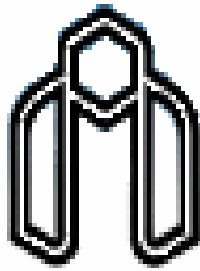


سلام



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: علوم ریاضی

گروه: ریاضی کاربردی

پایداری سیستم های خطی دوبعدی توصیف شده توسط مدل راسر به روش

همدم برداری

زیبا ارجمند زاده

استاد راهنما:

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور:

دکتر سهراب عفتی

پایان نامه تحصیلی جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تابستان ۱۳۹۰

الهی

هرچه بیش میدانم، بدانم که هیچ ندانم
مراد کن تا این دانش اندکم نه زربانی باشد

برای فزونی غرور و تکبر، نه حلقه‌ای برای اسارت، نه دستایه‌ای برای تجارت،
بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و

وجودشان برایم همه مهر

قدردانی

قبل از هر چیز خداوند مهربان را شکر می گویم که این موهبت را نصیب من نمود تا بتوانم در وادی علم و دانش قدمی هر چند ناچیز بردارم.

از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر احسنی طهرانی به خاطر کمک های بی دریغش صمیمانه تشکر می کنم. همچنین مراتب تشکر و قدردانی خود را از استاد مشاورم جناب آقای دکتر سهراب عفتی ابراز می دارم. از خداوند منان آرزوی سلامتی و توفیق روز افزون برای این اساتید خواهانم.

چکیده

در چند دهه اخیر سیستم های دو بعدی مورد تحقیق و پژوهش بسیاری از دانشمندان قرار گرفتند. این سیستم ها کاربردهای فراوانی در علوم مختلف دارند که از آن جمله می توان به پردازش فرایندهای تصویری، مدل سازی فرایندهای فیزیکی و شبیه سازی رباط ها اشاره نمود. از زمانی که این سیستم ها معرفی شدند دانشمندان بسیاری مدل های متنوعی را برای این سیستم ها ارائه دادند که معروفترین این مدل ها عبارتند از: **مدل راسر**^۱ (۱۹۷۵) و **فورناسینی**^۲ (۱۹۷۸) و **مارکسینی**^۳ (۱۹۷۶) و **کورک**^۴ (۱۹۹۶) و... به دلیل عمومیتی که مدل راسر نسبت به سایر مدل ها دارد ما مبنای کار خود را در این پایان نامه مدل راسر قرار می دهیم.

در این پایان نامه سیستم های دو بعدی خطی گسسته زمانی توصیف شده توسط مدل راسر و پایداری این سیستم ها را مورد بررسی قرار داده، سپس ماتریس پس خورد حالت بهینه زمانی را محاسبه می کنیم. روش جدیدی که در این پایان نامه ارائه گردیده به این صورت است که ابتدا با استفاده از ماتریس هایی که جزو مفروضات مساله می باشند یک ماتریس افزوده تشکیل داده، سپس با استفاده عملیات سطری مقدماتی و ستونی نظیر ماتریس افزوده را به فرم استاندارد اشلون و سپس همدم برداری تبدیل کرده، نهایتاً با استفاده از فرم همدم برداری ماتریس پس خورد حالت بهینه زمانی را برای سیستم دوبعدی محاسبه می کنیم.

واژه های کلیدی: مدل راسر، پایداری، سیستم های کسری، فرم استاندارد اشلون، فرم همدم برداری

^۱Roesser model

^۲Fornasini

^۳Marchesini

^۴Kurek

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

- (۱) ارجمندزاده ز، احسنی طهرانی ح و محمدی ف، (۱۳۹۰)، “تعیین کنترل گر بهینه زمانی سیستم های دو بعدی خطی راسر”، چهارمین کنفرانس بین المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات، گیلان.
 - (۲) محمدی زاده ف، احسنی طهرانی ح و ارجمندزاده ز، (۱۳۹۰)، “تخصیص مقادیر ویژه برای کنترل سیستم خطی مثبت”، گیلان.
 - (۳) محمدی زاده ف، احسنی طهرانی ح و ارجمندزاده ز، (۱۳۹۰)، “تعیین کنترلگر سیستم خطی مثبت با نرم کمینه”، اراک.
- 4) Z Arjmandzadeh, H A. Tehrani, F Mohammadizadeh, 1389, “Stabilization of fractional 2D linear systems described by the Roesser model” The 1st National Electronic Congress on the Effect of Mathematics Development of Sciences Jahrom, Iran.

فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۴	پیش نیاز ها و مفاهیم مقدماتی	۲
۴	۱.۲ تعریف ها و نمادهای مقدماتی	۴
۹	سیستم های دو بعدی گسسته زمانی خطی-کسری	۳
۹	۱.۳ معرفی سیستم های دو بعدی	۹
۱۰	۲.۳ مدل های فضای حالت سیستم های خطی دو بعدی گسسته	۱۰
۱۰	۱.۲.۳ ۱-مدل راسر	۱۰
۱۱	۲.۲.۳ مدل آتاسی	۱۱
۱۲	۳.۲.۳ ۳-مدل فورناسا-مارکسینی	۱۲
۱۳	۴.۲.۳ ارتباط بین RM و AM ، $FMM - I$ ، $FMM - II$	۱۳
۱۴	۳.۳ سیستم های کسری دو بعدی توصیف شده توسط مدل راسر	۱۴
۱۵	۱.۳.۳ معادلات فضای حالت دو بعدی کسری و جواب های آن ها	۱۵
۱۷	۲.۳.۳ سیستم های کسری دوبعدی مثبت توصیف شده توسط مدل راسر	۱۷
۲۰	۴ پایداري سیستم های خطی دو بعدی توصیف شده توسط مدل راسر	۲۰
۲۰	۳.۰.۴ شرایط پایداری سیستم های دوبعدی توصیف شده توسط مدل راسر	۲۰
۲۷	۴.۰.۴ پایداری سیستم کسری توصیف شده توسط مدل راسر	۲۷
۳۴	۵ روشی نو جهت تعیین ماتریس پس خورد حالت سیستم خطی دوبعدی راسر	۳۴
۳۵	۵.۰.۵ ناوردهای کرونکر	۳۵
۴۰	۶.۰.۵ تبدیلات تشابهی فضای حالت - فرم استاندارد اشلون	۴۰
۴۶	۷.۰.۵ فرم همدم برداری اولیه	۴۶

۶۵	۶ نتیجه گیری
۶۷	برنامه کامپیوتری
۷۳	مراجع
۷۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

فصل ۱

مقدمه

در این بخش سعی بر آن است که خلاصه ای از فعالیت دانشمندان مختلف در زمینه سیستم های دوبعدی و همچنین خلاصه ای از فصل های این پایان نامه عنوان شود:

سیستم های مثبت دو بعدی که مهمترین زیر مجموعه از سیستم های دو بعدی می باشند اخیراً توسط فورناسینی و والچر^۱ (۱۹۹۶)، فورناسینی و والچر (۱۹۹۷)، فورناسینی و والچر (۱۹۹۵) و کاکزورک^۲ (۲۰۰۰) به طور مفصل بحث شدند.

کنترل پذیری سیستم های خطی دو بعدی مثبت توسط دانشمندانی همچون بوس^۳ (۱۹۸۵)، کلامکا^۴ (۱۹۹۱)، کلامکا (۱۹۹۹)، کاکزورک (۱۹۸۵) و کاکزورک (۱۹۹۶، ۲۰۰۰) بحث شده اند. پایداری مدل راسر دو بعدی مثبت توسط کاکزورک (۲۰۰۲) و رفتار مجانبی سیستم های مثبت دو بعدی توسط والچر و فورناسینی (۱۹۹۵) مورد تحقیق و پژوهش قرار گرفتند. در ادامه این پایان نامه به صورت زیر فصل بندی می شود:

فصل دوم پایان نامه را به بیان تعاریفی که در فصول بعد مورد استفاده قرار می گیرند اختصاص می دهیم.

^۱ Valcher

^۲ Kaczorek

^۳ Bose

^۴ Klamka

در فصل سوم، انواع مدل هایی که برای سیستم های دوبعدی توسط دانشمندان مختلف ارائه شده اند را معرفی کرده، در ادامه اثبات می کنیم که بهترین و کلی ترین این سیستم ها سیستم دو بعدی کسری توصیف شده توسط مدل راسر می باشد، و به همین دلیل ما مبنای کار خود را در این پایان نامه سیستم های دو بعدی توصیف شده توسط مدل راسر قرار می دهیم، آنگاه به توصیف یکی از مهمترین انواع سیستم های دوبعدی یعنی سیستم های کسری پرداخته و رده ی جدیدی از این سیستم ها را معرفی کنیم و شرایط لازم و کافی را برای مثبتی این سیستم ها عنوان می کنیم.

در فصل چهارم، پایداری سیستم های دوبعدی توصیف شده توسط مدل راسر را بررسی می کنیم و شرایط پایداری این سیستم ها را با استفاده از سیستم های یک بعدی هم ارز آن بررسی می نمائیم، سپس به بحث پایداری سیستم های کسری دو بعدی توصیف شده توسط مدل راسر می پردازیم و نتیجه این بررسی ها را با استفاده از مثال هایی دنبال می کنیم.

در فصل پنجم، ابتدا با استفاده از ماتریس هایی که جزء مفروضات مساله هستند ماتریس افزوده ای را تشکیل می دهیم سپس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی و ستونی نظیر ماتریس افزوده را به فرم استاندارد اشلون و سپس فرم همدم برداری تبدیل کرده و با استفاده از این مفاهیم پایداری سیستم یک بعدی معادل را مورد بررسی قرار می دهیم سپس با استفاده از قضایای گفته شده در فصل چهارم نتیجه می گیریم که پایداری سیستم های دو بعدی هم ارز پایداری سیستم های یک بعدی معادل آن می باشد و سپس روشی نو در بحث پایداری سیستم های دوبعدی معرفی کرده و نهایتاً ماتریس پس خورد حالت بهینه زمانی را برای سیستم یک بعدی معادل با سیستم دو بعدی به روش گفته شده بدست آورده و با توجه به ابعاد ماتریس، ماتریس پس خورد حاصله را به دو مولفه تقسیم کرده، ماتریس پس خورد دو مولفه ای برای سیستم دو بعدی مورد بحث حاصل می شود و در نهایت چند مثال عددی

در خصوص روش فوق ارائه می دهیم.

فصل ۲

پیش نیاز ها و مفاهیم مقدماتی

۱.۲ تعریف ها و نمادهای مقدماتی

در این فصل مفاهیم مورد نیاز برای فصول بعد را تعریف می کنیم:

تعریف ۱.۱.۲. سیستم یک بعدی: در مبحث کنترل، معادلات دیفرانسیل حاکم بر یک سیستم به صورت زیر توصیف می شوند:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (۱.۲)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (۲.۲)$$

که در آن t متغیر زمان، $x(t)$ یک بردار ستونی n بعدی موسوم به بردار حالت و $u(t)$ یک بردار ستونی m بعدی موسوم به بردار ورودی یا متغیر کنترل و $y(t)$ یک بردار ستونی r بعدی موسوم به بردار خروجی است. بدیهی است اندازه ماتریس های A ، B ، C ، D به گونه ای است که با معادلات تعریف شده سازگار باشد.

معادلات (۱.۲) و (۲.۲) معادلات حالت سیستم تعریف می شوند و برای بسیاری از سیستم ها معادلات فوق معمولاً از قوانین فیزیکی حاکم بر سیستم بدست می آیند.

در حالت کلی ماتریس‌های A ، B ، C ، D نیز می‌توانند تابع زمان باشند اما در این پایان نامه این ماتریس‌ها ثابت فرض می‌شوند در این صورت سیستم را سیستم خطی ناوردای زمانی می‌نامند. در این پایان نامه تنها سیستم‌های خطی ناوردای زمانی مورد بررسی قرار می‌گیرند و برای سهولت تنها به واژه سیستم بسنده می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۲. سیستم‌های خطی گسسته زمانی: در مواردی برای بعضی از سیستم‌ها بردار حالت یعنی x و یا بردار ورودی و یا هر دو در هر لحظه از زمان قابل محاسبه یا اندازه‌گیری نیستند بلکه در دنباله‌ای از نقاط مثل t_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) این کمیت‌ها در دسترس می‌باشند. در این گونه موارد معادلات سیستم به فرم زیر تعریف می‌شوند:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i) \quad x(i) = x(t_i) \quad (۳.۲)$$

$$y(i) = Cx(i) + Du(i) \quad (۴.۲)$$

(قابل ذکر است که بعضی از سیستم‌ها ذاتاً گسسته زمانی می‌باشند و تغییر حالت سیستم فقط در نقاط زمانی خاصی مانند t_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) صورت می‌پذیرد.)

تعریف ۳.۱.۲. کنترل پذیری: سیستم توصیف شده توسط معادلات (۱.۲) و (۲.۲) را کاملاً کنترل پذیر گویند اگر بتوان حالت سیستم را از بردار دلخواه $x(t_0)$ به نام بردار حالت اولیه در لحظه t_0 به بردار دلخواه دیگر $x(t_s)$ به نام حالت تعادل در لحظه t_s رساند [۱].

منظور از کنترل سیستم انتخاب ورودی $u(t)$ ، ورودی سیستم، به گونه‌ای است که رفتار سیستم حاصل تحت کنترل باشد بدین ترتیب که

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow x_e \quad (۵.۲)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow y_e \quad (۶.۲)$$

به طوریکه در آن x_e و y_e مقادیر از پیش تعریف شده بردار حالت و خروجی می باشند و در بررسی تحلیلی سیستم ها این مقادیر برابر صفر انتخاب می شوند.

تعریف ۴.۱.۲. برای سیستم توصیف شده با معادلات حالت (۱.۲) ماتریس کنترل پذیری را به صورت زیر تعریف می کنند

$$Q = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (۷.۲)$$

قضیه ۵.۱.۲. سیستم خطی توصیف شده با معادلات (۱.۲) و (۲.۲) کاملاً کنترل پذیر است اگر و تنها اگر ستون های ماتریس کنترل پذیری سیستم فضای R^n را تولید کند [۲]، به عبارت دیگر سیستم کنترل پذیر است اگر و تنها اگر $\text{rank}(Q) = n$.

تعریف ۶.۱.۲. قانون کنترل : جهت کنترل بهینه زمانی سیستم با پس خورد حالت ورودی، $u(i)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$u(i) = Fx(i) \quad (۸.۲)$$

که در آن $F_{m \times n}$ ماتریس حقیقی با درایه های ثابت است و ماتریس پس خورد حالت نامیده می شود.

با جایگذاری قانون کنترل در معادله حالت سیستم خواهیم داشت:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i)$$

$$x(i+1) = Ax(i) + BFx(i) = (A + BF)x(i)$$

$$x(i+1) = \Gamma x(i)$$

ماتریس A را ماتریس حلقه باز سیستم و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه حلقه باز سیستم می‌نامند.

ماتریس $\Gamma = A + BF$ را ماتریس حلقه بسته سیستم و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه حلقه بسته سیستم می‌نامند.

تعریف ۷.۱.۲. پایداری لیاپانوف: حالت تعادل x_e سیستم $\dot{x} = f(x(t), \bullet, t)$ را پایداری از دید لیاپانوف می‌گوییم هرگاه به ازای هر $s(\varepsilon)$ ، یک $\delta(s)$ موجود باشد به قسمی که مسیرهای آغاز شده از $\delta(s)$ با میل کردن t به سمت ∞ از $s(\varepsilon)$ خارج نشوند.

تعریف ۸.۱.۲. پایداری مجانبی: نقطه تعادل معادله دیفرانسیل $\dot{x} = f(x(t), \bullet, t)$ پایدار مجانبی است اگر

(الف) پایدار به مفهوم لیاپانوف باشد.

(ب) برای کلیه مقادیر t ، یک $\rho(t) > 0$ موجود باشد که به ازای $\|x(t) - x_e\| < \rho(t)$

$$(t \rightarrow \infty) \implies \|x(t) - x_e\| \rightarrow 0.$$

ماتریس مربعی A را یک ماتریس با درایه‌های ثابت در نظر بگیرید، تعاریف زیر را برای ماتریس A داریم:

تعریف ۹.۱.۲. مقدار ویژه و بردار ویژه: بردار غیر صفر x را بردار ویژه A و اسکالر λ را مقدار ویژه نظیر آن بردار می‌گوییم، چنانچه معادله ماتریسی زیر اقلع شود:

$$Ax = \lambda x$$

در معادله ماتریس حاصل دو مجهول وجود دارد: بردار ویژه x و مقدار ویژه λ پس حل یکتایی برای آن وجود ندارد.

تعریف ۱۰.۱.۲. ماتریس همانی: به ماتریس مربعی که درایه های واقع بر قطر اصلی ۱ و سایر درایه ها صفر باشند ماتریس همانی گفته می شود.

تعریف ۱۱.۱.۲. بعد ماتریس: بعد ماتریس A حداکثر تعداد سطر(ستون)های مستقل خطی ماتریس می باشد. لازم به ذکر است که بعد سطری و بعد ستونی هر ماتریس مربعی دلخواه با هم برابر می باشد.

تعریف ۱۲.۱.۲. شعاع طیفی ماتریس A : بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A از نظر قدر مطلق شعاع طیفی ماتریس A نامیده می شود.

تعریف ۱۳.۱.۲. رد (اثر) ماتریس: حاصل جمع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A رد ماتریس A نامیده می شود.

تعریف ۱۴.۱.۲. ماتریس منفرد(معکوس پذیر): ماتریس مربعی A را منفرد گوییم هرگاه ماتریس مربعی B موجود باشد به قسمی که داشته باشیم: $AB = BA = I$ در این صورت ماتریس B را معکوس A می نامیم.

تعریف ۱۵.۱.۲. ماتریس پایین مثلثی: ماتریس A به فرم پایین مثلثی است اگر تمامی درایه های روی قطر اصلی و بالای آن صفر باشند. ماتریس بالا مثلثی نیز به صورت مشابه تعریف می شود.

فصل ۳

سیستم های دو بعدی گسسته زمانی خطی - کسری

۱.۳ معرفی سیستم های دو بعدی

سیستم های دو بعدی به سه دسته تقسیم می شوند:

سیستم های خطی دو بعدی گسسته (شامل دو متغیر مستقل گسسته)،

سیستم های خطی دو بعدی پیوسته (شامل دو متغیر مستقل پیوسته)،

سیستم های دو بعدی گسسته - پیوسته (شامل یک متغیر مستقل گسسته و یک متغیر مستقل پیوسته).

سیستم های خطی دو بعدی به دلایل زیادی مورد توجه قرار گرفته اند از جمله راندمان بالا، پردازش و تحلیل بهتر داده ها، قابلیت اجرای عملگر های غیرخطی، قابلیت بالای انعطاف پذیری و همچنین بوضوح بسیاری از فرایندهای فیزیکی دارای ساختار دو بعدی می باشند. تئوری تحلیل و طراحی سیستم های دو بعدی در سال های اخیر بسیار گسترش یافته است و مورد استفاده های فراوانی قرار گرفته است.

۲.۳ مدل های فضای حالت سیستم های خطی دو بعدی گسسته

مدل های فضای حالت استفاده شده برای سیستم های دو بعدی به صورت های زیر توصیف می شوند:

۱.۲.۳ مدل راسر

مدل راسر RM دو بعدی برای سیستم های گسسته به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j) \quad (1.3)$$

$$y(i, j) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Du(i, j) \quad (2.3)$$

که در آن $i, j \geq 0$ و i و j مقادیر صحیحی هستند که به ترتیب مولفه های افقی و عمودی بردار حالت را توصیف می کنند و $x^h(i, j) \in R^{n_1}$ بردار حالت افقی و $x^v(i, j) \in R^{n_2}$ بردار حالت عمودی و $u(i, j) \in R^m$ بردار ورودی، $y(i, j) \in R^l$ بردار خروجی و A_{11} و A_{12} و A_{21} و A_{22} و B_1 و B_2 و C_1 و C_2 و D ماتریس های حقیقی با ابعاد مناسب هستند. شرایط مرزی برای (۱.۳) و (۲.۳) به صورت زیر بیان می شود:

$$x^h(i, 0), x^v(0, j) \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

تعریف ۱.۲.۳. مدل راسر دوبعدی در حالت پیوسته به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_c^h(x, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial x_c^v(x, t)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c^h(x, t) \\ x_c^v(x, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} u_c(x, t) \quad (3.3)$$

$$y_c(x, t) = [G_1 \quad G_2] \begin{bmatrix} x_c^h(x, t) \\ x_c^v(x, t) \end{bmatrix} + Hu_c(x, t) \quad (۴.۳)$$

که در آن شرایط مرزی به صورت $x_c^h(\cdot, t)$ و $x_c^v(x, \cdot)$ می باشد و همواره داریم $x \geq 0$ ،
 $t \geq 0$ همچنین $x_c^h(x, t) \in R^{n_1}$ ، $x_c^v(x, t) \in R^{n_2}$ ، $u(x, t) \in R^l$ بردار ورودی، $y(x, t) \in R^p$ بردار
 خروجی و E_{11} و E_{12} و E_{21} و E_{22} و F_1 و F_2 و G_1 و G_2 و H ماتریس های حقیقی با ابعاد
 مناسب هستند و همچنین h و v مولفه های عمودی و افقی بردار حالت هستند.

۲.۲.۳ مدل آتاسی

مدل آتاسی^۱ (AM) توسط معادله های زیر تعریف می شود:

$$\bar{x}(i+1, j+1) = \bar{A}_1 \bar{x}(i+1, j) + \bar{A}_2 \bar{x}(i, j+1) - \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{x}(i, j) + \bar{B}u(i, j) \quad (۵.۳)$$

$$y(i, j) = \bar{C} \bar{x}(i, j) \quad \bar{A}_1 \bar{A}_2 = \bar{A}_2 \bar{A}_1 \quad (۶.۳)$$

که در آن i و j مقادیر صحیحی هستند که به ترتیب مولفه های افقی و عمودی بردار حالت
 را توصیف می کنند. $\bar{x}(i, j) \in R^n$ بردار حالت مکان در نقطه (i, j) ، $u(i, j) \in R^m$ بردار ورودی
 و $y(i, j) \in R^l$ بردار خروجی سیستم می باشد، همچنین $\bar{A}_1$ ، $\bar{A}_2$ ، $\bar{B}$ و $\bar{C}$ ماتریس های حقیقی
 با ابعاد مناسب هستند. شرایط مرزی برای مساله (۵.۳) و (۶.۳) به صورت زیر داده می شود:

$$\bar{x}(i, \cdot), \bar{x}(\cdot, j) \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (۷.۳)$$

^۱Attasi's model

۳.۲.۳ -۳ مدل فورناسا-مارکسینی

مدل فورناسا مارکسینی نوع اول ($F - MMI$) توسط معادلات زیر تعریف می شود:

$$x(i+1, j+1) = A \cdot x(i, j) + A_1 x(i+1, j) + A_2 x(i, j+1) + Bu(i, j) \quad (۸.۳)$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) \quad (۹.۳)$$

که در آن i و j مقادیر صحیحی هستند که به ترتیب مولفه های افقی و عمودی بردار حالت را توصیف می کنند، $x(i, j) \in R^n$ بردار حالت مکان، $u(i, j) \in R_m$ بردار ورودی، $y(i, j) \in R^l$ بردار خروجی و ماتریس های A, A_1, A_2, B و C ماتریس های حقیقی با ابعاد مناسب هستند. شرایط مرزی برای (۸.۳) و (۹.۳) به صورت زیر داده می شود:

$$x(i, 0), x(0, j) \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (۱۰.۳)$$

مدل فورناسا مارکسینی نوع دوم $F - MMII$ توسط معادلات زیر بیان می شود

$$x(i+1, j+1) = A_1 x(i+1, j) + A_2 x(i, j+1) + B_{11} u(i+1, j) x(i, j) + B_{12} u(i, j+1) \quad (۱۱.۳)$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j) \quad (۱۲.۳)$$

که در آن i و j مقادیر صحیحی هستند که به ترتیب مولفه های افقی و عمودی بردار حالت را توصیف می کنند، $x(i, j) \in R^n$ بردار حالت مکان در نقطه (i, j) ، $u(i, j) \in R_m$ بردار ورودی، $y(i, j) \in R^l$ بردار خروجی و ماتریس های $A_1, A_2, B_{11}, B_{12}, C$ و D ماتریس های حقیقی با ابعاد مناسب هستند. شرایط مرزی برای (۱۱.۳) و (۱۲.۳) به صورت زیر داده می شود:

$$x(i, 0), x(0, j) \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (۱۳.۳)$$

۴.۲.۳ ارتباط بین RM و AM ، $FMM - I$ ، $FMM - II$

با مقایسه (۵.۳)–(۶.۳) با (۸.۳)–(۹.۳)، به این نتیجه می رسیم که با قرار دادن $A_1 = -\bar{A}_1 \bar{A}_2 = -\bar{A}_2 \bar{A}_1$ حالت خاصی از $F - MMI$ می باشد. حال با در نظر گرفتن $x^h(i, j) = x(i, j+1) - Ax(i, j)$ و $x^v(i, j) = x(i, j)$ می توان نوشت

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & A_1 + A_2 A_1 \\ I & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j) \quad (14.3)$$

و

$$y(i, j) = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} \quad (15.3)$$

بنابراین $FMM - I$ می تواند حالت خاصی از RM باشد. حال اگر فرض کنیم $B_2 = 0$ ، $A_{21} = I$ و $C_1 = 0$ آن وقت می توان RM را حالت خاصی از $F - MMI$ در نظر گرفت. همچنین اگر

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ I & A_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix} \quad (16.3)$$

می توان نتیجه گرفت AM حالت خاصی از RM می باشد و اگر $A_{21} = I$ ، $A_{12} = 0$ ، $B_2 = 0$ و $C_1 = 0$ آنوقت RM حالت خاصی از AM می شود. حال نشان می دهیم RM حالت خاصی از $F - MMII$ است. با تعریف

$$x(i, j) = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}$$

می توان (۱.۳) و (۲.۳) را به فرم زیر نوشت

$$x(i+1, j+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(i+1, j) + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(i, j+1) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i+1, j) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j+1)$$

$$y(i, j) = [C_1 \ C_2] x(i, j)$$

بنابراین RM حالت خاصی از $F - MMI$ است. به همین ترتیب می توان نشان داد که $F - MMI$ حالت خاصی از $F - MMII$ می باشد.

مدل های فضای حالت کاربردهای فراوانی دارند. این مدل ها به صورت زیر با هم مرتبطند: AM حالت خاصی از $F - MMI$ و $F - MMI$ می تواند حالت خاصی از RM بر حسب مدل راسر توصیف کرد این مدل به عنوان بهترین و کلی ترین مدل معرفی شده و ما مدل راسر را به عنوان مبنای کار خود در این پایان نامه انتخاب می کنیم.

۳.۳ سیستم های کسری دو بعدی توصیف شده توسط مدل راسر

در این بخش رده جدیدی از سیستم های کسری دو بعدی را معرفی کرده و به بحث در رابطه با بعضی از خواص این سیستم ها می پردازیم.

سیستم های کسری برای اولین بار در پایان قرن نوزدهم توسط لیوویل^۲ و ریمن^۳ معرفی شدند. این سیستم ها بطور وسیعی توسط مهندسان در حل مسائل علم الکترومغناطیس و همچنین مدل سازی انواع فرایندهای فیزیکی مورد استفاده قرار گرفتند.

سیستم های خطی گسسته زمانی کسری یک بعدی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\Delta^\alpha x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \quad i \in Z_+, \quad 0 < \alpha < 1$$

که در آن $x_i \in R^n$ بردار حالت، $u_i \in R^m$ بردار ورودی، $A \in R^{n \times n}$ ، $B \in R^{n \times m}$ ماتریس های ثابتی هستند که جزو مفروضات مساله می باشند و $\Delta^\alpha x_i$ نماد تفاضل کسری می باشد.

^۲Liouville

^۳Riemann

۱.۳.۳ معادلات فضای حالت دو بعدی کسری و جواب های آن ها

تعریف ۱.۳.۳. تفاضل کسری افقی از مرتبه α برای تابع دو بعدی $x(i, j)$ ، $i, j \in Z_+$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta_{\alpha}^h x(i, j) = \sum_{k=0}^i c_{\alpha}(k) x(i-k, j) \quad (17.3)$$

که در آن $\alpha \in R, n-1 < \alpha < n (n \in N)$ و

$$c_{\alpha}(k) = \begin{cases} 1 & \text{for } k = 0 \\ (-1)^k \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)/k! & \text{for } k > 0 \end{cases} \quad (18.3)$$

تعریف ۲.۳.۳

تفاضل کسری عمودی از مرتبه β برای تابع دو بعدی $x(i, j)$ ، $i, j \in Z_+$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta_{\beta}^v x(i, j) = \sum_{l=0}^j c_{\beta}(l) x(i, j-l) \quad (19.3)$$

که در آن $\beta \in R, n-1 < \beta < n (n \in N)$ و

$$c_{\beta}(l) = \begin{cases} 1 & \text{for } l = 0 \\ (-1)^l \beta(\beta-1)\dots(\beta-l+1)/l! & \text{for } l > 0 \end{cases} \quad (20.3)$$

لم ۳.۳.۳. اگر $0 < \alpha < 1$ و $0 < \beta < 1$ آنگاه [۳]

$$c_{\alpha}(k) < 0 \quad (c_{\beta}(k) < 0) \quad k = 1, 2, \dots \quad (21.3)$$

سیستم خطی دو بعدی کسری را با استفاده از مدل راسر به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{\alpha}^h x^h(i+1, j) \\ \Delta_{\beta}^v x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j) \quad (22.3)$$

$$y(i, j) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Du(i, j) \quad i, j \in Z_+ \quad (23.3)$$

که در آن $x^h(i, j) \in R^{n_1}$ و $x^v(i, j) \in R^{n_2}$ به ترتیب بردارهای حالت عمودی و افقی سیستم در نقطه (i, j) هستند، $u(i, j) \in R^m$ بردار ورودی، $y(i, j) \in R^p$ بردار خروجی و $A_{11} \in R^{n_1 \times n_1}$ ، $A_{12} \in R^{n_1 \times n_2}$ ، $A_{21} \in R^{n_2 \times n_1}$ ، $A_{22} \in R^{n_2 \times n_2}$ ، $B_1 \in R^{n_1 \times m}$ ، $B_2 \in R^{n_2 \times m}$ ، $C_1 \in R^{p \times n_1}$ ، $C_2 \in R^{p \times n_2}$ ، $D \in R^{p \times m}$ ماتریس های ثابتی هستند که جزو مفروضات مساله می باشند.

با استفاده از تعاریف (۱۷.۳) و (۱۹.۳) می توانیم رابطه (۲۲.۳) را به صورت زیر بنویسیم

:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j) - \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{i+1} c_{\alpha}(l) x^h(i-k+1, j) \\ \sum_{l=2}^{j+1} c_{\beta}(l) x^v(i, j-l+1) \end{bmatrix} \quad (24.3)$$

که در آن $\bar{A}_{11} = A_{11} + \alpha I_{n_1}$ و $\bar{A}_{22} = A_{22} + \beta I_{n_2}$.

از آنجا که در مسائل عملی می توانیم فرض کنیم k و l کراندارند بنابراین فرض می کنیم L_1 و L_2 اعداد طبیعی باشند که به عنوان کران های بالای k و l در نظر می گیریم پس می توانیم رابطه (۲۴.۳) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j) - \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{L_1+1} c_{\alpha}(l) x^h(i-k+1, j) \\ \sum_{l=2}^{L_2+1} c_{\beta}(l) x^v(i, j-l+1) \end{bmatrix} \quad (25.3)$$

شرایط مرزی برای (۲۵.۳) به صورت زیر بیان می شود:

$$x^h(\cdot, j) \quad (j \in Z_+), \quad x^v(\cdot, i) \quad (i \in Z_+) \quad (26.3)$$

۲.۳.۳ سیستم های کسری دوبعدی مثبت توصیف شده توسط مدل راسر

تعریف ۴.۳.۳. سیستم (۲۲.۳)-(۲۳.۳) مثبت است اگر و تنها اگر برای هر شرط مرزی

$$x^v(i, j) \in R_+^{n_2} \quad (i, j \in Z_+) : \text{باشیم} \quad x^v(i, \cdot) \in R_+^{n_2} \quad i \in Z_+ \text{ و } x^h(\cdot, j) \in R_+^{n_1} \quad j \in Z_+$$

$$, \quad x^h(i, j) \in R_+^{n_1} \text{ و } y(i, j) \in R_+^p \quad (i, j \in Z_+) \text{ و همچنین } u(i, j) \in R_+^m \quad (i, j \in Z_+).$$

قضیه ۵.۳.۳. سیستم دو بعدی (۲۴.۳) برای $0 < \alpha \leq 1$ و $0 < \beta \leq 1$ مثبت است اگر و تنها اگر

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \in R_+^{n \times n}, \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \in R_+^{n \times m}, \quad [C_1 \ C_2] \in R_+^{p \times n}, \quad D \in R_+^{p \times m},$$

اثبات. (لزوم) فرض کنید سیستم (۲۴.۳) مثبت باشد و داشته باشیم $u(i, j) = 0 \quad (i, j \in Z_+)$ ،

در این حالت $x_i^v = 0, i \in Z_+$ و $x^h(\cdot, 1) \in e_{n_1}^k$ ، که نشان دهنده k امین ستون I_{n_1} می باشد. در این حالت

از (۲۴.۳) می توان نتیجه گرفت: $x^h(1, 1) = \bar{A}_{11}x^h(\cdot, 1) = \bar{A}_{11}^{(k)} \in R_+^{n_1}$ که در آن $\bar{A}_{11}^{(k)}$ نشان

دهنده k امین ستون ماتریس $\bar{A}_{11}$ است بنابراین برای $k = 1, 2, \dots, n_1$ داریم $\bar{A}_{11} \in R_+^{n_1}$. بافرض

این که $x^h(\cdot, j) = 0 \quad j \in Z_+$ ، $u(i, j) = 0 \quad i, j \in Z_+$ و $x^v(\cdot, 1) = e_{n_2}^{(k)}$ ، که در آن k امین

ستون ماتریس I_{n_2} است بنابراین می توان نتیجه گرفت $A_{12}x^v(\cdot, 1) = A_{12}^{(k)}$ که در

آن $A_{12}^{(k)}$ ، k امین ستون ماتریس A_{12} می باشد، در اینصورت نتیجه می گیریم $A_{12} \in R_+^{n_1 \times n_2}$.

به همین ترتیب می توان نشان داد $A_{21} \in R_+^{n_2 \times n_1}$ و $\bar{A}_{22} \in R_+^{n_2 \times n_2}$.

حال با فرض این که شرایط مرزی صفرند یعنی $x^h(\cdot, j) = 0 \quad j \in Z_+$ ، $x^v(i, \cdot) = 0 \quad i \in Z_+$ و $u(\cdot, 1) = e_m^{(k)}$ ، k امین ستون ماتریس I_m است) بنابراین خواهیم داشت $x^h(1, 1) = e_m^{(k)}$ ، $B_1 u(\cdot, 1) = B_1^{(k)} \in R_+^{n_1}$ که k امین ستون ماتریس B_1 است. این بدان معنی است که $B_1 \in R_+^{n_1 \times m}$. بطور مشابه می توان نشان داد که $B_2 \in R_+^{n_2 \times m}$ ، $C_1 \in R^{p \times n_1}$ ، $C_2 \in R^{p \times n_2}$ و $D \in R^{p \times m}$.

(کفایت) طبق لم (۳.۳.۳) برای $(k = 1, 2, \dots)$ داریم $c_\alpha(k) < 0$ ($0 < \alpha \leq 1$) و برای $(l = 1, 2, \dots)$ خواهیم داشت $c_\beta(l) < 0$ ($0 < \beta \leq 1$) . طبق مفروضات گفته شده و همچنین با استفاده از [۴] به ازای شرایط اولیه $x^v(i, \cdot) \in R_+^{n_2}$ و $x^h(\cdot, j) \in R_+^{n_1}$ $j \in Z_+$ و $x^v(i, j) \in R_+^{n_2}$ ، $x^h(i, j) \in R_+^{n_1}$ $i, j \in Z_+$ بوضوح خواهیم داشت: $u(i, j) \in R_+^m$ $i, j \in Z_+$. از (۲۳.۳) داریم $y(i, j) \in R_+^p$ $i, j \in Z_+$ زیرا $u(i, j) \in R_+^m$ ، $x^v(i, j) \in R_+^{n_2}$ ، $x^h(i, j) \in R_+^{n_1}$ و $i, j \in Z_+$. $D \in R_+^{p \times m}$ ، $C_2 \in R_+^{p \times n_2}$ ، $C_1 \in R_+^{p \times n_1}$ و $R_+^{n_1}$ $i, j \in Z_+$

حال برای تکمیل موضوع مورد بحث به ترتیب به بیان دو مثال عددی از مدل راسر و سیستم کسری می پردازیم:

مثال . نمونه ای از سیستم دوبعدی توصیف شده توسط مدل راسر را به صورت زیر ملاحظه می کنیم:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 & \vdots & 0.6 \\ 0 & 1 & \vdots & 1.25 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0.8 & 1 & \vdots & 1.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.2 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} u(i, j)$$

در این مثال همانطور که ملاحظه می شود ماتریس A_{11} یک ماتریس 2×2 ، A_{12} یک ماتریس 2×1 ، A_{21} یک ماتریس 1×2 و A_{22} یک ماتریس 2×2 می باشد. همچنین B_1 و B_2 به ترتیب ماتریس هایی با ابعاد 2×1 و یک ماتریس 1×1 می باشند.

مثال . نمونه ای از مدل راسر کسری را برای $\alpha = ۰.۴$ ، $\beta = ۰.۵$ به صورت زیر ملاحظه می کنید:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{\alpha}^h x^h(i+1, j) \\ \Delta_{\beta}^v x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j)$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -۰.۵ & -۰.۱ \\ ۰.۱ & ۰.۱ \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} -۰.۱ & -۰.۱ \\ ۰.۲ & ۰.۱ \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} -۰.۳ & -۰.۱ \\ ۰.۲ & ۰.۱ \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} -۱ & -۰.۱ \\ ۰.۴ & ۰.۱ \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -۰.۲ \\ ۰.۱ \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -۰.۳ \\ ۰.۲ \end{bmatrix}$$

همانطور که می بینیم ابعاد زیر ماتریس ها بخوبی نمایان است و همچنین تفاضل کسری در دو بعد عمودی و افقی گسترش یافته است.

فصل ۴

پایداری سیستم های خطی دو بعدی توصیف شده توسط مدل راسر

۳.۰.۴ شرایط پایداری سیستم های دوبعدی توصیف شده توسط مدل راسر

مدل راسر دو بعدی برای سیستم های گسسته به صورت زیر توصیف می شود:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j) \quad (1.4)$$

که در آن $B_1 \in R^{n_1 \times m}$, $A_{22} \in R^{n_2 \times n_2}$, $A_{21} \in R^{n_2 \times n_1}$, $A_{12} \in R^{n_1 \times n_2}$, $A_{11} \in R^{n_1 \times n_1}$

$B_2 \in R^{n_2 \times m}$ ماتریس های حقیقی ثابت داده شده با ابعاد مناسب هستند. شرایط مرزی برای

(۱.۴) به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{cases} x^h(\cdot, j) = x^h_*(j) & \forall j \in N \\ x^v(i, \cdot) = x^v_*(i) & \forall i \in N \end{cases} \quad (2.4)$$

تعریف ۶.۰.۴. سیستم (۱.۴) با ورودی صفر $u = 0$ مثبت نامیده می شود اگر و تنها اگر برای

هر شرط مرزی نامنفی داده شده $x^h(\cdot, j) \geq 0$ و $x^v(i, \cdot) \geq 0$ نتیجه بگیریم حالت های نتیجه

شده نیز نامنفی هستند یعنی داشته باشیم $x(i, j) \geq 0 \quad \forall i, j \in N$.

همچنین تعریف دیگری برای سیستم های مثبت داریم که به صورت زیر بیان می شود:

گزاره ۷.۰.۴. سیستم (۱.۴) با ورودی $u = 0$ یک سیستم مثبت است اگر و تنها اگر همه

مولفه های ماتریس $A := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ نامنفی باشد (۵) $[A \geq 0]$.

یک شرط مهم برای پایداری مجانبی مدل راسر در حالت کلی می تواند به صورت زیر

مطرح شود:

لم ۸.۰.۴. فرض کنید $A_{22} \in R^{n_2 \times n_2}$, $A_{21} \in R^{n_1 \times n_1}$, $A_{12} \in R^{n_1 \times n_2}$, $A_{11} \in R^{n_1 \times n_1}$ ماتریس

های حقیقی ثابت داده شده باشند بنابراین سیستم دو بعدی توصیف شده توسط مدل راسر

(۱.۴) با $u = 0$ پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشد [۶]

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} I_{n_1} - z_1 A_{11} & -z_1 A_{12} \\ -z_2 A_{21} & I_{n_2} - z_2 A_{22} \end{pmatrix} \neq 0 \\ \forall (z_1, z_2) \in \{(z_1, z_2) : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\} \end{cases} \quad (3.4)$$

هدف بررسی قانون پس خورد حالت $u(i, j) = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}$ است به قسمی

که سیستم حلقه بسته $\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1 K_1 & A_{12} + B_1 K_2 \\ A_{21} + B_2 K_1 & A_{22} + B_2 K_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}$ مثبت و

پایدار مجانبی باشد. در این قسمت نتایج پایداری اولیه برای سیستم دو بعدی خطی توصیف

شده توسط مدل راسر

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

فراهم می کنیم در حقیقت می خواهیم نشان دهیم پایداری مجانبی سیستم (۴.۴) تحت

محدودیت های مثبت) هم ارز پایداری مجانبی سیستم یک بعدی گسسته زمانی زیر است

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(k) \quad (5.4)$$

تعریف زیر را برای سیستم های یک بعدی داریم:

تعریف ۹.۰.۴. سیستم (۵.۴) مثبت نامیده می شود اگر برای هر شرط اولیه نامنفی داده شده

$$\forall i \in N, \quad x(i) \geq 0 \quad \text{نتیجه شود} \quad x(0) \geq 0.$$

بدیهی است که مثبتی سیستم (۵.۴) را به صورت زیر نیز می توان بیان کرد:

گزاره ۱۰.۰.۴. سیستم (۵.۴) یک سیستم مثبت است اگر و تنها اگر همه مولفه های ماتریس

$$A := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{نامنفی باشند} \quad (A \geq 0). \quad [5]$$

حال یادآوری می کنیم شعاع طیفی $\rho(M)$ از ماتریس $M \in R^{n \times n}$ به صورت زیر تعریف

می شود:

$$\rho(M) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$$

که در آن $\lambda_n, \dots, \lambda_1$ مقادیر ویژه ماتریس M هستند. همچنین برای یک ماتریس مختلط

$$N = [n_{ij}] \quad \text{ماتریس حقیقی} \quad |N| \quad \text{را به صورت مولفه ای} \quad |n_{ij}| \quad \text{نمایش می دهیم.}$$

لم ۱۱.۰.۴. فرض کنید M یک ماتریس حقیقی و N یک ماتریس مختلط باشد به قسمی که

$$|N| \leq M \quad (M \leq |N|) \quad \text{یک ماتریس نامنفی است در این صورت خواهیم داشت} \quad [7]$$

$$\rho(N) \leq \rho(M)$$

لم ۱۲.۰.۴. فرض کنید ماتریس های $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ ماتریس های حقیقی ثابت باشند(یا

بطور معادل سیستم (۵.۴) مثبت باشد) در این صورت عبارات زیر هم ارزند :

(۱) سیستم یک بعدی توصیف شده توسط (۵.۴) پایدار مجانبی است.

$$\rho\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right) < 1 \quad (2)$$

(۳) بردار $d \in R^{n_1+n_2}$ وجود دارد به قسمی که [۸]

$$\begin{bmatrix} A_{11} - I_{n_1} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix} d < 0, \quad d > 0$$

حال به بیان قضیه ای در خصوص شرط لازم و کافی برای پایداری مجانبی سیستم مثبت دو بعدی با استفاده از مدل راسر (۴.۴) می پردازیم.

قضیه ۴.۱۳.۰۴. با فرض این که سیستم (۴.۴) مثبت است یا بطور هم ارز ماتریس های A_{11} , A_{12} , A_{21} و A_{22} نامنفی هستند عبارات زیر معادلند:

$$۱) \begin{cases} \det \begin{bmatrix} I_{n_1} - z_1 A_{11} & -z_1 A_{12} \\ -z_2 A_{21} & I_{n_2} - z_2 A_{22} \end{bmatrix} \neq 0 \\ \forall (z_1, z_2) \in \{(z_1, z_2) : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\} \end{cases} \quad (۶.۴)$$

$$۲) \rho \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} < 1$$

اثبات. (۲) $\Rightarrow$ (۱) با قرار دادن $z_1 = z_2 = z$ در شرط (۱)، بدیهی است

$$\det(I - z \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}) \neq 0, |z| \leq 1 \quad (۷.۴)$$

که در واقع هم ارز شرط (۲) می باشد.

(۱) $\Rightarrow$ (۲) فرض کنید z_1 و z_2 هر عدد مختلط اختیاری باشند به قسمی که $|z_1| \leq 1$ و

$|z_2| \leq 1$ در این صورت بوضوح خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} |z_1 A_{11}| & |z_1 A_{12}| \\ |z_2 A_{21}| & |z_2 A_{22}| \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

با استفاده از خواص طیفی داده شده در لم (۴.۱۱.۰۴) رابطه زیر را نتیجه می گیریم

$$\rho \begin{bmatrix} z_1 A_{11} & z_1 A_{12} \\ z_2 A_{21} & z_2 A_{22} \end{bmatrix} \leq \rho \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} < 1$$

چون z_1 و z_2 اعداد مختلط اختیاری با قدر مطلق کمتر یا مساوی یک هستند نامساوی بالا بر درستی رابطه (۱) دلالت دارد و اثبات کامل است [۵] بنابراین نتیجه زیر را خواهیم داشت:

نتیجه ۱۴.۰.۴. عبارات زیر معادلند:

- (۱) سیستم دو بعدی توصیف شده توسط مدل راسر (۴.۴) مثبت و پایدار مجانبی است.
- (۲) سیستم یک بعدی توصیف شده توسط (۵.۴) مثبت و پایدار مجانبی است.
- (۳) ماتریس های $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ نامنفی هستند و بردار $d \in R^{n_1 \times n_2}$ وجود دارد به قسمی که:

$$\begin{bmatrix} A_{11} - I_{n_1} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix} d < 0, \quad d > 0$$

اثبات. هم ارزی (۳) $\iff$ (۲) به سادگی با استفاده از لم ۱۲.۰.۴ نتیجه می شود. و اثبات در صورتی کامل می شود که نشان دهیم (۳) $\iff$ (۱).

(۳) $\implies$ (۱) ابتدا با استفاده گزاره (۱۰.۰.۴) واضح است که $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ نامنفی

هستند حال با توجه به لم (۸.۰.۴) واضح است که پایداری مجانبی سیستم (۴.۴) هم ارز

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} I_{n_1} - z_1 A_{11} & -z_1 A_{12} \\ -z_2 A_{21} & I_{n_2} - z_2 A_{22} \end{pmatrix} \neq 0 \\ \forall (z_1, z_2) \in \{(z_1, z_2) : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\} \end{cases} \quad (۸.۴)$$

که با استفاده از قضیه (۱۳.۰.۴) هم ارز

$$\rho \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} < 1$$

سرانجام با استفاده از لم (۱۲.۰.۴) می توان (۳) را نتیجه گرفت.

برعکس برای نشان دادن (۱) $\implies$ (۳) با استفاده از گزاره (۷.۰.۴) سپس لم (۱۲.۰.۴) و

قضیه (۱۳.۰.۴) و سرانجام لم (۸.۰.۴) می توان نتیجه دلخواه را بدست آورد [۵].

حال به بررسی قانون کنترل $u(i, j) = K \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}$ می پردازیم. این قانون کنترل باید به گونه ای طراحی شود که مثبتی و پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته را فراهم کند. حال سیستم حلقه بسته مدل راسر زیر را مشاهده کنید:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = (A + BK) \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

$$x^h(\bullet, j) = x^h(j), \quad \forall j \in N$$

$$x^v(i, \bullet) = x^v(j), \quad \forall i \in N$$

که در آن $A := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ و $B := \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ شامل هر ماتریس حقیقی دلخواه داده شده می باشد.

حال به بررسی نتیجه اصلی این بخش می پردازیم.

قضیه ۱۵.۰.۴. سیستم راسر حلقه بسته (۹.۴) برای هر شرط اولیه مرزی نامنفی مثبت و پایدار مجانبی است، اگر و تنها اگر $n+1$ بردار $d = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n]^T \in R^n$ و $y_1, \dots, y_n \in R^m$ موجود باشند به قسمی که

$$\begin{cases} (A - I_n)d + B(\sum_{i=1}^n y_i) < \bullet, \\ d > \bullet, \\ a_{ij} d_j + b_i y_j < \bullet, \quad 1 \leq i, j \leq n, \end{cases} \quad (10.4)$$

که در آن $B^T = [b_1^T \ \dots \ b_n^T]$ ، $A = [a_{ij}]$ و $n = n_1 + n_2$ و سرانجام ماتریس پس خورد حالت K به صورت زیر محاسبه می شود:

$$K = [d_1^{-1} y_1 \ \dots \ d_n^{-1} y_n]. \quad (11.4)$$

اثبات . فرض کنید شرط (۱۰.۴) برقرار باشد و ماتریس تخصیص K را به صورت $K = [k_1, \dots, k_n]$ با ستون های ساخته شده به صورت $k_i = d_i^{-1} y_i$ برای $i = 1, \dots, n$ تعریف کنید .

حال با این ساختار به راحتی می بینیم که $A + BK$ یک ماتریس نامنفی است.

از نامساوی های اخیر در شرط (۱۰.۴) برای $i, j = 1, \dots, n$

خواهیم داشت:

$$0 \leq (a_{ij}d_j + b_i y_j) d_j^{-1} = a_{ij} + b_i k_j = (A + BK)_{ij}$$

حال به بحث پایداری مجانبی تحت قانون کنترل $u(i, j) = K \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}$ می پردازیم.

با استفاده از روابط بالا نتیجه می گیریم $BKd = B (\sum_{i=1}^n y_i)$ و با تلفیق این رابطه با رابطه

(۱۰.۴) نتیجه می گیریم $d(A + BK - I_n) < 0$. حال از آنجا که $d > 0$ و ماتریس $(A + BK)$

یک ماتریس نامنفی است بنابراین با استفاده از گزاره (۱۰.۰.۴) نتیجه می گیریم سیستم دو

بعدی حلقه بسته توصیف شده توسط مدل راسر (۹.۴) مثبت و پایدار مجانبی است بنابراین

اثبات کامل است [۵].

حال نشان می دهیم پایداری سیستم های دو بعدی را از دیدگاه برنامه ریزی خطی نیز

می توان بررسی نمود.

قضیه ۱۶.۰.۴. عبارات زیر معادلند:

(۱) یک قانون پس خورد حالت مثبت $u = K \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} \geq 0$ موجود است به قسمی که

سیستم حلقه بسته راسر (۹.۴) برای هر شرط اولیه مرزی مثبت و پایدار مجانبی است.

(۲) یک ماتریس $K \in R^{m \times n}$ موجود است به قسمی که $K \geq 0$ و $A + BK$ یک ماتریس

شور نامنفی است ($\rho(A + BK) < 1$)

(۳) مساله LP زیر با متغیرهای $d = [d_1 \dots d_n]^T \in R^n$ و $y_1 \dots y_n \in R^m$ شدنی است.

$$\begin{cases} (A - I_n)d + B(\sum_{i=1}^n y_i) < 0 \\ d > 0 \\ a_{ij} d_j + b_i y_j < 0, 1 \leq i, j \leq n \end{cases} \quad (12.4)$$

که در آن $A = [a_{ij}]$, $B^T = [b_1^T \dots b_n^T]$ و $n = n_1 + n_2$. سرانجام ماتریس پس خورد حالت K به صورت زیر محاسبه می شود:

$$K = [d_1^{-1} y_1 \dots d_n^{-1} y_n] \quad (13.4)$$

که در آن d و $y_1, \dots, y_n$ هر جواب شدنی دلخواه از مساله LP بالا می باشند [۵].

۴.۰.۴ پایداری سیستم کسری توصیف شده توسط مدل راسر

سیستم خطی دو بعدی کسری را با استفاده از مدل راسر به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{bmatrix} \Delta_\alpha^h x_{i+1,j}^h \\ \Delta_\beta^v x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{ij} \quad (14.4)$$

$$y_{ij} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{bmatrix} + D u_{ij} \quad i, j \in Z_+ \quad (15.4)$$

قضیه ۱۷.۰.۴. مدل راسر مثبت

$$\begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{bmatrix} \quad (16.4)$$

پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط معادل زیر برقرار باشند:

(۱) سیستم یک بعدی

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x_i \quad (17.4)$$

پایدار مجانبی است.

(۲) یک بردار اکیدا مثبت $\lambda \in R_+^n$ ($n = n_1 + n_2$) موجود باشد به قسمی که داشته باشیم [۹]:

$$\begin{bmatrix} A_{11} - I_{n_1} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix} \lambda < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18.4)$$

لم ۱۸.۰.۴. اگر $n - 1 < \alpha < n$ ($n \in N$) $n - 1 < \beta < n$ آنگاه

$$\sum_{k=\bullet}^{\infty} c_{\alpha}(k) = o \quad \left(\sum_{k=\bullet}^{\infty} c_{\beta}(k) = o \right) \quad (19.4)$$

اثبات. اگر از بسط سری تیلور تابع $(1-z)^{\alpha}$ استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$(1-z)^{\alpha} = \sum_{k=\bullet}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} z^k \quad (20.4)$$

حال با فرض $z = 1$ در رابطه (۲۰.۴) خواهیم داشت:

$$\sum_{k=\bullet}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \sum_{k=\bullet}^{\infty} c_{\alpha}(k) = o$$

حال مدل راسر کسری مثبت (۲۴.۳) با پس خورد حالت زیر را ملاحظه کنید:

$$u(i, j) = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} \quad (21.4)$$

که در آن $K = [K_1 \quad K_2] \in R^{m \times n}$, $K_j \in R^{m \times n_j}$, $j = 1, 2$, ماتریس پس خورد حالت است.

ماتریس K را باید به گونه ای بیابیم که سیستم حلقه بسته

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + B_1 K_1 & A_{12} + B_1 K_2 \\ A_{21} + B_2 K_1 & \bar{A}_{22} + B_2 K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{i+1} c_\alpha(l) x^h(i-k+1, j) \\ \sum_{l=2}^{j+1} c_\beta(l) x^v(i, j-l+1) \end{bmatrix} \quad (22.4)$$

مثبت و پایدار مجانبی شود.

قضیه ۱۹.۰.۴. سیستم حلقه بسته کسری مثبت (۲۲.۴) مثبت و پایدار مجانبی است اگر و

تنها اگر یک ماتریس بلوکی قطری

$$\begin{cases} \Lambda = \text{blockdiag}[\Lambda_1, \Lambda_2] \\ \Lambda_k = \text{diag}[\Lambda_{k1}, \dots, \Lambda_{kn_k}] \\ \Lambda_{kj} > 0 \end{cases} \quad (23.4)$$

که در آن $k = 1, 2$ و $j = 1, \dots, n_k$ ، همچنین یک ماتریس حقیقی

$$D = [D_1 \quad D_2], \quad D_k \in R^{m \times n_k}, \quad k = 1, 2 \quad (24.4)$$

موجود باشد به قسمی که شرایط زیر برقرار باشند:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11}\Lambda_1 + B_1 D_1 & A_{12}\Lambda_2 + B_1 D_2 \\ A_{21}\Lambda_1 + B_2 D_1 & \bar{A}_{22}\Lambda_2 + B_2 D_2 \end{bmatrix} \in R_+^{n \times n} \quad (25.4)$$

و

$$\begin{bmatrix} A_{11}\Lambda_1 + B_1 D_1 & A_{12}\Lambda_2 + B_1 D_2 \\ A_{21}\Lambda_1 + B_2 D_1 & A_{22}\Lambda_2 + B_2 D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{n_1} \\ 1_{n_2} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26.4)$$

که در آن $1_{n_k} = [1 \dots 1]^T \in R_+^{n_k}$ و $k = 1, 2$ (T نشان دهنده ترانهاد ماتریس می باشد.) با

این مفروضات ماتریس پس خورد حالت به صورت زیر بدست می آید:

$$K = [K_1 \quad K_2] = [D_1 \Lambda_1^{-1} \quad D_2 \Lambda_2^{-1}] \quad (27.4)$$

اثبات . ابتدا باید نشان دهیم سیستم حلقه بسته مثبت است اگر و تنها اگر شرط (۲۵.۴) برقرار باشد. با استفاده از (۲۲.۴) و (۲۷.۴) داریم

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + B_1 D_1 \Lambda_1^{-1} & A_{12} + B_1 D_2 \Lambda_2^{-1} \\ A_{21} + B_2 D_1 \Lambda_1^{-1} & \bar{A}_{22} + B_2 D_2 \Lambda_2^{-1} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} \Lambda_1 + B_1 D_1 & A_{12} \Lambda_2 + B_1 D_2 \\ A_{21} \Lambda_1 + B_2 D_1 & \bar{A}_{22} \Lambda_2 + B_2 D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Lambda_1^{-1} & o \\ o & \Lambda_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (28.4)$$

با توجه به رابطه (۲۸.۴) و قضیه (۵.۳.۳) واضح است که سیستم حلقه بسته (۲۲.۴) مثبت است اگر و تنها اگر شرط (۲۵.۴) صادق باشد. حال با توجه به اینکه $c_\alpha(o) = c_\beta(o) = 1$ و $c_\alpha(1) = -\alpha$, $c_\beta(1) = -\beta$ خواهیم داشت

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_\alpha(k) = \alpha - 1, \quad \sum_{k=2}^{\infty} c_\beta(k) = \beta - 1 \quad (29.4)$$

به عنوان یک اصل واضح [۱۰، ۱۱] می دانیم که پایداری مجانبی سیستم خطی گسسته زمانی مثبت با تاخیرات مستقل از تعداد و مقدار تاخیرات است و تنها وابسته به جمع ماتریس های حالت است. بنابراین سیستم حلقه بسته مثبت (۲.۴) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر سیستم یک بعدی مثبت با ماتریس

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + B_1 K_1 & A_{12} + B_1 K_2 \\ A_{21} + B_2 K_1 & \bar{A}_{22} + B_2 K_2 \end{bmatrix} - \sum_{k=2}^{\infty} \begin{bmatrix} I_{n_1} c_\alpha(k) & o \\ o & I_{n_2} c_\beta(k) \end{bmatrix} \quad (30.4)$$

پایدار مجانبی است.

با استفاده از رابطه (۲۹.۴) عبارت $\bar{A}_{11} = A_{11} + I_{n_1} \alpha$ و $\bar{A}_{22} = A_{22} + I_{n_2} \beta$ را خواهیم داشت

بنابراین می توانیم ماتریس (۳۰.۴) را به فرم زیر بنویسیم

$$\begin{bmatrix} A_{11} + I_{n_1} + B_1 K_1 & A_{12} + B_1 K_2 \\ A_{21} + B_2 K_1 & A_{22} + I_{n_2} + B_2 K_2 \end{bmatrix} \quad (31.4)$$

با استفاده از قضیه (۱۷.۰.۴)، می دانیم که سیستم حلقه بسته (۲۲.۴) پایدار مجانبی است

اگر و تنها اگر یک بردار اکیدا مثبت $\lambda = [\lambda_1^T, \lambda_2^T] \in R_+^n$ موجود باشد به قسمی که

$$\begin{bmatrix} A_{11} + B_1 K_1 & A_{12} + B_1 K_2 \\ A_{21} + B_2 K_1 & A_{22} + B_2 K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32.4)$$

با قرار دادن $\lambda_k = \Lambda_k \mathbf{1}_k$ ، $k = 1, 2$ و با استفاده از (۲۷.۴) و (۳۲.۴) روابط زیر را خواهیم

داشت:

$$\begin{bmatrix} A_{11} + B_1 K_1 & A_{12} + B_1 K_2 \\ A_{21} + B_2 K_1 & A_{22} + B_2 K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1 D_1 \Lambda_1^{-1} & A_{12} + B_1 D_2 \Lambda_2^{-1} \\ A_{21} + B_2 D_1 \Lambda_1^{-1} & A_{22} + B_2 D_2 \Lambda_2^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1} \\ \mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} \Lambda_1 + B_1 D_1 & A_{12} \Lambda_2 + B_1 D_2 \\ A_{21} \Lambda_1 + B_2 D_1 & A_{22} \Lambda_2 + B_2 D_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1} \\ \mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33.4)$$

بنابراین سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر شرط (۲۶.۴) برقرار باشد.

حال به بیان قضیه ای در باب ناپایداری سیستم های کسری می پردازیم

قضیه ۲۰.۰.۴. مدل راسر کسری مثبت ناپایدار است اگر و تنها اگر حداقل یکی از درایه های

قطری ماتریس $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ مثبت باشد.

اثبات . اگر در رابطه (۳۱.۴) قرار دهیم $K_1 = 0$ و $K_2 = 0$ ، رابطه (۳۱.۴) به فرم زیر تبدیل

می شود

$$\begin{bmatrix} A_{11} + I_{n_1} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} + I_{n_2} \end{bmatrix} \quad (34.4)$$

اگر حداقل یکی از درایه های قطری ماتریس A مثبت باشد آنوقت حداقل یکی از درایه

های قطری ماتریس (۳۴.۴) بزرگتر از یک است و این یعنی مدل راسر کسری ناپایدار است

[۱۲].

مثال . مدل راسر کسری داده شده زیر را برای $\alpha = ۰.۴$ و $\beta = ۰.۵$ در نظر بگیرید:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -۰.۵ & -۰.۱ \\ ۰.۱ & ۰.۱ \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} -۰.۱ & -۰.۱ \\ ۰.۲ & ۰.۱ \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} -۰.۳ & -۰.۱ \\ ۰.۲ & ۰.۱ \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} -۱ & -۰.۱ \\ ۰.۴ & ۰.۱ \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -۰.۲ \\ ۰.۱ \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -۰.۳ \\ ۰.۲ \end{bmatrix} \quad (۳۵.۴)$$

هدف بدست آوردن ماتریس پس خورد $K = [K_1, K_2]$ ، $K_p \in R^{1 \times 2}$ ، $p = 1, 2$ است به قسمی که سیستم حلقه بسته مثبت و پایدار مجانبی باشد.

مدل راسر کسری (۳۵.۴) مثبت نیست زیرا ماتریس

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰.۵ & -۰.۱ & -۰.۱ & -۰.۱ \\ ۰.۱ & ۰.۴۱ & ۰.۲ & ۰.۱ \\ -۰.۳ & -۰.۱ & -۰.۵ & -۰.۱ \\ ۰.۲ & ۰.۱ & ۰.۴ & ۰.۶ \end{bmatrix}$$

و ماتریس های B_1 ، B_2 درایه های منفی دارند همچنین این سیستم ناپایدار است زیرا ماتریس

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰.۵ & -۰.۱ & -۰.۱ & -۰.۱ \\ ۰.۱ & ۰.۱ & ۰.۲ & ۰.۱ \\ -۰.۳ & -۰.۱ & -۱ & -۰.۱ \\ ۰.۲ & ۰.۱ & ۰.۴ & ۰.۱ \end{bmatrix}$$

دو درایه قطری نامنفی دارد.

حال طبق الگوریتم داریم:

گام (۱) با انتخاب

$$\Lambda = \text{blockdiag}[\Lambda_1, \Lambda_2]$$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} ۰.۴ & ۰ \\ ۰ & ۰.۴ \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} ۰.۲ & ۰ \\ ۰ & ۰.۳ \end{bmatrix}$$

$$D = [D_1, D_2], \quad D_1 = D_2 = [-0.4 \quad -0.2]$$

شرایط (۲۵.۴) و (۲۶.۴) صادق است زیرا

$$\bar{A}_{11}\Lambda_1 + B_1D_1 = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.144 \end{bmatrix}, \quad A_{11}\Lambda_2 + B_1D_2 = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.01 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}\Lambda_1 + B_2D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{22}\Lambda_2 + B_2D_2 = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.03 \\ 0 & 0.14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}\Lambda_1 + B_1D_1 & A_{12}\Lambda_2 + B_1D_2 \\ A_{21}\Lambda_1 + B_2D_1 & A_{22}\Lambda_2 + B_2D_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1_{n_1} \\ 1_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.05 \\ -0.006 \\ -0.03 \\ -0.01 \end{bmatrix}$$

گام ۲. از (۲۴.۴) ماتریس پس خورد حالت $K = [K_1, K_2]$ را به صورت زیر بدست می آوریم

$$K_1 = [-0.4 \quad -0.2] \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix} = [-1 \quad -0.5]$$

$$K_2 = [-0.4 \quad -0.2] \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3.33 \end{bmatrix} = [-2 \quad -0.67]$$

سیستم حلقه بسته مثبت است زیرا

$$\bar{A}_{11} + B_1K_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.36 \end{bmatrix}, \quad A_{11} + B_1K_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.33 \\ 0 & 0.33 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} + B_2K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{22} + B_2K_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.467 \end{bmatrix}$$

همه درایه هایش نامنفی است.

سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی است زیرا تمام ضرایب چند جمله ای کاراکتری

$$\det \begin{bmatrix} I_{n_1} - (A_{11} + B_1K_1) & -(A_{12} + B_1K_2) \\ -(A_{21} + B_2K_1) & I_{n_2}z - (A_{22} + B_2K_2) \end{bmatrix} = z^4 + 0.773z^3 + 0.173z^2 + 0.01z + 0.002$$

همگی مثبت هستند [۹].

فصل ۵

روشی نو جهت تعیین ماتریس پس خورد حالت سیستم خطی دوبعدی راسر

تاکنون روش های گوناگونی برای بدست آوردن ماتریس پس خورد حالت یافت شده است، دو نمونه از این روش ها که یکی استفاده از ابزار LP و دیگری استفاده از مقادیر ویژه و ماتریس های قطری است در فصل چهارم به طور مفصل مورد بحث قرار گرفت. نمونه های دیگری نیز در مراجع [۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶] به طور مفصل بحث شده اند، در ادامه این قسمت به بیان روش جدیدی در این زمینه می پردازیم.

معادله حالت سیستم را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

در صورتی که سیستم کنترل پذیر باشد اصطلاحاً می گویند که زوج (A, B) کنترل پذیر است. فرض بر این است که A یک ماتریس مربعی $n \times n$ و B یک ماتریس با بعد $n \times m$ است، ماتریس A می تواند یک ماتریس منفرد باشد ولی در مورد ماتریس B فرض بر این است که

$$\text{rank}(B) = m, \quad m \leq n \quad (۱.۵)$$

در این فصل ابتدا با استفاده از ماتریس تبدیل T زوج (A, B) را به فرم استاندارد اشلون^۱ تبدیل کرده و سپس با استفاده از ماتریس تبدیل S فرم استاندارد اشلون را به فرم همدم برداری^۲ تبدیل کرده و با استفاده از آن ماتریس پس خورد حالتی که همه مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته (پیوسته یا گسسته) را به صفر می برد، محاسبه می کنیم.

۵.۰.۵ ناوردهای کرونکر

زوج کنترل پذیر (B, A) را در نظر بگیرید، ماتریس کنترل پذیری سیستم را می توان به صورت زیر نمایش داد

$$Q = [B, AB, A^2B, \dots, A^{p_1-1}b_1, A^{p_2-1}b_2, \dots, A^{p_m-1}b_m] \quad (۲.۵)$$

به طوریکه

$$\text{rank}(Q) = n$$

اعداد p_i ($i = 1, 2, \dots, m$) که هر p_i به بردار ستونی متناظر b_i از ماتریس B مربوط می شود را ناوردهای کرونکر زوج (B, A) می نامند. واضح است که [۱۷، ۱۸]

$$\sum_{i=1}^m p_i = n, \quad 1 \leq p_i \leq n \quad (۳.۵)$$

تعریف ۲.۱.۰.۵. ناوردهای کرونکر زوج کنترل پذیر (B, A) را منظم می نامند هرگاه اختلاف بین ماگزیمم و می نیمم آن ها برابر واحد باشد. اگر اختلاف بین ماگزیمم و می نیمم ناوردهای کرونکر زوج کنترل پذیر (B, A) بیشتر از واحد باشد آنها را نامنظم می نامند.

^۱Standard echelon form

^۲The vector companion form

حال به عنوان یک تعریف داریم

$$\Theta = \max\{p_1, p_2, \dots, p_m\} \quad (۴.۵)$$

در این صورت Θ را اندیس کنترل پذیری سیستم می نامند زیرا هر بردار غیر صفری از فضای حالت را می توان در حداکثر Θ واحد زمان برای سیستم های گسسته به حالت تعادل رساند. ملاحظه می شود در حالتی که ناوردهای کرونکر با هم برابرند حالت خاصی از ناوردهای کرونکر منظم می باشد، در این حالت نمی توان با ورودی های متفاوت سیستم را به حالت تعادل رساند بلکه مجموعه ای از ورودی های منحصر به فرد برای کنترل حالت سیستم بدست می آید. زیرا فرض کنید حالت تعادل سیستم بردار دلخواه x_e باشد، در اینصورت با قرار دادن $x(\Theta) = x_e$ ، اگر بین معادلات

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \Theta-1) \quad (۵.۵)$$

بردارهای $x(1), x(2), \dots, x(\Theta-1)$ را حذف کنیم خواهیم داشت

$$x(\Theta) - A^\Theta x(0) = A^{\Theta-1}Bu(0) + \dots + ABu(\Theta-2) + Bu(\Theta-1) \quad (۶.۵)$$

به عبارت دیگر

$$x(\Theta) - A^\Theta x(0) = [B, AB, \dots, A^{\Theta-1}B] \begin{bmatrix} u(\Theta-1) \\ u(\Theta-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (۷.۵)$$

با توجه به این که ماتریس مربعی $[B, AB, \dots, A^{\Theta-1}B]$ یک ماتریس معکوس پذیر است در صورتی که x_e و $x(0)$ به طور دلخواه انتخاب شوند، آنگاه این دستگاه جواب منحصر به فردی برای بردار ورودی خواهد داشت.

در صورتی که ناوردهای کرونکر زوج (B, A) با هم برابر نباشند دستگاه دارای ماتریس ضرایب غیر مربعی رتبه کامل است پس دارای جواب های متعددی برای بردار مجهول ورودی خواهد بود. همچنین در حالتی که ناوردهای کرونکر زوج (B, A) با هم برابر باشند ماتریس پس خورد حالت K منحصر بفرد خواهد بود زیرا:

کافی است ثابت کنیم معادله زیر دارای جواب منحصر به فردی برای مجهول X است.

$$(A + BX)^{\ominus} = 0 \quad (۸.۵)$$

در صورت لزوم می توان با جابجایی ستون های ماتریس B ناوردهای کرونکر را به صورت زیر مرتب ساخت.

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_m \quad (۹.۵)$$

و یا به طور معادل ماتریس B را با ماتریس BP که P یک ماتریس جایگشتی $m \times m$ است جایگزین ساخت.

قضیه ۲۲.۰.۵. اگر زوج (B, A) کنترل پذیر باشد آنگاه زوج (BP, A) نیز کنترل پذیر است و بر عکس.

اثبات . فرض می کنیم Q ماتریس کنترل پذیری زوج (B, A) و $\bar{Q}$ ماتریس کنترل پذیری زوج (BP, A) باشد آنگاه

$$Q = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

$$\bar{Q} = [BP, ABP, \dots, A^{n-1}BP]$$

از آنجایی که P یک ماتریس جایگشت است می توان گفت $\bar{Q}$ همان Q است با این تفاوت که ستون های آن جابجا شده است و اگر رتبه Q برابر n باشد آنگاه رتبه $\bar{Q}$ نیز برابر n است و برعکس.

فصل ۵. روشی نو جهت تعیین ماتریس پس خورد حالت سیستم خطی دوبعدی راسر ۳۸

قضیه ۲۳.۰.۵. اندیس کنترل پذیری زوج (B, A) با اندیس کنترل پذیری زوج (BP, A) برابر است

$$\max\{p_1, p_2, \dots, p_m\} = \max\{\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_m\} \quad (۱۰.۵)$$

قضیه ۲۴.۰.۵. اگر $P_{m \times m}$ ماتریس معکوس پذیر باشد و $K. \in \{K | (A + BK)^\ominus = 0\}$ آنگاه

$$P^{-1}K. \in \{K | (A + BPK)^\ominus = 0\}$$

اثبات. فرض کنید

$$(A + BK.)^\ominus = 0$$

پس می توان نوشت

$$(A + BPP^{-1}K.)^\ominus = 0$$

و از اینجا نتیجه می شود

$$P^{-1}K. \in \{K | (A + BPK)^\ominus = 0\}$$

و بر عکس آن نیز به آسانی اثبات می شود.

نتیجه ۲۵.۰.۵. حل مساله کنترل سیستم به روش پس خورد حالت برای زوج (B, A) با حل همان مساله برای زوج (BP, A) معادل است هرگاه P ماتریس معکوس پذیر باشد.

فرض می کنیم ناوردهای کرونگر زوج (B, A) منظم باشند و به صورت زیر مرتب شده باشند:

$$P_1 \geq P_2 \geq \dots \geq P_m$$

با توجه به تعریف ناوردهای کرونکر منظم نتیجه می گیریم r تا از ناوردهای کرونکر برابر $q + 1$ و s تای دیگر برابر q خواهد بود.

$$P_1 = P_2 = \dots = P_r = q + 1 \quad (11.5)$$

$$P_{r+1} = P_{r+2} = \dots = P_m = q \quad (12.5)$$

که در آن

$$q = [n/m] \quad (13.5)$$

$$n = mq + r \quad (14.5)$$

$$s = m - r \quad (15.5)$$

بنابر این

$$P_1 + P_2 + \dots + P_m = r(q + 1) + sq = (r + s)q + r = n \quad (16.5)$$

اگر $r = m$ باشد آنگاه $s = 0$ است و داریم

$$rq + r = m(q + 1) = n \quad (17.5)$$

و اندیس کنترل پذیری برابر است با

$$\Theta = q + 1 = n/m = [n/m] \quad (18.5)$$

که حالت خاصی است که همه ناوردهای کرونکر با هم برابرند.

اگر $r < m$ باشد خواهیم داشت

$$n = mq + r, \quad q = [n/m] \quad (19.5)$$

و اندیس کنترل پذیری برابر است با

$$\Theta = [n/m] + 1 \quad (20.5)$$

۶.۰.۵ تبدیلات تشابهی فضای حالت - فرم استاندارد اشلون

فرض کنید T تبدیل تشابهی باشد که بر فضای R^n تعریف شده است. معادله حالت سیستم به صورت

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (21.5)$$

است. حال فرض کنید بردار حالت سیستم توسط ماتریس تبدیل T^{-1} به فضای جدید تبدیل شود یعنی

$$\hat{x}(t) = T^{-1}x(t) \quad (22.5)$$

در نتیجه

$$x(t) = T\hat{x}(t) \quad (23.5)$$

با جایگذاری در معادله (۲۱.۵) خواهیم داشت

$$T\dot{\hat{x}}(t) = AT\hat{x}(t) + Bu(t) \quad (24.5)$$

با ضرب طرفین معادله بالا در T^{-1} خواهیم داشت

$$\dot{\hat{x}}(t) = T^{-1}AT\hat{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \quad (25.5)$$

معادله سیستم بالا مشابه معادله (۲۱.۵) است با این تفاوت که A با $T^{-1}AT$ و B با $T^{-1}B$ عوض شده است تعریف می کنیم

$$\hat{B} = T^{-1}B, \quad \hat{A} = T^{-1}AT \quad (26.5)$$

با جایگذاری در معادله (۲۵.۵) خواهیم داشت

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \quad (27.5)$$

اگر هدف، کنترل حالت سیستم و رساندن حالت آن به تعادل (صفر) باشد به توجه به رابطه (۲۷.۵) می توان در فضای حالت جدید بردار حالت $\hat{x}(t)$ را به صفر رساند، در این صورت بدیهی است که $x(t)$ نیز که بردار حالت در فضای اولیه است به تعادل خواهد رسید. بدین سان حل مساله مورد نظر با زوج (B, A) با حل همان مساله با زوج $(\hat{B}, \hat{A})$ هم ارز است. ماتریس T را می توان به صورت منحصر بفردی با استفاده از ماتریس کنترل پذیری مشخص کرد به این ترتیب که اولین n ستون مستقل خطی ماتریس Q را ستون های ماتریس تبدیل T قرار می دهیم، بنابراین

$$T = (B, AB, \dots, A^{q-1}B, A^qb_1, \dots, A^qb_r) \quad (28.5)$$

حال فرم استاندارد اشون زوج (B, A) را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} (\hat{B}, \hat{A}) &= (T^{-1}B, T^{-1}AT) = T^{-1}(B, A(B, AB, \dots, A^{q-1}B, A^qb_1, \dots, A^qb_r)) \\ &= T^{-1}(B, AB, \dots, A^{q-1}B, A^qb_1, \dots, A^qb_r, A^qb_{r+1}, \dots, A^qb_m, A^{q+1}b_1, \dots, A^{q+1}b_r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= T^{-1}(T, A^q b_{r+1}, \dots, A^q b_m, A^{q+1} b_1, \dots, A^{q+1} b_r) \\
 &= (I_n, T^{-1} A^q(b_{r+1}, \dots, b_m, A b_1, \dots, A b_r)) \\
 &= (I_n, V)
 \end{aligned} \tag{۲۹.۵}$$

بطوریکه V یک بردار ستونی $n \times m$ است که به صورت زیر بدست می آید

$$v_i = T^{-1} A^q b_{i+r} \quad i = 1, 2, \dots, s \tag{۳۰.۵}$$

$$v_j = T^{-1} A^{q+1} b_{j-s} \quad j = s+1, \dots, m \tag{۳۱.۵}$$

در حقیقت سطرهای زوج $(\hat{B}, \hat{A})$ می تواند به q بلوک مربعی $m \times m$ و یک بلوک غیر مربعی $r \times m$ مطابق زیر افراز شود:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ \dots \\ O_{m \times m} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ O_{m \times m} \\ \dots \\ O_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} O_{m \times m} & | & O_{m \times m} & | & \dots & | & O_{m \times m} & | & V^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_m & | & O_{m \times m} & | & \dots & | & O_{m \times m} & | & V^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & | & \vdots & | & \vdots & | & \vdots & | & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_{m \times m} & | & O_{m \times m} & | & \dots & | & O_{m \times m} & | & V^{(q)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_{r \times m} & | & O_{r \times m} & | & \dots & | & I_r & O_{r \times s} & | & V^{(q+1)} \end{bmatrix} \tag{۳۲.۵}$$

بطوریکه هر $V^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, q$) یک ماتریس مربعی $m \times m$ و $V^{(q+1)}$ یک ماتریس $r \times m$ است. فرم استاندارد اشلون می تواند به طور عددی با انجام عملیات سطری تشابهی روی زوج (B, A) و به دنبال آن عملیات ستونی تشابهی تنها روی ماتریس A بدست آید.

حال اگر عملیات ستونی مشابه بر روی یک ماتریس واحد $n \times n$ انجام شود ماتریس تبدیل T بدون احتیاج به تشکیل ماتریس کنترل پذیری به سادگی بدست می آید. به عبارت دیگر

برای تبدیل زوج (B, A) به $(\hat{B}, \hat{A})$ ماتریس افزوده $Q = [B, A, I_n]$ را در نظر می گیریم و عملیات تشابهی زیر را تعریف می کنیم:

(۱) ضرب یا تقسیم یک سطر از Q به کمیت اسکالر $k \neq 0$ و بدنبال آن تقسیم یا ضرب ستون متناظر از ماتریس A

$$Row(i) \longrightarrow Row(i) \times k \quad on Q$$

$$Column(i) \longrightarrow Column(i)/k \quad on A$$

(۲) تفاضل مضربی از سطر i ام ماتریس Q از سطر j ام آن و بدنبال آن جمع همان مضرب از ستون j ام ماتریس A با ستون i ام ماتریس A

$$Row(j) \longrightarrow Row(j) - kRow(i) \quad on Q$$

$$Column(i) \longrightarrow Column(i) + kColumn(j) \quad on A$$

(۳) جابجایی سطر i ام و سطر j ام از ماتریس Q و بدنبال آن جابجایی ستون j ام و ستون i ام از ماتریس A

$$Row(i) \longleftrightarrow Row(j) \quad on Q$$

$$Column(j) \longleftrightarrow Column(i) \quad on A$$

در واقع این عملیات تشابهی در فرایند حذف گاوسی به منظور حل یک دستگاه معادله خطی است با این تفاوت که در آنجا تنها عملیات سطری انجام می شود در حالیکه در اینجا

فصل ۵. روشی نو جهت تعیین ماتریس پس خورد حالت سیستم خطی دوبعدی راسر ۴۴

عملیات ستونی متناظر با آن باید در ماتریس A نیز انجام شود، بدین سان $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$ بدست می آید.

قابل توجه است که در صورتی که ناوردهای کرونگر زوج (B, A) منظم باشند فرم استاندارد اشلون به صورت منظم خواهد بود

$$\hat{Q} = (\hat{B}, \hat{A}) = (I_n, V) \quad (۳۳.۵)$$

اما در حالتیکه ناوردهای کرونگر نامنظم باشند دیگر ستون های ماتریس I_n بصورت منظم پشت سر یکدیگر مرتب نمی شوند بلکه در ماتریس $\hat{Q}$ پخش می شوند.

مثال . سیستم زیر را در نظر می گیریم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

که در آن

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

فرم استاندارد اشلون را به صورت زیر بدست می آوریم

$$Q = \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

با استفاده از عملیات سطری ستونی داریم

$$Row(2) - Row(1) \longrightarrow Row(2) \quad on Q$$

$$Column(1) + Column(2) \longrightarrow Column(1) \quad on A$$

$$Q \sim \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$Row(\mathfrak{Y}) \longleftrightarrow (-\mathfrak{I}/\mathfrak{Y})Row(\mathfrak{Y}) \quad onQ$$

$$Column(\mathfrak{Y}) \longleftrightarrow -\mathfrak{Y}Column(\mathfrak{Y}) \quad onA$$

$$Q \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \mathfrak{I} & \mathfrak{Y} & & \mathfrak{I} & -\mathfrak{Y} & \cdot & \mathfrak{I} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathfrak{I} & & \cdot & \mathfrak{Y} & -\mathfrak{I} & \mathfrak{I}/\mathfrak{Y} & -\mathfrak{I}/\mathfrak{Y} & \cdot \\ \cdot & \cdot & & -\mathfrak{Y} & \mathfrak{Y} & \mathfrak{Y} & \cdot & \cdot & \mathfrak{I} \end{array} \right]$$

$$Row(\mathfrak{I}) - \mathfrak{Y}Row(\mathfrak{Y}) \longrightarrow Row(\mathfrak{I}) \quad onQ$$

$$Column(\mathfrak{Y}) + \mathfrak{Y}Column(\mathfrak{I}) \longrightarrow Column(\mathfrak{Y}) \quad onA$$

$$Q \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \mathfrak{I} & \cdot & & \mathfrak{I} & -\mathfrak{Y} & \mathfrak{Y} & \cdot & \mathfrak{I} & \cdot \\ \cdot & \mathfrak{I} & & \cdot & \mathfrak{Y} & -\mathfrak{I} & \mathfrak{I}/\mathfrak{Y} & -\mathfrak{I}/\mathfrak{Y} & \cdot \\ \cdot & \cdot & & -\mathfrak{Y} & -\mathfrak{Y} & \mathfrak{Y} & \cdot & \cdot & \mathfrak{I} \end{array} \right]$$

$$Row(\mathfrak{Y}) \longleftrightarrow (-\mathfrak{I}/\mathfrak{Y})Row(\mathfrak{Y}) \quad onQ$$

$$Column(\mathfrak{Y}) \longleftrightarrow -\mathfrak{Y}Column(\mathfrak{Y}) \quad onA$$

$$Q \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \mathfrak{I} & \cdot & & \mathfrak{I} & -\mathfrak{Y} & -\mathfrak{Y} & \cdot & \mathfrak{I} & \cdot \\ \cdot & \mathfrak{I} & & \cdot & \mathfrak{Y} & \mathfrak{Y} & \mathfrak{I}/\mathfrak{Y} & -\mathfrak{I}/\mathfrak{Y} & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \mathfrak{I} & \mathfrak{Y}/\mathfrak{Y} & \mathfrak{Y} & \cdot & \cdot & -\mathfrak{I}/\mathfrak{Y} \end{array} \right]$$

$$Row(\mathfrak{I}) - Row(\mathfrak{Y}) \longrightarrow Row(\mathfrak{I}) \quad onQ$$

$$Column(\mathfrak{Y}) + Column(\mathfrak{I}) \longrightarrow Column(\mathfrak{Y}) \quad onA$$

$$Q \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -16/3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 4 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{array} \right]$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & -16/3 & -9 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4/3 & 4 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

فرم های استاندارد اشلون دیگری نیز وجود دارد که می توان آنها را تنها با انجام عملیات سطری یا تنها با انجام عملیات ستونی روی زوج (B, A) بدست آورد اما فرقی که تعریف بالا با فرم های مختلف استاندارد اشلون دارد این است که در اینجا یک ماتریس تشابهی T بصورت منحصر بفرد نتیجه می شود.

فرم استاندارد اشلون برای تعیین قوانین کنترل مناسب نیست، برای رفع این مشکل بردارهای ستونی غیر واحد فرم استاندارد اشلون را با انتخاب یک تبدیل مناسب به بردارهای سطری تبدیل می کنیم این فرم به فرم همدم برداری معروف است و ثابت می شود که برای تعیین قوانین کنترل بسیار مفید خواهد بود و فرم همدم برداری که مستقیماً از فرم استاندارد اشلون بدست می آید فرم همدم برداری اولیه نامیده می شود.

۷.۰.۵ فرم همدم برداری اولیه

فرض کنید S تبدیل خطی تشابهی باشد که بر فضای R^n تعریف شده است و بردار حالت سیستمی که به فرم استاندارد اشلون است توسط ماتریس تبدیل S^{-1} به فضای جدید تبدیل شود یعنی

$$\tilde{x}(t) = S^{-1}\hat{x}(t) = S^{-1}T^{-1}x(t) \quad (۳۴.۵)$$

با جایگذاری $\hat{x}(t)$ در معادله (۲۷.۵) خواهیم داشت

$$S\dot{\tilde{x}}(t) = \hat{A}S\tilde{x}(t) + \hat{B}u(t) \quad (۳۵.۵)$$

با ضرب طرفین معادله بالا در S^{-1} خواهیم داشت

$$\dot{\tilde{x}}(t) = S^{-1}\hat{A}S\tilde{x}(t) + S^{-1}\hat{B}u(t) \quad (۳۶.۵)$$

قرار می دهیم

$$\tilde{A} = S^{-1}\hat{A}S = S^{-1}T^{-1}ATS \quad (۳۷.۵)$$

$$\tilde{B} = S^{-1}\hat{B} = S^{-1}T^{-1}B \quad (۳۸.۵)$$

با جایگذاری در معادله (۳۶.۵) خواهیم داشت

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \quad (۳۹.۵)$$

به گونه ای که زوج $(\tilde{B}, \tilde{A})$ به فرم همدم برداری اولیه خواهد بود. حل معادله سیستم (۳۹.۵) هم ارز با حل معادله سیستم (۲۱.۵) است. بعلاوه با استفاده از عملیات تشابهی روی زوج (B, A) می توان بردارهای ستونی V در $\hat{A}$ را به صورت بردارهای سطری تبدیل ساخت، بدین منظور گام های زیر را انجام می دهیم:

(۱) هر بلوک واحد I_m در زوج $(\hat{B}, \hat{A})$ را به بلوک های واحد I_r و I_s افراز می کنیم

$$I_m = \left[\begin{array}{c|c|c} I_r & & o \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ o & & I_s \end{array} \right] \quad (۴۰.۵)$$

(۲) هر بلوک مربعی $V^{(i)}$ ، در $\hat{A}$ را به $V_{rm}^{(i)}$ و $V_{sm}^{(i)}$ افراز می کنیم

$$V_{mm}^{(i)} = \begin{bmatrix} V_{rm}^{(i)} \\ \dots \\ V_{sm}^{(i)} \end{bmatrix}$$

(۳) بلوک مستطیلی $V_{rm}^{(q+1)}$ را به $V_{rs}^{(q+1)}$ و $V_{rr}^{(q+1)}$ افراز می کنیم

$$V_{rm}^{(q+1)} = \left[V_{rs}^{(q+1)} \mid V_{rr}^{(q+1)} \right]$$

حال اگر هر $V^{(i)}$ را مانند یک اسکالر در نظر بگیریم با انجام عملیات ستونی

$$Column(j) - V^{(i)} Column(j-1) \quad (41.5)$$

روی $\hat{A}$ و بدنبال آن عملیات سطری

$$Row(j-1) + V^{(i)} Row(j) \quad (42.5)$$

به ازای هر $i = q+1, q, \dots, 2$ و $j = i, i-1, \dots, 2$ روی $(\hat{B}, \hat{A})$ می توان بلوک های $V^{(i)}$ را از گوشه سمت راست $\hat{A}$ به قسمت بالای $(\hat{B}, \hat{A})$ انتقال داد. در این صورت $(\tilde{B}, \tilde{A})$ را به فرم همدم برداری اولیه می نامند.

بنابراین فرم همدم برداری اولیه بصورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} I_r, & V_{rs}^{(q+1)} \\ \dots & \\ O_{sr}, & I_s \\ \dots & \\ O_{rm} \\ \dots & \\ O_{sm} \\ \dots & \\ \vdots & \\ \dots & \\ O_{rm} \end{bmatrix} \quad (43.5)$$

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} V_{rr}^{(q+1)} & & \bar{V}_{rm}^{(q)} & & \dots & & \bar{V}_{rm}^{(2)} & & \bar{V}_{rm}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_{sr} & & V_{sm}^{(q)} & & \dots & & V_{sm}^{(2)} & & V_{sm}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_r & & o_{rm} & & \dots & & o_{rm} & & o_{rm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_{sr} & & I_s & & \dots & & o_{sm} & & o_{sm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_{rr} & & o_{rm} & & \dots & & I_r & & o_{rm} \end{array} \right] \quad (44.5)$$

علاوه بر این اگر عملیات سطری مشابه (۴۲.۵) روی ماتریس واحد

$$I_n = \text{diag}\{I_r, I_s, I_r, I_s, \dots, I_r\} \quad (45.5)$$

انجام شود ماتریس تشابهی S^{-1} و اگر عملیات ستونی مشابه (۴۱.۵) روی ماتریس واحد (۴۵.۵) انجام شود ماتریس تشابهی S (که یک ماتریس بالا مثلثی است) را مطابق زیر بدست

می دهد

$$S = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} I_r & & -V_{rm}^{(q+1)} & & -V_{rm}^{(q)} & & \dots & & -V_{rm}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_{sr} & & I_s, o_{sr} & & -V_{rm}^{(q)} & & \dots & & -V_{sm}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_{rr} & & o_{rs}, I_r & & o_{rs}, o_{rr} & & \dots & & -V_{rm}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_{sr} & & o_{ss}, o_{sr} & & I_s, o_{sr} & & \dots & & -V_{sm}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_{rr} & & o_{rs}, o_{rr} & & o_{rs}, o_{rr} & & \dots & & -V_{rm}^{(q+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_{sr} & & o_{ss}, o_{sr} & & o_{ss}, o_{sr} & & \dots & & I_s, o_{sr} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_{rr} & & o_{rs}, o_{rr} & & o_{rs}, o_{rr} & & \dots & & o_{rs}, I_r \end{array} \right] \quad (46.5)$$

در نتیجه این عملیات $V_{rm}^{(q+1)}, V_{sm}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, q$) بدون تغییر باقی می ماند در صورتی که

تنها در $\tilde{A}$ داریم

$$\bar{V}_{rm}^{(i)} = V_{rm}^{(i)} + V_{rs}^{(q+1)} V_{sm}^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (47.5)$$

از آنجایی که $V_{rm}^{(i)}$ ، $V_{sm}^{(i)}$ و $V_{rs}^{(q+1)}$ ($i = 1, 2, \dots, q$) منحصر بفرد هستند ماتریس های بدست آمده نیز منحصر بفرد هستند و ترتیب عملیات تشابهی مقدماتی در نتیجه آخر هیچ اثری ندارد. جالب توجه است در حالتیکه ناورداهای کرونکر مساوی باشند داریم :

$$P_1 = q = [n/m], \quad r = 1, \quad s = m$$

در نتیجه

$$V_{rs}^{(q+1)} = 1, \quad V_{rr}^{(q+1)} = 1, \quad \bar{V}(i)_{rm} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (48.5)$$

و

$$V_{sm}^{(i)} = V_{mm}^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (49.5)$$

در این صورت بردار ستونی V در ماتریس $\hat{A}$ به اندازه ۹۰ درجه در جهت گردش عقربه های ساعت دوران می کند و همه عناصرش بدون تغییر باقی می ماند.

بنابراین در حالتیکه ناورداهای کرونکر مساوی هستند فرم همدم برداری اولیه به صورت

منحصر بفرد زیر خواهد بود:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ \dots \\ o_{mm} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ o_{mm} \\ \dots \\ o_{mm} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} V^{(q)} & | & V^{(q-1)} & | & \dots & | & V^{(2)} & | & V^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_m & | & o_{mm} & | & \dots & | & o_{mm} & | & o_{mm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & | & \vdots & | & \dots & | & \vdots & | & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_{mm} & | & o_{mm} & | & \dots & | & o_{mm} & | & o_{mm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_{mm} & | & o_{mm} & | & \dots & | & I_m & | & o_{mm} \end{bmatrix} \quad (50.5)$$

به عبارت دیگر

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ \dots \\ O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} V^{(q)} & V^{(q-1)} & \dots & V^{(2)} & V^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{n-m} & & & O_{(n-m) \times m} & \end{bmatrix} \quad (51.5)$$

در حقیقت برای تبدیل (B, A) به $(\tilde{B}, \tilde{A})$ ابتدا ماتریس افزوده $Q = [B, A, I_n]$ را در نظر گرفته و عملیات تشابهی را روی آن انجام داده تا به فرم استاندارد اشلون تبدیل شود یعنی

$$\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}] \quad (52.5)$$

سپس ماتریس $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, I_n]$ را در نظر گرفته و با استفاده از عملیات تشابهی آن را به فرم همدم برداری تبدیل می کنیم یعنی

$$\tilde{Q} = [\tilde{B}, \tilde{A}, S^{-1}]$$

و به طور کلی

$$Q = (B, A, I_n) \xrightarrow{T^{-1}} \hat{Q} = (\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}) \xrightarrow{S^{-1}} \tilde{Q} = (\tilde{B}, \tilde{A}, S^{-1}T^{-1})$$

فرم همدم برداری در حالتیکه ناورداهای کرونکر منظم باشند به صورت

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_o \\ \dots \\ O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} G_o \\ \dots & \dots & \dots \\ I_{n-m} & & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (53.5)$$

و در حالتیکه ناورداهای کرونکر نامنظم باشند ستون های ماتریس I_{n-m} در بلوک پایین ماتریس $\tilde{A}$ پخش می شوند.

در حالت کلی زوج (B, A) به فرم همدم برداری است اگر دارای ساختاری به صورت زیر

باشد

$$A = \begin{bmatrix} G_o \\ \dots \\ G_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_o \\ \dots \\ o \end{bmatrix} \quad (54.5)$$

فصل ۵. روشی نو جهت تعیین ماتریس پس خورد حالت سیستم خطی دوبعدی راسر ۵۲

که در آن B_o یک ماتریس $m \times m$ بالا مثلثی و معکوس پذیر است و G_o ماتریس دلخواه $m \times n$ و G_1 ماتریس $(n-m) \times n$ دارای خصوصیات زیر است:

(۱) آخرین ستون بلوکی G_1 مساوی صفر است.

(۲) بقیه ستون های G_1 ستون هایی از ماتریس I_{n-m} است.

(۳) اگر $e_1, e_2, \dots, e_{n-m}$ به ترتیب ستون های اول تا $n-m$ ام ماتریس I_{n-m} باشند

آنگاه این بردارها به ترتیب اندیس شان در ستون های G_1 ظاهر می شوند یعنی اگر $i < j$ آنگاه e_j قبل از e_i ظاهر نشود.

مثال . با استفاده از فرم استاندارد اشلون بدست آمده در مثال قبل فرم همدم برداری آن را بدست می آوریم:

داریم

$$\hat{Q} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & -16/3 & -9 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{array} \right]$$

با استفاده از عمیات تشابهی داریم

$$Column(3) - 4Column(1) \longrightarrow Column(3) \quad on A$$

$$Row(1) + 4Row(3) \longrightarrow Row(1) \quad on \hat{Q}$$

$$\hat{Q} \sim \left[\begin{array}{cc|cc|cc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & -9 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{array} \right]$$

$$Column(2) - (4/3)Column(1) \longrightarrow Column(2) \quad on A$$

$$Row(1) + (4/3)Row(3) \longrightarrow Row(1) \quad on \hat{Q}$$

$$\tilde{Q} \sim \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 4/3 & 4 & -8/3 & -5 & 2/3 & 1/3 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & 1/2 & -1/2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -1/3 \end{array} \right]$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4/3 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & -8/3 & -5 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad S^{-1}T^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & -1/3 \end{bmatrix}$$

همانطور که ملاحظه می شود فرم همدم برداری دارای ساختاری منظم است، لذا ناوردهای کرونکر زوج (B, A) منظم هستند و برابرند با

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 1$$

مثال . سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

بطوریکه

$$B = \begin{bmatrix} \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & -1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین $m = 3$ ، $n = 5$ فرم همدم برداری اولیه و ماتریس تبدیل متناظر آن بصورت زیر

بدست می آید :

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & \vdots & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots \end{bmatrix}, \quad S^{-1}T^{-1} = \begin{bmatrix} \vdots & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \vdots & \vdots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

فصل ۵. روشی نو جهت تعیین ماتریس پس خورد حالت سیستم خطی دوبعدی راسر ۵۴

از آنجایی که زیر m سطر اول $\tilde{A}$ بردارهای ستونی واحد توسط بردارهای ستونی صفر از یکدیگر جدا شده اند ساختار زوج تبدیل یافته $(\tilde{B}, \tilde{A})$ بصورت نامنظم خواهد بود.

بنابراین ناوردهای کرونگر زوج $(\tilde{B}, \tilde{A})$ نامنظم خواهند بود و با توجه به ساختار نامنظم $\tilde{A}$ بصورت زیر بدست می آیند

$$p_1 = 3, \quad p_2 = 1, \quad p_3 = 1$$

برای معادله (۲۱.۵) قانون کنترل بصورت $u(t) = Kx(t)$ تعریف می شود و بطور مشابه برای معادله (۳۹.۵) و معادله

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}u(k) \quad (۵۵.۵)$$

قانون کنترل بصورت

$$u(t) = \tilde{K}\tilde{x}(t) \quad (۵۶.۵)$$

تعریف می شود که $\tilde{K}$ ماتریس پس خورد حالت معادله سیستم تبدیل شده به فرم همدم برداری اولیه است که با جایگذاری $(TS)^{-1}x(t)$ به جای $\tilde{x}(t)$ در معادله (۵۶.۵) داریم

$$u(t) = \tilde{K}S^{-1}T^{-1}x(t) \quad (۵۷.۵)$$

بنابراین ماتریس پس خورد حالت معادله سیستم معمولی بصورت زیر بدست می آید

$$K_p = \tilde{K}S^{-1}T^{-1} \quad (۵۸.۵)$$

که K_p ماتریس پس خورد حالت اولیه زوج (B, A) نامیده می شود. با در نظر گرفتن

$$B_o^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & | & -V_{rs}^{(q+1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ O_{sr} & | & I_s \end{bmatrix} \quad (۵۹.۵)$$

$$G_o = \begin{bmatrix} V_{rr}^{(q+1)} & | & \bar{V}_{rm}^{(q)} & | & \dots & | & \bar{V}_{rm}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_{sr} & | & V_{sm}^{(q)} & | & \dots & | & V_{sm}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (۶۰.۵)$$

ماتریس پس خورد حالت زوج $(\tilde{B}, \tilde{A})$ را بصورت زیر محاسبه می کنیم

$$\tilde{K} = -B_o^{-1}G_o = - \begin{bmatrix} V_{rr}^{(q+1)} & | & \bar{V}_{rm}^{(q)} & | & \dots & | & \bar{V}_{rm}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_{sr} & | & V_{sm}^{(q)} & | & \dots & | & V_{sm}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (۶۱.۵)$$

$$= - \begin{bmatrix} V_{rr}^{(q+1)} & & & & & & \\ \dots & | & V^{(q)} & | & \dots & | & V^{(1)} \\ o_{sr} & & & & & & \end{bmatrix}$$

باید توجه داشت در حالتیکه ناوردهای کرونکر مساوی هستند داریم

$$B_o^{-1} = I_m, \quad G_o = [V^{(q)} \quad | \quad V^{(q-1)} \quad | \quad \dots \quad | \quad V^{(2)} \quad | \quad V^{(1)}] \quad (۶۲.۵)$$

بنابراین $\tilde{K}$ تنها شامل V^i ($i = q, q-1, \dots, 1$) می شود و بصورت زیر خواهد بود

$$\tilde{K} = -B_o^{-1}G_o = -[V^{(q)} \quad | \quad V^{(q-1)} \quad | \quad \dots \quad | \quad V^{(2)} \quad | \quad V^{(1)}] \quad (۶۳.۵)$$

با محاسبه $\tilde{K}$ می توان با جایگذاری در معادله (۵۸.۵)، K_p را محاسبه نمود و بنا به تعریف $\tilde{K}$ و K_p بصورت منحصر بفرد خواهند بود.

به آسانی می توان نشان داد که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ همگی

صفرند:

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} G_o & \\ \dots & \\ I_{n-m} & o_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o & \\ \dots & \\ o_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} [-B_o^{-1}G_o] \quad (۶۴.۵)$$

$$\begin{bmatrix} G_o & \\ \dots & \\ I_{n-m} & o_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o & \\ \dots & \\ o_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_{m \times n} & \\ \dots & \\ I_{n-m} & o_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}$$

از آنجایی که ماتریس حاصل یک ماتریس پایین مثلثی است که همه درایه های روی قطر اصلی آن برابر صفرند مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma}$ همگی برابر صفر خواهند بود. همچنین ماتریس $\tilde{\Gamma}$ شامل $q - 1$ بلوک I_m و یک بلوک I_r در زیر قطر اصلی است و در حقیقت $\tilde{\Gamma}$ به فرم جردن بلوکی است و با توجه به خواص ماتریس جردن واضح است که اندیس پوچ توانی ماتریس $\tilde{\Gamma}$

$$\Theta = P_1 = q + 1 \quad (۴۵.۵)$$

است.

بنابر آنچه گفته شد ماتریس $K = \tilde{K}S^{-1}T^{-1} = B_o^{-1}G_oS^{-1}T^{-1}$ موسوم به ماتریس پس خورد حالت در فضای (B, A) که همان خواص ماتریس $\tilde{K}$ در فضای $(\tilde{B}, \tilde{A})$ را دارد یعنی همه مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Gamma = A + BK$ توسط ماتریس پس خورد حالت K به صفر برده می شود و اندیس پوچ توانی آن نیز $\Theta = P_1 = q + 1$ خواهد بود زیرا تبدیلات تشابهی خواص ماتریس را تغییر نمی دهند.

حال الگوریتم چگونگی تعیین ماتریس پس خورد حالت اولیه را مطرح می نماییم:

ورودی: ماتریس های A, B, m و n و $rank(B) = m$

گام ۱- ماتریس افزوده $Q = [B, A, I_n]$ را تشکیل می دهیم.

گام ۲- با عملیات تشابهی سطری و ستونی $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$ را می سازیم. (الگوریتم آن ارائه شد)

گام ۳- عملیات تشابهی سطری و ستونی را ادامه داده $\tilde{Q} = [\tilde{B}, \tilde{A}, S^{-1}T^{-1}]$ را می سازیم. (الگوریتم آن ارائه شد)

گام ۴- m سطر اول $\tilde{B}$ را B_o و m سطر اول $\tilde{A}$ را G_o می نامیم.

گام ۵- $\tilde{K} = -B_o^{-1}G_o$ را تشکیل می دهیم.

گام ۶- $K_p = \tilde{K}S^{-1}T^{-1}$ ماتریس پس خورد حالت اولیه سیستم (B, A) را بدست می آوریم.

مثال. برای مثال قبل ماتریس پس خورد حالت اولیه بصورت زیر محاسبه می شود با استفاده از فرم همدم برداری اولیه بدست آمده داریم

$$B_o = \begin{bmatrix} 1 & 4/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_o = \begin{bmatrix} 4 & -8/3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\tilde{K} = -B_o^{-1}G_o = - \begin{bmatrix} 1 & -4/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -8/3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4 & -16/3 & -9 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس پس خورد حالت اولیه را بصورت زیر محاسبه می کنیم:

$$K_p = \tilde{K}S^{-1}T^{-1} = - \begin{bmatrix} 4 & -16/3 & -9 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = A + BK_p = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

حال برای آزمون آن کافی است رد ماتریس Γ را محاسبه کنیم. از آنجایی که ماتریس پس خورد حالت بدست آمده مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته را به صفر می برد باید رد ماتریس Γ صفر شود.

$$trace(\Gamma) = 0$$

حال همانطور که در فصل چهارم نتیجه (۱۴۰۰.۴) بحث شد نتیجه گرفتیم که پایداری مجانبی سیستم دو بعدی توصیف شده توسط مدل راسر دوبعدی رفتاری مشابه با پایداری

فصل ۵. روشی نو جهت تعیین ماتریس پس خورد حالت سیستم خطی دوبعدی راسر ۵۸

مجانبی سیستم یک بعدی هم ارزش را داراست. بنابراین می توان نتیجه گرفت برای محاسبه ماتریس پس خورد حالت در حالت دوبعدی می توان ماتریس پس خورد حالت سیستم دو بعدی را در فرم یک بعدی هم ارزش محاسبه نمود و سپس با توجه به ابعاد ماتریس های A و B ماتریس پس خورد حالت بدست آمده را به دو مولفه تفکیک کرده، یک ماتریس پس خورد حالت دو بعدی بدست آورد. در این مورد مثالی را به صورت عددی بیان می کنیم:

مثال . فرض کنید ماتریس های A و B به صورت عددی زیر مفروض باشند:

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ 0.1 & 0.01 & 0.2 & 0.1 \\ -0.3 & -0.1 & -1 & -0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.1 \\ -0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

با این مفروضات ماتریس های Q و $T_1 = T^{-1}S^{-1}$ به صورت زیر بدست می آیند:

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -1.3900 & -0.3860 & 0.0208 & 0.0019 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}$$

9

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0.0028 & 0.0001 & -0.0049 & 0.0004 \\ -0.0093 & 0.0039 & 0.0052 & -0.0034 \\ 0.0311 & -0.0776 & 0.0104 & 0.0854 \\ -0.1035 & 1.8116 & -0.1035 & -1.1646 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس پس خورد حالت به صورت زیر بدست می آید:

$$F_p = [-0.1615 \quad -0.2522 \quad -4.7847 \quad -0.2624]$$

حال طبق توضیحات گفته شده ماتریس پس خورد حالت را به دو مولفه به صورت زیر تفکیک می کنیم:

$$F_{1p} = [-0.1615 \quad -0.2522]$$

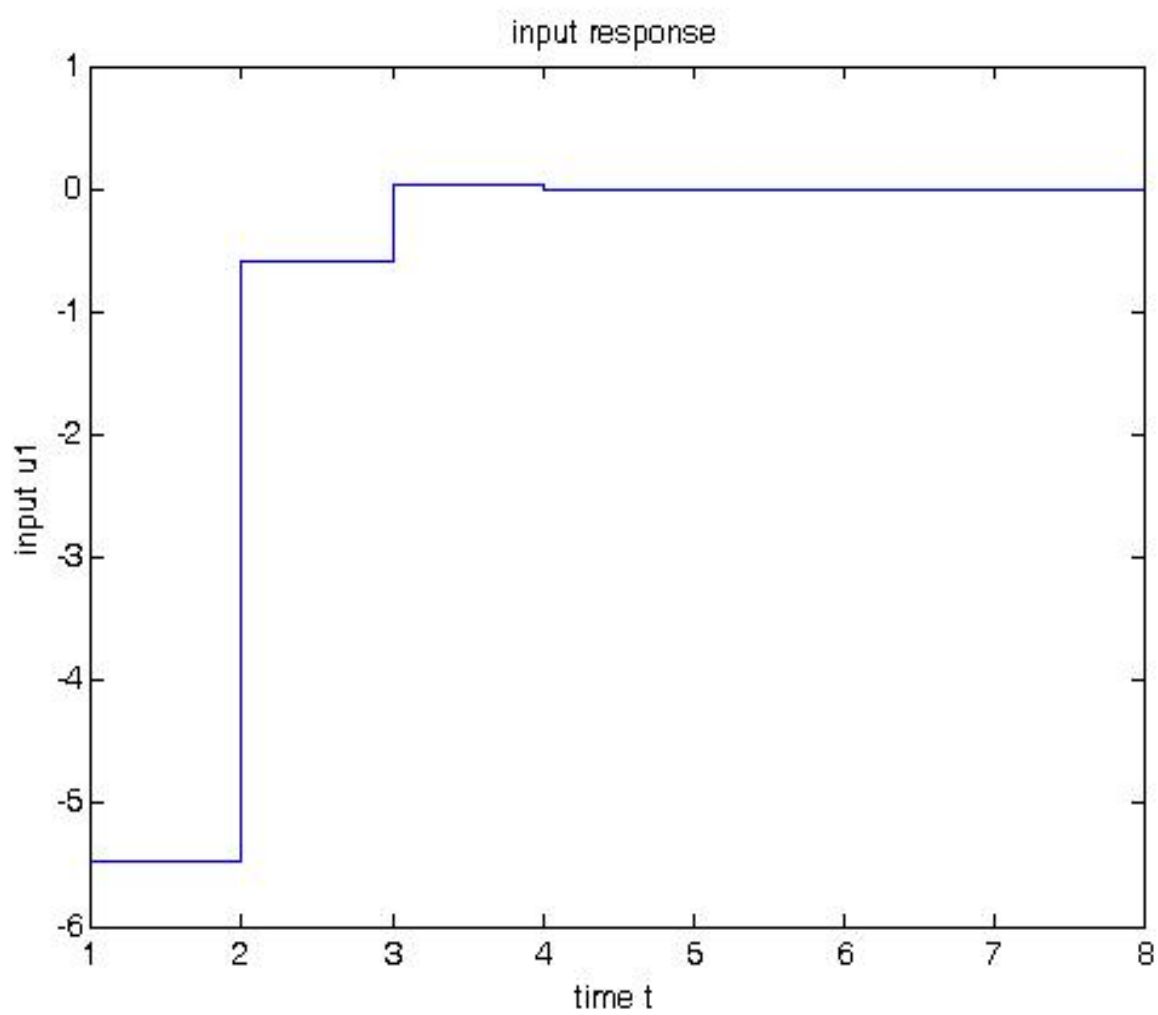
9

$$F_{2p} = [-4.7847 \quad -0.2624]$$

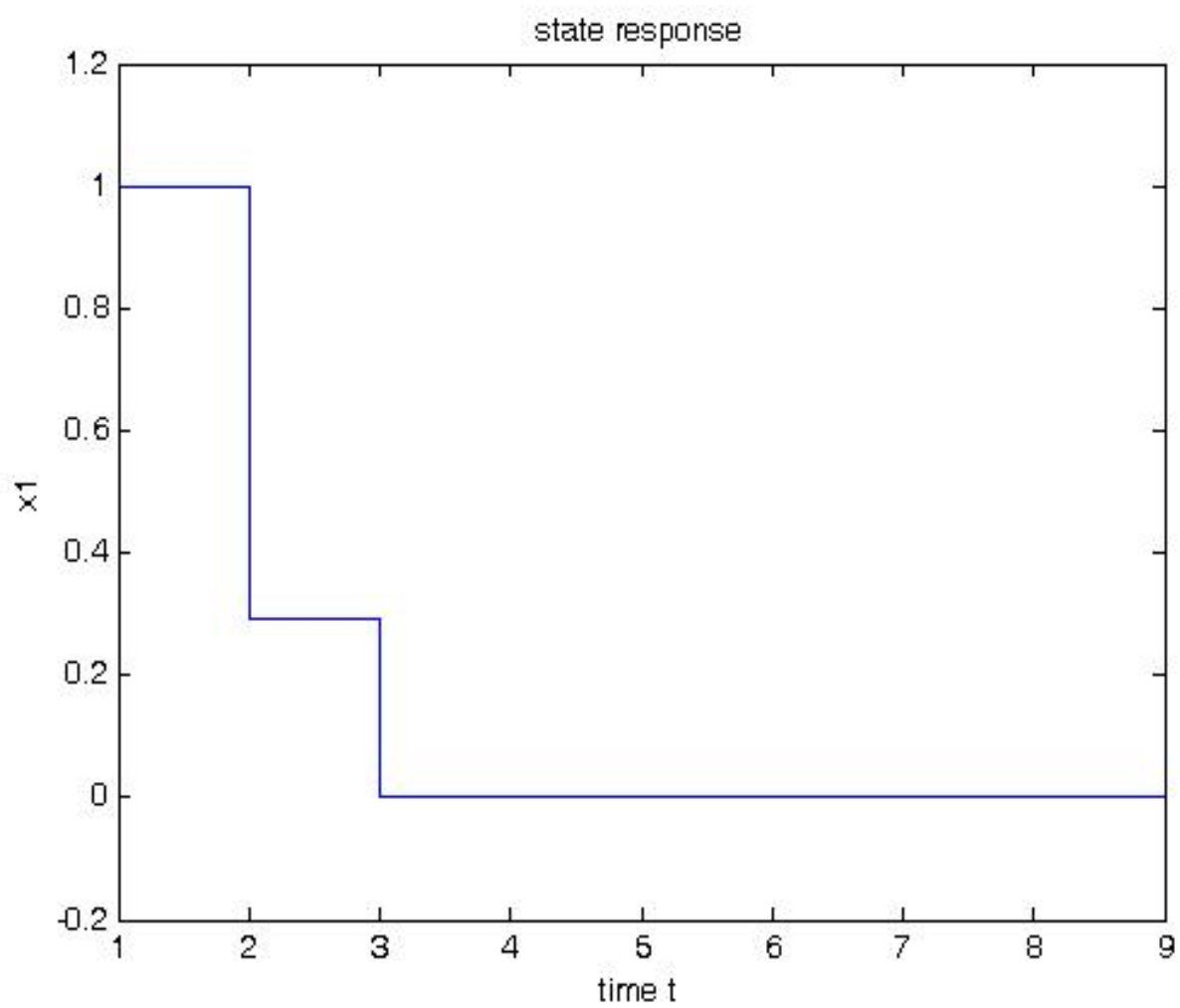
در نهایت ماتریس حلقه بسته به صورت زیر بدست می آید:

$$gama = \begin{bmatrix} -0.4677 & -0.0496 & 0.8569 & -0.0475 \\ -0.0839 & -0.0156 & -0.2785 & -0.0738 \\ -0.2516 & -0.0243 & 0.4354 & -0.0213 \\ 0.1677 & 0.0496 & -0.5569 & 0.0475 \end{bmatrix}$$

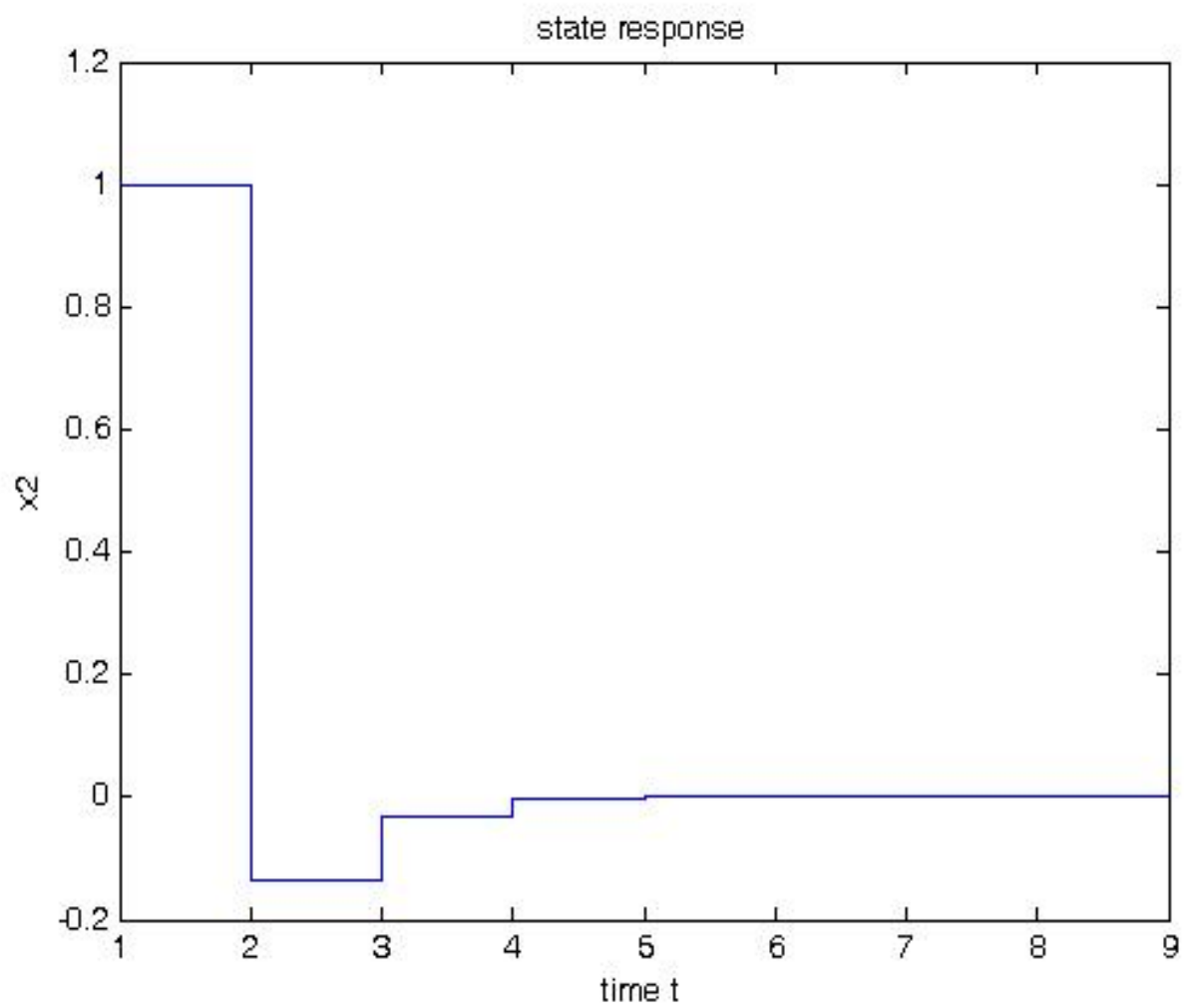
این ماتریس دارای چهار مقدار ویژه صفر می باشد و همانطور که قبلا گفته شد پایداری مجانبی را برای سیستم فراهم می کند به این معنی که در یک فرایند تکراری با دادن مقادیر اولیه دلخواه به x_i ($i = 1, 2, 3, 4$)، بعد از حداکثر چهار تکرار x_i ها و u به نقطه تعادل یعنی حالت صفر می رسند. برای اثبات این ادعا با استفاده از نرم افزار *Matlab* نمودار مربوط به x_i ها و u را رسم کرده و مساله پایداری را بوضوح مشاهده می کنیم.



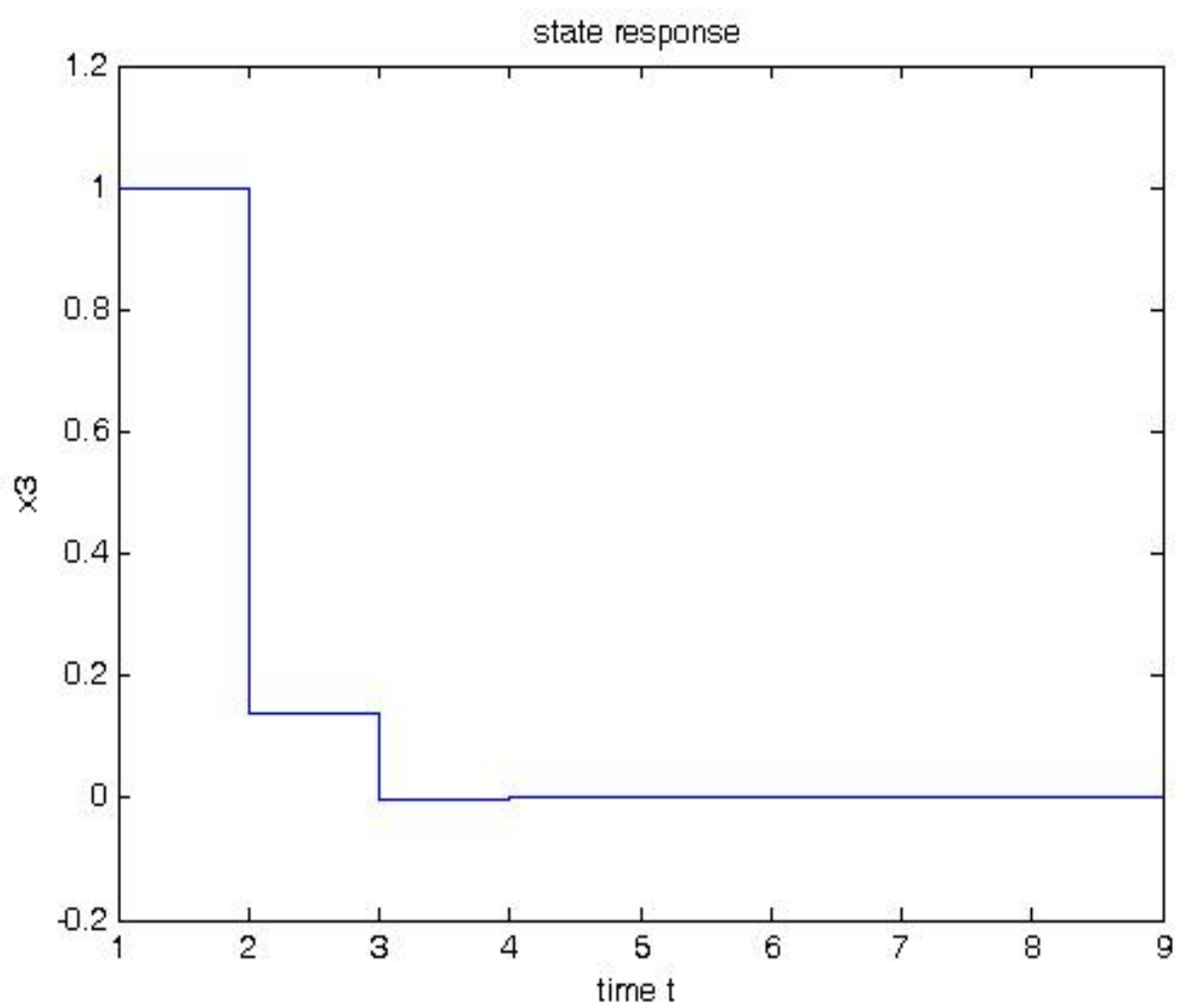
نمودار مربوط به u_1



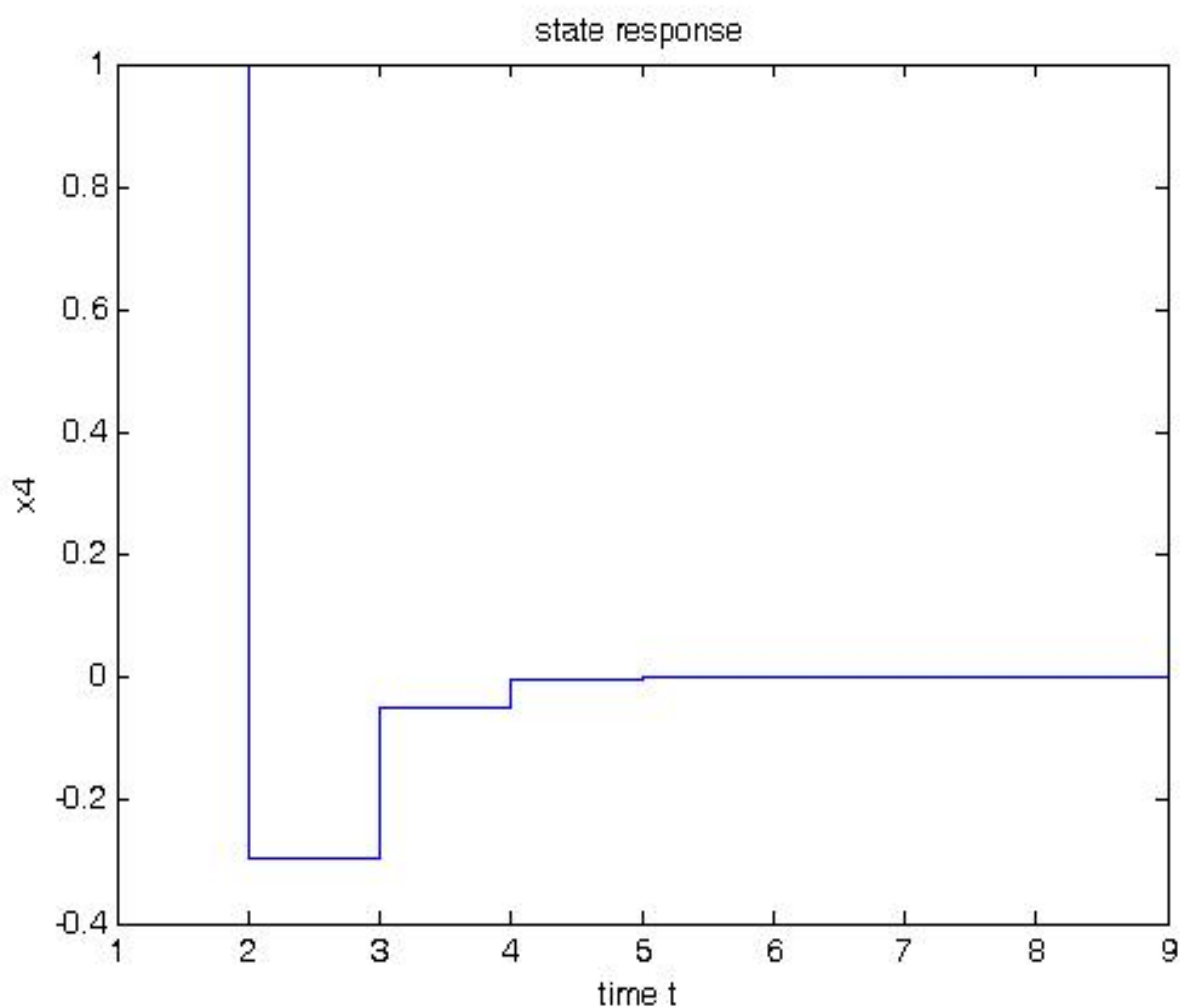
نمودار مربوط به x_1



نمودار مربوط به x_2



نمودار مربوط به x_3



نمودار مربوط به x_4

با توجه به این نمودارها واضح است که بعد از حداکثر چهار تکرار x_i ها و u به نقطه تعادل یعنی حالت صفر می رسند.

فصل ۶

نتیجه گیری

در این پایان نامه ابتدا سیستم های دوبعدی را در حالت گسسته به طور کامل معرفی کردیم، سپس پایداری مجانبی این سیستم ها را با استفاده از روش هایی که تاکنون مورد استفاده قرار می گرفته، بررسی نمودیم. دو روش برای بدست آوردن ماتریس پس خورد حالتی که مثبتی و پایداری مجانبی را برای سیستم فراهم کند، روش اول استفاده از ابزار LP و روش دوم استفاده از مقادیر ویژه، در فصل چهارم به طور مفصل توضیح داده شد.

در فصل پنجم روشی نو تحت عنوان روش همدم برداری برای بررسی پایداری و محاسبه ماتریس پس خورد حالت ارائه نمودیم. در این روش ابتدا با استفاده از ماتریس هایی که جزو مفروضات مساله هستند، یک ماتریس افزوده تشکیل داده، سپس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی و ستونی نظیر، ماتریس افزوده را به فرم استاندارد اشلون و سپس فرم همدم برداری تبدیل کرده، در نهایت ماتریس پس خورد حالت اولیه را با استفاده از فرم همدم برداری برای سیستم یک بعدی نظیر سیستم دوبعدی محاسبه می کنیم.

همانطور که در فصل چهارم گفته شد، پایداری مجانبی یک سیستم دوبعدی در حالت کلی رفتاری مشابه با پایداری مجانبی سیستم یک بعدی هم ارزش را دارا می باشد. در این پایان نامه ما از این ویژگی استفاده کردیم و پایداری مجانبی سیستم دو بعدی را با استفاده

از سیستم یک بعدی هم ارزش بررسی نمودیم. برای بدست آوردن ماتریس پس خورد حالت در یک سیستم دوبعدی می توانیم ماتریس پس خورد حالت سیستم یک بعدی هم ارزش را محاسبه نموده، سپس با توجه به اندازه ماتریس هایی که جزو مفروضات مساله هستند، ماتریس پس خورد حالت بدست آمده را به دو مولفه تفکیک می کنیم. در واقع دو مولفه بدست آمده برای ماتریس پس خورد حالت مطلوب مساله می باشند.

روش ارائه شده مزیت های بسیاری نسبت به سایر روش ها داراست که از جمله آن ها می توان به داشتن الگاریتمی جهت کمینه کردن نرم ماتریس پس خورد حالت اشاره نمود (ماتریس پس خورد حالتی مناسب تر است که کمترین نرم را دارا باشد) این موضوع می تواند زمینه مناسبی برای پژوهش های بعدی باشد. مزیت دیگر روش کارا بودن آن برای تمامی سیستم هاست. برای مثال روش استفاده از ابزار LP فقط زمانی مناسب است که با استفاده از الگاریتم معرفی شده بتوان یک ناحیه شدنی برای مساله بدست آورد. از آنجائیکه در بسیاری از حالات، مساله دارای جواب شدنی نمی باشد لذا هیچ ماتریس پس خورد حالتی به روش LP برای این گونه مسائل بدست نمی آید.

در انتهای فصل پنجم برای اثبات درستی روش به بیان یک مثال عددی پرداخته، سپس با استفاده از نرم افزار *Matlab* نمودار مربوط به بردار های حالت و همچنین بردار ورودی را رسم کرده، بوضوح مساله پایداری را در نمودارها مشاهده نمودیم.

برنامه کامپیوتری

<latex>

$t0 = cputime;$

$A = [-0.5 \quad -0.1 \quad -0.1 \quad -0.1; \quad 0.1 \quad 0.01 \quad 0.2 \quad 0.1; \quad -0.3 \quad -0.1 \quad -1 \quad -0.1; \quad 0.2 \quad 0.1 \quad 0.4 \quad 0.1];$

A

$B = [-0.2; \quad 0.1; \quad -0.3; \quad 0.2];$

B

$[n, m] = size(B);$

$r = n + m;$

$Q = [B, A];$

$T1 = eye(n); \quad i=1; \quad j=1; \quad tol=1e-6;$

$while(i \leq n)(j \leq r)$

$[q, k] = max(abs(Q(i : n, j))); \quad k = k + i - 1;$

$if(q \leq tol)$

$Q(i : n, j) = zeros(n - i + 1, 1);$

$j = j + 1;$

$else$

if $i = k$

$Q([i, k], :) = Q([k, i], :);$

$T1([i, k], :) = T1([k, i], :);$

$Q(:, [i + m, k + m]) = Q(:, [k + m, i + m]);$

end

$t = Q(i, j);$

$Q(i, :) = Q(i, :)/t;$

$Q(:, i + m) = Q(:, i + m) * t;$

$T1(i, :) = T1(i, :)/t;$

if $i = n$

fork $= i + 1 : n$

$t = Q(k, i);$

ift $= 0$

$Q(k, :) = Q(k, :) - t * Q(i, :);$

$Q(:, i + m) = Q(:, i + m) + t * Q(:, k + m);$

$T1(k, :) = T1(k, :) - t * T1(i, :);$

end

end

end

$i = i + 1;$

$j = j + 1;$

end

end s = 1;

while s < n

i = s + 1;

for j = i : r

if Q(i, j) = 0

for k = 1 : s

if Q(k, j) = 0

t = Q(k, j);

*Q(k, :) = Q(k, :) - t * Q(i, :);*

*T1(k, :) = T1(k, :) - t * T1(i, :);*

*Q(:, i + m) = Q(:, i + m) + t * Q(:, k + m);*

end

end

break

end

end

s = s + 1;

end for i = n : -1 : m + 1

for k = i : r

if Q(i, k) == 1

for $j = k + 1 : r$

$t = Q(i, j);$

$Q(:, j) = Q(:, j) - t * Q(:, k);$

$Q(k - m, :) = Q(k - m, :) + t * Q(j - m, :);$

$T1(k - m, :) = T1(k - m, :) + t * T1(j - m, :);$

end

break

end

end

end Q

$B1 = Q(:, [1 : m]); \quad A1 = Q(:, [m + 1 : r])$

$B0 = Q(1 : m, 1 : m); \quad bo = inv(B0)$

$G = Q(1 : m, m + 1 : r); \quad F1 = -bo * G; \quad G0 = G;$

$Fp = F1 * T1; \quad Fp$

$gama = A + B * Fp$

$t1 = cputime - t0$

$xp = [];$

$up = [];$

$x0 = ones(4, 1);$

$xp(:, 1) = x0;$

$i = 2;$

```
while i < 10

    xp(:, i) = gama * xp(:, i - 1);

    up(:, i - 1) = Fp * xp(:, i - 1);

    i = i + 1;

end

clf

stairs(up(1, :)), hold on

title('input response')

ylabel('input u1')

xlabel('time t')

pause

hold off

plot(xp(1, :)), hold on

title('state response')

ylabel('x1')

xlabel('time t')

hold off

pause

plot(xp(2, :)), hold on

title('state response')

ylabel('x2')
```

xlabel('time t')

hold off

pause

plot(xp(3, :)), hold on

title('state response')

ylabel('x3')

xlabel('time t')

hold off

pause

plot(xp(4, :)), hold on

title('state response')

ylabel('x4')

xlabel('time t')

holdoff

xp

</latex>

مراجع

- [1] R. Sivan, 1972, "Linear optimal control systems", *Technion, Israel Institute of Technology*, Haifa Israel.
- [2] V. M. Popove, 1972, "Invariant description of linear time - invariant controllabe systems", *Siam jurnal on control systems*, **vol 10**, pp. 252-264.
- [3] T. Kaczorek, 2007, "Reachability and controllability to zero of positive fractional discrete-time systems", *Machine Intelligence and Robotic Control*, **vol 6(4)**, pp. 139–143.
- [4] T. Kaczorek and K. Rogowski, 2010, "Positivity and stabilization of fractional 2D linear systems described by the roesser model", *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, **vol 20(1)**, pp. 85-92.
- [5] A. Hmamed, M. Ait Rami and M. Alfidi, 2008, "Controller synthesis for positive 2D systems described by the Roesser model", *Proceeding of the 47th IEEE Conference on Decision and control Cancun*, Mexico, Dec , pp. 9-11.
- [6] R. Roesser, 1975, "A discrete state-space model for linear image processing", *IEEE Trans. Automat. Contr*, **vol. AC-20**, pp. 1-10.
- [7] P. Lancaster and M. Tismenetsky, 1985, "The theory of matrices second edition with applications", *Academic Press*.
- [8] M. Ait Rami and F. Tadeo, 2006, "positive observation for discrete positive systems", *Conf. on Decision and Control*, San Diego.
- [9] T. Kaczorek, 2008, "Asymptotic stability of positive 2D linear systems", *Proceedings of the 13th Scientific Conference on Computer Applications in Electrical Engineering*, Pozna'n, Poland, pp. 1–5.
- [10] M. Busłowicz, 2008, "Simple stability conditions for linear positive discrete-time systems with delays", *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, **vol 56(4)**, pp 325–328.

- [11] M. Busłowicz and T. Kaczorek, 2009, "Simple conditions for practical stability of positive fractional discrete-time linear systems", *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, **vol 19(2)**, pp 263-269.
- [12] T. Kaczorek, 2001, " *Positive 1D and 2D Systems* ", Springer-Verlag, London.
- [13] S. M. Karbassi and D. J. Bell, " New method of parametric eigenvalue assignment in state feedback control ", *IEEE Proc. control Theory Appl*, **vol 141**, pp. 223-226.
- [14] S. M. Karbassi and D. J. Bell, 1993, " Parametric time-optimal control of linear discrete -time systems by state feedback -part2 : Irregular kroneker invariants ", *Int. J. control*, **vol 57**, pp. 831-839.
- [15] H. Katayama and A. Ichikawa, 1992, " Pole assignment by state transition graph ", *IEEE Trans*, **vol Ac-37**, pp. 1196-1201.
- [16] D. G. Luenberger, 1967, " Canonical forms for linear multivariable systems ", *IEEE Transation on Automatic Control*, **vol 6**, pp. 290-293.
- [17] R. E. Kalman, 1960, " On general theory of control systems ", *Proceedings of First International Congress on Automatic Control*, Butterworth, London.
- [18] R. E. Kalman, 1960, " Kronecker invariants and feedback ", *Proceedings of Conference on Ordinary Differential Equations*, Washington DC, pp. 621-625.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Primary state feedback	پس خورد حالت اولیه
Stable	پایدار
Rank	بعد
Inverse	معکوس
Equilibrium	تعاقل
Eigenvector	بردار ویژه
Lemma	لم
Matrix	ماتریس
Numerical radius	شعاع طیفی
Proof	اثبات
Controllable	کنترل پذیر
Pole	قطب
Discrete-time systems	سیستم های گسسته زمانی
Parametric state feedback	پس خورد حالت پارامتری
Eigenvalue	مقدار ویژه
Fractional systems	سیستم های کسری
Closed-loop system	سیستم حلقه بسته
Asymptotically stable	پایدار مجانبی
Boundary conditions	شرایط مرزی
Input	ورودی
output	خروجی
Positive	مثبت
Strictly positive vector	بردار اکیدا مثبت
Delays	تاخیرات
Independent	مستقل
Depend	وابسته
Unstable	ناپایدار
Diagonal entries	درایه های قطری
State space	فضای حالت
Continuous-time	پیوسته زمانی
Vertical	عمودی
Horizontal	افقی

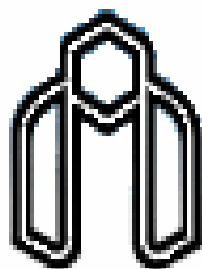
Two-dimensional	دو بعدی
Linear system	سیستم خطی
Component	مولفه
Nonnegative matrix	ماتریس نامنفی
Controller synthesis	ترکیب کنترلگر
Processing	فرایند
Modulus	قدر مطلق
Euclidean space	فضای اقلیدسی
Arbitrary	اختیاری
Spectral property	خواص طیفی
Linear programming	برنامه ریزی خطی
Integer value	مقدار صحیح
Time in variant	ناوردای زمانی

Abstract

In last two decades, the two-dimensional systems theory has been paid a considerable attention and developed by many researchers. These systems have found many applications such as in image processing, modeling of physical processing and dramating robots, etc. From time that these systems introduced, many scientists proposed different models that most popular are Roesser model (1975), Fornasini(1978), marchesini(1976) and curek(1996). Because of generalization of Roesser model regadr to other models, I choice this model in my thesis.

In this thesis we consider two-dimensional linear discrete-time systems that introduced by Roesser model, study stability of these systems and camputing optimal time state feedback matrix. The method that we used in this thesis is making an increased matrix by supposed matrices, then with using priliminary row application and parallel calumn application, changinto the Echlon standard form then the vector companion form and finally with using of the vector companion form we obtain optimal time state feedback matrix for the two-dimensiona system.

Keywords: *Roesser model, Stabilization, Fractional systems, The echlon standard form, The vector companion form*



Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

M.Sc Thesis

**Stabilization of 2D Linear Systems Described by The
Roesser Model Using The Vector Companion Form**

Ziba Arjmandzadeh

Supervisor:

Dr. H. Ahsani Tehrani

Advisor:

Dr. S. Effati

Summer 2010