بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری جبر

بررسی گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه چندجمله‌ای‌ها و حلقه سری‌های توانی

نگارنده: منا عبدی

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور

دکتر عبدالله آل‌هوز

بهمن ماه ۱۳۹۸

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

که همیشه در انتهای نگاه سبزشان حضور رنگین کمان احساس می‌شود و چشمه دستانشان همیشه جوشان است آنها که آیینه آمالشان بودیم و اکنون که نوبت به انعکاس ما رسیده است هیچ در بساط نداریم.

ما نیز حاصل تلاشمان را بی دریغ تقدیمشان می‌کنیم.

سپاس‌گزاری...

اکنون که به یاری پروردگار و یاری و راهنمایی اساتید بزرگوار موفق به انجام این رساله شده‌ام وظیفه‌ی خود دانسته که نهایت سپاسگزاری را از تمامی عزیزانی که در این راه به من کمک کرده‌اند به‌عمل آورم:

تشکر قلبی و لسانی خود را از استاد عالی قدر جناب آقای **دکتر ابراهیم هاشمی** که زحمت راهنمایی این پایان نامه را عهده‌دار گردیدند و در تمامی مراحل انجام رساله از راهنمایی‌های مدبّرانه ایشان استفاده نمودم ابراز می‌دارم و توفیقات روز افزون ایشان را توأم با صحت و سعادت خواستارم.

از جناب آقای **دکتر عبدالله آل‌هوز** که در امر مشاوره این رساله مساعدت نمودند و در این امر نهایت مراقبت، توجه و دقت خود را مبذول فرموده‌اند کمال تشکر و امتنان را دارم و برای ایشان از خداوند سلامت و سعادت ابدی را خواهانم.

هم‌چنین، از داوران گرامی، سرکار خانم **دکتر ناهید اشرفی**، جناب آقای **دکتر سید حیدر جعفری** و جناب آقای **دکتر میثم علیشاهی** که زحمت داوری و تصحیح این رساله را برعهده داشتند سپاسگزارم.

در پایان، این رساله را تقدیم می‌کنم به خانواده عزیزم که همیشه یار و همراه من بوده‌اند.

منا عبدی
بهمن ماه ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **منا عبدی** دانشجوی دکتری دانشکده **علوم ریاضی** ، رشته **ریاضی محض** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه چندجمله‌ای‌ها و حلقه سری‌های توانی**، تحت راهنمایی **ابراهیم هاشمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود‘‘ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

منا عبدی
بهمن ماه ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

مطالعه ساختارهای جبری از طریق نسبت دادن گراف‌هایی به آن‌ها و بررسی خواص آن، یک موضوع تحقیقاتی جالب در چند دهه اخیر بوده که پرسش‌ها و نتایج جبری جالبی پدید آورده است. در این رساله قصد داریم به بررسی و مطالعه گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه‌ی R و برخی توسیع‌های آن بپردازیم. در این راستا، قطر گراف $\Gamma_E(R)$ را زمانی که حلقه‌ی R جابه‌جایی است، بررسی می‌کنیم و یک رده‌بندی کامل از قطر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده را ارائه می‌دهیم. هم‌چنین، مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده را به حلقه‌های ناجابه‌جایی تعمیم داده و قطر گراف مقسوم‌علیه صفر و گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب لوران $\Gamma_E(R[x,x^{-1};\alpha])$ و حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])$، که در آن R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و (α,δ)ـ سازگار است، را مطالعه می‌کنیم. به‌علاوه، عدد احاطه‌گری گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(R)$، گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده $\Gamma_E(R)$ و گراف یکه $G(R)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و ارتباط بین عدد احاطه‌گری گراف‌های $\Gamma(R)$ و $\Gamma(R[x;\alpha,\delta])$ و نیز ارتباط بین عدد احاطه‌گری گراف‌های $G(R)$ و $G(R[[x;\alpha]])$ را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

کلمات کلیدی: گراف مقسوم‌علیه صفر؛ گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده؛ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب لوران؛ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب؛ حلقه‌ی سری‌های توانی اریب؛ گراف یکه؛ توسیع جردن؛ حلقه‌ی برگشت‌پذیر؛ قطر؛ عدد احاطه‌گری.

رده‌بندی موضوعی ریاضیات: اولیه: $13A99$، $16U99$، $16S36$، $16U80$؛ ثانویه: $05C12$، $05C69$.

لیست مقالات مستخرج از رساله

1. E. Hashemi, M. Abdi and A. Alhevaz, On the diameter of the compressed zero-divisor graph, *Comm. Algebra*, **45** (2017), 4855-4864.

2. E. Hashemi, M. Abdi, A. Alhevaz and H. Su, Domination number of graphs associated with rings, *J. Algebra Appl.*, (2020), pp. 12.

3. E. Hashemi, M. Abdi and A. Alhevaz, On diameter of the zero-divisor and the compressed zero-divisor graphs of skew Laurent polynomial rings, *J. Algebra Appl.*, **18** (2019), pp. 18.

4. E. Hashemi and M. Abdi, On the diameter of the compressed zero-divisor graphs of Ore extentions, accepted.

5. M. Abdi and E. Hashemi, On the compressed zero-divisor graph over non-commutative rings, *The 50th Annual Iranian Mathematics Conference*, Shiraz University, 26-29 August (2019).

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

پیشگفتار

با گسترش جبر در یک صد سال گذشته، ساختارهای جبری همواره مورد توجه ریاضیدانان بوده و هست. مطالعه ساختارهای جبری از طریق نسبت دادن گراف‌هایی به آن‌ها و بررسی خواص آن، یک موضوع تحقیقاتی جالب در چند دهه اخیر بوده که پرسش‌ها و نتایج جبری جالبی پدید آورده است. یکی از قدیمی‌ترین این تناظرها نسبت دادن گراف کیلی به یک گروه می‌باشد که توسط آرتور کیلی[۱] انجام شده و نتایج قابل توجهی از این تناظر به‌دست آمده است. ارتباط بین حلقه‌ها و گراف‌ها، اولین بار توسط بک[۲] در سال ۱۹۸۸ در مقاله‌ای تحت عنوان رنگ‌آمیزی حلقه‌ی جابه‌جایی معرفی شد. بک به حلقه‌ی جابه‌جایی R، گراف مقسوم‌علیه صفر، که با نماد $\Gamma(R)$ نمایش داده می‌شود، را نسبت داد. در گرافی که بک معرفی کرد، تمام عناصر حلقه به‌عنوان رئوس گراف در نظر گرفته شده بودند و دو عنصر متمایز a و b با هم مجاور بودند هرگاه $ab = 0$. لازم به ذکر است که تمرکز اصلی بک مشخص کردن عدد رنگی این گراف بود.

در سال ۱۹۹۹، اندرسون[۳] و لیوینگستون[۴] [۱۳]، تعریف این گراف را تغییر دادند و مجموعه رئوس گراف را مجموعه مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی حلقه R در نظر گرفتند. سؤال مهم پیش‌روی ریاضیدانانی که در این زمینه فعالیت داشتند این بود که چگونه خواص جبری حلقه R، ویژگی‌های گرافی $\Gamma(R)$ را مشخص می‌کند و بالعکس. پاسخ دادن به این سؤال بسیار جذاب بود چرا که از روش‌های ساده محاسباتی تا مسائل پیشرفته در نظریه‌ی حلقه‌ها به کمک حل این مسائل آمدند. همان‌طور که انتظار می‌رفت، با نسبت دادن این گراف به حلقه‌ها، پژوهشگران زیادی جذب این موضوع شدند و به مرور، گراف‌های مختلفی که ایده‌ی اصلی آن‌ها از گراف مقسوم‌علیه صفر بود به ساختارهای جبری نسبت داده شد. به‌عنوان مثال در مراجع [۲۴] و [۲۰] گراف مقسوم‌علیه صفر نیم‌گروه‌ها و مدول‌ها معرفی و بررسی شدند. عده‌ای دیگر نیز به نسبت دادن گراف‌های جدید به ساختارهای جبری پرداختند که در این‌جا به ذکر دو نمونه از آن‌ها می‌پردازیم:

۱. گراف‌های هم‌بیشین که توسط شارما[۵] و باتوادکار[۶] در مرجع [۶۸] معرفی شد.در این گراف تمام عناصر حلقه R به عنوان رئوس گراف در نظر گرفته شدند و دو عنصر متمایز

[1] Arthur Cayley
[2] Beck
[3] Anderson
[4] Livingston
[5] Sharma
[6] Bhatwadekar

a و b به یکدیگر متصل هستند هرگاه $aR+bR=R$.

۲. گراف تام یک حلقه جابه‌جایی توسط اندرسون و بداوی[۷] در مرجع [۸] معرفی شد. در این گراف نیز تمام اعضای حلقه‌ی R به عنوان رئوس گراف در نظر گرفته شده‌اند و دو رأس متمایز a و b مجاورند هرگاه $a+b$ مقسوم‌علیه صفری از R باشد.

براساس تعریف اندرسون و لیوینگستون [۱۳]، گراف مقسوم علیه صفر حلقه‌ی جابه‌جایی R، که با نماد $\Gamma(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی است که مجموعه رئوس آن مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر غیربدیهی حلقه‌ی R می‌باشد و دو رأس متمایز a و b مجاورند اگر و تنها اگر $ab=0$. اندرسون و لیوینگستون در مرجع [۱۳، قضیه ۳.۲] ثابت کردند که گراف $\Gamma(R)$ همیشه همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma(R))\leq ۳$. آن‌ها این قضیه را با این نتیجه‌ی نظریه گراف که اگر Γ شامل دور باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma)\leq ۲(\Gamma)+۱$، ترکیب کردند و نتیجه گرفتند $gr(\Gamma(R))\leq ۷$. آن‌ها در مرجع [۱۳، قضیه ۴.۲] نشان دادند که اگر R حلقه‌ای آرتینی، جابه‌جایی و شامل دور باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma(R))\leq ۴$، و حدس زدند که این نتیجه برای هر حلقه‌ی جابه‌جایی دلخواه برقرار است. حدس آن‌ها توسط مولای[۸] [۶۳] و دیمیر[۹] [۲۴] به‌طور مستقل اثبات شد.
مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر توسط ردموند[۱۰] در مرجع [۶۷]، به حلقه‌های دلخواه نه لزوماً جابه‌جایی گسترش داده شد. او گراف مقسوم‌علیه صفر غیرجهت‌دار حلقه‌ی ناجابه‌جایی R، که با نماد $\overline{\Gamma}(R)$ نمایش داده، را به این صورت تعریف کرده است که در آن مجموعه مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی رئوس گراف بوده و بین دو رأس متمایز a و b یالی وجود دارد اگر و تنها اگر $ab=0$ یا $ba=0$. ردموند در مرجع [۶۷] ثابت کرد که گراف $\overline{\Gamma}(R)$ همیشه همبند است و $\mathrm{diam}(\overline{\Gamma}(R))\leq ۳$.

در راستای این مطالعات، علاقه قابل توجهی وجود دارد که بدانیم آیا خواص گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی R، تحت توسیع‌های حلقه‌ای مختلف حفظ می‌شوند یا خیر؟ ابتدایی‌ترین توسیع‌هایی که در این راستا بررسی می‌شود توسیع حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها و نیز حلقه‌ی سری‌های توانی می‌باشد. آکستل[۱۱]، کویکندال[۱۲] و استیکلس[۱۳] [۱۷]، محفوظ ماندن قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی جابه‌جایی R تحت توسیع‌های چندجمله‌ای‌ها و سری‌های توانی را مورد بررسی قرار داده‌اند. در ادامه این کار، افرادی چون لوکاس[۱۴] [۵۷]، قطر گراف مقسوم‌علیه صفر را روی توسیع‌های چندجمله‌ای و سری‌های توانی رده‌بندی کردند، و هم‌چنین اندرسون و مولای در مرجع [۱۴]، قطر و کمر این گراف‌ها را مورد بررسی و مطالعه قرار دادند. هاشمی[۱۵] و امیرجان[۱۶] [۳۷]، این نتایج را به حالت ناجابه‌جایی گسترش دادند. آن‌ها برای حلقه‌ی برگشت‌پذیر و αــ سازگار R، گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی سری‌های توانی اریب $R[[x;\alpha]]$ را مورد مطالعه قرار دادند و همچنین، مقایسه‌ای از مقادیر ممکن برای قطر و

[7] Badawi
[8] Mulay
[9] Demeyer
[10] Redmond
[11] Axtell
[12] Coykendall
[13] Stickles
[14] Lucas
[15] Hashemi
[16] Amirjan

کمر گراف‌های $\Gamma(R)$، $\Gamma(R[x;\alpha,\delta])$ و $\Gamma(R[[x;\alpha]])$ ارائه نمودند. آن‌ها در مرجع [۳۸] مطالعات خود را در این زمینه ادامه دادند.

اسپایرف[17] و ویکام[18] [۷۰]، با الهام گرفتن از ایده‌های مولای [۶۳]، به مطالعه گراف کلاس‌های هم‌ارزی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی R، که آن‌را با نماد $\Gamma_E(R)$ نشان می‌دهند، پرداختند. رئوس این گراف، کلاس‌های هم‌ارزی مقسوم‌علیه‌های صفر می‌باشند و دو رأس متمایز $[a]_R$ و $[b]_R$ با یکدیگر مجاورند هرگاه $ab=0$. آن‌ها ثابت کردند که گراف $\Gamma_E(R)$ همبند است و $\text{diam}(\Gamma_E(R)) \leq 3$.

اندرسون و لاگرانژ[19] [۹]، گراف $\Gamma_E(R)$ را گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده نامیده و مطالعه روی این گراف‌ها را ادامه دادند. آن‌ها هم‌چنین بررسی کردند که اگر R و S دو حلقه باشند تحت چه شرایطی یکریختی $\Gamma_E(R) \cong \Gamma(S)$ برقرار میباشد.

گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده $\Gamma_E(R)$ مزیت‌های بیشتری نسبت به گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(R)$ دارد. یکی از مزایای این گراف این است که، در بیشتر موارد گراف $\Gamma_E(R)$ متناهی است درصورتی که گراف $\Gamma(R)$ نامتناهی می‌باشد. به عنوان مثال، حلقه $R=\mathbb{Z}[x,y]/\langle x^3, xy\rangle$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت، $\Gamma(R)$ گرافی نامتناهی است درحالی‌که $\Gamma_E(R)$ گرافی با چهار رأس می‌باشد. یکی دیگر از مزیت‌های گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده ارتباط این گراف با ایده‌آل‌های اول وابسته‌ی حلقه می‌باشد. به‌عنوان مثال، اگر $R=\mathbb{Z}[x,y]/\langle x^3, xy\rangle$، آن‌گاه $ann_R(x^2)$ یک ایده‌آل اول وابسته است. در حالت کلی، همه ایده‌آل‌های اول وابسته حلقه R متناظر با رئوس متمایز در $\Gamma_E(R)$ می‌باشند. به‌علاوه، هر رأس در گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده یا متناظر با یک اول وابسته است یا با یک ایده‌آل اول وابسته مجاور می‌باشد.

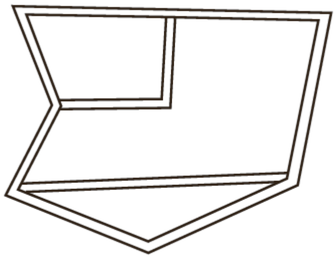
در سال ۲۰۱۲ آلن[20] و همکارانش [۷]، به بررسی و مطالعه قطر و کمر گراف $\Gamma_E(R)$ پرداختند. آن‌ها نشان دادند که $\text{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \text{diam}(\Gamma(R))$، و هم‌چنین ثابت کردند که اگر حلقه‌ی R شامل یک دور باشد، آنگاه $gr(\Gamma_E(R)) \geq gr(\Gamma(R))$. آن‌ها در مرجع [۷، گزاره ۳.۳]، ثابت کردند اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری و شامل یک دور باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma_E(R)) \leq 4$. اندرسون و لاگرانژ [۱۲]، مطالعه گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده $\Gamma_E(R)$ را ادامه دادند. آن‌ها نشان دادند کمر گراف $\Gamma_E(R)$ برابر ۳ است اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی و شامل دور باشد، و هم‌چنین ساختار $\Gamma_E(R)$ را زمانی که یک دور باشد و تکوار R_E را زمانی که $\Gamma_E(R)$ گراف ستاره باشد، را مشخص کردند.

در قرن نوزدهم میلادی مسائلی مانند «یافتن حداقل تعداد مهره‌ی وزیری که می‌توانند با چینش مناسب تمام صفحه‌ی شطرنج را بپوشانند » (یعنی هر خانه‌ی صفحه‌ی شطرنج که در آن وزیر قرار نگرفته است توسط حداقل یک وزیر تهدید شده باشند) ذهن برخی از مردم اروپا را به خود مشغول کرده بود.

تفکر درباره‌ی چنین پرسش‌هایی باعث به‌وجود آمدن مفهومی در شاخه‌ی گراف در ریاضیات

---
[17] Spiroff
[18] Wickham
[19] Lagrange
[20] Allen

با نام احاطه‌گری شد. شکل زیر نقشه‌ی منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی



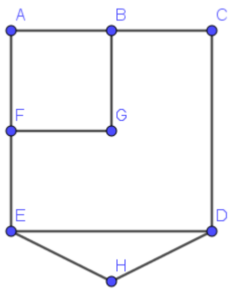
شکل ۱

تقاطع‌های این شهر دستگاه‌های خودپرداز به گونه‌ای نصب شود که دو شرط زیر را داشته باشد:

(۱) برای راحتی شهروندان دستگاه‌ها به گونه‌ای نصب شده باشند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا در همان تقاطع به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند.

(۲) به جهت صرفه‌جویی در هزینه‌ها با کمترین تعداد دستگاه خودپرداز ممکن این‌کار صورت بگیرد.

حال فرض کنید منطقه‌ی مورد نظر را با گراف شکل زیر مدل‌سازی کرده باشیم. در این



شکل ۲

مدل‌سازی تقاطع‌ها همان رئوس گراف و خیابان‌های بین آن‌ها نمایان‌گر یال‌ها می‌باشند. رأس‌هایی از گراف را که با توجه به مدل‌سازی انجام شده، اگر خودپردازها در آن تقاطع‌ها قرار گیرند، شرط (۱) برآورده می‌گردد، یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف می‌نامیم.

فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی غیرجهت‌دار با مجموعه رئوس V و مجموعه یال E باشد. زیرمجموعه‌ی D از V را یک مجموعه احاطه‌گر G می‌نامیم هرگاه هر رأس در $V \setminus D$ با حداقل یک رأس در D مجاور باشد. به‌عبارتی دیگر، D رأس‌های خارج از D را احاطه می‌کند. به اندازه‌ی مینیمم مجموعه احاطه‌گر G، عدد احاطه‌گر می‌نامیم. عماد[۲۱] و همکارانش در سال ۲۰۰۸،

[21] Emad

عدد احاطه گری گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ را بررسی کردند. آن‌ها در مرجع [۱] نشان دادند که عدد احاطه‌گری $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\cdots\times p_k^{\alpha_k}})$ برابر k می‌باشد. در سال ۲۰۱۱ جعفری‌راد[22] و همکارانش [۴۸]، عدد احاطه‌گری گراف مقسوم‌علیه صفر ضرب دو حلقه‌ی جابه‌جایی را بررسی کردند. هم‌چنین مطالعه و بررسی عدد احاطه‌گری گراف مقسوم‌علیه صفر در سال ۲۰۱۲ توسط رحیمی[23] و مژده[24] و در سال ۲۰۱۴ توسط کیانی[25] و همکارانش روی حلقه جابه‌جایی ادامه پیدا کرد (به [۶۱، ۵۱] رجوع شود).

این رساله شامل سه فصل اصلی به صورت زیر می‌باشد:

در فصل اول، ابتدا حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب، حلقه‌ی سری‌های توانی اریب، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب لوران، حلقه‌ی سری‌های توانی اریب و برخی مفاهیم دیگر نظریه حلقه‌ها مرتبط را معرفی می‌کنیم. در بخش دوم این فصل، به معرفی مفاهیم اولیه در نظریه گراف می‌پردازیم. در ادامه، بین مفاهیم گرافی و حلقه‌ای ارتباط برقرار کرده و گراف مقسوم‌علیه صفر را تعریف می کنیم و به بیان ارتباط بین ویژگی‌های حلقه‌ای R و ویژگی گرافی گراف مقسوم‌علیه صفر می‌پردازیم. در بخش آخر، گراف مقسوم‌علیه صفر تعیین شده به‌وسیله‌ی کلاس هم‌ارزی را تعریف می‌کنیم و برخی از ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم.

در فصل دوم، قطر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه‌ی جابه‌جایی R را مطالعه می‌کنیم و یک رده‌بندی کامل از قطر گراف $\Gamma_E(R)$ برحسب ایده‌آل‌های R ارائه می‌دهیم. هم‌چنین، یک رده‌بندی کامل از قطر گراف $\Gamma_E(R[x])$ برحسب قطر گراف $\Gamma_E(R)$ ارائه خواهیم داد و نشان می‌دهیم برای حلقه‌ی کاهشی R با مقسوم‌علیه‌های صفر غیربدیهی، $1 \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq$ $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) \leq 3$. در بخش دوم، مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده را به حالت ناجابه‌جایی تعمیم می‌دهیم و به مطالعه و بررسی قطر گراف مقسوم‌علیه صفر و گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب لوران می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا، روابط بین خواص حلقه‌ی R و توسیع جردن A را بررسی می‌کنیم، و در ادامه یک رده‌بندی کامل از قطرهای $\Gamma(R[x, x^{-1}; \alpha])$ و $\Gamma_E(R[x, x^{-1}; \alpha])$ ارائه می‌دهیم، که در آن حلقه‌ی R برگشت‌پذیر و αـ سازگار می‌باشد. در بخش آخر، برای حلقه‌ی برگشت‌پذیر و (α, δ)ـ سازگار R همه‌ی مقادیر ممکن برای قطر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده $\Gamma_E(R[x; \alpha, \delta])$ را رده‌بندی می‌کنیم. هم‌چنین یک رده‌بندی کامل از قطر گراف $\Gamma_E(R[[x; \alpha]])$، که در آن R، حلقه‌ای برگشت‌پذیر، αـ سازگار و نوتری است، ارائه می‌دهیم. در ادامه با ارائه‌ی چند مثال نشان می‌دهیم که هر یک از شروط ''(α, δ)ـ سازگاری''، ''برگشت‌پذیری'' و ''نوتری بودن'' حلقه‌ی R در قضایای اصلی ما اساسی است.

در فصل سوم، برای حلقه‌ی شرکت‌پذیر (نه لزوماً جابه‌جایی) R، عدد احاطه‌گری گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(R)$، گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده $\Gamma_E(R)$ و گراف یکه $G(R)$ را بررسی می‌کنیم و به بیان برخی روابط بین عدد احاطه‌گری گراف مقسوم‌علیه صفر و گراف مقسوم‌علیه

[22] Jafarirad
[23] Rahimi
[24] Mojdeh
[25] Kiani

صفر فشرده می‌پردازیم. همچنین، ارتباط بین عدد احاطه‌گری $\Gamma(R)$ و $\Gamma\big(R[x;\alpha,\delta]\big)$ و نیز ارتباط بین عدد احاطه‌گری گراف $G(R)$ و $G\big(R[x;\alpha,\delta]\big)$ را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم.

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل، به اجمال برخی مفاهیم اولیه‌ی نظریه‌ی حلقه‌ها و نظریه‌ی گراف‌ها، که برای مطالعه‌ی فصل‌های بعدی به آن نیازمند هستیم، را بیان می‌کنیم. هم‌چنین به مطالعه‌ی ارتباط بین مفاهیم گرافی و حلقه‌ای پرداخته و با مروری برکارهای انجام شده برخی از ویژگی‌ها و قضایای مربوطه را بیان می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیم مورد نیاز از نظریه‌ی حلقه‌ها

در تمام این رساله R نمایان‌گر یک حلقه‌ی شرکت‌پذیر و یکدار است. برای عنصر $a \in R$، $r_R(a) = \{b \in R \mid ab = 0\}$ و $l_R(a) = \{b \in R \mid ba = 0\}$ به ترتیب پوچ‌ساز چپ و پوچ‌ساز راست a می‌باشند. برای حلقه‌ی R مجموعه‌ی همه مقسوم‌علیه‌های صفر چپ و مقسوم‌علیه‌های صفر راست R را به‌ترتیب با نمادهای $Z_l(R)$ و $Z_r(R)$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم: $Z_l(R) = \{a \in R \mid ab = 0, \ b \in R^*$ برای بعضی $\}$ و $Z_l(R) = \{a \in R \mid ba = 0, \ b \in R^*$ برای بعضی $\}$. هم‌چنین $Z(R) = Z_l(R) \cup Z_r(R)$ نمایان‌گر مجموعه‌ی همه مقسوم‌علیه‌های صفر R می‌باشد. مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر غیربدیهی حلقه R را با $Z(R)^*$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه، $U(R)$ نمایان‌گر مجموعه یکه‌های حلقه‌ی R می‌باشد. اگر $X \subseteq R$، آن‌گاه ایده‌آل تولید شده توسط X را با نماد $\langle X \rangle$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. عنصر a از حلقه‌ی R را پوچ‌توان می‌نامیم هرگاه عدد صحیح مثبت n وجود

داشته باشد به‌طوری‌که $a^n = 0$. مجموعه‌ی همه‌ی عناصر پوچ‌توان R را با $Nil(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. حلقه‌ی R را کاهشی می‌نامیم هرگاه هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفر نداشته باشد.

تعریف ۳.۱.۱. حلقه‌ی R را متقارن می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b, c \in R$، اگر $abc = 0$، نتیجه شود $bac = 0$.

کُهن[1] در مرجع [۲۳]، به مطالعه‌ی حلقه‌ی برگشت‌پذیر R پرداخت. قبل از کُهن، حلقه‌های برگشت‌پذیر تحت عنوان کاملاً بازتابنده توسط میسون[2] در مرجع [۵۹] و تحت عنوان جابه‌جایی صفر توسط حبیب[3] در مرجع [۳۰] مورد مطالعه قرار گرفتند.

تعریف ۴.۱.۱. حلقه‌ی R را برگشت‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in R$، اگر $ab = 0$، آن‌گاه $ba = 0$.

به‌وضوح، حلقه‌های کاهشی و حلقه‌های جابه‌جایی، برگشت‌پذیر هستند. اگر R حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد، آنگاه $Z_l(R) = Z_r(R) = Z(R)$. هم‌چنین، اگر R حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد و $a \in R$، آن‌گاه $l_R(a) = r_R(a)$ یک ایده‌آل از R است.

تعریف ۵.۱.۱. حلقه‌ی R را نیم‌جابه‌جایی می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in R$، اگر $ab = 0$، آن‌گاه $aRb = 0$.

به‌عنوان مثال، حلقه‌های برگشت‌پذیر، نیم‌جابه‌جایی هستند.

تعریف ۶.۱.۱. حلقه‌ی R را آبلی می‌نامیم هرگاه هر عنصر خودتوان R مرکزی باشد.

به‌وضوح، حلقه‌های نیم‌جابه‌جایی، آبلی هستند.
ارتباط بین حلقه‌هایی که تاکنون معرفی شدند، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{tikzcd}
\text{جابه‌جایی} \arrow[d] & & & \\
\text{متقارن} \arrow[r] & \text{برگشت‌پذیر} \arrow[r] & \text{نیم‌جابه‌جایی} \arrow[r] & \text{آبلی} \\
\text{کاهشی} \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

تعریف ۷.۱.۱. حلقه‌ی R را دوئو راست (چپ) می‌نامیم هرگاه هر ایده‌آل راست (چپ) از R، یک ایده‌آل دوطرفه باشد.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید R حلقه باشد. عنصر $a \in R$ را منظم می‌نامیم هرگاه $r_R(a) = 0 = l_R(a)$.

[1] Cohn
[2] Mason
[3] Habeb

تعریف ۹.۱.۱. ایده‌آل P از حلقه R را کاملاً اول می‌نامیم هرگاه برای $a,b \in R$، اگر $ab \in P$، آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$.

تعریف ۱۰.۱.۱. ایده‌آل اول P را یک ایده‌آل اول وابسته R می‌نامیم هرگاه P پوچساز یک ایده‌آل راست ناصفر مانند I باشد و برای هر ایده‌آل راست J که مشمول در I است داشته باشیم: $r(J) = P$. مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته حلقه‌ی R را با $Ass(R)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۱.۱.۱. اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال حلقه‌ی R را جیکبسون رادیکال می‌نامیم و با نماد $rad(R)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۲.۱.۱. [۵۶، قضیه ۱.۱۹] فرض کنید R حلقه‌ای دلخواه باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) R دارای ایده‌آل چپ ماکسیمال یکتاست.

(۲) R دارای ایده‌آل راست ماکسیمال یکتاست.

(۳) $R/rad(R)$ یک حلقه‌ی تقسیم است.

(۴) $R \setminus U(R)$ یک ایده‌آل است.

(۵) $R \setminus U(R)$ تحت جمع یک گروه است.

تعریف ۱۳.۱.۱. حلقه‌ی R را موضعی می‌نامیم هرگاه در یکی از شرایط قضیه ۱۲.۱.۱ صدق کند.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید α یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد. تابع جمعی $\delta : R \to R$ را یک تابع αـ مشتق می‌نامیم هرگاه برای هر $a,b \in R$، $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید α یک درونریختی و δ یک تابع αـ مشتق از حلقه‌ی R باشد. حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب روی R را با $R[x;\alpha,\delta]$ نمایش می‌دهیم. عناصر آن چندجمله‌ای‌های $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ هستند که $a_i \in R$ و $n \geq 0$. دو عمل جمع و ضرب روی $R[x;\alpha,\delta]$ به‌طور طبیعی تعریف می‌شوند به‌طوری‌که برای هر $a \in R$، $xa = \alpha(a)x + \delta(a)$. اگر α تابع همانی باشد آن‌گاه $R[x;\alpha,\delta]$ را با $R[x;\delta]$ نشان می‌دهیم و آن‌را حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق روی R می‌نامیم. هرگاه $\delta = 0$، بجای $R[x;\alpha,\delta]$ از $R[x;\alpha]$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید α یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد. حلقه‌ی سری‌های توانی اریب روی R را با $R[[x;\alpha]]$ نمایش می‌دهیم. عناصر آن همان سری‌های توانی $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ با ضرایبی از R هستند. جمع و ضرب روی آن به‌طور طبیعی تعریف می‌شوند به‌طوری‌که برای هر $a \in R$، $xa = \alpha(a)x$.

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنید δ یک تابع αـ مشتق برحلقه‌ی R باشد. حلقه‌ی R را αـ سازگار می‌نامیم هرگاه برای هر $a,b \in R$، $ab = 0$ اگر و تنها اگر $a\alpha(b) = 0$. حلقه‌ی R را δـ سازگار می‌نامیم هرگاه برای هر $a,b \in R$، اگر $ab = 0$، آن‌گاه $a\delta(b) = 0$. اگر R هم αـ سازگار هم δـ سازگار باشد آن‌را (α,δ)ـ سازگار می‌نامیم.

واضح است که اگر R یک حلقه‌ی αـ سازگار باشد، آن‌گاه α یک‌به‌یک است.

تعریف ۱.۱.۱۸. درون‌ریختی $\alpha : R \to R$ را صلب می‌نامیم هرگاه $a \in R$ و $a\alpha(a) = 0$، آن‌گاه $a = 0$. حلقه‌ی R را αـ صلب می‌نامیم هرگاه درون‌ریختی صلب α از R وجود داشته باشد.

در مرجع [۴۱، لم ۲.۲]، ثابت شده است که شرط صلب بودن روی درونریختی قوی‌تر از شرط سازگاری است. در واقع، اگر α یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه R، αـ سازگار و کاهشی است اگر و تنها اگر R، αـ صلب باشد. بنابراین، حلقه‌های αـ سازگار تعمیمی از حلقه‌های αـ صلب هستند. در ذیل، چندین مثال از چنین حلقه‌هایی ارائه می‌دهیم که دو مثال اول از مرجع [۴۱] و دو مثال بعدی از مرجع [۳۱] می‌باشند.

مثال ۱.۱.۱۹. فرض کنید R_1 یک حلقه، D یک دامنه، $R = R_1 \oplus D[y]$ و $\alpha : D[y] \to D[y]$ یک تکریختی باشد. دراین‌صورت $\overline{\alpha} : R \to R$ با ضابطه‌ی $\overline{\alpha}(a \oplus f(y)) = a \oplus \alpha(f(y))$ برای هر $a \in R_1$ و $f(y) \in D[y]$، یک درونریختی از R است. نشان می‌دهیم R حلقه‌ای $\overline{\alpha}$ـ سازگار است، اما $\overline{\alpha}$ـ صلب نیست. اگر $(a\oplus f(y))\overline{\alpha}(b\oplus g(y)) = 0$، آن‌گاه $ab = 0$ و $f(y)\alpha(g(y)) = 0$. چون $D[y]$ دامنه است، پس $f(y) = 0$ یا $\alpha(g(y)) = 0$، و لذا $(a \oplus f(y))(b \oplus g(y)) = 0$. اگر $(a \oplus f(y))(b \oplus g(y)) = 0$، آن‌گاه می‌توان نشان داد $(a \oplus f(y))\overline{\alpha}(b \oplus g(y)) = 0$. بنابراین، R، $\overline{\alpha}$ـ سازگار است. از این‌که R کاهشی نیست نتیجه می‌گیریم $\overline{\alpha}$ـ صلب نیست.

مثال ۱.۱.۲۰. فرض کنید δ یک تابع αـ مشتق برحلقه‌ی αـ صلب R باشد. فرض کنید

$$T_3(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in R \right\}.$$

درونریختی α را می‌توان به درونریختی $\overline{\alpha} : T_3(R) \to T_3(R)$ با ضابطه‌ی $\overline{\alpha}((a_{ij})) = (\alpha(a_{ij}))$ توسیع داد. هم‌چنین $\overline{\delta} : T_3(R) \to T_3(R)$ با ضابطه‌ی $\overline{\delta}((a_{ij})) = (\delta(a_{ij}))$ تابع $\overline{\alpha}$ـ مشتق بر $T_3(R)$ است. نشان می‌دهیم $T_3(R)$ یک حلقه‌ی $(\overline{\alpha},\overline{\delta})$ـ سازگار است، اما $\overline{\alpha}$ـ صلب نیست.

حل: اگر $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \overline{\alpha}\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) = 0$، آن‌گاه

$$a_1\alpha(a_2) = 0 \tag{1}$$

$$a_1\alpha(b_2) + b_1\alpha(a_2) = 0 \tag{2}$$

$$a_1\alpha(c_2)+b_1\alpha(d_2)+c_1\alpha(a_2)=0 \quad (3)$$

$$a_1\alpha(d_2)+d_1\alpha(a_2)=0 \quad (4)$$

چون R کاهشی است، از (۱) نتیجه می‌گیریم $\alpha(a_2)a_1=0$. اگر $\alpha(a_2)$ را از چپ در (۲) ضرب کنیم، آن‌گاه $b_1\alpha(a_2)=\alpha(a_2)b_1=0$ و درنتیجه $a_1\alpha(b_2)=\alpha(b_2)a_1=0$. اگر $\alpha(a_2)$ را از چپ در (۳) ضرب کنیم آن‌گاه $c_1\alpha(a_2)=\alpha(a_2)c_1=0$. پس (۳) به

$$a_1\alpha(c_2)+b_1\alpha(d_2)=0 \quad (5)$$

تبدیل می‌شود. اگر $\alpha(a_2)$ را از چپ در (۴) ضرب کنیم آن‌گاه $a_1\alpha(d_2)=\alpha(d_2)a_1=0$ و $d_1\alpha(a_2)=\alpha(a_2)d_1=0$. اگر a_1 را از راست در (۵) ضرب کنیم آن‌گاه $b_1\alpha(d_2)=\alpha(d_2)b_1=0$ و $a_1\alpha(c_2)=\alpha(c_2)a_1=0$. پس $a_1a_2=a_1c_2=a_1b_2=a_1d_2=b_1a_2=b_1d_2=c_1a_2=d_1a_2=0$. بنابراین

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}=0 \quad (*)$$

حال فرض کنید $(*)$ برقرار باشد. چون R یک حلقه‌ی αـ صلب است با استدلالی مشابه پاراگراف قبل می‌توان نشان داد که

$$a_1\alpha(a_2)=a_1\alpha(b_2)=b_1\alpha(a_2)=c_1\alpha(a_2)=d_1\alpha(a_2)=a_1\alpha(d_2)=a_1\alpha(c_2)=b_1\alpha(d_2)=0$$

و درنتیجه $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}\overline{\alpha}\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}\right)=0$. بنابراین $T_3(R)$ یک حلقه‌ی αـ سازگار است.

فرض کنیم $(*)$ برقرار باشد. در نتیجه

$$a_1a_2=a_1c_2=a_1b_2=a_1d_2=b_1a_2=b_1d_2=c_1a_2=d_1a_2=0$$

و چون R یک حلقه‌ی αـ صلب است پس

$$a_1\delta(a_2)=a_1\delta(b_2)=a_1\delta(d_2)=b_1\delta(a_2)=b_1\delta(d_2)=c_1\delta(a_2)=d_1\delta(a_2)=0$$

بنابراین $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}\overline{\delta}\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}\right)=0$، که نشان می‌دهد $T_3(R)$ یک حلقه‌ی $\overline{\delta}$ـ سازگار است. از طرفی، چون $T_3(R)$ کاهشی نیست، پس $\overline{\delta}$ـ صلب نیست.

مثال ۲۱.۱.۱. فرض کنید $\mathbb{Z}$ حلقه‌ی اعداد صحیح و $\mathbb{Z}_4$ حلقه اعداد صحیح به پیمانه ۴ باشد. حلقه جابه‌جایی $R = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z} \ \& \ b \in \mathbb{Z}_4\}$ با عمل جمع مؤلفه به مؤلفه و ضرب $(a,b)(c,d) = (ac, ad+bc)$ را در نظر بگیرید. به‌وضوح $\alpha : R \to R$ با ضابطه‌ی $\alpha((a,b)) = (a,-b)$، یک درونریختی است. به‌سادگی می‌توان نشان داد که R، αـ سازگار است، که αـ صلب نیست.

مثال ۲۲.۱.۱. فرض کنید S یک حلقه کاهشی، $R = S[x]$ و α یک درونریختی از R با ضابطه‌ی $\alpha(f(x)) = f(0)$ باشد. به‌آسانی می‌توان نشان داد R، αـ سازگار نیست. کافیست $f(x) = a_0 + a_1 x$ و $g(x) = bx$ در نظر بگیریم.

قرارداد: فرض کنید δ یک تابع αـ مشتق برحلقه‌ی R باشد و $0 \leq i \leq j$. مجموعه‌ی تمام کلماتی که بر اساس i حرف از α و $j-i$ حرف از δ ساخته می‌شوند را با نماد f_i^j نشان می‌دهیم. برای مثال، $f_j^j = \{\alpha^j\}$، $f_0^j = \{\delta^j\}$ و $f_{j-1}^j = \{\alpha^{j-1}\delta, \alpha^{j-2}\delta\alpha, \cdots, \delta\alpha^{j-1}\}$.

لم ۲۳.۱.۱. [۳۸، لم ۱.۲] فرض کنید R حلقه‌ای (α,δ)ـ سازگار باشد و $a,b \in R$. دراین‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) اگر $ab = 0$، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n داریم: $a\alpha^n(b) = \alpha^n(a)b = 0$.

(۲) هرگاه عدد صحیح مثبت k وجود داشته باشد که $\alpha^k(a)b = 0$، آن‌گاه $ab = 0$.

(۳) هرگاه $ab = 0$ و n و m دو عدد صحیح مثبت باشند آن‌گاه $\alpha^m(a)\delta^n(b) = \delta^m(a)\alpha^n(b) = 0$.

(۴) اگر $ab = 0$، آن‌گاه برای هر عدد صحیح $0 \leq i \leq j$ داریم: $af_i^j(b) = 0$.

(۵) اگر $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x;\alpha,\delta]$ و $r \in R$، آن‌گاه $f(x)r = 0$ اگر و تنها اگر برای هر $0 \leq i \leq n$ داشته باشیم: $a_ir = 0$.

(۶) اگر $f(x) \in R[x;\alpha,\delta]$ و $r \in R$، آن‌گاه $rf(x) = 0$ اگر و تنها اگر $rxf(x) = 0$.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنید $R[x,x^{-1};\alpha]$ نمایان‌گر مجموعه‌ی تمام مجموع‌های متناهی از $x^{-j}rx^i$ ها باشد به‌طوری‌که $\alpha : R \to R$ یک تکریختی باشد و $i,j \geq 0$ و $r \in R$. دو عمل جمع و ضرب روی $R[x,x^{-1};\alpha]$ به‌طور طبیعی تعریف می‌شوند به‌طوری‌که ضرب از قوانین $xr = \alpha(r)x$ و $rx^{-1} = x^{-1}\alpha(r)$ تبعیت می‌کند. مجموعه‌ی $R[x,x^{-1};\alpha]$ با دو عمل فوق تشکیل حلقه می‌دهد که آن‌را حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب لوران می‌نامیم.

حال توسیع جردن حلقه‌ی R را که با نماد A یا $A(R,\alpha)$ نشان داده می‌شود، معرفی می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$A = \{x^{-i}rx^i \ \mid \ r \in R, \ i \geq \circ\}$$

هرگاه $j \geq \circ$ آن‌گاه $x^{-i}rx^i = x^{-(i+j)}\alpha^j(r)x^{(i+j)}$ و از این‌رو برای هر $r, s \in R$ و $i, j \geq \circ$:

$$x^{-i}rx^i + x^{-j}sx^j = x^{-(i+j)}\big(\alpha^j(r) + \alpha^i(s)\big)x^{(i+j)}$$

$$(x^{-i}rx^i)(x^{-j}sx^j) = x^{-(i+j)}\alpha^j(r)\alpha^i(s)x^{(i+j)}$$

بنابراین A زیرحلقه‌ای از $R[x, x^{-1}; \alpha]$ است. توجه کنید α با تعریف زیرخودریختی از A القا می‌کند. به ازای هر $r \in R$ و $i \geq \circ$،

$$\alpha(x^{-i}rx^i) = x^{-i}\alpha(r)x^i.$$

جردن[4] در مرجع [۴۹] نشان داد که اگر α خودریختی از R باشد آن‌گاه $A = R$ و هم‌چنین، در حالت کلی $R[x, x^{-1}; \alpha] \cong A[x, x^{-1}; \alpha]$.

۲.۱ مفاهیم مورد نیاز از نظریه‌ی گراف

در این بخش لازم است برخی تعاریف کلیدی نظریه‌ی گراف معرفی شود.

تعریف ۱.۲.۱. گراف G دوتایی مرتب $(V(G), E(G))$ است که $V(G)$ یک مجموعه ناتهی از عناصر به‌نام رأس و یک مجموعه $E(G)$ از دوتایی‌های نامرتب روی $V(G)$ به‌نام یال تشکیل شده است. تعداد اعضای $V(G)$ را مرتبه و تعداد اعضای $E(G)$ را اندازه G می‌نامیم و به‌ترتیب با $|V(G)|$ و $|E(G)|$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. در گراف G دو رأس a و b را مجاور می‌نامیم، هرگاه یالی بین آن دو موجود باشد. مجموعه‌ی همه‌ی رئوسی که با رأس a مجاور است را همسایگی a گوییم و آن‌را با $N(a)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم G و H دو گراف باشند. اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$، آن‌گاه H را زیرگراف G می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای ناتهی از رئوس گراف G باشد. زیرگراف القایی به‌وسیله S، زیرگرافی ماکسیمال از گراف G با مجموعه‌ی رئوس S است و با نماد $\langle S\rangle$ نشان داده می‌شود، یعنی؛ $\langle S\rangle$ دقیقاً شامل یال‌هایی از گراف G است که دو رأس از S را به هم وصل می‌کند.

[4] Jordan

تعریف ۵.۲.۱. گراف G، همبند است اگر برای هر جفت از رأس‌های متمایز u و v یک دنباله متناهی از رئوس متمایز $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر جفت $\{v_i, v_{i+1}\}$ یک یال باشد. چنین دنباله‌ای را مسیر گویند و برای هر دو رأس متمایز a و b در گراف ساده Γ، طول کوتاهترین مسیر بین a و b را فاصله بین a و b می‌نامند و آن‌را با $d(a,b)$ نمایش می‌دهند. اگر چنین مسیری وجود نداشته باشد، آن‌گاه قرار می‌دهیم $d(a,b) = \infty$.

تعریف ۶.۲.۱. قطر گراف G را با $\operatorname{diam}(G)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{diam}(G) = \sup \{d(a,b) \mid \text{رأس‌های متمایز از } G \text{ هستند } a \text{ و } b\}.$$

اگر گراف فقط شامل یک رأس تنها باشد، آن‌گاه قطر آن صفر در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۷.۲.۱. هر مسیر بسته از گراف G را یک دور می‌نامیم. به‌علاوه، یک دور دارای حداقل ۳ رأس است.

تعریف ۸.۲.۱. طول کوتاه‌ترین دور در گراف G را کمر می‌نامیم و با نماد $gr(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱. گرافی که یک مسیر با n رأس باشد را گراف مسیر می‌نامیم و آن‌را با P_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. گرافی که متشکل از یک دور با n رأس باشد، و یا به شکل یک چندضلعی با n رأس باشد را گراف دور می‌نامیم و با C_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. گراف G را منتظم می‌نامیم هرگاه درجه‌ی تمام رئوس آن یکسان باشد. گراف منتظمی که درجه هر رأس آن l باشد، را گراف lـ منتظم می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. گراف کامل گرافی است که هر دو رأس آن مجاور باشند. گراف کامل با n رأس را با نماد K_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۱. گراف $G = (V,E)$ را دوبخشی می‌نامیم، هرگاه V را بتوان به V_1, V_2 افراز کرد که هر یال G دارای یک انتها در V_1 و یک انتها در V_2 باشد. به‌علاوه، گراف دوبخشی با بخش‌های V_1 و V_2 که در آن $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$ و هر عضو V_1 با هر عضو V_2 مجاور است را گراف دوبخشی کامل نامیده و آن‌را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. گراف G را یک گراف ستاره می‌نامیم، هرگاه G یک گراف دوبخشی کامل باشد که یکی از بخش‌های آن فقط یک رأس داشته باشد. گراف ستاره را با نماد $K_{1,n}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. گراف $G = (V,E)$ را rـ بخشی می‌نامیم هرگاه افرازهای $V_1, V_2, \ldots, V_r$ از V وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر یال از E دارای یک انتها در V_i و یک انتها در V_j باشد که $1 \leq i \neq j \leq r$. گراف rـ بخشی G را rـ بخشی کامل می‌نامیم هرگاه برای هر $1 \leq i \neq j \leq r$، هر رأس از V_i با تمام رئوس V_j مجاور باشد. اگر $|V_1| = n_1, |V_2| = n_2, \ldots, |V_r| = n_r$ باشد، آن‌گاه گراف rـ بخشی کامل را با $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ نمایش می‌دهیم.

۳.۱ برخی از مشاهدات اولیه‌ی گراف مقسوم‌علیه صفر

همان‌طور که قبلاً گفته شد، گراف مقسوم‌علیه صفر اولین بار توسط بک [۱۹] برای حلقه‌های جابه‌جایی بیان شد. این مفهوم توسط اندرسون و لیوینگستون [۱۳] به شکل دیگری تعریف شد، که به‌عنوان تعریف پایه قرار گرفت.

تعریف ۱.۳.۱. گراف مقسوم‌علیه صفر وابسته به حلقه‌ی R، گرافی است که رئوس آن مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی حلقه R می‌باشند و دو رأس متمایز a و b مجاورند هرگاه $ab = ۰$ و آن‌را با نماد $\Gamma(R)$ نشان می‌دهند.

بنابراین گراف $\Gamma(R)$ تهی است اگر وتنها اگر R دامنه صحیح باشد.

قضیه ۲.۳.۱. [۱۳، قضیه ۳.۲] فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این‌صورت $\Gamma(R)$ همبند است، هم‌چنین $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) \leq ۳$. به‌علاوه، اگر $\Gamma(R)$ شامل دور باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma(R)) \leq ۷$.

اندرسون و لیوینگستون نشان دادند که اگر R یک حلقه‌ی آرتینی، جابه‌جایی و شامل دور باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma(R)) \leq ۴$ و حدس زدند که این نتیجه برای هر حلقه‌ی جابه‌جایی دلخواه برقرار است. حدس آن‌ها توسط مولای [۶۳] و دیمیر [۲۴] به‌طور مستقل اثبات شد.

قضیه ۳.۳.۱. [۱۳، قضیه ۸.۲] فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این‌صورت، $\Gamma(R)$ کامل است اگر و تنها اگر $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ و یا برای هر $x, y \in Z(R)$، $xy = ۰$.

سوال جالبی که در این زمینه مطرح می‌باشد این است که آیا خواص این گراف‌ها تحت توسیع‌های مختلف حلقه‌ها حفظ می‌شوند یا نه؟ اولین توسیعی که به ذهن می‌رسد حلقه‌ی چند جمله‌ای‌ها و حلقه‌ی سری‌های توانی است. در سال ۲۰۰۵ آکستل، کویکندال و استیکلس [۱۷]، گراف متناظر با حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها $R[x]$ و حلقه‌ی سری‌های توانی $R[[x]]$ را مورد مطالعه قرار دادند.

قضیه ۴.۳.۱. [۱۷، قضیه ۲.۳] فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد به‌طوری‌که $R \neq \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$. در این‌صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) $\Gamma(R)$ گراف کامل است؛

(۲) $\Gamma(R[x])$ گراف کامل است؛

(۳) $\Gamma(R[[x]])$ گراف کامل است.

اگر $R = \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$، آن‌گاه $\Gamma(R)$ گرافی کامل است. بعلاوه، $\Gamma(R[x])$ و $\Gamma(R[[x]])$ گراف‌های دو بخشی کامل هستند. بنابراین، $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = \operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۲$.

سوالی که در این قسمت مطرح می‌باشد این است که آیا حلقه ای وجود دارد که $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۲$ اما $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = ۳$ یا $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۳$؟ آکستل با مثالی از مقاله فیلدز(۱۹۷۱) به این سوال پاسخ داد.

مثال ۵.۳.۱. [۱۷، مثال ۳.۳] فرض کنید K یک میدان باشد و

$$R = K[Y, \{X_i\}_{i=\circ}^{\infty}]/(\{X_\circ Y\} \cup \{X_i - X_{i+1}Y\}_{i=\circ}^{\infty}).$$

دراین‌صورت $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۲$، اما $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[W]])) = ۳$.

حل: چون $\overline{X_\circ Y} = \circ$ و $\overline{X_\circ X_i} = \overline{X_\circ X_{i+1} Y} = \circ$، لذا $\overline{X_\circ}$ در پوچساز همه‌ی متغیرهای دیگر قرار دارد. ازطرفی دیگر، چون $\overline{X_1 X_i} = \overline{X_1 X_{i+1} Y} = \overline{X_\circ X_{i+1}} = \circ$ اما $\overline{X_1 Y} = \overline{X_\circ} \neq \circ$، بنابراین $\overline{X_1}$ همه متغیرهای دیگر به‌غیراز $\overline{Y}$ را پوچ می‌کند. هم‌چنین، چون $\overline{X_2 X_i} = \overline{X_2 X_{i+1} Y} = \overline{X_1 Y} = \circ$ اما $\overline{X_2 Y} = \overline{X_1} \neq \circ$، بنابراین $\overline{X_2}$ همه متغیرهای دیگر به‌غیراز $\overline{Y}$ را پوچ می‌کند. با ادامه این روند، می‌بینیم که $\overline{X_i}$ ($i \geq ۱$) همه متغیرهای دیگر به‌غیراز $\overline{Y}$ را پوچ می‌کند. مشاهده می‌شود که $\overline{X_i Y} = \overline{X_{i-1}}$، $\overline{X_i Y^{i+r}} = \overline{X_\circ Y^r} = \circ$، $\overline{X_i Y^i} = \overline{X_\circ}$ و $\overline{X_{i+r} Y^i} = \overline{X_r}$. بنابراین، هر عنصر از R را می‌توان به‌فرم $r = k_\circ + \sum_{j=1}^{\infty} l_j \overline{Y}^j + \sum_{i=\circ}^{\infty} k_{i+1} \overline{X_i}$ نوشت، که در آن $k_i, l_j \in K$ و همه اما تعداد متناهی k_iها و l_jها صفر هستند. در نتیجه، $ann(\overline{Y}) = \{k\overline{X_\circ} \mid k \in K\}$. توجه کنید که اگر $r \in Z(R)$، آن‌گاه r دارای هیچ جمله ثابتی نیست؛ بنابراین برای هر $r_1, r_2 \in Z(R)^*$، $r_1 - \overline{X_\circ} - r_2$ یک مسیر به طول ۲ است. لذا $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۲$.

فرض کنید $f(W) = \overline{Y} - W$. در نتیجه $f(W) \in Z\big(R[[W]]\big)^*$. فرض کنید $g(W) \in ann(f(W))$. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $g(W) = a_\circ + a_1 W + a_2 W^2 + \cdots$ به‌طوری‌که $a_\circ \neq \circ$. چون $(\overline{Y} - W)g(W) = \circ$ درنتیجه $a_\circ \overline{Y} = \circ$، لذا $a_\circ = k\overline{X_\circ}$. به‌علاوه، $-k\overline{X_\circ}W + a_1 \overline{Y} W = \circ$ نتیجه می‌دهد که $a_1 \overline{Y} = k\overline{X_\circ} \neq \circ$. دراین‌صورت $d(f(W), \overline{Y}) > ۲$ لذا $d(f(W), \overline{Y}) = ۳$. بنابراین $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۳$.

یادآوری می‌کنیم اگر R حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی همه‌ی عناصر منظم R یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته و اشباع شده از R را تشکیل می‌دهد. از این‌رو طبق [۵۰]، $Z(R) = \cup_{i\in\Lambda} P_i$، به‌طوری‌که هر P_i ایده‌آل اول R می‌باشد.

گزاره ۶.۳.۱. [۱۷، نتیجه ۵.۳] فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) \leq ۲$ و $Z(R) = \cup_{i\in\Lambda} P_i$. اگر Λ متناهی باشد، آن‌گاه $|\Lambda| \leq ۲$.

قضیه ۸۰ از کاپلانسکی [۵۰] نشان می‌دهد که هر حلقه‌ی نوتری در شرایط گزاره قبل صدق می‌کند.

قضیه ۷.۳.۱. [۱۷، گزاره ۸.۳] فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری باشد که $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۲$. اگر $Z(R) = P$ یک ایده‌آل اول از R باشد، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = ۲$.

قضیه ۸.۳.۱. [۱۷، قضیه ۹.۳] فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری باشد. اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۲$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۲$.

قضیه ۹.۳.۱. [۱۷، قضیه ۱۱.۳] فرض کنید R یک حلقه‌ی جابه‌جایی و نوتری باشد به‌طوری‌که $R \neq \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ و مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی داشته باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۲$؛

(۲) $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x])) = ۲$؛

(۳) $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۲$؛

(۴) $Z(R)$ برابر است با اجتماعی از دو ایده‌آل اول که هیچ اشتراکی باهم ندارند و یا $Z(R)$ ایده‌آلی اول است به‌طوری‌که $Z(R)^۲ \neq ۰$.

قضیه ۱۰.۳.۱. [۱۷، قضیه ۳.۴] فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی و نه لزوماً یکدار باشد. دراین‌صورت $gr(\Gamma(R)) \leq gr(\Gamma(R[x])) = gr(\Gamma(R[[x]]))$. به‌علاوه، اگر R هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفر نداشته باشد و $\Gamma(R)$ شامل دور باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma(R)) = gr(\Gamma(R[x])) = gr(\Gamma(R[[x]]))$.

در حالت کلی رفتار مقسوم‌علیه‌های صفر در حلقه‌ی کاهشی و حلقه‌ی غیرکاهشی بسیار متفاوت است. تفاوت عمده‌ی آن‌ها در این است که یک مقسوم‌علیه صفر نابدیهی در حلقه‌ی کاهشی باید حداقل در یک ایده‌آل اول مینیمال قرار بگیرد اما نمی‌تواند مشمول در همه‌ی ایده‌آل‌های اول مینیمال باشد. بنابراین اگر R حلقه‌ی کاهشی باشد، $Z(R)$ اجتماعی از ایده‌آل‌های اول مینیمال است. لوکاس در مرجع [۵۷] قطر گراف‌های $\Gamma(R)$، $\Gamma(R[x])$ و $\Gamma(R[[x]])$ را منحصراً با استفاده از ویژگی‌های حلقه‌ی R رده‌بندی کرد. او برای حلقه‌های کاهشی رده‌بندی کاملی از هر سه گراف ارائه داد و برای حلقه‌ی غیرکاهشی موفق شد قطر $\Gamma(R)$ و $\Gamma(R[x])$ را رده‌بندی کند.

قضیه ۱۱.۳.۱. [۵۷، قضیه ۱.۲] فرض کنید R حلقه‌ای کاهشی باشد. اگر حلقه‌ی R دارای بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال باشد و عناصر ناصفر $a, b \in Z(R)$ موجود باشد به‌طوری‌که a و b دارای پوچ‌ساز مشترک ناصفر نباشند، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۳$.

قضیه ۱۲.۳.۱. [۵۷، قضیه ۴.۲] فرض کنید R حلقه‌ای غیرکاهشی باشد. اگر عناصر ناصفر $a, b \in Z(R)$ موجود باشد به‌طوری‌که $\{a, b\}$ دارای پوچ‌ساز ناصفر نباشد، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۳$.

قضیه ۱۳.۳.۱. [۵۷، قضیه ۶.۲] فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی باشد. دراین‌صورت:

(۱) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۰$ اگر و تنها اگر R با $Z_۴$ یا $Z_۲[y]/(y^۲)$ یکریخت باشد؛

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma(R))=۱$ اگر و تنها اگر برای هر دو مقسوم‌علیه صفر متمایز $a,b\in R$، $ab=۰$ و R حداقل دو مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی داشته باشد؛

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma(R))=۲$ اگر و تنها اگر (الف) R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد و حداقل سه مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی داشته باشد و یا (ب) $Z(R)$ ایده‌آلی باشد که $Z(R)^۲\neq ۰$ و هر دو مقسوم‌علیه صفر متمایز دارای پوچ‌ساز مشترک ناصفر باشند؛

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma(R))=۳$ اگر و تنها اگر $۰\neq a,b\in Z(R)$ موجود باشند به‌طوری‌که پوچ‌ساز مشترک ناصفر نداشته باشند و (الف) R یک حلقه کاهشی با بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال باشد، یا (ب) R غیرکاهشی باشد.

مک‌کوی در سال ۱۹۴۲ ثابت کرد که اگر حلقه‌ی R جابه‌جایی باشد و $f(x)$ و $g(x)$ دو چند جمله‌ای ناصفر از $R[x]$ باشند به‌گونه‌ای که $f(x)g(x)=۰$، آن‌گاه هر کدام از چندجمله‌ای‌های فوق دارای پوچ‌سازی ناصفر در حلقه‌ی R می‌باشند، یعنی عضو ناصفر $r\in R$ به‌گونه‌ای موجود است که $rg(x)=۰$. براساس این قضیه حلقه‌ی R را مک‌کوی گویند هرگاه هر ایده‌آل متناهی تولید شده که مشمول در $Z(R)$ است دارای پوچ‌ساز ناصفر باشد. نیلسن[۵] [۶۵] این مفهوم را به حلقه‌ی ناجابه‌جایی تعمیم داد. حلقه‌ی R مک‌کوی راست نامیده می‌شود هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ دو چندجمله‌ای ناصفر از $R[x]$ باشند به‌گونه‌ای که $f(x)g(x)=۰$، آن‌گاه عضو ناصفر $c\in R$ به‌گونه‌ای موجود است که $f(x)c=۰$. حلقه‌ی مک‌کوی چپ نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود. بنابر کامیلو[۶] و نیلسن [۲۲] خاصیت مک‌کوی به حلقه‌ی سری‌های توانی انتقال پیدا نمی‌کند و این در حالی است که این خاصیت به حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها منتقل می‌شود.

قضیه ۱۴.۳.۱. [۵۷، قضیه ۱.۳] حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های معمولی $R[x]$ مک‌کوی است.

قضیه ۱۵.۳.۱. [۵۷، قضیه ۳.۳] فرض کنید R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. $Z(R[x])$ ایده‌آلی از $R[x]$ است اگر و تنها اگر حلقه‌ی R مک‌کوی و $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد.

لوکاس با استفاده از قضیه فوق قطر گراف $R[x]$ را براساس ایده‌آل‌های R رده‌بندی کرد و با درنظر گرفتن حالات ممکن به مقایسه قطر گراف $\Gamma(R)$ و قطر گراف $\Gamma(R[x])$ پرداخت.

قضیه ۱۶.۳.۱. [۵۷، قضیه ۴.۳] فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این‌صورت:

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma(R))\geq ۱$؛

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x]))=۱$ اگر و تنها اگر R حلقه‌ای غیرکاهشی باشد به‌طوری‌که $Z(R)^۲=(۰)$؛

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x]))=۲$ اگر و تنها اگر (الف) R حلقه‌ی کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد، یا (ب) حلقه‌ی R حلقه‌ی مک‌کوی و $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد به‌طوری‌که $Z(R)^۲\neq(۰)$؛

---
[5] Nielsen
[6] Camillo

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = ۳$ اگر و تنها اگر R حلقه‌ی کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نباشد و حلقه‌ی R مک‌کوی نباشد یا $Z(R)$ ایده‌آل نباشد.

قضیه ۱.۳.۱۷. [۵۷، قضیه ۶.۳] فرض کنید R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. دراین‌صورت:

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۰$ و $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = ۱$ اگر و تنها گر R با $\mathbb{Z}_۴$ یا $\mathbb{Z}_۲[y]/(y^۲)$ یکریخت باشد؛

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = \operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = ۱$ اگر و تنها اگر R حلقه‌ای غیرکاهشی باشد که بیش از یک مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی دارد و $Z(R)^۲ = (۰)$؛

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۱$ و $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = ۲$ اگر و تنها اگر R با $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ یکریخت باشد؛

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = \operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = ۲$ اگر و تنها اگر (الف) R حلقه‌ی کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد به‌طوری‌که بیش از دو مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی دارد یا (ب) $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد به‌طوری‌که $Z(R)^۲ \neq (۰)$ و R حلقه‌ی مک‌کوی است؛

(۵) $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۲$ و $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = ۳$ اگر و تنها اگر $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد بطوری‌که R مک‌کوی نیست اما هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز a و b دارای پوچ‌ساز مشترک ناصفر باشند؛

(۶) $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = \operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = ۳$ اگر و تنها اگر R حلقه‌ی کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نباشد و یک جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی a و b موجود باشد به‌طوری‌که دارای پوچ‌ساز مشترک ناصفر نباشند.

در حالتی که R حلقه‌ی کاهشی باشد برای حلقه‌ی سری‌های توانی $R[[x]]$ می‌توان رده‌بندی کاملی از قطر $\Gamma(R[[x]])$ را با استفاده از ایده‌آل‌های R به‌دست آورد.

قضیه ۱.۳.۱۸. [۵۷، قضیه ۹.۴] فرض کنید R یک حلقه‌ی کاهشی باشد که حوزه صحیح نیست. دراین‌صورت $۱ \leq \operatorname{diam}(\Gamma(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) \leq \operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]])) \leq ۳$. بعلاوه،

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۱$ و $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = \operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۲$ اگر و تنها اگر R با $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ یکریخت باشد؛

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = \operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = \operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۲$ اگر و تنها اگر R دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد که با $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ یکریخت نیست یا برای هر جفت از ایده‌آل‌های شمارا تولید شده‌ی I و J که پوچ‌سازهای ناصفر دارند، $I + J$ پوچ‌ساز ناصفر داشته باشد (R مک‌کوی و $Z(R)$ یک ایده‌آل است)؛

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = \operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = ۲$ و $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۳$ اگر و تنها اگر R مک‌کوی و $Z(R)$ یک ایده‌آل R باشد و ایده‌آل‌های شمارا تولید شده I و J وجود داشته باشند به‌طوری‌که پوچ‌سازهای ناصفر دارند اما $I + J$ پوچ‌ساز ناصفر ندارد؛

(۴) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۲$ و $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x])) = \mathrm{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۳$ اگر و تنها اگر $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد و هر ایده‌آل تولید شده توسط دو عضو که مشمول در $Z(R)$ است، پوچساز ناصفر داشته باشد اما R مک‌کوی نباشد؛

(۵) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = \mathrm{diam}(\Gamma(R[x])) = \mathrm{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۳$ اگر و فقط اگر R دارای بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال باشد و یک جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی a و b وجود داشته باشد به‌طوری‌که پوچساز مشترک ناصفر ندارند.

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، ردموند در [۶۷] مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی جابه‌جایی را به حلقه‌ی ناجابه‌جایی تعمیم داد. گراف جهت‌دار مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی ناجابه‌جایی R، که آن‌را با نماد $\Gamma(R)$ نمایش می‌دهند، گرافی است که رئوس آن مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر غیربدیهی می‌باشند و برای هر دو رأس متمایز x و y، $x \longrightarrow y$ یک یال است اگر و تنها اگر $x \neq y$ و $xy = ۰$. اگر x و y دو رأس متمایز باشند به‌طوری‌که $xy = yx = ۰$، دراین‌صورت دو یال جهت‌دار بین x و y وجود دارد. همچنین گراف ساده و غیرجهت‌دار $\overline{\Gamma}(R)$ گرافی است با مجموعه رئوس $Z(R)^*$ و هر دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر $xy = ۰$ یا $yx = ۰$. توجه کنید برای حلقه‌ی جابه‌جایی R، تعریف گراف مقسوم‌علیه صفر مربوط به حلقه‌ی R با تعریف $\overline{\Gamma}(R)$ منطبق است.

برخلاف گراف مقسوم‌علیه صفر مربوط به حلقه‌های جابه‌جایی، گراف جهت‌دار مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی ناجابه‌جایی لزوماً همبند نیست که [۶۷، مثال ۲.۲] نشان دهنده این مسئله می‌باشد.

قضیه ۱.۳.۱۹. [۶۷، قضیه ۳.۲] فرض کنید R حلقه‌ای دلخواه باشد و $Z(R)^* \neq \emptyset$. دراین‌صورت $\Gamma(R)$ همبند است اگر و تنها اگر $Z_l(R) = Z_r(R)$. همچنین اگر $\Gamma(R)$ همبند باشد، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq ۳$.

قضیه ۱.۳.۲۰. [۶۷، قضیه ۲.۳] فرض کنید R حلقه‌ای دلخواه باشد و $Z(R)^* \neq \emptyset$. در این‌صورت $\overline{\Gamma}(R)$ همبند است و $\mathrm{diam}(\overline{\Gamma}(R)) \leq ۳$.

قضیه ۱.۳.۲۱. [۶۷، قضیه ۳.۳] فرض کنید R حلقه‌ای دلخواه باشد و $Z(R)^* \neq \emptyset$. اگر $\overline{\Gamma}(R)$ شامل یک دور باشد آن‌گاه $gr(\overline{\Gamma}(R)) \leq ۳$.

۱.۴ مروری بر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده

گراف کلاس‌های هم‌ارزی مقسوم‌علیه صفر نسخه‌ی فشرده شده از گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(R)$ می‌باشد، به‌گونه‌ای ساخته شده است که می‌تواند ” شلوغی “ تولید شده توسط مقسوم‌علیه‌های صفر را کاهش دهد. ویکام و اسپایرف در مرجع [۷۰] با الهام گرفتن از ایده مولای [۶۳] گراف کلاس های هم‌ارزی مقسوم‌علیه صفر را تعریف کردند. در مرجع [۹]،

اندرسون و لاگرانژ گراف کلاس‌های هم‌ارزی مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی R تعریف شده توسط اسپایرف و ویکام را گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده نامیدند. آن‌ها شرایطی را بررسی کردند که تحت آن، حلقه‌ای مانند S موجود است به‌طوری‌که گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه‌ی R با گراف مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌ی S یکریخت است.

فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. برای هر $a, b \in R$، رابطه $\sim$ روی R به این صورت تعریف می‌شود: $a \sim b$ اگر وتنها اگر $ann_R(a) = ann_R(b)$ که $ann_R(a) = \{r \in R | ar = 0\}$. رابطه $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد. برای هر $a \in R$، $[a]_R = \{b \in R | a \sim b\}$. بوضوح $[0]_R = \{0\}$ و $[1]_R = R \backslash Z(R)$. عمل ضرب روی کلاس‌های هم‌ارزی به‌صورت $[a]_R \cdot [b]_R = [ab]_R$ تعریف می‌شود، این عمل خوش‌تعریف است. مجموعه‌ی $R_E = \{[r]_R | r \in R\}$ را در نظر بگیرید. بنابراین R_E همراه با عمل فوق یک تکوار جابه‌جایی است.

تعریف ۱.۴.۱. گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه‌ی R، که با نماد $\Gamma_E(R)$ نشان می‌دهیم، گرافی است که رئوس آن کلاس‌های هم‌ارزی القا شده عناصر $Z(R)^*$ توسط رابطه $\sim$ می‌باشند و دو رأس متمایز $[a]_R$ و $[b]_R$ مجاورند اگر و تنها اگر $[a]_R \cdot [b]_R = 0$ اگر و تنها اگر $ab = 0$.

توجه کنید که اگر a و b رئوس متمایز مجاور در $\Gamma(R)$ باشند، آن‌گاه $[a]_R$ و $[b]_R$ در $\Gamma_E(R)$ مجاورند اگر و تنها اگر $[a]_R \neq [b]_R$.

برای حلقه‌ی جابه‌جایی R، ایده‌آل اول P اول وابسته است، هرگاه $y \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که $P = ann(y)$. مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته حلقه‌ی R را با $Ass(R)$ نشان می‌دهند. واضح است که برای حلقه‌ی نوتری R، $Ass(R)$ یک مجموعه‌ی متناهی می‌باشد و هر عنصر ماکسیمال از خانواده ایده‌آل‌های $\mathcal{F} = \{ann(x) \mid 0 \neq x \in R\}$ یک ایده‌آل اول وابسته است. یک نگاشت نشاننده از $Ass(R)$ به مجموعه رئوس گراف $\Gamma_E(R)$ با ضابطه $P \mapsto [y]$ وجود دارد که $P = ann(y)$.

همان‌طور که قبلاً گفته شد یکی از اهداف مهم پژوهشگران در این زمینه برقراری ارتباط بین خواص جبری حلقه و خواص گراف‌ها بوده است، ویکهام و اسپایرف توانستند با استفاده از نگاشت فوق بین رئوس گراف $\Gamma_E(R)$ و ایده‌آل‌های اول وابسته ارتباط برقرار کنند و برخی از ویژگی‌های گراف $\Gamma_E(R)$ را بررسی کنند.

لم ۲.۴.۱. [۷۰، لم ۲.۱] فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری باشد. دراین‌صورت، هر دو عنصر متمایز از $Ass(R)$ با هم مجاورند. بعلاوه، هر رأس $[v]$ از $\Gamma_E(R)$ یک ایده‌آل اول وابسته است یا با یک ایده‌آل اول وابسته ماکسیمال در F مجاور است.

گزاره ۳.۴.۱. [۷۰، گزاره ۴.۱] فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری باشد. در این‌صورت، گراف $\Gamma_E(R)$ همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) \leq 3$.

قضیه ۴.۴.۱. [۷۰، گزاره ۵.۱] فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری باشد به‌طوری‌که $\Gamma_E(R)$ دارای حداقل ۳ رأس باشد. در این‌صورت $\Gamma_E(R)$ کامل نیست.

قضیه ۵.۴.۱. [۷۰، گزاره ۷.۱] فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری باشد. اگر $\Gamma_E(R)$ گراف rـ بخشی کامل باشد، آن‌گاه $r = ۲$ و برای بعضی $n \geq ۱$، $\Gamma_E(R) = K_{n,۱}$.

گزاره ۶.۴.۱. [۷، گزاره ۱.۲] اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \mathrm{diam}(\Gamma(R))$.

گزاره ۷.۴.۱. [۷، قضیه ۲.۲] اگر $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۰$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \in \{۰, ۱\}$.

گزاره ۸.۴.۱. [۷، قضیه ۲.۳] اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۳$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۳$.

با توجه به گزاره‌های ۶.۴.۱ و ۸.۴.۱، برای حلقه‌ی جابه‌جایی R، قطر گراف $\Gamma_E(R)$ حداکثر ۳ است.

قضیه ۹.۴.۱. [۷، قضیه ۱.۳] فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری باشد. اگر $\Gamma_E(R)$ شامل یک دور باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma_E(R)) \leq ۴$.

قضیه ۱۰.۴.۱. [۷، قضیه ۳.۳] اگر $\Gamma_E(R)$ شامل یک دور باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma_E(R)) \geq gr(\Gamma(R))$.

فصل ۲

بررسی قطر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده

در این فصل قصد داریم که به مطالعه و بررسی قطر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده بپردازیم. در بخش اول، قطر گراف $\Gamma_E(R)$ را که در آن، حلقه‌ی R جابه‌جایی است، بررسی می‌کنیم و یک رده‌بندی کامل از مقادیر ممکن برای قطر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده ارائه می‌دهیم. در بخش دوم، مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده را به حلقه‌های ناجابه‌جایی تعمیم داده و قطر گراف مقسوم‌علیه صفر و گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب لوران $\Gamma_E(R[x,x^{-1};\alpha])$، که در آن R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و αـ سازگار است، را مطالعه می‌کنیم. در بخش پایانی، برای حلقه‌ی برگشت‌پذیر و (α,δ)ـ سازگار R، قطر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x;\alpha,\delta]$ مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم و همه‌ی مقادیر ممکن برای قطر گراف‌های $\Gamma(R[x;\alpha,\delta])$ و $\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])$ را به‌طور کامل دسته‌بندی می‌کنیم.

مطالب این فصل برگرفته از مراجع [۳۲، ۳۳، ۳۵] می‌باشد.

۱.۲ بررسی قطر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه‌های جابه‌جایی

همان‌طور که قبلاً گفته شد، برای حلقه جابه‌جایی R گراف فشرده $\Gamma_E(R)$ همبند است و هم‌چنین $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq ۳$. در این بخش، ابتدا یک شرط کافی برای $\Gamma_E(R)$، زمانی که R کاهشی است، مهیا می‌کنیم تا دارای قطر ۳ باشد. بعداً نشان خواهیم داد این شرط، یک شرط لازم است و سپس هم‌ارزی مشابهی برای حلقه‌ی غیرکاهشی R نیز ارائه می‌دهیم. علاوه بر این ، یک رده‌بندی کامل برای قطر گراف $\Gamma_E(R)$، برحسب ایده‌آل‌های R ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۲. فرض کنید R حلقه‌ای کاهشی باشد. اگر R دارای بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال باشد و عناصر ناصفر $a, b \in Z(R)$ موجود باشند به‌طوری‌که $\{a, b\}$ دارای پوچ‌ساز ناصفر نباشد، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۳$.

برهان. با استفاده از قضیه ۱۱.۳.۱، عناصر ناصفر $\alpha, \beta \in Z(R)$ وجود دارند به‌طوری‌که $\alpha\beta \neq ۰$ و $\{\alpha, \beta\}$ پوچ‌ساز ناصفری ندارد. بنابراین $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۳$. □

قضیه ۲.۱.۲. فرض کنید R حلقه‌ای غیرکاهشی باشد. اگر عناصر ناصفر $a, b \in Z(R)$ موجود باشند به‌طوری‌که $\{a, b\}$ پوچ‌ساز ناصفر نداشته باشد، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۳$.

برهان. با استفاده از قضیه ۱۲.۳.۱، عناصر ناصفر $\alpha, \beta \in Z(R)$ وجود دارند به‌طوری‌که $\alpha\beta \neq ۰$ و $\{\alpha, \beta\}$ پوچ‌ساز ناصفری ندارد. بنابراین $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۳$. □

نتیجه بعدی، رده‌بندی قطر گراف $\Gamma_E(R)$، برحسب ایده‌آل‌های R می‌باشد.

قضیه ۳.۱.۲. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی با مقسوم‌علیه‌های صفر غیربدیهی باشد. دراین‌صورت:

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۰$ اگر و تنها اگر $Z(R)^۲ = ۰$ و $|Z(R)| \geq ۲$؛

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$ اگر و تنها اگر (الف) R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد، یا (ب) $|\Gamma_E(R)| = ۲$ و $a \in Z(R)^*$ موجود است به‌طوری‌که $Z(R) = ann_R(a)$؛

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۲$ اگر و تنها اگر (الف) $Z(R)$ یک ایده‌آل باشد و هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز دارای پوچ‌ساز مشترک ناصفر باشند و برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$، یا (ب) برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$ و $b, c \in Z(R)^*$ موجود باشد به‌طوری‌که $bc \neq ۰$ و $[b]_R \neq [c]_R$؛

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۳$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۳$.

برهان. ابتدا به اثبات گزاره (۴) می‌پردازیم. اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۳$، آن‌گاه چون $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma(R))$، به‌وضوح $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۳$.
قسمت عکس از قضایای ۱۳.۳.۱، ۱.۱.۲ و ۲.۱.۲ نتیجه می‌شود.

(۱) اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۰$، آن‌گاه برای عنصر ناصفر $a \in Z(R)$، $|\Gamma_E(R)| = \{[a]_R\}$، و لذا برای هر $x \in Z(R)^*$، داریم $ann_R(x) = ann_R(a)$. بنابراین $Z(R)^۲ = ۰$ و $|Z(R)| \geq ۲$.

بالعکس، فرض کنید $|Z(R)| \geq ۲$ و $Z(R)^۲ = ۰$. بنابراین برای هر $a, b \in Z(R)^*$، $ann_R(a) = ann_R(b)$ که نتیجه می‌دهد $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۰$.

(۲) فرض کنید $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$. دراین‌صورت $a, b \in Z(R)^*$ موجود است به‌طوری‌که $[a]_R \neq [b]_R$. همچنین از آن‌جایی‌که $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma(R))$، لذا $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) \in \{۱, ۲\}$. فرض کنید که $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۱$. اگر R غیرکاهشی باشد، آن‌گاه با استفاده از قضیه ۳.۳.۱، $Z(R)^۲ = ۰$، که با $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \neq ۰$ در تناقض است. لذا R کاهشی است. در نتیجه با استفاده از قضیه ۳.۳.۱، $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ و لذا R دارای دو ایده‌آل اول مینیمال است.

حال فرض کنید که $\operatorname{daim}(\Gamma(R)) = ۲$. دراین‌صورت با استفاده از قضیه ۱۳.۳.۱، (الف) R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال و حداقل سه مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی می‌باشد، یا (ب) $Z(R)$ یک ایده‌آل از R می‌باشد به‌طوری‌که $Z(R)^۲ \neq ۰$ و هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز دارای پوچساز مشترک هستند. در حالت (ب)، ما ادعا می‌کنیم که برای بعضی عناصر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$. فرض کنید برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$. فرض $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$ نتیجه می‌دهد که، برای هر $b, c \in Z(R)^*$، یا $bc = ۰$ یا $[b]_R = [c]_R$. بنابراین کافیست نشان دهیم که $b \in Z(R)^*$ موجود است که $b^۲ = ۰$ (چون $Z(R) = ann_R(b)$ را نتیجه می‌دهد). فرض کنیم $b, c \in Z(R)$ به‌طوری‌که $bc = ۰$ و $c^۲ \neq ۰$، آن‌گاه $c(b + c) \neq ۰$. همچنین چون $Z(R)$ ایده‌آل است، لذا $b + c \in Z(R)$، و درنتیجه $[c]_R = [b + c]_R$. بنابراین $b^۲ = b(b + c) = ۰$.

حال، نشان می‌دهیم $|\Gamma_E(R)| = ۲$. اگر $[a]_R$، $[b]_R$ و $[c]_R$ رئوس متمایز باشند، آن‌گاه می‌توان فرض کرد که $ann_R(a) \nsubseteq ann_R(b)$ و $ann_R(a) \nsubseteq ann_R(c)$. لذا $w \in ann_(a)$ وجود دارد که $w \notin ann_R(b) \cup ann_R(c)$. چون $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$، در نتیجه یکی از این سه حالت باید اتفاق می‌افتد: $[a] = [w]$، $[b] = [w]$ یا $[c] = [w]$. از طرفی چون $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$، لذا $ab = ۰$، $bc = ۰$، $ac = ۰$ و $wa = ۰$ (درصورتی که $wb \neq ۰$ و $wc \neq ۰$)، بنابراین با حالت‌های قید شده در تناقض است.

بالعکس، واضح است.

(۳) اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۲$، آن‌گاه بنابر قسمت (۴)، $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۲$، زیرا $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma(R))$. بنابراین با استفاده از قضیه ۱۳.۳.۱ و قسمت (۲)، $Z(R)$ ایده‌آلی از R است به‌طوری‌که $Z(R)^۲ \neq ۰$ و هر جفت مقسوم‌علیه صفر متمایز پوچساز ناصفر دارد. اگر $a \in Z(R)^*$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $Z(R) = ann_R(a)$، آن‌گاه $b, c \in Z(R)^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $bc \neq ۰$ و $[b]_R \neq [c]_R$.

بالعکس، کافیست عناصر متمایز $\alpha,\beta \in Z(R)^*$ پیدا کنیم به‌طوری‌که $\alpha\beta \neq \circ$ و $[\alpha]_R \neq [\beta]_R$. در حالت (الف)، چون $Z(R)^۲ \neq \circ$، لذا عناصر متمایز $b,c \in Z(R)^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $bc \neq \circ$. اگر $[b]_R \neq [c]_R$، آن‌گاه نتیجه حاصل است. فرض کنید $[b]_R = [c]_R$. از آن‌جایی‌که b و c عناصر متمایزی از $Z(R)^*$ هستند، بنابراین $\circ \neq t \in ann_R(b) = ann_R(c)$ وجود دارد. عناصر b و $b+t$ را در نظر بگیرید. لذا $b(b+t) = b^۲ \neq \circ$. حال، اگر $[b]_R \neq [b+t]_R$، آن‌گاه نتیجه حاصل است. فرض کنید $[b]_R = [b+t]_R$. آن‌گاه $ann_R(b)$ زیرمجموعه‌ی محضی از $ann_R(t)$ است، زیرا $(b+t) \in ann_R(t) \setminus ann_R(b)$. از آن‌جایی‌که برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$، لذا $\alpha \in Z(R)^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha \notin ann_R(t)$. چون $b\alpha \neq \circ$ و $[\alpha]_R \neq [t]_R$. حال با در نظر گرفتن $\beta = t$ نتیجه حاصل می‌شود.
در حالت (ب)، به‌وضوح هر جفت مقسوم‌علیه صفر متمایز پوچساز ناصفر دارد و عناصر متمایز $\alpha,\beta \in Z(R)^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha\beta \neq \circ$ و $[\alpha]_R \neq [\beta]_R$. □

قضیه ۴.۱.۲. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی با مقسوم‌علیه‌های صفر غیربدیهی باشد. دراین‌صورت:

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = \circ = \operatorname{diam}(\Gamma(R))$ اگر و تنها اگر $|Z(R)| = ۲$؛

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = \circ$ و $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۱$ اگر و تنها اگر $Z(R)^۲ = \circ$ و $|Z(R)| \geq ۳$؛

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = \operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۱$ اگر و تنها اگر $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$؛

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$ و $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۲$ اگر و تنها اگر (الف) R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد که $|Z(R)| \geq ۴$ یا (ب) $a \in Z(R)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $Z(R) = ann_R(a)$ و $|\Gamma_E(R)| = ۲$؛

(۵) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = \operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۲$ اگر و تنها اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل از حلقه R باشد و (الف) برای هر $a \in Z(R)$، $Z(R) \neq ann_R(a)$ و هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز دارای پوچساز ناصفر مشترک باشند یا (ب) $a \in Z(R)^*$ موجود باشد به‌طوری‌که $Z(R) = ann_R(a)$ و $b,c \in Z(R)^*$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $bc \neq \circ$ و $[b]_R \neq [c]_R$؛

برهان. (۱) و (۲) با استفاده از قضیه ۱۳.۳.۱، $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = \circ$ اگر و تنها اگر R با $\mathbb{Z}_۴$ یا $\mathbb{Z}_۲[y]/\langle y^۲\rangle$ یکریخت باشد. به‌علاوه، $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۱$ اگر و تنها اگر برای هر دو مقسوم‌علیه‌ی صفر متمایز a و b، $ab = \circ$ و R دارای حداقل دو مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی باشد. هم‌چنین، با استفاده از قضیه ۳.۱.۲، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = \circ$ اگر و تنها اگر $Z(R)^۲ = \circ$ و $|Z(R)| \geq ۲$. بنابراین نتیجه حاصل است.

(۳) با استفاده از قضیه ۳.۱.۲(۲)، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$ اگر و تنها اگر $|\Gamma_E(R)| = ۲$ و (الف) R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد به‌طوری‌که $|Z(R)| \geq ۳$ یا (ب) $a \in Z(R)^*$ موجود باشد به‌طوری‌که $Z(R) = ann_R(a)$. هم‌چنین $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۱$ اگر و تنها اگر برای هر

دو عنصر متمایز $x, y \in Z(R)$، $xy = 0$. اگر (الف) برقرار باشد و $|Z(R)| \geq 4$، آن‌گاه با استفاده از قضیه ۱.۳.۱۳ داریم: $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \neq 1$. همچنین اگر $|\Gamma_E(R)| = 2$ و $a \in Z(R)^*$ موجود باشد به‌طوری‌که $Z(R) = ann_R(a)$، آن‌گاه $c, d \in Z(R)$ موجود است به‌طوری‌که $cd \neq 0$، و درنتیجه $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \neq 1$. بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = \mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 1$ اگر و تنها اگر R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد به‌طوری‌که $|Z(R)| = 3$، که نتیجه می‌دهد $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(۴) با استفاده از قضیه ۱.۳.۱۳(۳)، $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 2$ اگر و تنها اگر (الف) R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال و حداقل سه مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی باشد، یا (ب) $Z(R)$ یک ایده‌آل باشد به‌طوری‌که $Z(R)^2 \neq 0$ و هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز دارای پوچ‌ساز مشترک ناصفر باشد. بنابراین از قضیه ۲.۱.۳(۳) نتیجه حاصل است.

(۵) اگر $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = \mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 2$، آن‌گاه با استفاده از قضیه‌های ۲.۱.۳(۳) و از ۱.۳.۱۳(۳)، $Z(R)$ یک ایده‌آل از R است و (الف) برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$ و هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز دارای پوچ‌ساز مشترک ناصفر باشند، یا (ب) برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$ و $b, c \in Z(R)^*$ موجود باشد به‌طوری‌که $bc \neq 0$ و $[b]_R \neq [c]_R$. عکس این گزاره به‌وضوح برقرار است.

(۶) در قضیه ۲.۱.۳(۴) اثبات شده است. □

قضیه ۲.۱.۵. [۶۰، قضیه ۲] (قضیه مک‌کوی) فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. اگر $f(x) \in R[x]$ یک مقسوم‌علیه صفر باشد، آن‌گاه عنصر ناصفر $r \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $rf(x) = 0$.

لم ۲.۱.۶. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) $Z(R[x])$ یک ایده‌آل از $R[x]$ است؛

(۲) برای هر $f(x), g(x) \in Z(R[x])$، $ann_{R[x]}(\{f(x), g(x)\}) \neq 0$؛

(۳) برای هر $f(x), g(x) \in Z(R[x])$، عنصر ناصفر $r \in R$ موجود است به‌طوری‌که $rf(x) = 0 = rg(x)$؛

(۴) برای هر $f(x), g(x) \in Z(R[x])$ به‌طوری‌که $deg(f(x)) = n$، $f(x) + x^{n+1}g(x)$ یک مقسوم‌علیه صفر از $R[x]$ است.

برهان. با استدلالی مشابه [۵۷، نتیجه ۲.۳] می‌توان آن را ثابت نمود. □

بنابر هوکابا[1] و کلر[2] [۴۶]، حلقه‌ی جابه‌جایی R دارای خاصیت (A) است اگر هر ایده‌آل متناهیاً تولیدشده از R مشمول در مجموعه همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر R، دارای پوچ‌ساز ناصفر باشد. خاصیت (A) اولین‌بار توسط کانتل[3] در مرجع [۶۶] مطالعه شد، که او به‌جای

[1] Huckaba
[2] Keller
[3] Quentel

خاصیت (A) از اصطلاح شرط (C) استفاده کرده بود. کلاس حلقه‌های جابه‌جایی با خاصیت (A) بسیار بزرگ است. حلقه چندجمله‌ای‌ها، حلقه‌هایی که حلقه کسرهای کلاسیک آن‌ها، فون نیومان منظم هستند [۴۳]، حلقه‌های نوتری [۵۰] و حلقه‌هایی که ایده‌آل‌های اول آن ماکسیمال هستند [۴۳]، مثال‌هایی از حلقه‌هایی هستند که دارای خاصیت (A) می‌باشند. کاپلانسکی[۴] در مرجع [۵۰]، نشان داده است حلقه‌های غیر نوتری وجود دارند به‌طوری‌که دارای خاصیت (A) نمی‌باشند.

فرض کنید f یک عنصر ناصفر از $R[x]$ باشد. مجموعه‌ی همه ضرایب f را با C_f نمایش می‌دهیم. همچنین، مجموعه‌ی همه ضرایب ناصفر f را با نماد C_f^* نشان می‌دهیم. توجه کنید که اگر $0 \neq f,g \in R[x]$ به‌طوری‌که $[f]_{R[x]}[g]_{R[x]} = [0]_{R[x]}$، آن‌گاه $[r]_R[s]_R = [0]_R$، که $0 \neq r,s \in R$ ضرایب جملات ناصفر از کمترین درجه در f و g می‌باشند. بنابراین $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x]))$.

حال، یک رده‌بندی کامل برای قطر $\Gamma_E(R[x])$ ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲.۱.۷. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. دراین‌صورت:

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 0$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 0$؛

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 1$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 1$؛

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 2$ اگر و تنها اگر (الف) R دارای خاصیت (A) باشد، $Z(R)$ یک ایده‌آل از R باشد و برای هر $a \in Z(R)$، $Z(R) \neq ann_R(a)$، یا (ب) برای بعضی $a \in Z(R)$، $Z(R) = ann_R(a)$ و دو عنصر $b,c \in Z(R)^*$ موجود باشد به‌طوری که $bc \neq 0$ و $[b]_R \neq [c]_R$؛

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 3$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = 3$ اگر و تنها اگر R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نباشد و R خاصیت (A) نداشته باشد یا $Z(R)$ یک ایده‌آل نباشد.

برهان. (۱) با استفاده از قضیه مک‌کوی داریم $Z(R)^2 = 0$ اگر و تنها اگر $Z(R[x])^2 = 0$. حال از قضیه ۲.۱.۳(۱)، نتیجه حاصل می‌شود.

(۲) ابتدا فرض کنید که $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 1$. از آن‌جایی‌که $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x]))$، بنابراین با استفاده از قسمت (۱) داریم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 1$. بالعکس، اگر R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد و $|Z(R)| \geq 3$، آن‌گاه $R[x]$ حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال می‌باشد، و لذا با توجه به قضیه ۲.۱.۳(۱) داریم: $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 1$.

حال فرض کنید که $|\Gamma_E(R)| = 2$ و برای بعضی $a \in R$، $Z(R) = ann_R(a)$. بنابراین $b \in Z(R)$ موجود است به‌طوری‌که $V(\Gamma_E(R)) = \{[a]_R, [b]_R\}$. ادعا می‌کنیم

---

[4] Kaplansky

$V(\Gamma_E(R[x])) = \{[a]_{R[x]}, [b]_{R[x]}\}$. فرض کنید f یک عنصر ناصفر از $Z(R[x])$ باشد. آن‌گاه با استفاده از قضیه مک‌کوی، $C_f^* \subseteq Z(R)$. سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر برای هر $a_i \in C_f^*$، $[a_i]_R = [a]_R$، آن‌گاه $ann_{R[x]}(f) = ann_{R[x]}(a)$ و بنابراین $[a]_{R[x]} = [f]_{R[x]}$.

حالت دوم: اگر برای هر $a_i \in C_f^*$، $[a_i]_R = [b]_R$، آن‌گاه $ann_{R[x]}(f) = ann_{R[x]}(b)$ و بنابراین $[b]_{R[x]} = [f]_{R[x]}$.

حالت سوم: اگر $f = f_1 + f_2$، که $f_1 \neq 0 \neq f_2$ و برای هر $a_i \in C_{f_1}^*$، $[a_i]_R = [a]_R$ و برای هر $b_j \in C_{f_2}^*$، $[b_j]_R = [b]_R$، آن‌گاه از آن‌جایی‌که $ann_R(b) \subseteq ann_R(a)$، به‌آسانی می‌توان نشان داد که $ann_{R[x]}(f) = ann_{R[x]}(b)$، و لذا $[b]_{R[x]} = [f]_{R[x]}$.

بنابراین $\Gamma_E(R[x]) = \{[a]_{R[x]}, [b]_{R[x]}\}$، که نتیجه می‌دهد $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 1$.

(۳) ابتدا فرض کنید $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 2$. دراین‌صورت با توجه به قضیه ۳.۱.۲، (الف) $Z(R[x])$ ایده‌آلی است که $Z(R[x])^2 \neq 0$ و برای هر $f \in Z(R[x])^*$، $Z(R[x]) \neq ann_{R[x]}(f)$ یا (ب) برای بعضی $f \in Z(R[x])^*$، $Z(R[x]) = ann_{R[x]}(f)$ و $g, h \in Z(R[x])^*$ موجود است به‌طوری‌که $gh \neq 0$ و $[h]_{R[x]} \neq [g]_{R[x]}$.

حالت اول: فرض کنید که $Z(R[x])$ ایده‌آلی باشد که مربع آن ناصفر است و برای هر $f \in Z(R[x])^*$، $Z(R[x]) \neq ann_{R[x]}(f)$. دراین‌صورت با استفاده از لم ۱۵.۳.۱، $Z(R)$ یک ایده‌آل از R است و R دارای خاصیت (A) است. به‌وضوح برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$.

حالت دوم: فرض کنید که برای بعضی $f \in Z(R[x])^*$، $Z(R[x]) = ann_{R[x]}(f)$ و $g, h \in Z(R[x])^*$ موجود باشد به‌طوری‌که $hg \neq 0$ و $[h]_{R[x]} \neq [g]_{R[x]}$. آن‌گاه برای هر $a \in C_f^*$، $Z(R) = ann_R(a)$. از آن‌جایی‌که $hg \neq 0$، داریم $Z(R)^2 \neq 0$. اگر برای هر $c, d \in Z(R)^*$، $cd = 0$ یا $[c]_R = [d]_R$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 1$. بنابراین با توجه به قسمت (۱)، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 1$، که یک تناقض است. بنابراین $b, c \in Z(R)^*$ موجود است به‌طوری‌که $bc \neq 0$ و $[b]_R \neq [c]_R$.

بالعکس، (الف) اگر R دارای خاصیت (A) و $Z(R)$ یک ایده‌آل از R باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$، آن‌گاه با استفاده از لم ۱۵.۳.۱، $Z(R[x])$ یک ایده‌آل از $R[x]$ است، و برای هر $f \in Z(R[x])^*$، $Z(R[x]) \neq ann_{R[x]}(f)$. بنابراین $Z(R[x])^2 \neq 0$، با استفاده از لم ۶.۱.۲، هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز از $R[x]$ دارای پوچساز ناصفر است. درنتیجه با استفاده از قضیه ۳.۱.۲، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 2$.

(ب) اگر برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$ و دو عنصر $b, c \in Z(R)^*$ موجود باشند به‌طوری‌که $bc \neq 0$ و $[b]_R \neq [c]_R$، آن‌گاه $Z(R[x]) = ann_{R[x]}(a)$ و $[b]_{R[x]} \neq [c]_{R[x]}$. بنابراین با استفاده از قضیه ۳.۱.۲، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 2$.

(۴) از قضیه ۳.۱.۲(۴) و ۱۶.۳.۱(۴) نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۸.۱.۲. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. دراین‌صورت $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 2$ اگر

و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۲$ و R دارای خاصیت (A) باشد.

برهان. از قضایای ۳.۱.۲(۳) و ۷.۱.۲(۳) نتیجه می‌شود. □

در ادامه، به مقایسه همه حالت‌های ممکن برای قطر گراف‌های $\Gamma_E(R)$ و $\Gamma_E(R[x])$ می‌پردازیم.

قضیه ۹.۱.۲. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. دراین‌صورت:

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۰$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = ۰$؛

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = ۱$؛

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = ۲$ اگر و تنها اگر (الف) R دارای خاصیت (A) و $Z(R)$ یک ایده‌آل از R باشد و برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$ یا (ب) برای بعضی $a \in Z(R)$، $Z(R) = ann_R(a)$ و دو عنصر $b, c \in Z(R)^*$ موجود باشند به‌طوری‌که $bc \neq ۰$ و $[b]_R \neq [c]_R$؛

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۲$ و $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = ۳$ اگر و تنها اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل باشد و هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز دارای پوچ‌ساز مشترک ناصفر باشند و R دارای خاصیت (A) نباشد؛

(۵) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = ۳$ اگر و تنها اگر R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نباشد و $Z(R)$ ایده‌آل نباشد.

برهان. گزاره‌های (۱)، (۲) و (۳) از قضایای ۳.۱.۲ و ۷.۱.۲ نتیجه می‌شوند. همچنین گزاره‌های (۴) و (۵) از قضایای ۳.۱.۲، ۷.۱.۲ و ۱۶.۳.۱ نتیجه می‌شوند.

□

در ادامه‌ی این بخش، قصد داریم برای حلقه‌ی کاهشی و یا نوتری R، رده‌بندی کاملی از قطر گراف $\Gamma_E(R[[x]])$ ارائه می‌دهیم. در مرجع [۲۶، مثال ۳]، فیلدز مثالی از یک حلقه‌ی غیرکاهشی S با یک مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی s ارائه کرد به‌طوری‌که $s + x$ یک مقسوم‌علیه صفر از $S[[x]]$ می‌باشد. همچنین او نشان داد که اگر R حلقه‌ای نوتری باشد، آن‌گاه $g(x)$ یک مقسوم‌علیه صفر است اگر و تنها اگر برای بعضی $r \in R$، $g(x)r = ۰$ [۲۶، قضیه ۵]. از سوی دیگر، گیلمر[5] و همکارانش در مرجع [۲۷، گزاره ۵.۳]، نشان دادند که یک سری توانی $f(x)$ روی یک حلقه کاهشی R مقسوم‌علیه صفر است اگر و تنها اگر عنصر ناصفر $t \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(x)t = ۰$. به‌علاوه، برای $f(x) = \sum a_i x^i, g(x) = \sum b_j x^j \in R[[x]]$، $f(x)g(x) = ۰$ اگر و تنها اگر برای هر i, j، $a_i b_j = ۰$. بنابراین اگر R حلقه‌ای کاهشی و یا نوتری باشد، آن‌گاه حلقه‌ی سری‌های توانی $R[[x]]$ مک‌کوی است.

[5] Gilmer

گزاره ۱۰.۱.۲. فرض کنید R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال P_1 و P_2 باشد. دراین‌صورت $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = 1$.

برهان. چون R کاهشی است، لذا $Z(R) = P_1 \cup P_2$ و $P_1 \cap P_2 = 0$. برای حلقه‌ی کاهشی R، حلقه‌ی سری‌های توانی $R[[x]]$ مک‌کوی است، در نتیجه $Z(R[[x]]) \subseteq Z(R)[[x]]$. بنابراین اگر $f(x) = \sum a_i x^i \in Z(R[[x]])$، آن‌گاه $\langle a_0, a_1, \dots \rangle$ مشمول در $Z(R) = P_1 \cup P_2$ است که نتیجه می‌دهد که $P_1 \subseteq \langle a_0, a_1, \dots \rangle$ یا $P_2 \subseteq \langle a_0, a_1, \dots \rangle$. بنابراین $Z(R[[x]]) \subseteq P_1[[x]] \cup P_2[[x]]$. از سوی دیگر، چون $P_1 P_2 = 0$، داریم $P_1[[x]] \cup P_2[[x]] \subseteq Z(R[[x]])$. بنابراین $Z(R[[x]]) = P_1[[x]] \cup P_2[[x]]$. درنتیجه $\Gamma_E(R[[x]]) = \{[a]_{R[[x]]}, [b]_{R[[x]]}\}$ که $0 \neq a \in P_1$ و $0 \neq b \in P_2$. لذا $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = 1$. □

گزاره ۱۱.۱.۲. فرض کنید R حلقه‌ای کاهشی با بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال باشد. اگر $Z(R)$ ایده‌آل نباشد، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = 3$.

برهان. از آن‌جایی‌که R کاهشی با بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال است و $Z(R)$ ایده‌آل نیست، بنابراین با استفاده از [۵۷، قضیه ۴.۴]، $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]])) = 3$. حال با استفاده از قضیه ۳.۱.۲(۴) داریم: $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = 3$. □

هم‌چنین توجه کنید که اگر $0 \neq f, g \in R[[x]]$ با شرط $[f]_{R[[x]]}[g]_{R[[x]]} = [0]_{R[[x]]}$ آن‌گاه $[r]_R[s]_R = [0]_R$ که $0 \neq r, s \in R$ ضرایب جملات ناصفر از کمترین درجه در f و g می‌باشند. بنابراین $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))$.

اگر R حلقه‌ای کاهشی با مقسوم‌علیه صفر ناصفر باشد، آن‌گاه با استفاده از قضیه ۳.۱.۲، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \geq 1$. بنابراین قضیه زیر را درمورد قطر گراف $\Gamma_E(R[[x]])$، که در آن R حلقه‌ای کاهشی است، خواهیم داشت:

قضیه ۱۲.۱.۲. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی باشد. دراین‌صورت:

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = 1$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 1$؛

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = 2$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 2$ و $I + J$ دارای یک پوچساز ناصفر باشد که I و J هردو ایده‌آل‌های شمارا تولید شده با پوچسازهای ناصفر می‌باشند؛

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = 3$ اگر و تنها اگر R دارای بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال باشد و ایده‌آل‌های شمارا تولید شده‌ی I و J از R با پوچساز ناصفر موجود باشند به‌طوری‌که $I + J$ پوچساز ناصفر نداشته باشد.

برهان. (۱) ابتدا فرض کنید که $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = 1$. چون $1 \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 1$.

قسمت عکس از قضیه‌های ۳.۱.۲(۲) و ۱۰.۱.۲ نتیجه می‌شود.

(۲) ابتدا فرض کنید $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۲$. آن‌گاه با استفاده از قسمت (۱) و این که $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))$، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۲$. هم‌چنین با استفاده از قضیه ۳.۱.۲، $Z(R[[x]])$ یک ایده‌آل از $R[[x]]$ است.

فرض کنید $I = \langle a_۰, a_۱, \dots \rangle$ و $J = \langle b_۰, b_۱, \dots \rangle$ ایده‌آل‌های شمارا تولید شده‌ای در R باشند که دارای پوچساز ناصفر هستند. سری‌های توانی $f(x) = \sum_{i=۰}^{\infty} a_i x^{۲i}$ و $g(x) = \sum_{j=۰}^{\infty} b_j x^{۲j+۱}$ را در نظر بگیرید. $f(x)$ و $g(x)$ هر دو مقسوم‌علیه صفر از $R[[x]]$ هستند. از آن‌جایی که $Z(R[[x]])$ یک ایده‌آل از $R[[x]]$ است، بنابراین $f(x)+g(x)$ نیز متعلق به $Z(R[[x]])$ است. به‌وضوح ضرایب $f(x) + g(x)$، ایده‌آل $I + J$ را تولید می‌کند. درنتیجه $I + J$ دارای پوچساز ناصفر در R است.

بالعکس، فرض کنید $f(x) = \sum_{i=۰}^{\infty} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=۰}^{\infty} b_j x^j$ مقسوم‌علیه‌های صفر غیربدیهی از $R[[x]]$ باشند. چون $R[[x]]$ مک‌کوی است، بنابراین عناصر ناصفر $r, s \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $g(x)s = ۰ = f(x)r$. درنتیجه $I = \langle a_۰, a_۱, \dots \rangle$ و $J = \langle b_۰, b_۱, \dots \rangle$ ایده‌آل‌های شمارا تولید شده با پوچسازهای ناصفر می‌باشند. بنابراین $I + J$ دارای پوچساز ناصفر است، که نتیجه می‌دهد ایده‌آل $\langle f(x), g(x) \rangle$ دارای پوچساز ناصفر است. لذا $Z(R[[x]])$ یک ایده‌آل از $R[[x]]$ است و هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز از $R[[x]]$ دارای پوچساز ناصفر است.

از آن‌جایی که $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۲$، بنابراین با استفاده از قضیه ۳.۱.۲ دو حالت زیر را داریم:

حالت اول: اگر برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$، آن‌گاه برای هر $f \in Z(R[[x]])^*$، $Z(R[[x]]) \neq ann_{R[[x]]}(f)$، زیرا $R[[x]]$ مک‌کوی است. درنتیجه با استفاده از قضیه ۳.۱.۲(۳)، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۲$.

حالت دوم: اگر برای بعضی $a \in Z(R)$، $Z(R) = ann_R(a)$ و دو عنصر $a, b \in Z(R)^*$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $ab \neq ۰$ و $[a]_R \neq [b]_R$، آن‌گاه با استفاده از مک‌کوی بودن $R[[x]]$ داریم: $Z(R[[x]]) = ann_{R[[x]]}(a)$ و $[a]_{R[[x]]} \neq [b]_{R[[x]]}$. بنابراین با توجه به قضیه ۳.۱.۲(۳)، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۲$.

(۳) فرض کنید $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۳$. از آن‌جایی‌که $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) \leq \operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]]))$ بنابراین $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۳$. لذا با استفاده از قضیه ۱۳.۳.۱، R دارای بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال باشد و مقسوم‌علیه‌های صفر متمایز $f(x), g(x) \in Z(R[[x]])$ وجود دارد به‌طوری‌که $ann_{R[[x]]}(\{f(x), g(x)\}) = ۰$. فرض کنید I و J به‌ترتیب ایده‌آل‌های تولید شده توسط ضرایب $f(x)$ و $g(x)$ باشند. آن‌گاه I و J شمارا تولید شده هستند که پوچساز ناصفر دارند، اما $I + J$ دارای هیچ پوچساز ناصفری نمی‌باشد.

عکس گزاره از قسمت (۲) و قضیه ۳.۱.۲(۲) به‌آسانی نتیجه می‌شود.

□

همان‌طور که قبلا اشاره شد، فیلدز در مرجع [۲۶]، مثالی از یک حلقه‌ی غیرکاهشی S با یک مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی s ارائه کرد به‌طوری‌که $s+x$ یک مقسوم‌علیه صفر از $S[[x]]$ می‌باشد.

با استفاده از قضیه مک کوی $x+s$ دارای پوچساز ناصفر در $R[x]$ نمی‌باشد. بنابراین ما نمی‌توانیم در حالت کلی $\Gamma_E(R[x])$ را به‌عنوان زیرگرافی از $\Gamma_E(R[[x]])$ در نظر بگیریم. اما اگر R حلقه‌ای کاهشی باشد و $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i, g(x)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j\in R[[x]]$، آن‌گاه $fg=0$ اگر و تنها اگر برای هر i,j، $a_ib_j=0$. بنابراین $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))\leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x]))\leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))$. در قضیه زیر تمام نتایج مختلف مربوط به قطر گراف‌های $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))$، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x]))$ و $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))$ را زمانی که R حلقه‌ای کاهشی باشد، جمع آوری می کنیم.

قضیه ۱۳.۱.۲. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی باشد که حوزه‌صحیح نیست. در این‌صورت:

$$1\leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R))\leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x]))\leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])).$$

به‌علاوه، تمام حالت‌های ممکن برای این قطرها عبارتند از:

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=1$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x]))=1$ اگرو تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))=1$ اگر و تنها اگر R دارای دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد؛

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x]))=\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))=2$ اگر و تنها اگر $I+J$ دارای پوچساز ناصفر باشد که در آن I و J هر دو ایده‌آل‌های شمارا تولید شده با پوچساز های ناصفر می‌باشند؛

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=2$ و $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x]))=\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))=3$ اگر و تنها اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل از R و هر ایده‌آل تولید شده توسط دو عنصر مشمول در $Z(R)$ دارای پوچساز ناصفر باشد، اما R دارای خاصیت (A) نباشد؛

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x]))=2$ و $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))=3$ اگر و تنها اگر R دارای خاصیت (A)، $Z(R)$ یک ایده‌آل و R دارای بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال باشد و ایده‌آل‌های شمارا تولید شده I و J از R با پوچسازهای ناصفر موجود باشند به‌طوری‌که $I+J$ پوچساز ناصفر ندارد؛

(۵) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x]))=\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))=3$ اگر و تنها اگر R دارای بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال باشد، و یک جفت مقسوم‌علیه صفر a,b موجود باشد به‌طوری‌که $ann_R(\{a,b\})=0$.

در ادامه، برای حلقه‌ی نوتری R رابطه بین قطر $\Gamma_E(R)$ و $\Gamma_E(R[[x]])$ را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۴.۱.۲. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری باشد. دراین‌صورت:

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=0$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))=0$؛

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=1$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))=1$؛

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۲$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۲$؛

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۳$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۳$.

برهان. (۱) ابتدا فرض کنید $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۰$. آن‌گاه با استفاده از قضیه ۳.۱.۲، $Z(R)^۲ = ۰$ و $|Z(R)| \geq ۲$. از آن‌جایی‌که برای حلقه‌ی نوتری R، حلقه‌ی سری‌های توانی $R[[x]]$ مک‌کوی است، لذا $Z(R[[x]]) \subseteq Z(R)[[x]]$. بنابراین $Z(R[[x]])^۲ = ۰$، و لذا با توجه به قضیه ۳.۱.۲، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۰$.

نتیجه عکس با توجه به $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))$، واضح است.

(۲) فرض کنید $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$. آن‌گاه با استفاده از قضیه ۳.۱.۲، $|\Gamma_E(R)| = ۲$ و (الف) R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد یا (ب) $a \in Z(R)^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $Z(R) = ann_R(a)$. اگر R حلقه‌ای کاهشی باشد، آن‌گاه با استفاده از قضیه ۱۲.۱.۲، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۱$. اگر برای بعضی $a \in R$، $Z(R) = ann_R(a)$، آن‌گاه با استفاده از مک‌کوی بودن $R[[x]]$، به‌راحتی می‌توان نشان داد $Z(R[[x]]) = ann_{R[[x]]}(a)$. بنابراین با توجه به قضیه ۳.۱.۲، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۱$.

عکس گزاره از قسمت (۱) و این حقیقت که $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))$ نتیجه می‌شود.

(۳) فرض کنید $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۲$. آن‌گاه با استفاده از قضیه ۳.۱.۲، (الف) $Z(R)$ یک ایده‌آل از R است و هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز دارای پوچساز ناصفر است و برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$ یا (ب) برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$ و $b, c \in Z(R)^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $bc \neq ۰$ و $[b]_R \neq [c]_R$. حال، از آن‌جایی‌که R نوتری و $Z(R)$ یک ایده‌آل است، آن‌گاه برای بعضی از $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$. حال، فرض کنید برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$ و $b, c \in Z(R)^*$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $bc \neq ۰$ و $[b]_R \neq [c]_R$. بنابراین با توجه به مک‌کوی بودن $R[[x]]$ داریم $Z(R[[x]]) = ann_{R[[x]]}(a)$. به‌وضوح $[b]_{R[[x]]} \neq [c]_{R[[x]]}$. درنتیجه با استفاده از قضیه ۳.۱.۲، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۲$.

عکس گزاره به‌آسانی از قسمت‌های (۱) و (۲) و این حقیقت که $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))$ نتیجه می‌شود.

(۴) از قسمت‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود. □

مثال زیر نشان می‌دهد دو شرط کاهشی و نوتری بودن R در قضایای ۱۴.۱.۲ و ۱۲.۱.۲ ضروری است.

مثال ۱۵.۱.۲. فرض کنید K یک میدان باشد. حلقه‌ی

$$R = K[Y, \{X_i\}] / \langle \{X_۰ Y\} \cup \{X_i - X_{i+۱} Y\} \rangle$$

را در نظر بگیرید. به‌وضوح R کاهشی و نوتری نیست. در حلقه R از آن‌جایی‌که $\overline{X_۰ Y} = ۰$ و $\overline{X_۰ X_i} = \overline{X_۰ X_{i+۱} Y} = ۰$، $\overline{X_۰}$ همه متغیرها را پوچ می‌کند. بنابراین $ann_R(\overline{X_۰}) =$

$Z(R)$. چون $\overline{X_2X_0} = \overline{X_2YX_1} = \overline{X_1}^2 = 0$، بنابراین واضح است که $\overline{X_0} \neq 0$ و $\overline{X_1Y} = [\overline{Y}]_R \neq [\overline{X_1}]_R$. لذا با استفاده از قضیه ۳.۱.۲(۳)، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 2$. به‌علاوه، در مثال ۵.۳.۱ نشان دادیم تحت شرایط فوق $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[w]])) = 3$ و در نتیجه با استفاده از قضیه ۳.۱.۲ داریم: $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[w]])) = 3$. بنابراین شرط کاهشی و یا نوتری بودن R در قضایای ۱۴.۱.۲ و ۱۲.۱.۲ ضروری است.

همچنین مثال بعدی نشان می‌دهد که در غیاب شرط نوتری، قضیه ۱۴.۱.۲ در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۱۶.۱.۲. فرض کنید K یک میدان باشد و $D = K[w, y, z]_{(w,y.z)}$، که w، y و z متغیرهای مستقل روی K هستند. به‌وضوح D دامنه است. فرض کنید $\mathcal{P}$ مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول با ارتفاع ۲ و Q ایده‌آل ماکسیمال حلقه‌ی D باشد. همچنین فرض کنید $B = \sum F_\alpha$ که برای هر $p_\alpha \in \mathcal{P}$، $F_\alpha = qf(D/p_\alpha)$ ($qf(D/p_\alpha)$ میدان کسرهای D/P_α می‌باشد). فرض کنید $R = D(+)B$ یک ایده‌آل سازی از B روی D باشد؛ یعنی عناصر R به‌فرم $D \times B$ می‌باشند و دو عمل جمع و ضرب روی R به این صورت تعریف می‌شود: برای هر دو عنصر $(r, a), (s, b) \in R$، $(r, a)+(s, b) = (r+s, a+b)$ و $(r, a)(s, b) = (rs, rb+as)$. به‌وضوح R کاهشی و نوتری نیست. لوکاس در مرجع [۵۷، مثال ۲.۵] نشان داد که:

(۱) R حلقه‌ای موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $Q(+)B = Z(R)$ است.

(۲) هر ایده‌آل تولید شده توسط دو عضو مشمول در $Z(R)$ دارای پوچساز ناصفر است اما R دارای خاصیت (A) نیست.

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = 2$ اما $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = \operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]])) = 3$.

بنابراین با استفاده از قضیه ۳.۱.۲، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = 3$. از آنجایی که R دارای خاصیت (A) نیست و $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = 2$، لذا با استفاده از قضیه ۳.۱.۲، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 2$. بنابراین شرط نوتری در قضیه ۱۴.۱.۲ قابل حذف نیست.

۲.۲ بررسی قطر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه چندجمله‌ای‌های اریب لوران

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، اسپایرف و ویکام گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده $\Gamma_E(R)$ را درحالتی که R جابه‌جایی است، تعریف کردند. ما این مفهوم را به این‌صورت به حالت ناجابجایی توسیع می‌دهیم: فرض کنید R حلقه‌ای شرکت‌پذیر با عنصر همانی ناصفر باشد. برای عنصر $a \in R$، $ann_R(a) = r_R(a) \cup l_R(a)$ در نظر بگیرید. رابطه $\sim$ روی R را به این صورت تعریف می‌کنیم: $a \sim b$ اگر و تنها اگر $ann_R(a) = ann_R(b)$. به‌وضوح، رابطه $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد. گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده $\Gamma_E(R)$، گرافی است که رئوس آن کلاس‌های هم‌ارزی القا شده

توسط رابطه $\sim$ به غیر از $[0]_R$ و $[1]_R$ می‌باشند و دو رأس متمایز $[a]_R$ و $[b]_R$ مجاورند اگر و تنها اگر $ab = 0$ یا $ba = 0$.

در این بخش، با فرض اینکه R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر و αـ سازگار باشد به مطالعه قطر گراف مقسوم‌علیه صفر و گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب لوران $R[x, x^{-1}; \alpha]$ می‌پردازیم. هم‌چنین توصیف کاملی از قطر گراف‌های $\Gamma(R[x, x^{-1}; \alpha])$ و $\Gamma_E(R[x, x^{-1}; \alpha])$ ارائه می‌دهیم.

این بخش را با ارائه نتایج اولیه و رده‌بندی عمومی، شامل مقایسه‌ی همه‌ی حالات ممکن برای قطر گراف $\mathrm{diam}(\Gamma(R))$ و $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R))$ که در آن R حلقه‌ای برگشت‌پذیر است، آغاز می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید R حلقه‌ای غیرکاهشی و برگشت‌پذیر باشد. اگر عناصر $a, b \in Z(R)^*$ موجود باشند به‌طوری‌که $ann_R(\{a, b\}) = 0$، آنگاه $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = 3$.

برهان. با استفاده از قضیه ۱۲.۳.۱، عناصر $\alpha, \beta \in Z(R)^*$ وجود دارند به‌طوری‌که $\alpha\beta \neq 0$ و $\{\alpha, \beta\}$ دارای هیچ پوچساز ناصفری نمی‌باشد. بنابراین، $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = 3$. □

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر است. دراین‌صورت:

(۱) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = 0$ اگر و تنها اگر $Z(R)^2 = 0$ و $|Z(R)| \geq 2$؛

(۲) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = 1$ اگر وتنها اگر (الف) R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد به‌طوری‌که $|Z(R)| \geq 3$ یا (ب) $|\Gamma_E(R)| = 2$ و برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$؛

(۳) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = 2$ اگر و تنها اگر (الف) $Z(R)$ یک ایده‌آل از R باشد و هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی دارای یک پوچساز مشترک ناصفر باشند و برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$ یا (ب) برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$ و $b, c \in Z(R)^*$ موجود باشد به‌طوری‌که $bc \neq 0$ و $[b]_R \neq [c]_R$؛

(۴) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = 3$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 3$.

برهان. از آن‌جایی‌که برای حلقه‌ی برگشت‌پذیر R داریم: $Z_l(R) = Z_r(R) = Z(R)$، بنابراین می‌توان مشابه برهان قضیه ۳.۱.۲ آن‌را اثبات نمود. □

با استفاده از تعریف گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده $\Gamma_E(R)$، به‌سادگی مشاهده می‌شود که $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \mathrm{diam}(\Gamma(R))$. به‌علاوه، با استدلالی مشابه برهان قضیه ۴.۱.۲ می‌توانیم قضیه زیر را ثابت کنیم.

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر با مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی باشد. موارد زیر همه حالت‌های ممکن برای زوج $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R))$ و $\mathrm{diam}(\Gamma(R))$ را توصیف می‌کند.

(۱) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۰ = \mathrm{diam}(\Gamma(R))$ اگر و تنها اگر $|Z(R)| = ۲$؛

(۲) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۰$ و $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۱$ اگر و تنها اگر $Z(R)^۲ = ۰$ و $|Z(R)| \geq ۳$؛

(۳) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$ و $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۲$ اگر و تنها اگر (الف) R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد به‌طوری‌که $|Z(R)| \geq ۴$، یا (ب) $|\Gamma_E(R)| = ۲$ و برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$؛

(۴) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = \mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۲$ اگر و تنها اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل از R باشد و (الف) برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$ و هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز دارای پوچ‌ساز مشترک باشد، یا (ب) برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$ و $b, c \in Z(R)^*$ موجود باشد به‌طوری‌که $bc \neq ۰$ و $[b]_R \neq [c]_R$؛

(۵) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۳$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۳$.

در ادامه‌ی این بخش، به بررسی برخی روابط بین ویژگی‌های R و توسیع جردن $A = A(R, \alpha)$ می‌پردازیم و یک رده‌بندی کامل از قطر گراف‌های $\Gamma(R[x, x^{-۱}; \alpha])$ و $\Gamma_E(R[x, x^{-۱}; \alpha])$، که در آن حلقه‌ی R برگشت‌پذیر و αـ سازگار است، ارائه می‌دهیم.

گزاره ۴.۲.۲. فرض کنید α یک تکریختی از R باشد. دراین‌صورت:

(۱) R برگشت‌پذیر است اگر و تنها اگر A برگشت‌پذیر باشد؛

(۲) R کاهشی است اگر و تنها اگر A کاهشی باشد.

برهان. (۱) ابتدا فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد و همچنین فرض کنید $x^{-i}ax^i, x^{-j}bx^j \in A$ به‌طوری‌که $(x^{-i}ax^i)(x^{-j}bx^j) = ۰$. بنابراین $x^{-(i+j)}\alpha^j(a)\alpha^i(b)x^{i+j} = ۰$، در نتیجه داریم: $\alpha^j(a)\alpha^i(b) = ۰$. از آن‌جایی‌که $\alpha^j(a), \alpha^i(b) \in R$ و R برگشت‌پذیر است، داریم $\alpha^i(b)\alpha^j(a) = ۰$ و همچنین $x^{-(j+i)}\alpha^i(b)\alpha^j(a)x^{j+i} = ۰$. بنابراین $(x^{-j}bx^j)(x^{-i}ax^i) = ۰$، در نتیجه A برگشت‌پذیر است. از آن‌جایی‌که $R \subseteq A$، اثبات عکس گزاره بدیهی است.
(۲) فرض کنید R حلقه‌ای کاهشی و $x^{-i}ax^i$ یک عنصر از A باشد که $(x^{-i}ax^i)^۲ = ۰$. بنابراین $x^{-i}a^۲x^i = ۰$، در نتیجه $a^۲ = ۰$. چون R حلقه‌ای کاهشی است پس $a = ۰$. بنابراین $x^{-i}ax^i = ۰$، در نتیجه A کاهشی است. چون R زیرحلقه‌ای از A است، عکس گزاره به‌طور بدیهی برقرار است. □

فرض کنید α یک تکریختی از R باشد. یادآوری می‌کنیم که یک ایده‌آل چپ I از R، αـ بسته می‌باشد هرگاه برای همه اعداد صحیح مثبت n، $\alpha^{-n}(R\alpha^n(I)) \subseteq I$. یک αـ دنباله از ایده‌آل‌های چپ حلقه‌ی R، دنباله $\{I_i\}_{i\geq ۰}$ از ایده‌آل‌های αـ بسته از R است به‌طوری‌که برای همه $n \geq ۰$، $\alpha^{-۱}(I_{n+۱}) = I_n$.

لم ۵.۲.۲. اگر R یک حلقه دوئو راست باشد، آن‌گاه A نیز چنین است.

برهان. فرض کنید I یک ایده‌آل راست از A باشد و برای هر $i \geq 0$ تعریف کنید $I_i = \{a \in R \mid x^{-i}ax^i \in I\}$. اگر $a \in I_i$ و $r \in R$، آن‌گاه $x^{-i}rx^i \in A$ و $x^{-i}arx^i = (x^{-i}ax^i)(x^{-i}rx^i) \in I$، و لذا $ar \in I_i$. این نتیجه می‌دهد که I_i یک ایده‌آل راست R است. بنابر [۴۹، قضیه ۴.۷]، $\{I_i\}_{i\geq 0}$ یک αـ دنباله از ایده‌آل‌های راست R است. فرض کنید $x^{-j}rx^j \in A$ و $x^{-i}ax^i \in I$. دراین‌صورت $(x^{-j}rx^j)(x^{-i}ax^i) = x^{-(j+i)}\alpha^i(r)\alpha^j(a)x^{j+i}$. از آن‌جایی‌که $\{I_i\}_{i\geq 0}$ یک αـ دنباله و R دوئو راست است، بنابراین $\alpha^i(r)\alpha^j(a) \in I_{i+j}$. چون $I = \bigcup_i x^{-i}I_ix^i$، در نتیجه $(x^{-j}rx^j)(x^{-i}ax^i) \in I$. بنابراین، I ایده‌آل دوطرفه از A بوده و نتیجه حاصل است. □

لم ۶.۲.۲. [۴۱، لم ۳.۱۱] فرض کنید α یک تکریختی از R باشد. دراین‌صورت R، αـ سازگار است اگر و تنها اگر A، αـ سازگار باشد.

گزاره ۷.۲.۲. فرض کنید R حلقه‌ای αـ سازگار باشد. دراین‌صورت $Z_l(R)$ (متناظراً $Z_r(R)$) یک ایده‌آل از R است اگر و تنها اگر $Z_l(A)$ (متناظراً $Z_r(A)$) یک ایده‌آل از A باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید $Z_l(R)$ یک ایده‌آل از R باشد و همچنین فرض کنید $x^{-i}ax^i, x^{-j}bx^j$ عناصری از $Z_l(A)$ باشند. به‌وضوح، $a, b \in Z_l(R)$. بنابراین $0 \neq r, s \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $ar = 0 = bs$. چون R، αـ سازگار است، در نتیجه داریم $\alpha^j(a)r = 0 = \alpha^i(b)s$. بنابراین $\alpha^j(a), \alpha^i(b) \in Z_l(R)$. چون $Z_l(R)$ یک ایده‌آل از R است، لذا $\alpha^j(a) + \alpha^i(b) \in Z_l(R)$. در نتیجه $x^{-(i+j)}\big(\alpha^j(a) + \alpha^i(b)\big)x^{(i+j)} \in Z_l(A)$.

حال، فرض کنید $x^{-i}ax^i \in Z_l(A)$ و $x^{-k}rx^k \in A$. چون $a \in Z_l(R)$ و $Z_l(R)$ یک ایده‌آل از R است، بنابراین $ar \in Z_l(R)$. در نتیجه یک عنصر ناصفر $b \in R$ موجود است به‌طوری‌که $arb = 0$. با استفاده مکرر خاصیت αـ سازگاری R داریم: $arb = 0$ اگر و تنها اگر $a\alpha^i(rb) = 0$ اگر و تنها اگر $\alpha^k(a)\alpha^i(r)\alpha^i(b) = 0$ اگر و تنها اگر $\alpha^k(a)\alpha^i(r)b = 0$. بنابراین، $\alpha^k(a)\alpha^i(r) \in Z_l(R)$. لذا، $x^{-(i+k)}\alpha^k(a)\alpha^i(r)x^{(i+j)} \in Z_l(A)$. بنابراین، $Z_l(A)$ یک ایده‌آل راست از A است. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد $Z_l(A)$ یک ایده‌آل چپ از A است. لذا $Z_l(A)$ یک ایده‌آل از A است.

بالعکس، فرض کنید $Z_l(A)$ یک ایده‌آل از حلقه A باشد. چون $Z_l(R) \subseteq Z_l(A)$، بنابراین $Z_l(R)$ یک ایده‌آل از حلقه R است. □

هُنگ[6] و همکارانش [۴۵]، خاصیت (A) را به حلقه‌های ناجابه‌جایی توسیع دادند. حلقه‌ی R دارای خاصیت (A) راست (چپ) است اگر هر ایده‌آل دوطرفه متناهیاً تولید شده از R مشمول در مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر چپ (راست) دارای پوچساز راست (چپ) ناصفر باشد. گوییم حلقه‌ی R دارای خاصیت (A) است هرگاه R هم دارای خاصیت (A) راست و هم دارای خاصیت (A) چپ باشد.

[6] Hong

قضیه ۸.۲.۲. فرض کنید R حلقه‌ای αـ سازگار و $Z_l(R)$ یک ایده‌آل از R باشد. دراین‌صورت، R دارای خاصیت (A) راست است اگر و تنها اگر A دارای خاصیت (A) راست باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید A دارای خاصیت (A) راست باشد و $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle \subseteq Z_l(R)$. در نتیجه برای هر $1 \leq j \leq n$ و $i \geq 0$، $x^{-i}a_jx^i \in Z_l(A)$. از آن‌جایی‌که $Z_l(R)$ یک ایده‌آل از R است، بنابراین با استفاده از گزاره ۷.۲.۲، $Z_l(A)$ یک ایده‌آل از A است و در نتیجه $\langle x^{-i}a_1x^i,\ldots,x^{-i}a_nx^i\rangle \subseteq Z_l(A)$. چون A دارای خاصیت (A) راست است، لذا $0 \neq x^{-i}rx^i \in A$ وجود دارد به‌طوری‌که $\langle x^{-i}a_1x^i,\ldots,x^{-i}a_nx^i\rangle x^{-i}rx^i = 0$، که نتیجه می‌دهد برای هر $1 \leq j \leq n$، $(x^{-i}a_jx^i)(x^{-i}rx^i) = 0$. از آن‌جایی‌که R، αـ سازگار است لذا با استفاده از لم ۲۳.۱.۱، برای هر $1 \leq j \leq n$، $a_jr = 0$. بنابراین R دارای خاصیت (A) راست است.

بالعکس، فرض کنید R دارای خاصیت (A) راست باشد و $\langle x^{-i}a_jx^i,\ldots,x^{-i}a_jx^i\rangle \subseteq Z_l(A)$. در نتیجه برای هر $1 \leq j \leq n$ داریم: $a_j \in Z_l(R)$. چون $Z_l(R)$ ایده‌آلی از R است، لذا $\langle a_1,\cdots,a_n\rangle \subseteq Z_l(R)$. از آن‌جایی‌که R دارای خاصیت (A) راست است، بنابراین $0 \neq r \in R$ موجود است به‌طوری‌که $\langle a_1,\cdots,a_n\rangle r = 0$. درنتیجه، برای هر $1 \leq j \leq n$، $a_jr = 0$. با استفاده از خاصیت αـ سازگاری R، برای هر عدد صحیح l,j که $1 \leq j \leq n$، داریم $\alpha^l(a_j)\alpha^{i_j}(r) = 0$. بنابراین، برای هر $0 \leq i \leq n$، داریم $x^{-(j+l)}\alpha(a_i)\alpha^{i_j}(r)x^{-(j+l)} = 0$، که نتیجه می‌دهد $(x^{-i_j}a_ix^{i_j})(x^{-l}rx^l) = 0$. لذا $\langle x^{-i_1}a_1x^{i_1},\cdots,x^{-i_n}a_nx^{i_n}\rangle x^{-l}rx^l = 0$. بنابراین، A دارای خاصیت (A) راست است. $\square$

هاشمی و موسوی در مرجع [۴۱، لم ۲.۲]، نشان دادند که اگر α یک درونریختی و δ یک تابع αـ مشتق از حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه R حلقه‌ای کاهشی و (α,δ)ـ سازگار است اگر و تنها اگر R، αـ صلب باشد. در مرجع [۶۴، قضیه ۳]، ثابت شده است که حلقه‌ی R، αـ صلب است اگر و تنها اگر $R[x,x^{-1};\alpha]$ حلقه‌ای کاهشی باشد. از این‌رو نتیجه‌ی زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۹.۲.۲. فرض کنید α یک درونریختی از R باشد. در این‌صورت، R حلقه‌ای کاهشی و αـ سازگار است اگر و تنها اگر $R[x,x^{-1};\alpha]$ حلقه‌ای کاهشی باشد.

تعریف ۱۰.۲.۲. فرض کنید α یک خودریختی از R باشد. حلقه‌ی R را مک‌کوی اریب از نوع چندجمله‌ای لوران (یا به‌طور ساده، حلقه $\alpha - SMLP$) می‌نامیم، هرگاه برای عناصر ناصفر $f(x)$ و $g(x)$ در $R[x,x^{-1};\alpha]$، اگر $f(x)g(x) = 0$، آن‌گاه $0 \neq c \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که $f(x)c = 0$.

آل هوز[7] و کیانی[8] در مرجع [۶، قضیه ۲.۸] ثابت کردند اگر α یک خودریختی سازگار از حلقه‌ی برگشت‌پذیر R باشد، آن‌گاه R حلقه $\alpha - SMLP$ است.

فرض کنید R یک حلقه αـ سازگار و $Z_l(R)$ یک ایده‌آل از R باشد. چون R، αـ سازگار است، پس $\alpha(Z_l(R)) \subseteq Z_l(R)$. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم که α یک تکریختی از $Z_l(R)$

[7] Alhevaz [8] Kiani

می‌باشد، لذا $Z_l(R)[x,x^{-1};\alpha]$ قابل تعریف است. به‌طور مشابه، اگر $Z_r(R)$ (متناظراً $Z(R)$) یک ایده‌آل از R باشد، آن‌گاه $Z_r(R)[x,x^{-1};\alpha]$ (متناظراً $Z(R)[x,x^{-1};\alpha]$) قابل تعریف است.

گزاره ۱۱.۲.۲. فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و αـ سازگار باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) $Z(R)$ یک ایده‌آل و R دارای خاصیت (A) راست است؛

(۲) $Z_l(R[x,x^{-1};\alpha])$ یک ایده‌آل از $R[x,x^{-1};\alpha]$ است؛

(۳) $Z_r(R[x,x^{-1};\alpha])$ یک ایده‌آل از $R[x,x^{-1};\alpha]$ است.

برهان. (۲) $\Leftrightarrow$ (۱) می‌دانیم $R[x,x^{-1},\alpha]\cong A[x,x^{-1},\alpha]$، بنابراین با توجه به قضیه ۸.۲.۲، کافیست نشان دهیم $Z_l(A[x,x^{-1},\alpha])$ یک ایده‌آل از $A[x,x^{-1},\alpha]$ است اگر و تنها اگر $Z(A)$ یک ایده‌آل و A دارای خاصیت (A) راست باشد.

ابتدا فرض کنید $Z(A)$ یک ایده‌آل و A دارای خاصیت (A) راست باشد. فرض کنید $f(x)=u_mx^m+\cdots+u_kx^k$ و $g(x)=v_nx^n+\cdots+v_lx^l$ مقسوم‌علیه‌های صفر غیربدیهی از $A[x,x^{-1},\alpha]$ باشند. از آن‌جایی‌که R، αـ سازگار و برگشت‌پذیر است، بنابراین با توجه به گزاره‌های ۴.۲.۲ و ۶.۲.۲، A نیز چنین است. در نتیجه A یک حلقه $\alpha-SMLP$ است، و لذا عنصر ناصفر $a\in A$ وجود دارد که

$$f(x)a=u_mx^ma+\cdots+u_kx^ka=u_m\alpha^m(a)x^m+\cdots+u_k\alpha^k(a)x^k=\circ.$$

بنابراین برای هر $m\leq j\leq k$، $u_j\alpha^j(a)=\circ$. چون A، αـ سازگار است لذا برای هر $m\leq j\leq k$، $u_ja=\circ$. بنابراین $\{u_j\}_{j=m}^k\subseteq Z(A)$. با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که $\{v_i\}_{i=n}^l\subseteq Z(A)$. در نتیجه $\{u_m,\dots,u_k,v_n,\dots,v_l\}\subseteq Z(A)$ و چون $Z(A)$ یک ایده‌آل از A است، لذا $\langle u_m,\dots,u_k,v_n,\dots,v_l\rangle\subseteq Z(A)$. از آن‌جایی‌که A دارای خاصیت (A) راست است، لذا $\circ\neq t\in A$ موجود است به‌طوری‌که $\langle u_m,\dots,u_k,v_n,\dots,v_l\rangle t=\circ$. چون R برگشت‌پذیر و αـ سازگار است، در نتیجه $\langle f(x),g(x)\rangle t=\circ$، و لذا $f(x)+g(x)\in Z(A_l[x,x^{-1};\alpha])$.

حال فرض کنید $f(x)\in Z_l(A[x,x^{-1};\alpha])$ و $g(x)\in A[x,x^{-1};\alpha]$. از آن‌جایی‌که A یک حلقه $\alpha-SMLP$ است، بنابراین $\circ\neq a\in A$ موجود است به‌طوری‌که $af(x)=\circ$. چون A برگشت‌پذیر است با استفاده از لم ۲۳.۱.۱ داریم: $f(x)g(x)a=\circ=g(x)f(x)a$ و لذا $Z_l(A[x,x^{-1};\alpha])$ یک ایده‌آل از $A[x,x^{-1};\alpha]$ است.

بالعکس، چون $Z_l(A)\subseteq Z_l(A[x,x^{-1};\alpha])$، لذا $Z_l(A)$ یک ایده‌آل از A است، و درنتیجه $Z_l(A)[x,x^{-1};\alpha]\subseteq Z_l(A[x,x^{-1};\alpha])$. از آن‌جایی‌که A یک حلقه $\alpha-SLMP$ است، بنابراین $Z_l(A[x,x^{-1};\alpha])\subseteq Z_l(A)[x,x^{-1};\alpha]$. لذا $Z_l(A)[x,x^{-1};\alpha]=Z_l(A[x,x^{-1};\alpha])$.

حال فرض کنید $\langle u_\circ,\dots,u_k\rangle\subseteq Z_l(A)$. در نتیجه $f(x)=\sum_{i=\circ}^k u_ix^i$ یک مقسوم‌علیه صفر چپ از $A[x,x^{-1};\alpha]$ است. چون A حلقه $\alpha-SLMP$ است، لذا $\circ\neq a\in A$ موجود است

به‌طوری‌که $f(x)a = u_0a + u_1\alpha(a)x + \cdots + u_k\alpha^k(a)x^k = 0$. بنابراین، برای هر $0 \leq i \leq k$، $u_i\alpha^i(a) = 0$ و لذا با استفاده از لم ۲۳.۱.۱ نتیجه می‌گیریم $u_ia = 0$. پس $\langle u_0, \ldots, u_k\rangle a = 0$، که نتیجه می‌دهد A دارای خاصیت (A) راست است. بنابراین نتیجه حاصل است.

(۳) ⇔ (۱) با استدلالی مشابه برهان (۲) ⇔ (۱)، می‌توانیم آن‌را ثابت کنیم. □

به‌عنوان نتیجه‌ای از گزاره ۱۱.۲.۲ داریم:

نتیجه ۱۲.۲.۲. فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و αـ سازگار باشد. دراین‌صورت $Z(R[x, x^{-1}; \alpha])$ یک ایده‌آل است اگر و تنها اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل و R دارای خاصیت (A) راست باشد.

لم ۱۳.۲.۲. فرض کنید α یک خودریختی سازگار از حلقه R باشد. دراین‌صورت داریم:

(۱) اگر $f(x) = \sum_m^n a_ix^i \in R[x, x^{-1}; \alpha]$ و $r \in R$، آن‌گاه $f(x)r = 0$ اگر و تنها اگر برای هر $m \leq i \leq n$، $a_ir = 0$؛

(۲) اگر $f(x) \in R[x, x^{-1}; \alpha]$ و $r \in R$، آن‌گاه $rf(x) = 0$ اگر و تنها اگر $rxf(x) = 0$.

برهان. با استدلالی مشابه برهان [۴۱، لم ۳.۲] می‌توان آن‌را ثابت کرد. □

فرض کنید α یک خودریختی از R باشد. برای هر $f(x) = \sum_{i=t}^k a_ix^i \in R[x, x^{-1}; \alpha]$، تعداد ضرایب ناصفر $f(x)$ را با نماد $length(f(x))$ نشان می‌دهیم.

لم ۱۴.۲.۲. [۳۸، لم ۲.۲] فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر یا دوئو راست و F زیرمجموعه‌ای ناصفر، غیرتهی و متناهی از R باشد. اگر برای هر عنصر $a \in R$ و $k \in \mathbb{N}$، $a^kF = 0$، آن‌گاه $b \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $aFb = 0$ و $Fb \neq 0$.

قضیه ۱۵.۲.۲. فرض کنید R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر یا دوئو راست و α یک خودریختی سازگار از R باشد. همچنین فرض کنید $f(x) = \sum_{i=t}^k a_ix^i$ و $g(x) = \sum_{j=s}^l b_jx^j$ عناصر ناصفر در $R[x, x^{-1}; \alpha]$ باشند به‌طوری‌که $f(x)g(x) = 0$. دراین‌صورت عنصر ناصفر $r \in R$ موجود است که $g(x)r \neq 0$، اما برای هر $t \leq i \leq k$ و $s \leq j \leq l$، $a_ib_jr = 0$.

برهان. فرض کنید $f(x) = \sum_{i=t}^k a_ix^i$ و $g(x) = \sum_{j=s}^l b_jx^j$ دو عنصر ناصفر در حلقه $R[x, x^{-1}; \alpha]$ باشند به‌طوری‌که $f(x)g(x) = 0$. همچنین فرض کنید که $length(f(x)) = m$ و $length(g(x)) = n$. با استفاده از استقرا روی $length(f(x))+length(g(x))$ به اثبات می‌پردازیم. اگر $m = 1$ یا $n = 1$، آن‌گاه با استفاده از لم ۲۳.۱.۱، با قرار دادن $r = 1$ نتیجه حاصل می‌شود. فرض کنید که $m \neq 1$ و $n \neq 1$. از آن‌جایی‌که $f(x)g(x) = 0$، بنابراین $a_k\alpha^k(b_l) = 0$، و با استفاده از سازگاری R، برای همه $j \in \mathbb{Z}$ داریم: $a_k\alpha^j(b_l) = 0$. چون هر حلقه‌ی برگشت‌پذیر و دوئو راست یک حلقه‌ی نیم‌جابه‌جایی است، لذا $a_kf(x)g(x) = a_kf(x)g_1(x) = 0$، که $g_1(x) = b_sx^s + \cdots + b_{l-1}x^{l-1}$. با استدلالی مشابه آنچه که گفته شد می‌توان نشان داد

که $a_k^n b_s = \cdots = a_k^{۳} b_{l-۲} = a_k^{۲} b_{l-۱}$ و در نتیجه $a_k^n g(x) = ۰$. حال فرض کنید p کوچکترین عدد صحیح مثبت نسبت به خاصیت $a_k^p g(x) = ۰$ باشد. اگر $p = ۱$، آن‌گاه $a_k g(x) = ۰$، و با استفاده از لم‌های ۲۳.۱.۱ و ۱۳.۲.۲، نتیجه می‌گیریم $a_k x^k g(x) = ۰$. بنابراین $f(x)g(x) = f_۱(x)g(x) = ۰$، که در آن $f_۱(x) = a_t x^t + \cdots + a_{k-۱} x^{k-۱}$. لذا، $r_۱ \in R$ موجود است به‌طوری‌که $g(x) r_۱ \neq ۰$، اما چون $length(f_۱(x)) \leq m-۱$، لذا برای هر $t \leq i \leq k-۱$ و $s \leq j \leq l$، $a_i b_j r_۱ = ۰$. از سوی دیگر، از این‌که $a_k g(x) = ۰$ نتیجه می‌گیریم برای هر $s \leq j \leq l$، $a_k b_j r_۱ = ۰$، لذا برای $p = ۱$ نتیجه حاصل است. حال فرض کنید $p \geq ۲$. با به‌کاربردن لم ۱۴.۲.۲ برای مجموعه $F = \{b_s, \ldots, b_l\}$، نتیجه می‌گیریم $b \in R$ موجود است به‌طوری‌که $a_k F b = ۰$ و $Fb \neq ۰$، زیرا $a_k^p F = ۰$. بنابراین با استفاده از لم‌های ۲۳.۱.۱ و ۱۳.۲.۲ داریم: $a_k x^k g(x) b \neq ۰$ و $g(x) b \neq ۰$. لذا $f(x)g(x)b = f_۱(x)g(x)b = ۰$. درنتیجه عنصر $c \in R$ موجود است به‌طوری‌که $g(x)bc \neq ۰$، اما چون $length(f_۱(x)) \leq m-۱$، لذا برای هر $t \leq i \leq k-۱$ و $s \leq j \leq l$، $a_i b_j bc = ۰$. از سوی دیگر، از اینکه $a_k g(x) b = ۰$، نتیجه می‌گیریم برای همه $s \leq j \leq l$، $a_k b_j bc = ۰$. بنابراین $g(x)bc \neq ۰$، اما برای هر $t \leq i \leq k$ و $s \leq j \leq l$، $a_i b_j bc = ۰$، با قرار دادن $r = bc$ نتیجه حاصل است. □

لم ۱۶.۲.۲. فرض کنید α یک خودریختی سازگار از حلقه‌ی متقارن R باشد و $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_k a^k, g(x) = b_n x^n + \cdots + b_l x^l \in R[x, x^{-۱}; \alpha]$. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) $l_{R[x,x^{-۱};\alpha]}(f(x)) \cap l_{R[x,x^{-۱};\alpha]}(g(x)) \neq \{۰\}$؛

(۲) $r_{R[x,x^{-۱};\alpha]}(f(x)) \cap r_{R[x,x^{-۱};\alpha]}(g(x)) \neq \{۰\}$؛

(۳) $r_{R[x,x^{-۱};\alpha]}(f(x)) \cap l_{R[x,x^{-۱};\alpha]}(g(x)) \neq \{۰\}$؛

(۴) $l_{R[x,x^{-۱};\alpha]}(f(x)) \cap r_{R[x,x^{-۱};\alpha]}(g(x)) \neq \{۰\}$.

برهان. با تغییری جزئی در برهان [۳۸، لم ۳.۲] به‌راحتی اثبات می‌شود. □

لم ۱۷.۲.۲. فرض کنید α یک خودریختی سازگار از حلقه‌ی متقارن R باشد. اگر $f(x) \in Z(R[x, x^{-۱}; \alpha])$ و $g(x) \in Nil(R[x, x^{-۱}; \alpha])$، آن‌گاه $r_{R[x,x^{-۱};\alpha]}(f(x)) \cap l_{R[x,x^{-۱};\alpha]}(g(x)) \neq \{۰\}$ و $f(x) + g(x) \in Z(R[x, x^{-۱}; \alpha])$.

برهان. با استدلالی مشابه برهان [۳۸، لم ۴.۲] به‌راحتی اثبات می‌شود. □

قضیه ۱۸.۲.۲. فرض کنید R حلقه‌ای غیرکاهشی، متقارن و αـ سازگار باشد. اگر یک جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی $f(x), g(x) \in Z(R[x, x^{-۱}; \alpha])$ موجود باشد به‌طوری‌که $l_{R[x,x^{-۱};\alpha]}(f(x)) \cap l_{R[x,x^{-۱};\alpha]}(g(x)) = \{۰\}$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x, x^{-۱}; \alpha])) = ۳$.

برهان. چون $R[x,x^{-1};\alpha]\cong A[x,x^{-1};\alpha]$، که α یک خودریختی از A است، بنابراین کافیست قضیه را برای $A[x,x^{-1};\alpha]$ ثابت کنیم. اگر $\xi,\beta\in A[x,x^{-1};\alpha]$ را پیدا کنیم به‌طوری‌که ξ,β دارای پوچساز مشترک ناصفر نباشند و $\beta\xi\neq 0\neq\xi\beta$، آن‌گاه $d(\xi,\beta)=3$ و بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x,x^{-1};\alpha]))=3$. با استفاده از فرض، $f'(x),g'(x)\in Z(A[x,x^{-1};\alpha])$ متناظر با مقسوم‌علیه‌های صفر $f(x),g(x)\in Z(R[x,x^{-1};\alpha])$ وجود دارند به‌طوری‌که $l_{A[x,x^{-1};\alpha]}(f'(x))\cap l_{A[x,x^{-1};\alpha]}(g'(x))=\{0\}$. دراین‌صورت با استفاده از لم ۱۶.۲.۲، $f'(x)$ و $g'(x)$ دارای پوچساز مشترک نمی‌باشند، و همچنین $d(f'(x),g'(x))\neq 2$. با استفاده از لم‌های ۱۶.۲.۲ و ۱۷.۲.۲، هیچ یک از $f'(x)$ و $g'(x)$ پوچتوان نیستند. فرض کنید $f'(x)g'(x)=0$. ادعا می‌کنیم که $f'(x)^2$ و $g'(x)^2$ دارای پوچساز مشترک ناصفر نیستند. فرض کنید $0\neq h(x)\in l_{A[x,x^{-1};\alpha]}(f'(x)^2)\cap r_{A[x,x^{-1};\alpha]}(g'(x)^2)$. ازآن‌جایی‌که $f'(x)$ و $g'(x)$ دارای پوچساز مشترک ناصفر نمی‌باشند، داریم $h(x)f'(x)\neq 0$ یا $g'(x)h(x)\neq 0$. اگر $h(x)f'(x)\neq 0$، آن‌گاه $h(x)f'(x)\in l_{A[x,x^{-1};\alpha]}(f'(x))\cap r_{A[x,x^{-1};\alpha]}(g'(x))$، که یک تناقض است. همچنین، اگر $g'(x)h(x)\neq 0$، آن‌گاه $g'(x)h(x)\in l_{A[x,x^{-1};\alpha]}(f'(x))\cap r_{A[x,x^{-1};\alpha]}(g(x))$، که دوباره به تناقض می‌رسیم. بنابراین بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد یک عنصر پوچتوان $a\in A$ وجود دارد به‌طوری‌که $ag'(x)^2\neq 0$. در نتیجه با استفاده از لم ۱۳.۲.۲، $axg'(x)^2\neq 0$. از آن‌جایی‌که a پوچتوان و A برگشت‌پذیر و αـ سازگار است، بنابراین با استفاده از لم ۲۳.۱.۱، $ag'(x)^2$ و $axg'(x)^2$ پوچتوان هستند. لذا با استفاده از لم ۱۷.۲.۲، $f'(x)+ag'(x)\in Z(A[x,x^{-1};\alpha])$.
حال زوج $f'(x)+ag'(x)$ و $g'(x)$ را در نظر بگیرید. اگر $k(x)\in r_{A[x,x^{-1};\alpha]}(f'(x)+ag'(x))\cap r_{A[x,x^{-1};\alpha]}(g'(x))$، آن‌گاه $k(x)\in r_{A[x,x^{-1};\alpha]}(f'(x))\cap r_{A[x,x^{-1};\alpha]}(g'(x))=\{0\}$، در نتیجه $k(x)=0$. بنابراین $f'(x)+ag'(x)$ و $g'(x)$ دارای پوچساز مشترک ناصفر نمی‌باشند و $(f'(x)+ag'(x))g'(x)=ag'(x)^2\neq 0$. فرض کنید $f_1'(x)=g'(x)$ و $g_1'(x)=f'(x)+ag'(x)$. آن‌گاه $f_1'(x)$ و $g_1'(x)$ دارای پوچساز مشترک ناصفر نمی‌باشند و $g_1'(x)f_1'(x)\neq 0$.

بنابراین، بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد که $f'(x),g'(x)\in Z(A[x,x^{-1};\alpha])$ به‌طوری‌که $f'(x)$ و $g'(x)$ دارای پوچساز مشترک نیستند و $f'(x)g'(x)=0\neq g'(x)f'(x)$. لذا $a\in A$ موجود است به‌طوری‌که $axg'(x)^2\neq 0\neq ag'(x)^2$. حال، زوج‌های $(f'(x)+ag'(x),g'(x))$ و $(f'(x)+axg'(x),g'(x))$ را در نظر بگیرید. به‌وضوح، $f'(x)+ag'(x)$ و $g'(x)$ ($f'(x)+axg'(x)$ و $g'(x)$) دارای پوچساز مشترک ناصفر نمی‌باشند و $(f'(x)+ag'(x))g'(x)=ag'(x)^2\neq 0$ ($(f'(x)+axg'(x))g'(x)=axg'(x)^2\neq 0$). ادعا می‌کنیم که $g'(x)(f'(x)+ag'(x))\neq 0$ یا $g'(x)(f'(x)+axg'(x))\neq 0$. فرض کنید $g'(x)(f'(x)+axg'(x))=0=g'(x)(f'(x)+ag'(x))$. آن‌گاه $(g'(x)ag'(x)ax)\in l_{A[x,x^{-1};\alpha]}(g'(x))\cap r_{A[x,x^{-1};\alpha]}(f'(x))=\{0\}$. لذا $g'(x)a=g'(x)ax$، که یک تناقض است. بنابراین $g'(x)(f'(x)+ag'(x))\neq 0$ یا $g'(x)(f'(x)+axg'(x))\neq 0$. با در نظر گرفتن $\xi=f'(x)+ag'(x)$ و $\beta=g'(x)$، یا $\xi=f'(x)+axg'(x)$ و $\beta=g'(x)$، نتیجه حاصل

است. $\square$

لم ۱۹.۲.۲. فرض کنید R حلقه‌ای کاهشی و αــ سازگار با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد. در این‌صورت A نیز چنین است.

برهان. فرض کنید R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال P و Q باشد. با استفاده از گزاره ۴.۲.۲، A کاهشی است. قرار می‌دهیم $P' = \bigcup_{i\geq ۰} x^{-i}Px^{i}$ و $Q' = \bigcup_{j\geq ۰} x^{-j}Qx^{j}$. از آن‌جایی‌که R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال P و Q است، بنابراین $Z(R) = P\cup Q$. این نتیجه می‌دهد که برای هر $q\in Q^*$، $P = ann_R(q)$ و برای هر $p\in P^*$، $Q = ann_R(p)$. چون R حلقه‌ای αــ سازگار است، بنابراین $\alpha(P)\subseteq P$ و $\alpha(Q)\subseteq Q$. لذا P' و Q' ایده‌آل‌هایی از A هستند. حال، نشان می‌دهیم که P' و Q' ایده‌آل‌های اول مینیمال از A هستند. از آن‌جایی‌که برای هر $q\in Q$، $P = ann_R(q)$ و R، αــ سازگار است، بنابراین $P' = ann_A(q)$. فرض کنید که برای بعضی $u,v\in A$، $uv\in P'$ و همچنین فرض کنید $v\notin P'$. بنابراین $vq\neq ۰$ و $vq\in Q$، و لذا $ann_A(vq) = ann_A(q) = P'$، که نتیجه می‌دهد $uvq = ۰$. بنابراین $u\in P'$. درنتیجه، P' کاملاً اول است. با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که Q' کاملاً اول است. بنابراین P' و Q' اول هستند.

حال، فرض کنید که I یک ایده‌آل اول مینیمال از A باشد. از آن‌جایی‌که $P'Q' = ۰$، بنابراین $P'\subseteq I$ یا $Q'\subseteq I$. چون I اول مینیمال است، لذا $P' = I$ یا $Q' = I$، و نتیجه حاصل است. $\square$

گزاره ۲۰.۲.۲. فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و αــ سازگار باشد به‌طوری‌که $Z(R)\neq\{۰\}$. دراین‌صورت:

(۱) $\mathrm{daim}(\Gamma(R[x,x^{-۱};\alpha]))\geq ۱$؛

(۲) $\mathrm{daim}(\Gamma(R[x,x^{-۱};\alpha])) = ۱$ اگر و تنها اگر R حلقه‌ای غیرکاهشی باشد به‌طوری‌که $Z(R)^۲ = ۰$؛

(۳) $\mathrm{daim}(\Gamma(R[x,x^{-۱};\alpha])) = ۲$ اگر و تنها اگر (الف) R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد، یا (ب) R دارای خاصیت (A) راست و $Z(R)$ یک ایده‌آل از R باشد به‌طوری‌که $Z(R)^۲\neq ۰$؛

(۴) $\mathrm{daim}(\Gamma(R[x,x^{-۱};\alpha])) = ۳$ اگر و تنها اگر R غیرکاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد و یا R دارای خاصیت (A) راست نباشد یا $Z(R)$ یک ایده‌آل از R نباشد.

برهان. (۱) فرض کنید u یک مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی از A باشد. در نتیجه برای بعضی $۰\neq v\in A$، $uv = ۰$. لذا با استفاده از لم ۲۳.۱.۱، $ux\neq vx^۲$ و $(ux)(vx^۲) = ۰$. بنابراین $d(ux,vx^۲) = ۱$، که نتیجه می‌دهد $\mathrm{diam}(\Gamma(A[x,x^{-۱};\alpha]))\geq ۱$. چون $A[x,x^{-۱};\alpha]\cong R[x,x^{-۱};\alpha]$، در نتیجه $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x,x^{-۱};\alpha]))\geq ۱$.

(۲) ابتدا فرض کنید $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x,x^{-1};\alpha]))=1$. دراین‌صورت، با استفاده از یکریختی $R[x,x^{-1};\alpha]\cong A[x,x^{-1};\alpha]$، داریم: $\operatorname{diam}(\Gamma(A[x,x^{-1};\alpha]))=1$. حال، فرض کنید u یک مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی از A باشد. لذا با استفاده از لم ۱۳.۲.۲، ux و ux^2 مقسوم‌علیه‌های صفر غیربدیهی از $A[x,x^{-1};\alpha]$ هستند. از آن‌جایی‌که $\operatorname{diam}(\Gamma(A[x,x^{-1};\alpha]))=1$، لذا داریم $(ux)(ux^2)=0$، و درنتیجه $u\alpha(u)=0$. چون A، αــ سازگار است، بنابراین $u^2=0$. لذا A غیرکاهشی است. حال، فرض کنید $u,v\in Z(A)$. بنابراین ux و vx^2 مقسوم‌علیه‌های صفر متمایز از $A[x,x^{-1};\alpha]$ می‌باشند. چون $\operatorname{diam}(\Gamma(A[x,x^{-1};\alpha]))=1$، درنتیجه $(ux)(vx^2)=u\alpha(v)x^3=0$. از آن‌جایی‌که A، αــ سازگار است، لذا $uv=0$. بنابراین $Z(A)^2=0$. درنتیجه R غیرکاهشی است و $Z(R)^2=0$.

بالعکس، فرض کنید R حلقه‌ای غیرکاهشی باشد به‌طوری‌که $Z(R)^2=0$. در نتیجه A نیز چنین است. از آن‌جایی‌که α یک خودریختی سازگار از حلقه‌ی برگشت‌پذیر A است، بنابراین A حلقه $\alpha-SLMP$ است، و لذا $Z(A[x,x^{-1};\alpha])\subseteq Z(A)[x,x^{-1};\alpha]$. چون $Z(A)^2=0$، بنابراین $Z(A[x,x^{-1};\alpha])^2=0$. بنابراین، $\operatorname{diam}(\Gamma(A[x,x^{-1};\alpha]))=1$. از آن‌جایی‌که $A[x,x^{-1};\alpha]\cong R[x,x^{-1};\alpha]$، درنتیجه $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x,x^{-1};\alpha]))=1$.

(۳) ابتدا فرض کنید که R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد. با استفاده از گزاره‌های ۴.۲.۲ و ۱۹.۲.۲، A حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال P_1 و P_2 است. از آن‌جایی‌که A کاهشی و αــ سازگار است، بنابراین با استفاده از نتیجه ۹.۲.۲، $A[x,x^{-1};\alpha]$ کاهشی است. همچنین، چون α یک خودریختی از A است، لذا $P_1[x,x^{-1};\alpha]$ و $P_2[x,x^{-1};\alpha]$ دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال از $A[x,x^{-1};\alpha]$ می‌باشند. بنابراین با استفاده از [۳۸، قضیه ۵.۲(۳)] خواهیم داشت: $\operatorname{diam}(\Gamma(A[x,x^{-1};\alpha]))=2$.

حال، فرض کنید R دارای خاصیت (A) راست، و $Z(R)$ یک ایده‌آل باشد به‌طوری‌که $Z(R)^2\neq 0$. درنتیجه A دارای خاصیت (A) راست و $Z(A)$ یک ایده‌آل است به‌طوری‌که $Z(A)^2\neq 0$. بنابراین با استفاده از گزاره ۱۱.۲.۲، $Z(A[x,x^{-1};\alpha])$ یک ایده‌آل است، و لذا هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز از $A[x,x^{-1};\alpha]$ دارای پوچساز مشترک ناصفر هستند. درنتیجه، $\operatorname{diam}(\Gamma(A[x,x^{-1};\alpha]))\leq 2$. از آن‌جایی‌که $Z(A)^2\neq 0$، با استفاده از (۲)، $\operatorname{diam}(\Gamma(A[x,x^{-1};\alpha]))\geq 2$. بنابراین $\operatorname{diam}(\Gamma(A[x,x^{-1};\alpha]))=2$.

بالعکس، فرض کنید که $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x,x^{-1};\alpha]))=2$ و R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نباشد. بنابراین A نیز چنین است. به‌وضوح $Z(A[x,x^{-1};\alpha])^2\neq 0$، و چون A حلقه‌ی $\alpha-SLMP$ است، داریم $Z(A)^2\neq 0$، در نتیجه $Z(R)^2\neq 0$ لذا دو حالت ذیل را داریم:

حالت (الف) اگر R حلقه‌ای کاهشی با بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال باشد، آن‌گاه $R[x,x^{-1};\alpha]$ کاهشی با بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال است، و از آن‌جایی‌که $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x,x^{-1};\alpha]))=2$، بنابراین هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز از $R[x,x^{-1};\alpha]$ دارای پوچساز مشترک می‌باشند. در نتیجه $Z(R[x,x^{-1};\alpha])$ یک ایده‌آل است و لذا با استفاده از گزاره ۱۱.۲.۲، R

دارای خاصیت (A) راست و $Z(R)$ ایده‌آل است.

حالت (ب) اگر R غیرکاهشی باشد، آن‌گاه با استفاده از قضیه ۱۸.۲.۲، $Z(R[x,x^{-1};\alpha])$ یک ایده‌آل است و بنابراین با استفاده از گزاره ۱۱.۲.۲، R دارای خاصیت (A) راست و $Z(R)$ ایده‌آل است.

(۴) ابتدا فرض کنید که $\mathrm{diam}(\Gamma(A[x,x^{-1};\alpha])) = ۳$. اگر $Z(R)^۲ = ۰$، آن‌گاه R غیرکاهشی است و لذا با استفاده از (۲)، $\mathrm{diam}(\Gamma(A[x,x^{-1};\alpha])) = ۱$، که یک تناقض است. بنابراین فرض کنید $Z(R)^۲ \neq ۰$، لذا با استفاده از (۳)، R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نمی‌باشد و R دارای خاصیت (A) راست نیست یا $Z(R)$ ایده‌آل نیست.

قسمت عکس با استفاده از (۲) و (۳) به آسانی نتیجه می‌شود. □

گزاره ۲۱.۲.۲. فرض کنید R حلقه‌ای غیرکاهشی متقارن و αــ سازگار باشد. اگر یک جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی $f(x), g(x) \in Z(R[x,x^{-1};\alpha])$ موجود باشد به‌طوری‌که $l_{R[x,x^{-1};\alpha]}(f(x)) \cap l_{R[x,x^{-1};\alpha]}(g(x)) = \{۰\}$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-1};\alpha])) = ۳$.

برهان. با استفاده از قضیه ۱۸.۲.۲، $\xi,\beta \in Z(R[x,x^{-1};\alpha])^*$ موجود است به‌طوری‌که $\xi\beta \neq ۰$ و $\{\xi,\beta\}$ دارای پوچساز ناصفر نمی‌باشد. بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-1};\alpha])) = ۳$. □

در ذیل یک رده‌بندی از قطر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب لوران $R[x,x^{-1};\alpha]$، که R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر و αــ سازگار است، ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲۲.۲.۲. فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و αــ سازگار باشد. دراین‌صورت:

(۱) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-1};\alpha])) = ۰$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۰$؛

(۲) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-1};\alpha])) = ۱$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$؛

(۳) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-1};\alpha])) = ۲$ اگر و تنها اگر (الف) R دارای خاصیت (A) راست و $Z(R)$ ایده‌آل باشد به‌طوری‌که $Z(R)^۲ \neq ۰$، و برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$ یا (ب) برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$ و $b,c \in Z(R)^*$ موجود باشد به‌طوری‌که $bc \neq ۰$ و $[b]_R \neq [c]_R$؛

(۴) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-1};\alpha])) = ۳$ اگر و تنها اگر R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نباشد و R دارای خاصیت (A) راست نباشد یا $Z(R)$ ایده‌آلی از R نباشد.

برهان. (۱) ابتدا فرض کنید $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-1};\alpha])) = ۰$. چون $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-1};\alpha]))$، لذا $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۰$. بالعکس، فرض کنید $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۰$. دراین‌صورت، $|\Gamma_E(R)| = ۱$ و لذا $|\Gamma_E(A)| = ۱$. فرض کنید که $\Gamma_E(A) = \{[u]_A\}$. عنصر $f(x) \in Z(A[x,x^{-1};\alpha])^*$ را در نظر بگیرید. از آن‌جایی‌که α یک خودریختی سازگار از حلقه برگشت‌پذیر A است، بنابراین با استفاده

از [۶]، قضیه [۸.۲]، A یک حلقه $\alpha - SLMP$ است، و لذا $A \ni a \neq ۰$ موجود است به‌طوری‌که $f(x)a = ۰$. چون A برگشت‌پذیر و αـ سازگار است، لذا $C_f \subseteq Z(A)$. بنابراین برای هر $u_i \in C_f^*$، $[u]_A = [u_i]_A$. درنتیجه $[u]_{A[x,x^{-۱};\alpha]} = [f]_{A[x,x^{-۱};\alpha]}$. پس $\mathrm{diam}(\Gamma_E(A[x,x^{-۱};\alpha])) = ۰$ و چون $A[x,x^{-۱};\alpha] \cong R[x,x^{-۱};\alpha]$، بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-۱};\alpha])) = ۰$.

(۲) ابتدا فرض کنید $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-۱};\alpha])) = ۱$. چون $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-۱};\alpha]))$، لذا $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$.

بالعکس، فرض کنید $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$. دراین‌صورت با استفاده از قضیه ۲.۲.۲، (الف) R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال است یا (ب) $|\Gamma_E(R)| = ۲$ و برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$.

اگر R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد، آن‌گاه با استفاده از لم ۴.۲.۲، A کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال می‌باشد. فرض کنید P و Q دو ایده‌آل اول مینیمال از A باشند. با توجه به برهان قضیه ۲۰.۲.۲، $A[x,x^{-۱};\alpha]$ کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال $P[x,x^{-۱};\alpha]$ و $Q[x,x^{-۱};\alpha]$ می‌باشد. چون R برگشت‌پذیر و αـ سازگار می‌شد لذا A نیز چنین است. لذا $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-۱};\alpha])) = ۱$. حال فرض کنید که $|\Gamma_E(R)| = ۲$ و برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$. همچنین فرض کنید $\Gamma_E(R) = \{[a]_R, [b]_R\}$. بنابراین $|\Gamma_E(A)| = ۲$ و $Z(A) = ann_A(u)$، برای بعضی $i \geq ۰$، $u = x^{-i}ax^i$ و لذا $\Gamma_E(A) = \{[u]_A, [v]_A\}$. عنصر $f(x) \in Z(A[x,x^{-۱};\alpha])^*$ را در نظر بگیرید. از آن‌جایی‌که A، حلقه‌ای $\alpha - SMLP$ است، لذا $A \ni c \neq ۰$ موجود است به‌طوری‌که $f(x)c = ۰$. چون A برگشت‌پذیر و αـ سازگار است، بنابراین، $C_f^* \subseteq Z(A)^*$. ادعا می‌کنیم $\Gamma_E(A[x,x^{-۱};\alpha]) = \{[u]_{A[x,x^{-۱};\alpha]}, [v]_{A[x,x^{-۱};\alpha]}\}$. سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

(الف) اگر برای هر $u_i \in C_f^*$، $[u]_A = [u_i]_A$، آن‌گاه $ann_A(u) = ann_A(u_i)$. بنابراین $ann_{A[x,x^{-۱};\alpha]}(f) = ann_{A[x,x^{-۱};\alpha]}(u)$ و لذا $[u]_{A[x,x^{-۱};\alpha]} = [f]_{A[x,x^{-۱};\alpha]}$.

(ب) اگر برای هر $u_i \in C_f^*$، $[v]_A = [u_i]_A$، آن‌گاه $ann_A(v) = ann_A(u_i)$. بنابراین $ann_{A[x,x^{-۱};\alpha]}(f) = ann_{A[x,x^{-۱};\alpha]}(v)$ و لذا $[v]_{A[x,x^{-۱};\alpha]} = [f]_{A[x,x^{-۱};\alpha]}$.

(پ) اگر $f = f_۱ + f_۲$، که $f_۱ \neq ۰ \neq f_۲$ و برای هر $u_i \in C_{f_۱}^*$، $[u]_A = [u_i]_A$ و برای هر $v_j \in C_{f_۲}^*$، $[v]_A = [v_j]_A$، آن‌گاه چون $ann_A(v) \subseteq ann_A(u)$، به‌آسانی می‌توان نشان داد که $ann_{A[x,x^{-۱};\alpha]}(f) = ann_{A[x,x^{-۱};\alpha]}(v)$، و لذا $[f]_{A[x,x^{-۱};\alpha]} = [v]_{A[x,x^{-۱};\alpha]}$. بنابراین $\Gamma_E(A[x,x^{-۱};\alpha]) = \{[u]_{A[x,x^{-۱};\alpha]}, [v]_{A[x,x^{-۱};\alpha]}\}$، که نتیجه می‌دهد $\mathrm{diam}(\Gamma_E(A[x,x^{-۱};\alpha])) = ۱$. ازآن‌جایی‌که $A[x,x^{-۱};\alpha] \cong R[x,x^{-۱};\alpha]$، بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-۱};\alpha])) = ۱$.

(۳) ابتدا فرض کنید $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-۱};\alpha])) = ۲$. ازآن‌جایی‌که $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-۱};\alpha])) \leq \mathrm{diam}(\Gamma(R[x,x^{-۱};\alpha]))$، لذا $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x,x^{-۱};\alpha])) \in \{۲,۳\}$. با استفاده از گزاره‌های ۲۰.۲.۲ و ۲۱.۲.۲، $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x,x^{-۱};\alpha])) \neq ۳$. چون $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x,x^{-۱};\alpha])) = ۲$، بنابراین با استفاده از گزاره ۲۰.۲.۲، R دارای خاصیت (A) راست

و $Z(R)$ یک ایده‌آل از R می‌باشد به‌طوری‌که $Z(R)^2 \neq 0$. لذا، (الف) برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$ یا (ب) $a \in Z(R)^*$ موجود است به‌طوری‌که $Z(R) = ann_R(a)$. اگر برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$، آن‌گاه نتیجه حاصل است. فرض کنید برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $ann_R(a) = Z(R)$. از آن‌جایی‌که $2 = \mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-1};\alpha]))$ و $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-1};\alpha]))$، بنابراین با استفاده از قسمت‌های (۱) و (۲) و قضیه ۲.۲.۲(۳)، نتیجه می‌گیریم که $b, c \in Z(R)^*$ وجود دارند به‌طوری‌که $bc \neq 0$ و $[b]_R \neq [c]_R$.

بالعکس، فرض کنید R دارای خاصیت (A) راست و $Z(R)$ یک ایده‌آل باشد به‌طوری‌که $Z(R)^2 \neq 0$. ازآن‌جایی‌که R برگشت‌پذیر و αـ سازگار می‌باشد، لذا با استفاده از گزاره ۱۱.۲.۲، $Z(R[x,x^{-1};\alpha])$ یک ایده‌آل است، درنتیجه هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز از $R[x,x^{-1};\alpha]$ دارای پوچساز ناصفر مشترک می‌باشد. بنابراین، $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x,x^{-1};\alpha])) \geq 2$. لذا، $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x,x^{-1};\alpha])) = 2$. چون $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-1};\alpha])) \leq \mathrm{diam}(\Gamma(R[x,x^{-1};\alpha]))$، در نتیجه با استفاده از قسمت‌های (۱) و (۲)، $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x,x^{-1};\alpha])) = 2$. حال فرض کنید $ann_R(a) = Z(R)$ و $b, c \in Z(R)^*$ موجود باشند به‌طوری‌که $bc \neq 0$ و $[b]_R \neq [c]_R$. بنابراین $[b]_A \neq [c]_A$ و لذا $Z(A[x,x^{-1};\alpha]) = ann_{A[x,x^{-1};\alpha]}(a)$، همچنین $[b]_{A[x,x^{-1};\alpha]} \neq [c]_{A[x,x^{-1};\alpha]}$. بنابراین، $\mathrm{diam}(\Gamma(A[x,x^{-1};\alpha])) = 2$ که نتیجه می‌دهد $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x,x^{-1};\alpha])) = 2$، زیرا $A[x,x^{-1};\alpha] \cong R[x,x^{-1};\alpha]$.

(۴) ابتدا فرض کنید $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x,x^{-1};\alpha])) = 3$. اگر $Z(R)^2 = 0$، آن‌گاه R غیرکاهشی است، و با توجه به قسمت (۱) نتیجه می‌گیریم، $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x,x^{-1};\alpha])) = 0$، که یک تناقض می‌باشد. بنابراین فرض کنید $Z(R)^2 \neq 0$ باشد. لذا با توجه به قسمت (۱)، R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نیست، و با استفاده از قسمت (۳)، R دارای خاصیت (A) راست نیست یا $Z(R)$ ایده‌آلی از R نمی‌باشد.

عکس گزاره با توجه به قسمت‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌شود. □

۳.۲ بررسی قطر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب

در این بخش، یک رده‌بندی کامل از قطر گراف $\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])$ را که R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و (α,δ)ـ سازگار می‌باشد، ارائه می‌دهیم. از آن‌جایی‌که حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی حلقه‌ی برگشت‌پذیر، لزوماً برگشت‌پذیر نمی‌باشد [۵۳، مثال ۱.۲]، بنابراین نمی‌توانیم از رده‌بندی‌های ارائه شده در قضیه ۲.۲.۲ برای حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب استفاده کنیم.

لم زیر که در مرجع [۳۸، قضیه ۶.۲] اثبات شده، در نتایج اصلی ما مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

لم ۱.۳.۲. فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و (α,δ)ــ سازگار باشد. در این‌صورت $Z(R[x;\alpha,\delta])$ یک ایده‌آل است اگر وتنها اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل و R دارای خاصیت (A) باشد.

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنید R حلقه‌ای غیرکاهشی، متقارن و (α,δ)ــ سازگار باشد. اگر یک جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز $f(x),g(x)\in Z(R[x;\alpha,\delta])$ موجود باشد به‌طوری‌که $l_{R[x;\alpha,\delta]}(f(x))\cap l_{R[x;\alpha,\delta]}(g(x))=\{0\}$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta]))=3$.

برهان. با استفاده از [۳۸، قضیه ۲.۲]، عناصر ناصفر $\beta,\xi\in Z(R[x;\alpha,\delta])^*$ موجود است به‌طوری‌که $\beta\xi\neq 0\neq\xi\beta$ و β,ξ دارای پوچ‌ساز مشترک نباشند.در نتیجه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta]))=3$. □

یادآوری می‌کنیم که اگر R حلقه‌ای کاهشی باشد، آن‌گاه هر ایده‌آل اول مینیمال از R کاملاً اول است. هم‌چنین هر ایده‌آل اول مینیمال یک اجتماعی از پوچ‌سازهاست. بنابراین، اگر P یک ایده‌آل اول مینیمال از یک حلقه‌ی کاهشی (α,δ)ــ سازگار R باشد، آن‌گاه $\alpha(P)\subseteq P$، $\delta(P)\subseteq P$ و لذا $P[x;\alpha,\delta]$ یک ایده‌آل از $R[x;\alpha,\delta]$ است. به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که $P[x;\alpha,\delta]$ یک ایده‌آل اول مینیمال از $R[x;\alpha,\delta]$ است.

قضیه ۳.۳.۲. فرض کنید R یک حلقه برگشت‌پذیر و (α,δ)ــ سازگار باشد. در این‌صورت:

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta]))=0$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=0$؛

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta]))=1$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=1$؛

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta]))=2$ اگر و تنها اگر (الف) R دارای خاصیت (A) راست باشد، $Z(R)$ یک ایده‌آل باشد به‌طوری‌که $Z(R)^2\neq 0$، و برای هر $a\in Z(R)^*$، $Z(R)\neq ann_R(a)$، یا (ب) برای بعضی از $a\in Z(R)^*$، $Z(R)=ann_R(a)$ و عناصر $b,c\in Z(R)^*$ موجود باشد به‌طوری‌که $bc\neq 0$ و $[b]_R\neq[c]_R$؛

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta]))=3$ اگر و تنها اگر R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نباشد و یا R دارای خاصیت (A) راست نباشد یا $Z(R)$ یک ایده‌آل نباشد.

برهان. (۱) ابتدا فرض کنید $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta]))=0$. چون $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))\leq\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta]))$، بنابراین $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=0$.

حال، فرض کنید که $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=0$. بنابراین $|\Gamma_E(R)|=1$. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $V(\Gamma_E(R))=\{[a]\}$. فرض کنید $f\in Z(R[x;\alpha,\delta])^*$. چون R برگشت‌پذیر و (α,δ)ــ سازگار است، بنابراین با استفاده از [۳۸، نتیجه ۱.۲]، $r,s\in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $rf=0=fs$، و لذا $C_f\subseteq Z(R)$. بنابراین برای هر $a_i\in C_f^*$، $[a]_R=[a_i]_R$. چون R برگشت‌پذیر و (α,δ)ــ سازگار است، با استفاده از لم ۲۳.۱.۱، می‌توانیم به‌آسانی ثابت کنیم $[a]_{R[x;\alpha,\delta]}=[f]_{R[x;\alpha,\delta]}$. درنتیجه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta]))=0$.

(۲) ابتدا فرض کنید $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) = ۱$. بنابراین با استفاده از قسمت (۱)، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$. حال فرض کنید $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$. لذا با استفاده از قضیه ۲.۲.۲ (الف) R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال است، یا (ب) $|\Gamma_E(R)| = ۲$ و برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$.

ابتدا فرض کنید R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال P و Q باشد، در نتیجه $R[x;\alpha,\delta]$ حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال $P[x;\alpha,\delta]$ و $Q[x;\alpha,\delta]$ می‌باشد. حال فرض کنید $f,g \in Z(R[x;\alpha,\delta])$. اگر $f,g \in P[x;\alpha,\delta]$، چون برای هر $h \in Q[x;\alpha,\delta]$، $fh = ۰ = gh$، لذا $[f]_{R[x;\alpha,\delta]} = [g]_{R[x;\alpha,\delta]}$. به‌طور مشابه، اگر $f,g \in Q[x;\alpha,\delta]$، آن‌گاه $[f]_{R[x;\alpha,\delta]} = [g]_{R[x;\alpha,\delta]}$. هم‌چنین، اگر $f \in P[x;\alpha,\delta]$ و $g \in Q[x;\alpha,\delta]$، آن‌گاه $fg = ۰$. بنابراین $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) = ۱$.

حال، فرض کنید که $|\Gamma_E(R)| = ۲$ و برای بعضی $a \in Z(R)$، $Z(R) = ann_R(a)$. هم‌چنین فرض کنید $V(\Gamma_E(R)) = \{[a]_R, [b]_R\}$. عنصر $f \in Z([x;\alpha,\delta])^*$ را در نظر بگیرید. چون R برگشت‌پذیر و (α,δ) ـ سازگار است، بنابراین با استفاده از [۳۸، قضیه ۱.۲]، $۰ \neq r,s \in R$ موجود است به‌طوری‌که $rf = ۰ = fs$، و لذا $C_f^* \subseteq Z(R)^*$. ادعا می‌کنیم $V(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) = \{[a]_{R[x;\alpha,\delta]}, [b]_{R[x;\alpha,\delta]}\}$. سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر برای هر $a_i \in C_f^*$، $[a_i]_R = [a]_R$، آن‌گاه $ann_R(a_i) = ann_R(a)$. بنابراین $ann_{R[x;\alpha,\delta]}(f) = ann_{R[x;\alpha,\delta]}(a)$ و لذا $[a]_{R[x;\alpha,\delta]} = [f]_{R[x;\alpha,\delta]}$.

حالت دوم: اگر برای هر $a_i \in C_f^*$، $[a_i]_R = [b]_R$، آن‌گاه $ann_R(a_i) = ann_R(b)$. بنابراین $ann_{R[x;\alpha,\delta]}(f) = ann_{R[x;\alpha,\delta]}(b)$ و لذا $[b]_{R[x;\alpha,\delta]} = [f]_{R[x;\alpha,\delta]}$.

حالت سوم: اگر $f = f_۱ + f_۲$، که در آن $f_۱ \neq ۰ \neq f_۲$ و برای هر $a_i \in C_{f_۱}^*$، $[a_i]_R = [a]_R$ و برای هر $b_j \in C_{f_۲}^*$، $[b_j]_R = [b]_R$، از آن‌جایی‌که $ann_R(b) \subseteq ann_R(a)$، به‌آسانی می‌توان نشان داد که $ann_{R[x;\alpha,\delta]}(b) = ann_{R[x;\alpha,\delta]}(f)$، و لذا $[f]_{R[x;\alpha,\delta]} = [b]_{R[x;\alpha,\delta]}$. بنابراین $V(\Gamma_(R[x;\alpha,\delta])) = \{[a]_{R[x;\alpha,\delta]}, [b]_{R[x;\alpha,\delta]}\}$، که نتیجه می‌دهد $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) = ۱$.

(۳) ابتدا فرض کنید $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) = ۲$. دراین‌صورت چون $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) \leq \operatorname{diam}(\Gamma(R[x;\alpha,\delta]))$، پس $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x;\alpha,\delta])) \in \{۲,۳\}$.

حالت اول: فرض کنید که $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x;\alpha,\delta])) = ۲$. آن‌گاه با استفاده از [۳۸، قضیه ۷.۲]، R دارای خاصیت (A) راست و $Z(R)$ یک ایده‌آل می‌باشد به‌طوری‌که $Z(R)^۲ \neq ۰$. بنابراین (الف) برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$ یا (ب) برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$.

(الف) اگر برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$، آن‌گاه نتیجه حاصل است.

(ب) فرض کنید که برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$. چون $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) = ۲$، با استفاده از قسمت‌های (۱) و (۲)، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۲$. بنابراین با استفاده از قضیه ۲.۲.۲(۳)، $b,c \in Z(R)^*$ موجود است به‌طوری‌که $bc \neq ۰$ و $[b]_R \neq [c]_R$.

حالت دوم: فرض کنید که $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x;\alpha,\delta])) = ۳$. در نتیجه با استفاده از

[۳۸، قضیه ۷.۲]، R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نیست و R دارای خاصیت (A) راست نیست یا $Z(R)$ یک ایده‌آل نیست. با استفاده از قضیه ۲.۳.۲، $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) =$ ۳، که یک تناقض است.

بالعکس، فرض کنید که R دارای خاصیت (A) راست و $Z(R)$ یک ایده‌آل باشد به‌طوری‌که $Z(R)^۲ \neq ۰$. در نتیجه با استفاده از لم ۱.۳.۲، $Z(R[x;\alpha,\delta])$ یک ایده‌آل است، و لذا هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز از $R[x;\alpha,\delta]$ دارای پوچ‌ساز ناصفر می‌باشند. بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x;\alpha,\delta])) \leq ۲$. از آن‌جایی‌که $Z(R)^۲ \neq ۰$، لذا $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x;\alpha,\delta])) \geq ۲$. بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x;\alpha,\delta])) = ۲$. چون $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) \leq \mathrm{diam}(\Gamma(R[x;\alpha,\delta]))$، درنتیجه با استفاده از قسمت‌های (۱) و(۲) داریم $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) = ۲$.

حال، فرض کنید $Z(R) = ann_R(a)$ و $b,c \in Z(R)^*$ موجود باشند به‌طوری‌که $bc \neq ۰$ و $[b]_R \neq [c]_R$. بنابراین $Z(R[x;\alpha,\delta]) = ann_{R[x;\alpha,\delta]}(a)$ و همچنین $[b]_{R[x;\alpha,\delta]} \neq [c]_{R[x;\alpha,\delta]}$. در نتیجه $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) = ۲$.

(۴) ابتدا فرض کنید $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) = ۳$. ادعا می‌کنیم $Z(R)^۲ \neq ۰$. برای این منظور، فرض کنید $Z(R)^۲ = ۰$. آن‌گاه R غیرکاهشی است. بنابراین با استفاده از قسمت (۱)، $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) = ۰$، که یک تناقض است. لذا $Z(R)^۲ \neq ۰$. با استفاده از قسمت (۲)، R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نیست و با استفاده از قسمت (۳)، R دارای خاصیت (A) راست نیست یا $Z(R)$ ایده‌آل نیست.

عکس گزاره از قسمت‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌شود. □

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و (α,δ)ـ سازگار باشد. تمام حالت‌های ممکن برای توصیف $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R))$ و $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta]))$ به‌صورت زیر است:

(۱) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۰$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) = ۰$؛

(۲) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) = ۱$؛

(۳) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = \mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) = ۲$ اگر و تنها اگر (الف) R دارای خاصیت (A) راست، $Z(R)$ یک ایده‌آل باشد و برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$ یا (ب) برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$ و دو عنصر $b,c \in Z(R)^*$ موجود باشد به‌طوری‌که $bc \neq ۰$ و $[b]_R \neq [c]_R$؛

(۴) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۲$ و $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha,\delta])) = ۳$ اگر و تنها اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل باشد و هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز دارای پوچ‌ساز ناصفر باشد، و R دارای خاصیت (A) راست نباشد؛

(۵) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = \mathrm{diam}(\Gamma_E([x;\alpha,\delta])) = ۳$ اگر و تنها اگر R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نباشد و $Z(R)$ یک ایده‌آل نباشد.

برهان. برهان از قضایای ۲.۲.۲ و ۳.۳.۲ نتیجه می‌شود. □

اگر $\alpha = Id_R$ و $\delta = 0$ قرار دهیم (که Id_R معرف تابع همانی روی حلقه‌ی R است)، آن‌گاه نتایج زیر را داریم.

نتیجه ۵.۳.۲. فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد. در این‌صورت:

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 0$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 0$؛

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 1$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 1$؛

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 2$ اگر و تنها اگر (الف) R دارای خاصیت (A) راست، $Z(R)$ یک ایده‌آل باشد به‌طوری‌که $Z(R)^2 \neq 0$، و برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$ یا (ب) برای بعضی از $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$ و دو عنصر $b, c \in Z(R)^*$ موجود باشد به‌طوری‌که $bc \neq 0$ و $[b]_R \neq [c]_R$؛

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 3$ اگر و تنها اگر R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نباشد و یا R دارای خاصیت (A) راست نباشد یا $Z(R)$ یک ایده‌آل نباشد.

نتیجه ۶.۳.۲. فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد. تمام حالت‌های ممکن برای توصیف $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))$ و $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x]))$ به‌صورت زیر است:

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 2$ اگر و تنها اگر (الف) R دارای خاصیت (A) راست، $Z(R)$ یک ایده‌آل باشد و برای هر $a \in Z(R)^*$، $Z(R) \neq ann_R(a)$ یا (ب) برای بعضی $a \in Z(R)^*$، $Z(R) = ann_R(a)$ و دو عنصر $b, c \in Z(R)^*$ موجود باشد به‌طوری‌که $bc \neq 0$ و $[b]_R \neq [c]_R$؛

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 2$ و $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 3$ اگر و تنها اگر $Z(R)$ یک ایده‌آل باشد و هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی متمایز دارای پوچ‌ساز ناصفر باشد، و R دارای خاصیت (A) راست نباشد؛

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = \operatorname{diam}(\Gamma_E([x])) = 3$ اگر و تنها اگر R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نباشد و $Z(R)$ یک ایده‌آل نباشد.

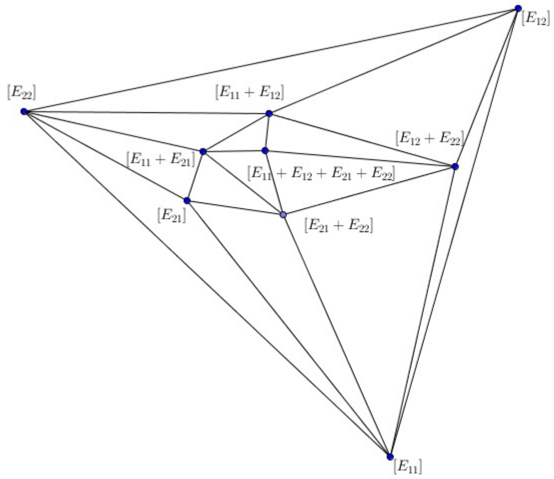
مثال زیر نشان می‌دهد که در غیاب شرط δــ سازگاری، قضایای ۳.۳.۲ و ۴.۳.۲ لزوماً برقرار نمی‌باشند.

مثال ۷.۳.۲. فرض کنید $R = \mathbb{Z}_2[t]/(t^2)$ و δ تابع مشتق روی R باشد به‌طوری‌که $\delta(\bar{t}) = 1$ و $\mathbb{Z}_2[t]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی میدان دو عضوی $\mathbb{Z}_2$ می‌باشد. چون $\bar{t}^2 = 0$ اما $\bar{t}\delta(\bar{t}) \neq 0$، بنابراین R، δــسازگار نیست. مشاهده می‌شود که $Z(R) = \{0, \bar{t}\}$، بنابراین $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 0$. حال حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق $R[x;\delta]$ را در نظر بگیرید. در

مرجع [۴۱، مثال ۱۰.۲]، نشان داده شده که $R[x;\delta] \cong M_{۲}(\mathbb{Z}_{۲})[y]$. قرار دهید $R' = M_{۲}(\mathbb{Z}_{۲})$. به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که

$$\begin{aligned} V\big(\Gamma_E(R')\big) &= \{[E_{۱۱}]_{R'}, [E_{۱۲}]_{R'}, [E_{۲۱}]_{R'}, [E_{۲۲}]_{R'}, [E_{۱۱}+E_{۱۲}+E_{۲۱}+E_{۲۲}]_{R'}, \\ & \quad [E_{۱۱}+E_{۱۲}]_{R'}, [E_{۱۱}+E_{۲۱}]_{R'}, [E_{۲۱}+E_{۲۲}]_{R'}, [E_{۱۲}+E_{۲۲}]_{R'}\} \end{aligned}$$

که در آن E_{ij}ها نمایشگر ماتریس‌های یکه هستند. همچنین دیده می‌شود ضرب هر جفت مقسوم‌علیه صفر متمایز برابر صفر است یا دارای پوچساز ناصفر مشترک می‌باشند. درنتیجه $\operatorname{diam}\big(\Gamma_E(R')\big) = ۲$ (شکل ۱.۲ را ببینید). بنابراین $\operatorname{diam}\big(\Gamma_E(R'[y])\big) \geq ۲$، و لذا



شکل ۱.۲

$\operatorname{diam}\big(\Gamma_E(R[x;\alpha])\big) \geq ۲$. بنابراین فرض ”$R$، δــ سازگار باشد“ در قضیه ۳.۳.۲ اساسی است.

مثال بعدی نشان می‌دهد شرط برگشت‌پذیری حلقه R، در قضایای ۳.۳.۲ و ۴.۳.۲ ضروری است.

مثال ۸.۳.۲. فرض کنید که $R = M_{۲}(\mathbb{Z}_{۲})$، $\alpha = Id_R$ و $\delta = ۰$. به‌وضوح R برگشت‌پذیر نیست. در مثال ۷.۳.۲، نشان دادیم که $\operatorname{diam}\big(\Gamma_E(R)\big) = ۲$. از آن‌جایی‌که $\operatorname{diam}\big(\Gamma_E(R)\big) \leq \operatorname{diam}\big(\Gamma_E(R[x])\big)$، بنابراین $\operatorname{diam}\big(\Gamma_E(R[x])\big) \in \{۲,۳\}$. ادعا می‌کنیم که $\operatorname{diam}\big(\Gamma_E(R[x])\big) = ۳$. برای این منظور کافی‌است نشان دهیم دو عنصر $f,g \in Z\big(R[x]\big)$ وجود دارند به‌طوری‌که $fg \neq ۰ \neq gf$ و f,g دارای پوچساز ناصفر مشترک نمی‌باشند. عناصر $f(x) = A_{۰} + A_{۱}x,\ g(x) = B_{۰} + B_{۱}x \in Z\big(R[x]\big)$ را که $A_{۰} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$، $A_{۱} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$، $B_{۰} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ و $B_{۱} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ در نظر بگیرید. به‌وضوح، $fg \neq ۰ \neq gf$.

ابتدا فرض کنید که $h(x) = C$ پوچساز مشترک ناصفر $f(x)$ و $g(x)$ باشد. اگر $h(x)f(x) = ۰ = h(x)g(x)$، آن‌گاه $C \in l(A_{۰}) \cap l(A_{۱}) \cap l(B_{۰}) \cap l(B_{۱})$. بنابراین $C = ۰$، که یک

تناقض است. حال، اگر $g(x)h(x) = \circ = h(x)f(x)$، آن‌گاه $C \in l(A_\circ) \cap l(A_\backslash) \cap r(B_\circ) \cap r(B_\backslash)$، و لذا $C = \circ$، که یک تناقض است. به‌طور مشابه، اگر $f(x)h(x) = \circ = h(x)g(x)$ یا $g(x)h(x) = \circ = f(x)h(x)$، آن‌گاه $C = \circ$. بنابراین $h(x)$ نمی‌تواند به‌فرم‌های $h(x) = C$ یا $h(x) = Cx^k$ باشد.

حال فرض کنید که $h(x) = \sum_{i=\circ}^{n} C_i x^i$، که $C_\circ \neq \circ \neq C_n$ و $n > \circ$. همچنین فرض کنید $fh = \circ = gh$. دراین‌صورت داریم،

$$A_\circ C_\circ = \circ, A_\circ C_\backslash + A_\backslash C_\circ = \circ, \ldots, A_\circ C_n + A_\backslash C_{n-\backslash} = \circ, A_\backslash C_n = \circ, B_\circ C_\circ = \circ,$$
$$B_\circ C_\backslash + B_\backslash C_\circ = \circ, \ldots, B_\circ C_n + B_\backslash C_{n-\backslash} = \circ \text{ و } B_\backslash C_n = \circ.$$

بنابراین $C_\circ \in r(A_\circ) \cap r(B_\circ)$ و $C_n \in r(A_\backslash) \cap r(B_\backslash)$، و لذا $C_\circ = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \backslash & \circ \end{pmatrix}$ و $C_n \in \left\{ \begin{pmatrix} \backslash & \backslash \\ \backslash & \backslash \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \backslash & \circ \\ \backslash & \circ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \circ & \backslash \\ \circ & \backslash \end{pmatrix} \right\}$. به‌آسانی می‌توان نشان داد که برای هر $C_\backslash \in R$، $A_\circ C_\backslash + A_\backslash C_\circ \neq \circ$، که یک تناقض است. با روش مشابه می‌توانیم نشان دهیم که موارد $hg = \circ = fh$، $hg = \circ = hf$ یا $hf = \circ = gh$ نمی‌تواند رخ دهد. بنابراین f و g دارای پوچساز مشترک ناصفر نمی‌باشند، و لذا $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = ۳$. درنتیجه، شرط برگشت‌پذیری حلقه R، در قضیه ۴.۳.۲ اساسی است.

مثال زیر نشان می‌دهد که در غیاب شرط αــ سازگاری قضایای ۳.۳.۲ و ۴.۳.۲ لزوماً برقرار نمی‌باشند.

مثال ۹.۳.۲. فرض کنید $S = \mathbb{Z}_۶$ و $R = S[y]$. درونریختی $\alpha : R \to R$ با ضابطه $\alpha(f(y)) = f(\circ)$ در نظر بگیرید. در مثال ۲۲.۱.۱، نشان داده شده است که R حلقه‌ای کاهشی است که αــ سازگار نمی‌باشد. به‌وضوح داریم: $V(\Gamma_E(R)) = \{[۲]_R, [۳]_R\}$، و بنابراین $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$. حلقه $R[x;\alpha]$ را در نظر بگیرید. حال، $Z(R[x;\alpha])$ را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید $f(x)g(x) = \circ$، که $f(x) = \sum_{i=\circ}^{n} f_i(y)x^i$ و $g(x) = \sum_{j=\circ}^{m} g_j(y)x^j$ عناصر ناصفری از $R[x;\alpha]$ می‌باشند. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت (I): فرض کنید $f_\circ(y) \neq \circ$ و $g_t(y)$ اولین ضریب ناصفر از $g(x)$ باشد. چون $f(x)g(x) = \circ$، لذا

$$f_\circ(y)g_t(y) = \circ, f_\backslash(y)\alpha(g_t(y)) + f_\circ(y)g_{t+\backslash}(y) = \circ,$$
$$f_۲(y)\alpha^۲(g_t(y)) + f_\backslash(y)\alpha(g_{t+\backslash}(y)) + f_\circ(y)g_{t+۲}(y) = \circ, \ldots, f_n(y)\alpha^n(g_m(y)) = \circ.$$

چون R مک‌کوی می‌باشد، لذا داریم: $f_\circ(y) \in ۲\mathbb{Z}_۶[y]$، $g_t(y) \in ۳\mathbb{Z}_۶[y]$ یا $f_\circ(y) \in ۳\mathbb{Z}_۶[y]$، $g_t(y) \in ۲\mathbb{Z}_۶[y]$. بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که $f_\circ(y) \in ۲\mathbb{Z}_۶[y]$ و $g_t(y) \in ۳\mathbb{Z}_۶[y]$.

حال، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت (I-I): اگر برای هر $t \leq j \leq m$، $\alpha(g_j(y)) = 0$، آن‌گاه $g_j(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y]$ (چون $f_0(y) \in 2\mathbb{Z}_6(y)$)، و برای هر $1 \leq i \leq n$، $f_i(y)$ها دلخواه هستند.

حالت (II-I): فرض کنید برای بعضی $t \leq j \leq m$، $\alpha(g_j(y)) \neq 0$، هم‌چنین فرض کنید s کوچکترین اندیسی باشد که $\alpha(g_s(y)) \neq 0$. آن‌گاه

$$f_0(y)g_t(y) = 0, f_0(y)g_{t+1}(y) = 0, \dots, f_0(y)g_s(y) = 0,$$
$$f_0(y)g_{s+1}(y) + f_1(y)\alpha(g_s(y)) = 0, \dots, f_n(y)\alpha^n(g_m(y)) = 0.$$

از آن‌جایی‌که $f_0(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y]$، به‌آسانی دیده می‌شود که برای هر $t \leq j \leq s$، $g_j(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y]$. حال، باضرب ۳ در $f_0(y)g_{s+1}(y) + f_1(y)\alpha(g_s(y)) = 0$ داریم، $3f_1(y)\alpha(g_s(y)) = 0$. از آن‌جایی‌که $g_s(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y]$، بنابراین $f_1(y) \in 2\mathbb{Z}_6(y)$. با ادامه این فرآیند، نتیجه می‌گیریم که برای هر $0 \leq i \leq n$، $f_i(y) \in 2\mathbb{Z}_6(y)$ و برای هر $t \leq j \leq m$، $g_j(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y]$.

حال، اگر $f_0(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y]$ و $g_t(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y]$، آن‌گاه مشابه روش استفاده شده در حالت‌های (I-I) و (II-I) نتیجه می‌گیریم که:

اگر برای هر $t \leq j \leq m$، $\alpha(g_j(y)) = 0$، آن‌گاه $g_j(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y]$ (چون $f_0(y) \in 3\mathbb{Z}_6(y)$)، و برای هر $1 \leq i \leq n$، $f_i(y)$ها دلخواه هستند.

اگر برای بعضی $t \leq j \leq m$، $\alpha(g_j(y)) \neq 0$ و s کوچکترین اندیسی باشد که $\alpha(g_s(y)) \neq 0$، آن‌گاه برای هر $i \geq 0$، $f_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6(y)$ و برای هر $t \leq j \leq m$، $g_j(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y]$.

حالت (II): فرض کنید که $f_s(y)$ و $g_t(y)$ به‌ترتیب اولین ضریب ناصفر $f(x)$ و $g(x)$ باشند(برای $s > 0$). چون $f(x)g(x) = 0$، بنابراین

$$f_s(y)\alpha^s(g_t(y)) = 0, f_s(y)\alpha^s(g_{t+1}(y)) + f_{s+1}(y)\alpha^{s+1}(g_t(y)) = 0, \dots, f_n(y)\alpha^n(g_m(y)) = 0.$$

لذا حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

حالت (I-II): فرض کنید برای هر $t \leq j \leq m$، $\alpha(g_j(y)) = 0$. در نتیجه برای هر $s \leq i \leq n$، $f_i(y)$ها دلخواه هستند.

حالت (II-II): فرض کنید $\alpha(g_t(y)) \neq 0$. در نتیجه $f_s(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y]$، $\alpha(g_t(y)) = 3$ یا $f_s(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y]$، $\alpha(g_t(y)) \in 2\mathbb{Z}_6$ (چون $f_s(y)\alpha^s(g_t(y)) = 0$ و $\alpha(g_t(y)) \neq 0$). ابتدا فرض کنید که $f_s(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y]$ و $\alpha(g_t(y)) = 3$. با استفاده از روش مشابه در حالت (II-I) برای هر $s \leq i \leq n$ داریم $f_i(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y]$ و $\alpha(g_t(y)) = 3$. حال فرض کنید که $f_s(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y]$ و $\alpha(g_t(y)) \in 2\mathbb{Z}_6[y]$. به‌طورمشابه، نتیجه می‌گیریم که برای هر $s \leq i \leq n$، $f_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y]$ و $\alpha(g_t(y)) \in 2\mathbb{Z}_6[y]$. بنابراین $Z_l(R[x;\alpha]) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$، که در آن

$$A_1 = \left\{ \sum_{i=0}^{n} f_i(y)x^i \mid f_i(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \right\},$$
$$A_2 = \left\{ \sum_{i=0}^{n} f_i(y)x^i \mid f_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \right\},$$
$$A_3 = \left\{ \sum_{i=0}^{n} f_i(y)x^i \mid f_0(y) \neq 0,\ f_0(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } f_j(y) \notin 2\mathbb{Z}_6[y],\ j \text{ برای بعضی } \right\},$$
$$A_4 = \left\{ \sum_{i=0}^{n} f_i(y)x^i \mid f_0(y) \neq 0,\ f_0(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } f_j(y) \notin 3\mathbb{Z}_6[y],\ j \text{ برای بعضی } \right\}$$

و

$$A_5 = \Big\{ \sum_{i=s}^{n} f_i(y)x^i \mid s > 0,\ \{f_i(y)\}_{i=s}^{n} \not\subseteq 2\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \{f_i(y)\}_{i=s}^{n} \not\subseteq 3\mathbb{Z}_6[y] \Big\}$$

و هم‌چنین $Z_r\big(R[x;\alpha]\big) = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$، که در آن

$$B_1 = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} f_i(y)x^i \mid f_i(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \Big\},$$
$$B_2 = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} f_i(y)x^i \mid f_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \Big\},$$
$$B_3 = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} f_i(y)x^i \mid \alpha(f_i(y)) \in 2\mathbb{Z}_6,\ i \text{ برای هر } \Big\}$$

و

$$B_4 = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} f_i(y)x^i \mid \alpha(f_i(y)) \in 3\mathbb{Z}_6,\ i \text{ برای هر } \Big\}.$$

بنابراین $Z\big(R[x;\alpha]\big) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$، به‌طوری‌که $A_6 = B_3$ و $A_7 = B_4$.

حال، برای هر $\beta(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i(y)x^i \in Z(R[x;\alpha])$، $ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x))$ را تعیین می‌کنیم.
اگر $\beta(x) \in A_1$، آن‌گاه حالت‌های زیر را داریم:
حالت ۱ـ۱: فرض کنید برای هر $0 \leq i \leq n$، $\alpha(f_i(y)) = 0$. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱ـ۱ـ۱: فرض کنید $f_0(y) \neq 0$. در نتیجه

$$l(\beta(x)) = \{ \sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_0(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \}$$

و

$$r(\beta(x)) = \{ \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) \;=\; & \{ \sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_0(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \} \cup \\ & \{ \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \}. \end{aligned}$$

حالت ۱ـ۱ـ۲: فرض کنید $f_0(y) = 0$ و $f_s(y)$ اولین ضریب ناصفر $\beta(x)$ باشد. در نتیجه

$$l(\beta(x)) = \{ \sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_0(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \}$$

و

$$r(\beta(x)) = \{ \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid \alpha(h_i(y)) \in 3\mathbb{Z}_6,\ i \text{ برای هر } \}.$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{\sum_{i=0}^{n} g_i(y)x^i \mid g_0(y) \in ۳\mathbb{Z}_۶[y]\} \cup \\ &\quad \{\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid \alpha(h_i(y)) \in ۳\mathbb{Z}_۶,\ i \text{ برای هر } \}. \end{aligned}$$

حالت ۱ـ۲: فرض کنید برای بعضی $0 \le i \le n$، $\alpha(f_i(y)) \neq 0$. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱ـ۲ـ۱: فرض کنید $f_0(y) \neq 0$. در نتیجه

$$l(\beta(x)) = r(\beta(x)) = \{\sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in ۳\mathbb{Z}_۶[y],\ i \text{ برای هر } \}.$$

درنتیجه

$$ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) = \{\sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in ۳\mathbb{Z}_۶[y],\ i \text{ برای هر } \}.$$

حالت ۱ـ۲ـ۲: فرض کنید $f_0(y) = 0$ و $f_s(y)$ اولین ضریب ناصفر از $\beta(x)$ باشد. در نتیجه

$$l(\beta(x)) = \{\sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in ۳\mathbb{Z}_۶[y],\ i \text{ برای هر } \}$$

و

$$r(\beta(x)) = \{\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid \alpha(h_i(y)) \in ۳\mathbb{Z}_۶,\ i \text{ برای هر } \}.$$

لذا

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{\sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in ۳\mathbb{Z}_۶[y],\ i \text{ برای هر } \} \cup \\ &\quad \{\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid \alpha(h_i(y)) \in ۳\mathbb{Z}_۶,\ i \text{ برای هر } \}. \end{aligned}$$

بنابراین $A_1 = [۲y] \cup [۲yx] \cup [۲] \cup [۲x]$.

اگر $\beta(x) \in A_2$، آن‌گاه با استدلال مشابه استفاده شده در حالت‌های ۱ـ۱ و ۱ـ۲ به‌آسانی می‌توان نشان داد که $A_2 = [۳y] \cup [۳yx] \cup [۳] \cup [۳x]$.

اگر $\beta(x) \in A_3$، آن‌گاه می‌توان نوشت $\beta(x) = \beta_1(x) + \beta_2(x)$، که در آن $\beta_1(x) = \sum_{i=0}^{t} f_{1i}(y)x^{m_i}$ و $\beta_2(x) = \sum_{j=0}^{l} f_{2j}(y)x^{k_j}$ که برای هر $0 \le i \le t$ و $0 \le j \le l$، $f_{1i}(y) \in ۲\mathbb{Z}_۶[y]$ و $f_{2j}(y) \notin ۲\mathbb{Z}_۶[y]$. بنابراین حالت‌های زیر را داریم:

حالت ۳ـ۱: فرض کنید برای هر $0 \le i \le t$ و $0 \le j \le l$، $\alpha(f_{1i}(y)) = 0 = \alpha(f_{2j}(y))$. در نتیجه

$$l(\beta(x)) = \{\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in \mathbb{Z}_۶[y],\ i \text{ برای هر } \}$$

و

$$r(\beta(x)) = \{ \textstyle\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{ \sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in \mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \} \cup \\ &\quad \{ \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}. \end{aligned}$$

حالت ۳ـ۲: فرض کنید برای هر t $0 \le i \le t$، $\alpha(f_{1i}(y)) = 0$ و برای بعضی l $0 \le j \le l$، $\alpha(f_{2j}(y)) \neq 0$. حالت‌های زیر را در نظر بگیرید:

حالت ۳ـ۲ـ۱: فرض کنید برای بعضی l $0 \le j \le l$، $\alpha(f_{2j}(y)) \in \{1,5\}$. در نتیجه $l(\beta(x)) = 0$ و

$$r(\beta(x)) = \{ \textstyle\sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(g_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

در نتیجه

$$ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) = \{ \textstyle\sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(g_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

حالت ۳ـ۲ـ۲: فرض کنید $\{\alpha(f_{2j}(y))\}_{j=0}^{l} = \{2,3\}$. در نتیجه $l(\beta(x)) = 0$ و

$$r(\beta(x)) = \{ \textstyle\sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(g_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

بنابراین

$$ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) = \{ \textstyle\sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(g_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

حالت ۳ـ۲ـ۳: فرض کنید $\{\alpha(f_{2j}(y))\}_{j=0}^{l} = \{3\}$. در نتیجه

$$l(\beta(x)) = \{ \textstyle\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \}$$

و

$$r(\beta(x)) = \{ \textstyle\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

لذا

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{ \sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \} \cup \\ &\quad \{ \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}. \end{aligned}$$

حالت ۳ـ۲ـ۴: فرض کنید $\{\alpha(f_{2j}(y))\}_{j=0}^{l} = \{2,4\}$. در نتیجه

$$l(\beta(x)) = \{ \sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \}$$

و

$$r(\beta(x)) = \{ \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{ \sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \} \cup \\ &\quad \{ \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}. \end{aligned}$$

حالت ۳ـ۳: فرض کنید برای بعضی $0 \leq i \leq t$، $\alpha(f_{1i}(y)) \neq 0$. لذا حالت‌های زیر را داریم:

حالت ۳ـ۳ـ۱: فرض کنید برای هر $0 \leq j \leq l$، $\alpha(f_{2j}(y)) = 0$. در نتیجه

$$l(\beta(x)) = \{ \sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \}$$

و

$$r(\beta(x)) = \{ \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{ \sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \} \cup \\ &\quad \{ \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}. \end{aligned}$$

حالت ۳ـ۳ـ۲: فرض کنید برای بعضی $0 \leq j \leq l$، $\alpha(f_{2j}(y)) \neq 0$ و $\alpha(f_{2j}(y)) \notin 2\mathbb{Z}_6$.
دراین‌صورت $l(\beta(x)) = 0$ و

$$r(\beta(x)) = \{ \sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(g_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

درنتیجه

$$ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) = \{ \sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(g_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

حالت ۳ـ۳ـ۳: فرض کنید برای بعضی $0 \leq j \leq l$، $\alpha(f_{2j}(y)) \neq 0$ و $\{\alpha(f_{2j}(y))\}_{j=0}^{l} = 2\mathbb{Z}_6$. بنابراین

$$l(\beta(x)) = \{ \sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \}$$

و

$$r(\beta(x)) = \{\, \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

پس

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{\, \sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \} \cup \\ &\quad \{\, \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}. \end{aligned}$$

بنابراین $A_3 = [2y + yx] \cup [2y + x] \cup [2y + 3x] \cup [2y + (2 + 3y)x]$.

اگر $\beta(x) \in A_4$، آن‌گاه با روش مشابه استفاده شده در حالت‌های ۳ـ۱ تا ۳ـ۳ می‌توان نشان داد که $A_4 = [3y + yx] \cup [3y + x] \cup [3y + 2x] \cup [3y + (3 + 2y)x]$.

اگر $\beta(x) \in A_5$، آن‌گاه حالت‌های زیر را داریم:

حالت ۵ـ۱: فرض کنید برای بعضی $s \leq i \leq n$، $\alpha(f_i(y)) \neq 0$. هم‌چنین فرض کنید $\alpha(f_i(y)) \neq 3$ و برای بعضی $s \leq i \leq n$، $\alpha(f_i(y)) \notin 2\mathbb{Z}_6$. در نتیجه $l(\beta(x)) = 0$ و

$$r(\beta(x)) = \{\, \sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid \alpha(g_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

بنابراین

$$ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) = \{\, \sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid \alpha(g_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

حالت ۵ـ۲: فرض کنید برای هر $s \leq i \leq n$، $\alpha(f_i(y)) = 0$. در نتیجه

$$l(\beta(x)) = \{\, \sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in \mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \}$$

و

$$r(\beta(x)) = \{\, \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

پس

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{\, \sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in \mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \} \cup \\ &\quad \{\, \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}. \end{aligned}$$

بنابراین $A_5 = [x] \cup [yx]$.

اگر $\beta(x) \in A_6$، آن‌گاه حالت‌های زیر را داریم:

حالت ۶ـ۱: فرض کنید برای هر $0 \leq i \leq n$، $\alpha(f_i(y)) = 0$. حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

حالت ۶ـ۱ـ۱: فرض کنید برای هر $0 \leq i \leq n$، $f_i(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y]$. دراین‌صورت حالت‌های زیر را داریم:

حالت ۶ـ۱ـ۱ـ۱: اگر $f_{0}(y)\neq 0$، آن‌گاه با استفاده از حالت ۱ـ۱ـ۱،

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{\sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_0(y)\in 3\mathbb{Z}_6[y]\}\cup \\ &\quad \{\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y)\in 3\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \}. \end{aligned}$$

حالت ۶ـ۱ـ۱ـ۲: اگر $f_{0}(y)=0$، آن‌گاه با استفاده از حالت ۱ـ۱ـ۲،

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{\sum_{i=0}^{n} g_i(y)x^i \mid g_0(y)\in 3\mathbb{Z}_6[y]\}\cup \\ &\quad \{\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid \alpha(h_i(y))\in 3\mathbb{Z}_6,\ i \text{ برای هر } \}. \end{aligned}$$

حالت ۶ـ۱ـ۲: فرض کنید برای بعضی $0\leq i\leq n$، $f_i(y)\notin 2\mathbb{Z}_6[y]$. آن‌گاه حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۶ـ۱ـ۲ـ۱: اگر برای هر $0\leq i\leq n$، $f_i(y)\in 3\mathbb{Z}_6[y]$، آن‌گاه حالت‌های زیر را داریم:

حالت ۶ـ۱ـ۲ـ۱ـ۱: فرض کنید $f_{0}(y)=0$. آن‌گاه با روش مشابه استفاده شده در حالت ۱ـ۱ـ۲ داریم:

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{\sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y)\in 2\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \}\cup \\ &\quad \{\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid \alpha(h_i(y))\in 2\mathbb{Z}_6,\ i \text{ برای هر } \}. \end{aligned}$$

حالت ۶ـ۱ـ۲ـ۱ـ۲: فرض کنید $f_{0}(y)\neq 0$. آن‌گاه با استفاده از روشی مشابه در حالت ۱ـ۱ـ۱ داریم:

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{\sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_0(y)\in 2\mathbb{Z}_6[y]\}\cup \\ &\quad \{\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y)\in 2\mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \}. \end{aligned}$$

حالت ۶ـ۱ـ۲ـ۲: اگر برای بعضی $0\leq i\leq n$، $f_j(y)\notin 3\mathbb{Z}_6[y]$، آن‌گاه حالت‌های زیر را داریم:

حالت ۶ـ۱ـ۲ـ۲ـ۱: فرض کنید $f_{0}(y)=0$. در نتیجه

$$l(\beta(x))=\{\ \textstyle\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y)\in \mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \}$$

و

$$r(\beta(x))=\{\ \textstyle\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid \alpha(h_i(y))=0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

درنتیجه

$$ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) = \{\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in \mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \} \cup \{\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

حالت ۶ـ۱ـ۲ـ۲ـ۲: فرض کنید $f_0(y) \neq 0$. دراین‌صورت حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

حالت ۶ـ۱ـ۲ـ۲ـ۲ـ۱: اگر $i = j = 0$، آن‌گاه

$$l(\beta(x)) = \{\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in \mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \}$$

و $r(\beta(x)) = 0$. لذا

$$ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) = \{\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in \mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \}.$$

حالت ۶ـ۱ـ۲ـ۲ـ۲ـ۲: اگر $i = j \neq 0$، بنابراین حالت‌های زیر را داریم:

حالت ۶ـ۱ـ۲ـ۲ـ۲ـ۲ـ۱: فرض کنید $f_0(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y]$. در نتیجه

$$l(\beta(x)) = \{\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in \mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \}$$

و

$$r(\beta(x)) = \{\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

بنابراین

$$ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) = \{\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in \mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \} \cup \{\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

حالت ۶ـ۱ـ۲ـ۲ـ۲ـ۲ـ۲: فرض کنید $f_0(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y]$. در نتیجه

$$l(\beta(x)) = \{\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in \mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \}$$

و

$$r(\beta(x)) = \{\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

پس

$$ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) = \{\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in \mathbb{Z}_6[y],\ i \text{ برای هر } \} \cup \{\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y] \text{ و } \alpha(h_i(y)) = 0,\ i \text{ برای هر } \}.$$

حالت ۶ـ۱ـ۲ـ۲ـ۲ـ۲ـ۳: فرض کنید $f_0(y) \notin 2\mathbb{Z}_6[y]$ و $f_0(y) \notin 3\mathbb{Z}_6[y]$. لذا

$$l(\beta(x)) = \{ \sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in \mathbb{Z}_6[y], \text{ برای هر } i \}$$

و $r(\beta(x)) = 0$. بنابراین

$$ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) = \{ \sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in \mathbb{Z}_6[y], \text{ برای هر } i \}.$$

حالت ۶ـ۱ـ۲ـ۲ـ۲ـ۳: اگر $i = 0$، $j \neq 0$، $i \neq 0$، $j = 0$ یا $i \neq j \neq 0$، آن‌گاه یکی از حالت‌های ۶ـ۱ـ۲ـ۲ـ۲ـ۱ تا ۶ـ۱ـ۲ـ۲ـ۲ـ۳ ظاهر می‌شود.

حالت ۶ـ۲: فرض کنید برای بعضی $0 \leq i \leq n$، $\alpha(f_i(y)) \neq 0$. بنابراین حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۶ـ۲ـ۱: فرض کنید برای هر $0 \leq i \leq n$، $f_i(y) \in 2\mathbb{Z}_6[y]$. آن‌گاه حالت‌های زیر را داریم:

حالت ۶ـ۲ـ۱ـ۱: فرض کنید $f_0(y) = 0$. لذا با استفاده از حالت ۲ـ۲ـ۱،

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{ \sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y], \text{ برای هر } i \} \cup \\ &\quad \{ \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid \alpha(h_i(y)) \in 3\mathbb{Z}_6, \text{ برای هر } i \}. \end{aligned}$$

حالت ۶ـ۲ـ۱ـ۲: فرض کنید $f_0(y) \neq 0$. بنابراین با استفاده از حالت ۱ـ۲ـ۱،

$$ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) = \{ \sum_{i=0}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y], \text{ برای هر } i \}.$$

حالت ۶ـ۲ـ۲: فرض کنید برای بعضی $0 \leq j \leq n$، $f_j(y) \notin 2\mathbb{Z}_6[y]$. بنابراین حالت‌های زیر را داریم:

حالت ۶ـ۲ـ۲ـ۱: فرض کنید $f_0(y) = 0$. در نتیجه

$$l(\beta(x)) = \{ \sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y], \text{ برای هر } i \}$$

و

$$r(\beta(x)) = \{ \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid \alpha(h_i(y)) = 0, \text{ برای هر } i \}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{ \sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y) \in 3\mathbb{Z}_6[y], \text{ برای هر } i \} \cup \\ &\quad \{ \sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid \alpha(h_i(y)) = 0, \text{ برای هر } i \}. \end{aligned}$$

حالت ۶ـ۲ـ۲ـ۲: فرض کنید $f_0(y) \neq 0$. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۶ـ۲ـ۲ـ۲ـ۱: اگر $i = j = 0$، آن‌گاه

$$l(\beta(x))=\{\,\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y)\in 3\mathbb{Z}_6[y],\ \text{برای هر } i\,\}$$

و $r(\beta(x))=0$. بنابراین

$$ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x))=\{\,\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y)\in 3\mathbb{Z}_6[y],\ \text{برای هر } i\,\}.$$

حالت ۶ـ۲ـ۲ـ۲ـ۲: اگر $i=j\neq 0$، آن‌گاه حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۶ـ۲ـ۲ـ۲ـ۲ـ۱: فرض کنید $f_0(y)\in 2\mathbb{Z}_6[y]$. دراین‌صورت

$$l(\beta(x))=\{\,\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y)\in 3\mathbb{Z}_6[y],\ \text{برای هر } i\,\}$$

و

$$r(\beta(x))=\{\,\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y)\in 3\mathbb{Z}_6[y]\ \text{و}\ \alpha(h_i(y))=0,\ \text{برای هر } i\,\}.$$

لذا

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{\,\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y)\in 3\mathbb{Z}_6[y],\ \text{برای هر } i\,\}\ \cup \\ &\quad \{\,\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y)\in 3\mathbb{Z}_6[y]\ \text{و}\ \alpha(h_i(y))=0,\ \text{برای هر } i\,\}. \end{aligned}$$

حالت ۶ـ۲ـ۲ـ۲ـ۲ـ۲: فرض کنید $f_0(y)\in 3\mathbb{Z}_6[y]$. در نتیجه

$$l(\beta(x))=\{\,\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y)\in 3\mathbb{Z}_6[y],\ \text{برای هر } i\,\}$$

و

$$r(\beta(x))=\{\,\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y)\in 2\mathbb{Z}_6[y]\ \text{و}\ \alpha(h_i(y))=0,\ \text{برای هر } i\,\}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x)) &= \{\,\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y)\in 3\mathbb{Z}_6[y],\ \text{برای هر } i\,\}\ \cup \\ &\quad \{\,\sum_{i=0}^{m} h_i(y)x^i \mid h_i(y)\in 2\mathbb{Z}_6[y]\ \text{و}\ \alpha(h_i(y))=0,\ \text{برای هر } i\,\}. \end{aligned}$$

حالت ۶ـ۲ـ۲ـ۲ـ۲ـ۳: فرض کنید $f_0(y)\notin 2\mathbb{Z}_6[y]$ و $f_0(y)\notin 3\mathbb{Z}_6[y]$. دراین‌صورت

$$l(\beta(x))=\{\,\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y)\in 3\mathbb{Z}_6[y],\ \text{برای هر } i\,\}$$

و $r(\beta(x))=0$. بنابراین

$$ann_{R[x;\alpha]}(\beta(x))=\{\,\sum_{i=1}^{m} g_i(y)x^i \mid g_i(y)\in 3\mathbb{Z}_6[y],\ \text{برای هر } i\,\}.$$

حالت ۶ـ۲ـ۲ـ۲ـ۳: اگر $i=\circ$، $j\neq\circ$، $i\neq\circ$، $j=\circ$ یا $i\neq j\neq\circ$، آن‌گاه یکی از حالت‌های ۶ـ۲ـ۲ـ۲ـ۲ـ۱ تا ۶ـ۲ـ۲ـ۲ـ۲ـ۳ ظاهر می‌شود.
بنابراین

$$A_{۶}=[۲y]\cup[۲yx]\cup[۳yx]\cup[۳y]\cup[yx]\cup[y]\cup[۲y+(۲+۳y)x]\cup[۲y+yx]\cup$$
$$[۳y+yx]\cup[۲x]\cup[۲]\cup[(۲+y)x]\cup[۲+y]\cup[۳y+۲x].$$

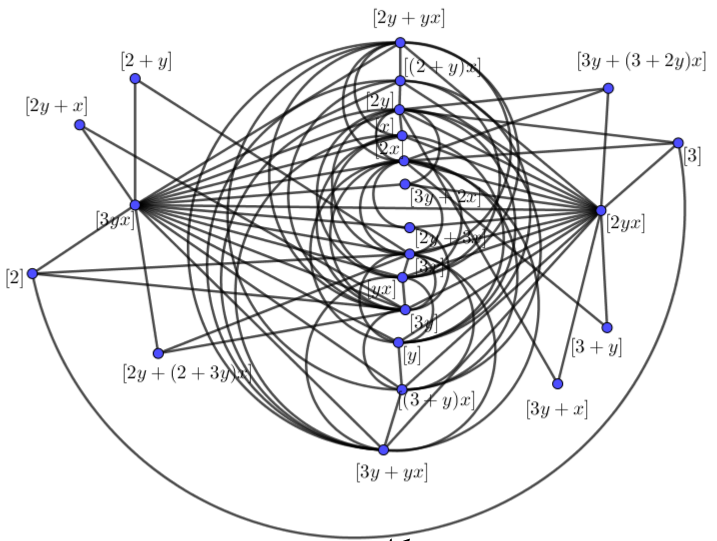
اگر $\beta(x)\in A_{۷}$، آن‌گاه با روش استفاده شده در حالت‌های ۶.۱ و ۶.۲ می‌توان نشان داد که

$$A_{۷}=[۲y]\cup[۲yx]\cup[۳yx]\cup[۳y]\cup[yx]\cup[y]\cup[۳y+(۳+۲y)x]\cup[۲y+yx]\cup$$
$$[۳y+yx]\cup[۳x]\cup[۳]\cup[(۳+y)x]\cup[۳+y]\cup[۲y+۳x].$$

بنابراین

$$V(\Gamma_E(R[x;\alpha]))=\Big\{[۲y],[۲],[۳y+yx],[۲x],[۳y],[۳],[۳yx],[۳x],[۲y+yx],[۲y+x],$$
$$[۲y+(۲+۳y)x],[۲yx],[۳y+x],[۳y+۲x],[۳y+(۳+۲y)x],[x],$$
$$[yx],[y],[۲y+۳x],[۲+y],[۳+y],[(۲+y)x],[(۳+y)x]\Big\}.$$

به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که رئوس $[۳]$ و $[۲y+x]$ دارای پوچ‌ساز ناصفر مشترک نمی‌باشند و هم‌چنین $[۳][۲y+x]\neq\circ\neq[۲y+x][۳]$. درنتیجه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x;\alpha]))=۳$ (شکل ۲.۲ را ببینید). بنابراین فرض αـ سازگاری در قضیه ۳.۳.۲ ضروری است.



شکل ۲.۲

یانگ[9] و همکارانش در مرجع [۷۲]، مفهوم مک‌کوی نسبت به سری توانی را معرفی کردند.
حلقه R مک‌کوی راست نسبت به سری‌توانی است اگر سری‌های توانی $f(x),g(x)\in R[[x]]\backslash\{\circ\}$

[9] Yang

در شرط $f(x)g(x) = ۰$ صدق کنند، آن‌گاه $r \in R$ ≠ ۰ موجود باشد به‌طوری‌که $f(x)r = ۰$. به‌طور مشابه می‌توان مک‌کوی چپ نسبت به سری توانی را تعریف کرد. اگر حلقه R مک‌کوی راست و چپ نسبت به سری توانی باشد، گوییم R مک‌کوی نسبت به سری توانی است.

فرض کنید α یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد. مطابق با مرجع [۶]، حلقه‌ی R، αــ مک‌کوی راست نسبت به سری توانی نامیده می‌شود اگر سری‌های توانی $f(x), g(x) \in R[[x;\alpha]] \setminus \{۰\}$ در شرط $f(x)g(x) = ۰$ صدق کنند، آن‌گاه $۰ \neq c \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که $f(x)c = ۰$. به‌طور مشابه می‌توان αــ مک‌کوی چپ نسبت به سری توانی را تعریف کرد. اگر حلقه‌ی R، αــ مک‌کوی چپ و راست نسبت به سری توانی باشد گوییم R، αــ مک‌کوی نسبت به سری توانی است.

در ادامه، ما به توصیف قطر گراف $\Gamma_E(R[[x;\alpha]])$ که در آن R برگشت‌پذیر، αــ سازگار و نوتری راست باشد، می‌پردازیم.

تذکر ۲.۳.۱۰. اگر R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، αــ سازگار و نوتری راست باشد، آن‌گاه با استفاده از [۴۲، نتیجه ۲.۷]، R، αــ سری توانی مک‌کوی است.

تذکر ۲.۳.۱۱. فرض کنید R حلقه‌ای کاهشی و αــ سازگار باشد. در این‌صورت با استفاده از [۴۱]، $R[[x;\alpha]]$ کاهشی است.

قضیه ۲.۳.۱۲. فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و αــ سازگار باشد. در این‌صورت $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]])) = ۰$ اگر و تنها اگر R غیرکاهشی باشد و $Z(R)^۲ = ۰$.

برهان. ابتدا فرض کنید که $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]])) = ۰$. از آن‌جایی‌که $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]]))$، پس $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۰$. بنابراین با استفاده از قضیه ۲.۲.۲، R غیرکاهشی است و $Z(R)^۲ = ۰$.

بالعکس، فرض کنید R حلقه‌ای غیرکاهشی باشد و $Z(R)^۲ = ۰$. با استفاده از [۴۲، قضیه ۲.۲۱]، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x;\alpha]])) = ۱$. درنتیجه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]])) \in \{۰,۱\}$. ادعا می‌کنیم که $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]])) = ۰$. درغیراین‌صورت، $f,g \in Z(R[[x;\alpha]])^*$ وجود دارند به‌طوری‌که $fg = ۰$ اما $[f] \neq [g]$. بنابراین $h \in ann_{R[[x;\alpha]]}(f)$ وجود دارد به‌طوری‌که $hg \neq ۰ \neq gh$، که یک تناقض است. □

در مرجع [۴۲، قضیه ۲.۱۷] نشان داده شده است که اگر R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، αــ سازگار و نوتری راست باشد، آن‌گاه $Z(R[[x;\alpha]])$ ایده‌آل است اگر و تنها اگر $Z(R)$ ایده‌آل باشد. این قضیه در نتایج زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

قضیه ۲.۳.۱۳. فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، αــ سازگار و نوتری راست باشد و $Z(R)^۲ \neq ۰$. دراین‌صورت:

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]])) = ۱$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$؛

(۲) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]]))=۲$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R))=۲$؛

(۳) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]]))=۳$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R))=۳$.

برهان. (۱) ابتدا فرض کنید که $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]]))=۱$. چون $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R))\le \mathrm{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]]))$، بنابراین با استفاده از قضیه ۱۲.۳.۲، $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R))=۱$.

بالعکس، فرض کنید $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R))=۱$. با استفاده از قضیه ۲.۲.۲ (الف) R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال P و Q است و $|Z(R)|\ge ۳$ یا (ب) $|\Gamma_E(R)|=۲$ و $a\in Z(R)^*$ موجود است به‌طوری‌که $Z(R)=ann_R(a)$.

اگر (الف) برقرار باشد، آن‌گاه با استفاده از ملاحظه ۱۱.۳.۲، $R[[x;\alpha]]$ کاهشی است و هم‌چنین $P[[x;\alpha]]$ و $Q[[x;\alpha]]$ دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال از $R[[x;\alpha]]$ می‌باشند. فرض کنید که $f,g\in Z(R[[x;\alpha]])$. اگر f و g و هر دو متعلق به $P[[x;\alpha]]$ باشند، از آن‌جایی‌که برای هر $h\in Q[[x;\alpha]]$، $fh=0=gh$ نتیجه می‌گیریم که $[f]_{R[[x;\alpha]]}=[g]_{R[[x;\alpha]]}$ (چون R حلقه‌ای کاهشی و αـ سازگار است). به‌طورمشابه اگر $f,g\in Q[[x;\alpha]]$، آن‌گاه $[f]_{R[[x;\alpha]]}=[g]_{R[[x;\alpha]]}$. حال فرض کنید $f\in P[[x;\alpha]]$ و $g\in Q[[x;\alpha]]$. در نتیجه $fg=0$. بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]])=۱$.

اگر (ب) برقرار باشد آن‌گاه با استفاده از ملاحظه ۱۰.۳.۲، می‌توان نشان داد که $Z(R[[x;\alpha]])=ann_{R[[x;\alpha]]}(a)$. بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]]))=۱$.

(۲) فرض کنید که $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]]))=۲$. از آن‌جایی‌که $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R))\le \mathrm{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]]))$، لذا با استفاده از قسمت (۱) نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R))=۲$.

بالعکس، فرض کنید $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R))=۲$. با استفاده از قضیه ۲.۲.۲ (الف) $Z(R)$ ایده‌آل است، $Z(R)^2\neq 0$ و هر جفت مقسوم‌علیه‌های صفر غیربدیهی متمایز دارای پوچساز مشترک ناصفر است و برای هر $a\in Z(R)$، $Z(R)\neq ann_R(a)$ یا (ب) برای بعضی $a\in Z(R)^*$، $Z(R)=ann_R(a)$ و $b,c\in Z(R)^*$ موجود است به‌طوری‌که $bc\neq 0$ و $[b]_R\neq [c]_R$.

اگر (الف) برقرار باشد، آن‌گاه از آن‌جایی‌که R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، αـ سازگار، نوتری راست و $Z(R)$ ایده‌آل است، لذا با استفاده از [۴۲، قضیه ۱۷.۲]، $Z(R[[x;\alpha]])$ ایده‌آل می‌باشد. بنابراین هر جفت مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی از $Z(R[[x;\alpha]])$ دارای پوچساز ناصفر مشترک است، و لذا $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\alpha]]))=۲$. از آن‌جایی‌که $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R))\le \mathrm{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]]))$، نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[[x;\alpha]]))=۲$.

اگر (ب) برقرار باشد، آن‌گاه به‌آسانی می‌توان نشان داد که $Z(R[[x;\alpha]])=ann_{R[[x;\alpha]]}(a)$ و $[b]_{R[[x;\alpha]]}\neq [c]_{R[[x;\alpha]]}$، نتیجه حاصل است.

(۳) از قسمت‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود. □

اگر $\alpha=Id_R$، آن‌گاه نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۱۴.۳.۲. فرض کنید R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست باشد. دراین‌صورت

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = 0$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 0$؛

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = 1$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 1$؛

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = 2$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 2$؛

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = 3$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 3$.

مثال‌های ۱۶.۱.۲ و ۹.۳.۲ نشان می‌دهند که شرایط نوتری و αــ سازگاری در قضیه ۱۳.۳.۲ اساسی هستند.

فصل ۳

بررسی عدد احاطه‌گری گراف‌های وابسته به حلقه‌ها

در این فصل، برای حلقه‌ی شرکت‌پذیر (نه لزوماً جابه‌جایی) R، عدد احاطه‌گری گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(R)$، گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده $\Gamma_E(R)$ و گراف یکه $G(R)$ را بررسی می‌کنیم و به بیان برخی از روابط بین عدد احاطه‌گری گراف مقسوم‌علیه صفر و گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده می‌پردازیم. هم‌چنین، ارتباط بین عدد احاطه‌گری گراف‌های $\Gamma(R)$ و $\Gamma(R[x;\alpha,\delta])$ و نیز ارتباط بین عدد احاطه‌گری گراف‌های $G(R)$ و $G(R[[x;\alpha]])$ را مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم.

مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۳۴] می‌باشد.

۱.۳ عدد احاطه‌گری گراف مقسوم‌علیه صفر

فرض کنید G یک گراف با مجموعه رئوس V باشد. زیرمجموعه‌ی D از V را یک مجموعه احاطه‌گر G می‌نامیم هرگاه هر رأس در $V \setminus D$ با حداقل یک رأس در D مجاور باشد. به‌عبارتی دیگر، D رأس‌های خارج از D را احاطه می‌کند. مینیمم مجموعه احاطه‌گر G را γـ مجموعه می‌نامیم، یعنی یک مجموعه احاطه‌گر از G که اندازه‌اش مینیمم می‌باشد. عدد احاطه‌گر G، که با نماد $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود، اندازه‌ی یک γـ مجموعه از G است. زیرمجموعه‌ی S از

V یک مجموعه‌ی احاطه‌گر تام است هرگاه هر رأس در V، با رأسی در S مجاور باشد. به هر مینیمم مجموعه احاطه‌گر تام، γ_tــ مجموعه گوییم. عدد احاطه‌گری تام را که با نماد $\gamma_t(G)$ نشان می‌دهیم، اندازه‌ی یک γ_tــ مجموعه G است.

جعفری‌راد و همکارانش در مرجع [۴۸]، مجموعه‌ی احاطه‌گر نیمــ تام را روی گراف $\Gamma(R)$ به این‌صورت تعریف کردند: زیرمجموعه‌ی $S \subseteq Z(R)$ را مجموعه‌ی احاطه‌گر نیمــ تام می‌نامیم هرگاه S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر باشد و برای هر $x \in S$، $y \in S$ (نه لزوماً متمایز) موجود باشد به‌طوری‌که $xy = ۰$. عدد احاطه‌گری نیمــ تام را که با نماد $\gamma_{st}(\Gamma(R))$ نشان می‌دهند، مینیمم اندازه‌ی یک مجموعه احاطه‌گر نیمــ تام می‌باشد. توجه کنید که برای هر حلقه‌ی R، $\gamma(\Gamma(R)) \leq \gamma_{st}(\Gamma(R)) \leq ۲\gamma(\Gamma(R))$.

در [۵۱]، نویسندگان عدد احاطه‌گری گراف $\Gamma(R)$ را که در آن R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد را بررسی کردند. در این بخش، ما به مطالعه‌ی عدد احاطه‌گری گراف $\Gamma(R)$، زمانی که R حلقه‌ای شرکت‌پذیر (نه لزوماً جابه‌جایی) باشد،می‌پردازیم. هم‌چنین، روابط بین عدد احاطه‌گری گراف‌های $\Gamma(R)$ و $\Gamma(R[x;\alpha,\delta])$ و عدد احاطه‌گری گراف‌های $\Gamma(R)$ و $\Gamma(R[[x;\alpha]])$ را مشخص می‌کنیم.

گزاره ۱.۱.۳. فرض کنید R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی باشد. در این‌صورت $\gamma(\Gamma(R))$ متناهی است اگر و تنها اگر برای بعضی $n \in \mathbb{N}$ و $a_i \in R$، $Z(R) = \bigcup_{i=۱}^{n} ann_R(a_i)$.

برهان. ابتدا، فرض کنید که $\gamma(\Gamma(R)) < \infty$ و $D = \{b_۱, b_۲, \ldots, b_m\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ باشد. چون برای هر $a \in Z(R) \setminus D$، $b_i \in D$ وجود دارد به‌طوری‌که $ab_i = ۰$ یا $b_i a = ۰$، لذا $a \in l_R(b_i)$ یا $a \in r_R(b_i)$. درنتیجه $a \in ann_R(b_i)$ و بنابراین $Z(R) = \bigcup_{i=۱}^{m} ann_R(b_i) \cup D$. از سوی دیگر، برای هر $b_i \in D$، $c_i \in Z(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $b_i \in ann(c_i)$، و لذا $Z(R) = \bigcup_{i=۱}^{m} (ann_R(b_i) \cup ann_R(c_i))$.

بالعکس، فرض کنید که $Z(R) = \bigcup_{i=۱}^{n} ann_R(a_i)$. دراین‌صورت $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. بنابراین $\gamma(\Gamma(R)) < \infty$. □

نتیجه ۲.۱.۳. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و نیم‌جابه‌جایی باشد. در این‌صورت $\gamma(\Gamma(R))$ متناهی است.

برهان. از [۳۹، نتیجه ۴.۲] و گزاره ۱.۱.۳ نتیجه می‌شود. □

قضیه ۳.۱.۳. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و برگشت‌پذیر باشد و $\gamma(\Gamma(R)) \neq ۱$. در این‌صورت $\gamma_t(\Gamma(R)) = \gamma_{st}(\Gamma(R)) = |Max\{P \neq ۰ \mid P \in Ass(R)\}|$.

برهان. با استفاده از [۳۶، ملاحظه ۷.۲] و مشابه استدلال استفاده شده در [۵۱، قضیه ۴.۲]، به‌راحتی می‌توان آن‌را اثبات نمود. □

یادآوری می‌کنیم که حلقه‌ی R آبلی است اگر هر عنصر خودتوان آن مرکزی باشد. ازآن‌جایی‌که حلقه‌های نیم‌جابه‌جایی، آبلی هستند، بنابراین استدلالی مشابه برهان [۱۳، قضیه ۵.۲]، می‌توان لم زیر را نتیجه گرفت.

لم ۴.۱.۳. فرض کنید R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی باشد. در این‌صورت یک رأس از $\Gamma(R)$ وجود دارد که با هر رأس دیگر مجاور است اگر و تنها اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times D$ که D یک دامنه است یا $Z(R)$ یک ایده‌آل پوچ‌ساز است.

تذکر زیر در نتایج بعدی ما مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

تذکر ۵.۱.۳. فرض کنید $\gamma(\Gamma(R)) = 1$ و $D = \{a\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ باشد. در نتیجه a با هر رأس دیگر مجاور است و لذا با استفاده از لم ۴.۱.۳، $Z(R) = ann_R(a)$ یا $R \cong \mathbb{Z}_2 \times R'$، که R' یک دامنه است. اگر برای عنصر ناصفر a، $Z(R) = ann_R(a)$، آن‌گاه $\gamma(\Gamma(R)) = \gamma_{st}(\Gamma(R)) = 1$ و $\gamma_t(\Gamma(R)) = 2$. همچنین، اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times R'$، که R' یک دامنه است، آن‌گاه $\gamma_t(\Gamma(R)) = \gamma_{st}(\Gamma(R)) = 2$ و $\gamma(\Gamma(R)) = 1$.

قضیه ۶.۱.۳. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و برگشت‌پذیر باشد. در این‌صورت $\gamma(\Gamma(R)) = \gamma_t(\Gamma(R))$ یا $\gamma(\Gamma(R)) = \gamma_t(\Gamma(R)) - 1$.

برهان. با استدلالی مشابه برهان [۵۱، قضیه ۵.۲]، می‌توان آن‌را اثبات نمود. $\square$

گوییم حلقه R یک حلقه‌ی مک‌کوی اریب راست است هرگاه برای عناصر ناصفر $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x;\alpha,\delta]$، اگر $f(x)g(x) = 0$ آن‌گاه عنصر ناصفر $c \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که $f(x)c = 0$. حلقه‌ی مک‌کوی اریب چپ متناظراً تعریف می‌شوند، و اگر حلقه‌ی R مک‌کوی اریب چپ و راست باشد، آن‌گاه مک‌کوی اریب نامیده می‌شود.

در نتایج زیر، ارتباط بین عدد احاطه‌گری گراف‌های $\Gamma(R)$ و $\Gamma(R[x;\alpha,\delta])$، و همچنین ارتباط بین عدد احاطه‌گری گراف‌های $\Gamma(R)$ و $\Gamma(R[[x;\alpha]])$ را تعیین می‌کنیم.

قضیه ۷.۱.۳. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری راست، برگشت‌پذیر و (α,δ)ـ سازگار باشد. در این‌صورت $\gamma(\Gamma(R[x;\alpha,\delta])) = \gamma(\Gamma(R))$ یا $\gamma(\Gamma(R[x;\alpha,\delta])) = \gamma_t(\Gamma(R))$.

برهان. γـ مجموعه $D = \{f_1, f_2, \dots, f_k \mid f_i(0) \neq 0\}$ از گراف $\Gamma(R[x;\alpha,\delta])$ طوری در نظر می‌گیریم که $f_i(0) \neq 0$. قرار دهید $A = \{c_i \mid c_i = f_i(0), f_i \in D\}$. ادعا می‌کنیم که A یک مجموعه احاطه‌گر برای $\Gamma(R)$ است. فرض کنید $a \in Z(R) \setminus A$. ازآن‌جایی‌که $Z(R) \subseteq Z(R[x;\alpha,\delta])$، نتیجه می‌گیریم که $f_j \in D$ وجود دارد به‌طوری‌که $af_j = 0 = f_j a$، و چون R برگشت‌پذیر و (α,δ)ـسازگار است لذا $ac_j = 0 = c_j a$. چون $c_j \in A$، لذا A یک مجموعه احاطه‌گر از $\Gamma(R)$ است. بنابراین $\gamma(\Gamma(R)) \leq k = \gamma(\Gamma(R[x;\alpha,\delta)))$. از آن‌جایی‌که R حلقه‌ای نوتری راست و برگشت‌پذیر است، با استفاده از [۳۶، ملاحظه ۷.۲] برای بعضی

$m \in \mathbb{N}$، داریم $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{m} ann_R(c_i)$، که برای هر $i \in \{1, \ldots, m\}$، $ann_R(c_i)$ یک ایده‌آل اول وابسته ماکسیمال است. چون R برگشت‌پذیر و (α, δ)ـ سازگار است، بنابراین با استفاده از [۳۸، نتیجه ۱.۲]، حلقه R مک‌کوی اریب است و لذا برای هر عنصر $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in Z(R[x; \alpha, \delta])$، عنصر ناصفر $r \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $rf(x) = 0 = f(x)r$. چون R حلقه‌ای (α, δ)ـ سازگار است، بنابراین برای هر $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$، $ra_i = 0$، و در نتیجه $r \in Z(R)$. لذا با استفاده از [۳۶، قضیه ۸.۲]، $j \in \{1, \ldots, m\}$ موجود است به‌طوری‌که $ann_R(r) \subseteq ann_R(c_j)$. بنابراین $rf(x) = 0$ نتیجه می‌دهد که $c_j f(x) = 0$. در نتیجه $S = \{c_1, \ldots, c_m\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $\Gamma(R[x; \alpha, \delta])$ است. با توجه به قضیه ۳.۱.۳، S یک γ_tـ مجموعه از $\Gamma(R)$ است. بنابراین $\gamma(\Gamma(R[x; \alpha, \delta])) \leq \gamma_t(\Gamma(R))$، و لذا با استفاده از قضیه ۶.۱.۳، $\gamma(\Gamma(R[x; \alpha, \delta])) = \gamma(\Gamma(R))$ یا $\gamma(\Gamma(R[x; \alpha, \delta])) = \gamma_t(\Gamma(R))$. □

قضیه ۸.۱.۳. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری راست، برگشت‌پذیر و αـ سازگار باشد. دراین‌صورت $\gamma(\Gamma(R[[x; \alpha]])) = \gamma(\Gamma(R))$ یا $\gamma(\Gamma(R[[x; \alpha]])) = \gamma_t(\Gamma(R))$.

برهان. از آن‌جایی‌که R یک حلقه‌ی نوتری راست، برگشت‌پذیر و αـ سازگار است، لذا با استفاده از [۴۲، نتیجه ۷.۲]، αـ مک‌کوی نسبت به سری توانی است. بنابراین با استدلالی مشابه برهان قضیه ۷.۱.۳، می‌توان آن را ثابت کرد. □

با قرار دادن $\alpha = Id_R$ (نگاشت همانی) در قضیه ۸.۱.۳، نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۹.۱.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری راست و برگشت‌پذیر باشد. دراین‌صورت $\gamma(\Gamma(R[[x]])) = \gamma(\Gamma(R))$ یا $\gamma(\Gamma(R[[x]])) = \gamma_t(\Gamma(R))$.

۲.۳ عدد احاطه‌گری گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده

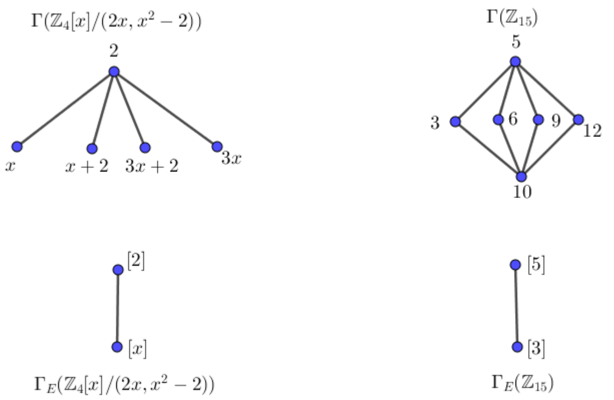
در این بخش، به بررسی عدد احاطه‌گری گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده $\Gamma_E(R)$ پرداخته، و ارتباط بین عدد احاطه‌گری گراف مقسوم‌علیه صفر و گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه‌ی دلخواه R (نه لزوماً جابه‌جایی) را تعیین می‌کنیم.

گزاره ۱.۲.۳. فرض کنید R حلقه‌ای دلخواه باشد. در این‌صورت $\gamma(\Gamma_E(R)) \leq \gamma(\Gamma(R))$.

برهان. بدیهی است. □

مثال ۲.۲.۳. حلقه‌های $\mathbb{Z}_{15}$ و $\mathbb{Z}_4[x]/(2x, x^2 - 2)$ را در نظر بگیرید. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که گراف مقسوم‌علیه صفر و گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده متناظر با حلقه‌های فوق به‌صورت زیر می‌باشند.

مشاهده می‌شود که $\gamma(\Gamma(\mathbb{Z}_{15})) = 2$ اما $\gamma(\Gamma_E(\mathbb{Z}_{15})) = 1$، و $\gamma(\Gamma_E(\mathbb{Z}_4[x]/(2x, x^2 - 2))) = \gamma(\Gamma(\mathbb{Z}_4[x]/(2x, x^2 - 2))) = 1$.



شکل ۱.۳

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید R حلقه‌ای باشد که $|\Gamma_E(R)| \geq ۲$. در این‌صورت $\gamma_t(\Gamma(R)) = \gamma_t(\Gamma_E(R))$.

برهان. فرض کنید $\gamma_t(\Gamma(R)) = m$ و $S = \{b_۱, \cdots, b_m\}$ یک γ_tــ مجموعه برای $\Gamma(R)$ باشد. اگر برای هر دو عنصر متمایز $b_i, b_j \in S$، $[b_i] \neq [b_j]$، آنگاه قرار دهید $D = \{[b_i] \mid b_i \in S\}$. به‌راحتی می‌توان نشان داد D یک مجموعه احاطه‌گر تام برای $\Gamma_E(R)$ است. حال فرض کنید $b_i, b_j \in S$ موجود باشند به‌طوری‌که $[b_i] = [b_j]$. بدون کم شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $[b_۱] = [b_۲]$. قرار دهید $D' = \{[b_۲] \cdots, [b_m]\}$. ادعا می‌کنیم D' یک مجموعه احاطه‌گر تام برای $\Gamma_E(R)$ نیست. فرض کنید D' یک مجموعه احاطه‌گر تام برای $\Gamma_E(R)$ باشد، هم‌چنین فرض کنید $b \in \Gamma(R)$ دلخواه باشد. اگر $k \in \{۲, \cdots, m\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $[b] = [b_k]$ یا برای هر $l \in \{۲, \cdots, m\}$، $[b] \neq [b_l]$، آن‌گاه $[b_j] \in D'$ موجود است به‌طوری‌که $[b]$ با $[b_j]$ مجاور است. لذا $\Gamma(R)$ توسط $\{b_۲, \cdots, b_m\}$ احاطه می‌شود که این با فرض اینکه S' یک γ_tــ مجموعه برای $\Gamma(R)$ در تناقض است. چون $ann(b_۱) = ann(b_۲)$ بنابراین $b_۱b_۲ = ۰$ و برای هر $i \neq ۲$، $b_۱b_i \neq ۰$. پس $[b] \in \Gamma_E(R) \setminus D'$ وجود داره به‌طوری‌که رأس $[b]$ با رأس $[b_۱]$ مجاور باشد (چون $\Gamma_E(R)$ همبند است). قرار می دهیم $D'' = D' \cup \{[b]\}$. بنابراین D'' یک مجموعه احاطه‌گر تام است و هم‌چنین یک γ_tــ مجموعه است. □

نتیجه ۴.۲.۳. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و برگشت‌پذیر باشد. در این‌صورت $\gamma(\Gamma(R)) = \gamma_t(\Gamma_E(R))$ یا $\gamma(\Gamma(R)) = \gamma_t(\Gamma_E(R)) - ۱$.

نتیجه ۵.۲.۳. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و برگشت‌پذیر باشد و $\gamma(\Gamma(R)) \neq ۱$. در این‌صورت $\gamma_t(\Gamma_E(R)) = |Max\{P \neq ۰ \mid P \in Ass(R)\}|$.

برهان. از قضایای ۳.۱.۳ و ۳.۲.۳ نتیجه می‌شود. □

گزاره ۶.۲.۳. اگر R دامنه باشد، آن‌گاه $\gamma(\Gamma_E(\mathbb{Z}_۲ \times R)) = ۱$.

برهان. فرض کنید R دامنه باشد و $R' \cong \mathbb{Z}_2 \times R$. در این‌صورت $\Gamma(R')$ یک گراف ستاره است. بنابراین $\Gamma_E(R') \cong K_2$. در نتیجه $\gamma(\Gamma_E(R')) = 1$. □

نتیجه ۷.۲.۳. اگر R دامنه باشد، آن‌گاه $\gamma_t(\Gamma_E(\mathbb{Z}_2 \times R)) = 2$.

۳.۳ عدد احاطه‌گری گراف یکه

مفهوم گراف یکه اولین بار توسط گریمالدی[1] در مرجع [۲۹] معرفی شد. کار او براساس حلقه‌های $\mathbb{Z}_n$، که در آن n عددی مثبت و $\mathbb{Z}_n$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه n است، بود. او گراف یکه $G(\mathbb{Z}_n)$ را به این صورت تعریف کرد، گرافی که رئوسش همه عناصر $\mathbb{Z}_n$ می‌باشند و دو راس x و y مجاورند اگر و تنها اگر $x+y$ در $\mathbb{Z}_n$ یکه باشد. اشرفی[2] و همکارانش در مرجع [۱۶]، مفهوم $G(\mathbb{Z}_n)$ را به $G(R)$، گراف یکه‌ی R تعمیم دادند، که R حلقه‌ای شرکت‌پذیر دلخواه با عنصر همانی غیرصفر می‌باشد.

یک رده‌بندی از حلقه‌های جابه‌جایی متناهی با عنصر همانی ناصفر که در آن‌ها گراف‌های یکه دارای عدد احاطه‌گری کمتر از ۴ می‌باشند، توسط کیانی و همکارانش در مرجع [۵۲] صورت گرفته است. در این بخش، ما بعضی از روابط بین عدد احاطه‌گری $G(R)$ و $G(R[[x;\alpha]])$ را مطالعه می‌کنیم، که در آن R حلقه‌ای αـ سازگار است.

تعریف ۱.۳.۳. گراف یکه از R، که با نماد $G(R)$ نشان می‌دهیم، گرافی است که رأس‌هایش همه عناصر R می‌باشد و دو رأس a و b در $G(R)$ مجاورند اگر و تنها اگر $a+b \in U(R)$.

توجه کنید که برای دو رأس متمایز a و b در $G(R)$، از علامت $a \approx b$ استفاده می‌کنیم هرگاه a و b مجاور باشند.

گزاره ۲.۳.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. دراین‌صورت $\gamma(G(R)) = 1$ اگر و تنها اگر R حلقه تقسیم باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید که R یک حلقه‌ی تقسیم باشد. ازآن‌جایی‌که هر عنصر ناصفر از R یکه است، برای هر $a \in R \setminus \{0\}$ داریم: $a = a + 0 \in U(R)$. بنابراین هر عنصر ناصفر از R با 0 مجاور است، در نتیجه $D = \{0\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از $G(R)$ است. بنابراین $\gamma(G(R)) = 1$.
بالعکس، فرض کنید که $\gamma(G(R)) = 1$ و $D = \{a\}$ یک γـ مجموعه از $G(R)$ باشد. اگر $a = 0$، نتیجه حاصل است. حال، فرض کنید که $a \neq 0$. از آن‌جایی‌که $\{a\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از $G(R)$ است، بنابراین $a = a + 0 \in U(R)$. ادعا می‌کنیم که هر عنصر ناصفر از $R \setminus \{a\}$ یکه است. فرض کنید $0 \neq b \in R \setminus \{a\}$. بنابراین $b + a \in U(R)$، لذا $t \in U(R)$ موجود است به‌طوری‌که $b = t - a$. به‌وضوح $t \neq a$، و لذا $t + a \in U(R)$. از سوی دیگر، چون $\{a\}$

[1] Grimaldi [2] Ashrafi

یک مجموعه احاطه‌گر است، لذا $a = -a$. درنتیجه $b = t - a \in U(R)$. بنابراین R یک حلقه تقسیم است. □

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنید R حلقه‌ای موضعی با ایده‌آل ماکسیمال ناصفر باشد. در این‌صورت $\gamma(G(R)) = ۲$.

برهان. با استفاده از گزاره ۲.۳.۳، واضح است که $\gamma(G(R)) \geq ۲$. فرض کنید $D = \{۰, ۱\}$. ادعا می‌کنیم که D یک مجموعه احاطه‌گر از $G(R)$ است. برای هر $x \in R \setminus D$، اگر $x \in M$، آن‌گاه عنصر ۱، x را احاطه می‌کند زیرا $۱ + x \in U(R)$؛ اگر $x \notin M$، آن‌گاه چون x خودش یک یکه از R است، عنصر ۰ ، x را احاطه می‌کند. بنابراین $\gamma(G(R)) = ۲$. □

فرض کنید α یک درونریختی از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت $h(x) \in R[[x; \alpha]]$ یکه است اگر و تنها اگر جمله ثابتش یکه باشد. بنابراین دو عنصر $f(x) = \sum a_i x^i$ و $g(x) = \sum b_j x^j$ در $G(R[[x; \alpha]])$ مجاورند اگر و تنها اگر $a_۰ + b_۰ \in U(R)$.

نتیجه‌ی زیر به‌طور مستقیم از قضیه ۳.۳.۳ حاصل می‌شود.

نتیجه ۴.۳.۳. فرض کنید R حلقه‌ای موضعی با ایده‌آل ماکسیمال ناصفر باشد. در این‌صورت $\gamma(G(R[[x; \alpha]])) = ۲$.

برهان. فرض کنید که R حلقه‌ای موضعی باشد. دراین‌صورت $R[[x; \alpha]]$ نیز حلقه‌ای موضعی است. بنابراین با استفاده از قضیه ۳.۳.۳، $\gamma(G(R[[x; \alpha]])) = ۲$. □

یادآوری می‌کنیم که حلقه‌ی R دوئو راست است اگر هر ایده‌آل راست، یک ایده‌آل دوطرفه باشد. در مرجع [۴۰]، اثبات شده که اگر R دوئو راست و (α, δ)ــ سازگار باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای $h(x) \in R[x; \alpha, \delta]$ یکه است اگر و تنها اگر جمله ثابت آن یکه و دیگر ضرایب آن پوچ‌توان باشند. بنابراین دو عنصر $f(x) = \sum a_i x^i$ و $g(x) = \sum b_i x^i$ در $G(R[x; \alpha, \delta])$ مجاور هستند اگر و تنها اگر $a_۰ + b_۰ \in U(R)$ و برای هر $i > ۰$، $a_i + b_i$ یک عنصر پوچ‌توان از R باشد.

با توجه به نتیجه ۴.۳.۳، اگر R حلقه‌ای موضعی با ایده‌آل ماکسیمال ناصفر باشد، آن‌گاه $\gamma(G(R)) = \gamma(G(R[[x; \alpha]])) = ۲$. اما، این تساوی برای گراف $G(R[x; \alpha, \delta])$ حتی زمانی که (R, M) حلقه‌ای موضعی و (α, δ)ــ سازگار باشد و $|R/M| = ۲^n$، برقرار نمی‌باشد. به‌عنوان مثال، حلقه‌ی $R = \mathbb{Z}_۴$ را در نظر بگیرید. بدیهی است که $\gamma(G(R)) = ۲$، اما مجموعه احاطه‌گر $G(R[x; \alpha, \delta])$ نامتناهی است.

در مرجع [۲]، افخمی[3] و همکارانش زیرگراف خاصی از $G(R[x])$ که با $G_m(R[x])$ نمایش داده می‌شود که در آن m عدد صحیح نامنفی است، را معرفی کردند. در واقع، رأس‌های $G_m(R[x])$ همه‌ی چندجمله‌ای‌ها از درجه m در $R[x]$ می‌باشند. در نتیجه‌ی زیر، ما عدد احاطه‌گری $G_m(R[x; \alpha, \delta])$ را تعیین می‌کنیم.

[3] Afkhami

قضیه ۵.۳.۳. فرض کنید (R,M) حلقه‌ای αـ صلب و متناهی باشد به‌طوری‌که $M \neq 0$ و $char(R/M) = 2$. دراین‌صورت $\gamma\big(G_m(R[x;\alpha,\delta])\big) = 2\big(k^{m-1}(k-1)\big)$ که در آن $|R| = k$.

برهان. فرض کنید که (R,M) حلقه‌ی موضعی متناهی باشد به‌طوری‌که $char(R/M) = 2$. در نتیجه R/M یک حلقه تقسیم و $G(R/M)$ یک گراف کامل است. قرار می‌دهیم $|R/M| = r$. از آن‌جایی‌که $char(R/M) = 2$، به‌آسانی دیده می‌شود که $G(R)$ یک گراف rـ بخشی کامل است که هم‌دسته‌های R/M تشکیل یک بخش برای $G(R)$ می‌دهند. فرض کنید $V_1, \dots, V_r$، rـ بخش از $V(G(R))$ باشند، که برای هر $i = 1, \dots, r$ داریم: $V_i = \{a_{i,1}, \dots, a_{i,s}\}$. ازآن‌جایی‌که R، αـ صلب است، بنابراین R کاهشی است، و لذا دو رأس $f(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j x^j$ از $G_m(R[x;\alpha,\delta])$ مجاور هستند اگر و تنها اگر $b_0 + c_0$ یکه باشد و برای هر $j = 1, \dots, m$، $b_j = -c_j$. قرار می‌دهیم $f(x) = b_0 + h(x)$ که $h(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i x^i$ و $b_m \neq 0$. مجموعه‌ی $A = \{a_{i,j} + h(x), a_{i,j} - h(x) \mid a_{i,j} \in R\}$ را در نظر بگیرید. برای هر دو عنصر $f, g \in A$، اگر $f = a_{t,l} \pm h(x)$ و $g = a_{t',l'} \pm h(x)$، آن‌گاه مسیرهای

$$a_{t,l} \pm h(x) \approx a_{j,i} \mp h(x) \approx a_{t',l'} \pm h(x)$$

که $t \neq j \neq t'$ و $1 \leq i \leq s$ وجود دارند. هم‌چنین، اگر $f = a_{t,l} + h(x)$ و $g = a_{t',l'} - h(x)$، آن‌گاه مسیر

$$a_{t,l} + h(x) \approx a_{j,i} - h(x) \approx a_{j',i} + h(x) \approx a_{t',l'} - h(x)$$

که $t \neq j \neq j' \neq t'$ و $1 \leq i \leq s$ وجود دارد. بنابراین A یک مؤلفه‌ی همبندی برای $G_m(R[x;\alpha,\delta])$ است. حال، حالت‌های زیر را برای A داریم:

حالت (۱): اگر $h(x) = -h(x)$، آن‌گاه A، rـ بخشی کامل با بخش‌های $V_i' = \{a_{i,1} + h(x), \dots, a_{i,s} + h(x)\}$ است که $1 \leq i \leq s$. مجموعه‌ی $D = \{a_{1,1} + h(x), a_{2,1} + h(x)\}$ را در نظر بگیرید. به‌وضوح D یک γـ مجموعه از A است. بنابراین $\gamma(R) = 2$.

حالت (۲): اگر $h(x) \neq -h(x)$، آن‌گاه برای هر $i \in \{1, \dots, r\}$، هر رأس از مجموعه‌ی $\{a_{i,1} + h(x), \dots, a_{i,s} + h(x)\}$ با هر رأس از مجموعه‌ی $\{a_{j,1} - h(x), \dots, a_{j,s} - h(x) \mid j \neq i, j \in \{1, \dots, r\}\}$ مجاور است، و هر رأس از مجموعه‌ی $\{a_{i,1} - h(x), \dots, a_{i,s} - h(x)\}$ با هر رأس از مجموعه‌ی $\{a_{j,1} + h(x), \dots, a_{j,s} + h(x) \mid j \neq i, j \in \{1, \dots, r\}\}$ مجاور است. به‌وضوح $D' = \{a_{1,1} + h(x), a_{1,1} - h(x), a_{2,1} + h(x), a_{2,1} - h(x)\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر از A است. ادعا می‌کنیم که D' یک γـ مجموعه است. فرض کنید برای بعضی $1 \leq i, j \leq r$ و $i \neq j$، $S = \{a_{i,1} + h(x), a_{i,1} - h(x), a_{j,1} + h(x)\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از A باشد. دراین‌صورت رأس‌های مجموعه $\{a_{i,1} + h(x), \dots, a_{i,s} + h(x)\}$ توسط S احاطه نمی‌شوند. لذا D' یک γـ مجموعه از A است. بنابراین $\gamma(A) = 4$.

می‌دانیم که تعداد انتخاب‌ها برای $h(x)$ برابر است با $k^{m-1}(k-1)$، که $|R| = k$. فرض کنید که برای t انتخاب $h(x)$، $h(x) = -h(x)$ به‌طوری‌که $0 \leq t \leq k^{m-1}(k-1)$. لذا $t + ((k^{m-1}(k-1)-t)/2)$ تعداد مؤلفه‌های همبندی $G_m(R[x;\alpha,\delta])$ می‌باشد. بنابراین با توجه به حالت‌های (۱) و (۲)، به‌راحتی می‌توان نشان داد که $\gamma(G_m(R[x;\alpha,\delta])) = 2(k^{m-1}(k-1))$. □

قضیه ۶.۳.۳. فرض کنید R یک حلقه دلخواه باشد. در این‌صورت $\gamma_t(G(R)) = \gamma_t(G(R[[x;\alpha]]))$.

برهان. فرض کنید که $\gamma_t(G(R)) = n$ و $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ یک γ_tـ مجموعه از $G(R)$ باشد. نشان می‌دهیم که S یک مجموعه احاطه‌گر تام برای $G(R[[x;\alpha]])$ است. فرض کنید $f(x)$ یک عنصر دلخواه از $R[[x;\alpha]]$ باشد. از آن‌جایی که $f(0) \in R$ و S یک مجموعه احاطه‌گر تام از $G(R)$ است، لذا $a_i \in S$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(0)+a_i \in U(R)$. در نتیجه $f(x)+a_i \in U(R[[x;\alpha]])$ و لذا S یک مجموعه احاطه‌گر تام از $G(R[[x;\alpha]])$ است. بنابراین $\gamma_t(G(R[[x;\alpha]])) \leq \gamma_t(G(R))$.

حال فرض کنید $\gamma_t(G(R[[x,\alpha]])) < \infty$. ادعا می‌کنیم γ_tـ مجموعه‌ای مانند D برای $G(R[[x,\alpha]])$ وجود دارد که برای هر $f, g \in D$، $f(0) \neq g(0)$. فرض کنید D طوری باشد که برای حداقل دو عنصر متمایز $f, g \in D$، $f(0) = g(0)$. در این‌صورت هر hای که با f مجاور باشد با g نیز مجاور است و هم‌چنین هر عنصر که با f مجاور باشد در D قرار ندارد. لذا به‌جای g، عنصر $g' = 1 - f$ را در نظر می‌گیریم. برای همه عناصر تکراری D این کار را انجام می‌دهیم. لذا یک γ_tـ مجموعه به‌صورت D' بدست می‌آوریم که برای هر $f, g \in D'$، $f(0) \neq g(0)$. قرار دهید $A = \{f_i(0) \mid f_i \in D'\}$. ادعا می‌کنیم که A یک مجموعه احاطه‌گر تام از $G(R)$ است. فرض کنید a یک عنصر دلخواه از R باشد. از آن‌جایی که $R \subseteq R[[x;\alpha]]$ و D یک مجموعه احاطه‌گر از $G(R[[x;\alpha]])$ است، لذا $f_j \in D$ وجود دارد به‌طوری‌که $a + f_j \in U(R[[x;\alpha]])$، در نتیجه $a + f_j(0) \in U(R)$. بنابراین A یک مجموعه احاطه‌گر تام از $G(R)$ است. در نتیجه $\gamma_t(G(R)) \leq \gamma_t(G(R[[x;\alpha]]))$. □

با توجه به قضیه ۶.۳.۳، ممکن است فکر کنید که نتیجه‌ی مشابه در مورد عدد احاطه‌گری نیز درست است. در واقع در حالت کلی در مورد درستی یا نادرستی تساوی $\gamma(G(R)) = \gamma(G(R[[x;\alpha]]))$ چیزی نمی‌دانیم.

ما این بخش را با سوال زیر به پایان می‌رسانیم.

سوال: فرض کنید R یک حلقه شرکت‌پذیر باشد. آیا تساوی $\gamma(G(R)) = \gamma(G(R[[x;\alpha]]))$ همیشه برقرار است؟

مراجع

[1] E. AbdalJawad and H. Al-Ezeh, Domination and independence numbers of $\Gamma(\mathrm{Z}_n)$, *Int. Math. Forum*, **3**(11) (2008), 503-511.

[2] M. Afkhami and F. Khosh-Ahang, Unit graphs of rings of polynomials and power series, *Arab. J. Math.*, **2** (2013), 233-246.

[3] S. Akbari, H. R. Maimani and S. Yassemi, When a zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph, *J. Algebra*, **270** (2003), 169-180.

[4] S. Akbari and A. Mohammadian, On the zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra*, **274** (2004), 847-855.

[5] A. Alhevaz and D. Kiani, On zero divisors in skew inverse Laurent series over non-commutative rings, *Comm. Algebra*, **42**(2) (2014), 469-487.

[6] A. Alhevaz and D. Kiani, McCoy property of skew Laurent polynomials and power series rings, *J. Algebra Appl.*, **13**(2) (2014), Article ID:1350083, 23 pp.

[7] B. Allen, E. Martin, E. New and D. Skabelund, Diameter, girth and cut vertices of the graph of equivalence classes of zero-divisors, *Involve*, **5**(1) (2012), 51-60.

[8] D. F. Anderson and A. Badawi, The total graph of a commutative ring, *J. Algebra*, **320**(7) (2008), 2706-2719.

[9] D. F. Anderson and J. D. LaGrange, Commutative Boolean monoids, reduced rings, and the compressed zero-divisor graph, *J. Pure Appl. Algebra*, **216** (2012), 1626-1636.

[10] D. F. Anderson and J. D. LaGrange, Abian's poset and the ordered monoid of annihilator classes in a reduced commutative ring, *J. Algebra Appl.*, **13**(8) (2014), Article ID: 1450070, 18 pp.

[11] D. F. Anderson and J. D. LaGrange, The semilattice of annihilator classes in a reduced commutative ring, *Comm. Algebra*, **43** (2015), 29-42.

[12] D. F. Anderson and J. D. LaGrange, Some remarks on the compressed zero-divisor graph, *J. Algebra*, **447** (2016), 297-321.

[13] D. F. Anderson and P. S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra*, **217** (1999), 434-447.

[14] D. F. Anderson and S. B. Mulay, On the diameter and girth of a zero-divisor graph, *J. Pure Appl. Algebra*, **210** (2007), 543-550.

[15] D. F. Anderson and M. Naseer, Beck's coloring of a commutative ring, *J. Algebra*, **159** (1993), 500-514.

[16] N. Ashrafi, H. R. Maimani, M. R. Pournaki and S. Yassemi, Unit graphs associated with rings, *Comm. Algebra*, **38** (2010), 2851-2871.

[17] M. Axtell, J. Coykendall and J. Stickles, Zero-divisor graphs of polynomials and power series over commutative rings, *Comm. Algebra*, **6** (2005), 2043-2050.

[18] F. Azarpanah, O. A. S. Karamzadeh and A. Rezai Aliabad, On ideals consisting entirely of zero-divisors, *Comm. Algebra*, **28** (2000), 1061-1073.

[19] I. Beck, Coloring of commutative rings, *J. Algebra*, **116** (1988), 208-226.

[20] M. Behboodi, Zero divisor graphs for modules over commutative rings. *J. Commut. Algebra*, **4**(2) (2012), 175-197.

[21] H. E. Bell, Near-rings in which each element is a power of itself, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **2** (1970), 363-368.

[22] V. Camillo and P. P. Nielsen, McCoy rings and zero-divisors, *J. Pure. Appl. Algebra*, **212** (2008), 599-615.

[23] P. M. Cohn, reversible rings, *Bull. London Math. Soc.*, **31** (1999), 641-648.

[24] F. R. DeMeyer, T. McKenzie and K. Schneider, The zero-divisor graph of a commutative semigroup, *Semigroup Forum*, **65**(2) (2002), 206-214.

[25] E. H. Feller, Properties of primary noncommutative rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **89** (1958), 79-91.

[26] D. E. Fields, Zero divisors and nilpotents in power series rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **27** (1971), 427-433.

[27] R. Gilmer, A. Grams and T. Parker, Zero divisors in power series rings, *J. Reine Angew. Math.*, **278/279** (1975), 145-164.

[28] K. R. Goodearl and R. B.Warfield, *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, 2nd edn., London Mathematical Society Student Texts, Vol. **61** (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).

[29] R. P. Grimaldi, *Graphs from rings*, in Proc. 20th Southeastern Conf. Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Boca Raton, FL, 1989, Congressus Numerantium **71** (Utilitas Mathematica Publishing, 1990), 95-103.

[30] J. M. Habeb, A note on zero commutative and duo rings, *Math. J. Okayama Univ.*, **32** (1990), 73-76.

[31] M. Habibi, A. Moussavi and A. Alhevaz, The McCoy condition on Ore extensions, *Comm. Algebra*, **41** (2013), 124-141.

[32] E. Hashemi, M. Abdi and A. Alhevaz, On the diameter of the compressed zero-divisor graph, *Comm. Algebra*, **45**(11) (2017), 4855-4864.

[33] E. Hashemi, M. Abdi and A. Alhevaz, On the diameter of the zero-divisor and the compressed zero-divisor graphs of skew Laurent polynomial rings, *J. Algebra Appl.*, **18**(7) (2019), Article ID: 1950126, 18 pp.

[34] E. Hashemi, M. Abdi, A. Alhevaz and H. Su, Domination number of graphs associated with rings, *J. Algebra Appl.*, (2020), 12 pp.

[35] A. Hashemi, M. Abdi, and A. Alhevaz, On the diameter of the compressed zero-divisor graphs of Ore extentions, Submitted.

[36] E. Hashemi, A. Alhevaz and E. Yoonesian, On zero divisor graph of unique product monoid rings over Noetherian reversible ring, *Categ. Gen. Algebr. Struct. Appl.*, **4** (2015), 95-114.

[37] Hashemi and E., Amirjan, R., Zero-divisor graphs of Ore extensions over reversible rings, *Canad. Math. Bull.*, **59**(4) (2016), 794-805.

[38] E. Hashemi, R. Amirjan and A. Alhevaz, On zero-divisor graphs of skew polynomial rings over non-commutative rings, *J. Algebra Appl.*, **16**(3) (2017), Article ID: 1750056, 14 pp.

[39] E. Hashemi, A. As. Estaji and M. Ziembowski, Answers on questions related to rings with Property (A), *Proc. Ed.*, **60** (2017), 651-664.

[40] E. Hashemi, M. Hamidizadeh and A. Alhevaz, Some types of ring elements in ore extensions over noncommutative rings, *J. Algebra Appl.*, **16**(11) (2017), Article ID:1750201.

[41] E. Hashemi and A. Moussavi, Polynomial extensions of quasi-Baer rings, *Acta Math. Hungar.*, **107** (2005), 207-224.

[42] E. Hashemi, M. Yazdanfar and A. Alhevaz, Directed Zero-divisor graph and skew power series ring, *Trans. Comb.*, **7** (2018), 43-57.

[43] M. Henriksen and M. Jerison, The space of minimal prime ideals of a commutative ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **115** (1965), 110-130.

[44] G. Hinkle and J. A. Huckaba, The generalized Kronecker function ring and the ring $R(X)$, *J. Reine Angew. Math.*, **292** (1977), 25-36.

[45] C. Y. Hong, N. K. Kim, Y. Lee and S. J. Ryu, Rings with Property (A) and their extensions, *J. Algebra*, **315** (2007), 612-628.

[46] J. A. Huckaba and J. M. Keller, Annihilation of ideals in commutative rings, *Pacific J. Math.*, **83** (1979), 375-379.

[47] J. A. Huckaba, *Commutative Rings with Zero-Divisors*, Marcel Dekker Inc., New York (1988).

[48] N. Jafari-Rad, S. H. Jafari and D. A. Mojdeh, On domination in zero-divisor graph, *Canad. Math. Bull.*, **56** (2013), 407-411.

[49] D. A. Jordan, Bijective extensions of injective ring endomorphisms, *J. London Math. Soc.*, **25** (1982), 435-448.

[50] I. Kaplansky, *Commutative rings,* Rev. ed. Chicago: Univ. of Chicago Press (1974).

[51] S. Kiani, H. R. Maimani and R. Nikandish, Some results on the domination number of a zero-divisor graph, *Canad. Math. Bull.*, **57** (2014), 573-578.

[52] S. Kiani, H. R. Maimani, M. R. Pournaki and S. Yassemi, Classification of rings with unit graphs having domination number less than four, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **133** (2015), 173-195.

[53] N. K. Kim and Y. Lee, Extensions of reversible rings, *J. Pure Appl. Algebra*, **210** (2007), 543-550.

[54] J. Krempa, Some examples of reduced rings, *Algebra Colloq.*, **3** (1996), 289-300.

[55] A. S. Kuzmina and Yu. N. Maltsev, On finite rings in which zero-divisor graphs satisfy the Dirac's condition, *Lobachevskii J. Math.*, **36** (2015), 375-383.

[56] T. Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Springer, New York (2001).

[57] T. G. Lucas, The diameter of a zero divisor graph, *J. Algebra*, **301** (2006), 174-193.

[58] H. R. Maimani, M. R. Pournaki and S. Yassemi, Zero-divisor graph with respect to an ideal, *Comm. Algebra*, **34** (2006), 923-929.

[59] G. Mason, Reflexive ideals, *Comm. Algebra*, **9**(17) (1981), 1709-1724.

[60] N. H. McCoy, Remarks on divisors of zero, *Amer. Math. Monthly*, **49** (1942), 286–295.

[61] D. A. Mojdeh and A. M. Rahimi, Dominating sets of some graphs associated to commutative rings, *Comm. Algebra*, **40** (2012), 3389-3396.

[62] L. Motais de Narbonne, *Anneaux semi-commutatifs et unis riels anneaux dont les id aux principaux sont idempotents*, Proceedings of the 106'th National Congress of Learned Societies, Bib. Nat., Paris, (1982).

[63] S. B. Mulay, Cycles and symmetries of zero-divisor, *Comm. Algebra*, **30** (2002), 3533-3558.

[64] A. R. Nasr-Isfahani and A. Moussavi, Skew Laurent polynomial extensions of baer and p.p.-rings, *Bull. Korean Math. Soc.*, **46** (2009), 1041-1050.

[65] P. P. Nielsen, Semi-commutativity and the McCoy condition, *J. Algebra*, **298**(1) (2006), 134-141.

[66] Y. Quentel, Sur la compacité du spectre minimal d'un anneau, *Bull. Soc. Math. France*, **99** (1971), 265-272.

[67] S. P. Redmond, The zero-divisor graph of a non-commutative ring, *Int. J. Commut. Rings*, **1** (2002), 203-211.

[68] P. K. Sharma and S. M. Bhatwadekar, A note on graphical representation of rings, *J. Algebra*, **176**(1) (1995), 124-127.

[69] G. Shin, Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **184** (1973), 43-60.

[70] S. Spiroff and C. Wickham, A zero divisor graph determined by equivalence classes of zero divisors, *Comm. Algebra*, **39** (2011), 2338-2348.

[71] H. Su And Y. Zhou, On the girth of the unit graph of a ring, *J. Algebra Appl.*, **13** (2014), 215–226.

[72] Sh. Yang, X. Song and Zh. Liu, Power-serieswise McCoy rings, *Algebra Colloq.*, **18** (2011), 301-310.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

احاطه‌گر	Domination
ایده‌آل اول	Prime ideal
ایده‌آل اول مینیمال	Minimal prime ideal
ایده‌آل اول وابسته	Associated prime ideal
ایده‌آل کاملاً اول	Completely prime ideal
ایده‌آل ماکسیمال	Maximal ideal
پوچ‌توان	Nilpotent
پوچ‌ساز	Annihilator
پوچساز چپ	Left annihilator
پوچساز راست	Right annihilator
تکریختی	Monomorphism
تکوار	Monoid
توسیع اور	Ore extesion
توسیع جردن	Jordan’s extension
حلقه‌ی آبلی	Abelian ring
حلقه‌ی برگشت‌پذیر	Reversible ring
حلقه‌ی چندجمله‌ای اریب	Skew polynomial ring
حلقه‌ی چندجمله‌ای اریب لوران	Skew Laurent polynomial ring
حلقه‌ی دوئو	Duo ring
حلقه‌ی سری‌های توانی اریب	Skew power series ring
حلقه‌ی سری‌های توانی اریب لوران	Skew Laurent power series ring
حلقه‌ی شرکت‌پذیر	Associative ring

حلقه‌ی فون‌نیومن منظم .... Von Neumann regular ring
حلقه‌ی کاهشی .... Reduced ring
حلقه‌ی کسرها .... Quotient ring
حلقه‌ی کسرهای کلاسیک .... Classical quotient ring
حلقه‌ی متقارن .... Symmetric ring
حلقه‌ی مک‌کوی چپ .... Left McCoy ring
حلقه‌ی مک‌کوی راست .... Right McCoy ring
حلقه‌ی مک‌کوی .... McCoy ring
حلقه‌ی منظم .... Regular ring
حلقه‌ی موضعی .... Local ring
حلقه‌ی نوتری .... Noetherian ring
حلقه‌ی نیم‌جابه‌جایی .... Semicommutative ring
حلقه‌ی αـ سازگار .... α-compatible ring
حلقه‌ی δـ سازگار .... δ-compatible ring
حلقه‌ی αـ صلب .... α-rigid ring

خاصیت (A) .... Property (A)
خاصیت (A) چپ .... Left property (A)
خاصیت (A) راست .... Right property (A)
خودتوان .... Idempotent
خودریختی .... Automorphism
خوش‌تعریف .... Well-defined

دامنه .... Domain
درون‌ریختی .... Endomorphism
دور .... Cycle

رأس .... Vertex

فاصله .... Distance

قطر .... Diameter

کاملاً بازتابنده .... Completely reflexive

کمر .... Girth

گراف جهت‌دار .... Directed graph

گراف دوبخشی .... Bipatite graph

گراف ستاره .... Star graph

گراف غیرجهت‌دار .... Undirected graph

گراف کامل .... Complete graph

گراف مقسوم‌علیه صفر .... Zero-divisor graph

گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده .... Compressed zero-divisor graph

گراف یکه .... Unit graph

عدد احاطه‌گری .... Domination number

عدد احاطه‌گری تام .... Total dominatin number

عدد احاطه‌گری نیم‌ـ تام .... Semi-total domination number

مجموعه احاطه‌گر .... Dominating set

مجموعه احاطه‌گر تام .... Total dominating set

مسیر .... Path

مک‌کوی اریب از نوع چندجمله‌ای لوران ... Skew McCoy ring of Laurent polynomial type

مک‌کوی نسبت به سری توانی .... McCoy power-serieswise

همبند .... Connected

همسایگی .... Neighborhood

یال .... Edge

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

حلقه‌ی آبلی	Abelian ring
پوچ‌ساز	Annihilator
ایده‌آل اول وابسته	Associated prime ideal
حلقه‌ی شرکت‌پذیر	Associative ring
خودریختی	Automorphism
گراف دوبخشی	Bipatite graph
حلقه‌ی کسرهای کلاسیک	Classical quotient ring
حلقه‌ی αــ سازگار	α-compatible ring
حلقه‌ی δــ سازگار	δ-compatible ring
گراف کامل	Complete graph
ایده‌آل کاملاً اول	Completely prime ideal
کاملاً بازتابنده	Completely reflexive
گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده	Compressed zero-divisor graph
همبند	Connected
دور	Cycle
قطر	Diameter
گراف جهت‌دار	Directed graph
فاصله	Distance
دامنه	Domain
احاطه‌گر	Domination
عدد احاطه‌گری	Domination number
حلقه‌ی دوئو	Duo ring

Edge .... یال
Endomorphism .... درونریختی

Girth .... کمر

Jordan’s extension .... توسیع جردن

Left annihilator .... پوچساز چپ
Left McCoy ring .... حلقه‌ی مک‌کوی چپ
Left property (A) .... خاصیت (A) چپ
Local ring .... حلقه‌ی موضعی

Maximal ideal .... ایده‌آل ماکسیمال
McCoy power-serieswise .... مک‌کوی نسبت به سری توانی
McCoy ring .... حلقه‌ی مک‌کوی
Minimal prime ideal .... ایده‌آل اول مینیمال
Monomorphism .... تکریختی
Monoid .... تکوار

Nilpotent .... پوچ‌توان
Noetherian ring .... حلقه‌ی نوتری

Ore extesion .... توسیع اور

Path .... مسیر
Prime ideal .... ایده‌آل اول
Property (A) .... خاصیت (A)

Quotient ring .... حلقه‌ی کسرها

حلقه‌ی کاهشی .... Reduced ring
حلقه‌ی منظم .... Regular ring
حلقه‌ی برگشت‌پذیر .... Reversible ring
پوچ‌ساز راست .... Right annihilator
حلقه‌ی مک‌کوی راست .... Right McCoy ring
خاصیت (A) راست .... Right property (A)
حلقه‌ی αـ صلب .... α-rigid ring

حلقه‌ی نیم‌جابه‌جایی .... Semicommutative ring
عدد احاطه‌گری نیم‌ـ تام .... Semi-total domination number
حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته .... Skew generalized power series ring
حلقه‌ی چندجمله‌ای اریب لوران .... Skew Laurent polynomials ring
حلقه‌ی سری‌های توانی اریب لوران .... Skew Laurent power series ring
مک‌کوی اریب از نوع چندجمله‌ای لوران .... Skew McCoy ring of Laurent polynomial type
حلقه‌ی چندجمله‌ای اریب .... Skew polynomials ring
حلقه‌ی سری‌های توانی اریب .... Skew power series ring
گراف ستاره .... Star graph
حلقه‌ی متقارن .... Symmetric ring

عدد احاطه‌گری تام .... Total dominatin number
مجموعه احاطه‌گر تام .... Total dominating set

گراف غیرجهت‌دار .... Undirected graph
گراف یکه .... Unit graph

رأس .... Vertex
حلقه‌ی فون‌نیومن منظم .... Von Neumann regular ring

خوش‌تعریف .... Well-defined

گراف مقسوم‌علیه صفر .... Zero-divisor graph

نمایه

Abstract

Studying algebraic structures by assigning graphs to them and examining their properties has been an interesting research topic in recent decades that has raised interesting algebraic questions and results. In this thesis, we are interested to study and investigate the compressed zero-divisor graph of a ring R and some of its extensions. We first study the diameter of the compressed zero-divisor graph $\Gamma_E(R)$, where R is a commutative ring. We give a complete characterization for the possible diameters of $\Gamma_E(R)$ exclusively in terms of the ideals of R. Also, we extend the concept of compressed zero-divisor graph to non-commutatve case, and study the diameter of the zero-divisor and also the compressed zero-divisor graphs over skew Laurent polynomial rings $\Gamma_E\big(R[x, x^{-1}; \alpha]\big)$ and over skew polynomial rings $\Gamma_E\big(R[x; \alpha, \delta]\big)$, where R is reversible and (α, δ)-compatible. Moreover, we investigate the domination number of the zero-divisor graph $\Gamma(R)$, the compressed zero-divisor graph $\Gamma_E(R)$ and the unit graph $G(R)$. Also, some relations between the domination number of $\Gamma(R)$ and $\Gamma\big(R[x; \alpha, \delta]\big)$, as well as the relations between the domination number of $G(R)$ and $G\big(R[[x; \alpha]]\big)$, are studied.

Keywords: Zero-divisor graph; Compressed zero-divisor graph; Skew Laurent polynomial ring; Skew polynomial ring; Skew power series ring; unit graph; Jordan's construction; Reversible ring; Diameter; Domination number.

Mathematics subject classification: Primary: 13A99, 16U99, 16S36, 16U80; Secondary: 05C69, 05C12.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Algebra

On the compressed zero-divisor graph of polynomial rings and power series rings

By: Mona Abdi

Supervisor:

Prof. Ebrahim Hashemi

Advisor:

Dr. Abdollah Alhevaz

February 2020