بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری جبر

بررسی برخی خواص عناصر شبه‌حلقه چندجمله‌ای‌های صفر- متقارن روی حلقه‌های جابه‌جایی

نگارنده: فاطمه شکوهی‌فر

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور

دکتر عبدالله آل‌هوز

بهمن ماه ۱۳۹۸

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۱: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود **خانم فاطمه شکوهی فر** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی محض ـ جبر ـ زمینه نظریه حلقه و مدول** به شماره دانشجویی **۹۴۰۰۶۴۵** ورودی **مهر ماه ۱۳۹۴** در تاریخ **۱۳۹۸/۱۱/۱۴** از رساله **نظری ■/ عملی□** خود با عنوان : **بررسی برخی خواص عناصر شبه حلقه چندجمله ای های صفر ـ متقارن روی حلقه های جابه جایی**
دفاع و با اخذ نمره ......۲۰...... به درجه : .....عالی..... نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☑	ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷ □
ج) درجه خوب: نمره۱۶/۹۹– ۱۵ □	د) مردود: کمتر از ۱۵ □

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد راهنما	استاد	
۲	دکتر عبدالله آل هوز	استاد مشاور	دانشیار	A.A
۳	دکتر علی اکبر استاجی	استاد مدعو خارجی	دانشیار	علی اکبر استاجی
۴	دکتر سیدحیدر جعفری	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۵	دکتر مهدی رضا خورسندی	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۶	دکتر مهدی قوتمند	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی **خانم فاطمه شکوهی فر** بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده : دکتر مهدی قوتمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده ریاضی

۹۸/۱۲/۴

تقدیم به

پدر عزیزم

و

مادر مهربانم

سپاس‌گزاری...

اکنون که به یاری پروردگار و یاری و راهنمایی اساتید بزرگوار موفق به انجام این رساله شده‌ام وظیفه‌ی خود دانسته که نهایت سپاسگزاری را از تمامی عزیزانی که در این راه به من کمک کرده‌اند به‌عمل آورم:

در آغاز از استاد بزگوار جناب آقای **دکتر ابراهیم هاشمی** که در کمال صبر و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و راهنمایی این رساله را بر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای **دکتر عبدالله آل‌هوز** که در امر مشاوره این رساله مساعدت نمودند و در این امر نهایت مراقبت، توجه و دقت خود را مبذول فرموده‌اند کمال تشکر و امتنان را دارم و برای ایشان از خداوند سلامت و سعادت ابدی را خواهانم.

هم‌چنین، از داوران گرامی، آقایان **دکتر علی اکبر استاجی**، **دکتر سید حیدر جعفری** و **دکتر مهدی رضا خورسندی** که زحمت داوری و تصحیح این رساله را برعهده داشتند سپاسگزارم.

در پایان، این رساله را تقدیم می‌کنم به خانواده عزیزم که همیشه یار و همراه من بوده‌اند.

فاطمه شکوهی‌فر
بهمن ماه ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **فاطمه شکوهی‌فر** دانشجوی دکتری دانشکده **علوم ریاضی** ، رشته **ریاضی محض** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی برخی خواص عناصر شبه‌حلقه چندجمله‌ای‌های صفر ـ متقارن روی حلقه‌های جابه‌جایی**، تحت راهنمایی **ابراهیم هاشمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود‘‘ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه شکوهی‌فر
بهمن ماه ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

به‌عنوان تعمیمی از حلقه‌ها، نظریه‌ی شبه‌حلقه‌ها در دهه‌های گذشته مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. در این رساله، ما علاقمند به مطالعه‌ی برخی خواص شبه‌حلقه‌ی صفر ـ متقارن چندجمله‌ای‌ها و شبه‌حلقه‌ی صفر ـ متقارن سری‌های توانی هستیم. در واقع، قصد داریم ساختار عناصری چون عناصر یکه، خودتوان، منظم، پوچ‌توان، π ـ منظم، تمیز و مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ی $R_0[x]$ را بررسی کنیم. سپس ساختار این عناصر را برای شبه‌حلقه‌ی صفر ـ متقارن اریب $R_0[x;\alpha,\delta]$ و شبه‌حلقه‌ی صفر ـ متقارن سری‌های توانی اریب $R_0[[x;\alpha]]$ مشخص می‌کنیم.

ما همچنین علاقمند به مطالعه‌ی برخی خواص رادیکالی شبه‌حلقه‌ی $R_0[x]$ هستیم. به‌ویژه، شبه ـ رادیکال $R_0[x]$ را مطالعه می‌کنیم و ارتباط بین آن و اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال $R_0[x]$ را مشخص می‌کنیم.

به‌علاوه، به بررسی ارتباط بین خواص جبری شبه‌حلقه‌ها و خواص گرافی گراف مقسوم‌علیه صفر (فشرده) متناظر با آن‌ها می‌پردازیم. در واقع، به مطالعه‌ی گراف‌های مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(R_0[x])$، $\Gamma(R_0[x;\alpha,\delta])$ و $\Gamma(R_0[[x;\alpha]])$ و گراف‌های مقسوم‌علیه صفر فشرده $\Gamma_E(R_0[x])$ و $\Gamma_E(R_0[[x]])$ می‌پردازیم و رده‌بندی کاملی از قطر این گراف‌ها ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی: شبه‌حلقه؛ عنصر یکه؛ عنصر خودتوان؛ عنصر منظم؛عنصر پوچ‌توان؛ عنصر π ـ منظم؛ عنصر تمیز؛ گراف مقسوم‌علیه‌صفر؛ قطر؛ حلقه‌ی متقارن؛ شبه ـ رادیکال؛ ایده‌آل چپ ماکسیمال.

رده‌بندی موضوعی ریاضیات: اولیه: ۱۶Y۳۰؛ ثانویه: ۱۶U۹۹، ۱۶U۶۰، ۰۵C۱۲.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. A. Alhevaz, E. Hashemi, and F. Shokuhifar, On zero-divisor of near-rings of polynomials, *Quaest. Math.*, (2018), 363-372.
2. E. Hashemi, F. Shokuhifar and A. Alhevaz, On quasi-radical of near-ring of polynomials, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **56**(2) (2019), 252–259.
3. E. Hashemi and F. Shokuhifar, On some type elements of zero-symmetric near-ring of polynomials, *J. Korean Math. Soc.*, **56**(1) (2019), 183–195
4. E. Hashemi, F. Shokuhifar and A. Alhevaz, On clean and regular elements of near-ring of skew polynomials, *Comm. Algebra*, accepted.
5. F. Shokuhifar, and E. Hashemi, On regular elements in near-ring of formal power series, *International Conference on Recent Achievement in Mathematical Science*, Yazd University, January 14–18, 2019.
6. E. Hashemi, F. Shokuhifar and A. Alhevaz, An alternative perspective on zero-divisors of near rings of polynomials and power series, submitted.
7. E. Hashemi, F. Shokuhifar and A. Alhevaz, Nearring of Ore extesions: Zero-divisor and regular elements, submitted.
8. E. Hashemi, F. Shokuhifar and A. Alhevaz, On the structure of zero-divisor elements in near-ring of skew formal power series, submitted.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

پیشگفتار

شبه‌میدان‌ها، اولین شبه‌حلقه‌هایی هستند که مورد توجه قرار گرفتند. در سال ۱۹۰۵ دیکسون [1] در مراجع [۳۱، ۳۲]، با تغییر در ضرب یک میدان متناهی، ساختار جدیدی ارائه داد که در آن قانون توزیع‌پذیری تنها از یک طرف برقرار بود. این میدان‌های تغییریافته را "شبه‌میدان‌های دیکسون" نامیدند. در سال ۱۹۳۶، زاسن‌هوس [2] در مرجع [۸۱]، همه‌ی شبه‌میدان‌های متناهی را رده‌بندی کرد. او نشان داد که هر شبه‌میدان متناهی از مرتبه p^n است، جایی‌که p یک عدد اول و n یک عدد طبیعی می‌باشد. او همچنین ثابت کرد که به غیر از ۷ حالت، هر شبه‌میدان متناهی، یک شبه‌میدان دیکسون است.

در سال‌های ۱۹۳۰ تا ۱۹۳۹، اُرِ [3] [۷۳] و تاسکی_تاد [4] [۸۰] به مطالعه و بررسی آنچه اکنون ما به عنوان شبه‌حلقه می‌شناسیم، پرداختند. اولین‌بار در سال ۱۹۳۶ زاسن‌هوس، از نام "شبه‌حلقه" برای این ساختار جدید استفاده کرد.

در واقع، شبه‌حلقه‌ها تعمیمی از حلقه‌ها هستند. به‌طور کلی، می‌توان گفت "مجموعه‌ی ناتهی N به همراه دو عمل دوتایی "+" و "$\cdot$" را یک شبه‌حلقه‌ی چپ می‌نامند و با نماد $(N,+,\cdot)$ نشان می‌دهند هرگاه $(N,+)$ گروه (نه لزوماً آبلی) باشد و به ازای هر $a,b,c\in N$، داشته باشیم $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$" در تعریف فوق، اگر قانون توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع، از سمت راست برقرار باشد، آن‌گاه N را شبه‌حلقه‌ی راست می‌نامیم. به عنوان مثال، فرض کنیم G یک گروه و $M(G)$ مجموعه‌ی همه‌ی نگاشت‌های از G به G باشد. در این‌صورت، $M(G)$ با جمع معمولی و ترکیب توابع تشکیل یک شبه‌حلقه راست می‌دهد که آن را با $(M(G),+,\circ)$ نشان می‌دهیم. توجه کنیم که حتی اگر G آبلی باشد، آن‌گاه قانون توزیع‌پذیری در $M(G)$ تنها از یک سمت برقرار است. در واقع، بنابه تعریف $f+g$، همیشه $(f+g)\circ h=f\circ h+g\circ h$ برقرار است اما $f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h$ زمانی برقرار است که f همریختی باشد.

در نظریه‌ی حلقه‌ها، نشان داده می‌شود که هر حلقه‌ای را می‌توان در حلقه‌ی همه‌ی درون‌ریختی‌های گروهی آبلی مانند G، نشاند. هیدرلی [5] و مالون [6] در مرجع [۵۰]، نشان دادند برای هر شبه‌حلقه‌ی N، گروهی آبلی مانند G وجود دارد به‌طوری‌که N در $M(G)$ نشانده می‌شود. از این‌رو ممکن است نظریه حلقه را به عنوان "نظریه خطی نگاشت‌های گروهی" و

[1] Dickson
[2] Zassenhaus
[3] Ore
[4] Taussky-Todd
[5] Heatherly
[6] Malone

شبه‌حلقه‌ها را به عنوان ”نظریه غیرخطی“ در نظر بگیرند. بسیاری از” نتایج خطی“ را می‌توان با اعمال تغییرات مناسب، به حالت کلی منتقل کرد. به عنوان مثال، ”اتم‌ها“ در نظریه حلقه‌ها، حلقه‌های اولیه، توسط قضیه‌ی چگالی معروف جیکوبسن[۷] توصیف شده‌اند. ویلانت[۸]، لاکستون[۹]، راماکوتایا[۱۰]، کارلی[۱۱] و اسکات[۱۲]، با استفاده از برهان‌های کاملاً متفاوت، نتایج مشابهی را درباره‌ی شبه‌حلقه‌های اولیه ارائه دادند.

بسیاری از مفاهیم در نظریه‌ی حلقه‌ها، با مقداری تفاوت در نظریه شبه‌حلقه‌ها نمایان می‌شوند. به عنوان مثال، رادیکال جیکوبسن حلقه‌ی R را با $J(R)$ نشان می‌دهند و با اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال R برابر است، یا به طور معادل با اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های راست ماکسیمال R برابر است. همچنین، بنابه [۶۱، نتیجه ۴.۲]، داریم $J(R)=\cap_{M\in\Delta}(R:M)$ جایی‌که Δ خانواده‌ی تمام Rـ مدول‌های چپ ساده است. به‌علاوه، حلقه‌ی R را Jـ نیم‌ساده می‌نامند هرگاه $J(R)=\circ$. اما در شبه‌حلقه (چپ)، تعریف رادیکال طیف گسترده‌تری را شامل می‌شود. شبه‌حلقه‌ی چپ N ممکن است هیچ Nـ گروه وفادار از نوع v، $v\in\{\circ,۱,۲\}$، نداشته باشد. لذا مفهوم دیگری در اینجا نمایان می‌شود. اگر $\cap_{\Gamma\in\Lambda}(\circ:\Gamma)=\circ$ که Λ خانواده‌ی تمام Nـ گروه‌های از نوع v است، آن‌گاه N را vـ نیم‌ساده می‌نامیم. به‌علاوه، این اشتراک را که نشان‌دهنده‌ی این است که N چه مقدار از vـ نیم‌ساده بودن فاصله دارد را vـ رادیکال می‌نامیم و با $J_v(N)$ نشان می‌دهیم. بنابراین $N/J_v(N)$ شبه‌حلقه‌ای vـ نیم‌ساده است. مطابق [۷۵، گزاره ۵.۳]، داریم $J_\circ(N)\subseteq J_۱(N)\subseteq J_۲(N)$ و اگر N شبه‌حلقه‌ای یکدار باشد، آن‌گاه $J_۱(N)=J_۲(N)$. به‌علاوه، اگر N حلقه باشد، آن‌گاه $J_\circ(N)=J_۱(N)=J_۲(N)=J(N)$ که $J(N)$ رادیکال جیکوبسن N است. همچنین، $J_v(N)$ را توسط ایده‌آل‌های راست vـ مدولار نیز توصیف کرده‌اند. مطابق [۷۵، قضیه ۵.۲]، برای هر $v\in\{\circ,۱,۲\}$، داریم $J_v(N)=\cap_{L\in\Upsilon}(L:N)$ که Υ خانواده‌ی تمام ایده‌آل‌های راست vـ مدولار N است. بچ[۱۳] در مرجع [۲۱] نشان داد که برای $v\in\{۱,۲\}$، $J_v(N)$ با اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های راست vـ مدولار از N برابر است. طبیعی است که این سؤال مطرح شود که چه اتفاقی برای اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های راست $\circ$ـ مدولار N می‌افتد؟ این اشتراک را با $J_{۱/۲}$ نشان می‌دهند و علت این نمادگذاری این است که در حالت کلی $J_{۱/۲}$ یک ایده‌آل راست است و لزوماً یک ایده‌آل دوطرفه از N نمی‌باشد. بنابه [۷۵، گزاره ۵.۷]، $J_\circ(N)\subseteq J_{۱/۲}(N)\subseteq J_۱(N)$. بچ در مرجع [۲۱] مثال‌هایی ارائه داد که نشان می‌دهد $J_\circ(N), J_{۱/۲}(N), J_۱(N)$ و $J_۲(N)$ حتی در حالتی که N شبه‌حلقه‌ای صفرـ متقارن و متناهی باشد، لزوماً با یکدیگر برابر نمی‌باشند.

ارتباط دادن مفاهیم موجود بین شاخه‌های مختلف ریاضیات یکی از روش‌های کارآمد برای بررسی کردن آن مفاهیم می‌باشد. نسبت دادن شئ ترکیبیاتی به شئ جبری دارای پیشینه‌ی نسبتاً طولانی می‌باشد. یکی از قدیمی‌ترین این تناظرها نسبت دادن گراف کیلی به یک گروه

[7]Jacobson
[8]Wielandt
[9]Laxton
[10]Ramakotaiah
[11]Kaarli
[12]Scott
[13]Betsch

می‌باشد که توسط آرتور کیلی[14] انجام گرفت و نتایج بسیاری از این تناظر به‌دست آمد. اولین ارتباط بین حلقه‌ها و گراف‌ها توسط بک[15] [۱۸] برقرار شد. بک به حلقه‌ی جابه‌جایی R، گراف مقسوم‌علیه صفر[16] R، که با $\Gamma(R)$ نمایش داده می‌شود، را نسبت داد. در این گراف، تمام عناصر حلقه به‌عنوان مجموعه‌ی رئوس گراف در نظر گرفته شده بودند و دو عنصر متمایز a و b با یکدیگر مجاور بودند اگر $ab = ۰$. البته تمرکز اصلی بک مشخص کردن عدد رنگی این گراف بود. در ادامه، اندرسون[17] و لیوینگستون[18] [۱۱] تعریف این گراف را اصلاح کردند و مجموعه‌ی رئوس گراف را مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی R که ناصفر هستند، در نظر گرفتند. اندرسون و لیوینگستون در مرجع [۱۱، قضیه ۳.۲] ثابت کردند که گراف $\Gamma(R)$ همیشه همبند است و $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) \leq ۳$. آن‌ها [۱۱، قضیه ۴.۲] همچنین نشان دادند اگر R یک حلقه‌ی آرتینی، جابه‌جایی و شامل دور باشد، آن‌گاه $\operatorname{gr}(\Gamma(R)) \leq ۴$ و حدس زدند که این نتیجه برای هر حلقه‌ی جابه‌جایی دلخواه برقرار است. حدس آن‌ها توسط مولای[19] [۶۹] و دیمیر[20] [۲۹] به‌طور مستقل اثبات شد.

سؤال مهم محققان این زمینه این بود که چگونه خواص حلقه‌ی R، ویژگی‌های گرافی $\Gamma(R)$ را مشخص می‌کند و بالعکس. پاسخ دادن به این سؤال بسیار جذاب بود، چرا که از روش‌های ساده محاسباتی تا مسایل پیشرفته در نظریه‌ی حلقه‌ها به کمک حل این مسائل آمدند. در خیلی از موضوعات، تمام حلقه‌هایی که گراف‌های آن‌ها دارای ویژگی خاصی بودند، رده‌بندی شدند. همان‌طور که انتظار می‌رفت بعد از نسبت دادن این گراف به حلقه، پژوهشگران زیادی به‌خصوص از شاخه‌ی جبر جذب این موضوع شدند و به مرور گراف‌های مختلفی که ایده‌ی اصلی آن‌ها گراف مقسوم‌علیه صفر بود به ساختارهای دیگر جبری نسبت داده شد.

مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر توسط ردموند[21] در مرجع [۷۸]، به حلقه‌های کلی و نه لزوماً جابه‌جایی گسترش داده شد. فرض کنیم $Z(R)$ بر مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی R و همچنین $Z(R)^*$ بر مجموعه‌ی (ناتهی) مقسوم‌علیه‌های صفر که ناصفر می‌باشند، دلالت دارد. در مرجع [۷۸]، ردموند گراف مقسوم‌علیه صفر بدون جهت حلقه ناجابه‌جایی R را با نماد $\overline{\Gamma}(R)$ نمایش داده است و ثابت کرد که گراف $\overline{\Gamma}(R)$ همبند است و $\operatorname{diam}(\overline{\Gamma}(R)) \leq ۳$.

گراف مقسوم‌علیه صفر در واقع یک نمایش گرافی از حلقه است که برخی خواص جدید جبری حلقه که از دید جبردانان دور مانده است را می‌توان از آن استخراج کرد. برای مثال، با استفاده از مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر در مرجع [۷۷] ثابت شده است که برای هر حلقه‌ی متناهی R، مجموع $\sum_{x\in R} |r_R(x) - \ell_R(x)|$ عددی زوج است، که در آن $r_R(x)$ و $\ell_R(x)$ به‌ترتیب پوچ‌ساز راست و چپ عنصر x در حلقه‌ی R می‌باشند.

در مطالعاتی که در این راستا انجام شده است، علاقه‌ی قابل توجهی وجود دارد که بدانیم آیا یک خاصیت گرافی مفروض برای حلقه‌ی مدنظر، تحت توسیع‌های حلقه‌ای مختلف، حفظ

[14] Arthur Cayley
[15] Beck
[16] Zero-divisor graph
[17] Anderson
[18] Livingston
[19] Mulay
[20] DeMeyer
[21] Redmond

می‌شود یا خیر. ابتدایی‌ترین توسیع‌هایی که در این راستا بررسی می‌شوند، توسیع حلقه‌ای چندجمله‌ای‌ها و نیز حلقه‌ی سری‌های توانی می‌باشد. آکستل[۲۲]، کویکندال[۲۳] و استیکلس[۲۴] در مرجع [۱۶]، محفوظ ماندن قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی جابه‌جایی R تحت توسیع‌های چندجمله‌ای و سری‌های توانی را مورد بررسی قرار داده‌اند. در ادامه‌ی این کار، افرادی چون لوکاس[۲۵] در مرجع [۶۵]، و همچنین اندرسون و مولای در مرجع [۱۲]، این ویژگی را مورد بررسی و مطالعه‌ی بیشتر قرار داده‌اند. هاشمی[۲۶] و امیرجان[۲۷] در مرجع [۴۱]، این نتایج را به حالت ناجابه‌جایی گسترش دادند. آن‌ها برای حلقه‌ی برگشت‌پذیر و σـ سازگار R، گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی سری‌های توانی اریب $R[[x;\sigma]]$ را مورد مطالعه قرار دادند و هم‌چنین، مقایسه‌ای از مقادیر ممکن برای قطر و کمر گراف‌های $\Gamma(R)$، $\Gamma(R[x;\sigma,\delta])$ و $\Gamma(R[[x;\sigma]])$ ارائه نمودند. آن‌ها در مرجع [۴۲] مطالعات خود را در این زمینه ادامه داده و به بررسی رابطه‌ی بین خواص حلقه‌ای حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x;\sigma,\delta]$ و خواص گرافی گراف مقسوم‌علیه صفر آن پرداخته‌اند. همچنین برای یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر و (σ,δ)ـ سازگار R یک دسته‌بندی کاملی از مقادیر ممکن برای قطر گراف $\Gamma(R[x;\sigma,\delta])$ ارائه کرده‌اند.

اسپایرف[۲۸] و ویکام[۲۹] در مرجع [۷۹] در سال ۲۰۱۱، با الهام گرفتن از ایده‌های مولای [۶۹] به مطالعه گراف کلاس‌های هم‌ارزی مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی R، که آن را با نماد $\Gamma_E(R)$ نشان می‌دهند، پرداختند. رئوس این گراف، کلاس‌های هم‌ارزی مقسوم‌علیه‌های صفر می‌باشند و دو رأس متمایز $[a]_R$ و $[b]_R$ با یکدیگر مجاورند هرگاه $ab=0$. آن‌ها ثابت کردند که گراف $\Gamma_E(R)$ همبند است و $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))\leq 3$.

این گراف دارای مزایایی نسبت به گراف مقسوم‌علیه صفر و گراف مقسوم‌علیه صفر مبتنی بر یک ایده‌آل[۳۰] R، می‌باشد. در بسیاری از حالات، $\Gamma_E(R)$ متناهی است اما $\Gamma(R)$ نامتناهی می‌باشد. به‌عنوان مثال، فرض کنید $S=\mathbb{Z}[x,y]/\langle x^3,xy\rangle$. در این‌صورت، $\Gamma(S)$ گرافی نامتناهی است اما $\Gamma_E(S)$ تنها دارای چهار رأس می‌باشد. از دیگر ویژگی‌های مهم گراف‌های کلاس‌های هم‌ارزی مقسوم‌علیه صفر ارتباط آن‌ها با ایده‌آل‌های اول وابسته[۳۱] R می‌باشد. به‌عنوان مثال، در حلقه‌ی S، پوچ‌ساز عنصر x^2 یک ایده‌آل اول وابسته از R می‌باشد. به‌طور کلی، ایده‌آل‌های اول وابسته R با رأس‌های متمایز $\Gamma_E(R)$ متناظر می‌شوند. به‌علاوه، هر رأس $\Gamma_E(R)$ در گراف، یا با یک ایده‌آل اول وابسته از R متناظر است یا با یک ایده‌آل اول وابسته از R مجاور است.

اندرسون و لاگرانژ[۳۲] در مرجع [۱۰] گراف $\Gamma_E(R)$ را گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده نامیده و مطالعه روی این گراف‌ها را ادامه دادند. آن‌ها بررسی کردند که اگر R و S دو حلقه باشند تحت چه شرایطی یکریختی $\Gamma_E(R)\cong\Gamma(S)$ برقرار می‌باشد.

[22] Axtel
[23] Coykendall
[24] Stickles
[25] Lucas
[26] Hashemi
[27] Amirjan
[28] Spiroff
[29] Wickham
[30] Zero divisor graph determined by an ideal
[31] Associated prime ideals
[32] Lagrange

در سال ۲۰۱۲ آلن[33] و همکارانش در مرجع [۷]، به بررسی و مطالعه قطر و کمر گراف $\Gamma_E(R)$ پرداختند. آن‌ها نشان دادند $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma(R))$ و همچنین ثابت کردند که اگر حلقه‌ی R شامل یک دور باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma_E(R)) \geq gr(\Gamma(R))$. آن‌ها در مرجع [۷، گزاره ۳.۳]، ثابت کردند اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی نوتری و شامل یک دور باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma_E(R)) \leq ۴$. هاشمی، عبدی[34] و آل‌هوز[35] در مرجع [۳۹]، رده‌بندی کاملی از قطر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه‌های R، $R[x]$ و $R[[x]]$ ارائه دادند.

کانن[36]، ردموند و نویربرگ[37] در مرجع [۲۴] به مطالعه‌ی گراف مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ها و نیم‌گروه‌ها پرداختند. فرض کنیم $Z(S)$ مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر نیم‌گروه صفرـ متقارن S باشد و $Z(S)^* = Z(S) \setminus \{۰\}$. آن‌ها در مرجع [۲۴]، گراف مقسوم‌علیه صفر بدون‌جهت نیم‌گروه صفرـ متقارن S، را با نماد $\overline{\Gamma}(S)$ نمایش داده و به این‌صورت تعریف کردند که در آن $Z(S)^*$ مجموعه‌ی رئوس گراف بوده و برای رئوس متمایز a و b از $Z(R)^*$، یالی بین a و b وجود دارد اگر و تنها اگر $ab = ۰$ یا $ba = ۰$. به‌علاوه، آن‌ها در [۲۴] ثابت کردند که گراف $\overline{\Gamma}(S)$ همیشه همبند است و $\operatorname{diam}(\overline{\Gamma}(S)) \leq ۳$ و اگر $\overline{\Gamma}(S)$ شامل یک دور باشد، آن‌گاه $gr(\overline{\Gamma}(S)) \leq ۴$.

مفهوم منظم بودن در حلقه‌ها، در سال ۱۹۳۶ توسط جان فن نویمان[38] ارائه شد. حلقه‌ی R را منظم می‌نامیم هرگاه برای هر عنصر $a \in R$، عنصری مانند $b \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که داشته باشیم $a = aba$.

اندرسون[39] و بداوی[40] در مرجع [۸]، عناصر منظم حلقه‌های جابه‌جایی را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که هر عنصر R منظم است اگر و تنها اگر R با بعد صفر یا شبه‌موضعی باشد و یک حلقه غیردامنه مانند R، منظم (بولی) است اگر و تنها اگر تمام مقسوم‌علیه‌های صفر آن منظم (خودتوان) باشد. در مرجع [۴۵]، نویسندگان ساختار عناصر منظم حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ را در حالتی که R حلقه‌ای دئو راست[41] و (α,δ)ـ سازگار است، مشخص کردند.

شبه‌حلقه‌های منظم توسط نویسندگانی مانند گودهاری[42]، گویال[43]، هیدرلی، هُنگان[44]، لای[45]، میسون[46] و مورتی[47] مطالعه و بررسی شده‌اند که می‌توان برای اطلاع از نتایج آن‌ها به کتاب [۷۵] مراجعه کرد.

این رساله شامل سه فصل اصلی به‌صورت زیر می‌باشد:

در فصل اول، به بیان برخی مفاهیم مقدماتی درباره‌ی حلقه، شبه‌حلقه، گراف، گراف مقسوم‌علیه صفر و گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده، که در این رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم.

[33] Allen
[34] Abdi
[35] Alhevaz
[36] Canon
[37] Neuerburg
[38] John Von Neumann
[39] Anderson
[40] Badawi
[41] Right duo
[42] Ghoudhari
[43] Goyal
[44] Hongan
[45] Ligh
[46] Mason
[47] Murty

در فصل دوم، ساختار عناصر وارون‌پذیر، خودتوان، منظم، پوچ‌توان، πـ منظم و تمیز شبه‌حلقه‌های $R_\circ[x]$، $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ و $R_\circ[[x;\alpha]]$ را مشخص می‌کنیم. به‌علاوه، به مطالعه‌ی شبه‌ـ رادیکال $R_\circ[x]$ و اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های راست ماکسیمال $R_\circ[x]$ می‌پردازیم و ارتباط بین آن‌ها را مشخص می‌کنیم. همچنین، نشان می‌دهیم که شبه‌ـ رادیکال $R_\circ[x]$، بزرگترین ایده‌آل شبه‌ـ منظم آن است.

در فصل سوم، به بررسی ساختار عناصر مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x]$ روی حلقه‌ی جابه‌جایی R پرداخته و قطر گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(R_\circ[x])$ را مشخص خواهیم کرد. سپس این نتایج را به شبه‌حلقه‌های $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ و $R_\circ[[x;\alpha]]$ تعمیم می‌دهیم. در انتها، گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده‌ی شبه‌حلقه‌های $R_\circ[x]$ و $R_\circ[[x]]$ را مطالعه می‌کنیم و رده‌بندی کاملی از قطر این گراف‌ها ارائه می‌دهیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در سراسر این نوشتار فرض می‌کنیم R حلقه‌ای یکدار و شرکت‌پذیر باشد. در این فصل، به معرفی مفاهیم و اطلاعاتی که در این رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم.

۱.۱ مفاهیم مورد نیاز از نظریه‌ی حلقه‌ها

تعریف ۱.۱.۱. عنصر a از حلقه‌ی R را پوچ‌توان[1] می‌نامیم، هرگاه عدد صحیح مثبت n وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a^n = 0$. مجموعه‌ی همه‌ی عناصر پوچ‌توان R را با $Nil(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. حلقه‌ی R را کاهشی[2] می‌نامیم، هرگاه عنصر پوچ‌توان ناصفر نداشته باشد. به‌عنوان مثال، اگر $Nil(R)$ ایده‌آلی از R باشد، آن‌گاه حلقه‌ی $R/Nil(R)$ کاهشی است.

تعریف ۳.۱.۱. حلقه‌ی R را متقارن[3] می‌نامیم، هرگاه برای هر $a, b, c \in R$، از $abc = 0$، نتیجه شود $bac = 0$.

قضیه ۴.۱.۱. [۵۷، قضیه ۲.۳] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای کاهشی و n یک عدد صحیح مثبت باشد. در این‌صورت، $R[x]/\langle x^n \rangle$ حلقه‌ای متقارن است.

---
[1] Nilpotent
[2] Reduced
[3] Symmetric

تذکر ۵.۱.۱. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن باشد و $a_1,\dots,a_n \in R$. در این‌صورت، به آسانی می‌توان دید که اگر $a_1a_2\cdots a_n = 0$، آن‌گاه برای هر $a_{i_j} \in \{a_1,\dots,a_n\}$، داریم $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n} = 0$.

تعریف ۶.۱.۱. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای دلخواه و ${}_RM_R$ دومدول باشد. در این‌صورت، $R(+)M = R \oplus M$ با جمع $(r_1,m_1)+(r_2,m_2) = (r_1+r_2,m_1+m_2)$ و ضرب $(r_1,m_1)\cdot(r_2,m_2) = (r_1r_2,r_1m_2+m_1r_2)$، تشکیل حلقه می‌دهد که آن را توسیع بدیهی[4] R توسط M می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۱. حلقه‌ی R را برگشت‌پذیر[5] می‌نامیم، هرگاه برای هر $a,b \in R$، از $ab = 0$ نتیجه شود $ba = 0$.

گزاره ۸.۱.۱. [۶۰، گزاره ۱.۶] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای کاهشی باشد. در این‌صورت، توسیع بدیهی R توسط R، حلقه‌ای برگشت‌پذیر است.

تعریف ۹.۱.۱. حلقه‌ی R را نیم‌جابه‌جایی[6] می‌نامیم، هرگاه برای هر $a,b \in R$، از $ab = 0$، نتیجه شود $aRb = 0$.

گزاره ۱۰.۱.۱. [۶۰، گزاره ۱.۲] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای کاهشی باشد. در این‌صورت، $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in R \right\}$ حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی است.

در مرجع [۶۶] عناصر پوچ‌توان حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها $R[x]$ روی حلقه‌ی نیم‌جابه‌جایی R بررسی شده و ساختار این عناصر مشخص گردیده است.

قضیه‌ی زیر از [۶۶، گزاره ۳.۳ و لم‌های ۳.۱ و ۳.۷] نتیجه می‌شود.

قضیه ۱۱.۱.۱. [۶۶] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی باشد. در این‌صورت، $Nil(R)$ ایده‌آلی از R است و $Nil(R[x]) = Nil(R)[x]$.

چون هر حلقه‌ی جابه‌جایی، حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی است، از این‌رو نتیجه‌ی بعد، مستقیماً از قضیه ۱۱.۱.۱، نتیجه می‌شود.

نتیجه ۱۲.۱.۱. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این‌صورت، $Nil(R)$ ایده‌آلی از R است و $Nil(R[x]) = Nil(R)[x]$.

قضیه ۱۳.۱.۱. [۲۶، قضیه ۲.۱] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای دلخواه باشد. در این‌صورت،

(۱) R دامنه است اگر و تنها اگر R حلقه‌ای اول و برگشت‌پذیر باشد.

---
[4] Trivial extension
[5] Reversible
[6] Semicommutative

(۲) R کاهشی است اگر و تنها اگر R حلقه‌ای نیم‌اول و برگشت‌پذیر باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. عنصر a از حلقه‌ی R را خودتوان[۷] می‌نامیم، هرگاه $a^2 = a$. به‌علاوه، مجموعه‌ی همه‌ی عناصر خودتوان R را با $Idem(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. حلقه‌ی R را آبلی[۸] می‌نامیم، هرگاه تمام عناصر خودتوان R مرکزی[۹] باشند.

مثال ۱۶.۱.۱. فرض می‌کنیم F یک میدان باشد و $R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$. نشان می‌دهیم که R آبلی نیست، اما اگر I یک ایده‌آل ناصفر از R باشد، آن‌گاه R/I حلقه‌ای آبلی است.
برای این منظور عناصر $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ از R را در نظر می‌گیریم. به‌آسانی می‌توان دید که $E \in Idem(R)$ اما $AE \neq EA$. بنابراین R آبلی نیست. از طرفی، $I_1 = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$، $I_2 = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ و $I_3 = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ تنها ایده‌آل‌های سره‌ی ناصفر از R هستند. چون $R/I_1 \cong F$، $R/I_2 \cong F$ و $R/I_3 \cong F \oplus F$، پس برای هر $i = 1, 2, 3$، R/I_i حلقه‌ای آبلی است.

تعریف ۱۷.۱.۱. حلقه‌ی R را ددکیند_متناهی[۱۰] می‌نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in R$، اگر $ab = 1$، آن‌گاه $ba = 1$. توجه می‌کنیم که اگر $ab = 1$، آن‌گاه $ba \in Idem(R)$، زیرا

$$(ba)^2 = (ba)(ba) = b(ab)a = ba.$$

از طرفی، چون R آبلی است، داریم $ba = (ba)(ab) = a(ba)b = (ab)^2 = 1$. بنابراین هر حلقه‌ی آبلی، ددکیند_متناهی است.

ارتباط بین حلقه‌هایی که تا کنون معرفی شدند، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{tikzcd}
\text{جابه‌جایی} \arrow[d] & & & & \\
\text{متقارن} \arrow[r] & \text{برگشت‌پذیر} \arrow[r] & \text{نیم‌جابه‌جایی} \arrow[r] & \text{آبلی} \arrow[r] & \text{ددکیند_متناهی} \\
\text{کاهشی} \arrow[u] & & & &
\end{tikzcd}$$

فرض می‌کنیم α یک درون‌ریختی از حلقه‌ی R باشد. تابع جمعی $\delta : R \longrightarrow R$ را یک تابع α_مشتق می‌نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in R$، داشته باشیم $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$. به‌علاوه،

[7] Idempotent
[8] Abelian
[9] Central
[10] Dedekind-finite

حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب روی[11] R را با $R[x;\alpha,\delta]$ نشان می‌دهیم. عناصر $R[x;\alpha,\delta]$ چندجمله‌ای‌هایی به فرم $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ هستند که $a_i \in R$ و $n \geq 0$. دو عمل جمع و ضرب روی $R[x;\alpha,\delta]$ به‌صورت طبیعی تعریف می‌شوند به‌طوری‌که برای هر $a \in R$، $xa = \alpha(a)x + \delta(a)$. اگر α همریختی همانی باشد، آن‌گاه $R[x;\alpha,\delta]$ را با $R[x;\delta]$ نشان می‌دهیم و آن را حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق[12] روی R می‌نامیم. هرگاه $\delta = 0$، به‌جای $R[x;\alpha,\delta]$ از $R[x;\alpha]$ استفاده می‌کنیم.

قرارداد ۱۸.۱.۱. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای دلخواه، δ تابعی αـ مشتق روی R و $j \geq i \geq 0$ اعداد صحیح باشند. در این‌صورت، مجموعه‌ی همه‌ی عبارت‌های بر حسب α و δ به‌طوری‌که در آن‌ها i بار α و $j-i$ بار δ ظاهر شده باشند را با f_i^j نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، $f_j^j = \{\alpha^j\}$، $f_0^j = \{\delta^j\}$ و $f_{j-1}^j = \{\alpha^{j-1}\delta, \alpha^{j-2}\delta\alpha, \ldots, \delta\alpha^{j-1}\}$.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض می‌کنیم δ یک تابع αـ مشتق روی حلقه‌ی R و I ایده‌آلی از R باشد. در این‌صورت، I را αـ ایده‌آل می‌نامیم، هرگاه $\alpha(I) \subseteq I$. همچنین، I را δـ ایده‌آل می‌نامیم، هرگاه $\delta(I) \subseteq I$. اگر I هم αـ ایده‌آل و هم δـ ایده‌آل باشد، آن‌گاه I را (α,δ)ـ ایده‌آل می‌نامیم.

تذکر ۲۰.۱.۱. فرض می‌کنیم δ یک تابع αـ مشتق روی R باشد. اگر I یک (α,δ)ـ ایده‌آل از R باشد، آن‌گاه نگاشت $\overline{\alpha} : R/I \longrightarrow R/I$ با ضابطه $\overline{\alpha}(a+I) = \alpha(a) + I$ یک درون‌ریختی است و $\overline{\delta} : R/I \longrightarrow R/I$ با ضابطه $\overline{\delta}(a+I) = \delta(a) + I$ یک تابع $\overline{\alpha}$ـ مشتق است.

تعریف ۲۱.۱.۱. حلقه‌ی R را αـ صلب[13] می‌نامیم، هرگاه درون‌ریختی $\alpha : R \longrightarrow R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in R$، از $a\alpha(a) = 0$، نتیجه شود $a = 0$. اگر R حلقه‌ای αـ صلب باشد، آن‌گاه R کاهشی و α یک‌به‌یک است، زیرا اگر $a^2 = 0$، آن‌گاه $(a\alpha(a))\alpha(a\alpha(a)) = 0$ و لذا $a = 0$. همچنین، اگر $\alpha(a) = 0$، آن‌گاه $a\alpha(a) = 0$، و در نتیجه $a = 0$.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض می‌کنیم δ یک تابع αـ مشتق روی حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت، حلقه‌ی R را αـ سازگار[14] می‌نامیم، هرگاه $a,b \in R$، $ab = 0$، آن‌گاه اگر و تنها اگر $a\alpha(b) = 0$. حلقه‌ی R را δـ سازگار می‌نامیم، هرگاه $a,b \in R$ و $ab = 0$، آن‌گاه $a\delta(b) = 0$. اگر R هم αـ سازگار و هم δـ سازگار باشد، آن‌گاه R را (α,δ)ـ سازگار می‌نامیم.

لم ۲۳.۱.۱. [۴۵، لم ۲.۱] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای (α,δ)ـ سازگار باشد و $a,b \in R$. در این‌صورت،

(۱) اگر $ab = 0$، آن‌گاه برای هر عدد صحیح نامنفی n، داریم $a\alpha^n(b) = 0 = \alpha^n(a)b$.

(۲) اگر برای عدد صحیح نامنفی k، داشته باشیم $\alpha^k(a)b = 0$، آن‌گاه $ab = 0$.

[11] Skew polynomial ring
[12] Derivation polynomial ring
[13] Rigid
[14] Compatible

(۳) اگر $ab = 0$، آن‌گاه برای هر عدد صحیح نامنفی n, m، داریم $\alpha^n(a)\delta^m(b) = 0 = \delta^m(a)\alpha^n(b)$.

(۴) اگر $ab = 0$، آن‌گاه $\alpha(a)\alpha(b) = 0 = \delta(a)\delta(b)$.

(۵) اگر $a^n = 0$، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n، داریم $(\alpha(a))^n = 0 = (\delta(a))^n$.

(۶) اگر $ab = 0$، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت m، در حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ داریم $ax^m b = 0$.

(۷) اگر برای عدد صحیح مثبت m، در حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ داشته باشیم $ax^m b = 0$، آن‌گاه $ab = 0$.

گزاره ۲۴.۱.۱. [۴۶، لم ۲.۲] فرض می‌کنیم δ یک تابع αـ مشتق روی حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت، R کاهشی و (α, δ)ـ سازگار است اگر و تنها اگر αـ صلب باشد.

بنابه گزاره ۲۴.۱.۱، هر حلقه‌ی αـ صلب، حلقه‌ای (α, δ)ـ سازگار است، اما مثال بعد نشان می‌دهد که حلقه‌ای وجود دارد که (α, δ)ـ سازگار است ولی αـ صلب نمی‌باشد.

مثال ۲۵.۱.۱. فرض می‌کنیم δ یک تابع αـ مشتق روی حلقه‌ی αـ صلب R باشد و $T_3(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in R \right\}$. در این‌صورت، درون‌ریختی α را می‌توان به درون‌ریختی $\overline{\alpha} : T_3(R) \longrightarrow T_3(R)$ با ضابطه $\overline{\alpha}((a_{ij})) = (\alpha(a_{ij}))$ توسیع داد. همچنین، $\overline{\delta} : T_3(R) \longrightarrow T_3(R)$ با ضابطه $\overline{\delta}((a_{ij})) = (\delta(a_{ij}))$ یک تابع $\overline{\alpha}$ـ مشتق بر $T_3(R)$ است. نشان می‌دهیم $T_3(R)$ حلقه‌ای $(\overline{\alpha}, \overline{\delta})$ـ سازگار است که $\overline{\alpha}$ـ صلب نمی‌باشد.

اگر $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \overline{\alpha}\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) = 0$، آن‌گاه

$$a_1\alpha(a_2) = 0 \tag{1}$$

$$a_1\alpha(b_2) + b_1\alpha(a_2) = 0 \tag{2}$$

$$a_1\alpha(c_2) + b_1\alpha(d_2) + c_1\alpha(a_2) = 0 \tag{3}$$

$$a_1\alpha(d_2) + d_1\alpha(a_2) = 0. \tag{4}$$

چون R کاهشی است، از (۱) نتیجه می‌گیریم $\alpha(a_2)a_1 = 0$. اگر $\alpha(a_2)$ را از چپ در (۲) ضرب کنیم، آن‌گاه $b_1\alpha(a_2) = \alpha(a_2)b_1 = 0$، و در نتیجه $a_1\alpha(b_2) = \alpha(b_2)a_1 = 0$. اگر $\alpha(a_2)$ را از چپ در (۳) ضرب کنیم، آن‌گاه $c_1\alpha(a_2) = \alpha(a_2)c_1 = 0$. پس (۳) به‌صورت

$$a_1\alpha(c_2) + b_1\alpha(d_2) = 0 \tag{5}$$

تبدیل می‌شود. اگر $\alpha(a_2)$ را از چپ در (۴) ضرب کنیم، آن‌گاه $a_1\alpha(d_2) = \alpha(d_2)a_1 = 0$ و $d_1\alpha(a_2) = \alpha(a_2)d_1 = 0$. اگر a_1 را از راست در (۵) ضرب کنیم، آن‌گاه $b_1\alpha(d_2) = \alpha(d_2)b_1 = 0$ و $a_1\alpha(c_2) = \alpha(c_2)a_1 = 0$. لذا

$$a_1a_2 = a_1b_2 = a_1c_2 = a_1d_2 = b_1a_2 = b_1d_2 = c_1a_2 = d_1a_2 = 0.$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} = 0. \qquad (*)$$

حال فرض می‌کنیم $(*)$ برقرار باشد. چون R حلقه‌ای αـ صلب است با استدلالی مشابه پاراگراف قبل می‌توان نشان داد که

$$a_1\alpha(a_2) = a_1\alpha(b_2) = b_1\alpha(a_2) = c_1\alpha(a_2) = d_1\alpha(a_2) = a_1\alpha(d_2) = a_1\alpha(c_2) = b_1\alpha(d_2) = 0,$$

و در نتیجه $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \overline{\alpha}\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) = 0$. بنابراین $T_3(R)$ حلقه‌ای $\overline{\alpha}$ـ سازگار است. فرض می‌کنیم $(*)$ برقرار باشد. در نتیجه

$$a_1a_2 = a_1b_2 = a_1c_2 = a_1d_2 = b_1a_2 = b_1d_2 = c_1a_2 = d_1a_2 = 0.$$

چون R حلقه‌ای αـ صلب است، لذا

$$a_1\delta(a_2) = a_1\delta(b_2) = a_1\delta(c_2) = a_1\delta(d_2) = b_1\delta(a_2) = b_1\delta(d_2) = c_1\delta(a_2) = d_1\delta(a_2) = 0.$$

بنابراین $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \overline{\delta}\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) = 0$، که نشان می‌دهد $T_3(R)$ حلقه‌ای $\overline{\delta}$ـ سازگار است. از طرفی، چون $T_3(R)$ کاهشی نیست، پس $\overline{\alpha}$ـ صلب نمی‌باشد.

لم ۲۶.۱.۱. [۵۴، گزاره ۶] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ صلب باشد. همچنین، فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ و $g = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j$ عناصری از حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ باشند. در این‌صورت، $fg = 0$ اگر و تنها اگر برای هر $0 \leq i \leq n$ و $0 \leq j \leq m$، داشته باشیم $a_ib_j = 0$.

لم ۲۷.۱.۱. [۳۶، گزاره ۱.۴] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ صلب باشد. همچنین، فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ و $g = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j$ عناصری از شبه‌حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ باشند. اگر $f \circ g = 0$، آن‌گاه $b_0 + b_1a_0 + \cdots + b_ma_0^m = 0$ و برای هر $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$، داریم $b_ja_i = 0$.

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض می‌کنیم δ یک تابع αـ مشتق روی R و I یک ایده‌آل از R باشد. دراین‌صورت، I را ایده‌آل αـ سازگار از R می‌نامیم، هرگاه برای هر $a,b \in R$، داشته باشیم $ab \in I$ اگر و تنها اگر $a\alpha(b) \in I$. همچنین، I را ایده‌آل δـ سازگار از R می‌نامیم، هرگاه برای هر $a,b \in R$، از $ab \in I$ نتیجه شود $a\delta(b) \in I$. به‌علاوه، اگر I هم αـ سازگار و هم δـ سازگار باشد، آن‌گاه I را ایده‌آل (α,δ)ـ سازگار می‌نامیم. به‌عنوان مثال، اگر $Nil(R)$ ایده‌آلی از R باشد، آن‌گاه $Nil(R)$ یک ایده‌آل (α,δ)ـ سازگار از R است.

گزاره ۲۹.۱.۱. [۳۵، گزاره ۲.۱] فرض می‌کنیم I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت، شرایط زیر معادلند:

(۱) I یک ایده‌آل (α,δ)ـ سازگار از R است.

(۲) R/I حلقه‌ای $(\overline{\alpha},\overline{\delta})$ـ سازگار است.

فرض می‌کنیم α یک درون‌ریختی از حلقه‌ی R باشد. حلقه‌ی سری‌های توانی اریب[15] روی R را با $R[[x;\alpha]]$ نشان می‌دهیم. عناصر آن همان سری‌های توانی با ضرایبی از R هستند. جمع و ضرب روی $R[[x;\alpha]]$ به‌صورت طبیعی تعریف می‌شود به‌طوری‌که برای هر $a \in R$، $xa = \alpha(a)x$.

لم ۳۰.۱.۱. [۴۹، لم ۲.۳] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ سازگار باشد. در این‌صورت،

(۱) اگر $ab = 0$، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n، داریم $a\alpha^n(b) = \alpha^n(a)b = 0$.

(۲) اگر برای برخی عدد صحیح مثبت k داشته باشیم $\alpha^k(a)b = 0$، آن‌گاه $ab = 0$.

(۳) اگر $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x;\alpha]]$ و $r \in R$، آن‌گاه $fr = 0$ اگر و تنها اگر برای هر i، $a_i r = 0$.

(۴) اگر $f \in R[[x;\alpha]]$ و $r \in R$، آن‌گاه $rf = 0$ اگر و تنها اگر $rxf = 0$.

۲.۱ مفاهیم مورد نیاز از نظریه‌ی شبه‌حلقه‌ها

شبه‌میدان‌ها، اولین شبه‌حلقه‌هایی هستند که مورد توجه قرار گرفتند. در سال ۱۹۰۵، دیکسون با تغییر در ضرب یک میدان متناهی، ساختار جدیدی ارائه داد که در آن قانون توزیع‌پذیری تنها از یک طرف برقرار بود. این میدان‌های تغییر یافته را "شبه‌میدان‌های دیکسون" نامیدند. در سال ۱۹۳۶، زاسن‌هوس همه‌ی شبه‌میدان‌های متناهی را رده‌بندی کرد. او نشان داد که هر شبه‌میدان متناهی از مرتبه p^n است، که p یک عدد اول و n یک عدد طبیعی می‌باشد. او همچنین ثابت کرد که به جز ۷ حالت، هر شبه‌میدان متناهی، یک شبه‌میدان دیکسون است. در سال‌های ۱۹۳۰ تا ۱۹۳۹ تحقیقات زیادی روی آن‌چه اکنون به نام شبه‌حلقه‌ها می‌شناسیم

[15]Skew formal power series ring

انجام شد. اولین‌بار در سال ۱۹۳۶ زاسن هوس، از نام "شبه‌حلقه" برای این ساختار جدید استفاده کرد.

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه‌ی ناتهی N به همراه دو عمل دوتایی "+" و "·" را یک شبه‌حلقه‌ی[۱۶] چپ می‌نامیم، هرگاه

(۱) $(N,+)$ یک گروه (نه لزوماً آبلی) باشد.

(۲) $(N,\cdot)$ یک نیم‌گروه باشد.

(۳) به ازای هر $a,b,c \in N$، داشته باشیم $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

اگر بجای (۳)، توزیع‌پذیری از راست برقرار باشد، آن‌گاه N را شبه‌حلقه‌ی راست می‌نامیم. به‌علاوه، N را آبلی می‌نامیم، هرگاه $(N,+)$ آبلی باشد.

قرارداد ۲.۲.۱. در سراسر این نوشتار فرض می‌کنیم N یک شبه‌حلقه‌ی چپ آبلی و یکدار باشد.

مثال ۳.۲.۱. (۱) فرض می‌کنیم G یک گروه جمعی (نه لزوماً آبلی) باشد. اگر $f,g:G\longrightarrow G$ دو تابع باشند و $x\in G$، آن‌گاه اثر f روی x را با $(x)f$ نشان می‌دهیم و $(x)(f\circ g)=((x)f)g$. فرض می‌کنیم $M(G)$ مجموعه‌ی تمام توابع روی G باشد. دو عمل دوتایی "+" و "∘" را روی $M(G)$ چنین تعریف می‌کنیم: برای هر $x\in G$ و $f,g\in M(G)$،

$$(x)(f+g)=(x)f+(x)g \quad \text{و} \quad (x)(f\circ g)=((x)f)g.$$

در این‌صورت، $(M(G),+,\circ)$ یک شبه‌حلقه‌ی چپ است.

(۲) میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت،

$$M_{diff}(\mathbb{R})=\{f:R\longrightarrow R \mid \text{یک تابع مشتق‌پذیر است } f\}$$

یک شبه‌حلقه‌ی چپ است.

تذکر ۴.۲.۱. فرض می‌کنیم N شبه‌حلقه‌ای دلخواه باشد. در این‌صورت، عضو خنثی چپ (راست)، وارون چپ (راست)، حذف‌پذیر از چپ (راست)، مقسوم‌علیه صفر چپ (راست)، خودتوان، پوچ‌توان، زیرشبه‌حلقه و همریختی مشابه مفاهیم فوق در حلقه‌ها تعریف می‌شود. به‌علاوه، مجموعه‌ی همه‌ی عناصر خودتوان N، مجموعه‌ی همه‌ی عناصر پوچ‌توان N، مجموعه‌ی همه‌ی عناصر وارون‌پذیر N و مجموعه‌ی همه‌ی عناصر مقسوم‌علیه صفر N را به‌ترتیب با $Idem(N)$، $Nil(N)$، $U(N)$ و $Z(N)$ نمایش می‌دهیم. عنصر $d\in N$ را توزیع‌پذیر می‌نامیم، هرگاه برای هر $a,b\in N$، $(a+b)d=ad+bd$. مجموعه‌ی همه‌ی عناصر توزیع‌پذیر N را با N_d نشان می‌دهیم.

[16] Near-ring

گزاره ۱.۲.۵. [۷۵، گزاره ۱.۵] فرض می‌کنیم N یک شبه‌حلقه باشد و $n, n' \in N$. در این‌صورت، $n0 = 0$ و $n(-n') = -nn'$ (0 عضو خنثی $(N, +)$ است).

تعریف ۱.۲.۶. فرض می‌کنیم N شبه‌حلقه‌ای دلخواه باشد. در این‌صورت، مجموعه‌های $N_0 = \{a \in N \mid 0a = 0\}$ و $N_c = \{a \in N \mid 0a = a\}$ را به ترتیب زیرمجموعه‌ی صفر–متقارن[17] و زیرمجموعه‌ی ثابت[18] N می‌نامیم. به‌علاوه، N را صفر–متقارن (ثابت) می‌نامیم، هرگاه $N = N_0$ ($N = N_c$). توجه داریم که N_0 و N_c زیرشبه‌حلقه‌هایی از N هستند.

تعریف ۱.۲.۷. شبه‌حلقه‌ی N را صحیح یا دامنه می‌نامیم، هرگاه هیچ مقسوم‌علیه صفر نابدیهی نداشته باشد. اگر شبه‌حلقه‌ی N صحیح باشد، آن‌گاه $N = N_0$ یا $N = N_c$. زیرا اگر $a \in N$ وجود داشته باشد که $0a \neq 0$، آن‌گاه برای هر $b \in N$، $0a(0ab - b) = 0ab - 0ab = 0$ و لذا $0ab = b$. در نتیجه $0b = 00ab = 0ab = b$. بنابراین $N = N_c$.

تعریف ۱.۲.۸. فرض می‌کنیم N شبه‌حلقه‌ای دلخواه باشد. در این‌صورت،

(۱) زیرگروه نرمال I از $(N, +)$ را یک ایده‌آل چپ می‌نامیم، هرگاه $NI \subseteq I$ و با نماد $I \lhd_\ell N$ نشان می‌دهیم.

(۲) زیرگروه نرمال I از $(N, +)$ را یک ایده‌آل راست می‌نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in N$ و $c \in I$، $(a + c)b - ab \in I$ و با نماد $I \lhd_r N$ نشان می‌دهیم.

(۳) زیرگروه نرمال I از $(N, +)$ را یک ایده‌آل می‌نامیم، هرگاه هم ایده‌آل راست و هم ایده‌آل چپ باشد و با نماد $I \lhd N$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱.۲.۹. [۷۵، گزاره ۱.۳] فرض می‌کنیم N شبه‌حلقه‌ای دلخواه باشد. در این‌صورت، $N_0 \lhd_r N$. اما در حالت کلی N_0 یک ایده‌آل N نیست.

تعریف ۱.۲.۱۰. فرض می‌کنیم N شبه‌حلقه‌ای دلخواه باشد. در این‌صورت، زیرگروه M از $(N, +)$ را یک N–زیرگروه[19] می‌نامیم، هرگاه $MN \subseteq M$.

گزاره ۱.۲.۱۱. [۷۵، گزاره ۱.۳۴] شبه‌حلقه‌ی N صفر–متقارن است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل راست N، یک N–زیرگروه از آن باشد.

تعریف ۱.۲.۱۲. شبه‌حلقه‌ی N را شبه‌میدان[20] می‌نامیم، هرگاه هر عنصر ناصفر N وارون‌پذیر باشد.

تعریف ۱.۲.۱۳. شبه‌حلقه‌ی صفر–متقارن N را موضعی[21] می‌نامیم، هرگاه $L = \{k \in N \mid kN \neq N\}$ یک N–زیرگروه باشد. بنابراین هر شبه‌میدان، یک شبه‌حلقه‌ی موضعی با $L = \{0\}$ می‌باشد.

[17] Zero-symmetric subset
[18] Constant subset
[19] Subgroup
[20] Near-field
[21] Local

تعریف ۱۴.۲.۱. عنصر a از شبه‌حلقه‌ی (حلقه‌ی) N را منظم[۲۲] می‌نامیم، هرگاه $b \in N$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a = aba$. مجموعه‌ی همه‌ی عناصر منظم N را با $\operatorname{vnr}(N)$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه، اگر $\operatorname{vnr}(N) = N$، آن‌گاه N را منظم می‌نامیم.
به‌عنوان مثال، هر شبه‌حلقه‌ی ثابت، منظم است. همچنین، بیدلمن[۲۳] در [۲۰] ثابت کرد که اگر G یک گروه باشد، آن‌گاه شبه‌حلقه‌های $M(G)$ و $M_\circ(G)$ منظم هستند.

تذکر ۱۵.۲.۱. فرض می‌کنیم N شبه‌حلقه‌ای دلخواه باشد و $a, b \in N$. اگر $a = aba$، آن‌گاه ab و ba خودتوان هستند. همچنین به آسانی می‌توان دید که هر تصویر همریختی، جمع مستقیم، ضرب مستقیم از شبه‌حلقه‌های منظم، منظم است.

قضیه ۱۶.۲.۱. [۷۵، قضیه ۹.۱۵۸] فرض می‌کنیم $N \neq \{\circ\}$ شبه‌حلقه‌ای منظم و یکدار باشد. در این‌صورت، شرایط زیر معادلند:

(۱) $N = N_\circ$ عنصر پوچ‌توان ناصفر ندارد.

(۲) همه‌ی عناصر خودتوان N، مرکزی هستند.

(۳) N یک ضرب زیرمستقیم از شبه‌میدان‌ها می‌باشد.

فرض می‌کنیم $R[x]$ مجموعه‌ی تمام چندجمله‌ای‌ها روی حلقه‌ی R باشد و $f = \sum_{i=\circ}^{n} a_i x^i, g = \sum_{j=\circ}^{m} b_j x^j \in R[x]$. تعریف می‌کنیم $g \circ f = \sum_{i=\circ}^{n} a_i g^i$. در این‌صورت، $(R[x], +, \circ)$ یک شبه‌حلقه‌ی چپ آبلی است و آن را شبه‌حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها می‌نامیم. همچنین، به آسانی می‌توان دید که شبه‌حلقه‌ی چپ $(R[x], +, \circ)$، حلقه نیست. به‌علاوه، $R_\circ[x] = \{f \in R[x] \mid (\circ)f = \circ\}$ زیرمجموعه‌ی صفر–متقارن شبه‌حلقه‌ی $R[x]$ می‌باشد و آن را شبه‌حلقه‌ی صفر–متقارن چندجمله‌ای‌ها می‌نامیم.
فرض می‌کنیم $R_\circ[[x]]$ مجموعه‌ی همه‌ی سری‌های توانی‌ای باشد که جمله ثابت آن‌ها صفر است. برای هر $f, g \in R_\circ[[x]]$، تعریف می‌کنیم $g \circ f = (g)f$. در این‌صورت، $(R[[x]], +, \circ)$ یک شبه‌حلقه‌ی چپ آبلی است و آن را شبه‌حلقه‌ی سری‌های توانی می‌نامیم.

گزاره ۱۷.۲.۱. [۲۲، گزاره ۳.۱] فرض می‌کنیم $R[x]$ شبه‌حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی حلقه‌ی R و $R_\circ[x]$ زیرمجموعه‌ی صفر–متقارن آن باشد. در این‌صورت، گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) R کاهشی است.

(۲) شبه‌حلقه‌ی $R[x]$ کاهشی است.

(۳) شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x]$ کاهشی است.

---

[22] Regular [23] Beidleman

تعریف ۱۸.۲.۱. ایده‌آل I از حلقه‌ی R را موضعاً پوچ‌توان[۲۴] می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی $\{s_۱, \dots, s_n\} \subseteq I$، عدد صحیح مثبت k وجود داشته باشد به‌طوری‌که حاصلضرب هر k عنصر از $\{s_۱, \dots, s_n\}$ صفر باشد. به عنوان مثال، هر ایده‌آل پوچ‌توان از R، یک ایده‌آل موضعاً پوچ‌توان است.

مجموع همه‌ی ایده‌آل‌های موضعاً پوچ‌توان حلقه‌ی R را رادیکال لویتسکی[۲۵] R می‌نامیم و آن را با $L-rad(R)$ نشان می‌دهیم. بنابراین $L-rad(R)$ بزرگترین ایده‌آل موضعاً پوچ‌توان حلقه‌ی R است.

هاشمی در مرجع [۳۷]، به مطالعه‌ی عناصر پوچ‌توان شبه‌حلقه‌ی $R[x]$ پرداخت که برخی از نتایج او به شرح زیر است.

قضیه ۱۹.۲.۱. [۳۷، قضیه ۳] اگر $Nil(R)$ یک ایده‌آل موضعاً پوچ‌توان از حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه $Nil(R[x]) = Nil(R)_۰[x]$.

نتیجه ۲۰.۲.۱. [۳۷، نتیجه ۲] اگر R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی باشد، آن‌گاه

$$Nil(R[x]) = Nil(R)_۰[x].$$

گزاره ۲۱.۲.۱. [۳۷، گزاره ۸] اگر $Nil(R)$ یک ایده‌آل موضعاً پوچ‌توان از حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه $Nil(R[x])$ یک ایده‌آل راست از شبه‌حلقه‌ی $R[x]$ است.

لم ۲۲.۲.۱. اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، آن‌گاه $Nil(R_۰[x]) = Nil(R)_۰[x]$ ایده‌آلی از $R_۰[x]$ است. به‌علاوه، $R_۰[x]/(Nil(R_۰[x])) \cong (R/Nil(R))_۰[x]$.

برهان. بنابه نتیجه ۲۰.۲.۱ و گزاره ۲۱.۲.۱، $Nil(R[x]) = Nil(R)_۰[x]$، یک ایده‌آل راست از $R[x]$ است و در نتیجه یک ایده‌آل راست از $R_۰[x]$ نیز می‌باشد. اکنون فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=۱}^{m} a_i x^i \in Nil(R_۰[x])$. برای هر $g \in R_۰[x]$، داریم

$$g \circ f = a_۱ g + \dots + a_m g^m \in Nil(R)_۰[x] = Nil(R_۰[x]).$$

بنابراین $Nil(R_۰[x])$ یک ایده‌آل دوطرفه از $R_۰[x]$ است. به آسانی می‌توان نشان داد که تابع $\varphi : R_۰[x] \longrightarrow (R/Nil(R))_۰[x]$ با ضابطه‌ی $\varphi(\sum_{i=۱}^{m} a_i x^i) = \sum_{i=۱}^{m} \bar{a}_i x^i$، که $\bar{a}_i = a_i + Nil(R)$، یک بروریختی شبه‌حلقه‌ای است و $R_۰[x]/Nil(R_۰[x]) \cong (R/Nil(R))_۰[x]$. □

فرض می‌کنیم R حلقه‌ای دلخواه باشد و $f \in R[x; \alpha, \delta]$. در این‌صورت، مجموعه‌ی همه‌ی ضرایب f را با C_f نشان می‌دهیم. به‌علاوه، $C_f^* = C_f \setminus \{۰\}$.

لم ۲۳.۲.۱. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای کاهشی باشد. در این‌صورت،

---
[24] Locally nilpotent
[25] Levitzki Radical

(۱) [۱۵، لم ۱] اگر f و g عناصری از حلقه‌ی $R[x]$ باشند، آن‌گاه $fg=0$ اگر و تنها اگر برای هر $a_i\in C_f$ و $b_j\in C_g$، $a_ib_j=0$.

(۲) [۲۲، لم ۳.۴] اگر f و g عناصری از شبه‌حلقه‌ی $R_0[x]$ باشند، آن‌گاه $f\circ g=0$ اگر و تنها اگر برای هر $a_i\in C_f$ و $b_j\in C_g$، $a_ib_j=0$.

در مراجع [۲۲] و [۴۳]، عناصر خودتوان شبه‌حلقه‌های $R[x]$ و $R_0[[x]]$ مورد بررسی قرار گرفته و ساختار این عناصر مشخص گردیده است.

لم ۲۴.۲.۱. [۲۲، لم ۳.۲] فرض می‌کنیم $R[x]$ شبه‌حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت،

(۱) اگر R کاهشی باشد و $\varepsilon\in Idem(R[x])$، آن‌گاه $\varepsilon=ex+c$ که $c\in R$ و e یک عنصر خودتوان از R است و $ec=0$.

(۲) اگر $\eta=\sum_{i=1}^{m}a_ix^i$ خودتوانی از $R_0[x]$ باشد، آن‌گاه a_1 خودتوانی از R است و اگر $m\geq 2$، آن‌گاه $a_m^{m+1}=0$. به‌علاوه، اگر R کاهشی باشد، آن‌گاه $\eta=ax$، که $a\in Idem(R)$.

لم ۲۵.۲.۱. [۴۳، لم ۲.۱] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای آبلی باشد. اگر $\varepsilon=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^i$ خودتوانی از $R_0[[x]]$ باشد، آن‌گاه $\varepsilon=a_1x$ که $a_1\in Idem(R)$.

چون هر حلقه‌ی جابه‌جایی، آبلی است، از لم ۲۵.۲.۱، می‌توان نتیجه‌ی زیر را به‌دست آورد.

نتیجه ۲۶.۲.۱. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $f\in R_0[x]$. در این‌صورت، $f\in Idem(R_0[x])$ اگر و تنها اگر $e\in Idem(R)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f=ex$. به‌ویژه، عناصر خودتوان $R_0[x]$ مرکزی هستند.

۳.۱ مفاهیم مورد نیاز از نظریه‌ی گراف

در این بخش، به معرفی و بیان برخی مفاهیم مورد نیاز از نظریه گراف می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱. گراف $G=(V(G),E(G))$ از یک مجموعه‌ی ناتهی $V(G)$ از عناصر، به نام رأس و یک مجموعه‌ی $E(G)$ از دوتایی‌های نامرتب روی $V(G)$ به نام یال[۲۶] تشکیل شده است. تعداد اعضای $V(G)$ را مرتبه و تعداد اعضای $E(G)$ را اندازه G می‌نامیم و به‌ترتیب با $|V(G)|$ و $|E(G)|$ نشان می‌دهیم. برای راحتی یال $e=\{x,y\}$ را با $e=xy$ یا $e=yx$ مشخص می‌کنیم.

تعریف ۲.۳.۱. در گراف G دو رأس x و y را مجاور می‌نامیم، هرگاه یالی بین آن دو موجود باشد. مجموعه‌ی همه‌ی رئوسی که با رأس x مجاور است را همسایگی x می‌گوییم و آن را با $N(x)$ نشان می‌دهیم.

[26] Edge

تعریف ۳.۳.۱. تعداد یال‌هایی که از رأس x در گراف G می‌گذرند را درجه آن رأس گویند و با نماد $\Delta(x)$ نمایش می‌دهیم. هر رأس درجه صفر را، رأس تنها و هر رأس درجه یک را، رأس پایانی گویند.

تعریف ۴.۳.۱. فرض می‌کنیم G و H دو گراف باشند. اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$، آن‌گاه H را زیرگراف[۲۷] G می‌نامیم.

تعریف ۵.۳.۱. یک مسیر[۲۸] در گراف G بین دو رأس u و v، دنباله‌ای از رئوس $x_1, \ldots, x_n$ است که $x_1 = v$ و $x_n = u$ و برای $1 \leq i \leq n-1$، x_iها متمایز هستند.

تعریف ۶.۳.۱. تعداد یال‌های مسیر P از گراف G، را طول مسیر P می‌نامیم و آن را با $l(P)$ نشان‌می‌دهیم.

تعریف ۷.۳.۱. هر مسیر بسته از گراف G را یک دور می‌نامیم. به‌علاوه، یک دور[۲۹] دارای حداقل ۳ رأس است.

تعریف ۸.۳.۱. فرض می‌کنیم u و v رأس‌های گراف G باشند. در این‌صورت، فاصله‌ی بین u و v، عبارت است از طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v، که آن را با $d(u,v)$ نمایش می‌دهیم. اگر بین این دو رأس مسیری وجود نداشته باشد، قرار می‌دهیم $d(u,v) = \infty$.

تعریف ۹.۳.۱. قطر[۳۰] گراف G را با $\operatorname{diam}(G)$ نشان می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{diam}(G) = sup\{d(x,y) \mid x,y \in V(G)\}.$$

تعریف ۱۰.۳.۱. طول کوتاه‌ترین دور در گراف G را کمر[۳۱] گوییم و با نماد $gr(G)$ نشان می‌دهیم. اگر گراف G فاقد دور باشد، آن‌گاه $gr(G) = \infty$.

تعریف ۱۱.۳.۱. گراف G همبند[۳۲] است، هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این‌صورت، گراف G را ناهمبند می‌نامیم.

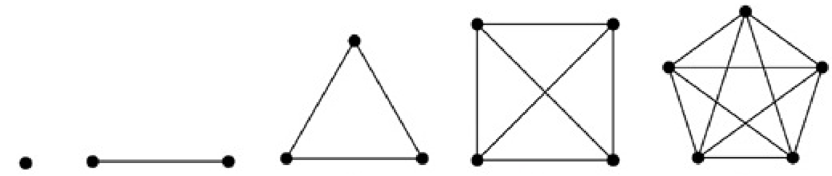
تعریف ۱۲.۳.۱. یالی که یک رأس گراف G را به خودش وصل می‌کند، طوقه[۳۳] می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۳.۱. گرافی را که طوقه نداشته باشد، گراف ساده[۳۴] می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۳.۱. گراف n رأسی را که در آن هر دو رأس با هم مجاورند، گراف کامل گوییم و با K_n نمایش می‌دهیم.

---

[27] Subgraph
[28] Path
[29] Cycle
[30] Diameter
[31] Girth
[32] Connected
[33] Loop
[34] Simple graph



شکل ۱.۱: گراف کامل

۴.۱ گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی R

گراف مقسوم‌علیه صفر اولین‌بار توسط بک در مرجع [۱۸]، معرفی شد. البته تمرکز اصلی بک مشخص کردن عدد رنگی این گراف بود. در ادامه، اندرسون و لیوینگستون [۱۱]، تعریف این گراف را اصلاح کردند و به مطالعه برخی ویژگی‌های آن پرداختند. در این بخش، برخی نتایج بدست آمده برای گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی R را ذکر می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۱. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و $Z(R)$ مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر R باشد. گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی R، گرافی است که مجموعه‌ی رئوس آن برابر $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$ است و دو رأس a, b مجاورند اگر و تنها اگر $ab = 0$.

قضیه ۲.۴.۱. [۱۱، قضیه ۲.۳] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این‌صورت، $\Gamma(R)$ همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$. به‌علاوه، اگر $\Gamma(R)$ شامل یک دور باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma(R)) \leq 7$.

اندرسون و لیوینگستون نشان دادند که اگر R یک حلقه‌ی آرتینی[35]، جابه‌جایی و شامل دور باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma(R)) \leq 4$ و حدس زدند که این نتیجه برای هر حلقه‌ی جابه‌جایی دلخواه برقرار است. حدس آن‌ها توسط مولای [۶۹] و دیمیر [۲۹] به‌طور مستقل اثبات شد.

در حالت کلی رفتار مقسوم‌علیه‌های صفر در حلقه‌ی کاهشی و حلقه‌ی غیرکاهشی بسیار متفاوت است. تفاوت عمده‌ی آن‌ها در این است که یک مقسوم‌علیه صفر نابدیهی در حلقه‌ی کاهشی باید حداقل در یک ایده‌آل اول مینیمال[36] قرار بگیرد اما نمی‌تواند مشمول در همه‌ی ایده‌آل‌های اول مینیمال باشد. بنابراین اگر R حلقه‌ی کاهشی باشد، $Z(R)$ اجتماعی از ایده‌آل‌های اول مینیمال است. لوکاس در [۶۵] قطر $\Gamma(R)$، $\Gamma(R[x])$ و $\Gamma(R[[x]])$ را منحصراً با استفاده از ویژگی‌های حلقه‌ی R رده‌بندی کرد. او برای حلقه‌های کاهشی رده‌بندی کاملی از هر سه گراف ارائه داد و برای حلقه‌ی غیرکاهشی موفق شد قطر $\Gamma(R)$ و $\Gamma(R[x])$ را رده‌بندی کند.

قضیه ۳.۴.۱. [۶۵، قضیه ۲.۶] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این‌صورت،

[35] Artinian
[36] Minimal prime ideal

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma(R))=0$ اگر و تنها اگر R با $\mathbb{Z}_4$ یا $\mathbb{Z}_2[y]/\langle y^2\rangle$ یکریخت باشد.

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma(R))=1$ اگر و تنها اگر برای هر دو مقسوم‌علیه صفر متمایز مانند x,y، $xy=0$ و R حداقل دو مقسوم‌علیه صفر نابدیهی داشته باشد.

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma(R))=2$ اگر و تنها اگر (الف) R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد و R حداقل سه مقسوم‌علیه صفر نابدیهی داشته باشد و یا (ب) $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد به‌طوری‌که $Z(R)^2\neq 0$ و هر جفت از مقسوم‌علیه‌های صفر متمایز R دارای پوچساز ناصفر باشند.

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma(R))=3$ اگر و تنها اگر عناصر مقسوم‌علیه صفر $a\neq b$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $(0:(a,b))=0$ و (الف) R کاهشی با بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال باشد، یا (ب) R غیرکاهشی باشد.

مک‌کوی[37] در سال ۱۹۴۲ ثابت کرد که اگر حلقه‌ی R جابه‌جایی باشد و f,g دو چند جمله‌ای ناصفر از $R[x]$ باشند به‌طوری که $fg=0$، آن‌گاه هر کدام از چندجمله‌ای‌های فوق دارای پوچسازی ناصفر در حلقه‌ی R می‌باشند. براساس این قضیه حلقه‌ی R را مک‌کوی گویند، هرگاه هر ایده‌آل متناهی تولید شده که مشمول در $Z(R)$ است دارای پوچساز ناصفر باشد. نیلسن[38] [۷۲] این مفهوم را به حلقه‌ی ناجابه‌جایی تعمیم داد. حلقه‌ی R مک‌کوی راست نامیده می‌شود، هرگاه f و g دو چندجمله‌ای ناصفر دلخواه از $R[x]$ باشند به‌طوری‌که $fg=0$، آن‌گاه عضو ناصفر $c\in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $fc=0$. حلقه‌ی مک‌کوی چپ نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود. کامیلو[39] و نیلسن در مرجع [۲۳] نشان دادند که خاصیت مک‌کوی به حلقه‌ی سری‌های توانی انتقال پیدا نمی‌کند و این در حالی است که این خاصیت به حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها منتقل می‌شود.

قضیه ۱.۴.۴. [۶۵، قضیه ۳.۴] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این‌صورت،

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x]))\geq 1$.

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x]))=1$ اگر و تنها اگر R حلقه‌ای غیرکاهشی باشد به‌طوری‌که $Z(R)^2=0$.

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x]))=2$ اگر و تنها اگر (الف) R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد، یا (ب) R حلقه‌ای مک‌کوی باشد و $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد و $Z(R)^2\neq 0$.

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x]))=3$ اگر و تنها اگر R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نباشد و یا R حلقه‌ای مک‌کوی نباشد یا $Z(R)$ ایده‌آل نباشد.

قضیه ۱.۴.۵. [۱۶، قضیه ۳.۲] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد که $R\neq\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. در این‌صورت، شرایط زیر معادلند:

---
[37] McCoy
[38] Nielsen
[39] Camillo

(۱) $\Gamma(R)$ گراف کامل است.

(۲) $\Gamma(R[x])$ گراف کامل است.

(۳) $\Gamma(R[[x]])$ گراف کامل است.

قضیه ۶.۴.۱. [۶۵، نتیجه ۴.۸] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی باشد. در این‌صورت، $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۲$ اگر و تنها اگر R دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد، یا R حلقه‌ای مک‌کوی باشد به‌طوری‌که $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد و $I + J$ دارای پوچساز ناصفر باشد که I و J ایده‌آل‌های شمارا تولید شده از R هستند که دارای پوچساز ناصفر می‌باشند.

قضیه ۷.۴.۱. [۶۵، قضیه ۴.۴] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی با بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال باشد. اگر $Z(R)$ ایده‌آلی از R نباشد، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۳$.

در حالتی که حلقه‌ی R کاهشی باشد برای حلقه‌ی سری‌های توانی $R[[x]]$ می‌توان رده‌بندی کاملی از قطر $\Gamma(R[[x]])$ را با استفاده از ایده‌آل‌های R بدست آورد.

قضیه ۸.۴.۱. [۶۵، قضیه ۴.۹] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی است به‌طوری‌که دامنه نیست. در این‌صورت، $۱ \leq \mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq \mathrm{diam}(\Gamma(R[x])) \leq \mathrm{diam}(\Gamma(R[[x]])) \leq ۳$. به‌علاوه، همه‌ی حالت‌های ممکن برای این قطرها به‌صورت زیر می‌باشد.

(۱) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۱$ و $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x])) = \mathrm{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۲$ اگر و تنها اگر R با $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ یکریخت باشد.

(۲) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = \mathrm{diam}(\Gamma(R[x])) = \mathrm{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۲$ اگر و تنها اگر R دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد و با $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ یکریخت نباشد، یا برای هر دو ایده‌آل شمارا تولید شده I و J که دارای پوچساز ناصفر هستند، $I + J$ پوچساز ناصفر داشته باشد.

(۳) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = \mathrm{diam}(\Gamma(R[x])) = ۲$ و $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۳$ اگر و تنها اگر R حلقه‌ای مک‌کوی باشد به‌طوری‌که $Z(R)$ ایده‌آلی از R است اما ایده‌آل‌های شمارا تولید شده‌ی I و J از R وجود دارند به‌طوری‌که دارای پوچساز ناصفر هستند ولی $I + J$ پوچساز ناصفر ندارد.

(۴) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۲$ و $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x])) = \mathrm{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۳$ اگر و تنها اگر $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد و هر ایده‌آل تولید شده توسط دو عنصر که مشمول در $Z(R)$ است، دارای پوچساز ناصفر باشد اما R حلقه‌ای مک‌کوی نباشد.

(۵) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = \mathrm{diam}(\Gamma(R[x])) = \mathrm{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۳$ اگر و تنها اگر R دارای بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال باشد و یک جفت از مقسوم‌علیه‌های صفر مانند a, b وجود داشته باشند به‌طوری‌که $\langle a, b\rangle$ دارای پوچساز ناصفر نباشد.

ردموند در مرجع [۷۸]، گراف مقسوم‌علیه صفر را به حلقه‌ی ناجابه‌جایی تعمیم داد و به بررسی قطر و کمر این گراف پرداخت.

تعریف ۹.۴.۱. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای دلخواه و $Z(R)^*$ مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر نابدیهی آن باشد. در این‌صورت، گراف مقسوم‌علیه صفر R، $\overline{\Gamma}(R)$، گرافی بدون جهت با مجموعه‌ی رئوس $Z(R)^*$ است به‌طوری‌که دو رأس a,b مجاورند، هرگاه $ab=0$ یا $ba=0$.

قضیه ۱۰.۴.۱. [۷۸، قضیه ۳.۲] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای دلخواه باشد. در این‌صورت، $\overline{\Gamma}(R)$ همبند است و $\operatorname{diam}(\overline{\Gamma}(R)) \leq 3$.

قضیه ۱۱.۴.۱. [۷۸، قضیه ۳.۳] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای دلخواه باشد. اگر $\overline{\Gamma}(R)$ شامل یک دور باشد، آن‌گاه $gr(\overline{\Gamma}(R)) \leq 4$.

کانن و ردموند و نویربرگ در مرجع [۲۴]، گراف مقسوم‌علیه صفر بدون جهت نیم‌گروه صفر_متقارن S، $\overline{\Gamma}(S)$، و گراف مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ی صفر_متقارن N، $\overline{\Gamma}(N)$، را مشابه تعریف ۹.۴.۱، تعریف کردند و قطر و کمر این گراف‌ها را مورد بررسی قرار دادند.

قضیه ۱۲.۴.۱. [۲۴، قضیه ۲.۲] فرض می‌کنیم S یک نیم‌گروه صفر_متقارن باشد. در این‌صورت، $\overline{\Gamma}(S)$ همبند است و $\operatorname{diam}(\overline{\Gamma}(S)) \leq 3$.

قضیه ۱۳.۴.۱. [۲۴، قضیه ۲.۴] فرض می‌کنیم S یک نیم‌گروه صفر_متقارن باشد. اگر $\overline{\Gamma}(S)$ دارای یک دور باشد، آن‌گاه $gr(\overline{\Gamma}(S)) \leq 4$.

۵.۱ گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده حلقه‌ی R

ویکام و اسپایرف در مرجع [۷۹] با الهام گرفتن از ایده مولای [۶۹] گراف کلاس‌های هم‌ارزی مقسوم‌علیه صفر را تعریف کردند. در مرجع [۱۰]، اندرسون و لاگرانژ گراف کلاس‌های هم‌ارزی مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی R تعریف شده توسط اسپایرف و ویکام را گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده نامیدند. آن‌ها شرایطی را بررسی کردند که تحت آن، حلقه‌ای مانند S موجود است به‌طوری‌که گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده‌ی حلقه‌ی R با گراف مقسوم‌علیه صفر S یکریخت است.

فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. برای هر $a,b \in R$، رابطه $\sim$ روی R را به این‌صورت تعریف می‌شود: $a \sim b$ اگر و تنها اگر $ann_R(a) = ann_R(b)$ که $ann_R(a) = \{r \in R | ar = 0\}$. به آسانی می‌توان مشاهده کرد که رابطه $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد. برای هر $a \in R$، $[a]_R = \{b \in R | a \sim b\}$. به‌وضوح $[0]_R = \{0\}$ و $[1]_R = R \setminus Z(R)$. عمل ضرب روی کلاس‌های هم‌ارزی به‌صورت $[a]_R \cdot [b]_R = [ab]_R$ تعریف می‌شود که این عمل خوش‌تعریف است.

تعریف ۱.۵.۱. گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده[۴۰] حلقه‌ی جابه‌جایی R، که آن را با نماد $\Gamma_E(R)$ نشان می‌دهند، گرافی است که رئوس آن کلاس‌های هم‌ارزی القا شده عناصر $Z(R)^*$ توسط رابطه $\sim$ می‌باشند و دو رأس متمایز $[a]_R$ و $[b]_R$ با یکدیگر مجاورند اگر و تنها اگر $[a]_R \cdot [b]_R = ۰$ اگر و تنها اگر $ab = ۰$.

گزاره ۲.۵.۱. [۷۹، گزاره ۱.۴] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری باشد. در این‌صورت، گراف $\Gamma_E(R)$ همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) \leq ۳$.

گزاره ۳.۵.۱. [۷، گزاره ۲.۱] اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \mathrm{diam}(\Gamma(R))$.

گزاره ۴.۵.۱. [۷، قضیه ۲.۲] اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۰$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۰$ یا ۱.

گزاره ۵.۵.۱. [۷، قضیه ۲.۳] اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۳$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۳$.

با توجه به گزاره‌های ۳.۵.۱ و ۵.۵.۱، برای حلقه‌ی جابه‌جایی R، قطر گراف $\Gamma_E(R)$ حداکثر ۳ است.

قضیه ۶.۵.۱. [۷، قضیه ۳.۱] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری باشد. اگر $\Gamma_E(R)$ شامل یک دور باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma_E(R)) \leq ۴$.

قضیه ۷.۵.۱. [۷، قضیه ۳.۳] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. اگر $\Gamma_E(R)$ شامل یک دور باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma_E(R)) \geq gr(\Gamma(R))$.

در مرجع [۳۹]، رده‌بندی کاملی برای قطر گراف‌های مقسوم‌علیه صفر فشرده $\Gamma_E(R)$ و $\Gamma_E(R[x])$ روی حلقه‌ی جابه‌جایی R ارائه شده است.

قضیه ۸.۵.۱. [۳۹، قضیه ۲.۳] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این‌صورت،

(۱) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۰$ اگر و تنها اگر $Z(R)^۲ = ۰$ و $|Z(R)| \geq ۲$.

(۲) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$ اگر و تنها اگر (الف) R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد و $|Z(R)| \geq ۳$، یا (ب) $|\Gamma_E(R)| = ۲$ و عنصر $a \in Z(R)^*$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $Z(R) = ann_R(a)$.

(۳) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R)) = ۲$ اگر و تنها اگر (الف) $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد و هر جفت از مقسوم‌علیه‌های صفر متمایز، دارای پوچ‌ساز ناصفر باشند و برای هر $a \in Z(R)$ داشته باشیم $Z(R) \neq ann_R(a)$، یا (ب) برای برخی $a \in Z(R)^*$ داشته باشیم $Z(R) = ann_R(a)$ و عناصر $x, y \in Z(R)^*$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $xy \neq ۰$ و $[x]_R \neq [y]_R$.

---
[40] Compressed zero-divisor graph

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=۳$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma(R))=۳$.

بنابه مرجع [۵۶]، حلقه‌ی جابه‌جایی R دارای خاصیت (A)[41] است اگر هر ایده‌آل متناهیاً تولیدشده از R که مشمول در مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر است، دارای پوچساز ناصفر باشد. خاصیت (A) اولین‌بار توسط کانتل[42] در مرجع [۷۶] مطالعه شد، که او به‌جای خاصیت (A) از اصطلاح شرط (C) استفاده کرده بود. کلاس حلقه‌های جابه‌جایی با خاصیت (A)، بسیار بزرگ است. حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها، حلقه‌هایی که حلقه‌ی کسرهای کلاسیک آن‌ها، منظم هستند [۵۲]، حلقه‌های نوتری [۵۸] و حلقه‌هایی که ایده‌آل‌های اول آن‌ها، ماکسیمال هستند [۵۲]، دارای خاصیت (A) می‌باشند. کاپلانسکی[43] در مرجع [۵۸]، نشان داد که حلقه‌های غیرنوتری وجود دارند به‌طوری‌که دارای خاصیت (A) نمی‌باشند.

قضیه ۱.۵.۹. [۳۹، قضیه ۳.۳] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این‌صورت،

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x]))=۰$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=۰$.

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x]))=۱$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=۱$.

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x]))=۲$ اگر و تنها اگر (الف) R دارای خاصیت (A) باشد، $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد و برای هر $a\in Z(R)$ داشته باشیم $Z(R)\neq ann_R(a)$، یا (ب) برای برخی $a\in Z(R)$ داشته باشیم $Z(R)=ann_R(a)$ و دو عنصر $b,c\in Z(R)^*$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $bc\neq ۰$ و $[b]_R\neq[c]_R$.

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x]))=۳$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x]))=۳$ اگر و تنها اگر R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نباشد و یا R دارای خاصیت (A) نباشد یا $Z(R)$ ایده‌آلی از R نباشد.

بنابه قضیه ۱.۵.۸، اگر R حلقه‌ای کاهشی باشد، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))\geq ۱$. بنابراین قضیه‌ی زیر همه‌ی حالت‌های قطر گراف $\Gamma_E(R[[x]])$ را برای حلقه‌ی جابه‌جایی و کاهشی R بیان می‌کند.

قضیه ۱.۵.۱۰. [۳۹، قضیه ۴.۳] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی باشد. در این‌صورت،

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))=۱$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=۱$.

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))=۲$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))=۲$ و $I+J$ دارای پوچساز ناصفر باشد که I و J هر دو ایده‌آل‌های شمارا تولید شده با پوچساز ناصفر می‌باشند.

---
[41] Prooerty (A)
[42] Quentel
[43] Kaplansky

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۳$ اگر و تنها اگر R بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد و ایده‌آل‌های شمارا تولید شده‌ی I و J وجود داشته باشند به‌طوری‌که دارای پوچساز ناصفر هستند اما $I+J$ پوچساز ناصفر نداشته باشد.

قضیه ۱.۵.۱۱. [۳۹، قضیه ۴.۴] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی باشد به‌طوری‌که دامنه صحیح نیست. در این‌صورت،

$$۱ \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) \leq ۳.$$

به‌علاوه، همه‌ی حالت‌های ممکن برای این قطرها به‌صورت زیر است.

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۱$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = ۱$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۱$ اگر و تنها اگر R دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد.

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۲$ اگر و تنها اگر $I+J$ دارای پوچساز ناصفر باشد که در آن I و J هر دو ایده‌آل‌های شمارا تولید شده با پوچساز ناصفر می‌باشند.

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۲$ و $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۳$ اگر و تنها اگر $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد و هر ایده‌آل تولید شده توسط دو عنصر که مشمول در $Z(R)$ است دارای پوچساز ناصفر باشد ولی R دارای خاصیت (A) نباشد.

(۴) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = ۲$ و $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۳$ اگر و تنها اگر R دارای خاصیت (A) باشد، $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد و R بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد و ایده‌آل‌های شمارا تولید شده‌ی I و J از R وجود داشته باشند به‌طوری‌که دارای پوچساز ناصفر هستند اما $I+J$ پوچساز ناصفر ندارد.

(۵) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = \operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۳$ اگر و تنها اگر R بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال داشته باشد و یک جفت از مقسوم‌علیه‌های صفر a,b وجود داشته باشند به‌طوری‌که $ann_R(\{a,b\}) = ۰$.

فصل ۲

بررسی عناصر منظم و πـ منظم شبه‌حلقه‌های چندجمله‌ای‌ها و سری‌های توانی

مفهوم منظم بودن در حلقه‌ها، در سال ۱۹۳۶ توسط جان فن نویمان ارائه شد. حلقه‌ی R را منظم می‌نامیم، هرگاه برای هر عنصر $a \in R$، $b \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که داشته باشیم $a = aba$. به‌عنوان مثالی ساده، هر میدان، حلقه‌ای منظم می‌باشد.

اندرسون و بداوی در مرجع [۸]، عناصر منظم حلقه‌های جابه‌جایی را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که هر عنصر R منظم است اگر و تنها اگر R با بعد صفر یا شبه‌موضعی باشد و یک حلقه غیر دامنه مانند R، منظم (بولی) است اگر و تنها اگر تمام مقسوم‌علیه‌های صفر آن منظم (خودتوان) باشد.

در این فصل به بررسی عناصر وارون‌پذیر، خودتوان، تمیز، منظم، پوچ‌توان و πـ منظم شبه‌حلقه‌های $R_\circ[x]$، $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ و $R_\circ[[x;\alpha]]$ می‌پردازیم. در آخر ارتباط بین اشتراک ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال $R_\circ[x]$ و شبه‌ـ رادیکال $R_\circ[x]$ را مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که شبه رادیکال $R_\circ[x]$، بزرگترین ایده‌آل شبه‌ـ منظم آن است.

مطالب این فصل برگرفته از مراجع [۴۷، ۴۸] می‌باشد.

۱.۲ بررسی عناصر منظم و تمیز شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x]$

در این بخش، به بررسی عناصر وارون‌پذیر، تمیز و منظم شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x]$ روی حلقه‌ی جابه‌جایی R می‌پردازیم.

قضیه ۱.۱.۲. فرض می‌کنیم N شبه‌حلقه‌ای باشد که عناصر خودتوان آن، مرکزی هستند. در این‌صورت،

(۱) فرض می‌کنیم $a \in N$. اگر $b \in N$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a = aba$، آن‌گاه $ab = ba$.

(۲) مجموعه‌ی $\mathrm{vnr}(N)$ ضربی بسته است.

(۳) $\mathrm{vnr}(N) \cap Nil(N) = \{\circ\}$.

(۴) $U(N) \cup Idem(N) \subseteq \mathrm{vnr}(N) \subseteq U(N) \cup Z(N)$.

(۵) $\mathrm{vnr}(N) = U(N) \cup \{\circ\}$ اگر و تنها اگر $Idem(N) = \{\circ, ۱\}$. به‌ویژه، اگر N صحیح یا موضعی باشد، آن‌گاه $\mathrm{vnr}(N) = U(N) \cup \{\circ\}$.

(۶) $\mathrm{vnr}(N)$ دارای عنصری غیر یکه و ناصفر است اگر و تنها اگر $Idem(N) \neq \{\circ, ۱\}$.

برهان. (۱) فرض می‌کنیم $a \in \mathrm{vnr}(N)$. لذا $b \in N$ وجود دارد به‌طوری‌که $a = aba$. چون ab و ba خودتوان هستند، پس $ab = (ab)^۲ = abab = a(ba)b = (ba)ab = b(ab)a = (ba)^۲ = ba$.

(۲) فرض می‌کنیم $a, a' \in \mathrm{vnr}(N)$. بنابراین عناصر $b, c \in N$ وجود دارند به‌طوری‌که $a = aba$ و $a' = a'ca'$. چون عناصر خودتوان N مرکزی هستند، پس بنابه (۱)، داریم $aa' = (aba)(a'ca') = aa'(cb)aa'$.

با استدلالی مشابه، می‌توان گزاره‌های دیگر را اثبات کرد. □

گزاره ۲.۱.۲. فرض می‌کنیم N شبه‌حلقه‌ای باشد که عناصر خودتوان آن، مرکزی هستند. اگر $a \in \mathrm{vnr}(N)$، آن‌گاه یک عنصر منحصر به فرد $b \in N$ وجود دارد به‌طوری‌که $aba = a$ و $bab = b$.

برهان. فرض می‌کنیم $a \in \mathrm{vnr}(N)$. پس $c \in N$ وجود دارد به‌طوری‌که $a = aca$. بنابه قضیه ۱.۱.۲، $ac = ca \in Idem(N)$. فرض می‌کنیم $b = cac$. بنابراین $aba = a$ و $bab = b$. حال فرض می‌کنیم $b_۱ \in N$ وجود دارد به‌طوری‌که $ab_۱a = a$ و $b_۱ab_۱ = b_۱$. بنابه قضیه ۱.۱.۲، داریم $ab_۱ = b_۱a \in Idem(N)$. بنابراین

$$b_۱ = b_۱ab_۱ = b_۱(aba)b_۱ = b_۱(ab_۱a)b = b_۱ab = b_۱(aba)b = bab_۱ab = b,$$

و در نتیجه b منحصر به فرد است. □

لم ۳.۱.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی باشد و $f=\sum_{i=1}^m a_ix^i, g=\sum_{j=1}^n b_jx^j \in R_0[x]$ و $c\in R$. اگر $g\circ f = cx$، آن‌گاه $a_1b_1=c$ و برای هر i,j که $i+j\neq 2$، $a_ib_j=0$.

برهان. فرض می‌کنیم $n=1$. در این‌صورت، $g\circ f = a_1(b_1x)+\cdots+a_m(b_1x)^m = cx$. بنابراین $a_1b_1=c$ و برای هر $i=2,\dots,m$، $a_ib_1^i=0$، و در نتیجه $a_ib_1=0$، زیرا R کاهشی است. حال، فرض می‌کنیم $n>1$. پس

$$g\circ f = a_1g+a_2g^2+\cdots+a_mg^m=cx. \qquad (1.2)$$

لذا $a_1b_1=c$ و $a_mb_n^m=0$، زیرا $a_mb_n^m$ ضریب پیشرو معادله ۱.۲ می‌باشد. چون R کاهشی است، پس $a_mb_n=0$. با ضرب b_n در معادله ۱.۲، داریم

$$b_na_1g+b_na_2g^2+\cdots+b_na_{m-1}g^{m-1}=b_ncx. \qquad (2.2)$$

بنابراین $b_na_{m-1}b_n^{m-1}=0$، زیرا ضریب پیشرو معادله ۲.۲ است. چون R کاهشی است، پس $b_na_{m-1}=a_{m-1}b_n=0$. به‌طور استقرایی، می‌توان نتیجه گرفت برای هر $i=1,\dots,m-2$، $b_na_i=0$. لذا بنابه معادله ۱.۲، داریم $(\sum_{j=1}^{n-1} b_jx^j)\circ(\sum_{i=1}^m a_ix^i)=cx$. با ادامه این روند، می‌توان ثابت کرد برای هر i,j که $i+j\neq 2$، $b_ja_i=0$. □

فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. یادآوری می‌کنیم که $f=\sum_{i=0}^m a_ix^i$ یک عنصر وارون‌پذیر از حلقه‌ی $R[x]$ است اگر و تنها اگر $a_0\in U(R)$ و برای هر $i\ge 1$، $a_i\in Nil(R)$. در قضیه زیر، عناصر وارون‌پذیر شبه‌حلقه‌ی $R_0[x]$ را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۴.۱.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $Nil(R)^2=0$. در این‌صورت، $f=\sum_{i=1}^m a_ix^i$ یک عنصر وارون‌پذیر از $R_0[x]$ است اگر و تنها اگر $a_1\in U(R)$ و برای هر $i\ge 2$، $a_i\in Nil(R)$.

برهان. فرض می‌کنیم $f\in U(R_0[x])$. بنابراین $g=\sum_{j=1}^n b_jx^j\in R_0[x]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f\circ g=g\circ f=x$. چون $Nil(R)$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R است، $R/Nil(R)$ حلقه‌ای کاهشی است. لذا $\bar f\circ\bar g=\bar g\circ\bar f=\bar 1x=(1+Nil(R))x$ که $\bar f=\sum_{i=1}^m (a_i+Nil(R))x^i$ و $\bar g=\sum_{j=1}^n(b_j+Nil(R))x^j$. پس بنابه لم ۳.۱.۲، برای هر $i=2,\dots,m$، داریم $\bar b_1\bar a_i=\bar 0$ و $\bar a_1\bar b_1=\bar b_1\bar a_1=\bar 1$. بنابراین $\bar a_i=\bar 0$ و در نتیجه برای هر $i=2,\dots,m$، $a_i\in Nil(R)$. به‌علاوه، چون $Nil(R)\subseteq J(R)$، پس $a_1\in U(R)$.

بالعکس، فرض می‌کنیم $f=\sum_{i=0}^n a_ix^{i+1}$، به‌طوری‌که $a_0\in U(R)$ و برای هر $i\ge 1$، $a_i\in Nil(R)$. نشان می‌دهیم f وارون راست و چپ دارد. چون R جابه‌جایی است، $f_1=\sum_{i=0}^n a_ix^i$ عنصر وارون‌پذیری از حلقه‌ی $R[x]$ است. لذا $g=\sum_{j=0}^m b_jx^j\in R[x]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f_1g=gf_1=1$. بنابه نتیجه ۱۲.۱.۱، داریم $g_1=\sum_{j=1}^m b_jx^j\in Nil(R)[x]$.

بنابراین $g_1^2 = 0$، زیرا $Nil(R)^2 = 0$. حال، $h = \sum_{t=1}^{m+1} h_t x^t$ را چنان پیدا می‌کنیم که $f \circ h = x$. برای این منظور توجه کنید که

$$\begin{aligned}
f \circ h &= x \\
&\Leftrightarrow h_1 f + h_2 f^2 + \cdots + h_{m+1} f^{m+1} = x \\
&\Leftrightarrow \big[h_1 + h_2 f + \cdots + h_{m+1} f^m\big] f = x \\
&\Leftrightarrow \big[h_1 + h_2 f + \cdots + h_{m+1} f^m\big] f_1 = 1 \\
&\Leftrightarrow \big[h_1 + h_2 f + \cdots + h_{m+1} f^m\big] = g \\
&\Leftrightarrow \big[h_2 x f_1 + \cdots + h_{m+1} x^m f_1^m\big] = g - h_1 \\
&\Leftrightarrow \big[h_2 x + \cdots + h_{m+1} x^m f_1^{m-1}\big] f_1 = g - h_1 \\
&\Leftrightarrow \big[h_2 x + \cdots + h_{m+1} x^m f_1^{m-1}\big] = (g - h_1) g \\
&\Leftrightarrow \big[h_3 x^2 f_1 + \cdots + h_{m+1} x^m f_1^{m-1}\big] = g^2 - h_1 g - h_2 x \\
&\Leftrightarrow \big[h_3 x^2 + \cdots + h_{m+1} x^m f_1^{m-2}\big] f_1 = g^2 - h_1 g - h_2 x \\
&\Leftrightarrow \big[h_3 x^2 + \cdots + h_{m+1} x^m f_1^{m-2}\big] = g^3 - h_1 g^2 - h_2 x g \\
&\vdots \\
&\Leftrightarrow g^{m+1} - h_1 g^m - \cdots - h_m x^{m-1} g - h_{m+1} x^m = 0 \\
&\Leftrightarrow h_1 = b_0,\ h_2 = b_0 b_1,\ h_3 = b_0^2 b_2 + b_0 b_1^2,\ \ldots, \\
h_{m+1} &= \sum_{i_1+\cdots+i_{m+1}=m} b_{i_1} \ldots b_{i_{m+1}} - h_1 \sum_{i_1+\cdots+i_m=r} b_{i_1} \ldots b_{i_m} - \cdots - h_m b_1.
\end{aligned}$$

بنابراین h وارون راست f است. چون $b_0 \in U(R)$ و برای هر $j \geq 2$، $b_j \in Nil(R)$، پس $h_1 \in U(R)$ و برای هر $j \geq 2$، $h_j \in Nil(R)$. لذا با استدلالی مشابه آنچه ذکر شد، می‌توان نتیجه گرفت که $k \in R[x]$ وجود دارد به‌طوری‌که $h \circ k = x$. بنابراین $h \in U(R_0[x])$، و لذا $f \in U(R_0[x])$. $\square$

نتیجه ۵.۱.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $Nil(R)^2 = 0$. در این‌صورت،

(۱) $U(R_0[x]) = U(R)x + Nil(R_0[x])$.

(۲) اگر R کاهشی باشد، آن‌گاه $U(R_0[x]) = \{ux \mid u \in U(R)\}$.

(۳) اگر $f \in R_0[x]$ وارون راست یا چپ داشته باشد، آن‌گاه f وارون‌پذیر است.

تعریف ۶.۱.۲. عنصر a را یک عنصر تمیز[1] از شبه‌حلقه‌ی N می‌نامیم، هرگاه عناصر $u \in U(N)$ و $e \in Idem(N)$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $a = u + e$. مجموعه‌ی همه عناصر تمیز N را با $\operatorname{cln}(N)$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه، N را تمیز می‌نامیم، هرگاه $\operatorname{cln}(N) = N$.

در قضیه بعد، ساختار عناصر تمیز شبه‌حلقه‌ی $R_0[x]$ را مشخص کنیم.

[1] Clean

قضیه ۷.۱.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $Nil(R)^۲ = ۰$. در این‌صورت،

(۱) $\operatorname{cln}(R_\circ[x]) = \{\sum_{i=۱}^{n} a_i x^i \mid a_۱ \in \operatorname{cln}(R), a_i \in Nil(R),\ i \geq ۲\}$.

(۲) شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x]$ تمیز نیست.

برهان. بنابه قضیه ۴.۱.۲ و نتیجه ۲۶.۲.۱، نتیجه حاصل می‌شود. □

گزاره ۸.۱.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $f \in R_\circ[x]$. در این‌صورت، شرایط زیر معادلند:

(۱) $f \in \operatorname{vnr}(R_\circ[x])$.

(۲) عنصر $u \in U(R_\circ[x])$ وجود دارد به‌طوری‌که $f = f \circ u \circ f$.

(۳) عناصر $u \in U(R_\circ[x])$ و $h \in Idem(R_\circ[x])$ وجود دارند به‌طوری‌که $f = u \circ h$.

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض می‌کنیم $f \in \operatorname{vnr}(R_\circ[x])$. پس $g \in R_\circ[x]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f = f \circ g \circ f$. بنابه قضیه ۱.۱.۲، $f \circ g = g \circ f \in Idem(R_\circ[x])$، و لذا بنابه نتیجه ۲۶.۲.۱، $e \in Idem(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $ex = f \circ g$. به‌وضوح $۱ - e \in Idem(R)$. فرض می‌کنیم $u = ex \circ g + (۱ - e)x$. با استفاده از نتیجه ۲۶.۲.۱، داریم

$$\begin{aligned}
u \circ [f + (۱-e)x] &= u \circ f + u \circ (۱-e)x \\
&= [ex \circ g + (۱-e)x] \circ ex \circ f + [ex \circ g + (۱-e)x] \circ (۱-e)x \\
&= ex \circ [ex \circ g + (۱-e)x] \circ f + [ex \circ g + (۱-e)x] \circ (۱-e)x \\
&= ex \circ g \circ f + (۱-e)x \\
&= ex + (۱-e)x \\
&= x
\end{aligned}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که $[f + (۱-e)x] \circ u = x$ و در نتیجه $u \in U(R_\circ[x])$. به‌علاوه، بنابه نتیجه ۲۶.۲.۱، داریم $(۱-e)x \circ f = f \circ (۱-e)x = f - f \circ ex = f - f \circ g \circ f = ۰$. بنابراین

$$f \circ u \circ f = f \circ [ex \circ g + (۱-e)x)] \circ f = [(f \circ ex) \circ g + f \circ (۱-e)x] \circ f = f \circ g \circ f = f.$$

(۳) $\Leftarrow$ (۲) فرض می‌کنیم $f = f \circ v \circ f$ که $v \in U(R_\circ[x])$ و $u = v^{-۱}$. چون $h = v \circ f \in Idem(R_\circ[x])$، پس $u \circ h = v^{-۱} \circ v \circ f = f$.

(۱) $\Leftarrow$ (۳) فرض می‌کنیم $f = u \circ h$ به‌طوری‌که $u \in U(R_\circ[x])$ و $h \in Idem(R_\circ[x])$. لذا بنابه نتیجه ۲۶.۲.۱، $e \in Idem(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $h = ex$. از این‌رو داریم

$$f \circ u^{-۱} \circ f = (ex \circ u) \circ u^{-۱} \circ f = ex \circ f = ex \circ u \circ ex = f,$$

زیرا عناصر خودتوان $R_\circ[x]$ مرکزی هستند. □

در قضیه بعد، ساختار عناصر منظم شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x]$ را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۹.۱.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این‌صورت،

$$\mathrm{vnr}(R_\circ[x]) = \{\textstyle\sum_{i=1}^m a_i x^i \in R_\circ[x] \mid\ a_1 = ue \text{ و } a_i \in e(Nil(R)),\ i \geq ۲,\ e \in Idem(R) \text{ و } u \in U(R)\}.$$

برهان. با استفاده از گزاره ۸.۱.۲، نتیجه ۲۶.۲.۱ و قضیه ۴.۱.۲ نتیجه حاصل می‌شود. □

نتیجه ۱۰.۱.۲. اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی باشد، آن‌گاه $\mathrm{vnr}(R_\circ[x]) = (\mathrm{vnr}(R))x$. به‌ویژه، اگر $\mathrm{vnr}(R)$ زیرحلقه‌ای از R باشد، آن‌گاه $\mathrm{vnr}(R_\circ[x]) = (\mathrm{vnr}(R))x$.

برهان. اگر $Nil(R) = ۰$، آن‌گاه بنابه قضیه ۹.۱.۲، $\mathrm{vnr}(R_\circ[x]) = (\mathrm{vnr}(R))x$. حال فرض می‌کنیم $\mathrm{vnr}(R)$ زیرحلقه‌ای از R باشد. دراین‌صورت، بنابه [۸، قضیه ۲.۹]، R کاهشی است و در نتیجه $\mathrm{vnr}(R_\circ[x]) = (\mathrm{vnr}(R))x$. □

قضیه ۱۱.۱.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $Nil(R)^۲ = ۰$. اگر $\mathrm{vnr}(R_\circ[x])$ زیرشبه‌حلقه‌ای از $R_\circ[x]$ باشد، آن‌گاه R کاهشی است و $\mathrm{vnr}(R_\circ[x]) = (\mathrm{vnr}(R))x$.

برهان. فرض می‌کنیم $f \in Nil(R_\circ[x])$. بنابه نتیجه ۵.۱.۲، $x + f \in U(R_\circ[x]) \subseteq \mathrm{vnr}(R_\circ[x])$. چون $\mathrm{vnr}(R_\circ[x])$ زیرشبه‌حلقه‌ای از $R_\circ[x]$ است، داریم $f = -x+(x+f) \in \mathrm{vnr}(R_\circ[x])$. لذا بنابه قضیه ۱.۱.۲، داریم $f \in \mathrm{vnr}(R_\circ[x]) \cap Nil(R_\circ[x]) = \{۰\}$. بنابراین $Nil(R_\circ[x]) = \{۰\}$ و در نتیجه بنابه گزاره ۱۷.۲.۱، R کاهشی است. لذا بنابه نتیجه ۱۰.۱.۲، $\mathrm{vnr}(R_\circ[x]) = (\mathrm{vnr}(R))x$. □

اندرسون و بداوی [۸، قضیه ۲.۱]، ثابت کردند که مجموعه‌ی همه‌ی عناصر منظم حلقه‌ی جابه‌جایی R، یک مجموعه‌ی ضربی بسته است. بنابراین می‌توان نتیجه زیر را به‌دست آورد.

نتیجه ۱۲.۱.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $Nil(R)^۲ = ۰$. در این‌صورت، $\mathrm{vnr}(R_\circ[x])$ زیرشبه‌حلقه‌ای از $R_\circ[x]$ است اگر و تنها اگر $\mathrm{vnr}(R)$ زیرحلقه‌ای از R باشد.

برهان. اگر $\mathrm{vnr}(R_\circ[x])$ زیرشبه‌حلقه‌ای از $R_\circ[x]$ باشد، آن‌گاه بنابه قضیه ۱۱.۱.۲، داریم $\mathrm{vnr}(R_\circ[x]) = (\mathrm{vnr}(R))x$. بنابراین $(\mathrm{vnr}(R))x$ زیرگروهی از $(R_\circ[x], +)$ است، و در نتیجه بنابه قضیه ۱.۱.۲، $\mathrm{vnr}(R)$ زیرحلقه‌ای از R است.

بالعکس، فرض می‌کنیم $\mathrm{vnr}(R)$ زیرحلقه‌ای از R باشد. بنابه نتیجه ۱۰.۱.۲، داریم $\mathrm{vnr}(R_\circ[x]) = (\mathrm{vnr}(R))x$. بنابراین $\mathrm{vnr}(R_\circ[x])$ زیرگروهی از $(R_\circ[x], +)$ است و لذا بنابه قضیه ۱.۱.۲، نتیجه حاصل می‌شود. □

قضیه ۱۳.۱.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد به‌طوری‌که $Nil(R)^۲ = ۰$ و $۲ \in U(R)$. در این‌صورت، اگر $f \in \mathrm{vnr}(R_\circ[x])$ باشد، آن‌گاه f، مجموع دو عنصر یکه از $R_\circ[x]$ است.

برهان. فرض می‌کنیم $f=\sum_{i=1}^m a_ix^i \in \mathrm{vnr}(R_\circ[x])$. لذا بنابه قضیه ۹.۱.۲، عناصر $u\in U(R)$ و $e\in Idem(R)$ وجود دارند به‌طوری‌که $a_1=ue$ و برای هر $i\geq 2$، $a_i\in e(Nil(R))$. بنابه [۸، قضیه ۲.۲]، داریم $a_1\in \mathrm{vnr}(R)$. چون $2\in U(R)$، بنابه [۸، قضیه ۲.۱۰]، $u',v'\in U(R)$ وجود دارند به‌طوری‌که $a_1=u'+v'$. قرار دهید $g=u'x$ و $h=v'x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$. پس بنابه قضیه ۴.۱.۲، داریم $g,h\in U(R_\circ[x])$، و در نتیجه $f=g+h$، مجموع دو عنصر یکه از $R_\circ[x]$ است. □

قضیه ۱۴.۱.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد به‌طوری‌که $Nil(R)^2=0$ و $2\in U(R)$. در این‌صورت، $\mathrm{vnr}(R_\circ[x])$ زیرشبه‌حلقه‌ای از $R_\circ[x]$ است اگر و تنها اگر مجموع هر چهار عنصر یکه از $R_\circ[x]$، یک عنصر منظم باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $\mathrm{vnr}(R_\circ[x])$ زیرشبه‌حلقه‌ای از $R_\circ[x]$ باشد. چون بنابه قضیه ۱.۱.۲، $U(R_\circ[x])\subseteq \mathrm{vnr}(R_\circ[x])$، پس نتیجه به آسانی حاصل می‌شود.

بالعکس، بنابه قضیه ۱.۱.۲، $\mathrm{vnr}(R_\circ[x])$ ضربی بسته است. فرض می‌کنیم $f,g\in \mathrm{vnr}(R_\circ[x])$. پس بنابه قضیه ۱۱.۱.۲، عناصر $u_1,u_2,v_1,v_2\in U(R_\circ[x])$ به‌طوری‌که $f=u_1+u_2$ و $g=v_1+v_2$. بنابراین $f+g$، مجموع چهار عنصر یکه از $R_\circ[x]$ است. لذا بنابه فرض، $f+g\in \mathrm{vnr}(R_\circ[x])$. □

نتیجه ۱۵.۱.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد به‌طوری‌که $Nil(R)^2=0$ و $2\in U(R)$. اگر مجموع هر چهار عنصر یکه از شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x]$، منظم باشد، آن‌گاه $\mathrm{vnr}(R_\circ[x])=(\mathrm{vnr}(R))x$.

برهان. با استفاده از قضیه ۱۴.۱.۲ و نتایج ۱۰.۱.۲ و ۱۲.۱.۲ به آسانی نتیجه حاصل می‌شود. □

۲.۲ بررسی عناصر πـ منظم شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x]$

ما در این بخش به بررسی ساختار عناصر πـ منظم شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x]$ روی حلقه‌ی جابه‌جایی R می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۲. عنصر a را یک عنصر πـ منظم از شبه‌حلقه‌ی (حلقه‌ی) N می‌نامیم، هرگاه عدد صحیح مثبت n وجود داشته باشد به‌طوری‌که a^n منظم باشد. مجموعه‌ی همه‌ی عناصر πـ منظم N را با $\pi\text{-}r(N)$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه، N را πـ منظم می‌نامیم، هرگاه $N=\pi\text{-}r(N)$.

قضیه ۲.۲.۲. فرض می‌کنیم N شبه‌حلقه‌ای باشد به‌طوری‌که عناصر خودتوان آن مرکزی هستند. در این‌صورت،

(۱) $\mathrm{vnr}(N)\subseteq \pi-r(N)$. به‌ویژه، هر شبه‌حلقه‌ی منظم، πـ منظم است.

(۲) $\mathrm{vnr}(N) \cup Nil(N) \subseteq \pi - r(N) \subseteq U(N) \cup Z(N)$.

(۳) $\pi - r(N) = U(N) \cup Nil(N)$ اگر و تنها اگر $Idem(N) = \{0, 1\}$. به‌ویژه، اگر N صحیح یا موضعی باشد، آن‌گاه $\pi - r(N) = U(N) \cup Nil(N)$.

(۴) $\pi - r(N)$ شامل یک عنصر ناصفر غیر یکه است اگر و تنها اگر $Idem(N) \neq \{0, 1\}$.

برهان. با استدلالی مشابه [۸، قضیه ۴.۱]، ثابت می‌شود. □

فرض می‌کنیم R حلقه‌ای دلخواه باشد و $f \in R_0[x]$. در این‌صورت، برای هر عدد صحیح مثبت n، قرارداد می‌کنیم

$$f^{(n)} = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n}.$$

قضیه ۳.۲.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $f \in R_0[x]$. در این‌صورت، f، πـ منظم است اگر و تنها اگر $g \in Idem(R_0[x])$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $g \circ f$ منظم باشد و $(x - g) \circ f \in Nil(R_0[x])$.

برهان. فرض می‌کنیم $f \in \pi - r(R_0[x])$. بنابراین عدد صحیح مثبت n وجود دارد به‌طوری‌که $f^{(n)}$ منظم است و در نتیجه بنابه گزاره ۸.۱.۲ و نتیجه ۲۶.۲.۱، $u \in U(R_0[x])$ و $e \in Idem(R)$ وجود دارند به‌طوری‌که $f^{(n)} = u \circ ex$. چون عناصر خودتوان $R_0[x]$ مرکزی هستند، داریم

$$\begin{aligned} ex \circ f \circ \left[f^{(n-1)} \circ u^{-1}\right] \circ ex \circ f &= \left[ex \circ f^{(n)} \circ u^{-1}\right] \circ ex \circ f \\ &= \left[ex \circ u \circ ex \circ u^{-1}\right] \circ ex \circ f \\ &= \left[ex \circ u \circ u^{-1}\right] \circ ex \circ f \\ &= ex \circ f, \end{aligned}$$

و در نتیجه $ex \circ f \in \mathrm{vnr}(R_0[x])$. به‌علاوه،

$$\left((1 - e)x \circ f\right)^{(n)} = (1 - e)x \circ f^{(n)} = (1 - e)x \circ u \circ ex = 0,$$

زیرا $(1 - e)x \in Idem(R_0[x])$. بنابراین $(1 - e)x \circ f \in Nil(R_0[x])$.

بالعکس، فرض می‌کنیم $e \in Idem(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $ex \circ f \in \mathrm{vnr}(R_0[x])$ و $(1 - e)x \circ f \in Nil(R_0[x])$. از این‌رو $n \geq 1$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$0 = \left((1 - e)x \circ f\right)^{(n)} = (1 - e)x \circ f^{(n)} = f^{(n)} \circ (1 - e)x,$$

زیرا $(1 - e)x$ مرکزی است. بنابراین $f^{(n)} = ex \circ f^{(n)}$. چون $ex \circ f$ منظم است، بنابه گزاره ۸.۱.۲ و نتیجه ۲۶.۲.۱، عناصر $u \in U(R_0[x])$ و $c \in Idem(R)$ وجود دارند به‌طوری‌که $ex \circ f = u \circ cx$. لذا $(ex \circ f)^{(n)} = (u \circ cx)^{(n)} = cx \circ u^{(n)}$. از طرفی $(ex \circ f)^{(n)} = ex \circ f^{(n)} = f^{(n)}$، و در نتیجه $f^{(n)} = cx \circ u^{(n)}$. فرض می‌کنیم $g = cx \circ (u^{-1})^{(n)}$. چون عناصر خودتوان $R_0[x]$ مرکزی

هستند، داریم $f^{(n)}\circ g\circ f^{(n)}=f^{(n)}\circ cx\circ(u^{-1})^{(n)}\circ f^{(n)}=cx\circ u^{(n)}=f^{(n)}$. بنابراین، f πـ منظم است. $\square$

لم ۴.۲.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. اگر f یک عنصر πـ منظم از $R_\circ[x]$ باشد، آن‌گاه $u\in U(R_\circ[x])$ و $g\in Idem(R_\circ[x])$ وجود دارند به‌طوری‌که $g\circ f=g\circ u$.

برهان. چون $f\in\pi-r(R_\circ[x])$، پس بنابه گزاره ۸.۱.۲ و نتیجه ۲۶.۲.۱، عدد صحیح $n\geq 1$، و عناصر $u\in U(R_\circ[x])$ و $e\in Idem(R)$ وجود دارند به‌طوری‌که $f^{(n)}=u\circ ex$. با توجه به برهان قضیه ۳.۲.۲، $ex\circ f$ منظم است. لذا بنابه گزاره ۸.۱.۲ و نتیجه ۲۶.۲.۱، $v\in U(R_\circ[x])$ و $c\in Idem(R)$ وجود دارند به‌طوری‌که $ex\circ f=cx\circ v$. ثابت می‌کنیم $e=c$. چون $ex\circ f=ex\circ(ex\circ f)=ex\circ(cx\circ v)$، پس $ecx\circ v=cx\circ v$، و در نتیجه $ec=c$. به‌علاوه، $(ex\circ f)^{(n)}=ex\circ f^{(n)}=cx\circ v^{(n)}$، زیرا ex و cx مرکزی هستند. بنابراین $ex\circ f^{(n)}=ex\circ u=cx\circ v^{(n)}$، زیرا $f^{(n)}=u\circ ex$. از این‌رو داریم $ex=cx\circ v^{(n)}\circ u^{-1}$. لذا $ecx=ex\circ cx=cx\circ v^{(n)}\circ u^{-1}\circ cx=cx\circ v^{(n)}\circ u^{-1}$، و در نتیجه $ec=e$. بنابراین $e=c$ و لذا $g\circ f=g\circ v$. $\square$

لم ۵.۲.۲. [۶۱، قضیه ۲۱.۲۸] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای دلخواه و I یک ایده‌آل پوچ از آن باشد. اگر $c+I\in Idem(R/I)$، آن‌گاه $e\in Idem(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $c+I=e+I$.

قضیه ۶.۲.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $Nil(R)^{۲}=\circ$. در این‌صورت، $f\in R_\circ[x]$، πـ منظم است اگر و تنها اگر $f+Nil(R_\circ[x])$ در $R_\circ[x]/(Nil(R_\circ[x]))$ منظم باشد.

برهان. فرض می‌کنیم f، πـ منظم باشد و $\overline{f}=f+Nil(R_\circ[x])$. در این‌صورت، عدد صحیح $n\geq ۱$ و $g\in R_\circ[x]$ وجود دارند به‌طوری‌که $f^{(n)}=f^{(n)}\circ g\circ f^{(n)}$. پس $f^{(n)}\circ g\in Idem(R_\circ[x])$. لذا بنابه نتیجه ۲۶.۲.۱، $e\in Idem(R)$ وجود دارد به طوری‌که $f^{(n)}\circ g=ex$. بنابراین

$$\left((۱-e)x\circ f\right)^{(n)}=(۱-e)x\circ f^{(n)}=(۱-e)x\circ ex\circ f^{(n)}=\circ,$$

زیرا عناصر خودتوان $R_\circ[x]$ مرکزی هستند. لذا $[x-f^{(n)}\circ g]\circ f=(۱-e)x\circ f\in Nil(R_\circ[x])$. چون $x-f^{(n)}\circ g$ خودتوانی از $R_\circ[x]$ است، داریم

$$\begin{aligned} f-f\circ\left[f^{(n-۱)}\circ g\right]\circ f &= f-f^{(n)}\circ g\circ f\\ &= f-f\circ f^{(n)}\circ g\\ &= f\circ\left[x-f^{(n)}\circ g\right]\\ &= \left[x-f^{(n)}\circ g\right]\circ f\in Nil\left(R_\circ[x]\right). \end{aligned}$$

پس $f+Nil(R_\circ[x])=f\circ\left[f^{(n-۱)}\circ g\right]\circ f+Nil(R_\circ[x])$، و در نتیجه $\overline{f}$، منظم است.

بالعکس، فرض می‌کنیم $\overline{f}=f+Nil(R_\circ[x])$ در $R_\circ[x]/Nil(R_\circ[x])$ منظم باشد و $f=\sum_{i=۱}^{m}a_ix^i$. بنابه گزاره ۸.۱.۲ و نتیجه ۲۶.۲.۱، عناصر $\overline{u}\in U\left(R_\circ[x]/Nil(R_\circ[x])\right)$ و

$\bar{c} \in Idem(R_\circ[x]/Nil(R_\circ[x]))$ وجود دارند به‌طوری‌که $\bar{f} = \bar{u} \circ \bar{c}$. لذا بنابه لم ۲۲.۲.۱، داریم $\bar{u} \in U(R/Nil(R))_\circ[x]$ و $\bar{c} \in Idem(R/Nil(R))_\circ[x]$. بنابه نتیجه ۵.۱.۲، $v' \in U(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\bar{u} = \overline{v'}x$، زیرا $Nil(R) \subseteq J(R)$. از طرفی، بنابه نتیجه ۲۶.۲.۱ و لم ۵.۲.۲، $e \in Idem(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $(e + Nil(R))x = \bar{e}x = \bar{c}$. بنابراین $\bar{f} = \overline{v'}x \circ \bar{e}x = \overline{v'}\bar{e}x = \overline{v'e}x$، و در نتیجه $\bar{f} = \sum_{i=1}^{m} \overline{a_i}x^i = \overline{v'e}x$. لذا برای هر $i \geq ۲$، داریم $a_۱ - v'e, a_i \in Nil(R)$. پس $b \in Nil(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $a_۱ = v'e + b$. لذا $w = bx + a_۲x^۲ + \cdots + a_mx^m \in Nil(R)_\circ[x] = Nil(R_\circ[x])$. بنابراین $f = v'x \circ ex + w$. بنابه قضیه ۴.۱.۲، $v'x + w \in U(R_\circ[x])$، و در نتیجه بنابه گزاره ۸.۱.۲،

$$ex \circ f = ex \circ (ex \circ v'x + w) = ex \circ (v'x + w),$$

منظم می‌باشد. چون عناصر خودتوان $R_\circ[x]$ مرکزی هستند و $Nil(R_\circ[x])$ ایده‌آلی از $R_\circ[x]$ می‌باشد، داریم

$$(۱ - e)x \circ f = f - f \circ ex = (v'x \circ ex + w) - (v'x \circ ex + w) \circ ex = w - ex \circ w \in Nil(R_\circ[x]).$$

لذا بنابه قضیه ۳.۲.۲، $f \in \pi - r(R_\circ[x])$. □

از قضیه‌ی ۶.۲.۲ نتیجه می‌شود که اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، آن‌گاه $R_\circ[x]$، πـ منظم نیست. ما در قضیه بعد، ساختار عناصر πـ منظم $R_\circ[x]$ را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۷.۲.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، $Nil(R)^۲ = \circ$ و $f \in R_\circ[x]$. در این‌صورت، شرایط زیر معادلند:

(۱) $f \in \pi - r(R_\circ[x])$.

(۲) برای برخی $n \geq ۱$، $f^{(n)} \in \text{vnr}(R_\circ[x])$.

(۳) $f^{(n)} = u \circ h$، برای برخی $u \in U(R_\circ[x])$ و $h \in Idem(R_\circ[x])$.

(۴) $f = g + w$ برای برخی $g \in \text{vnr}(R_\circ[x])$ و $w \in Nil(R_\circ[x])$.

(۵) $f = u \circ h + w$ برای برخی $u \in U(R_\circ[x])$، $h \in Idem(R_\circ[x])$ و $w \in Nil(R_\circ[x])$.

(۶) $f + Nil(R_\circ[x]) \in \text{vnr}\big(R_\circ[x]/(Nil(R_\circ[x]))\big)$.

برهان. (۲) ⇔ (۱) واضح است.
(۳) ⇔ (۲) و (۵) ⇔ (۴) از گزاره ۸.۱.۲، حاصل می‌شود.
(۵) ⇒ (۱) از قضیه ۶.۲.۲، حاصل می‌شود.
(۶) ⇒ (۴) واضح است.
(۱) ⇒ (۶) از قضیه ۶.۲.۲، حاصل می‌شود. □

نتیجه ۸.۲.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $Nil(R)^2 = 0$. در این‌صورت، گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) $\pi - r(R_\circ[x]) = \text{vnr}(R_\circ[x]) + Nil(R_\circ[x])$.

(۲) $\pi - r(R_\circ[x])/(Nil(R_\circ[x])) = \text{vnr}(R_\circ[x]/(Nil(R_\circ[x]))$.

(۳) $\pi - r(R_\circ[x]) = \text{vnr}(R_\circ[x])$ اگر و تنها اگر R کاهشی باشد.

(۴) اگر $2 \in U(R)$ و $f \in \pi - r(R_\circ[x])$، آن‌گاه f مجموع دو عنصر یکه از $R_\circ[x]$ است.

برهان. (۱) از معادل بودن (۱) و (۴) در قضیه ۷.۲.۲، نتیجه حاصل می‌شود.
(۲) از معادل بودن (۱) و (۶) در قضیه ۷.۲.۲، نتیجه حاصل می‌شود.
(۳) چون بنابه قضیه ۱.۱.۲، $Nil(R_\circ[x]) \cap \text{vnr}(R_\circ[x]) = \{0\}$، پس نتیجه از (۱) حاصل می‌شود.
(۴) بنابه (۱)، $f = g + w$ که $g \in \text{vnr}(R_\circ[x])$ و $w \in Nil(R_\circ[x])$. از طرفی، بنابه قضیه ۱۳.۱.۲، عناصر $u, v \in U(R_\circ[x])$ وجود دارند به‌طوری‌که $g = u + v$. بنابه قضیه ۴.۱.۲، داریم $u' = v + w \in U(R_\circ[x])$. بنابراین $f = u + u'$، مجموع دو عنصر یکه است. □

گزاره ۹.۲.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $Nil(R)^2 = 0$. در این‌صورت، $\pi - r(R_\circ[x])$ یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته[2] از $R_\circ[x]$ است.

برهان. فرض می‌کنیم $f_1, f_2 \in \pi - r(R_\circ[x])$. از این‌رو بنابه نتیجه ۸.۲.۲، $u_1, u_2 \in U(R)$، $e_1, e_2 \in Idem(R)$ و $h_1, h_2 \in Nil(R_\circ[x])$ وجود دارند به‌طوری‌که $f_1 = u_1e_1x + h_1$ و $f_2 = u_2e_2x + h_2$. چون $Nil(R_\circ[x])$ ایدآل است، پس $w_1 = u_2e_2h_1$ و $w_2 = f_1 \circ h_2$ پوچتوان هستند. لذا داریم

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2 &= (u_1e_1x + h_1) \circ (u_2e_2x + h_2) \\ &= (u_1e_1x + h_1) \circ u_2e_2x + (u_1e_1x + h_1) \circ h_2 \\ &= u_2e_2(u_1e_1x + h_1) + w_2 \\ &= u_2e_2u_1e_1x + w_1 + w_2. \end{aligned}$$

بنابه [۸، قضیه ۲.۱]، داریم $u_2e_2u_1e_1 \in \text{vnr}(R)$. به‌علاوه، $w_1 + w_2 \in Nil(R_\circ[x])$، زیرا $Nil(R_\circ[x])$ ایدآل است. از این‌رو بنابه نتیجه ۸.۲.۲، داریم $f_1 \circ f_2 \in \pi - r(R_\circ[x])$. □

قضیه ۱۰.۲.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $Nil(R)^2 = 0$. در این‌صورت، $\pi - r(R_\circ[x]) = \text{vnr}(R_\circ[x]) \cup Nil(R_\circ[x])$ اگر و تنها اگر $Idem(R) = \{0, 1\}$ یا $Nil(R) = \{0\}$.

---
[2] Multiplicatively closed subset

برهان. فرض می‌کنیم $\pi-r(R_\circ[x])=\mathrm{vnr}(R_\circ[x])\cup Nil(R_\circ[x])$ و $e\in Idem(R)\setminus\{\circ,۱\}$. از این‌رو بنابه نتیجه ۲۶.۲.۱، داریم $Idem(R_\circ[x])\neq\{\circ,x\}$. فرض می‌کنیم $f\in Nil(R_\circ[x])$. لذا بنابه نتیجه ۸.۲.۲، داریم

$$ex+f\in\mathrm{vnr}(R_\circ[x])+Nil(R_\circ[x])=\pi-r(R_\circ[x])=\mathrm{vnr}(R_\circ[x])\cup Nil(R_\circ[x]).$$

چون $e\neq\circ$، پس $ex+f\in\mathrm{vnr}(R_\circ[x])$. در نتیجه بنابه قضیه ۱.۱.۲،

$$f-ex\circ f=(۱-e)x\circ f=(۱-e)x\circ(ex+f)\in\mathrm{vnr}(R_\circ[x]),$$

زیرا عناصر خودتوان $R_\circ[x]$ مرکزی هستند. به‌علاوه، $f-ex\circ f=(۱-e)x\circ f\in Nil(R_\circ[x])$، زیرا $Nil(R_\circ[x])$ ایده‌آل است. لذا بنابه قضیه ۱.۱.۲، داریم $f-ex\circ f=\circ$. با جای‌گذاری $(۱-e)x$ به‌جای ex و استدلالی مشابه، می‌توان نتیجه گرفت $ex\circ f=\circ$، و از این‌رو $f=\circ$. لذا بنابه گزاره ۱۷.۲.۱، $Nil(R)=\circ$.

بالعکس، اگر $Idem(R)=\{\circ,۱\}$، آن‌گاه بنابه نتیجه ۲۶.۲.۱، $Idem(R_\circ[x])=\{\circ,x\}$. لذا طبق قضیه ۱.۱.۲، داریم $\mathrm{vnr}(R_\circ[x])=U(R_\circ[x])\cup\{\circ\}$. از این‌رو بنابه نتایج ۵.۱.۲ و ۸.۲.۲، داریم $\pi-r(R_\circ[x])=U(R_\circ[x])+Nil(R_\circ[x])=U(R_\circ[x])$. به‌علاوه، اگر $Nil(R)=\circ$، آن‌گاه $Nil(R_\circ[x])=Nil(R)_\circ[x]=\{\circ\}$. لذا بنابه نتیجه ۵.۱.۲، $\pi-r(R_\circ[x])=\mathrm{vnr}(R_\circ[x])$. بنابراین $\pi-r(R_\circ[x])=\mathrm{vnr}(R_\circ[x])\cup Nil(R_\circ[x])$. □

۳.۲ بررسی عناصر پوچ‌توان شبه‌حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب

در این بخش، به مطالعه‌ی ساختار عناصر پوچ‌توان شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ می‌پردازیم. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای (α,δ)ـ سازگار باشد و $A\subseteq R$. در این‌صورت، $A[x]=\{\sum_{i=\circ}^{n}a_ix^i\in R[x;\alpha,\delta]\mid a_i\in A\}$ و $A_\circ[x]=\{\sum_{i=۱}^{n}a_ix^i\in R_\circ[x;\alpha,\delta]\mid a_i\in A\}$.

گزاره ۱.۳.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای (α,δ)ـ سازگار باشد. همچنین، فرض می‌کنیم $\sum_{i=\circ}^{m}a_ix^i$ و $\sum_{j=\circ}^{n}b_jx^j$ عناصری از شبه‌حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ باشند. اگر I یک ایده‌آل (α,δ)ـ سازگار پوچ از R باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادلند:

(۱) اگر $(\sum_{i=\circ}^{m}a_ix^i)\circ(\sum_{j=\circ}^{n}b_jx^j)\in Nil(R)[x]$، آن‌گاه برای هر $i=۱,\ldots,m$ و $j=\circ,۱,\ldots,n$، داریم $a_ib_j\in Nil(R)$.

(۲) اگر $(\sum_{i=\circ}^{m}\overline{a_i}x^i)\circ(\sum_{j=\circ}^{n}\overline{b_j}x^j)\in Nil(R/I)[x]$، آن‌گاه برای هر $i=۱,\ldots,m$ و $j=\circ,۱,\ldots,n$، داریم $\overline{a_i}\overline{b_j}\in Nil(R/I)$.

برهان. قرار می‌دهیم $\overline{R} = R/I$. چون ایده‌آل I پوچ است، پس $Nil(\overline{R}) = Nil(R)/I$. لذا $(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i)\circ(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j) \in Nil(R)[x]$ اگر و تنها اگر $(\sum_{i=0}^{m} \overline{a_i} x^i)\circ(\sum_{j=0}^{n} \overline{b_j} x^j) \in Nil(\overline{R})[x]$. بنابراین برای هر $i = 1, \ldots, m$ و $j = 0, 1, \ldots, n$، داریم $a_i b_j \in Nil(R)$ اگر و تنها اگر $\overline{a_i}\overline{b_j} \in Nil(R/I)$. □

قضیه ۲.۳.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای (α, δ)ـ سازگار و $Nil(R)$ ایده‌آلی از R باشد. همچنین، فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ عناصری از شبه‌حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ باشند. اگر $f \circ g \in Nil(R)[x]$، آن‌گاه برای هر $i = 1, \ldots, m$ و $j = 0, 1, \ldots, n$، داریم $a_i b_j \in Nil(R)$.

برهان. فرض می‌کنیم $f \circ g \in Nil(R)[x]$ و $\overline{R} = R/Nil(R)$. چون $Nil(R)$ یک ایده‌آل (α, δ)ـ سازگار از R است، $\overline{R}$ حلقه‌ای $(\overline{\alpha}, \overline{\delta})$ـ سازگار و کاهشی است. لذا بنابه گزاره ۲۴.۱.۱، $\overline{R}$ حلقه‌ای $\overline{\alpha}$ـ صلب است. چون در شبه‌حلقه‌ی $\overline{R}[x; \overline{\alpha}, \overline{\delta}]$، داریم $\overline{f} \circ \overline{g} = \overline{0}$، پس بنابه لم ۲۷.۱.۱، برای هر $i = 1, \ldots, m$ و $j = 0, 1, \ldots, n$، $\bar{a}_i \bar{b}_j = \bar{0}$. از این‌رو بنابه گزاره ۱.۳.۲، نتیجه حاصل می‌شود. □

لم ۳.۳.۲. [۳۷، لم ۲] فرض کنیم $Nil(R)$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد و $a_1, a_2, \ldots, a_n, a, b \in R$. در این‌صورت،

(۱) اگر $ab \in Nil(R)$، آن‌گاه برای هر $r \in R$، $arb \in Nil(R)$.

(۲) اگر برای برخی عدد صحیح $n \geq 1$ داشته باشیم $ab^n \in Nil(R)$، آن‌گاه $ab \in Nil(R)$.

(۳) اگر $b_1 b_2 \cdots b_m \in Nil(R)$ به‌طوری‌که $b_i \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$، آن‌گاه $a_1 a_2 \cdots a_n \in Nil(R)$.

فرض می‌کنیم f عنصری از شبه‌حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ باشد. اگر a_0 جمله ثابت f باشد، آن‌گاه $C_f \setminus \{a_0\}$ را با نماد C'_f نشان می‌دهیم.

گزاره ۴.۳.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای (α, δ)ـ سازگار، $Nil(R)$ ایده‌آلی از R و $f_1, f_2, \ldots, f_n$ عناصری از شبه‌حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ باشند. اگر $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n \in Nil(R)[x]$، آن‌گاه $C'_{f_1} C'_{f_2} \cdots C'_{f_n} \subseteq Nil(R)$.

برهان. با استقرا روی n اثبات می‌کنیم. اگر $n = 2$، آن‌گاه از قضیه ۸.۶.۲، نتیجه حاصل می‌شود. فرض می‌کنیم $n > 2$ و $g = f_2 \circ f_3 \circ \cdots \circ f_n$. پس $f_1 \circ g \in Nil(R)[x]$. لذا بنابه قضیه ۸.۶.۲، داریم $a_1 a_g \in Nil(R)$، به‌طوری‌که $a_g \in C_g$ و $a_1 \in C'_{f_1}$. بنابراین برای هر $a_1 \in C'_{f_1}$، داریم

$$g \circ a_1 x = (f_2 \circ f_3 \circ \cdots \circ f_n) \circ a_1 x = (f_2 \circ f_3 \circ \cdots \circ f_{n-1}) \circ (f_n \circ a_1 x)$$
$$= (f_2 \circ f_3 \circ \cdots \circ f_{n-1}) \circ (a_1 f_n) \in Nil(R)[x].$$

ضرایب $a_1 f_n$ به فرم $a_1 a_n$ هستند که $a_n \in C_f$. از این‌رو بنابه فرض استقرا داریم $a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_1 a_n \in Nil(R)$. لذا بنابه لم ۳.۳.۲، $C'_{f_1} C'_{f_2} \cdots C'_{f_n} \subseteq Nil(R)$. □

قضیه ۵.۳.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای (α,δ)ـ سازگار و f عنصری پوچتوان از شبه‌حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ باشد. اگر $Nil(R)$ ایده‌آلی از R باشد، آن‌گاه ضرایب f پوچتوان هستند.

برهان. فرض می‌کنیم $f=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ یک عنصر پوچتوان از شبه‌حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ باشد. پس برای برخی اعداد صحیح $k\geq 2$، داریم $f^{(k)}=f\circ f\circ\cdots\circ f=0$. بنابه گزاره ۴.۳.۲، برای هر $i\geq 1$، داریم $a_i\in Nil(R)$. اکنون نشان می‌دهیم $a_0\in Nil(R)$. اما جمله ثابت f^k برابر است با $a_0+\beta$ که β جمعی از عناصر به فرم $b_{i_1}b_2\cdots b_t$ از R می‌باشد به‌طوری‌که $t\geq 2$ و $b_{i_1}\in\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. بنابراین $\beta\in Nil(R)$. چون $a_0+\beta\in Nil(R)$، پس $a_0\in Nil(R)$. $\square$

تعریف ۶.۳.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای دلخواه باشد. اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های اول R را رادیکال اول R می‌نامیم و آن را با $P(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۳.۲. حلقه‌ی R را آرمنداریز[3] می‌نامیم، هرگاه $f=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $g=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$ عناصری از حلقه‌ی $R[x]$ باشند و $fg=0$، آن‌گاه برای هر i,j، $a_ib_j=0$.

مثال ۸.۳.۲. (۱) هر حلقه‌ی کاهشی، آرمنداریز است.

(۲) برای هر عدد صحیح مثبت n، $\mathbb{Z}_n$ حلقه‌ای آرمنداریز می‌باشد.

در قضیه‌ی بعد، ساختار عناصر پوچتوان شبه‌حلقه‌ی $R_0[x;\alpha,\delta]$ را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۹.۳.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای (α,δ)ـ سازگار باشد. اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد، آن‌گاه برای شبه‌حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$، داریم $Nil\big(R[x;\alpha,\delta]\big)=Nil(R)_0[x]$:

(۱) هرگاه $Nil(R)$ ایده‌آلی موضعاً پوچتوان از حلقه‌ی R باشد؛

(۲) هرگاه $Nil(R)=P(R)$؛

(۳) هرگاه R حلقه‌ای آرمنداریز و $Nil(R)$ ایده‌آلی از R باشد.

برهان. (۱) ابتدا نشان می‌دهیم $Nil(R)_0[x]\subseteq Nil(R[x;\alpha,\delta])$. فرض می‌کنیم $f=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i\in Nil(R[x;\alpha,\delta])$. بنابه قضیه ۵.۳.۲، داریم $a_0,a_1,\ldots,a_m\in Nil(R)$. چون $Nil(R)$ ایده‌آلی موضعاً پوچتوان از R است، پس برای برخی عدد صحیح $t\geq 2$، داریم $\{a_0,a_1,\ldots,a_m\}^t=0$. فرض می‌کنیم $A=\cup f_i^j(a_s)$، به‌طوری‌که $0\leq i\leq j$ و $s=0,1,\ldots,m$. لذا بنابه لم ۲۳.۱.۱، داریم $A^t=0$، زیرا حلقه‌ی R، (α,δ)ـ سازگار است و $\{a_0,a_1,\ldots,a_m\}^t=0$. چون $f\in Nil(R[x;\alpha,\delta])$، پس برای برخی عدد صحیح $k\geq t$، داریم $f^{(k)}=0$. بنابراین برای هر $j\geq 1$، ضریب x^j در f^k، جمعی از عناصر به فرم $b_{i_1}b_{i_2}\ldots b_{i_l}$ است به‌طوری‌که $b_{i_r}\in A$ و $l\geq k$. به‌علاوه، جمله ثابت $f^{(k)}$، $a_0+a_1a_0+a_1^2a_0+\cdots+a_1^{k-2}a_0+\beta$ است و β جمعی از عناصر به فرم $b_{i_1}b_{i_2}\cdots b_{i_l}$ به‌طوری‌که $b_{i_r}\in A$ و $l\geq k$. لذا $\beta=0$. بنابراین

[3] Armendariz

$a_0 + a_1a_0 + a_1^2a_0 + \cdots + a_1^{k-2}a_0 = 0$، زیرا $a_0 + a_1a_0 + a_1^2a_0 + \cdots + a_1^{k-2}a_0 + \beta = 0$. با ضرب این معادله در a_1 داریم $a_1a_0 + a_1^2a_0 + a_1^3a_0 + \cdots + a_1^{k-1}a_0 = 0$. چون $a_1^{k-1}a_0 = 0$، پس $a_1a_0 + a_1^2a_0 + a_1^3a_0 + \cdots + a_1^{k-2}a_0 = 0$، و در نتیجه $a_0 = 0$. بنابراین $f \in Nil(R)_0[x]$.

اکنون فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^m a_ix^i \in Nil(R)_0[x]$. چون $Nil(R)$ ایده‌آلی موضعاً پوچ‌توان از R است، پس برای برخی $t \geq 2$، داریم $\{a_1, \ldots, a_m\}^t = 0$. فرض می‌کنیم $A = \cup f_i^j(a_s)$ به‌طوری‌که $0 \leq i \leq j$ و $s = 1, \ldots, m$. چون R، (α, δ)ـ سازگار است، بنابه لم ۲۳.۱.۱، داریم $A^t = 0$. بنابراین $f^{(t)} = 0$، زیرا برای هر $j \geq 1$، ضریب x^j در $f^{(t)}$ جمعی از عناصر به فرم $b_{i_1}b_{i_2}\cdots b_{i_l}$ است به‌طوری‌که $b_{i_r} \in A$ و $l \geq t$. لذا $f \in Nil(R[x; \alpha, \delta])$.

(۲) فرض می‌کنیم $Nil(R) = \mathrm{P}(R)$. چون $\mathrm{P}(R) \subseteq \mathrm{L} - rad(R) \subseteq Nil(R)$، پس $Nil(R) = \mathrm{L} - rad(R)$. از این‌رو $Nil(R)$ یک ایده‌آل موضعاً پوچ‌توان از R است. لذا بنابه (۱) نتیجه حاصل می‌شود.

(۳) فرض می‌کنیم $Nil(R) \subseteq \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. چون R آرمندار‌یز است، بنابه [۳۷، نتیجه ۵.۲]، داریم $Nil(R[x]) = Nil(R)[x]$. بنابراین $\sum_{i=0}^n a_ix^i \in Nil(R[x])$. لذا بنابه [۹، گزاره ۱]، داریم $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}^n = 0$. پس ایده‌آل $Nil(R)$ موضعاً پوچ‌توان است و لذا طبق (۱) نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

نتیجه بعد، مستقیماً از قضیه ۹.۳.۲، حاصل می‌شود.

نتیجه ۱۰.۳.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای (α, δ)ـ سازگار و $Nil(R)$ ایده‌آلی موضعاً پوچ‌توان از R باشد. در این‌صورت، شرایط زیر معادلند:

(۱) $R[x; \alpha, \delta]$ کاهشی است.

(۲) $R_0[x; \alpha, \delta]$ کاهشی است.

(۳) R کاهشی است.

قضیه ۱۱.۳.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای (α, δ)ـ سازگار و $Nil(R)$ ایده‌آلی موضعاً پوچ‌توان از R باشد. در این‌صورت، $Nil(R_0[x; \alpha, \delta]) = Nil(R)_0[x]$ ایده‌آلی از $R_0[x; \alpha, \delta]$ است.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^m a_ix^i \in Nil(R_0[x; \alpha, \delta])$ و $g = \sum_{j=1}^n b_jx^j \in R_0[x; \alpha, \delta]$. بنابه قضیه ۹.۳.۲، برای هر $i \geq 1$، داریم $a_i \in Nil(R)$. چون $Nil(R)$ ایده‌آلی از R است، بنابه قضیه ۹.۳.۲، داریم $g \circ f = a_1g + a_2g^2 + \cdots + a_mg^m \in Nil(R)_0[x] = Nil(R[x; \alpha, \delta])$. بنابراین $g \circ f \in Nil(R_0[x; \alpha, \delta])$، و در نتیجه $Nil(R_0[x; \alpha, \delta])$ یک ایده‌آل چپ از $R_0[x; \alpha, \delta]$ است.

حال فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^m a_ix^i \in Nil(R_0[x; \alpha, \delta])$ و $g = \sum_{i=1}^m b_ix^i, h = \sum_{j=1}^m c_ix^i$ عناصری از $R_0[x; \alpha, \delta]$ باشند. بنابراین

$$(g + f) \circ h - g \circ h = c_1[(g + f) - g] + c_2[(g + f)^2 - g^2] + \cdots + c_m[(g + f)^m - g^m].$$

چون برای هر $i \geq ۲$، داریم $[(g+f)^i - g^i] \in Nil(R)_\circ[x]$، پس بنابه قضیه ۹.۳.۲،

$$(g+f)\circ h - g\circ h \in Nil(R)_\circ[x] = Nil(R[x;\alpha,\delta]).$$

در نتیجه داریم $(g+f)\circ h - g\circ h \in Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. بنابراین $Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ یک ایده‌آل راست از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ است. □

۴.۲ بررسی عناصر منظم و πـ منظم شبه‌حلقه $R_\circ[x;\alpha,\delta]$

در این بخش، ابتدا به مطالعه و بررسی عناصر خودتوان و وارون‌پذیر شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ می‌پردازیم که R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^۲ = \circ$ و (α,δ)ـ سازگار است. سپس ساختار عناصر تمیز و منظم $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ را مشخص می‌کنیم. در آخر با توجه به ساختار عناصر پوچ‌توان $R_\circ[x;\alpha,\delta]$، ساختار عناصر πـ منظم آن را تعیین می‌کنیم.

لم ۱.۴.۲. [۳۶، لم ۱.۵] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ صلب و f عنصری خودتوان از شبه‌حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ باشد. در این‌صورت، $f = e_\circ + e_۱ x$ که $e_۱ \in Idem(R)$ و $e_\circ e_۱ = \circ$.

در لم بعد، ما ساختار عناصر خودتوان را برای شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x;\alpha,\delta]$، در حالتی که R حلقه‌ای (α,δ)ـ سازگار و $Nil(R)^۲ = \circ$ باشد، تعیین می‌کنیم.

لم ۲.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^۲ = \circ$ و (α,δ)ـ سازگار باشد. در این‌صورت، هر عنصر خودتوان $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ مرکزی است و

$$Idem(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = \{ex|\ e \in Idem(R)\}.$$

برهان. به‌وضوح، برای هر $e \in Idem(R)$، داریم $ex \in Idem(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=۱}^n a_i x^i$ یک عنصر خودتوان از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ باشد. چون $Nil(R)$ یک ایده‌آل (α,δ)ـ سازگار از R است، پس بنابه گزاره ۲۹.۱.۱، حلقه‌ی کاهشی $\overline{R} = R/Nil(R)$، $(\overline{\alpha},\overline{\delta})$ـ سازگار می‌باشد. از این‌رو بنابه گزاره ۲۴.۱.۱، $\overline{R}$ حلقه‌ای $\overline{\alpha}$ـ صلب است. به‌علاوه، در شبه‌حلقه‌ی $\overline{R}_\circ[x;\overline{\alpha},\overline{\delta}]$ داریم $\overline{f} = \overline{f}\circ\overline{f}$. لذا بنابه لم ۱.۴.۲، برای برخی $\overline{c} \in Idem(\overline{R})$، داریم $\overline{f} = \overline{c}x$. بنابه لم ۵.۲.۲، عنصر $e \in Idem(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\overline{c} = \overline{e}$. بنابراین $\overline{a}_۱ x + \overline{a}_۲ x^۲ + \cdots + \overline{a}_n x^n = \overline{e}x$، و در نتیجه $a_۱ - e, a_۲, \ldots, a_n \in Nil(R)$. پس برای برخی $w \in Nil(R)$، داریم $a_۱ = e + w$. چون R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی و (α,δ)ـ سازگار است و $Nil(R)^۲ = \circ$، پس برای هر $i \geq ۲$، داریم $a_i f^i = a_i\big((e+w)x\big)^i$. لذا برای هر $i \geq ۲$، $a_i f^i = a_i e x^i$، زیرا $w \in Nil(R)$، $\alpha(e) = e$ و $\delta(e) = \circ$. بنابراین

$$\begin{aligned} f &= f\circ f \\ &= (e+w)f + a_۲ f^۲ + \cdots + a_n f^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left[(e+w)^{۲}x+(e+w)a_{۲}x^{۲}+\cdots+(e+w)a_nx^n\right]+a_{۲}ex^{۲}+\cdots+a_nex^n\\&= \left[(e+w)^{۲}x+a_{۲}ex^{۲}+\cdots+a_nex^n\right]+a_{۲}ex^{۲}+\cdots+a_nex^n\\&= (e+w)^{۲}x+۲ea_{۲}x^{۲}+\cdots+۲ea_nx^n.\end{aligned}$$

در نتیجه $e+w=(e+w)^{۲}$ و برای هر $i\geq ۲$، $a_i=۲ea_i$. پس برای هر $i\geq ۲$، داریم $a_i=\circ$، زیرا $(۱-۲e)a_i=\circ$ و $۱-۲e\in U(R)$. به‌علاوه، $e+w=e^{۲}+۲ew+w^{۲}=e+۲ew$، زیرا $Nil(R)^{۲}=\circ$. پس $e+ew=e+۲ew$، و در نتیجه $ew=\circ$. بنابراین $w=\circ$. از این‌رو $a_{۱}=e$، و در نتیجه $f=ex$. چون هر حلقه نیم‌جابه‌جایی، آبلی است و $\alpha(e)=e$ و $\delta(e)=\circ$، پس f در شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x;\alpha,\delta]$، مرکزی است. □

لم ۳.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ صلب و f,g عناصری ناصفر از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ باشند. اگر $g\circ f=x$، آن‌گاه $f=a_{۱}x$ و $g=b_{۱}x$ به‌طوری‌که $a_{۱},b_{۱}\in U(R)$.

برهان. فرض می‌کنیم $f=\sum_{i=۱}^{m}a_ix^i$ و $g=\sum_{j=۱}^{n}b_jx^j$. با استقرا روی n، حکم را اثبات می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم $n=۱$. اگر $m=۱$، آن‌گاه $g\circ f=a_{۱}(b_{۱}x)=x$. بنابراین $a_{۱}b_{۱}=۱$، و در نتیجه $a_{۱},b_{۱}\in U(R)$، زیرا R حلقه‌ای ددکیند‌ـ متناهی است. لذا فرض می‌کنیم $m>۱$. در این‌صورت، از $g\circ f=a_{۱}(b_{۱}x)+\cdots+a_m(b_{۱}x)^m=x$، نتیجه می‌شود که $a_mb_{۱}\alpha(b_{۱})\alpha^{۲}(b_{۱})\cdots\alpha^{m-۱}(b_{۱})=\circ$، زیرا ضریب جمله پیشرو معادله $g\circ f=x$ است. چون R، حلقه‌ای αـ سازگار و کاهشی است، پس $a_mb_{۱}=b_{۱}a_m=\circ$. از این‌رو $a_m(b_{۱}x)^m=\circ$، و لذا $a_{۱}(b_{۱}x)+\cdots+a_{m-۱}(b_{۱}x)^{m-۱}=x$. به‌طور مشابه، $a_{m-۱}b_{۱}\alpha(b_{۱})\alpha^{۲}(b_{۱})\cdots\alpha^{m-۲}(b_{۱})=\circ$، و در نتیجه $a_{m-۱}b_{۱}=b_{۱}a_{m-۱}$. لذا $a_{m-۱}(b_{۱}x)^{m-۱}=\circ$. با ادامه این روند، برای هر $i\geq ۲$، داریم $b_{۱}a_i=a_ib_{۱}=\circ$. بنابراین $a_{۱}b_{۱}x=x$. چون R ددکیند‌ـ متناهی است و $a_{۱}b_{۱}=۱$، پس $a_{۱},b_{۱}\in U(R)$. از این‌رو برای هر $i\geq ۲$، داریم $a_i=\circ$. بنابراین $f=a_{۱}x$.

اکنون فرض می‌کنیم $n\geq ۲$. بنابه فرض، داریم $g\circ f=a_{۱}g+\cdots+a_mg^m=x$. از این‌رو $a_mb_n\alpha(b_n)\cdots\alpha^{m-۱}(b_n)=\circ$، زیرا ضریب پیشرو معادله $g\circ f=x$ است. چون R، αـ سازگار و کاهشی است، داریم $b_na_m=a_mb_n=\circ$. بنابراین $b_na_{۱}g+b_na_{۲}g^{۲}+\cdots+b_na_{m-۱}g^{m-۱}=b_nx$، و در نتیجه داریم $b_na_{m-۱}b_n\alpha(b_n)\cdots\alpha^{m-۲}(b_n)=\circ$، زیرا ضریب پیشرو این معادله است. از این‌رو $b_na_{m-۱}=a_{m-۱}b_n=\circ$. لذا $b_na_{۱}g+b_na_{۲}g^{۲}+\cdots+b_na_{m-۲}g^{m-۲}=b_nx$. با استدلالی مشابه بالا، می‌توان نتیجه گرفت که $b_na_{m-۲}=\circ=a_{m-۲}b_n$. لذا با ادامه این روند، برای هر $i\geq ۱$، داریم $b_na_i=\circ=a_ib_n$. به‌علاوه، چون هر حلقه‌ی کاهشی، نیم‌جابه‌جایی است، پس بنابه لم ۲۳.۱.۱، برای هر $j=۱,\ldots,n-۱$، داریم $a_{۲}b_jx^jb_n=\circ$. بنابراین

$$\begin{aligned}a_{۲}g^{۲}&=a_{۲}\left(b_{۱}x+b_{۲}x^{۲}+\cdots+b_{n-۱}x^{n-۱}\right)g\\&=a_{۲}\left(b_{۱}x+b_{۲}x^{۲}+\cdots+b_{n-۱}x^{n-۱}\right)\left(b_{۱}x+b_{۲}x^{۲}+\cdots+b_{n-۱}x^{n-۱}\right).\end{aligned}$$

در نظر بگیرید $h=b_{۱}x+b_{۲}x^{۲}+\cdots+b_{n-۱}x^{n-۱}$. چون R نیم‌جابه‌جایی است و $a_{۳}b_n=\circ$، بنابه

لم ۲۳.۱.۱، داریم $a_۳h^۳ = a_۳h^۲g = a_۳g^۲g = a_۳g^۳$. لذا با استدلالی مشابه، می‌توان نتیجه گرفت برای هر $i = ۱, \dots, m$، $a_ig^i = a_ih^i$. بنابراین

$$x = g \circ f = a_۱g + a_۲g^۲ + \dots + a_mg^m = a_۱h + a_۲h^۲ + \dots + a_mh^m = h \circ f = \left(\sum_{j=۱}^{n-۱} b_jx^j\right) \circ f.$$

لذا بنابه فرض استقرا، داریم $f = a_۱x$ و $g = b_۱x$ و $a_۱, b_۱ \in U(R)$. □

یادآوری می‌کنیم حلقه‌ی R را دئو راست (چپ) می‌نامند، هرگاه هر ایده‌آل راست (چپ) R، ایده‌آلی دوطرفه باشد. مطابق [۴۵، قضیه ۲.۸]، اگر R حلقه‌ای دئو راست و (α, δ)ـ سازگار باشد، آن‌گاه $f = \sum_{i=۰}^{n} a_ix^i$ یک عنصر وارون‌پذیر از حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ است اگر و تنها اگر $a_۰ \in U(R)$ و $a_۱, \dots, a_n \in Nil(R)$.

در قضیه‌ی بعد، ساختار عناصر وارون‌پذیر شبه‌حلقه‌ی $R_۰[x; \alpha, \delta]$ را در حالتی که R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^۲ = ۰$ و (α, δ)ـ سازگار باشد، مشخص کنیم.

قضیه ۴.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^۲ = ۰$ و (α, δ)ـ سازگار باشد. در این‌صورت، $f = \sum_{i=۱}^{n} a_mx^m$ عنصری وارون‌پذیر از $R_۰[x; \alpha, \delta]$ است اگر و تنها اگر $a_۱ \in U(R)$ و برای هر $i \geq ۲$، $a_i \in Nil(R)$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f \in U(R_۰[x; \alpha, \delta])$. بنابراین $g = \sum_{j=۱}^{n} b_jx^j \in R_۰[x; \alpha, \delta]$ وجود دارد به‌طوری‌که $g \circ f = x = f \circ g$. چون R نیم‌جابه‌جایی است، بنابه قضیه ۱۱.۱.۱، $Nil(R)$ ایده‌آلی از R است، و در نتیجه $\overline{R} = R/Nil(R)$ حلقه‌ای کاهشی است. بنابه گزاره‌های ۲۹.۱.۱ و ۲۴.۱.۱، $\overline{R}$ حلقه‌ای $\overline{\alpha}$ـ صلب است. پس در شبه‌حلقه‌ی $\overline{R}_۰[x; \overline{\alpha}, \overline{\delta}]$، داریم $\overline{g} \circ \overline{f} = x$. لذا بنابه لم ۳.۴.۲، $\overline{a}_۱ \in U(\overline{R})$ و برای هر $i \geq ۲$، $\overline{a}_i = \overline{۰}$. پس برای هر $i \geq ۲$، $a_i \in Nil(R)$. به‌علاوه، چون $Nil(R) \subseteq J(R)$ و $\overline{a}_۱ \in U(\overline{R})$، داریم $a_۱ \in U(R)$.

بالعکس، فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=۱}^{n} a_ix^i \in R_۰[x; \alpha, \delta]$ به‌طوری‌که $a_۱ \in U(R)$ و $a_۲, a_۳, \dots, a_n \in Nil(R)$. اگر $f = a_۱x$، آن‌گاه نتیجه به‌وضوح برقرار است. فرض می‌کنیم $n \geq ۲$. ادعا می‌کنیم $h = b_۱x + b_۲x^۲ + \dots + b_nx^n$ در $R_۰[x; \alpha, \delta]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f \circ h = x = h \circ f$. این ادعا را برای حالت‌های $n = ۲, ۳$ اثبات می‌کنیم. سپس با روشی مشابه برای این دو حالت، می‌توان ادعا را برای حالت‌های $n \geq ۴$ اثبات کرد. ابتدا فرض می‌کنیم $n = ۲$. اگر $g = b_۱x + b_۲x^۲ \in R_۰[x; \alpha, \delta]$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f \circ g = x$، آن‌گاه با استدلالی مشابه آنچه در پاراگراف قبل ذکر شد، داریم $b_۱ \in U(R)$ و $b_۲ \in Nil(R)$. چون R، (α, δ)ـ سازگار است و $Nil(R)^۲ = ۰$، پس $b_۲f^۲ = b_۲(a_۱x)^۲$، و در نتیجه

$$\begin{aligned}
&f \circ g = x \\
&\quad \Leftrightarrow b_۱f + b_۲f^۲ = x \\
&\quad \Leftrightarrow b_۱(a_۱x + a_۲x^۲) + b_۲(a_۱x + a_۲x^۲)^۲ = x \\
&\quad \Leftrightarrow b_۱(a_۱x + a_۲x^۲) + b_۲(a_۱x)^۲ = x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow b_1a_1x + b_1a_2x^2 + b_2a_1\alpha(a_1)x^2 + b_2a_1\delta(a_1)x = x\\
&\Leftrightarrow \left[b_1a_1 + b_2a_1\delta(a_1) = 1 \ \text{و}\ b_1a_2 + b_2a_1\alpha(a_1) = 0\right]\\
&\Leftrightarrow \left[b_1 = \left(a_1 - a_2\alpha(a_1^{-1})\delta(a_1)\right)^{-1} \ \text{و}\ b_2 = -b_1a_2\alpha(a_1^{-1})a_1^{-1}\right]\\
&\Leftrightarrow \left[b_1 = a_1^{-1} + a_1^{-1}a_2\alpha(a_1^{-1})\delta(a_1)a_1^{-1} \ \text{و}\right.\\
&\qquad \left. b_2 = -\left(a_1^{-1} + a_1^{-1}a_2\alpha(a_1^{-1})\delta(a_1)a_1^{-1}\right)a_2\alpha(a_1^{-1})a_1^{-1}\right]\\
&\Leftrightarrow \left[b_1 = a_1^{-1} + a_1^{-1}a_2\alpha(a_1^{-1})\delta(a_1)a_1^{-1} \ \text{و}\ b_2 = -a_1^{-1}a_2\alpha(a_1^{-1})a_1^{-1}\right].
\end{aligned}
$$

بنابراین g یک وارون راست f است. چون $b_1 \in U(R)$ و $b_2 \in Nil(R)$، با استدلالی مشابه بالا، $g' \in R_0[x;\alpha,\delta]$ وجود دارد به‌طوری‌که $g \circ g' = x$. بنابراین $g \in U(R_0[x;\alpha,\delta])$، و در نتیجه $f \in U(R_0[x;\alpha,\delta])$.

حال فرض می‌کنیم $n = 3$. مشابه حالت $n = 2$، کافی است نشان دهیم f وارون راست دارد. فرض می‌کنیم $g = b_1x+b_2x^2+b_3x^3$ و $f\circ g = x$. از این‌رو $b_1 \in U(R)$ و $b_2, b_3 \in Nil(R)$. چون R، نیم‌جابه‌جایی و (α,δ)ـ سازگار است و $Nil(R)^2 = 0$، پس برای هر $i = 1,2$، داریم $b_if^i = b_i\left(a_1x\right)^i$. لذا $b_2f^2 = b_2a_1\alpha(a_1)x^2 + b_2a_1\delta(a_1)x$ و

$$
\begin{aligned}
b_3f^3 &= b_3a_1\alpha(a_1)\alpha^2(a_1)x^3 + b_3\left(a_1\delta(a_1)\alpha(a_1) + a_1\alpha(a_1)\delta(\alpha(a_1)) + a_1\alpha(a_1)\alpha(\delta(a_1))\right)x^2\\
&\quad + b_3\left(a_1\delta(a_1)^2 + a_1\alpha(a_1)\delta^2(a_1)\right)x.
\end{aligned}
$$

بنابراین داریم

$$
\begin{aligned}
&f \circ g = x\\
&\quad \Leftrightarrow b_1f + b_2f^2 + b_3f^3 = x\\
&\quad \Leftrightarrow b_1(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + b_2(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)^2 + b_3(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)^3 = x\\
&\quad \Leftrightarrow b_1(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + b_2(a_1x)^2 + b_3(a_1x)^3 = x\\
&\quad \Leftrightarrow b_1a_1x + b_1a_2x^2 + b_1a_3x^3 + b_2a_1\alpha(a_1)x^2 + b_2a_1\delta(a_1)x + b_3a_1\alpha(a_1)\alpha^2(a_1)x^3\\
&\quad + b_3\left(a_1\delta(a_1)\alpha(a_1) + a_1\alpha(a_1)\delta(\alpha(a_1)) + a_1\alpha(a_1)\alpha(\delta(a_1))\right)x^2\\
&\quad + b_3\left(a_1\delta(a_1)^2 + a_1\alpha(a_1)\delta^2(a_1)\right)x = x\\
&\quad \Leftrightarrow \Big[b_1a_1 + b_2a_1\delta(a_1) + b_3\left(a_1\delta(a_1)^2 + a_1\alpha(a_1)\delta^2(a_1)\right) = 1,\\
&\quad b_1a_2 + b_2a_1\alpha(a_1) + b_3[(a_1\delta(a_1)\alpha(a_1) + a_1\alpha(a_1)\delta(\alpha(a_1)) + a_1\alpha(a_1)\alpha(\delta(a_1)))] = 0 \ \text{و}\\
&\quad b_1a_3 + b_3a_1\alpha(a_1)\alpha^2(a_1) = 0\Big]\\
&\quad \Leftrightarrow \Big[b_3 = -b_1a_3\alpha^2(a_1^{-1})\alpha(a_1^{-1})a_1^{-1},\\
&\quad b_1a_1 + b_2a_1\delta(a_1) - b_1a_3\alpha^2(a_1^{-1})\alpha(a_1^{-1})a_1^{-1}\left(a_1\delta(a_1)^2 + a_1\alpha(a_1)\delta^2(a_1)\right) = 1 \ \text{و}\\
&\quad b_1a_2 + b_2a_1\alpha(a_1) - b_1a_3\alpha^2(a_1^{-1})\alpha(a_1^{-1})a_1^{-1}[(a_1\delta(a_1)\alpha(a_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+a_1\alpha(a_1)\delta(\alpha(a_1))+a_1\alpha(a_1)\alpha(\delta(a_1))]=0\Big]\\
&\Leftrightarrow \Big[b_1=[a_1-a_3\alpha^2(a_1^{-1})\alpha(a_1^{-1})\big(\delta(a_1)^2+\alpha(a_1)\delta^2(a_1)\big)]^{-1}\\
&\quad b_2=-b_1a_2\alpha(a_1^{-1})a_1^{-1}+b_1a_3\alpha^2(a_1^{-1})\alpha(a_1^{-1})a_1^{-1}[a_1\delta(a_1)\alpha(a_1)+a_1\alpha(a_1)\delta(\alpha(a_1))\\
&\qquad +a_1\alpha(a_1)\alpha(\delta(a_1))]\alpha(a_1^{-1})a_1^{-1}\Big]\\
&\Leftrightarrow \Big[b_1=a_1^{-1}+a_1^{-1}a_3\alpha^2(a_1^{-1})\alpha(a_1^{-1})\big(\delta(a_1)^2+\alpha(a_1)\delta^2(a_1)\big)a_1^{-1},\\
&\quad b_2=-a_1^{-1}a_2\alpha(a_1^{-1})a_1^{-1}+a_1^{-1}a_3\alpha^2(a_1^{-1})\alpha(a_1^{-1})a_1^{-1}[a_1\delta(a_1)\alpha(a_1)+a_1\alpha(a_1)\delta(\alpha(a_1))\\
&\qquad +a_1\alpha(a_1)\delta(\alpha(a_1))+a_1\alpha(a_1)\alpha(\delta(a_1))]\alpha(a_1^{-1})a_1^{-1}\ \text{و}\\
&\quad b_3=-a_1^{-1}a_3\alpha^2(a_1^{-1})\alpha(a_1^{-1})a_1^{-1}\Big],
\end{aligned}
$$

زیرا R نیم‌جابه‌جایی و (α,δ)ــ سازگار است و $Nil(R)^2=0$. $\square$

نتیجه ۵.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^2=0$ و (α,δ)ــ سازگار باشد. در این‌صورت، $U(R_0[x;\alpha,\delta])=U(R)x+Nil(R_0[x;\alpha,\delta])$. به‌ویژه، اگر R حلقه‌ای αــ صلب باشد، آن‌گاه $U(R_0[x;\alpha,\delta])=\{ux|\ u\in U(R)\}$.

برهان. بنابه قضیه ۴.۴.۲، نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

نتیجه ۶.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^2=0$ و (α,δ)ــ سازگار باشد. در این‌صورت، $f\in U(R_0[x;\alpha,\delta])$ اگر و تنها اگر f وارون چپ یا راست در $R_0[x;\alpha,\delta]$ داشته باشد.

در قضیه بعد، ساختار عناصر تمیز شبه‌حلقه‌ی $R_0[x;\alpha,\delta]$ را تعیین می‌کنیم.

قضیه ۷.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^2=0$ و (α,δ)ــ سازگار باشد. در این‌صورت،

(۱)
$$
\begin{aligned}
\mathrm{cln}(R_0[x;\alpha,\delta])&=\big(\mathrm{cln}(R)\big)x+\big(Nil(R_0[x;\alpha,\delta])\big)x\\
&=\{\textstyle\sum_{i=1}^n a_ix^i\ |\ a_1\in\mathrm{cln}(R),\ a_i\in Nil(R),\ \text{برای هر}\ i\geq 2\}.
\end{aligned}
$$

(۲) $R_0[x;\alpha,\delta]$ شبه‌حلقه‌ای تمیز نیست.

برهان. (۱) بنابه قضیه ۴.۴.۲ و لم ۲.۴.۲، داریم

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cln}(R_0[x;\alpha,\delta])&=U(R_0[x;\alpha,\delta])+Idem(R_0[x;\alpha,\delta])\\
&=\{\sum_{i=1}^n a_ix^i\in R_0[x;\alpha,\delta]\ |\ a_i\in Nil(R),\ \text{برای هر}\ i\geq 2\ \text{و}\ a_1=u+e,\\
&\quad u\in U(R)\ \text{و}\ e\in Idem(R)\ \text{برای برخی}\}\\
&=\{\sum_{i=1}^n a_ix^i\in R_0[x;\alpha,\delta]\ |\ a_1\in\mathrm{cln}(R),a_i\in Nil(R),\ \text{برای هر}\ i\geq 2\}.
\end{aligned}
$$

(۲) بنابه (۱)، $x^2\notin\mathrm{cln}(R_0[x;\alpha,\delta])$، و لذا نتیجه حاصل است. $\square$

گزاره ۸.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^۲=\circ$ و (α,δ)ــ سازگار باشد. در این‌صورت، $f\in \mathrm{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ اگر و تنها اگر برای برخی $u\in U(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ و $h\in Idem(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ داشته باشیم $f=u\circ h$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f\in \mathrm{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. پس برای برخی $g\in R_\circ[x;\alpha,\delta]$ داریم $f=f\circ g\circ f$. از این‌رو بنابه قضیه ۱.۱.۲، $f\circ g=g\circ f\in Idem(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. بنابه لم ۲.۴.۲، برای برخی $e\in Idem(R)$، داریم $f\circ g=ex$. فرض می‌کنیم $v=ex\circ g+(۱-e)x$. چون $(۱-e)x\in Idem(R_\circ[x;\alpha,\delta])$، پس

$$\begin{aligned} v\circ[f+(۱-e)x] &= v\circ f+v\circ(۱-e)x\\ &=[ex\circ g+(۱-e)x]\circ ex\circ f+[ex\circ g+(۱-e)x]\circ(۱-e)x\\ &=ex\circ[ex\circ g+(۱-e)x]\circ f+[ex\circ g+(۱-e)x]\circ(۱-e)x\\ &=ex\circ g\circ f+(۱-e)x\\ &=ex+(۱-e)x\\ &=x.\end{aligned}$$

لذا طبق نتیجه ۶.۴.۲، v یک عنصر وارون‌پذیر از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ است. به‌علاوه، بنابه لم ۲.۴.۲، داریم $(۱-e)x\circ f=f\circ(۱-e)x=f-f\circ ex=f-f\circ g\circ f=\circ$. بنابراین

$$f\circ v\circ f=f\circ[ex\circ g+(۱-e)x)]\circ f=[(f\circ ex)\circ g+f\circ(۱-e)x]\circ f=f\circ g\circ f=f.$$

فرض می‌کنیم $u=v^{-۱}$ و $h=v\circ f$. از این‌رو $h\in Idem(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. لذا $u\circ h=v^{-۱}\circ v\circ f=f$.

بالعکس، فرض می‌کنیم برای برخی $u\in U(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ و $h\in Idem(R_\circ[x;\alpha,\delta])$، داشته باشیم $f=u\circ h$. از این‌رو بنابه لم ۲.۴.۲، برای برخی $e\in Idem(R)$، داریم $h=ex$. چون عناصر خودتوان $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ مرکزی هستند، پس $f\circ u^{-۱}\circ f=(ex\circ u)\circ u^{-۱}\circ f=ex\circ f=ex\circ u\circ ex=f$. بنابراین $f\in \mathrm{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. □

در قضیه‌ی بعد، ساختار عناصر منظم شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۹.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^۲=\circ$ و (α,δ)ــ سازگار باشد. در این‌صورت،

(۱) $$\mathrm{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta])=\{\textstyle\sum_{i=۱}^{n}a_ix^i\in R_\circ[x;\alpha,\delta]\mid a_۱=ue \text{ و } a_i\in e(Nil(R)) \text{ برای هر } i\geq ۲,\ n\geq ۱,\ u\in U(R) \text{ و } e\in Idem(R)\}.$$

(۲) شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x;\alpha,\delta]$، منظم نیست.

برهان. (۱) بنابه گزاره ۸.۴.۲، قضیه ۴.۴.۲ و لم ۲.۴.۲، نتیجه حاصل می‌شود.

(۲) چون بنابه (۱)، $x^۲$ یک عنصر منظم از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ نیست، پس $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ منظم نمی‌باشد. □

نتیجه ۱۰.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^2 = 0$ و (α, δ)ـ سازگار باشد. در این‌صورت، $\mathrm{vnr}(R_0[x; \alpha, \delta]) = \{vx |\ v \in \mathrm{vnr}(R)\}$، هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) R حلقه‌ای کاهشی باشد.

(۲) $\mathrm{vnr}(R)$ زیرحلقه‌ای از R باشد.

(۳) $\mathrm{vnr}(R_0[x; \alpha, \delta])$ زیرشبه‌حلقه‌ای از $R_0[x; \alpha, \delta]$ باشد.

برهان. (۱) اگر $Nil(R) = 0$، آن‌گاه بنابه قضیه ۹.۴.۲، نتیجه حاصل می‌شود.

(۲) با استدلالی مشابه [۸، قضیه ۲.۹]، می‌توان نشان داد R حلقه‌ای کاهشی است، و از این‌رو بنابه (۱)، نتیجه حاصل می‌شود.

(۳) فرض می‌کنیم f یک عنصر پوچ‌توان $R_0[x; \alpha, \delta]$ باشد. بنابه قضیه‌های ۹.۳.۲ و ۴.۴.۲ داریم $x + f \in U(R_0[x; \alpha, \delta]) \subseteq \mathrm{vnr}(R_0[x; \alpha, \delta])$. بنابراین $f = -x + (x + f) \in \mathrm{vnr}(R_0[x; \alpha, \delta])$، زیرا $\mathrm{vnr}(R_0[x; \alpha, \delta])$ زیرشبه‌حلقه‌ای از $R_0[x; \alpha, \delta]$ است. از این‌رو داریم

$$f \in \mathrm{vnr}(R_0[x; \alpha, \delta]) \cap Nil(R_0[x; \alpha, \delta]).$$

پس بنابه قضیه ۱.۱.۲، $f = 0$، و در نتیجه $Nil(R_0[x; \alpha, \delta]) = \{0\}$. لذا بنابه نتیجه ۱۰.۳.۲، R حلقه‌ای کاهشی است. بنابراین از (۱) نتیجه حاصل می‌شود. □

نتیجه ۱۱.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^2 = 0$ و (α, δ)ـ سازگار باشد. در این‌صورت، $\mathrm{vnr}(R_0[x; \alpha, \delta])$ زیرشبه‌حلقه‌ای از $R_0[x; \alpha, \delta]$ است اگر و تنها اگر $\mathrm{vnr}(R)$ زیرحلقه‌ای از R باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $\mathrm{vnr}(R_0[x; \alpha, \delta])$ زیرشبه‌حلقه‌ای از $R_0[x; \alpha, \delta]$ باشد. بنابه نتیجه ۱۰.۴.۲، داریم $\mathrm{vnr}(R_0[x; \alpha, \delta]) = \{vx |\ v \in \mathrm{vnr}(R)\}$. بنابراین $(\mathrm{vnr}(R))x = \{vx |\ v \in \mathrm{vnr}(R)\}$ زیرگروهی از $(R_0[x; \alpha, \delta], +)$ است. از این‌رو بنابه [۴۵، قضیه ۴.۱]، $\mathrm{vnr}(R)$ زیرحلقه‌ای از R است.

بالعکس، فرض می‌کنیم $\mathrm{vnr}(R)$ زیرحلقه‌ای از R باشد. از این‌رو بنابه نتیجه ۱۰.۴.۲، داریم $\mathrm{vnr}(R_0[x; \alpha, \delta]) = (\mathrm{vnr}(R))x$، و در نتیجه $\mathrm{vnr}(R_0[x; \alpha, \delta])$ زیرگروهی از $(R_0[x; \alpha, \delta], +)$ می‌باشد. از این‌رو بنابه قضیه ۱.۱.۲، نتیجه حاصل می‌شود. □

قضیه ۱۲.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی و (α, δ)ـ سازگار باشد به‌طوری‌که $Nil(R)^2 = 0$ و $2 \in U(R)$. اگر f یک عنصر منظم از $R_0[x; \alpha, \delta]$ باشد، آن‌گاه f مجموع دو عنصر وارون‌پذیر از $R_0[x; \alpha, \delta]$ است.

برهان. فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{m} a_i x^i$ یک عنصر منظم از $R_0[x; \alpha, \delta]$ باشد. بنابه قضیه ۹.۴.۲، عناصر $u \in U(R)$ و $e \in Idem(R)$ وجود دارند به‌طوری‌که $a_1 = ue$ و برای هر $i \geq 2$، $a_i \in e(Nil(R))$. از این‌رو بنابه [۴۵، قضیه ۴.۱]، $a_1 \in \mathrm{vnr}(R)$. با استدلالی مشابه

[۸، قضیه ۲.۱۰]، می‌توان نتیجه گرفت که برای برخی $u',v'\in U(R)$، $a_1=u'+v'$. فرض می‌کنیم $g=u'x$ و $h=v'x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$. لذا طبق قضیه ۴.۴.۲، داریم $g,h\in U(R_{0}[x;\alpha,\delta])$. بنابراین $f=g+h$ مجموع دو عنصر وارون‌پذیر از $R_{0}[x;\alpha,\delta]$ است. □

قضیه ۱۳.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی و (α,δ)ــ سازگار باشد به‌طوری‌که $Nil(R)^2=0$ و $2\in U(R)$. در این‌صورت، $\mathrm{vnr}(R_{0}[x;\alpha,\delta])$ زیرشبه‌حلقه‌ای از $R_{0}[x;\alpha,\delta]$ است اگر و تنها اگر مجموع هر چهار عنصر وارون‌پذیر از $R_{0}[x;\alpha,\delta]$، یک عنصر منظم باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $\mathrm{vnr}(R_{0}[x;\alpha,\delta])$ زیرشبه‌حلقه‌ای از $R_{0}[x;\alpha,\delta]$ باشد. از این‌رو بنابه قضیه ۱.۱.۲، داریم $U(R_{0}[x;\alpha,\delta])\subseteq \mathrm{vnr}(R_{0}[x;\alpha,\delta])$.

بالعکس، کافی است نشان دهیم مجموع هر دو عنصر منظم از $R_{0}[x;\alpha,\delta]$، منظم است، زیرا بنابه ۱.۱.۲، $\mathrm{vnr}(R_{0}[x;\alpha,\delta])$ یک مجموعه‌ی ضربی بسته است. فرض می‌کنیم $f,g\in \mathrm{vnr}(R_{0}[x;\alpha,\delta])$. بنابه قضیه ۱۲.۴.۲، برای برخی $u_1,u_2,v_1,v_2\in U(R_{0}[x;\alpha,\delta])$، داریم $f=u_1+u_2$ و $g=v_1+v_2$. بنابراین $f+g$ مجموع چهار عنصر وارون‌پذیر از $R_{0}[x;\alpha,\delta]$ است. لذا بنابه فرض، داریم $f+g\in \mathrm{vnr}(R_{0}[x;\alpha,\delta])$. □

نتیجه ۱۴.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی و (α,δ)ــ سازگار باشد به‌طوری‌که $Nil(R)^2=0$ و $2\in U(R)$. اگر مجموع هر چهار عنصر وارون‌پذیر از $R_{0}[x;\alpha,\delta]$، یک عنصر وارون‌پذیر از آن باشد، آن‌گاه $\mathrm{vnr}(R_{0}[x;\alpha,\delta])=\{vx|\ v\in \mathrm{vnr}(R)\}$.

برهان. بنابه قضیه ۱۳.۴.۲ و نتیجه‌های ۱۰.۴.۲ و ۱۱.۴.۲، نتیجه حاصل می‌شود. □

در ادامه، به بررسی عناصر πــ منظم شبه‌حلقه‌ی $R_{0}[x;\alpha,\delta]$ می‌پردازیم.

قضیه ۱۵.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^2=0$ و (α,δ)ــ سازگار باشد. در این‌صورت، f یک عنصر πــ منظم از $R_{0}[x;\alpha,\delta]$ است اگر و تنها اگر $e\in Idem(R)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $ex\circ f$ منظم باشد و $(x-ex)\circ f\in Nil(R_{0}[x;\alpha,\delta])$.

برهان. فرض می‌کنیم f، πــ منظم باشد. پس برای برخی عدد صحیح $n\geq 1$، $f^{(n)}$ منظم است. از این‌رو بنابه گزاره ۸.۴.۲ و لم ۲.۴.۲، برای برخی $u\in U(R_{0}[x;\alpha,\delta])$ و $e\in Idem(R)$، داریم $f^{(n)}=u\circ ex$. بنابراین

$$\begin{aligned} ex\circ f\circ[f^{(n-1)}\circ u^{-1}]\circ ex\circ f &= [ex\circ f^{(n)}\circ u^{-1}]\circ ex\circ f\\ &= [ex\circ u\circ ex\circ u^{-1}]\circ ex\circ f\\ &= [ex\circ u\circ u^{-1}]\circ ex\circ f\\ &= ex\circ f, \end{aligned}$$

زیرا خودتوان‌های $R_{0}[x;\alpha,\delta]$ مرکزی هستند. لذا $ex\circ f\in \mathrm{vnr}(R_{0}[x;\alpha,\delta])$. به‌علاوه، داریم $((1-e)x\circ f)^{(n)}=(1-e)x\circ f^{(n)}=(1-e)x\circ u\circ ex=0$، زیرا $(1-e)x\in Idem(R_{0}[x;\alpha,\delta])$. بنابراین $(1-e)x\circ f\in Nil(R_{0}[x;\alpha,\delta])$.

بالعکس، فرض می‌کنیم برای برخی $e \in Idem(R)$، داشته باشیم $ex \circ f \in \mathrm{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ و $(1-e)x \circ f \in Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. از این‌رو برای برخی عدد صحیح $n \geq 1$، داریم

$$0 = ((1-e)x \circ f)^{(n)} = (1-e)x \circ f^{(n)} = f^{(n)} \circ (1-e)x,$$

زیرا $(1-e)x$ یک خودتوان مرکزی از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ است. لذا $f^{(n)} = ex \circ f^{(n)}$. چون $ex \circ f$ منظم است، بنابه گزاره ۸.۴.۲ و لم ۲.۴.۲، عناصر $u \in U(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ و $c \in Idem(R)$ وجود دارند به‌طوری‌که $ex \circ f = u \circ cx$. بنابراین $(ex \circ f)^{(n)} = (u \circ cx)^{(n)} = cx \circ u^{(n)}$. از این‌رو داریم $f^{(n)} = cx \circ u^{(n)}$، زیرا $(ex \circ f)^{(n)} = f^{(n)}$. چون خودتوان‌های $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ مرکزی هستند، پس $f^{(n)} \circ g \circ f^{(n)} = f^{(n)} \circ cx \circ (u^{-1})^{(n)} \circ f^{(n)} = cx \circ u^{(n)} = f^{(n)}$. لذا f، πـ منظم است. $\square$

لم ۱۶.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی و (α,δ)ـ سازگار باشد. در این‌صورت، $R_\circ[x;\alpha,\delta]/Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta]) \cong \big(R/Nil(R)\big)_\circ[x;\overline{\alpha},\overline{\delta}]$.

برهان. بنابه قضیه ۱۱.۳.۲، $Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = Nil(R)_\circ[x]$ ایده‌آلی از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ است. چون $\varphi : R_\circ[x;\alpha,\delta] \longrightarrow \big(R/Nil(R)\big)_\circ[x;\overline{\alpha},\overline{\delta}]$ با ضابطه $\varphi(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} x^i$، به‌طوری‌که $\overline{a_i} = a_i + Nil(R)$، یک بروریختی شبه‌حلقه‌ای است، از این‌رو نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۱۷.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^2 = 0$ و (α,δ)ـ سازگار باشد. در این‌صورت، f، πـ منظم است اگر و تنها اگر $f + Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ منظم باشد.

برهان. فرض می‌کنیم f، πـ منظم باشد و $\overline{f} = f + Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. پس برای برخی عدد صحیح $n \geq 1$ و $g \in R_\circ[x;\alpha,\delta]$، داریم $f^{(n)} = f^{(n)} \circ g \circ f^{(n)}$. از این‌رو بنابه قضیه ۱.۱.۲ و لم ۲.۴.۲، برای برخی $e \in Idem(R)$، داریم $f^{(n)} \circ g = ex$. چون خودتوان‌های $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ مرکزی هستند، پس $((1-e)x \circ f)^{(n)} = (1-e)x \circ f^{(n)} = (1-e)x \circ ex \circ f^{(n)} = 0$. بنابراین $[x - f^{(n)} \circ g] \circ f = (1-e)x \circ f \in Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. لذا داریم

$$\begin{aligned} f - f \circ [f^{(n-1)} \circ g] \circ f &= f - f^{(n)} \circ g \circ f \\ &= f - f \circ f^{(n)} \circ g \\ &= f \circ [x - f^{(n)} \circ g] \\ &= [x - f^{(n)} \circ g] \circ f \in Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta]), \end{aligned}$$

زیرا $x - f^{(n)} \circ g$ مرکزی است. از این‌رو

$$f + Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = f \circ [f^{(n-1)} \circ g] \circ f + Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta]),$$

و در نتیجه $\overline{f}$ منظم است.

بالعکس، فرض می‌کنیم $\overline{f} = f + Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ یک عنصر منظم از $R_\circ[x;\alpha,\delta]/Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ باشد. از این‌رو بنابه گزاره ۸.۴.۲، برای برخی $\overline{u} \in U\big(R_\circ[x;\alpha,\delta]/Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])\big)$ و $\overline{c} \in Idem\big(R_\circ[x;\alpha,\delta]/Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])\big)$، داریم $\overline{f} = \overline{u} \circ \overline{c}$. چون

$$R_\circ[x;\alpha,\delta]/Nil\big(R_\circ[x;\alpha,\delta]\big) \cong \overline{R}_\circ[x;\overline{\alpha},\overline{\delta}],$$

پس $\overline{u} \in U\big(\overline{R}_\circ[x;\overline{\alpha},\overline{\delta}]\big)$ و $\overline{c} \in Idem\big(\overline{R}_\circ[x;\overline{\alpha},\overline{\delta}]\big)$. از این‌رو بنابه نتیجه ۵.۴.۲، برای برخی $\overline{v} \in U(\overline{R})$، داریم $\overline{u} = \overline{v}x$. بنابراین $v' \in U(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\overline{u} = \overline{v'}x$، زیرا $Nil(R) \subseteq J(R)$. به‌علاوه، بنابه لم‌های ۵.۲.۲ و ۲.۴.۲، برای برخی $e \in Idem(R)$، داریم $\overline{c} = \overline{e}x = (e + Nil(R))x$. لذا $\overline{f} = \overline{v'}x \circ \overline{e}x = \overline{v'}\overline{e}x = \overline{v'e}x$. بنابراین $\overline{f} = \sum_{i=1}^{m} \overline{a_i}x^i = \overline{v'e}x$، و در نتیجه برای هر $i \geq 2$، $a_1 - v'e, a_i \in Nil(R)$. لذا برای برخی $b \in Nil(R)$ داریم $a_1 = v'e + b$. از این‌رو $w = bx + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m \in Nil(R)_\circ[x] = Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. بنابه قضیه ۴.۴.۲، $f = v'x \circ ex + w$ و $v'x + w \in U(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ در $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ وارون‌پذیر هستند. لذا بنابه گزاره ۸.۴.۲، $ex \circ f = ex \circ (ex \circ v'x + w) = ex \circ (v'x + w)$ منظم است. به‌علاوه، چون خودتوان‌های $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ مرکزی هستند و $Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ ایده‌آلی از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ است، پس

$$(1-e)x \circ f = f - f \circ ex = (v'x \circ ex + w) - (v'x \circ ex + w) \circ ex = w - ex \circ w \in Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta]).$$

از این‌رو بنابه قضیه ۱۵.۴.۲، f، πـ منظم است. □

در قضیه‌ی بعد، ساختار عناصر πـ منظم شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۱۸.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^2 = 0$ و (α,δ)ـ سازگار باشد. در این‌صورت، $f \in \pi - r(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ اگر و تنها اگر برای برخی $g \in \mathrm{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ و $w \in Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$، داشته باشیم $f = g + w$.

برهان. فرض می‌کنیم $f \in \pi - r(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. بنابه قضیه ۱۷.۴.۲، $f + Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ در $R_\circ[x;\alpha,\delta]/Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ منظم است. به‌علاوه، مطابق برهان قضیه ۱۷.۴.۲، برای برخی $v' \in U(R)$، $e \in Idem(R)$ و $w \in Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$، داریم $f = v'x \circ ex + w$. چون بنابه گزاره ۸.۴.۲، $g = v'x \circ ex \in \mathrm{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta])$، پس نتیجه حاصل می‌شود.

بالعکس، بنابه قضیه ۱۷.۴.۲، نتیجه حاصل می‌شود. □

نتیجه ۱۹.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^2 = 0$ و (α,δ)ـ سازگار باشد. در این‌صورت،

(۱) $\pi - r(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = \mathrm{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta]) + Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$.

(۲) $\pi - r(R_\circ[x;\alpha,\delta])/Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = \mathrm{vnr}\big(R_\circ[x;\alpha,\delta]/Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])\big)$.

(۳) $\pi - r(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = \mathrm{vnr}\big(R_\circ[x;\alpha,\delta]\big)$ اگر و تنها اگر R کاهشی باشد.

(۴) اگر $2 \in U(R)$، آن‌گاه هر $f \in \pi - r(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ مجموع چهار عنصر وارون‌پذیر از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ است.

برهان. (۱) از قضیه ۱۸.۴.۲، نتیجه حاصل می‌شود.

(۲) بنابه قضیه ۱۸.۴.۲، نتیجه حاصل می‌شود.

(۳) چون بنابه قضیه ۱.۱.۲، داریم $Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta]) \cap \text{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = \{\circ\}$، پس بنابه (۱)، نتیجه حاصل می‌شود.

(۴) بنابه (۱)، داریم $f = g + w$ به‌طوری‌که $g \in \text{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ و $w \in Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. بنابه قضیه ۱۲.۴.۲، عناصر $u, v \in U(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ وجود دارند به‌طوری‌که $g = u + v$. لذا بنابه قضیه ۴.۴.۲، داریم $u' = v + w \in U(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. بنابراین $f = u + u'$ مجموع دو عنصر وارون‌پذیر از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ می‌باشد. $\square$

مطابق [۴۵، قضیه ۴.۱ و گزاره ۴.۲]، اگر R حلقه‌ای آبلی باشد، آن‌گاه $\text{vnr}(R)$ یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته از R است و عنصر $a \in R$ منظم است اگر و تنها اگر برای برخی عناصر $u \in U(R)$ و $e \in Idem(R)$ داشته باشیم $a = ue$.

گزاره ۲۰.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^2 = \circ$ و (α, δ)ــ سازگار باشد. در این‌صورت، $\pi - r(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ یک مجموعه‌ی ضربی بسته است.

برهان. فرض می‌کنیم $f_1, f_2 \in \pi - r(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. از این‌رو بنابه نتیجه ۱۹.۴.۲، برای برخی $u_1, u_2 \in U(R)$، $e_1, e_2 \in Idem(R)$ و $h_1, h_2 \in Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ داریم $f_1 = u_1e_1x + h_1$. بنابراین

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2 &= (u_1e_1x + h_1) \circ (u_2e_2x + h_2) \\ &= (u_1e_1x + h_1) \circ u_2e_2x + (u_1e_1x + h_1) \circ h_2 \\ &= u_2e_2(u_1e_1x + h_1) + (u_1e_1x + h_1) \circ h_2. \end{aligned}$$

چون $Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ ایده‌آلی از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ است، پس $u_2e_2h_1$ و $(u_1e_1x + h_1) \circ h_2$ عناصری از $Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ هستند. بنابراین برای برخی $w \in Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$، داریم $f_1 \circ f_2 = u_2e_2u_1e_1x + w$. به‌علاوه، بنابه [۴۵، قضیه ۴.۱ و گزاره ۴.۲]، $q = u_2e_2u_1e_1 \in \text{vnr}(R)$. لذا بنابه نتیجه ۱۹.۴.۲، $f_1 \circ f_2 = qx + w$ یک عنصر πــ منظم از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ است. $\square$

قضیه ۲۱.۴.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، $Nil(R)^2 = \circ$ و (α, δ)ــ سازگار باشد. در این‌صورت، $\pi - r(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = \text{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta]) \cup Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ اگر و تنها اگر $Idem(R) = \{\circ, 1\}$ یا R کاهشی باشد.

برهان. ابتدا فرض کنیم $\pi - r(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = \text{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta]) \cup Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. فرض می‌کنیم $e \in Idem(R) \setminus \{\circ, 1\}$ موجود باشد. از این‌رو بنابه لم ۲.۴.۲، $Idem(R_\circ[x;\alpha,\delta]) \neq \{\circ, x\}$. نشان می‌دهیم $Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = \{\circ\}$. فرض می‌کنیم $f \in Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. بنابه نتیجه ۱۹.۴.۲، داریم $ex + f \in \text{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta]) + Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = \pi - r(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. لذا بنابه فرض، $ex + f \in \text{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta]) \cup Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. چون $e \neq \circ$، پس $ex + f \in \text{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta])$.

بنابه قضیه ۱.۱.۲، داریم $f - ex \circ f = (1-e)x \circ f = (1-e)x \circ (ex+f) \in \mathrm{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta])$، زیرا $(1-e)x$ در $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ مرکزی است. به‌علاوه، چون $Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta])$، پس

$$f - ex \circ f = (1-e)x \circ f \in Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta]).$$

از این‌رو بنابه قضیه ۱.۱.۲، داریم $f - ex \circ f = 0$. با جایگذاری ex به‌جای $(1-e)x$ و به‌کار بردن استدلالی مشابه، داریم $ex \circ f = 0$، و در نتیجه $f = 0$. بنابراین طبق نتیجه ۱۰.۳.۲، R کاهشی است.

بالعکس، فرض می‌کنیم $Idem(R) = \{0,1\}$. در این‌صورت، بنابه لم ۲.۴.۲، داریم $Idem(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = \{0,x\}$. لذا بنابه قضیه ۱.۱.۲، $\mathrm{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = U(R_\circ[x;\alpha,\delta]) \cup \{0\}$. لذا طبق نتیجه‌های ۵.۴.۲ و ۱۹.۴.۲، داریم

$$\pi - r(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = U(R_\circ[x;\alpha,\delta]) + Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = U(R_\circ[x;\alpha,\delta]).$$

اگر R کاهشی باشد، آن‌گاه بنابه نتیجه ۱۰.۳.۲، $Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = \{0\}$. بنابه نتیجه ۱۹.۴.۲، داریم $\pi - r(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = \mathrm{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. بنابراین

$$\pi - r(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = \mathrm{vnr}(R_\circ[x;\alpha,\delta]) \cup Nil(R_\circ[x;\alpha,\delta]).$$

□

۵.۲ بررسی عناصر منظم و πـ منظم شبه‌حلقه‌ی سری‌های توانی اریب

در این بخش، ابتدا به مطالعه‌ی عناصر وارون‌پذیر، تمیز، منظم، پوچ‌توان و πـ منظم شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[[x;\alpha]]$ می‌پردازیم.

کارتان[4] در مرجع [۲۵]، ساختار عناصر وارون‌پذیر $F_\circ[[x]]$ را برای میدان F مشخص کرد. او ثابت کرد که $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ یک عنصر وارون‌پذیر از $F_\circ[[x]]$ است اگر و تنها اگر $a_1 \neq 0$. در قضیه بعد، ما ساختار عناصر وارون‌پذیر شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[[x;\alpha]]$ را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۱.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ سازگار باشد. در این‌صورت، برای هر $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \in R_\circ[[x;\alpha]]$، گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) f یک عنصر وارون‌پذیر از $R_\circ[[x;\alpha]]$ است اگر و تنها اگر $a_1 \in U(R)$.

(۲) اگر R ددکیند ـ متناهی باشد، آن‌گاه f یک عنصر وارون‌پذیر از $R_\circ[[x;\alpha]]$ است اگر و تنها اگر f وارون چپ یا راست داشته باشد.

[4] Cartan

برهان. (۱) فرض می‌کنیم f یک عنصر وارون‌پذیر از $R_\circ[[x;\alpha]]$ باشد. پس عنصر $g=\sum_{j=1}^{\infty} b_jx^j$ از $R_\circ[[x;\alpha]]$ وجود دارد به‌طوری‌که $g\circ f=x=f\circ g$. بنابراین $b_1a_1=1=a_1b_1$، و در نتیجه $a_1\in U(R)$.

بالعکس، فرض می‌کنیم $a_1\in U(R)$ و $g=\sum_{i=1}^{\infty} b_ix^i\in R_\circ[[x;\alpha]]$ به‌طوری‌که $b_1=a_1^{-1}$. چون برای هر $i\geq 1$، $\alpha^i(a_1)\in U(R)$، پس دستگاه معادلات

$$
\begin{aligned}
&b_1a_1=1,\\
&b_1a_2+b_2a_1\alpha(a_1)=\circ,\\
&b_1a_3+b_2a_1\alpha(a_2)+b_2a_2\alpha^2(a_1)+b_3a_1\alpha(a_1)\alpha^2(a_1)=\circ,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

برای $b_1,b_2,b_3,\ldots$ حل‌پذیر است. بنابراین به آسانی می‌توان دید که g یک وارون راست برای f است. به‌علاوه، چون $b_1\in U(R)$، با استدلالی مشابه، می‌توان نتیجه گرفت g یک وارون راست مانند h دارد. بنابراین $f\in U(R_\circ[[x;\alpha]])$.

(۲) فرض می‌کنیم f وارون چپ داشته باشد. پس $g=\sum_{i=1}^{\infty} b_ix^i\in R_\circ[[x;\alpha]]$ وجود دارد به‌طوری‌که $g\circ f=x$. از این‌رو $a_1b_1=1$. چون R ددکیند ــ متناهی است، پس $a_1\in U(R)$. لذا بنابه (۱) نتیجه حاصل می‌شود.

بالعکس، واضح است. $\square$

لم ۲.۵.۲. [۳۸، لم ۲.۵] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ صلب و f عنصری خودتوان از شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[[x;\alpha]]$ باشد. در این‌صورت، $f=ex$ که e عنصری خودتوان از R است.

با استفاده از لم ۲.۵.۲ و به‌کار بردن استدلالی مشابه برهان لم ۲.۴.۲، می‌توان لم زیر را ثابت کرد.

لم ۳.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، $Nil(R)^2=\circ$ و αـ سازگار باشد. در این‌صورت، هر خودتوان از $R_\circ[[x;\alpha]]$ مرکزی است و $Idem(R_\circ[[x;\alpha]])=\{ex|\ e\in Idem(R)\}$.

در قضیه بعد، با استفاده از قضیه ۱.۵.۲ و لم ۳.۵.۲، عناصر تمیز $R_\circ[[x;\alpha]]$ را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۴.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، $Nil(R)^2=\circ$ و αـ سازگار باشد. در این‌صورت،

(۱) $\mathrm{cln}(R_\circ[[x;\alpha]])=\{\sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i \mid a_1\in \mathrm{cln}(R)$ و $a_i\in R,\ i\geq 2$ برای هر$\}$.

(۲) $R_\circ[[x;\alpha]]$ تمیز است اگر و تنها اگر R تمیز باشد.

با استفاده از لم ۳.۵.۲، قضیه ۱.۵.۲ و به‌کار بردن استدلالی مشابه برهان گزاره ۸.۴.۲، می‌توان گزاره‌ی بعد را ثابت کرد.

گزاره ۵.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، $Nil(R)^۲ = ۰$ و αـ سازگار باشد. در این‌صورت، f عنصری منظم از شبه‌حلقه‌ی $R_۰[[x;\alpha]]$ است اگر و تنها اگر عناصر $u \in U(R_۰[[x;\alpha]])$ و $e \in Idem(R_۰[[x;\alpha]])$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $f = u \circ e$.

در قضیه بعد، ساختار عناصر منظم شبه‌حلقه‌ی $R_۰[[x;\alpha]]$ را در حالتی که R حلقه‌ی برگشت‌پذیر، $Nil(R)^۲ = ۰$ و αـ سازگار باشد، مشخص می‌کنیم.

قضیه ۶.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، $Nil(R)^۲ = ۰$ و αـ سازگار باشد. در این‌صورت،

$$\mathrm{vnr}(R_۰[[x;\alpha]]) = \{\sum_{i=۱}^{\infty} a_i x^i \in R_۰[[x;\alpha]] \mid a_۱ = ue \text{ و } a_i \in eR,\ i \geq ۲ \text{ برای هر } ,u \in U(R) \text{ و } e \in Idem(R)\}.$$

برهان. از گزاره ۵.۵.۲، قضیه ۱.۵.۲ و لم ۳.۵.۲ نتیجه حاصل می‌شود. □

نتیجه ۷.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ صلب باشد. در این‌صورت،

$$(\mathrm{vnr}(R))x = \mathrm{vnr}(R_۰[x;\alpha]) \subsetneq \mathrm{vnr}(R_۰[[x;\alpha]]).$$

برهان. بنابه نتیجه ۱۰.۴.۲، $\mathrm{vnr}(R_۰[x;\alpha]) = (\mathrm{vnr}(R))x$، و از این‌رو نتیجه حاصل است. □

در ادامه، به مطالعه‌ی ساختار عناصر پوچ‌توان شبه‌حلقه‌ی $R_۰[[x;\alpha]]$ می‌پردازیم.

لم ۸.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ سازگار باشد. همچنین فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=۱}^{\infty} a_i x^i$ و $g = \sum_{j=۱}^{\infty} b_j x^j$ عناصری از $R_۰[[x;\alpha]]$ باشند. در این‌صورت، اگر I یک αـ ایده‌آل پوچ از R باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادلند:

(۱) اگر $f \circ g \in Nil(R)_۰[[x]]$، آن‌گاه برای هر i,j، $a_i b_j \in Nil(R)$.

(۲) اگر $\overline{f} \circ \overline{g} \in Nil(R/I)_۰[[x]]$، آن‌گاه برای هر i,j، $\overline{a_i}\overline{b_j} \in Nil(R/I)$.

برهان. چون I یک ایده‌آل پوچ از R است، پس $Nil(R/I) = Nil(R)/I$. بنابراین داریم $f \circ g \in Nil(R)_۰[[x]]$ اگر و تنها اگر $\overline{f} \circ \overline{g} \in Nil(R/I)_۰[[x]]$. لذا برای هر i,j، داریم $a_i b_j \in Nil(R)$ اگر و تنها اگر $\overline{a_i}\overline{b_j} \in Nil(R/I)$. □

قضیه ۹.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ سازگار، $Nil(R)$ ایده‌آلی از R و $f = \sum_{i=۱}^{\infty} a_i x^i$ و $g = \sum_{j=۱}^{\infty} b_j x^j$ عناصری از $R_۰[[x;\alpha]]$ باشند. اگر $f \circ g \in Nil(R)_۰[[x]]$، آن‌گاه برای هر i,j، داریم $a_i b_j \in Nil(R)$.

برهان. فرض می‌کنیم $f \circ g \in Nil(R)_۰[[x]]$ و $\overline{R} = R/Nil(R)$. چون $Nil(R)$ یک ایده‌آل αـ سازگار از R است، بنابه گزاره ۲۹.۱.۱، $\overline{R}$، حلقه‌ی کاهشی $\overline{\alpha}$ـ سازگار می‌باشد. از این‌رو بنابه گزاره ۲۴.۱.۱، $\overline{R}$ حلقه‌ای $\overline{\alpha}$ـ صلب است. چون $\overline{f} \circ \overline{g} = \overline{۰}$، بنابه لم ۲۷.۱.۱، برای هر i,j، داریم $\overline{a_i}\overline{b_j} = \overline{۰}$. از این‌رو بنابه لم ۸.۵.۲، نتیجه حاصل می‌شود. □

گزاره ۱۰.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ سازگار و $Nil(R)$ ایده‌آلی از R باشد. همچنین فرض می‌کنیم $f_1, f_2, \dots, f_n$ عناصری از $R_0[[x;\alpha]]$ باشند. اگر $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n \in Nil(R)_0[[x]]$، آن‌گاه $C_{f_1} C_{f_2} \cdots C_{f_n} \subseteq Nil(R)$.

برهان. با استقرا روی n اثبات می‌کنیم. اگر $n = 2$، آن‌گاه بنابه قضیه ۹.۵.۲، نتیجه حاصل می‌شود. فرض می‌کنیم $n > 2$. قرار دهید $g = f_2 \circ f_3 \circ \cdots \circ f_n$. بنابراین $f_1 \circ g \in Nil(R)_0[[x]]$، و از این‌رو بنابه قضیه ۹.۵.۲، برای هر $a_g \in C_g$ و $a_1 \in C_{f_1}$، داریم $a_1 a_g \in Nil(R)$. لذا برای هر $a_1 \in C_{f_1}$، داریم

$$\begin{aligned} g \circ a_1 x &= (f_2 \circ f_3 \circ \cdots \circ f_n) \circ a_1 x = (f_2 \circ f_3 \circ \cdots \circ f_{n-1}) \circ (f_n \circ a_1 x) \\ &= (f_2 \circ f_3 \circ \cdots \circ f_{n-1}) \circ (a_1 f_n) \in Nil(R)_0[[x]]. \end{aligned}$$

ضرایب $a_1 f_n$ به فرم $a_1 a_n$ هستند به‌طوری‌که $a_n \in C_{f_n}$. لذا با استفاده از فرض استقرا داریم $a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_1 a_n \in Nil(R)$. از این رو بنابه لم ۳.۳.۲، داریم $C_{f_1} C_{f_2} \cdots C_{f_n} \subseteq Nil(R)$. □

در قضیه بعد، ساختار عناصر پوچ‌توان شبه‌حلقه‌ی $R_0[[x;\alpha]]$ را در حالتی که R حلقه‌ای αـ سازگار و $Nil(R)$ ایده‌آلی پوچ‌توان از R است، تعیین می‌کنیم.

قضیه ۱۱.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ سازگار و $Nil(R)$ ایده‌آلی از R باشد. اگر $Nil(R)$ پوچ‌توان باشد، آن‌گاه $Nil(R_0[[x;\alpha]]) = Nil(R)_0[[x]]$. به‌ویژه، اگر حلقه‌ی R نوتری باشد، آن‌گاه $Nil(R_0[[x;\alpha]]) = Nil(R)_0[[x]]$.

برهان. بنابه گزاره ۱۰.۵.۲، داریم $Nil(R_0[[x;\alpha]]) \subseteq Nil(R)_0[[x]]$. حال فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \in Nil(R)_0[[x]]$. چون $Nil(R)$ ایده‌آلی پوچ‌توان است، پس عدد صحیح $k \geq 2$ وجود دارد به‌طوری‌که $C_f^k = 0$. فرض می‌کنیم $\mathcal{A} = \{\alpha^j(a_s) \mid j \geq 0 \text{ و } a_s \in C_f\}$. پس بنابه لم ۲۳.۱.۱، داریم $\mathcal{A}^k = 0$. چون برای هر $n \geq 1$، ضریب x^n در $f^{(k)}$، جمعی از عناصر به فرم $c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_l}$ است به طوری‌که $c_{i_r} \in \mathcal{A}$ و $l \geq k$، پس $f^{(k)} = 0$. بنابراین $Nil(R)_0[[x]] \subseteq Nil(R_0[[x;\alpha]])$، و در نتیجه $Nil(R_0[[x;\alpha]]) = Nil(R)_0[[x]]$. به‌ویژه، اگر R حلقه‌ای نوتری باشد، آن‌گاه ایده‌آل $Nil(R)$ پوچ‌توان است، و لذا نتیجه حاصل می‌شود. □

در ادامه، مثالی ارائه می‌دهیم که در شرایط قضیه ۹.۳.۲ صدق می‌کند.

مثال ۱۲.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ صلب باشد. برای هر $n \geq 2$، تعریف می‌کنیم $V_n = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$ به‌طوری‌که برای هر i, j، $E_{i,j}$ ماتریس‌های یکه هستند. همچنین، برای اعداد صحیح زوج $n = 2k \geq 2$، تعریف می‌کنیم

$$A_n(R) = RI_n + RV_n + RV_n^2 + \cdots + RV_n^{k-1} + A_n^e(R) \quad \text{و} \quad A_n^e(R) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+i}^{n} RE_{i,j}.$$

به‌علاوه، برای اعداد صحیح فرد $n = 2k+1 \geq 3$، تعریف می‌کنیم

$A_n(R) = RI_n + RV_n + RV_n^{۲} + \cdots + RV_n^{k-۱} + A_n^o(R)$ و $A_n^o(R) = \sum_{i=۱}^{k+۱} \sum_{j=k+i}^{n} RE_{i,j}$.

فرض می‌کنیم $A_n(R) \longrightarrow A_n(R)$: $\overline{\alpha}$ با ضابطه $\overline{\alpha}((a_{ij})) = (\alpha(a_{ij}))$ باشد. ابتدا نشان می‌دهیم $A_n(R)$ حلقه‌ای $\overline{\alpha}$ـ سازگار است. فرض می‌کنیم $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in A_n(R)$. اگر $A\overline{\alpha}(B) = ۰$، آن‌گاه بنابه [۷۰، قضیه ۵.۱]، برای هر $۱ \leq l \leq n$ و $۱ \leq i,j \leq n$، داریم $a_{il}\alpha(b_{lj}) = ۰$. از این‌رو برای هر $۱ \leq l \leq n$، $a_{il}b_{lj} = ۰$، زیرا R، αـ سازگار است. لذا به آسانی می‌توان نشان داد که $AB = ۰$.

حال فرض می‌کنیم $AB = ۰$. بنابه [۷۰، قضیه ۵.۱]، برای هر $۱ \leq l \leq n$، داریم $a_{il}b_{lj} = ۰$. چون R، αـ سازگار است، پس $a_{il}\alpha(b_{lj}) = ۰$، و در نتیجه $A\overline{\alpha}(B) = ۰$. بنابراین $A_n(R)$ حلقه‌ای $\overline{\alpha}$ـ سازگار است. به‌علاوه،

$$Nil\big(A_n(R)\big) = \{(a_{ij}) \in A_n(R) \mid \ a_{ii} = ۰, \ ۱ \leq i \leq n \text{ برای هر } \},$$

ایده‌آلی پوچ‌توان از $A_n(R)$ است. از این‌رو بنابه قضیه ۱۱.۵.۲، داریم

$$Nil\big(A_n(R)\big)_{\circ}[[x;\overline{\alpha}]] = Nil\big(A_n(R)\big)_{\circ}[[x]].$$

قضیه ۱۳.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ سازگار و $Nil(R)$ ایده‌آلی پوچ‌توان باشد. در این‌صورت، $Nil(R_{\circ}[[x;\alpha]]) = Nil(R)_{\circ}[[x]]$ ایده‌آلی از $R_{\circ}[[x;\alpha]]$ است.

برهان. با استفاده از قضیه ۱۳.۵.۲، به آسانی می‌توان نشان داد که $Nil(R_{\circ}[[x;\alpha]])$ یک ایده‌آل چپ از $R_{\circ}[[x;\alpha]]$ است. حال فرض می‌کنیم

$$f = \sum_{i=۱}^{\infty} a_i x^i \in Nil(R_{\circ}[[x;\alpha]]) \text{ و } g = \sum_{i=۱}^{\infty} b_i x^i, h = \sum_{i=۱}^{\infty} c_i x^i \in R_{\circ}[[x;\alpha]]$$

در این‌صورت،

$$\begin{aligned}
(f+g)\circ h - g\circ h &= c_۱\big[(f+g)-g\big] + c_۲\big[(f+g)^۲ - g^۲\big] + c_۳\big[(f+g)^۳ - g^۳\big] + \cdots \\
&= c_۱ a_۱ x + \Big[c_۱ a_۲ + c_۲\Big(a_۱\alpha(a_۱) + a_۱\alpha(b_۱) + b_۱\alpha(a_۱)\Big)\Big]x^۲ \\
&+ \Big[c_۱ a_۳ + c_۲\Big(a_۱\alpha(a_۲) + a_۲\alpha^۲(a_۱) + a_۱\alpha(b_۲) + a_۲\alpha^۲(b_۱) + b_۱\alpha(a_۲) \\
&+ b_۲\alpha^۲(a_۱)\Big) + c_۳\Big(a_۱\alpha(a_۱)\alpha^۲(a_۱) + a_۱\alpha(a_۱)\alpha^۲(b_۱) + b_۱\alpha(a_۱)\alpha^۲(a_۱) \\
&+ b_۱\alpha(a_۱)\alpha^۲(b_۱) + a_۱\alpha(b_۱)\alpha^۲(a_۱) + a_۱\alpha(b_۱)\alpha^۲(b_۱) \\
&+ b_۱\alpha(b_۱)\alpha^۲(a_۱)\Big)\Big]x^۳ + \cdots.
\end{aligned}$$

بنابراین $(f+g)\circ h - g\circ h \in Nil(R)_{\circ}[[x]] = Nil(R_{\circ}[[x;\alpha]])$، زیرا بنابه قضیه ۱۱.۵.۲، برای هر $i \geq ۱$، $a_i \in Nil(R)$. پس $Nil(R_{\circ}[[x;\alpha]])$ یک ایده‌آل راست از $R_{\circ}[[x;\alpha]]$ است. □

در ادامه، به مطالعه‌ی عناصر πـ منظم شبه‌حلقه‌ی $R_{\circ}[[x;\alpha]]$ در حالتی که R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، $Nil(R)^۲ = ۰$ و αـ سازگار است، می‌پردازیم.

لم ۱۴.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و αـ سازگار باشد. در این‌صورت، برای هر $f \in R_\circ[[x;\alpha]]$ شرایط زیر معادلند:

(۱) عنصر $e \in Idem(R_\circ[[x]])$ وجود دارد به‌طوری‌که $e \circ f$ منظم است و $(x-e)\circ f$ پوچ‌توان می‌باشد.

(۲) f عنصری πـ منظم از $R_\circ[[x;\alpha]]$ است.

برهان. با استفاده از لم ۳.۵.۲ و به‌کار بردن استدلالی مشابه برهان قضیه ۱۵.۴.۲ نتیجه حاصل می‌شود. □

لم ۱۵.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ سازگار و $Nil(R)$ ایده‌آلی پوچ‌توان از R باشد. در این‌صورت، $R_\circ[[x;\alpha]]/Nil(R_\circ[[x;\alpha]]) \cong \big(R/Nil(R)\big)_\circ[[x;\overline{\alpha}]]$.

برهان. بنابه قضیه ۱۳.۵.۲، $Nil(R_\circ[[x;\alpha]]) = Nil(R)_\circ[[x]]$ ایده‌آلی از $R_\circ[[x;\alpha]]$ است. چون $\varphi : R_\circ[[x;\alpha]] \longrightarrow \big(R/Nil(R)\big)_\circ[[x;\overline{\alpha}]]$ با ضابطه $\varphi(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{a_i} x^i$، که $\overline{a_i} = a_i + Nil(R)$، یک بروریختی شبه‌حلقه‌ای است، پس

$$R_\circ[[x;\alpha]]/Nil(R_\circ[[x;\alpha]]) \cong \big(R/Nil(R)\big)_\circ[[x;\overline{\alpha}]].$$

□

قضیه ۱۶.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، $Nil(R)^۲ = ۰$ و αـ سازگار باشد. در این‌صورت، f یک عنصر πـ منظم از $R_\circ[[x;\alpha]]$ است اگر و تنها اگر $f + Nil(R_\circ[[x;\alpha]])$ منظم باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ و $\overline{f} = f + Nil(R_\circ[[x;\alpha]])$ در شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[[x;\alpha]]/Nil(R_\circ[[x;\alpha]])$ منظم باشد. پس بنابه گزاره ۵.۵.۲، برای برخی $\overline{u} \in U\big(R_\circ[[x;\alpha]]/Nil(R_\circ[[x;\alpha]])\big)$ و $\overline{c} \in Idem(R_\circ[[x;\alpha]]/Nil(R_\circ[[x;\alpha]]))$، $\overline{f} = \overline{u} \circ \overline{c}$. فرض می‌کنیم $\overline{R} = R/Nil(R)$. از این‌رو بنابه لم ۱۵.۵.۲، داریم $\overline{u} \in U\big(\overline{R}_\circ[[x;\overline{\alpha}]]\big)$ و $\overline{c} \in Idem\big(\overline{R}_\circ[[x;\overline{\alpha}]]\big)$. لذا بنابه قضیه ۱.۵.۲، $\overline{u} = \overline{v}x + \sum_{i=۲}^{\infty} \overline{b_i} x^i$ به‌طوری‌که $\overline{v} \in U(\overline{R})$ و برای هر $i \geq ۲$، $\overline{b_i} \in \overline{R}$. چون $Nil(R) \subseteq J(R)$، پس برای برخی $v' \in U(R)$، داریم $\overline{v} = \overline{v'}$. به‌علاوه، بنابه لم‌های ۳.۵.۲ و ۵.۲.۲، برای برخی $e \in Idem(R)$، داریم $\overline{c} = \overline{e}x$. قرار دهید $h = \sum_{i=۲}^{\infty} b_i x^i$. لذا

$$\overline{f} = \overline{c} \circ \overline{u} = \overline{e}x \circ \big(\overline{v'}x + \overline{h}\big) = \overline{e}x \circ \overline{v'}x + \overline{e}x \circ \overline{h} = \overline{v'e}x + \textstyle\sum_{i=۲}^{\infty} \overline{eb_i} x^i.$$

از این‌رو برای هر $i \geq ۲$، داریم $a_۱ - v'e, a_i - eb_i \in Nil(R)$. بنابراین $a_۱ = v'e + c_۱$ و $a_i = eb_i + c_i$ به‌طوری‌که برای هر $i \geq ۱$، $c_i \in Nil(R)$. بنابه قضیه ۱۱.۵.۲، $w = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i$ یک عنصر پوچ‌توان از $R_\circ[[x;\alpha]]$ است. بنابراین $f = ex \circ (v'x + h) + w$. چون بنابه قضیه ۱.۵.۲، $v'x + h + w \in U(R_\circ[[x;\alpha]])$، پس بنابه گزاره ۵.۵.۲،

$$ex \circ f = ex \circ \left[ex \circ (v'x + h) + w\right] = ex \circ \left[v'x + h + w\right]$$

منظم است. به‌علاوه، چون عناصر خودتوان $R_\circ[[x;\alpha]]$ مرکزی هستند و $Nil(R_\circ[[x;\alpha]])$ ایده‌آلی از $R_\circ[[x;\alpha]]$ است، پس

$$(1-e)x \circ f = (1-e)x \circ \left[ex \circ (v'x + h) + w\right] = (1-e)x \circ w \in Nil(R_\circ[[x;\alpha]]).$$

از این‌رو بنابه لم ۱۴.۵.۲، f، πـ منظم است.

بالعکس، حال فرض می‌کنیم f یک عنصر πـ منظم از $R_\circ[[x;\alpha]]$ باشد. بنابراین عدد صحیح $n \geq 1$ و $g \in R_\circ[[x;\alpha]]$ وجود دارند به‌طوری‌که $f^{(n)} = f^{(n)} \circ g \circ f^{(n)}$. بنابه لم ۳.۵.۲، برای برخی $e \in Idem(R)$ داریم $f^{(n)} \circ g = ex$. چون عناصر خودتوان $R_\circ[[x;\alpha]]$ مرکزی هستند، پس

$$((1-e)x \circ f)^{(n)} = (1-e)x \circ f^{(n)} = (1-e)x \circ ex \circ f^{(n)} = 0.$$

بنابراین $[x - f^{(n)} \circ g] \circ f = (1-e)x \circ f \in Nil\big(R_\circ[[x;\alpha]]\big)$. چون $x - f^{(n)} \circ g$ مرکزی است، داریم

$$\begin{aligned} f - f \circ [f^{(n-1)} \circ g] \circ f &= f - f^{(n)} \circ g \circ f \\ &= f - f \circ f^{(n)} \circ g \\ &= [x - f^{(n)} \circ g] \circ f \in Nil(R_\circ[[x;\alpha]]). \end{aligned}$$

لذا $f + Nil(R_\circ[[x;\alpha]]) = f \circ [f^{(n-1)} \circ g] \circ f + Nil(R_\circ[[x;\alpha]])$، و در نتیجه $\overline{f}$ منظم است. □

نتیجه ۱۷.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، $Nil(R)^2 = 0$ و αـ سازگار باشد. در این‌صورت، $f \in \pi - r(R_\circ[[x;\alpha]])$ اگر و تنها اگر برای برخی $g \in \text{vnr}(R_\circ[[x;\alpha]])$ و $w \in Nil(R_\circ[[x;\alpha]])$، داشته باشیم $f = g + w$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f \in \pi - r(R_\circ[[x;\alpha]])$. بنابه قضیه ۱۶.۵.۲، $f + Nil(R_\circ[[x;\alpha]])$ یک عنصر منظم از $R_\circ[[x;\alpha]]/Nil(R_\circ[[x;\alpha]])$ می‌باشد. با توجه به برهان قضیه ۱۶.۵.۲، عناصر $h \in U(R_\circ[[x;\alpha]])$، $e \in Idem(R)$ و $w \in Nil(R_\circ[[x;\alpha]])$ وجود دارند به‌طوری‌که $f = h \circ ex + w$. از این‌رو بنابه گزاره ۵.۵.۲، داریم $f \in \text{vnr}(R_\circ[[x;\alpha]]) + Nil(R_\circ[[x;\alpha]])$.

بالعکس، از قضیه ۱۶.۵.۲، نتیجه حاصل می‌شود. □

در قضیه بعد، ساختار عناصر πـ منظم شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[[x;\alpha]]$ را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۱۸.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، $Nil(R)^2 = 0$ و αـ سازگار باشد. در این‌صورت، مجموعه‌ی همه‌ی عناصر πـ منظم $R_\circ[[x;\alpha]]$ برابر است با

$$\Big\{ \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \mid a_1 = eu + c \text{ و } \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i \in (eR)_\circ[[x;\alpha]] + Nil(R_\circ[[x;\alpha]]), \\ \text{که } e \in Idem(R),\ u \in U(R) \text{ و } c \in Nil(R) \Big\}.$$

برهان. از نتیجه ۱۷.۵.۲، گزاره ۵.۵.۲، قضیه ۱.۵.۲ و لم ۳.۵.۲، نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

گزاره ۱۹.۵.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، $Nil(R)^2 = 0$ و αـ سازگار باشد. در این‌صورت، $\pi - r(R_0[[x;\alpha]])$ یک نیم‌گروه است.

برهان. فرض می‌کنیم f_1, f_2 عناصری πـ منظم از $R_0[[x;\alpha]]$ باشند. بنابه نتیجه ۱۷.۵.۲، برای هر $i = 1, 2$، عناصر $h_i \in U(R_0[[x;\alpha]])$، $e_i \in Idem(R)$ و $w_i \in Nil(R_0[[x;\alpha]])$ وجود دارند به‌طوری‌که $f_i = h_i \circ e_i x + w_i$. بنابراین $f_1 \circ f_2 = f_1 \circ (h_2 \circ e_2 x + w_2) = f_1 \circ h_2 \circ e_2 x + f_1 \circ w_2$. پس $g_2 = f_1 \circ w_2 \in Nil(R_0[[x;\alpha]])$. فرض می‌کنیم $h_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ و $h_2 = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i$. لذا داریم

$$\begin{aligned}
f_1 \circ h_2 \circ e_2 x &= (e_1 h_1 + w_1) \circ e_2 h_2 \\
&= e_2 b_1 [e_1 h_1 + w_1] + e_2 b_2 [e_1 h_1 + w_1]^2 + \cdots \\
&= e_2 b_1 e_1 h_1 + e_2 b_1 w_1 + e_2 b_2 [e_1 h_1^2 + e_1 h_1 w_1 + w_1 e_1 h_1 + w_1^2] + \cdots.
\end{aligned}$$

بنابه قضیه ۱۱.۵.۲، برای برخی $g_1 \in Nil(R_0[[x;\alpha]])$، داریم

$$f_1 \circ h_2 \circ e_2 x = e_1 e_2 b_1 a_1 x + e_1 e_2 [b_1 a_2 + b_2 a_1 \alpha(a_1)] x^2 + \cdots + g_1.$$

چون $e_1 e_2 \in Idem(R)$ و $b_1 a_1 \in U(R)$، بنابه قضیه ۶.۵.۲،

$$k = e_1 e_2 b_1 a_1 x + e_1 e_2 [b_1 a_2 + b_2 a_1 \alpha(a_1)] x^2 + \cdots$$

یک عنصر منظم از $R_0[[x;\alpha]]$ است. بنابراین داریم $f_1 \circ f_2 = k + g_1 + g_2$، و از این‌رو بنابه نتیجه ۱۷.۵.۲، $f_1 \circ f_2$ یک عنصر πـ منظم از $R_0[[x;\alpha]]$ است. $\square$

۶.۲ بررسی شبه‌ـ رادیکال $R_0[x]$

در این بخش، به مطالعه‌ی شبه‌ـ رادیکال و اشتراک تمام ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال شبه‌حلقه‌ی $R_0[x]$ که به ترتیب با $J_\ell(R_0[x])$ و $J_r(R_0[x])$ نمایش داده می‌شوند، می‌پردازیم و ارتباط بین آن‌ها را مشخص می‌کنیم. همچنین، نشان می‌دهیم $J_r(R_0[x])$ بزرگترین ایده‌آل شبه‌ـ منظم $R_0[x]$ است.

فرض می‌کنیم N شبه‌حلقه‌ای دلخواه و $A \subseteq N$ باشد. در این‌صورت، ایده‌آل راست تولید شده توسط A، ایده‌آل چپ تولید شده توسط A و ایده‌آل تولید شده توسط A را به‌ترتیب با نمادهای $\langle A \rangle_r$، $\langle A \rangle_\ell$ و $\langle A \rangle$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۶.۲. فرض می‌کنیم N شبه‌حلقه‌ای دلخواه باشد. در این‌صورت، اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های راست ماکسیمال را با $J_r(N)$ نشان می‌دهیم و آن را شبه‌ـ رادیکال[5] N می‌نامیم. همچنین، اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال N را با $J_\ell(N)$ را نشان می‌دهیم.

[5] Quasi-radical

لم ۲.۶.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این‌صورت، هر ایده‌آل از حلقه‌ی $R[x]$ که مشمول در $R_\circ[x]$ باشد، یک ایده‌آل راست از $R_\circ[x]$ است.

برهان. فرض می‌کنیم I ایده‌آلی از حلقه‌ی $R[x]$ باشد که مشمول در $R_\circ[x]$ است. همچنین، فرض می‌کنیم $\beta \in I$ و $\alpha, h = \sum_{i=1}^{n} h_i x^i \in R_\circ[x]$. در این‌صورت،

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\circ h - \alpha\circ h &= h_1(\alpha+\beta) + h_2(\alpha+\beta)^2 + \cdots + h_n(\alpha+\beta)^n \\
&\quad - h_1\alpha - h_2\alpha^2 - \cdots - h_n\alpha^n \\
&= h_1\beta + 2h_2\alpha\beta + h_2\beta^2 + \cdots \\
&\quad + (n-1)h_n\alpha^{n-1}\beta + \cdots + (n-1)h_n\alpha\beta^{n-1} + h_n\beta^n \\
&= \left[h_1 + 2h_2\alpha + \cdots + (n-1)h_n\alpha\beta^{n-2} + h_n\beta^{n-1}\right]\beta \in I.
\end{aligned}$$

بنابراین I یک ایده‌آل راست از $R_\circ[x]$ است. □

لم ۳.۶.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $f \in R_\circ[x]$. در این‌صورت،

$$\langle f\rangle_r \subseteq \{gf \mid g \in R[x]\}.$$

برهان. چون $\{gf \mid g \in R[x]\}$ ایده‌آلی از حلقه‌ی $R[x]$ است که مشمول در $R_\circ[x]$ است، لذا از لم ۲.۶.۲ نتیجه حاصل می‌شود. □

همان‌طور که می‌دانیم اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، آن‌گاه $f = \sum_{i=\circ}^{n} a_i x^i$ عنصری وارون‌پذیر از حلقه‌ی $R[x]$ است اگر و تنها اگر $a_\circ \in U(R)$ و برای هر $i \geq 1$، $a_i \in Nil(R)$.

گزاره ۴.۶.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، $Nil(R)^2 = \circ$ و $f \in R_\circ[x]$. در این‌صورت، f عنصر وارون‌پذیری از $R_\circ[x]$ است اگر و تنها اگر $\langle f\rangle_r = R_\circ[x]$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ و $\langle f\rangle_r = R_\circ[x]$. بنابه لم ۳.۶.۲، $g = \sum_{j=\circ}^{m} b_j x^j$ از $R[x]$ وجود دارد به‌طوری‌که $b_\circ \neq \circ$ و $x = gf$. فرض می‌کنیم $f_1 = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$. پس $gf_1 = 1$. بنابراین $f_1 \in U(R[x])$، و در نتیجه $a_1 \in U(R)$ و $a_2, \ldots, a_n \in Nil(R)$. لذا بنابه قضیه ۴.۱.۲، f عنصر وارون‌پذیری از $R_\circ[x]$ می‌باشد.

بالعکس، واضح است. □

قضیه ۵.۶.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، $Nil(R)^2 = \circ$ و

$$A = \{f \in R_\circ[x] \mid x - fg \in U(R_\circ[x]),\ g \in R[x] \text{ برای هر }\}.$$

در این‌صورت، $A = J_r(R_\circ[x]) = Nil(R_\circ[x]) = Nil(R)_\circ[x]$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم $A \subseteq J_r(R_\circ[x])$. فرض می‌کنیم $f \notin J_r(R_\circ[x])$. پس ایده‌آل راست ماکسیمال M از $R_\circ[x]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f \notin M$. بنابراین $M + \langle f \rangle_r = R_\circ[x]$. بنابه لم ۳.۶.۲، برای برخی $m \in M$ و $g \in R[x]$، داریم $m + gf = x$. پس $m = x - gf \notin U(R_\circ[x])$، و در نتیجه $f \notin A$.

حال ثابت می‌کنیم $J_r(R_\circ[x]) \subseteq Nil(R_\circ[x])$. فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \notin Nil(R_\circ[x])$. پس بنابه قضیه ۱۹.۲.۱، $1 \leq i \leq n$ وجود دارد به‌طوری‌که $a_i \notin Nil(R)$. ابتدا فرض می‌کنیم $a_1 \notin Nil(R)$. لذا $f \circ x^2 = f^2 \notin Nil(R_\circ[x])$، زیرا $a_1^2 \notin Nil(R)$. پس بنابه قضیه ۴.۱.۲،

$$x - f \circ x^2 = x - f^2 = x - (a_1^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^{2n}) \notin U(R_\circ[x]).$$

لذا بنابه گزاره ۴.۶.۲، $\langle x - f \circ x^2 \rangle_r$ ایده‌آل راست سره‌ای از $R_\circ[x]$ است. بنابراین برای برخی ایده‌آل راست ماکسیمال از $R_\circ[x]$ مانند M، داریم $\langle x - f \circ x^2 \rangle_r \subseteq M$. از این‌رو برای برخی $m \in M$ داریم $m = x - f \circ x^2$. اگر $f \in M$، آن‌گاه $f \circ x^2 \in M$. پس $x \in M$، که یک تناقض است. بنابراین $f \notin M$، و در نتیجه $f \notin J_r(R_\circ[x])$.

اکنون فرض می‌کنیم برای برخی $i \geq 2$، داشته باشیم $a_i \notin Nil(R)$. از این‌رو بنابه قضیه ۴.۱.۲، $x - f \notin U(R_\circ[x])$. پس بنابه گزاره ۴.۶.۲، داریم $\langle x - f \rangle_r \neq R_\circ[x]$. بنابراین برای برخی ایده‌آل راست ماکسیمال از $R_\circ[x]$ مانند M، $\langle x - f \rangle_r \subseteq M$، و در نتیجه $x - f \in M$. پس $f \notin M$، و در نتیجه $f \notin J_r(R_\circ[x])$. بنابراین $J_r(R_\circ[x]) \subseteq Nil(R_\circ[x])$.

اکنون فرض می‌کنیم $f \in Nil(R_\circ[x])$. لذا بنابه قضیه‌های ۱۹.۲.۱ و ۴.۱.۲، برای هر $g \in R[x]$، $x - fg \in U(R_\circ[x])$. بنابراین $f \in A$، و در نتیجه $Nil(R_\circ[x]) \subseteq A$. از این‌رو

$$Nil(R_\circ[x]) \subseteq A \subseteq J_r(R_\circ[x]) \subseteq Nil(R_\circ[x]).$$

لذا بنابه قضیه ۱۹.۲.۱، داریم $A = J_r(R_\circ[x]) = Nil(R_\circ[x]) = Nil(R)_\circ[x]$. □

لم ۶.۶.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $f \in R_\circ[x]$. در این‌صورت،

$$\langle f \rangle_\ell = \{g_1 \circ f + g_2 \circ f + \cdots + g_k \circ f \mid g_i \in R_\circ[x] \text{ و } k \geq 1\}.$$

برهان. واضح است. □

فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $f \in R_\circ[x]$. به‌وضوح، اگر f عنصر وارون‌پذیری از $R_\circ[x]$ باشد، آن‌گاه $\langle f \rangle_\ell = R_\circ[x]$. اما مثال زیر نشان می‌دهد که عکس این گزاره در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۷.۶.۲. فرض می‌کنیم $R = \mathbb{Z}_5$. بنابه قضیه ۴.۱.۲، $f = x + x^2 \notin U(R_\circ[x])$. اما $2x \circ (x+x^2) + x \circ (x+x^2) = 2x + 4x^2 + x + x^2 = 3x \in \langle x+x^2 \rangle_\ell$، و از این‌رو $\langle x+x^2 \rangle_\ell = R_\circ[x]$، زیرا $x = 2x \circ 3x \in \langle x + x^2 \rangle_\ell$.

در ادامه، به مطالعه‌ی $J_\ell(R_\circ[x])$ می‌پردازیم.

قضیه ۸.۶.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این‌صورت، $f \in J_\ell(R_\circ[x])$ اگر و تنها اگر برای هر عدد صحیح ۱ $n \geq$ و $g_1, \ldots, g_n \in R_\circ[x]$، داشته باشیم $\langle x - g_1 \circ f - \cdots - g_n \circ f\rangle_\ell = R_\circ[x]$.

برهان. فرض می‌کنیم

$$B = \{f \in R_\circ[x] \mid \langle x - g_1 \circ f - \cdots - g_n \circ f\rangle_\ell = R_\circ[x], g_1, \ldots, g_n \in R_\circ[x] \text{ و } n \geq 1 \text{ برای هر }\}.$$

ابتدا نشان می‌دهیم $J_\ell(R_\circ[x]) \subseteq B$. فرض می‌کنیم $f \notin B$. پس عناصر $g_1, \ldots, g_n \in R_\circ[x]$ وجود دارند به‌طوری‌که $\langle x - g_1 \circ f - \cdots - g_n \circ f\rangle_\ell \neq R_\circ[x]$. از این‌رو برای برخی ایده‌آل چپ ماکسیمال M از $R_\circ[x]$، داریم $\langle x - g_1 \circ f - \cdots - g_n \circ f\rangle_\ell \subseteq M$. اگر $f \in M$، آن‌گاه $x \in M$، که یک تناقض است. بنابراین $f \notin M$، و در نتیجه $f \notin J_\ell(R_\circ[x])$.

حال فرض می‌کنیم $f \notin J_\ell(R_\circ[x])$. لذا برای برخی ایده‌آل ماکسیمال M از $R_\circ[x]$، $f \notin M$. بنابراین $\langle f\rangle_\ell + M = R_\circ[x]$. از این‌رو بنابه لم ۶.۶.۲، برای برخی $g_1, \ldots, g_n \in R_\circ[x]$ و $m \in M$، داریم $g_1 \circ f + \cdots + g_n \circ f + m = x$. بنابراین $m = x - g_1 \circ f - \cdots - g_n \circ f \in M$. پس $\langle x - g_1 \circ f - \cdots - g_n \circ f\rangle_\ell \neq R_\circ[x]$، و در نتیجه $f \notin B$. لذا $B \subseteq J_\ell(R_\circ[x])$. □

یادآوری می‌کنیم که اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی جابه‌جایی R را رادیکال جیکوبسن[6] R می‌نامند و آن را با نماد $J(R)$ نمایش می‌دهند.

قضیه ۹.۶.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. اگر $f = \sum_{i=1}^n a_i x^i \in J_\ell(R_\circ[x])$، آن‌گاه $a_1 \in J(R)$.

برهان. فرض می‌کنیم $r \in R$. از این‌رو بنابه قضیه ۸.۶.۲، داریم

$$\begin{aligned} R_\circ[x] &= \langle x - rx \circ f\rangle_\ell \\ &= \langle x - ra_1 x - r^2 a_2 x^2 - \cdots - r^n a_n x^n\rangle_\ell \\ &= \langle (1 - ra_1)x - r^2 a_2 x^2 - \cdots - r^n a_n x^n\rangle_\ell. \end{aligned}$$

قرار دهید $g = (1 - ra_1)x - r^2 a_2 x^2 - \cdots - r^n a_n x^n$. بنابه لم ۶.۶.۲، برای برخی $h_1 = \sum_{j=1}^{m_1} b_{1j} x^j, \ldots, h_k = \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} x^j \in R_\circ[x]$، داریم $x = h_1 \circ g + \cdots + h_k \circ g$. از این‌رو $(1 - ra_1)b_{11} + \cdots + (1 - ra_1)b_{k1} = 1$، و در نتیجه $(1 - ra_1)[b_{11} + \cdots + b_{k1}] = 1$. بنابراین $1 - ra_1 \in U(R)$. لذا بنابه [۶۱، لم ۴.۱]، داریم $a_1 \in J(R)$. □

در گزاره بعد، ارتباط بین $J_r(R_\circ[x])$ و $J_\ell(R_\circ[x])$ را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۱۰.۶.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $Nil(R)^2 = 0$. در این‌صورت، $J_r(R_\circ[x]) \subseteq J_\ell(R_\circ[x])$.

[6] Jacobson Radical

برهان. فرض می‌کنیم $f \in J_r(R_\circ[x])$. در این‌صورت، بنابه قضیه ۱۹.۲.۱، داریم $f \in Nil(R_\circ[x])$. لذا بنابه لم ۲۲.۲.۱، برای هر $g_1, \dots, g_n \in R_\circ[x]$، $g_1 \circ f + \cdots + g_n \circ f \in Nil(R)_\circ[x] = Nil(R_\circ[x])$. از این‌رو بنابه قضیه ۴.۱.۲، $x - g_1 \circ f - \cdots - g_n \circ f$ عنصر وارون‌پذیری از $R_\circ[x]$ است. بنابراین $\langle x - g_1 \circ f - \cdots - g_n \circ f \rangle_\ell = R_\circ[x]$، و در نتیجه $f \in J_\ell(R_\circ[x])$. $\square$

در مثال زیر، حلقه‌ای ارائه می‌دهیم که تساوی $J_\ell(R_\circ[x]) = J_r(R_\circ[x])$ برای آن برقرار باشد.

مثال ۱۱.۶.۲. (۱) فرض می‌کنیم R دامنه‌ای صحیح باشد به‌طوری‌که برای هر $n \geq 2$، تنها جواب معادله $c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 = 0$، صفر باشد. نشان می‌دهیم $J_\ell(R_\circ[x]) = J_r(R_\circ[x]) = 0$.

بنابه قضیه ۵.۶.۲، داریم $J_r(R_\circ[x]) = Nil(R_\circ[x]) = Nil(R)_\circ[x] = 0$. ادعا می‌کنیم $J_\ell(R_\circ[x]) = 0$. فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ عنصری ناصفر از $R_\circ[x]$ باشد به‌طوری‌که $a_n \neq 0$. نشان می‌دهیم $f \notin J_\ell(R_\circ[x])$. فرض خلف می‌کنیم که $f \in J_\ell(R_\circ[x])$. فرض می‌کنیم $g = x + x^2$. بنابه قضیه ۸.۶.۲، $\langle x - g \circ f \rangle_\ell = R_\circ[x]$. بنابه لم ۶.۶.۲، عناصر $h_1, \dots, h_k \in R_\circ[x]$ وجود دارند به‌طوری‌که $h_1 \circ (x - g \circ f) + \cdots + h_k \circ (x - g \circ f) = x$. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. فرض می‌کنیم $k = 1$. پس $h_1 \circ (x - g \circ f) = x$. لذا بنابه نتیجه ۵.۱.۲، $x - g \circ f = x - [a_1(x + x^2) + a_2(x + x^2)^2 + \cdots + a_n(x + x^2)^n]$ عنصری وارون‌پذیر از $R_\circ[x]$ است. چون a_n ضریب پیشرو $x - g \circ f$ است، بنابه قضیه ۴.۱.۲، $a_n \in Nil(R) = 0$، که یک تناقض است.

حالت ۲. فرض می‌کنیم $k \geq 2$ و $h_1 = \sum_{j=1}^{m_1} b_{1j} x^j, \dots, h_k = \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} x^j$. بدون کم شدن از کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد $m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_k$. اگر برای هر $1 \leq i \leq k-1$، داشته باشیم $m_k \gneq m_i$، آن‌گاه $a_n b_{km_k}^{2n} = 0$، زیرا $a_n b_{km_k}^{2n}$ ضریب پیشرو معادله

$$h_1 \circ (x - g \circ f) + \cdots + h_k \circ (x - g \circ f) = x$$

است. چون R دامنه است و $a_n \neq 0$، پس $b_{km_k}^{2n} = 0$، و در نتیجه $b_{km_k} = 0$. بنابراین $h_k = 0$، که یک تناقض است. لذا $r \lneq k$ وجود دارد به‌طوری‌که $m_r = m_{r+1} = \cdots = m_k$ و برای هر $i \lneq r$، $m_i \lneq m_k$. از این‌رو داریم

$$a_n(b_{rm_r}^{2n} + b_{(r+1)m_{r+1}}^{2n} + \cdots + b_{km_k}^{2n}) = 0,$$

زیرا $a_n(b_{rm_r}^{2n} + b_{(r+1)m_{r+1}}^{2n} + \cdots + b_{km_k}^{2n})$ ضریب پیشرو معادله

$$h_1 \circ (x - g \circ f) + \cdots + h_k \circ (x - g \circ f) = x$$

است. چون $a_n \neq 0$، پس $b_{rm_r}^{2n} + b_{(r+1)m_{r+1}}^{2n} + \cdots + b_{km_k}^{2n} = 0$. لذا بنابه فرض، داریم $b_{rm_r} = b_{(r+1)m_{r+1}} = \cdots = b_{km_k} = 0$. پس $h_r = h_{r+1} = \cdots = h_k = 0$، که تناقض است. بنابراین $J_\ell(R_\circ[x]) = 0$.

(۲) فرض می‌کنیم R موضعی‌سازی $\mathbb{Z}$ بر $p\mathbb{Z}$ باشد. در این‌صورت، R دامنه صحیح موضعی است و برای هر $n \geq 2$، تنها جواب معادله $c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 = 0$ در R، صفر است. لذا بنابه (۱)، داریم $J_\ell(R_\circ[x]) = J_r(R_\circ[x]) = 0$.

سؤال: فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $Nil(R)^2 = 0$. آیا $J_\ell(R_\circ[x]) = J_r(R_\circ[x])$؟

تعریف ۱۲.۶.۲. فرض می‌کنیم N یک شبه‌حلقه، $a \in N$ و L_a ایده‌آل راست تولید شده توسط $\{n - an \mid n \in N\}$ باشد. عنصر a را شبه‌ـ‌منظم[7] می‌نامند، هرگاه $a \in L_a$. اگر $N = N_\circ$، آن‌گاه a شبه‌ـ‌منظم است اگر و تنها اگر $L_a = N$.

تعریف ۱۳.۶.۲. فرض می‌کنیم N شبه‌حلقه‌ای صفر‌ـ‌متقارن با همانی u باشد. مطابق [۲۰]، عنصر $a \in N$ را شبه‌ـ‌منظم بیدلمن[8] می‌نامیم، هرگاه $b \in N$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $(u-a)b = u$. به‌وضوح، هر عنصر شبه‌ـ‌منظم بیدلمن، شبه‌ـ‌منظم نیز می‌باشد.

در گزاره بعد، عناصر شبه‌ـ‌منظم بیدلمن $R_\circ[x]$ را مشخص می‌کنیم.

گزاره ۱۴.۶.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $Nil(R)^2 = 0$. در این‌صورت، $\sum_{i=1}^m a_i x^i \in R_\circ[x]$ شبه‌ـ‌منظم بیدلمن است اگر و تنها اگر $1 - a_1 \in U(R)$ و برای هر $i \geq 2$، $a_i \in Nil(R)$.

برهان. فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^m a_i x^i \in R_\circ[x]$ شبه‌ـ‌منظم بیدلمن باشد. پس $x - f$ وارون راست دارد. لذا بنابه نتیجه ۵.۱.۲، $x - f$ وارون‌پذیر است. از این‌رو بنابه قضیه ۴.۱.۲، $1 - a_1 \in U(R)$ و برای هر $i \geq 2$، $a_i \in Nil(R)$.

بالعکس، از نتیجه ۵.۱.۲، نتیجه حاصل می‌شود. □

تعریف ۱۵.۶.۲. فرض می‌کنیم I یک ایده‌آل راست از شبه‌حلقه‌ی N باشد. در این‌صورت، I را مدولار می‌نامند، هرگاه $a \in N$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $n \in N$، $n - an \in I$.

مطابق [۷۵]، اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های مدولار راست ماکسیمال از N را با $J_{1/2}$ و بزرگترین ایده‌آل مشمول در $J_{1/2}$ را با $J_\circ(N)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۶.۲. مجموع همه‌ی ایده‌آل‌های پوچ شبه‌حلقه‌ی N را رادیکال‌ـ‌پوچ[9] N می‌نامند و آن را با نماد $\mathfrak{N}(N)$ نشان می‌دهند.

تذکر ۱۷.۶.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. لذا بنابه لم ۲۲.۲.۱، $Nil(R_\circ[x])$ ایده‌آلی از $R_\circ[x]$ بوده و داریم $\mathfrak{N}(R_\circ[x]) = Nil(R_\circ[x])$.

لم ۱۸.۶.۲. [۷۵، نتیجه ۵.۶۰] فرض می‌کنیم N شبه‌حلقه‌ای دلخواه باشد. در این‌صورت، $\mathfrak{N}(N) \subseteq J_\circ(N) \subseteq J_{1/2}(N)$.

---
[7] Quasiregular
[8] Beidleman quasiregular
[9] Nil-Radical

قضیه ۱۹.۶.۲. [۷۵، قضیه ۵.۳۷] فرض می‌کنیم N شبه‌حلقه‌ای صفر ـ متقارن باشد. در این‌صورت،

(۱) $J_{1/2}(N)$ بزرگترین ایده‌آل راست شبه ـ منظم N است.

(۲) $J_{1/2}(N)$ شامل همه‌ی ایده‌آل‌های راست پوچ است.

(۳) $J_0(N)$ بزرگترین ایده‌آل شبه ـ منظم N است.

(۴) $J_0(N)$ شامل همه‌ی ایده‌آل‌های پوچ است.

گزاره ۲۰.۶.۲. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $Nil(R)^2 = 0$. در این‌صورت،

(۱) $Nil(R_0[x]) = J_0(R_0[x]) = J_{1/2}(R_0[x])$.

(۲) $Nil(R_0[x])$ بزرگترین ایده‌آل شبه ـ منظم $R_0[x]$ است.

(۳) $Nil(R_0[x])$ بزرگترین ایده‌آل راست شبه ـ منظم $R_0[x]$ است.

برهان. (۱) مطابق لم ۱۸.۶.۲، داریم $\mathfrak{N}(R_0[x]) \subseteq J_0(R_0[x]) \subseteq J_{1/2}(R_0[x])$. به‌علاوه، بنابه [۷۵، تذکر (j)۵.۶۷]، $J_r(R_0[x]) = J_{1/2}(R_0[x])$، زیرا $R_0[x]$ یکدار است. لذا بنابه قضیه ۵.۶.۲، داریم $Nil(R_0[x]) = J_{1/2}(R_0[x])$. بنابراین $Nil(R_0[x]) = J_0(R_0[x]) = J_{1/2}(R_0[x])$.

(۲) بنابه قضیه ۱۹.۶.۲، $J_0(R_0[x])$ بزرگترین ایده‌آل شبه ـ منظم $R_0[x]$ است. لذا از (۱) نتیجه حاصل می‌شود.

(۳) بنابه قضیه ۱۹.۶.۲، $J_{1/2}(R_0[x])$ بزرگترین ایده‌آل راست شبه ـ منظم $R_0[x]$ است. لذا از (۱) نتیجه حاصل می‌شود. □

فصل ۳

بررسی عناصر مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌های چندجمله‌ای‌ها و سری‌های توانی

فرض می‌کنیم R شبه‌حلقه‌ای (یا حلقه‌ای) دلخواه باشد. در این‌صورت، $Z(R) = Z_\ell(R) \cup Z_r(R)$ که Z_ℓ و Z_r، به‌ترتیب، نمایانگر مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر چپ R و مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر راست R می‌باشد. همچنین، برای $A \subseteq R$، $ann_R(A) = \ell.ann_R(A) \cup r.ann_R(A)$ به‌طوری‌که $\ell.ann_R(A) = \{r \in R \mid rA = ۰\}$ و $r.ann_R(A) = \{r \in R \mid Ar = ۰\}$. در این فصل، ابتدا به مطالعه‌ی عناصر مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ی $R_۰[x]$ روی حلقه‌ی جابه‌جایی R می‌پردازیم. سپس، قطر گراف مقسوم‌علیه صفر $R_۰[x]$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین، شرایطی ارائه می‌دهیم که تحت آن‌ها مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر $R_۰[x]$، ایده‌آلی از آن باشد. در ادامه، این نتایج را به شبه‌حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های صفر_ متقارن اریب و شبه‌حلقه‌ی صفر_ متقارن سری‌های توانی اریب تعمیم می‌دهیم. در آخر به بررسی گراف مقسوم‌علیه فشرده‌ی شبه‌حلقه‌های $R_۰[x]$ و $R_۰[[x]]$ روی حلقه‌ی جابه‌جایی R می‌پردازیم و رده‌بندی کاملی از قطر این گراف‌ها ارائه می‌دهیم.

مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۴] می‌باشد.

۱.۳ بررسی عناصر مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ی صفر-متقارن چندجمله‌ای‌ها

در این بخش، ابتدا به مطالعه‌ی عناصر مقسوم‌علیه صفر $R_\circ[x]$ روی حلقه‌ی جابه‌جایی R می‌پردازیم. سپس، قطر گراف مقسوم‌علیه صفر $R_\circ[x]$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، گراف مقسوم‌علیه شبه‌حلقه‌ی N مشابه گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی ناجابه‌جایی R تعریف می‌شود. بنابراین گراف مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x]$، $\Gamma(R_\circ[x])$، گرافی است با مجموعه‌ی رئوس $Z(R_\circ[x])^* = Z(R_\circ[x]) \setminus \{\circ\}$ به‌طوری‌که دو رأس f و g با هم مجاورند اگر و تنها اگر $f \circ g = \circ$ یا $g \circ f = \circ$.

قضیه ۱.۱.۳. [۶۸، قضیه ۲.۱](قضیه مک‌کوی) فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. اگر f یک مقسوم‌علیه صفر از حلقه‌ی $R[x]$ باشد، آن‌گاه عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $cf = \circ$.

لم ۲.۱.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ و $g = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j$ عناصری از شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x]$ باشند به‌طوری‌که $f \circ g = \circ$. در این‌صورت،

(۱) $a_1 b_1 = \circ$.

(۲) برای برخی عنصر ناصفر $r \in R$، $rf = \circ$.

(۳) f پوچ‌توان است یا برای برخی عنصر ناصفر $s \in R$، $sg = \circ$.

برهان. (۱) واضح است.

(۲) فرض می‌کنیم b_j اولین ضریب ناصفر g باشد. بنابراین

$$b_j f^j + b_{j+1} f^{j+1} + \cdots + b_m f^m = \circ,$$

و در نتیجه $(b_j + b_{j+1} f + \cdots + b_m f^{m-j}) f^j = \circ$. اگر $f^j = \circ$، آن‌گاه عدد صحیح مثبت $1 \leq k \leq j-1$ وجود دارد به‌طوری‌که $f^k \neq \circ$ و $f^{k+1} = \circ$. از این‌رو بنابه قضیه مک‌کوی، برای برخی $\circ \neq r \in R$، داریم $rf = \circ$. بنابراین فرض می‌کنیم $f^j \neq \circ$. چون

$$b_j + b_{j+1} f + \cdots + b_m f^{m-j} \neq \circ,$$

پس عدد صحیح $\circ \leq k \leq j-1$ وجود دارد به‌طوری‌که $(b_j + b_{j+1} f + \cdots + b_m f^{m-j}) f^k \neq \circ$ اما $(b_j + b_{j+1} f + \cdots + b_m f^{m-j}) f^{k+1} = \circ$. لذا بنابه قضیه‌ی مک‌کوی، نتیجه حاصل می‌شود.

(۳) فرض می‌کنیم f پوچ‌توان نباشد. لذا بنابه نتیجه ۱۲.۱.۱، $i \geq 1$ وجود دارد به‌طوری‌که $a = a_i$ پوچ‌توان نیست. چون $f \circ g = \circ$، پس در شبه‌حلقه‌ی $(R/Nil(R))_\circ[x]$، داریم $\bar{f} \circ \bar{g} = \circ$. چون $R/Nil(R)$ کاهشی است، بنابه لم ۲۳.۲.۱، برای هر i, j، داریم $\bar{a}_i \bar{b}_j = \bar{\circ}$. بنابراین

$a^k b_j^k = \circ$ برای برخی عدد صحیح مثبت k و هر $1 \leq j \leq m$. از این‌رو برای هر $1 \leq j \leq m$، اعداد صحیح $\circ \leq t_j \leq k$ وجود دارند به‌طوری‌که $a^k b_j^{t_j} \neq \circ$ اما $a^k b_j^{t_j+1} = \circ$. بنابراین اعداد صحیح نامنفی $\circ \leq s_j \leq t_j$ وجود دارند به‌طوری‌که $a^k b_1^{s_1} b_2^{s_2} \cdots b_m^{s_m} \neq \circ$ اما برای هر $1 \leq j \leq m$، $(a^k b_1^{s_1} b_2^{s_2} \cdots b_m^{s_m}) b_j = \circ$. لذا با قرار دادن $s = a^k b_1^{s_1} b_2^{s_2} \cdots b_m^{s_m}$، داریم $sg = \circ$. □

در گزاره بعد، ساختار عناصر مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x]$ را مشخص می‌کنیم.

گزاره ۳.۱.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این‌صورت،

(۱) اگر R کاهشی باشد، آن‌گاه

$$Z_\ell(R_\circ[x]) = Z_r(R_\circ[x]) = \{f \in R_\circ[x] \mid rf = \circ, \circ \neq r \in R \text{ برای برخی}\}.$$

(۲) اگر R غیرکاهشی باشد، آن‌گاه

الف) $Z_\ell(R_\circ[x]) = \{f \in R_\circ[x] \mid rf = \circ, \circ \neq r \in R \text{ برای برخی}\}$.

ب)

$$Z_r(R_\circ[x]) = Z_\ell(R_\circ[x]) \cup \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in R_\circ[x] \mid ann_R(a_1) \cap Nil(R) \neq \{\circ\}, n \geq 1 \text{ و } a_i \in R,\ i \geq 2 \text{ برای هر} \Big\}$$

برهان. (۱) فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i, g = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j$ عناصری ناصفر از $R_\circ[x]$ باشند به‌طوری‌که $f \circ g = \circ$. لذا بنابه لم ۲۳.۲.۱، برای هر i, j، داریم $a_i b_j = \circ = b_j a_i$. بنابراین $g \circ f = \circ$. از این‌رو $Z_\ell(R_\circ[x]) = Z_r(R_\circ[x]) \subseteq \{f \in R_\circ[x] \mid rf = \circ, \circ \neq r \in R \text{ برای برخی}\}$. فرض می‌کنیم $f \in R_\circ[x]$. اگر برای برخی عنصر ناصفر $r \in R$ داشته باشیم $rf = \circ$، آن‌گاه $f \circ rx = \circ$، و در نتیجه

$$Z_\ell(R_\circ[x]) = Z_r(R_\circ[x]) = \{f \in R_\circ[x] \mid rf = \circ, \circ \neq r \in R \text{ برای برخی}\}.$$

(۲) (الف) فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in Z_\ell(R_\circ[x])$. پس برای برخی عنصر ناصفر $g = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j \in R_\circ[x]$، داریم $f \circ g = \circ$. بنابراین $b_1 f + b_2 f^2 + \cdots + b_m f^m = \circ$، و در نتیجه $(b_1 + b_2 f^2 + \cdots + b_m f^{m-1}) f = \circ$. چون $b_1 + b_2 f^2 + \cdots + b_m f^{m-1}$ ناصفر است، بنابه قضیه مک‌کوی، عنصر ناصفر $r \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $rf = \circ$. به‌علاوه، اگر برای برخی عنصر ناصفر $r \in R$ داشته باشیم $rf = \circ$، آن‌گاه $f \circ rx = \circ$، و در نتیجه $f \in Z_\ell(R_\circ[x])$. بنابراین $Z_\ell(R_\circ[x]) = \{f \in R_\circ[x] \mid rf = \circ, \circ \neq r \in R \text{ برای یک}\}$.

ب) بنابه (الف)، به‌وضوح داریم $Z_\ell(R_\circ[x]) \subseteq Z_r(R_\circ[x])$. فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ عنصری از $R_\circ[x]$ باشد به‌طوری‌که $ann_R(a_1) \cap Nil(R) \neq \{\circ\}$. فرض می‌کنیم $b \in Nil(R)$ به‌طوری‌که $ba_1 \neq \circ$. لذا عدد صحیح مثبت k وجود دارد به‌طوری‌که $b^k = \circ$ اما $b^{k-1} \neq \circ$. از این‌رو $b^{k-1} x \circ f = \circ$، و در نتیجه $f \in Z_r(R_\circ[x])$.

حال فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in Z_r(R_\circ[x])$. لذا برای برخی عنصر ناصفر $g = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j$ از $R_\circ[x]$، داریم $g \circ f = 0$. اگر g پوچ‌توان نباشد، آن‌گاه بنابه لم ۲.۱.۳، برای برخی عنصر ناصفر $r \in R$، داریم $rf = 0$. اگر g پوچ‌توان باشد، آن‌گاه بنابه نتیجه ۱۲.۱.۱، $C_f \subseteq Nil(R)$. فرض می‌کنیم b_t اولین ضریب ناصفر g باشد. پس $b_t a_1 = 0$، و در نتیجه $ann_R(a_1) \cap Nil(R) \neq \{0\}$. بنابراین

$$Z_r(R_\circ[x]) = Z_\ell(R_\circ[x]) \cup \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in R_\circ[x] \mid ann_R(a_1) \cap Nil(R) \neq \{0\},\ n \geq 1 \text{ و } a_i \in R,\ i \geq 2 \text{ برای هر } \Big\}.$$

□

نتیجه ۴.۱.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. در این‌صورت،

$$Z(R_\circ[x]) = \{f \in R_\circ[x] \mid\ rf = 0, 0 \neq r \in R \text{ برای برخی}\} \cup \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in R_\circ[x] \mid ann_R(a_1) \cap Nil(R) \neq \{0\},\ n \geq 1 \text{ و } a_i \in R,\ i \geq 2 \text{ برای هر } \Big\}.$$

در ادامه، به مطالعه‌ی قطر گراف مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x]$ می‌پردازیم.

قضیه ۵.۱.۳. اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، آن‌گاه $2 \leq \mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) \leq 3$.

برهان. بنابه قضیه ۱۲.۴.۱، داریم $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) \leq 3$. لذا کافی است کران پایین $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x]))$ را ثابت کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم R، کاهشی باشد. اگر $0 \neq a \in Z(R)$، آن‌گاه ax, ax^2 عناصر متمایزی از $Z(R_\circ[x])$ هستند و $ax^2 \circ ax \neq 0 \neq ax \circ ax^2$. بنابراین $d(ax, ax^2) \geq 2$.

حال فرض می‌کنیم R غیرکاهشی باشد. در این‌صورت، $0 \neq c \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $c^2 = 0$. از این‌رو x^2, x^3 عناصر متمایزی از $Z(R_\circ[x])$ هستند، زیرا $cx \circ x^3 = 0 = cx \circ x^2$. چون $x^3 \circ x^2 \neq 0 \neq x^2 \circ x^3$، پس $d(x^2, x^3) \geq 2$. بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) \geq 2$. □

گزاره ۶.۱.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای غیرکاهشی باشد و $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) = 2$. در این‌صورت،

$$Z(R_\circ[x]) = \{ \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in R_\circ[x] \mid\ a_1 \in Z(R),\ n \geq 1 \text{ و } a_i \in R \text{ برای هر } \}$$

برهان. بنابه نتیجه‌ی ۴.۱.۳، کافی است نشان دهیم برای هر $a \in Z(R)$، $ann_R(a) \cap Nil(R) \neq \{0\}$. فرض می‌کنیم $a \in Z(R) \setminus Nil(R)$. لذا $\{ax, x^2\} \subseteq Z(R_\circ[x])$، زیرا R غیرکاهشی است. چون $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) = 2$ و $a^2 \neq 0$، پس عنصر پوچ‌توان $f \in R_\circ[x]$ وجود دارد به‌طوری‌که $ax - f - x^2$ یک مسیر است. فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=k}^{n} a_i x^i$ و $a_k \neq 0$. بنابه نتیجه ۱۲.۱.۱، $C_f \subseteq Nil(R)$. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. اگر $f \circ ax = 0$، آن‌گاه $a(\sum_{i=k}^{n} a_i x^i) = 0$، و در نتیجه $a_k \in ann_R(a) \cap Nil(R)$.

حالت ۲. فرض می‌کنیم $ax \circ f = 0$. پس $\sum_{i=k}^{n} a_i(ax)^i = 0$، و لذا $a_k a^k = 0$. اگر $a_k a = 0$، آن‌گاه نتیجه حاصل است. اگر $a_k a \neq 0$، آن‌گاه $1 \leq t \leq k-1$ وجود دارد به‌طوری‌که $a_k a^t \neq 0$ اما $(a_k a^t)a = 0$. بنابراین $a_k a^t \in ann_R(a) \cap Nil(R)$. □

قضیه ۷.۱.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و غیرکاهشی باشد. در این‌صورت، $\mathrm{diam}(\Gamma(R_0[x]) = 2$ اگر و تنها اگر برای هر $a, b \in Z(R)$، $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) \neq \{0\}$.

برهان. فرض می‌کنیم $\mathrm{diam}(\Gamma(R_0[x])) = 2$ و $a, b \in Z(R)$. بنابه گزاره ۶.۱.۳، داریم $\{ax + x^2, bx + x^2\} \subseteq Z(R_0[x])$. لذا بنابه لم ۲.۱.۳، عنصر پوچ‌توان $f = \sum_{i=1}^{m} c_i x^i \in R_0[x]$ وجود دارد به طوری‌که $f \circ (ax + x^2) = 0 = f \circ (bx + x^2)$. بنابه نتیجه ۱۲.۱.۱، داریم $C_f \subseteq Nil(R)$. فرض می‌کنیم c_k اولین ضریب ناصفر f باشد. در این‌صورت، $ac_k = 0 = bc_k$، و در نتیجه $c_k \in ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R)$.

بالعکس، فرض می‌کنیم برای هر $a, b \in Z(R)$، داشته باشیم $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) \neq \{0\}$. فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ و $g = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j$ عناصری از $Z(R_0[x])$ باشند. پس بنابه گزاره ۶.۱.۳، $a_1, b_1 \in Z(R)$. بنابراین عنصر پوچ‌توان c وجود دارد به‌طوری‌که $c \in ann(\{a_1, b_1\})$. لذا عدد صحیح مثبت k وجود دارد به‌طوری‌که $c^k = 0$ اما $c^{k-1} \neq 0$. بنابراین $f - c^{k-1}x - g$ یک مسیر است، و در نتیجه $\mathrm{diam}(R_0[x]) \leq 2$. لذا بنابه قضیه ۵.۱.۳، $\mathrm{diam}(R_0[x]) = 2$. □

نتیجه ۸.۱.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و غیرکاهشی باشد. در این‌صورت، $\mathrm{diam}(\Gamma(R_0[x])) = 3$ اگر و تنها اگر عناصر $a, b \in Z(R)$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) = \{0\}$.

برهان. بنابه قضیه‌های ۵.۱.۳ و ۷.۱.۳، نتیجه حاصل می‌شود. □

در گزاره بعد، قطر گراف مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ی $R_0[x]$ را در حالتی که R حلقه‌ای کاهشی است، مشخص می‌کنیم.

گزاره ۹.۱.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای کاهشی باشد. در این‌صورت،

(۱) $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x])) = 2$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R_0[x])) = 2$.

(۲) $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x])) = 3$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R_0[x])) = 3$.

برهان. از لم ۲۳.۲.۱، نتیجه حاصل می‌شود. □

مثال زیر نشان می‌دهد که شرط کاهشی بودن R در گزاره ۹.۱.۳، الزامی است.

مثال ۱۰.۱.۳. (۱) فرض می‌کنیم R حلقه‌ای غیرکاهشی باشد و $Z(R)^2 = 0$. در این‌صورت، $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x])) = 1$، اما $\mathrm{diam}(\Gamma(R_0[x])) = 2$.

(۲) فرض می‌کنیم K میدان و $D = K[w, y, z]_{\langle x,y,z\rangle}$ باشد که w, y و z متغیرهای مستقل از K هستند. به‌وضوح، D دامنه است. فرض می‌کنیم $\mathcal{P}$ مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول با ارتفاع ۲ و Q ایده‌آل ماکسیمال حلقه‌ی D باشد. به‌علاوه، فرض می‌کنیم برای هر $P_\alpha \in \mathcal{P}$، $F_\alpha = qf(D/P_\alpha)$ میدان کسرهای D/P_α باشد. همچنین فرض می‌کنیم $B = \sum F_\alpha$ و $R = D(+)B$ توسیع بدیهی D توسط B باشد. به‌وضوح، R نوتری و کاهشی نیست. لوکاس [۶۵، مثال ۵.۲]، ثابت کرد $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = ۳$ و

(الف) R حلقه‌ای موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $Z(R) = Q(+)B$ است.

(ب) هر ایده‌آل مشمول در $Z(R)$ که توسط دو عضو تولید شده باشد، دارای پوچ‌ساز پوچ‌توان ناصفر است.

لذا بنابه قضیه ۷.۱.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) = ۲$.

در ادامه، شرایطی ارائه می‌دهیم که تحت آن‌ها، $Z(R_\circ[x])$ ایده‌آلی از $R_\circ[x]$ است.

گزاره ۱۱.۱.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی باشد. در این‌صورت، $Z(R_\circ[x])$ ایده‌آلی از $R_\circ[x]$ است اگر و تنها اگر R دارای خاصیت (A) و $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد.

برهان. چون R کاهشی است، بنابه گزاره ۳.۱.۳، داریم

$$Z(R_\circ[x]) = \{f \in R_\circ[x] \mid rf = ۰, ۰ \neq r \in R \text{ برای برخی}\}.$$

فرض می‌کنیم $Z(R_\circ[x])$ ایده‌آلی از $R_\circ[x]$ باشد و $a, b \in Z(R)$. پس $ax, bx \in Z(R_\circ[x])$، و در نتیجه $(a+b)x = ax + bx \in Z(R_\circ[x])$. از این‌رو برای برخی $۰ \neq r \in R$، داریم $r(a+b)x = ۰$. پس $a + b \in Z(R)$. بنابراین $Z(R)$ ایده‌آلی از R است.

حال فرض می‌کنیم $\langle a_۱, \ldots, a_n\rangle \subseteq Z(R)$. پس $a_۱x, a_۲x^۲, \ldots, a_nx^n \in Z(R_\circ[x])$. لذا $a_۱x + \cdots + a_nx^n \in Z(R_\circ[x])$، زیرا $Z(R_\circ[x])$ ایده‌آلی از $R_\circ[x]$ است. بنابراین برای برخی $۰ \neq r \in R$، داریم $r(a_۱x + \cdots + a_nx^n) = ۰$. از این‌رو $r\langle a_۱, \ldots, a_n\rangle = ۰$، و لذا R دارای خاصیت (A) است.

بالعکس، فرض می‌کنیم $Z(R)$ ایده‌آلی از R و R دارای خاصیت (A) باشد. فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=۱}^{n} a_ix^i$ و $g = \sum_{j=۱}^{m} b_jx^j$ عناصری از $Z(R_\circ[x])$ باشند. پس برای برخی عناصر ناصفر $r, s \in R$، داریم $rf = ۰ = sg$. بنابراین $\{a_۱, \ldots, a_n, b_۱, \ldots, b_m\} \subseteq Z(R)$. لذا

$$\langle a_۱ + b_۱, \ldots, a_n + b_n\rangle \subseteq Z(R),$$

زیرا $Z(R)$ ایده‌آلی از R است. از این‌رو برای برخی $۰ \neq t \in R$، $t\langle a_۱ + b_۱, \ldots, a_n + b_n\rangle = ۰$، زیرا R خاصیت (A) دارد. بنابراین $t(f+g) = ۰$، و در نتیجه $f + g \in Z(R_\circ[x])$.

فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=۱}^{n} a_ix^i, g = \sum_{j=۱}^{n} b_jx^j \in R_\circ[x]$ و $z = \sum_{k=۱}^{t} z_kx^k \in Z(R_\circ[x])$. چون برای هر k، $z_k \in Z(R)$، پس $f \circ z = \sum_{k=۱}^{t} z_k(f)^k \in Z(R_\circ[x])$. به‌علاوه، چون

$$(z+f)\circ g - f\circ g = \sum_{j=1}^{n} b_j(z+f)^j - \sum_{j=1}^{n} b_j(f)^j = \sum_{j=1}^{n} b_j[(z+f)^j - f^j] = hz,$$

برای برخی $h \in R_\circ[x]$، بنابراین $(z+f)\circ g - f\circ g \in Z(R_\circ[x])$، و در نتیجه $Z(R_\circ[x])$ ایده‌آلی از $R_\circ[x]$ است. □

گزاره ۱۲.۱.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و غیرکاهشی باشد. در این‌صورت، $Z(R_\circ[x])$ ایده‌آلی از $R_\circ[x]$ است اگر و تنها اگر برای هر $a,b \in Z(R)$، $ann_R(a-b)\cap Nil(R) \neq \{\circ\}$.

برهان. فرض می‌کنیم $Z(R_\circ[x])$ ایده‌آلی از $R_\circ[x]$ باشد و $a,b \in Z(R)$. بنابراین $(a-b)x+x^2 \in Z(R_\circ[x])$، زیرا $\{ax, bx, x^2\} \subseteq Z(R_\circ[x])$ و $Z(R_\circ[x])$ ایده‌آلی از $R_\circ[x]$ است. لذا بنابه لم ۲.۱.۳، عنصر پوچ‌توان $\circ \neq f \in R_\circ[x]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f\circ[(a-b)x+x^2]=\circ$. به‌علاوه، بنابه نتیجه ۱۲.۱.۱، داریم $C_f \subseteq Nil(R)$. فرض می‌کنیم c اولین ضریب ناصفر f باشد. پس $(a-b)c=\circ$، و در نتیجه $ann_R(a-b)\cap Nil(R)\neq\{\circ\}$.

بالعکس، فرض می‌کنیم برای هر $a,b\in Z(R)$، داشته باشیم $ann_R(a-b)\cap Nil(R)\neq\{\circ\}$. پس برای هر $a\in Z(R)$، $ann_R(a)\cap Nil(R)\neq\{\circ\}$، و در نتیجه بنابه قضیه ۷.۱.۳ و گزاره ۶.۱.۳، داریم

$$Z(R_\circ[x]) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in R_\circ[x] \mid a_1 \in Z(R), n\geq 1 \text{ و } a_i\in R,\ i\geq 1 \text{ برای هر}\}.$$

لذا به آسانی می‌توان نشان داد که $Z(R_\circ[x])$ ایده‌آلی از $R_\circ[x]$ است. □

گزاره ۱۳.۱.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. اگر $\Gamma(R_\circ[x])$ شامل یک دور باشد، آن‌گاه $gr(\Gamma(R_\circ[x]))\leq 4$.

برهان. از قضیه ۱۲.۴.۱ نتیجه حاصل می‌شود. □

۲.۳ بررسی عناصر مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ی صفر ـ متقارن چندجمله‌ای‌های اریب

در این بخش، به مطالعه‌ی عناصر مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ که R حلقه‌ای متقارن و (α,δ)ـ سازگار است، می‌پردازیم. سپس، قطر گراف مقسوم‌علیه صفر $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

لم ۱.۲.۳. [۴۲، نتیجه ۲.۱] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و (α,δ)ـ سازگار باشد. در این‌صورت، f یک مقسوم‌علیه صفر راست یا چپ از حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ است اگر و تنها اگر عناصر ناصفر $r,s\in R$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $rf=\circ=fs$.

لم ۲.۲.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن و (α,δ)ـ سازگار باشد. اگر f یک مقسوم‌علیه صفر چپ از شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ باشد، آن‌گاه عناصر ناصفر $r,s\in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $rf=\circ=fs$.

برهان. چون f مقسوم‌علیه صفر چپ است، پس برای برخی عنصر ناصفر $g=\sum_{j=1}^{m} b_j x^j$ از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ داریم $f\circ g=0$. از این‌رو $b_1 f+b_2 f^2+\cdots+b_m f^m=0$، و در نتیجه $(b_1+b_2 f+\cdots+b_m f^{m-1})f=0$. چون $b_1+b_2 f+\cdots+b_m f^{m-1}$ ناصفر است، بنابه لم ۱.۲.۳، برای برخی عناصر ناصفر $r,s\in R$، داریم $rf=0=fs$. $\square$

در گزاره بعد، ساختار عناصر مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ را برای حلقه‌ی αـ صلب R مشخص می‌کنیم.

گزاره ۳.۲.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ صلب باشد. در این‌صورت،

$$Z_\ell(R_\circ[x;\alpha,\delta])=Z_r(R_\circ[x;\alpha,\delta])=\{f\in R_\circ[x;\alpha,\delta]\mid rf=0,\ 0\neq r\in R \text{ برای برخی}\}.$$

برهان. فرض می‌کنیم $f=\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ یک مقسوم‌علیه صفر چپ از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ باشد. پس برای برخی عنصر ناصفر $g=\sum_{j=1}^{m} b_j x^j$ از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$، داریم $f\circ g=0$. از این‌رو بنابه لم ۲۷.۱.۱، برای هر i,j، داریم $a_i b_j=0=b_j a_i$. بنابراین $g\circ f=0$، و در نتیجه $f\in Z_r(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. لذا بنابه لم ۲.۲.۳، داریم

$$Z_\ell(R_\circ[x;\alpha,\delta])=Z_r(R_\circ[x;\alpha,\delta])\subseteq\{f\in R_\circ[x;\alpha,\delta]\mid rf=0,\ 0\neq r\in R \text{ برای برخی}\}.$$

حال فرض می‌کنیم $f\in R_\circ[x;\alpha,\delta]$ و برای برخی $0\neq r\in R$، $rf=0$. پس $f\circ rx=0$، و در نتیجه داریم

$$Z_\ell(R_\circ[x;\alpha,\delta])=Z_r(R_\circ[x;\alpha,\delta])=\{f\in R_\circ[x;\alpha,\delta]\mid rf=0,\ 0\neq r\in R \text{ برای برخی}\}.$$

$\square$

چون هر حلقه‌ی متقارن، نیم‌جابه‌جایی است، بنابه [۶، قضیه ۳.۶]، لم بعد حاصل می‌شود.

لم ۴.۲.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن و (α,δ)ـ سازگار باشد. در این‌صورت، $Nil(R[x;\alpha,\delta])$ ایده‌آلی از حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ است و $Nil(R[x;\alpha,\delta])=Nil(R)[x;\alpha,\delta]$.

گزاره ۵.۲.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن و (α,δ)ـ سازگار باشد و $f=\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ و $g=\sum_{j=1}^{m} b_j x^j$ عناصری از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ باشند. اگر $f\circ g=0$، آن‌گاه f پوچ‌توان است یا برای برخی $0\neq s\in R$، داریم $sf=0$.

برهان. فرض می‌کنیم f پوچ‌توان نباشد. از این‌رو بنابه لم ۴.۲.۳، برای برخی $i\geq 1$، $a=a_i$ پوچ‌توان نیست. فرض می‌کنیم $\overline{R}=R/Nil(R)$. بنابه گزاره ۲۹.۱.۱، $\overline{R}$، حلقه‌ی کاهشی $\overline{\alpha}$ـ سازگار است. از این‌رو بنابه گزاره ۲۴.۱.۱، $\overline{R}$ حلقه‌ای $\overline{\alpha}$ـ صلب می‌باشد. چون $f\circ g=0$، پس در شبه‌حلقه‌ی $\overline{R}_\circ[x;\overline{\alpha},\overline{\delta}]$، داریم $\overline{f}\circ\overline{g}=\overline{0}$. بنابه لم ۲۷.۱.۱، برای هر i,j، داریم $\overline{a_i}\overline{b_j}=\overline{0}$. چون R متقارن است، پس برای برخی عدد صحیح مثبت k و برای هر $1\leq j\leq m$، داریم $a^k b_j^k=0$. بنابراین اعداد صحیح $0\leq t_j\leq k$ موجودند به‌طوری‌که $a^k b_j^{t_j}\neq 0$ اما $a^k b_j^{t_j+1}=0$. از این‌رو اعداد صحیح $0\leq s_j\leq t_j$ وجود دارند به‌طوری‌که $a^k b_1^{s_1} b_2^{s_2}\cdots b_m^{s_m}\neq 0$ اما برای هر $1\leq j\leq m$، $(a^k b_1^{s_1} b_2^{s_2}\cdots b_m^{s_m})b_j=0$. قرار دهید $s=a^k b_1^{s_1} b_2^{s_2}\cdots b_m^{s_m}$. بنابراین $sg=0$. $\square$

نتیجه ۶.۲.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن و (α,δ) ـ سازگار باشد و $f \in R_\circ[x;\alpha,\delta]$. اگر برای برخی عنصر ناصفر $r \in R$، داشته باشیم $rf=\circ$، آن‌گاه f مقسوم‌علیه صفر راست و چپ از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ است.

برهان. فرض می‌کنیم $f=\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$. چون $rf=\circ$، پس برای هر $1 \le i \le n$، $ra_i=\circ$. از این‌رو داریم $f \circ rx = rf = \circ$ و $rx \circ f = a_1(rx)+a_2(rx)^2+\cdots+a_n(rx)^n=\circ$. بنابراین f یک مقسوم‌علیه صفر راست و چپ از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ است. $\square$

گزاره ۷.۲.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن، غیرکاهشی و (α,δ) ـ سازگار باشد. در این‌صورت،

(۱) $Z_\ell(R_\circ[x;\alpha,\delta])=\{f\in R_\circ[x;\alpha,\delta] \mid rf=\circ,\ \circ\neq r\in R$ برای برخی $\}$.

(۲)

$$Z_r(R_\circ[x;\alpha,\delta])=Z_\ell(R_\circ[x;\alpha,\delta])\cup \{\sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in R_\circ[x;\alpha,\delta] \mid ann_R(a_1)\cap Nil(R)\neq\{\circ\}, n\ge 1 \text{ و } a_i\in R,\ i\ge 2 \text{ برای هر }\}.$$

برهان. (۱) فرض می‌کنیم برای برخی $\circ \neq r\in R$، داشته باشیم $rf=\circ$. از این‌رو بنابه نتیجه ۶.۲.۳، داریم $f\in Z_\ell(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. به‌علاوه، اگر f یک مقسوم‌علیه صفر چپ از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ باشد، آن‌گاه بنابه لم ۲.۲.۳، عنصر $\circ\neq r\in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $rf=\circ$.

(۲) فرض می‌کنیم $f=\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ یک مقسوم‌علیه صفر راست از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ باشد. پس برای برخی عنصر ناصفر $g=\sum_{j=1}^{m} b_j x^j$ از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$، داریم $g\circ f=\circ$. اگر g پوچ‌توان نباشد، آن‌گاه بنابه گزاره ۵.۲.۳، $\circ\neq r\in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $rf=\circ$، و از این‌رو نتیجه حاصل است. لذا فرض می‌کنیم g پوچ‌توان باشد. ادعا می‌کنیم $ann_R(a_1)\cap Nil(R)\neq\{\circ\}$. بنابه لم ۴.۲.۳، داریم $\beta=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}\subseteq Nil(R)$. به‌علاوه، $Nil(R)$ ایده‌آلی موضعاً پوچ‌توان از R است، زیرا هر حلقه‌ی متقارن، نیم‌جابه‌جایی است. بنابراین عدد صحیح مثبت k وجود دارد به‌طوری‌که $\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}^k=\circ$. فرض می‌کنیم b_s اولین ضریب ناصفر g باشد. چون $g\circ f=\circ$، داریم

$$a_1 b_s + a_2\sum_{i=s}^{m} b_i\delta^i(b_s)+a_3\sum_{i=s}^{2m}A_i^2\delta^i(b_s)+\cdots+a_n\sum_{i=s}^{(n-1)m}A_i^{n-1}\delta^i(b_s)=\circ, \qquad (1.3)$$

که برای هر $2\le j\le n-1$، A_i^j ضریب x^i در g^j است. فرض می‌کنیم $\mathcal{C}=\cup f_p^q(b_h)$، که $b_h\in\beta$ و $\circ\le p\le q$. بنابراین برای هر $2\le j\le n-1$، A_i^j برابر است با جمعی از عناصر به فرم $c_{t_1}c_{t_2}\cdots c_{t_j}$ که $c_{t_l}\in\mathcal{C}$. اگر $a_1b_s=\circ$، آن‌گاه نتیجه حاصل است. لذا فرض می‌کنیم $a_1b_s\neq\circ$ و

$$d = a_2\sum_{i=s}^{m} b_i\delta^i(b_s) + a_3\sum_{i=s}^{2m} A_i^2 b_i\delta^i(b_s) + \cdots + a_n\sum_{i=s}^{(n-1)m} A_i^{n-1} b_i\delta^i(b_s).$$

اگر برای هر $s \leq j \leq m$، داشته باشیم $b_jb_s = 0$، آن‌گاه بنابه لم ۲۳.۱.۱، داریم $d = 0$. از این‌رو $a_1b_s = 0$، که یک تناقض است. بنابراین $0 \neq b_{i_1} \in \beta$ وجود دارد به‌طوری‌که $b_{i_1}b_s \neq 0$. اگر $b_{i_1}a_1b_s = 0$، آن‌گاه نتیجه حاصل است. فرض می‌کنیم $b_{i_1}a_1b_s \neq 0$. با ضرب b_{i_1} در معادله (۱.۳)، داریم

$$b_{i_1}a_1b_s + b_{i_1}a_2\sum_{i=s}^{m} b_i\delta^i(b_s) + b_{i_1}a_3\sum_{i=s}^{2m} A_i^2\delta^i(b_s) + \cdots + b_{i_1}a_n\sum_{i=s}^{(n-1)m} A_i^{n-1}\delta^i(b_s) = 0. \quad (۲.۳)$$

اگر برای هر $s \leq j \leq m$، داشته باشیم $b_{i_1}b_jb_s = 0$، آن‌گاه بنابه لم ۲۳.۱.۱، $b_{i_1}d = 0$. پس $b_{i_1}a_1b_s = 0$، که یک تناقض است. با ادامه این روند، می‌توان نتیجه گرفت عدد صحیح مثبت $k' \lneq k$ وجود دارد به‌طوری‌که $b_{i_{k'}}\cdots b_{i_2}b_{i_1}b_s \neq 0$ اما برای هر $b_j \in \beta$، $b_{i_{k'}}\cdots b_{i_2}b_{i_1}b_sb_j = 0$. بنابراین $b_{i_{k'}}\cdots b_{i_2}b_{i_1}b_sa_1 = 0$، و در نتیجه $ann_R(a_1) \cap Nil(R) \neq \{0\}$.

به‌علاوه، بنابه (۱) و نتیجه ۶.۲.۳، داریم $Z_\ell(R_\circ[x;\alpha,\delta]) \subseteq Z_r(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. حال فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{n} a_ix^i$ و $ann_R(a_1) \cap Nil(R) \neq \{0\}$. پس عنصر پوچ‌توان ناصفر $b \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $ba_1 = 0$. لذا عدد صحیح مثبت t وجود دارد به‌طوری‌که $b^t = 0$ اما $b^{t-1} \neq 0$. از این‌رو $b^{t-1}x \circ f = 0$، و در نتیجه $f \in Z_r(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. □

قضیه ۸.۲.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن و (α,δ)ـ‌سازگار باشد. در این‌صورت، $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x;\alpha,\delta])) \in \{۲,۳\}$.

برهان. بنابه ۱۲.۴.۱، داریم $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x;\alpha,\delta])) \leq ۳$. اگر R حلقه‌ای غیرکاهشی باشد، آن‌گاه $0 \neq b \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $b^2 = 0$. لذا بنابه لم ۲۳.۱.۱، $bx\circ x^2 = b\alpha(b)x^2 + b\delta(b)x = 0$ و

$$bx \circ x^3 = b\alpha(b)\alpha^2(b)x^3 + \big[b\alpha(b)\big(\alpha(\delta(b)) + \delta(\alpha(b))\big) + b\delta(b)\alpha(b)\big]x^2$$
$$+\big[b\alpha(b)\delta^2(b) + b\delta(b)\delta(b)\big]x = 0.$$

بنابراین $x^2, x^3 \in Z(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. چون $x^2 \circ x^3 \neq 0 \neq x^3 \circ x^2$، پس $d(x^2,x^3) \geq ۲$. لذا $۲ \leq \mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x;\alpha,\delta]))$.

حال فرض می‌کنیم R کاهشی و $0 \neq a \in Z(R)$. پس $ax, ax^2 \in Z(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. به‌علاوه، $ax \circ ax^2 \neq 0 \neq ax^2 \circ ax$. بنابراین $d(ax,ax^2) \geq ۲$. □

گزاره ۹.۲.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن، غیرکاهشی و (α,δ)ـ‌سازگار باشد. اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x;\alpha,\delta])) = ۲$، آن‌گاه

$$Z(R_\circ[x;\alpha,\delta]) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_ix^i \mid a_1 \in Z(R),\ n \geq 1 \text{ و } a_i \in R,\ i \geq 2 \text{ برای هر}\}.$$

برهان. فرض می‌کنیم $\beta = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x^i \mid a_1 \in Z(R), n \geq 1$ و $a_i \in R,\ i \geq 2$ برای هر $\}$. اگر $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in Z(R_\circ[x;\alpha,\delta])$، آن‌گاه بنابه گزاره ۷.۲.۳، داریم $a_1 \in Z(R)$، و در نتیجه $f \in \beta$. اکنون نشان می‌دهیم اگر $a \in Z(R)$، آن‌گاه $ann_R(a) \cap Nil(R) \neq \{0\}$، از این‌رو بنابه گزاره ۷.۲.۳، نتیجه حاصل می‌شود. فرض می‌کنیم $a \in Z(R) \setminus Nil(R)$. بنابراین $ax, x^2 \in Z(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. چون $ax \circ x^2 \neq 0 \neq x^2 \circ ax$ و $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x;\alpha,\delta])) = 2$، پس برای برخی عنصر ناصفر $g = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j \in R_\circ[x;\alpha,\delta]$، مسیر $ax - g - x^2$ موجود است. بنابه گزاره ۵.۲.۳، g پوچ‌توان است. لذا بنابه لم ۴.۲.۳، داریم $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\} \subseteq Nil(R)$. فرض می‌کنیم $b_m \neq 0$. اگر $ax \circ g = 0$، آن‌گاه $b_1(ax) + b_2(ax)^2 + \cdots + b_m(ax)^m = 0$. بنابراین $b_m a\alpha(a)\alpha^2(a)\cdots\alpha^{m-1}(a) = 0$، زیرا ضریب پیشرو معادله $ax \circ g = 0$ می‌باشد. بنابه لم ۲۳.۱.۱، داریم $b_m a^m = 0$. از این‌رو عدد صحیح $1 \leq k \leq m$ وجود دارد به‌طوری‌که $b_m a^{k-1} \neq 0$ اما $b_m a^k = 0$. بنابراین $b_m a^{k-1} \in ann_R(a) \cap Nil(R)$. همچنین، اگر $g \circ ax = 0$، آن‌گاه داریم $ab_m = 0$، و در نتیجه $b_m \in ann_R(a) \cap Nil(R)$. □

قضیه ۱۰.۲.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن، غیرکاهشی و (α,δ)_سازگار باشد. در این‌صورت، شرایط زیر معادلند:

(۱) $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x;\alpha,\delta])) = 2$.

(۲) برای هر $a, b \in Z(R)$، $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) \neq \{0\}$.

برهان. (۱) $\Rightarrow$ (۲) فرض می‌کنیم $a, b \in Z(R)$. بنابه گزاره ۹.۲.۳، داریم

$$ax + x^2, bx + x^2 \in Z(R_\circ[x;\alpha,\delta]).$$

به‌علاوه، بنابه (۱) و گزاره ۵.۲.۳، عنصر پوچ‌توان g وجود دارد به‌طوری‌که $g \circ (ax + x^2) = 0$ و $g \circ (bx + x^2) = 0$ بنابراین $ag + g^2 = 0 = bg + g^2$. فرض می‌کنیم $g = \sum_{i=k}^{n} c_i x^i$ و $c_k \neq 0$. بنابه لم ۴.۲.۳، برای هر $k \leq i \leq n$، داریم $c_i \in Nil(R)$. بنابراین

$$ac_k + \textstyle\sum_{i=k}^{n} c_i \delta^i(c_k) = 0 = bc_k + \sum_{i=k}^{n} c_i \delta^i(c_k),$$

و در نتیجه $ac_k = bc_k$. اگر $ac_k = bc_k = 0$، آن‌گاه $c_k \in ann_R(\{a,b\})$، و از این‌رو نتیجه حاصل است. لذا فرض می‌کنیم $ac_k \neq 0$. اگر برای هر $k \leq i \leq n$، داشته باشیم $c_i c_k = 0$، آن‌گاه بنابه لم ۲۳.۱.۱، $\sum_{i=k}^{n} c_i \delta^i(c_k) = 0$. در نتیجه $ac_k = bc_k = 0$، که یک تناقض است. پس $c_{i_1} \in \{c_k, \ldots, c_n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $c_{i_1} c_k \neq 0$. به‌علاوه، $c_{i_1} ac_k + c_{i_1} \sum_{i=k}^{n} c_i \delta^i(c_k) = 0$ و $c_{i_1} bc_k + c_{i_1} \sum_{i=k}^{n} c_i \delta^i(c_k) = 0$. اگر $c_{i_1} c_k a = c_{i_1} c_k b = 0$، آن‌گاه $c_{i_1} c_k \in ann_R(\{a,b\})$. حال فرض می‌کنیم $c_{i_1} c_k a \neq 0$. با استدلالی مشابه بالا، می‌توان نتیجه گرفت $c_{i_2} \in \{c_k, \ldots, c_n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $c_{i_1} c_{i_2} c_k \neq 0$. از این‌رو $c_{i_2} c_{i_1} ac_k + c_{i_2} c_{i_1} \sum_{i=k}^{n} c_i \delta^i(c_k) = 0$ و $c_{i_2} c_{i_1} bc_k + c_{i_2} c_{i_1} \sum_{i=k}^{n} c_i \delta^i(c_k) = 0$. با تکرار این استدلال و با توجه به اینکه $Nil(R)$ ایده‌آلی موضعاً پوچ‌توان از R است، می‌توان نتیجه گرفت که عدد صحیح مثبت t وجود دارد به‌طوری‌که

$c_{i_t}c_{i_{t-1}}\cdots c_{i_1}c_k \neq 0$، $c_{i_r} \in \{c_k, \cdots, c_n\}$، اما برای هر $k \leq j \leq n$، $c_{i_t}c_{i_{t-1}}\cdots c_{i_1}c_kc_j = 0$.
بنابراین $c_{i_r}c_{i_{r-1}}\cdots c_{i_1}c_kb = 0 = c_{i_r}c_{i_{r-1}}\cdots c_{i_1}c_ka$، و لذا نتیجه حاصل است.

(۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{n} a_ix^i$ و $g = \sum_{j=1}^{m} b_jx^j$ عناصری از $Z(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ باشند. بنابه قضیه ۸.۲.۳، کافی است نشان دهیم $d(f,g) \leq 2$. بنابه گزاره ۷.۲.۳، داریم $a_1, b_1 \in Z(R)$. از این‌رو بنابه (۲)، عنصر پوچ‌توان $0 \neq c \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $ca_1 = 0 = cb_1$. پس برای برخی عدد صحیح مثبت k، $c^k = 0$ اما $c^{k-1} \neq 0$. بنابراین $f - c^{k-1}x - g$ یک مسیر است، و در نتیجه $d(f,g) \leq 2$. □

در گزاره بعد، قطر گراف مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ را در حالتی که حلقه‌ای R αـ‌صلب است، مشخص می‌کنیم.

گزاره ۱۱.۲.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ‌صلب باشد. در این‌صورت،

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x;\alpha,\delta])) = 2$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[x;\alpha,\delta])) = 2$.

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x;\alpha,\delta])) = 3$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[x;\alpha,\delta])) = 3$.

برهان. با استفاده از لم‌های ۲۶.۱.۱ و ۲۷.۱.۱، نتیجه حاصل می‌شود. □

مثال بعد، نشان می‌دهد که شرط "αـ‌صلب" در گزاره ۱۱.۲.۳، ضروری است.

مثال ۱۲.۲.۳. فرض می‌کنیم D دامنه‌ای صحیح باشد و $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & d \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| \, a, d \in D \right\}$ و $u \in U(D)$. همچنین، فرض می‌کنیم $\alpha : R \longrightarrow R$ با ضابطه $\alpha(\begin{bmatrix} a & d \\ 0 & a \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a & ud \\ 0 & a \end{bmatrix}$ باشد. بنابراین R حلقه‌ای جابه‌جایی و αـ‌سازگار است. به‌علاوه، R غیرکاهشی است، زیرا $Nil(R) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a \in D \right\}$. از این‌رو بنابه گزاره ۲۴.۱.۱، حلقه‌ی R، αـ‌صلب نیست.
به آسانی می‌توان نشان داد که $Z(R) = Nil(R)$ و $Z(R)^2 = 0$. لذا بنابه [۴۲، قضیه ۲.۷]، $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x;\alpha])) = 1$. اما بنابه قضیه ۱۰.۲.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[x;\alpha])) = 2$.

هنگ[1] و همکارانش [۵۵]، خاصیت (A) را به حلقه‌های ناجابه‌جایی توسیع دادند. حلقه‌ی R دارای خاصیت (A) راست (چپ) است، هرگاه هر ایده‌آل دوطرفه متناهیاً تولید شده از R که مشمول در مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر چپ (راست) است، دارای پوچ‌ساز راست (چپ) ناصفر باشد. همچنین، گوییم حلقه‌ی R دارای خاصیت (A) است، هرگاه هم دارای خاصیت (A) راست و هم دارای خاصیت (A) چپ باشد.
مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ را با $Z'(R[x;\alpha,\delta])$ نمایش می‌دهیم.

[1] Hong

تذکر ۱۳.۲.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و (α,δ)_سازگار باشد. اگر $Z'(R[x;\alpha,\delta])$ ایده‌آلی از $R[x;\alpha,\delta]$ باشد، آن‌گاه می‌توان نشان داد که $Z(R)[x;\alpha,\delta]=Z'(R[x;\alpha,\delta])$. از این‌رو اگر $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد و R دارای خاصیت (A) راست باشد، آن‌گاه بنابه [۴۲، قضیه ۲.۶]، داریم $Z(R)[x;\alpha,\delta]=Z'(R[x;\alpha,\delta])$.

گزاره ۱۴.۲.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای α_صلب باشد. در این‌صورت، $Z(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ ایده‌آلی از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ است اگر و تنها اگر $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد و R دارای خاصیت (A) راست باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد و R دارای خاصیت (A) راست باشد. فرض می‌کنیم $f=\sum_{i=1}^n a_ix^i$ و $g=\sum_{i=1}^n b_ix^i$ عناصری ناصفر از $Z(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ باشند. بنابه گزاره ۳.۲.۳، عناصر ناصفر $r,s\in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $rf=0=sg$. از این‌رو برای هر $1\leq i\leq n$، $a_i,b_i\in Z(R)$. چون $Z(R)$ ایده‌آلی از R است، پس $\langle a_1+b_1,\dots,a_n+b_n\rangle\subseteq Z(R)$. لذا عنصر ناصفر $t\in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $\langle a_1+b_1,\dots,a_n+b_n\rangle t=0$، زیرا R دارای خاصیت (A) راست است. بنابه لم ۲۳.۱.۱، برای هر $1\leq i\leq n$، $(a_i+b_i)x^it=0$. بنابراین $(f+g)t=0$، و در نتیجه بنابه گزاره ۳.۲.۳، داریم $f+g\in Z(R_\circ[x;\alpha,\delta])$.

حال فرض می‌کنیم $h=\sum_{k=1}^m c_kx^k\in Z(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ و

$$f=\textstyle\sum_{i=1}^n a_ix^i,g=\sum_{i=1}^n b_ix^i\in R_\circ[x;\alpha,\delta].$$

پس برای هر $1\leq k\leq m$، $c_k\in Z(R)$، و از این‌رو بنابه تذکر ۱۳.۲.۳، $h\in Z'(R[x;\alpha,\delta])$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}(h+f)\circ g-f\circ g&=b_1\big[(h+f)-f\big]+b_2\big[(h+f)^2-f^2\big]+\cdots+b_n\big[(h+f)^n-f^n\big]\\&\overset{(*)}{=}b_1h+b_2\big[h^2+hf+fh\big]+\cdots+b_n\big[h^n+hf^{n-1}+\cdots+fh^{n-1}\big].\end{aligned}$$

توجه کنید چون $Z(R)$ ایده‌آلی از R است و R دارای خاصیت (A) می‌باشد، بنابه [۴۲، قضیه ۲.۶]، $Z'(R[x;\alpha,\delta])$ ایده‌آلی از حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ است. لذا $(*)$ یک مقسوم‌علیه صفر از حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ می‌باشد، و از این‌رو $(h+f)\circ g-f\circ g\in Z'(R[x;\alpha,\delta])$. بنابه لم ۱.۲.۳، عنصر $0\neq r\in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $r\big[(h+f)\circ g-f\circ g\big]=0$. پس بنابه گزاره ۳.۲.۳، داریم $(h+f)\circ g-f\circ g\in Z(R_\circ[x;\alpha,\delta])$. بنابراین $Z(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ یک ایده‌آل راست از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ است.

به‌علاوه، داریم $f\circ h=c_1f+c_2f^2+\cdots+c_mf^m$. چون $Z(R)$ ایده‌آلی از R است و $\{c_1,\dots,c_m\}\subseteq Z(R)$، پس بنابه تذکر ۱۳.۲.۳، $f\circ h\in Z'(R[x;\alpha,\delta])$. از این‌رو بنابه لم ۱.۲.۳ و گزاره ۳.۲.۳، $f\circ h$ یک مقسوم‌علیه صفر از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ است. لذا $Z(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ یک ایده‌آل چپ از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ است.

بالعکس، فرض می‌کنیم $Z(R_\circ[x;\alpha,\delta])$ ایده‌آلی از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ باشد. فرض می‌کنیم $a,b\in Z(R)$. پس $ax,bx\in Z(R_\circ[x;\alpha,\delta])$، و در نتیجه $(a+b)x=ax+bx\in Z(R_\circ[x;\alpha,\delta])$.

از این‌رو بنابه گزاره ۳.۲.۳، $R \ni r \neq ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که $r(a+b)x = ۰$. بنابراین $a+b \in Z(R)$، و در نتیجه $Z(R)$ ایده‌آلی از R است.

حال فرض می‌کنیم $\langle a_۱, \dots, a_n\rangle \subseteq Z(R)$. لذا $\{a_۱x, \dots, a_nx^n\} \subseteq Z(R_۰[x;\alpha,\delta])$. چون $Z(R_۰[x;\alpha,\delta])$ ایده‌آلی از $R_۰[x;\alpha,\delta]$ است، پس $f = \sum_{i=۱}^n a_ix^i \in Z(R_۰[x;\alpha,\delta])$. بنابه گزاره ۳.۲.۳، برای برخی $R \ni r \neq ۰$، داریم $rf = ۰$. بنابراین $\langle a_۱ \dots, a_n\rangle r = ۰$. □

مثال بعد، نشان می‌دهد که شرط "αــ صلب" در گزاره ۱۴.۲.۳، ضروری است.

مثال ۱۵.۲.۳. فرض می‌کنیم F یک میدان باشد و $R = F[y]$. در این‌صورت، $\alpha : R \longrightarrow R$ با ضابطه $\alpha(f(y)) = f(۰)$ یک همریختی است که αــ سازگار نمی‌باشد. حلقه‌ی $R[x;\alpha]$ را درنظر بگیرید. به‌وضوح، $Z(R) = ۰$ و R دارای خاصیت (A) می‌باشد. نشان می‌دهیم $Z(R_۰[x;\alpha])$ ایده‌آلی از $R_۰[x;\alpha]$ نیست. فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=۱}^n f_i(y)x^i$ و $g = \sum_{j=۱}^m g_j(y)x^j$ عناصری ناصفر از $R_۰[x;\alpha]$ باشند و $g \circ f = ۰$. در این‌صورت، داریم $f_۱(y)g + \cdots + f_n(y)g^n = ۰$. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: اگر برای هر $۱ \leq j \leq m$، داشته باشیم $y \mid g_j(y)$، آن‌گاه برای هر $۲ \leq i \leq n$، $g^i = ۰$. بنابراین $f_۱(y)g = ۰$. از این‌رو $f_۱(y)g_m(y) = ۰$، زیرا $g_m(y)$ ضریب پیشرو g است. بنایراین $f_۱(y) = ۰$، و در نتیجه $f = f_۲(y)x^۲ + \cdots + f_n(y)x^n$ و $f_i(y) \in R$.

حالت ۲: فرض می‌کنیم $۱ \leq k \leq m$ بزرگترین عدد صحیحی باشد به‌طوری‌که $y \nmid g_k(y)$. پس $f_n(y)g_m(y)[\alpha(g_k(y))]^{n-۱} \neq ۰$ ضریب پیشرو $g \circ f$ می‌باشد، و در نتیجه $g \circ f \neq ۰$، که یک تناقض است. بنابراین

$$Z(R_۰[x;\alpha]) = \{\, \textstyle\sum_{i=۲}^n f_i(y)x^i \mid n \geq ۲ \text{ و } f_i(y) \in R\} \cup \\ \{\, \textstyle\sum_{j=۱}^m g_j(y)x^j \mid m \geq ۱ \text{ و } g_j(۰) = ۰,\ j \text{ برای هر}\}.$$

حال فرض می‌کنیم $f = yx$ و $g = x^۲$. از این‌رو $f, g \in Z(R_۰[x;\alpha])$ اما $f + g \notin Z(R_۰[x;\alpha])$.

فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن، غیرکاهشی و (α,δ)ــ سازگار باشد. در این‌صورت، این سؤال مطرح است که "تحت چه شرایطی $Z(R_۰[x;\alpha,\delta])$ ایده‌آلی از $R_۰[x;\alpha,\delta]$ است؟" ما این سؤال را برای حالت $\delta = ۰$ پاسخ داده‌ایم.

گزاره ۱۶.۲.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن، غیرکاهشی و αــ سازگار باشد. در این‌صورت، شرایط زیر معادلند:

(۱) برای هر $a, b \in Z(R)$، $ann_R(a-b) \cap Nil(R) \neq \{۰\}$.

(۲) $Z(R_۰[x;\alpha])$ ایده‌آلی از $R_۰[x;\alpha]$ است.

برهان. $(۱) \Rightarrow (۲)$ فرض می‌کنیم $z = \sum_{i=۱}^n a_ix^i$ و $z' = \sum_{j=۱}^m b_jx^j$ عناصری از $Z(R_۰[x;\alpha])$ باشند. بنابه گزاره ۷.۲.۳، $a_۱, b_۱ \in Z(R)$. از این‌رو بنابه (۱)، $ann_R(a_۱ - b_۱) \cap Nil(R) \neq \{۰\}$. لذا بنابه گزاره ۷.۲.۳، $z - z' \in Z(R_۰[x;\alpha])$.

حال فرض می‌کنیم $f, g = \sum_{j=0}^{r} c_j x^j \in R_0[x;\alpha]$. از این‌رو a_1c_1 و c_1a_1، به ترتیب، ضریب x در $g \circ z$ و $(z+f)\circ g - f\circ g$ هستند. چون $a_1c_1, c_1a_1 \in Z(R)$، پس بنابه (۱) و گزاره ۷.۲.۳، داریم $(z+f)\circ g - f\circ g, g\circ z \in Z(R_0[x;\alpha])$. بنابراین $Z(R_0[x;\alpha])$ یک ایده‌آل از $R_0[x;\alpha]$ است.

(۱) $\Rightarrow$ (۲) فرض می‌کنیم $a, b \in Z(R)$. چون $ax, bx, x^2 \in Z(R_0[x;\alpha])$ و $Z(R_0[x;\alpha])$ ایده‌آلی از $R_0[x;\alpha]$ است، پس $(a-b)x+x^2 \in Z(R_0[x;\alpha])$. از این‌رو برای برخی عنصر پوچ‌توان ناصفر $g = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i$، داریم $g\circ[(a-b)x+x^2] = 0$. بنابه لم ۴.۲.۳، $\{c_1, \ldots, c_n\} \subseteq Nil(R)$. از این‌رو با استدلالی مشابه برهان قضیه ۱۰.۲.۳، می‌توان نشان داد $0 \neq t \in Nil(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $t(a-b) = 0$. $\square$

۳.۳ بررسی عناصر مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ی صفر ـ متقارن سری‌های توانی اریب

در این بخش، ابتدا ساختار عناصر مقسوم‌علیه صفر شبه‌حلقه‌ی $R_0[[x;\alpha]]$ را برای حلقه‌ی متقارن و α ـ سازگار R مشخص می‌کنیم. سپس، به مطالعه‌ی قطر گراف مقسوم‌علیه صفر $R_0[[x;\alpha]]$ می‌پردازیم.

لم ۱.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای α ـ صلب باشد. دراین‌صورت،

(۱) [۴۶، گزاره ۲.۳] اگر f و g عناصری از حلقه‌ی $R[[x;\alpha]]$ باشند، آن‌گاه $fg = 0$ اگر و تنها اگر برای هر $a_i \in C_f$ و $b_j \in C_g$، داشته باشیم $a_ib_j = 0$.

(۲) [۳۸، لم ۲.۴] اگر f و g عناصری از شبه‌حلقه‌ی $R_0[[x;\alpha]]$ باشند، آن‌گاه $f\circ g = 0$ اگر و تنها اگر برای هر $a_i \in C_f$ و $b_j \in C_g$، داشته باشیم $a_ib_j = 0$.

با استفاده از لم ۱.۳.۳، نتیجه زیر به آسانی حاصل می‌شود.

لم ۲.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای α ـ صلب باشد. در این‌صورت،

$$Z_\ell(R_0[[x;\alpha]]) = Z_r(R_0[[x;\alpha]]) = Z_r(R[[x;\alpha]])x = Z_\ell(R[[x;\alpha]])x.$$

چون هر حلقه‌ی متقارن، نیم‌جابه‌جایی است، لذا لم بعد، از [۴۴، قضیه ۲.۶]، نتیجه می‌شود.

لم ۳.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن و نوتری راست باشد. در این‌صورت، R دارای خاصیت (A) چپ است.

تعریف ۴.۳.۳. حلقه‌ی R را αـ مک‌کوی راست نسبت به سری‌های توانی می‌نامیم، هرگاه سری‌های توانی $f,g \in R[[x;\alpha]] \setminus \{0\}$ در شرط $fg=0$ صدق کنند، آن‌گاه عنصر ناصفر $c \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $fc=0$. به‌طور مشابه، حلقه‌ی αـ مک‌کوی چپ نسبت به سری‌های توانی تعریف می‌شود. به‌علاوه، اگر حلقه‌ی R، αـ مک‌کوی راست و چپ نسبت به سری‌های توانی باشد، آن‌گاه R را حلقه‌ی αـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی[2] می‌نامیم.

لم ۵.۳.۳. [۴۹، نتیجه ۲.۷] اگر R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، αـ سازگار و نوتری راست باشد، آن‌گاه R حلقه‌ای αـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی است.

لم ۶.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، αـ سازگار و نوتری راست باشد. اگر $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد، آن‌گاه $Z(R[[x;\alpha]]) = Z(R)[[x;\alpha]]$.

برهان. بنابه لم ۵.۳.۳، داریم $Z(R[[x;\alpha]]) \subseteq Z(R)[[x;\alpha]]$. حال فرض می‌کنیم $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد و $f \in Z(R)[[x;\alpha]]$. چون R نوتری راست است، پس $Z(R)$ به‌عنوان ایده‌آل راست، متناهیاً تولید شده است. از این‌رو بنابه لم ۳.۳.۳، عنصر ناصفر $r \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $rZ(R)=0$. چون $C_f \subseteq Z(R)$، پس $rC_f=0$. لذا $rf=0$، و در نتیجه $Z(R)[[x;\alpha]] \subseteq Z(R[[x;\alpha]])$. بنابراین $Z(R[[x;\alpha]]) = Z(R)[[x;\alpha]]$. □

نتیجه ۷.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ صلب و نوتری راست باشد. اگر $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد، آن‌گاه $Z(R_0[[x;\alpha]]) = Z\big(R[[x;\alpha]]\big)x = Z(R)_0[[x;\alpha]]$.

برهان. بنابه لم‌های ۲.۳.۳ و ۶.۳.۳، نتیجه حاصل می‌شود. □

لم ۸.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن و αـ سازگار باشد. اگر $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ یک مقسوم‌علیه صفر از $R_0[[x;\alpha]]$ باشد، آن‌گاه $a_1 \in Z(R)$.

برهان. فرض می‌کنیم $a_1 \neq 0$. چون $f \in Z(R_0[[x;\alpha]])$، پس عنصر ناصفر $g=\sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j$ از $R_0[[x;\alpha]]$ وجود دارد به‌طوری‌که $g \circ f = 0$ یا $f \circ g = 0$. فرض می‌کنیم b_k اولین ضریب ناصفر g باشد. اگر $g \circ f = 0$، آن‌گاه $a_1 b_k = 0$، و از این‌رو نتیجه حاصل است. حال فرض می‌کنیم $f \circ g = 0$. پس $b_k a_1 \alpha(a_1) \cdots \alpha^{k-1}(a_1) = 0$، زیرا ضریب x^k در $f \circ g$ می‌باشد. بنابه لم ۱.۳.۳، داریم $b_k a_1^k = 0$. اگر $b_k a_1 = 0$، آن‌گاه نتیجه حاصل است. لذا فرض می‌کنیم $b_k a_1 \neq 0$. از این‌رو $1 \leq s \leq k-1$ وجود دارد به‌طوری‌که $b_k a_1^s \neq 0$ اما $(b_k a_1^s)a_1 = 0$. □

تعریف ۹.۳.۳. حلقه‌ی R را αـ آرمنداریزپوچ[3] می‌نامیم، هرگاه $f=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ و $g=\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ عناصری از $R[[x;\alpha]]$ باشند به‌طوری‌که $fg \in Nil(R)[[x;\alpha]]$، آن‌گاه برای هر i,j، داشته باشیم $a_i \alpha^i(b_j) \in Nil(R)$.

لم ۱۰.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ سازگار و $Nil(R)$ ایده‌آلی از R باشد. در این‌صورت، R حلقه‌ای αـ آرمنداریزپوچ است.

---
[2] α-power-serieswise McCoy

[3] α-Nil-Armendariz

برهان. مشابه [۵۳، گزاره ۱]، اثبات می‌شود. $\square$

لم ۱۱.۳.۳. [۷۴، قضیه ۳.۱۴] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای α_سازگار و α_پوچ_آرمنداریز باشد. اگر $Nil(R)$ یک ایده‌آل پوچ‌توان از R باشد، آن‌گاه $Nil(R[[x;\alpha]]) = Nil(R)[[x;\alpha]]$.

نتیجه ۱۲.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن، α_سازگار و نوتری راست باشد. در این‌صورت، $Nil(R[[x;\alpha]]) = Nil(R)[[x;\alpha]]$.

برهان. چون R متقارن و نوتری راست است، پس $Nil(R)$ یک ایده‌آل پوچ‌توان از R می‌باشد. از این‌رو بنابه لم‌های ۱۰.۳.۳ و ۱۱.۳.۳، نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

تعریف ۱۳.۳.۳. حلقه‌ی R را تک‌سریال[4] راست می‌نامیم، هرگاه مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های راست آن، با رابطه‌ی شمول کاملاً مرتب باشد. به‌عنوان مثال، حلقه‌ی موضعی‌سازی $\mathbb{Z}$ بر $2\mathbb{Z}$ تک‌سریال راست است.

در ادامه، مثال‌هایی ارائه می‌دهیم که در شرایط لم ۱۱.۳.۳ و نتیجه ۱۲.۳.۳، صدق می‌کنند.

مثال ۱۴.۳.۳. (۱) فرض می‌کنیم D دامنه‌ای صحیح باشد و $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & d \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| a, d \in D \right\}$ و $u \in U(D)$. همچنین، $\alpha : R \longrightarrow R$ را با ضابطه $\alpha(\begin{bmatrix} a & d \\ 0 & a \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a & ud \\ 0 & a \end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم. بنابراین R حلقه‌ای جابه‌جایی و α_سازگار است. از طرفی، داریم $Nil(R) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a \in D \right\}$. لذا بنابه لم‌های ۱۰.۳.۳ و ۱۱.۳.۳، داریم $Nil(R_0[[x;\alpha]]) = Nil(R)_0[[x;\alpha]]$. زیرا $Nil(R)^2 = 0$،

(۲) فرض می‌کنیم R حلقه‌ای آرتینی راست و تک‌سریال راست باشد و $S = R[y]$. در این‌صورت، R حلقه‌ای نوتری راست است، و در نتیجه S نیز نوتری راست می‌باشد. به‌علاوه، بنابه [۶۷، گزاره ۳.۵]، S حلقه‌ای متقارن است. لذا بنابه نتیجه ۱۲.۳.۳، داریم $Nil(R[[x]]) = Nil(R[[x]])$.

گزاره ۱۵.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن، α_سازگار و نوتری راست باشد. همچنین، فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ و $g = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j$ عناصری ناصفر از $R_0[[x;\alpha]]$ باشند. اگر $f \circ g = 0$، آن‌گاه

(۱) $a_1 b_1 = 0$.

(۲) برای برخی $0 \neq r \in R$، داریم $rf = 0$.

---
[4] Uniserial

(۳) f پوچتوان است یا برای برخی $0 \neq s \in R$، $sg = 0$.

برهان. (۱) واضح است، زیرا b_1a_1 ضریب x در $f \circ g$ می‌باشد.

(۲) چون $f \circ g = 0$، پس $b_1f + b_2f^2 + b_3f^3 + \cdots = 0$. بنابراین

$$(b_1 + b_2f + b_3f^2 + \cdots)f = 0.$$

چون $b_1+b_2f+b_3f^2+\cdots$ ناصفر است، بنابه لم ۵.۳.۳، برای برخی $0 \neq r \in R$، داریم $rf = 0$.

(۳) چون R نوتری راست است، پس برای برخی عدد صحیح $n \geq 1$، داریم $\langle C_g\rangle_r = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle_r$. فرض می‌کنیم f پوچتوان نباشد. لذا بنابه نتیجه ۱۲.۳.۳، $a = a_i$ وجود دارد به‌طوری‌که $a \notin Nil(R)$. قرار دهید $\overline{R} = R/Nil(R)$. چون $f \circ g = 0$، پس در $\overline{R}_0[[x;\overline{\alpha}]]$، داریم $\overline{f} \circ \overline{g} = \overline{0}$. چون $\overline{R}$ حلقه‌ای کاهشی و $\overline{\alpha}$ـ سازگار است، بنابه گزاره‌های ۲۹.۱.۱ و ۲۴.۱.۱، $\overline{R}$ حلقه‌ای $\overline{\alpha}$ـ صلب می‌باشد. از این‌رو بنابه لم ۲.۳.۳، برای هر i, j، داریم $\overline{a}_i\overline{b}_j = \overline{0}$. چون R نوتری راست است، پس برای برخی عدد صحیح مثبت k، داریم $Nil(R)^k = 0$. لذا برای هر $j \geq 1$، $a^kb_j^k = 0$. بنابراین اعداد صحیح $0 \leq t_j \leq k$ وجود دارند به‌طوری‌که $a^kb_j^{t_j} \neq 0$ اما برای هر $j \geq 1$، $a^kb_j^{t_j+1} = 0$. پس اعداد صحیح $0 \leq s_j \leq t_j$ وجود دارند به‌طوری‌که $a^kb_1^{s_1}b_2^{s_2}\cdots b_n^{s_n} \neq 0$ اما برای هر $1 \leq j \leq n$، $a^kb_1^{s_1}b_2^{s_2}\cdots b_n^{s_n}b_j = 0$. قرار دهید $s = a^kb_1^{s_1}b_2^{s_2}\cdots b_n^{s_n}$. چون $\langle C_g\rangle_r = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle_r$، پس $sg = 0$. □

گزاره ۱۶.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای αـ صلب و نوتری راست باشد. در این‌صورت،

$$Z(R_0[[x;\alpha]]) = \{f \in R_0[[x;\alpha]] \mid rf = 0,\ 0 \neq r \in R \text{ برای برخی}\}.$$

برهان. بنابه لم ۲.۳.۳ و گزاره ۱۵.۳.۳، داریم

$$Z(R_0[[x;\alpha]]) \subseteq \{f \in R_0[[x;\alpha]] \mid rf = 0,\ 0 \neq r \in R \text{ برای برخی}\}.$$

حال فرض می‌کنیم $f \in R_0[[x;\alpha]]$ و برای برخی $0 \neq r \in R$ داشته باشیم $rf = 0$. بنابراین $f \circ rx = 0$، و در نتیجه $f \in Z(R_0[[x;\alpha]])$. □

لم ۱۷.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن، غیرکاهشی، αـ سازگار و نوتری راست باشد. در این‌صورت، $Z_\ell(R_0[[x;\alpha]]) = \{f \in R_0[[x;\alpha]] \mid rf = 0,\ 0 \neq r \in R \text{ برای برخی}\}$. به‌ویژه، $Z_\ell(R_0[[x;\alpha]]) \subseteq Z_r(R_0[[x;\alpha]])$.

برهان. فرض می‌کنیم $0 \neq f \in R_0[[x;\alpha]]$. اگر برای برخی $0 \neq r \in R$ داشته باشیم $rf = 0$، آن‌گاه $f \circ rx = 0$، و در نتیجه

$$\{f \in R_0[[x;\alpha]] \mid rf = 0,\ 0 \neq r \in R \text{ برای برخی}\} \subseteq Z_\ell(R_0[[x;\alpha]]).$$

لذا بنابه گزاره ۱۵.۳.۳، داریم

$$\{f \in R_0[[x;\alpha]] \mid rf = 0,\ 0 \neq r \in R \text{ برای برخی}\} = Z_\ell(R_0[[x;\alpha]]).$$

به‌علاوه، اگر $f=\sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i \in Z_\ell(R_\circ[[x;\alpha]])$، آن‌گاه عنصر ناصفر $r\in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $rf=\circ$. لذا برای هر i، داریم $ra_i=\circ$، و در نتیجه $rx\circ f=\circ$. □

قضیه ۱۸.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن، غیرکاهشی، α_سازگار و نوتری راست باشد. در این‌صورت، مجموعه‌ی $Z(R_\circ[[x;\alpha]])$ برابر است با

$$Z_\ell(R_\circ[[x;\alpha]])\bigcup\{\sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i \mid ann_R(a_1)\cap Nil(R)\neq\{\circ\} \text{ و } a_i\in R,\ i\geq 2 \text{ برای هر}\}.$$

برهان. فرض می‌کنیم $\circ\neq f=\sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i$ یک مقسوم‌علیه صفر از $R_\circ[[x;\alpha]]$ باشد. اگر $ann_R(a_1)\cap Nil(R)\neq\{\circ\}$، آن‌گاه برای برخی $\circ\neq b\in Nil(R)$، داریم $ba_1=\circ$. از این‌رو عدد صحیح مثبت t وجود دارد به‌طوری‌که $b^t=\circ$ اما $b^{t-1}\neq\circ$. پس بنابه لم ۱.۳.۳، داریم $b^{t-1}x\circ f=\sum_{i=1}^{\infty} a_i(b^{t-1}x)^i=\circ$، و در نتیجه $f\in Z(R_\circ[[x;\alpha]])$.

حال فرض می‌کنیم $f\in Z(R_\circ[[x;\alpha]])$. پس برای برخی $\circ\neq g=\sum_{j=1}^{\infty} b_jx^j\in R_\circ[[x;\alpha]]$، داریم $g\circ f=\circ$، زیرا بنابه ۱۷.۳.۳، $Z(R_\circ[[x;\alpha]])=Z_r(R_\circ[[x;\alpha]])$. اگر g پوچ‌توان باشد، آن‌گاه بنابه نتیجه ۱۲.۳.۳، برای هر i، داریم $b_i\in Nil(R)$. فرض می‌کنیم b_s اولین ضریب ناصفر g باشد. بنابراین $b_sa_1=\circ$، و در نتیجه $ann_R(a_1)\cap Nil(R)\neq\{\circ\}$. از طرفی، اگر g پوچ‌توان نباشد، آن‌گاه بنابه گزاره ۱۵.۳.۳، برای برخی $\circ\neq r\in R$، داریم $rf=\circ$. از این رو بنابه لم ۱۷.۳.۳، $f\in Z_\ell(R_\circ[[x;\alpha]])$. □

قضیه ۱۹.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن و α_سازگار باشد و $Z(R)\neq\circ$. در این‌صورت، $2\leq \operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[[x;\alpha]]))\leq 3$.

برهان. بنابه قضیه ۱۲.۴.۱، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[[x;\alpha]]))\leq 3$. به‌علاوه، بنابه قضیه ۸.۲.۳، $f,g\in R_\circ[x;\alpha]$ وجود دارند به‌طوری‌که $d(f,g)\geq 2$. بنابراین $2\leq\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[[x;\alpha]]))$. □

گزاره ۲۰.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن، غیرکاهشی، α_سازگار و نوتری راست باشد. اگر $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[[x;\alpha]]))=2$، آن‌گاه $Z(R_\circ[[x;\alpha]])=Z(R)x+R_\circ[[x;\alpha]]x$.

برهان. فرض می‌کنیم $\circ\neq f=\sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i\in R_\circ[[x;\alpha]]$. اگر $f\in Z(R_\circ[[x;\alpha]])$، آن‌گاه بنابه لم ۸.۳.۳، داریم $a_1\in Z(R)$. بنابراین $Z(R_\circ[[x;\alpha]])\subseteq Z(R)x+R_\circ[[x;\alpha]]x$. اکنون نشان می‌دهیم $Z(R)x+R_\circ[[x;\alpha]]x\subseteq Z(R_\circ[[x;\alpha]])$. اگر $a_1\in Nil(R)$، آن‌گاه بنابه قضیه ۱۸.۳.۳، نتیجه حاصل است. فرض می‌کنیم $a_1\in Z(R)\setminus Nil(R)$. چون R غیرکاهشی است، پس a_1x, x^2 مقسوم‌علیه‌های صفر از $R_\circ[[x;\alpha]]$ هستند. به‌علاوه، $a_1x\circ x^2\neq\circ\neq x^2\circ a_1x$. چون $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[[x;\alpha]]))=2$، پس عنصر ناصفر پوچ‌توان $g=\sum_{j=1}^{\infty} b_jx^j$ وجود دارد به‌طوری‌که a_1x-g-x^2 یک مسیر در $\Gamma(R_\circ[[x;\alpha]]$ است. بنابه نتیجه ۱۲.۳.۳، برای هر j، داریم $b_j\in Nil(R)$. فرض می‌کنیم b_s اولین ضریب ناصفر g باشد. اگر $g\circ(a_1x)=\circ$، آن‌گاه $a_1b_s=\circ$. لذا $ann_R(a_1)\cap Nil(R)\neq\{\circ\}$، و از این‌رو بنابه قضیه ۱۸.۳.۳، داریم $f\in Z(R_\circ[[x;\alpha]])$. حال فرض می‌کنیم $(a_1x)\circ g=\circ$. پس $\sum_{j=s}^{\infty} b_j(a_1x)^j=\circ$، و از این‌رو

داریم $\circ = b_sa_1\alpha(a_1)\alpha^2(a_1)\cdots\alpha^{s-1}(a_1)$، زیرا ضریب x^s در این معادله است. لذا بنابه لم ۱.۳.۳، داریم $b_sa_1^s = \circ$. اگر $b_sa_1 = \circ$، آن‌گاه نتیجه حاصل است. پس فرض می‌کنیم $b_sa_1 \neq \circ$. بنابراین عدد صحیح $1 \leq k \leq s-1$ وجود دارد به‌طوری‌که $b_sa_1^k \neq \circ$ اما $(b_sa_1^k)a_1 = \circ$. لذا $b_sa_1^k \in ann_R(a_1) \cap Nil(R)$، و از این‌رو بنابه قضیه ۱۸.۳.۳، نتیجه حاصل می‌شود. □

قضیه ۲۱.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن، غیرکاهشی و αـ سازگار باشد. در این‌صورت،

(۱) اگر برای هر $a,b \in Z(R)$، داشته باشیم $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) \neq \{\circ\}$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[[x;\alpha]])) = 2$.

(۲) اگر حلقه‌ی R نوتری راست باشد و $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[[x;\alpha]])) = 2$، آن‌گاه برای هر $a,b \in Z(R)$، داریم $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) \neq \{\circ\}$.

برهان. (۱) فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i$ و $g = \sum_{j=1}^{\infty} b_jx^j$ عناصری ناصفر از $Z(R_\circ[[x;\alpha]])$ باشند. بنابه لم ۸.۳.۳، داریم $a_1, b_1 \in Z(R)$. لذا بنابه فرض، عنصر ناصفر $c \in Nil(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $ca_1 = \circ = cb_1$. پس عدد صحیح $k \geq 2$ وجود دارد به‌طوری‌که $c^k = \circ$ اما $c^{k-1} \neq \circ$. لذا بنابه لم ۱.۳.۳، $f - c^{k-1}x - g$ یک مسیر است. بنابراین $d(f,g) \leq 2$، و از این‌رو بنابه قضیه ۱۹.۳.۳، نتیجه حاصل می‌شود.

(۲) فرض می‌کنیم $a,b \in Z(R)$. بنابه گزاره ۲۰.۳.۳، داریم $\{ax+x^2, bx+x^2\} \in Z(R_\circ[[x;\alpha]])$. چون $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[[x;\alpha]])) = 2$، بنابه گزاره ۱۵.۳.۳، عنصر پوچ‌توان ناصفر f وجود دارد به‌طوری‌که $f \circ (ax+x^2) = \circ$ و $f \circ (bx+x^2) = \circ$. فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=k}^{\infty} c_ix^i$ و $c_k \neq \circ$. لذا $ac_k = \circ = bc_k$. از طرفی، بنابه نتیجه ۱۲.۳.۳، داریم $c_k \in Nil(R)$. بنابراین $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) \neq \{\circ\}$. □

نتیجه ۲۲.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن، غیرکاهشی و αـ سازگار باشد. در این‌صورت،

(۱) اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[[x;\alpha]])) = 3$، آن‌گاه عناصر $a,b \in Z(R)$، وجود دارند به‌طوری‌که $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) = \{\circ\}$.

(۲) اگر حلقه‌ی R نوتری راست باشد و عناصر $a,b \in Z(R)$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) = \{\circ\}$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[[x;\alpha]])) = 3$.

برهان. بنابه قضیه‌های ۱۹.۳.۳ و ۲۱.۳.۳، نتیجه حاصل می‌شود. □

در مرجع [۴۹]، رده‌بندی کاملی برای قطر گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(R[[x;\alpha]])$ روی حلقه‌ی برگشت‌پذیر و αـ سازگار R ارائه شده است. بنابه [۴۹، قضیه‌های ۲.۲۱ و۲.۲۳]، داریم $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\alpha]])) = 1$ اگر و تنها اگر R حلقه‌ای غیرکاهشی باشد و $Z(R)^2 = \circ$. همچنین اگر حلقه‌ی R نوتری راست باشد، آن‌گاه (۱) $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\alpha]])) = 2$ اگر و تنها

اگر $|Z(R)| > ۳$ و (الف) R کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال باشد، یا (ب) $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد و $Z(R)^۲ \neq ۰$. (۲) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x;\alpha]])) = ۳$ اگر و تنها اگر R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایده‌آل اول مینیمال نباشد و $Z(R)$ ایده‌آلی از R نباشد.

گزاره ۲۳.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای α_صلب باشد. در این‌صورت،

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x;\alpha]])) = ۲$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[[x;\alpha]])) = ۲$.

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x;\alpha]])) = ۳$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[[x;\alpha]])) = ۳$.

برهان. بنابه لم ۲.۳.۳، نتیجه حاصل می‌شود. □

مثال بعد نشان می‌دهد که شرط "α_صلب" در گزاره ۲۳.۳.۳، ضروری است.

مثال ۲۴.۳.۳. (۱) فرض می‌کنیم $S = \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}(p^\infty)$ توسیع بدیهی $\mathbb{Z}$ توسط $\mathbb{Z}(p^\infty)$ باشد. به‌وضوح S غیرکاهشی و غیر نوتری است. همریختی $\alpha : S \to S$ با ضابطه $\alpha(n, \overline{m}) = (n, -\overline{m})$ برای هر $n \in \mathbb{Z}$ و $\overline{m} \in \mathbb{Z}(p^\infty)$ را در نظر می‌گیریم. به‌وضوح، S حلقه‌ای α_سازگار است. فرض می‌کنیم $g = (\circ, \overline{(۱/p)}) + (\circ, \overline{(۱/p^۲)})x + (\circ, \overline{(۱/p^۳)})x^۲ + \cdots$ و $f = (p, \circ) + (۱, \circ)x$. پس $fg = \circ$، و در نتیجه $f \in Z(S[[x;\alpha]])$. حال فرض می‌کنیم $h = (p, \circ)$. بنابراین $h \in Z(S[[x;\alpha]])$ اما $hf \neq \circ$ و $fh \neq \circ$ به‌علاوه،

$$ann_{S[[x;\alpha]]}(h) = \{ \textstyle\sum_{i=\circ}^{\infty} (\circ, a_i)x^i \mid a_i \in \{\circ, \overline{(۱/p)}\},\ \text{برای هر } i \geq \circ \}.$$

بنابراین f و h پوچساز مشترک ندارند، و در نتیجه بنابه قضیه ۱۰.۴.۱، $\operatorname{diam}(\Gamma(S[[x;\alpha]])) = ۳$. از طرفی، بنابه [۶۵، مثال ۵.۶]، $Z(S) = p\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}(p^\infty)$. چون $(\circ, \overline{(۱/p)})Z(S) = \circ$ و $(\circ, \overline{(۱/p)}) \in Nil(S)$، بنابه قضیه ۲۱.۳.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(S_\circ[[x;\alpha]])) = ۲$.

(۲) فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی، غیرکاهشی و نوتری باشد و $Z(R)^۲ = \circ$. بنابه قضیه ۵.۴.۱، $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۱$. اما بنابه قضیه ۲۱.۳.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[[x]])) = ۲$.

گزاره ۲۵.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای α_صلب و نوتری راست باشد. در این‌صورت، $Z(R_\circ[[x;\alpha]])$ ایده‌آلی از $R_\circ[[x;\alpha]]$ است اگر و تنها اگر $Z(R)$ ایده‌آلی از R باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $Z(R_\circ[[x;\alpha]])$ ایده‌آلی از $R_\circ[[x;\alpha]]$ باشد و $a, b \in Z(R)$. بنابراین $ax, bx \in Z(R_\circ[[x;\alpha]])$ و در نتیجه $(a+b)x = ax + bx \in Z(R_\circ[[x;\alpha]])$. طبق گزاره ۱۶.۳.۳، عنصر ناصفر $r \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $r(a+b)x = \circ$. بنابراین $a + b \in Z(R)$، و در نتیجه $Z(R)$ ایده‌آلی از R است.

بالعکس، فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=۱}^{\infty} a_i x^i$ و $g = \sum_{j=۱}^{\infty} b_j x^j$ عناصری از $Z(R_\circ[[x;\alpha]])$ باشند. بنابه گزاره ۱۶.۳.۳، عناصر ناصفر $r, s \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $rf = \circ = sg$. بنابراین برای هر i, j، داریم $a_i, b_j \in Z(R)$. فرض می‌کنیم

$$\beta=\{a_i+b_i \mid a_i\in C_f \text{ و } b_i\in C_g,\ i\geq ۱ \text{ برای هر }\}.$$

چون حلقه‌ی R نوتری راست است، پس عدد صحیح مثبت n وجود دارد به‌طوری‌که $\beta R=\langle a_۱+b_۱,\dots,a_n+b_n\rangle_r$. چون $Z(R)$ ایده‌آلی از R است، داریم $\langle a_۱+b_۱,\dots,a_n+b_n\rangle\subseteq Z(R)$. بنابه لم ۳.۳.۳، حلقه‌ی R خاصیت (A) چپ دارد، و در نتیجه برای برخی $۰\neq t\in R$، داریم $t\langle a_۱+b_۱,\dots,a_n+b_n\rangle=۰$. پس برای هر $۱\leq i\leq n$، $t(a_i+b_i)=۰$، و از این‌رو $t(f+g)=۰$. لذا طبق گزاره ۱۶.۳.۳، داریم $f+g\in Z(R_۰[[x;\alpha]])$.

حال فرض می‌کنیم $f=\sum_{i=۱}^{\infty}a_ix^i$ و $g=\sum_{j=۱}^{\infty}b_jx^j$ عناصری از $R_۰[[x;\alpha]]$ باشند و $z=\sum_{k=۱}^{\infty}c_kx^k\in Z(R_۰[[x;\alpha]])$. بنابراین $f\circ z=\sum_{k=۱}^{\infty}c_kf^k$ و

$$\begin{aligned}(z+f)\circ g-f\circ g&=\sum_{j=۱}^{\infty}b_j(z+f)^j-\sum_{j=۱}^{\infty}b_jf^j\\&=b_۱c_۱x+[b_۱c_۲+b_۲c_۱\alpha(c_۱)+b_۲c_۱\alpha(a_۱)+b_۲a_۱\alpha(c_۱)]x^۲+\cdots.\end{aligned}$$

چون برای هر $k\geq ۱$، $c_k\in Z(R)$ و $Z(R)$ ایده‌آلی از R است، بنابه نتیجه ۷.۳.۳، داریم

$$f\circ z,(z+f)\circ g-f\circ g\in Z(R_۰[[x;\alpha]]).$$

بنابراین $Z(R_۰[[x;\alpha]])$ ایده‌آلی از $R_۰[[x;\alpha]]$ است. □

مثال بعد نشان می‌دهد که شرط "نوتری راست" در گزاره ۲۳.۳.۳ ضروری است.

مثال ۲۶.۳.۳. [۶۵، مثال ۵.۳] فرض می‌کنیم $D=F[\mathcal{X}]_{(\mathcal{X})}$ باشد به‌طوری‌که F یک میدان و $\mathcal{X}=\{x_n\}$ مجموعه‌ای شمارای نامتناهی از متغیرها است. همچنین فرض می‌کنیم $M=(\mathcal{X})D$ ایده‌آل ماکسیمال D و $\mathcal{P}$ نشان دهنده‌ی ایده‌آل‌های اول D باشد که توسط زیرمجموعه‌ای متناهی از $\mathcal{X}$ تولید شده‌اند. بنابراین مجموعه‌ی $\mathcal{P}$ شامل $P_۰=(۰)$ است که ایده‌آل اول تولید شده توسط مجموعه‌ی تهی می‌باشد. به‌علاوه، برای هر $n\geq ۱$، قرار می‌دهیم $P_n=(x_۱,x_۲,\dots,x_n)D$. توجه می‌کنیم برای ایده‌آل اول $P_\alpha\in\mathcal{P}$، عدد صحیح n وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $k\geq n$، داریم $P_\alpha\subset P_k$. برای هر $P_\alpha\in\mathcal{P}$، قرار می‌دهیم $\mathcal{Q}_\alpha=M/P_\alpha$. فرض می‌کنیم $\mathcal{O}=\{P_n\mid n\geq ۰\}$ و $\mathcal{C}=\sum\mathcal{Q}_\alpha$. فرض می‌کنیم $R=D+C$ حلقه‌ی تشکیل شده از حاصل‌ضرب مستقیم $D\times C$ با جمع $(r,b)+(s,c)=(r+s,b+c)$ و ضرب $(r,b)(s,c)=(rs,rc+sb+bc)$ و α همریختی همانی روی R باشد. بنابراین R حلقه‌ای αـ‌صلب و غیرنوتری است. لوکاس ثابت کرد $Z(R)=M+C$ ایده‌آلی از R است. برای هر عدد صحیح $n\geq ۰$ و هر $r\in D$ و $c\in C$، فرض می‌کنیم $(r)_n$ نشان دهنده‌ی تصویر r در $D_n=D/P_n$ باشد و $(c)_n$ نمایانگر مؤلفه‌ی c در $\mathcal{Q}_n$ باشد. توجه می‌کنیم که هر عنصر M با عنصری منحصر به فرد از C متناظر می‌شود، زیرا $M=\mathcal{Q}_۰$. به‌علاوه، هر عنصر M متعلق به همه‌ی P_nها، بجز تعداد متناهی از آن‌ها، می‌باشد. فرض می‌کنیم $y(m)$ عنصر C باشد به‌طوری‌که برای هر $n\neq m$، $(y(m))_n=۰$ و $(y(m))_m=(x_{m+۱})_m$ که $(x_{m+۱})_m$ تصویر $x_{m+۱}$ در $\mathcal{Q}_m$ است.

اکنون ایده‌آل شمارا تولید شده‌ی $A = \langle (0, y(0)), (0, y(1)), (0, y(2)), \ldots \rangle$ را در نظر بگیرید. چون $M = Q_0$ و $(y(0))_0 = x_1$ ناصفر است، پس حاصل‌ضرب هر عنصر ناصفر به فرم $(r, 0)$ در $(0, y(0))$، ناصفر است. اما برای هر $i \geq 0$، داریم $(0, 0) = (-x_1, y(0))(0, y(i))$. بنابراین A دارای پوچساز ناصفر است. از طرفی، برای هر عنصر ناصفر به فرم $(0, s)$، $(0, s)A \neq (0, 0)$ و اگر $(r, t)(x_1, 0) = (0, 0)$، آن‌گاه $r = 0$. از طرفی، حاصل‌ضرب هر عنصر به فرم $(0, s)$ در A ناصفر است. بنابراین $A + (x_1, 0)R$ ایده‌آلی شمارا تولید شده از R است که مشمول در $Z(R)$ می‌باشد و دارای پوچساز ناصفر نیست اما A و $(x_1, 0)R$ دارای پوچساز ناصفر می‌باشند. قرار دهید $b = (x_1, 0)$ و برای هر $i \geq 0$، $a_i = (0, y(i))$. در نظر بگیرید $f = a_0x^2 + a_1x^3 + \cdots$ و $g = bx$. لذا $f, g \in Z(R_0[[x; \alpha]])$. اگر $f + g \in Z(R_0[[x; \alpha]])$، آن‌گاه $h \in R_0[[x; \alpha]]$ وجود دارد به‌طوری‌که $h \circ (f + g) = 0$. فرض می‌کنیم k کوچکترین عدد صحیحی باشد که $c_k \neq 0$. بنابه لم ۱.۳.۳، برای هر $i \geq 0$، $c_ka_i = 0 = c_kb$. بنابراین $c_k \in ann_R(A + bR)$، که یک تناقض است. لذا $Z(R_0[[x; \alpha]])$ ایده‌آلی از $R_0[[x; \alpha]]$ نیست.

گزاره ۲۷.۳.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای متقارن، غیرکاهشی و α_سازگار باشد. در این‌صورت،

(۱) اگر برای هر $a, b \in Z(R)$، داشته باشیم $ann_R(a-b) \cap Nil(R) \neq \{0\}$، آن‌گاه $Z(R_0[[x; \alpha]])$ ایده‌آلی از $R_0[[x; \alpha]]$ است.

(۲) اگر حلقه‌ی R نوتری راست و $Z(R_0[[x; \alpha]])$ ایده‌آلی از $R_0[[x; \alpha]]$ باشد، آن‌گاه برای هر $a, b \in Z(R)$، داریم $ann_R(a - b) \cap Nil(R) \neq \{0\}$.

برهان. (۱) فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i$ و $g = \sum_{j=1}^{\infty} b_jx^j$ عناصری ناصفر از $Z(R_0[[x; \alpha]])$ باشند. بنابه لم ۸.۳.۳، داریم $a_1, b_1 \in Z(R)$. از طرفی، بنابه فرض، $0 \neq c \in Nil(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $c(a_1 - b_1) = 0$. پس عدد صحیح مثبت k وجود دارد به‌طوری‌که $c^k = 0$ اما $c^{k-1} \neq 0$. لذا بنابه لم ۱.۳.۳، داریم $c^{k-1}x \circ (f - g) = 0$. بنابراین $f - g \in Z(R_0[[x; \alpha]])$.

حال فرض می‌کنیم $h = \sum_{i=1}^{\infty} c_ix^i$ و $k = \sum_{j=1}^{\infty} d_jx^j$ عناصری از $R_0[[x; \alpha]]$ باشند. از این‌رو به‌ترتیب، c_1a_1 و d_1a_1 ضریب x در $h \circ f$ و $(f + h) \circ k - h \circ k$ می‌باشند. از آن‌جایی‌که $ann_R(a_1) \cap Nil(R) \neq \{0\}$، پس با استدلالی مشابه بالا، $h \circ f$ و $(f + h) \circ k - h \circ k$ عناصری از $Z(R_0[[x; \alpha]])$ هستند. بنابراین $Z(R_0[[x; \alpha]])$ ایده‌آلی از $R_0[[x; \alpha]]$ است.

(۲) فرض می‌کنیم $a, b \in Z(R)$. پس $ax, bx, x^2 \in Z(R_0[[x; \alpha]])$، و در نتیجه داریم $(a - b)x + x^2 \in Z(R_0[[x; \alpha]])$، زیرا $Z(R_0[[x; \alpha]])$ ایده‌آلی از $R_0[[x; \alpha]]$ است. بنابه گزاره ۱۵.۳.۳، عنصر پوچتوان $f = \sum_{i=1}^{\infty} c_ix^i$ وجود دارد به‌طوری‌که $f \circ ((a - b)x + x^2) = 0$. بنابه نتیجه ۱۲.۳.۳، برای هر $i \geq 1$، داریم $c_i \in Nil(R)$. فرض می‌کنیم c_k اولین ضریب ناصفر f باشد. بنابراین $(a - b)c_k = 0$، و در نتیجه $ann_R(a - b) \cap Nil(R) \neq \{0\}$. □

۴.۳ بررسی قطر گراف‌های مقسوم‌علیه صفر فشرده $R_\circ[x]$ و $R_\circ[[x]]$

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، اولین‌بار اسپایرف و ویکام در مرجع [۷۹] گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده را برای حلقه‌ی جابه‌جایی R تعریف کردند. در مرجع [۴۰]، مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده به حلقه‌ی ناجابه‌جایی R توسیع داده شده است. گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده شبه‌حلقه‌ها را مشابه [۴۰]، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: فرض می‌کنیم $a, b \in N$. در این‌صورت، تعریف می‌کنیم $a \sim b$ اگر و تنها اگر $ann_N(a) = ann_N(b)$. به آسانی می‌توان دید که $\sim$ یک رابطه‌ی هم ارزی است. گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده $\Gamma_E(N)$ گرافی است که رئوس آن کلاس‌های هم ارزی القا شده توسط رابطه $\sim$ به غیر از $[\circ]_N$ و $[۱]_N$ باشد و دو رأس متمایز $[a]_N$ و $[b]_N$ مجاورند اگر و تنها اگر $ab = \circ$ یا $ba = \circ$. در این بخش، ما به مطالعه‌ی گراف‌های مقسوم‌علیه صفر فشرده‌ی شبه‌حلقه‌های $R_\circ[x]$ و $R_\circ[[x]]$ می‌پردازیم و رده‌بندی کاملی از قطر این گراف‌ها ارائه می‌دهیم.

با توجه به تعریف، به آسانی می‌توان دید که $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \leq \mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x]))$. از طرفی بنابه قضیه ۵.۱.۳، داریم $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) \leq ۳ \leq ۲$.

گزاره ۱.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $Z(R) \neq \circ$. در این‌صورت، $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \geq ۱$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم R حلقه‌ای کاهشی باشد و $\circ \neq a \in Z(R)$. پس برای برخی ناصفر $b \neq a$، داریم $ab = \circ$. اگر $[ax] = [bx]$، آن‌گاه $ax \in ann_{R_\circ[x]}(ax)$، و در نتیجه $a^۲ = \circ$، که یک تناقض است. بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \geq ۱$. حال فرض می‌کنیم R غیرکاهشی باشد. از این‌رو $\circ \neq a \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $a^۲ = \circ$. لذا $ax, ax + x^۲ \in Z(R_\circ[x])$. به‌علاوه، داریم $x^۲ \in ann_{R_\circ[x]}(ax)$ اما $x^۲ \notin ann_{R_\circ[x]}(ax + x^۲)$. بنابراین $[ax] \neq [ax + x^۲]$، و در نتیجه داریم $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \geq ۱$. □

در ادامه، قطر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده‌ی $R_\circ[x]$ را زمانی‌که R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی است، رده‌بندی می‌کنیم.

گزاره ۲.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی باشد. در این‌صورت،

(۱) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x])) = ۱$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۱$.

(۲) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x])) = ۲$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۲$.

(۳) $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R[x])) = ۳$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۳$.

برهان. بنابه لم ۲۳.۲.۱، نتیجه حاصل می‌شود. □

نتیجه ۳.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی باشد. در این‌صورت، $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) = ۳$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۳$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) = ۳$. بنابراین طبق گزاره ۹.۱.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = ۳$. از این‌رو بنابه قضیه ۹.۵.۱، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R_E[x])) = ۳$. لذا بنابه گزاره ۲.۴.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۳$.

قسمت عکس واضح است، زیرا $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \leq \operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) \leq ۳$. □

لم ۴.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و غیرکاهشی باشد. همچنین، فرض می‌کنیم برای هر $a,b \in Z(R)$، $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) \neq \{\circ\}$. در این‌صورت، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \leq ۲$. به‌علاوه، اگر $c \in Nil(R)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای برخی عدد صحیح $k \geq ۳$، $c^k = \circ$، اما $c^{k-۱} \neq \circ$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۲$.

برهان. بنابه قضیه ۷.۱.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \leq \operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) = ۲$.

حال فرض می‌کنیم برای برخی $c \in Nil(R)$ و عدد صحیح $k \geq ۳$، داشته باشیم $c^k = \circ$ اما $c^{k-۱} \neq \circ$. چون $c^۲x \circ x^{k-۱} = \circ$، پس $x^{k-۱} \in Z(R_\circ[x])$. همچنین، داریم $cx \circ x^{k-۱} \neq \circ$ و $x^{k-۱} \circ cx \neq \circ$ چون $x^k \in ann_{R_\circ[x]}(cx)$ و $x^k \notin ann_{R_\circ[x]}(x^{k-۱})$، پس $[cx] \neq [x^{k-۱}]$. بنابراین $d([cx],[x^{k-۱}]) \geq ۲$، و در نتیجه داریم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۲$. □

فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. بنابه لم ۲۰.۲.۱ و نتیجه ۱۲.۱.۱، اگر $f = \sum_{i=۱}^{n} a_i x^i$ عنصری پوچ‌توان از حلقه‌ی $R[x]$ باشد، آن‌گاه $C_f \subseteq Nil(R)$ و $f \in Nil(R_\circ[x])$.

برای هر $f \in R[x]$، درجه‌ی f را با نماد $\deg(f)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و غیرکاهشی باشد. در این‌صورت، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۱$ اگر و تنها اگر $|\Gamma_E(R)| \leq ۲$، $Nil(R)^۲ = \circ$، برای برخی $a \in R$، داشته باشیم $Z(R) = ann_R(a)$ و برای هر $c \in Z(R) \setminus Nil(R)$، $ann_R(c) = Nil(R)$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۱$. چون R غیرکاهشی است، پس $\circ \neq a \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $a^۲ = \circ$. فرض می‌کنیم $b \in Z(R)$. اگر $[ax] = [bx]$، آن‌گاه $ax \in ann_{R_\circ[x]}(bx)$، زیرا $a^۲ = \circ$. بنابراین $ax \circ bx = \circ$، و در نتیجه داریم $ab = \circ$. همچنین، اگر $[ax] \neq [bx]$، آن‌گاه بنابه فرض، داریم $ax \circ bx = \circ$. لذا $ab = \circ$. بنابراین $Z(R) = ann_R(a)$. از این‌رو بنابه لم ۴.۴.۳، برای هر $b \in Nil(R)$، داریم $b^۲ = \circ$. اکنون فرض می‌کنیم $b,c \in Nil(R)$ و $b \neq c$. اگر $[bx] = [cx]$، آن‌گاه داریم $cx \in ann_{R_\circ[x]}(bx)$، و در نتیجه $bc = \circ$. اگر $[bx] \neq [cx]$، آن‌گاه بنابه فرض، داریم $bcx = bx \circ cx$. بنابراین $Nil(R)^۲ = \circ$.

حال فرض می‌کنیم $c \in Z(R) \setminus Nil(R)$ و $d \in ann_R(c)$. چون $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۱$ و $c \notin Nil(R)$، پس $[x^۲] = [cx]$. بنابراین $dx \in ann_{R_\circ[x]}(cx) = ann_{R_\circ[x]}(x^۲)$. از این‌رو داریم $d^۲ = \circ$، و در نتیجه $ann_R(c) \subseteq Nil(R)$. با استدلالی مشابه بالا، می‌توان نشان داد برای هر

$b \in Nil(R)$، داریم $Z(R) = ann_R(b)$، زیرا $b^۲ = ۰$. بنابراین $Nil(R) \subseteq ann_R(c)$، و در نتیجه $Nil(R) = ann_R(c)$.

فرض می‌کنیم $c \in Z(R)$. اگر c پوچ‌توان باشد، آن‌گاه داریم $ann_R(c) = Z(R)$، و اگر $c \notin Nil(R)$، آن‌گاه داریم $ann_R(c) = Nil(R)$. بنابراین حداکثر دو رأس متمایز $[a]_R$ و $[b]_R$ در $\Gamma_E(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $a \in Nil(R)$ و $b \notin Nil(R)$. لذا داریم $|\Gamma_E(R)| \leq ۲$.

بالعکس، ادعا می‌کنیم برای هر $c \in Nil(R)$، داریم $ann_R(c) = Z(R)$ و $ann_{R_۰[x]}(cx) = Z(R_۰[x])$. چون $Nil(R)^۲ = ۰$ و $c \in Nil(R)$، داریم $Nil(R) \subseteq ann_R(c)$. حال فرض می‌کنیم $d \in Z(R) \setminus Nil(R)$. پس $ann_R(d) = Nil(R)$، و در نتیجه داریم $cd = ۰$. بنابراین $ann_R(c) = Z(R)$. فرض می‌کنیم $g = \sum_{j=۱}^{m} b_j x^j \in Z(R_۰[x])$. چون $Nil(R)^۲ = ۰$ و بنابه گزاره ۳.۱.۳، $b_۱ \in Z(R)$، پس $cx \circ g = ۰$. بنابراین $ann_{R_۰[x]}(cx) = Z(R_۰[x])$. از طرفی، چون R غیرکاهشی است، پس $x^۲ \in Z(R_۰[x])$. به‌علاوه، داریم $x^۲ \in ann_{R_۰[x]}(cx)$ اما $x^۲ \notin ann_{R_۰[x]}(x^۲)$. بنابراین حداقل دو رأس $[cx]$ و $[x^۲]$ را در $\Gamma_E(R_۰[x])$ وجود دارند. به‌وضوح، داریم $r.ann_{R_۰[x]}(x^۲) = ۰$. اگر $g \in \ell.ann_{R_۰[x]}(x^۲)$، آن‌گاه $g^۲ = ۰$، و در نتیجه $g \in Nil(R)_۰[x]$. چون $Nil(R)^۲ = ۰$، پس $Nil(R)_۰[x] \subseteq \ell.ann_{R_۰[x]}(x^۲)$. لذا

$$ann_{R_۰[x]}(x^۲) = Nil(R)_۰[x] = Nil(R_۰[x]).$$

اکنون فرض می‌کنیم f عنصری ناصفر از $Z(R_۰[x])$ باشد. از این‌رو می‌توان f را فرم $f = f_۱ + f_۲ + f_۳$ نوشت به‌طوری‌که $C^*_{f_۱} \subseteq Nil(R)$، $C^*_{f_۲} \subseteq Z(R) \setminus Nil(R)$ و $C^*_{f_۳} \subseteq R \setminus Z(R)$. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: فرض کنیم $f = f_۱ = \sum_{i=۱}^{n} a_i x^i$. چون $C^*_{f_۱} \subseteq Nil(R)$، پس برای هر $۱ \leq i \leq n$، داریم $ann_R(a_i) = Z(R)$. به‌علاوه، بنابه گزاره ۳.۱.۳، داریم $b_۱ \in Z(R)$. لذا $f \circ g = ۰$، زیرا $Nil(R)^۲ = ۰$. بنابراین $ann_{R_۰[x]}(f) = Z(R_۰[x])$، و در نتیجه داریم $[f] = [f_۱] = [cx]$.

حالت ۲: فرض می‌کنیم $f = f_۲ = \sum_{i=۱}^{n} a_i x^i$. از این‌رو برای هر $۱ \leq i \leq n$، داریم $ann_R(a_i) = Nil(R)$. فرض می‌کنیم $g = \sum_{j=۱}^{m} b_j x^j \in r.ann_{R_۰[x]}(f)$. لذا

$$f \circ g = b_۱ f + b_۲ f^۲ + \cdots + b_m f^m = ۰.$$

پس $b_m a_n^m = ۰$، زیرا ضریب پیشرو $f \circ g = ۰$ می‌باشد. همچنین، از این‌که $a_n \notin Nil(R)$، نتیجه می‌شود $a_n^m \notin Nil(R)$. بنابراین $b_m \in ann_{R_۰[x]}(a_n^m) = Nil(R)$. لذا $b_m \in Nil(R)$، و در نتیجه $b_m f = ۰$، زیرا برای هر i، $ann_R(a_i) = Nil(R)$. بنابراین

$$f \circ g = b_۱ f + b_۲ f^۲ + \cdots + b_{m-۱} f^{m-۱} = ۰.$$

با ادامه این روند، برای هر $۱ \leq j \leq m - ۱$، داریم $b_j \in Nil(R)$. فرض می‌کنیم $g \in \ell.ann_{R_۰[x]}(f)$. پس $g \circ f = a_۱ g + a_۲ g^۲ + \cdots + a_n g^n = ۰$. لذا داریم $a_n b_m^n = ۰$. از این‌رو $b_m^n \in ann_R(a_n) = Nil(R)$، و در نتیجه $b_m \in Nil(R)$. بنابراین

$$g \circ f = a_۱ g_۱ + a_۲ g_۱^۲ + \cdots + a_n g_۱^n = ۰,$$

به‌طوری‌که $g_1 = \sum_{j=1}^{m-1} b_j x^j$. با تکرار این استدلال، می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $1 \leq j \leq m-1$، داریم $b_j \in Nil(R)$. بنابراین $\ell.ann_{R_\circ[x]}(f) \subseteq Nil(R)_\circ[x]$. چون برای هر $1 \leq i \leq n$، $ann_R(a_i) = Nil(R)$، پس برای هر $g \in Nil(R)_\circ[x]$، داریم $g \circ f = \circ = f \circ g$. لذا $ann_{R_\circ[x]}(f) = Nil(R)_\circ[x] = Nil(R_\circ[x])$. بنابراین $[f] = [f_2] = [x^2]$.

حالت ۳: فرض می‌کنیم $f = f_3 = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$. بنابه گزاره ۳.۱.۳، داریم $a_1 = \circ$. چون برای هر $\circ \neq r \in R$، $rf \neq \circ$، پس بنابه لم ۲.۱.۳، داریم $r.ann_{R_\circ[x]}(f) = \circ$. به‌علاوه، اگر $g \in \ell.ann_{R_\circ[x]}(f)$، آن‌گاه بنابه لم ۲.۱.۳، g پوچ‌توان است. چون $Nil(R)^2 = \circ$، پس برای هر $h \in Nil(R)_\circ[x]$ داریم $h \circ f = a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n = \circ$. لذا

$$ann_{R_\circ[x]}(f) = \ell.ann_{R_\circ[x]}(f) = Nil(R)_\circ[x] = Nil(R_\circ[x]).$$

بنابراین $[f] = [f_3] = [x^2]$.

حالت ۴: فرض کنیم $f = f_1 + f_2$ به‌طوری‌که $\circ \neq f_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ و $\circ \neq f_2 = \sum_{s=1}^{t} c_s x^s$. فرض می‌کنیم $g \in \ell.ann_{R_\circ[x]}(f)$. از این‌رو بنابه لم ۲.۱.۳، برای برخی $\circ \neq r \in R$، داریم $rg = \circ$. بنابراین $C_g^* \subseteq Z(R)$. چون برای هر $a_i \in C_{f_1}^*$، $ann_R(a_i) = Z(R)$، پس داریم $g \circ f = c_1 g + c_2 g^2 + \cdots + c_t g^t = g \circ f_2 = \circ$، و در نتیجه $g \in \ell.ann_{R_\circ[x]}(f_2)$. لذا بنابه حالت (۲)، داریم $\ell.ann_{R_\circ[x]}(f) \subseteq Nil(R_\circ[x])$. حال فرض می‌کنیم $g = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j \in r.ann_{R_\circ[x]}(f)$. چون f پوچ‌توان نیست، بنابه لم ۲.۱.۳، $C_g^* \subseteq Z(R)$. بنابراین داریم

$$\circ = f \circ g = b_1 f + b_2 f^2 + \cdots + b_m f^m = b_1 f_2 + b_2 f_2^2 + \cdots + b_m f_2^m = f_2 \circ g,$$

و در نتیجه $g \in r.ann_{R_\circ[x]}(f_2)$. لذا بنابه حالت (۲)، $g \in Nil(R_\circ[x])$. چون برای هر $a_i \in C_{f_1}^*$، داریم $ann_R(a_i) = Z(R)$ و برای هر $c_s \in C_{f_2}^*$، داریم $ann_R(c_s) = Nil(R)$، پس $\ell.ann_{R_\circ[x]}(f) = r.ann_{R_\circ[x]}(f) = Nil(R_\circ[x])$. بنابراین $ann_{R_\circ[x]}(f) = Nil(R_\circ[x])$. لذا داریم $[f] = [f_1 + f_2] = [x^2]$.

حالت ۵: فرض می‌کنیم $f = f_1 + f_3$ به‌طوری‌که $\circ \neq f_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ و $\circ \neq f_3 = \sum_{s=1}^{t} c_s x^s$. بنابه گزاره ۳.۱.۳، داریم $\deg(f_3) \geq 2$. مشابه حالت (۳)، می‌توان نتیجه گرفت که $r.ann_{R_\circ[x]}(f) = \circ$. از طرفی، اگر برای برخی $g \in R_\circ[x]$، داشته باشیم $g \circ f = \circ$، آن‌گاه بنابه لم ۲.۱.۳، g پوچ‌توان است. بنابراین $\ell.ann_{R_\circ[x]}(f) \subseteq Nil(R_\circ[x])$. چون $Nil(R)^2 = \circ$ و برای هر $a_i \in C_{f_1}^*$، $ann_R(a_i) = Z(R)$، پس برای هر $g \in Nil(R_\circ[x])$، داریم $g \circ f = \circ$. لذا $ann_{R_\circ[x]}(f) = \ell.ann_{R_\circ[x]}(f) = Nil(R_\circ[x])$. بنابراین $[f] = [f_1 + f_3] = [x^2]$.

حالت ۶: فرض می‌کنیم $f = f_2 + f_3$ که برای هر $i \in \{2,3\}$، داشته باشیم $f_i \neq \circ$. چون $\deg(f_3) \geq 2$ و برای هر $a_i \in C_{f_2}^*$، $ann_R(a_i) = Nil(R)$، پس با استدلالی مشابه حالت ۵، می‌توان نشان داد که $ann_{R_\circ[x]}(f) = \ell.ann_{R_\circ[x]}(f) = Nil(R_\circ[x])$. بنابراین داریم $[f] = [f_2 + f_3] = [x^2]$.

حالت ۷: فرض می‌کنیم $f = f_1 + f_2 + f_3$ به‌طوری‌که برای هر $i \in \{1,2,3\}$، $f_i \neq \circ$. چون

$C_{f_3}^* \subseteq R \setminus Z(R)$، بنابه لم ۲.۱.۳، داریم $r.ann_{R_\circ[x]}(f) = \circ$ و $\ell.ann_{R_\circ[x]}(f) \subseteq Nil(R_\circ[x])$.
بنابراین $ann_{R_\circ[x]}(f) = Nil(R_\circ[x])$، و در نتیجه $[f] = [f_1 + f_2 + f_3] = [x^2]$.
لذا داریم $|\Gamma_E(R_\circ[x])| = 2$، و در نتیجه $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = 1$. □

نتیجه ۶.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و غیرکاهشی باشد و $Z(R)^2 = \circ$. در این‌صورت، $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = 1$.

لم ۷.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و $a, b \in R$. در این‌صورت، اگر $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) = \{\circ\}$، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت k, s که $a^k \neq \circ \neq b^s$، داریم $ann_R(\{a^k, b^s\}) \cap Nil(R) = \{\circ\}$.

برهان. فرض می‌کنیم $a^k \neq \circ \neq b^s$ و $\circ \neq t \in ann_R(\{a^k, b\}) \cap Nil(R)$. پس $ta^k = \circ$ و $tb = \circ$ بنابراین عدد صحیح مثبت $1 \leq r \leq k-1$ وجود دارد به‌طوری‌که $ta^r \neq \circ$ اما $ta^{r+1} = \circ$. از این‌رو داریم $ta^r \in ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R)$، که یک تناقض است. قرار می‌دهیم $a' = a^k \neq \circ$. پس $ann_R(\{a',b\}) \cap Nil(R) = \{\circ\}$. لذا با استدلالی مشابه، می‌توان نشان داد که $ann_R(\{a', b^s\}) \cap Nil(R) = \{\circ\}$. □

قضیه ۸.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و غیرکاهشی باشد. در این‌صورت، $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) = 3$ اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = 3$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) = 3$. بنابه نتیجه ۸.۱.۳، عناصر $a, b \in Z(R)$ وجود دارند به‌طوری‌که $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) = \{\circ\}$. توجه کنید که اگر $b \in Nil(R)$ یا a و $ab = \circ$، آن‌گاه $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) \neq \{\circ\}$، که یک تناقض است. بنابراین حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: فرض می‌کنیم $a, b \notin Nil(R)$. چون $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) = \{\circ\}$، پس $c \in Nil(R)$، وجود دارد به‌طوری‌که $ca = \circ$ اما $cb \neq \circ$، یا برای هر $c \in Nil(R)$، داریم $ca \neq \circ \neq cb$.

ابتدا فرض می‌کنیم برای برخی $c \in Nil(R)$، داشته باشیم $ca = \circ$ اما $cb \neq \circ$. بنابراین عدد صحیح مثبت $k \geq 2$ وجود دارد به‌طوری‌که $c^k = \circ$. لذا $ax + x^k, bx \in Z(R_\circ[x])$. چون $cx \in ann_{R_\circ[x]}(ax + x^k)$ اما $cx \notin ann_{R_\circ[x]}(bx)$، پس $[ax + x^k] \neq [bx]$. به‌علاوه، داریم $bx \circ (ax + x^k) \neq \circ \neq (ax + x^k) \circ bx$. چون برای هر $\circ \neq r \in R$، $r(ax + x^k) \neq \circ$، از این‌رو بنابه لم ۲.۱.۳، داریم $ann_{R_\circ[x]}(ax + x^k) = \ell.ann_{R_\circ[x]}(ax + x^k) \subseteq Nil(R_\circ[x])$. فرض می‌کنیم $g = \sum_{i=s}^{n} c_i x^i \in ann_{R_\circ[x]}(ax + x^k) \cap ann_{R_\circ[x]}(bx)$ و $c_s \neq \circ$. لذا داریم $g \circ (ax + x^k) = \circ$ و $g \circ bx = \circ$ یا $bx \circ g = \circ$. بنابراین برای هر i، $c_i \in Nil(R)$ و $ac_s = \circ$. اگر $g \circ bx = \circ$، آن‌گاه $bc_s = \circ$، و در نتیجه داریم $c_s \in ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R)$، که یک تناقض است. اگر $\circ = bx \circ g = c_s b^s x^s + \cdots + c_n b^n x^n$، آن‌گاه $c_s b^s = \circ$. چون $b \notin Nil(R)$، پس $b^s \neq \circ$. بنابراین

$c_s \in ann_R(\{a,b^s\})\cap Nil(R)$، که متناقض با لم ۷.۴.۳ می‌باشد. از این‌رو bx و $ax+x^k$ پوچساز مشترک ناصفر ندارند. لذا $d([ax+x^k],[bx]) \geq ۳$. بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۳$.

حال فرض می‌کنیم برای هر $c' \in Nil(R)$، داشته باشیم $c'a \neq \circ \neq c'b$. چون حلقه‌ی R غیرکاهشی است، پس $c \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $c^۲ = \circ$. از این‌رو داریم $cb \neq \circ$ و بنابه گزاره ۳.۱.۳، $cbx + x^۲ \in Z(R_\circ[x])$. بنابراین $[cbx+x^۲] \neq [ax]$، زیرا $cx \in ann_{R_\circ[x]}(cbx+x^۲)$ اما $cx \notin ann_{R_\circ[x]}(ax)$ به‌علاوه، داریم $(cbx+x^۲)\circ ax \neq \circ \neq ax\circ(cbx+x^۲)$. بنابه گزاره ۳.۱.۳، $ann_{R_\circ[x]}(cbx+x^۲) = \ell.ann_{R_\circ[x]}(cbx+x^۲) \subseteq Nil(R_\circ[x])$. فرض می‌کنیم

$$g = \sum_{i=s}^{n} c_i x^i \in ann_{R_\circ[x]}(cbx+x^۲)\cap ann_{R_\circ[x]}(ax)$$

و $c_s \neq \circ$. پس برای هر $s \leq i \leq n$، $c_i \in Nil(R)$. بنابراین $g\circ ax = \circ$ یا $ax \circ g = \circ$. اگر $g\circ ax = \circ$، آن‌گاه $ac_s = \circ$، که یک تناقض است. اگر $ax\circ g = \circ$، آن‌گاه $c_s a^s = \circ$. چون $a^s \neq \circ$، پس $۱ \leq t \leq s-۱$ وجود دارد به‌طوری‌که $c_s a^t \neq \circ$ اما $c_s a^{t+۱} = \circ$. از این‌رو داریم $c_s a^t \in ann_R(a)\cap Nil(R)$، که یک تناقض است. بنابراین $d([cbx+x^۲],[ax]) \geq ۳$، و در نتیجه $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۳$.

حالت ۲: فرض می‌کنیم $a \in Nil(R)$، $b \notin Nil(R)$ و $ab \neq \circ$. بنابراین عدد صحیح مثبت k وجود دارد به‌طوری‌که $a^k = \circ$ اما $a^{k-۱} \neq \circ$. لذا $a^{k-۱}x + x^k, bx \in Z(R_\circ[x])$. چون $ax \in ann_{R_\circ[x]}(a^{k-۱}x+x^k) \setminus ann_{R_\circ[x]}(bx)$، پس $[bx] \neq [a^{k-۱}x+x^k]$. به‌علاوه، داریم $bx\circ(a^{k-۱}x+x^k) \neq \circ \neq (a^{k-۱}x+x^k)\circ bx$. فرض کنیم $g \in ann_{R_\circ[x]}(a^{k-۱}x+x^k)\cap ann_{R_\circ[x]}(bx)$. بنابراین $g = \sum_{i=s}^{n} c_i x^i$ پوچتوان است، زیرا

$$ann_{R_\circ[x]}(a^{k-۱}x+x^k) = \ell.ann_{R_\circ[x]}(a^{k-۱}x+x^k) \subseteq Nil(R_\circ[x]).$$

از این‌که $g\circ(a^{k-۱}x+x^k) = \circ$، نتیجه می‌شود $a^{k-۱}c_s = \circ$. از طرفی، اگر $g\circ bx = \circ$، آن‌گاه $bc_s = \circ$. از این‌رو داریم $\circ \neq c_s \in ann_R(\{a^{k-۱},b\})\cap Nil(R)$، که متناقض با لم ۷.۴.۳ می‌باشد. حال فرض می‌کنیم $bx\circ g = \circ$. لذا $c_s b^s = \circ$. چون $b \notin Nil(R)$، پس $b^s \neq \circ$. بنابراین داریم $\circ \neq c_s \in ann_R(\{a^{k-۱},b^s\})\cap Nil(R)$، که متناقض با لم ۷.۴.۳ می‌باشد. از این‌رو داریم $d([a^{k-۱}x+x^k],[bx]) \geq ۳$، و لذا نتیجه حاصل می‌شود.

حالت ۳: فرض می‌کنیم $a,b \in Nil(R)$ و $ab \neq \circ$. پس اعداد صحیح مثبت t,k وجود دارند به‌طوری‌که $a^k = b^t = \circ$ اما $a^{k-۱} \neq \circ \neq b^{t-۱}$. از این‌رو بنابه گزاره ۳.۱.۳، داریم $a^{k-۱}x+x^k, b^{t-۱}x+x^t \in Z(R_\circ[x])$. به‌علاوه،

$$(a^{k-۱}x+x^k)\circ(b^{t-۱}x+x^t) \neq \circ \neq (b^{t-۱}x+x^t)\circ(a^{k-۱}x+x^k).$$

همچنین، داریم $ann_{R_\circ[x]}(a^{k-۱}x+x^k) = \ell.ann_{R_\circ[x]}(a^{k-۱}x+x^k) \subseteq Nil(R_\circ[x])$ و $ann_{R_\circ[x]}(b^{t-۱}x+x^t) = \ell.ann_{R_\circ[x]}(b^{t-۱}x+x^t)$. اگر $ax \in ann_{R_\circ[x]}(b^{t-۱}x+x^t)$، آن‌گاه $ax\circ(b^{t-۱}x+x^t) = \circ$. لذا $a \in ann_R(\{a^{k-۱},b^{t-۱}\})\cap Nil(R)$، که متناقض با لم ۷.۴.۳

می‌باشد. بنابراین $ax \in ann_{R_\circ[x]}(a^{k-1}x + x^k)$ اما $ax \notin ann_{R_\circ[x]}(b^{t-1}x + x^t)$. از این‌رو $[a^{k-1}x + x^k] \neq [b^{t-1}x + x^t]$. فرض می‌کنیم

$$g = \sum_{i=s}^{n} c_i x^i \in ann_{R_\circ[x]}(a^{k-1}x + x^k) \cap ann_{R_\circ[x]}(b^{t-1}x + x^t).$$

از این‌رو داریم $g \circ (b^{t-1}x + x^t) = \circ = g \circ (a^{k-1}x + x^k)$. لذا

$$\circ \neq c_s \in ann_R\big(\{a^{k-1}, b^{t-1}\}\big) \cap Nil(R),$$

که متناقض با لم ۷.۴.۳ است. بنابراین $d\big([a^{k-1}x + x^k], [b^{t-1}x + x^t]\big) \geq ۳$.

بالعکس، فرض می‌کنیم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۳$. از این‌رو داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) = ۳$، زیرا $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \leq \operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) \leq ۳$. □

قضیه ۹.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و غیرکاهشی باشد و $Z(R) \neq \circ$. در این‌صورت، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۲$ اگر و تنها اگر برای هر $a, b \in Z(R)$، داشته باشیم $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) \neq \{\circ\}$ و یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) $|\Gamma_E(R)| \geq ۳$.

(۲) برای هر $c \in R$، $Z(R) \neq ann_R(c)$.

(۳) $Nil(R)^۲ \neq \circ$.

(۴) عنصر $\circ \neq c \in Z(R) \setminus Nil(R)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $ann_R(c) \neq Nil(R)$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۲$. از این‌رو بنابه قضیه ۸.۴.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) = ۲$، زیرا $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) \in \{۲,۳\}$. از این‌رو بنابه قضیه ۷.۱.۳، برای هر $a, b \in Z(R)$، $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) \neq \{\circ\}$. چون $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۲$، پس بنابه قضیه ۵.۴.۳، نتیجه حاصل می‌شود.

بالعکس، چون برای هر $a, b \in Z(R)$، داریم $ann_R(\{a,b\}) \cap Nil(R) \neq \{\circ\}$، پس بنابه قضیه ۷.۱.۳، $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[x])) = ۲$. بنابراین $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \in \{۱,۲\}$، زیرا داریم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \leq \operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[x]))$. از طرفی، اگر یکی از شرایط (۱) – (۴) برقرار نباشد، آن‌گاه بنابه قضیه ۵.۴.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \neq ۱$. بنابراین $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۲$. □

در ادامه، به بررسی قطر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده‌ی شبه‌حلقه‌ی $R_\circ[[x]]$ روی حلقه‌ی جابه‌جایی R می‌پردازیم.

گزاره ۱۰.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای کاهشی باشد. در این‌صورت،

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۱$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]])) = ۱$.

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]])) = ۲$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]])) = ۲$.

(۳) $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))=3$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]]))=3$.

برهان. بنابه لم ۱.۳.۳، نتیجه حاصل می‌شود. □

نتیجه ۱۱.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی باشد. در این‌صورت، $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[[x]]))=3$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]]))=3$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[[x]]))=3$. از این‌رو بنابه گزاره ۲۳.۳.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]]))=3$. از این‌رو بنابه قضیه ۸.۴.۱، حالت‌های زیر را داریم:

حالت ۱: R دارای خاصیت (A) می‌باشد و $Z(R)$ ایده‌آلی از R است اما ایده‌آل‌های شمارا تولید شده I و J وجود دارند به‌طوری‌که دارای پوچساز ناصفر می‌باشند ولی $I+J$ پوچساز ناصفر ندارد. چون $Z(R)$ ایده‌آل است، پس R بیشتر از دو ایده‌آل اول مینیمال دارد. از این‌رو بنابه قضیه ۱۰.۵.۱، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))=3$.

حالت ۲: $Z(R)$ ایده‌آلی از R است و هر ایده‌آل مشمول در $Z(R)$ که توسط دو عنصر تولید شده باشد، دارای پوچساز ناصفر می‌باشد ولی R دارای خاصیت (A) نمی‌باشد. بنابراین R بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال دارد. به‌علاوه، چون R دارای خاصیت (A) نمی‌باشد، پس $Z(R)\supseteq K=\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ وجود دارد به‌طوری‌که $ann_R(K)=\circ$. بنابراین $n\geq 3$. لذا به آسانی می‌توان نشان داد که ایده‌آل‌های متناهیاً تولید شده I و J وجود دارند به‌طوری‌که دارای پوچساز ناصفر هستند اما $I+J$ پوچساز ناصفر ندارد. پس بنابه قضیه ۱۰.۵.۱، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))=3$.

حالت ۳: R بیش از دو ایده‌آل اول مینیمال دارد و یک جفت از عناصر مقسوم‌علیه صفر a,b وجود دارند به‌طوری‌که $\langle a\rangle+\langle b\rangle=\langle a,b\rangle$ پوچساز ناصفر ندارد. لذا بنابه قضیه ۱۰.۵.۱، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[[x]]))=3$.

از این رو بنابه گزاره ۱۰.۴.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]]))=3$.

بالعکس، واضح است. □

نتیجه ۱۲.۴.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی باشد. اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x]))=3$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]]))=3$.

برهان. چون $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x]))=3$، پس بنابه نتیجه ۳.۴.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[x]))=3$. از این‌رو بنابه گزاره ۹.۱.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x]))=3$. لذا طبق قضیه ۸.۴.۱، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]]))=3$. بنابه گزاره ۲۳.۳.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R_\circ[[x]]))=3$. بنابراین طبق نتیجه ۱۱.۴.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]]))=3$. □

گزاره ۱۳.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و کاهشی باشد. در این‌صورت، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R))\leq\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x]))\leq\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]]))$.

برهان. به‌وضوح، اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 0$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x]))$. بنابه قضیه ۹.۵.۱ و گزاره ۲.۴.۳، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 1$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 1$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = 1$. بنابراین اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 2$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \geq 2$. به‌علاوه، اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = 3$، آن‌گاه بنابه قضیه ۱۱.۵.۱، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R[x])) = 3$. از این‌رو بنابه گزاره ۲.۴.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = 3$.

به‌وضوح، اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = 1$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]])) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x]))$. حال فرض کنیم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = 2$. بنابراین $f, g \in Z(R_\circ[x])$ وجود دارند به‌طوری‌که $d([f]_{R_\circ[x]}, [g]_{R_\circ[x]}) = 2$. به فرض خلف، فرض کنیم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]])) = 1$. بنابراین $f \circ g = 0$ یا $[f]_{R_\circ[[x]]} = [g]_{R_\circ[[x]]}$، (و لذا $[f]_{R_\circ[x]} = R_\circ[x] \cap [f]_{R_\circ[[x]]} = R_\circ[x] \cap [g]_{R_\circ[[x]]} = [g]_{R_\circ[x]}$)، که یک تناقض است. بنابراین طبق نتیجه ۱۲.۴.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]]))$. □

لم ۱۴.۴.۳. [۳۴، نتیجه ۱] فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری باشد. در این‌صورت، $Nil(R[[x]]) = Nil(R)[[x]]$.

قضیه ۱۵.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و غیرکاهشی باشد. در این‌صورت،

(۱) اگر R حلقه‌ای نوتری باشد و $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = 1$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]])) = 1$.

(۲) اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]])) = 1$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = 1$.

برهان. (۱) فرض می‌کنیم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = 1$. از این‌رو بنابه قضیه ۵.۴.۳، $|\Gamma_E(R)| \leq 2$، $Nil(R)^2 = 0$، برای برخی $a \in R$، $Z(R) = ann_R(a)$ و برای هر $c \in Z(R) \setminus Nil(R)$، $ann_R(c) = Nil(R)$. از طرفی، با توجه به برهان قضیه ۵.۴.۳، برای هر $c \in Nil(R)$، داریم $ann_R(c) = Z(R)$. فرض می‌کنیم $c \in Nil(R)$ و $g = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j \in Z(R_\circ[[x]])$. چون $Nil(R)^2 = 0$، پس بنابه لم ۸.۳.۳، داریم $cx \circ g = 0$. بنابراین $ann_{R_\circ[[x]]}(cx) = Z(R_\circ[[x]])$. به‌وضوح، $r.ann_{R_\circ[[x]]}(x^2) = 0$. از طرفی، بنابه لم ۱۴.۴.۳ و گزاره ۱۵.۳.۳، داریم $\ell.ann_{R_\circ[[x]]}(x^2) \subseteq Nil(R)_\circ[[x]]$. بنابراین $ann_{R_\circ[[x]]}(x^2) = \ell.ann_{R_\circ[[x]]}(x^2) = Nil(R_\circ[[x]])$، زیرا $Nil(R)^2 = 0$ و $Nil(R_\circ[[x]]) = Nil(R)_\circ[[x]]$. به‌علاوه، داریم $[cx] \neq [x^2]$، زیرا $x^2 \in ann_{R_\circ[[x]]}(cx) \setminus ann_{R_\circ[[x]]}(x^2)$. حال فرض می‌کنیم f عنصری ناصفر از $Z(R_\circ[[x]])$ باشد. لذا می‌توان f را به فرم $f = f_1 + f_2 + f_3$ نوشت به‌طوری‌که $C^*_{f_1} \subseteq Nil(R)$، $C^*_{f_2} \subseteq Z(R) \setminus Nil(R)$ و $C^*_{f_3} \subseteq R \setminus Z(R)$. فرض می‌کنیم $f = f_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ و $g = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j \in Z(R_\circ[[x]])$. چون $C^*_f \subseteq Nil(R)$، پس برای هر $a_i \in C^*_f$، $ann_R(a_i) = Z(R)$. بنابراین داریم $f \circ g = 0$، زیرا $Nil(R)^2 = 0$ و بنابه لم ۸.۳.۳، $b_1 \in Z(R)$. از این‌رو داریم $ann_{R_\circ[[x]]}(f) = Z(R_\circ[[x]])$، و در نتیجه $[f] = [cx]$.

حال فرض می‌کنیم $f = f_2 = \sum_{i=q}^{\infty} a_i x^i$ و $a_q \neq 0$. چون $C^*_f \subseteq Z(R) \setminus Nil(R)$، پس برای هر $a_i \in C^*_f$، داریم $ann_R(a_i) = Nil(R)$. لذا برای هر $g \in Nil(R)_\circ[[x]]$، $f \circ g = 0$ و

$g\circ f=\circ$. فرض می‌کنیم $g=\sum_{j=1}^{\infty}b_jx^j\in r.ann_{R_\circ[[x]]}(f)$. بنابراین $f\circ g=\sum_{j=1}^{\infty}b_jf^j=\circ$. فرض می‌کنیم b_t اولین ضریب ناصفر g باشد. از این‌رو داریم $b_t\in ann_R(a_q^t)=Nil(R)$، زیرا $b_ta_q^t=\circ$ و $a_q^t\notin Nil(R)$. بنابراین $b_tf=\circ$، و در نتیجه $f\circ g=\sum_{j=t+1}^{\infty}b_jf^j=\circ$. با تکرار این استدلال، می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $b_j\in C_g^*$، $b_j\in Nil(R)$. لذا $g\in Nil(R)_\circ[[x]]$، و از این‌رو داریم $r.ann_{R_\circ[[x]]}(f)=Nil(R)_\circ[[x]]$.

فرض می‌کنیم $g=\sum_{j=t}^{\infty}b_jx^j\in \ell.ann_{R_\circ[[x]]}(f)$ که $b_t\neq\circ$. پس

$$g\circ f=\sum_{i=q}^{\infty}a_ig^i=\circ,$$

و در نتیجه $a_qb_t^q=\circ$. بنابراین $b_t^q\in ann_R(a_q)=Nil(R)$ و از این‌رو $b_t\in Nil(R)$. لذا برای هر $a_i\in C_f^*$، داریم $b_ta_i=\circ$. بنابراین داریم $g\circ f=\sum_{i=q}^{\infty}a_ig_1^i=\circ$ به‌طوری‌که $g_1=\sum_{j=t+1}^{\infty}b_jx^j$. با ادامه این روند، می‌توان نشان داد که برای هر $b_j\in C_g^*$، $b_j\in Nil(R)$. لذا $\ell.ann_{R_\circ[[x]]}(f)\subseteq Nil(R)_\circ[[x]]$. از این‌رو داریم $ann_{R_\circ[[x]]}(f)=Nil(R)_\circ[[x]]$. بنابراین $[f]=[f_2]=[x^2]$.

اگر $f=f_3$ یا $f=f_1+f_2(f_1\neq\circ\neq f_2)$ یا $f=f_1+f_3(f_1\neq\circ\neq f_3)$ یا $f=f_2+f_3(f_2\neq\circ\neq f_3)$ یا $f=f_1+f_2+f_3$ (هر f_i ناصفر است)، آن‌گاه با استفاده از لم ۱۴.۴.۳ و گزاره ۱۵.۳.۳، و استدلالی مشابه برهان قضیه ۵.۴.۳، می‌توان نشان داد که $[f]=[x^2]=Nil(R)_\circ[[x]]$. بنابراین $|\Gamma_E(R_\circ[[x]])|=2$، و در نتیجه $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]]))=1$.

(۲) واضح است. □

لم ۱۶.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و غیرکاهشی باشد. در این‌صورت،

(۱) اگر R حلقه‌ای نوتری باشد و $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x]))=3$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[[x]]))=3$.

(۲) اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[[x]]))=3$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[x]))=3$.

برهان. بنابه نتیجه‌های ۸.۱.۳ و ۲۲.۳.۳، نتیجه حاصل می‌شود. □

قضیه ۱۷.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و غیرکاهشی باشد. در این‌صورت،

(۱) اگر حلقه‌ی R نوتری باشد و $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[[x]]))=3$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]]))=3$.

(۲) اگر $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]]))=3$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R_\circ[[x]]))=3$.

برهان. (۱) با استفاده از لم ۱۴.۴.۳، گزاره ۱۵.۳.۳ و نتیجه ۲۲.۳.۳، و استدلالی مشابه برهان قضیه ۸.۴.۳، نتیجه حاصل می‌شود.

(۲) واضح است. □

نتیجه ۱۸.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و غیرکاهشی باشد. در این‌صورت،

(۱) اگر حلقه‌ی R نوتری باشد و $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x]))=3$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]]))=3$.

(۲) اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]])) = ۳$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۳$.

برهان. بنابه قضیه‌های ۸.۴.۳، ۱۷.۴.۳ و لم ۱۶.۴.۳، نتیجه حاصل می‌شود. □

گزاره ۱۹.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و غیرکاهشی باشد. در این‌صورت،

(۱) اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۲$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]])) = ۲$.

(۲) اگر حلقه‌ی R نوتری باشد و $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]])) = ۲$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۲$.

برهان. بنابه قضیه ۱۵.۴.۳ و نتیجه ۱۸.۴.۳، نتیجه حاصل می‌شود. □

گزاره ۲۰.۴.۳. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی، غیرکاهشی و نوتری باشد. اگر برای هر $a \in R$، داشته باشیم $Z(R) \neq ann_R(a)$، آن‌گاه

$$\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]])).$$

برهان. به‌وضوح، اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \in \{۰, ۱\}$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x]))$. بنابراین فرض می‌کنیم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۲$. از این‌رو $|\Gamma_E(R)| \geq ۳$، و در نتیجه طبق قضیه ۵.۴.۳، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \geq ۲$.

حال فرض می‌کنیم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۳$. لذا بنابه قضیه ۵.۴.۳، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \geq ۲$. حال نشان می‌دهیم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \neq ۲$. به فرض خلف، اگر $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) = ۲$، آن‌گاه طبق قضیه ۹.۴.۳، $Z(R)$ ایده‌آلی از R است و هر دو عنصر ناصفر از $Z(R)$ پوچ‌ساز پوچ‌توان ناصفر دارند و برای هر $a \in Z(R)$، داریم $Z(R) \neq ann_R(a)$. لذا بنابه قضیه ۸.۵.۱، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) = ۲$، که یک تناقض است. بنابراین $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R)) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x]))$.

به‌علاوه، بنابه نتیجه ۱۸.۴.۳ و گزاره ۱۹.۴.۳، $\operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[x])) \leq \operatorname{diam}(\Gamma_E(R_\circ[[x]]))$.
□

۵.۳ پیشنهادات برای کارهای آتی

(۱) بررسی قطر گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده شبه‌حلقه‌های $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ و $R_\circ[[x;\alpha]]$.

(۲) بررسی شبه‌ـرادیکال شبه‌حلقه‌های $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ و $R_\circ[[x;\alpha]]$.

(۳) بررسی ساختار عناصر شبه‌ـمنظم شبه‌حلقه‌های $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ و $R_\circ[[x;\alpha]]$.

مراجع

[1] S. Akbari, H. R. Maimani and S. Yassemi, When a zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph, *J. Algebra*, **270** (2003), 169–180.

[2] S. Akbari and A. Mohamadian, On the zero-divisor graph of a commutative rings, *J. Algebra*, **274**(2) (2004), 847–855.

[3] S. Akbari and A. Mohamadian, Zero-divisor graphs of non-commutative rings, *J. Algebra*, **296**(2) (2006), 462–479.

[4] A. Alhevaz, E. Hashemi and F. Shokuhifar, On zero-divisor of near-rings of polynomials, *Quaest. Math.*, **42**(3) (2019), 363–372.

[5] A. Alhevaz and D. Kiani, McCoy property of skew Laurent polynomials and power series rings, *J. Algebra Appl.*, **13** (2014), 23 pp.

[6] A. Alhevaz, A. Moussavi and M. Habibi, On rings having McCoy-Like conditions, *Comm. Algebra*, **40** (2012), 1195–1221.

[7] B. Allen, E. Martin, E. New and D. Skabelund, Diameter, girth and cut vertices of the graph of equivalence classes of zero-divisors, *Involve*, **5**(1) (2012), 51-60.

[8] D. F. Anderson and A. Badawi, Von Neumann regular and related elements in commutative rings, *Algebra Colloq.*, **19** (2012), 1017–1040.

[9] D. D. Anderson and V. Camillo, Armendarize rings and Guassian rings, *Comm. Algebra*, **26** (1998) 2265–2272.

[10] D. F. Anderson and J. D. LaGrange, Commutative Boolean monoids, reduced rings, and the compressed zero-divisor graph, *J. Pure Appl. Algebra.*, **216** (2012), 1626–1636.

[11] D. F. Anderson and P. S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra*, **217** (1999), 437–447.

[12] D. F. Anderson and S. B. Mulay, On the diameter and girth of a zero-divisor graph, *J. Pure Appl. Algebra*, **210**(2) (2007), 543–550.

[13] D. D. Anderson, M. Naseer, Beck's coloring of a commutative ring, *J. Algebra*, **159**(2) (1993), 500–514.

[14] R. Antoine, Nilpotent elements and Armendariz rings, *J. Algebra*, **319** (2008) 3128–3140.

[15] E. P. Armendariz, A note on Baer and p.p.-rings, *J. Algebra*, **18** (1974), 740–473 .

[16] M. Axtell, J. Coykendall and J. Stickles, Zero-divisor graph of polynomials and power series over commutative rings, *J. Algebra*, **33** (2005), 2043–2050.

[17] A. Badawi, On abelian π-regular rings, *Comm. Algebra*, **25**(4) (1997), 1009–1021.

[18] I. Beck, Coloring of a commutative ring, *J. Algebra*, **159** (1988), 500–514.

[19] M. Behboodi, Zero divisor graphs for modules over commutative rings, *J. Commut. Algebra*, **4**(2) (2012), 175–197.

[20] J. C. Beidleman, A note on regular near-rings, *J. Indian Math. Soc.*, **33** (1969), 207–210.

[21] G. Betsch, *Struktursatze für Fastringe*, Diss. Univ. Tübingen, (1963), 62 pp.

[22] G. F. Birkenmeier and F. K. Huang, Annihilator conditions on polynomials, *Comm. Algebra*, **29** (2001), 2097–2112.

[23] V. Camillo and P. P. Nielsen, McCoy rings and zero-divisors, *J. Pure. Appl. Algebra*, **212**(3) (2008), 599–615.

[24] G. A. Cannon, K. M. Neuerburg and S. P. Redmond, Zero-divisor graphs of near-rings and semigroups, *Nearrings and nearfields* pp. 189–220, Springer, Dordrecht, 2005.

[25] H. Cartan, *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*, Éditions Scientifiques Hermann, Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-Palo Alto, Calif.-London, 1963.

[26] P. M. Cohn, Reversible rings, *Bull. London Math. Soc.*, **31**(6) (1999), 641–648.

[27] M. Contessa, On certain classes of MP rings, *Comm. Algebra*, **12** (1984), 1447–1469.

[28] F. DeMeyer and L. DeMeyer, Zero divisor graph of semigroups, *J. Algebra*, **283** (2005), 190–198.

[29] F. R. DeMeyer, T. McKenzie and K. Schneider, The zero-divisor graph of a commutative semigroup, *Semigroup Forum*, **65**(2) (2002), 206–214.

[30] F. DeMeyer and K. Schneider, Automorphisms and zero-divisor graphs of commutative rings, *Int. J. Commut. Rings*, **1**(3) (2002), 93–106.

[31] L. E. Dickson, Definition of a group and field by independent postulates, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **6** (1905), 198–204.

[32] L. E. Dickson, On finite algebras, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, (1905), 358–393.

[33] R. Gilmer, Zero divisors in commutative rings, *Am. Math, Monthly*, **93**(5) (1986), 382–387.

[34] D. E. Fields, Zero divisors and nilpotent elements in power series rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **27** (1971), 427–433.

[35] E. Hashemi, Compatible ideals and radicals of Ore extensions, *New-York J. Math*, **12** (2006), 349–356.

[36] E. Hashemi, On annihilator ideals of a nearring of skew polynomials over a ring, *J. Korean Math. Soc.*, **44**(6) (2007), 1267–1279.

[37] E. Hashemi, On nilpotent elements in a nearring of polynomials, *Math. Commun.*, **17** (2012), 257–264.

[38] E. Hashemi, Rickart-type annihilator conditions on formal power series, *Turk. J. Math.*, **32** (2008), 363–372.

[39] E. Hashemi, M. Abdi and A. Alhevaz, On the diameter of the compressed zero-divisor graph, *Comm. Algebra*, **45** (2017), 4855–4864.

[40] E. Hashemi, M. Abdi and A. Alhevaz, On the diameter of the zero-divisor and the compressed zero-divisor graphs of skew Laurent polynomial rings, *J. Algebra Appl.*, **18**(7) (2019), Article ID: 1950126, 18 pp.

[41] E. Hashemi and R. Amirjan, Zero-divisor graphs of Ore extensions over reversible rings, *Canada. Math. Bull.*, **59**(4) (2016), 794–805.

[42] E. Hashemi, R. Amirjan, and A. Alhevaz, On zero-divisor graphs of skew polynomial rings over non-commutative rings, *J. Algebra Appl.*, **16**(3) (2017), Article Id: 1750056, 14 pp.

[43] E. Hashemi and A. A. Estaji, On polynomials over Abelian rings, *Vietnam J. Math.*, **40** (2012), 47–55.

[44] E. Hashemi, A. A. Estaji and M. Ziembowski, Answers to some questions concerning rings with property (A), *Proc. Edinb. Math. Soc.*, **60** (2017), 651–664.

[45] E. Hashemi, M. Hamidizadeh, and A. Alhevaz, Some types of ring elements in Ore extensions over noncommutative rings, *J. Algebra Appl.*, **16**(11) (2017), Article ID: 1750201, 14 pp.

[46] E. Hashemi and A. Moussavi, Polynomial extensions of quasi-Baer rings, *Acta Math. Hungar.*, **107**(3) (2005), 207–224.

[47] E. Hashemi and F. Shokuhifar, On some type elements of zero-symmetric near-ring of polynomials, *J. Korean Math. Soc.*, **56**(1) (2019), 183–195.

[48] E. Hashemi, F. Shokuhifar and A. Alhevaz, On quasi-radical of near-ring of polynomials, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **56**(2) (2019), 252–259.

[49] E. Hashemi, M. Yazdanfar, and A. Alhevaz, Directed zero-divisor graph and skew power series rings, *Trans. Comb.*, **7**(4) (2018), 43–57.

[50] H. E. Heatherly and J. J. Malon, Some near-ring embeddings, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, **20** (1969), 81–85.

[51] H. Heatherly and H. Oliwer, Near integral domains, *Mh. Math.*, **78** (1974), 215–222.

[52] M. Henriksen and M. Jerison, The space of minimal prime ideal of commutative ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **115** (1965), 110–130.

[53] S. Hizem, A note on nil power serieswise Armendariz rings, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **59** (2010), 87–99.

[54] C. Y. Hong, N. K. Kim and T. K. Kwak, Ore extensions of Baer and p.p.-rings, *J. Pure Appl. Algebra*, **151**(3) (2000), 215–226.

[55] C. Y. Hong, N. K. Kim and Y. Lee and S. J. Ryu, Rings with property (A) and their extensions, *J. Algebra*, (2007), 612–628.

[56] J. A. Huckaba and J. M. Keller, Annihilation of ideals in commutative rings, *Pacific J. Math.*, **83** (1979), 375–379.

[57] C. Huh, H. K. Kim, N. K. Kim and Y. Lee, Basic examples and extensions of symmetric rings , *J. Algebra Appl.*, *202* (2005), 154–167.

[58] I. Kaplansky, *Commutative rings*, Revised edition. The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1974

[59] J. Krempa, Some examples of reduced rings, *Algebra Colloq.*, **3**(4) (1996), 289–300.

[60] N. K. Kim and Y. Lee, Extensions of reversible rings, *J. Algebra Appl.*, **185** (2003), 207–223.

[61] T. Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Springer, New York, 1991.

[62] J. Lambek, On the representation of modules by sheaves of factor modules, *Canad. Math. Bull.*, **14** (1971), 359–368.

[63] R. R. Laxton, A radical and its theory for distributively generated near-rings, *J. London Math. Soc.*, **38** (1963), 40–49.

[64] Z. Liu and R. Zhao, On weak Armendariz rings, *Comm. Algebra*, **34** (2006), 2607–2616.

[65] T. Lucas, The diameter of a zero divisor graph, *J. Algebra*, (2006), 649–661.

[66] Z. Liu and R. Zhao, On weak Armendariz rings, *Comm. Algebra* **34** (2006), 2607–2616.

[67] G. Marks, A taxonomy of 2-primal rings, *J. Algebra*, **266** (2003), 494–520.

[68] N. H. McCoy, Remarks on divisors of zero, *Amer. Math. Monthly*, **49** (1942), 286–295.

[69] S. B. Mulay, Cycles and symetries of zero divisors, *Comm. Algebra*, **30** (2002), 3533–3558.

[70] A. R. Nasr-Isfahani and A. Moussavi, A generalization of reduced rings, *J. Algebra Appl.*, **11**(4) (2012), Article ID: 1250070, 30 pp.

[71] W. K. Nicholson, Lifting idempotents and exchange rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **229** (1977), 269-278.

[72] P. P. Nielsen, Semi-commutativity and the McCoy condition, *J. Algebra*, **298**(1) (2006), 134–141.

[73] O. Ore, Linear equation in non-commutative fields, *Ann. of Math.*, **32**(3) (1931), 463–477.

[74] K. Paykan and A. Moussavi, Nilpotent elements and nil-Armendariz property of skew generalized power series rings, *Asian-Eur. J. Math.*, **10**(1) (2017), 28 pp.

[75] G. Pilz, *Near-rings*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1983.

[76] Y. Quentel, Sur la compacité du spectre minimal d'un anneau, *Bull. Soc. Math. France*, **99** (1971), 265–272.

[77] S. P. Redmond, Structure in the zero-divisor graph of a non-commutative ring, *Houston J. Math.*, **30**(2) (2004), 345–355.

[78] S. P. Redmond, The zero-divisor graph of a noncommutative ring, *Int. J. Commut. Rings*, **296** (2002), 462–479.

[79] S. Spiroff and C. Wickham, A zero divisor graph determined by equivalence classes of zero divisors, *Comm. Algebra*, **39** (2011), 2338–2348.

[80] O. Taussky-Todd, Rings with non-commutative addition, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **28** (1936), 245–246.

[81] H. Zassenhaus, Über endliche fastkörper, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **11**(1) (1935), 187–220.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آبلی .... Abelian
ایده‌آل اول مینیمال .... Minimal prime ideal
ایده‌آل موضعاً پوچ‌توان .... Locally nilpotent ideal

برگشت‌پذیر .... Reversible

پوچ‌ساز .... Annihilator

تک‌سریال .... Uniserial
تمیز .... Clean
توسیع بدیهی .... Trivial extension

حلقه‌ی آرمنداریز .... Armendariz ring
حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب .... Skew polynomial ring
حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق .... Derivation polynomial ring
حلقه‌ی αـ سازگار .... α-compatible ring
حلقه‌ی αـ صلب .... α-rigid ring
حلقه‌ی مک‌کوی .... McCoy ring

خاصیت (A) راست .... Right Property (A)
خودتوان .... Idempotent

ددکیندـ متناهی .... Dedekind-finite
دور .... Cycle

رادیکال اول .... Prime radical

شبه‌حلقه .... Near-ring
شبه‌حلقه‌ی ثابت .... Constant near-ring
شبه‌حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها .... Near-ring of polynomials
شبه‌حلقه‌ی صحیح .... Integral near-ring
شبه‌حلقه‌ی صفر ــ متقارن .... Zero-symmetric near-ring
شبه‌حلقه‌ی موضعی .... Local near-ring
شبه ــ رادیکال .... Quasi-radical
شبه‌میدان .... Near-field

عنصر توزیع‌پذیر .... Distributive element
عنصر منظم .... Regular element

فاصله .... Distance

قطر .... Diameter

کاهشی .... Reduced
کمر .... Girth

گراف کامل .... Complete graph
گراف مقسوم‌علیه صفر .... Zero-divisor graph
گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده .... Compressed zero-divisor graph
گراف همبند .... Connected graph

متقارن .... Symmetric
مجموعه‌ی ضربی بسته .... Multiplicatively closed set
مسیر .... Path
مقسوم‌علیه صفر .... Zero-divisor

نوتری .... Noetherian

نیم‌جابه‌جایی .... Semicommutative

یال .... Edge

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Abelian .... آبلی
Annihilator .... پوچ‌ساز
Armendariz ring .... حلقه‌ی آرمنداریز

Clean .... تمیز
α-compatible ring .... حلقه‌ی αـ سازگار
Complete graph .... گراف کامل
Compressed zero-divisor graph .... گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده
Connected graph .... گراف همبند
Constant near-ring .... شبه‌حلقه ثابت
Cycle .... دور

Dedekind-finite .... ددکیندـ متناهی
Diameter .... قطر
Distance .... فاصله
Distributive element .... عنصر توزیع‌پذیر
Derivation polynomial ring .... حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق

Edge .... یال

Girth .... کمر

Idempotent .... خودتوان
Integral near-ring .... شبه‌حلقه صحیح

ایده‌آل موضعاً پوچ‌توان .... Locally nilpotent ideal

شبه‌حلقه‌ی موضعی .... Local near-ring

حلقه‌ی مک‌کوی .... McCoy ring

ایده‌آل اول مینیمال .... Minimal prime ideal

مجموعه ضربی بسته .... Multiplicatively closed set

شبه‌میدان .... Near-field

شبه‌حلقه .... Near-ring

شبه‌حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها .... Near-ring of polynomials

نوتری .... Noetherian

مسیر .... Path

رادیکال اول .... Prime radical

شبه‌ـرادیکال .... Quasi-radical

کاهشی .... Reduced

عنصر منظم .... Regular element

برگشت‌پذیر .... Reversible

خاصیت (A) راست .... Right Property (A)

حلقه‌ی αـ صلب .... α-rigid ring

نیم‌جابه‌جایی .... Semicommutative

حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب .... Skew polynomial ring

متقارن .... Symmetric

توسیع بدیهی .... Trivial extension

تک‌سریال .... Uniserial

مقسوم‌علیه صفر .... Zero-divisor

گراف مقسوم‌علیه صفر .... Zero-divisor graph

شبه‌حلقه‌ی صفر_ متقارن .... Zero-symmetric near-ring

نمایه

Aabstract

As a generalization of rings, the theory of near-rings has attracted much attention from researchers in past decades. In this thesis, we are interested to study some properties of zero-symmetric near-ring of polynomials and zero-symmetric near-ring of power series. In fact, we want to investigate the structure of some type of elements such as invertible, idempotent, regular, nilpotent, π-regular, clean and zero-divisor elements of the near-ring $R_0[x]$. Then we determine the structure of these elements in the skew zero-symmetric near-ring of polynomials $R_0[x; \alpha, \delta]$ and the skew zero-symmetric near-ring of formal power series $R_0[[x; \alpha]]$.

We are also interested to study some radical-theoretical properties of the near-ring $R_0[x]$. In particular, we peruse the quasi-radical of $R_0[x]$ and determine the relationship between it and the intersection of all maximal left ideals of $R_0[x]$.

Moreover, we investigate the interplay between the algebraic properties of near-rings and graph-theoretical properties of the assigned (compressed) zero-divisor graph. In fact, we study the diameter of the zero-divisor graphs $\Gamma(R_0[x])$, $\Gamma(R_0[x; \alpha, \delta])$ and $\Gamma(R_0[[x; \alpha]])$, and the compressed zero-divisor graphs $\Gamma_E(R_0[x])$ and $\Gamma_E(R_0[[x]])$, and give a complete characterization for the possible diameters of these graphs.

Keywords: Near-ring; Unit element; Idempotent element; Regular element; Nilpotent element; π-regular element; Clean element; Zero-divisor graph; Diameter; Symmetric ring; Quasi-radical; Maximal left ideal.

Mathematics Subject Classification: Primary $16Y30$; Secondary $16U99$, $16U60$, $05C12$.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Algebra

On some properties of elements in zero-symmetric near-ring of polynomials over commutative rings

By: Fatemeh Shokuhifar

Supervisor:

Prof. Ebrahim Hashemi

Advisor:

Dr. Abdollah Alhevaz

February 2020