_TrFN= ciazegond_R_alpha_TrFN(alpha)
ciazegondA_R_TrFN

cia_A_l_TrFN= if( R_muA > R_T_TrFN ) ciazegondA_L_TrFN$l else ciazegondA_R_TrFN$l
cia_A_l_TrFN

cia_A_u_TrFN= if( R_muA > R_T_TrFN ) ciazegondA_L_TrFN$u else ciazegondA_R_TrFN$u
cia_A_u_TrFN

##### cppzegond for TFN #####
##### cppzegond for supplier A #####

```

```

cppzegond_alpha_TFN= function(alpha){
  l = u = c(rep(NA, length(alpha)))
  for(i in 1:length(alpha)){
    l[i]= cia_A_l_TFN[i] + cipA_TFN$l[i]
    u[i]= cia_A_u_TFN[i] + cipA_TFN$u[i]
  }
  return(list(l=l, u=u))
}

cppzegonda_TFN= cppzegond_alpha_TFN(alpha)
cppzegonda_TFN

plot(range(cppzegonda_TFN$u,alpha), range(cppzegonda_TFN$l,alpha),type="n",
xlim=c(min(cia_A_l_TFN)-0.01, max(cppzegonda_TFN$u)+0.01),
ylim=c(0.03,.97),xlab="x",ylab=expression(alpha))

lines(cia_A_l_TFN,alpha,col="blue",lwd=2,lty=3)
lines(cia_A_u_TFN,alpha,col="blue",lwd=2,lty=3)
lines(c(max(ciazegonda_TFN$l),min(ciazegonda_TFN$u)),c(.99,.99),
col="blue",lwd=2,lty=3)

lines(cipA_TFN$l,alpha,col="green",lwd=2,lty=2)
lines(cipA_TFN$u,alpha,col="green",lwd=2,lty=2)
lines(c(max(cipA_TFN$l), min(cipA_TFN$u)), c(.99,.99),col="green",
lwd=2,lty=2)

lines(cppzegonda_TFN$l,alpha,col="red",lwd=2)
lines(cppzegonda_TFN$u,alpha,col="red",lwd=2)
lines(c(max(cppzegonda_TFN$l),min(cppzegonda_TFN$u)),c(.99,.99),
col="red",lwd=2)

legend("topright",
c("C'ia","Cip","C'pp"),lwd=2,

```

```
col=c("blue", "green", "red"),text.col=1,lty=c(3,2,1)
)
```

```
##### cppzegond for TrFN #####
```

```
##### cppzegond for supplier A #####
```

```
cppzegond_alpha_TrFN= function(alpha){
l = u = c(rep(NA, length(alpha)))
for(i in 1:length(alpha)){
l[i]= cia_A_l_TrFN[i] + cipA_TrFN$l[i]
u[i]= cia_A_u_TrFN[i] + cipA_TrFN$u[i]
}
return(list(l=l, u=u))
}
```

```
cppzegondA_TrFN= cppzegond_alpha_TrFN(alpha)
```

```
cppzegondA_TrFN
```

Aabstract

Statistical quality control is one of the most important and applicable topics of statistics science, part of which relates to capability and incapability indices. Process capability and incapability indices are useful tools for measuring product quality and process status using process capability analysis. The advantage of using incapability indices is to divide the information into two indices of imprecision and inaccuracy. On the other hand, the incapability index is in some cases not able to accurately express the incapability (or capability) of the process. Therefore, a generalization of the incapability index has been introduced which can eliminate this problem. Now, if the data is not crisp, fuzzy logic can be used. In this case, conventional incapability indices cannot be used, so for fuzzy indices, fuzzy estimation of imprecision and inaccuracy indices must first be calculated. In this thesis, we have two considerations for this. The first case, when the specification limit and target value are not fuzzy, and the second case, when the specification limit and value target are fuzzy. Finally, by presenting a real example, we examine the application of these two indices of fuzzy incapability in the industry and compare them.

Keywords: Process capability indices, Process incapability index and its generalization, Fuzzy logic, Specification limits and target value



Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in Mathematical Statistics

**Investigation of generalized incapability
indices of production process in fuzzy
environment**

By: Golbanou Mohammadian

Supervisors:

Dr. Mohammad Reza Rabiei
Dr. Bahram Sadeghpour Gildeh

January 2020