

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری تحقیق در عملیات

کاربرد یک روش هوش محاسباتی برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری

نگارنده: فرزانه خیری نتاج

استاد راهنما

دکتر علیرضا ناظمی

بهمن ۱۳۹۸

شماره: ۳۳۱-۲۲-۳

تاریخ: ۲۷ / ۲ / ۹۹

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۱: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود خانم فرزانه خیری نتاج دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات-کنترل و بهینه سازی به شماره دانشجویی ۹۳۰۰۵۴۵ ورودی مهر سال ۹۳ در تاریخ ۹۸/۱۱/۱۴ از رساله نظری خود با عنوان: کاربرد یک روش هوش محاسباتی برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری دفاع و با اخذ نمره ۱۹٫۴ به درجه عالی نائل گردید.

- الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹-۱۷
- ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹-۱۵ د) مردود: کمتر از ۱۵

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	استاد راهنما	دکتر علیرضا ناظمی	استاد	
۲	استاد داور خارجی	دکتر رضا یورقلی	دانشیار	
۳	استاد داور داخلی	دکتر حجت احسنی طهرانی	دانشیار	
۴	استاد داور داخلی	دکتر محمد هادی نوری اسکندری	استادیار	
۵	نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی قوتمند	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم فرزانه خیری نتاج بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تقدیم به

پدرم بابوسه بردستانش که وجودش مایه دلگرمی ام است.

مادرم بابوسه بردستانش که وجودش برایم همه مهر است.

دخوشی، همیشگی ام، همسر عزیزم که عطر حضورش تکرار خوشی های
من است.

تشکر و قدردانی

تشکر و سپاس بی پایان مخصوص خدایی است که بشر را آفریده و به او قدرت اندیشیدن داده و توانایی‌های بالقوه را در وجود انسان قرار داده و او را امر به تلاش و کوشش نموده و راهنمایی را برای هدایت بشر فرستاده است. پس از ارادت خاضعانه به درگاه خداوند بی همتا لازم است از استاد ارجمند جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی به خاطر سعه صدر و رهنمودهای دلسوزانه که در تهیه این تحقیق مرا مورد لطف خود قرار دادند و راهنمایی‌های لازم را نمودند تشکر و قدردانی نمایم. از اساتید ارجمند جناب آقای دکتر رضا پورقلی، جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی و جناب آقای دکتر محمد هادی نوری اسکندری که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند کمال تشکر را دارم. در پایان از سایر عزیزان و دوستانی که لطف و عنایت بی دریغشان شامل حال اینجانب گردید تقدیر و تشکر نموده و از درگاه خداوند متعال برایشان سلامتی و توفیق آرزو مندم.

فرزانه خیری نتاج

بهمن ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب فرزانه خیری نتاج دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان کاربرد یک روش هوش محاسباتی برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری، تحت راهنمایی علیرضا ناظمی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فرزانه خیری نتاج

بهمن ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

با توجه به این که مشتق‌ها و انتگرال‌های کسری، مدل‌های دقیق‌تری از بسیاری از سیستم‌های دینامیکی نسبت به مشتق‌ها و انتگرال‌ها از مرتبه صحیح فراهم می‌کنند، در سال‌های اخیر رشد قابل توجهی در حسابان کسری به وجود آمده است. یک سیستم دینامیکی کسری تاخیری، سیستمی است که توسط معادلات دیفرانسیل کسری تاخیری توصیف شده است و مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری در واقع همان مسائل کنترل بهینه هستند که دستگاه‌های دینامیکی همراه‌کننده آن‌ها کسری تاخیری هستند. پس با توجه به ضرورت حل این نوع مسائل و قابلیت بالای مدل‌های شبکه عصبی که یکی از زمینه‌های بسیار فعال و پرکاربرد در حوزه هوش مصنوعی هستند، در این رساله رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای حل این مسائل از روش‌های عددی شبکه عصبی پرسپترون چندلایه (بر حسب توابع سری توانی کسری، توابع سیگموئید و توابع نمایی) و شبکه‌های عصبی پیوندی تابعی تک لایه (بر حسب چند جمله‌ای‌های موننتس-لژاندر و چند جمله‌ای‌های چبیشف کسری) استفاده می‌کنیم. اخیراً تعاریف جدیدی از حسابان کسری ارائه شده است که مشکل وجود هسته تکین و محلی را در تعاریف حسابان کسری کلاسیک برطرف کردند. در این رساله به حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری با این تعاریف جدید نیز می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری، شبکه عصبی پرسپترون چندلایه، شبکه عصبی پیوندی تابعی تک‌لایه، تقریب پاده، بهینه‌سازی.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1- F. Kheyriataj, A. Nazemi, (2019), Fractional power series neural network for solving delay fractional optimal control problems, Connection Science, DOI: 10.1080/09540091.2019.1605498.

2- F. Kheyriataj, A. Nazemi, (2019), Muntz–Legendre neural network construction for solving delay optimal control problems of fractional order with equality and inequality constraints, Soft Computing, DOI: 10.1007/s00500-019-04465-7.

3- F. Kheyriataj, A. Nazemi, (2019), Fractional Chebyshev functional link neural network-optimization method for solving delay fractional optimal control problems with Atangana–Baleanu derivative, Optimal Control, Applications and Methods, DOI: 10.1002/oca.2572.

Conference articles

1- Farzaneh Kheyriataj, Alireza Nazemi (2017), A numerical method based on neural network approach for solving delay fractional optimal control problems, The 10th International Conference of Iranian Operations Research Society, Bobolsar-Iran.

2- Farzaneh Kheyriataj, Alireza Nazemi (2017), A new approximate method for delay fractional optimal control problems, 48th Annual Iranian Mathematics Conference, Bu-Alisina University, Hamedan, Iran.

فهرست مطالب

س	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
۱	۱ پیش نیازها
۱	۱.۱ مقدمه
۱	۲.۱ توابع پرکاربرد در حسابان کسری
۳	۳.۱ انواع مشتق و انتگرال مرتبه کسری
۳	۱.۳.۱ مشتق و انتگرال ریمن-لیوویل
۵	۲.۳.۱ مشتق و انتگرال لیوویل
۶	۳.۳.۱ مشتق کسری کاپاتو
۷	۴.۳.۱ مشتق و انتگرال جوماری
۸	۵.۳.۱ مشتق و انتگرال کسری گرانوالد-لتنیکف
۹	۶.۳.۱ مشتق و انتگرال کاپوتو-فابریسیو
۱۰	۷.۳.۱ مشتق و انتگرال آتانگانا-بالیانو
۱۱	۸.۳.۱ مشتق کسری همدیس پذیر
۱۴	۴.۱ معادلات دیفرانسیل کسری
۱۵	۵.۱ معادلات دیفرانسیل کسری تاخیری
۱۶	۶.۱ مسأله کنترل بهینه کسری
۲۰	۷.۱ چندجمله‌ای‌های مرتبه کسری
۲۰	۱.۷.۱ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مرتبه کسری
۲۰	۲.۷.۱ چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری
۲۲	۳.۷.۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبه کسری
۲۳	۴.۷.۱ چندجمله‌ای‌های برنشتاین مرتبه کسری
۲۴	۵.۷.۱ چندجمله‌ای‌های لاگر مرتبه کسری
۲۵	۶.۷.۱ چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر

۲۶	چند جمله‌ای‌های ژاکوبی	۷.۷.۱
۲۹	مروری بر شبکه‌های عصبی و سیستم‌های دینامیکی	۲
۲۹	مقدمه	۱.۲
۳۰	شبکه‌های عصبی بیولوژیکی	۲.۲
۳۱	شبکه‌های عصبی مصنوعی	۳.۲
۳۵	سیر تکامل شبکه عصبی مصنوعی	۴.۲
۳۶	انواع یادگیری برای شبکه‌های عصبی	۵.۲
۳۷	انواع شبکه‌های عصبی مصنوعی	۶.۲
۳۹	تاریخچه حل مسائل کنترل بهینه با استفاده از شبکه‌های عصبی	۷.۲
۴۰	سیستم‌های دینامیکی	۸.۲
	حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری با دورویکرد متفاوت از شبکه‌های عصبی	۳
۴۵	پرسپترون	
۴۵	مقدمه	۱.۳
۴۶	تقریب پایه	۲.۳
۴۸	تقریب پایه برای مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری	۳.۳
۵۱	مدل‌های شبکه عصبی پیشنهادی برای حل سیستم بهینگی	۴.۳
۵۱	شبکه عصبی سری توانی کسری	۱.۴.۳
۵۳	شبکه عصبی با تابع فعال‌ساز سیگموئید	۲.۴.۳
	تقریب توابع و جواب‌های آزمایشی با استفاده از دو مدل شبکه	۳.۴.۳
۵۴	پیشنهادی	
۵۸	پایداری و همگرایی روش	۵.۳
۶۲	نتایج عددی	۶.۳
	شبکه عصبی پیوندی تابعی مونتس-لژاندر برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری	۴
۷۵	مقدمه	
۷۵	مقدمه	۱.۴
۷۶	شبکه عصبی پیوندی تابعی	۲.۴
۷۷	شبکه عصبی مونتس-لژاندر	۳.۴
۷۸	مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری با قيود مساوی و نامساوی	۴.۴
۸۰	تقریب توابع در شرایط لازم بهینگی	۵.۴
۸۳	الگوریتم آموزش در شبکه عصبی مونتس-لژاندر	۶.۴
۸۵	نتایج عددی	۷.۴

۵	حل مسائل کنترل بهینه کسری با هسته غیرتکین با استفاده از شبکه عصبی نمائی	۹۹
۱.۵	مقدمه	۹۹
۲.۵	مدل بندی ریاضی مسأله	۱۰۰
۳.۵	حل عددی سیستم بهینگی با استفاده از شبکه عصبی نمائی	۱۰۰
۴.۵	نتایج عددی	۱۰۳
۶	حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه تاخیری از مرتبه کسری با هسته غیرمحلّی و غیرتکین با استفاده از شبکه عصبی چبیشف کسری	۱۱۱
۱.۶	مقدمه	۱۱۱
۲.۶	معرفی مسأله	۱۱۲
۳.۶	شبکه عصبی چبیشف کسری	۱۱۴
۴.۶	بهینگی و گسسته‌سازی	۱۱۵
۵.۶	مثال‌های عددی	۱۱۷
۱۲۹	مراجع	

فهرست تصاویر

۳۱	ساختر یک نرون.	۱.۲
۳۲	مدل ریاضی یک نرون.	۲.۲
۳۳	تابع پله‌ای	۳.۲
۳۴	تابع پله‌ای دوقطبی	۴.۲
۳۴	تابع سیگموئید	۵.۲
۳۴	تابع سیگموئید قطبی	۶.۲
۳۹	ساختر یک نرون با لایه ورودی، لایه پنهان و لایه خروجی	۷.۲
۴۰	پایداری لیاپانف.	۸.۲
۴۱	پایداری مجانبی سراسری.	۹.۲
۵۲	شبکه عصبی پرسپترون پیشنهادی	۱.۳
۵۳	شبکه عصبی با تابع سیگموئید	۲.۳
۶۵	جواب‌های تقریبی $x(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۱.۶.۳	۳.۳
۶۵	جواب‌های تقریبی $u(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۱.۶.۳	۴.۳
۶۸	جواب‌های تقریبی و دقیق $u(t)$ برای $\alpha = 1$ در مثال ۲.۶.۳	۵.۳
۶۸	جواب‌های تقریبی $x(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.7$ در مثال ۲.۶.۳	۶.۳
۶۹	جواب‌های تقریبی $u(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.7$ در مثال ۲.۶.۳	۷.۳
۷۱	جواب‌های تقریبی $x(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۳.۶.۳	۸.۳
۷۱	جواب‌های تقریبی $u(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۳.۶.۳	۹.۳
۷۳	جواب‌های تقریبی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۴.۶.۳	۱۰.۳
۷۴	جواب‌های تقریبی $u(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۴.۶.۳	۱۱.۳
۷۷	شبکه عصبی مونتنس-لژاندر	۱.۴
۸۴	دیاگرام الگوریتم آموزش شبکه عصبی مونتنس-لژاندر	۲.۴
		توابع دقیق و تقریبی کنترل $u(t)$ سمت چپ و خطای مطلق سمت راست	۳.۴
۸۷	برای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۷.۴	

۴.۴	مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای
۸۷ در مثال $\alpha = 1, 0/9, 0/8$ ۱.۷.۴
۵.۴	مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای
۸۸ در مثال $\alpha = 1, 0/95, 0/9$ ۲.۷.۴
۶.۴	مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای
۹۰ در مثال $\alpha = 1, 0/95, 0/9$ با قیود تساوی و نامساوی ۲.۷.۴
۹۲	مسیرهای بهینه از $x(t) + u(t)$ برای $\alpha = 1, 0/99, 0/98$ در مثال ۳.۷.۴
۸.۴	مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای
۹۳ در مثال $\alpha = 1, 0/95, 0/9$ ۴.۷.۴
۹.۴	مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای
۹۴ در مثال $\alpha = 1, 0/9, 0/8$ ۵.۷.۴
۱۰.۴	مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای
۹۵ در مثال $\alpha = 1, 0/9, 0/8$ ۶.۷.۴
۱۱.۴	مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای
۹۷ در مثال $\alpha = 1, 0/95, 0/9, 0/8$ ۷.۷.۴
۱.۵	شبکه عصبی نمائی متناظر با سیستم دینامیکی (۲.۵)
۲.۵	مسیرهای دقیق و تقریبی متغیر وضعیت $x(t)$ سمت چپ و خطای مطلق
۱۰۴ سمت راست برای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۴.۵
۳.۵	توابع دقیق و تقریبی کنترل $u(t)$ سمت چپ و خطای مطلق سمت راست
۱۰۵ برای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۴.۵
۴.۵	مسیرهای بهینه وضعیت $x(t)$ برای $\alpha = 1, 0/95, 0/85, 0/75$ در مثال ۱.۴.۵
۱۰۵
۵.۵	توابع بهینه کنترل $u(t)$ برای $\alpha = 1, 0/95, 0/85, 0/75$ در مثال ۱.۴.۵
۶.۵	مسیرهای بهینه متغیر وضعیت $x(t)$ برای $\alpha = 1, 0/9, 0/8$ در مثال ۲.۴.۵
۷.۵	توابع کنترل بهینه $u(t)$ برای $\alpha = 1, 0/9, 0/8$ در مثال ۲.۴.۵
۸.۵	مسیرهای وضعیت $x(t)$ برای مقادیر مختلف α سمت چپ و خطای مطلق
۱۰۸ کنترل برای $\alpha = 1$ سمت راست در مثال ۳.۴.۵
۹.۵	توابع کنترل $u(t)$ برای مقادیر مختلف α سمت چپ و خطای مطلق کنترل
۱۰۹ برای $\alpha = 1$ سمت راست در مثال ۳.۴.۵
۱.۶	شبکه عصبی چیشف کسری
۲.۶	مسیرهای وضعیت $x_1(t)$ سمت چپ و $x_2(t)$ سمت راست برای $\alpha = 1, 0/9, 0/7, 0/5$
۱۱۸ در مثال ۱.۵.۶
۱۱۸	توابع کنترل بهینه $u(t)$ برای $\alpha = 1, 0/9, 0/7, 0/5$ در مثال ۱.۵.۶

۱۲۰	۲.۵.۶	در مثال $\alpha = ۱, ۰/۹۹, ۰/۹۵$ برای $x(t)$ وضعیت مسیره‌های وضعیت	۴.۶
۱۲۰	۲.۵.۶	در مثال $\alpha = ۱, ۰/۹۹, ۰/۹۵$ برای $u(t)$ بهینه توابع کنترل	۵.۶
			مسیره‌های وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای	۶.۶
۱۲۱	۳.۵.۶	در مثال $\alpha = ۱, ۰/۹۵, ۰/۸۵, ۰/۷۵$	
			توابع دقیق و تقریبی کنترل $u(t)$ سمت چپ و خطای مطلق سمت راست	۷.۶
۱۲۲	۴.۵.۶	در مثال $n = ۶$ و $\alpha = ۱$ برای	
			توابع دقیق و تقریبی کنترل $u(t)$ سمت چپ و خطای مطلق سمت راست	۸.۶
۱۲۳	۴.۵.۶	در مثال $n = ۹$ و $\alpha = ۱$ برای	
			خطای مطلق متغیر وضعیت $x(t)$ به ازای $\alpha = ۱$ برای شبکه چبیشف کسری	۹.۶
۱۲۴	۵.۵.۶	در مثال سمت راست	
			سمت چپ و شبکه مونتنس-لژاندر	۱۰.۶
			خطای مطلق تابع کنترل $u(t)$ به ازای $\alpha = ۱$ برای شبکه چبیشف کسری	
۱۲۵	۵.۵.۶	در مثال سمت راست	
			سمت چپ و شبکه مونتنس-لژاندر	۱۱.۶
			مسیره‌های وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای	
۱۲۵	۵.۵.۶	در مثال α مختلف	

فهرست جداول

۶۴	نتایج تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۶.۳	۱.۳
۶۵	مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۱.۶.۳	۲.۳
۶۶	مقادیر تابع خطا $E(\tilde{y})$ برای $\alpha = 1, 0/9, 0/8$ در مثال ۱.۶.۳	۳.۳
۶۷	نتایج تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۲.۶.۳	۴.۳
۶۷	مقادیر دقیق و تقریبی تابع هدف در مثال ۲.۶.۳	۵.۳
۶۷	مقادیر تابع خطا $E(\tilde{y})$ برای $\alpha = 1, 0/9, 0/7$ در مثال ۲.۶.۳	۶.۳
۷۱	مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۳.۶.۳	۷.۳
۷۲	مقادیر تابع خطا $E(\tilde{y})$ برای $\alpha = 1, 0/9, 0/8$ در مثال ۳.۶.۳	۸.۳
۷۳	مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۴.۶.۳	۹.۳
۷۴	مقادیر تابع خطا $E(\tilde{y})$ برای $\alpha = 1, 0/9, 0/8$ در مثال ۴.۶.۳	۱۰.۳
۸۶	مقادیر دقیق و تقریبی تابع هدف در مثال ۱.۷.۴	۱.۴
۸۶	تابع خطای $E(P)$ به ازای مقادیر مختلف α در مثال ۱.۷.۴	۲.۴
۸۹	مقادیر تقریبی تابع هدف برای $\alpha = 1$ در مثال ۲.۷.۴	۳.۴
۸۹	تابع خطای $E(P)$ به ازای مقادیر مختلف α در مثال ۲.۷.۴	۴.۴
۹۱	مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۳.۷.۴	۵.۴
۹۱	مقادیر تابع خطای $E(P)$ در مثال ۳.۷.۴	۶.۴
۹۲	مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۴.۷.۴	۷.۴
۹۳	مقادیر تابع خطای $E(P)$ در مثال ۴.۷.۴	۸.۴
۹۴	مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۵.۷.۴	۹.۴
۹۴	مقادیر تابع خطای $E(P)$ در مثال ۵.۷.۴	۱۰.۴
۹۵	مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۶.۷.۴	۱۱.۴
۹۶	مقادیر تابع خطای $E(P)$ در مثال ۶.۷.۴	۱۲.۴
۹۶	مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۷.۷.۴	۱۳.۴
۹۶	مقادیر تابع خطای $E(P)$ در مثال ۷.۷.۴	۱۴.۴
۱۰۶	مقدار تابع هدف J برای مقادیر مختلف α در مثال ۱.۴.۵	۱.۵

۱۰۷	مقدار تابع هدف J برای مقادیر مختلف α در مثال ۲.۴.۵	۲.۵
۱۱۸	مقدار تابع هدف J و زمان اجرا برای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۵.۶	۱.۶
۱۱۹	تابع خطای $E(P)$ به ازای مقادیر مختلف α در مثال ۱.۵.۶	۲.۶
۱۱۹	مقدار تابع هدف J و زمان اجرا برای $\alpha = 1$ در مثال ۲.۵.۶	۳.۶
۱۲۰	تابع خطای $E(P)$ به ازای مقادیر مختلف α در مثال ۲.۵.۶	۴.۶
۱۲۱	مقدار تابع هدف J و زمان اجرا برای $\alpha = 1$ در مثال ۳.۵.۶	۵.۶
۱۲۲	تابع خطای $E(P)$ به ازای مقادیر مختلف α در مثال ۳.۵.۶	۶.۶
۱۲۳	نتایج دقیق و تقریبی $u(t)$ برای $n = 9$ و $\alpha = 1$ در مثال ۴.۵.۶	۷.۶

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ مقدمه

ایده حسابان کسری از همان زمان حسابان معمولی به وجود آمده و بیشترین نظریه‌های مربوط به آن تا قبل از قرن بیستم گسترش یافته است. ریشه حسابان کسری به قرن ۱۷ و به بحث‌های هوییتال^۱ و لایب نیتس^۲ برای معرفی نمادی برای مشتق به صورت $\frac{dx}{dt}$ باز می‌گردد. از این رو بسیاری از دانشمندان تاریخ تولد حسابان کسری را ۳۰ سپتامبر ۱۶۶۹ مصادف با اولین نامه لایب نیتس به هوییتال در نظر می‌گیرند. ریاضیدانان مختلف، تلاش‌های بسیاری برای بسط و تعمیم این مفهوم جدید در ریاضیات انجام دادند اما کاربردها و تفسیر این مفهوم جدید تا سال‌ها ناشناخته باقی مانده بود. برای مطالعه جامع‌تری از تاریخ حسابان کسری به [۲] مراجعه کنید.

۲.۱ توابع پرکاربرد در حسابان کسری

در این بخش به طور خلاصه به معرفی بعضی از مهم‌ترین توابع پرکاربرد در حسابان کسری می‌پردازیم. برای مطالعه بیشتر در این زمینه می‌توانید به [۳] رجوع کنید.

^۱Hopital

^۲Leibniz

تابع گاما

تابع گاما مفهوم $n!$ (n فاکتوریل) را برای هر عدد دلخواه n حتی اگر n مختلط باشد بیان می‌کند. تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad \mathcal{R}(\alpha) > 0,$$

که $\mathcal{R}(\alpha)$ قسمت حقیقی α است. برخی از خواص تابع گاما عبارتند از

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\} \quad (1)$$

زیرا با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-t} t^{\alpha} \Big|_0^b \right) + \alpha \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt = \alpha \Gamma(\alpha).$$

به روشنی نتیجه می‌گیریم که $\Gamma(n+1) = n!$.

از این رو می‌توان تابع گاما را تعمیم مفهوم فاکتوریل در نظر گرفت.

(۲) با استفاده از خاصیت اول به راحتی می‌توان نشان داد

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + m)}{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + m - 1)},$$

$$-m < \mathcal{R}(\alpha) < -m + 1, \quad m \in \mathbb{Z}^+, \quad \alpha \neq \{0, -1, -2, \dots\}.$$

(۳) تعریف حدی تابع گاما به صورت زیر است [۴]

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{\alpha}}{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n)}, \quad \mathcal{R}(\alpha) > 0.$$

تابع بتا

در بعضی موارد بهتر است از تابع بتا به جای ترکیب مشخصی از توابع گاما استفاده کرد. تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (\mathcal{R}(x) > 0, \mathcal{R}(y) > 0).$$

لم ۱.۲.۱. [۴] رابطه بین تابع بتا و تابع گاما به صورت زیر است

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y \in \mathbb{C}.$$

تابع میتاگ- لفلر

تابع میتاگ- لفلر^۳ اهمیت و کاربرد فراوانی در حسابان کسری دارد. این تابع به دو نوع تابع تک پارامتری و دو پارامتری به صورت زیر تقسیم می‌شود

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

تابع نمایی e^z که نقش مهمی را در نظریه معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح دارد، با استفاده از تابع میتاگ- لفلر تک پارامتری به صورت زیر نوشته می‌شود

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

تابع $E_{\alpha}(z)$ برای هر $z \in \mathbb{C}$ همگرا است. تابع میتاگ- لفلر دو پارامتری اهمیت بسیار زیادی در حسابان کسری دارد که برخی از حالت‌های خاص آن در زیر بیان شده است

$$E_0(z) = \frac{1}{1-z}, \quad E_{\gamma, 1}(-z^{\gamma}) = \cos(z), \quad E_{1, \gamma}(z) = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{\gamma, 1}(z^{\gamma}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\gamma k}}{\Gamma(\gamma k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\gamma k}}{(\gamma k)!} = \cosh(z).$$

۳.۱ انواع مشتق و انتگرال مرتبه کسری

تعاریف مختلفی برای مشتق و انتگرال مرتبه کسری موجود است که در این جا به بعضی از مهم‌ترین تعاریف مشتق و انتگرال مرتبه کسری می‌پردازیم. تعاریف و قضیه‌های بیشتر را می‌توانید در [۳] مشاهده کنید.

۱.۳.۱ مشتق و انتگرال ریمن- لیوویل

فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ و تابع پیوسته $f(\tau)$ در هر بازه متناهی (a, t) انتگرال پذیر باشد. طبق فرمول کوشی برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، انتگرال مرتبه n تابع $f(t)$ برابر است با

$${}_a I_t^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.1)$$

با الهام گرفتن از فرمول کوشی، انتگرال‌های کسری ریمن- لیوویل ${}_a^R I_t^{\alpha} f$ و ${}_t^R I_b^{\alpha} f$ از مرتبه دلخواه $\alpha \in \mathbb{C}$ که $\Re(\alpha) > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} {}_a^R I_t^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > a), \\ {}_t^R I_b^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t < b). \end{aligned} \quad (2.1)$$

این انتگرال‌ها به ترتیب انتگرال‌های چپ و راست ریمن- لیوویل نامیده می‌شوند [۳].

³Mittag-Leffler function

تعریف ۱.۳.۱. فضای $AC^n(\Omega)$ عبارت است از مجموعه تمام توابعی مانند f که روی بازه Ω تا مرتبه $(n-1)$ ام، مشتقات پیوسته دارند و مشتق $(n-1)$ ام آنها مطلقاً پیوسته است. به عبارت دیگر تابع $g \in L_1[0, 1]$ موجود است به طوری که

$$f^{n-1}(t) = f^{(n-1)}(0) + \int_0^t g(\tau) d\tau.$$

فرض کنید $n-1 \leq \alpha < n$ و $f \in AC^n([a, b])$ که $n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$. علامت $[\mathcal{R}(\alpha)]$ قسمت صحیح $\mathcal{R}(\alpha)$ تعریف می شود. مشتقات کسری چپ و راست ریمن-لیوویل ${}_a^R D_t^\alpha f$ و ${}_t^R D_b^\alpha f$ از مرتبه α که $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$ به صورت زیر تعریف می شوند

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n ({}_a^R I_t^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1, t > a), \\ {}_t^R D_b^\alpha f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n ({}_t^R I_b^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1, t < b). \end{aligned} \quad (3.1)$$

در حالت خاص، وقتی $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ ، آن گاه

$$\begin{aligned} ({}_a^R D_t^\alpha f)(t) &= ({}_t^R D_b^\alpha f)(t) = f(t), \\ ({}_a^R D_t^n f)(t) &= f^{(n)}(t), \quad ({}_t^R D_b^\alpha f)(t) = (-1)^n f^{(n)}(t). \end{aligned}$$

خواص مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل

در این قسمت به برخی از مهم ترین ویژگی های مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل می پردازیم. اثبات و جزئیات بیشتر را می توان در [۳، ۴] مشاهده کرد.

(۱) مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل عملگر خطی هستند. یعنی برای تمام توابع $f(t)$ و $g(t)$ و تمام اسکالرهای حقیقی c_1 و c_2 داریم

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha (c_1 f(t) + c_2 g(t)) &= c_1 {}_a^R D_t^\alpha f(t) + c_2 {}_a^R D_t^\alpha g(t), \\ {}_t^R I_b^\alpha (c_1 f(t) + c_2 g(t)) &= c_1 {}_t^R I_b^\alpha f(t) + c_2 {}_t^R I_b^\alpha g(t). \end{aligned}$$

(۲) اگر $\beta \in \mathbb{C}$ که $\mathcal{R}(\beta) > [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$ داریم

$$\begin{aligned} ({}_a^R I_t^\alpha (t-a)^{\beta-1}) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) > 0), \\ ({}_t^R I_b^\alpha (b-t)^{\beta-1}) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-t)^{\beta+\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) > 0), \end{aligned} \quad (4.1)$$

و

$$\begin{aligned} ({}_a^R D_t^\alpha (t-a)^{\beta-1}) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) \geq 0), \\ ({}_t^R D_b^\alpha (b-t)^{\beta-1}) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta+\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) \geq 0). \end{aligned} \quad (5.1)$$

انواع مشتق و انتگرال مرتبه کسری ۵

در حالت خاص اگر $\beta = 1$ و $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$ ، آن گاه در حالت کلی مشتق کسری ریمن-لیوویل یک تابع ثابت صفر نیست. یعنی

$$({}^R D_t^\alpha 1)(t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad ({}^R D_b^\alpha 1)(t) = \frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

(۳) اگر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ آن گاه عملگر انتگرال کسری خواص جمع پذیری و جابجایی پذیری دارد. یعنی

$$\begin{aligned} {}^R I_a^\alpha {}^R I_a^\beta f(t) &= {}^R I_a^\beta {}^R I_a^\alpha f(t) = {}^R I_a^{\alpha+\beta} f(t), \\ {}^R I_b^\alpha {}^R I_b^\beta f(t) &= {}^R I_b^\beta {}^R I_b^\alpha f(t) = {}^R I_b^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

(۴) برای مشتق کسری ریمن-لیوویل رابطه زیر برقرار است

$${}^R D_t^\alpha ({}^R D_t^\beta f(t)) = {}^R D_t^\beta ({}^R D_t^\alpha f(t)) + \sum_{k=0}^{\beta-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha-\beta+k}}{\Gamma(-\alpha-\beta+k+1)},$$

این رابطه بیان می کند که مشتق کسری جابه جایی پذیر است یعنی

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\alpha ({}^R D_t^\beta f(t)) &= {}^R D_t^\beta ({}^R D_t^\alpha f(t)), \\ {}^R D_t^\alpha ({}^R D_t^\beta f(t)) &= {}^R D_t^{\alpha+\beta} f(t), \end{aligned} \quad (۶.۱)$$

اگر و فقط اگر

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, r-1, \quad r = \max\{[\alpha] + 1, [\beta] + 1\}). \quad (۷.۱)$$

(۵) اگر $\alpha > 0$ و $f(t) \in L^p(a, b)$ که $(1 \leq p \leq \infty)$ است، آن گاه

$${}^R D_t^\alpha ({}^R I_t^\alpha f(t)) = f(t), \quad {}^R D_b^\alpha ({}^R I_b^\alpha f(t)) = f(t).$$

یعنی عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ معکوس چپ برای عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل از همان مرتبه است.

(۶) عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل معکوس راست عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل نیست. یعنی

$$\begin{aligned} {}^R I_t^\alpha ({}^R D_t^\alpha f(t)) &= f(t) - \sum_{j=1}^n [{}^R D_t^{\alpha-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}, \\ {}^R I_b^\alpha ({}^R D_b^\alpha f(t)) &= f(t) - \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} [{}^R D_b^{\alpha-j} f(t)]_{t=b} \frac{(b-t)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}. \end{aligned}$$

۲.۳.۱ مشتق و انتگرال لیوویل

در این قسمت مشتق و انتگرال کسری لیوویل^۴ روی \mathbb{R}^+ بررسی می شود. برای جزئیات بیشتر در این مورد می توانید به [۳] مراجعه کنید. مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل روی بازه

⁴Liouville

متناهی $[a, b]$ تعریف می‌شوند که قابل تعمیم به بازه \mathbb{R}^+ هستند. انتگرال‌های کسری لیوویل متناظر با (۲.۱) در بازه \mathbb{R}^+ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned}
 {}_0^L I_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > 0, \mathcal{R}(\alpha) > 0), \\
 {}_t^L I_\infty^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > 0, \mathcal{R}(\alpha) > 0).
 \end{aligned}$$

مشتقات کسری لیوویل متناظر با (۳.۱) به ازای $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$ عبارت است از

$$\begin{aligned}
 ({}^L D_t^\alpha f)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n ({}^L I_t^{n-\alpha} f)(t) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1; t > 0), \\
 ({}^L D_\infty^\alpha f)(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n ({}^L I_\infty^{n-\alpha} f)(t) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^\infty (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1; t > 0).
 \end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان مشتق و انتگرال لیوویل را روی محور حقیقی \mathbb{R} تعریف کرد. برای جزئیات بیشتر [۳] را ببینید.

۳.۳.۱ مشتق کسری کاپاتو

ایده تعریف مشتق کاپاتو بسیار مشابه با همان ایده‌ای است که در تعریف مشتق ریمن-لیوویل به کار گرفته شد. در این تعریف مانند تعریف ریمن-لیوویل، مشتق بر اساس مفهوم انتگرال مرتبه کسری توسعه پیدا می‌کند. تفاوت این دو تعریف در واقع در ترتیب عملگرهای مشتق مرتبه صحیح و عملگر انتگرال مرتبه کسری است. در مشتق کسری کاپاتو برعکس مشتق کسری ریمن-لیوویل ابتدا مشتق مرتبه صحیح از تابع گرفته شده و سپس انتگرال گیری مرتبه کسری انجام می‌شود. به بیان ریاضی اگر $\alpha \in \mathbb{R}^+$ و $n = [\alpha] + 1$ مشتق کسری کاپاتو از مرتبه α به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R I_t^{n-\alpha} \{f^{(n)}(t)\}.$$

بنابراین مشتق کسری چپ و راست کاپاتو به ترتیب عبارت است از

$$\begin{aligned}
 {}_a^C D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \\
 {}_t^C D_b^\alpha f(t) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau,
 \end{aligned}$$

که $f \in AC^n[a, b]$.

خواص مشتق کسری کاپوتو

در این قسمت برخی از مهم‌ترین ویژگی‌های مشتق کسری کاپوتو را بیان می‌کنیم.

(۱) بر خلاف مشتق کسری ریمن-لیوویل مشتق کسری کاپوتو از تابع ثابت، صفر است.

(۲) اگر $\mathcal{R}(\alpha) > 0$ و $\beta \in \mathbb{C}$ و $n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$ ، داریم

$$({}^C D_t^\alpha (t-a)^{\beta-1}) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\beta) > n), \quad (۸.۱)$$

$$({}^C D_b^\alpha (b-t)^{\beta-1}) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\beta) > n). \quad (۹.۱)$$

(۳) مشتق کسری کاپوتو جابه‌جایی پذیر است، یعنی

$${}^C D_t^m {}^C D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha {}^C D_t^m f(t) = {}^C D_t^{m+\alpha} f(t), \quad n-1 < \alpha < n,$$

اگر و فقط اگر

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = n, n+1, \dots, m).$$

(۴) اگر $\alpha > 0$ و $f(t) \in L^p(a, b)$ که $(1 \leq p \leq \infty)$ است، عملگر مشتق کسری کاپوتو، معکوس چپ برای عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل از همان مرتبه است. یعنی

$${}^C D_t^\alpha ({}^R I_t^\alpha f(t)) = f(t), \quad {}^C D_b^\alpha ({}^R I_b^\alpha f(t)) = f(t).$$

(۵) عملگر مشتق کسری کاپوتو، معکوس راست عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل نیست، یعنی

$${}^R I_t^\alpha ({}^C D_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \quad (۱۰.۱)$$

$${}^R I_b^\alpha ({}^C D_b^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k. \quad (۱۱.۱)$$

لم ۱.۳.۱. [۲] اگر $f \in C^n[a, b]$ و $n-1 < \alpha < n$ ، آن‌گاه رابطه زیر بین مشتقات کسری ریمن-لیوویل و کاپوتو برقرار است

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha f(t) &= {}^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{k-\alpha+1} (t-a)^{k-\alpha}, \\ {}^C D_b^\alpha f(t) &= {}^R D_b^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b^-)}{k-\alpha+1} (b-t)^{k-\alpha}. \end{aligned} \quad (۱۲.۱)$$

۴.۳.۱ مشتق و انتگرال جوماری

همان طور که در قسمت‌های قبل بیان شد، مشتق کسری ریمن-لیوویل از عدد ثابت صفر نیست. همچنین بایستی توجه داشته باشیم که مشتق کسری کاپوتو از یک تابع زمانی قابل محاسبه است که مشتقات صحیح آن موجود باشند. برای این منظور جوماری^۵ [۵] تعریف

⁵Jumarie

جدیدی از مشتق کسری ارائه داد که مشتق کسری از عدد ثابت صفر شود و لزومی به وجود مشتقات مرتبه صحیح برای مشتق کسری نباشد. انتگرال جوماری به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a^J I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (f(\tau) - f(a)) d\tau, \quad \alpha > 0.$$

به ازای $0 < \alpha < 1$ مشتق کسری جوماری به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a^J D_t^\alpha f(t) = D {}_a^J I_t^{\alpha-1} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (f(\tau) - f(a)) d\tau.$$

برای $n-1 < \alpha < n$ و $n \geq 1$ مشتق کسری جوماری به صورت زیر محاسبه می‌شود

$${}_a^J D_t^\alpha f(t) = D^{(n)} {}_a^J I_t^{\alpha-n} f(t).$$

با توجه به تعریف بالا، مشتق کسری جوماری از تابع ثابت، صفر است و برای محاسبه مشتق کسری جوماری به ازای $0 < \alpha < 1$ ، لزومی به وجود مشتق مرتبه اول تابع f نیست. تبدیل لاپلاس از مشتق جوماری به صورت زیر است

$$\mathcal{L} [{}_a^J D_t^\alpha f(t)](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)](s) - s^{\alpha-1} f(0), \quad 0 < \alpha < 1.$$

جوماری بسط تیلور یک تابع برحسب مشتق کسری جدید خود را با لم زیر بیان کرد.

لم ۲.۳.۱. [۵] فرض کنید تابع پیوسته $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتقات کسری از مرتبه $k\alpha$ برای مقدار مثبت k و مقدار دلخواه $\alpha, 0 < \alpha < 1$ باشد، آن‌گاه رابطه زیر برقرار است

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{\alpha k}}{\Gamma(1+\alpha k)} {}_a^J D_t^{\alpha k} f(x). \quad (13.1)$$

۵.۳.۱ مشتق و انتگرال کسری گرانوالد-لتنیف

فرض کنید f تابعی پیوسته باشد. در این صورت مشتق مرتبه اول تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}.$$

با به‌کارگیری تعریف بالا، مشتق مرتبه دوم به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}.$$

در حالت کلی برای مشتق مرتبه صحیح و مثبت n ، رابطه زیر را داریم

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh), \quad n \in \mathbb{N}.$$

بنابراین می‌توان مشتق کسری مرتبه α ام را به صورت زیر تعمیم داد

$${}^G D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh), \quad \alpha > 0, \quad (14.1)$$

که $a \leq t \leq b$ ، $nh = t - a$ و $[\alpha] = n + 1$. می‌توان با جا به جایی $-\alpha$ و α در رابطه (۱۴.۱)، انتگرال کسری گرانوالد-لتنیکف از مرتبه α را تعریف کرد. یعنی با فرض $nh = t - a$ داریم

$$\begin{aligned} {}^G I_t^\alpha f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-\alpha}{k} f(t - kh), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k + \alpha)}{\Gamma(k + 1)} f(t - kh), \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

قضیه ۱.۳.۱. [۶] فرض کنید تابع $f(t)$ دارای مشتقات مرتبه اول تا مرتبه $n - 1$ پیوسته بوده و $f^{(n)}(t)$ انتگرال پذیر باشد. همچنین فرض کنید $n - 1 < \alpha < n$ ، $n \in \mathbb{N}$. در این صورت مشتق مرتبه α با تعریف گرانوالد-لتنیکف تابع $f(t)$ با مشتق مرتبه α ریمن-لیوویل این تابع برابر خواهد بود، یعنی

$${}^G D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^\alpha f(t).$$

با فرض برقراری شرایط مطرح شده در قضیه ۱.۳.۱ تعاریف گرانوالد-لتنیکف و ریمن-لیوویل معادل بوده و بنابراین خواص مشتق مرتبه کسری ریمن-لیوویل برای مرتبه کسری گرانوالد-لتنیکف نیز برقرار است. با توجه به ماهیت تعریف مشتق کسری گرانوالد-لتنیکف، از این تعریف در روش‌های عددی محاسبه مشتقات مرتبه کسری و همچنین گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری استفاده فراوانی می‌شود. همچنین برای تقریب مشتق کسری (۱۴.۱) در روش‌های عددی، از این تعریف با مجموع متناهی استفاده می‌شود.

۶.۳.۱ مشتق و انتگرال کاپوتو-فابریسیو

تعریفی که کاپوتو از مشتق کسری ارائه داد، به صورت زیر است

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha} \dot{f}(\tau) d\tau.$$

این تعریف دارای یک نقطه تکینی در $t = \tau$ است. برای رفع این مشکل کاپوتو و فابریسیو^۶ تعریفی جدید به صورت زیر ارائه دادند [۷]

$${}^C F D_t^\alpha f(t) = \frac{\Upsilon - \alpha}{\Upsilon(1 - \alpha)} \int_a^t \exp\left(-\frac{\alpha}{\Upsilon - \alpha}(t - \tau)\right) \dot{f}(\tau) d\tau, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (15.1)$$

که $M(\alpha)$ ثابت نرمال شده برحسب α است که در [۷] به صورت $M(\alpha) = \frac{\Upsilon}{\Upsilon - \alpha}$ در نظر گرفته شده است. طبق تعریف جدید واضح است که اگر f تابعی ثابت باشد، آن‌گاه مشابه تعریف

^۶Caputo and Fabrizioo

مشتق کاپوتو ${}_a^{CF}D_t^\alpha f = 0$. تفاوت اصلی بین مشتق جدید و مشتق کاپوتو آن است که مشتق جدید در نقطه $t = \tau$ دارای نقطه تکینی نیست. مشتق راست کاپاتو-فابریسیو به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_t^{CF}D_T^\alpha f(t) = -\frac{\Upsilon(1-\alpha)M(\alpha)}{\Upsilon(1-\alpha)} \int_t^T \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(\tau-t)\right) f'(\tau) d\tau, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (16.1)$$

انتگرال‌های چپ و راست کاپاتو-فابریسیو متناظر نیز به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\begin{aligned} {}_a^{CF}I_t^\alpha f(t) &= \frac{\Upsilon(1-\alpha)}{\Upsilon(1-\alpha)M(\alpha)} f(t) + \frac{\Upsilon\alpha}{\Upsilon(1-\alpha)M(\alpha)} \int_a^t f(\tau) d\tau, \\ {}_t^{CF}I_T^\alpha f(t) &= \frac{\Upsilon(1-\alpha)}{\Upsilon(1-\alpha)M(\alpha)} f(t) + \frac{\Upsilon\alpha}{\Upsilon(1-\alpha)M(\alpha)} \int_t^T f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (17.1)$$

ارتباط بین مشتق‌های کاپاتو-فابریسیو و انتگرال‌های متناظر به صورت زیر است

$$\begin{aligned} {}_a^{CF}I_a^\alpha {}_a^{CF}D_t^\alpha f(t) &= f(t) - f(a), \\ {}_t^{CF}I_T^\alpha {}_t^{CF}D_T^\alpha f(t) &= f(t) - f(T). \end{aligned}$$

برای مطالعه بیشتر در مورد کاربردها و قضایای مربوط در این زمینه می‌توانید [۷] را مشاهده نمایید.

۷.۳.۱ مشتق و انتگرال آتانگانا-بالیانو

بعد از تعریف کاپاتو-فابریسیو، آتانگانا و بالیانو^۷ از تابع میتاگ-لفلر به عنوان یک هسته غیرتکین و غیرمحلی استفاده کردند [۸]. تعاریفی که آن‌ها برای مشتق کسری چپ و راست در مفهوم کاپاتو ارائه دادند به صورت زیر است

$$\begin{aligned} {}_a^{ABC}D_t^\alpha f(t) &= \frac{B(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_a^t \frac{df(\tau)}{d\tau} E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha} \right] d\tau, \\ {}_t^{ABC}D_b^\alpha f(t) &= -\frac{B(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_t^b \frac{df(\tau)}{d\tau} E_\alpha \left[-\alpha \frac{(\tau-t)^\alpha}{1-\alpha} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (18.1)$$

که در آن $B(\alpha)$ ثابت نرمال شده است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$B(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)},$$

و $E_\alpha(\cdot)$ تابع میتاگ-لفلر است و داریم

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

⁷Atangana and Baleanu

تعاریف مشتق کسری چپ و راست آتانگانا-بالیانو (AB) در مفهوم ریمن-لیوویل نیز به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} {}_a^{ABR}D_t^\alpha f(t) &= \frac{B(\alpha)}{(\Gamma-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-\tau)^\alpha}{\Gamma-\alpha} \right] d\tau, \\ {}_t^{ABR}D_b^\alpha f(t) &= -\frac{B(\alpha)}{(\Gamma-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b f(\tau) E_\alpha \left[-\alpha \frac{(\tau-t)^\alpha}{\Gamma-\alpha} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (19.1)$$

انتگرال کسری متناظر با تعریف مشتق کسری (AB) به صورت زیر است

$$\begin{aligned} {}_a^{AB}I_t^\alpha f(t) &= \frac{\Gamma-\alpha}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \\ {}_t^{AB}I_b^\alpha f(t) &= \frac{\Gamma-\alpha}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(\tau) (\tau-t)^{\alpha-1} d\tau, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \end{aligned} \quad (20.1)$$

که برای $\alpha = 0$ انتگرال کسری همان تابع اولیه $f(t)$ است و برای $\alpha = 1$ انتگرال به صورت انتگرال کلاسیک مرتبه یک ظاهر می‌شود.

ارتباط بین مشتق‌های کسری (AB) در مفهوم کاپاتو و ریمن-لیوویل و انتگرال‌های کسری متناظر با آن‌ها به صورت زیر است

$${}_a^{AB}I_t^\alpha \{ {}_a^{ABR}D_t^\alpha f(t) \} = {}_t^{AB}I_b^\alpha \{ {}_t^{ABR}D_b^\alpha f(t) \} = f(t), \quad (21.1)$$

$${}_a^{AB}I_t^\alpha \{ {}_a^{ABC}D_t^\alpha f(t) \} = f(t) - f(a), \quad (22.1)$$

$${}_t^{AB}I_b^\alpha \{ {}_t^{ABC}D_b^\alpha f(t) \} = f(t) - f(b). \quad (23.1)$$

برای توضیحات بیشتر در زمینه حسابان کسری جدید با هسته میتاگ-لفلر [۸] را ببینید.

۸.۳.۱ مشتق کسری همدیس پذیر

در تعریف مشتق کسری همدیس پذیر^۸ از مشتق کسری به صورت حدی تعریف می‌شود و به دلیل سادگی و سازگاری با بعضی مدل‌ها در فیزیک و مهندسی کاربردهای فراوانی پیدا کرده است.

مشتق کسری همدیس پذیر برای تابع $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ و به ازای $0 < \alpha \leq 1$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۹]

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}. \quad (24.1)$$

اگر حد فوق موجود باشد، آن‌گاه تابع f مشتق‌پذیر است و بالعکس. نکته مهم در مورد مشتق همدیس پذیر آن است که به ازای $\alpha = 1$ با تعریف کلاسیک مشتق صحیح برابر است. با توجه به تعریف (۲۴.۱)، لازم به ذکر است که این مشتق کسری، خاصیت

^۸Conformable fractional derivative

حافظه را دارا نیست زیرا به صورت انتگرال تعریف نمی‌شود. برای مشتق همدیس پذیر ویژگی‌های زیر برقرار است [۹]

$$T_\alpha(\lambda f + \gamma g) = \lambda T_\alpha(f) + \gamma T_\alpha(g), \quad \forall \lambda, \gamma \in \mathbb{R} \quad (۱)$$

$$T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}, \quad \forall p \in \mathbb{R} \quad (۲)$$

$$T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f) \quad (۳)$$

$$T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{fT_\alpha(g) - gT_\alpha(f)}{g^2} \quad (۴)$$

$$T_\alpha(f) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t) \quad (۵)$$

نکته مهم دیگر در مورد مشتق همدیس پذیر آن است که برخلاف مشتق‌های کسری دیگر، قاعده زنجیره‌ای برای این مشتق برقرار است. لازم به ذکر است که مشتق همدیس پذیر با وجود مزایای ذکر شده ایراد قابل توجهی دارد که در این قسمت به بررسی آن می‌پردازیم. ابتدا سیستم دینامیکی مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} T_\alpha x(t) = g(t, x(t)), & t \in [0, a), & 0 < \alpha \leq 1, \\ x(0) = x_0, \\ g(0, x(0)) \neq 0. \end{cases} \quad (۲۵.۱)$$

بدیهی است زمانی که $t \rightarrow 0^+$ ، سیستم دینامیکی (۲۵.۱) فاقد جواب است، زیرا طبق تعریف مشتق همدیس پذیر از خاصیت ۵، مشتق از هر تابع دلخواه در نقطه t زمانی که $t \rightarrow 0^+$ صفر است در حالی که این حالت در سیستم (۲۵.۱) برقرار نیست. اکنون با استفاده از ایده به کار رفته در تعریف مشتق کاپاتو-فابریسیو و با جایگزین کردن عبارت نمائی $\exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)$ به جای عبارت $t^{1-\alpha}$ تعریف مشتق همدیس پذیر اصلاح شده را به صورت زیر ارائه می‌دهیم

$$\mathcal{T}_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)) - f(t)}{\varepsilon}. \quad (۲۶.۱)$$

اکنون نشان می‌دهیم که تمام خواص مشتق همدیس پذیر در تعریف مشتق همدیس پذیر اصلاح شده نیز برقرار است.

قضیه ۲.۳.۱. فرض کنید $\alpha \in (0, 1]$ و توابع f و g در $t \geq 0$ مشتق‌پذیر باشند. آن‌گاه روابط زیر برقرارند

(الف) $\mathcal{T}_\alpha(af + bg) = a\mathcal{T}_\alpha(f) + b\mathcal{T}_\alpha(g)$ ، برای هر $a, b \in \mathbb{R}$

(ب) $\mathcal{T}_\alpha(\lambda) = 0$ ، برای هر تابع ثابت $\lambda = f(t)$

$$\mathcal{T}_\alpha(fg) = f\mathcal{T}_\alpha(g) + g\mathcal{T}_\alpha(f) \quad (\text{پ})$$

$$\mathcal{T}_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f\mathcal{T}_\alpha(g) - g\mathcal{T}_\alpha(f)}{g^2} \quad (\text{ت})$$

$$\mathcal{T}_\alpha(f)(t) = \exp\left(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t\right) \frac{df}{dt}(t) \quad \text{داریم } f \text{ پذیر } f$$

برهان. (الف)

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\alpha(af + bg) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(af + bg)(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)) - (af + bg)(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{af(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)) + bg(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)) - af(t) - bg(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a \frac{f(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)) - f(t)}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b \frac{g(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)) - g(t)}{\varepsilon} \\ &= a\mathcal{T}_\alpha(f) + b\mathcal{T}_\alpha(g). \end{aligned}$$

(ب)

$$\mathcal{T}_\alpha(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)) - f(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda - \lambda}{\varepsilon} = 0.$$

(پ) برای $t \geq 0$ ،

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\alpha(fg) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t))g(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t))g(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)) - f(t)g(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t))}{\varepsilon} \\ &\quad + \frac{f(t)g(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)) - f(t)}{\varepsilon} \right) \cdot g(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)) \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{g(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)) - g(t)}{\varepsilon} \right) \cdot f(t) \\ &= \mathcal{T}_\alpha(f) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)) + f(t)\mathcal{T}_\alpha(g)(t) \\ &= \mathcal{T}_\alpha(f) \cdot g + f \cdot \mathcal{T}_\alpha(g). \end{aligned}$$

(ت) باروشی مشابه با قسمت (پ) ثابت می شود.

(ث) در (۲۶.۱) فرض کنید $h = \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\Gamma-\alpha}t)$ که نتیجه می شود $\varepsilon = h \exp(\frac{\alpha-1}{\Gamma-\alpha}t)$. بنابراین

داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_\alpha(f)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon \exp(\frac{1-\alpha}{\alpha}t)) - f(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h \exp(\frac{\alpha-1}{\alpha}t)} \\
&= \exp(\frac{1-\alpha}{\alpha}t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\
&= \exp(\frac{1-\alpha}{\alpha}t) \frac{df}{dt}(t).
\end{aligned}$$

□

۴.۱ معادلات دیفرانسیل کسری

مسائلی که دینامیک آن‌ها با معادلات دیفرانسیل کسری همراه می‌شوند در بسیاری از مسائل علوم، مهندسی، اقتصاد و زمینه‌های دیگر کاربرد دارند [۱۰]. هنگامی که دستگاه‌های دینامیکی پیچیده هستند و یا ذرات دینامیکی در مقیاس ذره‌بینی می‌باشند آن‌گاه جنبش و حرکت دیگر از قوانین معمولی مشتقات مرتبه صحیح پیروی نمی‌کنند. در این گونه موارد حرکت‌ها از قوانین مرتبه کسری پیروی می‌کنند، به این معنی که رفتارشان با معادلات دیفرانسیل کسری همراه می‌شوند.

در دهه‌های اخیر به دلیل کاربردهای فراوان معادلات دیفرانسیل کسری در زمینه‌های مختلف علمی تلاش‌های فراوانی در زمینه حل معادلات دیفرانسیل کسری انجام شده است. معادلات دیفرانسیل کسری با توجه به تعاریف مختلف از مشتق کسری تعریف می‌شوند که مهم‌ترین آن‌ها مشتق کسری ریمن-لیوویل و کاپاتو هستند. معادله دیفرانسیل با مشتق کسری ریمن-لیوویل در حالت خاص به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\begin{cases}
{}_a^R D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & (\mathcal{R}(\alpha) > 0), t > a, \\
[{}_a^R D_t^{\alpha-k} y(t)]_{t \rightarrow a} = b_k, & k = 0, 1, \dots, n,
\end{cases} \quad (27.1)$$

که برای $\alpha \notin \mathbb{N}$ ، $n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$ و اگر $\alpha \in \mathbb{N}$ آن‌گاه $n = \alpha$. این معادله دیفرانسیل قابل تبدیل به معادله انتگرال ولترا نوع دوم^۹ به صورت زیر است [۳]

$$y(t) = \sum_{j=0}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (t - a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y(x)) dx, \quad (t > a). \quad (28.1)$$

^۹Voltra integral equation of second kind

همچنین یک معادله دیفرانسیل از نوع کاپوتو در حالت خاص به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & (\mathcal{R}(\alpha) > 0), t > a, \\ y^{(k)}(a) = b_k, & k = 0, 1, \dots, n, \end{cases} \quad (29.1)$$

که $\alpha \notin \mathbb{N}$ ، $n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$ و اگر $\alpha \in \mathbb{N}$ آن‌گاه $n = \alpha$. این معادله دیفرانسیل قابل تبدیل به معادله انتگرال ولترا به صورت زیر است [۳]

$$y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (t-a)^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y(x)) dx, \quad (t > a). \quad (30.1)$$

برای مطالعه قضایای وجود و یکتایی و همچنین روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری [۱۰] را مطالعه نمایید.

۵.۱ معادلات دیفرانسیل کسری تاخیری

مدل‌سازی ریاضی با استفاده از معادلات دیفرانسیل تاخیری^{۱۰} به طور گسترده برای آنالیز و پیش‌بینی در رشته‌های مختلف، برای مثال دینامیک جمعیت^{۱۱}، فیزیولوژی^{۱۲}، و غیره مورد استفاده قرار گرفته است [۱۱]. تاخیر زمانی در این مدل‌ها می‌تواند به مدت زمان فرایندهای پنهان خاص مانند مراحل زندگی، زمان بین عفونت یک سلول و تولید ویروس‌های جدید، طول مدت عفونت دوره، دوره ایمنی و غیره در نظر گرفته شود.

در معادلات دیفرانسیل معمولی، متغیر حالت و مشتق آن، در یک زمان سنجیده می‌شوند. در حالی که در معادلات دیفرانسیل تاخیری، بررسی سیستم در زمان مشخص، وابسته به زمان گذشته است. وجود تاخیر در معادلات دیفرانسیل باعث افزایش پیچیدگی سیستم می‌شود و پایداری و کنترل این سیستم‌ها از اهمیت زیادی برخوردار هستند.

با توجه به اهمیت حسابان کسری که در قسمت‌های قبل بیان شد، در سال‌های اخیر معادلات دیفرانسیل کسری تاخیری مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است و مقالات فراوانی در زمینه مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی با استفاده از مفاهیم حسابان کسری به چاپ رسیده است [۱۲].

معادله دیفرانسیل کسری تاخیری بر حسب مشتق کاپوتو به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), & t > 0, n-1 < \alpha \leq n, \\ x(t) = \phi(t), & t \leq 0, \end{cases} \quad (31.1)$$

که τ تاخیر، $\phi(t)$ مقدار اولیه و n عدد طبیعی است.

¹⁰Delay differential equations

¹¹Population dynamic

¹²Physiology

۶.۱ مسأله کنترل بهینه کسری

یکی از مهم‌ترین دلایل استفاده از سیستم‌های دینامیکی کسری خاصیت حافظه‌دار بودن مشتقات کسری است. کنترل بهینه سیستم‌های کسری عبارت است از یافتن تابع کنترل که تابع هدف را به شرط برآورده کردن قیود دیفرانسیلی کسری بیشینه یا کمینه کند. یک مسأله کنترل بهینه کسری با توجه به تعاریف مختلفی که از مشتقات کسری موجود است تعریف می‌شود. در این قسمت ابتدا فرم کلی مسأله کنترل بهینه کسری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و سپس قضایای شرایط بهینگی بیان می‌شود.

$$\text{Minimize } J(x, u) = \psi(T, x(T)) + \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (32.1)$$

$$\text{subject to } M\dot{x}(t) + N {}^R D_t^\alpha x(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad (33.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (34.1)$$

که $0 < \alpha < 1$ ، $x_0 \in \mathbb{R}^p$ ، $M, N \in \mathbb{R}^p$ و $(M, N) \neq (0, 0)$ هستند و

$$f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

توابعی مشتق‌پذیر هستند. $x(\cdot)$ و $u(\cdot)$ به ترتیب متغیرهای وضعیت و کنترل هستند و $\dot{x}(t)$ مشتق معمولی را نشان می‌دهد. حال اگر در (33.1) داشته باشیم ${}^C D_t^\alpha x(t)$ ، مشتق کسری چپ کاپوتو از مرتبه α و اگر داشته باشیم ${}^R D_t^\alpha x(t)$ ، مشتق کسری چپ ریمان-لیویل از مرتبه α را نشان می‌دهد. در مسأله (32.1)–(34.1)، T و $x(T)$ می‌توانند ثابت و یا آزاد باشند. بنابراین توجه در این مسأله، علاوه بر متغیر وضعیت $x(\cdot)$ و متغیر کنترل $u(\cdot)$ ، روی زمان نهایی T مورد نظر نیز معطوف است تا بتوان تابعی J را با توجه به حالت‌های T و $x(T)$ بهینه کرد. در مسأله (32.1)–(34.1)، اگر $N = 0$ باشد مسأله کنترل بهینه کلاسیک را خواهیم داشت.

شرایط لازم بهینگی برای مسائل کنترل بهینه کسری با مشتق کاپاتو

برای این که شرایط لازم بهینگی نتیجه شود یعنی جواب بهینه سه‌تایی (x, u, T) در مسأله کنترل بهینه کسری (32.1)–(34.1) صدق کند، ضریب لاگرانژ $\lambda(\cdot)$ را به کار برده و تابع همیلتونی H را به صورت زیر تعریف کنید [۱۳، ۱۴]

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u). \quad (35.1)$$

قضیه ۱.۶.۱. [۱۴] فرض کنید (x, u, T) جواب بهینه برای مسأله (32.1)–(34.1) است. در این صورت تابع $\lambda(\cdot)$ وجود دارد به طوری که سه‌تایی (x, u, λ) در شرایط زیر صدق کند

(الف) دستگاه همیلتونی

$$M\dot{\lambda}(t) - N_t^R D_T^\alpha \lambda(t) = \frac{-\partial H}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda(t)), \quad t \in [0, T], \quad (36.1)$$

$$M\dot{x}(t) + N_0^C D_t^\alpha x(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x(t), u(t), \lambda(t)), \quad t \in [0, T]. \quad (37.1)$$

(ب) شرایط ایستایی

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (38.1)$$

(ج) شرایط تراگردی

$$\begin{aligned} & \left[H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) - N\lambda(t)_0^C D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t)_t^R I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0, \\ & \left[M\lambda(t) + N_t^R I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0, \end{aligned} \quad (39.1)$$

که همیلتونی H در (۳۵.۱) تعریف شده است.

با توجه به زمان نهایی T و مکان نهایی $x(T)$ ، حالت‌های خاص برای شرایط بهینگی به وجود می‌آید که نتیجه زیر چند مورد از این حالت‌ها را شامل می‌شود.

نتیجه ۱.۶.۱. فرض کنید (x, u) ، جواب بهینه برای مسأله کنترل بهینه کسری (۳۲.۱) - (۳۴.۱) است.

(الف) اگر T ثابت و $x(T)$ آزاد باشد، آن‌گاه قضیه ۱.۶.۱ با شرایط تراگردی زیر برقرار است که جایگزین (۳۹.۱) می‌شود

$$\left[M\lambda(t) + N_t^R I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0.$$

(ب) اگر T آزاد و $x(T)$ ثابت باشد، آن‌گاه قضیه ۱.۶.۱ با شرایط تراگردی زیر برقرار است که جایگزین (۳۹.۱) می‌شود

$$\left[H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) - N\lambda(t)_0^C D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t)_t^R I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0.$$

(ج) اگر T و $x(T)$ هر دو ثابت باشند، آن‌گاه قضیه ۱.۶.۱ بدون شرایط تراگردی برقرار خواهد بود.

(د) اگر مکان نهایی متعلق به یک منحنی ثابت باشد یعنی $x(T) = \gamma(T)$ ، که γ منحنی مشتق‌پذیر است، آن‌گاه قضیه ۱.۶.۱ با شرایط تراگردی زیر برقرار است که جایگزین (۳۹.۱) می‌شود

$$\left[H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) - N\lambda(t) {}^C D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t) {}^R I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) - \dot{\gamma}(t) \left(M\lambda(t) + N {}^R I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) \right) \right]_{t=T} = 0.$$

(ه) اگر T ثابت و برای برخی مقادیر $x(T) \geq K$ ، $K \in \mathbb{R}$ باشد آن‌گاه قضیه ۱.۶.۱ با شرایط تراگردی زیر برقرار است که جایگزین (۳۹.۱) می‌شود

$$\left[M\lambda(t) + N {}^R I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x(t)) \right]_{t=T} \leq 0, \\ (x(T) - K) \left[M\lambda(t) + N {}^R I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0.$$

(و) اگر $x(T)$ ثابت باشد و برای برخی مقادیر $T \leq K$ ، $K \in \mathbb{R}$ باشد آن‌گاه قضیه ۱.۶.۱ با شرایط تراگردی زیر برقرار است که جایگزین (۳۹.۱) می‌شود

$$\left[H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) - N\lambda(t) {}^C D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t) {}^R I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} \geq 0, \\ \left[H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) - N\lambda(t) {}^C D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t) {}^R I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} \\ \times (T - K) = 0.$$

شرایط لازم بهینگی برای مسائل کنترل بهینه کسری با مشتق ریمن-لیوویل

در اینجا مسأله کنترل بهینه کسری

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & J(x, u) = \int_0^1 F(x(t), u(t), t) dt, \\ \text{subject to} \quad & {}^R D_t^\alpha x(t) = G(x(t), u(t), t), \\ & x(0) = x_0, \end{aligned}$$

در شرایط مشتق کسری چپ و راست ریمن-لیوویل فرمول‌بندی می‌شود [۱۵]. برای یافتن شرایط لازم بهینگی از رهیافت سنتی قبل تابع هدف را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\bar{J}(u) = \int_0^1 [F(x, u, t) + \lambda(G(x, u, t) - {}^R D_t^\alpha x)] dt, \quad (40.1)$$

که λ ضربگر لاگرانژ است. با در نظر گرفتن تغییرات برای تابعی (۴۰.۱) داریم

$$\delta \bar{J}(u) = \int_0^1 \left[\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \delta \lambda (G(x, u, t) - {}^R D_t^\alpha x) + \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial x} \delta x + \frac{\partial G}{\partial u} \delta u - \delta ({}^R D_t^\alpha x) \right) \right] dt, \quad (41.1)$$

که δx ، δu و $\delta \lambda$ به ترتیب تغییرات x ، u و λ هستند و طبق شرط تراگردی $\lambda(1) = 0$ است. ریزو^{۱۳} در [۱۶] نشان داد که برای $\alpha > 0$ رابطه زیر برقرار است

$$\int_a^b \frac{d^\alpha f(t)}{d(t-a)^\alpha} g(t) dt = (-1)^{-\alpha} \int_a^b f(t) \frac{d^\alpha g(t)}{d(t-b)^\alpha} dt, \quad (42.1)$$

به شرطی که برای $k = 0, \dots, n-1$ در $t = a$ و $t = b$ داشته باشیم $\frac{d^k f(t)}{dt^k} = 0$ و یا $\frac{d^k g(t)}{dt^k} = 0$ در (۴۲.۱) داریم

$$\frac{d^\alpha f(t)}{d(t-a)^\alpha} = {}^R D_t^\alpha f(t), \quad (43.1)$$

مشتق کسری چپ ریمان-لیوویل تابع $f(t)$ از مرتبه α است و n کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از α است. با استفاده از نمادگذاری‌های استفاده شده، (۴۲.۱) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\int_a^b ({}^R D_t^\alpha f(t)) g(t) dt = \int_a^b f(t) ({}^R D_b^\alpha g(t)) dt. \quad (44.1)$$

رابطه (۴۴.۱) فرمول انتگرال‌گیری جز به جز کسری نامیده می‌شود که در [۱۷] آورده شده است. با استفاده از (۴۴.۱) آخرین انتگرال در (۴۱.۱) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\int_0^1 \lambda \delta ({}^R D_t^\alpha x) dt = \int_0^1 \delta x ({}^R D_1^\alpha \lambda) dt. \quad (45.1)$$

ثابت می‌شود که $\delta x(0) = 0$ یا $\lambda(0) = 0$ و $\delta x(1) = 0$ یا $\lambda(1) = 0$. چون $x(0) = x_0$ مشخص است، داریم $\delta x(0) = 0$ و چون $x(1)$ مشخص نیست، لذا $\lambda(1) = 0$. با این فرضیات رابطه (۴۵.۱) برقرار است. با استفاده از روابط (۴۱.۱) و (۴۵.۱) داریم

$$\delta \bar{J}(u) = \int_0^1 \left[\delta \lambda (G(x, u, t) - {}^R D_t^\alpha x) + \delta x \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x} - {}^R D_1^\alpha \lambda \right) + \delta u \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \lambda \frac{\partial G}{\partial u} \right) \right] dt. \quad (46.1)$$

مقدار کمینه $\bar{J}(u)$ (و در نتیجه مقدار کمینه $J(u)$) زمانی اتفاق می‌افتد که ضرایب δx ، $\delta \lambda$ و δu در رابطه (۴۶.۱) صفر شوند. در نتیجه شرایط لازم بهینگی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{cases} {}^R D_t^\alpha x = G(x, u, t), \\ {}^R D_1^\alpha \lambda = \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial u} + \lambda \frac{\partial G}{\partial u} = 0, \\ x(0) = x_0, \quad \lambda(1) = 0. \end{cases}$$

۷.۱ چندجمله‌ای‌های مرتبه کسری

در این بخش به معرفی برخی از مهم‌ترین چندجمله‌ای‌ها از مرتبه کسری می‌پردازیم.

۱.۷.۱ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مرتبه کسری

فرض کنید $\{t_j\}_{j=0}^{N-1}$ نقاط درونیابی مفروض در بازه $[0, 1]$ هستند. در این صورت j -امین چندجمله‌ای لاگرانژ $G_j(t)$ از مرتبه $N-1$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸]

$$G_j(t) = \prod_{i=0, i \neq j}^{N-1} \frac{t - t_i}{t_j - t_i}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

با استفاده از تغییر متغیر $t = \tau^\alpha$ ، j -امین چندجمله‌ای لاگرانژ کسری به صورت زیر تعریف می‌شود

$$G_j^\alpha(\tau) = \prod_{i=0, i \neq j}^{N-1} \frac{\tau^\alpha - t_i}{t_j - t_i}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

که در آن $t_i = \tau_i^\alpha$. مشابه چندجمله‌ای‌های لاگرانژ، ویژگی زیر برای چندجمله‌ای لاگرانژ کسری برقرار است

$$G_j^\alpha(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = \tau_j, \\ 0, & \tau \neq \tau_j. \end{cases} \quad (47.1)$$

زائر نوری^{۱۴} و همکارانش [۱۹] روشی دیگر برای محاسبه این چندجمله‌ای‌ها ارائه داده‌اند. در این مقاله چندجمله‌ای‌های لاگرانژ کسری از درجه $N + \alpha - 1$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$h_j^\alpha(t) = \left(\frac{t - t_1}{t_j - t_1} \right)^\alpha \prod_{k=1, k \neq j}^N \frac{t - t_k}{t_j - t_k}, \quad 2 < j < N.$$

برای مطالعه بیشتر در مورد این چندجمله‌ای‌ها، [۱۸، ۱۹] را مطالعه نمایید.

۲.۷.۱ چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری

چندجمله‌ای‌های لژاندر، چندجمله‌ای‌های متعامد در بازه $[-1, 1]$ هستند که در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند [۲۰]

$$L_{i+1}(x) = \frac{2i+1}{i+1} x L_i(x) - \frac{i}{i+1} L_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \dots,$$

که در آن $L_0(x) = 1$ و $L_1(x) = x$. با استفاده از تغییر متغیر $x = 2t - 1$ چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته $P_m(t)$ از مرتبه m روی بازه $[0, 1]$ به صورت زیر نمایش داده می‌شوند

$$P_{m+1}(t) = \frac{2m+1}{m+1}(2t-1)P_m(t) - \frac{m}{m+1}P_{m-1}(t), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (48.1)$$

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = 2t - 1.$$

برای چندجمله‌ای‌های $P_m(t)$ داریم

$$\int_0^1 P_m(t)P_n(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & m = n, \\ 0 & m \neq n. \end{cases} \quad (49.1)$$

فرم تحلیلی چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته $P_n(t)$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k)!} 2^k t^k. \quad (50.1)$$

همچنین این چندجمله‌ای‌ها با استفاده از فرمول رودریگز^{۱۵} روی بازه $[0, 1]$ به صورت زیر قابل نمایش هستند

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((2t-1)^2 - 1)^n. \quad (51.1)$$

در [۲۱] با جایگزینی مشتق کسری با مشتق معمولی در (۵۱.۱)، تعمیمی از چندجمله‌ای‌های لژاندر از مرتبه کسری به دست آمده است. پیچیدگی این چندجمله‌ای‌ها امکان استفاده از آن‌ها را در مسائل کاربردی دشوار ساخته است. از این رو در [۲۲] با استفاده از تغییر متغیر $t = x^\alpha$ در فرم بازگشتی (۴۸.۱) چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری انتقال یافته در بازه $[0, 1]$ را برای حل معادلات دیفرانسیل کسری مورد مطالعه قرار داده‌اند. اگر FL_m^α چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری از درجه m باشند، آن‌گاه

$$FL_{m+1}^\alpha(x) = \frac{2m+1}{m+1}(2x^\alpha - 1)FL_m^\alpha(x) - \frac{m}{m+1}FL_{m-1}^\alpha(x), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (52.1)$$

$$FL_0^\alpha(x) = 1, \quad FL_1^\alpha(x) = 2x^\alpha - 1.$$

فرم تحلیلی این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است

$$FL_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k)!} 2^k x^{k\alpha}. \quad (53.1)$$

این چندجمله‌ای‌ها با توجه به تابع وزن $w(x) = x^{\alpha-1}$ در بازه $[0, 1]$ متعامد هستند

$$\int_0^1 FL_m^\alpha(x)FL_n^\alpha(x)w(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{(2^{n+1})^\alpha} & m = n, \\ 0 & m \neq n. \end{cases} \quad (54.1)$$

¹⁵Rodrigues formula

تابع دلخواه f متعلق به بازه $[0, 1]$ قابل تقریب با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری به صورت زیر است

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n FL_n^\alpha(t), \quad c_n = \alpha(2n+1) \int_0^1 f(t) FL_n^\alpha(t) w(t) dt.$$

۳.۷.۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبه کسری

چندجمله‌ای‌های چبیشف در بازه $[-1, 1]$ تعریف می‌شوند و از فرمول بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند [۲۳]

$$T_{i+1}(x) = 2xT_i(x) - T_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \dots,$$

که در آن $T_0(x) = 1$ و $T_1(x) = x$. رابطه تعامد برای این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر بیان می‌شود

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi & m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0, \\ 0 & m \neq n. \end{cases} \quad (55.1)$$

فرم تحلیلی چندجمله‌ای‌های چبیشف به صورت زیر است

$$T_i(x) = i \sum_{k=0}^i \frac{(-2)^k (i+k-1)!}{(i-k)! (2k)!} (1-x)^k. \quad (56.1)$$

اکنون برای تعریف چندجمله‌ای چبیشف مرتبه کسری با استفاده از تغییر متغیر $x = 1 - 2\left(\frac{t}{L}\right)^\alpha$ داریم [۲۴]

$$\mathcal{T}_i^\alpha(t) = T_i\left(1 - 2\left(\frac{t}{L}\right)^\alpha\right), \quad t \in [0, L]. \quad (57.1)$$

چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبه کسری به صورت رابطه بازگشتی زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{cases} \mathcal{T}_0^\alpha(t) = 1, \\ \mathcal{T}_1^\alpha(t) = 1 - 2\left(\frac{t}{L}\right)^\alpha, \\ \vdots \\ \mathcal{T}_{i+1}^\alpha(t) = \left(2 - 2\left(\frac{t}{L}\right)^\alpha\right) \mathcal{T}_i^\alpha(t) - \mathcal{T}_{i-1}^\alpha(t), \quad i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (58.1)$$

فرم تحلیلی چندجمله‌ای چبیشف کسری نیز به صورت زیر است

$$\mathcal{T}_n^\alpha(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n! 2^k (n+k-1)!}{(n-k)! (2k)! L^{\alpha k}} t^{k\alpha}. \quad (59.1)$$

خاصیت تعامد برای این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است

$$\int_0^L \mathcal{T}_m^\alpha(x) \mathcal{T}_n^\alpha(x) \frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{Lx^\alpha - x^{2\alpha}}} dx = \delta_{mn} h_n,$$

که δ_{nm} دلتای کرونکر^{۱۶}، $h_n = \frac{b_n}{\sqrt{\alpha}} \pi$ با $b_0 = 2$ و $b_n = 1, n \geq 1$.

۴.۷.۱ چندجمله‌ای‌های برنشتاین مرتبه کسری

چندجمله‌ای‌های برنشتاین^{۱۷} به دلیل سادگی در محاسبه ضرایب، کاربردهای فراوانی در حل مسائل عددی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است. این چندجمله‌ای‌ها در بازه $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۵]

$$B_{i,m}\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = \binom{m}{i} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^i \left(\frac{t-b}{b-a}\right)^{m-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m.$$

به علاوه روی بازه $[0, 1]$ داریم

$$B_{i,m}(t) = \binom{m}{i} t^i (t-1)^{m-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m.$$

فرض کنید m و n اعداد صحیح و مثبتی باشند و $i, j = 0, 1, \dots, m$. برای چندجمله‌ای‌های برنشتاین خواص زیر برقرار است

(۱) با فرض $B_{0,0} = 0$ و $B_{-1,m} = 0$ این چندجمله‌ای‌ها در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند

$$B_{i,m+1}(t) = tB_{i-1,m}(t) + (1-t)B_{i,m}(t).$$

$$\sum_{k=0}^m B_{k,m}(t) = 1 \quad (۲)$$

$$B_{i,m}(t) B_{j,n}(t) = \frac{\binom{m}{i} \binom{n}{j}}{\binom{m+n}{i+j}} B_{i+j,m+n}(t) \quad (۳)$$

$$\int_0^1 B_{i,m}(t) dt = \frac{1}{m+1} \quad (۴)$$

با تغییر متغیر $t = x^\alpha$ چندجمله‌ای‌های برنشتاین مرتبه کسری در بازه $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۶]

$$FB_{i,m}^\alpha(x) = \binom{m}{i} x^{i\alpha} (x^\alpha - 1)^{m-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m.$$

تابع دلخواه $f(x)$ متعلق به بازه $[0, 1]$ قابل تقریب با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین مرتبه کسری به صورت زیر است

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n FB_{i,m}^\alpha(x) = C^T \Phi_m(x),$$

^{۱۶}Kronecker delta

^{۱۷}Bernstein polynomials

که در آن $\Phi_m(t) = [FB_{\circ,m}^\alpha(x), FB_{\setminus,m}^\alpha(x), \dots, FB_{m,m}^\alpha(x)]^T$ و ضرایب $C = [c_0, c_1, \dots, c_m]^T$ از رابطه زیر محاسبه می‌شوند

$$C = Q^{-1} \langle f, \Phi_m(x) \rangle,$$

به طوری که

$$\begin{aligned} \langle f, \Phi_m(x) \rangle &= \int_0^1 f(x) \Phi_m(x) dx \\ &= [\langle f(x), FB_{\circ,m}^\alpha(x) \rangle, \langle f(x), FB_{\setminus,m}^\alpha(x) \rangle, \dots, \langle f(x), FB_{m,m}^\alpha(x) \rangle]^T, \end{aligned}$$

و مولفه‌های ماتریس $Q = (Q_{i+1,j+1})_{i,j=0}^m$ از رابطه زیر محاسبه می‌شوند

$$Q_{i+1,j+1} = \alpha \int_0^1 FB_{i,m}^\alpha(x) FB_{j,m}^\alpha(x) x^{\alpha-1} dx.$$

لازم به ذکر است که برای حل عددی با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین مرتبه کسری بردار ضرایب C مجهول در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از روش‌های هم محلی یا روش‌های عددی دیگر این ضرایب محاسبه می‌شوند.

۵.۷.۱ چندجمله‌ای‌های لاگر مرتبه کسری

هنگامی که بازه انتگرال‌گیری نامتناهی باشد، چندجمله‌ای‌های لاگر^{۱۸} بهترین گزینه برای حل عددی با استفاده از توابع پایه هستند. این چندجمله‌ای‌ها همچنین برای حل انتگرال‌هایی به فرم زیر با استفاده از کوادراتورهای گوسی^{۱۹} مورد استفاده قرار می‌گیرند

$$\int_0^\infty f(t) e^{-t} dt.$$

این چندجمله‌ای‌ها معمولاً با L_0, L_1, \dots نمایش داده می‌شوند که با استفاده از فرمول رودریگز به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t} t^n) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dt} - 1 \right)^n t^n.$$

و در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند

$$(n+1)L_{n+1}(t) = (2n+1-t)L_n(t) - nL_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots,$$

که $L_0(t) = 1$ و $L_1(t) = 1-t$. فرم تحلیلی این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} t^k. \quad (60.1)$$

¹⁸Laguerre polynomials

¹⁹Gaussian quadrature

خاصیت تعامد با توجه به تابع وزن $w(x) = e^{-x}$ برای این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است

$$\int_0^{\infty} L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx = \delta_{nm}.$$

در [۲۷] چندجمله‌ای‌های لاگر مرتبه کسری از مرتبه α به صورت زیر تعریف شده است

$$\mathcal{L}_\alpha(t) = \frac{t^{-n}e^t}{n!} {}_0^C D^\alpha(e^{-t}t^{\alpha+n}), \quad n > -1.$$

این چندجمله‌ای‌ها به عنوان تابعی از α پیوسته هستند و داریم

$$\lim_{\alpha \rightarrow n^+} \mathcal{L}_\alpha(t) = \lim_{\alpha \rightarrow n^-} \mathcal{L}_\alpha(t) = L_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

قضیه ۱.۷.۱. [۲۷] فرض کنید $\alpha \in (m-1, m)$ و $n > -1$. فرم تحلیلی این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است

$$\mathcal{L}_\alpha(t) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(-x)^{m-k} \Gamma(1 + \alpha + n)}{\Gamma(1 + \alpha) \Gamma(1 + m + n - k)} {}_1F_1(m - \alpha; 1 + m + n - k; x).$$

چندجمله‌ای‌های لاگر کسری با توجه به تابع وزن $e^{-\frac{x}{\nu}} x^{\frac{x}{\nu}}$ در بازه $L_\nu(0, \infty)$ متعامد و در حقیقت جواب معادله دیفرانسیل زیر هستند

$$x \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + (1 + n - x) \frac{du(x)}{dx} + \alpha u(x) = 0.$$

۶.۷.۱ چندجمله‌ای‌های مونتنس-لژاندر

در این بخش چندجمله‌ای‌های مونتنس^{۲۰} را در نظر می‌گیریم. همه مفاهیمی که در این بخش بیان می‌شوند را می‌توانید با جزئیات بیشتر در [۲۸] مطالعه کنید. فرض کنید $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \infty$. قضیه کلاسیک مونتنس-سزاس^{۲۱} بیان می‌کند که چندجمله‌ای‌های مونتنس به فرم $\sum_{k=0}^n a_k x^{\lambda_k}$ در $L^2[0, 1]$ چگال هستند اگر

$$\sum_{k=0}^n a_k x^{\lambda_k} = \infty. \quad (6.1.1)$$

اگر تابع ثابت ۱ متعلق به سیستم باشد یا به عبارت دیگر $\lambda_0 = 0$ ، آن‌گاه نتایج مشابهی برای $C[0, 1]$ با نرم یکنواخت برقرار است.

فرض کنید اعداد مختلط در مجموعه $\Lambda_n = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ در رابطه $\mathcal{R}(\lambda_k) > -\frac{1}{2}$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ صدق کند. آن‌گاه چندجمله‌ای‌های مونتنس-لژاندر^{۲۲} در بازه $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۹]

²⁰Müntz

²¹Müntz-Szász

²²Müntz-Legendre

$$M_n(x) = M_n(x; \Lambda_n) = \sum_{k=0}^n C_{n,k} x^{\lambda_k}, \quad C_{n,k} = \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (\lambda_k + \bar{\lambda}_v + 1)}{\prod_{v=0, v \neq k}^{n-1} (\lambda_k - \bar{\lambda}_v)},$$

که با توجه به ضرب داخلی در بازه $[0, 1]$ متعامد هستند، یعنی

$$(M_n, M_m) = \int_0^1 M_n(x) M_m(x) dx = \frac{\delta_{nm}}{\lambda_n + \bar{\lambda}_n + 1}, \quad (62.1)$$

که $(.,.)$ ضرب داخلی را نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن $\lambda_k = \alpha k$ ، آن‌گاه چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر روی بازه $[0, 1]$ به صورت زیر نمایش داده می‌شوند [۳۰]

$$L_{n,\alpha}(t) = \sum_{k=0}^n C_{n,k} t^{k\alpha}, \quad C_{n,k} = \frac{(-1)^{n+k}}{\alpha^n k! (n-k)!} \prod_{v=0}^{n-1} ((k+v)\alpha + 1). \quad (63.1)$$

با توجه به ویژگی تعامد (۶۲.۱) داریم

$$(L_{n,\alpha}, L_{m,\alpha}) = \int_0^1 L_{n,\alpha}(t) L_{m,\alpha}(t) dt = \frac{\delta_{nm}}{\Gamma(n\alpha + 1)}.$$

هر تابع دلخواه $f \in L^2[0, 1]$ توسط چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر به صورت زیر قابل تقریب است

$$f(t) \simeq \sum_{n=0}^N c_n L_{n,\alpha}(t), \quad c_n = (\Gamma(n\alpha + 1)) \int_0^1 f(t) L_{n,\alpha}(t) dt.$$

اکنون مهم‌ترین ویژگی چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر را بیان می‌کنیم. مشتق کسری از چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر به صورت زیر حاصل می‌شود

$${}^C D_t^\alpha L_{n,\alpha}(t) = \sum_{k=[\alpha]}^n D_{n,k} t^{(k-1)\alpha}, \quad D_{n,k} = \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1 - \alpha)} C_{n,k}.$$

توجه داریم که به ازای $\alpha = 1$ چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر همان چندجمله‌ای‌های لژاندر هستند. در ادامه به ارتباط مهم بین چندجمله‌ای‌های ژاکوبی و مونتس-لژاندر می‌پردازیم.

۷.۷.۱ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی

چندجمله‌ای‌های ژاکوبی^{۲۳} در بازه $[-1, 1]$ تعریف می‌شوند و با استفاده از رابطه بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند

$$J_i^{(a,b)}(t) = \frac{(a+b+2i-1)^2 - b^2 + t(a+b+2i)(a+b+2i-2)}{2i(a+b+i)(a+b+2i-2)} J_{i-1}^{(a,b)}(t), \quad (64.1)$$

$$- \frac{(a+i-1)(b+i-1)(a+b+2i)}{i(a+b+i)(a+b+2i-2)} J_{i-2}^{(a,b)}(t), \quad i = 2, 3, \dots,$$

²³Jacobi polynomials

که در آن

$$J_{\circ}^{(a,b)}(t) = 1 \quad \text{و} \quad J_1^{(a,b)}(t) = \frac{a+b+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}t + \frac{a-b}{\sqrt{2}}.$$

با استفاده از تغییر متغیر $t = \sqrt{2}\frac{x}{T} - 1$ چندجمله‌ای‌های انتقال یافته ژاکوبی در بازه $[0, T]$ حاصل می‌شوند. فرض کنید چندجمله‌ای‌های انتقال یافته ژاکوبی $(\sqrt{2}\frac{x}{T} - 1)$ با $J_{T,i}^{(a,b)}(x)$ نمایش داده شوند، آن‌گاه

$$J_{T,i}^{(a,b)}(x) = \frac{(a+b+\sqrt{2}i-1)^2 - b^2 + (\sqrt{2}x-1)(a+b+\sqrt{2}i)(a+b+\sqrt{2}i-2)}{\sqrt{2}i(a+b+i)(a+b+\sqrt{2}i-2)} J_{T,i-1}^{(a,b)}(x), \\ - \frac{(a+i-1)(b+i-1)(a+b+\sqrt{2}i)}{i(a+b+i)(a+b+\sqrt{2}i-2)} J_{T,i-2}^{(a,b)}(x), \quad i = 2, 3, \dots,$$

که در آن

$$J_{T,\circ}^{(a,b)}(x) = 1, \quad J_{T,1}^{(a,b)}(x) = \frac{a+b+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\frac{x}{T} - 1) + \frac{a-b}{\sqrt{2}}.$$

فرم تحلیلی چندجمله‌ای‌های انتقال یافته $J_{T,i}^{(a,b)}(x)$ از درجه i توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$J_{T,i}^{(a,b)}(x) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \frac{\Gamma(i+b+1)\Gamma(i+k+a+b+1)}{\Gamma(k+b+1+1)\Gamma(i+a+b+1)(i-k)!k!} \left(\frac{x}{T}\right)^k. \quad (65.1)$$

قضیه ۲.۷.۱. فرض کنید $\alpha > 0$ عددی حقیقی و $J_{T,n}^{(\circ, -1+1/\alpha)}(t)$ چندجمله‌ای‌های انتقال یافته ژاکوبی با پارامترهای $a = 0, b = -1 + \frac{1}{\alpha}$ باشند. برای چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر رابطه زیر برقرار است

$$L_{n,\alpha}(t) = J_{T,n}^{(\circ, -1+1/\alpha)}\left(\sqrt{2}\left(\frac{t}{T}\right)^\alpha - 1\right). \quad (66.1)$$

بنابراین چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر را می‌توان با استفاده از (۶۴.۱) به صورت رابطه بازگشتی زیر نشان داد

$$\begin{cases} L_{0,\alpha}(t) = 1, \\ L_{1,\alpha}(t) = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{t}{T}\right)^\alpha - \frac{1}{\alpha}, \\ \vdots \\ L_{k+1,\alpha}(t) = (a_k(\sqrt{2}\left(\frac{t}{T}\right)^\alpha - 1) - b_k)L_{k,\alpha}(t) - c_k L_{k-1,\alpha}(t), \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (67.1)$$

که در آن

$$a_k = \frac{(\sqrt{2}k + \frac{1}{\alpha})(\sqrt{2}k + \frac{1}{\alpha} + 1)}{\sqrt{2}(k+1)(k + \frac{1}{\alpha})}, \\ b_k = \frac{(\sqrt{2}k + \frac{1}{\alpha})(\frac{1}{\alpha} - 1)^2}{\sqrt{2}(k+1)(k + \frac{1}{\alpha})(\sqrt{2}k + \frac{1}{\alpha} - 1)}, \\ c_k = \frac{k(\sqrt{2}k + \frac{1}{\alpha})(k + \frac{1}{\alpha} - 1)}{(k+1)(k + \frac{1}{\alpha})(\sqrt{2}k + \frac{1}{\alpha} - 1)}.$$

فرم تحلیلی چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر نیز به صورت زیر است

$$L_{n,\alpha}(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{\alpha})\Gamma(n + k + \frac{1}{\alpha})}{\Gamma(k + \frac{1}{\alpha})\Gamma(n + \frac{1}{\alpha})(n-k)!k!} \left(\frac{t}{T}\right)^{k\alpha}. \quad (68.1)$$

فصل ۲

مروری بر شبکه‌های عصبی و سیستم‌های دینامیکی

۱.۲ مقدمه

در سال‌های اخیر شاهد حرکتی مستمر از تحقیقات کاربردی به خصوص در زمینه پردازش اطلاعات برای مسائلی که برای آن‌ها راه حلی موجود نیست و یا به راحتی قابل حل نیستند بوده‌ایم. با عنایت به این امر، علاقه فراوانی در توسعه سیستم‌های دینامیکی هوشمند که مبتنی بر داده‌های تجربی هستند ایجاد شده است. شبکه‌های عصبی مصنوعی جزو این دسته از سیستم‌های دینامیکی قرار دارند، که با پردازش روی داده‌های تجربی دانش یا قانون نهفته در ورای داده‌ها را به ساختار شبکه منتقل می‌کنند. به همین خاطر به این سیستم‌ها هوشمند گویند. چرا که بر اساس محاسبات روی داده‌های عددی، قوانین کلی را فرامی‌گیرند. پیاده‌سازی ویژگی‌های شگفت‌انگیز مغز در یک سیستم مصنوعی همیشه یک موضوع مورد چالش بین محققان بوده است. همچنین در این زمینه، مدل‌های ریاضی و نرم‌افزاری متعددی با الهام گرفتن از مغز انسان پیشنهاد شده‌اند که برای حل گستره وسیعی از مسائل علمی، مهندسی و کاربردی در حوزه‌های مختلف کاربرد دارند.

۲.۲ شبکه‌های عصبی بیولوژیکی

واحد اصلی دستگاه عصبی، سلولی خاص به نام نرون^۱ است و بدون شک نحوه کار مغز در آن نهفته است. نرون‌ها با وجود تفاوت‌های زیاد از نظر اندازه و شکل ظاهری، مشخصه‌های مشترکی دارند. همان‌طور که در شکل (۱.۲) نشان داده شده است از تنه سلولی نرون تعدادی شاخک کوتاه خارج می‌شوند که دندریت^۲ نام دارند. دندریت‌ها و تنه سلولی، سیگنال‌ها را از نرون‌های مجاور دریافت می‌کنند و از طریق یک لوله باریک به نام آکسون^۳ به نرون‌های دیگر منتقل می‌کنند. آکسون در انتهای خود به تعدادی رشته جانبی باریک تقسیم می‌گردد که پایانه‌های آکسونی نام دارد و با دندریت‌های سایر نرون‌ها مرتبط است. ارتباط بین آکسون یک نرون و دندریت نرون دیگر را سیناپس^۴ می‌نامند. همه سیگنال‌های جمع‌بندی شده، در تنه نرون ترکیب می‌شوند و اگر وسعت سیگنال‌های ترکیب شده به آستانه نرون برسد، مرحله تحریک شدن^۵ فعال می‌شود و یک سیگنال خروجی تولید می‌شود. این سیگنال به صورت یک پالس منفرد یا بخشی از پالس‌ها در یک میزان خاص به موازات آکسون به پایانه‌های سیناپسی انتقال می‌یابد و موجب ترشح موادی به نام عصب-رسانه می‌شود. عصب-رسانه در داخل شکاف سیناپسی پخش می‌شود و نرون بعدی را تحریک می‌کند و به این ترتیب یک سیگنال از یک نرون به دیگری انتقال می‌یابد. تعداد بسیار زیادی آکسون از نرون‌های مختلف با دندریت‌های یک نرون به این صورت ارتباط برقرار می‌کنند. نرون‌ها با توجه به عملکردشان به سه دسته تقسیم می‌شوند:

(۱) **نرون‌های حسی:** این نرون‌ها پیام‌ها را از گیرنده‌ها به دستگاه عصبی مرکزی منتقل می‌کنند. گیرنده سلول خاصی است که در اندام‌های حسی، عضلات، پوست و ... قرار دارد و تغییرات فیزیکی یا شیمیایی را در می‌یابد، این تغییرات را به سیگنال‌های عصبی تبدیل می‌کند.

(۲) **نرون‌های حرکتی:** این نرون‌ها پیام‌ها را از مغز یا طناب نخاعی به اندام‌های عمل کننده می‌رسانند.

(۳) **نرون‌های رابط:** این نرون‌ها پیام‌ها را از نرون‌های حسی می‌گیرند و به یک نرون رابط دیگر انتقال می‌دهند و یا پیام‌ها را به یک نرون حرکتی می‌رسانند. نرون‌های رابط فقط در مغز، چشم و طناب نخاعی یافت می‌شوند.

سوال این است که با این تعریف، یادگیری چیست؟ پاسخ این سوال در شبکه‌های عصبی مصنوعی مهم خواهد بود.

¹Neuron

²Dendrite

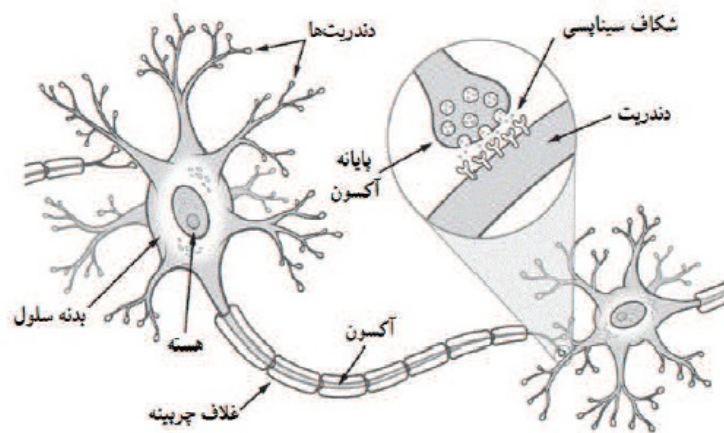
³Axon

⁴Synapse

⁵Firing

تعریف ۱.۲.۲. عمل یادگیری تغییر در نوع فعالیت شیمیایی دندریت‌ها و بدنه سلول و تنظیم مجدد آن فعالیت‌ها است.

در نتیجه حفظ اطلاعات و ذخیره‌سازی آن‌ها در مغز چیزی جز فعالیت‌های شیمیایی در بدنه سلول و پیوندهای آن نیست. نتیجه دیگر این که هنگام عبور سیگنال از دندریت‌ها و بدنه سلول و تا رسیدن به سیناپس‌ها دستخوش تغییراتی می‌شود. اگر به واسطه فرآیندهای شیمیایی این تغییرات با قوانین خاص جدیدی صورت گیرد یک یادگیری جدید رخ داده است. همین مقدمه و معرفی از شبکه‌های عصبی زیستی کافی است تا بتوان شبکه‌های عصبی مصنوعی را بیان کرد.

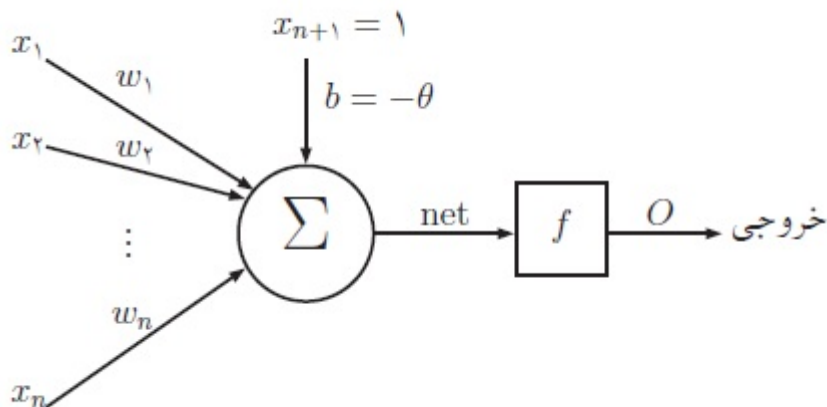


شکل ۱.۲: ساختار یک نرون.

۳.۲ شبکه‌های عصبی مصنوعی

شبکه‌های عصبی مصنوعی مدل‌های سخت افزاری یا نرم افزاری الهام گرفته از ساختار و رفتار نرون‌های بیولوژیکی و سیستم‌های عصبی انسان هستند که شامل عناصر پردازشی (به نام نرون‌ها) و ارتباطات میان آن‌ها با ضرایب (وزن‌ها) اختصاص یافته به ارتباطات است، که ساختار شبکه عصبی را تشکیل می‌دهند. در این رساله، شبکه‌های عصبی مصنوعی را یک مدل ریاضی فرض خواهیم کرد و به‌جای استفاده از عبارت شبکه‌های عصبی مصنوعی به طور خلاصه عبارت شبکه‌های عصبی را به کار خواهیم برد.

مدل شبیه‌سازی شده یک نرون، در شکل (۲.۲) نمایش داده شده است. یک نرون در حالت کلی یک مجموعه از $n + 1$ ورودی x_j ($j = 1, \dots, n + 1$) دارد. این ورودی‌ها همان سیگنال‌های عصبی هستند که از محیط یا از یک نرون دیگر فرستاده می‌شوند. w_j ($j = 1, \dots, n + 1$) که روی آکسون‌ها واقع هستند نقش ساختار سیناپسی را ایفا می‌کنند. w_j ها هستند که باید تغییر کنند تا فرآیند یادگیری اتفاق افتد. حال این که این تغییر بر چه قاعده‌ای استوار باشد بستگی به الگوریتم آموزش یا تعلیم دارد. وزن آخرین ورودی یعنی θ را با b نشان



شکل ۲.۲: مدل ریاضی یک نرون.

می‌دهند و آن را بایاس^۶ می‌نامند. سیگنال‌های عصبی x_1 و x_2 و ... و x_{n+1} به ترتیب در w_1 و w_2 و ... و w_{n+1} ضرب شده و مجموع این حاصل ضرب‌ها که در شکل آن را با net نشان می‌دهیم، وارد نرون می‌شوند. در این مرحله نرون همانند یک تابع روی net عمل می‌کند و حاصل کار خود (برد تابع) را از طریق آکسون‌های طرف راست به نرون‌های دیگر می‌فرستد. این تابع را تابع فعال‌ساز^۷ می‌نامند.

نحوه‌ی اتصالات نرون‌ها می‌تواند به گونه‌ای باشد که شبکه تک‌لایه یا چندلایه به وجود آورد. شبکه‌های چند لایه از لایه ورودی که الگوهای ورودی به آن اعمال می‌شود و لایه خروجی که خروجی شبکه را تعیین می‌کند و لایه پنهان که خود متشکل از چند لایه است و وظیفه‌ی آن ارتباط دادن لایه‌ی ورودی و لایه‌ی خروجی است، تشکیل می‌شود.

مشخصه‌های اصلی یک شبکه عصبی که در طراحی آن باید مدنظر قرار گیرند عبارتند از:

معماری شبکه عصبی: نحوه اتصالات بین نرون‌ها، تعداد آن‌ها و تعداد لایه‌های تشکیل دهنده بخش نرون‌های ارتباطی را معماری شبکه عصبی گویند.

تابع‌های فعال‌ساز: این که چه تابعی روی نرون قرار بگیرد تا بر ورودی‌های نرون اثر کرده و خروجی نرون را تولید کند تابع فعال‌ساز آن نرون گویند.

الگوریتم آموزش: روشی که وزن‌های روی آکسون‌ها بر اساس آن تغییر می‌کنند تا خروجی شبکه عصبی به حالت مطلوب درآید، الگوریتم آموزش نامیده می‌شود.

با توجه به مطالب قبل می‌توان برای شبکه‌های عصبی مصنوعی خصوصیات عمومی زیر را نسبت داد:

^۶Bias

^۷Activation Function

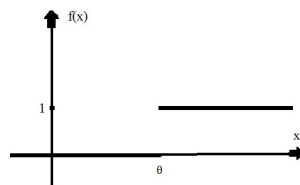
۱. پردازش اطلاعات در عناصر بسیار ساده به نام نرون (سلول عصبی) انجام می‌گیرد.
۲. سیگنال‌های عصبی بین سلول‌های عصبی از طریق اتصالات بین آن‌ها مبادله می‌شوند.
۳. به هر خط اتصال (آکسون) یک وزن نسبت داده می‌شود که در شبکه‌های عصبی معمولی این وزن‌ها در سیگنال‌های منتقل شده ضرب می‌گردند.
۴. هر نرون دارای یک تابع فعال‌ساز است که این تابع در اکثر موارد غیرخطی است.

توابع فعال‌ساز

در این بخش چند نمونه از توابع فعال‌ساز معرفی می‌شود

تابع پله‌ای: این تابع با حد آستانه‌ای θ است و به صورت زیر است

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq \theta, \\ 0 & x < \theta. \end{cases}$$



شکل ۳.۲: تابع پله‌ای

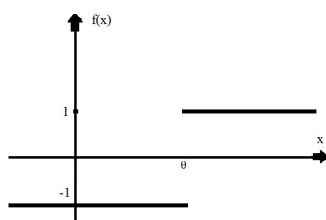
تابع پله‌ای دوقطبی: این تابع با حد آستانه‌ای θ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq \theta, \\ -1 & x < \theta. \end{cases}$$

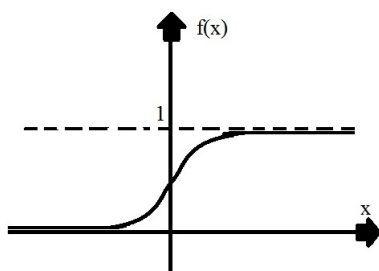
تابع سیگموئید: تابع سیگموئید^۸، تابعی یکنوا، کراندار و مشتق پذیر است و می‌توان مشتق تابع را به کمک خود تابع بیان کرد که به شکل زیر است

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad f'(x) = f(x)(1 - f(x)).$$

^۸Sigmoid



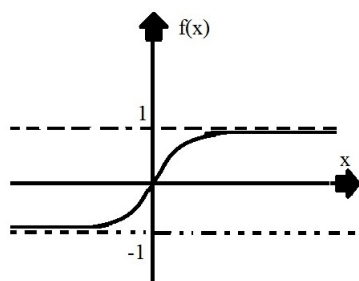
شکل ۴.۲: تابع پله‌ای دوقطبی



شکل ۵.۲: تابع سیگموئید

تابع سیگموئید قطبی: این تابع همان خواص تابع سیگموئید را دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g(x) = 2f(2x) - 1 = 2 \left(\frac{1}{1 + e^{-2x}} \right) - 1 = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, \quad g'(x) = \frac{1}{4}(1 + g(x))(1 - g(x)).$$



شکل ۶.۲: تابع سیگموئید قطبی

۴.۲ سیر تکامل شبکه عصبی مصنوعی

در سال ۱۹۴۳ یک نرولوژیست به نام وارن مک کلاچ^۹ به همراه یک متخصص آمار به نام والتر پیتز^{۱۰} اولین مدل ریاضی نرون را ارائه دادند. این نرون ساده یک عنصر محاسبه‌گر بود که عناصری به نام ورودی را در مقادیر ثابتی به نام وزن ضرب می‌کرد و آن‌ها را از یک عملگر خطی عبور می‌داد و حاصل خروجی نرون را تشکیل می‌داد. در این مدل وزن‌ها مقادیر ثابتی بودند. در سال ۱۹۴۹ دونالد هب^{۱۱} قانون یادگیری را برای شبکه‌های عصبی طراحی کرد [۳۱]. در سال ۱۹۵۴ فارلی و کلارک^{۱۲} [۱] مدلی از نرون‌ها را به طور تصادفی به هم وصل کردند و قانون هب را پیاده‌سازی کردند. آن‌ها همچنین نشان دادند که می‌توان دو الگوی ورودی را با این قانون تعلیم از هم تشخیص داد. با پیشرفت علم کامپیوتر اولین مدل از نرون عصبی مصنوعی توسط ناتانیال روچستر^{۱۳} محقق شرکت IBM در سال ۱۹۵۸ با استفاده از کامپیوتر شبیه‌سازی شد. روزنبلات در سال ۱۹۵۸ نرون ساده مک کلاچ پیتز را اصلاح کرد و به آن قابلیت یادگیری و سازگاری را اضافه کرد و این نرون را پرسپترون^{۱۴} نامید. قانون تعلیم پرسپترون اولین قانون رسمی برای شبکه‌های عصبی است.

روش دیگر مدل خطی تطبیقی نرون است که در سال ۱۹۶۰ توسط برنارد ویدرو^{۱۵} و مارسیان هاف^{۱۶} در دانشگاه استنفورد به وجود آمد که اولین شبکه‌های عصبی به کار گرفته شده در مسائل واقعی بود. آن‌ها یک مدل سه سطحی از نرون‌ها را ابداع کردند که آدلاین^{۱۷} نام‌گذاری شد و مختصر شده حروف "عنصر خطی تطبیقی"^{۱۸} بود [۳۲]. همچنین برای آدلاین یک قانون تعلیم بر مبنای مشتق‌گیری بیان نمودند. این قانون تعلیم به $\alpha - LMS$ معروف است. از متصل کردن چند آدلاین به یکدیگر مادالاین^{۱۹} ساخته شد. ویدرو و هاف از شبکه عصبی مادالاین برای حذف اکو از خطوط تلفن استفاده کردند. در سال ۱۹۶۹ میسکی و پاپرت^{۲۰} کتابی نوشتند که محدودیت‌های سیستم‌های تک‌لایه و چندلایه پرسپترون را تشریح کردند. نتیجه این کتاب پیش‌داوری و قطع سرمایه‌گذاری برای تحقیقات در زمینه شبیه‌سازی شبکه‌های عصبی بود. آن‌ها با طرح این که شبکه پرسپترون قادر به حل هیچ مسأله جالبی

⁹Warren McCulloch

¹⁰Walter Pitts

¹¹Donald Hebb

¹²Farley and Clark

¹³Nathanial Rochester

¹⁴Perceptron

¹⁵Bernard Widrow

¹⁶Marcian Hoff

¹⁷Adeline

¹⁸Adaptive Linear Elements

¹⁹Madaline

²⁰Papert and Minsky

نیست، تحقیقات در این زمینه را برای مدت چند سال متوقف کردند. پال ورباس^{۲۱} در سال ۱۹۷۴ شیوه آموزش پس انتشار^{۲۲} خطا را ایجاد کرد که یک شبکه پرسپترون چندلایه البته با قوانین نیرومندتر آموزشی بود. پیشرفت‌هایی که در سال ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ به دست آمد برای جلب توجه به شبکه‌های عصبی بسیار مهم بود. سال‌های ۱۹۸۲ تا ۱۹۸۶ را می‌توان تولد دوباره شبکه عصبی دانست. در این سال‌ها دو اتفاق مهم در این زمینه رخ داد. اول ارائه شبکه عصبی بازگشتی و مفهوم تابع انرژی توسط جان هاپفیلد^{۲۳} بود که در سال ۱۹۸۲ منتشر شد [۳۳]. دومین اتفاق، حل مسأله فروشنده دوره‌گرد (TSP) توسط شبکه هاپفیلد بود [۳۴]. هاپفیلد نشان داد که از این شبکه بازگشتی می‌توان برای حل مسائل بهینه‌سازی استفاده کرد و افق جدیدی را در شبکه‌های عصبی مصنوعی گشود.

۵.۲ انواع یادگیری برای شبکه‌های عصبی

در یک شبکه چندلایه، یادگیری عبارت است از یافتن وزن‌ها، بایاس‌ها و توابع فعال‌ساز به طوری که در یک دامنه کاری از هر ورودی، خروجی مطلوب حاصل شود. قواعد یادگیری به سه بخش عمده تقسیم می‌شوند: یادگیری با ناظر، یادگیری تشدید و یادگیری بدون ناظر. در اینجا توضیح مختصری در مورد نحوه عملکرد این قواعد ارائه می‌شود.

یادگیری با ناظر^{۲۴}

در این یادگیری به ازای هر ورودی، خروجی مطلوب معلوم است و برای یافتن وزن‌ها، ورودی‌ها به شبکه اعمال می‌شوند و خروجی شبکه به دست می‌آید، سپس این خروجی با خروجی مطلوب مقایسه می‌شود. در صورت وجود اختلاف هنوز یادگیری کامل نشده و باید وزن‌ها و بایاس‌ها تغییر یابند. این عمل تا رسیدن به پارامترهای بهینه شبکه را یادگیری با ناظر می‌گویند.

یادگیری تشدید

یک اشکال یادگیری با ناظر این است که شبکه عصبی ممکن است بدون معلم نتواند مواضع جدیدی را که توسط مجموعه داده‌های جدید تجربی پوشانده نشده است یاد بگیرد. یادگیری از نوع تشدید این محدودیت را برطرف می‌کند. این نوع یادگیری به طور آنلاین^{۲۵} صورت می‌گیرد در حالی که یادگیری با ناظر را به دو صورت آنلاین و آفلاین^{۲۶} می‌توان انجام داد. در حالت آفلاین می‌توان از یک سیستم محاسب با در اختیار داشتن داده‌های یادگیری استفاده

²¹Paul Werbos

²²Back Propagation

²³John Hopfield

²⁴Supervised Learning

²⁵On-Line

²⁶Off-Line

کرد و طراحی شبکه عصبی را به پایان رساند. پس از مرحله طراحی و یادگیری، شبکه عصبی به عنوان یک سیستم استاتیکی عمل می‌کند. اما در یادگیری آنلاین شبکه عصبی همراه با خود سیستم یادگیر در حال انجام کار است و از این رو مثل یک سیستم دینامیکی عمل می‌کند. یادگیری از نوع تشدید یک یادگیری آنلاین از یک نگاشت ورودی-خروجی است. این کار از طریق یک پروسه سعی و خطا به صورتی انجام می‌پذیرد که یک شاخص اجرایی موسوم به سیگنال تشدید بیشینه شود. این بدین معنی است که اگر شبکه عصبی پارامترهایش را به گونه‌ای تغییر داد که منجر به یک حالت مساعد شد آن گاه تمایل سیستم یادگیر جهت تولید آن عمل خاص تقویت یا تشدید می‌شود. در غیر این صورت تمایل شبکه عصبی جهت تولید آن عمل خاص تضعیف می‌شود. یادگیری تقویتی مثل یادگیری با ناظر نیست و این الگوریتم بیشتر برای سیستم‌های کنترلی کاربرد دارد.

یادگیری بدون ناظر ۲۷

در یادگیری بدون ناظر یا یادگیری خود سامانده پارامترهای شبکه عصبی تنها توسط پاسخ سیستم اصلاح و تنظیم می‌شوند. به عبارتی تنها اطلاعات دریافتی از محیط به شبکه را بردارهای ورودی تشکیل می‌دهند و در مقایسه با یادگیری با ناظر بردار جواب مطلوب به شبکه اعمال نمی‌شود. به عبارتی به شبکه عصبی هیچ نمونه‌ای از تابعی که قرار است بیاموزد داده نمی‌شود بلکه یک شاخص برای آموزش وجود دارد (مانند تابع هزینه). در عمل می‌بینیم که یادگیری با ناظر در مورد شبکه‌هایی که از تعداد زیادی لایه‌های نرونی تشکیل شده باشند بسیار کند عمل می‌کند و در این گونه موارد تلفیق یادگیری با ناظر و بدون ناظر پیشنهاد می‌گردد.

۶.۲ انواع شبکه‌های عصبی مصنوعی

انواع مختلفی از مدل‌های محاسباتی تحت عنوان کلی شبکه‌های عصبی مصنوعی معرفی شده‌اند که هر یک برای دسته‌ای از کاربردها قابل استفاده هستند و در هر کدام از وجه مشخصی از قابلیت‌ها و خصوصیات مغز انسان الهام گرفته شده است. در همه این مدل‌ها، یک ساختار ریاضی در نظر گرفته شده است که البته به صورت گرافیکی هم قابل نمایش دادن است و یک سری پارامترها و پیچ‌های تنظیم دارد. این ساختار کلی، توسط یک الگوریتم یادگیری آن قدر تنظیم و بهینه می‌شود، که بتواند رفتار مناسبی از خود نشان دهد. در ادامه یک مرور کوتاه از انواع مختلف شبکه‌های عصبی خواهیم داشت که مطالعه آن در ایجاد یک آشنایی اولیه بسیار موثر خواهد بود.

شبکه‌های پس‌خور

در شبکه‌های پس‌خور^{۲۸} یا بازگشتی حداقل یک سیگنال بازگشتی از یک نرون به همان نرون یا نرون‌های همان لایه یا نرون‌های لایه‌های قبل وجود دارد و اگر نرونی دارای فیدبک باشد بدین مفهوم است که خروجی نرون در لحظه حال نه تنها به ورودی در آن لحظه بلکه به مقدار خروجی خود نرون در لحظه‌ی گذشته نیز وابسته است. این گونه از شبکه‌های عصبی به طور خاص برای پردازش داده‌های سری یا دنباله‌دار مفید هستند و در آن‌ها هر نرون قادر به حفظ حالت داخلی یا همان حافظه به منظور حفظ اطلاعات مرتبط با ورودی قبلی است.

شبکه‌های پیش‌خور

شبکه‌های پیش‌خور^{۲۹} شبکه‌هایی هستند که مسیر پاسخ در آن‌ها همواره رو به جلو پردازش شده و به نرون‌های لایه‌های قبل خود باز نمی‌گردد. در این نوع شبکه به سیگنال‌ها تنها اجازه عبور از مسیر یک‌طرفه (از ورودی تا خروجی) داده می‌شود. بنابراین بازخورد یا فیدبک وجود ندارد به این معنی که خروجی هر لایه تنها بر لایه بعد اثر می‌گذارد و در لایه‌ی خودش تغییری ایجاد نمی‌کند مانند شبکه پرسپترون.

پرسپترون چندلایه یا MLP

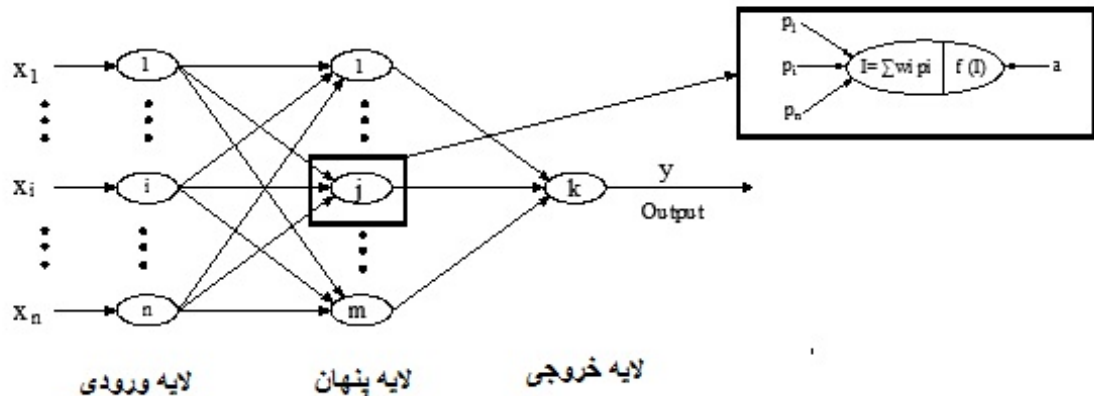
یکی از ساده‌ترین و در عین حال کارآمدترین چیدمان پیشنهادی برای استفاده در مدل‌سازی عصب‌های واقعی، مدل پرسپترون چندلایه (MLP)^{۳۰} است که از یک لایه ورودی (نرون‌های حسی)، یک یا چند لایه پنهان (نرون‌های ارتباطی) و یک لایه خروجی (نرون‌های حرکتی) تشکیل شده است. در این ساختار، تمام نرون‌های یک لایه به تمام نرون‌های لایه بعد متصل هستند. این چیدمان اصطلاحاً یک شبکه با اتصالات کامل را تشکیل می‌دهد. شکل ۷.۲ ساختار یک شبکه پرسپترون سه لایه را نشان می‌دهد. در پرسپترون‌های چندلایه واحدهای ورودی به واحدهای خروجی توسط یک نگاشت غیرخطی به هم متصل می‌شوند. مهم‌ترین کاربرد پرسپترون چندلایه توانایی آن‌ها در تقریب تابع است. از قضیه وجودی کولوموگوروف^{۳۱} می‌دانیم که یک پرسپترون سه لایه با $n(2n + 1)$ گره می‌تواند از هر تابع پیوسته با n متغیر محاسبه شود [۳۵]. دقت تقریب به تعداد نرون‌ها در لایه‌های پنهان شده بستگی دارد و به تعداد لایه‌های پنهان شده بستگی ندارد. شبکه‌های عصبی چندلایه پیش‌خور قابل یادگیری هستند و در برخی موارد مسأله آموزشی این شبکه‌ها بدحالت است.

²⁸Feed-Back Neural Network

²⁹Feed-Forward Neural Network

³⁰Multi-Layer Perceptron

³¹Existence Colomogorov Theorem



شکل ۷.۲: ساختار یک نرون با لایه ورودی، لایه پنهان و لایه خروجی

۷.۲ تاریخچه حل مسائل کنترل بهینه با استفاده از شبکه‌های عصبی

در دهه‌های اخیر شبکه عصبی مصنوعی و هوش مصنوعی یک نقش مهمی را در حل مسائل برخاسته در علم و رخدادهای مهندسی ایفا کردند. کاربرد روش‌های ذکر شده در بسیاری از رقابت‌ها موفقیت آمیز بوده و نتایج با دیگر نتیجه‌های به دست آمده توسط الگوریتم‌های ریاضی مقایسه شده است. به عنوان مثال، چنگ^{۳۲} در چند کار [۳۶، ۳۷] یک مدل شبکه عصبی برای انواع متفاوتی از مسأله‌های کنترل بهینه پیشنهاد کرد. ورابی^{۳۳} و لويس^{۳۴} در [۳۸] یک رویکرد شبکه عصبی برای کنترل بهینه تطبیقی مستقیم زمان پیوسته در سیستم‌های غیرخطی مجهول ارائه کردند. لاگاریس^{۳۵} در [۳۹] از شبکه‌های عصبی برای حل مسائل مقدار مرزی و مقدار اولیه ODE و PDE استفاده کرد. ورابیت^{۳۶} در [۴۰] یک روش برای حل کنترل بهینه تطبیقی مستقیم زمان پیوسته برای سیستم‌های غیرخطی مجهول بر پایه یک طرح تقویت یادگیری پیشنهاد کرد. عفتی و پاکدامن در [۴۱] یک مدل شبکه عصبی پرسپترون برای مسأله کنترل بهینه ارائه داده است. هایدونگ و خوان^{۳۷} در [۴۲] یک شبکه عصبی با تابع فعال‌ساز کسینوس را برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی ارائه کردند. راجا^{۳۸} و همکارانش در [۴۳] برای حل معادلات دیفرانسیل درجه دوم ریکاتی^{۳۹} یک شبکه عصبی با تابع نمایی را

³²Cheng

³³Vrabie

³⁴Lewis

³⁵Lagaris

³⁶Vrabieet

³⁷Haidong and Xuan

³⁸Raja

³⁹Riccati

به کار بردند. همچنین برای حل مسائل کنترل بهینه کسری، صبوری و همکارانش در [۴۴] و قاسمی و همکارانش در [۴۵] یک شبکه عصبی با تابع سیگموئید را ارائه کردند.

۸.۲ سیستم‌های دینامیکی

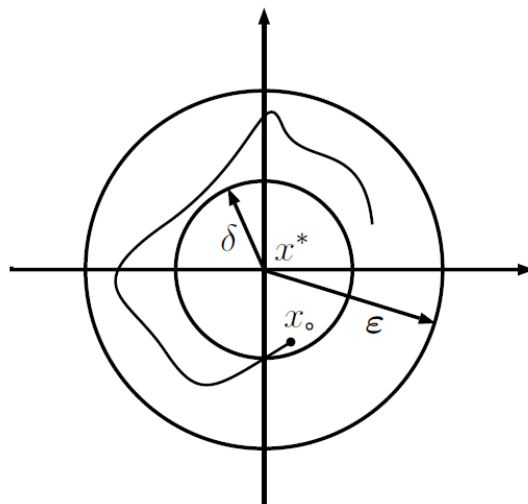
تعریف ۱.۸.۲. سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

که $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. x^* یک نقطه تعادل ^{۴۰} (۱.۲) نامیده می‌شود اگر $f(x^*) = 0$. اگر همسایگی $\Omega^* \subseteq \mathbb{R}^n$ از x^* وجود داشته باشد که $f(x^*) = 0$ و $f(x) \neq 0, \forall x \in \Omega^* \setminus \{x^*\}$ ، آن‌گاه x^* یک نقطه تعادل تنها ^{۴۱} نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۸.۲ (پایداری به مفهوم لیاپانوف ^{۴۲}). فرض کنید $x(t)$ یک جواب (۱.۲) است. x^* نقطه تعادل پایدار تنها، به مفهوم لیاپانوف است اگر برای هر x_0 و هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $\|x(t_0) - x^*\| < \delta$ آن‌گاه

$$\|x(t) - x^*\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$



شکل ۸.۲: پایداری لیاپانوف.

⁴⁰Equilibrium Point

⁴¹Isolated Equilibrium Point

⁴²Stability in the Sense of Lyapunov

تعریف ۳.۸.۲. سیستم دینامیکی (۱.۲) همگرای سراسری^{۴۳} به مجموعه جواب‌های (۱.۲) که با Ω^* نمایش داده می‌شود، است اگر برای هر نقطه آغازین دلخواه، مسیر $x(t)$ در رابطه زیر صدق کند

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \Omega^*) = 0,$$

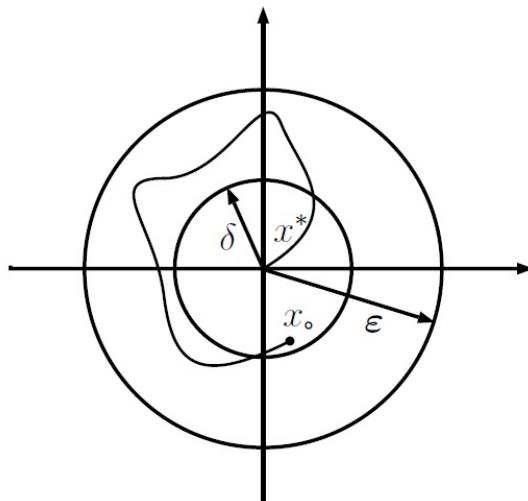
که

$$\text{dist}(x, \Omega^*) = \inf_{y \in \Omega^*} \|x - y\|,$$

و $\|\cdot\|$ نرم l_2 را نشان می‌دهد.

تعریف ۴.۸.۲. سیستم دینامیکی (۱.۲) که دارای نقطه تعادل x^* یکتا است، پایدار مجانبی سراسری^{۴۴} نامیده می‌شود اگر x^* به مفهوم لیاپانوف پایدار باشد و در شرط زیر صدق کند

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*.$$



شکل ۹.۲: پایداری مجانبی سراسری.

تعریف ۵.۸.۲. سیستم دینامیکی (۱.۲) در نقطه x^* پایدار نمایی سراسری^{۴۵} با نرخ β گفته می‌شود اگر برای هر نقطه آغازین دلخواه، مسیر $x(t)$ در رابطه زیر صدق کند

$$\forall t \geq t_0, \quad \|x(t) - x^*\| \leq \alpha \|x(t_0) - x^*\| e^{-\beta(t-t_0)},$$

که α و β ثابت‌های مثبت و مستقل از نقاط آغازین هستند.

واضح است که پایداری نمایی سراسری، پایداری مجانبی سراسری را نتیجه می‌دهد.

⁴³Globally Convergent

⁴⁴Globally Asymptotically Stable

⁴⁵Globally Exponential Stable

تعریف ۶.۸.۲. مجموعه $M \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه تغییرناپذیر^{۴۶} نسبت به سیستم (۱.۲) گفته می‌شود اگر $x(t_0) \in M$ ، $t_0 \geq 0$ و به ازای هر $t \geq t_0$ ، $x(t) \in M$ باشد.

تعریف ۷.۸.۲. تابع $F : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی E پیوسته لیپ‌شیتز^{۴۷} است، اگر ثابت L وجود داشته باشد به طوری که برای هر دو نقطه $x, y \in E$ داشته باشیم

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\|.$$

تابع F پیوسته لیپ‌شیتز محلی^{۴۸} روی E نامیده می‌شود اگر برای نقطه $x_0 \in E$ ، یک $\varepsilon -$ همسایگی مانند $N_\varepsilon(x_0) \subset E$ و یک ثابت L_0 وجود داشته باشد به طوری که برای هر دو نقطه $x, y \in N_\varepsilon(x_0)$ داشته باشیم

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L_0 \|x - y\|.$$

قضیه ۱.۸.۲. [۴۶] تابع $F : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. اگر $F \in C^1(E)$ باشد، آن‌گاه F روی E لیپ‌شیتز محلی است.

تعریف ۸.۸.۲. فرض کنید $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به طور پیوسته مشتق پذیر باشد. $V(x)$ به طور شعاعی بی‌کران گفته می‌شود اگر

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty.$$

لم ۱.۸.۲. [۴۷] فرض کنید $g : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ و Ω_1 بی‌کران باشد. آن‌گاه همه مجموعه‌های سطح g کراندار هستند اگر فقط اگر

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(u^k) = +\infty,$$

$$\text{که } \{u^k\} \subset \Omega_1 \text{ و } \lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k\| = +\infty.$$

لم ۲.۸.۲. [۴۷] فرض کنید $g : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ روی مجموعه بسته Ω_1 پیوسته باشد آن‌گاه همه مجموعه‌های سطح g کراندار هستند اگر و فقط اگر مجموعه کمینه‌کننده‌های g غیرتهی و کراندار باشند.

قضیه ۲.۸.۲. (قضیه نقطه ثابت بروئر^{۴۹}) [۴۷] تابع پیوسته $f : \Omega \rightarrow \Omega$ ، که Ω یک مجموعه فشرده و محدب است حداقل یک نقطه ثابت دارد.

⁴⁶Invariant Set

⁴⁷Lipschitz Continuous

⁴⁸Locally Lipschitz Continuous

⁴⁹Brouwer's Fixed Point Theorem

قضیه ۳.۸.۲. [۴۶] در سیستم دینامیکی (۱.۲) فرض کنید f یک تابع پیوسته از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^n باشد، آن‌گاه برای هر $t_0 \geq 0$ و $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ، یک جواب محلی $x(t)$ به ازای $t \in [t_0, \tau)$ که $\tau > t_0$ وجود دارد. علاوه بر این اگر f در x_0 پیوسته لیپ‌شیتز محلی باشد آن‌گاه جواب یکتاست و اگر f در \mathbb{R}^n پیوسته لیپ‌شیتز باشد آن‌گاه τ می‌تواند تا $+\infty$ توسعه داده شود.

تعریف ۹.۸.۲. سیستم (۱.۲) مفروض است. اگر یک جواب محلی تعریف شده در بازه $[t_0, \tau)$ نتواند به یک جواب محلی روی یک بازه بزرگتر $[t_0, \tau_1)$ که $\tau_1 > t_0$ است گسترش یابد، آن‌گاه یک جواب ماکسیمال نامیده می‌شود و بازه $[t_0, \tau)$ ، بازه ماکسیمال وجود جواب نامیده می‌شود. بازه ماکسیمال وجود جواب مربوط به x_0 اغلب به صورت $[t_0, \tau(x_0))$ تعریف می‌شود.

قضیه ۴.۸.۲. [۴۸] سیستم (۱.۲) مفروض است. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع پیوسته است. اگر $x(t)$ روی بازه $t \in [t_0, \tau(x_0))$ یک جواب ماکسیمال باشد و $\tau(x_0) < +\infty$ آن‌گاه

$$\lim_{t \rightarrow \tau(x_0)} \|x(t)\| = +\infty.$$

قضیه ۵.۸.۲. (قضیه پایداری لیاپانوف) [۴۹] فرض کنید که $x = 0$ یک نقطه تعادل سیستم (۱.۲) است و $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر است به طوری که

$$1. \quad V(0) = 0,$$

$$2. \quad \text{به ازای هر } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, V(x) > 0,$$

$$3. \quad \text{به ازای هر } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \dot{V}(x) \leq 0,$$

آن‌گاه سیستم در $x = 0$ پایدار است.

قضیه ۶.۸.۲. (قضیه پایداری جانبی) [۴۹] تحت شرایط قضیه ۵.۸.۲ اگر $V(0)$ در شرایط زیر صدق کند

$$1. \quad V(0) = 0,$$

$$2. \quad \text{به ازای هر } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, V(x) > 0,$$

$$3. \quad \text{به ازای هر } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \dot{V}(x) < 0,$$

آن‌گاه سیستم در $x = 0$ پایدار جانبی است.

قضیه ۷.۸.۲. (قضیه پایداری جانبی سراسری) [۴۹] تحت شرایط قضیه ۵.۸.۲ اگر $V(0)$ به طور شعاعی بی‌کران باشد آن‌گاه نقطه $x = 0$ پایدار جانبی سراسری است.

قضیه ۸.۸.۲. (اصل تغییرناپذیری لسال^{۵۰}) [۴۹] فرض کنید $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، همچنین فرض کنید

⁵⁰LaSalle Principle of Invariance

۱. $M \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه فشرد و پایدار نسبت به جواب سیستم (۱.۲) باشد،

۲. به ازای $x \in M$ ، $\dot{V}(x) \leq 0$ ،

۳. E مجموعه همه نقاط M باشد به طوری که $\dot{V}(x) = 0$ ،

۴. N بزرگترین مجموعه پایدار در E باشد،

آن‌گاه به ازای هر $x(t_0) \in M$ که $t_0 \geq 0$ است داریم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), N) = 0.$$

فصل ۳

حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری با دو رویکرد متفاوت از شبکه‌های عصبی پرسپترون

۱.۳ مقدمه

در سال‌های اخیر، به دلیل ضرورتی که در فصل ۱ بیان شد، بحث روی مسائل کنترل بهینه کسری رشد قابل توجهی یافته است و مقالات بسیار زیادی در زمینه‌های مهندسی، علوم، اقتصاد و دیگر زمینه‌ها به چاپ رسیده است. یک نمونه از مسائل کنترل بهینه کسری، مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری است. مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری یکی از پرکاربردترین مسائل در علوم، مهندسی و پزشکی هستند [۵۰، ۵۱].

مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری در حقیقت همان مسائل کنترل بهینه شامل دستگاه‌های دینامیکی کسری تاخیری هستند. در حالت کلی یافتن جواب دقیق برای مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری امکان پذیر نیست. از این رو در سال‌های اخیر، چندین روش عددی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری ارائه شده است. برای مثال، در [۵۲] شرایط لازم بهینگی در یک حالت خاص برای مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری ارائه شده است و یک

روش برنامه‌ریزی خطی برای حل مسأله نهایی به کار گرفته شده است. در [۵۳] بحرآوی^۱ و همکارش یک روش عددی بر پایه چندجمله‌ای‌های لژاندر را برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری ارائه داده‌اند. در [۵۴] از روش موجک‌های برنولی^۲ برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری استفاده شده است. در [۵۵] از رهیافت نظریه اندازه^۳ و تبدیل مسأله به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری پرداخته شده است. به عنوان کارهای دیگر در این زمینه می‌توان به روش‌هایی چون، موجک‌های چلیشکف^۴ [۵۶]، روش عددی بر پایه چندجمله‌های مونتس-لژاندر [۵۷]، توابع بلاک پالس^۵ [۵۸]، چندجمله‌ای‌های برنشتاین [۵۹] و برخی روش‌های گسسته‌سازی [۶۰، ۵۲] اشاره کرد. در این فصل ابتدا فرم کلی مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری را معرفی کرده و سپس از روش‌های شبکه عصبی مصنوعی به عنوان یک روش هوش محاسباتی برای حل این مسائل استفاده می‌کنیم.

مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = F_0(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} F(t, x(t), x(t - \sigma), u(t), u(t - \tau)) dt, \quad (1.3)$$

$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x(t) = G(t, x(t), x(t - \sigma), u(t), u(t - \tau)), \quad t \in [0, t_f], \quad (2.3)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\sigma, 0], \quad (3.3)$$

$$u(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (4.3)$$

که تابع برداری G و توابع اسکالر F_0 و F در حالت کلی نسبت به $x \in \mathbb{R}^p$ و $u \in \mathbb{R}^q$ غیرخطی و مشتق‌پذیر هستند. توابع تاخیر $\phi(t)$ و $\psi(t)$ پیوسته هستند، $\tau \geq \sigma \geq 0$ و t_f زمان انتهایی را نشان می‌دهد.

۲.۳ تقریب پاده

وجود تاخیر در کنار مشتق کسری در سیستم‌های مرتبه کسری تاخیری بر پیچیدگی این مسائل افزوده است. یکی از راهکارها در این زمینه استفاده از تقریب پاده^۶ برای حذف جملات دارای تاخیر است. در بعضی از سیستم‌های کنترلی با تاخیر زمانی، برای حذف تاخیر، نیاز به جایگزینی تابع نمایی $e^{-\tau s}$ با یک تابع کسری است. یکی از مرسوم‌ترین این تقریب‌ها، تقریب پاده است. مفاهیم و کاربردهای تقریب پاده را می‌توان در [۶۱، ۶۲] مشاهده کرد.

¹Bhrawy

²Bernoulli wavelets

³Embedding approach

⁴Chelyshkov wavelets

⁵Block-pulse

⁶Padé approximation

فرض کنید تابع $f(x)$ دارای بسط مک لورن $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ است. از [۶۳] تقریب پایه $[m/n]$ برای تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$R_{[m/n]}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

که $P_m(x)$ و $Q_n(x)$ دو چندجمله‌ای به صورت زیر هستند

$$P_m(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_m x^m, \quad (5.3)$$

$$Q_n(x) = 1 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_n x^n.$$

ضرایب نامعلوم p_i , $i = 1, \dots, m$ و q_j , $j = 1, \dots, n$ در $R_{[m/n]}(x)$ می توانند با توجه به این که جمله اول در بسط مک لورن زیر بایستی صفر باشند، محاسبه شوند

$$f(x) - \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = O(x^{m+n+1}). \quad (6.3)$$

بنابراین با توجه به (۵.۳) می توان (۶.۳) را در $Q_n(x)$ ضرب کرده و در نتیجه داریم

$$f(x)Q_n(x) - P_m(x) \simeq 0.$$

با جایگذاری دو چندجمله‌ای در این عبارت و مقایسه ضرایب، به دستگاهی از $(m+n+1)$ معادله خطی می رسیم که می تواند به صورت ماتریسی زیر بیان شود

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_m & -a_{m-1} & \dots & -a_{m-n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{m+1} & -a_m & \dots & -a_{m-n+2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{m+2} & -a_{m+1} & \dots & -a_{m-n+3} \\ & & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{m+n-1} & -a_{m+n-2} & \dots & -a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ a_{m+1} \\ a_{m+2} \\ \vdots \\ a_{m+n} \end{bmatrix}.$$

با به کارگیری روش فوق، تقریب پایه $[1/1]$ برای تابع نمایی به صورت زیر است

$$e^x \simeq \frac{1 + \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}}. \quad (7.3)$$

قضیه ۱.۲.۳. [۶۳] تقریب پایه $[m/n]$ برای تابع $f(x)$ یکتاست.

تعریف ۱.۲.۳. [۶۳] تابع $f(z)$ یک سری استیلجس^۷ است اگر قابل نمایش به صورت زیر باشد

$$f(z) = \int_0^{R^{-1}} \frac{d\psi(t)}{1-tz} = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i z^i,$$

⁷Stieltjes series

که $d\psi(t)$ تابعی کراندار و غیر نزولی به صورت زیر است

$$\mu_i = \int_0^{R^{-1}} x^i d\psi(t).$$

قضیه ۲.۲.۳. [۶۳] فرض کنید $f(t)$ سری استیلاچس غیرکسری با شعاع همگرایی R و $R_{[n+k/k]}(t)$ تقریب پاده تابع $f(t)$ روی بازه $[-\infty, R]$ باشد. در این صورت داریم

$$\forall n \geq 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} R_{[n+k/k]}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_{[k/n+k]}(t) = f(t), \quad (۸.۳)$$

$$\forall k \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_{[n+k/k]}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{[k/n+k]}(t) = f(t). \quad (۹.۳)$$

۳.۳ تقریب پاده برای مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری

در این قسمت تقریب پاده را برای تبدیل مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری (۱.۳)–(۴.۳) به یک مسأله بدون تاخیر بیان می‌کنیم.

فرض کنید $X(s)$ تبدیل لاپلاس دوطرفه [۶۴] برای $x(t)$ باشد، یعنی

$$x(t) \Leftrightarrow X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} x(t) dt. \quad (۱۰.۳)$$

با توجه به تعریف لاپلاس دوطرفه برای $x(t)$ ، تبدیلات لاپلاس دوطرفه $\dot{x}(t)$ و $x(t - \sigma)$ به صورت زیر به دست می‌آیند

$$x(t - \sigma) \Leftrightarrow e^{-s\sigma} X(s), \quad (۱۱.۳)$$

$$\dot{x}(t) \Leftrightarrow sX(s). \quad (۱۲.۳)$$

برای حذف تاخیر تعریف می‌کنیم $y(t) = x(t - \sigma)$ و $y(t) \Leftrightarrow Y(s)$. تبدیلات لاپلاس $Y(s)$ و $X(s)$ توسط رابطه زیر به هم مرتبط می‌شوند

$$Y(s) = e^{-s\sigma} X(s). \quad (۱۳.۳)$$

با استفاده از تقریب پاده مرتبه اول، (۱۳.۳) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$Y(s) = \frac{\frac{\sigma}{\sigma} - s}{\frac{\sigma}{\sigma} + s} X(s), \quad (۱۴.۳)$$

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma} + s\right) Y(s) = \left(\frac{\sigma}{\sigma} - s\right) X(s). \quad (۱۵.۳)$$

با تبدیل لاپلاس معکوس گرفتن از طرفین (۱۵.۳) داریم

$$\dot{y}(t) = \frac{\sigma}{\sigma} (x(t) - y(t)) - \dot{x}(t). \quad (۱۶.۳)$$

برای تاخیر در متغیر کنترل به طور مشابه می‌توان نوشت $w(t) = u(t - \tau)$ و $w(t) \Leftrightarrow W(s)$ در نتیجه

$$W(s) = \frac{\frac{2}{\tau} - s}{\frac{2}{\tau} + s} U(s), \quad (۱۷.۳)$$

$$\left(\frac{2}{\tau} + s\right)W(s) = \left(\frac{2}{\tau} - s\right)U(s). \quad (۱۸.۳)$$

با تبدیل لاپلاس معکوس گرفتن از طرفین (۱۸.۳) داریم

$$\dot{w}(t) = \frac{2}{\tau}(u(t) - w(t)) - \dot{u}(t). \quad (۱۹.۳)$$

برای بهبود دقت تقریب می‌توان تاخیر σ و τ را به بخش‌های کوچک‌تری تقسیم کرد. برای مثال می‌توان نوشت

$$y(t) \triangleq x\left(t - \frac{\sigma}{2}\right), \quad (۲۰.۳)$$

$$z(t) \triangleq y\left(t - \frac{\sigma}{2}\right) = x(t - \sigma), \quad (۲۱.۳)$$

$$w(t) \triangleq u\left(t - \frac{\tau}{2}\right), \quad (۲۲.۳)$$

$$v(t) \triangleq w\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = u(t - \tau). \quad (۲۳.۳)$$

با استفاده مجدد تقریب پاده مرتبه اول داریم

$$\dot{y}(t) = \frac{2}{\sigma}(x(t) - y(t)) - \dot{x}(t),$$

$$\dot{z}(t) = \frac{2}{\sigma}(2y(t) - z(t) - x(t)) + \dot{x}(t),$$

$$\dot{w}(t) = \frac{2}{\tau}(u(t) - w(t)) - \dot{u}(t),$$

$$\dot{v}(t) = \frac{2}{\tau}(2w(t) - v(t) - u(t)) + \dot{u}(t),$$

و شرایط ابتدایی

$$x(\circ) = \phi(\circ), \quad y(\circ) = \phi\left(-\frac{\sigma}{2}\right), \quad z(\circ) = \phi(-\sigma),$$

$$u(\circ) = \psi(\circ), \quad w(\circ) = \psi\left(-\frac{\tau}{2}\right), \quad v(\circ) = \psi(-\tau).$$

با استفاده از تبدیلات فوق، مسأله تاخیری (۱.۳)–(۴.۳) با مسأله غیرتاخیری زیر تقریب

زده می‌شود

$$\text{Minimize } J = F_{\circ}(t_f, x(t_f)) + \int_{\circ}^{t_f} F(t, x(t), z(t), u(t), v(t)) dt, \quad (24.3)$$

$$\text{subject to } {}^C D_t^{\alpha} x(t) = G(t, x(t), z(t), u(t), v(t)), \quad (25.3)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\mathcal{F}}{\sigma}(x(t) - y(t)) - \dot{x}(t), \quad (26.3)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{\mathcal{F}}{\sigma}(\mathcal{Y}y(t) - z(t) - x(t)) + \dot{x}(t), \quad (27.3)$$

$$\dot{w}(t) = \frac{\mathcal{F}}{\tau}(u(t) - w(t)) - \dot{u}(t), \quad (28.3)$$

$$\dot{v}(t) = \frac{\mathcal{F}}{\tau}(\mathcal{Y}w(t) - v(t) - u(t)) + \dot{u}(t), \quad (29.3)$$

$$x(\circ) = \phi(\circ), \quad y(\circ) = \phi(-\frac{\sigma}{\mathcal{Y}}), \quad z(\circ) = \phi(-\sigma), \quad (30.3)$$

$$u(\circ) = \psi(\circ), \quad w(\circ) = \psi(-\frac{\tau}{\mathcal{Y}}), \quad v(\circ) = \psi(-\tau). \quad (31.3)$$

با استفاده از اصل بیشینه پونتریاگین و با استفاده از شرایط لازم بهینگی ارائه شده در فصل ۱، برای نوشتن شرایط لازم بهینگی برای مسأله کنترل بهینه کسری (۲۴.۳)–(۳۱.۳) به صورت زیر عمل می‌کنیم.

ابتدا تابع همیلتونی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} H(t, x(t), y(t), z(t), w(t), v(t), \lambda(t), \gamma(t), \mu(t), \xi(t), \eta(t), u(t)) &= F(t, x(t), z(t), u(t), v(t)) \\ &+ \lambda(t)G(t, x(t), z(t), u(t), v(t)) + \gamma(t)\left(\frac{\mathcal{F}}{\sigma}(x(t) - y(t)) - \dot{x}(t)\right) \\ &+ \mu(t)\left(\frac{\mathcal{F}}{\sigma}(\mathcal{Y}y(t) - z(t) - x(t)) + \dot{x}(t)\right) + \xi(t)\left(\frac{\mathcal{F}}{\tau}(u(t) - w(t)) - \dot{u}(t)\right) \\ &+ \eta(t)\left(\frac{\mathcal{F}}{\tau}(\mathcal{Y}w(t) - v(t) - u(t)) + \dot{u}(t)\right), \end{aligned}$$

که در آن $\lambda(t)$ ، $\gamma(t)$ ، $\mu(t)$ ، $\xi(t)$ و $\eta(t)$ ضرب‌گرهای لاگرانژ هستند. شرایط لازم بهینگی برای

مسئله (۲۴.۳) - (۳۱.۳) عبارت است از

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial x} = {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda(t), \\ \frac{\partial H}{\partial y} = -\dot{\gamma}(t), \\ \frac{\partial H}{\partial z} = -\dot{\mu}(t), \\ \frac{\partial H}{\partial w} = -\dot{\xi}(t), \\ \frac{\partial H}{\partial v} = -\dot{\eta}(t), \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} = {}^C D_t^\alpha x(t), \\ \frac{\partial H}{\partial \gamma} = \dot{y}(t), \\ \frac{\partial H}{\partial \mu} = \dot{z}(t), \\ \frac{\partial H}{\partial \xi} = \dot{w}(t), \\ \frac{\partial H}{\partial \eta} = \dot{v}(t), \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial F_0}{\partial x} \Big|_{t_f} = \lambda(t_f). \end{array} \right. \quad (32.3)$$

در ادامه قصد داریم از دو مدل شبکه عصبی برای حل (۳۲.۳) استفاده کنیم.

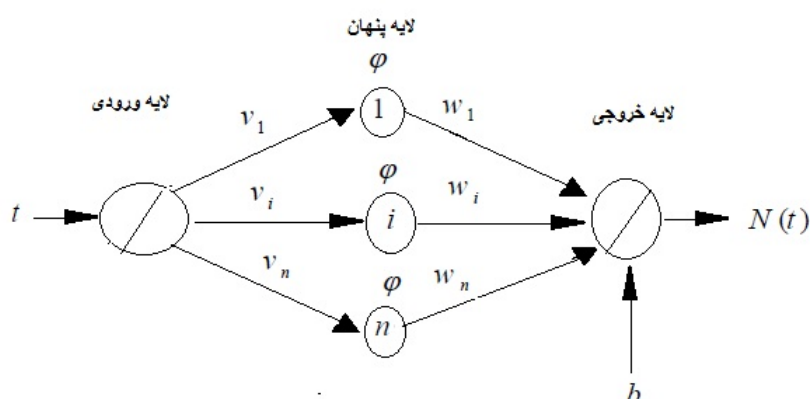
۴.۳ مدل‌های شبکه عصبی پیشنهادی برای حل سیستم بهینگی

در این بخش دو مدل شبکه عصبی پرسپترون را معرفی کرده و سپس از آن‌ها برای حل سیستم بهینگی (۳۲.۳) استفاده می‌کنیم.

۱.۴.۳ شبکه عصبی سری توانی کسری

شکل ۱.۳ ساختار یک شبکه عصبی پرسپترون با یک ورودی، n نرون پنهان و یک خروجی را نشان می‌دهد [۶۵]. رابطه ورودی-خروجی هر واحد در شبکه عصبی با شکل ۱.۳ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

- واحد ورودی $o^1 = t$
- واحدهای پنهان $o_i^2 = \varphi(\text{net}_i), \text{net}_i = t \cdot v_i, i = 1, \dots, n$
- واحد خروجی $N(t) = \sum_{i=1}^n (o_i^2 \cdot w_i) + b$



شکل ۱.۳: شبکه عصبی پرسپترون پیشنهادی

که در آن n تعداد نرون‌های لایه پنهان، v_i پارامتر وزن از واحد ورودی به واحد i -ام لایه پنهان، w_i پارامتر وزن از واحد i -ام لایه پنهان به واحد خروجی، b وزن بایاس و φ تابع فعال‌ساز است.

روش سری توانی یک روش کارا برای حل انواع مختلفی از معادلات دیفرانسیل است [۶۶]، سری توانی به صورت

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (t - t_0)^{i\alpha} = a_0 + a_1 (t - t_0)^\alpha + a_2 (t - t_0)^{2\alpha} + \dots \quad (۳۳.۳)$$

که در آن $0 \leq n-1 < \alpha < n$ و $t \geq t_0$ یک سری توانی کسری^۸ حول t_0 نامیده می‌شود که در آن a_i ها ($i = 0, 1, 2, \dots$) ضرایب سری هستند.

این روش، جواب $x(t)$ را به یک سری همگرا از مؤلفه‌های جواب تجزیه می‌کند. بنابراین می‌توان جواب $x(t)$ را به فرم یک سری توانی کسری نوشت

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{i\alpha}. \quad (۳۴.۳)$$

قرار دهید $a_0 = b$. بنابراین معادله (۳۴.۳) به صورت زیر نوشته می‌شود

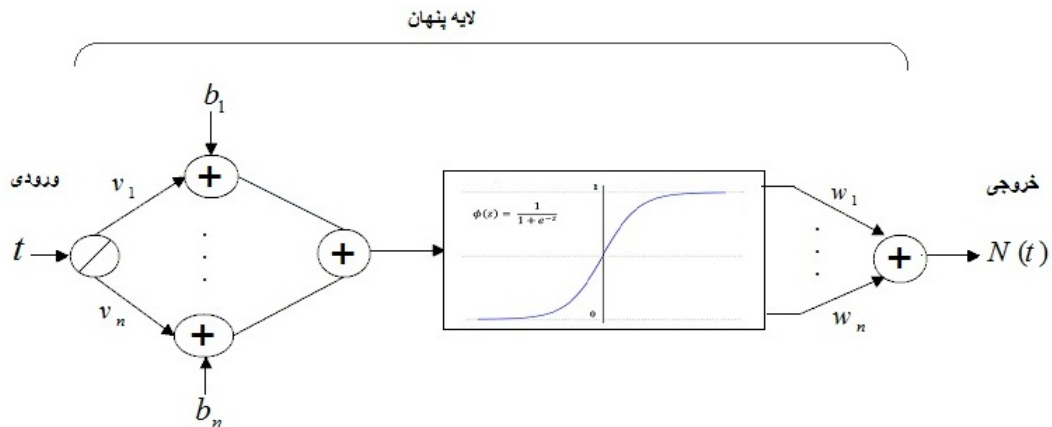
$$x(t) = b + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{i\alpha}. \quad (۳۵.۳)$$

اگر تابع جواب به صورت یک سری توانی توسعه یافته قطع شده^۹ بیان شود، تابع جواب می‌تواند به آسانی با پیدا کردن ضرایب مجهول a_i ، برای $i = 1, 2, \dots, n$ تقریب زده شود. بنابراین جواب $x(t)$ توسط سری قطع شده

$$x(t) = b + \sum_{i=1}^n a_i t^{i\alpha}, \quad (۳۶.۳)$$

^۸Fractional power series

^۹ Truncated



شکل ۲.۳: شبکه عصبی با تابع سیگموئید

تقریب زده می‌شود. با جایگزین کردن $v_i = t^{i-1}$ و $w_i = a_i$ و تابع فعال ساز $\varphi(t) = t^\alpha$ در (۳۶.۳)، می‌توان استدلال کرد که سری توانی کسری توسعه یافته قطع شده معادل با خروجی شبکه عصبی طراحی شده به صورت زیر است

$$N(t) = b + \sum_{i=1}^n w_i \varphi(z_i), \quad z_i = v_i t, \quad v_i = t^{i-1}. \quad (37.3)$$

به بیان ساده‌تر رابطه (۳۷.۳) با عبارت زیر معادل است

$$N(t) = b + \sum_{i=1}^n w_i \varphi(z_i), \quad z_i = t^i. \quad (38.3)$$

۲.۴.۳ شبکه عصبی با تابع فعال ساز سیگموئید

شکل ۲.۳ ساختار شبکه عصبی پرسپترون با تابع فعالیت^{۱۰} سیگموئید را نشان می‌دهد که در آن خروجی شبکه به صورت زیر است

$$N(t) = \sum_{i=1}^n w_i \sigma(s_i), \quad s_i = v_i t + b_i, \quad (39.3)$$

که در آن n تعداد نرون‌های لایه پنهان، w_i وزن لایه خروجی، v_i وزن لایه ورودی و b_i وزن بایاس هستند. همچنین $\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$ تابع فعالیت سیستم است که به صورت یک تابع سیگموئید در نظر گرفته می‌شود.

اکنون پس از معرفی این دو شبکه انتظار می‌رود که شبکه سری توانی کسری به دلیل ساختار ساده‌تر و حجم محاسبات کمتر تقریب بهتری از جواب مسأله را ارائه دهد. درحقیقت، با استفاده از سری توانی کسری می‌توان جواب بسیاری از سیستم‌ها را با صرف نظر کردن از جملاتی با درجه بالاتر حول نقطه تعادل تقریب زد.

¹⁰ Activation function

۳.۴.۳ تقریب توابع و جواب‌های آزمایشی با استفاده از دو مدل شبکه پیشنهادی

در این بخش با استفاده از شبکه‌های پیشنهادی سیستم بهینگی (۳۲.۳) را تقریب زده و به حل مسأله می‌پردازیم. اکنون با در نظر گرفتن شرایط اولیه و نهایی در مسأله (۲۴.۳)–(۳۱.۳) جواب‌های آزمایشی^{۱۱} را برای تابع‌های وضعیت، کنترل و ضرب‌گرهای لاگرانژ به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\left\{ \begin{array}{l} x_T = x_o + (t - t_o)N_x(t), \\ y_T = y_o + (t - t_o)N_y(t), \\ z_T = z_o + (t - t_o)N_z(t), \\ w_T = w_o + (t - t_o)N_w(t), \\ v_T = v_o + (t - t_o)N_v(t), \\ \lambda_T = \frac{\partial F_o}{\partial x_T} \Big|_{t_f} + (t - t_f)N_\lambda(t), \\ \gamma_T = (t - t_f)N_\gamma(t), \\ \mu_T = (t - t_f)N_\mu(t), \\ \xi_T = (t - t_f)N_\xi(t), \\ \eta_T = (t - t_f)N_\eta(t), \\ u_T = u_o + (t - t_o)N_u(t), \end{array} \right. \quad (۴۰.۳)$$

^{۱۱}Trial solution

که با استفاده از مدل شبکه عصبی سری توانی کسری داریم

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x(t) = b_x + \sum_{i=1}^n w_x^i \varphi(z_x^i), \quad z_x^i = t^i, \\ N_y(t) = b_y + \sum_{i=1}^n w_y^i \varphi(z_y^i), \quad z_y^i = t^i, \\ N_z(t) = b_z + \sum_{i=1}^n w_z^i \varphi(z_z^i), \quad z_z^i = t^i, \\ N_w(t) = b_w + \sum_{i=1}^n w_w^i \varphi(z_w^i), \quad z_w^i = t^i, \\ N_v(t) = b_v + \sum_{i=1}^n w_v^i \varphi(z_v^i), \quad z_v^i = t^i, \\ N_\lambda(t) = b_\lambda + \sum_{i=1}^n w_\lambda^i \varphi(z_\lambda^i), \quad z_\lambda^i = t^i, \\ N_\gamma(t) = b_\gamma + \sum_{i=1}^n w_\gamma^i \varphi(z_\gamma^i), \quad z_\gamma^i = t^i, \\ N_\mu(t) = b_\mu + \sum_{i=1}^n w_\mu^i \varphi(z_\mu^i), \quad z_\mu^i = t^i, \\ N_\xi(t) = b_\xi + \sum_{i=1}^n w_\xi^i \varphi(z_\xi^i), \quad z_\xi^i = t^i, \\ N_\eta(t) = b_\eta + \sum_{i=1}^n w_\eta^i \varphi(z_\eta^i), \quad z_\eta^i = t^i, \\ N_u(t) = b_u + \sum_{i=1}^n w_u^i \varphi(z_u^i), \quad z_u^i = t^i. \end{array} \right. \quad (41.3)$$

که در آن $\alpha \in [0, 1]$ ، $\varphi(z) = z^\alpha$ تابع فعال‌ساز است. جواب‌های تقریبی (۴۰.۳) باید در شرط بهینگی (۳۲.۳) صدق کنند. بنابراین داریم

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_T}{\partial x_T} = {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial y_T} = -\dot{\gamma}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial z_T} = -\dot{\mu}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial w_T} = -\dot{\xi}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial v_T} = -\dot{\eta}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial \lambda_T} = {}^C D_t^\alpha x_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial \gamma_T} = \dot{y}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial \mu_T} = \dot{z}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial \xi_T} = \dot{w}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial \eta_T} = \dot{v}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial u_T} = 0, \\ \frac{\partial F_0}{\partial x_T} \Big|_{t_f} = \lambda_T(t_f), \end{array} \right. \quad (42.3)$$

که در آن

$$H_T = H(t, x_T, y_T, z_T, w_T, v_T, \lambda_T, \gamma_T, \mu_T, \xi_T, \eta_T, u_T).$$

حال با توجه به ساختار جواب تقریبی بر حسب شبکه عصبی سری توانی کسری که به صورت یک عبارت چندجمله‌ای است عبارت مشتق چپ کاپاتو ${}^C D_t^\alpha x_T(t)$ در (۴۲.۳) را می‌توان به آسانی مطابق با رابطه (۸.۱) به دست آورد. برای محاسبه مشتق راست کاپاتو ${}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_T(t)$ با انتگرال‌گیری ریمن-لیوویل از طرفین معادله اول در رابطه (۴۲.۳) داریم

$${}^R I_{t_f}^{\alpha C} D_{t_f}^\alpha \lambda_T(t) = {}^R I_{t_f}^\alpha \frac{\partial H_T}{\partial x_T}.$$

حال با استفاده از (۱۱.۱) داریم

$$\lambda_T(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\lambda_T^{(k)}(t_f)}{k!} (t_f - t)^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{t_f} (\tau - t)^{\alpha-1} \frac{\partial H_T}{\partial x_T} d\tau. \quad (43.3)$$

در حالتی که $0 < \alpha < 1$ رابطه (۴۳.۳) با معادله انتگرال ولترا زیر معادل است

$$\lambda_T(t) = \lambda_T(t_f) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{t_f} (\tau - t)^{\alpha-1} \frac{\partial H_T}{\partial x_T} d\tau. \quad (44.3)$$

در نهایت برای حل سیستم بهینگی (۴۲.۳)، t را روی بازه $[0, t_f]$ به m نقطه با فاصله مساوی گسسته‌سازی می‌کنیم و سپس مسأله نامقید زیر را حل می‌کنیم

$$\text{Minimize}_{\tilde{y}} E(\tilde{y}) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^m \{E_i(t_k, \tilde{y})\}, \quad (45.3)$$

که در آن

$$\tilde{y} = (w_x, w_y, w_z, w_w, w_v, w_\lambda, w_\gamma, w_\mu, w_\xi, w_\eta, w_u, b_x, b_y, b_z, b_w, b_v, b_\lambda, b_\gamma, b_\mu, b_\xi, b_\eta, b_u)^T \in \mathbb{R}^{(n+1)(\ell p + \delta q)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\lambda}(t_k, \tilde{y}) = \left[\lambda_T(t_k) - \lambda_T(t_f) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t_f} (\tau - t_k)^{\alpha-1} \frac{\partial H_T}{\partial x_T} d\tau \right]^2, \\ E_{\gamma}(t_k, \tilde{y}) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial \gamma_T} - \dot{y}_T(t_k) \right]^2, \\ E_{\mu}(t_k, \tilde{y}) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial \mu_T} - \dot{z}_T(t_k) \right]^2, \\ E_{\xi}(t_k, \tilde{y}) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial \xi_T} - \dot{w}_T(t_k) \right]^2, \\ E_{\eta}(t_k, \tilde{y}) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial \eta_T} - \dot{v}_T(t_k) \right]^2, \\ E_{\rho}(t_k, \tilde{y}) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial \lambda_T} - {}^C D_t^\alpha x_T(t_k) \right]^2, \\ E_{\nu}(t_k, \tilde{y}) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial y_T} + \dot{\gamma}_T(t_k) \right]^2, \\ E_{\lambda}(t_k, \tilde{y}) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial z_T} + \dot{\mu}_T(t_k) \right]^2, \\ E_{\rho}(t_k, \tilde{y}) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial w_T} + \dot{\xi}_T(t_k) \right]^2, \\ E_{\nu}(t_k, \tilde{y}) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial v_T} + \dot{\eta}_T(t_k) \right]^2, \\ E_{\lambda}(t_k, \tilde{y}) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial u_T} \right]^2. \end{array} \right. \quad (46.3)$$

ملاحظه ۱.۴.۳. در شبکه عصبی سری توانی کسری به دلیل ساختار چندجمله‌ای کسری جواب‌های آزمایشی، می‌توان از (۹.۱) به عنوان یک روش مناسب دیگر برای محاسبه مشتق کسری راست کاپاتو ${}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_T(t)$ استفاده کرد. مزیت استفاده از این تعریف این است که در آن به روش‌های عددی انتگرال‌گیری نیازی نیست.

در ادامه به عنوان رهیافتی دیگر از شبکه‌های عصبی پرسپترون، از شبکه عصبی با تابع فعال‌ساز سیگموئید برای تقریب سیستم بهینگی جواب‌های آزمایشی در (۴۲.۳) استفاده می‌کنیم. در این حالت، جواب‌های آزمایشی برای متغیرهای وضعیت، کنترل و ضرب‌گرهای لاگرانژ با روندی مشابه شبکه عصبی سری توانی کسری به دست می‌آیند، با این تفاوت که در آن‌ها تابع فعال‌ساز از حالت سری توانی کسری $f(z) = z^\alpha$ به تابع سیگموئید $f(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$ تغییر می‌یابد. به طور مثال، جواب آزمایشی برای متغیر وضعیت به صورت زیر بیان می‌شود

$$x_T = x_o + (t - t_o)N_x(t), \quad (47.3)$$

که در آن

$$N_x(t) = \sum_{i=1}^n w_x^i \sigma(s_x^i), \quad s_x^i = v_x^i t + b_x^i. \quad (48.3)$$

دیگر جواب‌های آزمایشی نیز به طور مشابه با (۴۷.۳) بیان می‌شوند و از نوشتن آن صرف نظر می‌شود.

لم ۱.۴.۳. اگر

$$\tilde{y}^* = (w_x^*, w_y^*, w_z^*, w_w^*, w_v^*, w_\lambda^*, w_\gamma^*, w_\mu^*, w_\xi^*, w_\eta^*, w_u^*, b_x^*, b_y^*, b_z^*, b_w^*, b_v^*, b_\lambda^*, b_\gamma^*, b_\mu^*, b_\xi^*, b_\eta^*, b_u^*)^T$$

در دستگاه زیر صدق کند

$$\kappa(\tilde{y}) = \begin{bmatrix} E_{\lambda_1}(t_1, \tilde{y}) \\ \vdots \\ E_{\lambda_1}(t_m, \tilde{y}) \\ E_{\gamma_1}(t_1, \tilde{y}) \\ \vdots \\ E_{\gamma_1}(t_m, \tilde{y}) \\ E_{\mu_1}(t_1, \tilde{y}) \\ \vdots \\ E_{\mu_1}(t_m, \tilde{y}) \\ \vdots \\ E_{\xi_1}(t_1, \tilde{y}) \\ \vdots \\ E_{\xi_1}(t_m, \tilde{y}) \end{bmatrix} = \circ, \quad (49.3)$$

آن گاه \tilde{y}^* جواب بهینه مسأله (۴۵.۳) است.

برهان. فرض کنید $\kappa(\tilde{y}^*) = \circ$. آن گاه برای $i = 1, 2, \dots, 11$ و $k = 1, \dots, m$ داریم $E_i(t_k, \tilde{y}^*) = \circ$. چون در (۴۵.۳) $E(\tilde{y}) \geq \circ$ ، بنابراین \tilde{y}^* یک جواب بهینه (۴۵.۳) است. □

با توجه به لم بیان شده، مسأله بهینه‌سازی (۴۵.۳) معادل مسأله زیر است

$$\text{Minimize}_{\tilde{y}} E(\tilde{y}) = \frac{1}{r} \|\kappa(\tilde{y})\|^2. \quad (50.3)$$

حال این مسأله بهینه‌سازی را می‌توان با هر روش بهینه‌سازی ریاضی [۶۸] و روش‌های ابتکاری [۶۹] حل کرد.

۵.۳ پایداری و همگرایی روش

در $\tilde{y}^* = (w_x^*, w_y^*, w_z^*, w_w^*, w_v^*, w_\lambda^*, w_\gamma^*, w_\mu^*, w_\xi^*, w_\eta^*, w_u^*, b_x^*, b_y^*, b_z^*, b_w^*, b_v^*, b_\lambda^*, b_\gamma^*, b_\mu^*, b_\xi^*, b_\eta^*, b_u^*)^T$ نظر بگیرید به طوری که مولفه‌های آن وابسته به زمان باشند. هدف از این بخش طراحی یک مدل دینامیکی است به گونه‌ای که به نقطه تعادل خود، که نقطه تعادل از تابع انرژی $E(\tilde{y})$

است همگرا شود. برای حل مسأله (۴۵.۳) سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} = -\rho \nabla E(\tilde{y}(t)), \quad \rho > 0, \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0, \end{cases} \quad (۵۱.۳)$$

که در آن ρ نرخ همگرایی (۵۱.۳) را نشان می‌دهد.

اکنون برخی از نتایج اولیه در زمینه معادلات دیفرانسیل معمولی که بعدها مورد استفاده قرار می‌گیرد و در تجزیه و تحلیل‌های بعدی نقش مهمی را ایفا می‌کنند یادآوری می‌کنیم. در ادامه مطلب $\|\cdot\|$ ، نرم L^2 از \mathbb{R}^p ، T ، ترانهاده و $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T$. اگر $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ ، تابع مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $\nabla F \in \mathbb{R}^p$ ، گرادیان F است. برای هر نگاشت مشتق‌پذیر $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ، $F = (F_1, \dots, F_q)^T$ ، $\nabla F = [\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_q(x)] \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ، ژاکوبین F در x است.

تعریف ۱.۵.۳. فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ یک همسایگی باز از \bar{x} باشد. یک تابع مشتق‌پذیر $W: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع لیاپانف برای سیستم $\dot{x} = F(x)$ در \bar{x} گویند اگر در شرایط زیر صدق کند

$$\begin{cases} W(\bar{x}) = 0, \quad W(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega \setminus \{\bar{x}\}, \\ \frac{dW(x(t))}{dt} = [\nabla W(x(t))]^T F(x(t)) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

لم ۱.۵.۳ الف. سیستم دینامیکی $\dot{x} = F(x)$ در نقطه تعادل تنهای x^* پایدار به مفهوم لیاپانف است اگر یک تابع لیاپانف W در یک همسایگی Ω^* از x^* وجود داشته باشد.
ب) سیستم دینامیکی $\dot{x} = F(x)$ در نقطه تعادل تنهای x^* پایدار مجانبی است اگر یک تابع لیاپانف W در یک همسایگی Ω^* از x^* وجود داشته باشد به طوری که

$$\frac{dW(x(t))}{dt} < 0, \quad \forall x \in \Omega^* \setminus \{x^*\}.$$

تعریف ۲.۵.۳. اگر X^* مجموعه نقاط تعادل سیستم دینامیکی $\dot{x} = F(x)$ باشد آن‌گاه این سیستم را همگرای سراسری به مجموعه X^* گویند هرگاه جواب دلخواه $x(t)$ در شرط زیر صدق کند

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), X^*) = 0,$$

که در آن $\text{dist}(x(t), X^*) = \inf_{\tilde{y} \in X^*} \|x - \tilde{y}\|_2$. در حالت خاص، اگر مجموعه X^* تنها شامل یک نقطه تعادل x^* باشد آن‌گاه $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$ و سیستم $\dot{x} = F(x)$ در x^* پایدار مجانبی سراسری به مفهوم لیاپانف است.

لم ۲.۵.۳. اگر A یک ماتریس نامفرد $l \times l$ باشد آن‌گاه دستگاه همگن $AX = 0$ تنها دارای جواب بدیهی $X = 0$ است.

قضیه ۱.۵.۳. مسأله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(x), \\ & \text{subject to} && x \in \mathbb{R}^p, \end{aligned}$$

که در آن $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $x^* \in \mathbb{R}^p$ مشتق‌پذیر است. اگر x^* یک مینیمم محلی این مسأله باشد آن‌گاه $\nabla f(x^*) = 0$.

قضیه ۲.۵.۳. فرض کنید \tilde{y}^* یک نقطه تعادل سیستم (۵۱.۳) باشد و ماتریس ژاکوبین $\kappa(\tilde{y})$ در (۴۹.۳) نامنفرد باشد. آن‌گاه \tilde{y}^* یک جواب بهینه (۵۰.۳) است. از طرفی اگر \tilde{y}^* یک جواب بهینه (۵۰.۳) باشد آن‌گاه \tilde{y}^* یک نقطه تعادل سیستم دینامیکی (۵۱.۳) است.

برهان. فرض کنید \tilde{y}^* یک نقطه تعادل سیستم (۵۱.۳) باشد. واضح است که $\nabla E(\tilde{y}^*) = 0$. با یک محاسبه ساده می‌توان نشان داد $\nabla \kappa(\tilde{y}) = (\nabla \kappa(\tilde{y}))^T \kappa(\tilde{y})$ ، که در آن $\nabla \kappa(\tilde{y})$ ماتریس ژاکوبین $\kappa(\tilde{y})$ است. با استفاده از لم ۲.۵.۳ داریم $\kappa(\tilde{y}^*) = 0$. پس \tilde{y}^* یک جواب بهینه (۵۰.۳) است. با استفاده از قضیه ۱.۵.۳ عکس قضیه نیز ثابت می‌شود. \square

قضیه ۳.۵.۳. فرض کنید \tilde{y}^* یک نقطه تعادل تنهای سیستم دینامیکی (۵۱.۳) باشد و ماتریس ژاکوبین $\kappa(\tilde{y}^*)$ در (۴۹.۳) نامنفرد باشد. آن‌گاه سیستم (۵۱.۳) در \tilde{y}^* پایدار مجانبی است.

برهان. ابتدا توجه کنید که $E(\tilde{y}) \geq 0$ و $E(\tilde{y}^*) = 0$. از طرفی، چون \tilde{y}^* یک نقطه تعادل تنهای سیستم دینامیکی (۵۱.۳) است پس یک همسایگی $\Omega^* \subseteq \mathbb{R}^{(n+1)(p+\delta q)}$ از \tilde{y}^* وجود دارد به طوری که $\nabla E(\tilde{y}) \neq 0$ ، $\nabla E(\tilde{y}^*) = 0$ ، ادعا می‌کنیم که برای هر $\tilde{y} \in \Omega^* \setminus \{\tilde{y}^*\}$ داریم $E(\tilde{y}) > 0$. زیرا در غیر این صورت اگر یک $\tilde{y} \in \Omega^* \setminus \{\tilde{y}^*\}$ وجود داشته باشد که در $E(\tilde{y}) = 0$ صدق کند داریم $\nabla E(\tilde{y}) = 0$. یعنی \tilde{y} یک نقطه تعادل سیستم (۵۱.۳) است که به وضوح با فرض این که \tilde{y}^* نقطه تعادل تنها برای Ω^* باشد در تناقض است. علاوه بر این

$$\begin{aligned} \frac{dE(\tilde{y}(t))}{dt} &= \nabla[E(\tilde{y})]^T \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} \\ &= -\rho \|\nabla E(\tilde{y})\|^2 \leq 0, \quad \forall \tilde{y} \in \Omega^*. \end{aligned} \tag{۵۲.۳}$$

در نتیجه

$$\frac{dE(\tilde{y}(t))}{dt} < 0, \quad \forall \tilde{y}(t) \in \Omega^*, \quad \tilde{y}(t) \neq \tilde{y}^*.$$

با استفاده از لم ۱.۵.۳ قسمت (ب) سیستم (۵۱.۳) در $\tilde{y}^*(t)$ پایدار مجانبی است. \square

گزاره ۱.۵.۳. الف) به ازای هر نقطه شروع $\tilde{y}_0 = \tilde{y}(t_0)$ ، دقیقاً یک جواب ماکسیمال $\tilde{y}(t, \tilde{y}_0)$ با $t \in [t_0, \beta(\tilde{y}_0))$ برای سیستم (۵۱.۳) وجود دارد.

ب) اگر مجموعه تراز $L(\tilde{y}_0) = \{\tilde{y} \mid E(\tilde{y}) \leq E(\tilde{y}_0)\}$ کراندار باشد آن‌گاه داریم $\beta(\tilde{y}_0) = +\infty$.

برهان. الف) چون κ دیفرانسیل پذیر پیوسته است، پس $\nabla \kappa$ نیز پیوسته است. به این ترتیب، $\nabla \kappa$ در یک همسایگی فشرده محلی از \tilde{y} کراندار است و این نتیجه می دهد که ∇E به طور محلی پیوسته لیپ شیتز است. سپس با استفاده از لم ۲.۱ در [۷۰] نتیجه مطلوب حاصل می شود. ب) فرض کنید مجموعه سطح ^{۱۲} $L(\tilde{y}_0)$ کراندار باشد. به برهان خلف فرض می کنیم $\beta(\tilde{y}_0) < \infty$ پس داریم

$$\lim_{t \rightarrow \beta(\tilde{y}_0)} \|\tilde{y}(t)\| = \infty.$$

فرض کنید

$$L^C(\tilde{y}_0) := \mathbb{R}^{(n+1)(p+\Delta q)} \setminus L(\tilde{y}_0),$$

و

$$\beta_0 := \inf\{s \geq 0 \mid s < \beta(\tilde{y}_0), \tilde{y}(s) \in L^C(\tilde{y}_0)\} < \infty.$$

می دانیم که $\tilde{y}(\beta_0)$ روی مرز $L(\tilde{y}_0)$ و $L^C(\tilde{y}_0)$ قرار دارد. می دانیم $L(\tilde{y}_0)$ فشرده است چون کراندار است و نیز به دلیل پیوستگی تابع $E(\tilde{y}_0)$ بسته است. بنابراین $\tilde{y}(\beta_0) \in L(\tilde{y}_0)$ و $\beta_0 < \beta(\tilde{y}_0)$. پس برای برخی مقادیر $s \in (\beta_0, \beta(\tilde{y}_0))$ داریم

$$E(\tilde{y}(s)) > E(\tilde{y}_0) > E(\tilde{y}(\beta_0)). \quad (53.3)$$

از طرفی طبق رابطه (52.3) تابع انرژی E روی بازه $[t_0, \beta(\tilde{y}_0))$ غیرصعودی است، که با رابطه (53.3) در تناقض است، در نتیجه اثبات (ب) کامل می شود.

□

قضیه ۴.۵.۳. فرض کنید $\tilde{y} = \tilde{y}(t, \tilde{y}_0)$ یک مسیر از (51.3) باشد. نقطه شروع به صورت $\tilde{y}_0 = \tilde{y}(0, \tilde{y}_0)$ باشد و مجموعه تراز $L(\tilde{y}_0) = \{\tilde{y} \mid E(\tilde{y}) \leq E(\tilde{y}_0)\}$ کراندار باشد آن گاه
 الف) مجموعه $\gamma^+(\tilde{y}_0) = \{\tilde{y}(t, \tilde{y}_0) \mid t \geq 0\}$ کراندار است.
 ب) یک \bar{y} وجود دارد به طوری که $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t, \tilde{y}_0) = \bar{y}$.
 پ) فرض کنید ماتریس ژاکوبین $\kappa(\tilde{y})$ در (49.3) نامنفرد باشد. آن گاه به ازای هر نقطه شروع $\kappa(\tilde{y})$ ، مسیر متناظر با سیستم دینامیکی (51.3) به جواب بهینه مسأله (50.3) همگرا است.

برهان. الف) با محاسبه مشتق تابع انرژی $E(\tilde{y})$ به صورت رابطه (52.3)، واضح است که $E(\tilde{y})$ با مسیر $\tilde{y} = \tilde{y}(t, \tilde{y}_0)$ ، $t \geq 0$ به صورت یکنواخت نزولی است. بنابراین داریم $\gamma^+(\tilde{y}_0) \subseteq L(\tilde{y}_0)$ ، یعنی مجموعه $\gamma^+(\tilde{y}_0) = \{\tilde{y}(t, \tilde{y}_0) \mid t \geq 0\}$ کراندار است.

¹²Level set

(ب) طبق (الف) مجموعه $\gamma^+(\tilde{y}_0) = \{\tilde{y}(t, \tilde{y}_0) | t \geq 0\}$ کراندار است. فرض می‌کنیم که دنباله $\{\tilde{t}_n\}$ ، $0 < \tilde{t}_1 < \dots < \tilde{t}_n \rightarrow \infty$ یک دنباله صعودی اکیدا یکنوا باشد. در نتیجه دنباله $\{\tilde{y}(\tilde{t}_n, \tilde{y}_0)\}$ یک دنباله کراندار است که از بینهایت نقطه تشکیل شده است. بنابراین یک نقطه حدی \bar{y} وجود دارد. به این معنا که یک زیردنباله $\{t_n\} \subseteq \{\tilde{t}_n\}$ ، $t_n \rightarrow \infty$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{y}(t_n, \tilde{y}_0) = \bar{y}$. با استفاده از قضیه لسال ۸.۸.۲ زمانی که $t \rightarrow \infty$ داریم

$$\tilde{y}(t, \tilde{y}_0) \rightarrow \bar{y} \in M,$$

که در آن M بزرگترین مجموعه در $K_1 = \{\tilde{y}(t, \tilde{y}_0) | \frac{dE(\tilde{y}(t, \tilde{y}_0))}{dt} = 0\}$ است. (پ) طبق (الف) و (ب)، \bar{y} یک نقطه تعادل سیستم (۵۱.۳) است. چون $\nabla \kappa$ نامنفرد است و از (۵۲.۳) داریم

$$\frac{dw_x}{dt} = \frac{dw_y}{dt} = \dots = \frac{db_u}{dt} = 0 \leftrightarrow \frac{dE(\tilde{y}(t))}{dt} = 0,$$

بنابراین با استفاده از $M \subseteq K_1 \subseteq D^*$ داریم $\bar{y} \in D^*$ که در آن D^* مجموعه جواب‌های بهینه (۵۰.۳) است. بنابراین به ازای هر نقطه شروع \tilde{y}_0 ، مسیر $\tilde{y}(t, \tilde{y}_0)$ از سیستم دینامیکی (۵۱.۳) به یک جواب بهینه از (۵۰.۳) همگرا می‌شود. \square

قضایای ۳.۵.۳ و ۴.۵.۳ نشان می‌دهند که مدل ارائه شده (۵۱.۳) پایدار مجانبی است و به یک جواب دقیق (۵۰.۳) همگرا است. به ویژه، اگر (۵۰.۳) دارای یک جواب یکتا باشد (یعنی یک نقطه تعادل منحصر به فرد در (۵۱.۳) وجود داشته باشد) آن‌گاه مسیر $\tilde{y}(t, \tilde{y}_0)$ همگرایی سراسری است.

۶.۳ نتایج عددی

در این قسمت، کارایی شبکه‌های عصبی پرسپترون پیشنهادی با چندین مثال عددی نشان داده شده است. نتایج به دست آمده برای مدل شبکه پیشنهادی سری توانی کسری در مقاله [۷۱] ارائه شده است. در همه مثال‌ها از نرم‌افزار GAMS برای شبیه‌سازی استفاده شده است.

مثال ۱.۶.۳. مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (x^2(t) + u^2(t)) dt, \quad (54.3)$$

$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x(t) = x(t-1) + u(t), \quad (55.3)$$

$$x(t) = 1, \quad t \in [-1, 0]. \quad (56.3)$$

اکنون این مسأله را با استفاده از دو مدل شبکه عصبی پیشنهادی حل می‌کنیم. ابتدا با

استفاده از تقریب پاده ارائه شده در بخش ۲.۳ فرض می‌کنیم

$$\begin{cases} y(t) \triangleq x(t - \frac{1}{\rho}), \\ z(t) \triangleq y(t - \frac{1}{\rho}) = x(t - 1). \end{cases} \quad (57.3)$$

سیستم دینامیکی کسری تاخیری (۵۵.۳) - (۵۶.۳) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = z(t) + u(t), \\ \dot{y}(t) = \mathcal{F}(x(t) - y(t)) - \dot{x}(t), \\ \dot{z}(t) = \mathcal{F}(\mathcal{Y}y(t) - z(t) - x(t)) + \dot{x}(t), \\ x(\circ) = 1, \quad y(\circ) = 1, \quad z(\circ) = 1. \end{cases} \quad (58.3)$$

تابع همیلتونی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} H(t, x, y, z, \lambda, \gamma, \mu, u) = & \frac{1}{\rho}(x^\mathcal{Y}(t) + u^\mathcal{Y}(t)) + \lambda(z(t) + u(t)) \\ & + \gamma(\mathcal{F}x(t) - \mathcal{F}y(t) - z(t) - u(t)) \\ & + \mu(\mathcal{A}y(t) - \mathcal{Z}z(t) - \mathcal{F}x(t) + u(t)). \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از شبکه‌های پیشنهادی جواب‌های آزمایشی را به صورت زیر در نظر

می‌گیریم

$$\begin{cases} x_T = 1 + tN_x(t), \\ y_T = 1 + tN_y(t), \\ z_T = 1 + tN_z(t), \\ \lambda_T = (t - 2)N_\lambda(t), \\ \gamma_T = (t - 2)N_\gamma(t), \\ \mu_T = (t - 2)N_\mu(t), \\ u_T = N_u(t). \end{cases} \quad (59.3)$$

مسئله کمینه‌سازی (۵۴.۳) با سیستم (۵۸.۳) با استفاده از شبکه‌های عصبی سری توانی کسری (شبکه اول) و شبکه عصبی با تابع سیگموئید (شبکه دوم) به ازای $n = 25$ و $m = 201$ حل شده و نتایج در جدول ۱.۳ گزارش شده است. این نتایج با مقادیر به دست آمده در [۷۲] مقایسه شده است. مقادیر تقریبی تابع هدف J با استفاده از شبکه‌های پیشنهادی در جدول ۲.۳ ارائه شده است و با دو روش دیگر مقایسه شده است. همچنین از مقایسه دو مدل شبکه پیشنهادی در این فصل، شبکه عصبی سری توانی کسری جواب بهتری را نتیجه داده است. مسیرهای تقریبی متناظر با متغیر وضعیت $x(t)$ و تابع کنترل $u(t)$ به ازای مقادیر مختلف α

جدول ۱.۳: نتایج تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۶.۳.

زمان	$x(t)$			$u(t)$		
	شبکه اول	شبکه دوم	روش [۷۲]	شبکه اول	شبکه دوم	روش [۷۲]
۰/۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰	-۱/۹۸۷۰	-۱/۹۷۸۵	-۱/۹۸۲۲
۰/۲۰	۰/۸۳۶۴	۰/۸۳۳۲	۰/۸۳۲۵	-۱/۶۵۶۶	-۱/۶۵۴۹	-۱/۶۵۷۸
۰/۴۱	۰/۷۲۹۹	۰/۷۳۴۹	۰/۷۳۳۸	-۱/۳۶۹۱	-۱/۳۷۶۸	-۱/۳۷۷۸
۰/۶۱	۰/۶۷۹۴	۰/۶۹۶۶	۰/۶۹۵۴	-۱/۱۱۴۳	-۱/۱۵۱۵	-۱/۱۵۱۶
۰/۸۱	۰/۶۷۰۳	۰/۶۸۸۲	۰/۶۸۷۲	-۱/۹۵۴۷	-۰/۹۵۴۹	-۰/۹۵۵۱
۱/۰۲	۰/۶۹۷۱	۰/۶۹۹۱	۰/۶۹۷۸	-۰/۷۹۴۷	-۰/۷۷۵۱	-۰/۷۷۵۱
۱/۲۲	۰/۷۳۲۱	۰/۷۲۴۴	۰/۷۲۳۰	-۰/۶۵۲۵	-۰/۶۲۵۲	-۰/۶۲۴۵
۱/۴۳	۰/۷۷۱۶	۰/۷۶۷۷	۰/۷۶۶۵	-۰/۵۰۳۱	-۰/۴۸۱۰	-۰/۴۷۹۵
۱/۶۳	۰/۸۳۱۰	۰/۸۲۹۳	۰/۸۲۸۰	-۰/۳۳۶۲	-۰/۳۳۷۹	-۰/۳۳۷۵
۱/۸۳	۰/۹۱۶۳	۰/۹۱۷۸	۰/۹۱۶۳	-۰/۱۶۳۱	-۰/۱۶۹۲	-۰/۱۶۹۱
۲/۰۰	۱/۰۱۸۹	۱/۰۲۱۵	۱/۰۹۱۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۰۰

برای مدل شبکه سری توانی کسری به ترتیب در شکل‌های ۳.۳ و ۴.۳ رسم شده است. مطابق با لم ۱.۴.۳ و با استفاده از مقادیر تابع خطای $E(\tilde{y})$ برای هر دو مدل شبکه در جدول ۳.۳ نتیجه می‌شود که جواب‌های تقریبی به دست آمده در شرایط لازم بهینگی با دقت مطلوبی صدق می‌کنند.

مثال ۲.۶.۳. مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \frac{3}{4}[x(2)]^2 + \frac{1}{4} \int_0^2 u^2(t) dt, \quad (60.3)$$

$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x(t) = x(t) + x(t-1) + u(t), \quad (61.3)$$

$$x(t) = 1, t \in [-1, 0]. \quad (62.3)$$

از [۷۴] جواب دقیق این مسأله برای $\alpha = 1$ به صورت زیر است

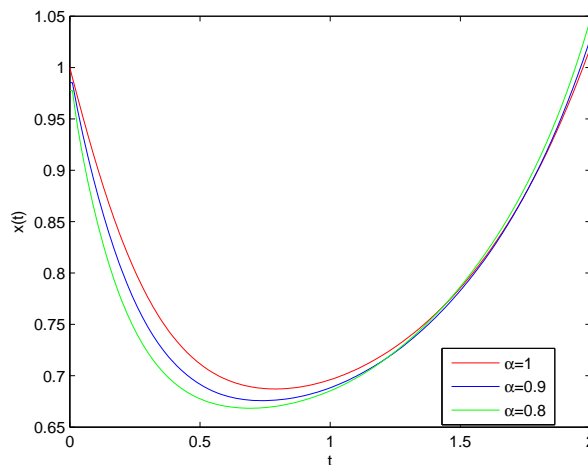
$$u(t) = \begin{cases} \delta(e^{2-t} + (1-t)e^{1-t}), & 0 \leq t \leq 1, \\ \delta(e^{2-t}), & 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \quad (63.3)$$

که در آن

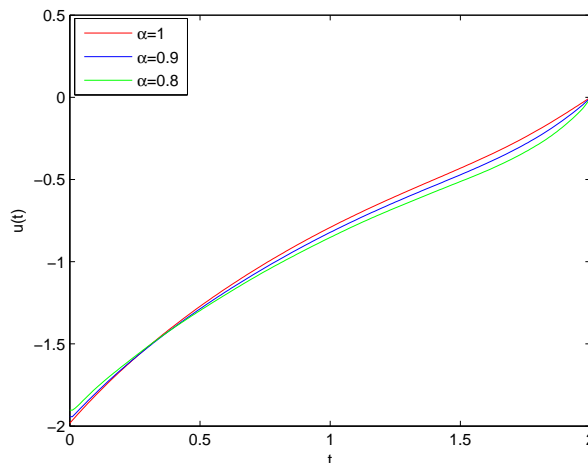
$$\delta \approx -0.3931594896.$$

جدول ۲.۳: مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۱.۶.۳.

مقدار تابع هدف J	مقدار α	روش
۱/۶۳۵۲	۱	شبکه اول
۱/۶۴۲۱	۰/۹	
۱/۶۵۱۹	۰/۸	
۱/۶۳۵۶	۱	شبکه دوم
۱/۶۴۶۵	۰/۹	
۱/۷۵۴۲	۰/۸	
۱/۶۴۹۷	۱	توابع والش [۷۲]
۱/۶۴۷۸	۱	توابع هیبرید [۷۳]



شکل ۳.۳: جواب‌های تقریبی $x(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۱.۶.۳.



شکل ۴.۳: جواب‌های تقریبی $u(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۱.۶.۳.

جدول ۳.۳: مقادیر تابع خطا $E(\tilde{y})$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۱.۶.۳.

	α	۱	۰/۹	۰/۸
شبکه اول	$E(\tilde{y})$	$6/9716 \times 10^{-9}$	$7/9214 \times 10^{-4}$	$4/9553 \times 10^{-4}$
شبکه دوم	$E(\tilde{y})$	$7/4085 \times 10^{-4}$	$2/7533 \times 10^{-2}$	$3/7631 \times 10^{-2}$

فرض کنید

$$\begin{cases} y(t) \triangleq x(t - \frac{1}{\alpha}), \\ z(t) \triangleq y(t - \frac{1}{\alpha}) = x(t - 1). \end{cases}$$

در نتیجه، سیستم کسری تاخیری (۶۱.۳) - (۶۲.۳) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = x(t) + z(t) + u(t), \\ \dot{y}(t) = \alpha(x(t) - y(t)) - \dot{x}(t), \\ \dot{z}(t) = \alpha(\gamma y(t) - z(t) - x(t)) + \dot{x}(t), \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1. \end{cases} \quad (64.3)$$

جواب‌های تقریبی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} x_T = 1 + tN_x(t), \\ y_T = 1 + tN_y(t), \\ z_T = 1 + tN_z(t), \\ \lambda_T = \alpha x_T(\gamma) + (t - \gamma)N_\lambda(t), \\ \gamma_T = (t - \gamma)N_\gamma(t), \\ \mu_T = (t - \gamma)N_\mu(t), \\ u_T = N_u(t). \end{cases} \quad (65.3)$$

این مسأله با استفاده از شبکه‌های عصبی پیشنهادی به ازای $n = 20$ و $m = 201$ حل شده و نتایج در جدول ۴.۳ گزارش شده است. همچنین مقادیر تابع هدف در جدول ۵.۳ نشان داده شده است. با استفاده از مدل شبکه عصبی سری توانی کسری، شکل ۵.۳ مقایسه بین جواب‌های دقیق و عددی برای تابع کنترل $u(t)$ را به ازای $\alpha = 1$ نشان می‌دهد. همچنین مسیرهای تقریبی برای توابع $x(t)$ و $u(t)$ به ازای مقادیر مختلف α به ترتیب در شکل‌های ۶.۳ و ۷.۳ رسم شده است. مقادیر ارائه شده از تابع خطای $E(\tilde{y})$ به ازای α های مختلف در جدول ۶.۳، دقت مدل‌های پیشنهادی را نشان می‌دهد.

جدول ۴.۳: نتایج تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به ازای $\alpha = 1$ در مثال ۲.۶.۳.

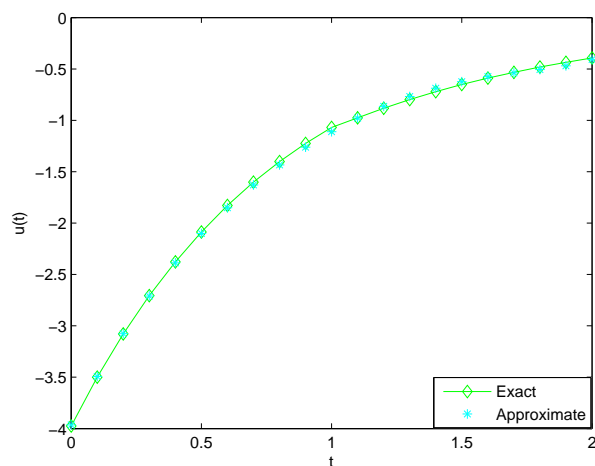
زمان	$u(t)$				$x(t)$	
	روش [۷۴]	جواب دقیق [۷۴]	شبکه دوم	شبکه اول	شبکه دوم	شبکه اول
۰/۰۰	-۳/۹۷۳۴	-۳/۹۷۸۷	-۳/۹۷۰۶	-۳/۹۷۱۰	۱	۱
۰/۱۹	-۳/۱۲۰۱	-۳/۱۱۸۲	-۳/۱۱۰۸	-۳/۱۱۵۶	۰/۶۶۷۲	۰/۶۶۸۰
۰/۳۹	-۲/۳۹۷۳	-۲/۴۰۸۳	-۲/۴۰۹۷	-۲/۴۱۷۰	۰/۴۴۱۳	۰/۴۴۱۷
۰/۵۹	-۱/۸۳۷۶	-۱/۸۵۳۳	-۱/۸۶۷۹	-۱/۸۷۴۳	۰/۳۲۰۷	۰/۳۱۹۸
۰/۸	-۱/۴۰۸۲	-۱/۴۰۱۴	-۱/۴۱۰۲	-۱/۴۱۳۸	۰/۲۵۵۳	۰/۲۵۳۵
۱	-۱/۰۸۸۴	-۱/۰۶۸۷	-۱/۰۹۲۰	-۱/۰۹۱۵	۰/۲۱۸۱	۰/۲۱۷۳
۱/۲	-۰/۸۶۰۴	-۰/۸۷۵۰	-۰/۸۷۰۳	-۰/۸۶۴۵	۰/۱۹۰۲	۰/۱۹۳۵
۱/۴۱	-۰/۶۹۶۱	-۰/۷۰۹۳	-۰/۶۸۱۴	-۰/۶۸۰۴	۰/۱۶۵۴	۰/۱۷۶۲
۱/۶۱	-۰/۵۶۷۸	-۰/۵۸۰۷	-۰/۵۶۹۰	-۰/۵۷۰۷	۰/۱۴۵۷	۰/۱۶۲۷
۱/۸۱	-۰/۴۶۳۵	-۰/۴۷۵۵	-۰/۴۶۱۴	-۰/۴۸۳۰	۰/۱۳۱۵	۰/۱۴۸۱
۲/۰۰	-۰/۳۸۴۲	-۰/۳۹۳۲	-۰/۳۸۳۱	-۰/۴۰۷۱	۰/۱۲۵۳	۰/۱۳۵۷

جدول ۵.۳: مقادیر دقیق و تقریبی تابع هدف در مثال ۲.۶.۳.

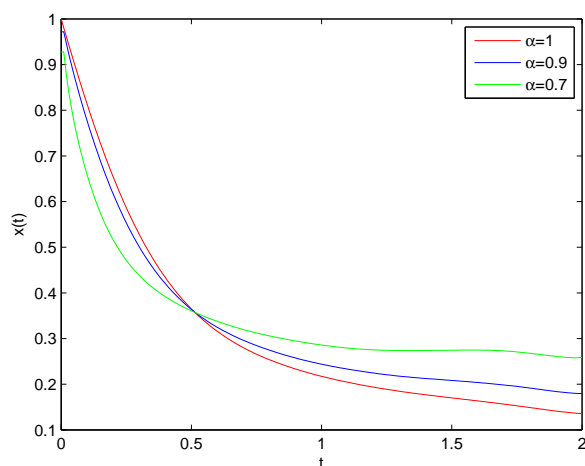
روش	مقدار α	مقدار تابع هدف J
شبکه اول	۱	۳/۰۸۵۰
	۰/۹	۳/۰۱۵۹
	۰/۷	۲/۸۹۵۸
شبکه دوم	۱	۳/۰۹۱۹
جواب دقیق [۷۴]	۱	۳/۱۰۱۷
روش ارائه شده در [۷۴]	۱	۳/۰۸۳۳

جدول ۶.۳: مقادیر تابع خطا $E(\tilde{y})$ برای $\alpha = 1, 0/9, 0/7$ در مثال ۲.۶.۳.

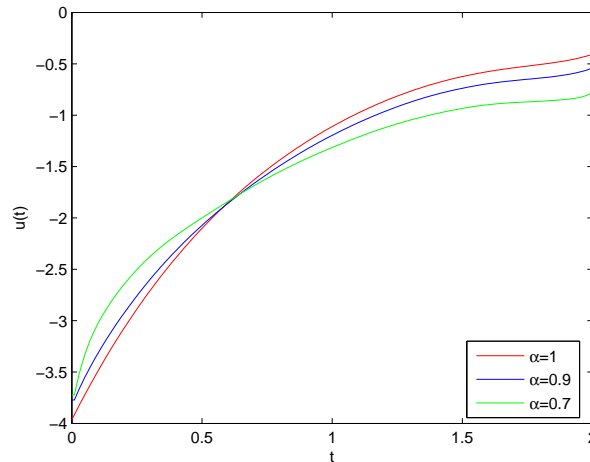
	α	۱	۰/۹	۰/۷
شبکه اول	$E(\tilde{y})$	$5/7306 \times 10^{-9}$	$9/43332 \times 10^{-4}$	$1/0021 \times 10^{-3}$
شبکه دوم	$E(\tilde{y})$	$2/3961 \times 10^{-4}$	$3/0176 \times 10^{-3}$	$6/6014 \times 10^{-2}$



شکل ۵.۳: جواب‌های تقریبی و دقیق $u(t)$ برای $\alpha = 1$ در مثال ۲.۶.۳.



شکل ۶.۳: جواب‌های تقریبی $x(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.7$ در مثال ۲.۶.۳.



شکل ۷.۳: جواب‌های تقریبی $u(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.7$ در مثال ۲.۶.۳.

مثال ۳.۶.۳. مسأله کنترل بهینه کسری با تاخیر در متغیرهای وضعیت و کنترل را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \frac{1}{\Gamma} \int_0^1 (x^2(t) + \frac{1}{\Gamma} u^2(t)) dt, \quad (۶۶.۳)$$

$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x(t) = -x(t) + x(t - \frac{1}{\Gamma}) + u(t) - \frac{1}{\Gamma} u(t - \frac{2}{\Gamma}), \quad (۶۷.۳)$$

$$x(t) = 1, \quad t \in [-\frac{1}{\Gamma}, 0], \quad (۶۸.۳)$$

$$u(t) = 0, \quad t \in [-\frac{2}{\Gamma}, 0]. \quad (۶۹.۳)$$

در اینجا مسأله دارای دو تاخیر $\sigma = \frac{1}{\Gamma}$ در متغیر حالت و $\tau = \frac{2}{\Gamma}$ در متغیر کنترل است. با استفاده از تقریب پاده فرض می‌کنیم

$$\begin{cases} y(t) \triangleq x(t - \frac{1}{\Gamma}), \\ z(t) \triangleq y(t - \frac{1}{\Gamma}) = x(t - \frac{2}{\Gamma}), \\ w(t) \triangleq u(t - \frac{1}{\Gamma}), \\ v(t) \triangleq w(t - \frac{1}{\Gamma}) = u(t - \frac{2}{\Gamma}). \end{cases}$$

در این صورت سیستم (۶۷.۳) - (۶۹.۳) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C D_t^\alpha x(t) = -x(t) + z(t) + u(t) - \frac{1}{\tau} v(t), \\ \dot{y}(t) = \lambda(x(t) - y(t)) - \dot{x}(t), \\ \dot{z}(t) = \lambda(\gamma y(t) - z(t) - x(t)) + \dot{x}(t), \\ \dot{w}(t) = \epsilon(u(t) - w(t)) - \dot{u}(t), \\ \dot{v}(t) = \epsilon(\gamma w(t) - v(t) - u(t)) + \dot{u}(t), \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1, \\ u(0) = 0, \quad w(0) = 0, \quad v(0) = 0. \end{array} \right. \quad (70.3)$$

با استفاده از روش شبکه عصبی جواب‌های آزمایشی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

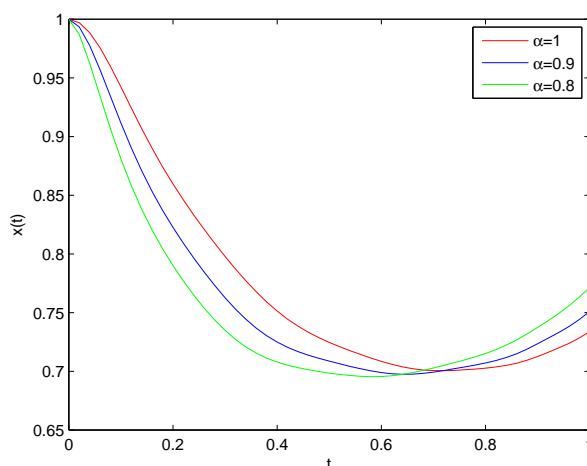
$$\left\{ \begin{array}{l} x_T = 1 + tN_x(t), \\ y_T = 1 + tN_y(t), \\ z_T = 1 + tN_z(t), \\ w_T = tN_w(t), \\ v_T = tN_v(t), \\ \lambda_T = (t - 1)N_\lambda(t), \\ \gamma_T = (t - 1)N_\gamma(t), \\ \mu_T = (t - 1)N_\mu(t), \\ \xi_T = (t - 1)N_\xi(t), \\ \eta_T = (t - 1)N_\eta(t), \\ u_T = tN_u(t). \end{array} \right. \quad (71.3)$$

مقدار تابع هدف J با استفاده از دو مدل شبکه عصبی پیشنهادی به ازای $n = 20$ و $m = 51$ در جدول ۷.۳ نشان داده شده و نتایج با دو روش دیگر مقایسه شده است. با توجه به ارائه نتایج بهتر توسط مدل شبکه عصبی سری توانی کسری، نمودار تابع حالت $x(t)$ و تابع کنترل بهینه $u(t)$ به ازای α های مختلف به ترتیب در شکل‌های ۸.۳ و ۹.۳ نشان داده شده‌اند. نتایج عددی متناظر با تابع خطای $E(\tilde{y})$ برای مدل‌های پیشنهادی نیز در جدول ۸.۳ آمده است.

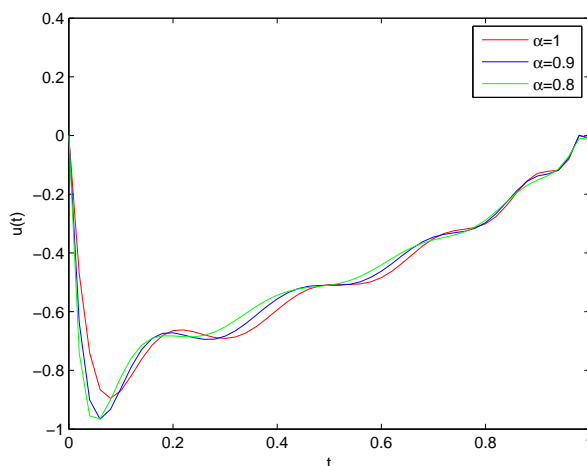
مثال ۴.۶.۳. مسأله کنترل بهینه کسری دارای تاخیر در متغیر حالت را به صورت زیر در نظر

جدول ۷.۳: مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۳.۶.۳.

مقدار تابع هدف J	مقدار α	روش
۰.۳۶۷۶	۱	شبکه اول
۰.۳۶۲۲	۰/۹	
۰.۳۵۶۷	۰/۸	
۰.۳۶۷۹	۱	شبکه دوم
۰.۳۶۲۳	۰/۹	
۰.۳۵۸۱	۰/۸	
۰.۳۷۳۱۱۷	۱	توابع بلاک پالس [۷۵]
۰.۳۷۳۱۱۲	۱	توابع هیبرید [۷۶]



شکل ۸.۳: جواب‌های تقریبی $x(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۳.۶.۳.



شکل ۹.۳: جواب‌های تقریبی $u(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۳.۶.۳.

جدول ۸.۳: مقادیر تابع خطا $E(\tilde{y})$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۳.۶.۳.

	α	۱	۰/۹	۰/۸
شبکه اول	$E(\tilde{y})$	$2/3628 \times 10^{-2}$	$1/2800 \times 10^{-2}$	$1/0851 \times 10^{-2}$
شبکه دوم	$E(\tilde{y})$	$2/4119 \times 10^{-2}$	$1/3156 \times 10^{-2}$	$6/1347 \times 10^{-2}$

بگیرید

$$\text{Minimize } J = \frac{1}{\Gamma} \int_0^1 [(x_1(t) + x_2(t))^2 + u^2(t)] dt, \quad (72.3)$$

$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x_1(t) = x_1(t) + x_2(t - \frac{1}{\Gamma}), \quad (73.3)$$

$${}^C D_t^\alpha x_2(t) = -\Delta x_1(t - \frac{1}{\Gamma}) + x_2(t) - x_2(t - \frac{1}{\Gamma}) + u(t), \quad (74.3)$$

$$x_1(t) = x_2(t) = 1, \quad t \in [-\frac{1}{\Gamma}, 0]. \quad (75.3)$$

فرض کنید

$$\begin{cases} x_3(t) \triangleq x_1(t - \frac{1}{\Gamma}), \\ x_4(t) \triangleq x_3(t - \frac{1}{\Gamma}) = x_1(t - \frac{2}{\Gamma}), \\ x_5(t) \triangleq x_2(t - \frac{1}{\Gamma}), \\ x_6(t) \triangleq x_5(t - \frac{1}{\Gamma}) = x_2(t - \frac{2}{\Gamma}). \end{cases}$$

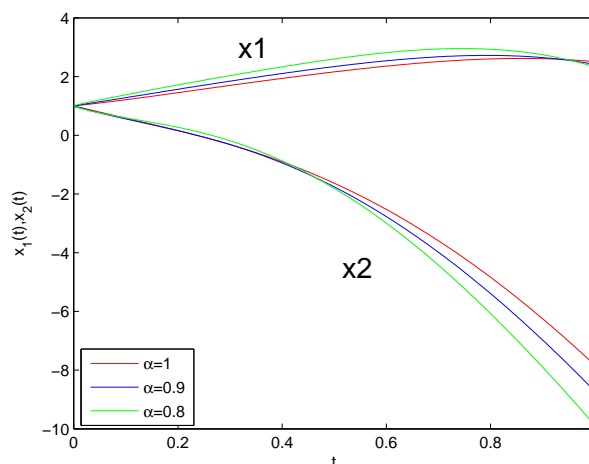
سیستم دینامیکی تاخیری (۷۳.۳) - (۷۵.۳) به سیستم بدون تاخیر زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x_1(t) = x_1(t) + x_6(t), \\ {}^C D_t^\alpha x_2(t) = -\Delta x_4(t) + x_2(t) - x_6(t) + u(t), \\ \dot{x}_3(t) = \Gamma(x_1(t) - x_3(t)) - \dot{x}_1(t), \\ \dot{x}_4(t) = \Gamma(2x_3(t) - x_4(t) - x_1(t)) + \dot{x}_1(t), \\ \dot{x}_5(t) = \Gamma(x_2(t) - x_5(t)) - \dot{x}_2(t), \\ \dot{x}_6(t) = \Gamma(2x_5(t) - x_6(t) - x_2(t)) + \dot{x}_2(t), \\ x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = x_5(0) = x_6(0) = 1. \end{cases} \quad (76.3)$$

با استفاده از روش شبکه عصبی سری توانی کسری به ازای $n = 10$ و $m = 201$ ، مقادیر تابع هدف برای α های متفاوت در جدول ۹.۳ آمده و نتایج با دو روش دیگر مقایسه شده است. مسیرهای بهینه برای توابع وضعیت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ و تابع کنترل $u(t)$ به ترتیب در شکل‌های

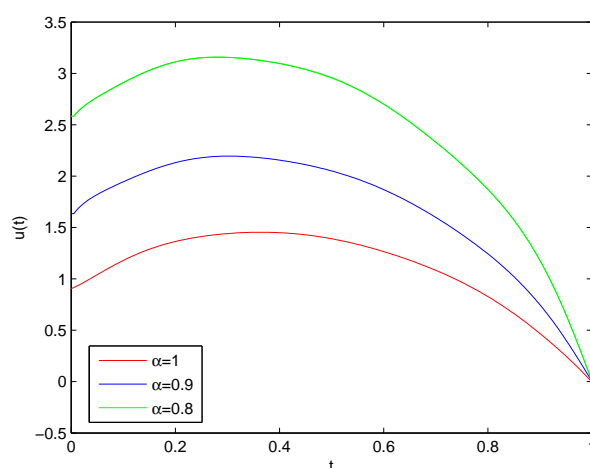
جدول ۹.۳: مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۴.۶.۳.

مقدار تابع هدف J	مقدار α	روش
۲/۶۵۴۳	۱	شبکه عصبی سری توانی کسری
۴/۲۲۷۳	۰/۹	
۷/۰۶۵۱	۰/۸	
۲/۶۱۰۵	۱	چندجمله ای های برنشتاین [۵۹]
۲/۷۹۳۰	۱	توابع بلاک پالس و چندجمله ای های لژاندر [۷۷]



شکل ۱۰.۳: جواب‌های تقریبی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۴.۶.۳.

۱۰.۳ و ۱۱.۳ رسم شده‌اند. همچنین نتایج به دست آمده از تابع خطای $E(\tilde{y})$ در جدول ۱۰.۳ نشان می‌دهد که به ازای $\alpha \in (0, 1]$ جواب‌های آزمایشی در شرایط لازم بهینگی صدق می‌کنند.



شکل ۱۱.۳: جواب‌های تقریبی $u(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۴.۶.۳.

جدول ۱۰.۳: مقادیر تابع خطا $E(\tilde{y})$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۴.۶.۳.

α	۱	۰/۹	۰/۸
$E(\tilde{y})$	4.8165×10^{-2}	5.0234×10^{-2}	1.3578×10^{-2}

فصل ۴

شبکه عصبی پیوندی تابعی مونتنس- لژاندر برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری

۱.۴ مقدمه

در سال‌های گذشته استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی پیش‌خور برای حل مسائل مدل‌سازی به طور قابل توجهی افزایش یافته است. در بیشتر موارد شبکه عصبی شامل یک لایه ورودی، لایه پنهان و لایه خروجی است که هر لایه شامل واحدهایی است. هر ارتباط بین واحدها اطلاعات را از یکی به دیگری ارسال می‌کند. اخیراً شبکه‌های پرسپترون با چندین لایه پنهان بین لایه‌های ورودی و خروجی برای حل بیشتر سیستم‌های غیرخطی پیچیده مورد استفاده قرار گرفته‌اند. باید توجه داشت که نرون‌های پنهان نقش مهمی را در آماده‌سازی شبکه چندلایه برای توانایی کنترل نگاشت ورودی-خروجی غیرخطی ایفا می‌کنند. یک شبکه چندلایه با ساختار مناسب قادر به تقریب هر مسئله غیرخطی است [۷۹]. چالش‌های موجود در مورد طراحی ساختار یک شبکه چندلایه عبارتند از وابستگی وزن اولیه، قرار گرفتن در کمینه محلی، تداخل وزن‌ها و تعداد عناصر پردازش^۱ [۸۰]. یکی از راه‌های غلبه بر مشکلات نامبرده،

^۱Processing elements

طراحی ساختار شبکه شامل تعداد لایه‌های پنهان، تعداد نرون‌ها و نحوه ارتباط آن‌ها می‌باشد. به عنوان یک جایگزین موثر برای شبکه‌های پرسپترون چندلایه، پائو^۲ در سال ۱۹۸۹ شبکه عصبی پیوندی تابعی^۳ را پیشنهاد داد که یک شبکه تک لایه^۴ است [۸۱].

۲.۴ شبکه عصبی پیوندی تابعی

در شبکه عصبی پیوندی تابعی، لایه پنهان با تبدیل الگوهای ورودی به یک فضای با بعد بیشتر با استفاده از توابع گسترش^۵ حذف می‌شود. به طور مثال، اگر t یک بردار ورودی از بعد N باشد، شبکه عصبی پیوندی تابعی با استفاده از توابع گسترش زیر

$$[\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)]. \quad (1.4)$$

آن را به بعد $(n+1)N$ افزایش می‌دهد. مجموعه توابع گسترش دارای خواص زیر است:

- $\phi_0(t)$ خطی است.
- ϕ_i ها به ازای $1 \leq i \leq n$ مستقل خطی هستند، یعنی اگر $\sum_{i=1}^n w_i \phi_i = 0$ آنگاه $w_i = 0$.
- $\sup_n (\sum_{i=1}^n \|\phi_i\|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

تاکنون شبکه‌های عصبی پیوندی تابعی متعددی با توابع پایه مختلف مانند توابع فوریه، چندجمله‌ای مثلثاتی، چندجمله‌ای‌های چندمتغیره و بردار تصادفی ارائه شده است [۸۲، ۸۳]. همچنین محققان زیادی بحث شبکه‌های پیوندی تابعی را به توابع متعامدی چون لژاندر، چبیشف، هرمیت و لاگر گسترش داده‌اند [۸۴، ۸۵، ۸۶]. به طور خاص، برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی، مال و چاکراورتی^۶ از شبکه عصبی پیوندی تابعی بر مبنای چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر [۸۷] و چبیشف [۸۸] استفاده کرده‌اند. آن‌ها از شبکه عصبی پیوندی تابعی چبیشف برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی نیز استفاده کرده‌اند [۸۵].

شبکه‌های عصبی پیوندی تابعی به دلیل عدم وجود لایه‌های پنهان دارای مزایای بسیاری چون ساختار ساده‌تر، همگرایی سریع‌تر و پیچیدگی محاسباتی کمتری هستند. مزیت اصلی این شبکه‌ها کاهش پیچیدگی با افزایش بعد سیگنال ورودی با استفاده از یک مجموعه از توابع مستقل خطی است. این شبکه‌ها به دلیل مزایای نامبرده کاربردهای وسیعی در یکسان‌سازی کانال غیرخطی^۷، دسته‌بندی، تقریب تابع، شناسایی سیستم غیرخطی و غیره دارند.

هدف اصلی ما در این بخش این است که یک ساختار جدید را برای شبکه عصبی پیوندی تابعی با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد مونتس- لژاندر گسترش دهیم. از چندجمله‌ای‌های

²Pao

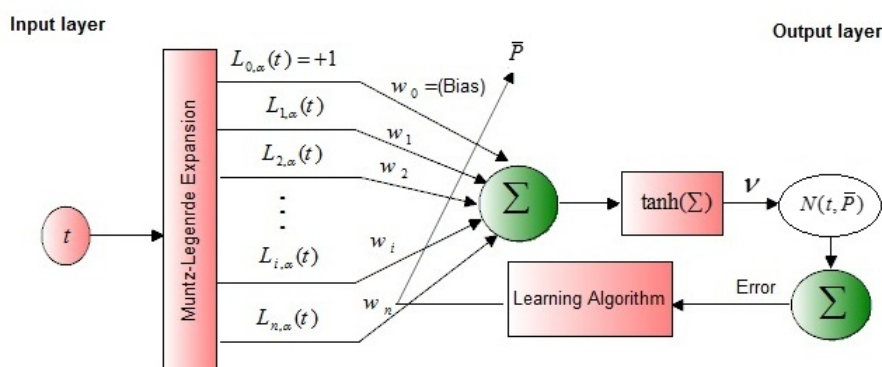
³Functional Link Neural Network

⁴Single-layer

⁵Expansion functions

⁶Mall and Chakraverty

⁷Nonlinear channel equalization



شکل ۱.۴: شبکه عصبی مونتس-لژاندر

مونتس-لژاندر به صورت تابع پایه برای حل معادلات دیفرانسیل کسری [۳۰، ۸۹]، مسائل کنترل بهینه کسری [۱۸] و مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری [۵۷] استفاده شده است. یک کاربرد از شبکه عصبی مصنوعی بر مبنای چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر برای شناسایی سیستم‌های دینامیکی خطی و غیرخطی در [۹۰] ارائه شده است. تاثیر کاهش ولتاژ بر مبنای فیلترهای متعامد مونتس-لژاندر را می‌توان در [۹۱] دید. اگرچه تاکنون از شبکه عصبی پیوندی تابعی با پایه چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری استفاده نشده است. بنابراین ما در ادامه این بخش ابتدا شبکه عصبی پیوندی تابعی با چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر را با عنوان شبکه عصبی مونتس-لژاندر به طور کامل توضیح داده و سپس از این شبکه برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری شامل قيود مساوی و نامساوی استفاده می‌کنیم.

۳.۴ شبکه عصبی مونتس-لژاندر

در این بخش قصد داریم یک شبکه عصبی پیوندی تابعی را با چندجمله‌ای مونتس-لژاندر برای تقریب توابع ترکیب کنیم. شکل ۱.۴ ساختار یک شبکه عصبی تک لایه مونتس-لژاندر را با یک ورودی مستقل، یک خروجی و یک بلوک تابع گسترش بر مبنای چندجمله‌ای مونتس-لژاندر نشان می‌دهد. خروجی شبکه با توجه به متغیر ورودی t و بردار وزن \bar{P} به صورت زیر تعریف می‌شود

$$N(t, \bar{P}) = \nu F(s). \quad (2.4)$$

که در آن ν وزن لایه خروجی و F تابع فعالیت شبکه است که به صورت $F(s) = \tanh(s)$ تعریف می‌شود. s که یک مجموع وزنی از داده‌های ورودی بسط یافته است و به صورت زیر تعریف

می‌شود

$$s = \sum_{i=0}^n w_i L_{i,\alpha}(t), \quad (3.4)$$

که در آن $L_{n,\alpha}(t), \dots, L_{1,\alpha}(t), L_{0,\alpha}(t)$ عناصر پردازش هستند و با استفاده از (۶۷.۱) محاسبه می‌شوند. w_i ها $i = 0, 1, 2, \dots, n$ وزن‌های متناظر با عناصر پردازش هستند، که w_0 وزن بایاس است. در شبکه عصبی مونتنس- لژاندر لایه پنهان با تبدیل الگوی ورودی به فضایی با بعد بیشتر به وسیله چند جمله‌ای‌های مونتنس- لژاندر حذف شده است.

۴.۴ مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری با قيود مساوی و نامساوی

مسأله کنترل بهینه زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J(x(t), u(t)) = \Phi(t, x(t))|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} V(t, x(t), u(t)) dt, \quad (4.4)$$

با سیستم دینامیکی کسری تاخیری

$${}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t), x(t - \sigma), u(t)), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (5.4)$$

قيود نامساوی

$$g(t, x(t), u(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (6.4)$$

و شرط اولیه

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [t_0 - \sigma, t_0]. \quad (7.4)$$

مشابه فصل قبل و با استفاده از تقریب پاده مسأله تاخیری فوق به مسأله زیر تبدیل می‌شود

$$\text{Minimize } J(x(t), u(t)) = \Phi(t, x(t))|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} V(t, x(t), u(t)) dt, \quad (8.4)$$

تحت قيود

$${}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t), z(t), u(t)), \quad (9.4)$$

$$g(t, x(t), u(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (10.4)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\mathcal{F}}{\sigma} (x(t) - y(t)) - \dot{x}(t), \quad (11.4)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{\mathcal{F}}{\sigma} (\mathcal{Y} y(t) - z(t) - x(t)) + \dot{x}(t), \quad (12.4)$$

$$x(t_0) = \phi(t_0), \quad y(t_0) = \phi(t_0 - \frac{\sigma}{\mathcal{F}}), \quad z(t_0) = \phi(t_0 - \sigma). \quad (13.4)$$

با استفاده از شرایط لازم بهینگی [۱۳، ۱۵، ۹۲] داریم

$$\frac{\partial H}{\partial x} = {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda(t), \quad (14.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\dot{\gamma}(t), \quad (15.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -\dot{\mu}(t), \quad (16.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = {}^C D_{t_0}^\alpha x(t), \quad (17.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma} = \dot{y}(t), \quad (18.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = \dot{z}(t), \quad (19.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad (20.4)$$

$$\zeta(t) \cdot g(t, x(t), u(t)) = 0, \quad (21.4)$$

$$\zeta(t) \geq 0, \quad (22.4)$$

$$g(t, x(t), u(t)) \leq 0, \quad (23.4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{t_f} = \lambda(t_f), \quad (24.4)$$

که در آن H تابع همیلتونی است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(t, x, y, z, \lambda, \gamma, \mu, \zeta, u) = V(t, x, u) + \lambda \cdot f(t, x, z, u) + \gamma \cdot \left(\frac{f}{\sigma} (x - y) - \dot{x} \right) \\ + \mu \cdot \left(\frac{f}{\sigma} (\gamma y - z - x) + \dot{x} \right) + \zeta \cdot g(t, x, u),$$

می‌توان رابطه‌ای بین جواب‌های (۲۱.۴) – (۲۳.۴) و جواب یک مسأله مکمل غیرخطی^۸ (NCP) پیدا کرد [۹۲]. رده‌ای از توابع NCP در پایین تعریف شده است.

تعریف ۱.۴.۴. تابع $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع NCP نامیده می‌شود اگر در شرط زیر صدق کند

$$\phi(p, q) = 0 \iff p \geq 0, q \geq 0, pq = 0. \quad (25.4)$$

تعریف ۲.۴.۴. [۹۴] یکی از توابع رایج برای مسأله مکمل غیرخطی (۲۵.۴) تابع فیشر – برمیستر^۹ (FB) است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi_{FB}(p, q) = (p + q) - \sqrt{p^2 + q^2}.$$

تابع FB اغتشاش یافته^{۱۰} نیز به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi_{FB}^\varepsilon(a, b) = (a + b) - \sqrt{a^2 + b^2 + \varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0_+,$$

^۸Nonlinear Complementarity Problem

^۹Fischer-Burmeister

^{۱۰}Perturbed

که ε عددی کوچک و مثبت است. در نتیجه زیر یک خاصیت مهم ϕ_{FB}^ε را می‌توان مشاهده کرد.

گزاره ۱۰.۴.۴. [۹۵] برای هر $\varepsilon \in \mathbb{R}$ داریم

$$\phi_{FB}^\varepsilon(p, q) = \circ \Leftrightarrow p > \circ, q > \circ, pq = \frac{\varepsilon}{4}.$$

باید توجه شود که $\phi_{FB}^\varepsilon(a, b)$ با توجه به a, b برای $\varepsilon > \circ$ هموار است.

با استفاده از تابع FB اغتشاش یافته، می‌توان مسئله NCP (۲۱.۴)–(۲۳.۴) را به محدودیت‌های معادل زیر تبدیل کرد

$$\phi_{FB}^\varepsilon(\zeta(t), -g(t, x(t), u(t))) = \circ, \quad \varepsilon \rightarrow \circ_+.$$

بنابراین سیستم بهینگی (۱۴.۴)–(۲۴.۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial x} = {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda(t), \\ \frac{\partial H}{\partial y} = -\dot{\gamma}(t), \\ \frac{\partial H}{\partial z} = -\dot{\mu}(t), \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} = {}^C D_{t_0}^\alpha x(t), \\ \frac{\partial H}{\partial \gamma} = \dot{y}(t), \\ \frac{\partial H}{\partial \mu} = \dot{z}(t), \\ \frac{\partial H}{\partial u} = \circ, \\ \phi_{FB}^\varepsilon(\zeta(t), -g(t, x(t), u(t))) = \circ, \quad \varepsilon \rightarrow \circ_+, \\ \lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{t_f}. \end{array} \right. \quad (۲۶.۴)$$

۵.۴ تقریب توابع در شرایط لازم بهینگی

در این بخش با استفاده از روش پیشنهادی شبکه عصبی مونتس- لژاندر به تقریب توابع در سیستم بهینگی (۲۶.۴) می‌پردازیم. بر همین اساس، جواب‌های آزمایشی برای متغیرهای وضعیت (x_T, y_T, z_T) ، ضربگرهای لاگرانژ $(\lambda_T, \gamma_T, \mu_T, \zeta_T)$ و تابع کنترل u_T به صورت زیر ارائه

$$\left\{ \begin{array}{l} x_T(t) = x(t_0) + (t - t_0)N_x(t, \bar{P}_x), \\ y_T(t) = y(t_0) + (t - t_0)N_y(t, \bar{P}_y), \\ z_T(t) = z(t_0) + (t - t_0)N_z(t, \bar{P}_z), \\ \lambda_T(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_T} \Big|_{t_f} + (t - t_f)N_\lambda(t, \bar{P}_\lambda), \\ \gamma_T(t) = (t - t_f)N_\gamma(t, \bar{P}_\gamma), \\ \mu_T(t) = (t - t_f)N_\mu(t, \bar{P}_\mu), \\ \zeta_T(t) = N_\zeta(t, \bar{P}_\zeta), \\ u_T(t) = N_u(t, \bar{P}_u), \end{array} \right. \quad (27.4)$$

که در آن

$$\left\{ \begin{array}{ll} N_x(t, \bar{P}_x) = \nu_x \tanh(s_x), & s_x = \sum_{i=0}^n w_i^x L_{i,\alpha}(t), \\ N_y(t, \bar{P}_y) = \nu_y \tanh(s_y), & s_y = \sum_{i=0}^n w_i^y L_{i,\alpha}(t), \\ N_z(t, \bar{P}_z) = \nu_z \tanh(s_z), & s_z = \sum_{i=0}^n w_i^z L_{i,\alpha}(t), \\ N_\lambda(t, \bar{P}_\lambda) = \nu_\lambda \tanh(s_\lambda), & s_\lambda = \sum_{i=0}^n w_i^\lambda L_{i,\alpha}(t), \\ N_\gamma(t, \bar{P}_\gamma) = \nu_\gamma \tanh(s_\gamma), & s_\gamma = \sum_{i=0}^n w_i^\gamma L_{i,\alpha}(t), \\ N_\mu(t, \bar{P}_\mu) = \nu_\mu \tanh(s_\mu), & s_\mu = \sum_{i=0}^n w_i^\mu L_{i,\alpha}(t), \\ N_\zeta(t, \bar{P}_\zeta) = \nu_\zeta \tanh(s_\zeta), & s_\zeta = \sum_{i=0}^n w_i^\zeta L_{i,\alpha}(t), \\ N_u(t, \bar{P}_u) = \nu_u \tanh(s_u), & s_u = \sum_{i=0}^n w_i^u L_{i,\alpha}(t). \end{array} \right. \quad (28.4)$$

جواب‌های آزمایشی باید در سیستم (۲۶.۴) صدق کنند، پس داریم

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_T}{\partial x_T} = {}^C D_{t_f}^\alpha \lambda_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial y_T} = -\dot{\gamma}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial z_T} = -\dot{\mu}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial \lambda_T} = {}^C D_{t_0}^\alpha x_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial \gamma_T} = \dot{y}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial \mu_T} = \dot{z}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial u_T} = 0, \\ \phi_{FB}^\varepsilon(\zeta_T(t), -g(t, x_T(t), u_T(t))) = 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0_+, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_T} \Big|_{t_f} = \lambda_T(t_f), \end{array} \right. \quad (29.4)$$

که

$$H_T = H(t, x_T, y_T, z_T, \lambda_T, \gamma_T, \mu_T, \zeta_T, u_T).$$

اکنون به منظور تبدیل مسأله (۲۹.۴) به یک مسأله بهینه‌سازی نامقید، سیستم بهینگی (۲۹.۴) را روی $m+1$ نقطه $t_k = t_0 + \frac{t_f - t_0}{m}k$ از بازه $[t_0, t_f]$ گسسته‌سازی می‌کنیم و مسأله بهینه‌سازی زیر را تعریف می‌کنیم

$$\text{Minimize}_P E(P) = \frac{1}{\forall} \sum_{l=1}^{\wedge} \sum_{k=0}^m \{E_l(t_k, P)\}, \quad (30.4)$$

که در آن $P = (\bar{P}_x, \bar{P}_y, \bar{P}_z, \bar{P}_\lambda, \bar{P}_\gamma, \bar{P}_\mu, \bar{P}_\zeta, \bar{P}_u)^T$ و

$$\left\{ \begin{array}{l} E_\lambda(t_k, P) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial \lambda_T} - {}^C D_{t_k}^\alpha x_T(t_k) \right]^\forall, \\ E_\gamma(t_k, P) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial \gamma_T} - \dot{y}_T(t_k) \right]^\forall, \\ E_\mu(t_k, P) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial \mu_T} - \dot{z}_T(t_k) \right]^\forall, \\ E_\lambda(t_k, P) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial x_T} - {}^C D_{t_k}^\alpha \lambda_T(t_k) \right]^\forall, \\ E_\Delta(t_k, P) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial y_T} + \dot{\gamma}_T(t_k) \right]^\forall, \\ E_\mathcal{F}(t_k, P) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial z_T} + \dot{\mu}_T(t_k) \right]^\forall, \\ E_\gamma(t_k, P) = [\phi_{FB}^\varepsilon(\zeta_T(t_k), -g(t_k, x_T(t_k), u_T(t_k)))]^\forall, \\ E_\lambda(t_k, P) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial u_T} \right]^\forall. \end{array} \right. \quad (31.4)$$

برای محاسبه مشتقات کسری در رابطه (۳۱.۴) ابتدا با استفاده از قضیه ۱.۳.۱ مشتقات کسری چپ و راست ریمن-لیوویل به صورت زیر بیان می‌شود

$${}^R D_{t_k}^\alpha x_T(t_k) \simeq \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^k \omega_j^{(\alpha)} x_T(t_{k-j}), \quad k = 1, \dots, m, \quad (32.4)$$

$${}^R D_{t_k}^\alpha \lambda_T(t_k) \simeq \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{m-k} \omega_j^{(\alpha)} \lambda_T(t_{k+j}), \quad k = m-1, \dots, 0, \quad (33.4)$$

که $h = \frac{t_f - t_0}{m}$ و $\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\omega_0^{(\alpha)} = 1, \quad \omega_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{j}\right) \omega_{j-1}^{(\alpha)}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (34.4)$$

سپس با استفاده از (۱۲.۱) مشتق‌های چپ ${}^C D_{t_k}^\alpha x_T(t_k)$ و راست ${}^C D_{t_k}^\alpha \lambda_T(t_k)$ کاپاتو محاسبه می‌شوند.

در پایان از روش بهینه‌سازی تندترین کاهش برای مینیمم خطا (۳۰.۴) و نیز به‌روز رسانی وزن‌ها و بایاس شبکه استفاده شده است.

۶.۴ الگوریتم آموزش در شبکه عصبی مونتنس-لژاندر

در فرآیند الگوریتم آموزش، بایاس و وزن‌های شبکه به گونه‌ای تغییر می‌یابند که تابع خطا $E(P)$ مینیمم شود. اکنون یک الگوی بدون ناظر از الگوریتم پس‌انتشار^{۱۱} برای آموزش شبکه و به‌روز رسانی بایاس و وزن‌های شبکه مونتنس-لژاندر را بیان می‌کنیم. با استفاده از روش تندترین کاهش، بایاس و وزن‌های اولیه به طور تصادفی انتخاب شده و بایاس و وزن‌های جدید در مراحل بعد از رابطه زیر به دست می‌آیند

$$P_i(j+1) = P_i(j) - \rho \frac{\partial E(P)}{\partial P_i(j)}, \quad i = 1, 2, \dots, \Lambda(n+2), \quad (35.4)$$

که در آن، ρ نرخ یادگیری و j گام تکرار است. داریم

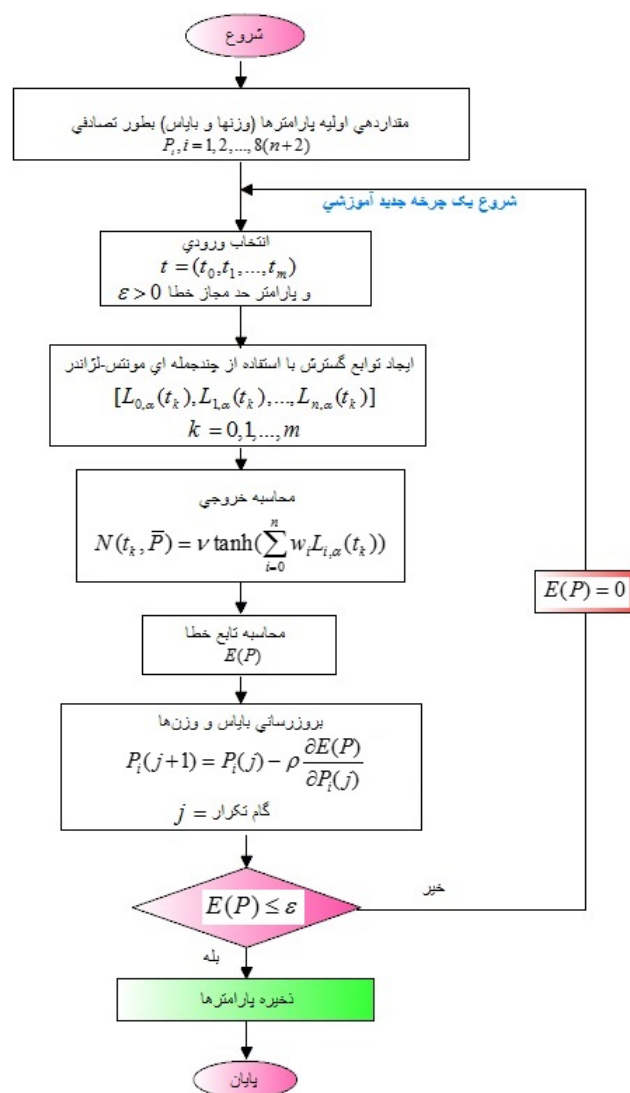
$$\frac{\partial E(P)}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\frac{1}{\Lambda} \sum_{l=1}^{\Lambda} \sum_{k=0}^m \{E_l(t_k, P)\} \right), \quad (36.4)$$

که در آن $E_l(t_k, P)$ از رابطه (۳۱.۴) محاسبه می‌شود. برای نمونه، بایاس و وزن‌های متغیر وضعیت $x(t)$ به صورت زیر به‌هنگام می‌شوند

$$w_i^x(j+1) = w_i^x(j) - \rho \frac{\partial E(P)}{\partial w_i^x(j)}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (37.4)$$

$$\nu_x(j+1) = \nu_x(j) - \rho \frac{\partial E(P)}{\partial \nu_x(j)}.$$

¹¹Back Propagation (BP)



شکل ۲.۴: دیاگرام الگوریتم آموزش شبکه عصبی مونتنس- لژاندر

به طور مشابه، دیگر وزن‌ها و بایاس‌ها نیز مانند (۳۷.۴) به‌هنگام می‌شوند. فلوجارت الگوریتم آموزش شبکه پیشنهادی مونتنس- لژاندر در شکل ۲.۴ نشان داده شده است. روند الگوریتم آموزش شبکه پیشنهادی نیز در گام‌های زیر خلاصه می‌شود

گام ۱: مقادیر اولیه برای وزن‌های P_i ، $i = 1, 2, \dots, 8(n+2)$ ، به طور تصادفی انتخاب می‌شوند.

گام ۲: متغیر ورودی به صورت $t = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ و پارامتر حد مجاز خطا به صورت $\epsilon > 0$ در نظر گرفته می‌شود.

گام ۳: در ساختار شبکه عصبی مونتنس- لژاندر، توابع گسترش به صورت $[L_{0,\alpha}(t_k), L_{1,\alpha}(t_k), \dots, L_{n,\alpha}(t_k)]$ تولید می‌شوند که در آن $k = 0, \dots, m$ و $L_{0,\alpha}(t_k) = 1$.

گام ۴: خروجی شبکه پیشنهادی به صورت $N(t_k, \bar{P}) = v \tanh(s)$ محاسبه می‌شود که در آن $s = \sum_{i=0}^n w_i L_{i,\alpha}(t_k)$

گام ۵: تابع خطای $E(P)$ از رابطه (۳۰.۴) محاسبه می‌شود.
گام ۶: وزن‌ها و بایاس شبکه مونتنس-لژاندر با استفاده از الگوریتم آموزش بدون ناظر پس‌انتشار به صورت زیر بهینه می‌شوند

$$P_i(j+1) = P_i(j) - \rho \frac{\partial E(P)}{\partial P_i(j)}.$$

گام ۷: اگر تابع خطای $E(P) \leq \varepsilon$ به گام ۸ برو، در غیر این صورت به گام ۲ رفته و یک چرخه آموزشی جدید شروع می‌شود.
گام ۸: بعد از تکمیل فرآیند آموزش شبکه با یک دقت قابل قبول، پارامترهای نهایی شبکه (وزن‌ها و بایاس) ذخیره می‌شوند.

۷.۴ نتایج عددی

در این بخش روش ارائه شده را برای چند مثال عددی پیاده می‌کنیم و کارایی روش را نشان می‌دهیم.

مثال ۱.۷.۴. مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری با قید مساوی زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \frac{3}{4} [x(2)]^2 + \frac{1}{4} \int_0^2 u^2(t) dt, \quad (38.4)$$

$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x(t) = x(t) + x(t-1) + u(t), \quad (39.4)$$

$$x(t) = 1, \quad t \in [-1, 0]. \quad (40.4)$$

با استفاده از تقریب پاده، ابتدا تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} y(t) \triangleq x(t - \frac{1}{4}), \\ z(t) \triangleq y(t - \frac{1}{4}) = x(t - 1). \end{cases}$$

سپس (۳۹.۴) - (۴۰.۴) به سیستم زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = x(t) + z(t) + u(t), \\ \dot{y}(t) = 4(x(t) - y(t)) - \dot{x}(t), \\ \dot{z}(t) = 4(2y(t) - z(t) - x(t)) + \dot{x}(t), \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1. \end{cases} \quad (41.4)$$

اکنون مسأله (۳۸.۴) را با سیستم (۴۱.۴) با استفاده از شبکه عصبی مونتنس-لژاندر حل

جدول ۱.۴: مقادیر دقیق و تقریبی تابع هدف در مثال ۱.۷.۴.

مقدار تابع هدف J	مقدار α	روش
۳/۰۹۰۱	۱	شبکه عصبی مونتنس- لژاندر
۲/۳۷۰۵	۰/۹	
۲/۲۹۲۰	۰/۸	
۳/۰۸۳۳	۱	روش ارائه شده در [۷۴]
۳/۰۸۷۶	۱	توابع والش [۷۲]
۳/۱۰۱۷	۱	جواب دقیق [۷۴]

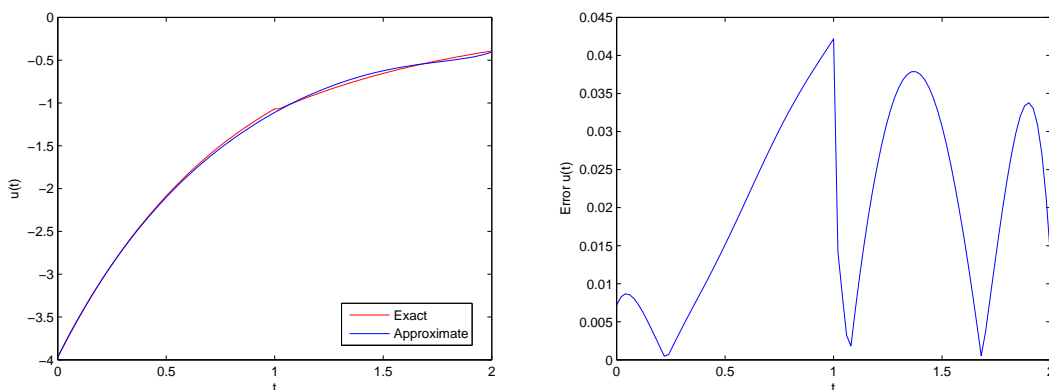
جدول ۲.۴: تابع خطای $E(P)$ به ازای مقادیر مختلف α در مثال ۱.۷.۴.

α	۱	۰/۹	۰/۸
$E(P)$	$۲/۷۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۸۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۸۲ \times ۱۰^{-۴}$

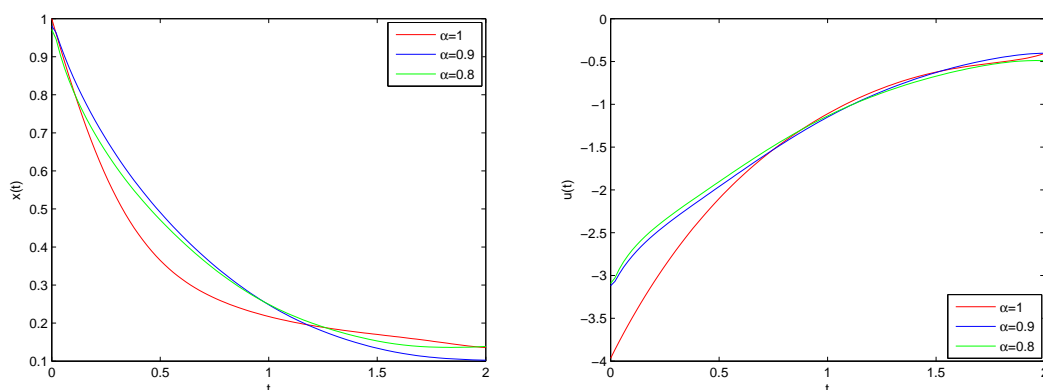
می‌کنیم. جواب‌های تقریبی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\left\{ \begin{array}{l} x_T = 1 + tN_x(t), \\ y_T = 1 + tN_y(t), \\ z_T = 1 + tN_z(t), \\ \lambda_T = 3x_T(2) + (t-2)N_\lambda(t), \\ \gamma_T = (t-2)N_\gamma(t), \\ \mu_T = (t-2)N_\mu(t), \\ u_T = N_u(t). \end{array} \right. \quad (۴۲.۴)$$

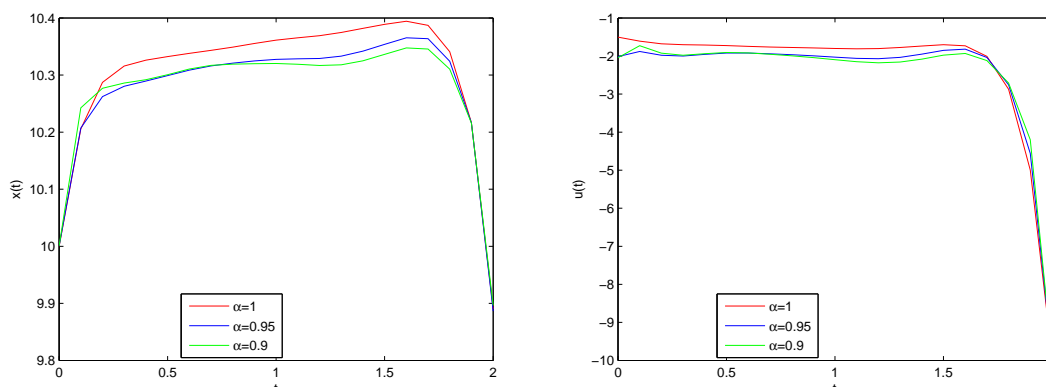
مقدار تقریبی تابع هدف به ازای $n=8$ ، $m=10^0$ و مقادیر مختلف α در جدول ۱.۴ ارائه شده است و با چند روش دیگر نیز مقایسه شده است. در شکل ۳.۴ توابع کنترل دقیق و تقریبی به ازای $\alpha=1$ نشان داده شده است. همچنین نمودار متغیرهای وضعیت و توابع کنترل به ازای مقادیر مختلف α در شکل ۴.۴ رسم شده است. نتایج $E(P)$ در جدول ۲.۴ نشان می‌دهد که جواب‌های تقریبی به ازای مقادیر مختلف α در شرایط لازم بهینگی صدق می‌کنند.



شکل ۳.۴: توابع دقیق و تقریبی کنترل $u(t)$ سمت چپ و خطای مطلق سمت راست برای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۷.۴.



شکل ۴.۴: مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۱.۷.۴.



شکل ۵.۴: مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای $\alpha = 1, 0.95, 0.9$ در مثال ۲.۷.۴.

مثال ۲.۷.۴. مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \frac{1}{\gamma} [x(\tau)]^2 + \frac{1}{\gamma} \int_0^{\tau} [x^2(t) + u^2(t)] dt, \quad (43.4)$$

$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x(t) = x(t) \sin(x(t)) + x(t-1) + u(t), \quad (44.4)$$

$$x(t) = 1^0, \quad t \in [-1, 0]. \quad (45.4)$$

فرض کنید

$$\begin{cases} y(t) \triangleq x(t - \frac{1}{\gamma}), \\ z(t) \triangleq y(t - \frac{1}{\gamma}) = x(t - 1). \end{cases}$$

اکنون (۴۴.۴) – (۴۵.۴) به سیستم زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = x(t) \sin(x(t)) + z(t) + u(t), \\ \dot{y}(t) = \mathcal{F}(x(t) - y(t)) - \dot{x}(t), \\ \dot{z}(t) = \mathcal{F}(y(t) - x(t) - z(t)) + \dot{x}(t), \\ x(0) = y(0) = z(0) = 1^0. \end{cases} \quad (46.4)$$

با استفاده از روش شبکه عصبی ارائه شده به ازای $n = 8$ و $m = 100$ این مسأله را حل می‌کنیم. به ازای $\alpha = 1$ نتایج به دست آمده برای تابع هدف J در جدول ۳.۴ ارائه شده است. با انتخاب مقادیر مختلف α مسیرهای بهینه برای توابع وضعیت و کنترل نیز در شکل ۵.۴ رسم شده است.

این بار مسأله (۴۳.۴) – (۴۵.۴) را با اضافه کردن قید تساوی برای متغیر وضعیت در زمان

جدول ۳.۴: مقادیر تقریبی تابع هدف برای $\alpha = 1$ در مثال ۲.۷.۴.

روش	مقدار تابع هدف J
شبکه عصبی مونتس-لژاندر	۱۶۰/۲۵۸۳
روش ارائه شده در [۷۸]	۱۶۲/۰۱۹
روش ارائه شده در [۹۶]	۱۶۲/۰۱۴۱
روش شبه طیفی گاوس-لژاندر [۹۷]	۱۶۱/۹۸۰۹
روش شبه طیفی [۹۸]	۱۶۱/۹۸۰۹

جدول ۴.۴: تابع خطای $E(P)$ به ازای مقادیر مختلف α در مثال ۲.۷.۴.

α	۱	۰/۹۵	۰/۹
$E(P)$	$۲/۹۳ \times 10^{-۴}$	$۲/۷۷ \times 10^{-۴}$	$۷/۲۵ \times 10^{-۴}$

نهایی به صورت

$$-۱۱۹/۸۵۴ + ۲۲x(۲) - x^۲(۲) = ۰, \quad (۴۷.۴)$$

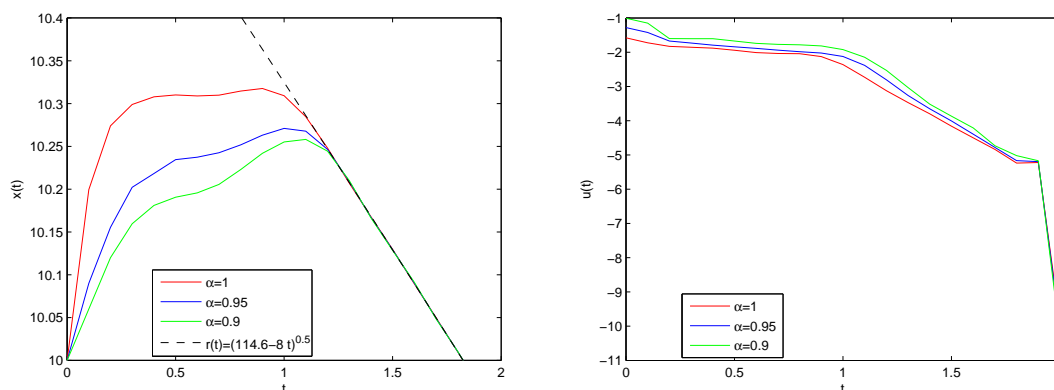
و قید نامساوی غیرخطی به صورت زیر

$$-۱۱۴/۶ + ۸t + x^۲(t) \leq ۰. \quad (۴۸.۴)$$

مورد بررسی قرار دادیم. مقدار تابع هدف به ازای $\alpha = 1$ ، $n = 8$ و $m = 100$ به صورت $J = 163/5633$ است. این مقدار با نتایج به دست آمده در [۹۷] با استفاده از روش‌های شبه طیفی گاوس-لژاندر ($J = 164/4256$)، در [۹۹] با استفاده از روش پارامتری سازی کنترل کلاسیک^{۱۲} ($J = 165/54$) و روش افزایش پارامتر کنترل^{۱۳} ($J = 164/465$) به خوبی مقایسه شده است. همچنین با تغییر مقدار α مسیرهای بهینه برای مسأله مقید جدید در شکل ۶.۴ رسم شده است. مقادیر $E(P)$ به ازای α های متفاوت در جدول ۴.۴ نشان می‌دهد که جواب‌های تقریبی در شرایط لازم بهینگی صدق می‌کنند.

¹²Classical control parametrization

¹³Control parametrization enhancing technique



شکل ۶.۴: مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای $\alpha = 1, 0.95, 0.9$ در مثال ۲.۷.۴ با قیود تساوی و نامساوی.

مثال ۳.۷.۴. اکنون مسأله زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \frac{1}{\Gamma} [x(1)]^2 + \frac{1}{\Gamma} \int_0^1 u^2(t) dt, \quad (49.4)$$

$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x(t) = x(t) + t^\gamma x(t - \frac{1}{\Gamma}) + u(t), \quad (50.4)$$

$$x(t) + u(t) \leq t^\gamma - 1, \quad (51.4)$$

$$x(t) = t + 1, \quad t \in [-1/3, 0]. \quad (52.4)$$

فرض کنید

$$\begin{cases} y(t) \triangleq x(t - \frac{1}{\Gamma}), \\ z(t) \triangleq y(t - \frac{1}{\Gamma}) = x(t - \frac{2}{\Gamma}). \end{cases} \quad (53.4)$$

با استفاده از (۵۳.۴) سیستم تاخیری (۵۰.۴)–(۵۲.۴) به سیستم بدون تاخیر زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = x(t) + t^\gamma z(t) + u(t), \\ \dot{y}(t) = \gamma(x(t) - y(t)) - \dot{x}(t), \\ \dot{z}(t) = \gamma(y(t) - z(t) - x(t)) + \dot{x}(t), \\ x(t) + u(t) \leq t^\gamma - 1, \\ x(0) = 1, y(0) = \frac{5}{6}, z(0) = \frac{2}{3}. \end{cases} \quad (54.4)$$

سپس با استفاده از شبکه عصبی مونتس-لژاندر جواب‌های آزمایشی را به صورت زیر در نظر

جدول ۵.۴: مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۳.۷.۴.

مقدار α	مقدار تابع هدف J	روش
۱	۱/۱۰۲۳	شبکه عصبی مونتنس-لژاندر
۰/۹۹	۱/۱۰۰۸	
۰/۹۸	۱/۰۹۵۵	
۱	۱/۱۰۴۰	توابع بلاک-پالس و چندجمله ای های درونیاب لاگرانژ [۱۰۰]

جدول ۶.۴: مقادیر تابع خطای $E(P)$ در مثال ۳.۷.۴.

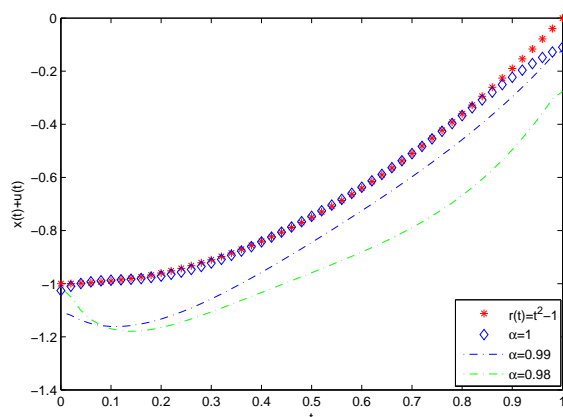
α	۱	۰/۹۹	۰/۹۸
$E(P)$	$۱/۸۵۷۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۸۰۸۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۸/۳۰۱۷ \times ۱۰^{-۳}$

می گیریم

$$\left\{ \begin{array}{l} x_T = 1 + tN_x(t), \\ y_T = \frac{5}{6} + tN_y(t), \\ z_T = \frac{2}{3} + tN_z(t), \\ \lambda_T = x_T(1) + (t-1)N_\lambda(t), \\ \gamma_T = (t-1)N_\gamma(t), \\ \mu_T = (t-1)N_\mu(t), \\ \zeta_{1T} = N_{\zeta_1}(t), \\ u_T = N_u(t). \end{array} \right. \quad (۵۵.۴)$$

به ازای $\alpha = 1$ ، این مسأله در [۱۰۰] با استفاده از روش ترکیبی توابع بلاک پالس و چندجمله ای های لاگرانژ حل شده است که مقدار تابع هدف $J = 1/1040$ است. ما با استفاده از شبکه عصبی پیشنهادی این مسأله را حل می کنیم. مقدار بهینه تابع هدف به ازای $n = 8$ ، $m = 50$ و α های مختلف در جدول ۵.۴ ارائه شده است. با تغییر مقادیر α مسیرهای تقریبی برای $x(t) + u(t)$ در شکل ۷.۴ رسم شده است. به علاوه مقادیر $E(P)$ در جدول ۶.۴ ارائه شده است.

مثال ۴.۷.۴. مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری غیرخطی زیر را که شامل محدودیت های



شکل ۷.۴: مسیرهای بهینه از $x(t) + u(t)$ برای $\alpha = 1, 0.99, 0.98$ در مثال ۳.۷.۴.

جدول ۷.۴: مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۴.۷.۴.

مقدار تابع هدف J	مقدار α	روش
-۰/۲۳۷۳	۱	شبکه عصبی مونتنس- لژاندر
-۰/۲۵۴۹	۰/۹۵	
-۰/۲۶۸۲	۰/۹	
-۰/۳۰۶۸۵	۱	(حالت بدون تاخیر) روش ماتریس عملگر برنشتاین [۱۰۱]

مساوی و نامساوی است در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \int_0^1 -\ln(2)x(t)dt, \quad (56.4)$$

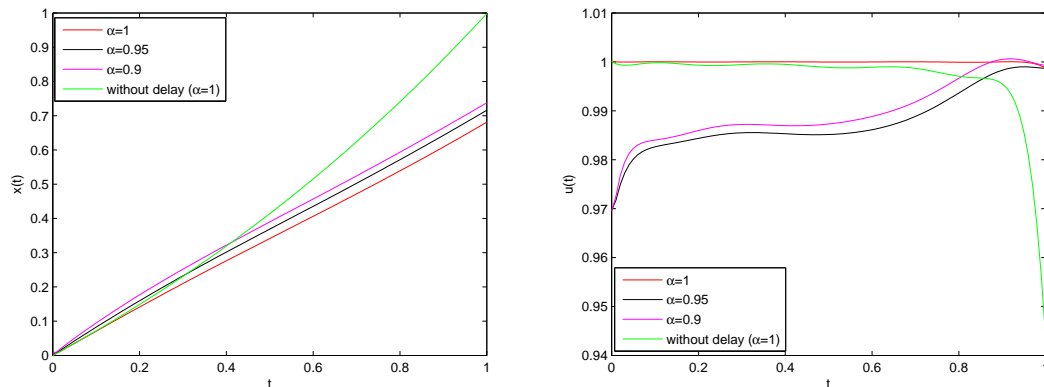
$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x(t) = \ln(2)(x(t-1) + u(t)), \quad (57.4)$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad (58.4)$$

$$x(t) + u(t) \leq 2, \quad (59.4)$$

$$x(t) = 0, \quad t \in [-1, 0]. \quad (60.4)$$

این مسأله در حالت غیرتاخیری به ازای مقادیر مختلف α در [۱۰۱] حل شده است. اکنون ما با در نظر گرفتن عامل تاخیر در متغیر وضعیت $x(t)$ مسأله را بررسی می‌کنیم. با استفاده از روش شبکه عصبی پیشنهادی به ازای $n = 8$ ، $m = 50$ و مقادیر مختلف α مقدار بهینه تابع هدف در جدول ۷.۴ نشان داده شده است. همچنین برای مقادیر مختلف α مسیرهای بهینه برای متغیر وضعیت و تابع کنترل در شکل ۸.۴ رسم شده است. با نشان دادن مقادیر $E(P)$ در جدول ۸.۴ می‌توان نتیجه گرفت که جواب‌های تقریبی به دست آمده در شرایط لازم بهینگی صدق می‌کنند.



شکل ۸.۴: مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای $\alpha = 1, 0.95, 0.9$ در مثال ۴.۷.۴.

جدول ۸.۴: مقادیر تابع خطای $E(P)$ در مثال ۴.۷.۴.

α	۱	۰/۹۵	۰/۹
$E(P)$	$1/01 \times 10^{-3}$	$8/59 \times 10^{-3}$	$8/54 \times 10^{-3}$

مثال ۵.۷.۴. مسأله زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \frac{1}{\Gamma} \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt, \quad (61.4)$$

$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x(t) = x(t-1) + u(t), \quad (62.4)$$

$$x(t) = 1, \quad t \in [-1, 0]. \quad (63.4)$$

با استفاده از روش شبکه عصبی پیشنهادی، مقادیر تابع هدف J به ازای مقادیر متفاوت α ، $n = 8$ و $m = 100$ در جدول ۹.۴ نشان داده شده است. نمودارهای توابع وضعیت و کنترل نیز در شکل ۹.۴ رسم شده‌اند. نتایج محاسباتی از تابع خطای $E(P)$ در جدول ۱۰.۴ گزارش شده است. این نتایج برقراری جواب‌های تقریبی را در شرایط لازم بهینگی تصدیق می‌کنند.

مثال ۶.۷.۴. مسأله کنترل بهینه کسری با تاخیر در کنترل را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \frac{1}{\Gamma} \int_0^{0.25} (x^2(t) + u^2(t)) dt, \quad (64.4)$$

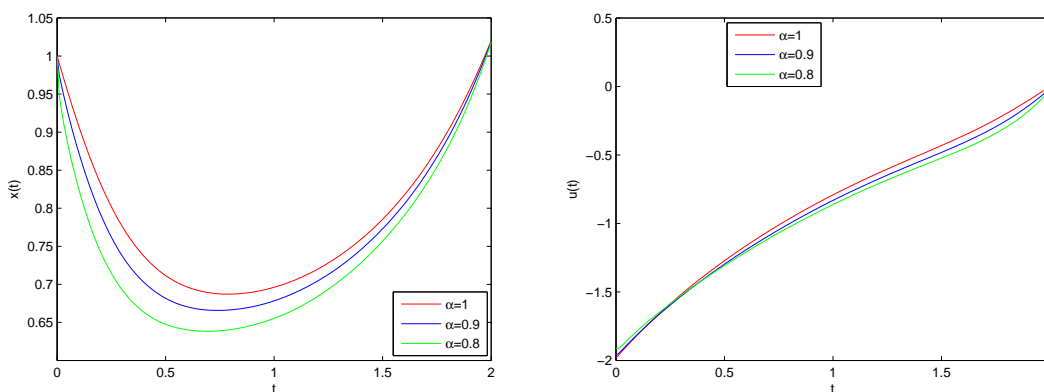
$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x(t) = x(t) + u(t-0.1) + u(t), \quad (65.4)$$

$$x(0) = 1, \quad u(t) = 0, \quad t \in [-0.1, 0]. \quad (66.4)$$

با استفاده از روش شبکه عصبی پیشنهادی به ازای $n = 8$ و $m = 50$ مسأله را حل می‌کنیم. با انتخاب مقادیر مختلف α نتایج به دست آمده برای تابع هدف J در جدول ۱۱.۴ آمده است.

جدول ۹.۴: مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۵.۷.۴.

مقدار α	مقدار تابع هدف J	روش
۱	۱/۶۲۱۷	شبکه عصبی مونتنس- لژاندر
۰/۹	۱/۶۳۵۴	
۰/۸	۱/۶۴۴۵	
۱	۱/۶۴۷۸	روش هیبریدی [۷۶]
۱	۱/۶۴۸۸	روش ارائه شده در [۵۲]
۱	۱/۶۴۷۸	روش موجک چلیشکف [۵۶]
۱	۱/۶۴۷۴	روش شبه طیفی [۵۷]



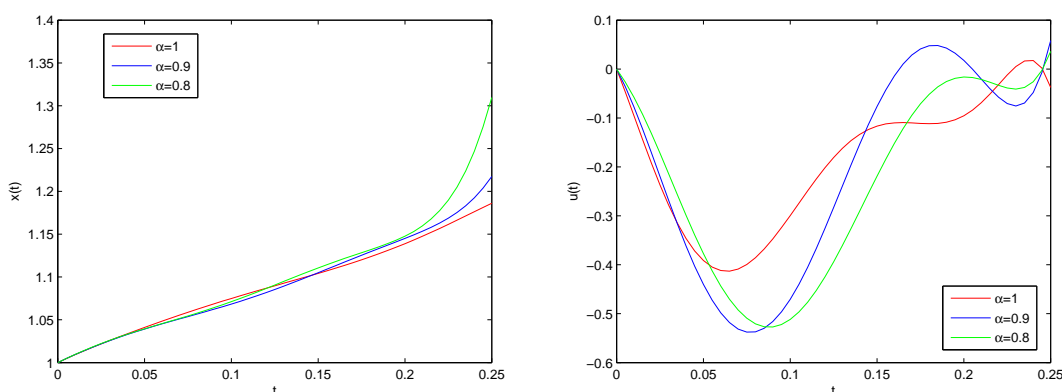
شکل ۹.۴: مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۵.۷.۴.

جدول ۱۰.۴: مقادیر تابع خطای $E(P)$ در مثال ۵.۷.۴.

α	۱	۰/۹	۰/۸
$E(P)$	$1/29 \times 10^{-5}$	$1/2 \times 10^{-6}$	$3/55 \times 10^{-5}$

جدول ۱۱.۴: مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۶.۷.۴.

مقدار تابع هدف J	مقدار α	روش
۰/۱۵۲۳	۱	شبکه عصبی مونتنس-لژاندر
۰/۱۵۵۵	۰/۹	
۰/۱۶۰۳	۰/۸	
۰/۱۵۳۷	۱	روش موجک‌های چلیشکف [۵۶]
۰/۱۵۴۲	۱	روش شبه طیفی [۵۷]
۰/۱۵۶۵	۱	روش ارائه شده در [۷۳]



شکل ۱۰.۴: مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۶.۷.۴.

مسیرهای بهینه وضعیت و توابع کنترل در شکل ۱۰.۴ رسم شده است. برای α های مختلف مقدار تابع خطای $E(P)$ نیز در جدول ۱۲.۴ آمده است.

مثال ۷.۷.۴. مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \frac{1}{\Gamma} \int_0^1 (x^2(t) + \frac{1}{\Gamma} u^2(t)) dt, \quad (67.4)$$

$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x(t) = -x(t) + x(t - \frac{1}{\Gamma}) + u(t) - \frac{1}{\Gamma} u(t - \frac{2}{\Gamma}), \quad (68.4)$$

$$x(t) = 1, \quad t \in [-\frac{1}{\Gamma}, 0], \quad (69.4)$$

$$u(t) = 0, \quad t \in [-\frac{2}{\Gamma}, 0]. \quad (70.4)$$

برای $\alpha = 1$ این مسأله در [۱۰۲] با استفاده از توابع بلاک-پالس و چندجمله‌ای برنولی حل شده است. همچنین برای حالت کسری این مسأله در [۵۷] با استفاده از روش شبه طیفی، در [۵۶] با استفاده از روش ماتریس عملیاتی و موجک‌های چلیشکف و در [۶۰] با استفاده از معادلات

جدول ۱۲.۴: مقادیر تابع خطای $E(P)$ در مثال ۶.۷.۴.

α	۱	۰/۹	۰/۸
$E(P)$	$۹/۸۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۶/۱۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۷۸ \times ۱۰^{-۳}$

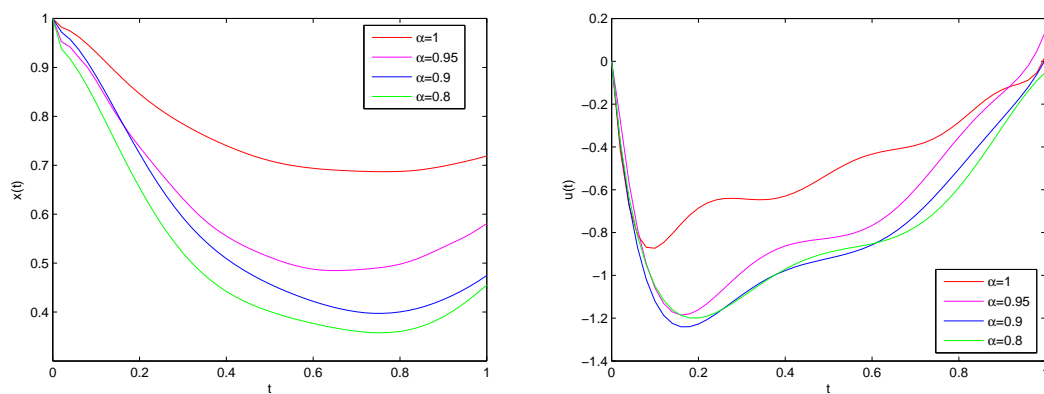
جدول ۱۳.۴: مقادیر تقریبی تابع هدف در مثال ۷.۷.۴.

روش	مقدار α	مقدار تابع هدف J
شبکه عصبی مونتس- لژاندر	۱	۰/۳۶۵۶
	۰/۹۵	۰/۳۶۶۱
	۰/۹	۰/۳۶۱۲
	۰/۸	۰/۳۵۱۸
روش شبه‌طیفی [۵۷]	۱	۰/۳۶۷۷
روش هیبریدی [۱۰۲]	۱	۰/۳۷۳۱۰
روش موجک‌های چلیشکف [۵۶]	۱	۰/۳۷۳۱۱
روش ارائه شده در [۶۰]	۱	۰/۳۷۳۱۴

اویلر- لاگرانژ و تقریب گرانیوالد- لتنیکف حل شده است. با به‌کارگیری روش پیشنهادی شبکه عصبی مونتس- لژاندر این مسأله برای $n = ۸$ ، $m = ۵$ و α های مختلف حل شده است. مقادیر تابع هدف در جدول ۱۳.۴ ارائه شده و نتیجه با روش‌های موجود مقایسه شده است. همچنین مسیرهای وضعیت و توابع کنترل در شکل ۱۱.۴ نشان داده شده است. با استفاده از مقادیر ارائه شده $E(P)$ در جدول ۱۴.۴ دقت روش پیشنهادی نشان داده می‌شود.

جدول ۱۴.۴: مقادیر تابع خطای $E(P)$ در مثال ۷.۷.۴.

α	۱	۰/۹۵	۰/۹	۰/۸
$E(P)$	$۱/۲۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۵/۸۹ \times ۱۰^{-۲}$	$۵/۸۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۵/۶۳ \times ۱۰^{-۲}$



شکل ۱۱.۴: مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای مسیره‌های وضعیت $x(t)$ و توابع کنترل $u(t)$ در مثال ۷.۷.۴. $\alpha = 1, 0.95, 0.9, 0.8$

فصل ۵

حل مسائل کنترل بهینه کسری با هسته غیرتکین با استفاده از شبکه عصبی نمائی

۱.۵ مقدمه

تاکنون حسابان کسری با تاثیر از خاصیت حافظه‌داری، ویژگی‌های جدیدی را در توصیف رفتارهای پیچیده دنیای واقعی ارائه داده است. با این حال، توصیف سیستم‌های با تاثیر حافظه هنوز هم یک چالش بزرگ برای محققان است، زیرا انواع کلاسیک حسابان کسری مانند کاپاتو، ریمن-لیوویل، گرانوالد لتنیکیف، ریس^۱، هادامارد^۲ و غیره با هسته تکین نمی‌توانند سیستم‌های دینامیکی را همیشه به درستی توصیف کنند. از این رو برای رفع مشکل تکینی، کاپاتو و فابریسیو در سال ۲۰۱۵ تعریفی را با عنوان مشتق کاپاتو-فابریسیو ارائه کردند که در آن از هسته نمائی استفاده شده است [۷]. با توجه به جدید بودن نتایج آن‌ها، محققان از این تعریف در حل مسائل استفاده کرده و نتایج خوبی به دست آورده‌اند. نکته اصلی در عملکرد این مشتق این است که دارای هسته غیرتکین بوده و در مسائل مختلفی چون مسائل فیزیکی،

¹Riesz

²Hadamard

آب‌های زیرزمینی، علوم حرارتی و غیره کاربرد دارد [۱۰۳، ۱۰۴]. همچنین در علوم ریاضی، مدل‌سازی مسائل کنترل بهینه با سیستم دینامیکی کسری شامل مشتق کاپاتو-فابریسیو در حال توسعه است. باید توجه داشت که یافتن جواب تحلیلی مسائل کنترل بهینه کسری با مشتق کاپاتو-فابریسیو کار آسانی نیست. از این رو برای حل عددی این مسائل روش‌های عددی موثر و کارایی لازم است. با انگیزه گرفتن از مباحث فوق، در این بخش قصد داریم مسائل کنترل بهینه کسری با مشتق کاپاتو-فابریسیو را مورد بررسی قرار دهیم.

۲.۵ مدل‌بندی ریاضی مسأله

مسأله کنترل بهینه با مشتق کسری کاپاتو-فابریسیو را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J(x(t), u(t)) = \int_0^T F(t, x(t), u(t)) dt, \quad (1.5)$$

$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x(t) = G(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad (2.5)$$

$$x(0) = x_0. \quad (3.5)$$

که در آن توابع F و G همان شرایط مسأله (۱.۳)–(۴.۳) را دارند. عبارت ${}^C D_t^\alpha x(t)$ مشتق چپ کاپاتو-فابریسیو را نشان می‌دهد که در فصل ۱ تعریف شده است. شرایط لازم بهینگی برای مسأله (۱.۵)–(۳.۵) در [۱۰۵] بیان و اثبات شده است. طبق این شرایط داریم

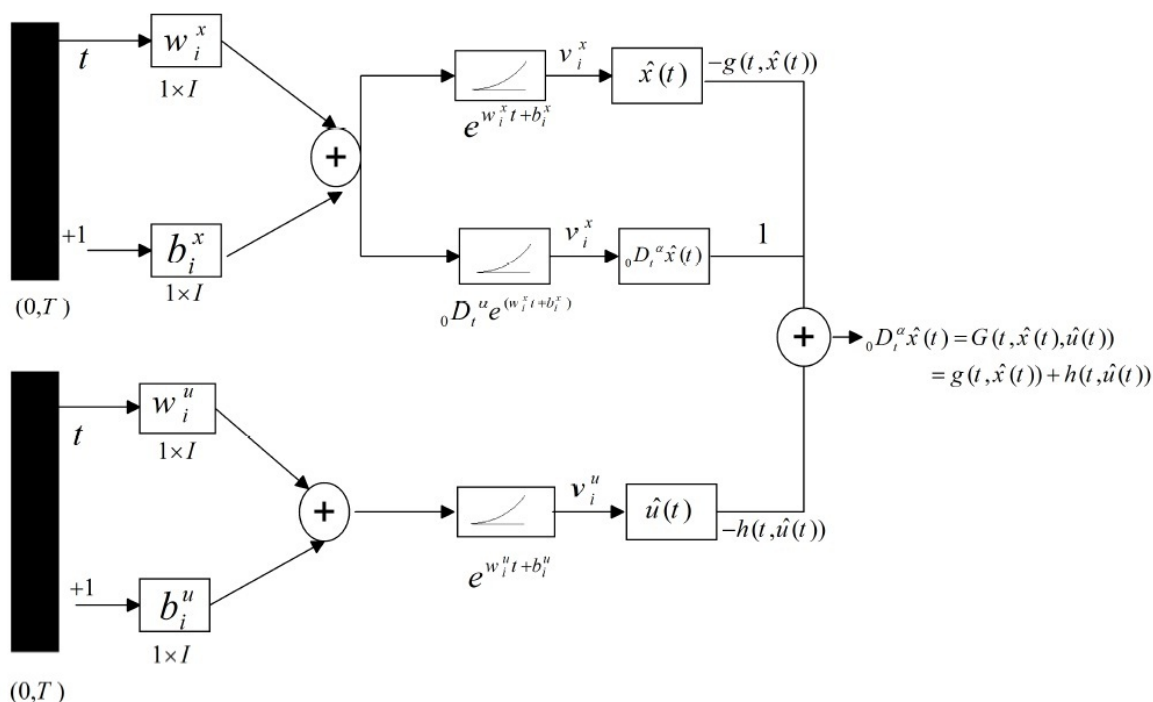
$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = {}^C D_T^\alpha \lambda(t), & \lambda(T) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} = {}^C D_t^\alpha x(t), & x(0) = x_0, \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

که در آن تابع همیلتونی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(t, x(t), \lambda(t), u(t)) = F(t, x(t), u(t)) + \lambda(t).G(t, x(t), u(t)).$$

۳.۵ حل عددی سیستم بهینگی با استفاده از شبکه عصبی نمائی

در این قسمت به دنبال ارائه یک شبکه عصبی کارا برای حل سیستم بهینگی (۴.۵) هستیم. از طرفی به دلیل ساختار تعریف مشتق کاپاتو-فابریسیو و وجود عامل نمائی بهتر است از شبکه عصبی نمائی برای حل این مسأله استفاده کرد. شبکه عصبی نمائی به دلیل وجود تابع نمائی



شکل ۱.۵: شبکه عصبی نمائی متناظر با سیستم دینامیکی (۲.۵)

سازگاری بیشتری نسبت به شبکه عصبی سیگموئید با تابع انتگرالده در رابطه (۱۵.۱) دارد و از پیچیدگی محاسبات تا حدودی کاسته می‌شود. از طرفی با توجه به وجود عبارت مشتق مرتبه اول در تعریف (۱۵.۱)، مشتق‌گیری از تابع نمائی به نسبت آسان‌تر از تابع سیگموئید خواهد بود.

اکنون برای حل سیستم بهینگی (۴.۵) جواب‌های آزمایشی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \sum_{i=1}^I v_i^x e^{w_i^x t + b_i^x}, \\ \hat{\lambda}(t) = \sum_{i=1}^I v_i^\lambda e^{w_i^\lambda t + b_i^\lambda}, \\ \hat{u}(t) = \sum_{i=1}^I v_i^u e^{w_i^u t + b_i^u}, \end{cases} \quad (۵.۵)$$

که در آن I تعداد نرون‌های لایه پنهان، w وزن لایه ورودی، v وزن لایه خروجی و b وزن بایاس است. تابع فعالیت در شبکه نمائی به صورت $\sigma(\cdot) = e^{(\cdot)}$ است. همچنین ساختار شبکه عصبی نمائی با ورودی t را می‌توان در شکل ۱.۵ دید [۴۳].

اکنون جواب‌های آزمایشی باید در شرایط لازم بهینگی (۴.۵) صدق کنند. بنابراین داریم

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{x}} = {}^C D_T^\alpha \hat{\lambda}(t), \\ \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{\lambda}} = {}^C D_t^\alpha \hat{x}(t), \\ \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{u}} = 0, \\ \hat{x}(0) = x_0, \\ \hat{\lambda}(T) = 0, \end{cases} \quad (6.5)$$

که در آن تابع همیلتونی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{H} = H(t, \hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}).$$

برای محاسبه مشتق‌های ${}^C D_t^\alpha \hat{x}(t)$ و ${}^C D_T^\alpha \hat{\lambda}(t)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم. از (۵.۵) داریم

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^I v_i^x w_i^x e^{w_i^x t + b_i^x}. \quad (7.5)$$

طبق رابطه (۱۵.۱)، برای محاسبه مشتق ${}^C D_t^\alpha \hat{x}(t)$ داریم

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha \hat{x}(t) &= \frac{M(\alpha)}{\Gamma-\alpha} \int_0^t \left(\sum_{i=1}^I v_i^x w_i^x e^{w_i^x \tau + b_i^x} \right) e^{-\frac{\alpha}{\Gamma-\alpha}(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{M(\alpha)}{\Gamma-\alpha} \left[\sum_{i=1}^I v_i^x w_i^x \int_0^t e^{w_i^x \tau + b_i^x} e^{-\frac{\alpha}{\Gamma-\alpha}(t-\tau)} d\tau \right] \\ &= \frac{M(\alpha)}{\Gamma-\alpha} \left[\sum_{i=1}^I v_i^x w_i^x \int_0^t e^{w_i^x \tau + b_i^x - \frac{\alpha}{\Gamma-\alpha}(t-\tau)} d\tau \right] \\ &= \frac{M(\alpha)}{\Gamma-\alpha} \left[\sum_{i=1}^I v_i^x w_i^x I_1 \right], \end{aligned} \quad (8.5)$$

که در آن انتگرال I_1 به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$I_1 = \frac{1}{w_i^x + (\frac{\alpha}{\Gamma-\alpha})} \left(e^{w_i^x \tau + b_i^x - (\frac{\alpha}{\Gamma-\alpha})(t-\tau)} \right) \Big|_0^t = \frac{1}{w_i^x + (\frac{\alpha}{\Gamma-\alpha})} \left(e^{w_i^x t + b_i^x} - e^{b_i^x - (\frac{\alpha}{\Gamma-\alpha})t} \right). \quad (9.5)$$

برای تعریف مشتق راست ${}^C D_T^\alpha \hat{\lambda}(t)$ نیز با روندی مشابه تعریف مشتق چپ کاپاتو-فابریسیو داریم

$$\begin{aligned} {}^C D_T^\alpha \hat{\lambda}(t) &= -\frac{M(\alpha)}{\Gamma-\alpha} \int_t^T \left(\sum_{i=1}^I v_i^\lambda w_i^\lambda e^{w_i^\lambda \tau + b_i^\lambda} \right) e^{-\frac{\alpha}{\Gamma-\alpha}(\tau-t)} d\tau \\ &= -\frac{M(\alpha)}{\Gamma-\alpha} \left[\sum_{i=1}^I v_i^\lambda w_i^\lambda I_2 \right], \end{aligned} \quad (10.5)$$

که در آن انتگرال I_2 به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$(11.5)$$

$$I_2 = \frac{1}{w_i^\lambda - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)} \left(e^{w_i^\lambda \tau + b_i^\lambda - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(\tau-t)} \right) \Big|_t^T = \frac{1}{w_i^\lambda - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)} \left(e^{w_i^\lambda T + b_i^\lambda - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(T-t)} - e^{w_i^\lambda t + b_i^\lambda} \right).$$

اکنون با تشکیل تابع خطا مانند فصل قبل به مسأله بهینه‌سازی نامقید زیر می‌رسیم

$$(12.5)$$

$$\text{Minimize}_W E(W) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^m \{E_\lambda(t_k, W) + E_\gamma(t_k, W) + E_\pi(t_k, W) + E_\phi(t_k, W) + E_\delta(t_k, W)\}$$

که در آن

$$\begin{cases} E_\lambda(t_k, W) = \left[{}^{CF}D_{t_k}^\alpha \hat{x}(t_k) - \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{\lambda}} \right]^2, \\ E_\gamma(t_k, W) = \left[{}^{CF}D_T^\alpha \hat{\lambda}(t_k) - \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{x}} \right]^2, \\ E_\pi(t_k, W) = \left[\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{u}} \right]^2, \\ E_\phi(t_k, W) = [\hat{x}(0) - x_0]^2, \\ E_\delta(t_k, W) = [\hat{\lambda}(T)]^2. \end{cases} \quad (13.5)$$

سپس مسأله بهینه‌سازی نامقید را مانند فصل قبل می‌توان با استفاده از هر روش بهینه‌سازی دلخواه حل کرد.

۴.۵ نتایج عددی

در این بخش، روش ارائه شده را برای حل سه مثال عددی پیاده می‌کنیم و کارایی روش را نشان می‌دهیم.

مثال ۱.۴.۵. مسأله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \frac{1}{\tau} \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt, \quad (14.5)$$

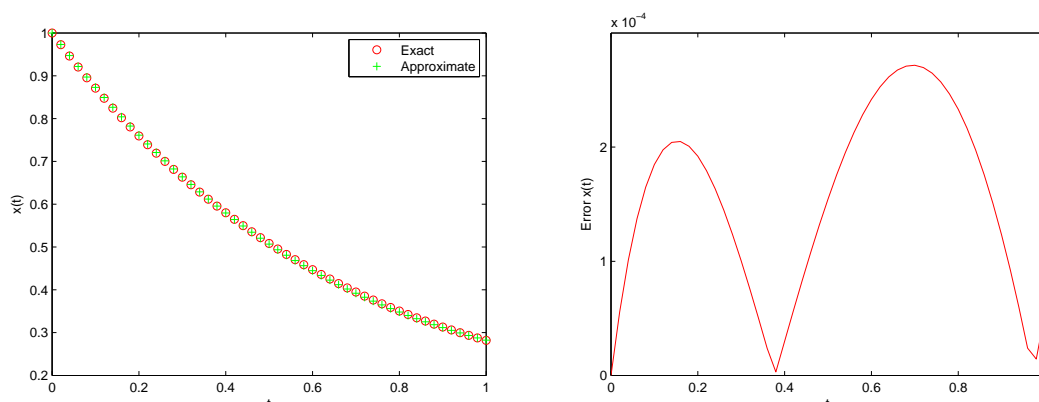
$$\text{subject to } {}^{CF}D_t^\alpha x(t) = -x(t) + u(t), \quad t \in [0, 1], \quad (15.5)$$

$$x(0) = 1. \quad (16.5)$$

برای $\alpha = 1$ این مسأله در [۱۱۰] حل شده است. جواب‌های دقیق این مسأله به صورت زیر است

$$x(t) = \cosh(\sqrt{2}t) + \beta \sinh(\sqrt{2}t),$$

$$u(t) = (1 + \sqrt{2}\beta) \cosh(\sqrt{2}t) + (\sqrt{2} + \beta) \sinh(\sqrt{2}t).$$



شکل ۲.۵: مسیرهای دقیق و تقریبی متغیر وضعیت $x(t)$ سمت چپ و خطای مطلق سمت راست برای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۴.۵.

که در آن

$$\beta = -\frac{\cosh(\sqrt{2}) + \sqrt{2} \sinh(\sqrt{2})}{\sqrt{2} \cosh(\sqrt{2}) + \sinh(\sqrt{2})} \approx -0.98.$$

ما با استفاده از شبکه عصبی نمائی و انتخاب نقاط شبکه به صورت نقاط چبیشف-گوس-لوباتو^۳ این مسئله را حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم t_k نقاط شبکه انتخاب شده در بازه $[0, 1]$ باشند. پس داریم

$$t_k = \frac{1}{m} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi k}{m}\right) \right), \quad k = 0, 2, \dots, m. \quad (17.5)$$

با استفاده از مدل شبکه عصبی پیشنهادی با ۱۰ نرون میانی و در ۵۱ نقطه از بازه $[0, 1]$ مسیرهای دقیق و تقریبی متغیر وضعیت و تابع کنترل به ازای $\alpha = 1$ در شکل‌های ۲.۵ و ۳.۵ نشان داده شده است. همچنین مسیرهای رسم شده برای خطای مطلق این متغیرها را نیز می‌توان در شکل‌های ۲.۵ و ۳.۵ دید. برای α های متفاوت مسیرهای وضعیت و توابع کنترل نیز به ترتیب در شکل‌های ۴.۵ و ۵.۵ رسم شده است. همچنین به ازای شبکه پیشنهادی مقدار تابع هدف J به ازای مقادیر مختلف α در جدول ۱.۵ ارائه شده است. از مقایسه نتایج در جدول ۱.۵ می‌توان نتیجه گرفت که مقدار تابع هدف مسأله ارائه شده با مشتق کاپاتو-فابریسیو نتایج بهتری را در مقایسه با دیگر کارهای موجود شامل مشتق کاپاتو ارائه می‌دهد.

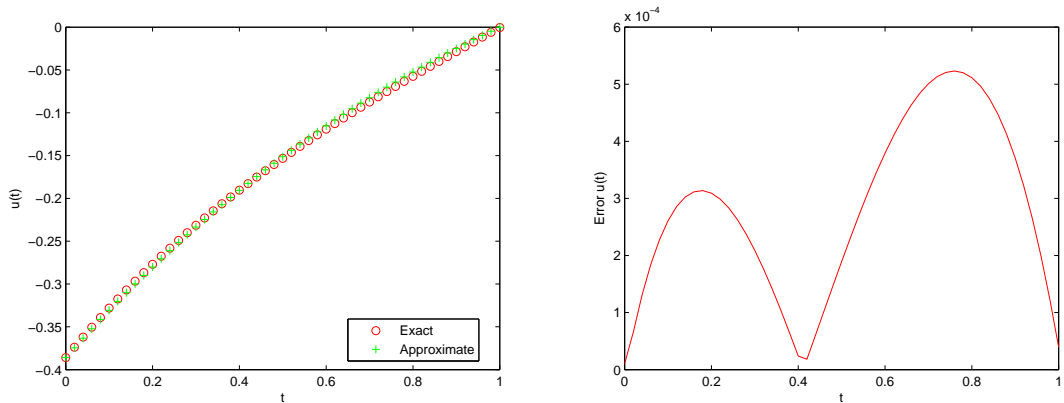
مثال ۲.۴.۵. مسأله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \frac{1}{\Gamma} \int_0^1 \left(x^2(t) + u^2(t) \right) dt, \quad (18.5)$$

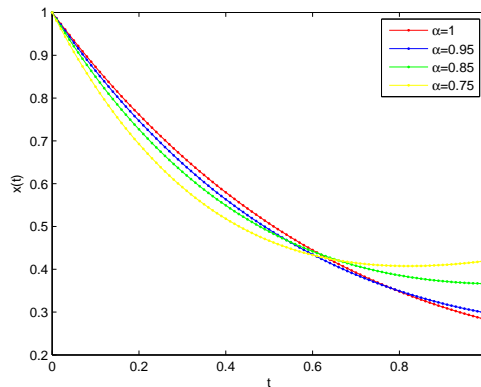
$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x(t) = tx(t) + u(t), \quad t \in [0, 1], \quad (19.5)$$

$$x(0) = 1. \quad (20.5)$$

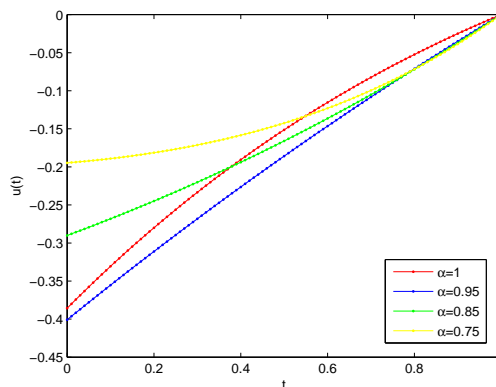
³Chebyshev-Guass-Lobatto



شکل ۳.۵: توابع دقیق و تقریبی کنترل $u(t)$ سمت چپ و خطای مطلق سمت راست برای $\alpha = 1$ در مثال ۱.۴.۵.



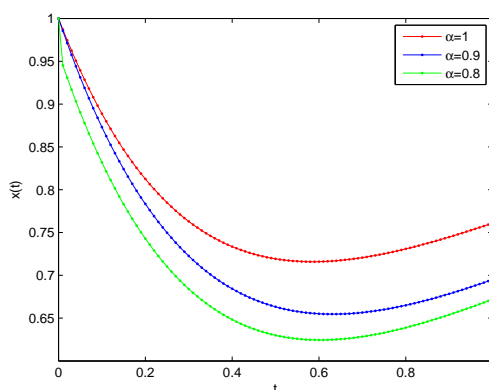
شکل ۴.۵: مسیرهای بهینه وضعیت $x(t)$ برای $\alpha = 1, 0.95, 0.85, 0.75$ در مثال ۱.۴.۵.



شکل ۵.۵: توابع بهینه کنترل $u(t)$ برای $\alpha = 1, 0.95, 0.85, 0.75$ در مثال ۱.۴.۵.

جدول ۱.۵: مقدار تابع هدف J برای مقادیر مختلف α در مثال ۱.۴.۵.

α	روش پیشنهادی	روش ارائه شده در [۱۰۶]	روش ارائه شده در [۱۰۷]	روش ارائه شده در [۱۰۷]
۱	۰/۱۹۲۹۰	۰/۱۹۲۹۰	۰/۱۹۲۹۰	۰/۱۹۲۹۰
۰/۹	۰/۱۷۹۵۰	۰/۱۷۹۵۲	۰/۱۷۹۵۲	۰/۱۷۹۵۳
۰/۸	۰/۱۶۶۸۹	۰/۱۶۷۱۰	۰/۱۶۷۱۰	۰/۱۶۷۱۱



شکل ۶.۵: مسیرهای بهینه متغیر وضعیت $x(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۲.۴.۵.

با در نظر گرفتن شبکه عصبی نمائی با 5° نرون میانی و در 101 نقطه از شبکه پیشنهادی مسیرهای وضعیت $x(t)$ و توابع کنترل $u(t)$ برای α های مختلف به ترتیب در شکل‌های ۶.۵ و ۷.۵ رسم شده است. این مسیرها با مسیرهای رسم شده در [۱۵] و [۱۱۰] به خوبی مقایسه شده است. همچنین از مقایسه نتایج در جدول ۲.۵ می‌توان نتیجه گرفت که مقدار تابع هدف مسأله ارائه شده با مشتق کاپاتو-فابریسیو نتایج بهتری را در مقایسه با دیگر کارهای موجود شامل مشتق کاپاتو ارائه می‌دهد.

مثال ۳.۴.۵. مسأله کنترل بهینه کسری با قيود مساوی و نامساوی زیر را در نظر بگیرید

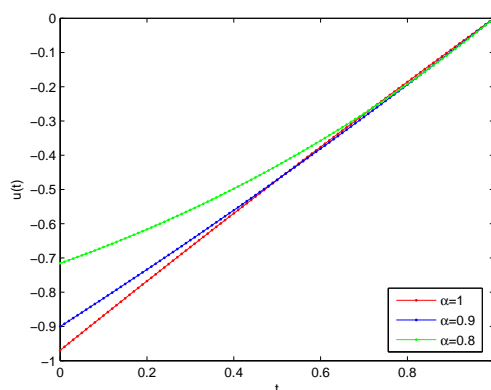
$$\text{Minimize } J = \int_0^1 (-\ln(2)x(t)) dt, \quad (21.5)$$

$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x(t) = \ln(2)(x(t) + u(t)), \quad t \in [0, 1], \quad (22.5)$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad (23.5)$$

$$x(t) + u(t) \leq 2, \quad (24.5)$$

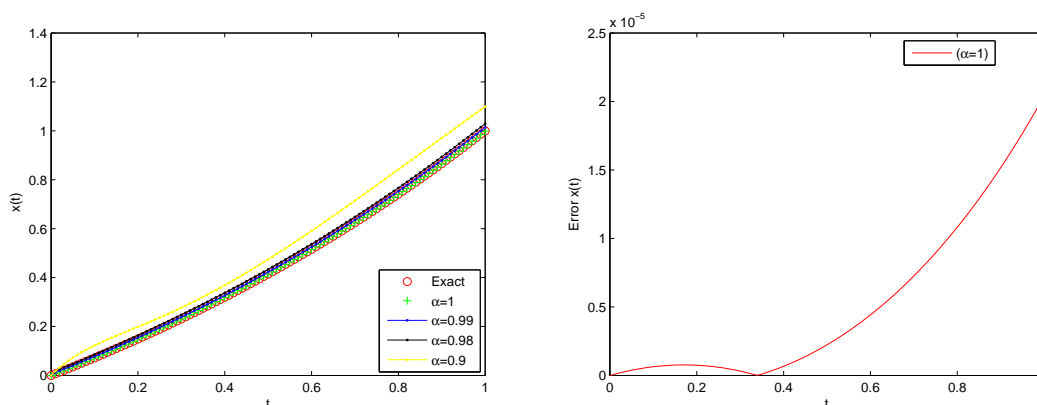
$$x(0) = 0. \quad (25.5)$$



شکل ۷.۵: توابع کنترل بهینه $u(t)$ برای $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ در مثال ۲.۴.۵.

جدول ۲.۵: مقدار تابع هدف J برای مقادیر مختلف α در مثال ۲.۴.۵.

α	روش پیشنهادی	روش ارائه شده در [۱۰۸]	روش ارائه شده در [۱۰۹]
۱	۰/۴۴۷۹۶	۰/۴۸۴۲۷	۰/۴۸۴۲۶
۰/۹	۰/۴۳۶۲۸	۰/۴۷۶۰۵	۰/۴۷۵۸۸
۰/۸	۰/۴۱۴۵۱	۰/۴۶۷۲۲	۰/۴۶۶۹۷



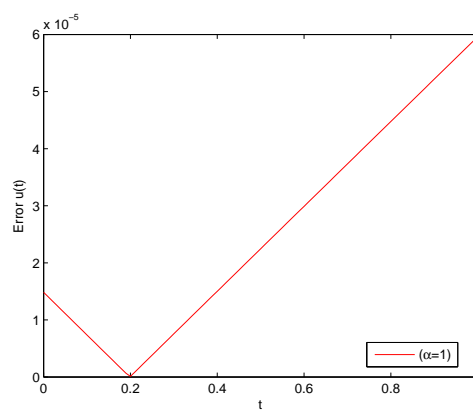
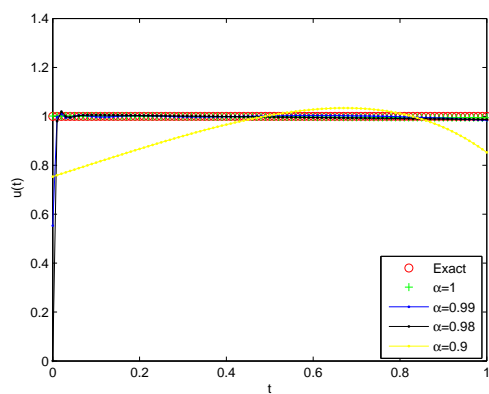
شکل ۸.۵: مسیرهای وضعیت $x(t)$ برای مقادیر مختلف α سمت چپ و خطای مطلق کنترل برای $\alpha = 1$ سمت راست در مثال ۳.۴.۵.

از [۱۱۱] جواب دقیق این مسأله برای $\alpha = 1$ به صورت زیر است

$$x(t) = \exp((\ln 2)t) - 1,$$

$$u(t) = 1.$$

مقدار دقیق تابع هدف برای این مسأله به ازای $\alpha = 1$ به صورت $J = -0.30682$ است [۱۱۱]. اکنون با استفاده از شبکه عصبی نمائی با 10^6 نرون میانی و در 10^1 نقطه از شبکه پیشنهادی این مقدار به صورت $J = -0.30681$ به دست آمده و با مقادیر به دست آمده در [۱۱۲] با استفاده از توابع هار $(J = -0.30696)$ ، در [۱۰۱] با استفاده از ماتریس عملگر چندجمله‌ای برنشتاین $(J = -0.30685)$ و در [۱۱۳] با استفاده از موجک هار $(J = -0.30690)$ به خوبی مقایسه شده است. به علاوه برای α های مختلف مسیرهای بهینه وضعیت و توابع کنترل به ترتیب در شکل‌های ۸.۵ و ۹.۵ رسم شده است. همچنین خطای مطلق توابع وضعیت و کنترل به ازای $\alpha = 1$ در شکل‌های ۸.۵ و ۹.۵ نشان داده شده است. از مقایسه این مسیرها می‌توان نتیجه گرفت که جواب‌های تقریبی با استفاده از روش پیشنهادی به ازای $\alpha = 1$ با دقت مطلوبی حاصل شده است.



شکل ۹.۵: توابع کنترل $u(t)$ برای مقادیر مختلف α سمت چپ و خطای مطلق کنترل برای $\alpha = 1$ سمت راست در مثال ۳.۴.۵.

فصل ۶

حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه تاخیری از مرتبه کسری با هسته غیرمحلی و غیرتکین با استفاده از شبکه عصبی چبیشف کسری

۱.۶ مقدمه

در فصل ۵ تعریف جدیدی از حسابان کسری را بیان کردیم که در آن از هسته نمایی به جای هسته توانی در حسابان کسری کلاسیک استفاده شده است. تعریف کاپاتو-فابریسیو با وجود مزایا و کاربردهایی که در مسائل دنیای واقعی داشت معایبی نیز دارد که عبارت است از:

۱. دارای هسته محلی است.

۲. مشتق آن به ازای $\alpha = 0$ خود تابع نخواهد بود.

۳. عملگر انتگرال در این تعریف یک عبارت کسری نیست بلکه به صورت حاصل جمع خود تابع و انتگرال مرتبه اول آن است.

به تازگی برای رفع برخی از این محدودیت‌ها آتانگانا و بالیانو تعریف جدیدی از حسابان کسری را با هسته غیرتکین و غیرمحلی با استفاده از تابع میتاگ-لفلر تعمیم داده‌اند [۸]. یکی از

اصلی‌ترین مزیت‌های این رویکرد این است که سیستم دینامیکی با یک رفتار تقریبی جدیدی مواجه است که با حسابان کسری کلاسیک تفاوت دارد. کاربردهای این تعریف جدید را می‌توان در [۸، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷] دید. با این حال خواص حسابان کسری با هسته میتاگ-لفلر باید به طور عمیق مورد بررسی قرار گیرد و همچنین برای تحلیل بهتر از پدیده‌های دنیای واقعی، روش‌های عددی باید به طور مداوم توسعه یابند. با الهام گرفتن از مباحث فوق، هدف این بخش در ایجاد مدل‌سازی جدیدی از مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری شامل هسته میتاگ-لفلر است. در حقیقت مدل‌های مبتنی بر این مشتقات جدید پتانسیل کنترل بهتر رفتار نامطلوب پدیده‌های دنیای واقعی را دارند.

در این بخش از رساله قصد داریم مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری خطی و غیرخطی شامل قیود ترکیبی برای متغیر وضعیت و کنترل را حل کنیم. مشتق کسری مورد استفاده برای مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری، مشتق کسری جدید آتانگانا-بالیانو (AB) است که دارای هسته غیرمحلّی و غیرتکین است. شرایط لازم بهینگی بر مبنای اصل بیشینه پونتریاگین برای مسائل کنترل بهینه کسری با مشتق جدید در [۱۱۶] ارائه شده است.

۲.۶ معرفی مسأله

مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J(x(t), u(t)) = \Phi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} V(t, x(t), x(t - \sigma), u(t)) dt, \quad (1.6)$$

$$\text{subject to } {}^{ABC}D_t^\alpha x(t) = f_1(t, x(t), x(t - \sigma), u(t)), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (2.6)$$

$$g(t, x(t), u(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (3.6)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [t_0 - \sigma, t_0], \quad (4.6)$$

که در آن $0 < \alpha \leq 1$ و ${}^{ABC}D_t^\alpha x(t)$ مشتق کسری AB در مفهوم کاپاتو است که در فصل ۱ تعریف شده است.

به طور مشابه با فصل‌های قبل و بعد از به‌کار بردن تقریب پاده مسأله (۱.۶)–(۴.۶) به

مسأله زیر تبدیل می شود

$$\text{Minimize } J(x(t), u(t)) = \Phi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} V(t, x(t), z(t), u(t)) dt, \quad (5.6)$$

$$\text{subject to } {}^{ABC}D_t^\alpha x(t) = f_1(t, x(t), z(t), u(t)), \quad (6.6)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\varphi}{\sigma}(x(t) - y(t)) - \dot{x}(t) = f_2(t, x(t), y(t), z(t), u(t)), \quad (7.6)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{\varphi}{\sigma}(\gamma y(t) - z(t) - x(t)) + \dot{x}(t) = f_3(t, x(t), y(t), z(t), u(t)), \quad (8.6)$$

$$g(t, x(t), u(t)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (9.6)$$

$$x(t_0) = \phi(t_0), \quad y(t_0) = \phi(t_0 - \frac{\sigma}{\varphi}), \quad z(t_0) = \phi(t_0 - \sigma). \quad (10.6)$$

شرایط لازم بهینگی برای مسأله (۵.۶) - (۱۰.۶) به صورت زیر بیان می شود [۱۱۶]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial x} = {}^{ABR}D_{t_f}^\alpha \lambda(t), \quad \lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} |_{t_f}, \\ \frac{\partial H}{\partial y} = -\dot{\gamma}(t), \quad \gamma(t_f) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial z} = -\dot{\mu}(t), \quad \mu(t_f) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} = {}^{ABC}D_t^\alpha x(t), \quad x(t_0) = \phi(t_0), \\ \frac{\partial H}{\partial \gamma} = \dot{y}(t), \quad y(t_0) = \phi(t_0 - \frac{\sigma}{\varphi}), \\ \frac{\partial H}{\partial \mu} = \dot{z}(t), \quad z(t_0) = \phi(t_0 - \sigma), \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad u(t_0) = \psi(t_0), \\ \phi_{FB}^\varepsilon(\zeta(t), -g(t, x(t), u(t))) = 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+. \end{array} \right. \quad (11.6)$$

که در آن تابع همیلتونی به صورت زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} H(t, x(t), y(t), z(t), \lambda(t), \gamma(t), \mu(t), \zeta(t), u(t)) &= V(t, x(t), z(t), u(t)) \\ &+ \lambda(t) \cdot f_1(t, x(t), z(t), u(t)) + \gamma(t) \cdot f_2(t, x(t), y(t), z(t), u(t)) \\ &+ \mu(t) \cdot f_3(t, x(t), y(t), z(t), u(t)) + \zeta(t) \cdot g(t, x(t), u(t)). \end{aligned}$$

(۱۱.۶) یک سیستم از مسائل مقدار مرزی دونقطه غیرخطی با مرتبه کسری AB است که شامل مشتق چپ AB در مفهوم کاپاتو و مشتق راست AB در مفهوم ریمن-لیوویل است. یافتن جواب دقیق برای این سیستم خیلی دشوار و حتی غیرممکن است. به منظور بیان یک روش تقریبی برای حل این سیستم، هدف ما ارائه جواب های آزمایشی برای متغیرهای وضعیت، ضرب گرهای لاگرانژ و تابع کنترل بر حسب شبکه عصبی پیوندی تابعی جدید با توابع چپیشف مرتبه کسری است که در بخش بعد به توضیح کامل آن می پردازیم.

۳.۶ شبکه عصبی چبیشف کسری

چندجمله‌ای‌های متعامد چبیشف به دلیل ظرفیت تقریب غیرخطی و همگرایی سریع، یکی از بهترین انتخاب‌ها بین توابع متعامد برای نظریه تقریب است [۱۱۸]. تاکنون تحقیقات و بررسی‌های متعددی در زمینه شبکه عصبی چبیشف انجام شده است [۱۱۸، ۱۱۹، ۸۰، ۱۲۰، ۱۲۱]. برای نمونه، لی و جنگ^۱ [۱۱۸] شبکه عصبی چبیشف را برای تقریب تابع به کار گرفته‌اند. ژائو و ژنگ^۲ [۱۱۹] از شبکه عصبی پیوندی تابعی با توابع متعامد چبیشف برای یکسان‌سازی کانال غیرخطی استفاده کرده‌اند. دهوری و چو^۳ [۸۰] یک الگوریتم آموزش هیبریدی جدید را برای شبکه چبیشف کسری ارائه کرده و از آن در دسته‌بندی استفاده کرده‌اند. زو^۴ و همکاران [۱۲۰] از دو کنترل‌کننده فیدبک خروجی قوی بر مبنای شبکه عصبی چبیشف برای ردیابی فضایی استفاده کردند. ما^۵ و همکاران [۱۲۱] از متر القایی ناشی از کارنتروپی^۶ به صورت یک تابع هدف جدید شبکه عصبی چبیشف استفاده کرده‌اند. به ویژه، شبکه عصبی چبیشف نتایج خوبی را برای معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی با مرتبه صحیح حاصل می‌کند [۸۸، ۱۲۲]. ما در این بخش روش شبکه عصبی را با توابع پایه چبیشف کسری ترکیب می‌کنیم و آن را به عنوان شبکه عصبی چبیشف کسری ارائه می‌کنیم.

شکل ۱.۶ ساختار شبکه عصبی با یک ورودی، یک خروجی و یک بلوک تابعی بر مبنای توابع چبیشف مرتبه کسری را نشان می‌دهد. رابطه ورودی-خروجی برای ساختار ارائه شده با بردار ورودی $t = [t_0, t_1, \dots, t_m]$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$N(t, \bar{P}) = \nu \rho(s), \quad s = \sum_{i=0}^n w_i T_i^\alpha(t), \quad (12.6)$$

که در آن \bar{P} بردار وزن و $T_0^\alpha(t), \dots, T_n^\alpha(t)$ عناصر پردازش هستند که به صورت چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبه کسری تعریف می‌شوند. مجموع وزنی مولفه‌های ورودی s از یک تابع فعالیت $\rho(\cdot) = \tanh(\cdot)$ عبور می‌کند و خروجی شبکه $N(t, \bar{P})$ را نتیجه می‌دهد.

¹Lee and Jeng

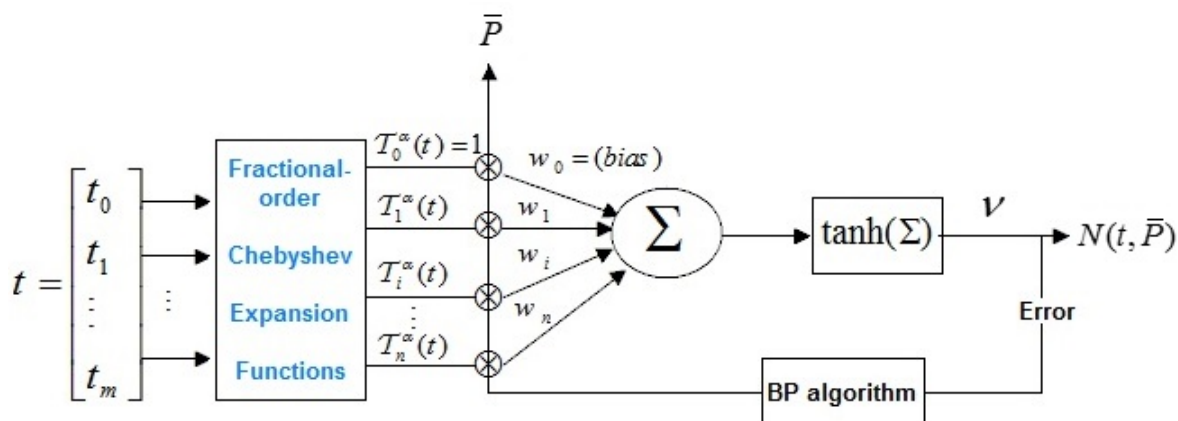
²Zhao and Zhang

³Dehuri and Cho

⁴Zou

⁵Ma

⁶Correntropy Induced Metric



شکل ۱.۶: شبکه عصبی چبیشف کسری

۴.۶ بهبینی و گستره‌سازی

با استفاده از شبکه عصبی پیوندی تابعی چبیشف کسری، جواب‌های آزمایشی برای متغیر وضعیت $x(t)$ و ضرب‌گر لاگرانژ $\lambda(t)$ در سیستم بهبینی (۱۱.۶) به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{cases} x(t) \approx x_T(t) = x_o + (t - t_o)N_x(t), \\ \lambda(t) \approx \lambda_T(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_T} |_{t_f} + (t - t_f)N_\lambda(t), \\ u(t) \approx u_T(t) = N_u(t), \end{cases} \quad (۱۳.۶)$$

که در آن

$$\begin{cases} N_x(t) = \nu_x \tanh(s_x), & s_x = \sum_{i=0}^n w_x^i T_i^\alpha(t), \\ N_\lambda(t) = \nu_\lambda \tanh(s_\lambda), & s_\lambda = \sum_{i=0}^n w_\lambda^i T_i^\alpha(t), \\ N_u(t) = \nu_u \tanh(s_u), & s_u = \sum_{i=0}^n w_u^i T_i^\alpha(t). \end{cases} \quad (۱۴.۶)$$

جواب‌های تقریبی دیگر در (۱۱.۶) نیز به صورت مشابه با (۱۳.۶) بیان می‌شوند و از نوشتن مجدد آن‌ها صرف نظر می‌شود.

اکنون جواب‌های آزمایشی باید در سیستم بهینگی (۱۱.۶) صدق کنند، پس داریم

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_T}{\partial x_T} = {}^{ABR}D_{t_f}^\alpha \lambda_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial y_T} = -\dot{\gamma}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial z_T} = -\dot{\mu}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial \lambda_T} = {}^{ABC}D_{t_0}^\alpha x_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial \gamma_T} = \dot{y}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial \mu_T} = \dot{z}_T(t), \\ \frac{\partial H_T}{\partial u_T} = 0, \\ \phi_{FB}^\varepsilon(\zeta_T(t), -g(t, x_T(t), u_T(t))) = 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0_+, \end{array} \right. \quad (15.6)$$

که در آن

$$H_T = H(t, x_T, y_T, z_T, \lambda_T, \gamma_T, \mu_T, \zeta_T, u_T).$$

برای مشتق کسری از جواب تقریبی در (۱۵.۶)، با به کارگیری عملگر انتگرال کسری AB برای معادلات اول و چهارم از رابطه (۱۵.۶) داریم

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{AB}I_{t_0}^\alpha \{ {}^{ABC}D_{t_0}^\alpha x_T(t) \} = {}^{AB}I_{t_0}^\alpha \left\{ \frac{\partial H_T}{\partial \lambda_T} \right\}, \\ {}^{AB}I_{t_f}^\alpha \{ {}^{ABR}D_{t_f}^\alpha \lambda_T(t) \} = {}^{AB}I_{t_f}^\alpha \left\{ \frac{\partial H_T}{\partial x_T} \right\}. \end{array} \right.$$

برای حل (۱۵.۶) توابع خطا را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1(t, P) = \left[\lambda_T(t) - \lambda_T(t_f) - \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} \frac{\partial H_T}{\partial x_T}(t) - \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_t^{t_f} \frac{\partial H_T}{\partial x_T}(\tau)(\tau-t)^{\alpha-1} d\tau \right]^\gamma, \\ E_2(t, P) = \left[\dot{\gamma}_T(t) + \frac{\partial H_T}{\partial y_T} \right]^\gamma, \\ E_3(t, P) = \left[\dot{\mu}_T(t) + \frac{\partial H_T}{\partial z_T} \right]^\gamma, \\ E_4(t, P) = \left[x_T(t) - x_T(t_0) - \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} \frac{\partial H_T}{\partial \lambda_T}(t) - \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{\partial H_T}{\partial \lambda_T}(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \right]^\gamma, \\ E_5(t, P) = \left[\dot{y}_T(t) - \frac{\partial H_T}{\partial \gamma_T} \right]^\gamma, \\ E_6(t, P) = \left[\dot{z}_T(t) - \frac{\partial H_T}{\partial \mu_T} \right]^\gamma, \\ E_7(t, P) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial u_T} \right]^\gamma, \\ E_8(t, P) = [\phi_{FB}^\varepsilon(\zeta_T(t), -g(t, x_T(t), u_T(t)))]^\gamma. \end{array} \right. \quad (16.6)$$

$$.P = (\bar{P}_x, \bar{P}_y, \bar{P}_z, \bar{P}_\lambda, \bar{P}_\gamma, \bar{P}_\mu, \bar{P}_\zeta, \bar{P}_u)^T \text{ که}$$

اکنون به حل مسأله بهینه سازی نامقید زیر می پردازیم

$$\text{Minimize}_P E(P) = \frac{1}{\gamma} \sum_{l=1}^{\lambda} \sum_{k=0}^m \{E_l(t_k, P)\}. \quad (17.6)$$

وزن‌ها و بایاس شبکه پیشنهادی نیز مانند الگوریتم ارائه شده در فصل ۴ با استفاده از الگوریتم آموزش پس انتشار به‌هنگام می‌شوند.

۵.۶ مثال‌های عددی

در این قسمت روش شبکه عصبی پیشنهادی چبیشف مرتبه کسری برای چند مثال کاربردی با پیچیدگی‌های متفاوتی حل شده است و نتایج به دست آمده با برخی روش‌های دیگر مقایسه شده است.

مثال ۱.۵.۶. مسأله کنترل بهینه خطی دوبعدی یک نوسانگر هارمونیک تاخیری با مشتق کسری AB در مفهوم کاپاتو زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \delta x_1^2(2) + \frac{1}{\gamma} \int_0^2 u^2(t) dt,$$

$$\text{subject to } {}_0^{ABC} D_t^\alpha x_1(t) = x_2(t),$$

$${}_0^{ABC} D_t^\alpha x_2(t) = -x_1(t) - x_2(t-1) + u(t),$$

$$x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = 0, \quad t \in [-1, 0],$$

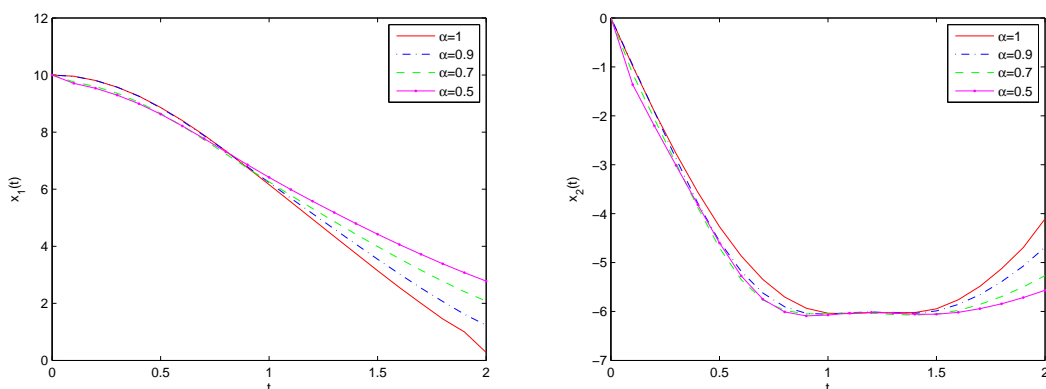
$$x_2(t) \geq -6,$$

$$0 \leq u(t) \leq 6.$$

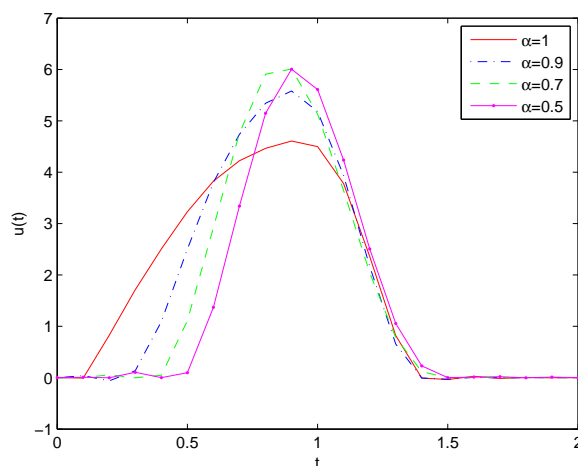
با استفاده از شبکه عصبی چبیشف کسری به ازای مقادیر مختلف α این مسأله را حل کردیم. برای $\alpha = 1$ ، $n = 8$ و $m = 20$ مقادیر به دست آمده تابع هدف و زمان اجرای محاسبات در جدول ۱.۶ ارائه شده و با برخی روش‌های دیگر مقایسه شده است. همچنین از مقایسه نتایج به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که روش پیشنهادی کارایی بیشتری نسبت به روش‌های ارائه شده در [۱۲۳] و [۱۲۴] دارد. به علاوه با تغییر مقادیر α مسیرهای بهینه وضعیت و توابع کنترل به ترتیب در شکل‌های ۲.۶ و ۳.۶ نشان داده شده است. مقادیر تابع خطای $E(P)$ به ازای α های مختلف در جدول ۲.۶ گزارش شده است. این نتایج نشان می‌دهند که جواب‌های تقریبی به دست آمده با استفاده از روش شبکه عصبی پیشنهادی در شرایط لازم بهینه‌گی صدق می‌کنند.

مثال ۲.۵.۶. مثال زیر یک الگوی مربوط به صید ماهی را مدل سازی می‌کند که در آن $x(t)$ جمعیت ماهی در محدوده مورد بررسی و کنترل $u(t)$ میزان برداشت از آن حوزه صید در لحظه t

۱۱۸ حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه تاخیری از مرتبه کسری با هسته غیرمحملی و غیرتکین با استفاده از شبکه عصبی چبیشف کسری



شکل ۲.۶: مسیرهای وضعیت $x_1(t)$ سمت چپ و $x_2(t)$ سمت راست برای $\alpha = ۱, ۰/۹, ۰/۷, ۰/۵$ در مثال ۱.۵.۶.



شکل ۳.۶: توابع کنترل بهینه $u(t)$ برای $\alpha = ۱, ۰/۹, ۰/۷, ۰/۵$ در مثال ۱.۵.۶.

جدول ۱.۶: مقدار تابع هدف J و زمان اجرا برای $\alpha = ۱$ در مثال ۱.۵.۶.

روش	مقدار تابع هدف J	زمان اجرا (بر حسب ثانیه)
شبکه عصبی چبیشف کسری	۹/۱۲۵۹	۲/۶۴۳۸
روش ارائه شده در [۱۲۳]	۹/۰۴۳۹	-
روش نظریه اندازه [۱۲۴]	۹/۱۴۷۰	۵/۸۹۴۸۴۸

جدول ۲.۶: تابع خطای $E(P)$ به ازای مقادیر مختلف α در مثال ۱.۵.۶.

α	۱	۰/۹	۰/۷	۰/۵
$E(P)$	$۳/۸۵۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۹۴۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۳۲۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۹/۸۴۱ \times ۱۰^{-۴}$

جدول ۳.۶: مقدار تابع هدف J و زمان اجرا برای $\alpha = 1$ در مثال ۲.۵.۶.

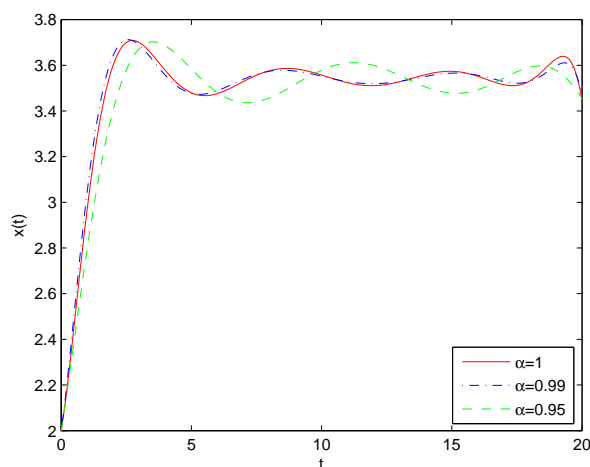
روش	مقدار تابع هدف J	زمان اجرا (بر حسب ثانیه)
شبکه عصبی چبیشف کسری	۵۷/۴۱۱۶	۳/۸۱۶۰
روش نظریه اندازه [۱۲۴]	۵۷/۲۲۴۵	۳۲/۱۶۶۸۹۰
روش ارائه شده در [۱۲۶]	۵۶/۸۷۶۸۹۶	۲۶۸۸/۷۸
روش نظریه اندازه [۱۲۵]	۵۹/۹۸۳۱	-

را نشان می‌دهد. از طرفی صید ماهی جمعیت ماهی‌ها را کاهش داده و فرآیند جمعیت ماهی‌ها الگوی تاخیری دارد که تاخیر τ روی $x(t)$ اعمال شده است. همچنین طبق الگوی مسأله کنترل بهینه باید در نظر داشت که هر گونه صید ماهی بیش از حد در یک حوزه آبی باعث از بین رفتن مزیت اقتصادی صنعت صید در دراز مدت می‌شود. مدل مسأله کنترل بهینه متناظر به صورت زیر است

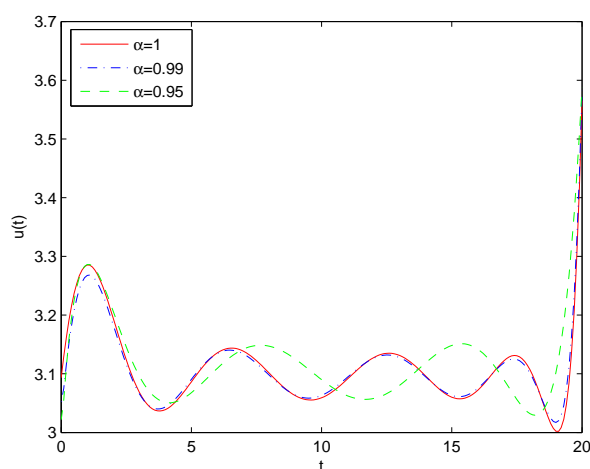
$$\begin{aligned} \text{Maximize } J &= \int_0^{20} e^{-0.05t} (\Psi u(t) - 0.7x(t)^{-1}u(t)^3) dt, \\ \text{subject to } {}_0^{ABC}D_t^\alpha x(t) &= \Psi x(t) \left(1 - \frac{x(t-0.5)}{5} - u(t) \right), \\ x(t) &= 2, \quad t \in [-0.5, 0], \\ x(t) &\geq 2, \quad t \in [0, 20], \\ u(t) &\geq 0, \quad t \in [0, 20]. \end{aligned}$$

این مسأله با استفاده از مشتق همدیس‌پذیر و روش نظریه اندازه در [۱۲۵] حل شده است. برای $\alpha = 1$ در [۱۲۴] با استفاده از روش نظریه اندازه مسأله کنترل بهینه تاخیری ابتدا به یک مسأله شامل اندازه بهینه جدید تبدیل شده و سپس با استفاده از روش سیمپلکس حل شده است. همچنین در [۱۲۶] به ازای $\alpha = 1$ مسأله با استفاده از اصل بیشینه پونتریاگین حل شده است. نتایج مربوط به تابع هدف با استفاده از شبکه پیشنهادی به ازای $n = 8$ و $m = 200$ در جدول ۳.۶ آمده و با برخی روش‌های دیگر به خوبی مقایسه شده است. برای مقادیر متفاوت α مسیرهای وضعیت و توابع کنترل نیز به ترتیب در شکل‌های ۴.۶ و ۵.۶ نشان داده شده است. نتایج $E(P)$ در جدول ۴.۶ ارائه شده است.

۱۲۰ حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه تاخیری از مرتبه کسری با هسته غیرمحلّی و غیرتکین با استفاده از شبکه عصبی چبیشف کسری



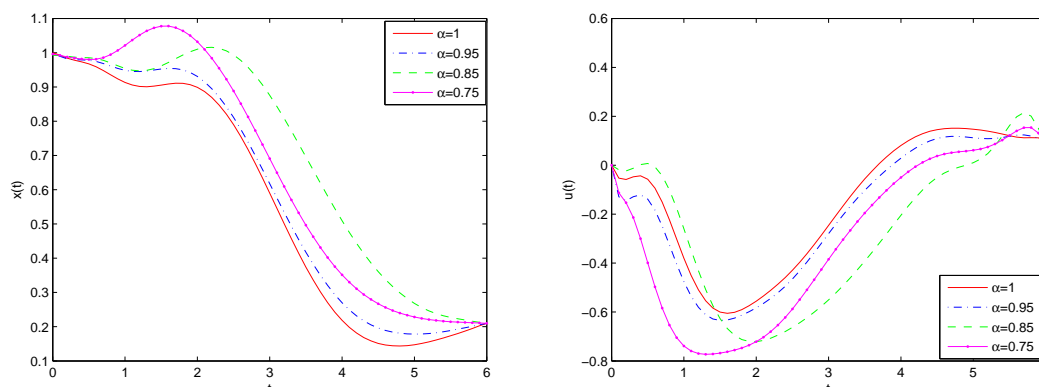
شکل ۴.۶: مسیرهای وضعیت $x(t)$ برای $\alpha = 1, 0.99, 0.95$ در مثال ۲.۵.۶.



شکل ۵.۶: توابع کنترل بهینه $u(t)$ برای $\alpha = 1, 0.99, 0.95$ در مثال ۲.۵.۶.

جدول ۴.۶: تابع خطای $E(P)$ به ازای مقادیر مختلف α در مثال ۲.۵.۶.

α	۱	۰/۹۹	۰/۹۵
$E(P)$	$4/084 \times 10^{-3}$	$4/561 \times 10^{-3}$	$5/287 \times 10^{-3}$



شکل ۶.۶: مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای $\alpha = 1, 0.95, 0.85, 0.75$ در مثال ۳.۵.۶.

جدول ۵.۶: مقدار تابع هدف J و زمان اجرا برای $\alpha = 1$ در مثال ۳.۵.۶.

روش	مقدار تابع هدف J	زمان اجرا (بر حسب ثانیه)
شبکه عصبی چبیشف کسری	۲/۷۰۴۶	۲/۸۵۴۲
روش نظریه اندازه [۱۲۴]	۳/۰۹۶۹	۷/۶۹۴۷۷۵
روش ارائه شده در [۱۲۶]	۳/۱۰۸۲	۶۵/۸

مثال ۳.۵.۶. مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \int_0^6 (x^2(t) + u^2(t)) dt,$$

$$\text{subject to } {}_0^{\text{ABC}}D_t^\alpha x(t) = x(t-1)u(t-2), \quad t \in [0, 6],$$

$$u(t) + x(t) \geq 0.3, \quad t \in [0, 6],$$

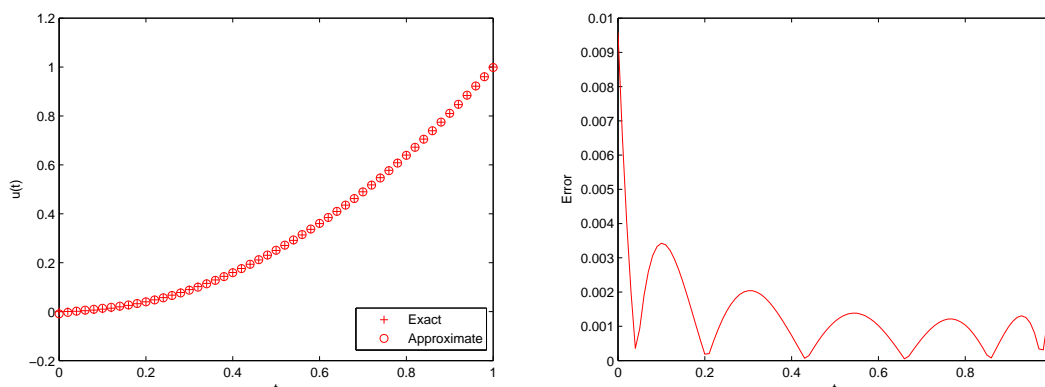
$$x(t) = 1, \quad t \in [-1, 0], \quad x(6) = 0.21,$$

$$u(t) = 0, \quad t \in [-2, 0].$$

جدول ۵.۶ مقادیر تابع هدف و زمان اجرا را با استفاده از روش پیشنهادی به ازای $\alpha = 1$ ، $n = 8$ و $m = 30$ نشان می‌دهد. این نتایج با مقادیر به دست آمده در [۱۲۴، ۱۲۶] به خوبی مقایسه شده است. مسیرهای وضعیت و توابع کنترل نیز برای α های مختلف در شکل ۶.۶ آمده است. با ارائه مقادیر $E(P)$ برای α های متفاوت در جدول ۶.۶ می‌توان نتیجه گرفت که جواب‌های آزمایشی در شرایط لازم بهینگی صدق می‌کنند.

جدول ۶.۶: تابع خطای $E(P)$ به ازای مقادیر مختلف α در مثال ۳.۵.۶.

α	۱	۰/۹۵	۰/۸۵	۰/۷۵
$E(P)$	$۸/۷۲۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۶۲۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۷۵۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۱۱۳ \times ۱۰^{-۵}$



شکل ۷.۶: توابع دقیق و تقریبی کنترل $u(t)$ سمت چپ و خطای مطلق سمت راست برای $\alpha = ۱$ و $n = ۶$ در مثال ۴.۵.۶.

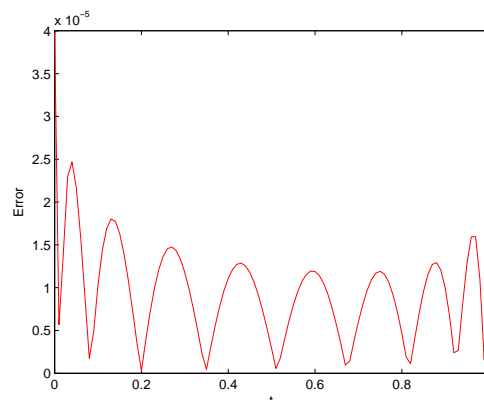
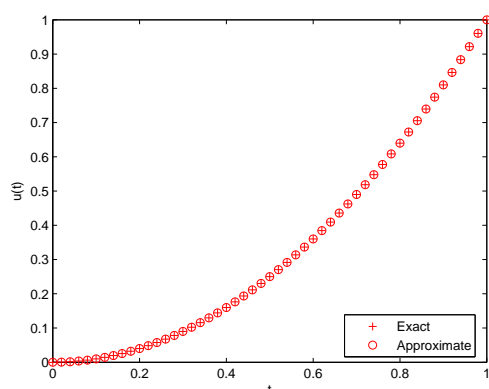
مثال ۴.۵.۶. مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \frac{1}{\Gamma} \int_0^1 (u(t) - t^2)^2 dt,$$

subject to ${}^{\text{ABC}}D_t^\alpha x(t) = -0/25 + 3t + x(t - 0/5) - u(t), \quad t \in [0, 1],$

$$x(t) = 0, \quad t \in [-0/5, 0].$$

برای $\alpha = ۱$ این مسأله دارای جواب دقیق $u(t) = t^2$ است. با استفاده از شبکه چبیشف کسری برای $\alpha = ۱$ و $m = ۵۰$ شکل‌های ۷.۶ و ۸.۶ جواب‌های دقیق و تقریبی تابع کنترل $u(t)$ و همچنین خطای مطلق به ازای $n = ۶$ و $n = ۹$ را به ترتیب نشان می‌دهند. از مقایسه خطای مطلق می‌توان نتیجه گرفت که برای حالت $n = ۹$ جواب‌های تقریبی به دست آمده برای تابع کنترل به جواب‌های دقیق نزدیک‌تر است. همچنین برای $\alpha = ۱$ و $n = ۹$ نتایج تقریبی تابع کنترل با استفاده از دو روش شبکه عصبی پیشنهادی مونتس-لژاندر و چبیشف کسری در جدول ۷.۶ ارائه شده و با مقادیر به دست آمده در [۵۵] و مقادیر دقیق مقایسه شده است که هر دو شبکه پیشنهادی جواب‌های یکسانی را ارائه کردند.

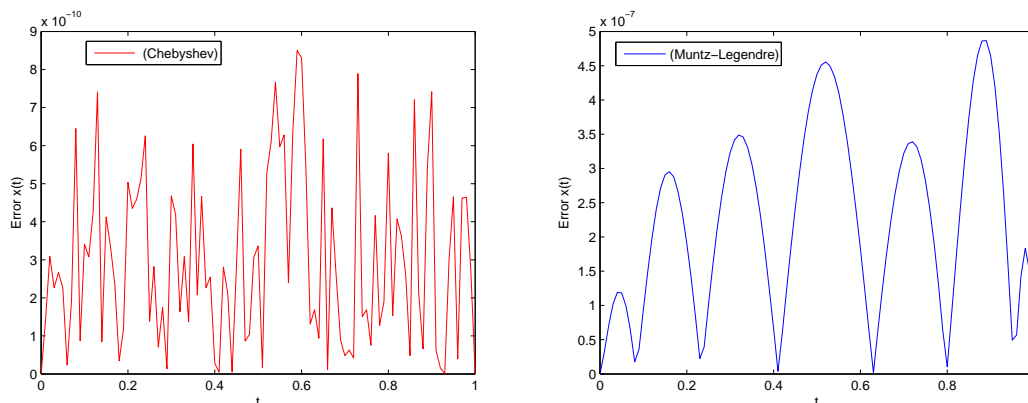


شکل ۸.۶: توابع دقیق و تقریبی کنترل $u(t)$ سمت چپ و خطای مطلق سمت راست برای $\alpha = 1$ و $n = 9$ در مثال ۴.۵.۶.

جدول ۷.۶: نتایج دقیق و تقریبی $u(t)$ برای $n = 9$ و $\alpha = 1$ در مثال ۴.۵.۶.

زمان	مقادیر دقیق	روش ارائه شده در [۵۵]	شبکه چیشف کسری	شبکه مونتنس-لژاندر
۰/۰	۰/۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۹۹۹۹۰	۰/۰۱۰۰۱۰۲	۰/۰۱۰۰۱۰۲
۰/۲	۰/۰۴	۰/۰۳۹۹۹۶۰	۰/۰۳۹۹۹۹۷	۰/۰۳۹۹۹۹۷
۰/۳	۰/۰۹	۰/۰۸۹۹۹۱۰	۰/۰۸۹۹۸۸۲	۰/۰۸۹۹۸۸۲
۰/۴	۰/۱۶	۰/۱۵۹۹۸۴۲	۰/۱۶۰۰۱۱۰	۰/۱۶۰۰۱۱۰
۰/۵	۰/۲۵	۰/۲۴۹۹۷۵۵	۰/۲۵۰۰۰۲۸	۰/۲۵۰۰۰۲۸
۰/۶	۰/۳۶	۰/۳۵۹۹۶۵۳	۰/۳۵۹۹۸۸۱	۰/۳۵۹۹۸۸۱
۰/۷۳	۰/۴۹	۰/۴۸۹۹۵۴۱	۰/۴۹۰۰۰۶۰	۰/۴۹۰۰۰۶۰
۰/۸	۰/۶۴	۰/۶۳۹۹۴۳۱	۰/۶۴۰۰۰۴۶	۰/۶۴۰۰۰۴۶
۰/۹	۰/۸۱	۰/۸۰۹۹۳۴۸	۰/۸۰۹۹۹۰۰	۰/۸۰۹۹۹۰۰
۱/۰	۱/۰۰	۰/۹۹۹۹۳۸۱	۰/۹۹۹۹۷۵۲	۰/۹۹۹۹۷۵۲

۱۲۴ حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه تاخیری از مرتبه کسری با هسته غیرمحلّی و غیرتکین با استفاده از شبکه عصبی چبیشف کسری



شکل ۹.۶: خطای مطلق متغیر وضعیت $x(t)$ به ازای $\alpha = 1$ برای شبکه چبیشف کسری سمت چپ و شبکه مونتس-لژاندر سمت راست در مثال ۵.۵.۶.

مثال ۵.۵.۶. مسأله کنترل بهینه کسری غیرتاخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J = \frac{1}{\Gamma} \int_0^1 (3x^2(t) + u^2(t)) dt,$$

$$\text{subject to } {}_0^{ABC}D_t^\alpha x(t) = -x(t) + u(t), \quad t \in [0, 1],$$

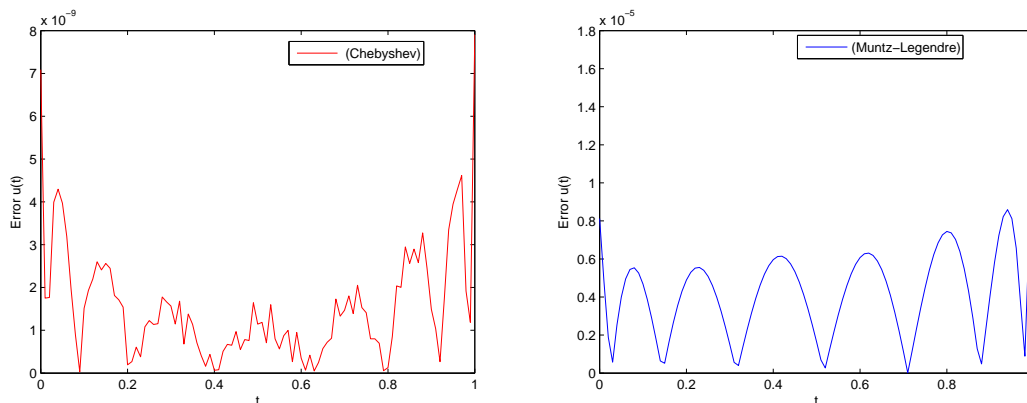
$$x(0) = 0, \quad x(1) = 2.$$

برای $\alpha = 1$ جواب‌های دقیق این مسأله به صورت زیر است

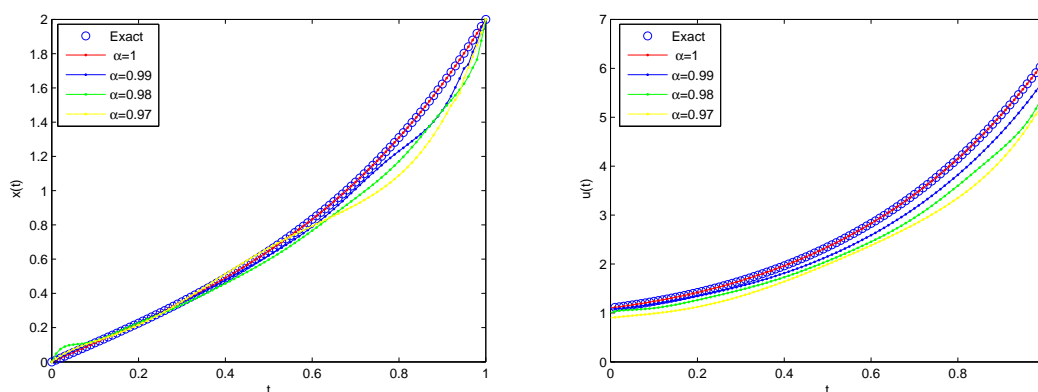
$$x(t) = \frac{2}{\sinh 2} \sinh(2t),$$

$$u(t) = \frac{2}{\sinh 2} (2 \cosh(2t) + \sinh(2t)).$$

مقدار دقیق تابع هدف به ازای $\alpha = 1$ به صورت $J = 6/1492$ است [۱۲۷]. با استفاده از شبکه چبیشف کسری برای $\alpha = 1$ ، $n = 9$ و $m = 100$ به صورت $J = 6/1434$ به دست آمده است. به ازای $\alpha = 1$ خطای مطلق برای متغیرهای $x(t)$ و $u(t)$ به ترتیب در شکل‌های ۹.۶ و ۱۰.۶ آمده است و با روش شبکه عصبی مونتس-لژاندر مقایسه شده است. از مقایسه مسیرها در این مسأله می‌توان نتیجه گرفت که توابع چبیشف کسری به عنوان توابع گسترش در شبکه‌های عصبی پیوندی تابعی نتایج دقیق‌تری را ارائه می‌دهند. همچنین برای مقادیر مختلف α و با استفاده از شبکه عصبی چبیشف کسری مسیرهای بهینه برای متغیرهای وضعیت و توابع کنترل در شکل ۱۱.۶ رسم شده است.



شکل ۱۰.۶: خطای مطلق تابع کنترل $u(t)$ به ازای $\alpha = 1$ برای شبکه چبیشف کسری سمت چپ و شبکه مونتس-لژاندر سمت راست در مثال ۵.۵.۶.



شکل ۱۱.۶: مسیرهای وضعیت $x(t)$ سمت چپ و توابع کنترل $u(t)$ سمت راست برای مقادیر مختلف α در مثال ۵.۵.۶.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این پایان‌نامه رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری را مورد بررسی قرار دادیم. سیستم‌های دینامیکی کسری تاخیری استفاده شده در این پایان‌نامه شامل تعاریف مشتق کسری کلاسیک (مانند کاپاتو) و تعاریف جدیدی از حسابان کسری (مانند کاپاتو-فابریسیو و آتانگانا-بالیانو) هستند. در تعاریف جدید از هسته‌های نمائی و میتاگ-لفلر به جای هسته توانی در حسابان کسری کلاسیک استفاده شده است. تعاریف جدید از حسابان کسری به دلیل داشتن هسته‌های غیرمحلّی و غیرتکین قادر به حل سیستم‌های پیچیده از دنیای واقعی هستند.

از ایده تقریب پاده برای از بین بردن تاخیر در سیستم‌های تاخیری و تبدیل مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری به یک مسأله بدون تاخیر استفاده می‌شود. با این کار مسأله نهایی با استفاده از الگوریتم‌های موجود برای حل مسائل کنترل بهینه کسری قابل حل است. برای حل مسأله نهایی از شبکه‌های عصبی پرسپترون چندلایه (برحسب توابع سری توانی کسری، توابع سیگموئید و توابع نمائی) و شبکه‌های عصبی پیوندی تابعی تک‌لایه (برحسب توابع مونتنس-لژاندر و توابع چبیشف کسری) استفاده شده است. تمام روش‌های استفاده شده در این پایان‌نامه غیرمستقیم هستند و در تمام این روش‌ها در نهایت به یک تابع خطا رسیدیم و از الگوریتم پس‌انتشار برای آموزش شبکه و به‌هنگام کردن پارامترهای شبکه (بایاس و وزن‌ها) استفاده کردیم.

اکنون ممکن است این سوال مطرح شود که انگیزه اصلی از به کار بردن شبکه‌های عصبی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری چیست؟ برای پاسخ به این سوال برخی از مزیت‌های شبکه عصبی به طور خلاصه بیان می‌شود.

(۱) از شبکه‌های عصبی برای حل مسائلی که جواب‌های تحلیلی ندارند یا جواب‌های تحلیلی آن‌ها به راحتی قابل محاسبه نیست استفاده می‌شود.

(۲) جواب به دست آمده با استفاده از شبکه‌های عصبی پیشنهادی در تمام دامنه مسأله پیوسته است. در حالی که اکثر روش‌های عددی جواب‌ها را تنها در نقاط گسسته‌سازی شده به دست می‌آورند و جواب بین این نقاط باید از طریق درونیابی به دست آید و روش‌های درونیابی گاهی اوقات خود دارای خطا هستند.

(۳) برخلاف برخی از روش‌های عددی دیگر مانند روش اویلر که در آن پارامترهای مسأله با استفاده از به حداقل رساندن خطا اصلاح نمی‌شوند، شبکه‌های عصبی پیشنهادی با استفاده از الگوریتم آموزش وزن‌های نامعلوم را به‌هنگام می‌کنند.

(۴) در برخی از روش‌های عددی از ماتریس عملگر برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری استفاده شده است. یافتن ماتریس عملگر معمولاً سخت است و این ماتریس‌های عملگر در مرتبه‌های بالاتر باعث پیچیدگی محاسباتی نیز می‌شوند. با استفاده از شبکه‌های عصبی پیشنهادی نقش ماتریس عملگر از بین می‌رود.

اکنون بعد از بیان مزیت‌های روش شبکه عصبی مصنوعی لازم است تا مزیت هر کدام از مدل‌های مختلف ارائه شده در این پایان‌نامه را بررسی کنیم.

- از مقایسه دو مدل پیشنهادی در فصل ۳ می‌توان گفت که شبکه عصبی برحسب تابع سری توانی کسری از مزیت بالایی نسبت به شبکه عصبی برحسب تابع سیگموئید برخوردار است. با توجه به این‌که مشتق کسری این سری به راحتی قابل محاسبه است، پیچیدگی محاسباتی به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد.

- در مسائل کسری با مشتق کاپاتو- فابریسیو به دلیل وجود هسته نمائی، استفاده از شبکه پرسپترون بر حسب تابع نمائی می‌تواند جواب‌های مطلوبی ارائه دهد. همچنین به دلیل وجود عامل‌های مشترک نمائی در شبکه پیشنهادی و تعریف مشتق کاپاتو- فابریسیو از روش‌های انتگرال‌گیری عددی برای تقریب مشتق کسری استفاده نمی‌شود.

- در شبکه‌های عصبی پیوندی تابعی با استفاده از توابع متعامد به عنوان یک تابع پایه لایه‌های پنهان حذف می‌شوند که این امر باعث تولید خروجی با سرعت بیشتر و پیچیدگی کمتر نسبت به شبکه‌های پرسپترون چندلایه می‌شود.

- توابع متعامد مونتس- لژاندر و چبیشف مرتبه کسری را به عنوان توابع گسترش در شبکه‌های عصبی پیوندی تابعی مورد بررسی قرار دادیم. استفاده از این چندجمله‌ای‌ها که به طور ذاتی دارای توان کسری هستند سازگاری بیشتری با حسابان کسری دارد. هر دو چندجمله‌ای جواب‌های مطلوبی را ارائه کردند و در برخی از حالت‌ها مانند مثال آخر از فصل ۶ توابع چبیشف کسری همگرایی سریع‌تری را نتیجه دادند.

برای کارهای آتی پیشنهاد می‌شود که این مسائل را بر پایه شبکه عصبی به صورت مستقیم نیز حل شود و پایداری و همگرایی روش بررسی شود. همچنین می‌توان این روش‌ها را روی معادلات دیفرانسیل فازی، مسائلی با سیستم‌های تاخیری افق نامتناهی، مسائل کنترل بهینه سیستم‌های آشوبناک تاخیری و ... پیاده‌سازی کرد. به علاوه می‌توان از دیگر چندجمله‌ای‌های متعامد مرتبه کسری به عنوان توابع گسترش در شبکه‌های عصبی پیوندی تابعی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تاخیری نیز استفاده کرد.

مراجع

- [۱] ضمیری آ، (۱۳۸۶) ”شبکه‌های مصنوعی و بهینه‌سازی” پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [2] Ross B. (1977), ”The development of fractional calculus 1695-1900”, **Historia Mathematica**, 4, 75–89.
- [3] Kilbas A. A., Srivastava H. M. and Trujillo J. J. (2006), ”**Theory and Applications of Fractional Differential Equations**”, Elsevier Science B. V, Amsterdam.
- [4] Podlubny I. (1999), ”**Fractional differential equations**”, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press Inc, San Diego, CA.
- [5] Jumarie G. (2008), ”Modeling fractional stochastic systems as non-random fractional dynamics driven by Brownian motions”, **Applied Mathematical Modelling**, 32, 836–859.
- [6] Baleanu D., Deftarli O. and Agrawal O. P. (2009), ”A Central Difference Numerical Scheme for Fractional Optimal Control Problems”, **Journal of Vibration and Control**, 15, 4, 583–597.
- [7] Caputo M. and Fabrizio M. (2015), ”A New Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel”, **Progress in Fractional Differentiation and Applications**, 1–13.
- [8] Atangana A. and Baleanu D. (2016), ”New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model”, **International Journal of Thermal Sciences**, 20, 2, 763–9.
- [9] Khalil R., Al Horani M. , Yousef A. and Sababheh M. (2014), ”A new definition of fractional derivative”, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 264, 65–70.
- [10] Saadatmandi A. and Dehghan M. (2010), ”A new operational matrix for solving fractional-order differential equations”, **Computers and Mathematics with Applications**, 59, 1326–1336.

- [11] Huang C., Guo Z., Yang Z. and Chen Y. (2013), "Dynamics of Delay Differential Equations with Their Applications", **Abstract and Applied Analysis**, 2013, doi.org/10.1155/2013/467890.
- [12] Liu Y., Lu P. and Szanto I. (2014), "Numerical Analysis for a Fractional Differential Time-Delay Model of HIV Infection of $CD4^+$ T-Cell Proliferation under Antiretroviral Therapy", **Abstract and Applied Analysis**, 2014, doi.org/10.1155/2014/291614.
- [13] Agrawal O. P. (2008), "A formulation and numerical scheme for fractional optimal control problems", **Journal of Vibration and Control**, 14, 1291–1299.
- [14] Guo T. L. (2013), "The necessary conditions of fractional optimal control in the sense of Caputo", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 156, 115–126.
- [15] Agrawal O. M. P. (2004), "A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problem", **Nonlinear Dynamics**, 38, 323–337.
- [16] Riewe F. (1996), "Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics", **Physical Review E**, 53, 1890–1899.
- [17] Samko S. G., Kilbas A. A. and Marichev O. I. (1993), "**Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications**", Gordon and Breach, Longhorne, Pennsylvania.
- [18] Ejlali N. and Hosseini S. M. (2016), "A Pseudospectral Method for Fractional Optimal Control Problems", **Journal of Optimal control Theory and Application**, 174, 83–107.
- [19] Zayernouri M. and Karniadakis G. E. (2014), "Fractional spectral collocation method", **SIAM Journal on Scientific Computing**, 36, A40–A62.
- [20] Badalyan G. V. (1956), "Generalization of Legendre polynomials and some of their applications", **Russian, Armenian Summary**, 9, 3–22.
- [21] Rida S. Z. and Yousef A. M. (2011), "On the fractional order Rodrigues formula for the Legendre polynomials", **Advances in Applied Mathematics**, 10, 509–518.
- [22] Kazem S., Abbasbandy S., Kumar S. (2013), "Fractional-order Legendre functions for solving fractional-order differential equations", **Applied Mathematical Modelling**, 37, 5498–5510.
- [23] Khader M. M. and Hendy A. S. (2012), "An Efficient Numerical Scheme for Solving Fractional Optimal Control Problems", **International Journal of Nonlinear Science**, 14, 287–296.

-
- [24] Parand K. and Delkhosh M. (2017), "The generalized fractional order of the Chebyshev functions on nonlinear boundary value problems in the semi-infinite domain", **Nonlinear Engineering**, 6, 3, 229–240.
- [25] Safaie E. and Farahi M. H. (2014), "An approximation method for numerical solution of multi-dimensional feedback delay fractional optimal control problems by Bernstein polynomials", **Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization**, 4, 77–94.
- [26] Alshbool M. H. T., Bataineh A. S., Hashim I. and Isik O. R. (2017), "Solution of fractional-order differential equations based on the operational matrices of new fractional Bernstein functions", **Journal of King Saud University–Science**, 29, 1–18.
- [27] El-Sayed A. M. A. (2000), "Laguerre polynomials of arbitrary (fractional) orders", **Applied Mathematics and Computation**, 109, 1–9.
- [28] Taslakyan A. K. (1984), "Some properties of Legendre quasipolynomials with respect to a Müntz system", **Russian, Armenian Summary, Érevan University**, 2, 179–189.
- [29] Borwein P., Erdélyi T. and Zhang J. (1994), "Müntz systems and orthogonal Müntz–Legendre polynomials", **Transactions of the American Mathematical Society**, 342, 523–542.
- [30] Esmaeili Sh., Shamsi M. and Luchko Y. (2011), "Numerical solution of fractional differential equations with a collocation method based on Müntz polynomials", **Computers and Mathematics with Applications**, 62, 918–929.
- [31] Hebb D. O. (1949), "**The Organization of Behavior: A Neuropsychological Theory**", John Wiley, Sons, Inc., New York.
- [32] Widrow B. and Winter R. (1988), "Neural nets for adaptive filtering and adaptive pattern recognition", **IEEE Computer Magazine**, 21, 3, 25–39.
- [33] Hopfield J. J. (1982), "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities", **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, 79, 8, 2554–2558.
- [34] Hopfield J. J. and Tank D. W. (1985), "Neural computation of decisions in optimization problems", **Biological Cybernetics**, 52, 3, 141–152.
- [35] Hornik K., Stinchcombe M. and White H. (1989), "Multilayer feedforward networks are universal approximators", **Neural Networks**, 2, 5, 359–366.

- [36] Cheng T. and Lewis F. L. (2007), "Neural network solution for finitehorizon H-infinity constrained optimal control of nonlinear systems", **Journal of Control Theory and Applications**, 5, 1, 1–11
- [37] Cheng T., Sun H., Qu Z. and Lewis F. L. (2009), "Neural network solution for suboptimal control of non-holonomic chained form system", **Transactions of the Institute of Measurement and Control**, 31, 6, 475–494.
- [38] Modares H. and Naghibi Sistani M. B. (2011), "Solving nonlinear optimal control problems using a hybrid IPSOSQP algorithm", **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, 24, 476–484.
- [39] Lagaris I. E. and Likas A. (2012), "Hamilton–Jacobi theory over time scales and applications to linear-quadratic problems", **IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems**, 9, 5, 987–1000.
- [40] Vrabie D., Lewis F. L. (2009), "Neural network approach to continuous- time direct adaptive optimal control for partially unknown nonlinear systems", **Neural Network**, 22, 237–246.
- [41] Effati S. and Pakdaman M. (2013), "Optimal control problem via neural networks", **Neural Computing and Applications**, 23, 2093–2100.
- [42] Qu H. and Liu X. (2015), "A Numerical Method for Solving Fractional Differential Equations by Using Neural Network", **Hindawi Publishing Corporation, Advances in Mathematical Physics**, 2015, doi.org/10.1155/2015/439526.
- [43] Raja M. A. Z., Manzar M. A. and Samar R. (2015), "An efficient computational intelligence approach for solving fractional order Riccati equations using ANN and SQP", **Applied Mathematical Modelling**, 39, 3075–3093.
- [44] Sabouri J., Effati S. and Pakdaman M. (2017), "A Neural Network Approach for Solving a Class of Fractional Optimal Control Problems", **Neural Processing Letters**, 45, 59–74.
- [45] Ghasemi S., Nazemi A. R. and Hosseinpour S. (2017), "Nonlinear fractional optimal control problems with neural network and dynamic optimization schemes", **Nonlinear Dynamics**, 89, 2669–2682.
- [46] Perko L. (2001), "**Differential Equations and Dynamical Systems**", Springer, 3rd ed.

- [47] Ortega J. M. and Rheinboldt W. C. (2000), "**Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables**", Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [48] Zabczyk J. (1992), "**Mathematical control theory: an introduction**" Systems, control. Birkhäuser.
- [49] Khalil H. K. (2002), "**Nonlinear Systems**", Prentice Hall PTR, 3rd ed.
- [50] Bagley R. L. and Torvik P. J. (1983), "A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity", **Journal of Rheology**, 27, 3, 201–210
- [51] Baillie R. T. (1996), "Long memory processes and fractional integration in econometrics", **Journal of Economics**, 73, 5, 5–59.
- [52] Jajarmi A., Baleanu D. (2017), "Suboptimal control of fractional-order dynamic systems with delay argument", **Journal of Vibration and Control**, 24, 2430–2446.
- [53] Bhrawy A. H., Ezz-Eldien S. S. (2016), "A new Legendre operational technique for delay fractional optimal control problems", **Calcolo**, 53, 521–543.
- [54] Rahimkhani P., Ordokhani Y. and Babolian E. (2016), "An efficient approximate method for solving delay fractional optimal control problems", **Nonlinear Dynamics**, 86, 1649–1661.
- [55] Dehghan R. and Keyanpour M. (2017), "A numerical approximation for delay fractional optimal control problems based on the method of moments", **IMA Journal of Mathematical Control and Information**, 34, 77–92.
- [56] Moradi L., Mohammadi F., Baleanu D. (2018), "A direct numerical solution of time-delay fractional optimal control problems by using Chelyshkov wavelets", **Journal of Vibration and Control**, 25, 310–324.
- [57] Hosseinpour S., Nazemi A. and Tohidi E. (2019), "Müntz–Legendre spectral collocation method for solving delay fractional optimal control problems", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 351, 344–363.
- [58] Hosseinpour S. and Nazemi A. (2016), "A collocation method via block-pulse functions for solving delay fractional optimal control problems", **IMA Journal of Mathematical Control and Information**, 1–23.

- [59] Safaie E., Farahi M. H. and Farmani Ardehaie M. (2015), "An approximate method for numerically solving multi-dimensional delay fractional optimal control problems by Bernstein polynomials", **Computational and Applied Mathematics**, 34, 831–846.
- [60] Effati S., Rakhshan S. A. and Saqi S. (2018), "Formulation of Euler–Lagrange Equations for Multidelay Fractional Optimal Control Problems", **Journal of Computational and Non-linear Dynamics**, 13, 6, doi.org/10.1115/1.4039900.
- [61] Turut V. and Guzel N. (2013), "Multivariate Padé Approximation for solving nonlinear partial differential equations of fractional order", **Abstract and Applied Analysis**, doi.org/10.1155/2013/746401.
- [62] Cuyt A. (1999), "How well can the concept of Padé approximation be generalized to the multi-variate case?", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 105, 25–50.
- [63] Baker G. A. and Graves-Morris P. R. (1996), "**Padé Approximants**", Cambridge University Press, 59.
- [64] Pol V. B. and Bremmer H. (1955), "**Operational Calculus Based on the Two-sided Laplace Integral**", London: Cambridge University Press.
- [65] Jafarian A., Mokhtarpour M. and Baleanu D. (2017), "Artificial neural network approach for a class of fractional ordinary differential equation", **Neural Computing and Applications**, 28, 765–773.
- [66] El-Ajou A., Abu Arqub O. and Momani S. (2013), "Solving fractional two-point boundary value problems using continuous analytic method", **Ain Shams Engineering Journal**, 4, 539–547.
- [67] Abu Arqub O. and El-Ajou A. (2013), "Solution of the fractional epidemic model by homotopy analysis method", **Journal of King Saud University–Science**, 25, 73–81.
- [68] Nocedal J. and Wright S. J. (2006), "**Numerical Optimization, springer**", New York.
- [69] Lee K. Y. and El-Sharkawi M. A. (2008), "**Modern Heuristic Optimization Techniques: Theory and Applications to Power Systems**", Wiley InterScience.
- [70] Sun J., Chen J. S. and Ko C. H. (2012), "Neural networks for solving second-order cone constrained variational inequality problem", **Computational Optimization and Applications**, 51, 623–648.

- [71] Kheyrinataj F. and Nazemi A. (2019), "Fractional power series neural network for solving delay fractional optimal control problems", **Connection Science**, 53–80.
- [72] Palanisamy K. R. and Rao G. P. (1983), "Optimal control of linear systems with delays in state and control via Walsh function", **Control Theory and Applications, IEEE Proceedings**, 130, 300–312.
- [73] Ghomanjani F., Farahi M. H., Gachpazan M. (2013), "Optimal control of time-varying linear delay systems based on the Bezier curves", **Computational and Applied Mathematics**, 33, 687–715.
- [74] BANKS H. T. and BURNS J. A. (1978), "Hereditary control problems: Numerical method based on averaging approximations", **SIAM Journal on Control and Optimization**, 16, 169–208.
- [75] Mohan B. M. and Kar S. K. (2010), "Optimal Control of Multi-Delay Systems via Block-pulse Functions", **IEEE International Conference on Industrial and Information Systems**, 614–619.
- [76] Dadkhah M. and Farahi M. H. (2015), "Optimal Control of Time Delay Systems via Hybrid of Block-Pulse Functions and Orthonormal Taylor Series", **International Journal of Applied and Computational Mathematics**, 2, 137–152.
- [77] Wang X. T. (2007), "Numerical solutions of optimal control for time delay systems by hybrid of block-pulse functions and Legendre polynomials", **Applied Mathematics and Computation**, 184, 849–856.
- [78] Banks H. T. (1979), "Approximation of nonlinear functional differential equation control systems", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 29, 383–408.
- [79] Balakrishnan D. and Puthusserypady S. (2005), "Multilayer perceptrons for the classification of brain computer interface data, in: Bioengineering", **Proceedings of the Northeast Conference**, 118–119.
- [80] Dehuri S. and Cho S. B. (2010), "A comprehensive survey on functional link neural networks and an adaptive pso–bp learning for cflnn", **Neural Computing and Applications**, 19, 2, 187–205.
- [81] Pao Y. (1989), **"Adaptive pattern recognition and neural networks"**, Reading, MA (US), Addison-Wesley Publishing Company.

- [82] Patel V., Gandhi V., Heda S. and George N. V. (2016), "Design of adaptive exponential functional link network-based nonlinear filters", **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, 63, 9, 1434–1442.
- [83] Zhang L. and Suganthan P. N. (2015), "A comprehensive evaluation of random vector functional link networks", **Information Sciences**, 1094–1105.
- [84] Li M., Liu J., Jiang Y. and Feng W. (2012), "Complex-Chebyshev functional link neural network behavioral model for broadband wireless power amplifiers", **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, 60, 6, 1979–1989.
- [85] Mall S. and Chakraverty S. (2017), "Single layer Chebyshev neural network model for solving elliptic partial differential equations", **Neural Processing Letters**, 45, 3, 825–840.
- [86] Patra J. C., Chin W. C., Meher P. K. and Chakraborty G. (2008), "Legendre-FLANN-based nonlinear channel equalization in wireless communication system", **IEEE international conference on systems, man and cybernetics**, 1826–1831.
- [87] Mall S. and Chakraverty S. (2016), "Application of Legendre Neural Network for solving ordinary differential equations", **Applied Soft Computing**, 43, 347–356.
- [88] Mall S. and Chakraverty S. (2015), "Numerical Solution of Nonlinear Singular Initial Value Problems of Emden-Fowler type using Chebyshev Neural Network Method", **neurocomputing**, 149, 975–982.
- [89] Mokhtary P., Ghoreishi F. and Srivastava H. M. (2016), "The Müntz–Legendre Tau Method for Fractional Differential Equations", **Applied Mathematical Modelling**, 40, 671–684.
- [90] Dankovic B., Jovanovic Z. and Milojkovic M. (2005), "Dynamic Systems Identification using Müntz Function Neural Networks with Distributed Dynamics", **TELSIKS 2005 - 2005 uth International Conference on Telecommunication in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services, 28–30 September**.
- [91] Trajkovic D., Nikolic V., Antic D., Nikolic S. and Peric S. (2013), "Application of the Hybrid Bond Graphs and Orthogonal Rational Filters for Sag Voltage Effect Reduction", **Elektronika ir Elektrotechnika**, 19, DOI: 10.5755/j01.eee.19.6.1746.
- [92] Lazoa M. J. and Krumreich C. E. (2014), "The action principle for dissipative systems", **Journal of Mathematical Physics**, 55.

- [93] Nazemi A. and Effati S. (2013), "An application of a merit function for solving convex programming problems", **Computers and Industrial Engineering**, 66, 212–221.
- [94] Pan S. H. and Chen J. S. (2010), "A semi smooth Newton method for the SOCCP based on a one-parametric class of SOC complementarity functions", **Computational Optimization and Applications**, 45, 59–88.
- [95] Facchinei F., Jiang H. and Qi L. (1999), "A smoothing method for mathematical programs with equilibrium constraints", **Mathematical Programming**, 35, 107–134.
- [96] Elnagar G. N. and Kazemi M. A. (2001), "Numerical solution of time-delayed functional differential equation control systems", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 130, 75–90.
- [97] Maleki M. and Hashim I. (2014), "Adaptive pseudospectral methods for solving constrained linear and nonlinear time-delay optimal control problems", **Journal of the Franklin Institute**, 351, 811–839.
- [98] Peng H., Wang X., Zhang S. and Chen B. (2017), "An iterative symplectic pseudospectral method to solve nonlinear state-delayed optimal control problems", **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 48, 95–114.
- [99] Wong K. H., Jennings L. S. and Benyah F. (2002), "The control parametrization enhancing transform for constrained time-delayed optimal control problems", **ANZIAM Journal**, 43(E), E154–E185.
- [100] Marzban H. R. and Pirmoradian H. (2018), "A direct approach for the solution of nonlinear optimal control problems with multiple delays subject to mixed state-control constraints", **Applied Mathematical Modelling**, 53, 189–213.
- [101] Alipour M., Rostamy D. and Baleanu D. (2012), "Solving multi-dimensional fractional optimal control problems with inequality constraint by Bernstein polynomials operational matrices", **Journal of Vibration and Control**, 19, 16, 2523–2540.
- [102] Haddadi N., Ordokhani Y. and Razzaghi M. (2012), "Optimal control of delay systems by using a hybrid functions approximation", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 153, 338–356.

- [103] Hristov J. (2017), "Derivation of fractional Dodson's equation and beyond: Transient mass diffusion with a non-singular memory and exponentially fading out diffusivity", **Progress in Fractional Differentiation and Applications**, 3, 255–270.
- [104] Tateishi A. A., Ribeiro H. V. and Lenzi E. K. (2017), "The role of fractional time-derivative operators on anomalous diffusion", **Frontiers in Physics**, 5.
- [105] Akman Yıldız T., Jajarmi A., Yıldız B. and Baleanu D. (2020), "New aspects of time fractional optimal control problems within operators with nonsingular kernel", **discrete and continuous dynamical systems series S**, 13, 3, 407–428.
- [106] Mohammadzadeh E., Pariz N., Hosseini Sani S. K. and Jajarmi A. (2018), "An efficient numerical method for the optimal control of fractional-order dynamic systems", **Journal of Vibration and Control**, 24, 5312–5320.
- [107] Alizadeh A. and Effati S., (2016), "An iterative approach for solving fractional optimal control problems", **Journal of Vibration and Control**, Journal of Vibration and Control, 24, 1, 18–36.
- [108] Akbarian T. and Keyanpour M., (2013), "A new approach to the numerical solution of fractional order optimal control problems", **Applications and Applied Mathematics**, 8, 2, 523–534.
- [109] Doha E. H., Bhrawy A. H., Baleanu D., et al. (2015), "An efficient numerical scheme based on the shifted orthonormal Jacobi polynomials for solving fractional optimal control problems", **Advances in Difference Equations**, doi:10.1186/s13662-014-0344-z.
- [110] Agrawal O. P. (1988), "General formulation for the numerical solution of optimal control problems", **International Journal of Control**, 50, 627–638.
- [111] Elnager G. N. (1993), "**Legendre and pseudospectral Legendre approaches for solving optimal control problems**", PhD Thesis, Mississippi State University.
- [112] Ordokhani Y. and Razzaghi M. (2005), "Linear quadratic optimal control problems with inequality constraints via Rationalizes Haar functions", **Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms**, 12, 761–773.
- [113] Hosseinpour S., Nazemi A. (2016), "Solving fractional optimal control problems with fixed or free final states by Haar wavelet collocation method", **IMA Journal of Mathematical Control and Information**, 543–561.

- [114] Abdeljawad T. and Baleanu D. (2016), "Integration by parts and its applications of a new nonlocal fractional derivative with Mittag–Leffler nonsingular kernel", **Journal of Nonlinear Sciences and Applications**, 10, 3, 1098–107.
- [115] Abdeljawad T. and Baleanu D. (2017), "Monotonicity analysis of a nabla discrete fractional operator with discrete Mittag–Leffler kernel", **Chaos Solitons Fractals**, 102, 106–10.
- [116] Baleanu D., Jajarmi A., Hajipour M. (2017), "A new formulation of the fractional optimal control problems involving mittag–leffler nonsingular kernel", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 175, 3, 718–37.
- [117] Saad K. M., Atangana A., Baleanu D. (2018), "New fractional derivatives with non-singular kernel applied to the burgers equation", **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, 28, 6.
- [118] Lee T. T. and Jeng J. T. (1998), "The Chebyshev-polynomials-based unified model neural networks for function approximation", **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)**, 28, 6, 925–935.
- [119] Zhao H. and Zhang J. (2008), "Functional link neural network cascaded with Chebyshev orthogonal polynomial for nonlinear channel equalization", **Signal Process**, 88, 8, 1946–1957.
- [120] Zou A. M., Kumar K. D. and Hou Z. G. (2010), "Quaternion-based adaptive output feedback attitude control of spacecraft using Chebyshev neural networks", **IEEE Transactions on Neural Networks**, 21, 9, 1457–1471.
- [121] Ma W., Duan J., Zhao H. and Chen B. (2018), "Chebyshev Functional Link Artificial Neural Network Based on Correntropy Induced Metric", **Neural Processing Letters**, 47, 233–252.
- [122] Mall S. and Chakraverty S. (2014), "Chebyshev Neural Network based model for solving Lane–Emden type equations", **Applied Mathematics and Computation**, 247, 100–114.
- [123] Chen C. L., Sun D. Y. and Chang C. Y. (2000), "Numerical solution of time-delayed optimal control problems by iterative dynamic programming", **Optimal Control Applications and Methods**, 21, 91–105.
- [124] Barati S. (2012), "Optimal Control of Constrained Time Delay Systems", **AMO–Advanced Modeling and Optimization**, 14.

-
- [125] Ziaei E. and Farahi M. H. (2019), "The approximate solution of non-linear time-delay fractional optimal control problems by embedding process", **IMA Journal of Mathematical Control and Information**, 36, 3, 713–727.
- [126] Göllmann L., Kern D. and Maurer H. (2009), "Optimal control problems with delays in state and control variables subject to mixed control-state constraints", **Optimal Control Applications and Methods**, 30, 4, 341–365.
- [127] Pinch E. R. (1993), "**Optimal Control and the Calculus of Variations**", New York.

Abstract

As fractional derivatives and integrals provide more accurate models of many dynamical systems than integer-order derivatives and integrals, there has been considerable growth in the fractional calculus in recent years. A delayed fractional dynamic system is a system described by differential fractional differential equations, and delay fractional optimal control problems are problems in which the dynamic constraints are delay fractional differential equations. Due to the necessity of solving problems and the high capability of neural network models, which are one of the active and useful fields in the area of artificial intelligence, in this thesis we study a class of delay optimal control problems of fractional order. In order to solve these problems, we use numerical methods based on the multilayer perceptron neural network (based on fractional power series functions, sigmoid functions and exponential functions) and single layer functional link neural network (based on Müntz-Legendre polynomials and fractional Chebyshev polynomials). Recently, new definitions of fractional calculus with non-singular and non-local kernel have been introduced. In this thesis we will also solve the delay optimal control problems with these new definitions.

Keywords: Delay Fractional Optimal Control Problems, Multilayer Perceptron Neural Network, Single Layer Functional Link Neural Network, Padé approximation, Optimization.



Faculty of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Operation Research

The Application of a Computational Intelligence Method for Solving a Class of Delay Fractional Optimal Control Problems

By: Farzaneh Kheyriataj

Supervisor:

Dr. Alireza Nazemi

February 2020