

حاشا
البربر
البربر



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش بهینه‌سازی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

شبکه‌های عصبی و برنامه‌ریزی خطی فازی

نگارنده: حوریه صادقی

استاد راهنما

دکتر علیرضا ناظمی

بهمن ۱۳۹۸

شماره: ۲۱۶-۲۱۲
تاریخ: ۲۷/۱۱/۹۸

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم حوریه صادقی با شماره دانشجویی ۹۶۰۹۴۴۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش بهینه سازی تحت عنوان شبکه های عصبی و برنامه ریزی خطی فازی که در تاریخ ۱۳۹۸/۱۱/۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

<input checked="" type="checkbox"/> الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹	<input type="checkbox"/> ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹-۱۸
<input type="checkbox"/> ج) درجه خوب: نمره ۱۷/۹۹-۱۶	<input type="checkbox"/> د) درجه متوسط: نمره ۱۵/۹۹-۱۴
<input type="checkbox"/> ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد	
<input checked="" type="checkbox"/> نظری	<input type="checkbox"/> عملی

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر علیرضا ناظمی	استاد	
۲- استاد راهنمای دوم			
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر ابوالفضل پورعیدی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر مهرداد غزنوی	استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر سمیه مفاری	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



۲۷/۱۱/۹۸

تقدیرم به

سربازان جان بر کف امنیت که با جانشان، محافظ جانمان اند.
و پدر و مادر عزیزم که همواره با تشویق‌ها و دلگرمی‌های خود مرا در
این راه حمایت و پشتیبانی کرده‌اند.

سپاس‌گزاری

سپاس خدای مهربان را که در همه احوال، توکل بر او بهترین پشتوانه‌ام در زندگی بوده‌است.

سپاس از پدر و مادر عزیزم که صبورانه مرا همراهی کرده و با تحمل درد دوری، مراتب موفقیت‌م را رقم زده‌اند.

سپاس فراوان از استاد ارجمند و صبورم جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی که در این راه پرفراز و نشیب کمک و نیرویی بودند تا از پس سختی‌ها و ناملایمات، با تلاش و پشتکار برآیم.

و در نهایت از دوستان مهربانم سپاس‌گزارم که با دلگرمی و مهربانی‌هایشان در این مدت مرا یاری نموده‌اند.

امیدوارم بتوانم ذره‌ای از محبت و مهربانی‌شان را جبران کنم.

حوریه صادقی

بهمن ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **حوریه صادقی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **شبکه‌های عصبی و برنامه‌ریزی خطی فازی**، تحت راهنمایی **علیرضا ناظمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

حوریه صادقی

بهمن ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه دو مدل شبکه عصبی بازگشتی برای حل مسائل برنامه ریزی درجه دوم و غیرخطی محدب فازی ارائه شده است. نشان داده می شود که نقطه تعادل مدل های ارائه شده با جواب مساله بهینه سازی فازی یکسان است. همچنین با ارائه تابع لیاپانوف مناسب، ثابت می شود که مدل های ارائه شده پایدار حاشیه ای بر حسب لیاپانوف و همگرایی سراسری هستند. با ارائه چندین مثال کارایی مدل های پیشنهادی اثبات می شود.

کلمات کلیدی: برنامه ریزی درجه دوم و غیرخطی فازی، شبکه های عصبی، برنامه ریزی وزنی.

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
۱	۱ سیستم‌های فازی
۱	۱.۱ نظریه فازی و مجموعه‌های فازی
۱	۱.۱.۱ دهه ۱۹۶۰ آغاز نظریه فازی
۲	۲.۱.۱ مجموعه‌های فازی و عملیات اساسی بر روی مجموعه‌های فازی
۳	۳.۱.۱ مفاهیم اساسی مرتبط با مجموعه‌های فازی
۴	۴.۱.۱ عملیات بر روی مجموعه‌های فازی
۵	۲.۱ مقدمه‌ای بر بهینه‌سازی و شبکه‌های عصبی
۵	۱.۲.۱ مسائل بهینه‌سازی محدب
۶	۲.۲.۱ سیستم‌های دینامیکی
۹	۳.۲.۱ بهینه‌سازی و شبکه‌های عصبی
	۲ یک مدل شبکه‌عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای فازی
۱۱	۱.۲ مقدمه
۱۲	۲.۲ مقدمات
۱۳	۱.۲.۲ نظریه مجموعه فازی
۱۶	۲.۲.۲ حسابان فازی
۱۷	۳.۲.۲ بهینه‌سازی فازی
۱۹	۳.۲ مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی
۲۱	۱.۳.۲ خواص همگرایی و پایداری
۲۵	۴.۲ مثال‌های عددی

۳ یک مدل شبکه‌عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی با پارامترهای فازی

۳۱	
۳۱	۱.۳ مقدمه
۳۳	۲.۳ یک مدل شبکه‌عصبی بازگشتی
۳۳	۱.۲.۳ مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی فازی
۳۵	۲.۲.۳ تحلیل پایداری و همگرایی
۳۸	۳.۳ مثال‌های عددی
۴۹	مراجع

فهرست تصاویر

۸	تفاوت میان نقطه‌ی ساکن پایدار و نقطه‌ی ساکن بطور مجانبی پایدار . . .	۱.۱
۲۱	دیاگرام ساده از مدل شبکه عصبی (۳۲.۲) و (۳۳.۲)	۱.۲
۳۰	رفتار گذرا $x_1(t)$ و $x_2(t)$ از شبکه عصبی (۵۲.۲)	۲.۲
۳۶	بلوک دیاگرام شبکه عصبی (۱۸.۳) و (۱۹.۳)	۱.۳
۴۳	رفتار گذرا از x_1 و x_2 برای شبکه عصبی (۲۹.۳)	۲.۳
۴۸	رفتار گذرا از x_1 ، x_2 و x_3 برای شبکه عصبی (۳۷.۳) و (؟؟)	۳.۳

فصل ۱

سیستم‌های فازی

۱.۱ نظریه فازی و مجموعه های فازی

۱.۱.۱ دهه ۱۹۶۰ آغاز نظریه فازی

نظریه فازی بوسیله پرفسور لطفی زاده در سال ۱۹۶۵ در مقاله‌ای بنام «مجموعه‌های فازی» معرفی گردید. در اوایل دهه ۶۰ او فکر کرد که نظریه کنترل کلاسیک بیش از حد بر روی دقت تأکید داشته و از این رو با سیستم‌های پیچیده نمی‌تواند کار کند. پس از آن وی ایده‌اش را در مقاله مجموعه‌های فازی تجسم بخشید.

به دلیل اینکه کاربردهای عملی نظریه فازی در ابتدای پیدایش آن مشخص نبود، تفهیم آن از جهت فلسفی کار مشکلی بود و تقریباً هیچ یک از مراکز تحقیقاتی نظریه فازی را به عنوان یک زمینه تحقیق جدی نگرفتند. با وجودی که نظریه فازی جایگاه واقعی خود را پیدا نکرده بود، هنوز محققینی در گوشه و کنار دنیا خود را وقف این زمینه جدید نمودند و در اواخر دهه ۱۹۶۰ روش‌های جدید فازی نظیر الگوریتم‌های فازی، تصمیم‌گیری‌های فازی و ... مطرح گردید. بسیاری از مفاهیم بنیادی نظریه فازی توسط زاده در اواخر دهه ۶۰ و اوایل دهه ۷۰ مطرح شد. پس از معرفی مجموعه‌ی فازی در سال ۱۹۶۵، مفاهیم الگوریتم‌های فازی در سال ۱۹۶۸، تصمیم‌گیری فازی در سال ۱۹۷۰ و ترتیب فازی در سال ۱۹۷۱ مطرح شد. در سال ۱۹۷۳ او مقاله‌ی دیگری را به نام «طرح یک راه‌حل جدید برای تجزیه تحلیل سیستم‌های پیچیده و

فرآیندهای تصمیم‌گیری» مطرح نمود. این مقاله اساس کنترل فازی را بنا کرد. او در این مقاله مفهوم متغیرهای زبانی و استفاده از قواعد اگر- آنگاه را برای فرموله کردن دانش بشری معرفی نمود.

۲.۱.۱ مجموعه‌های فازی و عملیات اساسی بر روی مجموعه‌های فازی

فرض کنید U مجموعه جهانی و شامل تمامی عناصر و اعضا ممکن در بحث یا کاربرد مورد نظر ما باشد. یادآوری می‌شود که یک مجموعه کلاسیک A یا به اختصار مجموعه A در فضای جهانی U را می‌توان با سه روش فهرست، قاعده و روش عضویت تعریف کرد. روش فهرست را فقط می‌توان در مجموعه‌های متناهی به کار برد، بنابراین کاربرد محدودی دارد. روش قاعده کلی‌تر است، در این روش مجموعه A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \{x \in U \mid x \text{ در شرایطی صدق می‌کند}\}. \quad (1.1)$$

روش عضویت یک تابع عضویت دو مقداری $\{(1, 0)\}$ را برای A معرفی می‌کند که با $\mu_A(x)$ نشان داده می‌شود. به طوریکه

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A, \\ 0 & , x \notin A. \end{cases} \quad (2.1)$$

مجموعه A از نظر ریاضی متناظر با تابع عضویت $\mu_A(x)$ بوده و با معلوم بودن $\mu_A(x)$ مجموعه A نیز معلوم خواهد بود.

تعریف ۱.۱.۱ ([۴۷]). یک مجموعه فازی A در فضای جهانی U به وسیله یک تابع $\mu_A(x)$ که مقداری در بازه $[0, 1]$ اختیار می‌کند، مشخص می‌شود.

بنابراین یک مجموعه فازی تعمیم یک مجموعه کلاسیک است که اجازه می‌دهد تابع عضویت هر مقداری را در بازه $[0, 1]$ اختیار کند. به عبارت دیگر یک مجموعه کلاسیک فقط می‌توانست دو مقدار 0 و 1 داشته باشد، در حالی که تابع عضویت یک مجموعه فازی یک تابع پیوسته در محدوده $[0, 1]$ است. در واقع می‌بینیم که هیچ چیز در مورد مجموعه فازی، گنگ و مبهم نیست بلکه مجموعه فازی مجموعه‌ای با یک تابع عضویت پیوسته است. یک مجموعه فازی A در U را می‌توان با یک مجموعه از زوج‌های مرتب x و مقدار عضویت آن نمایش داد. بدین ترتیب داریم:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\}. \quad (3.1)$$

نظریه فازی و مجموعه های فازی ۳

هنگامی که U پیوسته باشد (به عنوان مثال $U = \mathbb{R}$) را معمولاً با نماد زیر نشان می دهند.

$$A = \int_U \mu_A(x)/x, \quad (4.1)$$

که علامت \int نشان دهنده ی انتگرال نیست بلکه نشان دهنده اجتماع تمامی نقاط $x \in U$ و مقدار تابع عضویت متناظر $\mu_A(x)$ است. هنگامی که U گسسته باشد A معمولاً به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$A = \sum_U \mu_A(x)/x, \quad (5.1)$$

که در اینجا نیز علامت \sum به معنای جمع ریاضی نیست بلکه نشان دهنده اجتماع تمامی نقاط $x \in U$ و تابع عضویت متناظر $\mu_A(x)$ است.

۳.۱.۱ مفاهیم اساسی مرتبط با مجموعه های فازی

تعریف ۲.۱.۱ ([۴۷]). تکیه گاه^۱ مجموعه فازی A در فضای جهانی U یک مجموعه غیر فازی است که شامل تمامی عضوهای غیر صفر U می شود یعنی:

$$\text{supp}(A) = \{x \in U | \mu_A(x) > 0\}, \quad (6.1)$$

که $\text{supp}(A)$ نشان دهنده تکیه گاه مجموعه فازی A است. اگر تکیه گاه یک مجموعه فازی خالی باشد آن را یک مجموعه فازی تهی می نامند.

تعریف ۳.۱.۱ ([۴۷]). منفرد فازی یک مجموعه فازی است که تکیه گاه آن یک نقطه واحد در U است.

تعریف ۴.۱.۱ ([۴۷]). اگر مقدار میانگین تمامی نقاطی که در آنها تابع عضویت مجموعه فازی به حداکثر مقدار خود می رسد، محدود باشد در این صورت این مقدار میانگین، مرکز یک مجموعه فازی است و اگر مقدار میانگین مثبت بی نهایت (منفی بی نهایت) باشد در این صورت مرکز به صورت کوچکترین (بزرگترین) نقطه ای که در آن نقاط تابع به حداکثر مقدار خود می رسد تعریف می شود.

تعریف ۵.۱.۱ ([۴۷]). نقطه ی تقاطع یک مجموعه فازی، نقطه ای در U است که در آن مقدار تابع عضویت برابر 0.5 است.

تعریف ۶.۱.۱ ([۴۷]). ارتفاع یک مجموعه فازی، بزرگترین مقدار یک تابع عضویت است. اگر ارتفاع یک مجموعه فازی برابر یک باشد در این صورت آن را یک مجموعه فازی نرمال می نامند.

¹ Support

تعریف ۷.۱.۱ ([۴۷]). α -برش یک مجموعه فازی A یک مجموعه غیرفازی A_α است که شامل تمامی عضوهای U می‌باشد که مقادیر عضویتی بزرگتر یا مساوی α دارند یعنی:

$$A_\alpha = \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}. \quad (۷.۱)$$

تعریف ۸.۱.۱ ([۴۸]). $X \subset \mathbb{R}^n$ را یک مجموعه‌ی محدب^۲ گویند هرگاه:

$$\forall a, b \in X \Rightarrow [a, b] \subset X,$$

که در آن

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda a + (1 - \lambda)b, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

◦

لم ۱.۱.۱ ([۴۷]). یک مجموعه فازی A در \mathbb{R}^n محدب نامیده می‌شود اگر و فقط اگر برای $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]. \quad (۸.۱)$$

وقتی که مجموعه جهانی U یک فضای n بعدی \mathbb{R}^n باشد، مفهوم تحدب را می‌توان به مجموعه‌های فازی تعمیم داد. یک مجموعه فازی محدب نامیده می‌شود اگر و فقط اگر α -برش آن (A_α) برای هر مقدار α در محدوده $[0, 1]$ یک مجموعه محدب باشد.

۴.۱.۱ عملیات بر روی مجموعه‌های فازی

تعریف ۹.۱.۱ ([۴۷]). دو مجموعه A و B مساوی هستند اگر و فقط اگر برای تمامی مقادیر

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), x \in U$$

تعریف ۱۰.۱.۱ ([۴۷]). مجموعه A زیرمجموعه B است اگر و فقط اگر برای تمامی مقادیر

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), x \in U$$

تعریف ۱۱.۱.۱ ([۴۷]). مکمل مجموعه فازی A مجموعه فازی \bar{A} در U است که تابع عضویت آن به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x). \quad (۹.۱)$$

تعریف ۱۲.۱.۱ ([۴۷]). اجتماع A و B یک مجموعه فازی در U است که با $A \cup B$ نشان داده می‌شود و تابع عضویت آن به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}. \quad (۱۰.۱)$$

تعریف ۱۳.۱.۱ ([۴۷]). اشتراک A و B یک مجموعه فازی در U است که با $A \cap B$ نشان داده می‌شود و تابع عضویت آن به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}. \quad (۱۱.۱)$$

^۲ Convex Set

۲.۱ مقدمه‌ای بر بهینه‌سازی و شبکه‌های عصبی

در این بخش برخی از مفاهیم و قضایای بهینه‌سازی شبکه‌های عصبی^۳ که در این پایان‌نامه از آن استفاده شده، آورده شده است.

۱.۲.۱ مسائل بهینه‌سازی محدب

در این بخش مفاهیمی از مسائل بهینه‌سازی محدب و شرایط لازم و کافی برای حل آن آورده شده است.

تعریف ۱.۲.۱ ([۴۸]). فرض کنید $X \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه‌ی محدب و غیرتهی باشد. در این صورت تابع $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع محدب^۴ گویند هرگاه:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad x, y \in X,$$

که در آن $0 \leq \lambda \leq 1$.

تعریف ۲.۲.۱ ([۴۸]). مساله‌ی برنامه‌ریزی محدب^۵ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(CP) \quad \min \quad f(x), \quad (12.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} g_i(x) \leq 0, & i = 1, \dots, m, \\ Ax = b, \\ x \in X, \end{cases} \quad (13.1)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ متغیر تصمیم‌گیری مساله و $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و f و g_i توابعی محدب و X نیز یک مجموعه‌ی محدب است. همچنین $A = [a_{ij}]_{p \times n}$ و $b = [b_i]_{p \times 1}$ و توابع g_i و f به‌طور پیوسته مشتق‌پذیراند.

تعریف ۳.۲.۱ ([۴۸]). مساله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم^۶ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$(QP) \quad \min \quad f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + D^T x, \quad (14.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} E x \leq d, \\ A x = b. \end{cases} \quad (15.1)$$

³ Neural Network

⁴Convex Function

⁵Convex Programming

⁶Quadratic Programming

اگر در مساله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم Q ، ماتریس نیمه‌معین مثبت باشد، آنگاه مساله‌ی درجه دوم QP یک مساله‌ی برنامه‌ریزی محدب خواهد بود.

تعریف ۴.۲.۱ ([۴۸]). مساله‌ی برنامه‌ریزی زیر را در نظر بگیرید:

$$(P) \quad \min \quad f(x),$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, m, \\ h_j(x) = 0 & j = 1, \dots, p. \end{cases}$$

مجموعه‌ی $A(x)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$A(x) = \{i \mid g_i(x) = 0\}.$$

در این صورت نقطه‌ی x^* که در محدودیت‌های $g_i(x) \leq 0$ و $h_j(x) = 0$ صدق می‌کند را یک نقطه‌ی منظم^۷ گویند هرگاه $\nabla h_j(x^*)$ و $\nabla g_i(x^*)$ مستقل خطی باشند که در آن $i \in A(x^*)$.

قضیه ۱.۲.۱ ([۴۸]). شرط لازم بهینگی درجه اول (شرایط K.K.T) فرض کنید x^* یک نقطه شدنی، یک نقطه‌ی مینیمم برای مساله‌ی (P) باشد و علاوه بر آن x^* نقطه‌ی منظم محدودیت‌ها نیز باشد، در این صورت بردارهایی مانند $\mu \in \mathbb{R}^m$ و $\lambda \in \mathbb{R}^p$ وجود دارند به طوری که:

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)^T \lambda + \nabla g(x^*)^T \mu = 0, \\ \mu \geq 0, \\ \mu^T g(x^*) = 0. \end{cases} \quad (۱۶.۱)$$

برای مساله‌ی برنامه‌ریزی محدب (۱۲.۱) و (۱۳.۱)، شرایط قضیه‌ی ۱.۲.۱ لازم و کافی هستند.

۲.۲.۱ سیستم‌های دینامیکی

در این بخش سیستم‌های دینامیکی^۸ را معرفی نموده و قضیه‌ی اساسی وجود و یگانگی وجود جواب مساله‌ی مقدار اولیه و قضایای مربوط به پایداری را ارائه می‌نماییم.

مقدمات

دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل به شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t), \quad (۱۷.۱)$$

^۷Regular Point

^۸Dynamical Systems

که در آن $x(t) = [x_i(t)]^T$ ، $t \geq 0$ بردار وضعیت یا حالت^۹ یا حرکت^{۱۰} نامیده می‌شود. چنین دستگاهی یک دستگاه وابسته به زمان یا غیرخودگردان^{۱۱} است. به این معنی که متغیر t به‌طور آشکار در ضابطه‌ی f ظاهر می‌شود. اگر f_i به‌طور صریح به t وابسته نباشد به عبارتی

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)), \quad (18.1)$$

در این صورت سیستم را خودگردان^{۱۲} یا مستقل از زمان می‌نامند. به چنین دستگاه معادله‌ی دیفرانسیلی که بردار وضعیت آن با تغییر زمان تغییر می‌کند، یک سیستم دینامیکی گفته می‌شود. در ادامه از نماد $\dot{x}(t)$ برای نمایش مشتق x نسبت به زمان استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲.۲.۱. (قضیه‌ی اساسی وجود و یگانگی وجود جواب مساله‌ی مقدار اولیه) [۴۸]
فرض کنید E زیرمجموعه‌ی بازی از \mathbb{R}^n و شامل نقطه‌ی x_0 باشد و هر f_i تابعی به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر روی \mathbb{R}^n باشد به عبارتی $f_i \in C^1(\mathbb{R})$ ، در این صورت به ازای هر $a > 0$ که $a \in \mathbb{R}$ ، مساله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر روی بازه‌ی $[-a, a]$ جواب یکتای $x(t)$ است:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

تعریف ۵.۲.۱ ([۴۸]). جواب سیستم دینامیکی (۱۸.۱) را نقطه‌ی تعادل^{۱۳}، نقطه‌ی ساکن یا نقطه‌ی بحرانی می‌نامیم و با x^e نشان می‌دهیم، هرگاه $f(x^e) = 0$. لذا نقطه‌ی بحرانی جوابی از سیستم $\dot{x}(t) = f(x(t))$ است که مستقل از زمان می‌باشد.

تعریف ۶.۲.۱ ([۴۸]). نقطه ساکن x^e ، نقطه‌ی پایدار^{۱۴} نامیده می‌شود هرگاه

$$\forall \varepsilon \geq 0 \quad \exists \delta > 0 \quad s.t \quad \|x(t_0) - x^e\| < \delta \implies \|x(t) - x^e\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

تعریف ۷.۲.۱ ([۴۸]). نقطه ساکن x^e به‌طور مجانبی پایدار^{۱۵} است هرگاه پایدار باشد و $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^e$.

شکل ۱.۱ مفهوم ساکن پایدار و نقطه‌ی ساکن به‌طور مجانبی پایدار را روشن‌تر می‌کند.

⁹State Vector

¹⁰Motion

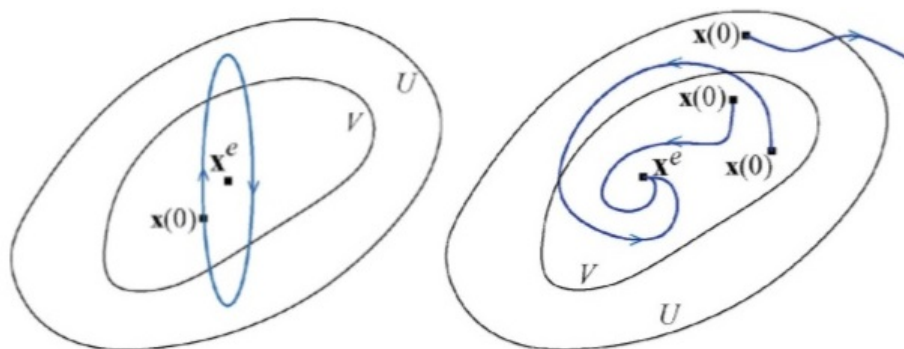
¹¹Nonautonomous

¹²Autonomous

¹³Equilibrium point

¹⁴Stability

¹⁵Asymptotic stability



نقطه ساکن پایدار

نقطه ساکن به طور مجانبی پایدار

شکل ۱.۱: تفاوت میان نقطه‌ی ساکن پایدار و نقطه‌ی ساکن به طور مجانبی پایدار

نظریه‌ی لیاپانف و پایداری نقطه

روش لیاپانف^{۱۶} یکی از بهترین روش‌هایی است که در مورد تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی می‌شناسیم. این روش برای سیستم‌های خطی و غیرخطی از هر مرتبه‌ای قابل استفاده است. این روش شرط کافی برای پایداری مجانبی نقطه‌ی ساکن یک سیستم دینامیکی غیرخطی را می‌دهد. به عبارتی بدون حل معادلات وضعیت سیستم، می‌توان پایداری نقطه‌ی ساکن سیستم غیرخطی را بررسی کرد.

لیاپانف پیشنهاد کرد که ممکن است توابعی وابسته به مسیر وجود داشته باشند که خواص آنها تعیین می‌کند که آیا مسیر به یک نقطه‌ی ساکن همگرا می‌شود یا خیر. چنین تابعی به‌عنوان تابع انرژی برای سیستم دینامیکی در نظر گرفته می‌شود که به تابع لیاپانف نیز معروف است. قضیه‌ی لیاپانف به‌طور مختصر بیان می‌کند که نقطه‌ی ساکن یا بحرانی یک سیستم دینامیکی به‌طور مجانبی پایدار است هرگاه یک تابع لیاپانف در همسایگی این نقطه وجود داشته باشد.

تعریف ۸.۲.۱ ([۴۸]). تابع لیاپانف یا تابع انرژی تابعی مانند $E(x(t))$ است که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $E(x(t))$ و مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول آن همگی پیوسته باشند، به عبارتی $E(x(t)) \in C^1$.

۲. $E(x(t)) \geq 0$ به ویژه در همسایگی باز نقطه‌ی ساکن x^e ، $E(x(t)) > 0$ و $E(x^e) = 0$.

۳. مشتق تابع $E(x(t))$ نسبت به زمان منفی است، به عبارتی:

$$\frac{dE(x(t))}{dt} = [\nabla_{x(t)} E(x(t))]^T \cdot \dot{x}(t) = [\nabla_{x(t)} E(x(t))]^T \cdot f(x(t)) < 0, x \in \Omega - \{x^e\}.$$

و در نقطه‌ی ساکن x^e داریم $\frac{dE(x^e)}{dt} = 0$.

¹⁶Lyapunov

[۴۸] نقطه‌ی ساکن سیستم $\dot{x}(t) = f(x(t))$ پایدار است اگر یک تابع لیاپانف متناظر با این سیستم وجود داشته باشد.

[۴۸] نقطه‌ی ساکن سیستم $\dot{x}(t) = f(x(t))$ به طور سراسری پایدار است اگر یک تابع لیاپانف متناظر با این سیستم وجود داشته باشد و در یک همسایگی نقطه‌ی ساکن x^e ،

$$\frac{dE(x(t))}{dt} < 0.$$

ملاحظه می‌شود که اگر $\frac{dE(x(t))}{dt} \leq 0$ باشد، آنگاه x^e پایدار است ولی الزاماً به‌طور مجانبی پایدار نیست.

۳.۲.۱ بهینه‌سازی و شبکه‌های عصبی

بحث و بررسی در مورد کاربرد شبکه‌های عصبی (شبکه‌های عصبی مصنوعی) در بهینه‌سازی از اوایل سال ۱۹۸۰ میلادی آغاز شده است. نتایج پژوهش‌های انجام شده از آن زمان تاکنون، مواردی چون برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی درجه دوم، برنامه‌ریزی هندسی و برنامه‌ریزی غیرخطی را در برمی‌گیرد. ایده‌ی اصلی در استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی برای مسائل بهینه‌سازی استفاده از یک تابع انرژی (نامنفی) و یک سیستم دینامیکی است که این دو بیان‌کننده‌ی مدل‌های شبکه‌های عصبی مصنوعی متناظر مسائل بهینه‌سازی هستند. سیستم دینامیکی بیان شده معمولاً یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه‌ی اول است. انتظار می‌رود که برای یک نقطه‌ی آغازین نقطه‌ی پایداری دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی به‌دست آمده، جواب بهینه‌ی مساله‌ی بهینه‌سازی اصلی باشد. بنابراین برای یک مدل متناظر با مسائل بهینه‌سازی، اصل اساسی استفاده از شبکه‌های عصبی در اینگونه مسائل به‌صورت زیر بیان می‌شود:

”برای یک نقطه‌ی آغازین دلخواه، نقطه‌ی تعادل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی به‌دست آمده جواب بهینه‌ی مساله‌ی اصلی است و برعکس.”

مدل‌های مطرح شده‌ی متناظر مسائل مختلف بهینه‌سازی را می‌توان به دو قسمت مدل‌های دوگانی و مدل‌های جریمه‌ای تقسیم نمود. نظریه‌ی دوگانی و توابع جریمه‌ای دو نظریه‌ی بسیار مهم در مسائل بهینه‌سازی هستند که اکثر این مسائل بر مبنای این دو روش کلاسیک قابل حل هستند. در نظریه‌ی توابع جریمه‌ای معمولاً از مدل‌های گرادیانی برای معرفی مدل مورد نظر استفاده می‌شود، ولی در نظریه‌ی دوگانی از مدل‌های اولیه-دوگان برای حل این مسائل استفاده می‌شود. اگر بتوان متناظر با هر مساله‌ی بهینه‌سازی، روش مشخصی را ارائه نمود که آن روش برای حل آن مساله شرایط لازم و کافی را برآورده سازد، آنگاه می‌توان متناظر با آن روش، یک مدل شبکه‌ی عصبی برای مساله‌ی مورد نظر بسازیم. در دهه‌های گذشته، شبکه‌های عصبی به طور گسترده‌ای برای بهینه‌سازی بررسی شده‌اند.

برای اولین بار هاپفیلد^{۱۷} و تانک^{۱۸} شبکه‌های عصبی را برای مسائل برنامه‌ریزی خطی پیشنهاد دادند [۱۱، ۳۶] کار آنها توسط بسیاری از محققان جهت بررسی سایر مدل‌های شبکه‌ی عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی الهام گرفته شده است. کندی^{۱۹} و چاو^{۲۰} [۱۳] یک شبکه‌ی عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی ارائه دادند. در ادامه مدل‌های شبکه‌عصبی متفاوتی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی، نامساوی وردشی، برنامه‌ریزی غیرخطی و غیره ارائه شده است. برای توضیحات بیشتر مراجع [۱۲، ۱۵، ۲۴، ۳۱، ۳۴، ۴۴] را ببینید.

¹⁷Hopfield

¹⁸Tank

¹⁹Kennedy

²⁰Chua

فصل ۲

یک مدل شبکه‌عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای فازی

۱.۲ مقدمه

در این فصل، مساله برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای فازی زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\min \quad \tilde{f}(x) = \tilde{c}^T x + \frac{1}{2} x^T \tilde{H} x, \quad (1.2)$$

$$\text{s.t.} \quad \tilde{A}x \leq \tilde{b}. \quad (2.2)$$

در اینجا \tilde{H} ماتریس نیمه‌معین مثبت^۱ فازی و متقارن در فضای $n \times n$ است (در تعریف ۱.۳.۲ می‌بینید). \tilde{c} ، \tilde{b} و \tilde{A} به ترتیب ماتریس‌هایی در فضای $m \times n$ ، $n \times 1$ و $m \times 1$ هستند. اخیراً، مسائل برنامه‌ریزی فازی گسترش زیادی یافته‌اند. در [۴۰] و [۲] تابع لاگرانژی برای مساله بهینه‌سازی فازی را از طریق مفهوم ضرب داخلی فازی ارائه داد. همچنین در [۴۱]

¹Positive semi-definite

²Wu

۱۲ یک مدل شبکه‌عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای فازی

و مفهوم جواب مساله بهینه‌سازی فازی را معرفی کرد که مشابه مفهوم جواب بهینه پارتو در مسایل برنامه‌ریزی چندهدفه با تحمیل یک ترتیب نسبی بر مجموعه تمام اعداد فازی است. برخی مسائل دنیای واقعی و بسیاری از کاربردهای جالب به عنوان یک مساله برنامه‌ریزی درجه دوم طبقه‌بندی می‌شوند، مانند مدیریت موجودی^۳ [۱]، انتخاب سبد^۴ [۳، ۴۳]، طراحی مهندسی^۵ [۲۷] و غیره. این مسائل واقعی داده‌های مبهم دارند که می‌توان آن‌ها را با استفاده از منطق فازی مورد بررسی قرارداد. بنابراین، توسعه روش‌ها برای حل مساله برنامه‌ریزی درجه دوم با خاصیت فازی بودن به عنوان روشی برای حل این مسائل مطرح شد. برخی مطالعات برای حل مسائل برنامه‌ریزی فازی توسعه یافته‌اند [۳، ۸، ۱۶، ۳۳]. برای حل مسائل برنامه‌ریزی فازی، در [۳] عمار^۶ و خلیفه^۷ یک مدل را توصیف کردند که در آن تمام متغیرهای تصمیم غیرمنفی بوده و عبارت خطی در تابع هدف وجود ندارد. آن‌ها مساله اصلی را به مسائل کران‌پایین و مسائل کران‌بالا تبدیل کردند. در [۳] دو برنامه درجه دوم را می‌توان با استفاده از شرایط بهینگی کاریش-کان-تاکر^۸ برای هر α -برش حل کرد. جواب بهینه مساله اصلی در داخل فاصله ایجاد شده برای جواب‌های بهینه بدست آمده از مسائل کران‌پایین و مسائل کران‌بالا است. همچنین، در [۱۶] لیو^۹ مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی را به یک مساله برنامه‌ریزی ریاضی دوسطحی برای یافتن محدوده ارزش‌های عینی فازی تبدیل کرد. سپس او بیان کرد که چگونه می‌توان یک برنامه‌ریزی ریاضی دوسطحی را به برنامه‌ریزی درجه دوم معمولی تبدیل کند. علاوه بر این، لیو [۱۶] مساله (۱.۲) و (۲.۲) را به مسائل کران‌پایین و مسائل کران‌بالا تبدیل کرد. باین‌حال، مساله کران‌بالا یک برنامه‌ریزی غیرخطی بود. در اینجا ما مساله (۱.۲) و (۲.۲) را به صورت یک مساله دوهدفه فرموله می‌کنیم. در ادامه، مساله دوهدفه به یک مساله‌وزنی کاهش داده می‌شود و پس از آن دوگان لاگرانژی برای آن ساخته می‌شود. سپس، مساله دوگان و شکل فازی برنامه درجه دوم دوگان ارایه می‌شوند. در ادامه نشان می‌دهیم که جواب مساله به دست آمده برابر با نقطه تعادل یک سیستم دینامیکی است. ما این سیستم دینامیکی را به عنوان یک مدل شبکه‌عصبی می‌نامیم و برای حل معادله (۱.۲) و (۲.۲) به کار می‌بریم.

۲.۲ مقدمات

در این بخش برخی از موارد مقدماتی نظریه مجموعه‌های فازی و بهینه‌سازی را ارایه می‌دهیم.

³Inventory management

⁴Portfolio selection

⁵Engineering design

⁶Ammar

⁷khalifa

⁸Karush-Kuhn-Tucker

⁹Liu

۱.۲.۲ نظریه مجموعه فازی

در اینجا، موارد مورد نیاز از مجموعه‌های فازی ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۲.۲ ([۱۰]). یک عدد فازی، مجموعه‌ای فازی $\tilde{u} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ است که دارای خواص زیر است:

۱. \tilde{u} تابعی نیمه‌پیوسته از بالا می‌باشد.

۲. \tilde{u} طبیعی است، یعنی وجود دارد $x_0 \in \mathbb{R}$ با $\tilde{u}(x_0) = 1$.

۳. \tilde{u} یک محدب فازی است یعنی $\tilde{u}((1-\lambda)x + \lambda y) \geq \min\{\tilde{u}(x), \tilde{u}(y)\}$ هرگاه $x, y \in \mathbb{R}$ و $\lambda \in [0, 1]$.

۴. $cl(\text{supp } \tilde{u}) = cl\{x \in \mathbb{R} : \tilde{u}(x) > 0\}$ یک مجموعه فشرده است.

مجموعه تمام اعداد فازی با E^1 نشان داده می‌شود. همچنین مجموعه‌های α -برش عدد فازی $\tilde{u} \in E^1$ با $[\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha)]$ نشان داده می‌شود و تعریف می‌شود:

$$\tilde{u}[\alpha] = [u]^\alpha = [\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha)] = \begin{cases} x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha, & \text{if } 0 < \alpha \leq 1, \\ cl(\text{supp } \tilde{u}), & \text{if } \alpha = 0. \end{cases}$$

تعریف ۲.۲.۲ ([۱۰]). عدد فازی \tilde{u} با هر زوج $\tilde{u} = (\underline{u}, \bar{u})$ از توابع $\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ به‌طور کامل تعیین می‌شود، با تعریف نقاط پایانی α -برش، به‌طوری که در سه شرط زیر صدق کند:

۱. $\underline{u}(\alpha)$ یک تابع کراندار یکنواخت صعودی (غیر نزولی) پیوسته از چپ برای تمام $\alpha \in (0, 1]$ و پیوسته از راست برای $\alpha = 0$ است.

۲. $\bar{u}(\alpha)$ یک تابع کراندار یکنواخت نزولی (غیر صعودی) پیوسته از چپ برای تمام $\alpha \in (0, 1]$ و پیوسته از راست برای $\alpha = 0$ است.

۳. برای تمام $\alpha \in (0, 1]$ داریم $\underline{u}(\alpha) \leq \bar{u}(\alpha)$.

بنابراین، ما می‌توانیم عدد فازی $\tilde{u} \in E^1$ با نقاط پایانی بازه $[\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha)]$ تعیین می‌شود. بنابراین، ما می‌توانیم عدد فازی \tilde{u} را با سه‌گانه پارامتری زیر تعیین کنیم:

$$\{(\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha), \alpha) : \alpha \in [0, 1]\}.$$

فرض کنید \tilde{A} یک ماتریس $m \times n$ فازی باشد، آنگاه با توجه به نکات بالا $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m \times n}$ می‌تواند به صورت زیر نشان داده شود:

$$\tilde{A} = \left(\left\{ (\underline{a}_{ij}(\alpha), \bar{a}_{ij}(\alpha), \alpha) : \alpha \in [0, 1] \right\} \right)_{m \times n}.$$

۱۴ یک مدل شبکه‌عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای فازی

در سرتاسر این فصل، \tilde{A} را با $(\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha))$ نشان می‌دهیم به‌طوریکه

$$\underline{A}(\alpha) = (\underline{a}_{ij}(\alpha))_{m \times n}, \quad \overline{A}(\alpha) = (\overline{a}_{ij}(\alpha))_{m \times n}.$$

تعریف ۳.۲.۲ ([۴۲]). فرض کنید $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ و $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ دو بازه بسته در \mathbb{R} هستند. گویند $A \preceq B$ اگر و فقط اگر $\underline{a} \leq \underline{b}$ و $\overline{a} \leq \overline{b}$. همچنین، گویند $A \prec B$ اگر و فقط اگر $A \preceq B$ و $A \neq B$ باشد. به‌طورمعادل، $A \prec B$ اگر و فقط اگر

$$\begin{cases} \underline{a} < \underline{b}, \\ \overline{a} < \overline{b}, \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \underline{a} \leq \underline{b}, \\ \overline{a} < \overline{b}, \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \underline{a} < \underline{b}, \\ \overline{a} \leq \overline{b}. \end{cases}$$

تعریف ۴.۲.۲ ([۱۰]). یک زیرمجموعه S از E^1 از بالا کراندار است، اگر عدد فازی $\tilde{v} \in E^1$ وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که $\tilde{u} \leq \tilde{v}$ برای هر $\tilde{u} \in E^1$. $\tilde{v}_0 \in E^1$ سوپریم S گفته می‌شود اگر \tilde{v}_0 کران بالای S باشد و در $\tilde{v}_0 \leq v$ صدق می‌کند برای هر کران بالای \tilde{v} از S ما این را به صورت $\tilde{v}_0 = \sup_{\tilde{u} \in A} \tilde{u}$ نشان می‌دهیم. A یک کران پایین و اینفیموم از S به‌طور مشابه تعریف می‌شود، S کراندار گفته می‌شود اگر هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد.

تعریف ۵.۲.۲ ([۴۲]). یک عدد فازی مثلثی $\tilde{u} = (a, b, c)$ با $\tilde{u} = (a, b, c)$ نشان داده می‌شود و α -برش‌های آن با $\tilde{u}[\alpha] = [a + \alpha(b - a), c + \alpha(b - c)]$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۶.۲.۲ ([۱۹]). برای اعداد فازی دلخواه $\tilde{u} = [\underline{u}, \overline{u}]$ و $\tilde{v} = [\underline{v}, \overline{v}]$ فاصله بین \tilde{u} و \tilde{v} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha), \quad (۳.۲)$$

به‌طوری‌که d_H فاصله هاسدورف است.

تعریف ۷.۲.۲ ([۳۷]). منفی (متضاد) عدد فازی \tilde{u} ، عدد فازی $-\tilde{u}$ است. اگر $\tilde{u} = [\underline{u}(\alpha), \overline{u}(\alpha)]$ آنگاه $-\tilde{u} = [-\overline{u}(\alpha), -\underline{u}(\alpha)]$ همچنین

$$.۱ \quad (k\tilde{u})[\alpha] = [\min\{k\underline{u}(\alpha), k\overline{u}(\alpha)\}, \max\{k\overline{u}(\alpha), k\underline{u}(\alpha)\}], \quad \forall k \in \mathbb{R}^+$$

$$.۲ \quad (\tilde{u} + \tilde{v})[\alpha] = [\underline{u}(\alpha) + \underline{v}(\alpha), \overline{u}(\alpha) + \overline{v}(\alpha)]$$

$$.۳ \quad (\tilde{u} - \tilde{v})[\alpha] = [\underline{u}(\alpha) - \overline{v}(\alpha), \overline{u}(\alpha) - \underline{v}(\alpha)]$$

$$.۴ \quad (\tilde{u}\tilde{v})[\alpha] = [(\underline{u}\underline{v})(\alpha), (\overline{u}\overline{v})(\alpha)]$$

¹⁰A triangular fuzzy number

که در آن

$$\begin{aligned} (\underline{uv})(\alpha) &= \min \{ \bar{u}(\alpha)\underline{v}(\alpha), \bar{u}(\alpha)\bar{v}(\alpha), \underline{u}(\alpha)\underline{v}(\alpha), \underline{u}(\alpha)\bar{v}(\alpha) \}, \\ (\overline{uv})(\alpha) &= \max \{ \bar{u}(\alpha)\underline{v}(\alpha), \bar{u}(\alpha)\bar{v}(\alpha), \underline{u}(\alpha)\underline{v}(\alpha), \underline{u}(\alpha)\bar{v}(\alpha) \}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

هر $m \in \mathbb{R}$ می تواند به عنوان عدد فازی \tilde{m} به صورت زیر تلقی شود،

$$\tilde{m}(r) = \begin{cases} 1, & \text{if } r = m, \\ 0, & \text{if } r \neq m. \end{cases} \quad (5.2)$$

از تعریف ۲.۲.۲ می توانیم $\tilde{m} = (m, m)$ بنویسیم. بالاخص، عدد فازی $\tilde{0}$ به صورت $\tilde{0}(r) = 1$ تعریف می شود اگر $r = 0$ و در غیر این صورت $\tilde{0}(r) = 0$.

\tilde{A} بردار فازی n -بعدی گفته می شود، اگر اجزای \tilde{A} از n عدد فازی تشکیل شده باشند که با $\tilde{A} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ نشان داده می شود.

یک بردار α -سطح از عدد فازی $\tilde{A} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{A}[\alpha] = (\tilde{x}_1[\alpha], \tilde{x}_2[\alpha], \dots, \tilde{x}_n[\alpha]),$$

و

$$\underline{A}[\alpha] = (\underline{x}_1[\alpha], \underline{x}_2[\alpha], \dots, \underline{x}_n[\alpha]), \quad \overline{A}[\alpha] = (\overline{x}_1[\alpha], \overline{x}_2[\alpha], \dots, \overline{x}_n[\alpha]).$$

همچنین برای $\tilde{A} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ و $\tilde{B} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)^T$ داریم:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (\tilde{x}_1 + \tilde{y}_1, \tilde{x}_2 + \tilde{y}_2, \dots, \tilde{x}_n + \tilde{y}_n)^T, \quad k\tilde{A} = (k\tilde{x}_1, k\tilde{x}_2, \dots, k\tilde{x}_n)^T, \quad (k \in \mathbb{R}).$$

تعریف ۸.۲.۲ ([۴۸]). نگاشت $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

۱. یکنوا نامیده می شود اگر برای هر دو نقطه $x, y \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$\langle x - y, F(x) - F(y) \rangle \geq 0.$$

۲. اکیداً یکنوا نامیده می شود اگر برای هر دو نقطه متمایز $x, y \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$\langle x - y, F(x) - F(y) \rangle > 0.$$

۳. قویاً یکنوا نامیده می شود اگر یک ثابت $\beta > 0$ وجود داشته باشد که برای هر دو نقطه

$x, y \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$\langle x - y, F(x) - F(y) \rangle \geq \beta \|x - y\|^2.$$

که $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی را نشان می دهد.

قضیه ۱.۲.۲ ([۲۶]). فرض کنید تابع $F: K \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ روی K به طور پیوسته مشتق پذیر باشد، آنگاه F روی K یکنوا (اکیداً) است اگر و فقط اگر ماتریس ژاکوبین آن $\nabla F(x)$ برای هر $x \in K$ نیمه معین مثبت (معین مثبت^{۱۱}) باشد.

¹¹Positive definite

۲.۲.۲ حسابان فازی

در اینجا برخی ملزومات از حسابان فازی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۹.۲.۲ ([۲۷]). فرض کنید $\tilde{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow E^1$ یک نگاشت فازی باشد به طوری که Ω یک زیرمجموعه باز \mathbb{R}^n است. α -برش از \tilde{f} در $t \in \Omega$ را با $\tilde{f}(t)[\alpha] = [\underline{f}(t, \alpha), \overline{f}(t, \alpha)]$ نشان می‌دهیم که یک بازه بسته و کراندار است. در اینجا، $\underline{f}(t, \alpha)$ و $\overline{f}(t, \alpha)$ توابعی با مقادیر حقیقی هستند، به طوری که $\underline{f}(t, \alpha)$ یک تابع صعودی کراندار از α و $\overline{f}(t, \alpha)$ یک تابع نزولی کراندار از α است. همچنین برای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، $\underline{f}(t, \alpha) \leq \overline{f}(t, \alpha)$.

تعریف ۱۰.۲.۲ ([۲۷]). فرض کنید d یک متریک باشد که در تعریف ۶.۲.۲ داده شده است. تابع فازی $\tilde{f} : (a, b) \rightarrow E^1$ در $\hat{t} \in (a, b)$ مشتق‌پذیر است، اگر $\tilde{f}'(\hat{t}) \in E^1$ وجود داشته باشد به طوری که حدود

$$d \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(\hat{t} + h) - \tilde{f}(\hat{t})}{h}, \tilde{f}'(\hat{t}) \right), \quad d \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(\hat{t}) - \tilde{f}(\hat{t} - h)}{h}, \tilde{f}'(\hat{t}) \right), \quad (۶.۲)$$

وجود داشته باشند و هر دو برابر صفر باشند. آنگاه $\tilde{f}'(\hat{t})$ مشتق \tilde{f} در \hat{t} گفته می‌شود [۱۹].

قضیه ۲.۲.۲ ([۲۷]). فرض کنید \tilde{f} یک تابع فازی با $\tilde{f}(t)[\alpha] = [\underline{f}(t, \alpha), \overline{f}(t, \alpha)]$ باشد به طوری که $0 \leq \alpha \leq 1$ و \tilde{f} با توجه به تعریف ۱۰.۲.۲ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $\underline{f}(t, \alpha)$ و $\overline{f}(t, \alpha)$ توابع مشتق‌پذیر هستند و داریم:

$$\tilde{f}'(t)[\alpha] = [\underline{f}'(t, \alpha), \overline{f}'(t, \alpha)].$$

تعریف ۱۱.۲.۲ ([۲۷]). فرض کنید $\tilde{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow E^1$ یک نگاشت فازی باشد، به طوری که Ω یک زیرمجموعه باز \mathbb{R}^n است. فرض کنید $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \Omega$ و $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ به عنوان مشتق جزئی نسبت به متغیر x_i ، i ام باشد. فرض کنید که برای تمام $\alpha \in [0, 1]$ ، $\underline{f}(x, \alpha)$ و $\overline{f}(x, \alpha)$ (α -برش از \tilde{f}) دارای مشتق‌های جزئی پیوسته باشند، یعنی $\frac{\partial \underline{f}(x, \alpha)}{\partial x_i}$ و $\frac{\partial \overline{f}(x, \alpha)}{\partial x_i}$ پیوسته باشند. تعریف می‌کنیم،

$$\frac{\partial \tilde{f}(x)}{\partial x_i}[\alpha] = \left[\frac{\partial \underline{f}(x, \alpha)}{\partial x_i}, \frac{\partial \overline{f}(x, \alpha)}{\partial x_i} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (۷.۲)$$

اگر برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ (۷.۲) α -برش‌هایی از یک عدد فازی را تعریف کند، آنگاه خواهیم گفت که \tilde{f} در x مشتق‌پذیر است و می‌نویسیم:

$$\tilde{\nabla} \tilde{f}(x) = \left(\frac{\partial \tilde{f}(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial \tilde{f}(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \tilde{f}(x)}{\partial x_n} \right). \quad (۸.۲)$$

$\tilde{\nabla} \tilde{f}(x)$ را گرادیان تابع فازی \tilde{f} در x می‌نامیم (اینجا $\tilde{\nabla}$ نشان‌دهنده گرادیان تابع فازی \tilde{f} است).

یک زیرمجموعه C از Ω محدب گفته می‌شود، اگر $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ هرگاه $x \in C$ ، $y \in C$ و $0 < \lambda < 1$.

قضیه ۳.۲.۲ ([۳۸]). یک نگاشت فازی $\tilde{f} : C \rightarrow E^1$ که بر روی یک زیرمجموعه محدب C در Ω تعریف می‌شود محدب است، اگر و فقط اگر

$$\tilde{f}((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\tilde{f}(x) + \lambda\tilde{f}(y), \quad \lambda \in [0, 1],$$

برای تمام x و y در C .

نگاشت فازی $\tilde{f} : C \rightarrow E^1$ که بر روی یک زیرمجموعه محدب C در Ω تعریف می‌شود کاملاً محدب نامیده می‌شود اگر،

$$\tilde{f}((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)\tilde{f}(x) + \lambda\tilde{f}(y), \quad \forall x, y \in C, x \neq y, \quad \lambda \in (0, 1).$$

با توجه به نمایش پارامتریک عدد فازی، یک نگاشت فازی $\tilde{f}(x)$ می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\tilde{f}(x) = \{(\underline{f}(x)(\alpha), \overline{f}(x)(\alpha), \alpha) : \alpha \in [0, 1]\}.$$

قضیه ۴.۲.۲ ([۳۸]). فرض کنید که C یک زیرمجموعه محدب در Ω و $\tilde{f} : C \rightarrow E^1$ یک نگاشت فازی باشد. آنگاه \tilde{f} محدب است اگر و فقط اگر هر دوی $\underline{f}(x)(\alpha)$ و $\overline{f}(x)(\alpha)$ توابع محدب در x باشند برای هر $\alpha \in [0, 1]$ ثابت.

قضیه ۵.۲.۲ ([۳۸]). اگر $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_m$ نگاشت‌های محدب فازی باشند که در $C \subseteq \Omega$ با $\lambda_1 \tilde{f}_1 + \lambda_2 \tilde{f}_2 + \dots + \lambda_m \tilde{f}_m$ آنگاه $\lambda_i \geq 0 (i = 1, \dots, m)$ تعریف شده‌اند، یک نگاشت فازی محدب در C است.

۳.۲.۲ بهینه‌سازی فازی

در اینجا ملزوماتی برای بهینه‌سازی فازی بررسی می‌شود.

تعریف ۱۲.۲.۲ ([۴۲]). فرض کنید $f(x) = [f_1(x), f_2(x)]$ یک تابع با مقادیر بازه‌ای در $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ است. مساله کمینه‌سازی زیر را با تابع هدف بازه‌ای - مقدار در نظر بگیرید:

$$\min \quad f(x) = [f_1(x), f_2(x)], \quad (9.2)$$

$$\text{s.t.} \quad x \in \Omega, \quad (10.2)$$

که در آن مجموعه ممکن Ω به عنوان یک زیرمجموعه محدب \mathbb{R}^n فرض می‌شود.

۱۸ یک مدل شبکه‌عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای فازی

تعریف ۱۳.۲.۲ ([۲۲]). بردار تصمیم $x^* \in \Omega$ یک بهینه پارتو^{۱۲} برای مساله (۹.۲) و (۱۰.۲) است، اگر بردار تصمیم $x \in \Omega$ دیگری وجود نداشته‌باشد، به طوری که $f_i(x) \leq f_i(x^*)$ برای $i = 1, 2$ و $f_j(x) < f_j(x^*)$ برای حداقل یک اندیس j .

تعریف ۱۴.۲.۲ ([۴۲]). نقطه‌ی شدنی $x^* \in \Omega$ جواب کارا^{۱۳} برای (۹.۲) و (۱۰.۲) است، اگر هیچ نقطه شدنی $\bar{x} \in \Omega$ که در آن $f(\bar{x}) < f(x^*)$ وجود نداشته‌باشد. مساله وزن‌دار زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \quad w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x), \quad (11.2)$$

$$\text{s.t.} \quad x \in \Omega, \quad (12.2)$$

به طوری که $w_i \geq 0$ برای $i = 1, 2$ و $w_1 + w_2 = 1$.

قضیه ۶.۲.۲ ([۲۲]). جواب منحصر به فرد مساله (۱۱.۲) و (۱۲.۲) یک بهینه پارتو است، اگر ضرایب وزنی مثبت باشند.

قضیه ۷.۲.۲ ([۲۲]). فرض کنید مساله بهینه‌سازی دوهدفه محدب (۹.۲) و (۱۰.۲) باشد. اگر $x^* \in \Omega$ یک بهینه پارتو باشد، آنگاه بردار وزنی w موجود است به طوری که x^* جواب بهینه برای مساله (۱۱.۲) و (۱۲.۲) است.

نتیجه ۱.۲.۲ ([۲۲]). یک نقطه جواب بهینه پارتو برای مساله بهینه‌سازی دوهدفه (۹.۲) و (۱۰.۲) است، اگر و فقط اگر آن نقطه یک جواب از مساله وزن‌دار باشد به طوری که تمام ضرایب وزنی مثبت باشند.

مساله بهینه‌سازی دوهدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \quad (f(x), \bar{f}(x)), \quad (13.2)$$

$$\text{s.t.} \quad x \in \Omega. \quad (14.2)$$

مساله وزن‌دار متناظر با (۱۳.۲) و (۱۴.۲) را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\min \quad w_1 f(x) + w_2 \bar{f}(x), \quad (15.2)$$

$$\text{s.t.} \quad x \in \Omega, \quad (16.2)$$

به طوری که w_1 و w_2 اعداد حقیقی مثبت هستند و $w_1 + w_2 = 1$. براساس نتیجه ۱.۲.۲، اگر x^* جواب بهینه مساله (۱۵.۲) و (۱۶.۲) باشد، آنگاه x^* جواب بهینه پارتو مساله (۱۳.۲) و (۱۴.۲) است و با توجه به تعریف ۱۴.۲.۲، x^* جواب کارا برای مساله (۹.۲) و (۱۰.۲) است.

¹²Pareto optimal

¹³Efficient solution

۳.۲ مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی

تعریف ۱.۳.۲. ماتریس فازی $n \times n$ ، $\tilde{A} = (\{(a_{ij}(\alpha), \bar{a}_{ij}(\alpha), \alpha) : \alpha \in [0, 1]\})_{n \times n}$ نیمه‌معین مثبت و متقارن گفته می‌شود اگر برای هر $\alpha \in [0, 1]$ و $\underline{A}(\alpha) = (a_{ij}(\alpha))_{n \times n}$ و $\bar{A}(\alpha) = (\bar{a}_{ij}(\alpha))_{n \times n}$ یک ماتریس فازی $n \times n$ نیمه‌معین مثبت و متقارن باشد.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنید $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^n$ یک جواب بهینه موضعی برای مساله (۱.۲) و (۲.۲) باشد، آنگاه \bar{x} یک جواب بهینه سراسری برای مساله (۱.۲) و (۲.۲) است. همچنین اگر \bar{f} اکیدا محدب باشد، آنگاه \bar{x} جواب بهینه یکتای سراسری (۱.۲) و (۲.۲) است. مساله (۱.۲) و (۲.۲) را در نظر بگیرید. می‌توانیم این مساله را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\min [f(\alpha)x, \bar{f}(\alpha)x], \quad (17.2)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} [\underline{A}(\alpha), \bar{A}(\alpha)]x \leq [\underline{b}(\alpha), \bar{b}(\alpha)], \\ 0 \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (18.2)$$

که در آن

$$\underline{f}(\alpha)x = \underline{c}(\alpha)^T x + \frac{1}{\alpha} x^T \underline{H}(\alpha)x \quad \text{و} \quad \bar{f}(\alpha)x = \bar{c}(\alpha)^T x + \frac{1}{\alpha} x^T \bar{H}(\alpha)x.$$

مساله (۱۷.۲) و (۱۸.۲) را می‌توان به صورت یک مساله دوهدفه نوشت:

$$\min (f(\alpha)x, \bar{f}(\alpha)x), \quad (19.2)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \underline{A}(\alpha)x \leq \underline{b}(\alpha), \\ \bar{A}(\alpha)x \leq \bar{b}(\alpha), \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (20.2)$$

با توجه به تعریف ۱۲.۲.۲، با فرمول‌بندی مجدد (۱۹.۲) و (۲۰.۲) به صورت یک مساله وزن‌دار تعریف شده در (۱۵.۲) و (۱۶.۲) داریم:

$$\min w_1 \underline{f}(\alpha)x + w_2 \bar{f}(\alpha)x, \quad (21.2)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \underline{A}(\alpha)x \leq \underline{b}(\alpha), \\ \bar{A}(\alpha)x \leq \bar{b}(\alpha), \\ 0 \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (22.2)$$

که در آن $w_1, w_2 \geq 0$ و $w_1 + w_2 = 1$.

تعریف می کنیم:

$$A'(\alpha) = \begin{bmatrix} \underline{A}(\alpha) \\ \overline{A}(\alpha) \end{bmatrix}, \quad b'(\alpha) = \begin{bmatrix} \underline{b}(\alpha) \\ \overline{b}(\alpha) \end{bmatrix}.$$

در نتیجه مساله (۲۱.۲) و (۲۲.۲) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\min \quad w_1 \underline{f}(\alpha)x + w_2 \overline{f}(\alpha)x, \quad (23.2)$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} A'(\alpha)x \leq b'(\alpha), \\ 0 \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (24.2)$$

که در آن $w_1 + w_2 = 1$ و $w_1, w_2 \geq 0$. شرایط بهینگی K.K.T برای مساله (۲۳.۲) و (۲۴.۲) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} w_1 [\underline{H}(\alpha)x + \underline{c}(\alpha)] + w_2 [\overline{H}(\alpha)x + \overline{c}(\alpha)] + (A'(\alpha))^T u = 0, \\ A'(\alpha)x - b'(\alpha) \leq 0, \\ u^T (A'(\alpha)x - b'(\alpha)) = 0, \end{cases} \quad (25.2)$$

که در آن $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ و u_1 و u_2 ضرایب لاگرانژ هستند، $w_1 + w_2 = 1$ ، $w_1, w_2 \geq 0$ و $0 \leq \alpha \leq 1$. اکنون یک مدل شبکه عصبی کارا به صورت زیر برای حل مساله اولیه (۱.۲) و (۲.۲) ارائه می دهیم:

$$\frac{dx}{dt} = - \left[w_1 (\underline{H}(\alpha)x + \underline{c}(\alpha)) + w_2 (\overline{H}(\alpha)x + \overline{c}(\alpha)) + \underline{A}(\alpha)^T (u_1 + \underline{A}(\alpha)x - \underline{b}(\alpha))^+ + \overline{A}(\alpha)^T (u_2 + \overline{A}(\alpha)x - \overline{b}(\alpha))^+ \right], \quad (26.2)$$

$$\frac{du_1}{dt} = (u_1 + \underline{A}(\alpha)x - \underline{b}(\alpha))^+ - u_1, \quad (27.2)$$

$$\frac{du_2}{dt} = (u_2 + \overline{A}(\alpha)x - \overline{b}(\alpha))^+ - u_2, \quad (28.2)$$

که در آن $0 \leq \alpha \leq 1$ است، در نتیجه صورت فشرده (۲۶.۲) - (۲۸.۲) عبارت است از:

$$\frac{dx}{dt} = - \left[w_1 (\underline{H}(\alpha)x + \underline{c}(\alpha)) + w_2 (\overline{H}(\alpha)x + \overline{c}(\alpha)) + A'(\alpha)^T (u + A'(\alpha)x - b(\alpha))^+ \right], \quad (29.2)$$

$$\frac{du}{dt} = [u + A'(\alpha)x - b(\alpha)]^+ - u, \quad (30.2)$$

که در آن $0 \leq \alpha \leq 1$ است. برای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ تعریف می کنیم:

$$\Psi(y) = \begin{pmatrix} -w_1 (\underline{H}(\alpha)x + \underline{c}(\alpha)) - w_2 (\overline{H}(\alpha)x + \overline{c}(\alpha)) - A'(\alpha)^T (u + A'(\alpha)x - b(\alpha))^+ \\ (u + A'(\alpha)x - b(\alpha))^+ - u \end{pmatrix} \quad (31.2)$$

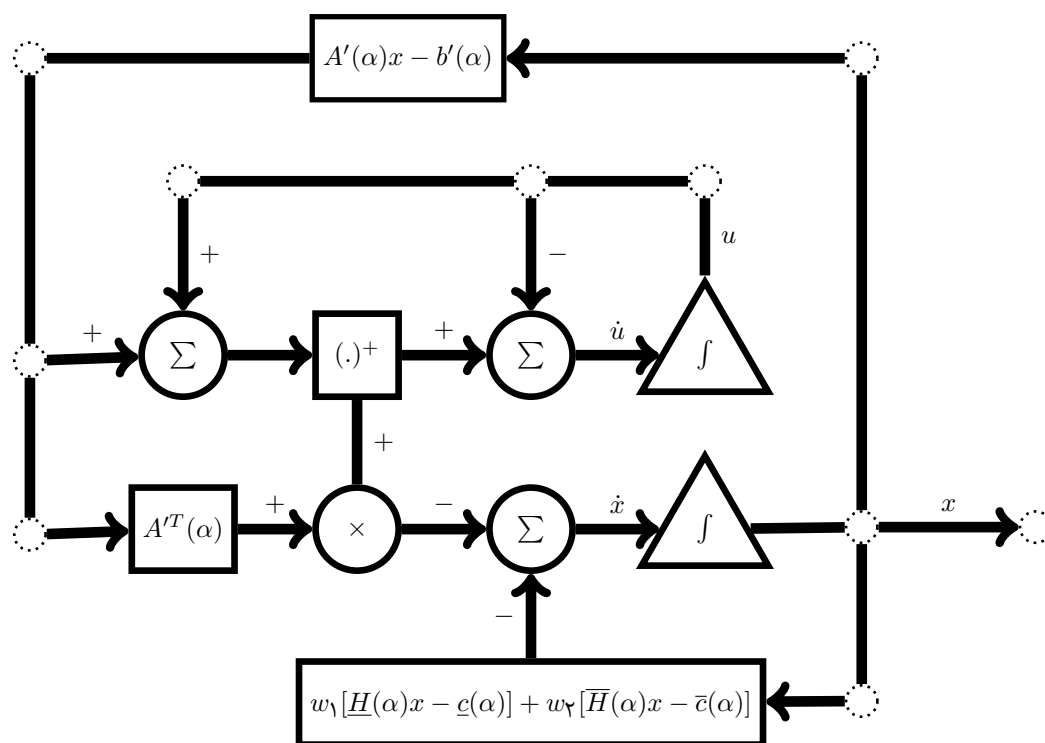
با به‌کارگیری یک عامل مقیاس، مدل شبکه‌عصبی (۲۶.۲)–(۲۸.۲) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{dy}{dt} = \tau \Psi(y), \quad (۳۲.۲)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad \tau > 0, \quad (۳۳.۲)$$

که در آن $y = (x^T, u^T)^T$ و τ یک پارامتر مقیاس است و نرخ همگرایی شبکه‌عصبی (۳۲.۲) و (۳۳.۲) را نشان می‌دهد. برای سادگی تحلیل فرض کنید $\tau = 1$. یک شاخص که چگونه شبکه عصبی (۳۲.۲) و (۳۳.۲) بر روی سخت افزار می‌تواند اجرا شود در شکل ۱.۲ نشان داده شده است.

شکل ۱.۲: دیاگرام ساده از مدل شبکه عصبی (۳۲.۲) و (۳۳.۲).



۱.۳.۲ خواص همگرایی و پایداری

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنید $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ نقطه تعادل شبکه عصبی (۳۲.۲) و (۳۳.۲) باشد. آنگاه x^* یک نقطه KKT مساله (۲۳.۲) و (۲۴.۲) است. برعکس، اگر $x^* \in \mathbb{R}^n$ یک جواب بهینه مساله (۲۳.۲) و (۲۴.۲) باشد، آنگاه $u^* \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد به طوری که $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ یک نقطه تعادل شبکه عصبی پیشنهادی (۳۲.۲) و (۳۳.۲) است.

۲۲ یک مدل شبکه عصبی برای حل مسائل برنامه ریزی درجه دوم با پارامترهای فازی

برهان. فرض کنید $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ نقطه تعادل (۳۲.۲) و (۳۳.۲) باشد. آنگاه $\frac{dx^*}{dt} = 0$ و $\frac{du^*}{dt} = 0$. به سادگی نتیجه می شود که

$$w_1[\underline{H}(\alpha)x^* - \underline{c}(\alpha)] + w_2[\overline{H}(\alpha)x^* - \overline{c}(\alpha)] + A'^T(\alpha)(u^* + A'(\alpha)x^* - b'(\alpha))^+ = 0, \quad (34.2)$$

$$(u^* + A'(\alpha)x^* - b'(\alpha))^+ - u^* = 0. \quad (35.2)$$

واضح است که $(u^* + A'(\alpha)x^* - b'(\alpha))^+ = u^*$ اگر و فقط اگر

$$u^* \geq 0, \quad A'(\alpha)x^* - b'(\alpha) \leq 0, \quad u^{*T}(A'(\alpha)x^* - b'(\alpha)) = 0. \quad (36.2)$$

به علاوه، با جایگذاری (۳۵.۲) در (۳۴.۲) داریم

$$w_1[\underline{H}(\alpha)x - \underline{c}(\alpha)] + w_2[\overline{H}(\alpha)x - \overline{c}(\alpha)] + A'^T(\alpha)u^* = 0. \quad (37.2)$$

از (۳۶.۲) و (۳۷.۲) می توان دید که $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ در شرایط KKT صدق می کند. اثبات عکس قضیه واضح است. \square

لم ۱.۳.۲. برای هر نقطه اولیه $y(t_0) = (x(t_0)^T, u(t_0)^T)^T$ ، یک جواب پیوسته منحصر به فرد $y(t) = (x(t)^T, u(t)^T)^T$ برای سیستم (۳۲.۲) و (۳۳.۲) وجود دارد.

برهان. به سادگی می توان تحقیق کرد که

$$\begin{cases} w_1[\underline{H}(\alpha)x - \underline{c}(\alpha)] + w_2[\overline{H}(\alpha)x - \overline{c}(\alpha)] + A'^T(\alpha)(u + A'(\alpha)x - b'(\alpha))^+, \\ (u_1 + \underline{A}(\alpha)x - \underline{b}(\alpha))^+ - u_1, \\ (u_2 + \overline{A}(\alpha)x - \overline{b}(\alpha))^+ - u_2. \end{cases} \quad (38.2)$$

بر روی مجموعه محدب باز $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2m}$ پیوسته لیپشیتز محلی هستند. بر اساس قضیه وجود یکتایی جواب یک معادله دیفرانسیل، شبکه عصبی (۳۲.۲) و (۳۳.۲) یک جواب پیوسته منحصر به فرد $y(t)$ و $t \in [t_0, \eta)$ برای $\eta > t_0$ وقتی که $\eta \rightarrow \infty$ دارد. \square

لم ۲.۳.۲. ماتریس ژاکوبین $\nabla \Psi(y)$ از نگاشت Ψ که در (۳۱.۲) تعریف شده است یک ماتریس نیمه معین منفی است.

برهان. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید $0 < p < 2m$ وجود داشته باشد به طوری که

$$(u + A'(\alpha)x - b'(\alpha))^+ = \left((u + A'(\alpha)x - b'(\alpha))_1, (u + A'(\alpha)x - b'(\alpha))_2, \dots, (u + A'(\alpha)x - b'(\alpha))_p, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2m-p} \right)^T.$$

با یک محاسبه ساده، به وضوح نشان داده می‌شود

$$\nabla \Psi(y) = \begin{pmatrix} -(w_1 \underline{H}(\alpha) + w_2 \overline{H}(\alpha) + (A^{lp}(\alpha))^T A^{lp}(\alpha)) & -(A^{lp}(\alpha))^T \\ A^{lp}(\alpha) & W_{2m \times 2m} \end{pmatrix},$$

که O بیانگر یک ماتریس صفر است،

$$A^{lp}(\alpha) = \begin{pmatrix} U_{p \times n} \\ O_{(2m-p) \times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_1(\alpha) \\ A'_2(\alpha) \\ \dots \\ \dots \\ A'_p(\alpha) \\ O_{1 \times n} \\ O_{1 \times n} \\ \dots \\ \dots \\ O_{1 \times n} \end{pmatrix},$$

9

$$Z_{2m \times 2m} = \begin{pmatrix} O_{p \times p} & O_{p \times (2m-p)} \\ O_{(2m-p) \times p} & -I_{(2m-p) \times (2m-p)} \end{pmatrix}.$$

از [۲۹] می‌بینیم که $(A^{lp}(\alpha))^T A^{lp}(\alpha)$ یک ماتریس نیمه معین مثبت است. ماتریس $w_1 \underline{H}(\alpha) + w_2 \overline{H}(\alpha)$ نیز یک ماتریس نیمه معین مثبت فرض شده است. به علاوه، واضح است که ماتریس $Z_{2m \times 2m}$ نیمه معین منفی است. طبق مطالب بیان شده، می‌توانیم نتیجه بگیریم که ماتریس ژاکوبین $\nabla \Psi(y)$ یک ماتریس نیمه معین منفی است. اگر $p = 2m$ یعنی،

$$(u + A'(\alpha)x - b'(\alpha))^+ =$$

$$((u + A'(\alpha)x - b'(\alpha))_1, (u + A'(\alpha)x - b'(\alpha))_2, \dots, (u + A'(\alpha)x - b'(\alpha))_{2m})^T,$$

آنگاه

$$\nabla \Psi(y) = \begin{pmatrix} -(w_1 \underline{H}(\alpha) + w_2 \overline{H}(\alpha) + A'^T(\alpha)A'(\alpha)) & -A'^T(\alpha) \\ A'(\alpha) & O_{2m \times 2m} \end{pmatrix}.$$

مشابه حالت قبل، به سادگی ثابت می‌شود که $\nabla \Psi(y)$ یک ماتریس نیمه معین منفی است.

نهایتاً، اگر $p = 0$ ، یعنی $(u + A'(\alpha)x - b'(\alpha))^+ = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2m})^T$ ، آنگاه داریم:

$$\nabla \Psi(y) = \begin{pmatrix} -(w_1 \underline{H}(\alpha) + w_2 \overline{H}(\alpha)) & O_{n \times 2m} \\ O_{2m \times n} & -I_{2m \times 2m} \end{pmatrix}.$$

۲۴ یک مدل شبکه عصبی برای حل مسائل برنامه ریزی درجه دوم با پارامترهای فازی

در این حالت به سادگی می توان نیمه معین منفی بودن ماتریس $\nabla\Psi(y)$ را تصدیق کرد. این برهان را کامل می کند. □

حال نتایج اصلی را به شرح ذیل بیان می کنیم.

قضیه ۳.۳.۲. فرض کنید که مفروضات لم ۲.۳.۲ برقرار باشد. آنگاه مدل شبکه عصبی پیشنهادی در (۳۲.۲) و (۳۳.۲) پایداری لیاپانف و همگرای سراسری به $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ است، که x^* جواب بهینه (۲۳.۲) و (۲۴.۲) است.

برهان. تابع $E : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$E(y) = \|\Psi(y)\|^2 + \frac{1}{\rho}\|y - y^*\|^2. \quad (۳۹.۲)$$

از (۳۱.۲)، می بینیم که

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \nabla\Psi(y)\Psi(y).$$

محاسبه مشتق $E(t)$ به همراه جواب $y(t)$ از شبکه عصبی (۳۲.۲) و (۳۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{dE(y(t))}{dt} &= \left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^T \Psi + \Psi^T \left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + (y - y^*)^T \frac{dy(t)}{dt} \\ &= \Psi^T (\nabla\Psi(y))^T + \nabla\Psi(y) \Psi + (y - y^*)^T \Psi(y). \end{aligned} \quad (۴۰.۲)$$

با به کارگیری لم ۲.۳.۲، بدست می آوریم

$$\Psi^T(y)(\nabla\Psi(y))^T + \nabla\Psi(y)\Psi(y) < \circ, \quad \forall y \neq y^*. \quad (۴۱.۲)$$

بعلاوه، از تعریف ۸.۲.۲ و قضیه ۱.۲.۲، داریم

$$(y - y^*)^T (\Psi(y) - \Psi(y^*)) = (y - y^*)^T \Psi(y) < \circ, \quad \forall y \neq y^*.$$

بنابراین

$$\frac{dE(y(t))}{dt} \leq \circ. \quad (۴۲.۲)$$

این به این معنی است که شبکه عصبی (۳۲.۲) و (۳۳.۲) پایدار به مفهوم لیاپانف است. چون

$$E(y) \geq \frac{1}{\rho}\|y - y^*\|^2, \quad (۴۳.۲)$$

یک زیردنباله همگرا به صورت زیر وجود دارد

$$\{(x(t_k)^T, u(t_k)^T)^T | t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1}\}, \quad t_k \rightarrow \infty \quad k \rightarrow \infty,$$

به طوری که $(\bar{x}^T, \bar{u}^T)^T = \lim_{k \rightarrow \infty} (x(t_k)^T, u(t_k)^T)^T$ ، که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\frac{dE(y(t))}{dt} = 0.$$

این نشان می‌دهد که $(\bar{x}^T, \bar{u}^T)^T$ یک نقطه ω -حد از $\{(x(t)^T, u(t)^T)^T | t \geq t_0\}$ است. با استفاده از قضیه مجموعه تغییر ناپذیر لازال ، $\{(x(t)^T, u(t)^T)^T \rightarrow M\}$ زمانی که $t \rightarrow \infty$ و M یک مجموعه تغییر ناپذیر بزرگ در $\{(x(t)^T, u(t)^T)^T | \frac{dE(y(t))}{dt} = 0\}$ است. از (۳۲.۲) و (۳۳.۲) و (۴۲.۲) نتیجه می‌شود که ،

$$\frac{dE(y(t))}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{du}{dt} = 0, \frac{dx}{dt} = 0.$$

بنابراین طبق $(\bar{x}^T, \bar{u}^T)^T \in D^*$ و $M \subseteq K \subseteq D^*$ با جایگذاری $x^* = \bar{x}$ و $u^* = \bar{u}$ در (۳۹.۲) ، تابع لیاپانف دیگری به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{E}(y) = \|\Psi(y)\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|y - \bar{y}\|^2. \quad (۴۴.۲)$$

آنگاه $\bar{E}(y)$ به طور پیوسته مشتق پذیر است و $\bar{E}(\bar{y}) = 0$. ملاحظه می‌شود که

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x(t_k)^T, u(t_k)^T)^T = (\bar{x}^T, \bar{u}^T)^T,$$

بنابراین داریم $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{E}(x(t_k)^T, u(t_k)^T)^T = \bar{E}(\bar{x}, \bar{u})$

در نتیجه ، $\forall \epsilon > 0$ ، $q > 0$ وجود دارد به طوری که برای همه $t \geq t_q$ ، داریم $\bar{E}(y(t)) < \epsilon$ به طور مشابه $\frac{d\bar{E}(y(t))}{dt} \leq 0$. این نتیجه می‌دهد که برای $t \geq t_q$ ،

$$\frac{1}{\gamma} \|y(t) - \bar{y}\|^2 \leq \bar{E}(y(t)) \leq \epsilon.$$

بنابراین $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y}$ و $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \bar{y}\| = 0$. در نتیجه ، شبکه عصبی پیشنهادی در (۳۲.۲) و (۳۳.۲) همگرای سراسری به یک نقطه تعادل $(\bar{x}^T, \bar{u}^T)^T$ است ، که جواب بهینه (۲۳.۲) و (۲۴.۲) است. □

یک نتیجه از قضیه ۳.۳.۲ به صورت زیر بیان می‌شود.

نتیجه ۱.۳.۲. اگر فرض‌های لم ۲.۳.۲ برقرار باشد و $D^* = \{(x^{*T}, u^{*T})^T\}$ ، آنگاه شبکه عصبی (۳۲.۲) و (۳۳.۲) برای حل (۲۳.۲) و (۲۴.۲) پایدار مجانبی سراسری به نقطه تعادل یکتای $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ است.

۴.۲ مثال‌های عددی

به منظور اثبات کارایی و موثر بودن شبکه عصبی پیشنهادی ، در این بخش ، ما مثال‌هایی را توسط شبکه عصبی (۳۲.۲) و (۳۳.۲) حل می‌کنیم. شبیه‌سازی توسط نرم افزار مطلب ۷ ۱۴ اجرا می‌شود. حل کننده معادله دیفرانسیل معمولی ode45 می‌باشد.

مثال ۱.۴.۲. مثال زیر از ليو^{۱۵} [۱۶] را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \tilde{f} &= (-۶, -۵, -۴)x_1 + (۱, ۱/۵, ۲)x_2 \\ &+ \frac{1}{\tilde{\gamma}} [(۴, ۶, ۸)x_1^2 + (-۶, -۴, -۲)x_1x_2 + (۲, ۴, ۶)x_2^2], \end{aligned} \quad (۴۵.۲)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + (۰/۵, ۱, ۱/۵)x_2 \leq (۱, ۲, ۳), \\ (۱, ۲, ۳)x_1 + (-۲, -۱, -۰/۵)x_2 \leq (۳, ۴, ۵), \\ x_1, x_2 \geq ۰. \end{cases} \quad (۴۶.۲)$$

ابتدا α -برش‌ها را بنا به تعریف ۵.۲.۲ به دست می‌آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (-۶, -۵, -۴) : & -\tilde{\Delta}(\alpha) = [\alpha - ۶, -\alpha - ۴], \\ (۱, ۱/۵, ۲) : & \tilde{1/5}(\alpha) = [۰/۵\alpha + ۱, -۰/۵\alpha + ۲], \\ (۴, ۶, ۸) : & \tilde{۶}(\alpha) = [۲\alpha + ۴, -۲\alpha + ۸], \\ (-۶, -۴, -۲) : & -\tilde{۴}(\alpha) = [۲\alpha - ۶, -۲\alpha - ۲], \\ (۰/۵, ۱, ۱/۵) : & \tilde{1/5}(\alpha) = [۰/۵\alpha + ۰/۵, -۰/۵\alpha + ۱/۵], \\ (۱, ۲, ۳) : & \tilde{۳}(\alpha) = [\alpha + ۱, -\alpha + ۳], \\ (۲, ۴, ۶) : & \tilde{۶}(\alpha) = [۲\alpha + ۲, -۲\alpha + ۶], \\ (-۲, -۱, -۰/۵) : & -\tilde{1/5}(\alpha) = [\alpha - ۲, -۰/۵\alpha - ۰/۵], \\ (۳, ۴, ۵) : & \tilde{۵}(\alpha) = [\alpha + ۳, -\alpha + ۵], \\ (۱, ۱, ۱) : & \tilde{1}(\alpha) = [۱, ۱]. \end{array} \right.$$

با جایگذاری α -برش‌ها را در (۴۵.۲) و (۴۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & [\alpha - ۶, -\alpha - ۴]x_1 + [۰/۵\alpha + ۱, -۰/۵\alpha + ۲]x_2 \\ &+ \frac{1}{\tilde{\gamma}} \left([۲\alpha + ۴, -۲\alpha + ۸]x_1^2 + [۲\alpha - ۶, -۲\alpha - ۲]x_1x_2 + [۲\alpha + ۲, -۲\alpha + ۶]x_2^2 \right), \end{aligned} \quad (۴۷.۲)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + [۰/۵\alpha + ۰/۵, -۰/۵\alpha + ۱/۵]x_2 \leq [۱ + \alpha, ۳ - \alpha], \\ [۱ + \alpha, ۳ - \alpha]x_1 + [\alpha - ۲, -۰/۵\alpha - ۰/۵]x_2 \leq [\alpha + ۳, -\alpha + ۵], \\ -[۱, ۱]x_1 \leq [۰, ۰], \\ -[۱, ۱]x_2 \leq [۰, ۰]. \end{cases} \quad (۴۸.۲)$$

مساله وزن دار متناظر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1 \left[(\alpha - 6)x_1 + (\frac{1}{5}\alpha + 1)x_2 + \frac{1}{4} \left((2\alpha + 4)x_1^2 + (2\alpha - 6)x_1x_2 + (2\alpha + 2)x_2^2 \right) \right] \\
 & + w_2 \left[(-\alpha - 4)x_1 + (-\frac{1}{5}\alpha + 2)x_2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{4} \left((-2\alpha + 8)x_1^2 + (-2\alpha - 2)x_1x_2 + (-2\alpha + 6)x_2^2 \right) \right], \tag{49.2} \\
 \text{s.t} \quad & \begin{cases} x_1 + (\frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{5})x_2 \leq 1 + \alpha, \\ x_1 + (-\frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{5})x_2 \leq 3 - \alpha, \\ (1 + \alpha)x_1 + (\alpha - 2)x_2 \leq \alpha + 3, \\ (3 - \alpha)x_1 + (-\frac{1}{5}\alpha - \frac{1}{5})x_2 \leq -\alpha + 5, \\ -x_1 \leq 0, \\ -x_2 \leq 0. \end{cases} \tag{50.2}
 \end{aligned}$$

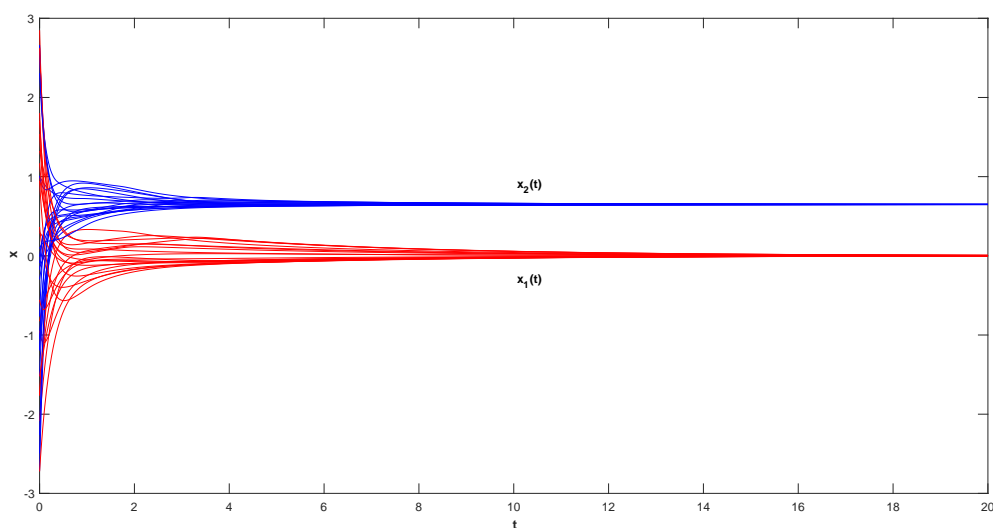
مدل شبکه عصبی به صورت زیر است:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} = & - \left[w_1 \begin{bmatrix} (\alpha - 6) + (2\alpha + 4)x_1 + (\alpha - 3)x_2 \\ (\circ/5\alpha + 1) + (\alpha - 3)x_1 + (2\alpha + 2)x_2 \end{bmatrix} \right. \\
 & + w_2 \begin{bmatrix} (-\alpha - 4) + (-2\alpha + 8)x_1 + (-\alpha - 1)x_2 \\ (-\circ/5\alpha + 2) + (-\alpha - 1)x_1 + (-2\alpha + 6)x_2 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 1 \\ \circ/5\alpha + \circ/5 \end{bmatrix} (u_1 + x_1 + (\circ/5\alpha + \circ/5)x_2 - 1 - \alpha)^+ \\
 & + \begin{bmatrix} 1 \\ -\circ/5\alpha + 1/5 \end{bmatrix} (u_2 + x_1 + (-\circ/5\alpha + 1/5)x_2 - 3 + \alpha)^+ \\
 & + \begin{bmatrix} 1 + \alpha \\ \alpha - 2 \end{bmatrix} (u_3 + (1 + \alpha)x_1 + (\alpha - 2)x_2 - \alpha - 3)^+ \\
 & + \begin{bmatrix} 3 - \alpha \\ -\circ/5\alpha - \circ/5 \end{bmatrix} (u_4 + (3 - \alpha)x_1 + (-\circ/5\alpha - \circ/5)x_2 + \alpha - 5)^+ \quad (51.2) \\
 & + \begin{bmatrix} -1 \\ \circ \end{bmatrix} (u_5 + x_1)^+ \\
 & \left. + \begin{bmatrix} \circ \\ -1 \end{bmatrix} (u_6 + x_2)^+ \right], \\
 \frac{du_1}{dt} = & (u_1 + x_1 + (\circ/5\alpha + \circ/5)x_2 - 1 - \alpha)^+ - u_1, \\
 \frac{du_2}{dt} = & (u_2 + x_1 + (-\circ/5\alpha + 1/5)x_2 - 3 + \alpha)^+ - u_2, \\
 \frac{du_3}{dt} = & (u_3 + (1 + \alpha)x_1 + (\alpha - 2)x_2 - \alpha - 3)^+ - u_3, \\
 \frac{du_4}{dt} = & (u_4 + (3 - \alpha)x_1 + (-\circ/5\alpha - \circ/5)x_2 + \alpha - 5)^+ - u_4, \\
 \frac{du_5}{dt} = & (u_5 + x_1)^+ - u_5, \\
 \frac{du_6}{dt} = & (u_6 + x_2)^+ - u_6.
 \end{aligned} \right.$$

می‌توانیم شبکه عصبی (۵۱.۲) را به صورت زیر بنویسیم :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} = & - [w_1 ((\alpha - ۶) + (۲\alpha + ۴)x_1 + (\alpha - ۳)x_2) \\
 & + w_2 ((-\alpha - ۴) + (-۲\alpha + ۸)x_1 + (-\alpha - ۱)x_2) \\
 & + (u_1 + x_1 + (0/5\alpha + 0/5)x_2 - ۱ - \alpha)^+ \\
 & + (u_2 + x_1 + (-0/5\alpha + ۱/5)x_2 - ۳ + \alpha)^+ \\
 & + (۱ + \alpha) (u_3 + (۱ + \alpha)x_1 + (\alpha - ۲)x_2 - \alpha - ۳)^+ \\
 & + (۳ - \alpha) (u_4 + (۳ - \alpha)x_1 + (-0/5\alpha - 0/5)x_2 + \alpha - ۵)^+ \\
 & - ۱ (u_5 + x_1)^+ \\
 & + w_1 ((0/5\alpha + ۱) + (\alpha - ۳)x_1 + (۲\alpha + ۲)x_2) \\
 & + w_2 ((-0/5\alpha + ۲) + (-\alpha - ۱)x_1 + (-۲\alpha + ۶)x_2) \\
 & + (0/5\alpha + 0/5) (u_1 + x_1 + (0/5\alpha + 0/5)x_2 - ۱ - \alpha)^+ \\
 & + (-0/5\alpha + ۱/5) (u_2 + x_1 + (-0/5\alpha + ۱/5)x_2 - ۳ + \alpha)^+ \\
 & + (\alpha - ۲) (u_3 + (۱ + \alpha)x_1 + (\alpha - ۲)x_2 - \alpha - ۳)^+ \\
 & + (-0/5\alpha - 0/5) (u_4 + (۳ - \alpha)x_1 + (-0/5\alpha - 0/5)x_2 + \alpha - ۵)^+ \\
 & - ۱ (u_6 + x_2)^+], \tag{۵۲.۲} \\
 \frac{du_1}{dt} = & (u_1 + x_1 + (0/5\alpha + 0/5)x_2 - ۱ - \alpha)^+ - u_1, \\
 \frac{du_2}{dt} = & (u_2 + x_1 + (-0/5\alpha + ۱/5)x_2 - ۳ + \alpha)^+ - u_2, \\
 \frac{du_3}{dt} = & (u_3 + (۱ + \alpha)x_1 + (\alpha - ۲)x_2 - \alpha - ۳)^+ - u_3, \\
 \frac{du_4}{dt} = & (u_4 + (۳ - \alpha)x_1 + (-0/5\alpha - 0/5)x_2 + \alpha - ۵)^+ - u_4, \\
 \frac{du_5}{dt} = & (u_5 + x_1)^+ - u_5, \\
 \frac{du_6}{dt} = & (u_6 + x_2)^+ - u_6.
 \end{aligned} \right.$$

یک جواب مساله (۴۵.۲) و (۴۶.۲) با درجه عضویت $\alpha = 0/4$ و ضرایب وزنی $w_1 = 1/3$ و $w_2 = 2/3$ در شکل ۲.۲ با 20° نقطه شروع نشان داده می‌شود که به صورت $x_1 = 0/6484$ و $x_2 = 0$ است.



شکل ۲.۲: رفتار گذرا $x_1(t)$ و $x_2(t)$ از شبکه عصبی (۵۲.۲)

فصل ۳

یک مدل شبکه‌عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی با پارامترهای فازی

۱.۳ مقدمه

مسائل بسیاری در مهندسی مانند کنترل بهینه^۱، پردازش سیگنال سازگار^۲، کنترل حرکتی بازوهای رباتیک مازاد^۳ و کنترل پیش‌گویانه مدل غیرخطی^۴ می‌تواند به صورت مسائل بهینه‌سازی دینامیک فرمول‌بندی شود [۴، ۵، ۶، ۷، ۹، ۱۴، ۲۰، ۲۸، ۳۰]. در پرتو سیستم‌های محاسباتی پیشرفته، برنامه‌ریزی غیرخطی فازی تبدیل به یکی از امید بخش‌ترین رویکردها برای حل مسائل کاربردی شده است. مساله برنامه‌ریزی غیرخطی فازی، اخیراً بیشتر در مسائل مالی و مهندسی به کار رفته است. [۱۸، ۲۳، ۳۵، ۳۹، ۴۵، ۴۶] به عنوان مثال، در [۱۸] لو^۵ و لیو یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی فازی برای محاسبه نسبت S/N فازی برای ارزیابی فرآیندهای

¹Optimal control

²Adaptive signal processing

³Kinematic control of redundant robot manipulators

⁴Nonlinear model predictive control

⁵Lu

تولید با مشاهدات فازی استفاده کرده‌اند. در [۲۳] موسوی^۶ و همکاران با در نظر گرفتن مجموعه‌های فازی-بصری و روابط خاکستری^۷ با یک کاربرد در بازرسی در شرکت‌های تولیدی، یک مدل تصمیم‌گیری مبتنی بر فاصله را ارائه داد. در [۲۵] تانگ^۸ و وانگ از مساله برنامه‌ریزی غیرخطی فازی برای مدل‌سازی یک سیستم تولید استفاده کردند، در [۳۹] وو و لیائو^۹ یک روش مساله برنامه‌ریزی غیرخطی فازی برای ارزیابی فرایندها با داده‌های مبهم ارائه کردند، در [۳۹] وو و لیائو اعداد فازی فرمول‌بندی شده را برای اندازه‌گیری کیفیت مشخصه و یک روش برنامه‌ریزی غیرخطی برای حل کردن برآوردگر فازی را مطالعه کردند. در [۴۵] ژو و همکاران یک روش مساله برنامه‌ریزی غیرخطی فازی-بازه‌ای را برای مساله برنامه‌ریزی محلی^{۱۰} ارائه کردند. در [۴۶] ژو و همکاران یک روش پارامتر برنامه‌ریزی غیرخطی پارامتر-بازه‌ای برای مدیریت کیفیت جریان آب تحت عدم اطمینان پیشنهاد دادند. در این فصل، ما مساله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر با ضرایب فازی را مطالعه می‌کنیم:

$$\min \quad \tilde{f}(x), \quad (1.3)$$

$$\text{s.t.} \quad \tilde{g}(x) \leq \tilde{b}. \quad (2.3)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ و $\tilde{f}, \tilde{g} : E^n(\mathbb{R}) \rightarrow E(\mathbb{R})$ نشان‌دهنده مجموعه تمام اعداد فازی توصیف شده در تعاریف ۱.۲.۲ است) ، $\tilde{g} = (\tilde{g}_1(x), \tilde{g}_2(x), \dots, \tilde{g}_m(x))^T$ یک نگاشت پیوسته برداری $2m$ -بعدی حقیقی مقدار است و $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m)$ یک بردار فازی $2m$ -بعدی است. توابع فازی دوبار مشتق‌پذیر $\tilde{f}, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_m$ محدب هستند (قضیه ۳.۲.۲ را مشاهده کنید).

در دهه‌های اخیر، حل مساله برنامه‌ریزی غیرخطی فازی یکی از مهمترین مسائل در زمینه مجموعه‌ها و سیستم‌های فازی بوده‌است. به‌دست آوردن جواب‌های بهینه زمان واقعی، بهینه‌سازی دینامیکی در حضور عدم قطعیت کار آسانی نیست. راهبردهای متنوع عددی برای حل این نوع از مسائل وجود دارند [۵، ۲۵، ۳۲]. الگوریتم‌های سنتی عددی معمولاً بازده کمتری در مسائل زمان واقعی دارند. به همین دلیل است که برای حل برنامه‌ریزی غیرخطی، زمان محاسبه به بعد و ساختار مساله بستگی دارد. مدل‌های شبکه‌عصبی بازگشتی به‌طور کاراتری بیشتر از روش‌های بهینه‌سازی معمول به کار گرفته می‌شوند که آن به دلیل ویژگی‌های برجسته‌ی آن‌ها مثل معقولیت زیستی^{۱۱}، طبیعت ذاتی پردازش اطلاعات موازی و توزیع‌شده و موازی‌پذیری سخت‌افزاری است.

با توجه به مباحث مطرح شده، هدف این فصل ارائه مدل شبکه‌عصبی تکرارشونده

⁶Mousavi

⁷Grey relations

⁸Tang

⁹Liao

¹⁰Seasonal planning

¹¹Biological plausibility

برای حل مساله برنامه‌ریزی غیرخطی فازی است. در حقیقت، ما (۱.۳) و (۲.۳) را مطالعه می‌کنیم و آن را به صورت یک مساله برنامه‌ریزی بازه‌ای فرمول‌بندی می‌کنیم. به عنوان یک برنامه‌ریزی دوهدفه مطرح می‌شود و سپس مساله وزنی ساخته می‌شود. با استفاده از مساله وزنی، شرایط بهینه کاروش-کان-تاگر ارائه می‌شود. یک مدل شبکه‌عصبی با استفاده از اعمال شرایط K.K.T ارائه می‌شود. به‌علاوه پایداری و همگرایی سراسری مدل اثبات می‌شود. بعضی مقالات برای حل مساله برنامه‌ریزی غیرخطی فازی منتشر شده‌اند. [۲، ۱۷، ۳۷]. در [۲] فاطما^{۱۲} یک سیستم خودگردان غیرخطی برای حل مساله برنامه‌ریزی غیرخطی فازی ارائه کرد. در [۱۷] لو و فانگ^{۱۳} یک الگوریتم ژنتیک برای حل مساله‌ای با تابع هدف غیرخطی تحت سیستم معادلات فازی ارائه کرده‌اند. در [۳۷] واسانت^{۱۴} یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی فازی بزرگ مقیاس را با اعمال الگوریتم‌های بهینه‌سازی هیبریدی حل کرده‌است.

۲.۳ یک مدل شبکه‌عصبی بازگشتی

۱.۲.۳ مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی فازی

با اعمال تعریف ۳.۲.۲ می‌توانیم مساله (۱.۳) و (۲.۳) را به صورت مساله بازه‌ای زیر بنویسیم [۴۲]:

$$\min [f(\alpha)x, \bar{f}(\alpha)x], \quad (۳.۳)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} [g(\alpha)x, \bar{g}(\alpha)x] \leq [b(\alpha), \bar{b}(\alpha)], \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (۴.۳)$$

یا مساله (۳.۳) و (۴.۳) را به صورت یک مساله برنامه‌ریزی دوهدفه زیر بیان کنیم:

$$\min (f(\alpha)x, \bar{f}(\alpha)x), \quad (۵.۳)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} g(\alpha)x \leq b(\alpha), \\ \bar{g}(\alpha)x \leq \bar{b}(\alpha), \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (۶.۳)$$

^{۱۲}fatma

^{۱۳}Fang

^{۱۴}Vasant

با استفاده از لم ۶.۲.۲، مساله (۵.۳) و (۶.۳) می‌تواند به صورت مساله وزنی زیر ذکر شود:

$$\min \quad w_1 \underline{f}(\alpha)x + w_2 \bar{f}(\alpha)x, \quad (7.3)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \underline{g}(\alpha)x \leq \underline{b}(\alpha), \\ \bar{g}(\alpha)x \leq \bar{b}(\alpha), \\ 0 \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (8.3)$$

که در آن $w_1, w_2 \geq 0$ و $w_1 + w_2 = 1$.

تعریف می‌کنیم:

$$g'(\alpha) = \begin{bmatrix} \underline{g}(\alpha) \\ \bar{g}(\alpha) \end{bmatrix}, \quad b'(\alpha) = \begin{bmatrix} \underline{b}(\alpha) \\ \bar{b}(\alpha) \end{bmatrix}.$$

در نتیجه مساله (۷.۳) و (۸.۳) به مساله زیر تبدیل می‌شود:

$$\min \quad w_1 \underline{f}(\alpha)x + w_2 \bar{f}(\alpha)x, \quad (9.3)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} g'(\alpha)x \leq b'(\alpha), \\ 0 \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (10.3)$$

که در آن $w_1, w_2 \geq 0$ و $w_1 + w_2 = 1$. شرایط بهینگی K.K.T برای مساله (۹.۳) و (۱۰.۳) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} w_1 \nabla \underline{f}(\alpha)(x) + w_2 \nabla \bar{f}(\alpha)(x) + (\nabla g'(\alpha)(x))^T u = 0, \\ u^T (g'(\alpha)(x) - b'(\alpha)) = 0, \\ g'(\alpha)(x) \leq b'(\alpha), \end{cases} \quad (11.3)$$

که در آن $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ و $u_1, u_2 \geq 0$ ضریب لاگرانژ هستند، $w_1, w_2 \geq 0$ ، $w_1 + w_2 = 1$ و $0 \leq \alpha \leq 1$. اکنون یک مدل شبکه‌عصبی کارا برای حل مساله (۷.۳) و (۸.۳) را به صورت زیر ارائه می‌دهیم:

$$\frac{dx}{dt} = - [w_1 \nabla \underline{f}(\alpha)x + w_2 \nabla \bar{f}(\alpha)x + \nabla \underline{g}^T(\alpha)x(u_1 + \underline{g}(\alpha)x - \underline{b}(\alpha))^+ + \nabla \bar{g}^T(\alpha)x(u_2 + \bar{g}(\alpha)x - \bar{b}(\alpha))^+], \quad (12.3)$$

$$\frac{du_1}{dt} = (u_1 + \underline{g}(\alpha)x - \underline{b}(\alpha))^+ - u_1, \quad (13.3)$$

$$\frac{du_2}{dt} = (u_2 + \bar{g}(\alpha)x - \bar{b}(\alpha))^+ - u_2, \quad (14.3)$$

که $0 \leq \alpha \leq 1$ است و در نتیجه فرم فشرده به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{dx}{dt} = - [w_1 \nabla \underline{f}(\alpha)x + w_2 \nabla \bar{f}(\alpha)x + \nabla g^T(\alpha) (u + g'(\alpha)x - b'(\alpha))^+], \quad (15.3)$$

$$\frac{du}{dt} = (u + g'(\alpha)x - b'(\alpha))^+ - u, \quad (16.3)$$

که در آن $0 \leq \alpha \leq 1$ است. برای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ تعریف می‌کنیم:

$$\Phi(y) = \begin{pmatrix} -w_1 \nabla \underline{f}(\alpha)x - w_2 \nabla \bar{f}(\alpha)x - \nabla g^T(\alpha) (u + g'(\alpha)x - b'(\alpha))^+ \\ (u + g'(\alpha)x - b'(\alpha))^+ - u \end{pmatrix}. \quad (17.3)$$

بنابراین شبکه عصبی (۱۵.۳) و (۱۶.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dy}{dt} = \kappa \Phi(y), \quad (18.3)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad (19.3)$$

که در آن κ پارامتر اسکالر ۱۵ است و نرخ همگرایی شبکه عصبی (۱۸.۳) و (۱۹.۳) را نشان می‌دهد. برای سادگی، $\kappa = 1$ در نظر می‌گیریم. شکل (۱.۳) بیانگر این است که شبکه فوق روی سخت افزار چگونه اجرا می‌شود.

۲.۲.۳ تحلیل پایداری و همگرایی

در این فصل پایداری و همگرایی شبکه عصبی پیشنهاد شده (۱۸.۳) و (۱۹.۳) بررسی می‌شود.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنید $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ ، نقطه تعادل از شبکه عصبی (۱۸.۳) و (۱۹.۳) باشد. آنگاه x^* نقطه K.K.T از مسأله (۹.۳)–(۱۰.۳)، برعکس اگر $x^* \in \mathbb{R}^n$ جواب بهینه مسأله (۹.۳) و (۱۰.۳) باشد، آنگاه بردار $u^* \in \mathbb{R}^{2m}$ وجود دارد به طوری که $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ نقطه تعادل از شبکه‌عصبی پیشنهاد شده (۱۸.۳) و (۱۹.۳) است.

برهان. فرض کنید $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ نقطه تعادل شبکه عصبی (۱۸.۳) و (۱۹.۳) باشد، آنگاه

$$\frac{du^*}{dt} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{dx^*}{dt} = 0 \quad \text{در نتیجه}$$

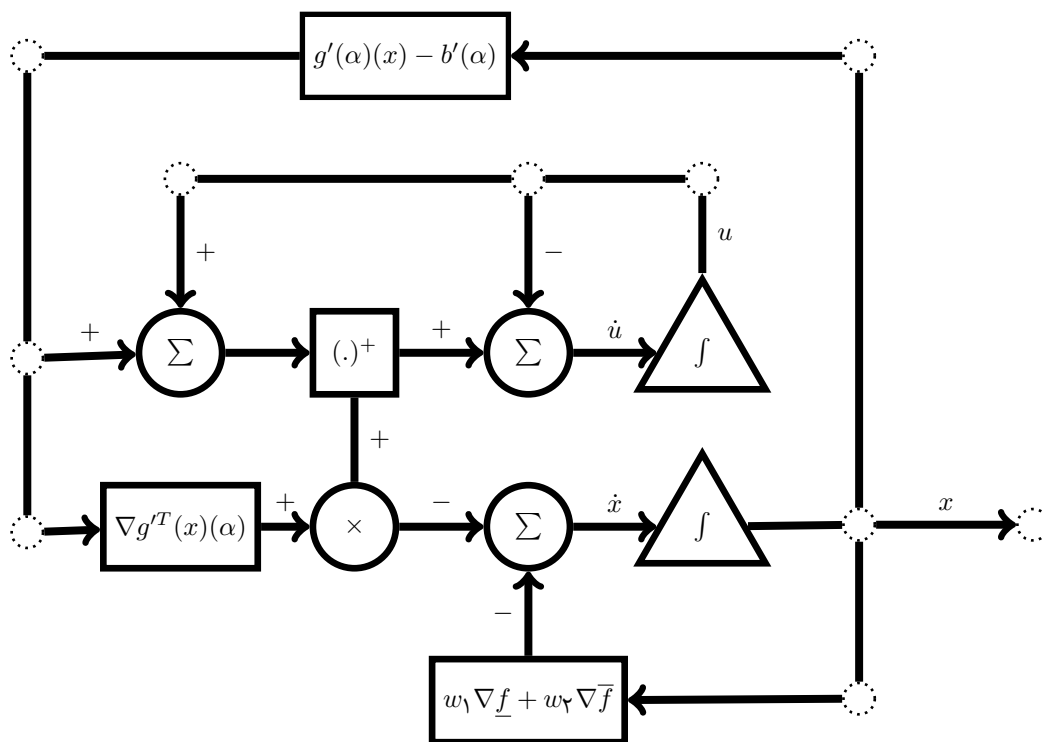
$$w_1 \nabla \underline{f}(\alpha)x^* + w_2 \nabla \bar{f}(\alpha)x^* + \nabla g^T(\alpha)(u^* + g'(\alpha)x^* - b'(\alpha))^+ = 0, \quad (20.3)$$

$$(u^* + g'(\alpha)x^* - b'(\alpha))^+ - u^* = 0. \quad (21.3)$$

همچنین، داریم $u^* = (u^* + g'(\alpha)x^* - b'(\alpha))^+$ اگر و تنها اگر

$$u^* \geq 0, \quad g'(\alpha)x^* - b'(\alpha) \leq 0, \quad u^{*T}(g'(\alpha)x^* - b'(\alpha)) = 0. \quad (22.3)$$

شکل ۱.۳: بلوک دیاگرام شبکه عصبی (۱۸.۳) و (۱۹.۳)



بنابراین، با جایگذاری (۲۱.۳) در (۲۰.۳) داریم

$$w_1 \nabla f(\alpha)x + w_2 \nabla \bar{f}(\alpha)x + \nabla g^T(\alpha)u^* = 0. \quad (23.3)$$

از (۲۲.۳) و (۲۳.۳) نتیجه می‌شود که $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ در شرایط K.K.T صدق می‌کند و این اثبات را کامل می‌کند. □

لم ۱.۲.۳. نقطه تعادل مدل شبکه‌عصبی پیشنهاد شده (۱۸.۳) و (۱۹.۳) یکتاست.

برهان. چون مسأله (۹.۳) و (۱۰.۳) دارای جواب بهینه یکتای x^* است، شرایط لازم و کافی K.K.T دارای جواب یکتای $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ هستند، بنابراین از قضیه (۱.۲.۳) می‌بینیم که نقطه تعادل مدل پیشنهاد شده (۱۸.۳) و (۱۹.۳) در سیستم K.K.T (۱۱.۳) صدق می‌کند. بنابراین نقطه تعادل شبکه‌عصبی (۱۸.۳) و (۱۹.۳) یکتاست. □

لم ۲.۲.۳. برای هر نقطه آغازین $y(t_0) = (x(t_0)^T, u(t_0)^T)^T$ ، سیستم (۱۸.۳) و (۱۹.۳) دارای جواب یکتای پیوسته $y(t) = (x(t)^T, u(t)^T)^T$ است.

برهان. چون $w_1 \nabla f(\alpha)x + w_2 \nabla \bar{f}(\alpha)x$ و $\nabla g'_k(\alpha)x, (k = 1, \dots, m)$ ، توابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر روی مجموعه باز $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2m}$ هستند، بنابراین $(u + g'(\alpha)x - b'(\alpha))^+ - u$ و $w_1 \nabla f(\alpha)x + w_2 \nabla \bar{f}(\alpha)x + \nabla g'(\alpha)^T(u + g'(\alpha)x - b'(\alpha))^+$ لیپ‌شیتز محلی پیوسته روی مجموعه

باز $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2m}$ هستند، بنابراین شبکه عصبی (۱۸.۳) و (۱۹.۳) دارای جواب یکتای پیوسته $y(t)$ برای $t \in [t_0, \tau)$ وقتی $\tau \rightarrow \infty$ است. □

لم ۳.۲.۳. ماتریس ژاکوبی $\nabla \Phi(y)$ از نگاشت Φ تعریف شده در (۱۷.۳) نیمه معین منفی است.

برهان. بدون کاستن از کلیت مساله، فرض می‌کنیم $0 < p < 2m$ وجود دارد به طوری که

$$(u + g'(\alpha)x - b'(\alpha))^+ = (u_1 + g'_1(\alpha)x - b'_1(\alpha), u_2 + g'_2(\alpha)x - b'_2(\alpha), \dots, u_p + g'_p(\alpha)x - b'_p(\alpha), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2m-p}) \geq 0.$$

با محاسبات ساده می‌توان نشان داد که

$$\nabla \Phi(y) = \begin{bmatrix} -(w_1 \nabla^T \underline{f}(\alpha)x + w_2 \nabla^T \bar{f}(\alpha)x + \sum_{k=1}^p ((u_k + g'_k(\alpha)x - b'_k(\alpha)) \nabla^T g'_k(\alpha) + \nabla g'^p(\alpha)(\nabla g'^p(\alpha))^T) & -\nabla g'^p(\alpha) \\ (\nabla g'^p(\alpha))^T & S_{2m \times 2m} \end{bmatrix},$$

که در آن

$$\nabla g'^p(\alpha)x = \begin{bmatrix} U_{p \times n} \\ O_{(2m-p) \times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(g'_1(\alpha)x - b'_1(\alpha))}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial(g'_1(\alpha)x - b'_1(\alpha))}{\partial x_{p-1}} & \frac{\partial(g'_1(\alpha)x - b'_1(\alpha))}{\partial x_p} & \frac{\partial(g'_1(\alpha)x - b'_1(\alpha))}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial(g'_1(\alpha)x - b'_1(\alpha))}{\partial x_n} \\ \frac{\partial(g'_2(\alpha)x - b'_2(\alpha))}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial(g'_2(\alpha)x - b'_2(\alpha))}{\partial x_{p-1}} & \frac{\partial(g'_2(\alpha)x - b'_2(\alpha))}{\partial x_p} & \frac{\partial(g'_2(\alpha)x - b'_2(\alpha))}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial(g'_2(\alpha)x - b'_2(\alpha))}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial(g'_p(\alpha)x - b'_p(\alpha))}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial(g'_p(\alpha)x - b'_p(\alpha))}{\partial x_{p-1}} & \frac{\partial(g'_p(\alpha)x - b'_p(\alpha))}{\partial x_p} & \frac{\partial(g'_p(\alpha)x - b'_p(\alpha))}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial(g'_p(\alpha)x - b'_p(\alpha))}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

و $\nabla^T g'_k(\alpha)x$ ماتریس هسین از $g'_k(\alpha)x$ است و

$$S_{2m \times 2m} = \begin{bmatrix} O_{p \times p} & O_{p \times (2m-p)} \\ O_{(2m-p) \times p} & -I_{(2m-p) \times (2m-p)} \end{bmatrix},$$

که در آن O ماتریس صفر است. ماتریس $\nabla g'^p(\alpha)x \nabla g^p(\alpha)$ ، ماتریس نیمه معین مثبت است. چون توابع $g'_m(\alpha)x - b'_m(\alpha)$ ، \dots ، $g'_1(\alpha)x - b'_1(\alpha)$ و $\bar{f}(\alpha)x$ و $\underline{f}(\alpha)x$ محدب و دوبار مشتق پذیر فرض شده، بنابراین ماتریس‌های هسین $w_1 \nabla^T \underline{f}(\alpha)x + w_2 \nabla^T \bar{f}(\alpha)x$ و $\nabla^T g'_k(\alpha)x$ برای $k = 1, 2, \dots, p$ ، ماتریس‌های نیمه معین مثبت هستند. به علاوه از معین مثبت بودن $\nabla^T g'_k(\alpha)x$ می‌توان گفت که ماتریس‌های $\nabla^T g'^p(\alpha)x$ نیمه معین مثبت هستند. همچنین واضح است که ماتریس $S_{2m \times 2m}$ ، نیمه معین منفی است.

طبق توضیحات گفته شده، می‌توانیم نتیجه بگیریم که ماتریس ژاکوبی $\nabla \Phi(y)$ ، نیمه معین منفی است.

اگر $p = 2m$ یعنی

$$(u + g'(\alpha)x - b'(\alpha))^+ = (u_1 + g'_1(\alpha)x - b'_1(\alpha), u_2 + g'_2(\alpha)x - b'_2(\alpha), \dots, u_{2m} + g'_{2m}(\alpha)x - b'_{2m}(\alpha)),$$

آنگاه داریم:

$$\nabla\Phi(y) = \begin{bmatrix} -(w_1 \nabla^2 \underline{f}(\alpha)x + w_2 \nabla^2 \bar{f}(\alpha)x + \sum_{k=1}^{2m} ((u_k + g'_k(\alpha)x - b'_k(\alpha)) \nabla^2 g'_k(\alpha)x) + \nabla g'^T(\alpha)x \nabla g'(\alpha)x) & -\nabla g'^T(\alpha)x \\ \nabla g'(\alpha)x & O_{2m \times 2m} \end{bmatrix},$$

که در آن $\nabla g'(\alpha)x = \nabla g'^{2m}(\alpha)x$ ماتریس ژاکوبی از توابع برداری $g'(\alpha)x - b'(\alpha)$ و $\nabla^2 g'_k(\alpha)x = \nabla^2 g'^{2m}_k(\alpha)x$ ماتریس هسین از $g'_k(\alpha)x - b'_k(\alpha)$ برای $(k = 1, 2, \dots, 2m)$ هستند. مشابه حالت قبلی، می‌توان به‌سادگی نشان داد که $\nabla\Phi(y)$ ماتریس نیمه معین منفی است. سرانجام، اگر $p = 0$ یعنی $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2m})$ ، آنگاه داریم:

$$\nabla\Phi(y) = \begin{bmatrix} -w_1 \nabla^2 \underline{f}(\alpha)x - w_2 \nabla^2 \bar{f}(\alpha)x & O_{n \times 2m} \\ O_{2m \times n} & -I_{2m \times 2m} \end{bmatrix}.$$

در این حالت هم، می‌توان نشان داد که $\nabla\Phi(y)$ ماتریس نیمه معین منفی است، این اثبات را \square کامل می‌کند.

قضیه ۲.۲.۳. مدل شبکه‌عصبی پیشنهاد شده در (۱۸.۳) و (۱۹.۳)، پایدار مجانبی به مفهوم لیپانوف و همگرایی سراسری به $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ است که در آن x^* جواب بهینه از (۹.۳) و (۱۰.۳) است.

\square برهان. اثبات شبیه به قضیه ۳.۳.۲ است

یک نتیجه از قضیه ۲.۲.۳، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

نتیجه ۱.۲.۳. اگر $D^* = \{(x^{*T}, u^{*T})^T\}$ ، آنگاه شبکه‌عصبی (۱۸.۳) و (۱۹.۳) برای حل کردن (۹.۳) و (۱۰.۳)، پایدار مجانبی سراسری به نقطه تعادل یکتای $y^* = (x^{*T}, u^{*T})^T$ است.

۳.۳ مثال‌های عددی

به منظور اثبات کارایی و موثر بودن شبکه‌عصبی پیشنهادی، در این بخش، ما مثال‌هایی را توسط شبکه‌عصبی (۱۸.۳) و (۱۹.۳) حل می‌کنیم. شبیه‌سازی توسط نرم افزار مطلب ۷^{۱۶} اجرا می‌شود. حل‌کننده معادله دیفرانسیل معمولی ode45 می‌باشد.

¹⁶Matlab

مثال ۱.۳.۳. مساله برنامه‌ریزی غیرخطی فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\min f(x) = k_1 x_1^{1-\frac{1}{a_1}} - c_1 x_1 + k_2 x_2^{1-\frac{1}{a_2}} - c_2 x_2, \quad (24.3)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq \tilde{\Delta}^\circ, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq \tilde{44}, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq \tilde{36}, \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases} \quad (25.3)$$

که در آن

$$p_1 = 3^\circ, \quad p_2 = 2^\circ, \quad k_1 = 5^\circ, \quad k_2 = 45, \quad c_1 = 8, \quad c_2 = 1^\circ, \quad a_1 = a_2 = 2,$$

و

$$\tilde{\Delta}^\circ = (5^\circ, 5^\circ, 8^\circ), \quad \tilde{44} = (44, 44, 64), \quad \tilde{36} = (31, 36, 41).$$

ابتدا α -برش‌ها را به دست می‌آوریم، پس داریم:

$$\begin{cases} \tilde{36}[\alpha] = [5\alpha + 3, -5\alpha + 4], \\ \tilde{\Delta}^\circ[\alpha] = [5^\circ, -3^\circ\alpha + 8^\circ], \\ \tilde{44}[\alpha] = [44, -2^\circ\alpha + 64]. \end{cases}$$

با جایگذاری α -برش‌ها و مفروضات در (24.3) و (25.3) داریم:

$$\min f(x) = [5^\circ, 5^\circ]x_1^{\frac{1}{2}} - [8, 8]x_1 + [45, 45]x_2^{\frac{1}{2}} - [1^\circ, 1^\circ]x_2, \quad (26.3)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} [2, 2]x_1 + [3, 3]x_2 \leq [5^\circ, -3^\circ\alpha + 8^\circ], \\ [4, 4]x_1 + [2, 2]x_2 \leq [44, -2^\circ\alpha + 64], \\ [3, 3]x_1 + [2, 2]x_2 \leq [5\alpha + 31, -5\alpha + 41], \\ [-1, -1]x_1 \geq [^\circ, ^\circ], \\ [-1, -1]x_2 \geq [^\circ, ^\circ]. \end{cases} \quad (27.3)$$

۴۰ یک مدل شبکه‌عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی با پارامترهای فازی

مساله وزن دار متناظر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = w_1 \left[5^\circ x_1^{\frac{1}{2}} - 8x_1 + 45x_2^{\frac{1}{2}} - 1^\circ x_2 \right] + w_2 \left[5^\circ x_1^{\frac{1}{2}} - 8x_1 + 45x_2^{\frac{1}{2}} - 1^\circ x_2 \right], \\ \text{s.t} \quad & \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \leq 5^\circ, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq -3^\circ\alpha + 8^\circ, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 44, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq -2^\circ\alpha + 64, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 5\alpha + 31, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq -5\alpha + 41, \\ -1x_1 \leq 0, \\ -1x_2 \leq 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

مدل شبکه‌عصبی به صورت زیر است:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} = & - \left[w_1 \begin{bmatrix} 25x_1^{\frac{1}{5}} - 8 \\ \frac{42}{3}x_2^{-\frac{1}{3}} - 10 \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} 25x_1^{\frac{1}{5}} - 8 \\ \frac{42}{3}x_2^{-\frac{1}{3}} - 10 \end{bmatrix} \right. \\
 & + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} (u_1 + 2x_1 + 3x_2 - 50)^+ \\
 & + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} (u_2 + 2x_1 + 3x_2 + 30\alpha - 80)^+ \\
 & + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} (u_3 + 4x_1 + 2x_2 - 44)^+ \\
 & + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} (u_4 + 4x_1 + 2x_2 + 20\alpha - 64)^+ \\
 & + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} (u_5 + 3x_1 + 2x_2 - 5\alpha - 31)^+ \\
 & + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} (u_6 + 3x_1 + 2x_2 + 5\alpha - 41)^+ \\
 & + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} (u_7 - x_1)^+ \\
 & \left. + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} (u_8 - x_2)^+ \right], \tag{28.3} \\
 \frac{du_1}{dt} = & (u_1 + 2x_1 + 3x_2 - 50)^+ - u_1, \\
 \frac{du_2}{dt} = & (u_2 + 2x_1 + 3x_2 + 30\alpha - 80)^+ - u_2, \\
 \frac{du_3}{dt} = & (u_3 + 4x_1 + 2x_2 - 44)^+ - u_3, \\
 \frac{du_4}{dt} = & (u_4 + 4x_1 + 2x_2 + 20\alpha - 64)^+ - u_4, \\
 \frac{du_5}{dt} = & (u_5 + 3x_1 + 2x_2 - 5\alpha - 31)^+ - u_5, \\
 \frac{du_6}{dt} = & (u_6 + 3x_1 + 2x_2 + 5\alpha - 41)^+ - u_6, \\
 \frac{du_7}{dt} = & (u_7 - x_1)^+ - u_7, \\
 \frac{du_8}{dt} = & (u_8 - x_2)^+ - u_8.
 \end{aligned} \right.$$

می توانیم شبکه عصبی (۲۸.۳) را به صورت زیر بنویسیم :

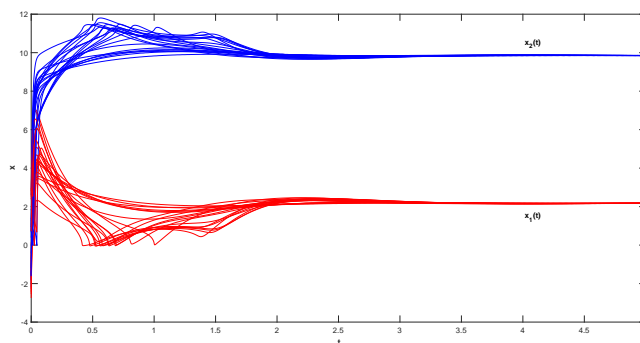
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & - \left[w_1 \left(25x_1^{\frac{1}{2}} - 8 \right) + w_2 \left(25x_1^{\frac{1}{2}} - 8 \right) \right. \\ & + 2 \left(u_1 + 2x_1 + 3x_2 - 50 \right)^+ + 2 \left(u_2 + 2x_1 + 3x_2 + 30\alpha - 80 \right)^+ \\ & + 4 \left(u_3 + 4x_1 + 2x_2 - 44 \right)^+ + 2 \left(u_4 + 4x_1 + 2x_2 + 20\alpha - 64 \right)^+ \\ & + 2 \left(u_5 + 3x_1 + 2x_2 - 5\alpha - 31 \right)^+ + 2 \left(u_6 + 3x_1 + 2x_2 + 5\alpha - 41 \right)^+ \\ & + 2 \left(u_7 - x_1 \right)^+ + 2 \left(u_8 - x_2 \right)^+ \\ & + w_1 \left(\frac{42}{3}x_2^{-\frac{1}{2}} - 10 \right) + w_2 \left(\frac{42}{3}x_2^{-\frac{1}{2}} - 10 \right) \\ & + 3 \left(u_1 + 2x_1 + 3x_2 - 50 \right)^+ + 3 \left(u_2 + 2x_1 + 3x_2 + 30\alpha - 80 \right)^+ \\ & + 2 \left(u_3 + 4x_1 + 2x_2 - 44 \right)^+ + 3 \left(u_4 + 4x_1 + 2x_2 + 20\alpha - 64 \right)^+ \\ & + 3 \left(u_5 + 3x_1 + 2x_2 - 5\alpha - 31 \right)^+ + 3 \left(u_6 + 3x_1 + 2x_2 + 5\alpha - 41 \right)^+ \\ & \left. + 3 \left(u_7 - x_1 \right)^+ + 3 \left(u_8 - x_2 \right)^+ \right], \\ \frac{du_1}{dt} = & \left(u_1 + 2x_1 + 3x_2 - 50 \right)^+ - u_1, \\ \frac{du_2}{dt} = & \left(u_2 + 2x_1 + 3x_2 + 30\alpha - 80 \right)^+ - u_2, \\ \frac{du_3}{dt} = & \left(u_3 + 4x_1 + 2x_2 - 44 \right)^+ - u_3, \\ \frac{du_4}{dt} = & \left(u_4 + 4x_1 + 2x_2 + 20\alpha - 64 \right)^+ - u_4, \\ \frac{du_5}{dt} = & \left(u_5 + 3x_1 + 2x_2 - 5\alpha - 31 \right)^+ - u_5, \\ \frac{du_6}{dt} = & \left(u_6 + 3x_1 + 2x_2 + 5\alpha - 41 \right)^+ - u_6, \\ \frac{du_7}{dt} = & \left(u_7 - x_1 \right)^+ - u_7, \\ \frac{du_8}{dt} = & \left(u_8 - x_2 \right)^+ - u_8. \end{aligned} \right. \quad (29.3)$$

یک جواب مساله (۲۴.۳) و (۲۵.۳) با درجه عضویت $\alpha = 1$ و ضرایب وزنی $w_1 = \frac{1}{2}$ و $w_2 = \frac{1}{2}$ در شکل ۲.۳ نشان داده می شود.

مثال ۲.۳.۳ ([۲۱]). فرض کنید مساله برنامه ریزی غیرخطی فازی به صورت زیر است:

$$\min \tilde{a}_1 x_1^2 + \tilde{a}_2 x_2^2 + \tilde{a}_3 e^{\tilde{a}_4 x_2}, \quad (30.3)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \tilde{a}_1 x_1 x_2 + \tilde{a}_2 x_2 \leq \tilde{a}_3, \\ \tilde{a}_1 x_2 + \tilde{a}_2 x_2^2 \leq \tilde{a}_4, \\ \tilde{a}_1 x_1, \tilde{a}_2 x_2, \tilde{a}_3 x_2 \geq \tilde{a}_5, \end{cases} \quad (31.3)$$



شکل ۲.۳: رفتار گذرا از x_1 و x_2 برای شبکه عصبی (۲۹.۳)

که در آن

$$\tilde{\mathbf{1}} = (0, 1, 2), \quad \tilde{\mathbf{2}} = (1, 2, 3), \quad \tilde{\mathbf{0}} = (-1, 0, 1).$$

α -برش‌های اعداد فازی مثلثی بالا به صورت زیر هستند:

$$\tilde{\mathbf{1}}[\alpha] = [\alpha, 2 - \alpha], \quad \tilde{\mathbf{2}}[\alpha] = [1 + \alpha, 3 - \alpha], \quad \tilde{\mathbf{0}}[\alpha] = [-1 + \alpha, 1 - \alpha].$$

با جایگذاری α -برش‌ها در (۳۰.۳) و (۳۱.۳) داریم:

$$\min \quad [\alpha, 2 - \alpha]x_1^{\tilde{\mathbf{1}}} + [1 + \alpha, 3 - \alpha]x_2^{\tilde{\mathbf{2}}} + \tilde{\mathbf{1}}e^{([\alpha, 2 - \alpha]x_3)}, \quad (32.3)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} [\alpha, 2 - \alpha]x_1x_2 + [\alpha, 2 - \alpha]x_2 \leq \tilde{\mathbf{1}}, \\ [\alpha, 2 - \alpha]x_2 + [\alpha, 2 - \alpha]x_3^{\tilde{\mathbf{2}}} \leq [1 + \alpha, 3 - \alpha], \\ [\alpha, 2 - \alpha]x_1, \tilde{\mathbf{1}}x_2, \tilde{\mathbf{1}}x_3 \geq -[-1 + \alpha, 1 - \alpha]. \end{cases} \quad (33.3)$$

مساله وزن‌دار متناظر به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1 \left[\alpha x_1^f + (1 + \alpha)x_2^f + \alpha e^{\alpha x_3} \right] + w_2 \left[(2 - \alpha)x_1^f + (3 - \alpha)x_2^f + (2 - \alpha)e^{(2-\alpha)x_3} \right], \\
 \text{s.t} \quad & \left\{ \begin{array}{l}
 \alpha x_1 x_2 + \alpha x_2 \leq \alpha, \\
 (2 - \alpha)x_1 x_2 + (2 - \alpha)x_2 \leq 2 - \alpha, \\
 \alpha x_2 + \alpha x_2^f \leq 1 + \alpha, \\
 (2 - \alpha)x_2 + (2 - \alpha)x_2^f \leq 3 - \alpha, \\
 -\alpha x_1 \leq 1 - \alpha, \\
 (2 - \alpha)x_1 \leq \alpha - 1, \\
 -\alpha x_2 \leq 1 - \alpha, \\
 (2 - \alpha)x_3 \leq \alpha - 1, \\
 -\alpha x_3 \leq 1 - \alpha, \\
 (2 - \alpha)x_3 \leq \alpha - 1.
 \end{array} \right. \quad (24.3)
 \end{aligned}$$

مدل شبکه‌عصبی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} = & - \left[w_1 \begin{bmatrix} (\gamma \alpha x_1) \\ (\gamma + \gamma \alpha) \\ \alpha^\gamma e^{\alpha x_\gamma} \end{bmatrix} + w_\gamma \begin{bmatrix} (\varphi - \gamma \alpha - \varphi) \\ (\varphi - \gamma \alpha) \\ (\gamma - \alpha)^\gamma e^{(\gamma - \alpha)x_\gamma} \end{bmatrix} \right. \\
 & + \begin{bmatrix} \alpha x_\gamma \\ \alpha x_1 + \alpha \\ \circ \end{bmatrix} (u_1 + \alpha x_1 x_\gamma + \alpha x_\gamma - \alpha)^+ \\
 & + \begin{bmatrix} (\gamma - \alpha)x_\gamma \\ (\gamma - \alpha)x_1 + (\gamma - \alpha) \\ \circ \end{bmatrix} (u_\gamma + (\gamma - \alpha)x_1 x_\gamma + (\gamma - \alpha)x_\gamma - (\gamma - \alpha))^+ \\
 & + \begin{bmatrix} \circ \\ \alpha \\ \gamma \alpha x_\gamma \end{bmatrix} (u_\gamma + \alpha x_\gamma + \alpha x_\gamma^\gamma - (1 + \alpha))^+ \\
 & + \begin{bmatrix} \circ \\ \gamma - \alpha \\ (\varphi - \gamma \alpha)x_\gamma \end{bmatrix} (u_\varphi + (\gamma - \alpha)x_\gamma + (\gamma - \alpha)x_\gamma^\gamma + (\gamma - \alpha))^+ \\
 & + \begin{bmatrix} -\alpha \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} (u_\delta - \alpha x_1 - 1 + \alpha)^+ \\
 & + \begin{bmatrix} \alpha - \gamma \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} (u_\varphi + (\alpha - \gamma)x_1 + 1 - \alpha)^+ \\
 & + \begin{bmatrix} \circ \\ -\alpha \\ \circ \end{bmatrix} (u_\gamma - \alpha x_\gamma - 1 + \alpha)^+ \\
 & + \begin{bmatrix} \circ \\ \alpha - \gamma \\ \circ \end{bmatrix} (u_\lambda + (\alpha - \gamma)x_\gamma + 1 - \alpha)^+ \\
 & + \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ -\alpha \end{bmatrix} (u_\varrho - \alpha x_\gamma - 1 + \alpha)^+ \\
 & + \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ \alpha - \gamma \end{bmatrix} (u_{1\circ} + (\alpha - \gamma)x_\gamma + 1 - \alpha)^+ \left. \right], \tag{۳۵.۳}
 \end{aligned}$$

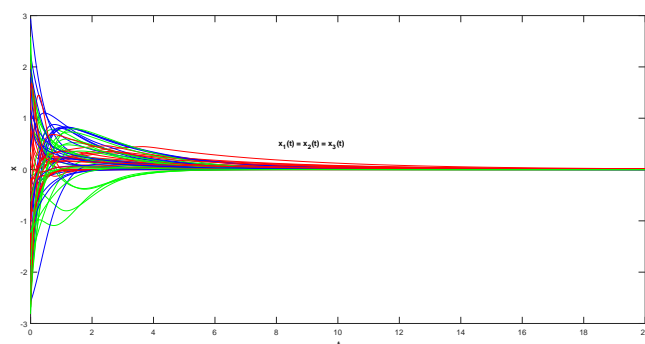
$$\begin{aligned}
 \frac{du_1}{dt} &= (u_1 + \alpha x_1 x_2 + \alpha x_2 - \alpha)^+ - u_1, \\
 \frac{du_2}{dt} &= (u_2 + (\gamma - \alpha)x_1 x_2 + (\gamma - \alpha)x_2 - (\gamma - \alpha))^+ - u_2, \\
 \frac{du_3}{dt} &= (u_3 + \alpha x_2 + \alpha x_3 - (1 + \alpha))^+ - u_3, \\
 \frac{du_4}{dt} &= (u_4 + (\gamma - \alpha)x_2 + (\gamma - \alpha)x_3 + (\gamma - \alpha))^+ - u_4, \\
 \frac{du_5}{dt} &= (u_5 - \alpha x_1 - 1 + \alpha)^+ - u_5, \\
 \frac{du_6}{dt} &= (u_6 + (\alpha - \gamma)x_1 + 1 - \alpha)^+ - u_6, \\
 \frac{du_7}{dt} &= (u_7 - \alpha x_2 - 1 + \alpha)^+ - u_7, \\
 \frac{du_8}{dt} &= (u_8 + (\alpha - \gamma)x_2 + 1 - \alpha)^+ - u_8, \\
 \frac{du_9}{dt} &= (u_9 - \alpha x_3 - 1 + \alpha)^+ - u_9, \\
 \frac{du_{10}}{dt} &= (u_{10} + (\alpha - \gamma)x_3 + 1 - \alpha)^+ - u_{10}.
 \end{aligned}
 \tag{۳۶.۳}$$

می‌توانیم شبکه عصبی (۳۵.۳) و (۳۶.۳) را به صورت زیر بنویسیم :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & - [w_1(\gamma \alpha x_1) + w_2(\epsilon - \gamma \alpha - \epsilon) + \alpha x_2 (u_1 + \alpha x_1 x_2 + \alpha x_2 - \alpha)^+ \\ & + (\gamma - \alpha) x_2 (u_2 + (\gamma - \alpha) x_1 x_2 + (\gamma - \alpha) x_2 - (\gamma - \alpha))^+ \\ & - \alpha (u_\delta - \alpha x_1 - 1 + \alpha)^+ \\ & + \alpha - \gamma (u_\epsilon + (\alpha - \gamma) x_1 + 1 - \alpha)^+ \\ & w_1(\gamma + \gamma \alpha) + w_2(\epsilon - \gamma \alpha) + (\alpha x_1 + \alpha) (u_1 + \alpha x_1 x_2 + \alpha x_2 - \alpha)^+ \\ & + ((\gamma - \alpha) x_1 + (\gamma - \alpha)) (u_2 + (\gamma - \alpha) x_1 x_2 + (\gamma - \alpha) x_2 - (\gamma - \alpha))^+ \\ & + \alpha (u_3 + \alpha x_2 + \alpha x_2^* - (1 + \alpha))^+ \\ & + (\gamma - \alpha) (u_\epsilon + (\gamma - \alpha) x_2 + (\gamma - \alpha) x_2^* + (\gamma - \alpha))^+ \\ & - \alpha (u_\gamma - \alpha x_2 - 1 + \alpha)^+ \\ & + \alpha - \gamma (u_\lambda + (\alpha - \gamma) x_2 + 1 - \alpha)^+ \\ & w_1 \alpha^\gamma e^{\alpha x_2} + w_2 (\gamma - \alpha)^\gamma e^{(\gamma - \alpha) x_2} + \gamma \alpha x_3 (u_3 + \alpha x_2 + \alpha x_2^* - (1 + \alpha))^+ \\ & + (\epsilon - \gamma \alpha) x_3 (u_\epsilon + (\gamma - \alpha) x_2 + (\gamma - \alpha) x_2^* + (\gamma - \alpha))^+ \\ & - \alpha (u_9 - \alpha x_3 - 1 + \alpha)^+ \\ & + \alpha - \gamma (u_{10} + (\alpha - \gamma) x_3 + 1 - \alpha)^+] , \\ \frac{du_1}{dt} = & (u_1 + \alpha x_1 x_2 + \alpha x_2 - \alpha)^+ - u_1, \\ \frac{du_2}{dt} = & (u_2 + (\gamma - \alpha) x_1 x_2 + (\gamma - \alpha) x_2 - (\gamma - \alpha))^+ - u_2, \\ \frac{du_3}{dt} = & (u_3 + \alpha x_2 + \alpha x_2^* - (1 + \alpha))^+ - u_3, \\ \frac{du_\epsilon}{dt} = & (u_\epsilon + (\gamma - \alpha) x_2 + (\gamma - \alpha) x_2^* + (\gamma - \alpha))^+ - u_\epsilon, \\ \frac{du_\delta}{dt} = & (u_\delta - \alpha x_1 - 1 + \alpha)^+ - u_\delta, \\ \frac{du_\epsilon}{dt} = & (u_\epsilon + (\alpha - \gamma) x_1 + 1 - \alpha)^+ - u_\epsilon, \\ \frac{du_\gamma}{dt} = & (u_\gamma - \alpha x_2 - 1 + \alpha)^+ - u_\gamma, \\ \frac{du_\lambda}{dt} = & (u_\lambda + (\alpha - \gamma) x_2 + 1 - \alpha)^+ - u_\lambda, \\ \frac{du_9}{dt} = & (u_9 - \alpha x_3 - 1 + \alpha)^+ - u_9, \\ \frac{du_{10}}{dt} = & (u_{10} + (\alpha - \gamma) x_3 + 1 - \alpha)^+ - u_{10}. \end{aligned} \right.$$

(۳۷.۳)

یک جواب مساله اولیه با درجه عضویت $\alpha = 0.4$ و ضرایب وزنی $w_1 = \frac{1}{3}$ و $w_2 = \frac{2}{3}$ در شکل ۳.۳ با ۲۰ نقطه شروع نشان داده می‌شود.



شکل ۳.۳: رفتار گذرا از x_1 ، x_2 و x_3 برای شبکه عصبی (۳۷.۳) و (??)

مراجع

- [1] Abdel-Malek, L. L. and Areeratchakul, N. A quadratic programming approach to the multi-product newsvendor problem with side constraints. *European Journal of Operational Research*, 176(3):1607–1619, 2007.
- [2] Ali, F. M. A differential equation approach to fuzzy non-linear programming problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 93(1):57–61, 1998.
- [3] Ammar, E. and Khalifa, H. A. Fuzzy portfolio optimization a quadratic programming approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 18(5):1045–1054, 2003.
- [4] Avriel, M. *Nonlinear programming: analysis and methods*. Courier Corporation, 2003.
- [5] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., and Shetty, C. M. *Nonlinear programming: theory and algorithms*. John Wiley & Sons, 2013.
- [6] Bertsekas, D. P. and Tsitsiklis, J. N. *Parallel and distributed computation: numerical methods*, volume 23. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [7] Boyd, S. and Vandenberghe, L. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [8] Cruz, C., Silva, R. C., and Verdegay, J. L. Extending and relating different approaches for solving fuzzy quadratic problems. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 10(3):193–210, 2011.
- [9] Fletcher, R. *Practical methods of optimization*. John Wiley & Sons, 2013.
- [10] Friedman, M., Ma, M., and Kandel, A. Numerical solutions of fuzzy differential and integral equations. *Fuzzy sets and Systems*, 106(1):35–48, 1999.
- [11] Hopfield, J. J. and Tank, D. W. “neural” computation of decisions in optimization problems. *Biological cybernetics*, 52(3):141–152, 1985.

- [12] Hu, X. and Wang, J. Solving pseudomonotone variational inequalities and pseudoconvex optimization problems using the projection neural network. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 17(6):1487–1499, 2006.
- [13] Kennedy, M. P. and Chua, L. O. Neural networks for nonlinear programming. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35(5):554–562, 1988.
- [14] Li, Z., Xiao, H., Yang, C., and Zhao, Y. Model predictive control of nonholonomic chained systems using general projection neural networks optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 45(10):1313–1321, 2015.
- [15] Liao, L. Z., Qi, H., and Qi, L. Solving nonlinear complementarity problems with neural networks: a reformulation method approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 131(1-2):343–359, 2001.
- [16] Liu, S. T. A revisit to quadratic programming with fuzzy parameters. *Chaos, Solitons & Fractals*, 41(3):1401–1407, 2009.
- [17] Lu, J. and Fang, S. C. Solving nonlinear optimization problems with fuzzy relation equation constraints. *Fuzzy Sets and Systems*, 119(1):1–20, 2001.
- [18] Lu, T. and Liu, S. T. Fuzzy nonlinear programming approach to the evaluation of manufacturing processes. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 72:183–189, 2018.
- [19] Lupulescu, V. On a class of fuzzy functional differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(11):1547–1562, 2009.
- [20] Majeed, K., Masood, Z., Samar, R., and Raja, M. A. Z. A genetic algorithm optimized morlet wavelet artificial neural network to study the dynamics of nonlinear troesch’s system. *Applied Soft Computing*, 56:420–435, 2017.
- [21] Mansoori, A., Effati, S., and Eshaghnezhad, M. An efficient recurrent neural network model for solving fuzzy non-linear programming problems. *Applied Intelligence*, 46(2):308–327, 2017.
- [22] Miettinen, K. M. Nonlinear multiobjective optimization kluwer academic publishers. *Boston, Massachusetts*, 1999.
- [23] Mousavi, S. M., Mirdamadi, S., Siadat, A., Dantan, J., and Tavakkoli-Moghaddam, R. An intuitionistic fuzzy grey model for selection problems with an application to the inspec-

- tion planning in manufacturing firms. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 39:157–167, 2015.
- [24] Nazemi, A. and Effati, S. An application of a merit function for solving convex programming problems. *Computers & Industrial Engineering*, 66(2):212–221, 2013.
- [25] Nocedal, J. and Wright, S. *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [26] Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [27] Panigrahi, M., Panda, G., and Nanda, S. Convex fuzzy mapping with differentiability and its application in fuzzy optimization. *European Journal of Operational Research*, 185(1):47–62, 2008.
- [28] Peng, Z. and Wang, J. Output-feedback path-following control of autonomous underwater vehicles based on an extended state observer and projection neural networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 48(4):535–544, 2017.
- [29] Quarteroni, A., Sacco R. and Saleri, F. *Numerical Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [30] Raja, M. A. Z., Manzar, M. A., Shah, F. H., and Shah, F. H. Intelligent computing for mathieu’s systems for parameter excitation, vertically driven pendulum and dusty plasma models. *Applied Soft Computing*, 62:359–372, 2018.
- [31] Ranjbar, M., Effati, S., and Miri, S. M. An artificial neural network for solving quadratic zero-one programming problems. *Neurocomputing*, 235:192–198, 2017.
- [32] Rao, S. S. *Engineering optimization: theory and practice*. John Wiley & Sons, 2019.
- [33] Silva, R. C., Cruz, C., and Verdegay, J. L. Fuzzy costs in quadratic programming problems. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 12(3):231–248, 2013.
- [34] Sun, J., Chen, J. S., and Ko, C. H. Neural networks for solving second-order cone constrained variational inequality problem. *Computational optimization and applications*, 51(2):623–648, 2012.

-
- [35] Tang, J. and Wang, D. Modelling and optimization for a type of fuzzy nonlinear programming problems in manufacturing systems. In *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 4401–4405. IEEE, 1996.
- [36] Tank, D. and Hopfield, J. J. Simple 'neural' optimization networks: An a/d converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit. *IEEE transactions on circuits and systems*, 33(5):533–541, 1986.
- [37] Vasant, P. Hybrid ls–sa–ps methods for solving fuzzy non-linear programming problems. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(1-2):180–188, 2013.
- [38] Wang, G. and Wu, C. Directional derivatives and subdifferential of convex fuzzy mappings and application in convex fuzzy programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 138(3):559–591, 2003.
- [39] Wu, C. W. and Liao, M. Y. Fuzzy nonlinear programming approach for evaluating and ranking process yields with imprecise data. *Fuzzy Sets and Systems*, 246:142–155, 2014.
- [40] Wu, H. C. Saddle point optimality conditions in fuzzy optimization problems. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2(3):261–273, 2003.
- [41] Wu, H. C. Duality theory in fuzzy optimization problems. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3(4):345–365, 2004.
- [42] Wu, H. C. Evaluate fuzzy optimization problems based on biobjective programming problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 47(6-7):893–902, 2004.
- [43] Wu, X. L. and Liu, Y. K. Optimizing fuzzy portfolio selection problems by parametric quadratic programming. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 11(4):411–449, 2012.
- [44] Xia, Y., Feng, G., and Wang, J. A recurrent neural network with exponential convergence for solving convex quadratic program and related linear piecewise equations. *Neural Networks*, 17(7):1003–1015, 2004.
- [45] Zhu, H., Huang, G. H., and Guo, P. Sifnp: simulation-based interval-fuzzy nonlinear programming for seasonal planning of stream water quality management. *Water, Air, & Soil Pollution*, 223(5):2051–2072, 2012.
- [46] Zhu, H., Huang, G. H., Guo, P., and Qin, X. S. A fuzzy robust nonlinear programming model for stream water quality management. *Water resources management*, 23(14):2913, 2009.

[۴۷] قره‌سفلو، زهرا. پایداری سیستم‌های کنترلی فازی تاکاگی-سوگینو. کارشناسی ارشد، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری - دانشگاه صنعتی شاهرود - دانشکده علوم ریاضی، ۱۳۹۸.

[۴۸] مقدس، محمد. حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی غیرخطی با استفاده از شبکه‌های عصبی. کارشناسی ارشد، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری - دانشگاه فردوسی مشهد - دانشکده علوم ریاضی، ۱۳۹۲.

Abstract

In this thesis, two models of feedback neural networks for solving fuzzy quadratic and fuzzy convex nonlinear programming problems are presented. It will be shown that the equilibrium point of the presented models is equivalent to the solution of the fuzzy optimization problem. Also by proposing a suitable Lyapunov function, it is proved that the proposed models are stable in the sense of Lyapunov and globally convergent. The validity of the proposed model is shown by some numerical results.

keywords: Fuzzy mapping, Neural networks, Weighting planing.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Optimization

**Neural network and fuzzy linear
programming**

By: Hurieh Sadeghi

Supervisor

Alireza Nazemi

January 2020